

УДК 539.3/.6

Г67

ББК 30.121

Г о р ш к о в А. Г., Т р о ш и н В. Н., Ш а л а ш и л и н В. И.  
Сопротивление материалов: Учеб. пос. 2-е изд., испр. — М.:  
ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 544 с. — ISBN 5-9221-0181-1.

Изложен курс «Сопротивление материалов», отвечающий программе Минобразования для подготовки специалистов в области техники и технологии. Много внимания уделяется технике решения задач, которая демонстрируется многочисленными примерами. Для контроля усвоения материала и выработки навыков решения задач даны контрольные вопросы и задачи, что делает книгу особенно полезной при самостоятельном изучении предмета. Книга может быть также полезна инженерам при проведении прочностных расчетов.

Первое издание выходило в 2000 г. в издательстве МАИ.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	6
<b>Г л а в а 1. Основные понятия, определения, допущения . . . . .</b>	<b>7</b>
1.1. Предмет и задачи курса . . . . .	7
1.2. Основные гипотезы и допущения . . . . .	10
1.3. Внешние нагрузки . . . . .	14
B.1. Контрольные вопросы . . . . .	16
<b>Г л а в а 2. Метод сечений, внутренние силы, напряжения . . . . .</b>	<b>18</b>
2.1. Метод сечений и внутренние силовые факторы . . . . .	18
2.2. Напряжения . . . . .	30
2.3. Связь напряжений с внутренними силовыми факторами . . . . .	33
2.4. Принцип Сен-Венана . . . . .	35
B.2. Контрольные вопросы . . . . .	38
<b>Г л а в а 3. Механические свойства материалов . . . . .</b>	<b>40</b>
3.1. Элементарные деформации . . . . .	40
3.2. Испытания на растяжение и сжатие . . . . .	43
3.3. Поперечная деформация. Коэффициент Пуассона . . . . .	53
3.4. Влияние условий при испытаниях на механические характеристики . . . . .	55
3.5. Испытания на сдвиг . . . . .	59
B.3. Контрольные вопросы . . . . .	62
<b>Г л а в а 4. Центральное растяжение–сжатие бруса . . . . .</b>	<b>64</b>
4.1. Статические дифференциальные и интегральные зависимости при центральном растяжении–сжатии . . . . .	64
4.2. Геометрические дифференциальные и интегральные зависимости при центральном растяжении–сжатии . . . . .	68
4.3. Физическая сторона задачи центрального растяжения–сжатия бруса . . . . .	72
4.4. Методика расчета напряженно-деформированного состояния при центральном растяжении–сжатии (статически определимые конструкции) . . . . .	74
4.5. Расчет простейших статически неопределеных конструкций . . . . .	85
4.6. Влияние нагрева на напряженно-деформированное состояние при центральном растяжении–сжатии . . . . .	89
4.7. Потенциальная энергия бруса при растяжении–сжатии . . . . .	98
4.8. Напряжения в непоперечных сечениях бруса при центральном растяжении–сжатии . . . . .	106
4.9. Расчет на прочность при центральном растяжении–сжатии . . . . .	108
B.4. Контрольные вопросы . . . . .	111
3.4. Задачи . . . . .	112
<b>Г л а в а 5. Двухосное растяжение–сжатие и чистый сдвиг . . . . .</b>	<b>115</b>
5.1. Напряженное состояние при двухосном растяжении–сжатии . . . . .	115
5.2. Чистый сдвиг . . . . .	117
5.3. Закон Гука при двухосном растяжении–сжатии. Связь между модулями упругости $E$ и $G$ и коэффициентом Пуассона $\mu$ . . . . .	119
B.5. Контрольные вопросы . . . . .	122
3.5. Задачи . . . . .	122
<b>Г л а в а 6. Кручение . . . . .</b>	<b>124</b>
6.1. Статические дифференциальные и интегральные соотношения при кручении . . . . .	125

6.2. Геометрические дифференциальные и интегральные соотношения . . . . .	127
6.3. Кручение бруса круглого и кольцевого сечений . . . . .	129
6.4. Кручение брусьев некругового поперечного сечения . . . . .	135
6.5. Кручение брусьев тонкостенного открытого сечения . . . . .	139
6.6. Кручение брусьев тонкостенного замкнутого сечения . . . . .	143
6.7. Потенциальная энергия деформации при кручении . . . . .	148
6.8. Примеры расчетов . . . . .	149
B.6. Контрольные вопросы . . . . .	160
3.6. Задачи . . . . .	161
<b>Г л а в а 7. Геометрические характеристики сечений . . . . .</b>	<b>163</b>
7.1. Статические моменты и центр тяжести сечения . . . . .	163
7.2. Моменты инерции . . . . .	168
7.3. Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей координат . . . . .	169
7.4. Изменение моментов инерции при повороте осей координат. Положение главных осей инерции . . . . .	173
B.7. Контрольные вопросы . . . . .	177
3.7. Задачи . . . . .	178
<b>Г л а в а 8. Прямой изгиб . . . . .</b>	<b>180</b>
8.1. Статические дифференциальные и интегральные соотношения при изгибе . . . . .	181
8.2. Геометрия деформаций и нормальные напряжения при чистом изгибе . . . . .	194
8.3. Напряжения при поперечном изгибе . . . . .	198
8.4. Касательные напряжения при изгибе в балках тонкостенного сечения. Центр изгиба . . . . .	203
8.5. Расчет на прочность при изгибе . . . . .	210
8.6. Дифференциальное уравнение упругой линии балки . . . . .	217
8.7. Потенциальная энергия изгиба балки . . . . .	228
8.8. Интеграл Мора для определения перемещений при изгибе . . . . .	231
B.8. Контрольные вопросы . . . . .	246
3.8. Задачи . . . . .	248
<b>Г л а в а 9. Общий случай деформации бруса . . . . .</b>	<b>251</b>
9.1. Нормальные напряжения в общем случае деформации бруса . . . . .	252
9.2. Касательные напряжения в общем случае деформации бруса . . . . .	259
9.3. Деформации в общем случае нагружения бруса . . . . .	264
9.4. Плоские статически определимые рамы . . . . .	268
9.5. Пространственные статически определимые рамы . . . . .	276
9.6. Витые пружины . . . . .	279
9.7. Теоремы взаимности работ и перемещений. Теорема Кастилиано . . . . .	282
B.9. Контрольные вопросы . . . . .	286
3.9. Задачи . . . . .	287
<b>Г л а в а 10. Статически неопределенные системы. Метод сил . . . . .</b>	<b>290</b>
10.1. Степени свободы, связи, степень статической неопределенности . . . . .	290
10.2. Основная и эквивалентная системы. Канонические уравнения метода сил . . . . .	297
10.3. Учет симметрии при раскрытии статической неопределенности методом сил . . . . .	308
10.4. Пространственные и плоскопространственные системы . . . . .	318

---

10.5. Комбинированные или смешанные системы . . . . .	322
В.10. Контрольные вопросы . . . . .	325
3.10. Задачи . . . . .	327
<b>Г л а в а 11. Расчет на прочность при сложном напряженном состоянии . . . . .</b>	<b>329</b>
11.1. Анализ напряженного состояния в точке . . . . .	329
11.2. Круговая диаграмма Мора . . . . .	336
11.3. Закон Гука и потенциальная энергия деформации при сложном напряженном состоянии . . . . .	342
11.4. Гипотезы прочности . . . . .	346
11.5. О прочности и разрушении . . . . .	361
В.11. Контрольные вопросы . . . . .	370
3.11. Задачи . . . . .	371
<b>Г л а в а 12. Устойчивость сжатых стержней . . . . .</b>	<b>373</b>
12.1. Общее понятие об устойчивости состояния равновесия . . . . .	373
12.2. Метод Эйлера . . . . .	375
12.3. Энергетический метод . . . . .	384
12.4. Расчеты на устойчивость за пределами пропорциональности . . . . .	393
12.5. Об устойчивости деформированного состояния . . . . .	402
12.6. Продольный изгиб реальных (неидеальных) стержней . . . . .	406
12.7. Продольно-поперечный изгиб . . . . .	409
В.12. Контрольные вопросы . . . . .	421
3.12. Задачи . . . . .	423
<b>Г л а в а 13. Расчет стержневых систем при упругопластических деформациях . . . . .</b>	<b>425</b>
13.1. Схематизация диаграмм напряжений . . . . .	425
13.2. Расчет предельных нагрузок для статически определимых систем . . . . .	427
13.3. Расчет предельных нагрузок для статически неопределеных систем . . . . .	434
В.13. Контрольные вопросы . . . . .	443
3.13. Задачи . . . . .	443
<b>Г л а в а 14. Динамическое нагружение . . . . .</b>	<b>445</b>
14.1. Квазистатическое нагружение . . . . .	445
14.2. Ударное нагружение. Техническая теория удара . . . . .	449
14.3. Удар горизонтально движущейся массой . . . . .	454
14.4. Удар вертикально движущейся массой . . . . .	458
В.14. Контрольные вопросы . . . . .	461
3.14. Задачи . . . . .	462
<b>Г л а в а 15. Прочность при циклически изменяющихся во времени напряжениях . . . . .</b>	<b>463</b>
15.1. Усталость материала . . . . .	463
15.2. Цикл напряжений. Методика экспериментального определения предела выносливости . . . . .	466
15.3. Диаграмма предельных амплитуд и ее схематизация . . . . .	471
15.4. Влияние конструктивных факторов на сопротивление усталости . . . . .	474
В.15. Контрольные вопросы . . . . .	485
Ответы на вопросы и задачи . . . . .	487
Приложения . . . . .	529
Список литературы . . . . .	542

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

Работая над этой книгой, мы ставили своей главной целью создание такого учебника, который позволил бы читателю не только изучить основные идеи и методы классической инженерной дисциплины «Сопротивление материалов», но и получить определенный навык решения задач, связанных с расчетом конструкций на прочность, жесткость и устойчивость. Поэтому в книге много внимания уделено технике решения таких задач.

Мы стремились учесть, что «Сопротивление материалов» — это лишь одна из дисциплин, формирующих инженер-механика. Поэтому мы постарались воспользоваться теми возможностями, которые «Сопротивление материалов» представляет для демонстрации прикладного смысла ряда математических понятий и методов.

Книга разбита на разделы трех уровней (главы, параграфы, пункты). Разделы третьего уровня (пункты) пронумерованы тремя цифрами. Каждый из них содержит такой объем информации, деление которого не имеет смысла. Пункты, помеченные буквой «К», содержат комментарии, в основном исторического характера. Авторы глубоко убеждены в необходимости хотя бы упоминания имен тех ученых, труды которых легли в основу этой замечательной инженерной дисциплины.

Работа между авторами распределилась следующим образом. Концепция учебника разработана А. Г. Горшковым и В. И. Шалапиным, основной текст написан В. И. Шалапиным и обсужден с В. Н. Трошиным. В. Н. Трошин подготовил контрольные вопросы, задачи и ответы к ним. Общая редакция проведена А. Г. Горшковым.

*Авторы*

## Г Л А В А 1

# ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ДОПУЩЕНИЯ

### 1.1. Предмет и задачи курса

**1.1.1.** Прежде чем начать изложение, непосредственно касающееся избранного нами предмета, необходимо определить этот предмет и ввести хотя бы начальную терминологию. Однако мы, как и все авторы подобных курсов, находимся в затруднительном положении, поскольку многообразие и широта изучаемого предмета не позволяют на этом этапе дать краткие и одновременно точные определения самого предмета и исходных терминов. Эта проблема с трудом решается даже в математических курсах аксиоматического характера. Мы же вынуждены опираться на жизненный опыт читателя, используя имеющиеся у него на основе этого опыта представления о тех вопросах, которые будут изучаться в дальнейшем. Поэтому на первом этапе некоторая расплывчатость определений неизбежна. В то же время цель обучения — сформировать у учащегося определенную систему понятий. А понятие всегда глубже его определения хотя бы потому, что оно включает знание исключений из этого определения. Однако даже не очень точное определение хорошо тем, что оно помогает выработать понятие, которое формируется и уточняется в процессе изучения всего курса. Поэтому мы просим читателя отнести к используемым ниже определениям, особенно в этой главе, с учетом только что сказанного.

**1.1.2.** Создавая самые различные предметы, машины, сооружения, человек прежде всего заинтересован в их безотказной работе. Одной из самых распространенных причин отказов является разрушение конструкций или их элементов либо недопустимая их деформация.

Под *разрушением* здесь понимается непредусмотренное разделение тела (конструкции или ее элементов) на части.

**Деформация** — изменение размеров или формы тела.

Чтобы быть работоспособной, всякая конструкция должна быть прочной и жесткой.

**Прочность** — это свойство конструкции выдерживать внешние воздействия без разрушения и развития чрезмерных деформаций.

**Жесткость** — способность конструкции сопротивляться деформированию, т.е. сопротивляться внешним воздействиям без значительных деформаций.

Внешние воздействия могут быть самыми разнообразными. Это и силовые воздействия (нагрузки), и нагрев или охлаждение, и различного рода облучения, а также и другие воздействия внешней среды того или иного физического или химического характера. Наиболее распространенными и хорошо изученными являются силовые и температурные воздействия на конструкцию.

Часто причиной разрушения или недопустимых деформаций является потеря устойчивости равновесного состояния конструкции или ее элемента. Под *устойчивостью* в механике понимается свойство тела, находящегося в состоянии равновесия (или движения), определенным образом реагировать на возмущающие воздействия. Состояние равновесия называется устойчивым, если малые возмущения вызывают малые отклонения от этого состояния.

Прочность, жесткость и устойчивость конструкции должны быть обеспечены не в ущерб работоспособности и стоимости конструкций. Так, самолеты и другие летательные аппараты должны быть возможно более легкими, а используемые в них материалы и технология производства — обеспечивать разумную их стоимость. Природа, решая этот вопрос для своих созданий — растений и животных, использовала эволюционный процесс естественного отбора, который основан на массовом эксперименте по выживанию особей под воздействием внешней среды. Среди этих воздействий были и такие, которые требовали достаточной прочности при минимальных затратах. В результате ей удалось создать такие замечательные в смысле прочности тела, как ствол бамбука, кости птиц и млекопитающих и т.д. Человек при создании конструкций вынужден ориентироваться на минимум эксперимента, который требует обычно больших материальных затрат и длительного времени, и переносить центр тяжести на теоретические исследования. В частности, насущная необходимость в изучении таких фундаментальных свойств тел, как прочность, жесткость и устойчивость, привела к созданию в рамках механики обширного раздела этой науки — механики твердого деформируемого тела. Сопротивление материалов является частью этого раздела, сконцентрировавшей его

результаты прикладного характера, на которых основан расчет прочности, жесткости и устойчивости простейших, но наиболее распространенных элементов конструкций.

**1.1.3 К<sup>1)</sup>.** Наиболее ранние из известных нам опытов по изучению прочностных свойств материалов были поставлены Леонардо да Винчи (1452–1519). Он проводил испытания проволок на растяжение и балок на изгиб. Однако полученные им результаты остались не опубликованными. Первыми печатными исследованиями в области сопротивления материалов были два первых диалога в знаменитой книге Г. Галилея (1564–1642) о двух науках [1 (1638 г.)], где он рассматривает работу бруса на растяжение и изгиб. Хотя некоторые представления Г. Галилея были неточны, но именно его работы положили начало систематическим экспериментальным и теоретическим исследованиям в области сопротивления материалов и механики твердого деформируемого тела. Подробный анализ результатов исследований Л. да Винчи и Г. Галилея приведен в книге [2].

**1.1.4.** Несмотря на разнообразие форм, самые различные конструкции можно разбить на элементы, которые по своей форме могут быть отнесены к одной из трех групп.

Первую группу составляют элементы, два размера которых малы по сравнению с третьим. Такие элементы называют *брюсьями (стержнями, балками)*.

Геометрически форму бруса можно образовать движением плоской фигуры (сечения) вдоль некоторой линии (оси бруса) так, чтобы плоскость фигуры была перпендикулярна оси бруса и пересекалась с ней в центре тяжести сечения (рис. 1.1). Каждое мгновенное положение фигуры называют поперечным сечением бруса.

В зависимости от формы оси различают прямые и криволинейные брусья. Их поперечные сечения могут быть постоянными по длине оси либо изменяться плавно или ступенчато.

Простейшим является прямолинейный брус постоянного сечения. Прямолинейный брус, растянутый или сжатый силами вдоль его оси, называют также *стержнем*. Если прямолинейный брус нагружен так, что его ось при деформации изгибаются, то его обычно называют *балкой*.



Рис. 1.1

<sup>1)</sup> Здесь и далее пункты, помеченные буквой «К», содержат комментарии, в основном исторического характера.

Примерами брусьев в авиационных конструкциях являются стрингеры, лонжероны, тяги управления. Они часто бывают тонкостенными, т.е. такими, что их поперечное сечение образовано из удлиненных элементов малой толщины.

Ко второй группе относятся тела, у которых один из размеров мал по сравнению с двумя другими. Такие тела называют *оболочками*.



Рис. 1.2

Их форма образуется двумя близко расположенными поверхностями, которые называют *лицевыми*. Поверхность, равноудаленная от лицевых, называется *срединной* (рис. 1.2). Расстояние между лицевыми поверхностями, измеренное по нормали к срединной поверхности, называют толщиной оболочки. Оболочки с плоской срединной поверхностью называют *пластинами*.

Оболочки и пластины широко используются в самых различных конструкциях. В авиационных конструкциях они образуют обшивку планера, корпус турбореактивного двигателя и т.д.

Третью группу образуют тела, все три размера которых одного порядка. Такие тела иногда называют *массивами*.

Учет особенностей формы бруса и оболочки позволил создать такие их расчетные модели, на основе которых при сравнительной простоте расчета на прочность обеспечивается достаточная для практики точность такого расчета.

Основным объектом изучения в сопротивлении материалов является брус. Оболочки и пластины исследуются в теории пластин и оболочек. Массивами занимается теория упругости. Методы расчета конструкций, образованных из элементов этих трех групп, составляют основной предмет строительной механики. Эти дисциплины вместе с некоторыми другими и составляют механику твердого деформируемого тела.

## 1.2. Основные гипотезы и допущения

**1.2.1.** Окружающие нас твердые тела обладают самыми различными свойствами. Они различаются по размерам, форме, материалу и его структуре, вкусу, цвету, запаху и т.д. Механика твердого деформируемого тела изучает поведение тел при их деформировании. Поэтому ее интересуют только те свойства тел, которые существенно сказываются на процессе их деформирования. Опыт показывает, что сопротивление тел деформированию во многом определяется материалом, из которого они состоят.

Структура (микроструктура) известных нам материалов разнообразна. Металлы, как правило, имеют кристаллическую микроструктуру, дерево состоит из волокон, структура пластмасс может быть самая разнообразная и определяется технологией их изготовления и т.д. Механика твердого деформируемого тела использует различные модели материалов, каждая из которых моделирует свойства групп, сходных по своим деформативным свойствам материалов. Эти модели могут учитывать лишь отдельные свойства материалов или несколько свойств. Чем проще модель, тем проще, как правило, ее математическое описание. В то же время модель должна отражать процесс деформирования материала с определенной точностью. Иными словами, необходима определенная степень адекватности модели и натуры.

Одно из самых общих свойств рассматриваемых на практике конструкций состоит в том, что их характерные геометрические размеры существенно больше характерных для микроструктуры размеров. Это свойство и легло в основу самой общей гипотезы механики твердого деформирующего материала — *гипотезы сплошности*, которая предполагает, что материалы, из которых изготовлены исследуемые тела, являются сплошными и непрерывными. Эта гипотеза позволяет отвлечься от реальной дискретной структуры материалов (атомной, молекулярной, кристаллической, волокнистой) и таким образом обеспечивает единообразный подход к различным по микроструктуре телам и создает условия для использования удобного и хорошо разработанного математического аппарата непрерывных функций.

Следующей по общности является *гипотеза однородности*, которая предполагает, что свойства материала во всех точках тела одинаковы. Она основана на том, что степень однородности металлов, являющихся основными конструкционными материалами, высока.

Такие материалы, как дерево, композитные материалы и т.п. обладают меньшей степенью однородности. Но в большинстве этих случаев расчеты, основывающиеся на гипотезе однородности, дают удовлетворительные результаты.

**1.2.2К.** Представление о сплошности тела неявно используется во всех ранних исследованиях, начиная с работ Л. да Винчи и Г. Галилея. Лишь в 1812 г. С. Пуассон (1781–1840) предложил модель пластины как системы частиц, распределенных в ее срединной плоскости. Позже подобные модели рассматривали Л. Навье (1785–1836), О. Коши (1789–1857) и некоторые другие ученые. Однако и они используют вместо суммирования по системе частиц операцию интегрирования, неявно переходя таким образом от системы частиц к непрерывной среде. Впервые, по-видимому, уравнения упругого деформирования тела без использования каких-либо дискретных моделей, а на основе пред-

ставления, что взаимодействие частиц тела описывается некоторой непрерывной и дифференцируемой функцией, построил Д. Грин (1793–1841) в 1828 г. Введение такой функции с самого начала равносильно предположению о сплошности и непрерывности среды.

**1.2.3.** Широкое распространение получили такие материалы, свойства которых не зависят от направления. Иными словами, если из таких материалов выделить куб, то его свойства не будут зависеть от того, как именно был ориентирован этот куб по отношению ко всему остальному материалу. Такие материалы называются *изотропными*. Материалы же, свойства которых различны по разным направлениям, называются *анизотропными*. Металлы близки к изотропным материалам. Некоторая незначительная анизотропия их механических свойств может быть внесена при их обработке (прокатка, волочение и т.п.). Дерево, многие композитные материалы, железобетон и многие другие материалы обладают явной и существенной анизотропией механических свойств. Мы в основном ограничимся исследованием изотропных материалов. Если будут рассматриваться анизотропные материалы, то это будет специально оговариваться.

**1.2.4.** Из опыта известно, что при не слишком больших усилиях тела, хотя и деформируются под действием этих усилий, но сразу же после того, как усилия перестают действовать, восстанавливают свои размеры и форму. Однако большие усилия могут вызвать такую деформацию, которая частично сохранится и после прекращения действия сил. Такая деформация называется *остаточной*. Для большинства окружающих нас предметов, сооружений, машин остаточные деформации не допускаются. В то же время остаточная деформация часто используется при изготовлении различных деталей, например при прокатке, штамповке и т.п.

Деформации тела называются *идеально упругими*, если сразу же после снятия нагрузки тело восстанавливает свои первоначальные размеры и форму. Для большинства материалов существует некоторый предел, до которого его деформации упруги и практически пропорциональны нагрузкам. Такие деформации называют *линейно-упругими*, а соответствующий им закон деформирования известен как закон Гука (Р. Гук (1635–1703)).

Мы, за некоторыми исключениями, будем рассматривать лишь линейно-упругие деформации, хотя механика твердого деформируемого тела содержит разделы, рассматривающие и другие виды деформаций (теории пластичности и ползучести, реология).

**1.2.5.** К абсолютному большинству конструкций предъявляется следующее требование: возникающие в процессе их эксплу-

атации деформации должны быть малы по сравнению с основными размерами конструкций. Так, большие деформации крыла самолета существенно изменяют его аэродинамические характеристики, в результате чего крыло может перестать создавать необходимую подъемную силу. Исключение составляют такие конструкции и их элементы, в которых большие деформации создаются и используются сознательно, как, например, в гибких элементах приборов, в амортизирующих устройствах и т.п.

Малость деформаций позволяет значительно упростить запись и решение уравнений равновесия конструкции и ее частей, пренебрегая малыми изменениями размеров и формы последних. Это и составляет содержание *принципа малости деформаций*, согласно которому ввиду малости деформаций можно записывать уравнения равновесия, используя в них недеформированные размеры и форму конструкции и ее частей. Погрешность, вносимая этим в решение, будет тем меньше, чем меньше деформации по сравнению с недеформированными размерами конструкции.

Следует заметить, что в некоторых случаях, например в задачах устойчивости, в уравнениях равновесия необходимо учитывать малые отклонения от равновесного состояния, поскольку именно эти отклонения сами являются предметом исследования.

**1.2.6.** Если элементы конструкции деформируются линейно-упруго (в пределах закона Гука) и имеет место малость деформаций конструкции, то и деформация всей конструкции под действием внешних сил также подчиняется закону Гука, т.е.

$$R(P) = kP. \quad (1.2.1)$$

Здесь  $P$  — внешняя сила;  $R$  — созданная силой  $P$  деформация конструкции;  $k$  — коэффициент пропорциональности. Из (1.2.1) ясно, что при  $P = 1$  коэффициент  $k = R(1)/1$ , таким образом,  $k$  — деформация при единичной внешней силе.

Из (1.2.1) следует, что при увеличении силы в  $c$  раз точно так же возрастет созданная ею деформация:

$$R(cP) = cR(P). \quad (1.2.2)$$

Ясно также, что при отсутствии силы нет и созданной ею деформации, т.е.

$$R(0) = 0. \quad (1.2.3)$$

Линейная упругость и малость деформаций конструкции являются достаточными условиями того, чтобы конструкция подчинялась *принципу независимости* (наложения, суперпозиции) *действия сил*, который формулируется следующим образом:

*Деформация конструкции под действием группы нагрузок не зависит от последовательности их приложения и равна сумме деформаций от каждой из нагрузок в отдельности.*

Для двух нагрузок  $P_1$  и  $P_2$  принцип независимости действия сил можно записать в виде

$$R(P_1 + P_2) = R(P_1) + R(P_2). \quad (1.2.4)$$

При действии внешних сил между частями конструкции возникают силы взаимодействия, так называемые внутренние силы. Подробно мы рассмотрим эти силы в гл. 2. Здесь же отметим, что принцип независимости действия сил может быть отнесен и к частям конструкции. А так как их деформации пропорциональны действующим на них внешним и внутренним силам, то принцип независимости может быть применен и к внутренним силам. Таким образом, в соотношениях (1.2.2)–(1.2.4) под  $R(P)$  можно понимать не только деформации, но и внутренние силы, возникающие в результате действия внешней силы  $P$ .

**1.2.7 К.** Соотношения (1.2.2)–(1.2.4) с математической точки зрения указывают на линейность зависимости  $R(P)$ , а также на то, что в этих условиях внутренние силы и деформации подчиняются линейным уравнениям. Математический аппарат решения таких уравнений исчерпывающе разработан и составляет основное содержание читаемых в вузах математических курсов, что избавляет нас от необходимости в дальнейшем подробно останавливаться на методах решения возникающих линейных задач и позволяет сосредоточиться в основном на инженерном и механическом содержании этих задач.

### 1.3. Внешние нагрузки

**1.3.1.** Нагрузки, действующие на тело, являются результатом его взаимодействия с другими телами или с внешней средой, которая может быть представлена такими сплошными средами, как газ или жидкость, а также физическими полями различной природы. Например, конструкция может иметь некоторые опорные устройства, силы взаимодействия с которыми называют *опорными реакциями*. Опорные реакции являются для конструкции внешними силами.

Нагрузки, действующие на тело, можно классифицировать по способу их приложения к телу и по характеру действия во времени.

**1.3.2.** По способу приложения к телу силы делятся на *объемные, поверхностные, погонные и сосредоточенные*.

*Объемные* силы непрерывно распределены по всему объему тела. Их мерой является интенсивность объемных сил, которая в каждой точке тела, например в точке  $A$ , задается вектором  $\mathbf{q}_V(A)$ . Если  $\Delta\mathbf{R}_V$  — вектор равнодействующей объемных сил, приходящихся на элементарный объем  $\Delta V$ , который выделен около точки  $A$  (рис. 1.3), то

$$\mathbf{q}_V^{(A)} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{R}_V}{\Delta V}. \quad (1.3.1)$$

Заметим, что предельный переход здесь возможен в силу гипотезы сплошности.

Часто требуется подсчитать равнодействующую  $\mathbf{R}_V$  объемных сил, приходящихся на конечный объем  $V$  тела. Тогда из определения интенсивности (1.3.1) следует

$$\mathbf{R}_V = \int_V \mathbf{q}_V dV. \quad (1.3.2)$$

Примерами объемных сил могут служить гравитационные силы (силы тяжести, электромагнитные силы, силы инерции и т.п.).

*Поверхностные* силы непрерывно распределены по поверхности тела. Их интенсивность  $\mathbf{q}_S(B)$  в точке  $B$  поверхности  $S$  (см. рис. 1.3) равна

$$\mathbf{q}_S(B) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{R}_S}{\Delta S}, \quad (1.3.3)$$

где  $\Delta \mathbf{R}_S$  — равнодействующая поверхностных сил, действующих на элемент поверхности  $\Delta S$ , который выделен около точки  $B$ .

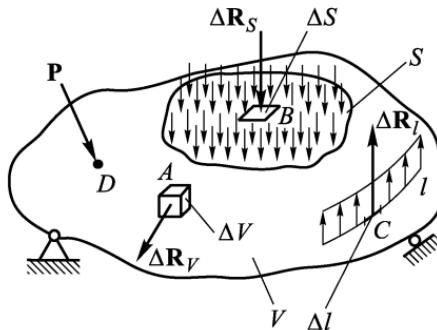


Рис. 1.3

Равнодействующая  $\mathbf{R}_S$  поверхностных сил, приложенных к конечной поверхности  $S$ , в силу (1.3.3) будет

$$\mathbf{R}_S = \int_S \mathbf{q}_S dS. \quad (1.3.4)$$

Примерами поверхностных сил являются аэродинамические силы на поверхности крыла самолета, силы давления воды на плотину и т.п.

*Погонные* силы — это силы, распределенные вдоль линии. Их интенсивность  $\mathbf{q}_l(C)$  в точке  $C$  линии  $l$  (см. рис. 1.3) будет

$$\mathbf{q}_l(C) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{R}_l}{\Delta l}, \quad (1.3.5)$$

где  $\Delta \mathbf{R}_l$  — равнодействующая погонных сил на элементе  $\Delta l$  линии  $l$ , выделенном около точки  $C$ . Равнодействующая  $\mathbf{R}_l$  погонных сил, приложенных к конечному отрезку  $l$  линии:

$$\mathbf{R}_l = \int_l \mathbf{q}_l \, dl. \quad (1.3.6)$$

И, наконец, *сосредоточенная* сила — это сила, приложенная к точке тела, например сила  $\mathbf{P}$ , приложенная к точке  $D$  (см. рис. 1.3).

Следует сразу заметить, что погонные и сосредоточенные силы как таковые в природе не существуют, поскольку их определения включают абстрактные математические понятия линии и точки. Эти нагрузки являются удобными для расчета моделями реальных локальных поверхностных сил, приложенных соответственно по сильно вытянутым в одном направлении узким полоскам поверхности или по малым по сравнению с поверхностью площадкам. Правомочность таких моделей и область их применения мы обсудим в гл. 2 в связи с принципами перехода от реальной конструкции к расчетной схеме.

**1.3.3.** По характеру действия во времени нагрузки делятся на *статические* и *динамические*.

Все нагрузки так или иначе меняются во времени. По мере их изменения меняется и деформация тела, за счет чего точки тела совершают движение, которое мы назовем деформационным. Деформационное движение сопровождается инерционными силами. Если эти инерционные силы настолько малы, что ими можно пренебречь по сравнению с максимальными значениями нагрузки, то такие нагрузки называются статическими. В случае действия статических нагрузок деформационное движение не рассматривается и расчет проводится для максимального значения таких нагрузок.

Если же инерционные силы деформационного движения сравнимы с максимальными значениями нагрузки, то такая нагрузка является динамической и расчет на ее действие требует анализа деформационного движения тела.

Динамические нагрузки возникают, например, при посадке самолета, при полете в неспокойной атмосфере, при землетрясениях и т.п.

## B.1. Контрольные вопросы

**B.1.1.** Что такое деформация?

**B.1.2.** Что такое прочность, жесткость и устойчивость конструкции?

**В.1.3.** На какие три группы можно разбить элементы реальных конструкций?

**В.1.4.** Что называется бруском? Что такое поперечное сечение бруса? Какие типы брусьев вы знаете?

**В.1.5.** Что такое оболочка и массив?

**В.1.6.** Сформулируйте гипотезу сплошности. На каком свойстве реальных тел она основана? Какие возможности она открывает?

**В.1.7.** В чем заключается гипотеза однородности материала? На чем она основана?

**В.1.8.** Что такое изотропные и анизотропные материалы? Какие материалы близки к изотропным? Какие проявляют явную анизотропию?

**В.1.9.** Что такое остаточная деформация?

**В.1.10.** Какие деформации тела называют идеально упругими?

**В.1.11.** Что такое линейно-упругая деформация? Сформулируйте закон Гука.

**В.1.12.** В чем заключается сущность принципа малости деформаций, и где он используется?

**В.1.13.** Сформулируйте принцип независимости действия сил. Какие условия являются достаточными, чтобы этот принцип мог быть применен к рассчитываемой конструкции?

**В.1.14.** Что такое внешние нагрузки? По каким признакам они классифицируются?

**В.1.15.** Дайте определение объемным, поверхностным, погонным силам и их интенсивностям. Что такое сосредоточенная сила? Приведите примеры перечисленных типов нагрузок.

**В.1.16.** Что служит критерием разделения нагрузок на статические и динамические?

## ГЛАВА 2

# МЕТОД СЕЧЕНИЙ, ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ, НАПРЯЖЕНИЯ

### 2.1. Метод сечений и внутренние силовые факторы

**2.1.1.** Форма и размеры всякого твердого тела удерживаются силами взаимодействия составляющих его частиц. Под действием нагрузок и других внешних воздействий тела деформируются, что выражается в изменении расстояний между частицами, а значит, и в изменении сил взаимодействия между ними. Мы будем изучать именно эти изменения сил взаимодействия и называть их в дальнейшем внутренними силами.

Таким образом, *внутренние силы* — это силы взаимодействия между частями тела, возникающие вследствие его деформации.

Такое определение внутренних сил предполагает, что в недеформированном теле внутренние силы равны нулю.

Появление внутренних сил в теле может быть вызвано не только внешними нагрузками. Они возникают при неравномерном нагреве и охлаждении или в результате таких технологических операций, как штамповка, прокатка и т.п. В дереве внутренние силы могут возникнуть при неравномерном высыхании, в бетоне — при затвердевании. Определение внутренних сил такого рода является сложной задачей, которая требует специальных исследований и которая изучена, на наш взгляд, недостаточно. Мы лишь слегка коснемся задач такого рода при анализе усилий, возникающих в некоторых конструкциях при нагреве.

Нетрудно понять, что внутренние силы являются основным объектом изучения в механике деформированного твердого тела, так как знание их позволяет судить о прочности и жесткости. Действительно, разрушение произойдет там, где внутренние силы превысят допустимый для материала предел сил взаимодействия его частиц. Жесткость, как способность тела сопротив-

ляться деформированию, также определяется внутренними силами, поскольку сами они вызваны деформациями.

**2.1.2.** Внутренние силы изучаются с помощью метода сечений. Чтобы продемонстрировать этот метод, рассмотрим тело, находящееся в равновесии под действием системы  $n$  внешних сил  $\mathbf{P}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) (рис. 2.1). Как известно из теоретической механики, необходимым и достаточным условием равновесия тела является равенство нулю главного вектора этих сил и их главного момента относительно произвольно выбранной точки, т.е. должны выполняться векторные уравнения

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i = 0, \quad (2.1.1)$$

где  $\mathbf{M}_i$  — вектор момента силы  $\mathbf{P}_i$  относительно выбранной точки.

Возьмем произвольно некоторую плоскость, разделяющую тело на две части, и рассмотрим эти части тела, которые обозначим римскими цифрами  $I$  и  $II$  (рис. 2.2). Как само тело, так и его части должны находиться в равновесии. Однако в силу произвольности выбора плоскости внешние силы, действующие на каждую из частей тела, уже не удовлетворяют условиям равновесия вида (2.1.1) и равновесие частей тела обеспечивается силами их взаимодействия, т.е. внутренними силами.

Внутренние силы, действующие на одну часть тела со стороны другой, как любую систему сил, можно свести к главному вектору и главному моменту. Покажем, что главный вектор и главный момент внутренних сил, действующих на части тела, можно найти, ничего не зная о распределении самих внутренних сил по телу и пользуясь только условиями равновесия. Для этого мысленно рассечем тело плоскостью на части  $I$  и  $II$  и рассмотрим эти части отдельно. Выберем в сечении некоторую точку  $O$  (обычно это центр тяжести сечения) и обозначим через  $\mathbf{R}^I$  и  $\mathbf{M}^I$  главный вектор и главный момент относительно точки  $O$  внутренних сил, с которыми часть  $II$  действует на часть  $I$ . Точно так же обозначим через  $\mathbf{R}^{II}$  и  $\mathbf{M}^{II}$  главные вектор и момент внутренних сил, действующих на часть  $II$  со стороны части  $I$  (рис. 2.3). Как равнодействующие сил взаимодействия

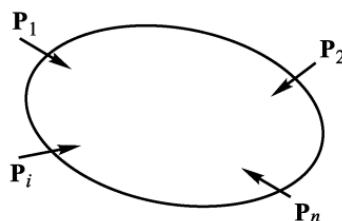


Рис. 2.1

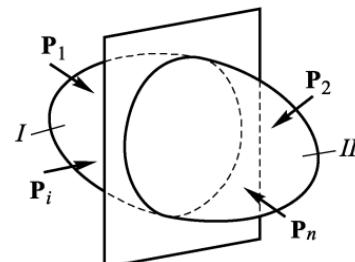


Рис. 2.2

векторы  $\mathbf{R}^I$ ,  $\mathbf{R}^{II}$  и  $\mathbf{M}^I$ ,  $\mathbf{M}^{II}$  должны быть взаимны, т.е. равны по величине и противоположны по направлению:

$$\mathbf{R}^I = -\mathbf{R}^{II}, \quad \mathbf{M}^I = -\mathbf{M}^{II}. \quad (2.1.2)$$

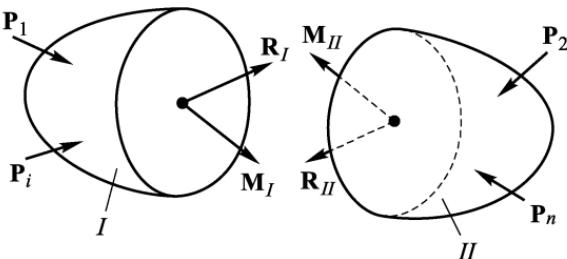


Рис. 2.3

Запишем условия равновесия отсеченной части  $I$ :

$$\sum_{i \in I} \mathbf{P}_i + \mathbf{R}^I = 0, \quad \sum_{i \in I} \mathbf{M}_i + \mathbf{M}^I = 0. \quad (2.1.3)$$

Здесь символ  $\sum_{i \in I}$  означает, что суммируются силы или их моменты, приложенные к части  $I$ .

Точно так же для части  $II$  условия равновесия имеют вид

$$\sum_{i \in II} \mathbf{P}_i + \mathbf{R}^{II} = 0, \quad \sum_{i \in II} \mathbf{M}_i + \mathbf{M}^{II} = 0. \quad (2.1.4)$$

Складывая соответственно равенства (2.1.3), (2.1.4), приходим с учетом взаимности (2.1.2) к условиям равновесия для всего тела (2.1.1).

Каждое из уравнений (2.1.3), (2.1.4) является уравнением с одним неизвестным. Из них получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^I &= -\sum_{i \in I} \mathbf{P}_i, & \mathbf{M}^I &= -\sum_{i \in I} \mathbf{M}_i, \\ \mathbf{R}^{II} &= -\sum_{i \in II} \mathbf{P}_i, & \mathbf{M}^{II} &= -\sum_{i \in II} \mathbf{M}_i. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Заметим, что для определения  $\mathbf{R}^I$ ,  $\mathbf{R}^{II}$  и  $\mathbf{M}^I$ ,  $\mathbf{M}^{II}$  достаточно решить уравнения равновесия для любой из отсеченных частей. Например, для части  $I$  из (2.1.3) найти  $\mathbf{R}^I$  и  $\mathbf{M}^I$ , тогда для другой части  $\mathbf{R}^{II}$  и  $\mathbf{M}^{II}$  определяются по свойству взаимности (2.1.2). На практике это позволяет решать уравнения равновесия для той отсеченной части, для которой они проще.

Подчеркнем основную идею метода сечений. Она состоит в том, что силы, внутренние для тела, для отсеченной части тела рассматриваются как внешние. А это позволяет включать их в уравнения равновесия отсеченной части точно так же, как и действующие на нее внешние силы и, решая эти уравнения, определять главный вектор и главный момент внутренних сил.

**2.1.3.** Чтобы решить уравнения (2.1.3) или (2.1.4), необходимо записать их в координатной форме, для чего прежде всего необходимо задать систему координат. Выбор начала координат и координатных осей обычно определяется удобством решения задачи, а часто и традициями. Так, для бруса наиболее интересны внутренние силы в поперечном сечении. При этом удобно выбирать начало координат в центре тяжести сечения, а декартовы оси направлять так, чтобы одна из них была перпендикулярна (нормальна) к плоскости сечения, а две другие лежали в этой плоскости. Принято нормальную к сечению ось обозначать буквой  $x$ , а оси в плоскости сечения — буквами  $y$  и  $z$  (рис. 2.4).

Для составляющих  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $R_z$  главного вектора  $\mathbf{R}$  внутренних сил установлены следующие обозначения и названия:  $R_x = N$  — продольная (нормальная) сила;  $R_y = Q_y$ ,  $R_z = Q_z$  — перерезывающие (поперечные) силы (рис. 2.5)

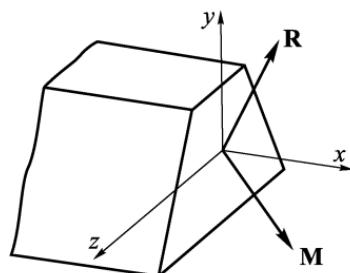


Рис. 2.4

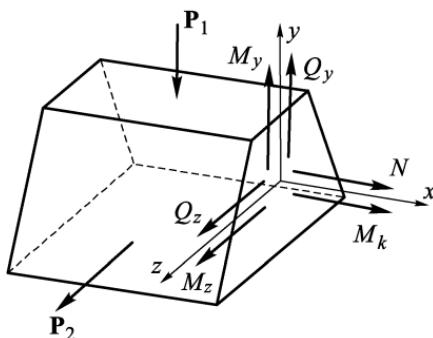


Рис. 2.5

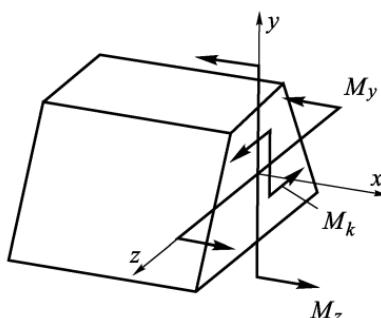


Рис. 2.6

вающие (поперечные) силы (рис. 2.5). Составляющие  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  главного момента  $\mathbf{M}$  внутренних сил, приведенных к центру тяжести сечения, принято обозначать и называть так:  $M_x = M_k$  — крутящий момент;  $M_y$ ,  $M_z$  — изгибающие моменты (см. рис. 2.5). На рис. 2.6 моменты  $M_k$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  показаны в виде пар

сил. Все силы и моменты  $N, Q_y, Q_z, M_k, M_y, M_z$  часто называют внутренними силовыми факторами. Уравнения для их определения, представляющие собой координатную форму векторных уравнений (2.1.3), принимают с учетом этих обозначений вид

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} P_{ix} + N &= 0, & \sum_{i \in I} P_{iy} + Q_y &= 0, & \sum_{i \in I} P_{iz} + Q_z &= 0, \\ \sum_{i \in I} M_{ix} + M_k &= 0, & \sum_{i \in I} M_{iy} + M_y &= 0, & \sum_{i \in I} M_{iz} + M_z &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Здесь обозначено:  $P_{ix}, P_{iy}, P_{iz}$  — составляющие силы  $\mathbf{P}_i$  по осям  $x, y, z$ ;  $M_{ix}, M_{iy}, M_{iz}$  — составляющие момента  $\mathbf{M}_i$  силы  $\mathbf{P}_i$  по осям  $x, y, z$  или, другими словами, моменты силы  $\mathbf{P}_i$  относительно этих осей.

Каждое из уравнений (2.1.6) содержит лишь один неизвестный внутренний силовой фактор, что позволяет легко найти его. Координатная форма уравнений равновесия (2.1.6) для отсеченной части  $\Pi$  имеет аналогичный вид.

**2.1.4.** С помощью метода сечений можно получить ряд важных соотношений, определяющих характер изменения внутренних силовых факторов в брусе. Рассмотрим для этого прямолинейный брус, нагруженный внешней нагрузкой самого общего вида, которая состоит из сосредоточенных сил  $\mathbf{P}_i$ , приложенных в точках оси бруса с координатами  $x_{P_i}$ , сосредоточенных моментов  $\mathbf{M}_j$  в точках  $x_{M_j}$ , погонной нагрузки интенсивностью  $\mathbf{q}(x)$  и погонной моментной на-

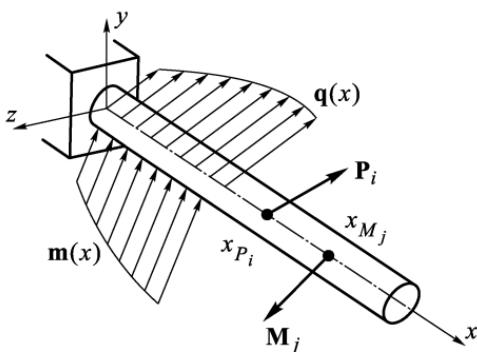


Рис. 2.7

грузки интенсивностью  $\mathbf{m}(x)$  (рис. 2.7). Зададим систему координат  $x, y, z$ , причем, как принято, направим ось  $x$  вдоль оси бруса.

Векторы нагрузок имеют составляющие по осям координат

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i &= [P_{ix}, P_{iy}, P_{iz}]^T, & \mathbf{q} &= [q_x, q_y, q_z]^T, \\ \mathbf{M}_j &= [M_{jx}, M_{jy}, M_{jz}]^T, & \mathbf{m} &= [m_x, m_y, m_z]^T. \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Здесь мы воспользовались принятой в математике координатной формой записи векторов.

Будем считать составляющие нагрузок положительными, если они направлены в сторону положительного направления осей координат. Знаки внутренних силовых факторов не связаны с осями координат. Чтобы понять это, рассмотрим простейший случай нагружения бруса, когда он растянут силой вдоль оси. Как видно из рис. 2.8, в его сечении возникает продольная сила  $N$ , которая может быть направлена как влево,

так и вправо в зависимости от того, к какой из отсеченных частей она приложена. Поэтому знаки внутренних сил обычно связывают с характером их действия на отсеченную часть. Так, продольная сила  $N$  считается положительной, если она стремится растянуть отсеченную часть;  $Q_y > 0$ , если она стремится повернуть отсеченную часть по часовой стрелке в плоскости  $xy$ ; момент  $M_z > 0$ , если он деформирует брус так, что сжаты верхние волокна (рис. 2.9). На рис. 2.10 показаны принятые в книге положительные направления всех внутренних силовых факторов.

Рассечем брус двумя близкими поперечными сечениями, пересекающими ось  $x$  в точках  $x$  и  $x+dx$  так, чтобы на длине  $dx$  не были приложены сосредоточенные силы и моменты (рис. 2.11). Рассмотрим равновесие выделенного этими сечениями элемента бруса  $dx$  под действием приложенных к нему внешних и внутренних сил. (Обозначая здесь и всюду ниже приращение  $\Delta A$  некоторой величины  $A$  через  $dA$ , мы подразумеваем, что совершается обычный для дифференциального исчисления переход к пределу при  $\Delta A \rightarrow 0$ .)

В сечении  $x$  на элемент действуют внутренние силовые факторы  $N(x)$ ,  $Q_y(x)$ ,  $Q_z(x)$ ,  $M_z(x)$ ,  $M_y(x)$ ,  $M_k(x)$ , а в сечении  $x+dx$  —  $N(x+dx)$ ,  $Q_y(x+dx)$ , ...,  $M_k(x+dx)$ . Ввиду малости  $dx$  при переходе от сечения  $x$  к сечению  $x+dx$  имеет смысл учитывать только основную, линейную часть приращения внутренних силовых факторов. Поэтому с точностью до величин высшего порядка малости

$$N(x+dx) = N(x) + dN, \quad Q_y(x+dx) = Q_y(x) + dQ_y, \dots \quad (2.1.8)$$

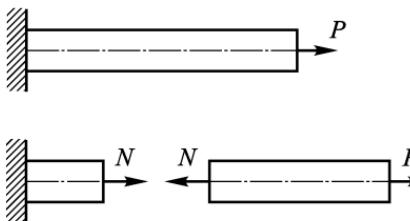


Рис. 2.8

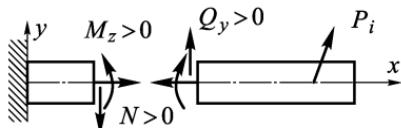


Рис. 2.9

На рис. 2.11 для большей наглядности показаны усилия и моменты, действующие на элемент в плоскости  $xy$ , а на рис. 2.12 —

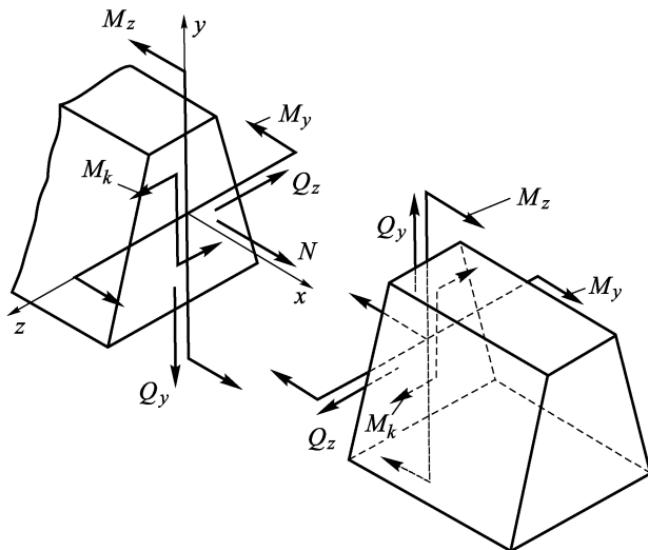


Рис. 2.10

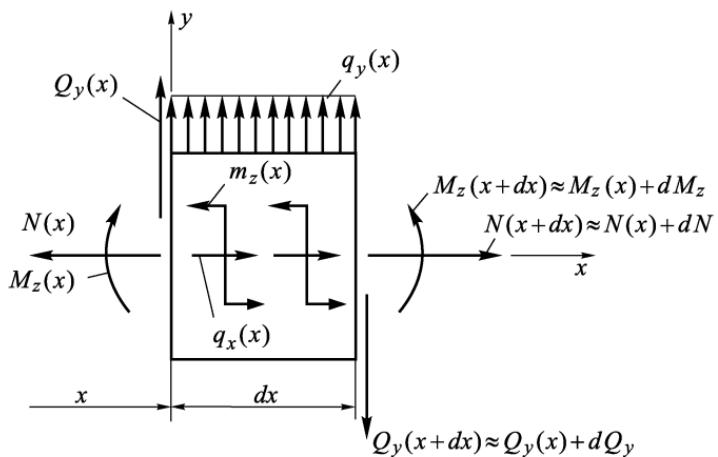


Рис. 2.11

отдельно только моменты относительно оси  $x$ . Соответствующие этим моментам пары изображены так, что сила, направленная на нас, показана точкой, а от нас — крестиком.

Действующие на элемент бруса внешние силы и моменты определяются погонными нагрузками  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $q_z$  и моментами  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_z$  и в соответствии с определением погонных нагрузок (1.3.5) могут быть с точностью до величин высшего порядка малости подсчитаны как  $q_x(x) dx$ ,  $q_y(x) dy, \dots, m_z(x) dx$ .  
(2.1.9)

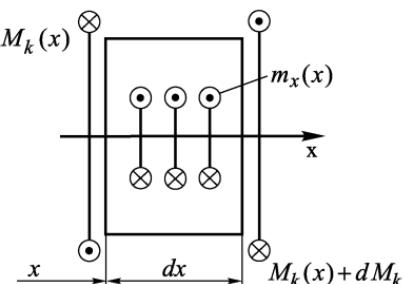


Рис. 2.12

Теперь нетрудно записать условия равновесия элемента, состоящие в равенстве нулю сумм проекций действующих на элемент сил на координатные оси и сумм моментов этих сил относительно координатных осей. Эти уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 0 : (N(x) + dN) + q_x dx - N(x) = 0, \\ \sum P_y &= 0 : Q_y(x) + q_y dx - (Q_y(x) + dQ_y) = 0, \\ \sum P_z &= 0 : Q_z(x) + q_z dx - (Q_z(x) + dQ_z) = 0, \\ \sum M_x &= 0 : (M_k(x) + dM_k) - M_k(x) + m_x dx = 0, \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

$$\begin{aligned} \sum M_y &= 0 : (M_y(x) + dM_y) - M_y(x) - (Q_z(x) + dQ_z) dx + \\ &\quad + q_z dx \frac{dx}{2} + m_y dx = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_z &= 0 : (M_z(x) + dM_z) - M_z(x) - (Q_y(x) + dQ_y) dx + \\ &\quad + q_y dx \frac{dx}{2} + m_z dx = 0. \end{aligned}$$

Усилия и моменты, показанные на рис. 2.11, вошли в первое, второе, пятое и шестое уравнения (2.1.10), а моменты, данные на рис. 2.12, — в четвертое.

Из уравнений (2.1.10) после упрощения и отбрасывания слагаемых, имеющих более высокий порядок малости, получаем следующие соотношения, которые принято называть дифференциальными зависимостями для бруса:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx} &= -q_x, \quad \frac{dQ_y}{dx} = q_y, \quad \frac{dQ_z}{dx} = q_z, \\ \frac{dM_k}{dx} &= -m_x, \quad \frac{dM_y}{dx} = Q_z - m_y, \quad \frac{dM_z}{dx} = Q_y - m_z. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Обычно в брусьях внешняя нагрузка такова, что  $m_z = 0$ ,  $m_y = 0$ ; тогда две последние дифференциальные зависимости упрощаются:

$$\frac{dM_z}{dx} = Q_y, \quad \frac{dM_y}{dx} = Q_z. \quad (2.1.12)$$

**2.1.5.** Рассмотрим элементы, выделенные из бруса сечениями, близкими к точкам приложения сосредоточенных сил и

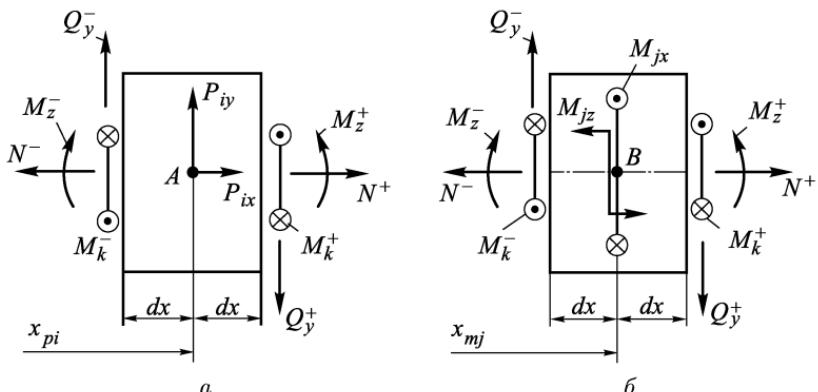


Рис. 2.13

моментов. На рис. 2.13 *a*, *b*, где эти элементы показаны также в плоскости  $xy$ , обозначено:

$$N_{(x_i)}^- = N(x_{pi} - dx), \quad N_{(x_i)}^+ = N(x_{pi} + dx), \quad \dots$$

Равнодействующие приложенных к этим элементам погонных нагрузок и моментов, равные  $q_x(x_{pi}) \cdot 2dx$ ,  $q_y(x_{pi}) \cdot 2dx$ , ...,  $m_z(x_{pi}) \cdot 2dx$ , ..., являются из-за множителя  $dx$  малыми по сравнению с конечными величинами сосредоточенных сил  $P_i$  и моментов  $M_j$  и поэтому в уравнениях равновесия их не следует учитывать.

Составляя условия равновесия элемента, выделенного около точки *A* приложения сосредоточенной силы  $P_i$  (рис. 2.13 *a*), легко получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} N^+ &= N^- - P_{ix}, & Q_y^+ &= Q_y^- + P_{iy}, & Q_z^+ &= Q_z^- + P_{iz}, \\ M_k^+ &= M_k^-, & M_y^+ &= M_y^-, & M_z^+ &= M_z^-. \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Из условий равновесия элемента, который выделен в окрестности точки *B* приложения сосредоточенного момента  $M_j$

(рис. 2.13 б), получаем

$$N^+ = N^-, \quad Q_y^+ = Q_y^-, \quad Q_z^+ = Q_z^-, \quad (2.1.14)$$

$$M_k^+ = M_k^- - M_{jx}, \quad M_y^+ = M_y^- - M_{jy}, \quad M_z^+ = M_z^- - M_{jz}.$$

Из соотношений (2.1.13), (2.1.14) следует, что при переходе через точки приложения сосредоточенных сил и моментов соответствующие внутренние силовые факторы изменяются скачком на величину соответствующего внешнего сосредоточенного усилия или момента. В реальных брусьях скачков, конечно, быть не может. Но полученные соотношения отражают тот факт, что локальные нагрузки вызывают в брусе быстрое (в пределах участков их приложения) изменение соответствующих внутренних силовых факторов.

**2.1.6.** Рассмотрим теперь брус, один конец которого защемлен (т.е. полностью закреплен от любых перемещений), а другой — свободен. На рис. 2.14 показана проекция такого бруса

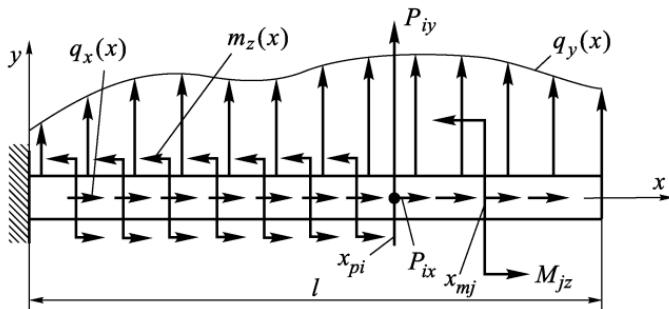


Рис. 2.14

на плоскость  $xy$ . Рассечем брус сечением в точке  $x = x_c$  на две части I и II (рис. 2.15). Ясно, что можно составлять уравнения

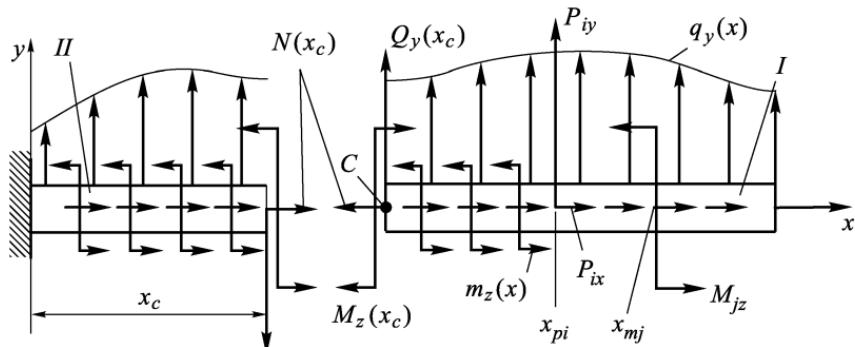


Рис. 2.15

равновесия только для части  $I$ , так как часть  $II$  защемлена и не имеет степеней свободы. Пользуясь рис. 2.15, нетрудно составить уравнения проекций сил на оси  $x$ ,  $y$  и моментов относительно оси  $z$ , проходящей через центр тяжести сечения перпендикулярно плоскости  $xy$  (на рис. 2.15 след оси  $z$  на плоскости  $xy$  совпадает с точкой  $C$ ). Остальные уравнения можно составить аналогично. В результате из условий равновесия части  $I$  получаем

$$\begin{aligned} N(x_c) &= \int_{x_c}^l q_x(x) dx + \sum_{i \in I} P_{ix}, \\ Q_y(x_c) &= - \int_{x_c}^l q_y(x) dx - \sum_{i \in I} P_{iy}, \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

$$Q_z(x_c) = - \int_{x_c}^l q_z(x) dx - \sum_{i \in I} P_{iz},$$

$$M_k(x_c) = \int_{x_c}^l m_x(x) dx + \sum_{i \in I} M_{jx},$$

$$\begin{aligned} M_y(x_c) &= \int_{x_c}^l (x - x_c) q_z(x) dx + \int_{x_c}^l m_y(x) dx + \\ &\quad + \sum_{i \in I} (x_{pi} - x_l) P_{iz} + \sum_{j \in I} M_{jy}, \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

$$\begin{aligned} M_z(x_c) &= \int_{x_c}^l (x - x_c) q_y(x) dx + \int_{x_c}^l m_z(x) dx + \\ &\quad + \sum_{i \in I} (x_{pi} - x_l) P_{iy} + \sum_{j \in I} M_{jz}. \end{aligned}$$

Здесь  $l$  — координата правого конца бруса (длина бруса). Эти уравнения по существу являются расшифрованными уравнениями (2.1.6) для отсеченной части  $I$  бруса. Вшедшие в них интегралы являются равнодействующими усилиями или моментами пolygonных нагрузок  $q_x(x)$ ,  $q_y(x)$ ,  $q_z(x)$  и моментов  $m_x(x)$ ,  $m_y(x)$ ,  $m_z(x)$ .

Отметим, что в уравнениях (2.1.15), (2.1.16) содержится та же информация, что и в соотношениях (2.1.11), (2.1.13), (2.1.14). Действительно, если считать координату сечения переменной и проинтегрировать по ней равенства (2.1.15), (2.1.16), учитывая, что интегралы имеют переменный нижний предел, то придем к дифференциальным зависимостям (2.1.11).

Продемонстрируем это на примере выражения для  $M_z$ . Напомним формулу дифференцирования интеграла по переменному пределу:

$$\frac{d}{dx} \int_x^l f(\xi) d\xi = -f(x).$$

Тогда, дифференцируя второе соотношение в (2.1.16), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dM_z}{dx_c} &= \frac{d}{dx_c} \left( \int_{x_c}^l x q_y(x) dx - x_c \int_{x_c}^l q_y(x) dx \right) - m_z(x_c) - \sum_{i \in I} P_{iy} = \\ &= -\underline{x_c q_y(x_c)} - \int_{x_c}^l q_y(x) dx + \underline{x_c q_y(x_c)} - m_z(x_c) - \sum_{i \in I} P_{iy}. \end{aligned}$$

Подчеркнутые слагаемые уничтожаются, а второе и последнее слагаемые, как это видно из (2.1.15), составляют  $Q_y(x_c)$ . В результате имеем

$$\frac{dM_z}{dx_c} = Q_y(x_c) - m_z(x_c),$$

что с точностью до обозначения аргумента совпадает с последним соотношением в (2.1.11).

Иначе говоря, выражения (2.1.15), (2.1.16) представляют собой общее решение дифференциальных уравнений (2.1.11), учитывающее скачки, заданные условиями (2.1.13), (2.1.14). С этой точки зрения видно, что соотношения (2.1.16) можно заменить на следующие:

$$M_y(x_c) = - \int_{x_c}^l Q_z(x) dx + \int_{x_c}^l m_y(x) dx + \sum_{j \in I} M_{jy}, \quad (2.1.17)$$

$$M_z(x_c) = - \int_{x_c}^l Q_y(x) dx + \int_{x_c}^l m_z(x) dx + \sum_{j \in I} M_{jz}.$$

Сравнивая между собой выражения в (2.1.15), (2.1.17), замечаем большое сходство в их структуре. Это единобразие вместе с простотой алгоритмизации входящих в них операций суммирования и интегрирования делает их удобной основой для автоматизации процесса вычисления внутренних силовых факторов на ЭВМ.

## 2.2. Напряжения

**2.2.1.** В предыдущем разделе были изучены свойства внутренних силовых факторов, которые интегрально (в целом) отражают взаимодействие отсеченных частей тела. Но, как уже

отмечалось, для суждения о прочности и жесткости тел нам необходимо более детальное знание внутренних сил.

Взаимодействие частиц тела на молекулярном уровне характеризует рис. 2.16, на котором показаны силы взаимодействия  $P$  двух неполярных молекул в зависимости от расстояния  $r$  между ними. Характерные расстояния  $r_0$  и  $r_1$  имеют порядок  $10^{-9}$  м. При  $r > r_1$  силы притяжения

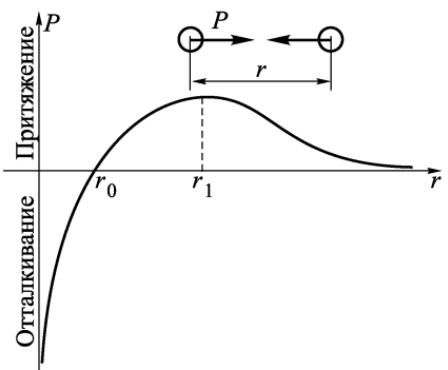


Рис. 2.16

сильно убывают и изменяются почти обратно пропорционально  $r^7$ . Следовательно, во взаимодействии двух частей тела

участвуют частицы, которые расположены в очень тонких слоях тела (толщиной около  $10^{-8} \div 10^{-9}$  м), прилегающих к сечению со стороны отсеченных частей. На рис. 2.17 эти слои заштрихованы.

Эта физическая особенность взаимодействия и легла в основу предположения, что силы взаимодействия отсеченных частей непрерывно распределены по поверхности сечения, т.е. в данном сечении внутренние силы являются поверхностными.

А поверхностные силы, как мы уже знаем из разд. 1.3, характеризуются своей интенсивностью. Для того чтобы подчеркнуть отличие внутренних сил от внешних, для интенсивности внутренних сил введен специальный термин — *напряжение*. Таким образом, напряжение  $\mathbf{p}(A)$  в точке  $A$  сечения  $F$  (рис. 2.18, а) будет

$$\mathbf{p}(A) = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta F}, \quad (2.2.1)$$

где  $\Delta \mathbf{P}$  — равнодействующая внутренних усилий на элементарной площадке  $\Delta F$  сечения  $F$ .

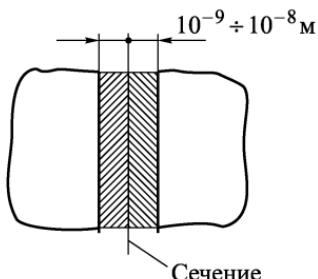


Рис. 2.17

верхностные силы, как мы уже знаем из разд. 1.3, характеризуются своей интенсивностью. Для того чтобы подчеркнуть отличие внутренних сил от внешних, для интенсивности внутренних сил введен специальный термин — *напряжение*. Таким образом, напряжение  $\mathbf{p}(A)$  в точке  $A$  сечения  $F$  (рис. 2.18, а) будет

**2.2.2.** Вектор напряжений  $\mathbf{p}$  (иногда его называют *полным напряжением*) удобно раскладывать на составляющие по нормали  $\mathbf{n}$  к сечению и в плоскости сечения, как это сделано в точке  $A$  на рис. 2.18 б.

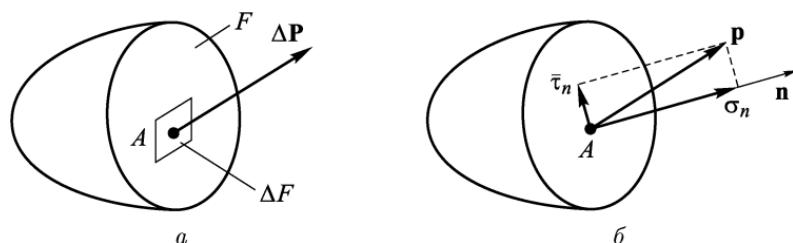


Рис. 2.18

Составляющую полного напряжения  $\mathbf{p}$  по нормали  $\mathbf{n}$  к сечению называют *нормальным напряжением* и обозначают греческой буквой  $\sigma$  с индексом, соответствующим нормали к сечению, т.е. в данном случае  $\sigma_n$ .

Составляющую полного напряжения  $\mathbf{p}$  в плоскости сечения обозначают  $\tau_n$  и называют *касательным напряжением*.

Часто удобно  $\tau_n$  разложить на составляющие по осям в плоскости сечения. На рис. 2.19 в сечении введены оси  $l$  и  $m$  и  $\tau_n$  разложено на составляющие  $\tau_{nl}$  и  $\tau_{nm}$ . Таким образом, у составляющих касательного напряжения имеется два индекса, первый из них обозначает нормаль к сечению, а второй соответствует оси, вдоль которой эта составляющая действует. На рис. 2.20 показаны напряжения, действующие по граням элементарного кубика, выделенного из тела сечениями, которые параллельны координатным плоскостям в декартовых осях  $x, y, z$ .

Знак напряжений устанавливается следующим правилом: *в сечении, внешняя нормаль к которому совпадает с положительным направлением координатной оси, напряжения положительны, если они совпадают по направлению с координатными осями*. Для нормальных напряжений удобно пользоваться более простым, но следующим из этого правилом: *нормальные напряжения положительны, если они растягивающие*. На рис. 2.20 показаны положительные направления напряжений.

Заметим, что понятие напряжения связано с сечением. Через заданную точку тела, например точку  $B$  на рис. 2.21, можно

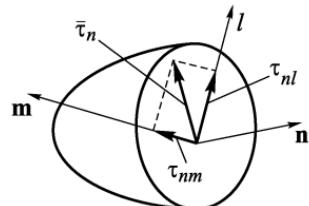


Рис. 2.19

проводить сколько угодно сечений, и в каждом из них в точке  $B$  будет свое напряжение. Два таких возможных сечения показаны

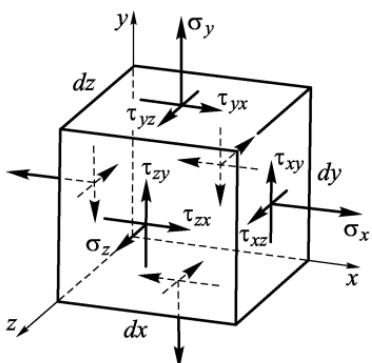


Рис. 2.20

на показанный на рис. 2.20 элементарный кубик, относительно оси  $z$  с учетом, что длины ребер кубика равны  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$ . Так как кубик вместе с телом находится в равновесии,

на рис. 2.21 показано, что сумма моментов сил, действующих на кубик относительно оси  $z$ , равна нулю. Видно, что моменты от напряжений  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  параллельны оси  $z$  и поэтому не дают момента относительно оси  $z$ , а моменты от напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{zy}$  параллельны плоскости сечения и поэтому дают момент относительно оси  $z$ .

**2.2.3.** Подробно напряженное состояние в точке будет изучено в гл. 11. Здесь же мы укажем на одно фундаментальное свойство касательных напряжений. Для этого запишем сумму моментов сил, действующих

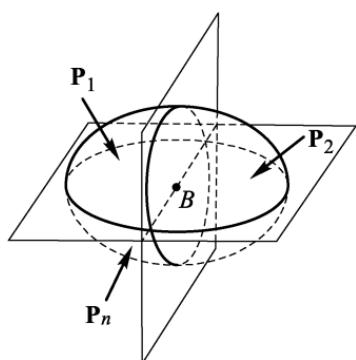


Рис. 2.21

на кубике, относительно оси  $z$ . Видно, что моменты от напряжений  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  параллельны оси  $z$  и поэтому не дают момента относительно оси  $z$ , а моменты от напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{zy}$  параллельны плоскости сечения и поэтому дают момент относительно оси  $z$ . Так как грани кубика малы, то можно считать

напряжения на них постоянными. Поэтому, чтобы получить усилия от этих напряжений, нужно в соответствии с определением (2.2.1) умножить напряжения на площади граней, на которых они действуют. Тогда усилия от  $\tau_{yx}$  и  $\tau_{xy}$  равны  $\tau_{yx} dx dz$  и  $\tau_{xy} dy dz$ . Умножая их соответственно на плечи  $dy$  и  $dx$ , получаем их моменты относительно оси  $z$ :

$$\sum M_z = \tau_{yx} dx dz dy - \tau_{xy} dy dz dx = 0.$$

Отсюда следует, что  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ; рассматривая точно также моменты относительно осей  $x$  и  $y$ , получим в итоге

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (2.2.2)$$

Это свойство называют *свойством парности касательных напряжений*. Оно формулируется так:

*Во взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательных напряжений, нормальные к линии пересечения площадок (к ребру), равны и направлены одновременно либо от ребра, либо к ребру.*

На рис. 2.22 показаны две произвольные взаимно перпендикулярные площадки с нормальными  $\xi$  и  $\eta$ . Свойство парности

относится только к  $\tau_{\xi\eta}$  и  $\tau_{\eta\xi}$ , и не касается  $\tau_{\eta\xi}$  и  $\tau_{\xi\eta}$ .

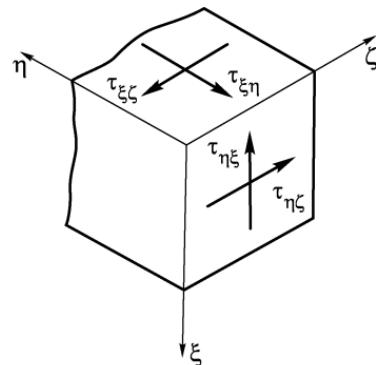


Рис. 2.22

**2.2.4 К.** Понятие усилий в продольных волокнах бруса, близкое по смыслу к нормальным напряжениям в его поперечных сечениях, использовалось уже в работах Г. Галилея. В дальнейшем это понятие развивалось в работах Ф. Мариотта (1620–1684), Парана (1666–1716), Ш. Кулона (1736–1806), Т. Юнга (1773–1829) также применительно к теории растяжения и изгиба бруса. В то же время Л. Навье подсчитывал силы взаимодействия отсеченных частей как суммы (интегралы) сил взаимодействия их частиц. Впервые в явном виде понятие напряжения, а значит, и предположение о том, что внутренние силы распределены по поверхности сечения, ввел один из крупнейших математиков и механиков XIX века О. Коши (1789–1857). Это понятие было высказано в основополагающих работах по математической теории упругости, но оно быстро было использовано и в исследованиях прикладного характера, что придало, в частности, теории деформаций бруса современный вид.

### 2.3. Связь напряжений с внутренними силовыми факторами

**2.3.1.** Пусть в конечном сечении  $F$  бруса известно распределение нормальных  $\sigma_x(y, z)$  и касательных  $\tau_{xy}(y, z)$ ,  $\tau_{xz}(y, z)$  напряжений (рис. 2.23). Тогда нетрудно подсчитать внутренние силовые факторы  $N$ ,  $Q_y, \dots$ , как равнодействующие элементарных усилий от напряжений. Для этого разобъем сечение  $F$  на

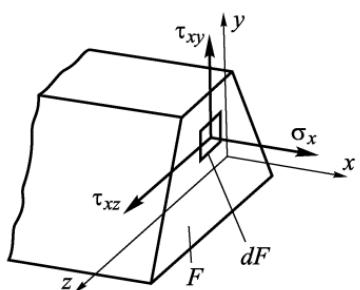


Рис. 2.23

элементарные площадки  $dF$  с координатами  $y, z$ . Элементарные усилия от напряжений на этих площадках равны  $\sigma_x(y, z) dF$ ,  $\tau_{xy}(y, z) dF$ ,  $\tau_{xz}(y, z) dF$ , а моменты этих элементарных усилий относительно осей  $y, z, x$  будут  $z\sigma_x dF$ ,  $y\sigma_x dF$ ,  $y\tau_{xz} dF - z\tau_{xy} dF$ . Суммируя элементарные усилия и моменты по всем площадкам, т.е. интегрируя их по площади поперечного сечения, получаем

$$\begin{aligned} N &= \int_F \sigma_x dF, \quad Q_y = - \int_F \tau_{xy} dF, \quad Q_z = - \int_F \tau_{xz} dF, \\ M_z &= - \int_F y\sigma_x dF, \quad M_y = \int_F z\sigma_x dF, \\ M_k &= \int_F (y\tau_{xz} - z\tau_{xy}) dF. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Знак « $-$ » в выражениях для  $Q_y, Q_z, M_z$  учитывает, что интегралы в этих выражениях соответствуют силам и моменту, направления которых противоположны установленным правилом знаков (см. рис. 2.10) положительным направлениям для внутренних силовых факторов.

Иногда для подсчета  $M_k$  удобно использовать полярные координаты  $\rho$  и  $\alpha$  (рис. 2.24). В этом случае составляющие касательных напряжений в соответствии с правилом их индексации будут  $\tau_{x\alpha}$  и  $\tau_{x\rho}$ . Подсчитывая  $M_k$

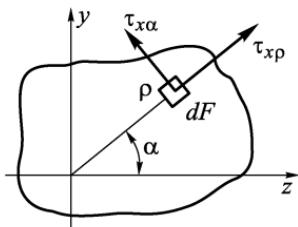


Рис. 2.24

как интеграл по сечению от моментов элементарных касательных усилий, получаем

$$M_k = \int_F \rho\tau_{x\alpha} dF. \quad (2.3.2)$$

**2.3.2.** Соотношения (2.3.1) позволяют найти внутренние силовые факторы по известным напряжениям в сечении. Но при расчете конструкций на прочность и жесткость возникает, как правило, обратная задача: сначала методом сечений определяются внутренние силовые факторы, а по ним требуется найти напряжения. Нетрудно видеть, что только на основ-

вании соотношений (2.3.1) такую задачу нельзя решить однозначно. Действительно, на рис. 2.25 показаны два различных распределения напряжений. Если в них  $(\sigma_1 + \sigma_2)/2 = \sigma_0$ , то им соответствует одинаковая продольная сила  $N = \sigma_0 F$ . Как мы покажем в дальнейшем, для однозначного определения напряжений по внутренним силовым факторам соотношения (2.3.1) необходимо дополнить информацией о характере распределения напряжений. Способы получения и использования такой информации будут рассмотрены в главах 4, 6, 8.

**2.3.3.** В большинстве руководств по сопротивлению материалов нашла отражение сложившаяся в расчетной практике традиция рассматривать элементарные напряженно-деформированные состояния бруса, когда в его поперечных сечениях возникают лишь отдельные внутренние силовые факторы.

Если в поперечных сечениях бруса отлична от нуля только продольная сила  $N$ , то напряженно-деформированное состояние такого бруса называют *центральным растяжением-сжатием*.

Если не равен нулю только крутящий момент, то говорят, что брус находится в состоянии *кручения*.

Если же не равны нулю только изгибающие моменты  $M_z$ ,  $M_y$  и перерезывающие силы  $Q_y$ ,  $Q_z$ , то напряженно-деформированное состояние такого бруса называют *изгибом*.

В главах 4, 6, 8 мы также рассмотрим эти элементарные состояния бруса и еще вернемся к частному виду для этих случаев соотношений (2.1.11), (2.1.13)–(2.1.16), (2.3.1).

## 2.4. Принцип Сен-Венана

**2.4.1.** Распределение напряжений в твердых телах обладает одним общим свойством, которое следует из анализа различных решений и подтверждается экспериментально. Это свойство составляет содержание *принципа Сен-Венана*.

Будем называть нагрузку локальной, если размеры площадки, к которой она приложена, малы по сравнению с размерами тела. Тогда принцип Сен-Венана формулируется так:

*Напряжения, вызванные локальной нагрузкой, в точках тела, достаточно удаленных от места приложения к нему этой нагрузки, мало зависят от конкретного характера распределения нагрузки, а определяются только ее главными вектором и моментом.*

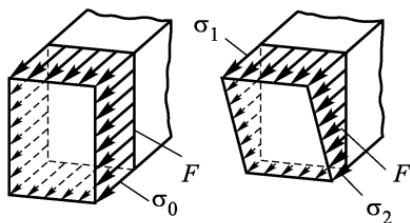


Рис. 2.25

Так, для показанных на рис. 2.26 трех способов приложения силы  $P$  к брусу напряженное состояние в точке  $A$ , удаленной от места нагружения, практически одинаково.

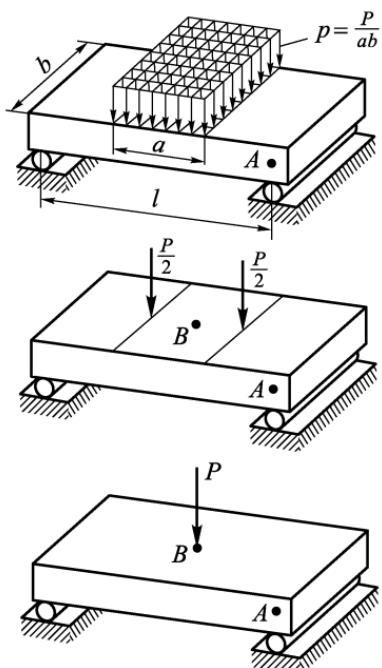


Рис. 2.26

близкой по величине к ширине  $b$  ( $d \sim b$ ).

Отметим также, что локальные нагрузки, статически эквивалентные нулю, т.е. с равными нулю главными вектором

и моментом, не вызывают напряжений вдали от площадок, к которым они приложены. На рис. 2.28 показана полоса, сжатая сосредоточенными силами  $P$ . Такая нагрузка является локальной и статически эквивалентной нулю, так как силы уравновешены. Область, в которой возникают существенные напряжения, заштрихована. Эту область называют *зоной Сен-Венана*. Мы ча-

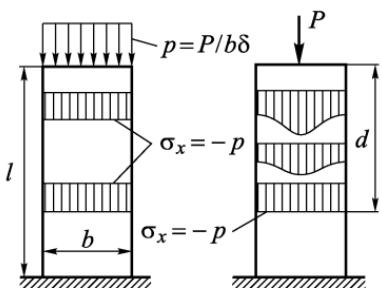


Рис. 2.27

сто пользуемся этим эффектом в быту, например, когда перекусываем проволоку клещами. При этом мы совершенно уверены,

что в местах, удаленных от места перекусывания примерно на диаметр проволоки, никаких деформаций проволоки не возникает.

**2.4.2.** Принцип Сен-Венана дает возможность оценить области применимости сосредоточенной и погонной нагрузок, введенных в разд. 1.3 как модели локальных нагрузок. Ясно, что эти модели можно применять в том случае, если нас интересуют напряжения вдали от места приложения локальных нагрузок.

Принцип Сен-Венана также широко используется при построении расчетных схем как моделей реальных конструкций. Он позволяет при расчете основного напряженного состояния отвлечься от реальных конструктивных особенностей выполнения отдельных узлов конструкции. Так, расчетной схеме балки, показанной на рис. 2.29, могут соответствовать самые различные конструктивные выполнения мест ее закрепления и приложения нагрузки. Некоторые из них показаны на рис. 2.30.

**2.4.3.** Формулировка принципа Сен-Венана несколько расплывчата. Так, в ней не конкретизированы размеры зоны, вне которой напряжения не зависят от характера распределения локальной нагрузки (зоны Сен-Венана). Опыт показывает, что обычно эти размеры близки, с одной стороны, к характерному размеру площадки нагружения, а с другой — к характерному размеру тела. Сказанное можно пояснить на примере деформации тонкостенного стержня (рис. 2.31 а). Приложенные к полкам стержня моменты изгибают полки в разные стороны. Если связывающая эти полки стенка отсутствует, то моменты вызовут одинаковый изгиб полок по всей их длине (рис. 2.31 б). По мере увеличения жесткости стенки (увеличения ее толщины  $\delta$ ), которая связывает полки и заставляет их компенсировать изгибы друг друга,

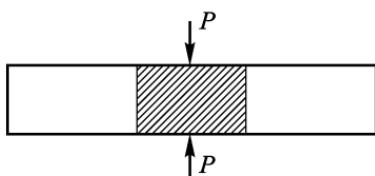


Рис. 2.28

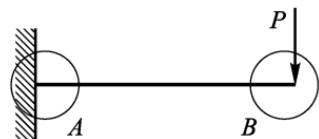


Рис. 2.29

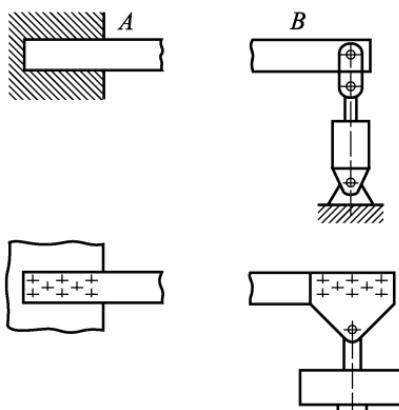


Рис. 2.30

зона изгиба полок будет уменьшаться. Анализ этой задачи показывает, что для тонкостенного стержня локальной можно считать нагрузку, приложенную к площадке, максимальный размер которой имеет порядок толщины сечения.

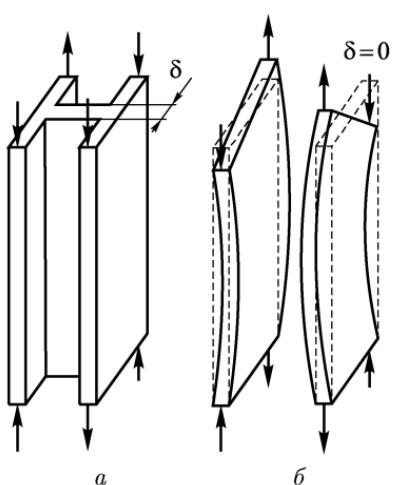


Рис. 2.31

**2.4.4 к.** Изложенный выше принцип был сформулирован Б. Сен-Венаном (1797–1886), одним из крупнейших механиков XIX века, в работе, касающейся анализа распределения напряжений в балках при изгибе. В своих работах Б. Сен-Венан, в частности, установил связь между точным решением задачи изгиба балки, которое построено в теории упругости, и приближенным решением используемой в сопротивлении материалов технической теории изгиба балок. Он определил области, в которых различия этих решений существенны, и таким образом установил пределы применимости результатов значительно более простой технической теории.

## B.2. Контрольные вопросы

**B.2.1.** Что мы называем внутренними силами? Какой метод применяется для их изучения?

**B.2.2.** Возникают ли внутренние силы в ненагруженном теле? В недеформированном теле?

**B.2.3.** В каком месте произойдет разрушение тела: там, где приложена максимальная внешняя нагрузка, или там, где внутренние силы превысят допустимый для материала тела предел?

**B.2.4.** Что мы называем отсеченной частью тела? В чем заключается основная идея метода сечений?

**B.2.5.** Почему обе отсеченные части, на которые разделено тело некоторым произвольным сечением, равноценны с точки зрения определения внутренних сил, действующих в этом сечении?

**B.2.6.** Что такое внутренние силовые факторы?

**B.2.7.** Покажите, что внутренние силовые факторы в сечениях 1 и 2 нагруженного уравновешенной системой сил тела (рис. 2.32) равны нулю.

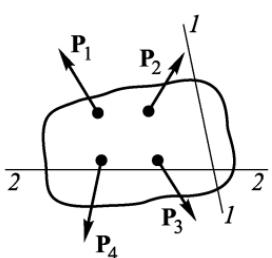
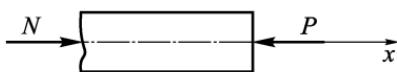


Рис. 2.32

**В.2.8.** Сколько уравнений равновесия отсеченной части и в какой форме (векторной или координатной) необходимо записать их для вычисления внутренних силовых факторов в сечении?



**В.2.9.** От чего зависят знаки внутренних силовых факторов: от характера их действия на

отсеченную часть или от направления координатных осей? Продольная сила  $N$  (рис. 2.33) положительна или отрицательна?

**В.2.10.** Какие величины связаны дифференциальными зависимостями для бруса?

**В.2.11.** В каком месте бруса внутренние силовые факторы будут изменяться скачкообразно?

**В.2.12.** Можно ли судить о прочности и жесткости бруса, зная только величину внутренних силовых факторов в его поперечных сечениях?

**В.2.13.** Что такое напряжение? Дайте определение напряжению в точке (полного напряжения) данного сечения. На какие компоненты принято раскладывать полное напряжение? Как они называются и обозначаются?

**В.2.14.** Обозначьте напряжения (с расстановкой индексов) на рис. 2.34 согласно принятым правилам обозначения. Укажите их знаки.

**В.2.15.** Что такое напряженное состояние в точке?

**В.2.16.** Сформулируйте свойство парности касательных напряжений.

**В.2.17.** Обозначьте напряжения, изображенные на рис. 2.35, и дополните их недостающими парными напряжениями.

**В.2.18.** Как, зная напряжения в поперечном сечении бруса, найти внутренние силовые факторы в этом сечении? Как решить обратную задачу?

**В.2.19.** В чем заключается принцип Сен-Венана? Где и как он используется?

Рис. 2.33

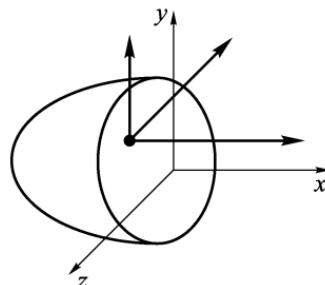


Рис. 2.34

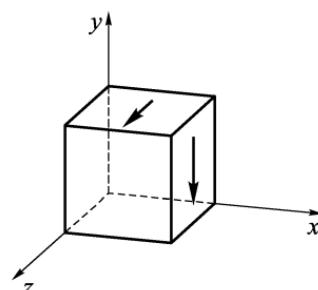


Рис. 2.35

## ГЛАВА 3

# МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ

### 3.1. Элементарные деформации

**3.1.1.** В предыдущей главе были рассмотрены свойства внутренних сил, обусловленные только условиями равновесия тел и их частей. Особо подчеркнем, что эти свойства никак не зависят от материала, из которого состоят тела. И для двух тел с одинаковой геометрией и одинаковыми нагрузками, но выполненных из различных материалов, все соотношения гл. 2 будут абсолютно одинаковы (конечно, при условии малости деформаций). Но, как уже отмечалось, этих соотношений недостаточно для того, чтобы полностью определить распределение внутренних сил в теле. Для этого необходимо изучить свойства материала тела. Причем из всевозможных свойств материала прочность и жесткость тела определяются способностью материала сопротивляться деформированию. А эти его свойства невозможны определить без эксперимента. Но эксперимент — это, как правило, трудоемкое и дорогое дело. Поэтому он должен быть спланирован так, чтобы необходимая информация была получена с наименьшими затратами.

**3.1.2.** Рассмотрим деформацию элементарного кубика с ребрами длиной  $l_0$  и направим оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  вдоль ребер. При его деформации изменяются длины ребер и углы между ними. Конструкционные материалы (металлы, дерево, композитные материалы и т.п.) допускают обычно небольшие деформации до разрушения. Поэтому мы ограничимся изучением таких деформаций кубика, при которых изменения длин его ребер (удлинения) малы по сравнению с начальной длиной ребер  $l_0$ , а изменения углов между ребрами (сдвиги) малы в сравнении с начальными прямыми углами между ними. В этих ограничениях произвольная малая деформация кубика (с точностью до величин высшего порядка малости) сводится к превращению его в коцугольный параллелепипед. Такую деформацию кубика можно

представить как сумму (суперпозицию) шести элементарных деформаций, показанных на рис. 3.1. В первых трех из них углы остаются прямыми, а изменяются только длины ребер соответственно на малые величины  $\Delta l_x$ ,  $\Delta l_y$ ,  $\Delta l_z$ . Деформации такого рода называют *удлинениями*, считая их положительными, если

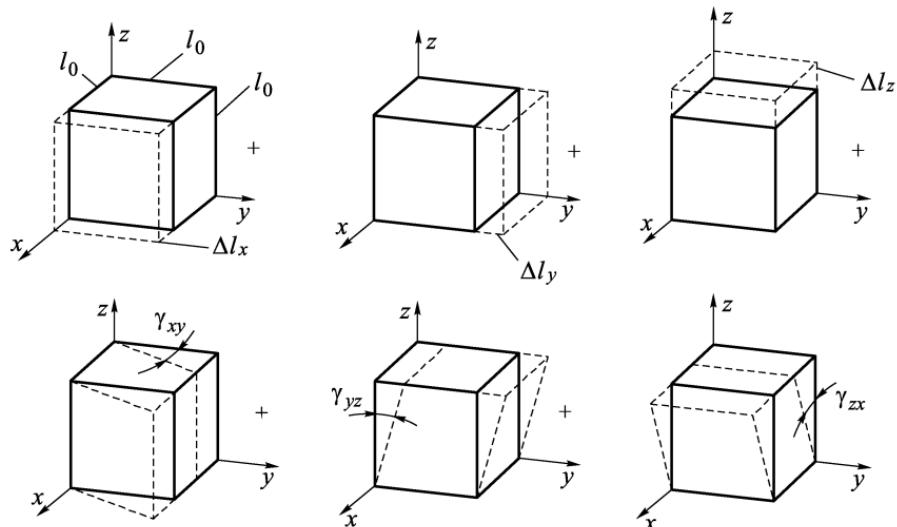


Рис. 3.1

длина ребер увеличивается. В остальных трех деформациях, наоборот, длины ребер остаются неизменными, а меняются углы между ребрами в плоскостях  $xy$ ,  $yz$  и  $zx$  соответственно на величины  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$  и  $\gamma_{zx}$ . Такие деформации называют *сдвигами*, и их считают положительными, если прямой угол при деформации уменьшается.

Сдвиги  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$ , будучи угловыми величинами, являются безразмерными, и при одинаковой сдвиговой деформации кубиков различной величины они равны. Это свойство сдвигов позволяет легко переносить результаты испытаний образцов на тела, которые по своим размерам могут существенно отличаться от образцов.

Очевидно, что удлинения  $\Delta l_x$ ,  $\Delta l_y$ ,  $\Delta l_z$  (их также называют абсолютными удлинениями) таким свойством не обладают. Поэтому удобнее иметь дело с *относительными удлинениями* (относительными деформациями):

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l_x}{l_0}, \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta l_y}{l_0}, \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta l_z}{l_0}. \quad (3.1.1)$$

Действительно, легко видеть, что если кубик с ребрами длиной  $2l_0$  составить из восьми кубиков с ребрами длиной  $l_0$  и придать всем этим кубикам одинаковые относительные деформации, то и относительные деформации составленного кубика будут такими же. Часто  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  называют удлинениями, опуская слово «относительные» (если это, конечно, не вызывает путаницы).

Для изотропного материала кажется достаточным изучить его свойства при удлинении в одном направлении и при сдвиге в одной из плоскостей. Но это будет так только в пределах закона Гука.

Испытания анизотропных материалов приходится проводить с учетом анизотропии. В общем случае анизотропии необходимо исследовать все шесть элементарных деформаций.

**3.1.3 К.** Для уточнения понятия относительной деформации, введенного формулами (3.1.1), рассмотрим продольное удлинение стержня, длина которого до деформации равна  $l_0$ . Если в результате деформации его длина стала  $l_0 + \Delta l$ , то его продольное удлинение по формулам (3.1.1) будет

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (3.1.2)$$

В то же время удлинение стержня  $\Delta l$  можно рассматривать как результат процесса, состоящего из ряда последовательных удлинений. Пусть на одном из этапов этого процесса длина до начала этапа была  $l$ , а длина после его окончания стала  $l + dl$ . Тогда на этом этапе относительное удлинение стержня будет

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{dl}{l}. \quad (3.1.3)$$

Это удлинение обозначено через  $d\bar{\varepsilon}$  потому, что по своему смыслу оно является лишь приращением удлинения  $\bar{\varepsilon}$ , полученного стержнем в итоге всего процесса.

Тогда это суммарное по всем этапам относительное удлинение можно подсчитать как

$$\bar{\varepsilon} = \int_{l_0}^{l_0 + \Delta l} d\bar{\varepsilon}. \quad (3.1.4)$$

Учтем выражение (3.1.3) и проинтегрируем (3.1.4). Получим

$$\bar{\varepsilon} = \int_{l_0}^{l_0 + \Delta l} \frac{dl}{l} = \ln(l_0 + \Delta l) - \ln(l_0) = \ln \frac{l_0 + \Delta l}{l_0} = \ln(1 + \varepsilon). \quad (3.1.5)$$

Деформацию  $\bar{\varepsilon}$ , введенную соотношением (3.1.3) так, что в процессе удлинения в каждый момент учитывается текущая (мгно-

венная) длина стержня, называют *логарифмической деформацией*. Связь между деформацией  $\varepsilon = \Delta l/l_0$ , отнесенной к начальной длине  $l_0$ , и логарифмической деформацией  $\bar{\varepsilon}$  определяется соотношением (3.1.5). На рис. 3.2 представлено отношение  $\bar{\varepsilon}/\varepsilon$  в зависимости от  $\varepsilon$ . Из него видно, что при  $\varepsilon < 20\%$  различие между двумя деформациями незначительно. Так, при  $\varepsilon = 20\%$  оно составляет  $\sim 10\%$ . А так как для конструкционных материалов максимальная допустимая деформация обычно не превышает 10–15 %, то вполне допустимо пользоваться менее точным, но более простым определением деформаций, даваемым формулами (3.1.1).

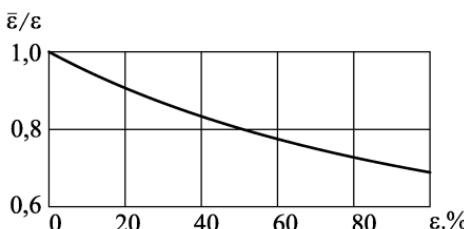


Рис. 3.2

3.2. Испытания на растяжение и сжатие

**3.2.1.** Для исследования свойств материалов при удлинении проводят испытания на растяжение и сжатие. Методика этих испытаний установилась и к настоящему времени стандартизирована.

Испытываются образцы стандартной формы на специальных испытательных машинах. При выборе формы образца учитывают основное требование, чтобы на той части образца, где будут проводиться измерения, напряженное состояние было однородным (одинаковым по длине). Для этого изготавливают круглые точечные или плоские образцы. Последние используют для испытания листовых материалов. Форма и размеры одного из стандартных образцов показаны на рис. 3.3. Выступы по концам образца служат для закрепления их в захватах испытательной машины. Захваты имеют специальную конструкцию, позволяющую создавать растягивающую образец силу так, чтобы она действовала почти строго вдоль оси образца. На основании принципа Сен-Венана деформация средней части образца между точками  $A$  и  $B$  не зависит от расположения нагрузки в зоне захвата, и поэтому она однородна. В зоне однородности выбирают измерительную базу длины  $l_0$  и устанавливают специальный прибор (тензометр), позволя-

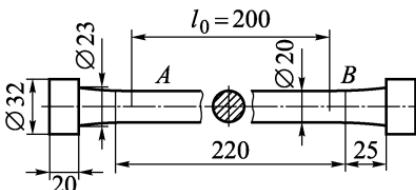


Рис. 3.3

ющий с большой точностью измерять удлинение  $\Delta l$  базы  $l_0$ . Динамометры испытательной машины дают возможность в каждый момент фиксировать растягивающую образец силу  $P$ . Испытания проводят ступенями, фиксируя на каждой ступени нагрузления величины  $P$  и  $\Delta l$ . Обычно испытательные машины снабжены также и устройством, позволяющим автоматически строить график зависимости  $P$  от  $\Delta l$ .

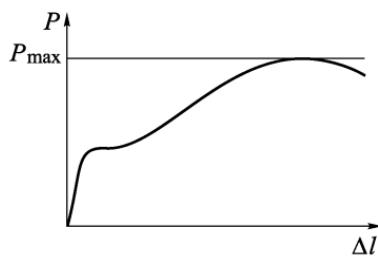


Рис. 3.4

График  $P(\Delta l)$ , построенный по точкам или автоматически, называют *диаграммой растяжения*. Для малоуглеродистой стали он имеет вид, показанный на рис. 3.4.

Пользоваться диаграммой растяжения неудобно, так как

она существенно зависит от размера поперечного сечения образца и длины выбранной измерительной базы  $l_0$ . Для того чтобы исключить влияние этих факторов, диаграмму  $P(\Delta l)$  перестраивают, переходя к величинам  $\sigma$  и  $\varepsilon$  по следующим формулам:

$$\sigma = \frac{P}{F_0}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (3.2.1)$$

где  $F_0$  – площадь поперечного сечения образца в пределах базы  $l_0$  до нагружения (начальная площадь сечения образца).

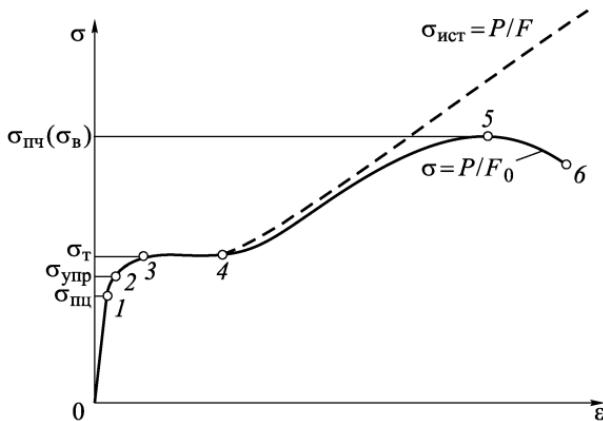


Рис. 3.5

Диаграмма  $\sigma(\varepsilon)$  для растяжения малоуглеродистой стали показана на рис. 3.5. Она практически не зависит от размеров образца и фактически является характеристикой материала.

На диаграмме  $\sigma(\varepsilon)$  можно отметить несколько характерных точек. На участке 0–1 (при  $\sigma \leq \sigma_{\text{пц}}$ ) зависимость между  $\sigma$  и  $\varepsilon$  линейная. Это участок закона Гука, на котором

$$\sigma = E\varepsilon \quad (\sigma \leq \sigma_{\text{пц}}). \quad (3.2.2)$$

Коэффициент пропорциональности  $E$  называют *модулем Юнга* (*модулем упругости*) при растяжении или *модулем упругости 1-го рода*, а предельные напряжения  $\sigma_{\text{пц}}$ , при которых еще выполняется закон Гука, называют *пределом пропорциональности*.

На участке 0–2 (при  $\sigma \leq \sigma_{\text{упр}}$ ) деформации упруги, т.е. после снятия нагрузки размеры образца сразу же становятся равными его размерам до нагружения. Напряжение  $\sigma_{\text{упр}}$  называется *пределом упругости*.

Для большинства конструкционных материалов  $\sigma_{\text{пц}}$  и  $\sigma_{\text{упр}}$  близки. В то же время для некоторых видов пластмасс и для большинства резиноподобных материалов различие между  $\sigma_{\text{пц}}$  и  $\sigma_{\text{упр}}$  может быть существенным.

На участке 3–4 (при  $\sigma = \sigma_t$ ) происходит рост деформаций без роста напряжений, т.е. образец удлиняется при постоянной нагрузке. Это явление называют *течением материала*; напряжение  $\sigma_t$ , при котором оно происходит, — *пределом текучести*, а участок 3–4 на диаграмме  $\sigma(\varepsilon)$  — *площадкой текучести*.

На участке 4–5, т.е. при  $\sigma_t \leq \sigma \leq \sigma_{\text{пч}}$ , для увеличения деформаций образца снова требуется увеличение приложенной к нему силы. Этот участок диаграммы  $\sigma(\varepsilon)$  называют *участком упрочнения*, а максимальную величину  $\sigma = P/F_0$  при испытании образца обозначают через  $\sigma_{\text{пч}}$  и называют *пределом прочности*. Для этой величины широко принято также обозначение  $\sigma_b$  и название — *временное сопротивление*.

На участке 5–6 деформация образца сопровождается падением нагрузки и в точке 6 образец разрушается.

На рис. 3.6 показаны последовательно деформированные формы образца. На участке упрочнения (4–5) (см. рис. 3.5) на образце появляется сначала мало заметное, а потом все более явное местное сужение, называемое *шейкой*, развитие которого заканчивается разрывом образца.

Обратим внимание читателя на тот факт, что до появления шейки деформация образца на базе  $l_0$  однородна и площадь его поперечного сечения  $F$  мало отличается от своей начальной величины  $F_0$ . Поэтому на этом этапе испытания величина  $\sigma = P/F_0$  близка к напряжениям в образце. Но при появлении шейки деформация становится неоднородной и величина  $\sigma = P/F_0$  близка к напряжениям в образце вне шейки. В том же месте образца, где образовалась шейка, нормальные напряжения в поперечных сечениях образца меняются как по длине образца, так и в поперечном сечении. Они достигают своего мак-

симального значения в самом тонком сечении шейки, площадь которого обозначим через  $F$ . Тогда среднее по этому сечению напряжение равно  $P/F$ , его часто называют *истинным напряжением* и обозначают  $\sigma_{\text{ист}}$ . В процессе деформаций образца истинные напряжения  $\sigma_{\text{ист}}$  всегда возрастают, их график показан на рис. 3.5 пунктиром.

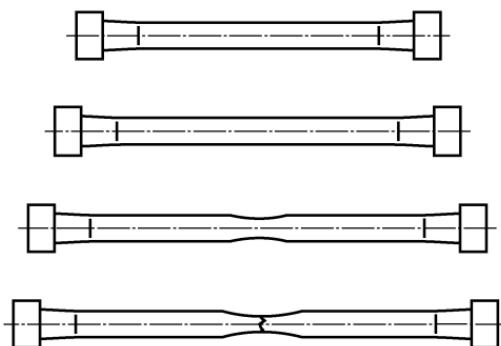


Рис. 3.6

Учитывая эти особенности испытаний, диаграмму  $\sigma(\varepsilon)$  называют *диаграммой условных напряжений*. Получаемое по ней значение предела прочности  $\sigma_{\text{пч}} = P_{\max}/F_0$  значительно меньше истинных напряжений в шейке в момент разрыва образца. Поэтому  $\sigma_{\text{пч}}$  называют *условным пределом прочности*. Несмотря на свою условность, он является достаточно удобной характеристикой для сравнения прочности различных материалов.

Характерные напряжения  $\sigma_{\text{пч}}$ ,  $\sigma_{\text{упр}}$ ,  $\sigma_t$  и  $\sigma_{\text{пч}}$ , а также модуль упругости при растяжении  $E$  называют *механическими характеристиками материала*.

**3.2.2.** Диаграмма  $P(\Delta l)$  и соответствующая ей диаграмма  $\sigma(\varepsilon)$ , показанные на рисунках 3.4, 3.5, получены при таком испытании образца, в процессе которого его деформация постоянно растет. Если остановить рост деформации образца и начать ее уменьшать, то нагрузка на образец уменьшится. Такой процесс называют *разгрузкой*. На рис. 3.7 стрелками показан ход диаграммы  $\sigma(\varepsilon)$  при нагрузке образца до точки  $B$  и далее при разгрузке. При этом характерно, что зависимость  $\sigma(\varepsilon)$  на участке разгрузки  $B-D$  практически является прямой линией, которая параллельна участку закона Гука  $0-A$ .

В точке  $D$  нагрузка на образец отсутствует, а его деформация  $\varepsilon_{\text{ост}}$  при этом называется *остаточной деформацией*.

Если этот образец снова начать нагружать, то его диаграммой  $\sigma(\varepsilon)$  будет кривая  $DBC$ . Процесс докручивания показан стрелкой-

ми на рис. 3.7. Таким образом, предварительно деформированный образец будет уже деформироваться без площадки текучести, а его предел пропорциональности, соответствующий напряжению в точке  $B$ , будет выше  $\sigma_{\text{пп}}$  для недеформированного образца. Этим свойством иногда пользуются для увеличения  $\sigma_{\text{пп}}$  путем предварительного деформирования материала. Следует, однако, заметить, что выигрывая в величине  $\sigma_{\text{пп}}$  при растяжении, мы при этом уменьшаем  $\sigma_{\text{пп}}$  при сжатии. Поэтому такую модификацию свойств материала при растяжении имеет смысл проводить лишь в том случае, если он будет в конструкции работать только на растяжение.

Такие же свойства материал приобретает и в результате некоторых технологических операций, как, например, холодная штамповка, гибка и т.п. Говорят, что материал приобретает технологический наклеп.

Отметим, что после отпуска (нагрева до характерной для данного материала температуры отпуска и последующем медленном охлаждении) диаграмма  $\sigma(\varepsilon)$  деформированного образца становится такой же, как у недеформированного. Иными словами, отпуск снимает все изменения, которые накопились в материале за счет его деформирования, в том числе и остаточные напряжения.

**3.2.3.** Изложенная выше методика испытаний и соответствующая ей терминология складывались постепенно и включили в себя результаты работ многих ученых. Окончательную форму они приняли в XIX веке, когда основным конструкционным материалом была малоуглеродистая сталь. Диаграмма  $\sigma(\varepsilon)$  для этой стали с ее характерными точками (см. рис. 3.5) и определила номенклатуру механических характеристик.

В XX веке во многом под влиянием требований авиации стали широко использоваться новые конструкционные материалы — сплавы алюминия, магния, а в последнее десятилетие и сплавы титана. Эти материалы имеют диаграмму  $\sigma(\varepsilon)$  (рис. 3.8), для которой характерно отсутствие ярко выраженной площадки текучести.

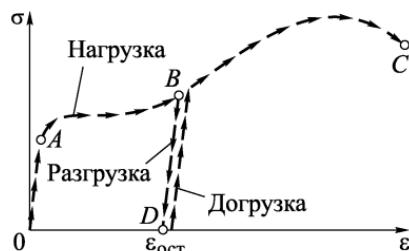


Рис. 3.7

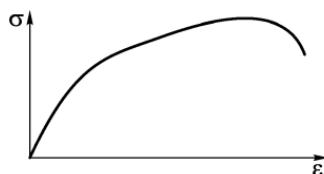


Рис. 3.8

Разработанные для стали механические характеристики оказались удобными в расчетах. В результате этого, а также в силу

традиций, номенклатуру механических характеристик для новых материалов стремились привести к уже используемой. Для них были введены условные пределы упругости и текучести. При этом за условный предел упругости принято напряжение, при достижении которого и последующей разгрузке остаточная деформация образца составляет  $\varepsilon_{\text{ост}} = 5 \cdot 10^{-5} = 0,005\%$ . Такой предел упругости обозначают через  $\sigma_{0,005}$  (рис. 3.9). Иногда за предел упругости

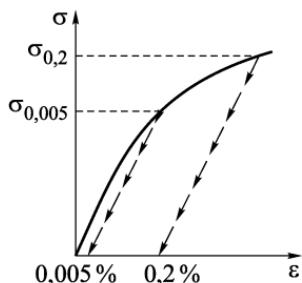


Рис. 3.9

принимают напряжение  $\sigma_{0,001}$ , т.е. такое, которому соответствует остаточная деформация  $\sigma_{\text{ост}} = 0,001\%$ .

В качестве условного предела текучести обычно берется  $\sigma_{0,2}$ , т.е. напряжение, соответствующее остаточной деформации

$\varepsilon_{\text{ост}} = 0,002 = 0,2\%$  (рис. 3.9). В некоторых случаях в качестве предела текучести принимается  $\sigma_{0,5}$ .

В большинстве случаев достаточная для инженерной практики точность расчета достигается в предположении, что деформация материала пропорциональна напряжениям, т.е. подчиняется закону Гука, вплоть до  $\sigma_t$ . Такое предположение соответствует замене реальной

диаграммы  $\sigma(\varepsilon)$  ломаной, которая показана на рис. 3.10 пунктиром.

Рис. 3.10

Фактически такое предположение отождествляет  $\sigma_{\text{пп}}$  с  $\sigma_t$ .

**3.2.4.** Испытания материалов при сжатии проводятся на коротких образцах, изготовленных в форме кубов, а также призм или цилиндров с высотой, немногим превышающей минимальный поперечный размер. Так, для цилиндрического образца диаметром в один сантиметр высота берется не больше двух диаметров. Это вызвано тем, что при большей высоте образца его сжатие будет сопровождаться искривлением, что исказит результаты испытаний.

Диаграмма  $\sigma(\varepsilon)$  при сжатии строится по диаграмме  $P(\Delta l)$  точно так же, как и при растяжении, т.е. по формулам (3.2.1). Вид этой диаграммы для образца из малоуглеродистой стали показан штрихпунктиром 3 на рис. 3.11. Для сравнения там же приведены диаграммы  $\sigma(\varepsilon)$  (сплошная линия 1) и  $\sigma_{\text{ист}}(\varepsilon)$  (штриховая линия 2) при растяжении.

При сжатии образец укорачивается, а его поперечные размеры увеличиваются. Причем из-за трения между торцами образца и плитами сжимающего его пресса образец принимает бочкообразную форму. На рис. 3.12 показаны последовательные деформированные формы цилиндрического образца из малоуглеродистой стали. Ввиду высоких пластических свойств этого материала образцы из него при испытаниях на сжатие не удается разрушить.

Чтобы отличить механические характеристики при растяжении и сжатии, к их обозначениям добавляют в индексе буквы «р» и «с» соответственно. Так, предел текучести при растяжении обозначается через  $\sigma_{tr}$ , а при сжатии через  $\sigma_{tc}$ .

В табл. 3.1 даны наиболее важные для расчетов механические характеристики некоторых часто используемых в конструкциях материалов. В этой таблице приведены также значения удлинений при разрыве;  $\delta$  — среднее, остаточное удлинение, которое получает при разрыве участок образца с первоначальной длиной, равной пяти начальным диаметрам образца и такой, что шейка образовалась как раз в его середине. Иногда  $\delta$  подсчитывают на базе в 10 диаметров.

Для измерения  $\delta$  на образце до испытания наносят ряд рисок так, чтобы расстояние между ними было равно диаметру образца. После разрыва образца совмещают его части по сечению разрыва и замеряют расстояние  $l_1$  между теми двумя рисками, которые примерно симметрично расположены по отношению к шейке и расстояние между ними до испытания было равно  $5d$ . Тогда  $\delta$  можно подсчитать как

$$\delta = \frac{l_1 - 5d}{5d} \cdot 100 \%$$

**3.2.5.** Материалы, которые способны получать большие остаточные деформации до разрушения, называют *пластичными*.

Пластические свойства материалов определяются их текучестью. Механизм течения материала состоит в скольжении его частиц друг относительно друга по поверхности скольжения. При растяжении и сжатии эти поверхности располагаются под углом около  $45^\circ$  по отношению к оси образца (рис. 3.13 а).

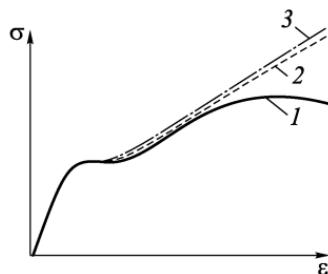


Рис. 3.11

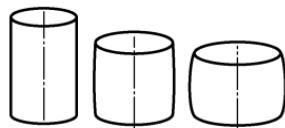


Рис. 3.12

Материал	Термообработка	$E$ , МПа	$\sigma_{tp}$ , МПа
1	2	3	4
Сталь малоуглеродистая	Незакаленная	$2 \cdot 10^5$	250
Сталь 30	Незакаленная	$2 \cdot 10^5$	330
Сталь 30	Закаленная	$2 \cdot 10^5$	1030
Сталь 45	Незакаленная	$2 \cdot 10^5$	370
Сталь 45	Закаленная	$2 \cdot 10^5$	1040
Сталь 30 ХГСА	То же	$2 \cdot 10^5$	1400
Сталь ЭИ503	То же	$1,8 \cdot 10^5$	800
Чугун серый СЧ28	—	$0,7 \cdot 10^5$	140

1	2	3	4
Алюминиевый сплав Д 16	Закалка + естественное старение	$0,75 \cdot 10^5$	320

Таблица 3.1

$\sigma_{bc}$ , МПа	$\delta$ , %
7	8
—	42
—	28
—	11
—	24
—	13
—	10
—	15
640	0,6

чание табл. 3.1

7	8
—	13

Внешне этот эффект хорошо наблюдается при растяжении полированных образцов, блестящая поверхность которых при наступлении текучести становится матовой. Под микроскопом хорошо видно, что это происходит за счет появления на поверхности сетки полос, наклоненных под углом  $45^\circ$  к оси образца (рис. 3.13 б). Эти полосы являются следами поверхностей скольжения на поверхности образца. Их называют линиями Людерса—Чернова. Впервые они были независимо описаны немецким ученым В. Людерсом (1860) и известным русским ученым, одним из основателей металловедения Д. К. Черновым (1884).

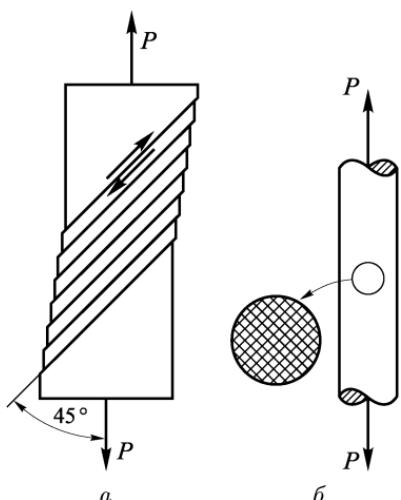


Рис. 3.13

Материалы, которые, наоборот, способны разрушаться без образования заметных остаточных деформаций, называют *хрупкими*. Удлинение при разрыве  $\delta$  как раз и характеризует пластические свойства материала. Обычно для хрупких материалов  $\delta$  не превышает  $2 \div 5\%$ .

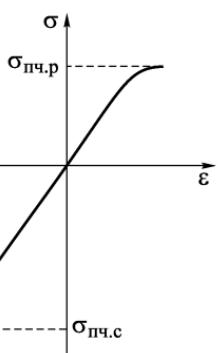
Величину  $\delta = 5\%$  условно принимают за границу, разделяющую хрупкие и пластичные материалы.

Пластичными материалами являются стали, сплавы алюминия и титана и большинство других конструкционных материалов. Пластичность лежит в основе многих технологических процессов, таких, как гибка, штамповка, волочение и т.п. Хрупкими материалами являются чугун, стекло, бетон и др.

Диаграмма  $\sigma(\varepsilon)$  для хрупкого материала показана на рис. 3.14. У

такого материала отсутствует явление текучести и деформации упруги почти вплоть до разрушения. Как правило, для пластичных материалов пределы текучести при растяжении  $\sigma_{tr}$  и сжатии  $\sigma_{tc}$  близки и их принято считать равными. Для хрупких же материалов характерно существенное различие между пределами прочности при растяжении  $\sigma_{пч.р}$  и  $\sigma_{пч.с}$ . Так, для чугуна

Рис. 3.14



отношение  $\sigma_{\text{пч.р}}/\sigma_{\text{пч.с}}$  лежит в пределах  $0,2 \div 0,4$ . Еще меньше это отношение для бетона и керамических материалов.

Характер разрушения образцов из хрупких материалов при растяжении и сжатии различен. При растяжении образец разрушается по плоскости, нормальной к оси образца, т.е. к продольной силе (рис. 3.15 а). При сжатии же разрушение происходит по плоскостям, наклонным к оси образца примерно под углом в  $45^\circ$  (рис. 3.15 б), или по продольным плоскостям (рис. 3.15 в). Последний вид разрушения происходит, если принятые специальные меры для устранения трения между торцами образца и плитами пресса, для чего их смазывают парафином или другими аналогичными смазывающими веществами. Объяснение таких форм разрушения будет дано в гл. 11.

Некоторые материалы, наоборот, лучше работают на растяжение, чем на сжатие. К ним относятся материалы, имеющие волокнистую или слоистую структуру, такие, как дерево, некоторые виды композитных материалов. Но встречаются и металлы, обладающие таким свойством, например, магний.

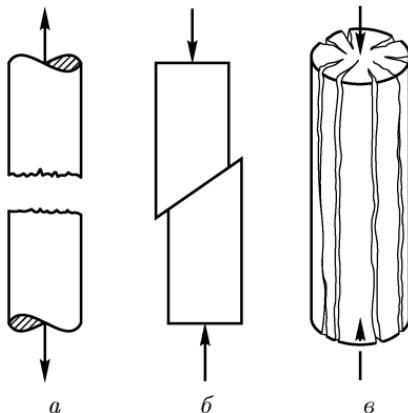


Рис. 3.15

### 3.3. Поперечная деформация. Коэффициент Пуассона

**3.3.1.** В экспериментах на растяжение и сжатие замечено, что продольная деформация образца всегда сопровождается поперечной деформацией. При удлинении образца его поперечные размеры уменьшаются не только при образовании шейки, но и с самого начала деформирования образца, а при сжатии поперечные размеры образца увеличиваются. На рис. 3.16 пунктиром показана деформированная форма базового участка образца, размеры которого до деформации были  $l_0$  и  $d_0$ , а в результате деформации изменились на величины  $\Delta l$  и  $\Delta d$ . Тогда его отно-

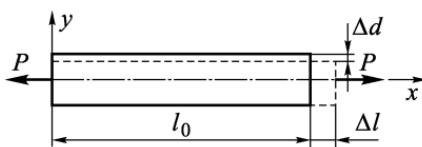


Рис. 3.16

сительные деформации будут

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{и} \quad \varepsilon_y = -\frac{\Delta d}{d_0}. \quad (3.3.1)$$

Знак « $-$ » в выражении для  $\varepsilon_y$  учитывает, что поперечный размер уменьшается и поэтому его относительная деформация отрицательна.

Опыты показывают, что при деформациях в пределах закона Гука отношение между продольной  $\varepsilon_x$  и поперечной  $\varepsilon_y$  деформациями остается постоянным, т.е.

$$\varepsilon_y = -\mu \varepsilon_x, \quad (3.3.2)$$

где  $\mu$  — постоянный коэффициент, называемый коэффициентом Пуассона. Величина  $\mu$  зависит только от материала и поэтому является его механической характеристикой.

**3.3.2.** Для металлов величина  $\mu$  лежит обычно в пределах  $0,2 \div 0,35$ , а для различных изотропных материалов —  $0 \div 0,5$ .

Заметим, что из физических соображений  $\mu \leq 0,5$ . Для того чтобы понять этот факт, рассмотрим объемную деформацию кубика с единичными ребрами, растянутого в одном из координатных направлений.

На рис. 3.17 штриховыми линиями показано деформированное состояние такого кубика. Его ребра в направлении растяжения удлиняются на величину  $\varepsilon$ , а в поперечном направлении укоротятся на величину  $\mu\varepsilon$ . Найдем приращение объема  $\Delta V$  кубика. Его объем до деформации  $V_0 = 1 \cdot 1 \cdot 1$ , а после деформации  $V = (1 + \varepsilon)(1 - \mu\varepsilon)(1 - \mu\varepsilon)$ . Тогда

$$\Delta V = V - V_0 = (1 + \varepsilon)(1 - \mu\varepsilon)(1 - \mu\varepsilon) - 1 = (1 - 2\mu)\varepsilon - \mu^2\varepsilon^2 + \mu^2\varepsilon^3.$$

Так как деформации малы, т.е.  $\varepsilon \ll 1$ , то вторым и третьим слагаемыми в этой сумме можно пренебречь по сравнению с первым. Поэтому

$$\Delta V \approx (1 - 2\mu)\varepsilon. \quad (3.3.3)$$

Отсюда видно, что  $\Delta V = 0$  при  $\mu = 0,5$ . А это значит, что объем материала при деформации не изменяется, т.е. материал является несжимаемым. Практически несжимаемыми являются многие жидкости. Опыты показывают, что при течении металлов величина  $\mu$  также близка к 0,5.

Если бы коэффициент  $\mu$  оказался большим 0,5, то, как следует из формулы (3.3.3), такой материал обладал бы парадоксальными свойствами: при растягивающих деформациях его объем

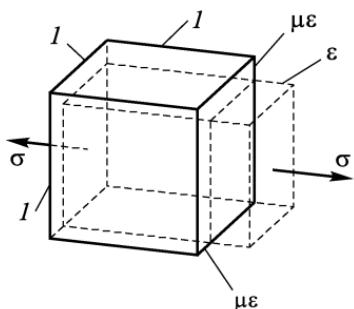


Рис. 3.17

уменьшался бы, а при сжимающих — увеличивался. Такое свойство позволило бы создать вечный двигатель. Мы себе такой задачи не ставим, но читатель при некоторой доле фантазии может придумать подобные гипотетические двигатели. Основу такого двигателя могло бы составить устройство, изображенное на рис. 3.18. Оно состоит из абсолютно жесткого цилиндра 1 с поршнем 2. Объем цилиндра заполнен несжимаемой жидкостью 3, в которую погружен некоторый объем 4 из материала с  $\mu > 0,5$ . При нагружении поршня силой  $P$  объем 4 увеличился бы и поршень передвинулся бы навстречу силе, т.е. была совершена отрицательная работа.

Иными словами, если бы сила  $P$  создавалась каким-либо грузом, то этот груз вместе с поршнем 2 поднялся бы на некоторую величину и таким образом совершенно «бесплатно» образовался бы необходимый для вечного двигателя запас энергии.

**3.3.3К.** Поперечные деформации в экспериментах на растяжение впервые, по-видимому, были отмечены Т. Юнгом и описаны в его курсе лекций по натурфилософии в 1807 г. Французский ученый С. Пуассон (1781–1840) в 1829 г. теоретически пришел к выводу о необходимости появления поперечных деформаций. При этом он исходил из модели среды как системы частиц, между которыми действуют молекулярные силы.

### 3.4. Влияние условий при испытаниях на механические характеристики

**3.4.1.** Деление материалов на пластичные и хрупкие является условным и не только потому, что условной является граница  $\delta = 5\%$ . Эти свойства во многом зависят от внешних условий, при которых производятся испытания. Так, при низких температурах сталь может стать хрупким материалом, а образец из чугуна, испытываемый при высоком давлении, разрушается с образованием шейки и ведет себя как пластичный материал. Одна и та же высоколегированная сталь может быть пластичной после отпуска и хрупкой после закалки.

**3.4.2.** На рис. 3.19 даны зависимости модуля упругости  $E$ , предела прочности  $\sigma_v$ , предела текучести  $\sigma_t$  и удлинения при разрыве  $\delta$  для малоуглеродистой стали от температуры, при которой проводятся испытания.

Некоторое ухудшение пластических свойств в области температур  $150 \div 300^\circ$  характерно только для малоуглеродистых

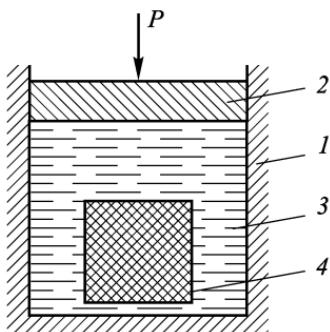


Рис. 3.18

сталей. Легированные стали и сплавы алюминия обычно при повышении температуры улучшают пластические свойства. На рис. 3.20 приведено изменение предела текучести  $\sigma_t$  при нагреве для алюминиевых сплавов, употребляемых в США.

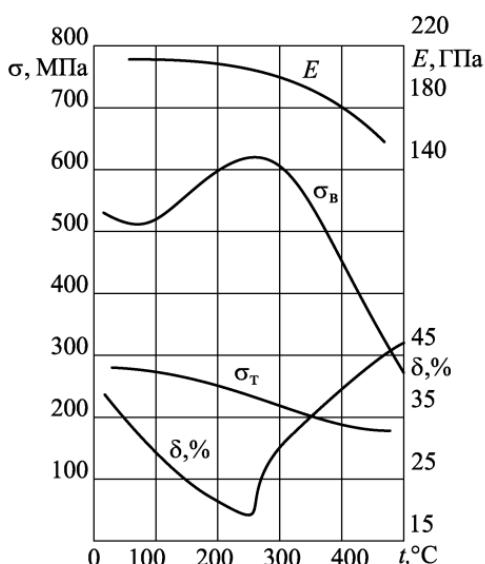


Рис. 3.19

Влияние связанных с повышением температуры технологических операций, таких, как закалка и отпуск, на механические

характеристики можно проследить по табл. 3.1. Закалка обычно приводит к ухудшению пластических свойств сталей, а отпуск — к их восстановлению.

**3.4.3.** Другим фактором, от которого зависят механические характеристики материалов, является время.

На обычных испытательных машинах скорость деформирования образцов  $d\varepsilon/dt$  невелика, она лежит в преде-

лах  $10^{-5} \div 10^{-2} \text{ с}^{-1}$  и поэтому практически не сказывается на результатах испытаний. По мере увеличения скорости деформирования наступают такие условия, когда пластические деформации не успевают полностью развиться. Поэтому с увеличени-

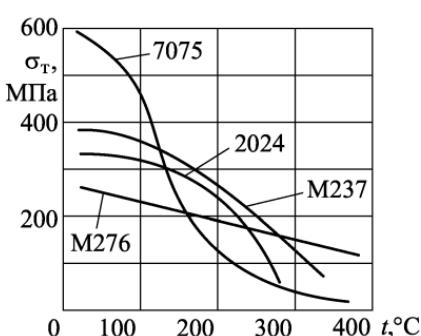


Рис. 3.20

ем скорости деформирования сами деформации становятся все более хрупкими, а разрушающая нагрузка увеличивается из-за меньшего развития шейки. Модуль упругости от скорости практически не зависит. Это подтверждается совпадением величин модуля, полученных из испытаний на медленное статическое растяжение, и из испытаний, основанных на замере частот колебаний.

При дальнейшем увеличении скорости деформирования существенными становятся процессы распространения волн деформаций по образцам. В этих условиях волновая природа процесса делает невозможным создание необходимого для измерений поля однородных деформаций. Поэтому прямых количественных экспериментальных данных о свойствах материалов при таких скоростях деформаций пока получить не удалось. Качественно же тенденция к охрупчиванию материала и увеличению  $\sigma_{\text{пч}}$  сохраняется.

**3.4.4.** В медленно протекающих процессах, которые хорошо моделируются длительным нагружением постоянными нагрузками или длительной постоянной деформацией, существенным оказывается сама длительность нагружения или деформации.

Простейшим экспериментом такого рода является растяжение образца под действием постоянной во времени нагрузки. Даже если возникающие при этом напряжения  $\sigma = P/F_0$  меньше предела упругости, в экспериментах отмечается рост деформаций во времени. Особенно этот эффект, названный *ползучестью*, проявляет себя при испытании пластмасс. Для металлов ползучесть становится существенной при повышенных температурах.

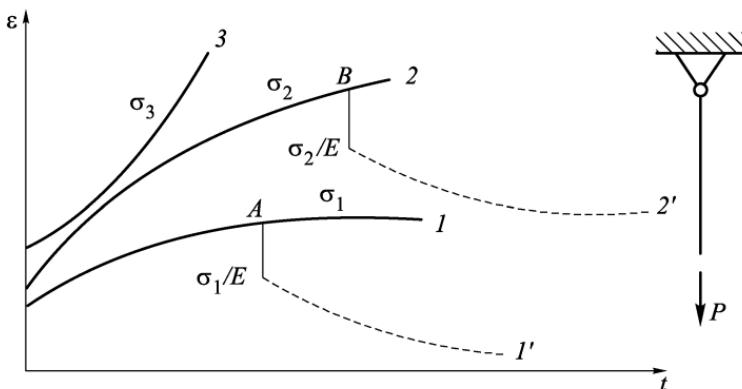


Рис. 3.21

На рис. 3.21 показан характер изменения во времени  $t$  деформации  $\varepsilon$  образца при постоянных уровнях напряжений  $\sigma_1$ ,

$\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ . Кривые 1, 2 соответствуют установившейся ползучести, кривая 3 – неустановившейся, когда скорость нарастания деформаций растет, что приводит в итоге к разрушению образца при напряжениях, которые могут быть значительно меньше  $\sigma_{\text{пч}}$ . Поэтому часто говорят о *пределе длительной прочности* как о минимальных напряжениях, при которых ползучесть становится неустановившейся.

Пунктирные кривые на рис. 3.21 демонстрируют процесс изменения деформаций в образцах после снятия с них нагрузок в точках A и B. При этом деформация сначала сразу же уменьшается на величину упругой деформации, а со временем может исчезнуть полностью (кривая 1') или частично (2').

Процесс восстановления деформаций называется *последействием*. Кривая 1' соответствует упругому, а кривая 2' – неупругому последействию.

На рис. 3.22 показаны кривые ползучести для стали ЭИ756 при температуре  $600^{\circ}\text{C}$  и при различных значениях уровня напряжений  $\sigma$ .

Рассмотрим другой эксперимент, демонстрирующий изменение во времени напряже-

ний при постоянной деформации. Сначала образцу задается деформация  $\Delta$  (рис. 3.23), а затем его концы закрепляются. После чего замеряется сила  $P_0$ , с которой образец действует на захваты (опоры). В таком эксперименте наблюдается уменьшение напряжений во времени при постоянной деформации  $\varepsilon = \Delta/l$ . Эти явления называют *релаксацией*.

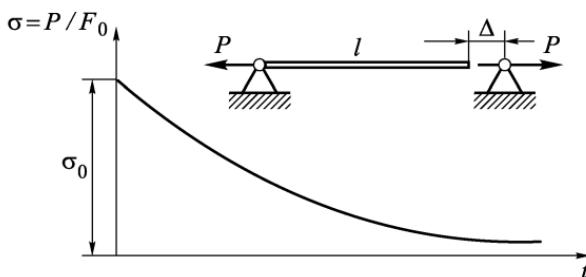


Рис. 3.23

С явлениями ползучести и релаксации необходимо считаться при проектировании конструкций, которые длительное врем-

мя работают в условиях повышенных температур, а также конструкций из пластмасс и многих композитных материалов.

**3.4.5.** Для некоторых конструкций, например для атомных реакторов и для сооружений, предназначенных для длительной работы в космосе, необходимо учитывать фактор длительного радиоактивного облучения. Эксперименты показали, что из всех факторов такого облучения на механические свойства материалов наиболее сильно влияет нейтронное облучение.

Пролетая через массу материала, нейтроны искажают его кристаллическую решетку, создавая в материале изменения, аналогичные наклепу при технологическом деформировании материала. В результате облучения предел текучести и предел прочности материала увеличиваются, а удлинение при разрыве  $\delta$  уменьшается.

Дозу облучения принято характеризовать числом нейтронов, прошедших через  $1 \text{ см}^2$  поверхности тела, и измерять в  $\text{нейtron}/\text{см}^2$ . На рис. 3.24 показано изменение предела прочно-

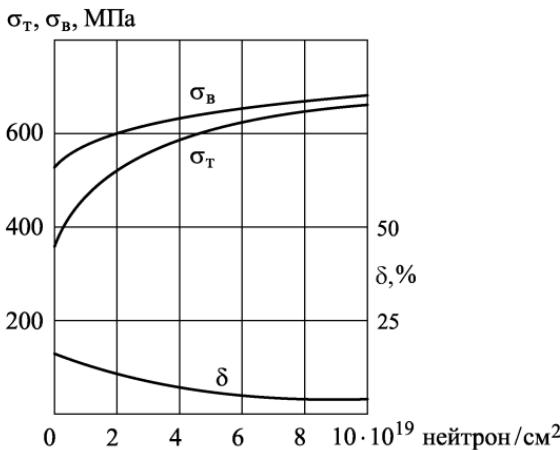


Рис. 3.24

сти  $\sigma_v$ , предела текучести  $\sigma_t$  и удлинения при разрыве  $\delta$  при увеличении дозы облучения. Видно, что аналогично технологическому наклепу облучение приводит к охрупчиванию материала.

### 3.5. Испытания на сдвиг

**3.5.1.** Для исследования механических свойств материалов при второй элементарной деформации — сдвиге — испытывают плоские или трубчатые образцы.

Плоские образцы при испытаниях закрепляют в специальной квадратной рамке, элементы которой скреплены друг с другом шарнирно (рис. 3.25) и достаточно массивны, чтобы при испытаниях их деформации были малы и ими можно было бы пренебречь в сравнении с деформациями образца. Нагружая рамку, как это показано на рис. 3.25, строят зависимость  $P$  от угла сдвига  $\gamma$ , выбранного на образце базового квадрата.

Для исключения влияния размеров образца от силы  $P$  переходят к касательным напряжениям

Рис. 3.25

по формуле  $\tau = P/l\delta$ , где  $l$  — размер стороны базового квадрата, а  $\delta$  — толщина образца. В результате испытаний по аналогии с диаграммой  $\sigma(\varepsilon)$  строят диаграмму  $\tau(\gamma)$ .

Чаще же для испытаний на сдвиг используют трубчатые образцы (рис. 3.26), которые при испытаниях закручивают моментом  $M$ . Как будет показано в гл. 6, при закручивании таких об-

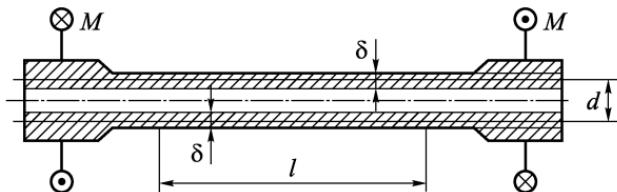


Рис. 3.26

разцов в них возникает однородная деформация сдвига. Если  $\varphi$  — угол поворота друг относительно друга двух базовых сечений, взятых на расстоянии  $l$  по длине образца, то ясно, что сдвиг  $\gamma$  можно найти как

$$\gamma = \frac{\varphi d}{2l}. \quad (3.5.1)$$

Здесь  $d$  — средний диаметр образца.

Касательные напряжения  $\tau$ , вызываемые моментом  $M$ , подсчитывают по формуле

$$\tau = \frac{M}{\frac{1}{2}\pi d^2 \delta}, \quad (3.5.2)$$

где  $\delta$  — толщина базового участка образца. Эта формула будет выведена в гл. 6. Здесь же читатель легко установит связь (3.5.2) между  $M$  и  $\tau$ , подсчитав  $M$  как момент равномерно распреде-

ленных по поперечному сечению трубы касательных напряжений  $\tau$ , направленных касательно к контуру сечения. Для этого достаточно использовать формулу (2.3.2).

Диаграммы  $\tau(\gamma)$  сходны с диаграммами  $\sigma(\varepsilon)$  (см. рис. 3.5) при растяжении. На них отмечаются аналогичные характерные точки 1–6 (рис. 3.27) и вводятся аналогичные механические характеристики при сдвиге, а именно:  $\tau_{\text{пч}}$  — предел пропорциональности как предельное напряжение, при котором еще выполняется закон Гука при сдвиге, т.е.

$$\tau = G\gamma, \quad (3.5.3)$$

где  $G$  — модуль упругости (Юнга) при сдвиге или модуль упругости 2-го рода;  $\tau_{\text{упр}}$  — предел упругости;

$\tau_t$  — предел текучести;  $\tau_{\text{пч}}$  (или  $\tau_b$ ) — предел прочности.

Для хрупких материалов характер диаграммы  $\tau(\gamma)$  аналогичен диаграмме  $\sigma(\varepsilon)$ .

Существенна разница в характере разрушения хрупких и пластичных образцов. На поверхности пластичных образцов при текучести появляются линии Людерса—Чернова, направленные вдоль оси образца и перпендикулярно к ней. Разрушение та-

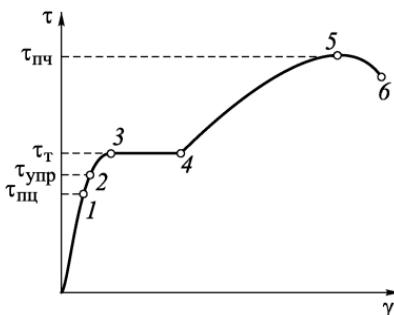


Рис. 3.27

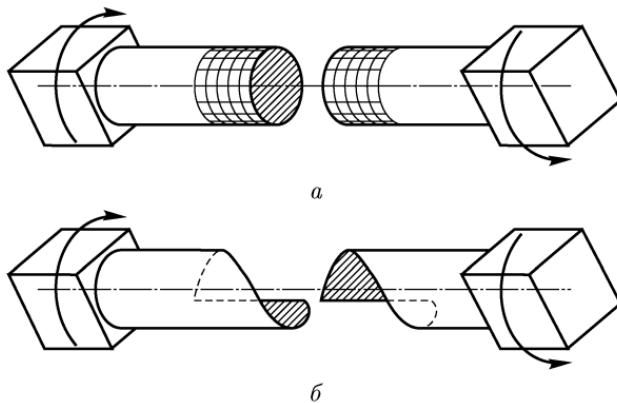


Рис. 3.28

ких образцов происходит путем среза по поперечному сечению (рис. 3.28 a). Это свидетельствует о том, что причиной разрушения является появление предельно допустимых для материала касательных напряжений.

Разрушение хрупких образцов из материалов, хуже работающих на растяжение, чем на сжатие, происходит по винтовой поверхности, которая наклонна к оси образца на угол  $\sim 45^\circ$  (рис. 3.28 б). Причины такого характера разрушения станут ясны позже при анализе напряженного состояния, соответствующего деформации сдвига.

**3.5.2.** Влияние различных условий, таких, как нагрев, термообработка, облучение и т.п., а также скорости нагружения при испытаниях на сдвиг в целом аналогично их влиянию при растяжении-сжатии. Имеют место и такие явления, как ползучесть и релаксация.

Вообще говоря, для изотропных материалов испытания на сдвиг не имеют самостоятельного значения. Как это будет показано в главах 5, 11, деформация сдвига специальным выбором осей координат может быть сведена к суперпозиции деформаций растяжения и сжатия в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Это позволяет теоретически построить диаграмму сдвига  $\tau(\gamma)$  по диаграмме  $\sigma(\varepsilon)$  для растяжения и сжатия и установить связь между механическими характеристиками растяжения и сдвига.

На этом мы завершаем краткий обзор механических свойств материалов. Более подробно с этими вопросами читатель может ознакомиться в книгах [3, 4, 5], а также в справочной литературе по свойствам материалов [6, 7].

### B.3. Контрольные вопросы

**B.3.1.** Что такое абсолютные и относительные удлинения? Чем определяется их знак?

**B.3.2.** Что называют сдвигами? Когда они положительны?

**B.3.3.** Для чего необходимо изучение механических свойств материалов?

**B.3.4.** Что такое диаграмма растяжения? Как она строится?

**B.3.5.** Почему для удобства пользования диаграмму растяжения  $P(\Delta l)$  перестраивают в диаграмму  $\sigma(\varepsilon)$ ? Почему последнюю называют диаграммой условных напряжений?

**B.3.6.** Назовите характерные участки на диаграмме  $\sigma(\varepsilon)$  для малоуглеродистой стали и определяющие их напряжения.

**B.3.7.** Что называют механическими характеристиками материалов? С какой диаграммы снимают эти характеристики?

**B.3.8.** Что такое остаточная деформация?

**B.3.9.** К каким качественным изменениям в материале образца может привести разгрузка образца и затем повторное его нагружение?

**B.3.10.** Какой термической обработкой снимаются остаточные напряжения в материале?

**В.3.11.** Для каких материалов вводятся условные пределы упругости и текучести? Чем это вызвано?

**В.3.12.** Что такое удлинение при разрыве? Что отражает эта характеристика материала?

**В.3.13.** Какой материал называется пластичным? Приведите примеры. В чем заключается механизм течения материала? Что такое линии Людерса–Чернова?

**В.3.14.** Какой материал называется хрупким? Приведите примеры таких материалов. В чем различие характера разрушения этого материала при растяжении и сжатии?

**В.3.15.** Что такое коэффициент Пуассона?

**В.3.16.** Какое влияние на механические характеристики материалов оказывает изменение температуры?

**В.3.17.** Как влияет скорость деформирования на механические характеристики?

**В.3.18.** Что называется ползучестью и последействием? Что такое релаксация?

**В.3.19.** Как влияет радиоактивное облучение на механические характеристики материалов?

**В.3.20.** Какая диаграмма строится по результатам испытания на сдвиг? Какие характеристики материалов при этом снижаются?

## ГЛАВА 4

### ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ–СЖАТИЕ БРУСА

В этой главе, а также в главах 6 и 8 мы рассмотрим элементарные напряженно-деформированные состояния бруса: центральное растяжение–сжатие, кручение и изгиб. Выбор именно этих состояний для анализа традиционен. Но в основе такой традиции лежит то, что при максимальной простоте каждого из них любое сложное напряженно-деформированное состояние бруса можно представить как их суперпозицию.

Мы будем рассматривать простейший брус — прямолинейный (с прямой осью). Пути обобщения результатов на брусы с кривой осью будут обсуждены в гл. 9.

Обращаем внимание читателя также на то, что, хотя центральное растяжение–сжатие является простейшим из элементарных состояний, использованные при его анализе идеи, методы и подходы с тем же успехом будут применены в дальнейшем и при анализе кручения и изгиба.

*Центральным растяжением–сжатием бруса* называется такое напряженно-деформированное состояние бруса, когда в его поперечных сечениях из шести внутренних силовых факторов отлична от нуля только продольная сила.

#### 4.1. Статические дифференциальные и интегральные зависимости при центральном растяжении–сжатии

**4.1.1.** Из данного выше определения центрального растяжения–сжатия и из уравнений равновесия вида (2.1.6) отсеченной части бруса, образованной поперечным сечением, следуют определенные требования к внешним нагрузкам. Ясно, что центральное растяжение–сжатие бруса возникает только при таких нагрузках на него, при которых отлична от нуля только сумма проекций на ось бруса  $x$  всех действующих на отсеченную часть нагрузок. А суммы их проекций на лежащие в плоскости попе-

речного сечения координатные оси  $y$  и  $z$  и суммы их моментов относительно всех трех осей равны нулю.

Для прямолинейного бруса этим условиям могут удовлетворять только нагрузки, равнодействующие которых направлены строго вдоль оси бруса, т.е. вдоль оси  $x$ . Брус, нагруженный такими нагрузками, изображен на рис. 4.1, где  $q(x)$  — интенсивность погонной нагрузки, направленной вдоль оси  $x$ , а  $P_i$  — величина сосредоточенной силы, приложенной в сечении  $x_{pi}$ .

**4.1.2.** Напомним, что продольная сила считается положительной, если она стремится растянуть отсеченную часть, к которой она приложена. Это правило знаков показано на рис. 4.2, на котором продольная сила  $N(x_1)$  в сечении  $x_1$  положительна, а  $N(x_2)$  — отрицательна. На рис. 4.2 отсеченные части, получившиеся в результате рассечения бруса по сечениям  $x_1$  и  $x_2$ , условно раздвинуты. Как видно из этого рисунка, положительная продольная сила может быть направлена и вдоль положительного направления оси  $x$  и против него в зависимости от отсеченной части, к которой она приложена. Это всегда характерно для сил взаимодействия. Поэтому знак продольной силы и других внутренних сил всегда связывают с характером их действия на отсеченную часть.

Рассмотрим равновесие элемента бруса, выделенного из него двумя близкими поперечными сечениями с координатами  $x$  и  $x+dx$  (см. рис. 4.1). Этот элемент изображен на рис. 4.3.

Действие на него находившейся слева отброшенной части бруса заменим продольной силой  $N(x)$ , а действие правой отброшенной части — силой  $N(x+dx)$ , которая с точностью до малых высшего порядка равна  $N(x) + dN$  (см. п. 2.1.4). Кроме того, на элемент действует распределенная нагрузка, интенсивность

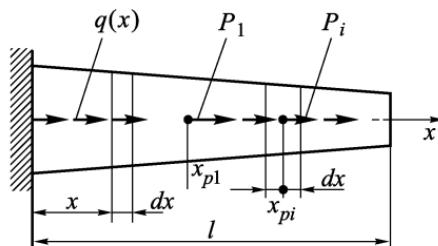


Рис. 4.1

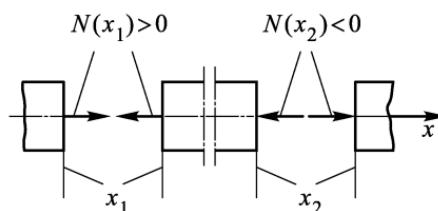


Рис. 4.2

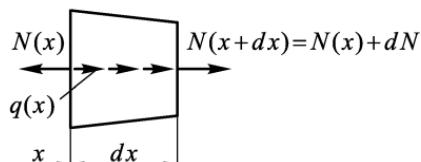


Рис. 4.3

которой ввиду малости  $dx$  можно считать постоянной вдоль элемента и равной  $q(x)$ . Тогда равнодействующая этой нагрузки равна  $q(x) dx$ .

Ясно, что из шести условий равновесия этого элемента нетривиально только требование равенства нулю проекций действующих на него сил на ось  $x$ . Составим это условие:

$$\sum P_x = -N(x) + (N(x) + dN) + q(x) dx = 0. \quad (4.1.1)$$

Из него сразу следует соотношение

$$\frac{dN}{dx} = -q(x). \quad (4.1.2)$$

Стрелки в этом соотношении, которое называют *статической дифференциальной зависимостью* при растяжении–сжатии, указывают на принятые при его выводе положительные направления оси  $x$  и нагрузки  $q(x)$ . При изменении этих направлений знак в (4.1.2) может измениться. Читатель может легко убедиться, что при совпадении направлений  $x$  и  $q$  в (4.1.2) будет

знак « $-$ », а при несовпадении — « $+$ ».

#### 4.1.3. Рассмотрим

теперь равновесие элемента, выделенного около точки приложения сосредоточенной силы  $P_i$  (рис. 4.4). Из внешних сил на него действует  $P_i$ . Со стороны отброшенных частей бруса на элемент

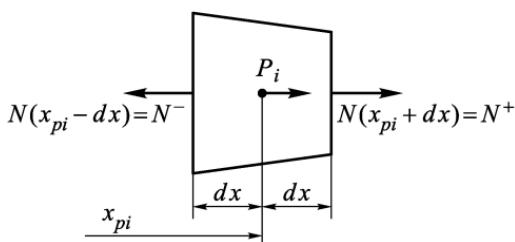


Рис. 4.4

действуют силы  $N(x_{pi} - dx)$  и  $N(x_{pi} + dx)$ , которые так же, как в п. 2.1.5, обозначим через  $N^-(x_{pi})$  и  $N^+(x_{pi})$ . Тогда условие равновесия элемента примет вид

$$-N^-(x_{pi}) + N^+(x_{pi}) + P_i = 0.$$

Откуда

$$N^+(x_{pi}) = N^-(x_{pi}) - P_i. \quad (4.1.3)$$

Это соотношение означает, что в сечении  $x_{pi}$ , где приложена сосредоточенная сила  $P_i$ , продольная сила  $N$  испытывает скачок на величину этой силы. Характер графика (эпюры) продольной силы в окрестности точек приложения внешних сосредоточенных сил показан на рис. 4.5.

Как уже отмечалось в п. 2.1.5, в реальных брусьях скачков не может быть, но соотношение (4.1.3) отражает то обстоятель-

ство, что локальные нагрузки, направленные вдоль оси бруса, вызывают быстрое изменение продольной силы.

Соотношения (4.1.2), (4.1.3)

являются частным случаем полученных ранее выражений (2.1.11), (2.1.13) для центрального растяжения–сжатия.

**4.1.4.** Рассмотрим равновесие конечной отсеченной части 1 бруса от сечения  $x_c$  до свободного конца с координатой  $x = l$  (рис. 4.6). Равнодействующую распределенной на-

грузки  $q(x)$  мы можем, как и ранее, получить, разбив эту отсеченную часть на участки  $dx$  и просуммировав по участкам равнодействующие  $q(x) dx$  распределенной на них нагрузки. Тогда

этая равнодействующая будет равна  $\int_{x_c}^l q(x) dx$ . Поэтому уравнение равновесия отсеченной части 1 запишется в виде

$$\sum P_x = -N(x_c) + \int_{x_c}^l q(x) dx + \sum_{i \in I} P_i = 0.$$

Отсюда получаем выражение для  $N(x_c)$ :

$$N(x_c) = \int_{x_c}^l q(x) dx + \sum_{i \in I} P_i, \quad (4.1.4)$$

которое конечно совпадает с первым из полученных ранее интегральных соотношений (2.1.15).

Иногда удобно использовать уравнение равновесия для конечной отсеченной части, образованной сечениями при  $x = x_1$  и  $x = x_2$  (рис. 4.7). Для него из условия равновесия  $\sum P_x = 0$  имеем

$$N(x_2) = N(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx - \sum_{i \in [x_1, x_2]} P_i. \quad (4.1.5)$$

Выражения (4.1.4) и (4.1.5) с математической точки зрения представляют собой возможные формы общего решения дифференциального уравнения (4.1.2) с учетом скачков при  $x = x_{pi}$

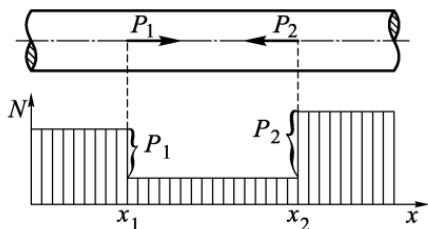


Рис. 4.5

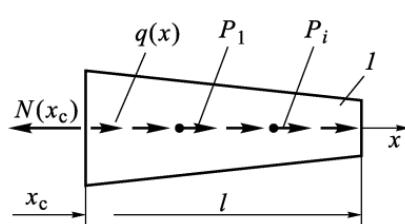


Рис. 4.6

функции  $N(x)$ , определенных соотношениями вида (4.1.3). Так же, как и в п. 2.1.6, в этом можно убедиться, проинтегрировав (4.1.4) по  $x_c$ , а (4.1.5), например, по  $x_2$ . Учитывая прави-

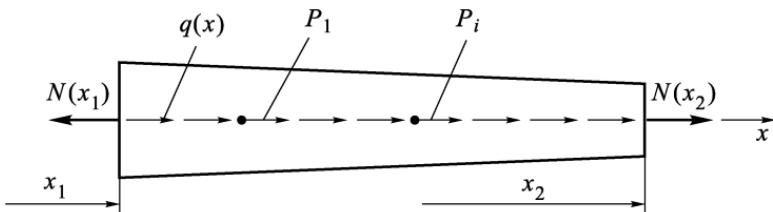


Рис. 4.7

Рис. 4.7

ло дифференцирования интеграла по переменному пределу (см. п. 2.1.6), получаем соответственно

$$\frac{dN}{dx_c} = -q(x_c) \quad \text{и} \quad \frac{dN}{dx_2} = -q(x_2),$$

что совпадает с точностью до обозначения координатной оси с соотношением (4.1.2).

## 4.2. Геометрические дифференциальные и интегральные зависимости при центральном растяжении–сжатии

**4.2.1.** Рассмотрим геометрию деформаций бруса сначала в том простейшем случае центрального растяжения–сжатия, который реализуется при испытании образцов (см. разд. 3.2), т.е. рассмотрим деформацию бруса, нагруженного по концам силами  $P$



Рис. 4.8

вдоль его оси (рис. 4.8). Вблизи концов бруса образуются зоны Сен-Венана, в которых напряженное состояние зависит от того, как конструктивно реализуется передача растягивающих сил на брус. На остальной части бруса напряженно-деформированное

состояние будет однородным, т.е. неизменным по длине бруса. Так как внешние силы  $P$  приложены по оси бруса, то центральное растяжение–сжатие в нем может возникнуть только тогда, когда его ось при деформации остается прямой (рис. 4.9 а). Действительно, как это видно из рис. 4.9 б, если ось бруса изгибается, что может произойти при потере устойчивости под действием сжимающих усилий, в сечении бруса возникнет

изгибающий момент  $M_z = Py$ , т.е. такое состояние бруса уже не будет центральным растяжением–сжатием, и оно будет изучаться специально в гл. 10.

Итак, при центральном растяжении–сжатии прямая до деформации ось бруса остается прямой и при деформации.

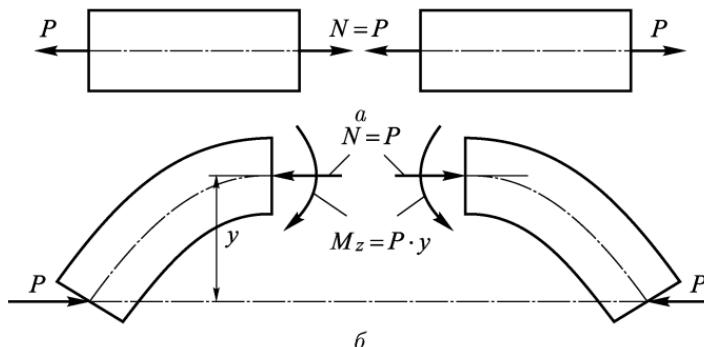


Рис. 4.9

Рассмотрим теперь произвольное поперечное сечение бруса в зоне его однородной деформации, например сечение  $A-A$ . Двумя поперечными сечениями  $B-B$  и  $C-C$ , симметричными относительно  $A-A$ , выделим элемент бруса и рассмотрим его деформацию. В силу однородности состояния этот симметричный элемент симметрично нагружен распределенными по сечениям  $C-C$  и  $B-B$  внутренними силами (напряжениями), равнодействующими которых являются продольные силы  $N$  (рис. 4.10). Симметрия элемента и деформирующей его нагрузки относительно сечения  $A-A$  позволяет заключить, что это сечение остается при деформации бруса плоским и нормальным к оси бруса. А так как сечение  $A-A$  было выбрано произвольно, то отсюда следует, что все сечения бруса при его растяжении–сжатии остаются плоскими и нормальными к его оси (кроме, конечно, сечений в зонах Сен-Венана).

При неоднородной по длине бруса деформации, а также для брусьев переменного сечения такой характер деформации бруса уже нельзя доказать строго либо ввиду отсутствия симметрии в нагружении элемента, либо из-за несимметричности самого элемента. Для этих случаев мы будем постулировать именно такой характер деформации, принимая гипотезу, которую называют *гипотезой плоских сечений*.

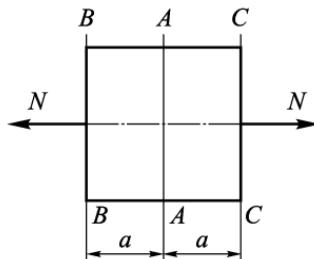


Рис. 4.10

При центральном растяжении–сжатии ось бруса остается прямолинейной, а плоские до деформации поперечные сечения остаются плоскими и нормальными к оси бруса после деформации.

Впервые она была предложена Я. Бернулли в 1694 г. в более сложной задаче об изгибе бруса.

**4.2.2.** Рассмотрим теперь соответствующую гипотезе плоских сечений деформацию элемента бруса длиной  $dx$ , выделенного поперечными сечениями с координатами  $x$  и  $x+dx$  (рис. 4.11). Пусть  $u(x)$  – перемещение сечения и будем считать, что  $u > 0$ , если сечение перемещается вправо. Тогда перемещение  $u(x+dx)$  сечения  $x+dx$  с точностью до малых высшего порядка будет равно

$$u(x+dx) = u(x) + du. \quad (4.2.1)$$

На рис. 4.11 элемент  $dx$  после деформации показан пунктиром.

Ввиду малости  $dx$  деформацию элемента можно считать однородной. Это позволяет непосредственно использовать для ее исследования результаты экспериментов на растяжение–сжатие, описанных в гл. 3. Для этого по аналогии с принятой при описании эксперимента относительной деформацией  $\varepsilon = \Delta l/l$  введем для описания деформаций элемента относительное удлинение

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}. \quad (4.2.2)$$

Здесь  $\Delta dx$  – удлинение элемента  $dx$ . Ясно, что оно равно разности перемещений его концевых сечений:

$$\Delta dx = u(x+dx) - u(x). \quad (4.2.3)$$

Учитывая (4.2.1), получаем, что  $\Delta dx = du$  и поэтому

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}. \quad (4.2.4)$$

Это соотношение называют геометрическим дифференциальным соотношением при растяжении–сжатии. Так же, как и статическое дифференциальное соотношение (4.1.2), его можно рассматривать как дифференциальное уравнение для перемещения  $u$  и находить  $u$  как решение этого уравнения. Только в отличие от продольной силы  $N$  перемещение  $u$  является по своей физической природе непрерывной функцией. Действительно, разрыв (скачок) в перемещении  $u$  означает, что перемещения бесконечно близких сечений, лежащих по разную сторону

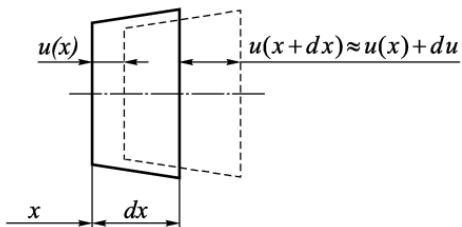


Рис. 4.11

от сечения, где произошел скачок  $u$ , различаются на конечную величину. А это значит, что произошел разрыв бруса, т.е. брус разрушился.

Учитывая непрерывность  $u$ , общее решение можем получить, проинтегрировав соотношение (4.2.4):

$$\int_{x_0}^x du = \int_{x_0}^x \varepsilon_x dx.$$

Вычисляя интеграл в левой части этого соотношения, получаем

$$u(x) - u(x_0) = \int_{x_0}^x \varepsilon_x dx,$$

или

$$u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^x \varepsilon_x dx. \quad (4.2.5)$$

Здесь  $u(x_0)$  и  $u(x)$  — перемещения сечений с координатами  $x_0$  и  $x$  соответственно.

Из решения (4.2.5) можно легко получить удлинение конечного участка бруса между сечениями  $x_1$  и  $x_2$ . Так как по смыслу это удлинение  $\Delta l$  равно разности  $u(x_2) - u(x_1)$  перемещений концевых сечений участка, то

$$\Delta l = u(x_2) - u(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \varepsilon_x dx. \quad (4.2.6)$$

Если начальная длина этого участка  $x_2 - x_1$  равна  $l$ , то соотношение (4.2.6) удобно записать в форме

$$\Delta l = \int_l \varepsilon_x dx. \quad (4.2.7)$$

Такая запись, в частности, подчеркивает тот факт, что удлинение участка бруса не зависит от выбора начала координат  $x$ .

Чтобы подчеркнуть физический смысл соотношения (4.2.7), обратим внимание читателя на то, что  $\varepsilon_x dx$  по смыслу выражения (4.2.2) является удлинением  $\Delta dx$  элементарного участка бруса  $dx$ . Учтем также, что интеграл является пределом интегральной суммы. Тогда формула (4.2.7) отражает простой геометрический факт, что удлинение участка бруса  $l$  складывается из удлинений  $\Delta dx$  элементарных участков  $dx$ , на которые разбит конечный участок  $l$ .

Заметим, что в некоторых конструкциях разрыв в перемещениях может быть специально предусмотрен. В таких конструкциях этот зазор либо исчезает в результате деформаций, либо,

наоборот, появляется. Широко известным примером такой конструкции является механизм открытия клапанов в автомобильном двигателе. В нем предусмотрен тепловой зазор, который имеет место в холодном двигателе и исчезает по мере его нагрева. Наличие такого рода разрыва  $r$  в перемещениях в сечении  $x_r$  бруса при центральном растяжении–сжатии можно описать условием, аналогичным условию (4.1.3):

$$u^+(x_r) - u^-(x_r) = r. \quad (4.2.8)$$

Здесь

$$u^+(x_r) = u(x_r + dx), \quad u^-(x_r) = u(x_r - dx).$$

Тогда, если разрыв попадает на участок интегрирования  $x_0$ ,  $x$  ( $x_0 < x_r < x$ ), соотношение (4.2.5) принимает вид

$$u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^x \varepsilon_x dx + r. \quad (4.2.9)$$

Если разрыв находится на участке  $l$ , то соотношение (4.2.7) следует записать так:

$$\Delta l = \int_l \varepsilon dx + r. \quad (4.2.10)$$

### 4.3. Физическая сторона задачи центрального растяжения–сжатия бруса

**4.3.1.** Дифференциальные и интегральные соотношения двух предыдущих разделов были построены на основании соотношений статики (условий равновесия) (см. разд. 4.1) или описывали геометрию деформаций (см. разд. 4.2), соответствующих гипотезе плоских сечений. Эти соотношения никак не связаны с материалом бруса и справедливы для брусьев из любого материала. Но связать их между собой можно только, учитывая свойства материала бруса.

**4.3.2.** Итак, рассмотрим брус из изотропного материала. Гипотеза плоских сечений устанавливает такую геометрию деформаций при растяжении–сжатии, что все продольные волокна бруса имеют одинаковую деформацию  $\varepsilon_x$ , независимо от их положения в поперечном сечении  $F$ , т.е.

$$\varepsilon_x = \text{const} \quad \text{по } F. \quad (4.3.1)$$

Предположим, что все продольные волокна деформируются совершенно одинаково не только в продольном, но и в поперечном направлениях, т.е. что деформация бруса однородна по сечению. Рассмотрим теперь такие продольные волокна, которые частью своей боковой поверхности расположены на поверхности

брока, как, например, волокно, показанное на рис. 4.12. Поскольку на боковую поверхность бруса при центральном растяжении–сжатии не действуют никакие нагрузки, в том числе и давление, то из однородности деформаций по сечению следует, что на всей боковой поверхности граничного волокна не действуют никакие нагрузки. Переходя от граничного волокна к соседнему внутреннему, точно так же заключаем, что и его боковые поверхности свободны от нагрузок. А это значит, что при центральном растяжении–сжатии

продольные волокна бруса между собой не взаимодействуют. Тогда можно считать, что все продольные волокна бруса находятся в таких условиях, в каких находится образец при его испытании на растяжение–сжатие. Иными словами, предположение об однородности деформации по сечению позволяет перенести результаты испытаний образцов на брусья произвольного поперечного сечения и произвольных размеров. И теперь на основании (4.3.1) мы можем заключить, что в случае растяжения–сжатия однородного бруса нормальные напряжения также постоянны по поперечному сечению бруса, т.е.

$$\sigma_x = \text{const} \quad \text{по } F. \quad (4.3.2)$$

А это позволяет сразу же установить связь между напряжениями  $\sigma_x$  и продольной силой  $N$ . Как было показано в разд. 2.3, интегральная связь между  $N$  и  $\sigma_x$  имеет вид

$$N = \int_F \sigma_x dF. \quad (4.3.3)$$

Отсюда с учетом (4.3.2) имеем

$$N = \sigma_x \int_F dF = \sigma_x F \quad \text{или} \quad \sigma_x = \frac{N}{F}. \quad (4.3.4)$$

Связь между напряжениями  $\sigma_x$  и деформациями  $\varepsilon_x$  в соответствии с принятыми допущениями тождественна получаемой в экспериментах на растяжение–сжатие связи между  $\sigma$  и  $\varepsilon$ , т.е. диаграмме  $\sigma(\varepsilon)$ . Иными словами, для напряжений  $\sigma_x$  по диаграмме  $\sigma(\varepsilon)$  при  $\sigma = \sigma_x$  определяются деформации  $\varepsilon = \varepsilon_x$ , которые, в свою очередь, можно использовать для определения с помощью соотношений разд. 4.2 перемещений сечений бруса

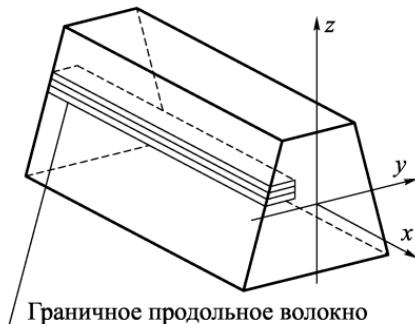


Рис. 4.12

или удлинений всего бруса и его участков. Конечно, на площадке текучести при  $\sigma_x = \sigma_t$  деформация  $\varepsilon_x$  не определена и ее конкретная величина зависит от условий деформирования бруса или той конструкции, частью которой он является. Подробно этот вопрос будет выяснен в гл. 13.

Если деформации подчиняются закону Гука, т.е. линейно упруги, то получаемая из эксперимента связь между  $\sigma_x$  и  $\varepsilon_x$  наиболее проста:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \text{или} \quad \sigma_x = E\varepsilon_x. \quad (4.3.5)$$

**4.3.3.** Значительно более сложны соотношения между  $\sigma_x$  и  $\varepsilon_x$ , предназначенные для описания таких явлений, как ползучесть и релаксация. В эти соотношения обязательно должно входить время. В рамках данного курса мы этих вопросов касаться не будем и для первого знакомства с ними рекомендуем читателю обратиться к книгам [5, 8].

#### 4.4. Методика расчета напряженно-деформированного состояния при центральном растяжении–сжатии (статически определимые конструкции)

**4.4.1.** К этому моменту нами уже рассмотрены все необходимые методы и соотношения, позволяющие полностью рассчитать напряженно-деформированное состояние бруса, работающего на растяжение–сжатие, или конструкций, состоящих из таких брусьев. Наиболее просто произвести такой расчет для конструкций, в которых продольные силы можно определить методом сечений из условий равновесия, т.е. для статически определимых конструкций.

Методика расчета в таком случае состоит из следующих этапов.

1. Определение продольных сил методом сечений из условий равновесия отсеченных частей. Результатом такой операции для отдельного бруса будет знание продольных сил  $N(x)$  во всех сечениях бруса в зависимости от координаты сечения  $x$  по длине бруса  $l$ . При вычислении на этом этапе удобно пользоваться статическими дифференциальными и интегральными зависимостями:

$$\frac{dN}{dx} = -\underline{q}(x); \quad (4.4.1)$$

$$N(x) = N(x_0) - \int_{x_0}^x q(x) dx - \sum_{i \in [x_0, x]} P_i, \quad x > x_0. \quad (4.4.2)$$

2. Определение напряжений в сечениях бруса по формуле

$$\sigma_x(x) = \frac{N(x)}{F(x)}. \quad (4.4.3)$$

3. Определение по диаграмме  $\sigma(\varepsilon)$  деформаций  $\varepsilon_x(x)$ , соответствующих напряжениям  $\sigma_x(x)$ . Если деформации линейно упруги, то

$$\varepsilon_x(x) = \frac{\sigma_x(x)}{E} = \frac{N(x)}{EF(x)}. \quad (4.4.4)$$

4. Определение перемещений  $u$  сечений бруса и удлинений всего бруса длиной  $l$  или его частей. При вычислениях на этом этапе удобно пользоваться геометрическими дифференциальными и интегральными зависимостями:

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon_x(x), \quad (4.4.5)$$

$$u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^x \varepsilon_x(x) dx, \quad (4.4.6)$$

$$\Delta l = \int_l \varepsilon_x(x) dx. \quad (4.4.7)$$

Рассмотрим пример расчета по этой методике.

П р и м е р 4.1. Рассчитаем напряженно-деформированное состояние бруса, показанного на рис. 4.13 а. На участке между сечениями 0 и 1 площадь поперечного сечения бруса равна  $2F$ , а на участке 1–3 —  $F$ . В сечении 1 к брусу приложена со средоточенная сила  $2q_0a$ . На участке 1–3 брус нагружен погонной распределенной нагрузкой  $q(x)$ , график которой показан на рис. 4.13 б. В прочностных расчетах принято называть графики каких-либо величин *эпюрами*. Обычно эпюры строят с точностью до постоянного множителя, который указывается рядом с эпюрай в фигурных скобках.

При построении эпюры  $N(x)$  (рис. 4.13 в) удобно сначала по статической дифференциальной зависимости (4.4.1) предсказать характер изменения  $N(x)$  на участке. Потом методом сечений найти величины  $N$  в начале и конце участка, а при необходимости и построить аналитическое выражение  $N(x)$  на участке.

На участке 0–1 интенсивность погонной нагрузки  $q(x) = 0$ , поэтому из (4.4.1) видно, что  $dN/dx = 0$ . Следовательно, продольная сила  $N$  на этом участке постоянна. Значит, достаточно найти ее в любом сечении. Для этого рассечем брус в произвольном сечении на участке и рассмотрим равновесие отсеченной части, показанной на рис. 4.14 а. В данной задаче можно составить только условия равновесия правой отсеченной части, поскольку левая отсеченная часть закреплена и не имеет степеней свободы. При составлении условий равновесия отсеченных

частей удобно направлять продольную силу  $N$  в положительном направлении, т.е. так, чтобы она стремилась растянуть отсечен-

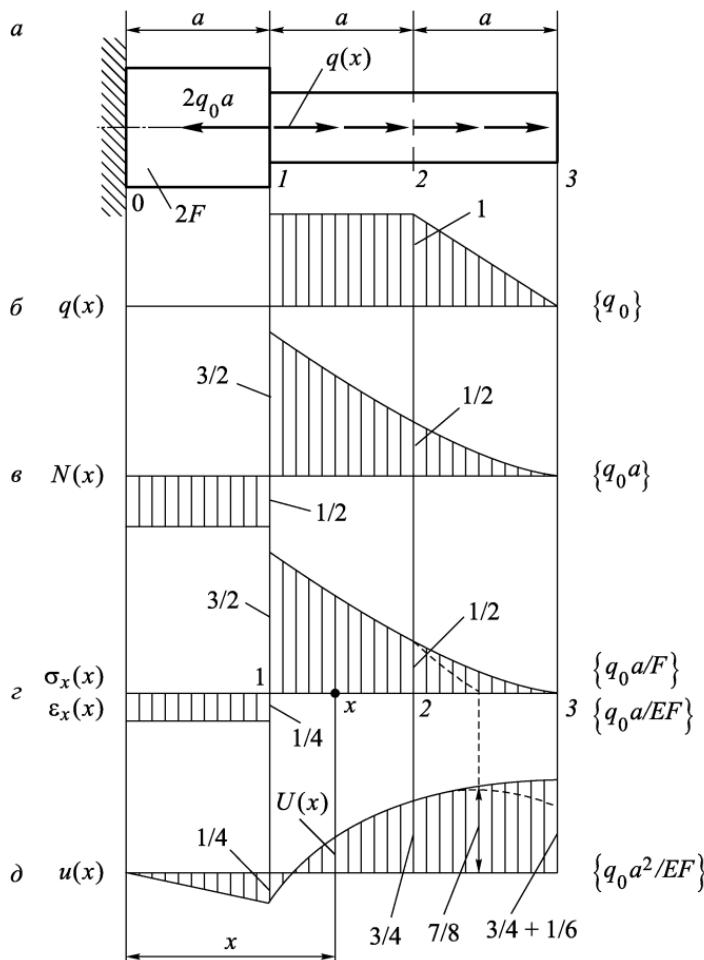


Рис. 4.13

ную часть, к которой приложена. В этом случае растягивающие продольные силы в результате вычислений окажутся положительными, а сжимающие — отрицательными, что соответствует принятому для  $N$  правилу знаков.

Составим для отсеченной части, показанной на рис. 4.14  $a$ , условие равновесия  $\sum P_x = 0$ :

$$-N_{0-1} - 2q_0a + \int_{1-3} q(x) dx = 0. \quad (4.4.8)$$

В этом уравнении последнее слагаемое является равнодействующей распределенной нагрузки на участке 1–3. Для ее определения нет необходимости вычислять интеграл аналитически.

Достаточно вспомнить, что  $\int_a^b f(x) dx$  есть площадь между графиком  $f(x)$ , осью  $x$  и абсциссами  $x = a$  и  $x = b$  и она положительна, если  $f(x) > 0$ . У нас есть график  $q(x)$  (см. рис. 4.13 б). Подсчитав площадь этого графика на участке 1–3, получим ис-комую равнодействующую  $q(x)$ :

$$\int_{1-3} q(x) dx = q_0 a + \frac{1}{2} q_0 a = \frac{3}{2} q_0 a.$$

Тогда из (4.4.8) получаем продольную силу  $N_{0-1}$  на участке 0–1:

$$N_{0-1} = -\frac{1}{2} q_0 a.$$

Она постоянна. Изобразим ее на эпюре  $N(x)$  (рис. 4.13 в).

Найдем теперь  $N(x)$  на участке 1–2, на котором  $q(x) = q_0 = \text{const}$ , и, следовательно,  $\frac{dN}{dx} = -q_0 = \text{const}$ . А это означает, что на участке 1–2  $N(x)$  меняется по линейному закону. Поэтому для построения эпюры  $N(x)$  на этом участке достаточно найти две точки, через которые проходит соответствующая ей прямая линия. Для этого рассмотрим две отсечен-

ные части, одна из которых образована сечением, сдвинутым вправо на расстояние  $dx$  от сечения 1, а другая — сечением 2. Первая отсеченная часть показана на рис. 4.14 б. Для ее равновесия необходимо, чтобы  $N_1^+$  (см. п. 4.1.3) была равна равнодействующей распределенной нагрузки, т.е.

$$N_1^+ = \int_{1-3} q(x) dx = \frac{3}{2} q_0 a.$$

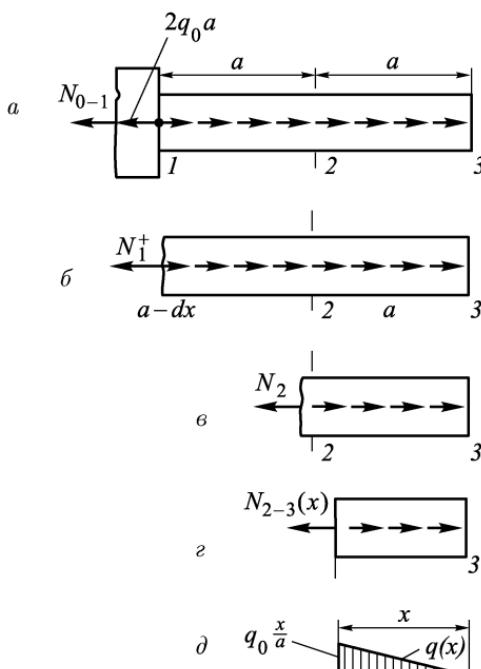


Рис. 4.14

Из равновесия второй отсеченной части, показанной на рис. 4.14 *в*, видно, что

$$N_2 = \int_{2-3} q(x) dx = \frac{1}{2}q_0a.$$

Прямая, проходящая через эти точки на эпюре  $N$  (рис. 4.13 *в*), и соответствует функции  $N(x)$  на участке 1–2 бруса.

Перейдем к участку 2–3. На нем  $q(x)$  меняется по линейному закону. Поэтому из статической дифференциальной зависимости  $dN/dx = -q(x)$  следует, что  $N(x)$  меняется по квадратичному закону. Этот закон легко получить из условий равновесия отсеченной части, показанной на рис. 4.14 *г*. В качестве координаты  $x$  удобно взять расстояние от сечения 3 до текущего сечения. Тогда

$$N_{2-3}(x) = \int_0^x q_0 \frac{x}{a} dx = \frac{q_0 x^2}{2a}. \quad (4.4.9)$$

Легко видеть, что этот же результат получается, если равнодействующую распределенной нагрузки на отсеченной части подсчитывать как площадь показанного на рис. 4.14 *д* участка эпюры  $q(x)$ . Кривая, соответствующая выражению (4.4.9), изображена на участке 2–3 на рис. 4.13 *в*.

Обычно нет необходимости строить такого рода кривые абсолютно точно. Достаточно провести их приближенно. Для этого

заметим, что, если прямая полностью определяется двумя точками, через которые она проходит, то квадратичная парабола определяется тремя точками или двумя точками и касательной к ней в одной из точек. Одну из таких точек мы имеем в сечении 2, где  $N_2 = \frac{1}{2}q_0a$ . Вторую точку получим, рассматривая равновесие отсеченной части, образованной сечением на расстоянии  $dx$  слева от сечения 3 (рис. 4.15). Видно, что

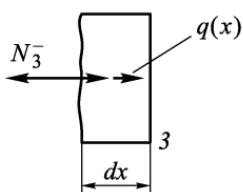


Рис. 4.15

т.е.  $N_3 = 0$ . Так как в сечении 3  $q = 0$ , то  $\frac{dN}{dx} = 0$ , а это означает, что касательная в точке 3 к той же параболе, которую мы хотим строить, горизонтальна. Этого уже достаточно,

чтобы провести эту кривую через точки  $N_2 = \frac{1}{2}q_0a$ ,  $N_3 = 0$  и так, чтобы она касалась оси  $x$  в точке 3. Кроме того, так как в

$$N_3^- = \int_{dx} q(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad dx \rightarrow 0,$$

сечении 2 нет скачка на эпюре  $q(x)$ , то в этой точке парабола должна касаться прямой на участке 1–2. Строя искомую параболу по лекалу с учетом еще и этого обстоятельства, мы проведем ее уже практически точно.

Итак, эпюра  $N(x)$  построена и показана на рис. 4.13 в. Теперь для построения эпюры  $\sigma(x)$  необходимо разделить силы  $N(x)$  на площади  $F(x)$  поперечных сечений бруса. Сделав это, получаем эпюру  $\sigma_x(x)$ , изображенную на рис. 4.13 г. Так как в нашем случае деформации упруги, т.е.  $\varepsilon_x = \sigma_x(x)/E$ , то эпюра  $\varepsilon_x(x)$  отличается от эпюры  $\sigma_x(x)$  только постоянным множителем. В таком случае нет необходимости в отдельном графике для  $\varepsilon_x$ . Достаточно указать для эпюры, показанной на рис. 4.13 г, масштабный множитель  $\{q_0a/EF\}$ , соответствующий деформации  $\varepsilon_x$ . Таким образом, эпюра на рис. 4.13 г изображает графики  $\sigma_x(x)$  и  $\varepsilon_x(x)$  с соответствующими масштабными множителями  $\{q_0a/F\}$  и  $\{q_0a/EF\}$ .

При построении эпюры перемещений  $u(x)$  сечений бруса (рис. 4.13 д) прежде всего обратим внимание на то, что сечение 0 задано и, следовательно, его перемещение равно нулю. Это позволяет, приняв в точке 0 начало координат  $x$  и учитывая, что тогда  $u(0) = 0$ , записать геометрическую интегральную зависимость (4.4.6) в виде

$$u(x) = \int_0^x \varepsilon_x dx. \quad (4.4.10)$$

Эта формула геометрически означает, что перемещение  $u(x)$  сечения  $x$  равно площади эпюры  $\varepsilon_x$  на участке от сечения 0 до сечения  $x$ . При этом площадь эпюры  $\varepsilon_x$  считается положительной на участках, где  $\varepsilon_x > 0$ , и отрицательной там, где  $\varepsilon_x < 0$ . Подсчитывая площади эпюры  $\varepsilon_x$ , легко находим перемещения сечений 1 и 2:

$$u_1 = -\frac{1}{4} \frac{q_0a}{EF} a = -\frac{1}{4} \frac{q_0a^2}{EF},$$

$$u_2 = -\frac{1}{4} \frac{q_0a^2}{EF} + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \frac{q_0a}{EF} + \frac{1}{2} \frac{q_0a}{EF} \right) a = \frac{3}{4} \frac{q_0a^2}{EF}.$$

На участке 0–1 в соответствии с геометрической дифференциальной зависимостью  $du/dx = \varepsilon_x$  и так как  $\varepsilon_x = \text{const}$ , график  $u(x)$  является прямой линией, которая проходит через точки  $u_0 = u(0) = 0$  и  $u_1 = u(a) = -\frac{1}{4} \frac{q_0a^2}{EF}$ . Эта прямая построена на рис. 4.14 д. В качестве масштабного множителя удобно взять величину  $\{q_0a^2/EF\}$ .

На участке 1–2  $\varepsilon_x$  изменяется линейно. Поэтому в силу того, что  $du/dx = \varepsilon_x$ ,  $u(x)$  здесь меняется уже по квадратичному закону. Так как  $\varepsilon_x > 0$ , то  $u(x)$  возрастает, причем в начале участка  $\varepsilon_x$ , а значит, и скорость возрастания  $u(x)$  больше, чем в его конце. Поэтому парабола имеет выпуклость вверх. Для того, чтобы уточнить ход параболы на участке 1–2, можно поступить следующим образом: продлить прямую  $\varepsilon_x$  до пересечения с осью  $x$  (пунктир на рис. 4.13 г) в середине участка 2–3. Тогда в этой точке квадратичная парабола должна иметь максимум, и его величина равна площади эпюры  $\varepsilon_x$  на участке от  $x = 0$  до  $x = \frac{5}{2}a$ :

$$\int_0^{\frac{5}{2}a} \varepsilon_x dx = -\frac{1}{4} \frac{q_0 a^2}{EF} a + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \frac{q_0 a}{EF} \cdot \frac{3}{2} a = \frac{7}{8} \frac{q_0 a^2}{EF}.$$

Теперь по двум точкам  $u_1 = -\frac{1}{4} \frac{q_0 a^2}{EF}$ ,  $u_2 = \frac{3}{4} \frac{q_0 a^2}{EF}$  и с учетом того, что при своем продолжении парабола при  $x = \frac{5}{2}a$  имеет максимум, равный  $\frac{7}{8} \frac{q_0 a^2}{EF}$ , строим эту параболу. Ее ход на участке 2–3 показан пунктиром. При необходимости можно построить и аналитическое выражение этой кривой. Для этого достаточно составить аналитическое выражение прямой  $\varepsilon_x$  на участке 1–2. Сделать это можно, используя выражение для прямой линии, проходящей через две точки:

$$\frac{\varepsilon(x) - \frac{3}{2} \frac{q_0 a}{EF}}{\frac{1}{2} \frac{q_0 a}{EF} - \frac{3}{2} \frac{q_0 a}{EF}} = \frac{x - a}{2a - a}.$$

Отсюда получаем  $\varepsilon_x(x) = \frac{q_0 a}{EF} \left( -x + \frac{5}{2}a \right)$ ,  $x \in (a, 2a]$ .

Тогда на участке 1–2

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x \varepsilon(x) dx = \int_0^a \varepsilon_x dx + \int_a^x \varepsilon_x dx = u(a) + \int_a^x \varepsilon_x dx = \\ &= -\frac{1}{4} \frac{q_0 a^2}{EF} + \frac{q_0}{EF} \int_a^x \left( -x + \frac{5}{2}a \right) dx = \frac{q_0}{EF} \left( -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}ax - \frac{9}{4}a^2 \right). \end{aligned}$$

Непосредственно проверяя значение этого выражения при  $x = a$ ,  $x = 2a$  и  $x = \frac{5}{2}a$ , получаем, что такая парабола проходит

через точки

$$\begin{aligned} \left( x = a, u = -\frac{1}{4}q_0 \frac{a^2}{EF} \right), \quad \left( x = 2a, u = \frac{3}{4} \frac{q_0 a^2}{EF} \right), \\ \left( x = \frac{5}{2}a, u = \frac{7}{8} \frac{q_0 a^2}{EF} \right). \end{aligned}$$

На участке 2–3  $u(x)$  меняется по кубическому закону, так как здесь  $\varepsilon_x(x)$  имеет квадратичный закон изменения. Кроме того, так как  $\varepsilon_{x3} = \varepsilon_x(3a) = 0$ , эта кубическая парабола имеет максимум при  $x = 3a$ , а в точке 2 (при  $x = 2a$ ) она касается только что построенной квадратичной параболы  $u(x)$  участка 1–2. Подсчитаем перемещение конца бруса (сечение 3):

$$u_3 = u(3a) = \int_{0-3} \varepsilon_x dx = \int_{0-2} \varepsilon_x dx + \int_{2-3} \varepsilon_x dx = \frac{3}{4} \frac{q_0 a^2}{EF} + \int_{2-3} \varepsilon_x dx.$$

Из графика  $\varepsilon_x(x)$ , данного на рис. 4.14 г, легко видеть, что на участке 2–3

$$\varepsilon_x(x) = \frac{q_0 a}{2EF} \frac{(x - 3a)^2}{a^2}. \quad (4.4.11)$$

Действительно, при  $x = 3a$   $\varepsilon_x(3a) = 0$ , а при  $x = 2a$   $\varepsilon_x(2a) = \frac{1}{2} \frac{q_0 a}{EF}$ . Учитывая это, получаем

$$\int_{2-3} \varepsilon_x dx = \frac{q_0}{2aEF} \int_{2a}^{3a} (x - 3a)^2 dx = \frac{1}{6} \frac{q_0 a^2}{EF}.$$

Поэтому

$$u_3 = u(3a) = \frac{3}{4} \frac{q_0 a^2}{EF} + \frac{1}{6} \frac{q_0 a^2}{EF}.$$

Остается только провести через точку  $\frac{3}{4} \frac{q_0 a^2}{EF}$  при  $x = 2a$  и точку  $\frac{11}{12} \frac{q_0 a^2}{EF}$  при  $x = 3a$  кривую, имеющую выпуклость вверх, касающуюся в точке 2 ( $x = 2a$ ) кривой участка 1–2 и имеющую в точке 3 (при  $x = 3a$ ) максимум.

При необходимости нетрудно построить и аналитическое выражение кривой  $u(x)$  и на участке 2–3. Для этого достаточно воспользоваться выражением (4.4.11) для  $\varepsilon_x(x)$  на этом участке и формулой (4.4.10), представив ее в виде

$$u(x) = u(2a) + \int_{2a}^x \varepsilon_x(x) dx,$$

где перемещение  $u(2a)$  уже вычислено и равно  $\frac{3}{4} \frac{q_0 a^2}{EF}$ .

При разборе этого примера мы подробно остановились на технике построения эпюор с использованием дифференциальных и интегральных зависимостей, поскольку эти приемы при некотором навыке оказываются весьма эффективными.

**4.4.2.** Для бруса постоянного сечения  $F$  и длины  $l$ , нагруженного силами только по концам, соотношения существенно упрощаются. Так как у такого бруса  $q = 0$  и отсутствуют сосредоточенные нагрузки (кроме концевых сил), то из (4.4.1), (4.4.2) следует, что  $N = \text{const}$  по  $l$ . Тогда и  $\sigma_x = \frac{N}{F} = \text{const}$  по  $l$ , а также и  $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{EF} = \text{const}$  по  $l$ . И из (4.4.6), (4.4.7) следует, что

$$u(x) = u(x_0) + \varepsilon_x(x - x_0) = u(x_0) + \frac{N}{EF}(x - x_0), \quad (4.4.12)$$

$$\Delta l = \varepsilon_x l = \frac{Nl}{EF}.$$

Конструкции, составленные из такого рода брусьев (стержней), скрепленных между собой шарнирами, часто называют *фермами*. Некоторые фермы показаны на рис. 4.16. Фермы, у которых оси всех составляющих их стержней лежат в одной плоскости и которые нагружены в этой же плоскости, называются *плоскими фермами*.

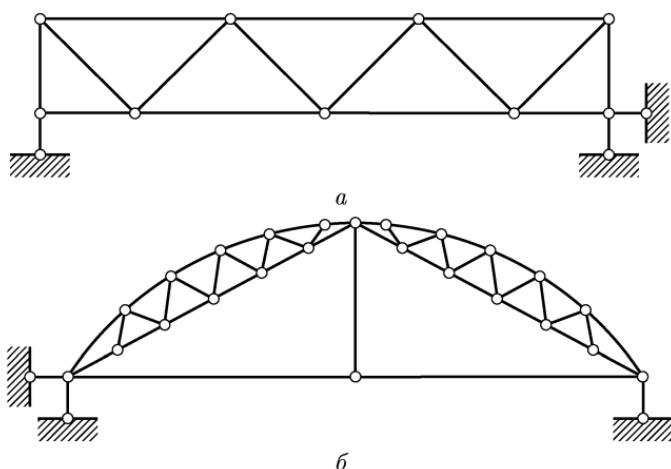


Рис. 4.16

Шарниры, соединяющие между собой стержни ферм, являются устройствами, которые не оказывают сопротивления взаимному повороту скрепляемых элементов. Поэтому в них возникают только силы взаимодействия стержней. В фермах шарни-

ры выполнены так, чтобы силы, действующие со стороны шарнира на соединенные им стержни, были направлены вдоль осей стержней. Один из возможных конструктивных вариантов выполнения шарнира показан на рис. 4.17.

Рассмотрим пример определения продольных сил в стержнях плоской статически определимой фермы.

**Пример 4.2.** Плоская ферма, показанная на рис. 4.18, состоит из пяти стержней 1–5 и жесткого элемента  $BCD$  (диска). Продольную силу в  $i$ -м стержне фермы обозначим через  $N_i$ . Определим  $N_i$  из условий равновесия отсеченных частей, показанных на рис. 4.19. На нем через  $N_{Dx}$  и  $N_{Dy}$  обозначены усилия взаимодействия узла  $D$  с диском  $BCD$ .

Уравнения равновесия можно записать в следующем виде.  
Узел  $A$  (рис. 4.19 а)

$$\begin{aligned}\sum P_y &= 0 \rightarrow N_1 \sin \alpha + P = 0, \\ \sum P_x &= 0 \rightarrow N_2 + N_1 \cos \alpha = 0.\end{aligned}$$

Диск  $BCD$  (рис. 4.19 б)

$$\begin{aligned}\sum P_y &= 0 \rightarrow N_{Dy} + N_1 \sin \alpha + 2P = 0, \\ \sum M_c &= 0 \rightarrow N_{Dx}l - N_1 l \cos \alpha = 0, \\ \sum P_x &= 0 \rightarrow -N_3 + N_2 + N_1 \cos \alpha + N_{Dx} = 0.\end{aligned}\tag{4.4.13}$$

Узел  $D$  (рис. 4.19 в)

$$\begin{aligned}\sum P_y &= 0 \rightarrow N_4 \sin \beta - N_{Dy} = 0, \\ \sum P_x &= 0 \rightarrow -N_5 - N_4 \cos \beta - N_{Dx} = 0.\end{aligned}$$

Уравнения записаны в такой последовательности, чтобы в каждом последующем уравнении появлялось лишь одно новое неизвестное. Решая их с учетом вытекающих из треугольников  $ABC$  и  $DEF$  значений  $\sin \alpha = 1/\sqrt{5}$ ,  $\cos \alpha = 2/\sqrt{5}$ ,  $\sin \beta = \cos \beta = \sqrt{2}/2$ , получаем следующие величины искомых про-

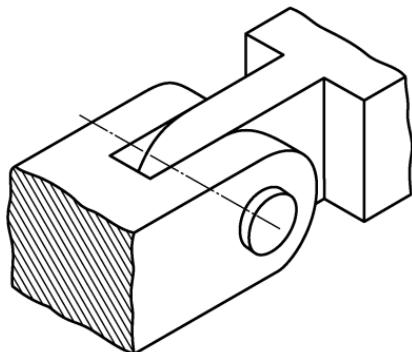


Рис. 4.17

дольных сил:

$$N_1 = -P\sqrt{5}, \quad N_2 = 2P, \quad N_{Dy} = -P, \quad N_{Dx} = -2P, \\ N_3 = -2P, \quad N_4 = P\sqrt{2}, \quad N_5 = P.$$

Теперь по формуле (4.4.12) мы можем найти удлинения всех стержней  $\Delta l_i = N_il_i/EF_i$ , а значит, и длины деформированных

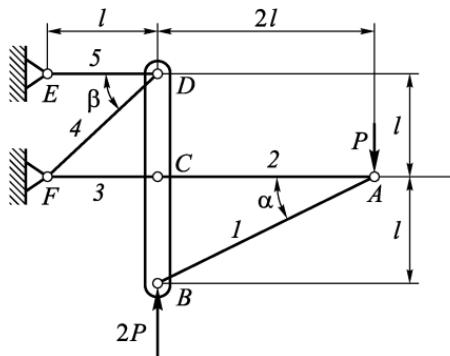


Рис. 4.18

форма, например, в виде квадрата, то можно определить положение и величину смещения всех ее точек. Но очевидно, что такой подход неудобен. Разработаны простые и эффективные методы определения перемещений ферменных конструкций, которые будут рассмотрены в разд. 4.7.

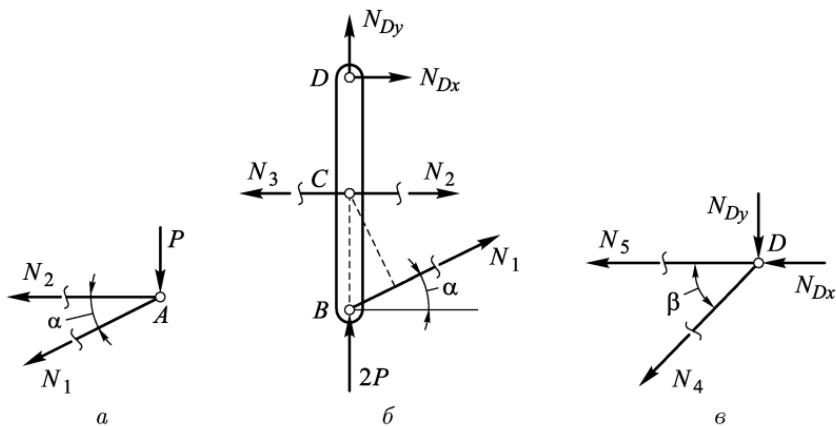


Рис. 4.19

В случае расчета сложной многоузловой ферменной конструкции, содержащей много дисков, изложенный выше подход, конечно, также применим, но он трудоемок. Для облегчения

этих расчетов и проведения их с помощью ЭВМ разработаны специальные методы и основанные на них программы для ЭВМ. Более широко методы расчета сложных ферменных конструкций рассматриваются в строительной механике.

#### 4.5. Расчет простейших статически неопределеных конструкций

**4.5.1.** В гл. 11 будет рассмотрена общая методика расчета сколь угодно сложных статически неопределенных конструкций. Здесь же мы на простейших примерах познакомим читателя с особенностями поведения и расчета таких конструкций.

П р и м е р 4.3. Найдем продольные силы простой трехстержневой фермы (рис. 4.20), возникающие в результате действия на нее силы  $P$ . Будем считать, что все стержни этой фермы выполнены из одинакового материала с модулем упругости 1-го рода  $E$  и имеют одинаковые поперечные сечения площади  $F$ .

Имея уже опыт решения ферменной конструкции (см. пример 4.2), составим сначала уравнения равновесия узла  $A$ , вырезанного из фермы и показанного на рис. 4.21:

$$\begin{aligned}\sum P_x &= 0 \rightarrow -N_1 \cos 45^\circ + N_2 \cos 45^\circ = 0, \\ \sum P_y &= 0 \rightarrow N_1 \sin 45^\circ + N_2 \sin 45^\circ - N_3 - P = 0.\end{aligned}\quad (4.5.1)$$

Таких независимых уравнений можно составить только два, так как узел плоский и все действующие на него силы сходятся в

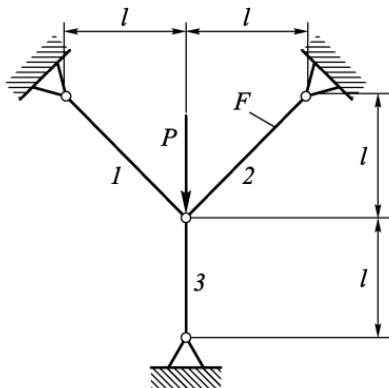


Рис. 4.20

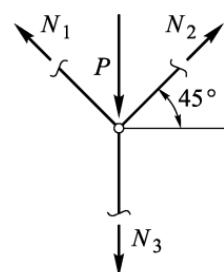


Рис. 4.21

точке  $A$ . Но эти два уравнения статики содержат три неизвестные продольные силы. Поэтому эта ферма является статически неопределенной. Для ее решения рассмотрим деформацию системы. В силу симметрии фермы и действующей на нее нагрузки,

как это следует из первого уравнения равновесия (4.5.1), продольные силы в ее боковых стержнях одинаковы:  $N_1 = N_2$ . А так как одинаковы жесткости и длины этих стержней, то и их удлинения равны, т.е.  $\Delta l_1 = \Delta l_2$ . Поэтому узел  $A$  под действием силы  $P$  опустится строго вдоль стержня 3. Деформированное состояние фермы показано на рис. 4.22 штриховыми линиями. Ясно, что опускание  $AA'$  узла  $A$  равно укорочению  $\Delta l_3$  среднего стержня. Чтобы найти удлинение  $\Delta l_1$  бокового стержня, достаточно вычесть из новой его длины  $OA'$  старую  $OA$ . Для этого можно провести через точку  $A$  дугу окружности с центром в точке  $O$  до пересечения с  $OA'$ .

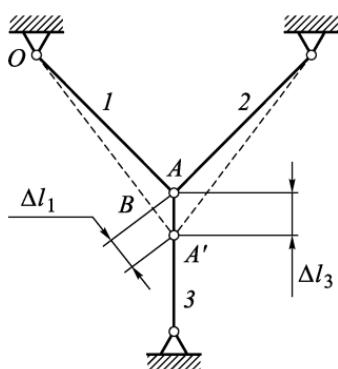


Рис. 4.22

Но так как смещение  $AA'$  мало, то с достаточной точностью можно заменить дугу окружности касательной или опустить из точки  $A$  перпендикуляр на  $OA'$ , который пересечет  $OA'$  в точке  $B$ . Тогда  $\Delta l_1 = BA'$ . В треугольнике  $ABA'$  из-за малости смещения  $AA'$  угол  $BA'A$  близок к углу  $45^\circ$ , который был между стержнями 1 и 3 до деформации, и поэтому с той же точностью можно принять, что  $\angle BAA' = 45^\circ$ . Заметим, что такое же допущение нами уже

сделано неявно при составлении уравнений равновесия узла  $A$  (см. (4.5.1)), в которых в соответствии с принципом малости деформаций использованы углы, соответствующие недеформированной ферме. Итак, с принятой точностью можно считать треугольник  $BA'A$  прямоугольным равнобедренным. Поэтому  $AA' = \sqrt{2} BA'$  или

$$\Delta l_3 = \sqrt{2} \Delta l_1. \quad (4.5.2)$$

Однако при линейно-упругих деформациях  $\Delta l_1 = N_1 l \sqrt{2}/EF$ , а  $\Delta l_3 = -N_3 l / EF$ . Знак «минус» здесь учитывает, что в уравнении равновесия (4.5.1)  $N_3$  входит как растягивающая сила, и поэтому величина  $N_3 l / EF$  является удлинением стержня, а в уравнении (4.5.2)  $\Delta l_3$  — это укорочение стержня. С учетом этого из (4.5.2) следует, что

$$N_3 = -2N_1. \quad (4.5.3)$$

Уравнение (4.5.2) отражает простой геометрический факт: при деформации боковые и средний стержни все время остаются соединенными в узле  $A$ , т.е. стержни деформируются совместно. Поэтому уравнение (4.5.2) и следующее из него уравнение (4.5.3) называют *уравнением неразрывности деформаций*, или *уравнением*

нием совместности деформаций. Решая систему из уравнений равновесия (4.5.1) и совместности деформаций (4.5.3), получаем усилия в стержнях фермы:

$$N_1 = \frac{P}{2 + \sqrt{2}}, \quad N_3 = -\frac{2P}{2 + \sqrt{2}}.$$

Этот простой пример показывает, что при решении статически неопределенных систем к уравнениям статики добавляются уравнения совместности деформаций.

**4.5.2.** Пример 4.4. Рассмотрим теперь брус, приведенный в примере 4.1 (см. рис. 4.13), но будем считать, что заделаны оба его конца (рис. 4.23). Попытка применить к нему сразу метод сечений оказывается безуспешной, так как при рассечении бруса обе его части остаются заделанными и потому не имеют степеней свободы, необходимых для составления уравнений равновесия. Поэтому сначала отбросим опоры и заменим их реакциями, которые обозначим через  $R_0$  и  $R_3$  (рис. 4.24). Теперь для такого бруса можно составить уравнение равновесия:

$$\sum P_x = 0 \rightarrow -R_0 - 2q_0a + \int_{1-3} q(x) dx + R_3 = 0.$$

Отсюда, учитывая, что  $\int_{1-3} q(x) dx$  равен площади эпюры  $q(x)$  на участке 1–3, получаем

$$-R_0 + R_3 = \frac{1}{2}q_0a. \quad (4.5.4)$$

Но в этом уравнении статики — две неизвестных реакции  $R_0$  и  $R_3$ , поэтому такой брус статически неопределен. Замечаем, что он деформируется так, что его общая длина  $3a$  не изменяется, т.е. его общее удлинение равно нулю:

$$\Delta l_{0-3} = 0. \quad (4.5.5)$$

Но удлинение всего бруса равно сумме удлинений его участков:

$$\Delta l_{0-3} = \Delta l_{0-1} + \Delta l_{1-2} + \Delta l_{2-3}. \quad (4.5.6)$$

Так как на участке 0–1  $q = 0$  и из статической дифференциальной зависимости  $dN/dx = -q$  следует, что  $N = \text{const}$ , то

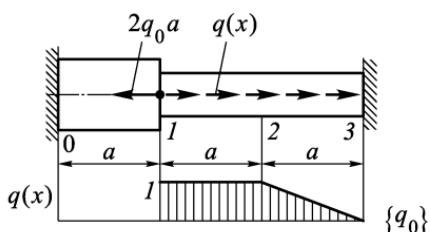


Рис. 4.23

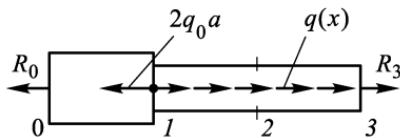


Рис. 4.24

удлинение этого участка можно подсчитать по формуле (4.4.12) как

$$\Delta l_{0-1} = \frac{N_{0-1}a}{2EF}.$$

Продольную силу  $N_{0-1}$  найдем методом сечений из условия равновесия отсеченной части, показанной на рис. 4.25 а. Получаем  $N_{0-1} = R_0$ , тогда

$$\Delta l_{0-1} = \frac{R_0a}{2EF}. \quad (4.5.7)$$

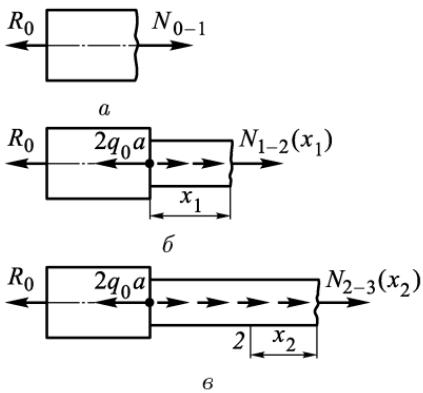


Рис. 4.25

показанных на рис. 4.25 б, в, получаем

$$\begin{aligned} \Delta l_{1-2} &= \int_{1-2} \frac{N(x_1)}{EF} dx_1 = \\ &= \int_0^a \frac{R_0 + 2q_0a - q_0x_1}{EF} dx_1 = \frac{R_0a + \frac{3}{2}q_0a^2}{EF}, \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

$$\begin{aligned} \Delta l_{2-3} &= \int_{2-3} \frac{N(x_2)}{EF} dx_2 = \\ &= \int_0^a \frac{R_0 + 2q_0a - q_0a - \left( q_0x_2 - \frac{1}{2}q_0 \frac{x_2^2}{a} \right)}{EF} dx_2 = \frac{R_0a + \frac{2}{3}q_0a^2}{EF}. \end{aligned}$$

Подставим полученные удлинения участков в уравнение совместности (4.5.5). В результате простых вычислений получим, что  $R_0 = -\frac{26}{30}q_0a$ , а из уравнения равновесия (4.5.7) сразу найдем, что  $R_3 = -\frac{11}{30}q_0a$ . Полученный результат изображен на рис. 4.26 а. Теперь задача отыскания продольных усилий в сечениях бруса становится статически определимой и можно най-

На участках 1–2 и 2–3 продольная сила переменна, и для подсчета  $\Delta l_{1-2}$  и  $\Delta l_{2-3}$  воспользуемся формулой (4.4.7) и законом Гука  $\varepsilon_x = N/EF$ . Поэтому

$$\Delta l = \int_l \varepsilon_x dx = \int_l \frac{N}{EF} dx.$$

Определяя  $N_{1-2}(x_1)$  и  $N_{2-3}(x_2)$  из условий равновесия отсеченных частей,

ти  $N(x)$ ,  $\sigma_x(x)$ ,  $\varepsilon_x(x)$  и  $u(x)$  по методике, которая изложена в п. 4.4.1 и использована при решении примера 4.1. Мы представляем читателю возможность попрактиковаться в построении эпюр, а для проверки приводим на рис. 4.26 результаты решения. Отметим, что прежде чем строить эпюру перемещений  $u(x)$ , сразу же после построения эпюры  $\varepsilon_x(x)$  можно легко проверить правильность определения реакций из уравнения совместности (4.5.5), которое при проверке удобно записать в виде

$$\Delta l_{0-3} = \int_{0-3} \varepsilon_x dx = 0.$$

А это геометрически означает, что должна быть равна нулю площадь эпюры  $\varepsilon_x(x)$ .

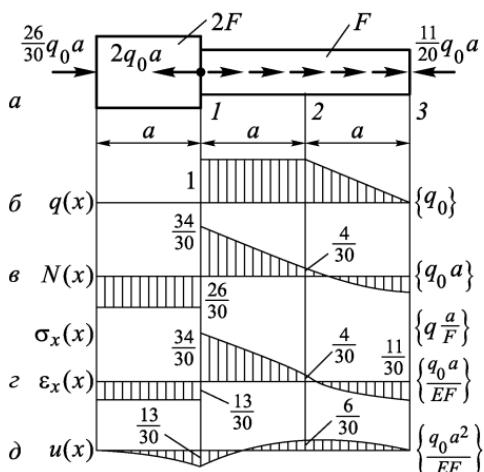


Рис. 4.26

## 4.6. Влияние нагрева на напряженно-деформированное состояние при растяжении–сжатии

**4.6.1.** При описании температурных деформаций мы ограничимся известным читателю еще из школьного курса физики законом линейного температурного расширения. Согласно этому закону стержень длиной  $l$  при свободном расширении из-за нагревания на  $\Delta t$  удлинится на величину

$$\Delta l^t = \alpha \Delta t l. \quad (4.6.1)$$

Здесь  $\alpha$  — коэффициент линейного температурного расширения. Из формулы (4.6.1) видно, что  $\alpha$  измеряется в град $^{-1}$  и по своему смыслу  $\alpha$  — это удлинение стержня единичной длины при нагревании на один градус; в этом случае  $\Delta l^t = \alpha \cdot 1 \cdot 1$ .

Чтобы отличить удлинение стержня, образовавшееся вследствие нагрева, мы ввели у  $\Delta l$  верхний индекс  $t$ .

Удлинение стержня под действием продольной силы  $N$  будем обозначать через  $\Delta l^N$ , а при одновременном действии нагрева и продольных усилий — как  $\Delta l$ .

Будем считать, что такое удлинение подчиняется гипотезе Дюамеля–Неймана:

$$\Delta l = \Delta l^N + \Delta l^t. \quad (4.6.2)$$

Эта гипотеза по существу постулирует принципы суперпозиции для силовой и температурной деформаций. Для конструкционных материалов она с достаточной точностью подтверждается экспериментально.

Если соотношение (4.6.2) разделить на недеформированную длину стержня  $l$  и таким образом перейти к относительным деформациям, то гипотеза Дюамеля–Неймана запишется в форме

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^N + \varepsilon_x^t = \varepsilon_x^N + \alpha \Delta t. \quad (4.6.3)$$

Если при этом силовая деформация подчиняется закону Гука  $\varepsilon_x^N = \sigma_x/E$ , то из (4.6.3) получим соотношение

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha \Delta t. \quad (4.6.4)$$

Это соотношение по существу дополняет закон Гука слагаемым, учитывающим линейное температурное расширение. Заметим, что изменение температуры может оказаться и на первом слагаемом в (4.6.4), если учесть, что, вообще говоря, модуль упругости  $E$  также зависит от температуры, т.е. что  $E = E(t)$  (см. п. 3.4.2).

**4.6.2.** Рассмотрим сначала влияние нагрева на статически определимые системы. Прежде чем переходить к общим выводам, решим две простые задачи.

**П р и м е р 4.5.** Найдем напряженно-деформированное состояние знакомого нам по примеру 4.1 бруса, показанного на рис. 4.27 а, при его нагреве. Закон изменения температуры  $\Delta t$  по длине бруса дан на рис. 4.27 б.

Для определения продольной силы  $N_{0-1}$

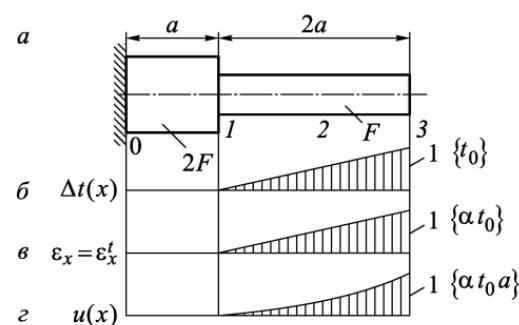


Рис. 4.27

на участке 0–1 рассечем брус и рассмотрим равновесие отсеченной части, изображенной на рис. 4.28. Из-за отсутствия внешних нагрузок условие равновесия  $\sum P_x = 0$  для отсеченной части имеет максимально простой вид

$$N_{0-1} = 0. \quad (4.6.5)$$

Точно так же из условия равновесия отсеченной части на участке 1–3 получим, что и на этом участке продольная сила не возникает, т.е.

$$N_{1-3} = 0. \quad (4.6.6)$$

Этот результат в рассматриваемой задаче отражает тот очевидный факт, что расширение бруса при его нагревании происходит без каких-либо стеснений, свободно. В этих условиях напряжений в брусе не возникает, т.е.  $\sigma_x = N/F = 0$ , и поэтому  $\varepsilon_x^N = 0$ , а значит,  $\varepsilon_x = \varepsilon_x^t = \alpha\Delta t$ . Эпюра относительных деформаций  $\varepsilon_x$  в этом случае подобна эпюре температур  $\Delta t(x)$  (рис. 4.27 *ε*). Интегрируя ее в соответствии с соотношением  $u = u(0) + \int_0^x \varepsilon_x dx$ , как это делалось в примерах 4.1 и 4.4, приходим к эпюре, показанной на рис. 4.27 *г*.

Если нагрев происходит при одновременном нагружении бруса внешними силами, например, рассмотренными в примере 4.1 (см. рис. 4.13), то по принципу суперпозиции, постулированному гипотезой Дюамеля–Неймана, результат одновременного действия нагрева и нагрузок может быть получен как сумма результатов их действия в отдельности. Иными словами, в этом случае мы можем получить решение, просуммировав эпюры, данные на рис. 4.13 и 4.27.

Заключая этот пример, обратим внимание читателя на то, что при действии только нагрева на рассмотренный брус уравнения равновесия его отсеченных частей (4.6.5) и (4.6.6) являются однородными. В силу статической определимости бруса они полностью и однозначно определяют продольные силы. И поскольку эти уравнения являются линейными относительно искоемых продольных сил  $N_{0-1}$  и  $N_{1-3}$ , то в силу их однородности они имеют единственное нульевое решение. Простота же уравнений (4.6.5) и (4.6.6) не меняет их общих свойств: линейности, однородности и однозначной разрешимости.

**П р и м е р 4.6.** Рассмотрим знакомую нам уже ферму, изображенную на рис. 4.18. Пусть на нее не действуют внешние силы, а стержни 1, 3 и 5 нагреваются на температуру  $\Delta t$  (рис. 4.29). Найдем усилия, возникающие в стержнях этой фермы вследствие нагрева. Так же, как и в примере 4.2, методом сечений выделим узлы *A*, диск *BCD* и узел *D* (рис. 4.30 *a, б, в*) и



Рис. 4.28

эпюра температур  $\Delta t(x)$  (рис. 4.27 *ε*). Интегрируя ее в соответствии с соотношением  $u = u(0) + \int_0^x \varepsilon_x dx$ ,

как это делалось в примерах 4.1 и 4.4, приходим к эпюре, показанной на рис. 4.27 *г*.

Если нагрев происходит при одновременном нагружении бруса внешними силами, например, рассмотренными в примере 4.1 (см. рис. 4.13), то по принципу суперпозиции, постулированному гипотезой Дюамеля–Неймана, результат одновременного действия нагрева и нагрузок может быть получен как сумма результатов их действия в отдельности. Иными словами, в этом случае мы можем получить решение, просуммировав эпюры, данные на рис. 4.13 и 4.27.

Заключая этот пример, обратим внимание читателя на то, что при действии только нагрева на рассмотренный брус уравнения равновесия его отсеченных частей (4.6.5) и (4.6.6) являются однородными. В силу статической определимости бруса они полностью и однозначно определяют продольные силы. И поскольку эти уравнения являются линейными относительно искоемых продольных сил  $N_{0-1}$  и  $N_{1-3}$ , то в силу их однородности они имеют единственное нульевое решение. Простота же уравнений (4.6.5) и (4.6.6) не меняет их общих свойств: линейности, однородности и однозначной разрешимости.

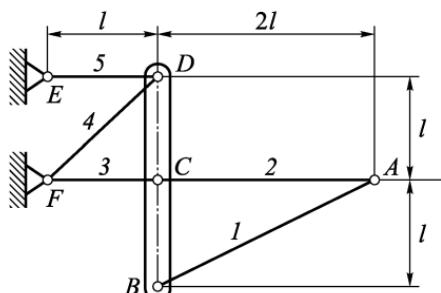


Рис. 4.29

составим уравнения их равновесия:

Узел  $A$  (рис. 4.30  $a$ )

$$\sum P_y = 0 \rightarrow N_1 \sin \alpha = 0,$$

$$\sum P_x = 0 \rightarrow N_2 + N_1 \cos \alpha = 0.$$

Диск  $BCD$  (рис. 4.30  $b$ )

$$\sum P_y = 0 \rightarrow N_{Dy} + N_1 \sin \alpha = 0,$$

$$\sum M_c = 0 \rightarrow N_{Dx}l - N_1 l \cos \alpha = 0, \quad (4.6.7)$$

$$\sum P_x = 0 \rightarrow -N_3 + N_2 + N_1 \cos \alpha + N_{Dx} = 0.$$

Узел  $D$  (рис. 4.30  $c$ )

$$\sum P_y = 0 \rightarrow -N_4 \sin \beta - N_{Dy} = 0,$$

$$\sum P_x = 0 \rightarrow -N_5 - N_4 \cos \beta - N_{Dx} = 0.$$

Так же, как и уравнения (4.4.13), эти уравнения являются линейными относительно искомых усилий в стержнях  $N_1$ ,  $N_2$ , ...,  $N_5$  и сил взаимодействия  $N_{Dx}$ ,  $N_{Dy}$  диска  $BCD$  с уз-

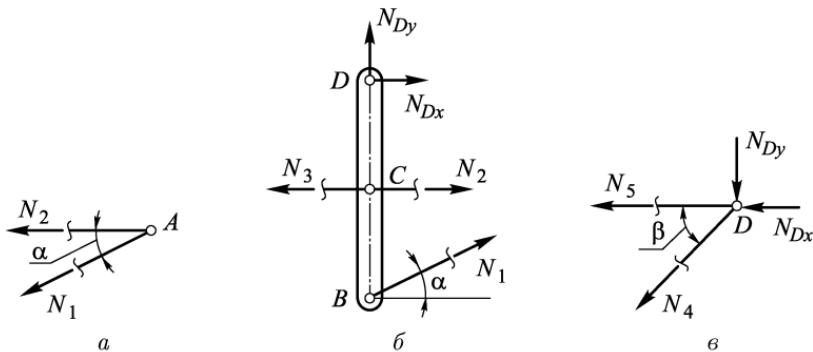


Рис. 4.30

лом  $D$ . Но в отличие от (4.4.13) уравнения (4.6.7) являются однородными. Решая их последовательно, мы приходим к тому, что все искомые усилия равны нулю и это решение является единственным. Таким образом, нагрев стержней рассмотренной статически определимой фермы не вызывает появления продольных сил в ее стержнях. Если одновременно с нагревом ферма нагружается внешними силами, например, показанными на рис. 4.18, то усилия в стержнях определяются из уравнений (4.4.13). И, следовательно, нагрев рассмотренной в примере 4.2 статически определимой фермы никак не скажется на усилиях в ее стержнях.

Обобщим теперь результаты решения рассмотренных в примерах 4.1, 4.2, 4.5 и 4.6 статически определимых систем. Несмотря на различную форму и сложность их уравнений равновесия, все эти уравнения имеют общие свойства:

1. Все уравнения равновесия линейны относительно искомых продольных сил.

2. При действии только нагрева уравнения равновесия являются однородными, а при одновременном действии нагрузок и нагрева свободные члены в уравнениях равновесия зависят только от нагрузок.

3. Так как эти системы статически определимы, то продольные усилия в них однозначно (!) определяются только из уравнений равновесия.

Эти три свойства характерны для уравнений равновесия любой статически определимой системы. Из них в силу общих свойств решений линейных алгебраических уравнений следует, что при действии только нагрева в статически определимых системах не появляется продольных сил, а при одновременном действии внешних сил и нагрева нагрев не оказывается на величинах продольных сил и они определяются только нагрузкой.

**4.6.3.** Заметим, что первые два свойства характерны и для уравнений равновесия статически неопределеных систем, но третьим свойством они не обладают. Как мы увидим из решения следующих примеров, именно это обстоятельство не позволяет распространить сделанные только что для статически определимых систем выводы на статически неопределенные системы.

П р и м е р 4.7. Определим напряженно-деформированное состояние заделанного с двух сторон бруса, показанного на рис. 4.31 *a*, при его нагреве до температуры, закон изменения которой дан на рис. 4.31 *б*. Подобный брус, но под действием нагрузок, мы уже рассматривали в примере 4.4, где убедились, что он является статически неопределенным. Поэтому сначала отбросим опоры и заменим их реакциями, которые обозначим через  $R_0$  и  $R_3$  (рис. 4.32). Тогда уравнение равновесия бруса примет вид

$$-R_0 + R_3 = 0. \quad (4.6.8)$$

Хотя это единственное уравнение равновесия в отличие от (4.5.4) однородно, но оно также содержит две неизвестных реакции  $R_0$  и  $R_3$ , что указывает на статическую неопределенность бруса. Уравнение совместности деформаций бруса, как и в примере 4.4, должно отражать тот факт, что закрепление концов бруса делает невозможным изменение его длины, т.е.

$$\Delta l_{0-3} = 0. \quad (4.6.9)$$

По-прежнему удлинение всего бруса можно подсчитать как сумму удлинений его частей:

$$\Delta l_{0-3} = \Delta l_{0-1} + \Delta l_{1-3}.$$

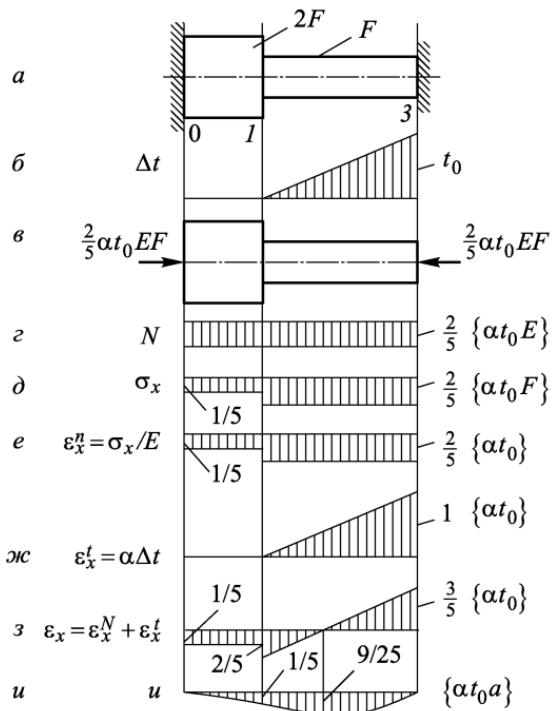


Рис. 4.31

Подсчитывая удлинение  $\Delta l_{0-1}$ , прежде всего замечаем, что участок  $0-1$  не нагревается и причиной появления его удлинения является только продольная сила  $N_{0-1}$ , т.е.  $\Delta l_{0-1} = \Delta l_{0-1}^N$ .

А силовое удлинение для такого участка бруса можно найти по формуле (4.4.12) как  $\Delta l_{0-1} = N_{0-1}a/(E2F)$ . Из условия равновесия отсеченной части бруса, показанной на рис. 4.33 а, получаем, что  $N_{0-1} = R_0$ . Тогда



Рис. 4.32

$$\Delta l_{0-1} = \frac{R_0 a}{2EF}. \quad (4.6.10)$$

На участке 1–3 причинами удлинения являются как продольная сила  $N_{1-3}$ , так и нагрев, т.е.

$$\Delta l_{1-3} = \Delta l_{1-3}^N + \Delta l_{1-3}^t.$$

Силовое удлинение мы также можем подсчитать по формуле (4.4.12), так как из условия равновесия отсеченной части, данной на рис. 4.33 б, следует, что  $\bar{N}_{1-3} = \bar{R}_0 = \text{const}$ . Поэтому

$$\Delta l_{1-3}^N = \frac{\bar{N}_{1-3} \cdot 2a}{EF} = \frac{\bar{R}_0 \cdot 2a}{EF}. \quad (4.6.11)$$

Для подсчета температурного удлинения участка 1–3, на котором температура переменна, воспользуемся интегральным соотношением (4.4.7), которое конечно справедливо для любых деформаций независимо от их природы, в том числе и для температурных деформаций. Поэтому

$$\Delta l^t = \int_l \varepsilon_x^t dx. \quad (4.6.12)$$

Но  $\varepsilon_x^t = \alpha \Delta t$ , значит  $\Delta l_{1-3}^t = \alpha \int_{1-3} \Delta t(x) dx$ . Вычисляя здесь интеграл от заданного на рис. 4.31 б закона распределения  $\Delta t(x)$  как площадь эпюры  $\Delta t(x)$  на участке 1–3, получаем

$$\Delta l_{1-3}^t = \alpha \frac{1}{2} t_0 \cdot 2a = \alpha t_0 a. \quad (4.6.13)$$

Суммируя силовое (4.6.11) и температурное (4.6.13) удлинения, получаем

$$\Delta l_{1-3} = \frac{\bar{R}_0 \cdot 2a}{EF} + \alpha t_0 a. \quad (4.6.14)$$

После подстановки  $\Delta l_{0-1}$  (4.6.10) и  $\Delta l_{1-3}$  (4.6.14) в (4.6.9) приводим уравнение совместности к виду

$$\frac{\bar{R}_0 a}{2EF} + \frac{2\bar{R}_0 a}{EF} + \alpha t_0 a = 0. \quad (4.6.15)$$

Из этого уравнения находим, что

$$\bar{R}_0 = -\frac{2}{5} \alpha t_0 EF.$$

Тогда из уравнения (4.6.7) сразу следует, что и

$$R_3 = -\frac{2}{5} \alpha t_0 EF.$$

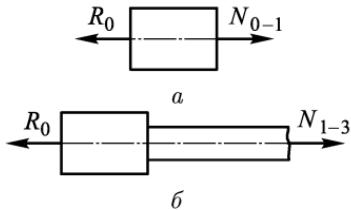


Рис. 4.33

Знак « $-$ » в полученных для  $R_0$  и  $R_3$  выражениях свидетельствует о том, что истинные направления этих реакций не соответствуют направлениям, принятым при составлении уравнений равновесия всего бруса (4.6.8) и его частей (см. рис. 4.33). В нашей задаче нетрудно, конечно, угадать истинные направления реакций, так как, стремясь расширяться при нагреве, брус упирается в опоры, реакции которых создают в нем сжимающую силовую деформацию, компенсирующую температурное расширение. Но в более сложных системах это сделать иногда очень трудно. Наш пример показывает, что в этом и нет необходимости, так как знак у полученной в результате решения реакции покажет, совпадает ли истинное ее направление с принятым при составлении уравнений равновесия и совместности.

Полученные реакции изображены на рис. 4.31 *в* и далее построены эпюры продольных сил, напряжений и деформаций точно так же, как это делалось в примерах 4.1 и 4.4. Только

здесь еще учтены и температурные деформации. Для силовой  $\varepsilon_x^N$  и температурной  $\varepsilon_x^t$  деформаций построены отдельные эпюры (рис. 4.31 *е* и 4.31 *жс*), а эпюра для общей деформации  $\varepsilon_x = \varepsilon_x^N + \varepsilon_x^t$  получена графическим суммированием эпюр  $\varepsilon_x^N$  и  $\varepsilon_x^t$ .

**П р и м ер 4.8.** Найдем усилия, возникающие в показанной на рис. 4.34 ферме при равномерном нагревании ее 3-го стержня на температуру  $\Delta t$ . Составляя уравнения равновесия для узла  $A$  (рис. 4.35), получаем

$$\sum P_x = 0 \rightarrow -N_1 \cos 45^\circ + N_2 \cos 45^\circ = 0, \quad (4.6.16)$$

$$\sum P_y = 0 \rightarrow N_1 \sin 45^\circ + N_2 \sin 45^\circ - N_3 = 0. \quad (4.6.17)$$

В отличие от уравнений равновесия (4.5.1), построенных при решении в примере 4.3 для нагружения фермы силой  $P$ , эти уравнения однородны. Но так же, как и в примере 4.3, в этих двух уравнениях содержится три неизвестных усилия  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$ , что является следствием статической неопределенности системы. Для составления уравнения совместности деформаций рассмотрим деформированное состояние фермы, которое показано на рис. 4.34 штриховыми линиями. Из  $\Delta AA'B$  точно так

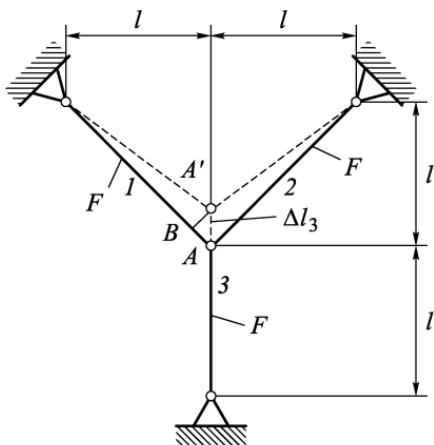


Рис. 4.34

же, как и в примере 4.3, получаем уравнение

$$\Delta l_3 = \sqrt{2} \Delta l_1, \quad (4.6.18)$$

которое не отличается от уравнения (4.5.2). И это не случайно, так как совместность деформации — это, конечно, свойство самой деформации системы, и оно не зависит от причин, ее вызывающих.

Перейдем теперь в уравнении совместности деформаций (4.6.18) к усилиям. Стержень 1 деформируется только под действием возникающей в нем продольной силы  $N_1$ . Поэтому

$$\Delta l_1 = \Delta l_1^N = -N_1 \sqrt{2} l / EF.$$

Знак « $-$ » здесь необходим, так как усилие  $N_1$  растягивающее и величина  $N_1 \sqrt{2} l / EF$  является удлинением, а  $\Delta l_1$  в уравнении (4.6.18), как это видно из рис. 4.34, является укорочением 1-го стержня. При подсчете  $\Delta l_3$  необходимо учесть, что 3-й стержень одновременно растягивается силой  $N_3$  и удлиняется в результате равномерного нагрева на температуру  $\Delta t$ . Поэтому

$$\Delta l_3 = \Delta l_3^N + \Delta l_3^t = \frac{N_3 t}{EF} + \alpha \Delta t \cdot l.$$

Подставим теперь полученные выражения для  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_3$  в уравнение (4.6.18) и получим уравнение совместности деформаций в усилиях:

$$\sqrt{2} \frac{N_1 \sqrt{2} l}{EF} + \frac{N_3 l}{EF} + \alpha \Delta t \cdot l = 0. \quad (4.6.19)$$

Упростив это уравнение и решив его совместно с уравнениями равновесия (4.6.16), (4.6.17), получим

$$N_1 = N_2 = -\frac{\alpha \Delta t \cdot EF}{2 + \sqrt{2}}, \quad N_3 = -\frac{\sqrt{2} \alpha \Delta t \cdot EF}{2 + \sqrt{2}}.$$

Знак « $-$ » здесь означает, что в стержнях фермы возникают сжимающие продольные силы. Это соответствует и физическим представлениям о характере работы фермы при нагревании ее 3-го стержня.

Примеры 4.7 и 4.8 позволяют увидеть общие свойства разрешающих уравнений для статически неопределенных систем, состоящих из уравнений равновесия и уравнений совместности деформаций. Как видно, уравнения равновесия (4.6.8) или (4.6.16), (4.6.17) являются линейными и однородными алгебраическими уравнениями. Но их недостаточно для определения неизвестных

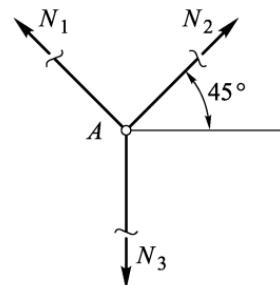


Рис. 4.35

усилий. Поэтому к ним добавляют уравнения совместности деформаций ((4.6.15) или (4.6.19)), которые при нагреве элементов системы в общем случае являются неоднородными.

Таким образом, в отличие от статически определимых систем, в статически неопределеных системах при нагреве их элементов обычно возникают продольные силы.

Конечно, можно найти такие распределения температур по системе при ее нагреве, чтобы ее деформация не сопровождалась возникновениями усилий в стержнях. Например, для показанной на рис. 4.34 фермы нагрев 3-го стержня можно сопровождать таким охлаждением 1-го и 2-го стержней, чтобы их температурные удлинения и укорочения полностью компенсировались, т.е. удовлетворяли условию (4.6.17). Тогда в ферме никаких усилий не возникнет. При решении это обстоятельство выразится в том, что уравнение совместности деформаций после перехода к усилиям станет однородным. А это вместе с однородностью уравнений равновесия приведет к единственному нулевому решению.

## 4.7. Потенциальная энергия бруса при растяжении–сжатии. Определение перемещений ферм

**4.7.1.** Энергетические методы широко используются для решения самых различных задач механики, в том числе и задач механики твердого деформируемого тела. Начало этим методам положили работы одного из создателей дифференциального и интегрального исчисления Г. Лейбница (1646–1716), который ввел для описания движения материальной точки так называемую живую силу  $mv^2$ , с точностью до множителя  $1/2$  совпадающую с современным понятием кинетической энергии. В механике твердого деформируемого тела и ее разделе — сопротивлении материалов — эти методы также широко используются. С их помощью можно простым путем решать многие сложные задачи. Наиболее просто и наглядно эти методы работают при решении

задач линейно-упругого деформирования. Мы здесь ограничимся именно этим классом задач.

Сначала рассмотрим самый простой случай — деформацию прямого бруса постоянного сечения  $F$ , статически

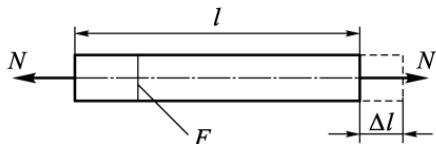


Рис. 4.36

растянутого силами, приложенными к его концам (рис. 4.36). Эти силы обозначим через  $N$ , как мы всегда обозначаем продольную силу. Такое обозначение не вызовет недоразумений,

так как продольная сила в любом из сечений стрежня также равна  $N$ . Под действием этих сил стержень удлинится на величину  $\Delta l$ . При этом, поскольку нагружение статическое и деформации происходят в пределах закона Гука, между силой  $N$  и удлинением  $\Delta l$  сохраняется пропорциональная зависимость, изображенная на рис. 4.37.

Так как деформация упруга, потерь энергии не происходит. Поэтому работу  $A$ , совершенная силой  $N$ , накопится в стрекне в виде потенциальной энергии деформации  $\Pi$ , т.е. имеет место закон сохранения энергии:

$$\Pi = A. \quad (4.7.1)$$

Можно считать, что левый конец бруса закреплен, тогда работу  $A$  совершает только сила  $N$ , приложенная к правому концу бруса. Из курса физики известно, что работа  $A$  переменной силы  $P$  па прямолинейном пути  $x$  от точки  $x_0$  до точки  $x_1$  равна интегралу от силы по этому пути, т.е.

$$A = \int_{x_0}^{x_1} P(x) dx.$$

В нашем случае работа  $A$  силы  $N$  на пути  $\Delta l$  запишется в виде интеграла:

$$A = \int_0^{\Delta l} N d(\Delta l). \quad (4.7.2)$$

При линейной зависимости между силой и удлинением этот интеграл равен площади, заштрихованной на рис. 4.37, т.е.

$$A = \frac{1}{2} N \Delta l. \quad (4.7.3)$$

Поэтому при линейно-упругой деформации рассматриваемого бруса в нем накопится потенциальная энергия деформации:

$$\Pi = \frac{1}{2} N \Delta l = \frac{1}{2} N \frac{\Delta l}{l} l = \frac{1}{2} N \varepsilon_x l. \quad (4.7.4)$$

Для такого бруса закон Гука устанавливает пропорциональную зависимость между  $N$  и  $\Delta l$ ,

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} \quad \text{или} \quad \varepsilon_x = \frac{N}{EF}. \quad (4.7.5)$$

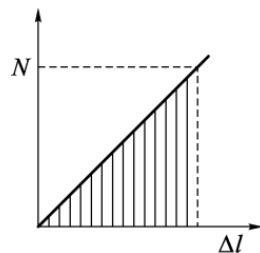


Рис. 4.37

Потенциальную энергию деформаций для него можно записать в одном из следующих видов:

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{E F}, \quad (4.7.6)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{E F}{l} (\Delta l)^2 = \frac{1}{2} E F l \left( \frac{\Delta l}{l} \right)^2 = \frac{1}{2} E F \varepsilon_x^2 l. \quad (4.7.7)$$

Рассмотрим теперь растяжение–сжатие произвольно нагруженного бруса длиной  $l$ , например, показанного на рис. 4.1. Разобьем этот брус на элементы длиной  $dx$  каждый. В каждом элементе накопится потенциальная энергия деформаций  $d\Pi$ . Тогда общую потенциальную энергию деформации бруса  $\Pi$  можно найти в виде интеграла

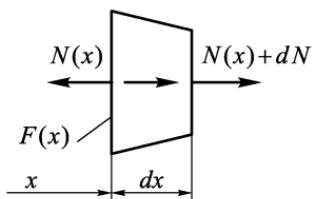


Рис. 4.38

Для того чтобы найти  $d\Pi$ , рассмотрим элемент бруса (рис. 4.38). Ввиду малости длины элемента  $dx$ , с точностью до малых высшего порядка можно считать продольную силу и площадь поперечного сечения постоянными по длине элемента и равными  $N(x)$  и  $F(x)$ . Тогда для вычисления накопленной в элементе потенциальной энергии деформаций  $d\Pi$  можно использовать одну из только что построенных формул (4.7.4), (4.7.6) или (4.7.7) с учетом, что длина элемента равна  $dx$ . В итоге получим три различных выражения для  $\Pi$ :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_l N \varepsilon_x dx, \quad (4.7.9)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_l \frac{N^2}{E F} dx, \quad (4.7.10)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_l E F \varepsilon_x^2 dx. \quad (4.7.11)$$

Теперь легко подсчитать потенциальную энергию деформации фермы как сумму энергий деформации составляющих ее стержней. Если  $N_i$  — продольная сила в  $i$ -м стержне длиной  $l_i$  с жесткостью  $E_i F_i$ , то в нем согласно (4.7.6) накопится потенциальная энергия деформации

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \frac{N_i^2 l_i}{E_i F_i}. \quad (4.7.12)$$

Общую потенциальную энергию деформации фермы найдем как сумму энергий составляющих ее стержней:

$$\Pi = \sum_i \Pi_i = \frac{1}{2} \sum_i \frac{N_i^2 l_i}{E_i F_i}. \quad (4.7.13)$$

**4.7.2.** Рассмотрим теперь вопрос об определении перемещений ферм. Для простых ферм (см. рис. 4.34) перемещение узла может быть легко найдено из геометрических соображений. Так, для фермы на рис. 4.34 перемещение  $AA'$  узла  $A$  равно удлинению 3-го стержня  $\Delta l_3$ . Оно может быть сразу найдено как  $AA' = \Delta l_3 = N_3 l / EF$ . Для сложных же ферм также можно найти перемещения узлов из геометрических соображений. Однако реализовать такой подход даже для сравнительно простой фермы из примера 4.2 (см. рис. 4.18) затруднительно. Мы рассмотрим здесь общий алгоритм определения перемещений узлов ферм.

Пусть в стержнях некоторой фермы (рис. 4.39), нагруженной силой  $P$ , возникли усилия  $N_i(P)$ . Необходимо найти перемещение  $\delta$  узла  $C$  фермы в некотором направлении  $CC'$ . Потенциальная энергия, накопившаяся в стержнях фермы в результате того, что нагрузка  $P$  совершила работу  $A(P)$ , будет

$$\Pi(P) = \frac{1}{2} \sum_i \frac{[N_i(P)]^2 l_i}{(EF)_i} = A(P). \quad (4.7.14)$$

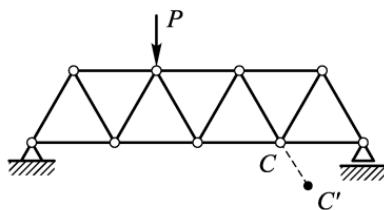


Рис. 4.39

Рассмотрим вспомогательное состояние фермы, которое возникает в ней при нагружении ее единичной силой в направлении искомого перемещения (рис. 4.40). Пусть  $N_i(1)$  — продольные силы в стержнях фермы от действия единичного усилия. Единичная сила в процессе нагружения совершила работу  $A(1)$ , которая накопилась в стержнях в виде потенциальной энергии деформации  $\Pi(1)$ , т.е.

$$A(1) = \Pi(1) = \frac{1}{2} \sum_i \frac{[N_i(1)]^2 l_i}{(EF)_i}. \quad (4.7.15)$$

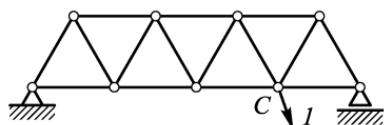


Рис. 4.40

Теперь рассмотрим следующее двухэтапное нагружение фермы. Сначала нагрузим ее единичной силой, а потом, не снимая

единичной силы, нагрузим ее силой  $P$ . Усилия в стержнях фермы, возникшие в результате такого ее нагружения, обозначим через  $N_i(1 + P)$ , работу нагрузок — через  $A(1 + P)$  и потенциальную энергию деформации фермы — через  $\Pi(1 + P)$ . Ясно, что

$$\Pi(1 + P) = \frac{1}{2} \sum_i \frac{[N_i(1 + P)]^2 l_i}{(EF)_i} = A(1 + P). \quad (4.7.16)$$

По принципу суперпозиции

$$N_i(1 + P) = N_i(1) + N_i(P). \quad (4.7.17)$$

Тогда из (4.7.16) следует

$$A(1 + P) = \Pi(1 + P) = \\ = \frac{1}{2} \sum_i \frac{[N_i(1)]^2 l_i}{(EF)_i} + \sum_i \frac{N_i(P)N_i(1)l_i}{(EF)_i} + \frac{1}{2} \sum_i \frac{[N_i(P)]^2 l_i}{(EF)_i}. \quad (4.7.18)$$

Рассмотрим теперь подробнее работу  $A(1 + P)$ , совершенную единичной и основной нагрузками. На первом этапе нагружения единичная сила совершил работу  $A(1)$ , определенную формулой (4.7.15). На втором этапе нагружения сила  $P$  совершил работу  $A(P)$  согласно формуле (4.7.14). Но, кроме того, на втором этапе единичная сила, оставаясь постоянной, смещается вместе с узлом  $C$  и переместится в направлении своего действия как раз на величину искомого перемещения  $\delta$ . Поэтому на этом пути она совершил работу  $1 \cdot \delta$ . Таким образом,

$$A(1 + P) = A(1) + A(P) + 1 \cdot \delta. \quad (4.7.19)$$

Сравнивая теперь слагаемые в правых частях выражений (4.7.18), (4.7.19) и учитывая при этом равенства (4.7.14) и (4.7.15), получаем, что

$$\delta = \sum_i \frac{N_i(P)\bar{N}_i(1)}{(EF)_i} l_i. \quad (4.7.20)$$

Здесь  $\bar{N}_i(1) = N_i(1)/1$  — безразмерные единичные продольные силы в стержнях. Их можно получить, определив усилия  $N_i(1)$  в стержнях от единичной силы, приложенной в направлении искомого перемещения, и разделив размерность полученных усилий на размерность силы. А можно сразу рассматривать единичную нагрузку как безразмерную «силу», определяя безразмерные продольные силы  $\bar{N}_i(1)$  в стержнях по тем же правилам и уравнениям, что используются при определении продольных сил  $N_i(1)$ .

При выводе формулы (4.7.20) никак не использовались специфические свойства нагрузки  $P$  (вид, место приложения, направление). Просто  $N_i(P)$  рассматривались как продольные си-

лы, возникшие в стержнях от внешней нагрузки. Ясно, что формула (4.7.20) для определения перемещений от любой другой внешней нагрузки не изменится, если под  $N_i(P)$  понимать продольные силы, возникающие в стержнях от этой нагрузки.

В результате вычислений по формуле (4.7.20) величина перемещения  $\delta$  может оказаться отрицательной. Это означает, что последнее слагаемое в (4.7.19) (т.е. работа единичной силы на перемещении  $\delta$ ) отрицательна. А это, в свою очередь, означает, что перемещение происходит против направления единичной силы.

Изложенный метод вычисления перемещений называется *методом Мора* (см. п. 4.7.4), или *методом единичной нагрузки*.

**Пример 4.9.** Определим с помощью формулы (4.7.20) вертикальное перемещение узла  $A$  фермы, рассмотренной в примере 4.2 и показанной на рис. 4.18. Результаты вычислений удобно представить в форме табл. 4.1. Рассмотрим случай, когда все стержни выполнены из одного материала и имеют одинаковую площадь поперечного сечения  $F$ . Пятая строка табл. 4.1 содержит усилия  $\bar{N}_i(1)$  в стержнях фермы от приложенного в узле  $A$  вертикального единичного усилия, соответствующего искомому вертикальному перемещению этого узла (рис. 4.41). Они определяются из решения следующих уравнений равновесия для отсеченных частей, показанных на рис. 4.42.

Узел  $A$  (рис. 4.42 а)

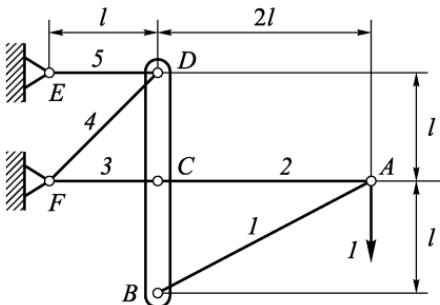


Рис. 4.41

$$\begin{aligned}\sum P_y &= 0 \rightarrow -\bar{N}_1(1) - 1 = 0, \\ \sum P_x &= 0 \rightarrow \bar{N}_2(1) - \bar{N}_1(1) \cos \alpha = 0.\end{aligned}$$

Диск  $BCD$  (рис. 4.42 б)

$$\begin{aligned}\sum P_y &= 0 \rightarrow \bar{N}_{Dy}(1) + \bar{N}_1(1) \sin \alpha = 0, \\ \sum M_c &= 0 \rightarrow \bar{N}_{Dx}(1)l - \bar{N}_1(1)l \cos \alpha = 0, \\ \sum P_x &= 0 \rightarrow -\bar{N}_3(1) + \bar{N}_2(1) + \bar{N}_1(1) \cos \alpha + \bar{N}_{Dx}(1) = 0.\end{aligned}\tag{4.7.21}$$

Узел D (рис. 4.42 *в*)

$$\sum P_y = 0 \rightarrow -\bar{N}_4(1) \sin \beta - \bar{N}_{Dy}(1) = 0,$$

$$\sum P_x = 0 \rightarrow \bar{N}_5(1) - \bar{N}_4(1) \cos \beta - \bar{N}_{Dx}(1) = 0.$$

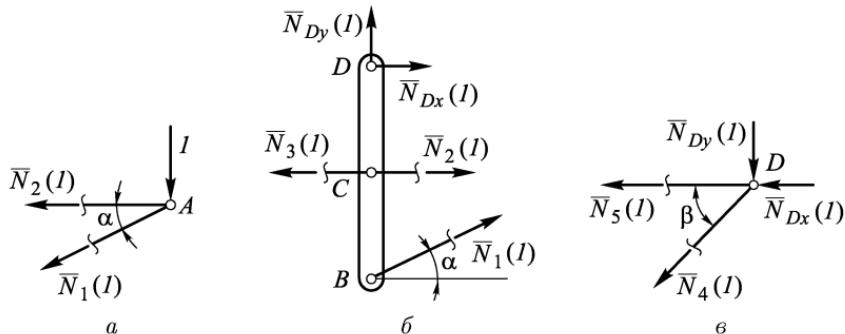


Рис. 4.42

Суммируя результаты по шестой строке, получаем искомое перемещение узла A:

$$\delta = 23,32 \frac{Pl}{EF}.$$

Таблица 4.1

1. Номер стержня $i$	1	2	3	4	5
2. Длина стержня $l_i$	$2,24l$	$2l$	$l$	$1,41l$	$l$
3. Продольная сила от внешней нагрузки $N_i(P)$	$-2,24P$	$2P$	$-2P$	$1,41P$	$P$
4. Удлинение стержня $\Delta l_i = \frac{N_i(P)l_i}{(EF)_i}$	$-5 \frac{Pl}{EF}$	$4 \frac{Pl}{EF}$	$-2 \frac{Pl}{EF}$	$2 \frac{Pl}{EF}$	$\frac{Pl}{EF}$
5. Продольная сила от единичной нагрузки $\bar{N}_i(1)$	$-2,24$	$2$	$-2$	$-1,41$	$3$
6. Произведение $\Delta l_i \bar{N}_i(1)$	$11,2 \frac{Pl}{EF}$	$8 \frac{Pl}{EF}$	$4 \frac{Pl}{EF}$	$-2,82 \frac{Pl}{EF}$	$3 \frac{Pl}{EF}$

**4.7.3.** При вычислениях в примере 4.9 выяснилась возможность другой формы записи формулы (4.7.20). Так как произведения  $N_i(P)l_i/(EF)_i$  равны по (4.4.12) удлинениям стержней  $\Delta l_i$ , то вместо (4.7.20) получаем следующую формулу для определения перемещений:

$$\delta = \sum_i \Delta l_i \bar{N}_i(1). \quad (4.7.22)$$

Если не переходить к усилиям от безразмерной единичной силы, то из равенства энергий

$$\Pi(1+P) = A(1+P) \quad (4.7.23)$$

получим, что

$$1 \cdot \delta = \sum_i \Delta l_i N_i(1). \quad (4.7.24)$$

Это равенство означает, что на втором этапе нагружения работа единичной силы на искомом перемещении  $\delta$  равна сумме работ, которые совершают вызванные этой единичной силой продольные силы  $N_i(1)$  на удлинениях  $\Delta l_i$ , полученных стержнями системы в процессе ее деформации от внешней нагрузки.

Просматривая с этой точки зрения вывод соотношения (4.7.24), читатель легко может убедиться, что оно не изменится, если удлинения  $\Delta l_i$  образуются не под действием нагрузки  $P$ , а в результате какого-либо другого внешнего воздействия, например в результате нагрева. Это позволяет обобщить формулу (4.7.22) на случай температурных удлинений и записать ее в форме

$$\delta = \sum_i (\Delta l_i^N + \Delta l_i^t) \bar{N}_i(1). \quad (4.7.25)$$

Но так как температурное удлинение  $\Delta l_1^t = \alpha_i \Delta t_i l_i$ , то

$$\delta = \sum_i (\Delta l_i^N + \alpha_i \Delta t_i l_i) \bar{N}_i(1). \quad (4.7.26)$$

С помощью этой формулы легко подсчитывать перемещения узлов статически определимых ферм, вызванные их нагревом. Так как в таких фермах нагрев не изменяет усилий в стержнях, то вызванную нагревом часть  $\delta^t$  общего перемещения  $\delta$  можно определить как

$$\delta^t = \sum_i \alpha_i \Delta t_i l_i \bar{N}_i(1). \quad (4.7.27)$$

Найдем, например, вертикальные перемещения узла  $A$  показанной на рис. 4.18 фермы, вызванные нагревом на температуру  $\Delta t$  4-го и 5-го стержней. Из табл. 4.1 берем  $\bar{N}_4(1) = -1,41$ ,

$\bar{N}_5(1) = 3$ . Тогда искомое перемещение

$$\delta^t = \alpha \Delta i \sqrt{2} l (-1,41) + \alpha \Delta t l \cdot 3 = \alpha \Delta t l.$$

В статически неопределеных фермах, как это видно из примеров 4.7, 4.8 и как показано в п. 4.6.3, нагрев обычно изменяет усилия в стержнях и формула (4.7.27) неприменима. Перемещения в таких фермах от нагрева необходимо подсчитывать по формуле (4.7.26). Возможные упрощения расчетов по этой формуле будут даны в гл. 9 при обсуждении общих методов решения статически неопределенных систем.

**4.7.4К.** Формула (4.7.20) впервые была получена в 1864 г. Д. Максвеллом, который широко известен как создатель уравнений электромагнитного поля. Она была получена из геометрических соображений. Работа Д. Максвеля, в которой был сформулирован метод расчета ферм, была написана в абстрактной форме без чертежей и примеров и, видимо, по этой причине, осталась незамеченной инженерами. Десять лет спустя эту формулу заново открыл О. Мор. В основу своих рассуждений О. Мор положил принцип возможных перемещений и на его основе пришел к равенству (4.7.24). Приведенный нами вывод формулы (4.7.20) близок к данному О. Мором. В нем также использовано понятие потенциальной энергии деформации фермы, которое стало широко применяться после работ Л. Менабреа и А. Кастилиано. Последний в 1879 г. получил формулу (4.7.20) из условия минимума потенциальной энергии деформаций. Подробнее этот подход будет рассмотрен в гл. 9.

## 4.8. Напряжения в непоперечных сечениях бруса при центральном растяжении–сжатии

**4.8.1.** Изучим подробнее напряженное состояние бруса при центральном растяжении–сжатии. В поперечных сечениях такого

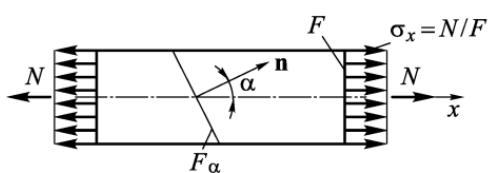


Рис. 4.43

брока, как это показано в п. 4.3.2, возникнут равномерно распределенные по площади  $F$  поперечного сечения нормальные напряжения  $\sigma_x = N/F$  (рис. 4.43). Найдем напряжения, действующие

в сечении бруса  $F_\alpha$ , нормаль к которому  $\mathbf{n}$  направлена под углом  $\alpha$  к оси  $x$  (рис. 4.43). Для этого рассмотрим левую отсеченную часть бруса (рис. 4.44). Полные напряжения  $p$  в сечении  $F_\alpha$  также равномерно распределены по сечению. Из условия равновесия отсеченной части бруса  $\sum P_x = 0$  получаем

$$-\sigma_x F + p F_\alpha = 0. \quad (4.8.1)$$

Отсюда, учитывая, что  $F_\alpha = F/\cos \alpha$ , следует, что

$$p = \sigma_x \cos \alpha. \quad (4.8.2)$$

Разложим полное напряжение  $p$  на нормальное  $\sigma_n$  и касательное  $\tau_n$ . Из рис. 4.45 видно, что

$$\sigma_n = p \cos \alpha, \quad \tau_n = p \sin \alpha. \quad (4.8.3)$$

Отсюда, учитывая (4.8.2), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \alpha, \\ \tau_n &= \sigma_x \cos \alpha \sin \alpha = \frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (4.8.4)$$

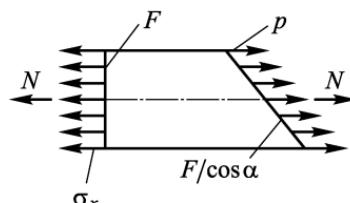


Рис. 4.44

Из этих формул, с учетом свойств тригонометрических функций  $\cos \alpha$  и  $\sin \alpha$ , можно сделать следующие выводы.

1. Максимальные нормальные напряжения равны  $\sigma_x$  и действуют в поперечных сечениях бруса.

2. Касательные напряжения во взаимно перпендикулярных сечениях равны по абсолютной величине, т.е.

$$|\tau_n(\alpha)| = |\tau_n(\alpha + 90^\circ)|.$$

Анализируя направления касательных напряжений на взаимно перпендикулярных площадках (рис. 4.46), приходим к выводу, что они направлены одновременно либо к линии пересечения этих площадок (рис. 4.46 а), либо от нее (рис. 4.46 б).

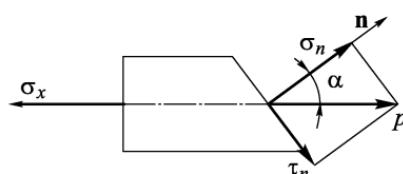


Рис. 4.45

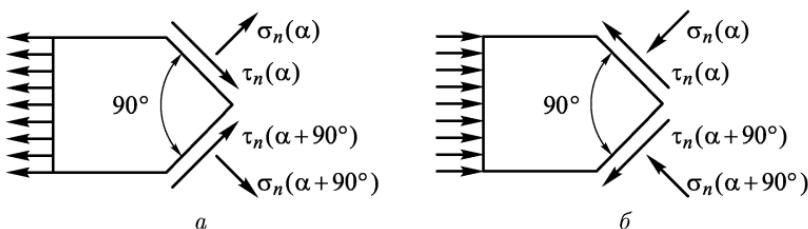


Рис. 4.46

Это свойство, как мы уже знаем, называется *свойством парности касательных напряжений*. Как мы увидим в дальнейшем, оно характерно не только для растяжения–сжатия, но и для любого напряженного состояния.

3. При растяжении–сжатии касательные напряжения достигают своего максимального значения в сечениях, расположенных под углом  $45^\circ$  к оси бруса (см. формулу (4.8.4)), т.е. при  $\alpha = 45^\circ$ :

$$\max |\tau_n(\alpha)| = \frac{1}{2} \sigma_x \max |\sin 2\alpha| = \frac{\sigma_x}{2}.$$

Появление линий Людерса–Чернова при растяжении пластичных образцов (см. п. 3.2.5) как раз и связано со скольжением материала по поверхностям, в которых действуют максимальные касательные напряжения.

Этим же объясняется и характер разрушения хрупких образов при сжатии (см. п. 3.2.5), когда сжимающие нормальные напряжения не могут быть причиной разрушения. Поэтому разрушение происходит по плоскостям действия максимальных касательных напряжений.

#### 4.9. Расчет на прочность при центральном растяжении–сжатии

**4.9.1.** В итоге длительного опыта расчетов самых различных конструкций на прочность установилась такая их форма, которую принято называть расчетом на прочность по допускаемым напряжениям. Наиболее простой вид эта форма расчета на прочность имеет для такого элементарного напряженного состояния бруса, как центральное растяжение–сжатие, которое непосредственно моделируется в образцах при испытаниях материалов на растяжение–сжатие (см. гл. 3). В этом случае конструкция считается прочной, если нормальные напряжения  $\sigma_x$  в ее поперечных сечениях удовлетворяют основному условию прочности:

$$-[\sigma]_c \leq \sigma_x \leq [\sigma]_p. \quad (4.9.1)$$

Здесь  $[\sigma]_p$  и  $[\sigma]_c$  — допускаемые напряжения на растяжение и сжатие. Знак « $\leq$ » в (4.9.1) учитывает, что допускаемые напряжения на сжатие  $[\sigma]_c$  принято брать по абсолютной величине.

Допускаемое напряжение определяется как

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{[n]}. \quad (4.9.2)$$

Здесь  $\sigma_{\text{пред}}$  — предельное напряжение;  $[n]$  — коэффициент запаса.

Предельное напряжение выбирается в зависимости от материала и требований к конструкции. Если конструкция выполнена из пластичного материала и в ней недопустимы пластичные деформации, то в качестве  $\sigma_{\text{пред}}$  выбирают  $\sigma_t$ . Для конструкций из хрупкого материала  $\sigma_{\text{пред}} = \sigma_b$ . Если конструкция и деталь

работает в условиях циклически меняющихся нагрузок, то допускаемые напряжения выбираются на основе предела выносливости. Эти вопросы подробно будут рассмотрены в гл. 15.

Величина коэффициента запаса  $[n]$  нормируется, т.е. определяется нормативными документами, которые различны в разных отраслях промышленности. Например, в авиации это «Нормы прочности», в строительстве — «Строительные нормы и правила» (СНИП) и т.д. Поскольку к конструкциям предъявляются самые различные требования при их эксплуатации, то введение каких-либо единых норм по прочности не имеет смысла. Но во всех отраслевых нормах прочности при выборе коэффициента запаса обязательно учитывают следующие три фактора:

1. Степень неточности в определении нагрузок на конструкцию и напряжений в ней. Чем выше эта неточность, тем больше величина коэффициента запаса.

2. Степень разброса в механических характеристиках материалов, которая даже в одной партии материала может достигать 10 %.

3. Степень ответственности конструкции (или ее детали). В авиации, например, коэффициент запаса принимается в пределах от 1,3 до 2,0. Такие сравнительно малые величины коэффициентов запаса определяются жесткими ограничениями по массе конструкции. В связи с высокой ответственностью конструкций в авиации при расчете нагрузок и напряжений применяются методы расчета, обеспечивающие высокую точность их определения. Кроме того, предусмотрено обязательное проведение испытаний с целью установления фактической прочности отдельных узлов и целых летательных аппаратов, а также тщательный контроль за состоянием конструкции в процессе эксплуатации. Более подробно эти вопросы освещаются в курсах расчета на прочность самолета и т.п.

**4.9.2.** Основное условие прочности (4.9.1) можно заменить двумя эквивалентными ему условиями:

$$\sigma_{p \max} \leq [\sigma]_p, \quad |\sigma_c|_{\max} \leq [\sigma]_c. \quad (4.9.3)$$

Здесь  $\sigma_{p \max}$  и  $|\sigma_c|_{\max}$  — максимальные растягивающие и сжимающие (по абсолютной величине) напряжения. Сечения (или точки сечений), в которых эти напряжения действуют, называются *опасными* или *расчетными* сечениями (или точками).

Различают следующие виды расчета на прочность.

**1. Проверочный расчет.** Часто размеры конструкции полностью определены конструктивными и технологическими соображениями, а нагрузки — условиями работы конструкции. Тогда расчет сводится к проверке выполнения условий прочности (4.9.1) или (4.9.3). При таком расчете обычно подсчитывают фактический запас прочности  $n$  как минимальный

из двух величин:

$$n = \min \left\{ \frac{\sigma_{\text{пред p}}}{\sigma_{\text{p max}}}, \frac{\sigma_{\text{пред c}}}{|\sigma_c|_{\text{max}}} \right\}. \quad (4.9.4)$$

Ясно, что конструкция удовлетворяет условиям прочности, если  $n \geq [n]$ .

**2. Проектировочный расчет.** На определенном этапе проектирования конструкции наступает момент, когда известны основные размеры конструкции и действующие на нее нагрузки. Тогда часть неопределенных еще размеров (обычно это размеры поперечных сечений элементов конструкции) можно определить из условий прочности элементов. Такой расчет называют *проектировочным*.

Так, при проектировании статически определимой фермы продольные силы  $N_i$  в ее стержнях могут быть определены из геометрии фермы и действующих нагрузок. Тогда площади поперечных сечений стержней можно найти из условий прочности. Для растянутых стержней эти условия примут вид

$$\sigma_i = \frac{N_i}{F_i} \leq [\sigma]_p. \quad (4.9.5)$$

Отсюда заключаем, что конструкция будет прочной, если

$$F_i \geq \frac{N_i}{[\sigma]_p} = F_i \text{ потр}, \quad (4.9.6)$$

где  $F_i$  потр — минимальная потребная из условий прочности площадь сечения стержня. Аналогично определяют и площадь поперечных сечений сжатых стержней<sup>1)</sup>.

Обычно стержни и другие элементы конструкций изготавливают из имеющихся в наличии полуфабрикатов, таких как прутки, трубы, уголки, швеллеры, двутавры и т.п. Тогда условие (4.9.6) является для конструктора ориентиром, позволяющим выбрать конкретный размер полуфабриката из имеющейся номенклатуры.

**3. Расчет допускаемой нагрузки.** Часто поверочный расчет проводят в несколько видоизмененной форме. А именно, определяют такую нагрузку на конструкцию, при которой фактический запас прочности конструкции равен коэффициенту запаса  $[n]$ . Такую нагрузку называют *допускаемой*.

Возможны и другие виды расчета на прочность.

---

<sup>1)</sup> Следует обратить внимание на то, что сжатые элементы конструкций могут потерять устойчивость. Особенно часто это происходит в тонкостенных конструкциях. Поэтому для них определяющим является не условие прочности, а условие устойчивости. Подробнее эти вопросы будут рассмотрены в гл. 12.

## В.4. Контрольные вопросы

**В.4.1.** Какое напряженно-деформированное состояние бруса называется центральным растяжением–сжатием? При каких внешних нагрузках оно возникает?

**В.4.2.** Связан ли знак продольной силы  $N$  с направлением оси  $x$  бруса? В каком случае продольная сила считается положительной?

**В.4.3.** Как связана продольная сила  $N$  с интенсивностью нагрузки  $q$  и с сосредоточенной силой  $P$ ?

**В.4.4.** Какой характер деформации бруса предполагается гипотезой плоских сечений?

**В.4.5.** Как связано относительное удлинение  $\varepsilon$  с перемещением  $u$  поперечного сечения бруса и с абсолютным удлинением  $\Delta l$  его конечного участка?

**В.4.6.** Как распределяются нормальные напряжения  $\sigma_x$  по поперечному сечению бруса при центральном растяжении–сжатии? Как их вычислить?

**В.4.7.** Приведите две формы записи закона Гука (связь между  $\varepsilon$  и  $\sigma$  и между  $\Delta l$  и  $N$ ).

**В.4.8.** Что необходимо сделать (и это будет достаточным) для определения продольных сил в сечениях статически определимой конструкции?

**В.4.9.** Что необходимо рассмотреть ( помимо условий равновесия) для решения статически неопределенной системы?

**В.4.10.** В чем разница записи относительного удлинения  $\varepsilon$  для ненагретого и нагретого брусьев?

**В.4.11.** Сказывается ли нагрев нагруженных статически определимых систем на величинах возникающих в них продольных сил?

**В.4.12.** В какой форме выражается закон сохранения энергии при деформации бруса? Как выглядит это выражение в рамках закона Гука?

**В.4.13.** В чём состоит идея метода Мора (метода единичной нагрузки) определения перемещений?

**В.4.14.** Почему формулу для определения перемещений, вызванных только нагревом,  $\delta^t = \sum_i \alpha_i \Delta t_i l_i \bar{N}_i(1)$ , нельзя применять в статически неопределенных фермах?

**В.4.15.** В каких сечениях бруса при центральном растяжении–сжатии действуют максимальные нормальные и касательные напряжения?

**В.4.16.** Как записать условие прочности конструкции при растяжении–сжатии?

**В.4.17.** Что такое допускаемое напряжение?

**В.4.18.** Как выбираются предельные напряжения?

**В.4.19.** Какие факторы обязательно учитываются при выборе коэффициента запаса?

**В.4.20.** В чем разница между фактическим запасом прочности и коэффициентом запаса конструкции?

### 3.4. Задачи

**3.4.1.** На ферму (рис. 4.47) действует груз  $P$  и вес диска  $BC$   $G = \frac{1}{4}P$  (вес считать сосредоточенным в середине диска). Опре-

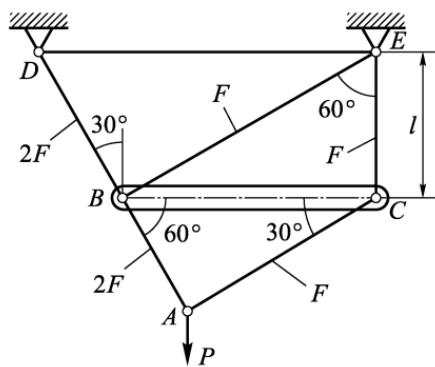


Рис. 4.47

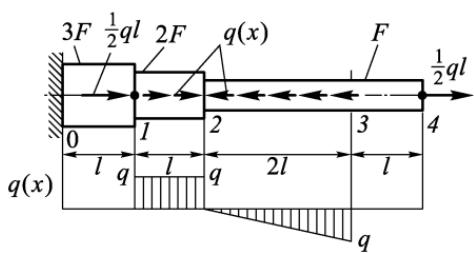


Рис. 4.48

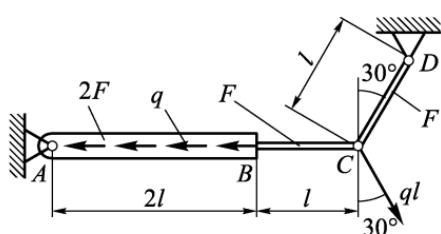


Рис. 4.49

делить допускаемую величину груза  $P_{\text{доп}}$ , считая заданными параметр площади поперечного сечения  $F$  и допускаемое напряжение  $[\sigma]_p$  (материал всех стержней одинаковый). При найденном значении  $P_{\text{доп}}$  определить вертикальное перемещение узла  $A$  (модуль упругости  $E$  и размер  $l$  считать заданными). Насколько изменится это перемещение, если подкос  $BE$

нагреть на  $\Delta t$ °С (коэффициент линейного расширения  $\alpha$  задан)?

**3.4.2.** Для ступенчатого бруса, нагруженного внешними силами, как показано на рис. 4.48, построить эпюры  $N$ ,  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $u$ . Считая заданными  $q$ ,  $l$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $\sigma_{0,2}$ , определить запас прочности  $n$  и перемещение  $u_3$  сечения 3.

**3.4.3.** Определить продольные усилия и нормальные напряжения в горизонтальном и наклонном стержнях конструкции (рис. 4.49), нагруженной указанными силами, построив при этом для горизонтального стержня эпюры  $N$ ,  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $u$ . Будет ли про-

дольное перемещение правого конца этого стержня равно полному перемещению узла  $C$ ? Все величины, указанные на рисунке, считать заданными.

**3.4.4.** Для фермы, показанной на рис. 4.50, найти полное перемещение узла  $C$  ( $P, l, E, F$  считать заданными). На какую температуру  $\Delta t^\circ\text{C}$  надо нагреть нижний и охладить верхний стержни, чтобы в результате совместного действия силы  $P$  и температуры  $\Delta t$  перемещение узла  $C$  оказалось равным нулю? Коэффициент линейного расширения материала стержней  $\alpha$  задан.

**3.4.5.** Из условия прочности конструкции (рис. 4.51) определить минимальное значение параметра  $F$ , которым заданы площади поперечных сечений стержней  $AD$  и  $CD$  ( $q, l, E, [\sigma]_p > [\sigma]_c$  считать заданными). Используя полученное значение  $F$ , определить перемещение узла  $C$ . Считать элемент  $EABC$  абсолютно жестким диском. Сняв внешнюю нагрузку, нагреть стержень  $AD$  на  $\Delta t^\circ\text{C}$  и определить температурные напряжения в стержнях (коэффициент линейного расширения  $\alpha$  задан).

**3.4.6.** Стальной стержень находится внутри дюралевой трубы (рис. 4.52). Какую часть внешней силы  $P$  воспринимают стальной и дюралевый элементы конструкции, жесткости на сжатие которых равны  $E_c F_c$  и  $E_d F_d$  соответственно? Считая заданными  $P, l$  и жесткости, определить продольную деформацию конструкции.

**3.4.7.** Горизонтальный стержень оказался короче нужной для сборки длины на величину  $r$  (рис. 4.53). Определить максимально возможную величину  $r$ , при которой мож-

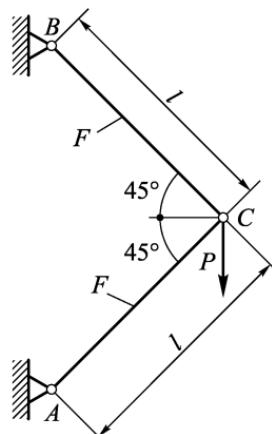


Рис. 4.50

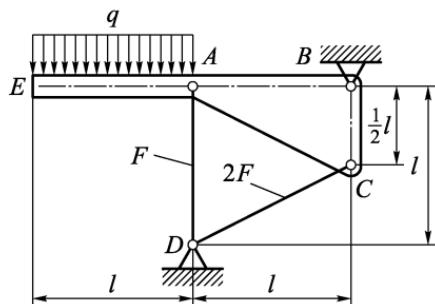


Рис. 4.51

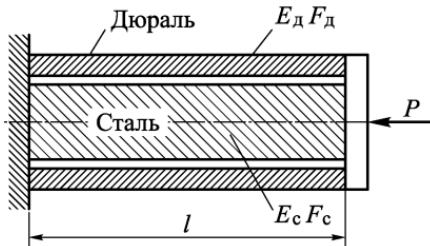


Рис. 4.52

но еще смонтировать конструкцию, удовлетворяющую условию прочности. Считать заданными  $E$ ,  $F$ ,  $l$ ,  $[\sigma]_p = [\sigma]_c = [\sigma]$ .

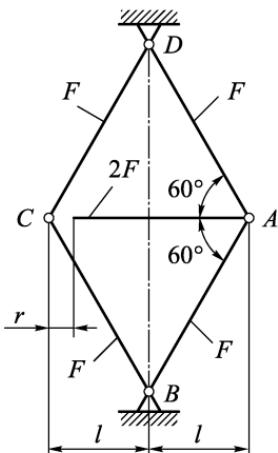


Рис. 4.53

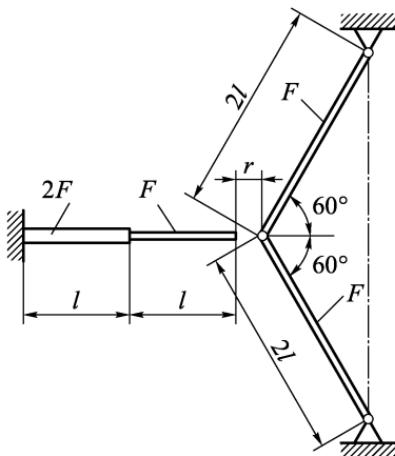


Рис. 4.54

**3.4.8.** На какую температуру  $\Delta t[^{\circ}\text{C}]$  надо нагреть горизонтальный брус (рис. 4.54), чтобы собрать конструкцию? Вычислить максимальные монтажные напряжения в собранной конструкции, которые возникнут после охлаждения горизонтального бруса до исходной температуры. Принять  $r = 0,5$  мм,  $l = 500$  мм,  $\alpha = 10^{-5}$  град $^{-1}$ ,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

## Г Л А В А 5

### ДВУХОСНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ–СЖАТИЕ И ЧИСТЫЙ СДВИГ

Напряженное состояние, которое возникает в пластине, нагруженной в ее плоскости, называют *плоским напряженным состоянием*. Для нас сейчас интересен частный случай плоского напряженного состояния прямоугольной пластины толщины  $\delta$ , нагруженной равномерно распределенными по площадям ее кромок нормальными нагрузками  $q_x$  и  $q_y$  (рис. 5.1). Такое состояние пластины называется *двуухосным растяжением–сжатием*.

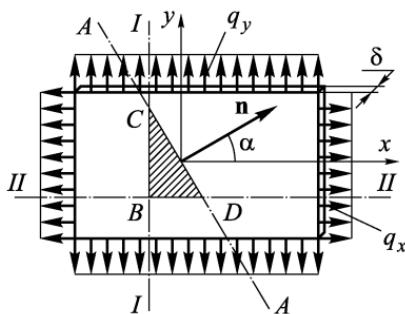


Рис. 5.1

#### 5.1. Напряженное состояние при двухосном растяжении–сжатии

**5.1.1.** Равномерность распределения нагрузок по кромкам позволяет рассмотреть двухосное растяжение–сжатие как суперпозицию (наложение) состояний растяжения–сжатия по осям  $x$  и  $y$ . Рассматривая отсеченные части, образованные нормальными к осям  $x$  и  $y$  сечениями  $I-I$  и  $II-II$  (рис. 5.2) и учитывая равномерность деформаций, нетрудно заключить, что

$$\sigma_x = q_x \quad \text{и} \quad \sigma_y = q_y. \quad (5.1.1)$$

Найдем теперь напряжения в сечении, которое нормально к плоскости пластины и нормаль к которому  $\mathbf{n}$  составляет угол  $\alpha$  с осью  $x$ . На рис. 5.1 это сечение  $AA$ . Для этого трремя сечениями ( $AA$ ,  $I-I$  и  $II-II$ ) выделим из пластины треугольный элемент  $BCD$ , заштрихованный на рис. 5.1, и рассмотрим его равновесие.

сие. Этот элемент с действующими на него усилиями показан на рис. 5.3. Площадь грани  $CD$  обозначим через  $F_n$ , а площади

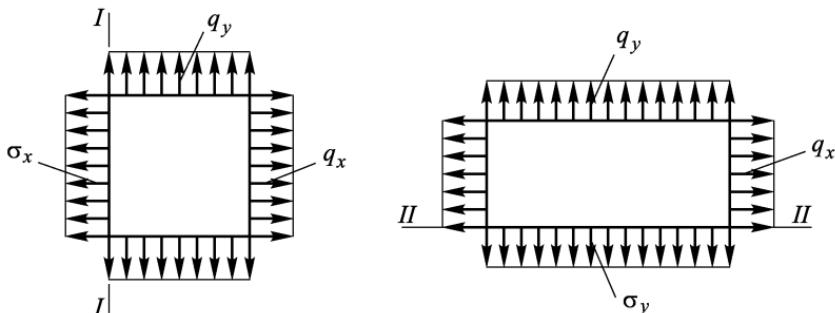


Рис. 5.2

граней  $BC$  и  $BD$  — через  $F_x$  и  $F_y$  соответственно. Ясно, что

$$F_x = F_n \cos \alpha, \quad F_y = F_n \sin \alpha. \quad (5.1.2)$$

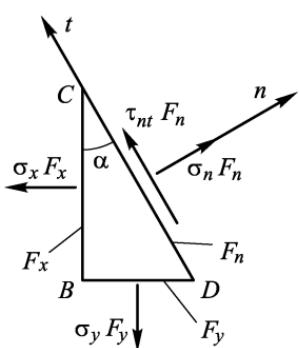


Рис. 5.3

На грани  $BC$  действуют напряжения  $\sigma_x$ , равномерно распределенные по площади грани. Поэтому им соответствует равнодействующее усилие  $\sigma_x F_x$ . Точно также напряжениям  $\sigma_y$ , действующим на грани  $BD$ , соответствует равнодействующее усилие  $\sigma_y F_y$ . На грани  $CD$  возникают интересующие нас нормальные  $\sigma_n$  и касательные  $\tau_{nt}$  напряжения. Соответствующие им усилия равны  $\sigma_n F_n$  и  $\tau_{nt} F_n$ . Чтобы получить  $\sigma_n$  и  $\tau_{nt}$ , рассмотрим условия равновесия элемента в виде сумм проекций на оси  $n$  и  $t$  действующих на него сил:

$$\begin{aligned} \sum P_n &= \sigma_n F_n - \sigma_x F_x \cos \alpha - \sigma_y F_y \sin \alpha = 0, \\ \sum P_t &= \tau_{nt} F_n + \sigma_x F_x \sin \alpha - \sigma_y F_y \cos \alpha = 0. \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Отсюда, используя соотношения (5.1.2), после сокращения на  $F_n$  получаем

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha, \\ \tau_{nt} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Эти формулы позволяют найти напряжения в произвольном, нормальном к плоскости пластины сечении. Читатель может

легко получить их также и другим путем, рассматривая двухосное растяжение–сжатие как суперпозицию двух одноосных состояний и используя формулы (4.8.4) для них. Различие в знаках для  $\tau$  в (4.8.4) и (5.1.4) объясняется различием в их направлениях.

**5.1.2.** Так как  $|\sin 2\alpha| = |\sin [2(\alpha + 90^\circ)]|$ , то из формул (5.1.4) сразу следует, что касательные напряжения в двух взаимно перпендикулярных сечениях равны

$$|\tau_{nt}(\alpha)| = |\tau_{nt}(\alpha + 90^\circ)|. \quad (5.1.5)$$

Анализируя их направления, приходим к двум возможным случаям, показанным на рис. 5.4. Таким образом, как и в случае

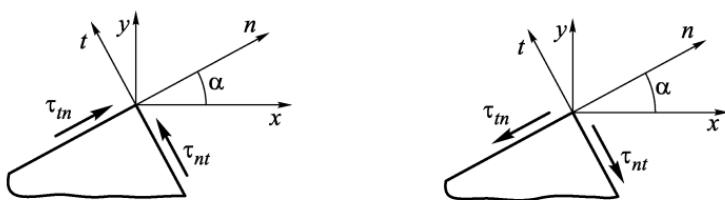


Рис. 5.4

одноосного растяжения–сжатия, мы пришли к свойству парности касательных напряжений. В этом нет ничего удивительного, так как, если свойство парности существует для каждого из одноосных растяжений–сжатий, то оно, конечно, сохраняется и в их суперпозиции.

## 5.2. Чистый сдвиг

**5.2.1.** Особый интерес представляет такое напряженное состояние пластины, когда она в одном направлении растянута, а в другом сжата одинаковыми по величине напряжениями, т.е. когда

$$\sigma_x = \sigma, \quad \sigma_y = -\sigma. \quad (5.2.1)$$

Тогда в произвольных сечениях возникнут напряжения, которые в соответствии с формулами (5.1.4) будут

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma \cos 2\alpha, \\ \tau_{nt} &= -\sigma \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

В площадках, расположенных под углом  $\pm 45^\circ$  к осям  $x$  и  $y$ , касательные напряжения оказываются максимальными и равными  $\sigma$ , а нормальные напряжения равны нулю. Напряжения в таких сечениях показаны на рис. 5.5. Из него видно, что для

выделенного сечениями под углом  $45^\circ$  прямоугольного элемента пластины реализуется напряженное состояние, соответствующее второй элементарной деформации — сдвигу (см. п. 3.1.2)

и создаваемое в экспериментах при испытании материалов на сдвиг (разд. 3.5). Такое напряженное состояние называют *чистым сдвигом*.

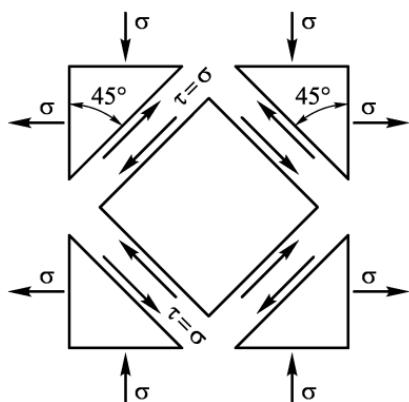


Рис. 5.5

при чистом сдвиге. В этом элементе при упругих деформациях накапливается потенциальная энергия деформации  $d\Pi_\tau$ , равная работе деформирующей силы  $\tau dx \cdot \delta$  на пути  $\Delta = \gamma dy$  (напомним, что  $\delta$  — толщина пластины):

$$d\Pi_\tau = \frac{1}{2} \tau dx \cdot \delta \gamma dy = \frac{1}{2} \tau \gamma \delta dx dy. \quad (5.2.4)$$

Как и ранее в гл. 4 (см. п. 4.7.1), множитель  $\frac{1}{2}$  учитывает, что при линейно-упругих деформациях в соответствии с законом Гука (5.2.3) сила пропорциональна пути.

Получим удельную энергию деформации чистого сдвига  $U_\tau$ , т.е. энергию деформации в единице объема. Для этого энергию деформации в элементе  $d\Pi_\tau$  нужно разделить на объем элемента  $dV = dx dy \cdot \delta$ :

$$U_\tau = d\Pi_\tau / dV = \frac{1}{2} \tau \gamma. \quad (5.2.5)$$

Закон Гука (5.2.3) позволяет выразить  $U_\tau$  как через напряжение  $\tau$ , так и через сдвиг  $\gamma$ :

$$U_\tau = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} \quad \text{или} \quad U_\tau = \frac{1}{2} G \gamma^2. \quad (5.2.6)$$

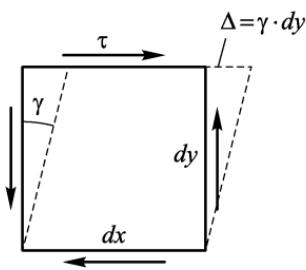


Рис. 5.6

### 5.3. Закон Гука при двухосном растяжении–сжатии. Связь между модулями упругости $E$ и $G$ и коэффициентом Пуассона $\mu$

**5.3.1.** Взгляд на двухосное растяжение–сжатие как суперпозицию двух одноосных состояний (рис. 5.7) позволяет обобщить на него и закон Гука.

Пусть  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$  — относительные удлинения или удлинения сторон единичного квадрата при двухосном растяжении–сжатии. На рис. 5.7 деформированные состояния такого квадрата показаны пунктиром. В состоянии одноосного растяжения напряжениями  $\sigma_x$  его горизонтальная сторона (в направлении  $x$ ) удлинится на величину  $\varepsilon_x^{(1)} = \sigma_x/E$ , а вертикальная сторона вследствие эффекта Пуассона укоротится на  $\varepsilon_y^{(1)} = -\mu\varepsilon_x^{(1)} = -\mu\sigma_x/E$ . В состоянии же одноосного растяжения под действием напряжений  $\sigma_y$  вертикальная сторона квадрата получит удлинение  $\varepsilon_y^{(2)} = \sigma_y/E$ , а горизонтальная в силу эффекта Пуассона укоротится на  $\varepsilon_x^{(2)} = -\mu\varepsilon_y^{(2)} = -\mu\sigma_y/E$ . Тогда при одновременном действии  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  получим удлинения:

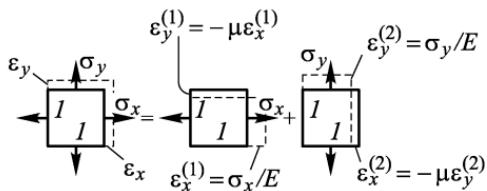


Рис. 5.7

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_x^{(1)} + \varepsilon_x^{(2)} = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E}, \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^{(1)} + \varepsilon_y^{(2)} = -\mu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E}.\end{aligned}\quad (5.3.1)$$

Отсюда сразу следуют формулы закона Гука при двухосном растяжении–сжатии изотропного материала:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x).\end{aligned}\quad (5.3.2)$$

Рассматривая эти соотношения как уравнения с неизвестными  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , нетрудно выразить напряжения через деформации:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x).\end{aligned}\quad (5.3.3)$$

**5.3.2.** Теперь найдем потенциальную энергию деформации  $\Pi_\sigma$ , накопившуюся в единичном квадрате при его деформации.

Ее можно подсчитать как работу деформирующих квадрат усилий  $\sigma_x \cdot 1 \cdot \delta$  и  $\sigma_y \cdot 1 \cdot \delta$  ( $\delta$  — толщина квадрата, а  $1 \cdot \delta$  — площадь его боковых граней) на путях  $\varepsilon_x \cdot 1$  и  $\varepsilon_y \cdot 1$ . Связь между силами и их путями определяется законом Гука, поэтому

$$\begin{aligned}\Pi_\sigma &= \frac{1}{2}\sigma_x \cdot 1 \delta \varepsilon_x \cdot 1 + \frac{1}{2}\sigma_y \cdot 1 \delta \varepsilon_y \cdot 1 = \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y) \cdot 1 \cdot 1 \cdot \delta.\end{aligned}\quad (5.3.4)$$

Так как объем единичного квадрата  $V = 1 \cdot 1 \cdot \delta$ , удельная потенциальная энергия деформаций

$$U_\sigma = \frac{\Pi_\sigma}{V} = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y).\quad (5.3.5)$$

Используя закон Гука в форме (5.3.2) или (5.3.3), можно легко найти выражения  $U_\sigma$  через напряжения или через деформации:

$$U_\sigma = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 - 2\mu\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2),\quad (5.3.6)$$

$$U_\sigma = \frac{E}{2(1-\mu^2)}(\varepsilon_x^2 + 2\mu\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2).\quad (5.3.7)$$

**5.3.3.** К настоящему моменту мы знаем три константы, характеризующие линейно-упругую деформацию изотропного материала. Это модули упругости  $E$  и  $G$  при растяжении и сдвиге, а также коэффициент Пуассона  $\mu$ . Возникает вопрос: нет ли между этими константами каких-либо связей? Наличие таких связей могло бы упростить экспериментальное определение кон-

стант. Покажем, что такая связь существует.

Сначала обратим внимание читателя на то, что потенциальная энергия деформации является величиной скалярной. Поэтому для таких однородных напряженных состояний, как двухосное растяжение или чистый сдвиг, величина потенциальной энергии деформации, накаплившейся в некоторой части пластины, зависит только от площади этой части, а не от ее формы или ориентации. Действительно,  $\Pi_\sigma$  в части пластины  $F_1$  (рис. 5.8)

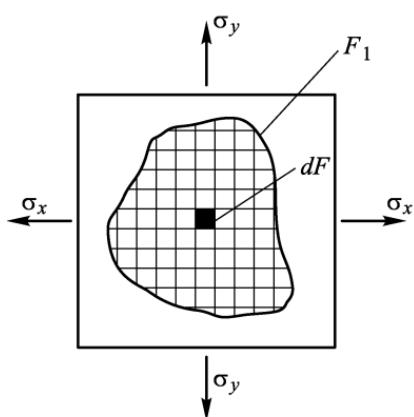


Рис. 5.8

можно подсчитать как сумму (интеграл) элементарных энергий  $d\Pi_\sigma$ , накаплившихся в составляющих эту часть пластины элемен-

тарных объемах  $dV = \delta dF$ , т.е.

$$\Pi_\sigma = \int_{F_1} d\Pi_\sigma.$$

Используя удельную энергию деформации  $U_\sigma$ , нетрудно получить, что

$$d\Pi_\sigma = U_\sigma dV = U_\sigma \delta dF.$$

Следовательно,

$$\Pi_\sigma = \int_{F_1} U_\sigma \delta dF.$$

Но так как напряженное состояние однородно, то  $U_\sigma$  не зависит от положения выделенного элемента  $dF$ . Поэтому

$$\Pi_\sigma = U_\sigma \int_{F_1} \delta dF = U_\sigma \delta F_1.$$

Из этого, в частности, следует, что потенциальные энергии деформации в единичных квадратах, показанных на рис. 5.9, равны. Для квадрата «*a*» при  $\sigma_x = \sigma$  и  $\sigma_y = -\sigma$  по формуле (5.3.6) получим

$$\Pi_\sigma = U_\sigma \delta \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2E} \cdot 2(1 + \mu)\sigma^2 \delta \cdot 1 \cdot 1. \quad (5.3.8)$$

Квадрат «*b*», как это показано в п. 5.2.1, в этом частном случае двухосного растяжения–сжатия находится в состоянии чистого сдвига под действием касательных напряжений  $\tau = \sigma$ . Тогда по (5.2.6) имеем

$$\begin{aligned} \Pi_\tau &= U_\tau \delta \cdot 1 \cdot 1 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} \delta \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{G} \delta \cdot 1 \cdot 1. \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

Теперь ввиду равенства для этого случая  $\Pi_\sigma$  и  $\Pi_\tau$ , сравнивая (5.3.8) и (5.3.9), легко получаем

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (5.3.10)$$

Этот же результат можно получить и чисто геометрически, связав деформации диагоналей квадрата «*b*» (рис. 5.9)  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$  с его деформациями сдвига. Подробно с таким выводом можно ознакомиться, например, в [3].

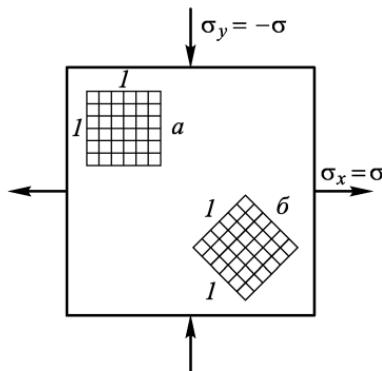


Рис. 5.9

**5.3.4К.** Следует сказать, что вопрос о количестве независимых констант, характеризующих упругое поведение материала, был предметом длительной дискуссии в XIX веке. Вслед за С. Пуассоном все ведущие ученые французской школы механиков — Л. Навье, О. Коши, Д. Ламе, Б. Клапейрон и др. — считали, что упругие свойства изотропного тела определяются одной константой, а коэффициент Пуассона независимо от материала всегда равен  $1/4$ . Английский ученый Джордж Грин (1793–1841), впервые в явной форме отказавшийся от молекулярного подхода и рассматривавший деформируемое тело как сплошную среду, пришел к выводу, что упругое поведение изотропного материала должно характеризоваться двумя независимыми константами. Дальнейшие многочисленные экспериментальные исследования, проводившиеся многими учеными, подтвердили точку зрения Д. Грина.

## B.5. Контрольные вопросы

**B.5.1.** Какое напряженное состояние называется чистым сдвигом? Как реализовать такое состояние в пластине, нагруженной в ее плоскости?

**B.5.2.** Какую форму принимает закон Гука при чистом сдвиге?

**B.5.3.** Какую форму принимает закон Гука при двухосном растяжении–сжатии?

**B.5.4.** Зависит ли потенциальная энергия деформации элемента, находящегося в однородном плоском напряженном состоянии, от его формы в плоскости пластины, или она определяется только площадью элемента в этой плоскости?

**B.5.5.** Как связаны между собой упругие константы  $E$ ,  $G$  и  $\mu$  изотропного материала?

## 3.5. Задачи

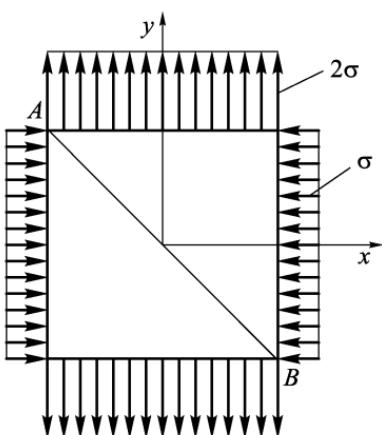


Рис. 5.10

**3.5.1.** Вычислить нормальные и касательные напряжения в диагональном нормальном сечении  $AB$  (рис. 5.10) нагруженной в своей плоскости тонкой квадратной пластины. Показать, что касательные напряжения в этом сечении будут максимальными.

**3.5.2.** При каких направлениях и значениях  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  в задаче 5.1 касательные напряжения во всех нормальных сечениях пластины будут равны нулю? Чему равны при этом нормальные напряжения в этих сечениях?

**3.5.3.** По граням элемента  $ABC$ , выделенного из тонкой квадратной пластины, действуют касательные напряжения, равные  $\tau$  (рис. 5.11). В каких нормальных к плоскости элемента сечениях касательные напряжения равны нулю? Чему равны нормальные напряжения в этих сечениях?

**3.5.4.** Вычислить относительные удлинение и укорочение диагоналей элемента в задаче 5.3, если для материала пластины заданы его упругие постоянные  $E$  и  $\mu$ .

**3.5.5.** Покажите, что отношение относительного сдвига  $\gamma$  в плоскости элемента  $ABC$ , рассмотренного в задачах 5.3 и 5.4, к относительному удлинению диагонали  $AC$   $\varepsilon_{AC}$ , вычисленному в задаче 5.4, равно двум.

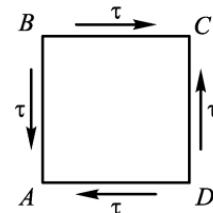


Рис. 5.11

## ГЛАВА 6

### КРУЧЕНИЕ

Если в поперечных сечениях бруса под действием внешних нагрузок из шести возможных внутренних силовых факторов возникает только крутящий момент, то такое напряженно-деформированное состояние бруса называют *кручением*.

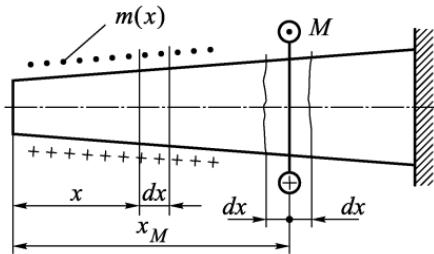


Рис. 6.1

В брусе с прямой осью кручение создается только при действии на него моментов (пар сил), плоскости действия которых перпендикулярны оси бруса (рис. 6.1). В этом легко убедиться, рассматривая условия равновесия отсеченных частей бруса. Внешние моменты, вызываю-

щие кручение, в отличие от крутящего момента называют *скручивающими моментами*. На рис. 6.1 при изображении фронтальных проекций пар сил, соответствующих этим моментам, принято, что сила, показанная знаком  $\odot$ , направлена на нас, а знаком  $\oplus$  — от нас (рис. 6.2). Знаками · и + показано направление погонного скручиваю-

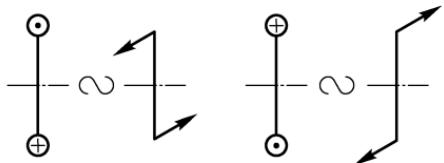


Рис. 6.2

щего момента с интенсивностью  $m(x)$ . (Подобные обозначения употребляются в электротехнике для указания направлений токов, перпендикулярных плоскости чертежа.)

Для крутящих моментов принято следующее правило знаков: *крутящий момент положителен, если со стороны внешней нормали к сечению видно, что он поворачивает отсеченную часть против часовой стрелки.*

Это правило проиллюстрировано на рис. 6.3 как в изометрическом изображении, так и в проекции бруса на плоскость рисунка.

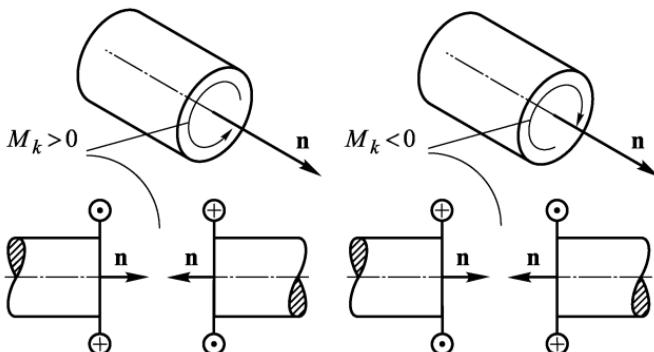


Рис. 6.3

Перейдем теперь к анализу напряженно-деформированного состояния бруса при кручении. При этом мы будем, насколько возможно, придерживаться последовательности, в которой такой анализ проводился для центрального растяжения–сжатия в гл. 4.

## 6.1. Статические дифференциальные и интегральные соотношения при кручении

**6.1.1.** Рассмотрим сначала равновесие показанного на рис. 6.4 элемента, выделенного из бруса сечениями  $x$  и  $x+dx$ . На него действует погонный момент, интенсивность которого ввиду малости  $dx$  можно принять постоянной по длине элемента и равной  $m(x)$ . Тогда равнодействующая этого распределенного момента равна  $m(x) dx$ . Отброшенные левая и правая отсеченные части бруса действуют на элемент крутящими моментами  $M_k(x)$  и  $M_k(x+dx) \approx M_k(x) + dM_k$ . Составляя условие равновесия элемента как равенство нулю суммы действующих на него моментов относительно оси бруса  $x$ , получаем

$$\sum M_x = -M_k(x) + (M_k(x) + dM_k) + m(x) dx = 0.$$

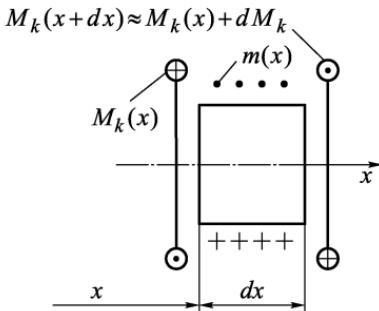


Рис. 6.4  
Полученное уравнение

Отсюда сразу следует

$$\frac{dM_k}{dx} = -\dot{m}(x). \quad (6.1.1)$$

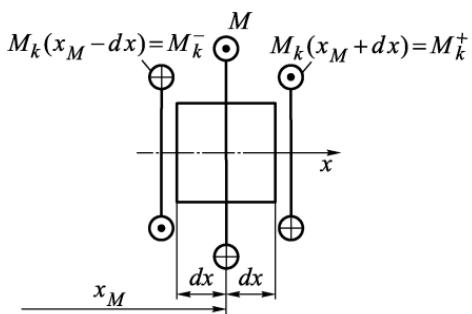


Рис. 6.5

Это и есть статическая дифференциальная зависимость при кручении. Она аналогична зависимости  $dN / dx = -q$  при растяжении–сжатии, а значки « $\rightarrow$ » и « $\cdot$ » подчеркивают положительные направления оси  $x$  и интенсивности  $m(x)$ , принятые при ее выводе.

Рассмотрим элемент, выделенный двумя сечениями,

близкими к сечению, где приложен внешний момент  $M$  (рис. 6.5). Из условий его равновесия получаем

$$\sum M_x = 0 \rightarrow M_k^+ - M_k^- = -M. \quad (6.1.2)$$

Это соотношение аналогично полученному в гл. 4 выражению (4.1.3). Оно показывает, что в окрестности сечения, где приложен сосредоточенный скручивающий момент  $M$ , крутящий момент  $M_k$  меняется скачком. Вид эпюры  $M_k$  вблизи таких сечений показан на рис. 6.6.

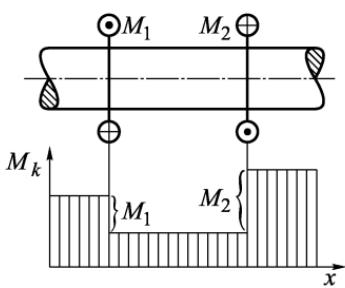


Рис. 6.6

**6.1.2.** Рассмотрим теперь равновесие конечной части бруса, выделенной из него сечениями  $x_1$  и  $x_2$  (рис. 6.7). Из условия ее равновесия  $\sum M_x = 0$  получаем

$$M_k(x_2) = M_k(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} m(x) dx - \sum_{i \in [x_1, x_2]} M_i. \quad (6.1.3)$$

Второе слагаемое в правой части этого соотношения является равнодействующим моментом распределенного момента  $m(x)$ , приложенного к рассматриваемой отсеченной части. А третье слагаемое составляет сумму сосредоточенных моментов на отсеченной части. Выражение (6.1.3) является общим решением дифференциального уравнения (6.1.1) с учетом скачков, определенных соотношениями вида (6.1.2). Это нетрудно доказать,

продифференцировав (6.1.3) по  $x_2$  точно так же, как это было сделано с аналогичным выражением (4.1.5) при рассмотрении растяжения–сжатия (см. п. 4.1.4).

Выражения (6.1.1)–(6.1.3) вместе с условиями отсутствия в брусе при кручении продольных и перерезывающих сил, а также изгибающих моментов являются для случая кручения бруса частным видом общих соотношений (2.1.11)–(2.1.15).

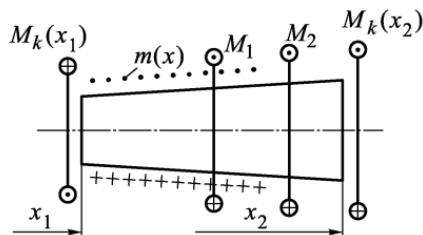


Рис. 6.7

## 6.2. Геометрические дифференциальные и интегральные соотношения

**6.2.1.** Рассмотрим деформацию прямого бруса при кручении. Для нее характерно, что сечения бруса поворачиваются относительно некоторой продольной оси, а сама эта ось остается прямолинейной. Обозначим угол поворота сечения с координатой  $x$  через  $\varphi(x)$ . Будем считать, что он положителен, если на боковой проекции бруса верхняя часть сечения перемещается на нас. Тогда для бруса, левый конец которого закреплен, положительный угол поворота появляется при возникновении в брусе положительного крутящего момента (рис. 6.8).

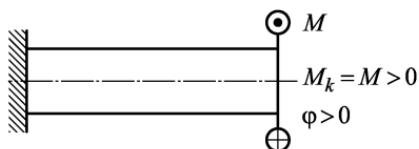


Рис. 6.8

По аналогии с относительным удлинением бруса  $\varepsilon$  введем относительный угол закручивания  $\theta$  как угол закручивания на единицу длины бруса. Если брус постоянного сечения и длины  $l$  нагрузить скручивающими моментами, приложенными по концам бруса (рис. 6.9), то его напряженно-деформированное состояние будет постоянно (однородно) по длине. Для такого бруса  $\theta = \varphi/l$ , где  $\varphi$  — угол закручивания бруса, т.е. угол, на который его правый конец повернется относительно левого. Чтобы связать  $\theta$  и  $\varphi$  при неоднородном по длине кручении бруса, рассмотрим деформацию его элемента между сечениями  $x$  и  $x+dx$ . Его левое сечение повернется на угол  $\varphi(x)$ , а правое — на угол  $\varphi(x+dx) \approx \varphi(x) + d\varphi$  (рис. 6.10). Угол поворота правого сечения

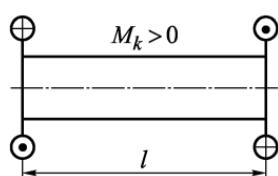


Рис. 6.9

относительно левого сечения, как нетрудно понять, равен  $d\varphi$ . А это и есть угол закручивания элемента бруса. Чтобы получить

относительный угол закручивания  $\theta$ , нужно отнести  $d\varphi$  к длине элемента  $dx$ . Таким образом,

$$\frac{d\varphi}{dx} = \theta. \quad (6.2.1)$$

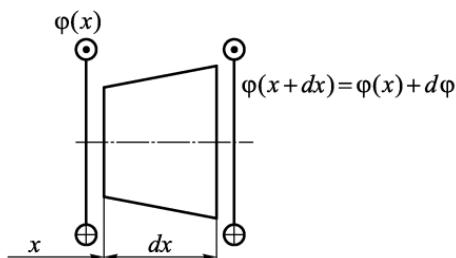


Рис. 6.10

Вычислим его как угол поворота сечения  $x_2$  относительно сечения  $x_1$ :

$$\varphi_{2-1} = \varphi(x_2) - \varphi(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} d\varphi = \int_{x_1}^{x_2} \theta dx. \quad (6.2.2)$$

В этом выражении угол закручивания по существу получен как сумма (интеграл) углов закручивания  $d\varphi = \theta dx$  бесконечно малых элементов  $dx$ , составляющих конечный элемент.

Соотношение (6.2.2) является одной из возможных форм записи общего решения дифференциального уравнения (6.2.1), учитывающей, что по своему физическому содержанию угол поворота  $\varphi$  является непрерывной функцией. Ведь разрыв функции  $\varphi(x)$  соответствует конечному углу поворота двух бесконечно близких сечений, а это физически означает разрушение бруса (если, конечно, такой поворот не предусмотрен конструкцией). Аналогичные соотношения между перемещением  $u$  и относительным удлинением  $\varepsilon$  были получены и подробно разобраны выше, в разд. 4.2 для растяжения–сжатия бруса.

**6.2.3.** Следует отметить, что статические и геометрические соотношения при растяжении–сжатии (см. разделы 4.1, 4.2) и при кручении (см. разделы 6.1, 6.2) совершенно аналогичны и могут быть получены друг из друга заменой  $N, q, u, \varepsilon$  на  $M_k, t, \varphi, \theta$ . Это их свойство можно полезно использовать, в частности, при построении численных алгоритмов решения задач растяжения и кручения на ЭВМ. Однако полной аналогии между растяжением–сжатием и кручением нет. Различие между ними состоит в характере распределения напряжений по сечению, которое, как это будет видно в дальнейшем, при кручении существенно зависит от формы сечения.

**6.2.2.** Получим теперь угол закручивания  $\varphi_{2-1}$  элемента бруса конечной длины, расположенного между сечениями  $x_1$  и  $x_2$ .

### 6.3. Кручение бруса круглого и кольцевого сечений

**6.3.1.** Рассмотрим кручение бруса, являющегося сплошным круговым цилиндром и нагруженного скручивающими моментами по концам (рис. 6.11). При таком нагружении деформация бруса будет однородна по длине. Кроме того, брус и действующие на него моменты обладают симметрией вращения относительно оси цилиндра  $x$ . Поэтому деформированное состояние бруса должно обладать такой же симметрией. Следовательно, при кручении ось бруса остается прямолинейной, а деформированное состояние будет однородно в окружном направлении, т.е. не будет зависеть от угловой координаты полярной системы координат с полюсом в центре круга поперечного сечения. Имеется также симметрия бруса и обратная симметрия скручивающего момента относительно продольных сечений бруса плоскостями, содержащими ось  $x$ . Всем этим требованиям симметрии деформированного состояния удовлетворяет следующее предположение о характере деформации бруса.

*Ось круглого бруса при кручении остается прямолинейной, а поперечные сечения, оставаясь плоскими и нормальными к оси, ведут себя как жесткие диски, т.е. их радиусы поворачиваются, но не деформируются и углы между радиусами не меняются.*

Такое предположение о характере деформации бруса определяет форму гипотезы плоских сечений при кручении. Оно подтверждается и простыми экспериментами. В них на боковую поверхность цилиндра наносят прямоугольную сетку из продольных полос и поперечных линий, являющихся следами на боковой поверхности поперечных сечений. При кручении цилиндра эта сетка искажается, но так, что поперечные линии остаются окружностями, лежащими в плоскости поперечного сечения (рис. 6.12).

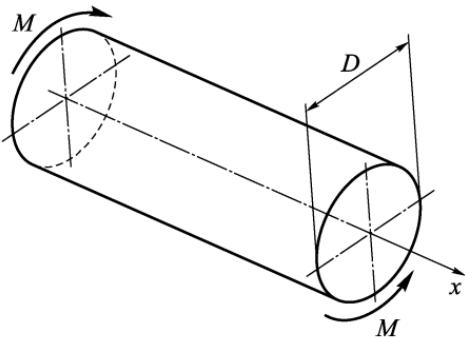


Рис. 6.11

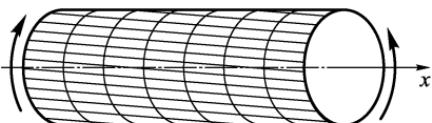


Рис. 6.12

**6.3.2.** Рассмотрим теперь деформацию круглого бруса детальнее. Для этого двумя близкими сечениями выделим из бруса элемент  $dx$  (рис. 6.13). Его правое сечение повернется относительно левого на угол  $d\varphi$ . Выбранная произвольно образующая поверхности цилиндра  $ab$  займет после деформации положение  $ab'$ .

Введем в плоскости сечения полярную координату  $\rho$  как расстояние от центра окружности сечения. Двумя продольными цилиндрическими сечениями радиусов  $\rho$  и  $\rho + d\rho$  выделим из элемента  $dx$  кольцо толщиной  $d\rho$  и рассмотрим его деформацию (рис. 6.14). Привильная образующая  $cd$  поверхности кольца при деформации повернется и займет положение  $cd'$ . Поэтому прямой до деформации угол  $ecd$  уменьшится на угол  $\gamma$ , который по существу является углом сдвига. Причем в

силу гипотезы плоских сечений этот сдвиг однороден (постоянен) в окружном направлении.

В треугольнике  $cdd'$  дуга  $dd' = \gamma dx$ , а в секторе  $Odd'$  та же дуга  $dd' = \rho d\varphi$ . Поэтому  $\gamma dx = \rho d\varphi$ . Следовательно,

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx} = \rho \theta. \quad (6.3.1)$$

Сопоставляя теперь деформацию кольца с деформацией чистого сдвига (см.

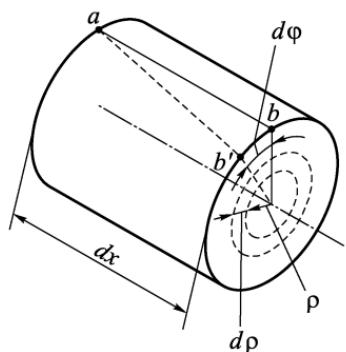


Рис. 6.13

разд. 5.2, рис. 5.6), приходим к выводу, что такая деформация кольца должна сопровождаться появлением в плоскости поперечного сечения касательных напряжений  $\tau$ , направленных касательно к окружности поперечного сечения кольца (рис. 6.15). Эти касательные напряжения так же, как и деформации  $\gamma$ , однородны в окружном направлении. При линейно-упругих деформациях сдвиг  $\gamma$  и соответствующее ему касательное напряжение  $\tau$ , как это следует из экспериментов на чистый сдвиг (см. разд. 3.5), подчиняются закону Гука:

$$\tau = G\gamma. \quad (6.3.2)$$

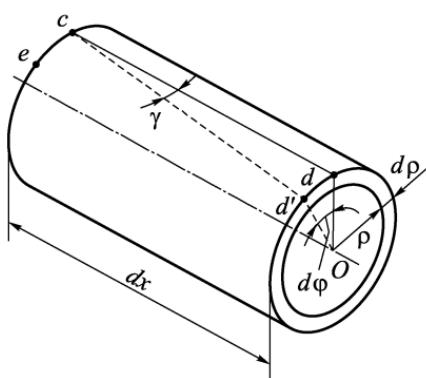


Рис. 6.14

Тогда, учитывая зависимость (6.3.1), получаем, что

$$\tau = G\rho\theta. \quad (6.3.3)$$

Так как модуль при сдвиге  $G$  и относительный угол закручивания  $\theta$  постоянны для сечения, то из этой формулы следует, что  $\tau$  в сечении меняется пропорционально расстоянию  $\rho$  от центра сечения, как это показано на рис. 6.16.

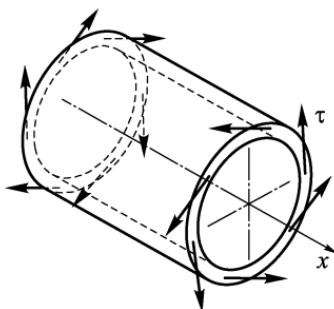


Рис. 6.15

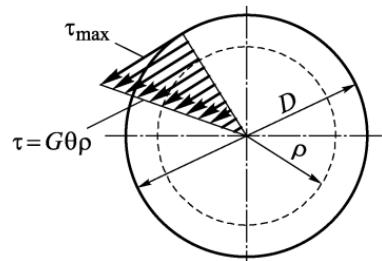


Рис. 6.16

**6.3.3.** Формулой (6.3.3) неудобно пользоваться для определения касательных напряжений. При решении задач мы обычно сначала методом сечений определяем внутренний силовой фактор, а потом уже по нему находим соответствующие напряжения. Такой алгоритм мы уже успешно использовали при анализе растяжения–сжатия бруса в гл. 4. Поэтому необходимо иметь формулу, связывающую  $\tau$  с крутящим моментом  $M_k$ . Для этого введем в сечение бруса полярные координаты  $\rho, \alpha$  (рис. 6.17). Тогда, по введенному в гл. 2 правилу индексации касательных напряжений,  $\tau = \tau_{x\alpha}$ . В п. 2.3.1 крутящий момент был подсчитан как интеграл по площади сечения от моментов элементарных касательных усилий  $\tau_{x\alpha} dF$ :

$$M_k = \int_F \rho \tau_{x\alpha} dF. \quad (6.3.4)$$

Воспользуемся этим выражением, чтобы связать  $\tau = \tau_{x\alpha}$  и  $M_k$ . Подставим (6.3.3) в (6.3.4). Учитывая, что  $G$  и  $\theta$  не зависят

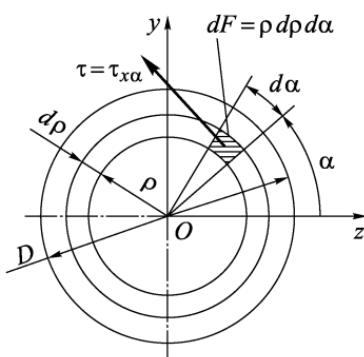


Рис. 6.17

от положения  $dF$ , получим

$$M_k = G\theta \int_F \rho^2 dF. \quad (6.3.5)$$

Входящий в это соотношение интеграл зависит только от геометрии сечения. Он называется *полярным моментом инерции* и обозначается как

$$J_p = \int_F \rho^2 dF. \quad (6.3.6)$$

Вместе с другими геометрическими характеристиками плоских фигур подробно он будет изучен в гл. 7.

С учетом этого обозначения из формулы (6.3.5) получаем соотношение, связывающее  $M_k$  и  $\theta$ :

$$\theta = \frac{M_k}{GJ_p}. \quad (6.3.7)$$

А теперь из (6.3.3) сразу следует, что

$$\tau = \frac{M_k}{J_p} \rho. \quad (6.3.8)$$

По этой формуле в круглом брусе при кручении можно найти касательные напряжения по известному крутящему моменту. А формула (6.3.7) связывает  $M_k$  с относительным углом закручивания. Вместе со статическими и геометрическими дифференциальными зависимостями (6.1.1)–(6.1.3), (6.2.1), (6.2.2) формулы (6.3.8) и (6.3.7) позволяют получить полную информацию о напряженно-деформированном состоянии круглого бруса при кручении.

**6.3.4.** Заметим, что для расчета на прочность нам нужно знать максимальную величину касательных напряжений в сечении, которую мы обозначим через  $\tau_{\max}$ . Из формулы (6.3.8) сразу следует, что в круглом брусе

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{J_p} \rho_{\max} = \frac{M_k}{J_p} \frac{D}{2}.$$

Эту зависимость принято записывать в виде

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k}.$$

Величину  $W_k$  называют *моментом сопротивления кручению*. Как мы увидим в дальнейшем, к такому виду можно привести формулу для определения  $\tau_{\max}$  при кручении бруса любого сечения, только для каждой формы сечения  $W_k$  вычисляется по-своему.

В частности, как мы только что установили, для бруса круглого сплошного поперечного сечения

$$W_k = \frac{2J_p}{D}. \quad (6.3.9)$$

Полярный момент инерции  $J_p$  для круга вычислим как интеграл:

$$J_p = \int_F \rho^2 dF. \quad (6.3.10)$$

В полярных координатах  $dF$  можно подсчитать как площадь криволинейного прямоугольника, заштрихованного на рис. 6.17. Пренебрегая малыми высшего порядка, получаем, что  $dF = d\rho \cdot \rho d\alpha$ . Поэтому двойной интеграл (6.3.10) можно записать в виде

$$J_p = \int_0^{D/2} \int_0^{2\pi} \rho^3 d\rho d\alpha. \quad (6.3.11)$$

Подынтегральное выражение и пределы в этом двойном интеграле таковы, что можно разделить переменные и подсчитать его как произведение двух одинарных интегралов:

$$J_p = \int_0^{D/2} \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{1}{4} \left(\frac{D}{2}\right)^4 \cdot 2\pi = \frac{\pi D^4}{32}.$$

В практических расчетах с достаточной степенью точности можно принять  $J_p \approx 0,1D^4$ . Тогда из (6.3.9) получаем, что  $W_k = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0,2D^3$ .

**6.3.5.** Рассмотрим теперь кручение бруса в виде круглой цилиндрической трубы. Поперечное сечение такого бруса представляет собой кольцо, наружный диаметр которого обозначим через  $D$ , а внутренний — через  $d$  (рис. 6.18).

Брус кольцевого сечения обладает точно такими же свойствами симметрии, что и брус сплошного круглого сечения, показанный на рис. 6.11. Поэтому и для него естественно принять данные в п. 6.3.1 предположения гипотезы плоских сечений о характере его деформации. На основе этих гипотез,

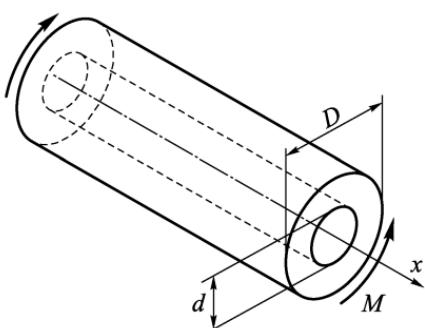


Рис. 6.18

анализируя деформацию выделенного из бруса элементарного кольца, показанного на рис. 6.13, приходим к выражению (6.3.1) и далее для линейно-упругих деформаций к формуле (6.3.3). Далее, с помощью интеграла (6.3.4) приходим, как и в п. 6.3.3, к формулам:

$$\theta = \frac{M_k}{GJ_p}, \quad \tau = \frac{M_k}{J_p} \rho, \quad \frac{d}{2} \leq \rho \leq \frac{D}{2}. \quad (6.3.12)$$

В этих формулах, как и для сплошного круглого бруса,

$$J_p = \int_F \rho^2 dF.$$

Только в этом выражении  $F$  — площадь кольцевого поперечного сечения. В полярных координатах этот интеграл имеет вид

$$\begin{aligned} J_p &= \int_{d/2}^{D/2} \int_0^{2\pi} \rho^3 d\rho d\alpha = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = \\ &= \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4) \approx 0,1 D^4 (1 - c^4), \quad c = \frac{d}{D}. \end{aligned} \quad (6.3.13)$$

Для подсчета  $\tau_{\max}$  из (6.3.12) с учетом полученного значения для  $J_p$  получаем

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{M_k}{W_k}, \\ W_k &= \frac{J_p}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4) \approx \\ &\approx 0,2 D^3 (1 - c^4). \end{aligned} \quad (6.3.14)$$

Распределение касательных напряжений по сечению, определяемое формулой (6.3.12), для кольцевого сечения показано на рис. 6.19.

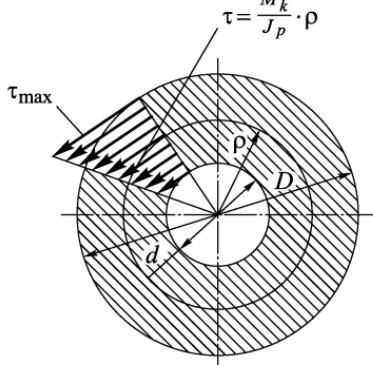


Рис. 6.19

брока в соответствии со свойством парности обязательно сопровождается появлением равных им касательных напряжениях  $\tau_{ax}$  в продольных сечениях бруса (рис. 6.20). Эти напряжения являются причиной появления продольных трещин при кручении бревен, так как дерево легко раскалывается вдоль волокон (рис. 6.21).

В разд. 3.5 мы отмечали, что образцы из хрупких материалов разрушаются, как правило, с образованием винтовых поверхностей

стей, как было показано на рис. 3.28. Такой характер разрушения легко объяснить, рассматривая элементы, выделенные из поверхностного слоя образца.

Если элемент выделить продольным и поперечными сечениями, как это показано на рис. 6.22 *a*, то видно, что он находится в состоянии чистого сдвига. Если же выделить его винтовыми сечениями под углом  $45^\circ$  к оси (рис. 6.22 *b*), то, как показано в разд. 5.2, чистый сдвиг для такого элемента будет реализован в виде двухосного растяжения–сжатия с равными по величине напряжениями. Тогда разрушение происходит по плоскостям, где растягивающие напряжения достигнут предельных для данного материала значений, что и происходит в образцах из хрупкого материала, который обычно хуже всего воспринимает растягивающие напряжения.

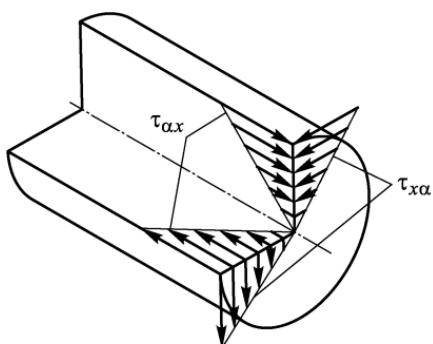


Рис. 6.20

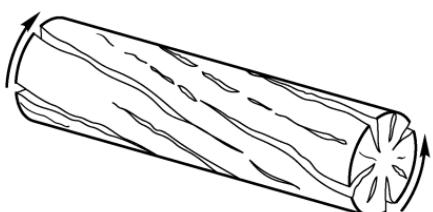


Рис. 6.21

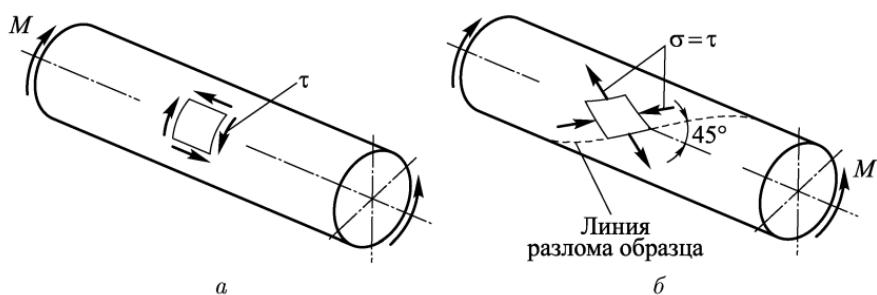


Рис. 6.22

## 6.4. Кручение брусьев некругового поперечного сечения

**6.4.1.** Попытки решить задачу о кручении бруса некруглого сечения с помощью гипотезы плоских сечений не привели к

успеху. Чем больше сечения отличались от кругового, тем больше результаты таких решений отличались от экспериментальных данных. Причина этого различия особенно ясно видна при анализе кручения стержня сплошного прямоугольного сечения.

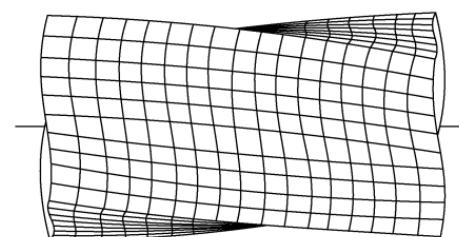


Рис. 6.23

На рис. 6.23 показано деформированное состояние при кручении такого бруса из резины, на боковую поверхность которого в недеформированном состоянии была нанесена прямоугольная сетка. Четко видно, что при деформации по-

перечное сечение искривляется сложным образом. Как говорят, сечение депланирует. Простых гипотез, удовлетворительно описывающих такую геометрию деформации бруса, построить не удалось. Точное решение задачи о кручении бруса прямоугольного сплошного сечения, а также эллиптического, треугольного и некоторых других простых по форме поперечных сечений получено методами теории упругости. В частности, решение задачи о кручении бруса прямоугольного сечения дал Б. Сен-Венан в 1855 г. Мы здесь приведем только те результаты этих решений, которые необходимы для инженерных прочностных расчетов.

**6.4.2.** В поперечном сечении прямоугольного призматического бруса касательные напряжения при кручении распределяются так, как это показано на рис. 6.24.

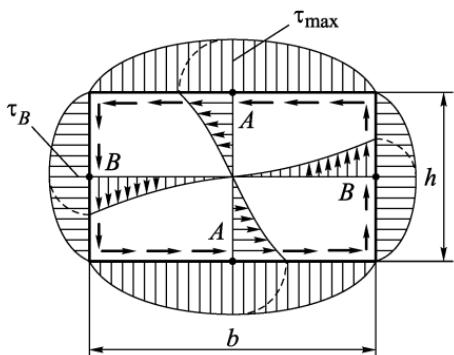


Рис. 6.24

Максимальные значения касательных напряжений, знание которых необходимо для расчета на прочность, появляются на середине длинной стороны. Формулу для их определения можно представить в таком же структурном виде, что и для круглого сечения:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k}. \quad (6.4.1)$$

Здесь  $W_k$  — момент сопро-

тивления кручению, который для прямоугольного сечения подсчитывается как

$$W_k = \alpha b h^2 \quad (b \geq h). \quad (6.4.2)$$

Коэффициент  $\alpha$  зависит от отношения  $b/h$ , т.е.  $\alpha = \alpha(b/h)$ , и его значения для различных  $b/h$  приведены в табл. 6.1.

Т а б л и ц а 6.1

$b/h$	1	1,5	1,75	2	3	4	6	8	10	$\infty$
$\alpha$	0,208	0,231	0,239	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
$\beta$	0,141	0,196	0,214	0,229	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
$\gamma$	1,00	0,859	0,820	0,795	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

Иногда для расчета на прочность необходимо знать максимальные напряжения на середине короткой стороны сечения  $\tau_B$ .

Их можно подсчитать как

$$\tau_B = \gamma \tau_{\max}. \quad (6.4.3)$$

Коэффициент  $\gamma$  также зависит от отношения  $b/h$  и так как  $\tau_B \leq \tau_{\max}$ , то  $\gamma(b/h) \leq 1$  ( $\gamma = 1$  для квадратного сечения). Величины коэффициента  $\gamma$  также даны в табл. 6.1.

Для расчета деформаций бруса необходима связь между крутящим моментом  $M_k$  и относительным углом закручивания. Эту связь можно представить в форме, сходной с (6.3.7):

$$\theta = \frac{M_k}{GJ_k}. \quad (6.4.4)$$

Здесь  $GJ_k$  — жесткость при кручении, а  $J_k$  — геометрический фактор жесткости. Для бруса круглого сечения, как это было показано в разд. 6.3,  $J_k = J_p$ . Для бруса прямоугольного сечения  $J_k$  можно подсчитать как

$$J_k = \beta b h^3 \quad (b \geq h). \quad (6.4.5)$$

Коэффициент  $\beta$  также зависит от  $b/h$  и его значения приведены в табл. 6.1.

Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  называют коэффициентами Сен-Венана.

**6.4.3.** Особо обратим внимание читателя на две особенности распределения касательных напряжений.

Во-первых, касательные напряжения в близких к контуру точках поперечного сечения направлены вдоль контура (касательно к контуру). Это нетрудно объяснить исходя из свойства парности касательных напряжений. Действительно, если в такой точке, например в точке  $K$  на рис. 6.25, касательное напряжение  $\bar{\tau}_x$  направлено произвольно, то его можно разложить на составляющие вдоль контура  $\tau_{xz}$  и нормально к нему  $\tau_{xy}$ . Тогда на боковой поверхности бруса должно появиться напряжение  $\tau_{yx}$ , и по свойству парности  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ . Но боковая поверхность бруса

свободна от любых напряжений и поэтому  $\tau_{yx} = 0$ . А это означает, что и  $\tau_{xy} = 0$ . Таким образом,  $\tau_x = \tau_{xz}$  и потому направлено вдоль контура.

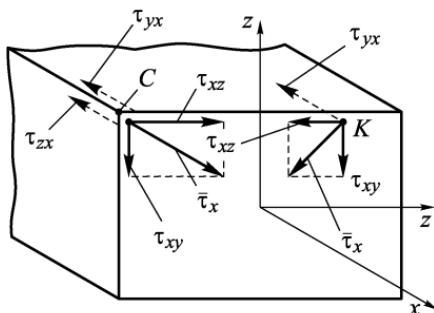


Рис. 6.25

свободной от напряжений боковой поверхности бруса.

**6.4.4.** Анализ решений о кручении брусьев самых различных поперечных сечений показал, что для всех них сохраняется общая структура формул для определения  $\tau_{\max}$  и  $\theta$ :

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k}, \quad \theta = \frac{M_k}{GJ_k}. \quad (6.4.6)$$

Только для каждого вида поперечного сечения величины  $W_k$  и  $J_k$  определяются по-своему.

Для бруса эллиптического сечения с полуосами эллипса  $a$  и  $b$  ( $a \geq b$ ) характер распределения касательных напряжений показан на рис. 6.26. Наибольшие касательные напряжения возникают в точках  $A$  по концам малой оси, и необходимый для их вычисления момент сопротивления кручению

$$W_k = \frac{\pi}{2}ab^2. \quad (6.4.7)$$

Напряжения в точках  $B$  по концам большой оси можно найти как

$$\tau_B = \frac{b}{a}\tau_{\max} = \frac{b}{a}\tau_A. \quad (6.4.8)$$

Величина геометрического фактора жесткости  $J_k$  для бруса эллиптического сечения подсчитывается по формуле

$$J_k = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}. \quad (6.4.9)$$

Для бруса с сечением в виде прямоугольного равностороннего треугольника со сторонами  $a$  максимальные касательные на-

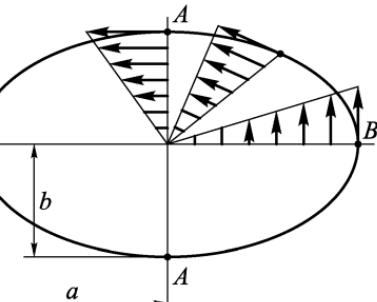


Рис. 6.26

пряжения появляются по серединам сторон. Необходимые для расчета такого бруса момент сопротивления кручению  $W_k$  и геометрический фактор жесткости  $J_k$  можно вычислить как

$$W_k = \frac{a^3}{20}, \quad J_k = \frac{\sqrt{3}}{80} a^4. \quad (6.4.10)$$

**6.4.5.** Точное решение задачи о кручении брусьев более сложного поперечного сечения методами теории упругости требует значительной вычислительной работы. Однако Л. Прандтлем было отмечено совпадение математических формулировок задач о кручении бруса и о деформации под равномерным давлением мембранны, натянутой на плоский контур, одинаковый по форме с контуром поперечного сечения бруса. Не вдаваясь здесь в подробности математической формулировки этих задач, отметим только, что согласно этой аналогии, которая названа мембранный (плечочной) аналогией, касательные напряжения в брусе пропорциональны углам наклона касательных к поверхности мембранны, а крутящий момент пропорционален объему между поверхностью мембранны и плоскостью контура, на который она натянута. Последнее обстоятельство позволяет сравнивать жесткости сечений различных форм. Они, учитывая формулу (6.4.6), будут соотноситься как эти объемы для аналогичных мембран. Таким образом, сравнивая объемы при деформации мембранны на сложном контуре  $V$  и круглом контуре  $V_0$  (разумеется, при одинаковых усилиях натяжения мембранны и равных величинах давлений), мы можем найти геометрический фактор жесткости сложного сечения:

$$J_k = \frac{V}{V_0} J_p.$$

Имеются специальные приборы, позволяющие быстро измерять объемы  $V$  и  $V_0$ . Они описаны, например, в учебнике [3]. Более подробно с мембранный аналогией можно ознакомиться в книгах [4, 9].

## 6.5. Кручение брусьев тонкостенного открытого сечения

**6.5.1.** В различных конструкциях, а особенно в авиационных, широко применяются элементы в виде брусьев тонкостенного сечения, которое бывает открытым (рис. 6.27 *a, б, в*) и замкнутым (рис. 6.27 *г, д*). Оказывается, распределения касательных напряжений при кручении брусьев открытого и замкнутого сечений принципиально различны. Простейшим бруском открытого сечения будет плоская полоса, показанная на рис. 6.28, ко-

гда длина прямоугольного поперечного сечения  $s$  значительно больше его толщины  $\delta$  ( $s \gg \delta$ ). Из рассмотренного в п. 6.4.2

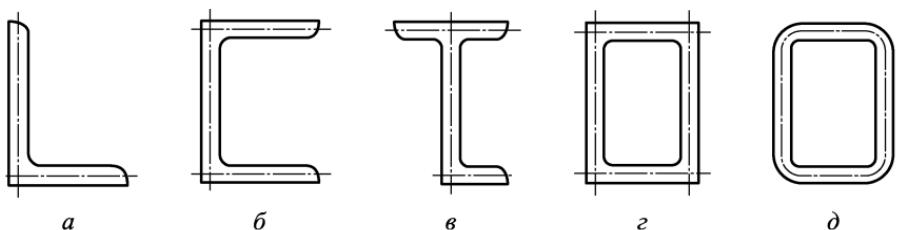
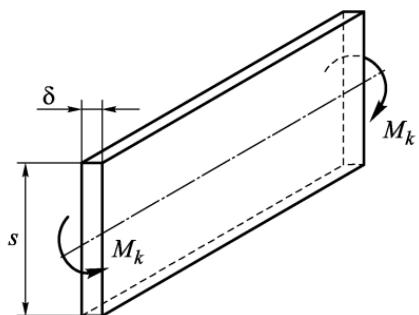


Рис. 6.27

решения Сен-Венана о кручении бруса прямоугольного сечения следует, что с увеличением отношения  $s/\delta$  коэффициенты Сен-Венана  $\alpha$  и  $\beta$  стремятся к значению, равному  $1/3$ , а  $\gamma$  стремится к  $0,742$ :



$$\lim_{\frac{s}{\delta} \rightarrow \infty} \alpha \left( \frac{s}{\delta} \right) = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{\frac{s}{\delta} \rightarrow \infty} \beta \left( \frac{s}{\delta} \right) = \frac{1}{3}, \quad (6.5.1)$$

$$\lim_{\frac{s}{\delta} \rightarrow \infty} \gamma \left( \frac{s}{\delta} \right) = 0,742.$$

Рис. 6.28

При больших  $s/\delta$  касательные напряжения по толщине сечения изменяются практически линейно, а по длине они практически постоянны, кроме коротких участков вблизи концов сечения (рис. 6.29). Таким образом, для такого тонкостенного бруса с достаточной точностью можно принять, что

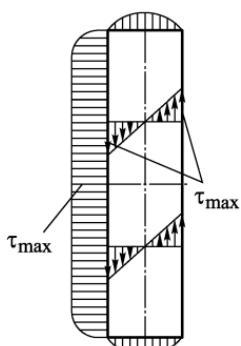


Рис. 6.29

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k}, \quad \theta = \frac{M_k}{GJ_k},$$

$$W_k = \frac{1}{3}s\delta^2, \quad J_k = \frac{1}{3}s\delta^3. \quad (6.5.2)$$

**6.5.2.** Эксперименты показывают, что характер распределения напряжений принципиально не изменится, если из такой полосы изготовить с помощью гибки брус более сложного сечения, как, например, показанный на рис. 6.30. Поэтому и расчетные формулы (6.5.2) не изменяются,

только в них под  $s$  понимается длина средней линии сечения, одинаково отстоящей от длинных сторон его контура. На рис. 6.30 средняя линия показана штрихпунктиром.

**6.5.3.** Рассмотрим теперь брус сложного сечения, составленного из тонкостенных участков. Пусть длина  $i$ -го участка равна  $s_i$ , а его толщина  $\delta_i$  постоянна в пределах участка (рис. 6.31).

Кручение составного бруса можно рассматривать как совместное кручение составляющих его простых брусьев. Обозначим через  $M_k^i$  долю общего для всего сечения крутящего момента  $M_k$ , которая воспринимается простым бруском, соответствующим  $i$ -му участку сечения. Тогда ясно, что

$$\sum_i M_k^i = M_k. \quad (6.5.3)$$

Кручение каждого составляющего бруса описывается формулами (6.5.2), т.е. для бруса, соответствующего  $i$ -му участку сечения,

$$\tau_{\max}^i = \frac{M_k^i}{\frac{1}{3}s_i\delta_i^2}, \quad \theta^i = \frac{M_k^i}{G \cdot \frac{1}{3}s_i\delta_i^3}. \quad (6.5.4)$$

Так как при совместном кручении все участки сечения поворачиваются на один и тот же угол, то все относительные углы закручивания составляющих брусьев  $\theta^i$  равны относительному углу закручивания  $\theta$  всего сечения:

$$\theta^i = \theta. \quad (6.5.5)$$

Здесь

$$\theta = \frac{M_k}{GJ_k}, \quad (6.5.6)$$

где  $J_k$  — геометрический фактор жесткости составного сечения.

Сравнивая теперь (6.5.6) и (6.5.4), с учетом (6.5.5) легко получить, что

$$M_k^i = \frac{\frac{1}{3}s_i\delta_i^3}{J_k} M_k. \quad (6.5.7)$$

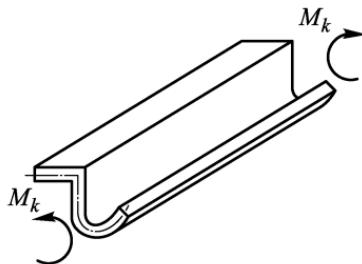


Рис. 6.30

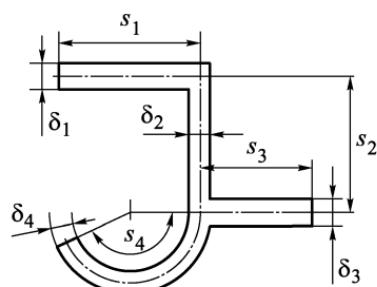


Рис. 6.31

Теперь после подстановки выражения (6.5.7) в равенство (6.5.3) без труда находим, что

$$J_k = \frac{1}{3} \sum_i s_i \delta_i^3, \quad (6.5.8)$$

т.е. жесткость при кручении составного бруса равна сумме жесткостей составляющих его простых брусьев. Подставив  $M_k^i$  из (6.5.7) в первую формулу (6.5.4), получим  $\tau_{\max}^i$  для  $i$ -го участка:

$$\tau_{\max}^i = \frac{\delta_i M_k}{J_k}. \quad (6.5.9)$$

Отсюда видно, что наибольшие касательные напряжения  $\tau_{\max}$  возникнут на том участке сечения, где толщина  $\delta$  максимальна. И потому момент сопротивления кручению  $W_k$  для составного открытого тонкостенного сечения

$$W_k = \frac{\frac{1}{3} \sum_i s_i \delta_i^3}{\delta_{\max}}, \quad \delta_{\max} = \max_i(\delta_i). \quad (6.5.10)$$

Отметим, что приведенный здесь вывод момента сопротивления кручению  $W_k$  и геометрического фактора жесткости  $J_k$  составного сечения по существу является решением статически неопределенной задачи совместного кручения простых брусьев, составляющих брус сложного сечения. В этом решении соотношение (6.5.3) по существу является уравнением равновесия, а равенства (6.5.5) представляют собой уравнения совместности деформаций. Такая постановка не учитывает взаимодействия составляющих простых брусьев вдоль образующих, по которым они соединены. Поэтому формулы (6.5.8), (6.5.10) дают несколько заниженную величину для геометрического фактора жесткости  $J_k$  и завышенную — для момента сопротивления  $W_k$ .

Обратим также внимание читателя на то, что в местах соединения элементов составного сечения могут возникнуть повышенные касательные напряжения. На рис. 6.32 показан простейший составной брус. Рассматривая напряжения в нем с точки зрения мембранный аналогии, мы замечаем, что в области внутреннего угла контура сечения угол наклона мембраны  $\alpha$ , а значит, и соответствующие ему касательные напряжения зна-

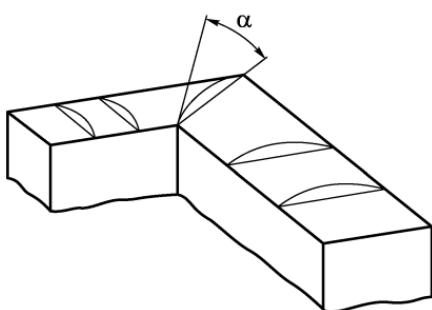


Рис. 6.32

ки зрения мембранный аналогии, мы замечаем, что в области внутреннего угла контура сечения угол наклона мембраны  $\alpha$ , а значит, и соответствующие ему касательные напряжения зна-

чительно возрастают. Чтобы избежать этого, внутренние углы сечений прессованных профилей скругляют.

**6.5.4.** При кручении брусьев тонкостенного открытого сечения могут возникнуть существенные депланации сечения. Особенно наглядно депланация видна при кручении разрезанной вдоль тонкостенной трубы (рис. 6.33), которое сопровождается значительными продольными смещениями кромок разреза друг относительно друга. Здесь при рассмотрении кручения считается, что продольные смещения точек сечения происходят свободно. На практике же часто продольные смещения в отдельных сечениях бруса стеснены. Так будет, если, например, в торцевых сечениях показанного на рис. 6.33 бруса

поставить жесткие диафрагмы и соединить их с бруском так, чтобы они не допускали продольных смещений. Это существенно изменит распределение касательных напряжений по сечению и вызовет появление в нем значительных нормальных напряжений. Кручение бруса в условиях стеснения продольных смещений его сечений называют *стесненным кручением*. Особенno значителен эффект стеснения депланаций для брусьев открытого тонкостенного сечения. Задача о стесненном кручении подробно разбирается в курсе строительной механики (см., например, [10]).

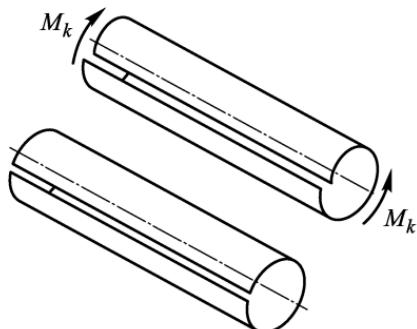


Рис. 6.33

## 6.6. Кручение брусьев тонкостенного замкнутого сечения

**6.6.1.** При исследовании тонкостенного замкнутого сечения удобно ввести координату  $s$  вдоль средней линии сечения (рис. 6.34). За начало координаты  $s$  ввиду замкнутости сечения можно выбрать любую точку этой линии сечения. В общем случае толщина сечения  $\delta$  может быть переменна, т.е.  $\delta = \delta(s)$ .

Прежде всего обратим внимание на то, что тонкостенность сечения сказывается на характере распределения касательных напряжений по нему. Как уже было показано в п. 6.4.3, касательные напряжения в точках, близких к контуру сечения, направлены касательно к контуру. Действительно, в таких точках нормальная к контуру составляющая касательного напряжения  $\tau_{xn}$ , которая показана штриховой линией на рис. 6.35, должна

быть равна напряжениям  $\tau_{nx}$  на боковой поверхности бруса. Но эта поверхность свободна от напряжений, поэтому  $\tau_{nx} = 0$ , а значит, и  $\tau_{xn} = 0$ . Следовательно,  $\tau_x = \tau_{xs}$ .

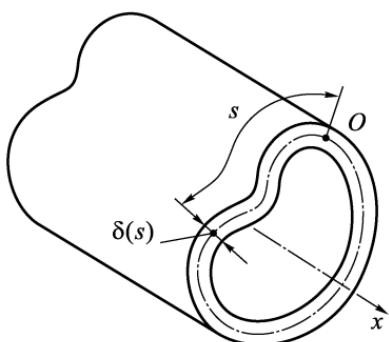


Рис. 6.34

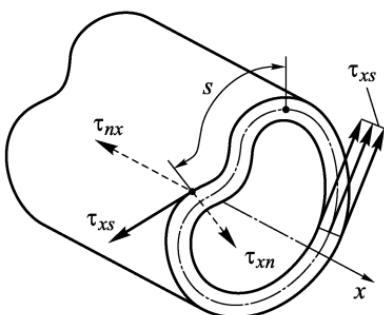


Рис. 6.35

В тонкостенных сечениях из-за малости толщины направления касательных к наружному и внутреннему контурам в точках, соответствующих некоторому значению координаты, незначительно отличаются друг от друга и от направления касательной к средней линии (если, конечно, толщина медленно меняется вдоль контура). А если толщина постоянна, то все эти три касательные параллельны. Поэтому естественно допустить, что в тонкостенных сечениях касательные напряжения направлены параллельно касательной к средней линии.

Нам уже известно, что касательные напряжения при кручении в брусе кругового кольцевого сечения распределяются пропорционально расстоянию от центра круга (см. рис. 6.19 и формулу (6.3.12)).

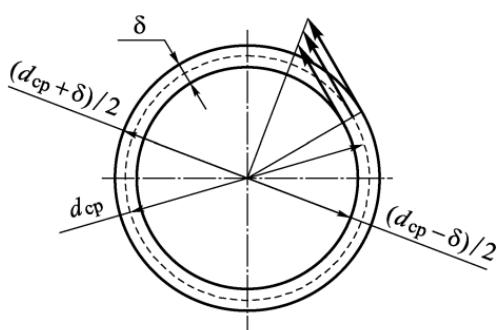


Рис. 6.36

Если кольцевое сечение является тонкостенным, то расстояния от центра до его наружного и внутреннего контуров отличаются друг от друга незначительно (рис. 6.36), а значит, и касательные напряжения также мало изменяются по толщине. Это подсказывает, что для тонкостенных замкнутых сечений можно предположить постоянство касательных напряжений по толщине.

Если кольцевое сечение является тонкостенным, то расстояния от центра до его наружного и внутреннего контуров отличаются друг от друга незначительно (рис. 6.36), а значит, и касательные напряжения также мало изменяются по толщине. Это подсказывает, что для тонкостенных замкнутых сечений можно предположить постоянство касательных напряжений по толщине.

Суммируя два сформулированных выше допущения, будем предполагать, что в брусе тонкостенного замкнутого сечения при кручении касательные напряжения направлены по касательной к контуру и постоянны по толщине.

Эпюра  $\tau_{xs}$  по толщине, соответствующая такому предположению, показана справа на рис. 6.35.

Двумя близкими поперечными сечениями и двумя нормальными к средней линии продольными сечениями при произвольных  $s = s_1$  и  $s = s_2$  (рис. 6.37 а) выделим из бруса элемент, показанный на рис. 6.37 б. В точках поперечного сечения при

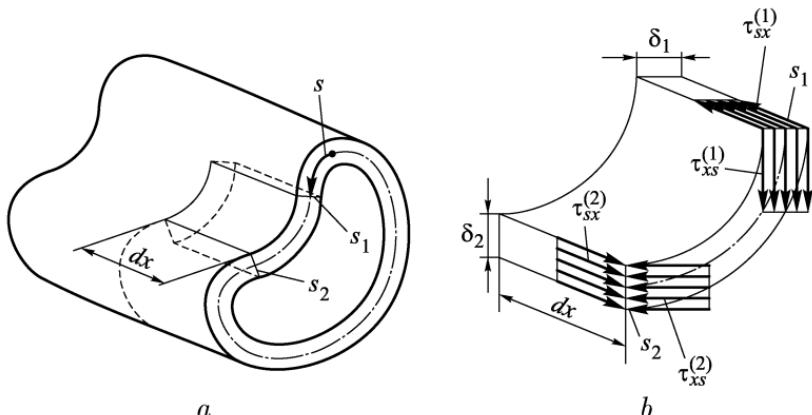


Рис. 6.37

$s = s_1$  и  $s = s_2$  действуют касательные к средней линии и постоянные напряжения  $\tau_{xs}^{(1)}$  и  $\tau_{xs}^{(2)}$ . В продольных сечениях появляются парные им касательные напряжения  $\tau_{sx}^{(1)} = \tau_{xs}^{(1)}$  и  $\tau_{sx}^{(2)} = \tau_{xs}^{(2)}$ . Ввиду малости  $dx$  эти напряжения можно считать равномерно распределенными по имеющим форму прямоугольников  $dx \cdot \delta_1$  и  $dx \cdot \delta_2$  продольным сечениям. Поэтому результатом действия на элемент напряжений  $\tau_{sx}^{(1)}$  и  $\tau_{sx}^{(2)}$  являются направленные вдоль оси  $x$  усилия  $\tau_{sx}^{(1)} dx \delta_1$  и  $\tau_{sx}^{(2)} dx \delta_2$ . Для равновесия элемента необходимо, в частности, чтобы была равна нулю сумма проекций на ось  $x$  действующих на него сил. Следовательно,

$$\tau_{sx}^{(1)} dx \delta_1 - \tau_{sx}^{(2)} dx \delta_2 = 0. \quad (6.6.1)$$

Отсюда, учитывая парность касательных напряжений, получаем, что

$$\tau_{xs}^{(1)} \delta_1 = \tau_{xs}^{(2)} \delta_2 = 0. \quad (6.6.2)$$

А так как точки  $s_1$  и  $s_2$  выбраны произвольно, то из (6.6.2) следует, что произведение  $\tau_{xs}(s)\delta(s)$  не зависит от координаты  $s$ ,

т.е. постоянно по контуру сечения:

$$\tau_{xs}\delta = \text{const} \quad \text{по } s. \quad (6.6.3)$$

Это замечательное свойство распределения касательных напряжений по тонкостенным замкнутым сечениям при кручении часто называют *свойством постоянства потока касательных сил*. В основе этого названия лежит гидродинамическая аналогия, согласно которой такое распределение касательных напряжений подобно распределению скоростей в потоке несжимаемой невязкой жидкости, циркулирующей по замкнутой трубке, которая как бы образована внешним и внутренним контурами сечения. В такой трубке из-за несжимаемости жидкости ее поток

(произведение ее скорости  $\tau_{xs}$  на «площадь» сечения трубы  $\delta$ ) во всех сечениях одинаков.

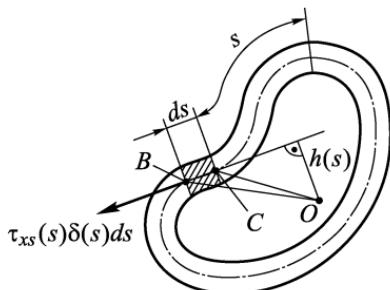


Рис. 6.38

произвольную точку  $O$  и обозначим через  $h(s)$  плечо усилия  $\tau_{xs}(s)\delta(s) ds$  относительно этой точки. Тогда крутящий момент можно получить, суммируя (интегрируя) моменты касательных усилий по всем элементам  $ds$  относительно точки  $O$ . Таким образом,

$$M_k = \oint \tau_{xs}(s)\delta(s)h(s) ds = \tau_{xs}\delta \oint h(s) ds. \quad (6.6.4)$$

Поток  $\tau_{xs}\delta$  вынесен за знак интеграла по замкнутому контуру, так как в силу (6.6.3) он постоянен по контуру. Рассмотрим подробнее интеграл  $\oint h(s) ds$ . Из рис. 6.38 видно, что  $ds$  — это основание  $BC$  треугольника  $OBC$ , а  $h(s)$  — его высота. Площадь этого треугольника обозначим через  $d\omega$  и тотчас станет ясно, что  $d\omega = \frac{1}{2}h(s) ds$ . Тогда

$$\oint h(s) ds = 2 \oint \frac{1}{2}h(s) ds = 2 \oint d\omega = 2\omega. \quad (6.6.5)$$

При вычислении контурного интеграла по мере обхода средней линии, т.е. при последовательном переходе от каждого элемента  $ds$  к соседнему, площади  $d\omega$  складываются и при полном обходе

образуют площадь  $\omega$ , заключенную внутри средней линии сечения (рис. 6.39). Таким образом, соотношение (6.6.4) сводится к виду

$$M_k = \tau_{xs} \delta \cdot 2\omega.$$

Отсюда сразу получаем

$$\tau_{xs} = \frac{M_k}{2\omega\delta}. \quad (6.6.6)$$

Из свойства (6.6.3) следует, что максимальные напряжения  $\tau_{\max}$  возникают там, где минимальна толщина. Поэтому

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k}, \quad W_k = 2\omega\delta_{\min}. \quad (6.6.7)$$

Как и ранее, здесь  $W_k$  — момент сопротивления кручению.

**6.6.3.** Перейдем теперь к вычислению геометрического фактора жесткости  $J_k$ . Воспользуемся энергетическим подходом. Для этого рассмотрим элемент  $dx$  бруса (рис. 6.40). Его правое сечение  $x + dx$  повернется за счет деформаций на угол  $d\varphi$  относительно левого. Если деформация линейно-упруга, то на этом угле поворота момент  $M_k$  совершил упругую работу:

$$dA = \frac{1}{2} M_k d\varphi, \quad (6.6.8)$$

которая накопится в элементе в виде потенциальной энергии деформации  $d\Pi$ , т.е.

$$dA = d\Pi. \quad (6.6.9)$$

Для подсчета  $d\Pi$  разобьем элемент бруса  $dx$  (рис. 6.41 а) продольными нормальными к средней линии сечениями на более мелкие прямоугольные элементы  $dx \cdot ds$ . Каждый такой элемент находится в состоянии чистого сдвига (рис. 6.41 б) и в нем накапливается потенциальная энергия деформаций, равная линейно-упругой работе деформирующей его силы  $\tau_{xs}\delta ds$  на пути  $\gamma_{xs} dx$ . Суммируя потенциальные энергии по элементам вдоль контура средней линии, получаем

$$d\Pi = \oint \frac{1}{2} \tau_{xs} \delta ds \gamma_{xs} dx = \frac{dx}{2} \oint \tau_{xs} \delta \gamma_{xs} ds. \quad (6.6.10)$$

Но по закону Гука  $\gamma_{xs} = \tau_{xs}/G$ , поэтому

$$d\Pi = \frac{dx}{2G} \oint \tau_{xs}^2 \delta ds.$$

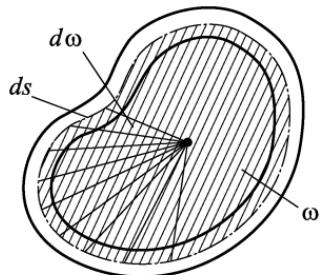


Рис. 6.39

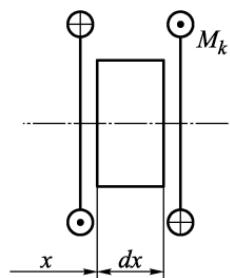


Рис. 6.40

Помножив и разделив подынтегральное выражение на  $\delta$ , мы получим возможность вынести  $(\tau_{xs}\delta)^2$  из-под знака интеграла:

$$d\Pi = \frac{dx}{2G} (\tau_{xs}\delta)^2 \oint \frac{ds}{\delta}.$$

Но из формулы (6.6.6) следует, что

$$\tau_{xs}\delta = M_k/2\omega,$$

поэтому

$$d\Pi = \frac{dx}{2G} \frac{M_k^2}{4\omega^2} \oint \frac{ds}{\delta}. \quad (6.6.11)$$

Подставим это выражение вместе с выражением (6.6.8) в энергетический баланс (6.6.9). В итоге легко получим, учитывая, что

$$d\varphi/dx = \theta,$$

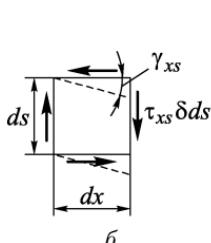
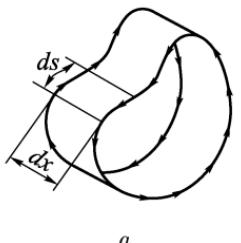


Рис. 6.41

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_k}{GJ_k},$$

$$J_k = \frac{4\omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta}}. \quad (6.6.12)$$

Формулы (6.6.7) и (6.6.12) для вычисления  $W_k$  и  $J_k$  называют *формулами Бредта*.

## 6.7. Потенциальная энергия деформации при кручении

**6.7.1.** Выражение для потенциальной энергии деформации при кручении можно получить как

$$\Pi = \int_l d\Pi, \quad (6.7.1)$$

где  $d\Pi$  — потенциальная энергия, накопившаяся в элементе бруса  $dx$ , выделенного двумя бесконечно близкими поперечными сечениями. В п. 6.6.3 для такого элемента было получено (см. выражения (6.6.8), (6.6.9)), что  $d\Pi = \frac{1}{2}M_k d\varphi$ . Однако согласно (6.2.1)  $d\varphi = \theta dx$ . Поэтому при линейно-упругой деформации

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_l M_k \theta dx. \quad (6.7.2)$$

Отсюда, учитывая, что  $\theta = M_k/GJ_k$ , получаем еще два выражения для потенциальной энергии деформации:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_k^2}{GJ_k} dx, \quad (6.7.3)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_l GJ_k \theta^2 dx. \quad (6.7.4)$$

**6.7.2К.** Впервые кручение рассмотрел, по-видимому, Ш. Кулон (1736–1806) в связи с известными исследованиями по статическому электричеству. В весах, с помощью которых Кулон измерял силы взаимодействия электрических зарядов, в качестве чувствительного элемента использовалась работающая на кручение проволока, жесткость которой определялась по крутильным колебаниям подвешенного на ней металлического цилиндра. Результаты этих исследований были опубликованы в 1784 г.

Распределение касательных напряжений в сечении круглого бруса получил Т. Юнг (1807).

Б. Сен-Венан на основе подхода теории упругости рассмотрел кручение брусьев некруглого сечения и дал метод определения для них моментов сопротивления и геометрических факторов жесткости (1853).

Теория кручения брусьев замкнутого тонкостенного сечения была создана немецким инженером Р. Бредтом в 1896 г.

## 6.8. Примеры расчетов

Расчетные формулы для момента сопротивления кручению  $W_k$  и геометрического фактора жесткости  $J_k$  для наиболее часто встречающихся сечений даны в табл. 6.2. Этими формулами мы будем пользоваться в рассмотренных ниже примерах.

Пример 6.1. Построим эпюры  $M_k$ ,  $\tau_{\max}$ ,  $\theta$  и  $\varphi$  для бруса, изображенного на рис. 6.42 а, нагруженного сосредоточенным моментом  $M = 2m_0l$  и погонным моментом интенсивности  $m(x)$ , эпюра которого показана на рис. 6.42 б. Сечения участков 0–2 и 2–3 показаны на рис. 6.42 в.

Прежде всего рассмотрим моменты сопротивления  $W_k$  и геометрические факторы жесткости  $J_k$  для участков бруса.

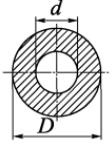
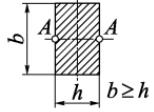
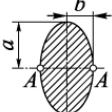
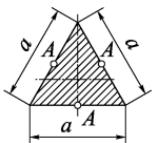
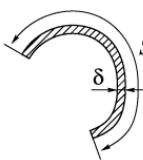
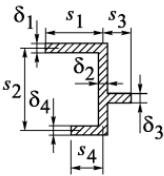
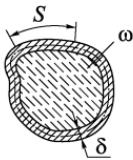
На участке 0–2 сечение бруса — прямоугольное сплошное. Для него в соответствии с п. 6.4.2  $W_k$  и  $J_k$  определяются формулами (6.4.2) и (6.4.5), в которых  $b = 2a$  и  $h = a$  ( $h \leq b$ ):

$$W_k = \alpha \cdot 2a \cdot a^2, \quad J_k = \beta \cdot 2a \cdot a^3.$$

В этих формулах коэффициенты Сен-Венана для отношения  $b/h = 2$  берем из табл. 6.1:  $\alpha = 0,246$ ,  $\beta = 0,229$ . Тогда

$$W_k^{0-2} = 0,492a^3, \quad J_k^{0-2} = 0,458a^4. \quad (6.8.1)$$

Т а б л и ц а 6.2

Сечение		$W_k$	$J_k$
Сплошные сечения	Круговое	 $0,2D^3(1 - C^4)$ $C = \frac{d}{D}$	$\frac{\pi D^4}{32}(1 - C^4) =$ $= 0,1D^4(1 - C^4)$
	Прямоугольное	 $\alpha bh^2$	$\beta bh^3$
	Эллиптическое	 $\frac{\pi ab^2}{2}$	$\frac{\pi a^3 b^3}{a^2 - b^2}$
	В форме равностороннего треугольника	 $\frac{a^3}{20}$	$\frac{\sqrt{3}}{80}a^4$
Тонко-стенные сечения	Открытый профиль	 $\frac{1}{3}s\delta^2$	$\frac{1}{3}s\delta^3$
	Составной профиль	 $\frac{J_k}{\delta_{\max}}$	$\frac{1}{3}\sum_1^n s_i \delta_i^3$
	Замкнутый профиль	 $2\omega\delta_{\min}$	$\frac{4\omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta}}$

На участке 2–3 сечение тонкостенное замкнутое. Для него расчетными являются формулы Бредта (6.6.7) и (6.6.12):

$$W_k = 2\omega\delta, \quad J_k = \frac{4\omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta}}.$$

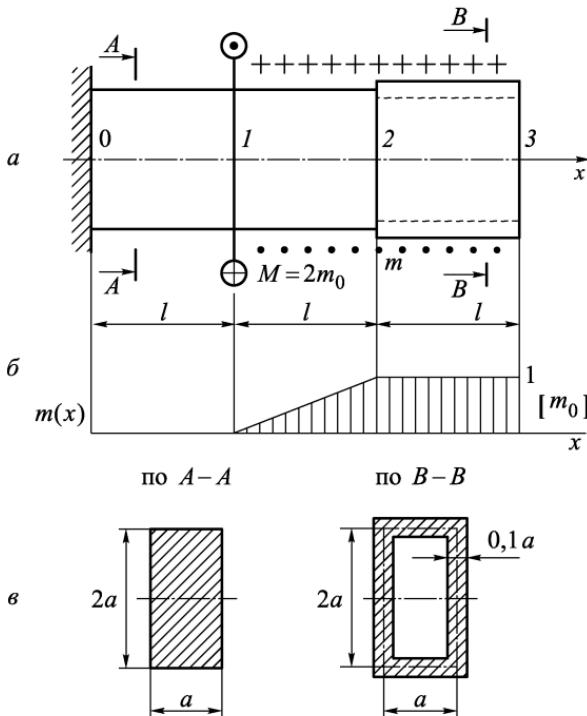


Рис. 6.42

По условиям задачи толщина  $\delta = 0,1a$ , площадь, замкнутая внутри средней линии,  $\omega = a \cdot 2a$ . Так как толщина постоянна по контуру сечения, то  $\oint \frac{ds}{\delta}$  равен периметру сечения, т.е.  $6a$ , деленному на толщину  $\delta$ . Таким образом,

$$W_k^{2-3} = 2 \cdot 2a^2 0,1a = 0,4a^3, \quad J_k^{2-3} = \frac{4(2a^2)^2}{\frac{6a}{0,1a}} = 0,267a^4. \quad (6.8.2)$$

Интересно отметить, что сечение бруса на участке 2–3 по площади в  $2/0,6 = 3,3$  раза меньше сечения на участке 0–2. В то же время отношение моментов сопротивления этих участков равно всего 1,23, а отношение геометрических факторов жест-

кости — 1,72. Отсюда видно, что тонкостенное сечение выгоднее в весовом отношении, чем сплошное. Это объясняется тем, что

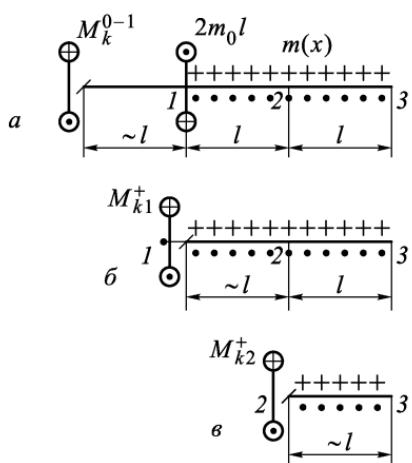


Рис. 6.43

в тонкостенном сечении весь материал работает при напряжениях, равных (или близких) максимальным, а в сплошном — материал внутренней части сечения недогружен.

Определим  $M_k$ . Для этого необходимо воспользоваться методом сечений. На участке 0–1 распределенного момента нет, т.е.  $m(x) = 0$ . Поэтому, в силу статической дифференциальной зависимости  $dM_k/dx = -m(x)$ , на этом участке  $M_k^{0-1}$  постоянен. Рассматривая отсеченную часть, образованную произвольным попечерным сечением и показан-

ную на рис. 6.43 *a* схематично, получаем из условия ее равновесия  $\sum M_x = 0$ , что

$$M_k^{0-1} = 2m_0l - \int_{1-3} m(x) dx. \quad (6.8.3)$$

Отметим, что направление  $M_k^{0-1}$  было выбрано с учетом правила знаков, принятого в начале этой главы. Интеграл в (6.8.3) является равнодействующим моментом распределенного момента  $m(x)$ . Его легко вычислить как площадь эпюры  $m(x)$ , показан-

ной на рис. 6.42 *b*. Поэтому он равен  $\frac{3}{2}m_0l$ . Значит,  $M_k^{0-1} = \frac{1}{2}m_0l$ . Изобразим этот постоянный момент на эпюре  $M_k$  (рис. 6.44 *a*).

На участке 1–2 найдем  $M_k^{1-2}$ . Так как  $m(x)$  изменяется линейно (рис. 6.44 *b*), то в соответствии со статической дифференциальной зависимостью  $M_k$  меняется по квадратичному закону. Рассматривая равновесие отсеченной части, образованной сечением, бесконечно мало сдвинутым вправо от сечения 1 (рис. 6.43 *b*), получаем

$$M_{k1}^+ = - \int_{1-3} m(x) dx = -\frac{3}{2}m_0l.$$

Точно так же, рассекая брус в точке 2, из условия равновесия

отсеченной части (рис. 6.43 *в*) получаем

$$M_{k2} = - \int_{2-3} m(x) dx = -m_0 l.$$

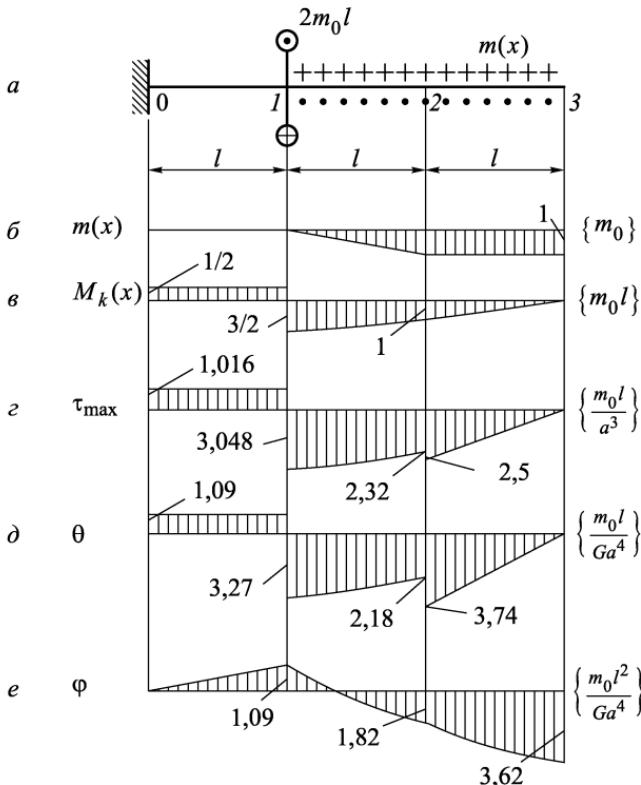


Рис. 6.44

Строя эпюру  $M_k$  на рис. 6.44 *в*, соединим две полученные точки квадратной параболой, касательная к которой в точке 1 горизонтальна, так как в этой точке  $m = 0$ , а значит, и  $dM_k/dx = 0$ . Кроме того, так как на эпюре  $m(x)$  в точке 2 нет скачка, то эпюры  $M_k$  на участках 1–2 и 2–3 в точке 2 имеют общую касательную. Но на участке 2–3, так как  $m(x) = m_0 = \text{const}$ ,  $M_k$  изменяется линейно. В сечении 2 он уже найден, а в сечении 3, как легко видеть, равен нулю.

Эпюра  $M_k$  является основой для построения эпюр  $\tau_{\max}$  и  $\theta$ , так как

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_k}, \quad \theta = \frac{M_k}{GJ_k}.$$

Эти эпюры, полученные после деления  $M_k$  на  $W_k$  и  $GJ_k$ , значения которых по участкам даны формулами (6.8.1), (6.8.2), показаны на рис. 6.44 г и д.

Эпюра углов поворота сечений  $\varphi$  построена по эпюре относительных углов закручивания  $\theta$  с помощью интегрального соотношения (6.2.2). Это соотношение с учетом того, что угол поворота заделанного сечения  $O$  равен нулю, можно записать в виде

$$\varphi(x_c) = \int_0^{x_c} \theta(x) dx. \quad (6.8.4)$$

Здесь  $x_c$  — расстояние от рассматриваемого сечения до заделки. Так же, как и при построении эпюр перемещений  $u$  по относительному удлинению  $\varepsilon$  при растяжении (см. пример 4.1, формулу (4.4.10)), эпюру  $\varphi(x_c)$  можно построить, вычисляя интеграл (6.8.4) как площадь эпюры  $\theta(x)$  на участке от заделки до сечения  $x_c$ .

Имея эпюру  $\tau_{\max}$ , легко провести расчет на прочность. Условия прочности при сдвиге имеют вид

$$|\tau_{\max}| \leq [\tau]. \quad (6.8.5)$$

Допускаемое напряжение сдвига  $[\tau]$  определяется нормативными документами с учетом тех же соображений, что и при растяжении (см. разд. 4.9). Прочность изотропного материала, конечно, не зависит от направления сдвига, поэтому в условии (6.8.5) взята абсолютная величина  $\tau_{\max}$ . В нашей задаче, как это видно из эпюры  $\tau_{\max}$  на рис. 6.44 г, максимальное значение  $|\tau_{\max}| = 3,048m_0l/a^3$ . Поэтому условие прочности рассматриваемого бруса принимает вид

$$3,048m_0l/a^3 \leq [\tau].$$

Отсюда, при заданных  $m_0$ ,  $l$  и  $[\tau]$  можно найти размер сечения  $a$ , т.е. произвести проектировочный расчет на прочность. Например, при  $m_0 = 1000$  Н·м/м,  $l = 0,5$  м,  $[\tau] = 80$  МПа:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3,048m_0l}{[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{3,048 \cdot 1000 \cdot 0,5}{80 \cdot 10^6}} = 0,0267 \text{ м.}$$

Материал бруса — сталь, тогда  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа. Максимальный угол поворота сечения бруса, как это видно из эпюры  $\varphi$  (рис. 6.44 е), равен

$$\begin{aligned} \varphi_{\max} &= 3,62 \frac{m_0 l^2}{G a^4} = 3,62 \frac{1000 \cdot 0,25}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 (2,67 \cdot 10^{-2})^4} = \\ &= 0,022 \text{ рад} = 1,28^\circ. \end{aligned}$$

Пример 6.2. Брус, показанный на рис. 6.45, нагружен посередине сосредоточенным моментом  $m_0 l$ , а на участке  $0-1$  — распределенным моментом  $m(x)$ , изменяющимся линейно по длине участка. Рассчитаем моменты сопротивления и жесткости участков бруса.

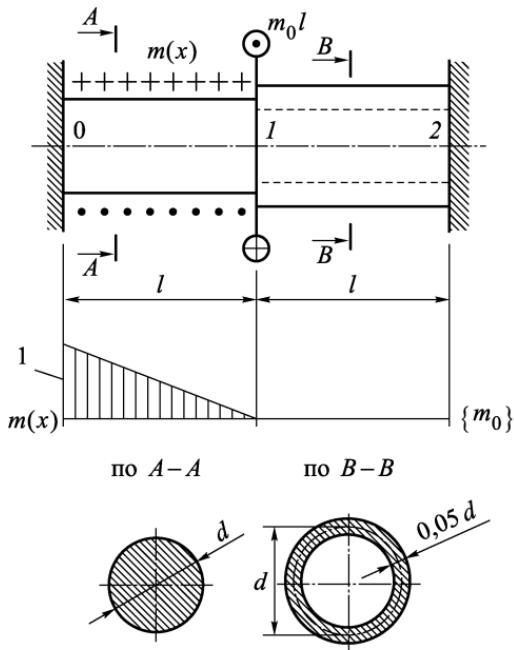


Рис. 6.45

жесткости участков бруса. На участке  $0-1$  его сечение — сплошное круговое, тогда, как было получено в разд. 6.3 (см. также табл. 6.2):

$$W_k^{0-1} = 0,2d^3, \quad J_k^{0-1} = 0,1d^4.$$

На участке  $1-2$  сечение бруса — тонкостенное и замкнутое, поэтому по формулам Бредта (6.6.7) и (6.6.12) получим

$$W_k = 2\omega\delta = 2\frac{\pi d^2}{4}0,05d \approx 0,08d^3,$$

$$J_k = \frac{4\omega^2}{\int \frac{ds}{\delta}} = \frac{4\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)^2}{\frac{\pi d}{0,05d}} \approx 0,04d^4.$$

Оба конца бруса заделаны. Отбросим эти заделки и заменим их действие на брус реакциями — моментами  $M_0$  и  $M_2$ , как это показано на рис. 6.46. Составим уравнение равновесия для такого

брока:

$$\sum M_x = 0 \rightarrow -M_0 - \int_{0-1} m(x) dx + m_0 l + M_2 = 0. \quad (6.8.6)$$

В этом уравнении интеграл, составляющий второе слагаемое, является равнодействующим моментом распределенного момента  $m(x)$ . Вычислив его как площадь эпюры  $m(x)$ , данной на рис. 6.45, получим, что он равен  $\frac{1}{2}m_0 l$ . Тогда уравнение (6.8.6) сводится к виду

$$M_0 - M_2 = \frac{1}{2}m_0 l. \quad (6.8.7)$$

Больше нетривиальных уравнений равновесия для показанного на рис. 6.46 бруса составить нельзя. А в этом уравнении —

два неизвестных  $M_0$  и  $M_2$ . Поэтому брус является статически неопределенным. Для решения нужно составить уравнение совместности деформаций, которое в данном случае должно отражать тот факт, что концы бруса заделаны. А это значит, что сечения  $0$  и  $2$  бруса неподвижны, т.е.

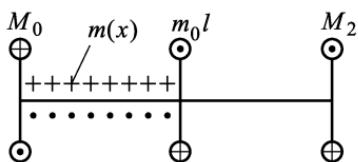


Рис. 6.46

угол поворота сечения  $0$  относительно сечения  $2$  равен  $0$ :

$$\varphi_{0-2} = 0. \quad (6.8.8)$$

Но  $\varphi_{0-2}$  можно получить как сумму

$$\varphi_{0-2} = \varphi_{0-1} + \varphi_{1-2}.$$

Согласно формуле (6.2.2)

$$\varphi_{0-1} = \int_{0-1} \theta dx = \int_{0-1} \frac{M_k^{0-1}}{GJ_k^{0-1}} dx, \quad \varphi_{1-2} = \int_{1-2} \frac{M_k^{1-2}}{GJ_k^{1-2}} dx. \quad (6.8.9)$$

Рассматривая равновесие отсеченных частей, показанных на рис. 6.47, получаем

$$M_k^{0-1} = M_2 - \frac{m_0 x^2}{2l} + m_0 l, \quad M_k^{1-2} = M_2.$$

Момент  $\frac{m_0 x^2}{2l}$ , являющийся равнодействующим приходящейся на отсеченную часть доли распределенного момента  $m(x)$ , подсчитан как площадь эпюры  $m(x)$ , данной под отсеченной частью на рис. 6.47.

После подстановки полученных выражений для  $M_k$  в формулы (6.8.9) получаем

$$\varphi_{0-1} = \int_0^l \frac{M_2 - \frac{m_0 x^2}{2l} + m_0 l}{G \cdot 0,1 d^4} dx = \frac{1}{G \cdot 0,1 d^4} \left( M_2 l - \frac{m_0 l^2}{6} + m_0 l^2 \right),$$

$$\varphi_{1-2} = \int_{1-2} \frac{M_2}{G \cdot 0,04 d^4} dx = \frac{M_2 l}{G \cdot 0,04 d^4}.$$

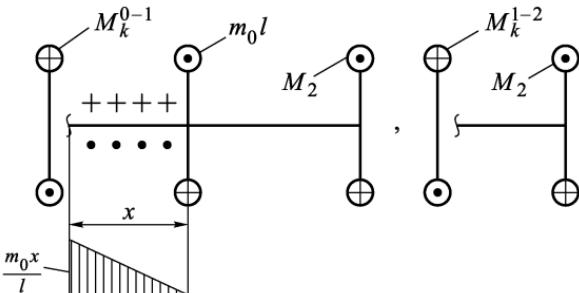


Рис. 6.47

Тогда уравнение совместности (6.8.6) приводится к виду

$$\frac{l}{Gd^4} \left( 10M_2 + \frac{50}{6} m_0 l + 25M_2 \right) = 0.$$

Отсюда получаем

$$M_2 = -\frac{50}{6 \cdot 35} m_0 l = -0,238 m_0 l.$$

Из уравнения (6.8.7) следует, что

$$M_0 = \frac{1}{2} m_0 l + M_2 = 0,262 m_0 l.$$

Знак «-» у  $M_2$  означает, что его направление противоположно принятому на рис. 6.46. Полученные реактивные моменты  $M_0$  и  $M_2$  приложим к брусу (рис. 6.48 а). Теперь можно построить эпюры  $M_k$ ,  $\tau_{max}$ ,  $\theta$  и  $\varphi$  точно так же, как это сделано в примере 6.1. Предоставим это читателю в качестве упражнения, а для контроля приведем на рис. 6.48 результаты.

Отметим, что для проверки решения этой задачи можно использовать уравнение совместности (6.8.6). Из него ясно, что

$$\varphi_{0-2} = \int_{0-2} \theta dx = 0. \quad (6.8.10)$$

Здесь интеграл является площадью эпюры  $\theta$ . Подсчитаем ее сначала на участке  $0-1$ :

$$M_k = M_2 - \frac{mx^2}{2l} + m_0 l = 0,762m_0 l - \frac{mx^2}{2l}.$$

Но так как  $\theta = \frac{M_k}{GJ_k}$ , то

$$\int_{0-1} \theta dx = \int_0^l \frac{0,762m_0 l - 0,5m_0 x^2/l}{G \cdot 0,1d^4} = 5,95 \frac{m_0 l^2}{Gd^4}.$$

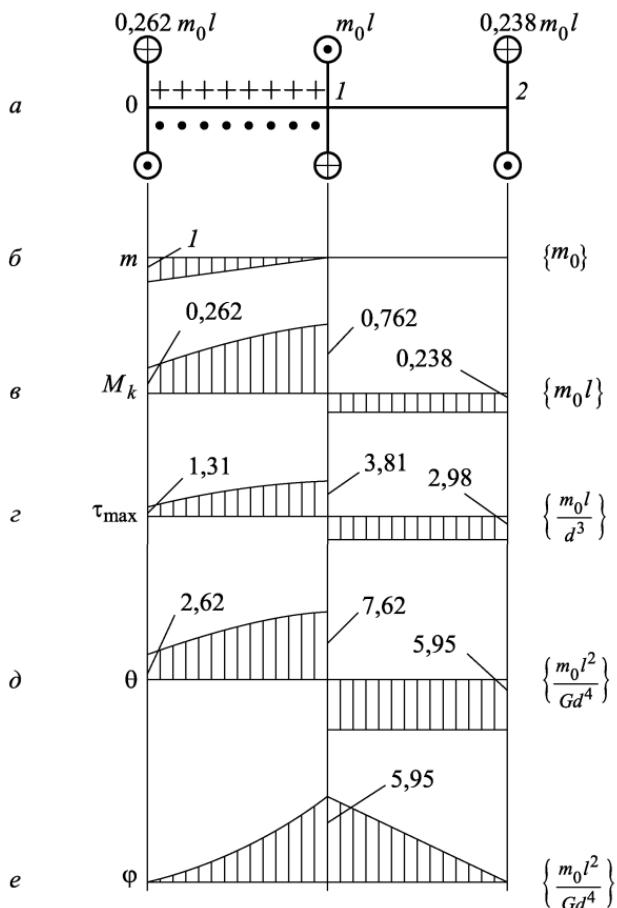


Рис. 6.48

А эта площадь, как видно из эпюры  $\theta$  (рис. 6.48 *д*), равна площади на участке  $1-2$ , и потому условие (6.8.10) выполняется.

Условие прочности для рассмотренного бруса  $|\tau_{\max}| \leq [\tau]$ .

Учитывая эпюру  $\tau_{\max}$ , данную на рис. 6.48 г, это условие запишем в виде

$$\max |\tau_{\max}| = 3,81 \frac{m_0 l}{d^3} \leq [\tau].$$

Отсюда сразу следует, что

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{3,81 m_0 l}{[\tau]}}.$$

Часто для длинных валов, работающих на кручение, определяющей является не прочность, а жесткость. В этом случае при напряжениях, меньших допускаемых, вал закручивается на недопустимый угол. Тогда размеры поперечного сечения такого вала определяют из условия жесткости  $\max |\varphi| \leq [\varphi]$ .

В нашем примере, как это видно из эпюры  $\varphi$  (рис. 6.48 е), это условие имеет вид

$$\max |\varphi| = 5,95 \frac{m_0 l^2}{G d^4} \leq [\varphi].$$

Из него следует ограничение на размеры поперечного сечения по жесткости:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{5,95 m_0 l^2}{G [\varphi]}}.$$

**Пример 6.3.** Рассмотрим два тонкостенных сечения бруса: замкнутую трубу (рис. 6.49 а) и трубу, разрезанную вдоль образующей (рис. 6.49 б). Площади этих сечений одинаковые. Сравним два бруса с такими сечениями по прочности и жесткости.

Для замкнутой трубы по формулам Бредта (6.6.7), (6.6.12) получаем

$$W_k^a = 2\omega\delta = 0,5\pi d^2\delta, \quad J_k^a = \oint \frac{ds}{\delta} = \frac{\pi}{4} d^3\delta.$$

Для разрезанной трубы из формул (6.5.10), (6.5.8) следует

$$W_k^b = \frac{1}{3}s\delta^2 = \frac{\pi}{3}d\delta^2, \quad J_k^b = \frac{1}{3}s\delta^3 = \frac{\pi}{3}d\delta^3.$$

Отношения моментов сопротивления и жесткостей рассмотренных сечений будут:

$$\frac{W_k^a}{W_k^b} = \frac{3}{2} \frac{d}{\delta}, \quad \frac{J_k^a}{J_k^b} = \frac{3}{4} \left(\frac{d}{\delta}\right)^2.$$

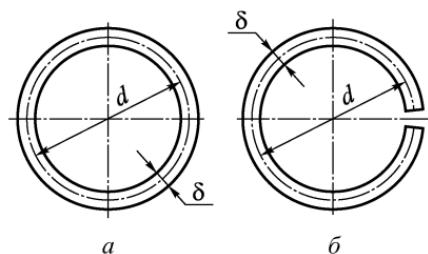


Рис. 6.49

Отсюда видно, что, если, например,  $\delta = 0,1d$ , то момент сопротивления разомкнутой трубы в 15 раз меньше замкнутой, а жесткость соответственно в 75 раз меньше. Этот пример показывает, что в конструкции, работающей на кручение, тонкостенный брус следует по возможности выполнять в виде бруса замкнутого сечения. Если же без люков, отверстий и т.п. не удается обойтись, то необходимо их окантовывать. Причем зачастую масса окантовки оказывается больше, чем масса вырезанного из стенки бруса материала. Подробно эти вопросы рассматриваются в курсах строительной механики, например в книге [10].

## B.6. Контрольные вопросы

**B.6.1.** Какое правило знаков принимается для крутящего момента?

**B.6.2.** Как связаны между собой крутящий момент и интенсивность скручивающего погонного момента?

**B.6.3.** В каких сечениях бруса крутящий момент меняется скачкообразно?

**B.6.4.** Как связаны между собой относительный и абсолютный углы закручивания?

**B.6.5.** Какой характер деформации круглого бруса предполагает гипотеза плоских сечений при кручении?

**B.6.6.** Как направлены и как распределяются касательные напряжения в поперечном сечении при кручении круглого бруса? Как они связаны с крутящим моментом?

**B.6.7.** Что такое полярный момент инерции сечения бруса?

**B.6.8.** Что такое момент сопротивления кручению?

**B.6.9.** Что является причиной появления продольных трещин при кручении бревен? Чем объяснить разрушение по винтовым поверхностям образца из хрупкого материала, подвергнутого деформации кручения?

**B.6.10.** Почему нельзя решить задачу о кручении бруса некругового поперечного сечения на основании гипотезы плоских сечений?

**B.6.11.** Как направлены касательные напряжения в точках близи контура поперечного сечения?

**B.6.12.** Каков общий вид формул для  $\tau_{\max}$  и  $\theta$ ? Какая величина в них определяется только формой и размерами поперечного сечения бруса?

**B.6.13.** В чем суть мембранный аналогии? Как с ее помощью можно найти геометрический фактор жесткости  $J_k$  сложного поперечного сечения?

**B.6.14.** В чем принципиальное различие распределений касательных напряжений при кручении брусьев открытого и замкнутого тонкостенных сечений?

**B.6.15.** Где возникнут максимальные касательные напряжения в составном открытом сечении?

**B.6.16.** Что такое стесненное кручение? Когда оно возникает?

**B.6.17.** Как ведет себя поток касательных сил в замкнутом тонкостенном сечении? Какая аналогия отражает его поведение?

**B.6.18.** Где возникают максимальные касательные напряжения в замкнутом тонкостенном сечении?

### 3.6. Задачи

**3.6.1.** Брус замкнутого тонкостенного прямоугольного сечения скручивается моментами  $M$ , приложенными к его концам (рис. 6.50). Считая допускаемое напряжение сдвига  $[\tau]$ , модуль сдвига  $G$  и размеры бруса заданными, определить допускаемые величины скручивающего момента  $[M]$  и максимального угла закручивания  $[\varphi_{\max}]$ . Во сколько раз уменьшится каждая из этих величин, если брус разрезать по всей длине вдоль образующей?

**3.6.2.** Для бруса, показанного на рис. 6.51, построить эпюры  $M_k$ ,  $\tau_{\max}$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  и вычислить запас прочности, если  $m = 10^4 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}}$ ,  $l = 0,1$  м,  $D = 50$  мм,  $\tau_t = 160$  МПа. Принять  $c = \frac{d}{D} = 0,7$ ,  $b = 0,8D$ .

**3.6.3.** Двухвальная конструкция (рис. 6.52) нагружается скручивающим моментом  $M$ , приложенным к диску, жестко соединенному с обоими валами. Показать, что отношение крутящих моментов, действующих в поперечных сечениях этих валов,

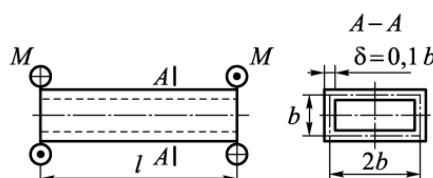


Рис. 6.50

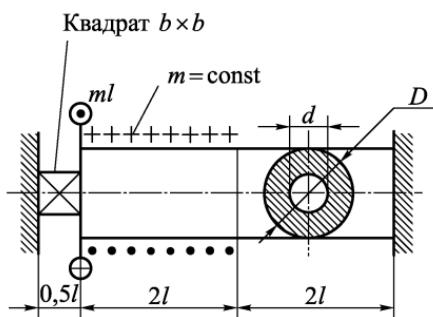


Рис. 6.51

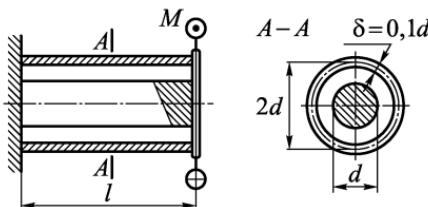


Рис. 6.52

равно отношению их жесткостей, и из условия жесткости определить длину  $l$ , если материал валов одинаковый и  $G, M, d$  и  $[\varphi]$  считать заданными.

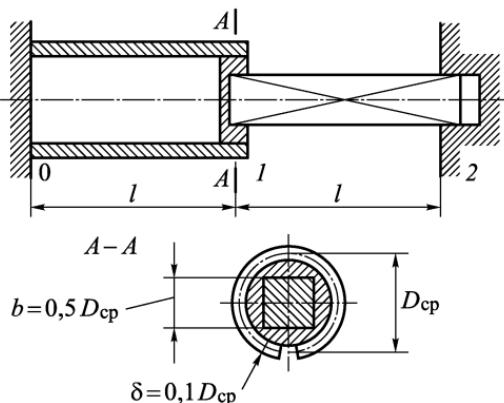


Рис. 6.53

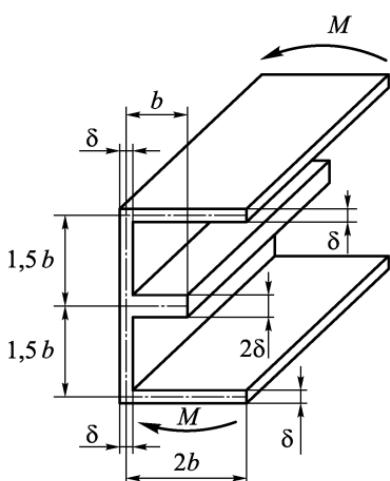


Рис. 6.54

**З.6.4.** Для того чтобы соединить разрезанную вдоль образующей тонкостенную трубу и квадратный стержень (рис. 6.53), потребовалось предварительно закрутить последний на угол  $\varphi_0$  в месте соединения, так как квадратное гнездо в трубе не совпадало с квадратом правого стержня. Определить напряжения в трубе и стержне после сборки, если материал стержней одинаковый и  $\varphi_0, G, D_{cp}, l$  заданы.

**З.6.5.** Определить максимальные касательные напряжения в стержне, скручиваемом моментами  $M$  по его концам. Считать  $M, b$  и  $\delta$  заданными (рис. 6.54).

## ГЛАВА 7

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕЧЕНИЙ

Для расчета напряжений и деформаций при растяжении–сжатии нам понадобилась единственная геометрическая характеристика сечения — его площадь. При кручении мы уже сталкивались с более сложными характеристиками, такими как полярный момент инерции  $J_p$  и геометрический фактор жесткости  $J_k$ . Для изучения наиболее сложного из элементарных напряженных состояний бруса — изгиба — необходимо знать уже целый комплекс взаимосвязанных геометрических характеристик сечений. Этим вопросам и посвящена настоящая глава.

## 7.1. Статические моменты и центр тяжести сечения

**7.1.1.** Поперечное сечение бруса будем рассматривать как фигуру  $F$  на плоскости, в которой введены декартовы координаты  $z$ ,  $y$  (рис. 7.1). Эту фигуру разобьем на элементы  $dF$ , каждый из которых имеет координаты  $z$  и  $y$ . Тогда хорошо известную нам простейшую геометрическую характеристику сечения площадь  $F$  можно найти как

$$F = \int_F dF. \quad (7.1.1)$$

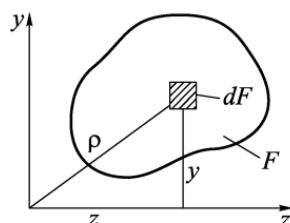


Рис. 7.1

Надеемся, что использование буквы  $F$  для обозначений самой фигуры как области на плоскости  $zy$  и для обозначения площади этой фигуры не вызовет недоразумений.

## Интегралы

$$S_z = \int_F y \, dF, \quad S_y = \int_F z \, dF \quad (7.1.2)$$

называются *статическими моментами сечения*.

**7.1.2.** Рассмотрим простейшие свойства статических моментов, следующие уже из их определения.

1. Как всякие интегралы, статические моменты аддитивны по области интегрирования. Иными словами, если область  $F$

разбить на две (или более) части  $F_1$  и  $F_2$  (рис. 7.2), то ее статический момент можно подсчитать как сумму статических моментов этих частей:

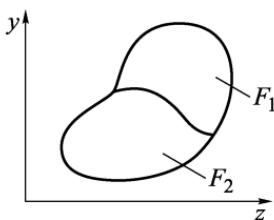


Рис. 7.2

$$\int_{F=F_1+F_2} y \, dF = \int_{F_1} y \, dF + \int_{F_2} y \, dF,$$

или

$$S_z(F = F_1 + F_2) = S_z(F_1) + S_z(F_2). \quad (7.1.3)$$

2. Если область  $F$  расположена в первой координатной четверти (положение I на рис. 7.3), то, как это видно из определения (7.1.2), ее статический момент  $S_z > 0$ .

Если эта же фигура расположена в четвертой координатной четверти (положение II на рис. 7.3), то  $S_z < 0$ . При перемещении  $F$  из положения I в положение II статический момент будет изменяться непрерывно и из положительно го станет отрицательным. Поэтому ясно, что найдется такое положение  $F$ , при котором ее статический момент равен нулю. На рис. 7.3 это положение показано штриховой линией.

Ось, относительно которой статический момент сечения равен нулю, называется *центральной осью сечения*.

Точка пересечения центральных осей называется *центром тяжести сечения*.

**7.1.3.** Для определения положения центральной оси рассмотрим, как связаны статические моменты сечения относительно двух систем координат, оси которых попарно параллельны. Из рис. 7.4 видно, что координаты элемента  $dF$  в этих осях связаны следующими очевидными соотношениями:

$$y_2 = y_1 + a, \quad z_2 = z_1 + b. \quad (7.1.4)$$

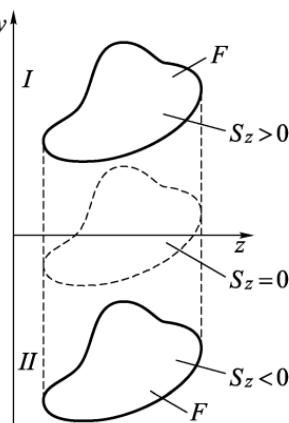


Рис. 7.3

Учитывая их, получаем для  $S_{z_2}$ :

$$S_{z_2} = \int_F y_2 dF = \int_F (y_1 + a) dF = \int_F y_1 dF + a \int_F dF.$$

Таким образом,

$$S_{z_2} = S_{z_1} + aF. \quad (7.1.5)$$

Аналогично

$$S_{y_2} = S_{y_1} + bF.$$

Рассмотрим специальный случай, когда оси одной из систем координат являются центральными (рис. 7.5).

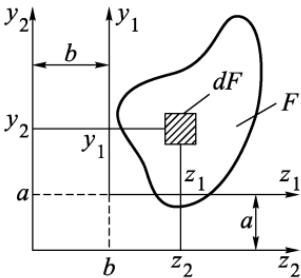


Рис. 7.4

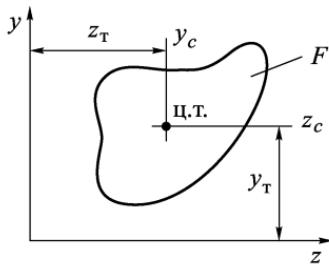


Рис. 7.5

На рисунке через  $z_c$ ,  $y_c$  обозначены центральные оси, а через  $y_t$  и  $z_t$  — их расстояния до осей  $z$  и  $y$  соответственно. С учетом таких обозначений формулы (7.1.5) запишутся в виде

$$S_z = S_{zc} + y_t F, \quad S_y = S_{yc} + z_t F. \quad (7.1.6)$$

Так как оси  $z_c$  и  $y_c$  — центральные, то, по определению,  $S_{zc} = 0$  и  $S_{yc} = 0$ . Поэтому

$$S_z = y_t F, \quad S_y = z_t F. \quad (7.1.7)$$

Эти формулы позволяют найти статический момент инерции сечения, если известны его площадь и положение центра тяжести.

Но из (7.1.7) сразу следуют и формулы, позволяющие определить положение центра тяжести по известным статическим моментам и площади сечения:

$$y_t = \frac{S_z}{F}, \quad z_t = \frac{S_y}{F}. \quad (7.1.8)$$

**7.1.4.** Покажем, что введенное здесь понятие центра тяжести соответствует понятию физического центра масс. Из курса теоретической механики известно, что положение центра масс тела с объемом  $V$  и плотностью  $\rho$  в декартовой системе коорди-

нат  $x, y, z$  определится формулами

$$x_m = \frac{\int x \rho dV}{\int \rho dV}, \quad y_m = \frac{\int y \rho dV}{\int \rho dV}, \quad z_m = \frac{\int z \rho dV}{\int \rho dV}, \quad (7.1.9)$$

где знаменатель — масса тела.

Используем эти формулы для определения положения центра масс пластины толщиной  $h$  в ее плоскости  $zy$ . Для этого объем пластины разобьем на элементы  $dV = h dF$ , каждый из которых является столбиком высотой  $h$  и площадью основания  $dF$ , лежащего в плоскости пластины. Если материал пластины однороден, т.е. его плотность  $\rho$  постоянна по объему пластины, то вторая из формул (7.1.9) преобразуется к виду

$$y_m = \frac{\int y \rho h dF}{\int \rho h dF} = \frac{\rho h \int y dF}{\rho h \int dF} = \frac{S_z}{F},$$

который в точности совпадает с соответствующим выражением (7.1.8). Такое совпадение физического определения центра масс и геометрического определения центра тяжести позволяет

использовать уже известные сведения о положении центра масс простых и сложных фигур.

В частности, очевидно, что всякая ось симметрии сечения является центральной осью.

Рассмотрим теперь несколько примеров определения положения центра тяжести.

**Пример 7.1.** Найдем положение центра тяжести полукруга. Выберем оси  $z$  и  $y$ , как показано на рис. 7.6. Ось  $y$  яв-

ляется центральной как ось симметрии. Координату  $y_t$  центра тяжести найдем, как  $y_t = S_z/F$ . Площадь полукруга  $F = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{8}\pi d^2$ . Подсчитаем статический момент  $S_z$ . Для этого удобно ввести полярные координаты  $\rho, \alpha$ , как показано на рис. 7.6. Тогда

$$S_z = \int y dF = \int_F^r \int_0^\pi \rho \sin \alpha \rho d\rho d\alpha = \int_0^r \rho^2 d\rho \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{2r^3}{3}.$$

Поэтому

$$y_t = \frac{S_z}{F} = \frac{2r^3}{3} / \frac{\pi r^2}{2} = \frac{4}{3\pi} r = 0,425r.$$

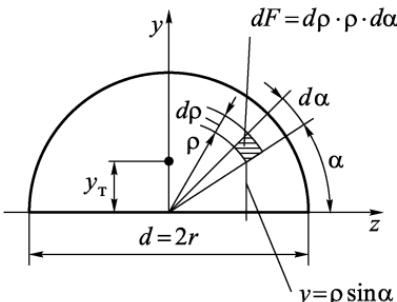


Рис. 7.6

Пример 7.2. Найдем центр тяжести фигуры, составленной из прямоугольника и треугольника. Выберем оси координат, как показано на рис. 7.7. Величины, относящиеся к треугольнику, будем помечать верхним индексом «(1)», а к прямоугольнику — индексом «(2)». Так как ось  $y$  — ось симметрии, то она является центральной осью. Для определения координаты  $y_T$  центра тяжести фигуры вычислим ее площадь  $F$  и статический момент  $S_z$  как для составной фигуры:

$$\begin{aligned} F &= F^{(1)} + F^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot 3b + 2bb = 5b^2; \\ S_z &= S_z^{(1)} + S_z^{(2)} = y_T^{(1)} F^{(1)} + y_T^{(2)} F^{(2)} = \\ &= b \cdot 3b^2 + \left(-\frac{b}{2}\right) \cdot 2b^2 = 2b^3. \end{aligned}$$

Тогда

$$y_T = \frac{S_z}{F} = \frac{2}{5}b.$$

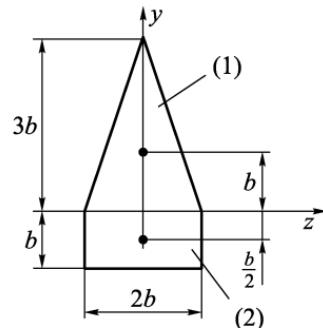


Рис. 7.7

Пример 7.3. Определим площадь и положение центра тяжести по оси  $x$  для фигуры, заключенной между осью  $x$  и кривой  $y(x) = kx^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) на участке  $0 < x < a$  (рис. 7.8). Пусть также известно, что  $y(a) = h$ . Тогда  $ka^n = h$ . Следовательно,  $k = \frac{h}{a^n}$  и  $y = \frac{h}{a^n}x^n$ . Разобьем эту фигуру на столбики  $dF$  шириной  $dx$ . Тогда

$$dF = y dx = kx^n dx = \frac{h}{a^n}x^n dx. \quad (7.1.10)$$

Площадь фигуры  $F$  найдем как

$$F = \int_F dF = \int_0^a \frac{h}{a^n}x^n dx = \frac{ha}{n+1}. \quad (7.1.11)$$

Для определения координаты  $x_T$  центра тяжести найдем  $S_y$ :

$$S_y = \int_F x dF = \int_0^a x \frac{h}{a^n}x^n dx = \frac{ha^2}{n+2}.$$

Тогда

$$x_T = \frac{S_y}{F} = \frac{n+1}{n+2}a. \quad (7.1.12)$$

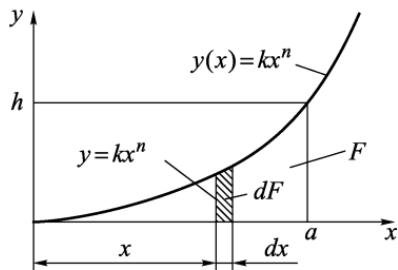


Рис. 7.8

В дальнейшем при решении различных задач мы будем пользоваться формулами (7.1.11), (7.1.12) для вычисления площадей и координат центров тяжести криволинейных треугольников типа данного на рис. 7.8. Запоминанию этих формул помогает

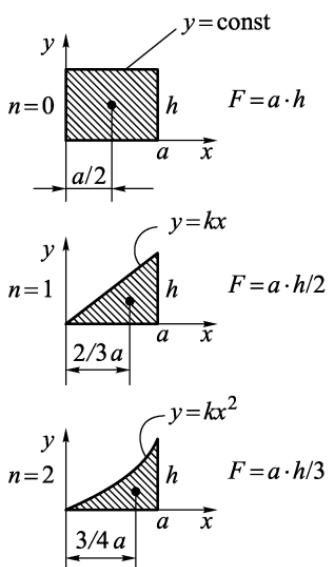


Рис. 7.9

рис. 7.9, на котором первые два рисунка ( $n = 0, n = 1$ ) соответствуют известным фигурам — прямоугольнику и треугольнику. А последующий рисунок, например,  $n = 2$ , можно получить с помощью очевидной индукции.

## 7.2. Моменты инерции

**7.2.1.** Для показанной на рис. 7.1 фигуры интегралы

$$J_z = \int_F y^2 dF, \quad J_y = \int_F z^2 dF \quad (7.2.1)$$

называются *осевыми моментами инерции*.

Интеграл

$$J_{zy} = \int_F zy dF \quad (7.2.2)$$

называется *центробежным моментом инерции*, интеграл

$$J_p = \int_F \rho^2 dF \quad (7.2.3)$$

— *полярным моментом инерции*.

**7.2.2.** Рассмотрим сначала простейшие свойства моментов инерции, следующие непосредственно из их определений (7.2.1)–(7.2.3).

1. Как интегралы, моменты инерции обладают свойством аддитивности по области. Поэтому для фигуры  $F$ , составленной из двух фигур  $F_1$  и  $F_2$  (см. рис. 7.2), момент инерции можно подсчитать как сумму моментов инерции фигур  $F_1$  и  $F_2$ , т.е.

$$J(F = F_1 + F_2) = J(F_1) + J(F_2). \quad (7.2.4)$$

2. Так как  $\rho^2 = z^2 + y^2$  (см. рис. 7.1), то сразу ясно, что

$$J_p = \int_F \rho^2 dF = \int_F (z^2 + y^2) dF = J_z + J_y, \quad (7.2.5)$$

т.е. полярный момент инерции равен сумме осевых.

3. Полярный и осевые моменты инерции всегда положительны как интегралы от положительных функций (7.2.1), (7.2.3).

4. Как это видно из определения (7.2.2), центробежный момент инерции может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от положения фигуры относительно осей координат. Это проиллюстрировано на рис. 7.10. Рассуждая так же, как и в случае статических моментов, легко приходим к выводу, что существует такое положение осей координат относительно фигуры, при котором  $J_{zy} = 0$ . Такие координатные оси называются *главными осями инерции*.

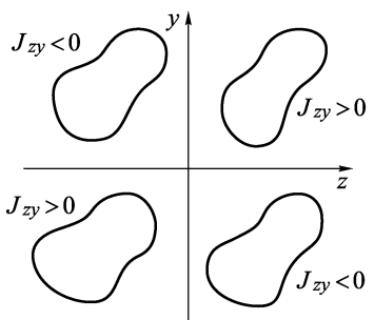


Рис. 7.10

Нетрудно показать, что если хотя бы одна из осей фигуры является осью симметрии, то  $J_{zy} = 0$  и такие оси — главные. Предоставляем читателю доказать это самостоятельно.

Более сложные свойства моментов инерции выявляются при исследовании их изменений вследствие изменения положения координатных осей относительно фигуры.

### 7.3. Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей координат

**7.3.1.** Рассмотрим фигуру  $F$  и две системы попарно параллельных координатных осей  $z_1, y_1$  и  $z_2, y_2$  (см. рис. 7.4). Выразим моменты инерции фигуры  $F$  относительно осей  $z_2, y_2$  через их значения для осей  $z_1, y_1$ . Для этого учтем, что

$$z_2 = z_1 + b, \quad y_2 = y_1 + a. \quad (7.3.1)$$

Тогда

$$\begin{aligned} J_{z_2} &= \int_F y_2^2 dF = \int_F (y_1 + a)^2 dF = \\ &= \int_F y_1^2 dF + 2a \int_F y_1 dF + a^2 \int_F dF = J_{z_1} + 2aS_{z_1} + a^2 F. \end{aligned}$$

Проделав аналогичные выкладки для  $J_{y_2}$  и  $J_{z_2y_2}$ , получим следующие формулы преобразований моментов инерции при па-

ралльном переносе осей координат:

$$J_{z_2} = J_{z_1} + 2aS_{z_1} + a^2F, \quad (7.3.2)$$

$$J_{y_2} = J_{y_1} + 2bS_{y_1} + b^2F,$$

$$J_{z_2y_2} = J_{z_1y_1} + bS_{z_1} + aS_{y_1} + abF.$$

**7.3.2.** Особый интерес представляет частный случай этих формул, когда одна из пар осей образована центральными осями (см. рис. 7.5). Тогда

$$J_z = J_{z_c} + y_{\text{T}}^2F,$$

$$J_y = J_{y_c} + z_{\text{T}}^2F, \quad (7.3.3)$$

$$J_{zy} = J_{z_cy_c} + y_{\text{T}}z_{\text{T}}F.$$

Эти формулы часто называют *формулами Штернера*. Из них видно, что из всех параллельных координатных осей минимальный осевой момент инерции фигуры будет относительно той оси, которая проходит через центр тяжести.

**7.3.3.** Рассмотрим примеры вычисления моментов инерции.

П р и м е р 7.4. Найдем моменты инерции прямоугольника со сторонами  $B$  и  $H$  относительно его центральных осей  $z_c$ ,  $y_c$  и осей  $z$ ,  $y$ , совпадающих с его сторонами (рис. 7.11):

$$J_{z_c} = \int_F y^2 dF = \int_{-B/2}^{+B/2} \int_{-H/2}^{+H/2} y^2 dz dy = z \left| \frac{y^3}{3} \right|_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} = \frac{BH^3}{12}. \quad (7.3.4)$$

Точно так же

$$J_{y_c} = \frac{HB^3}{12}.$$

Так как оси  $z_c$  и  $y_c$  для прямоугольника являются осями симметрии, то центробежный момент инерции для них равен нулю, т.е.  $J_{z_cy_c} = 0$ .

Перейдем теперь к осям  $z$ ,  $y$ . Можно было бы снова вычислить  $J_z$ ,  $J_y$ ,  $J_{zy}$  как интегралы по области  $0 < z < B$ ,  $0 < y < H$ , но более просто их можно получить по формулам Штернера (7.3.3):

$$J_z = J_{z_c} + \left(\frac{H}{2}\right)^2 F = \frac{BH^3}{12} + \left(\frac{H}{2}\right)^2 BH = \frac{BH^3}{3}; \quad J_y = \frac{HB^3}{3};$$

$$J_{zy} = J_{z_cy_c} + \frac{H}{2} \frac{B}{2} F = 0 + \frac{H}{2} \frac{B}{2} BH = \frac{H^2 B^2}{4}.$$

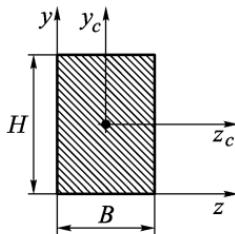


Рис. 7.11

Пример 7.5. Рассмотрим параллелограмм с основанием  $B$  и высотой  $H$  (рис. 7.12). Сравнивая его с имеющим такие же основание и высоту прямоугольником, видим, что каждой полоске  $dF$  параллелограмма соответствует полоска  $dF$  прямоугольника равной площади. Поэтому их моменты инерции относительно осей  $z$  и  $z_c$  равны. Следовательно, для параллелограмма

$$J_{z_c} = \frac{BH^3}{12}, \quad J_z = \frac{BH^3}{3}.$$

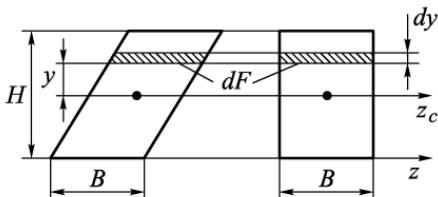


Рис. 7.12

Пример 7.6. Найдем моменты инерции треугольника с основанием  $B$  и высотой  $H$  (рис. 7.13). Дополнив этот треугольник до параллелограмма, как это показано пунктиром на рис. 7.13, замечаем, что оба составляющих параллелограмм треугольника одинаково расположены относительно средней оси  $z_1$ . Поэтому их моменты инерции равны и каждый из них составляет половину момента инерции параллелограмма относительно его центральной оси. Таким образом, для треугольника

$$J_{z_1} = \frac{1}{2} \frac{BH^3}{12} = \frac{BH^3}{24}.$$

Рис. 7.13

По формулам Штернера (7.3.3) перейдем от оси  $z_1$  к центральной оси  $z_c$ :

$$J_{z_c} = J_{z_1} - \left(\frac{H}{6}\right)^2 F = \frac{BH^3}{24} - \frac{H^2}{36} \frac{BH}{2} = \frac{BH^3}{36}.$$

А теперь с помощью тех же формул (7.3.3) получим  $J_z$ :

$$J_z = J_{z_c} + \left(\frac{H}{3}\right)^2 F = \frac{BH^3}{36} + \frac{H^2}{9} \frac{BH}{2} = \frac{BH^3}{12}.$$

Центробежный момент инерции  $J_{zy}$  можно вычислить как двойной интеграл по треугольной области  $F$ . Но можно сделать это и следующим образом. Разобьем треугольник на горизонтальные полоски толщиной  $dy$ , одна из которых показана на рис. 7.14.

Площадь этой полоски  $dF = \frac{H-y}{H} B dy$ . Ее центр тяжести лежит на медиане  $ab$ , а его координата (абсцисса) равна, как это видно из рис. 7.14,

$$z_0 = C - ef = C - \frac{H-y}{H} \left(C - \frac{B}{2}\right) = \frac{HB + y(2C - B)}{2H}.$$

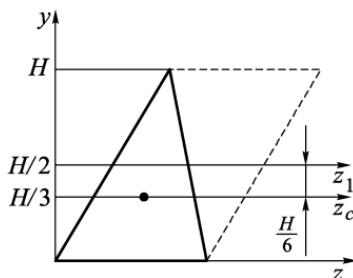


Рис. 7.13

Так как форма полоски близка к прямоугольной, то ее центробежный момент инерции относительно ее собственных центральных осей, т.е. первое слагаемое в третьей из формул (7.3.3), можно не учитывать по сравнению со вторым слагаемым. Поэтому центробежный момент полоски

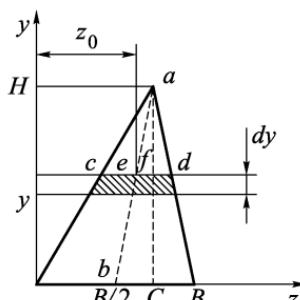


Рис. 7.14

$$\begin{aligned} dJ_{zy} &= dF \cdot z_0 y = \\ &= \frac{B(H-y)}{2H^2} [HB + y(2C-B)]y dy. \end{aligned}$$

Момент  $J_{zy}$  для всего треугольника получаем, суммируя (интегрируя) моменты  $dJ_{zy}$  полосок, т.е.

$$J_{zy} = \int_0^H dJ_{zy} = \int_0^H \frac{B(H-y)}{2H^2} [HB + y(2C-B)]y dy = \frac{BH^2}{24}(B+2C).$$

**Пример 7.7.** Найдем моменты инерции круга относительно осей, проходящих через его центр (рис. 7.15). Полярный момент мы уже вычислили, когда рассматривали кручение бруса сплошного сечения (см. п. 6.3.3):  $J_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$ . Но  $J_p = J_z + J_y$ , а для круга  $J_z = J_y$ . Поэтому

$$J_z = J_y = \frac{1}{2}J_p = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0,05d^4.$$

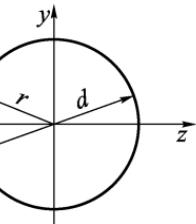


Рис. 7.15

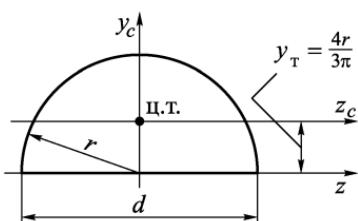
**Пример 7.8.** Рассмотрим полукруг и найдем его моменты инерции относительно осей  $z_c$ ,  $y_c$ , проходящих через его центр тяжести (рис. 7.16). Моменты  $J_{yc}$  и  $J_z$  равны половине моментов инерции целого круга относительно тех же осей:

$$J_{yc} = J_z = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi d^4}{128} \approx 0,025d^4.$$

От оси  $z$  к оси  $z_c$  перейдем по формуле Штернера, используя известное из примера 7.1 расстояние между этими осями  $y_t = \frac{4r}{3\pi} = \frac{2d}{3\pi}$ :

$$J_{zc} = J_z - y_t^2 F = \frac{\pi r^4}{8} - \left(\frac{4}{3\pi}r\right)^2 \frac{\pi r^2}{2} = 0,11r^4 = 0,00686d^4.$$

Рис. 7.16



## 7.4. Изменение моментов инерции при повороте осей координат. Положение главных осей инерции

**7.4.1.** Рассмотрим, как связаны моменты инерции фигуры  $F$  относительно двух пар осей координат  $z, y$  и  $u, v$  с общим началом координат и повернутых друг относительно друга на угол  $\alpha$  (рис. 7.17). Как видно из этого рисунка:

$$\begin{aligned} u &= Od + de = z \cos \alpha + y \sin \alpha, \\ v &= ac - ce = y \cos \alpha - z \sin \alpha. \end{aligned} \quad (7.4.1)$$

Тогда

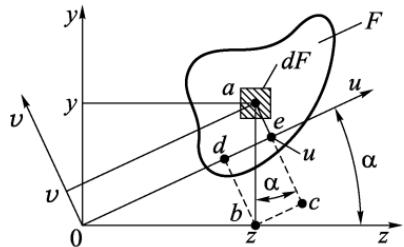


Рис. 7.17

$$\begin{aligned} J_u &= \int_F v^2 dF = \int_F (y \cos \alpha - z \sin \alpha)^2 dF = \\ &= \cos^2 \alpha \int_F y^2 dF - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_F zy dF + \sin^2 \alpha \int_F z^2 dF = \\ &= J_z \cos^2 \alpha - J_{zy} \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha + J_y \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Проведя точно такие выкладки для  $J_v$  и  $J_{uv}$ , получим формулы преобразования моментов инерции при повороте осей координат:

$$\begin{aligned} J_u &= J_z \cos^2 \alpha - J_{zy} \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha + J_y \sin^2 \alpha, \\ J_v &= J_z \sin^2 \alpha + J_{zy} \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha + J_y \cos^2 \alpha, \\ J_{uv} &= (J_z - J_y) \sin \alpha \cos \alpha + J_{zy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha). \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

Используя известные тригонометрические выражения

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha), & \sin^2 \alpha &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha), \\ 2 \sin \alpha \cos \alpha &= \sin 2\alpha, & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha &= \cos 2\alpha, \end{aligned}$$

представим (7.4.2) в виде

$$\begin{aligned} J_u &= \frac{J_z + J_y}{2} + \frac{J_z - J_y}{2} \cos 2\alpha - J_{zy} \sin 2\alpha, \\ J_v &= \frac{J_z + J_y}{2} - \frac{J_z - J_y}{2} \cos 2\alpha + J_{zy} \sin 2\alpha, \\ J_{uv} &= \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{zy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (7.4.3)$$

Интересно отметить, что при  $\alpha = 90^\circ$  последняя формула (7.4.3) переходит в равенство  $J_{uv} = -J_{zy}$ . Таким образом, при повороте осей координат на  $90^\circ$  центробежный момент инерции меняет знак. Он становится равен нулю, когда оси являются главными. Угол  $\alpha_{\text{гл}}$ , определяющий положение главных осей, найдем из условия  $J_{uv} = 0$ :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{\text{гл}} = \frac{2J_{zy}}{J_y - J_z}. \quad (7.4.4)$$

**7.4.2.** Осевые моменты инерции, как это видно из выражений (7.4.3), являются непрерывными периодическими функциями угла  $\alpha$  с периодом  $\pi$ . Поэтому как всякие периодические функции на своем периоде изменения они должны достичь максимального и минимального значений. Найдем их, используя стандартную процедуру поиска экстремумов функций. Для определения угла  $\alpha_{\text{ext}}$ , при котором достигается экстремум, приравняем к нулю производные от  $J_u$  и  $J_v$  по  $\alpha$ :

$$\frac{dJ_u}{d\alpha} = 0, \quad \frac{dJ_v}{d\alpha} = 0. \quad (7.4.5)$$

Дифференцируя выражения (7.4.3) по  $\alpha$ , приходим в обоих случаях к уравнению

$$-(J_z - J_y) \sin 2\alpha_{\text{ext}} - 2J_{zy} \cos 2\alpha_{\text{ext}} = 0.$$

Отсюда сразу следует, что

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{\text{ext}} = \frac{2J_{zy}}{J_y - J_z}. \quad (7.4.6)$$

Сравнивая этот результат с выражением (7.4.4), заключаем, что оси, относительно которых осевые моменты инерции достигают экстремальных значений, совпадают с главными осями инерции. Чтобы найти моменты инерции для главных осей, воспользуемся тригонометрическими соотношениями

$$\sin \theta = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}}, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}}.$$

Отсюда, учитывая выражение (7.4.4), получаем

$$\sin 2\alpha_{\text{гл}} = \frac{J_{zy}}{\sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{zy}^2}}; \quad \cos 2\alpha_{\text{гл}} = \frac{\frac{1}{2}(J_y - J_z)}{\sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{zy}^2}}.$$

После подстановки  $\sin 2\alpha_{\text{гл}}$  и  $\cos 2\alpha_{\text{гл}}$  в формулу (7.4.3) придем к выражениям для максимального  $J_{\max}$  и минимального  $J_{\min}$  осевых моментов инерции:

$$J_{\text{ext}} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{zy}^2}, \quad (7.4.7)$$

которые и являются осевыми моментами для главных осей.

Заметим, что  $J_z + J_y = J_p$ , а полярный момент определяется только положением начала координат (полюса) и поэтому не зависит от  $\alpha$ . Следовательно, когда осевой момент относительно одной из осей достигает максимума, то осевой момент относительно другой оси станет минимальным.

Обычно нет необходимости формально определять, какой именно из главных осей соответствует  $J_{\max}$  и какой  $J_{\min}$ . Это сразу видно по форме фигуры и по ее расположению относительно главных осей. Например, для показанной на рис. 7.18 фигуры видно, что  $J_z > J_y$ .

В задачах изгиба бруса важно знать осевые моменты инерции сечений для тех главных осей, которые проходят через центр тяжести сечения. Такие оси называются *главными центральными осями*.

Площади, положения центров тяжести и моменты инерции некоторых часто встречающихся фигур даны в табл. 7.1.

**Пример 7.9.** Подсчитаем моменты инерции сечения, показанного на рис. 7.19, относительно главных центральных осей. Введем вспомогательные оси  $y_1, z_1$ . Они выбраны так, чтобы было удобно подсчитать моменты инерции составляющих сечение двух прямоугольников 1 и 2 с помощью формул, полученных в примере 7.4:

$$J_{z_1} = J_{z_1}^{(1)} + J_{z_1}^{(2)} = \frac{b(8b)^3}{3} + \frac{4b(2b)^3}{3} = \frac{544}{3}b^4,$$

$$J_{y_1} = J_{y_1}^{(1)} + J_{y_1}^{(2)} = \frac{8bb^3}{3} + \frac{2b(4b)^3}{3} = \frac{136}{3}b^4,$$

$$J_{z_1 y_1} = J_{z_1 y_1}^{(1)} + J_{z_1 y_1}^{(2)} = \frac{b^2(8b)^2}{4} - \frac{(2b)^2(4b)^2}{4} = 0.$$

Заметим, что оси  $z_1, y_1$  являются главными, но не центральными.

Центр тяжести фигуры определяется быстро, если учесть, что площади составляющих ее прямоугольников одинаковы.

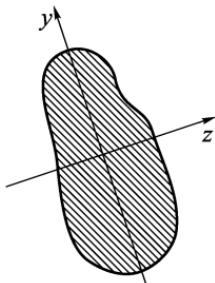


Рис. 7.18

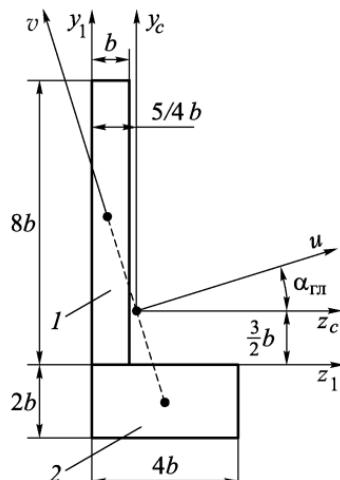
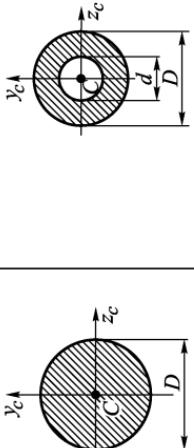
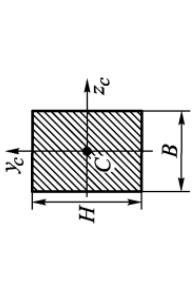
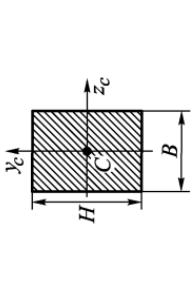
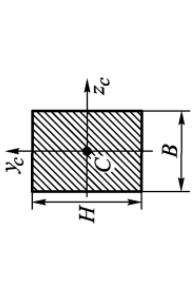
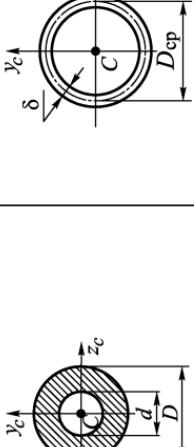
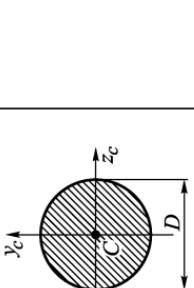
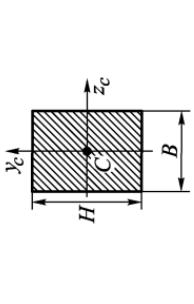
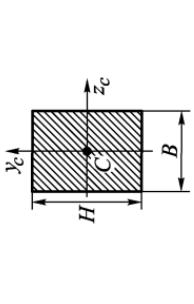
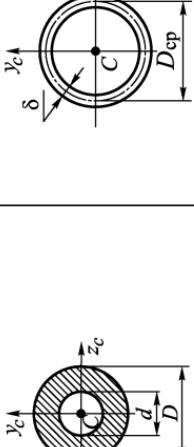
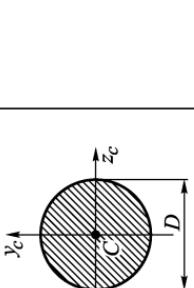
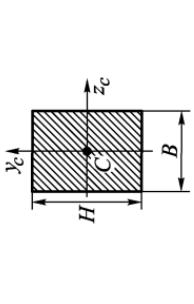
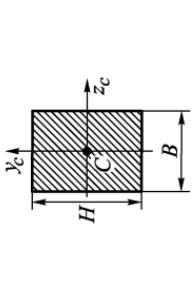


Рис. 7.19

Таблица 7.1

	$F = \frac{\pi D^2}{4}$ , $J_{z_c} = J_{y_c} = \frac{\pi D^4}{64}$ , $J_p = \frac{\pi D^4}{32}$		$F = \frac{\pi D^2}{4} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^2 \right]$ , $J_{z_c} = J_{y_c} = \frac{\pi D^4}{64} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right]$ , $J_p = \frac{\pi D^4}{32} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right]$		$F = \pi D_{cp} \delta$ , $J_{z_c} = J_{y_c} = \frac{\pi D_{cp}^3 \delta}{8}$ , $J_p = \frac{\pi D_{cp}^3 \delta}{4}$		$F = BH$ , $J_{z_c} = \frac{BH^3}{12}$ , $J_{y_c} = \frac{HB^3}{12}$
	$F = BH$ , $J_{z_c} = \frac{BH^3}{36}$		$F = \frac{4R}{3\pi}$		$F = \frac{\pi R^2}{2}$ , $J_{z_c} \approx 0,11R^4$ , $J_{y_c} = \frac{\pi R^4}{8}$		$F = \frac{\pi R^2}{4}$ , $J_{z_c} = J_{y_c} \approx 0,055R^4$ , $J_u = 0,072R^4$
	$F = BH$ , $J_{z_c} = \frac{BH^3}{36}$		$F = \frac{1}{2} BH$ , $J_{z_c} = \frac{BH^3}{12}$		$F = \frac{\pi R^2}{2}$ , $J_{z_c} = J_{y_c} = \frac{\pi R^4}{8}$		$F = \frac{\pi R^2}{4}$ , $J_{z_c} = J_{y_c} \approx 0,055R^4$ , $J_u = 0,072R^4$

К центральным осям  $z_c$ ,  $y_c$  перейдем с помощью формул Штернера (7.3.3):

$$J_{z_c} = J_{z_1} - y_{\text{T}}^2 F = \frac{544}{3} b^4 - \left(\frac{3}{2}b\right)^2 \cdot 16 b^2 = (181,3 - 36)b^4 = 145,3 b^4,$$

$$J_{y_c} = J_{y_1} - z_{\text{T}}^2 F = \frac{136}{3} b^4 - \left(\frac{5}{4}b\right)^2 \cdot 16 b^2 = (45,3 - 25)b^4 = 20,3 b^4,$$

$$J_{z_c y_c} = J_{z_1 y_1} - y_{\text{T}} z_{\text{T}} F = 0 - \frac{3}{2}b \cdot \frac{5}{4}b \cdot 16 b^2 = -30 b^4.$$

Вычислим угол наклона  $\alpha_{\text{гл}}$  главных центральных осей  $u$ ,  $v$  к осям  $z_c$ ,  $y_c$ :

$$\tg 2\alpha_{\text{гл}} = \frac{2J_{z_c y_c}}{J_{y_c} - J_{z_c}} = \frac{2 \cdot 30 b^4}{145,3 b^4 - 20,3 b^4} = 0,48.$$

Тогда  $2\alpha_{\text{гл}} = 25^\circ 40'$  и  $\alpha_{\text{гл}} = 12^\circ 50'$ . Моменты инерции  $J_u$  и  $J_v$  найдем по формулам (7.4.7):

$$\begin{aligned} J_u &= J_{\max} = \frac{1}{2}(145,3b^4 + 20,3b^4) + \\ &+ \frac{1}{2}\sqrt{(145,3b^4 - 20,3b^4)^2 + 4(30b^4)^2} = 82,8b^4 + 69,3b^4 = 152,1b^4, \\ J_v &= J_{\min} = 82,8b^4 - 69,3b^4 = 13,5b^4. \end{aligned}$$

## B.7. Контрольные вопросы

**B.7.1.** Для чего нужно знать геометрические характеристики сечений?

**B.7.2.** От чего зависят знак и величина статического момента?

**B.7.3.** Что называется центральной осью сечения? Что такое центр тяжести сечения? Покажите, что ось симметрии является центральной осью.

**B.7.4.** Как определить положение центра тяжести сечения по известным его статическим моментам и площади?

**B.7.5.** Как связаны между собой полярный и осевые моменты инерции фигуры?

**B.7.6.** От чего зависят знак и величина центробежного момента инерции? Какие оси называются главными осями инерции? Покажите, что ось симметрии является одной из главных осей инерции.

**B.7.7.** Как связаны моменты инерции фигуры относительно параллельных координатных осей? Как упрощается эта связь, если одна из осей центральная?

**B.7.8.** Полярный момент инерции круга  $J_p = \frac{\pi D^4}{32}$ . Чему равен момент инерции круга относительно его центральной оси?

**B.7.9.** Воспользовавшись выражением момента инерции круга относительно его центральных осей и свойством аддитивности, вычислить момент инерции для кольца с наружным и внутренним диаметром  $D$  и  $d$  соответственно.

**B.7.10.** Относительно каких осей осевые моменты инерции принимают экстремальные значения? Чему равны эти значения?

### 3.7. Задачи

**3.7.1.** Определить координаты центра тяжести трапеции (рис. 7.20). Проанализировать полученные выражения, образуя из трапеции прямоугольник ( $a = b$ ) и треугольник ( $a = 0$ , а затем и  $b = 0$ ).

**3.7.2.** Показать, что оси  $z$  и  $y$  являются главными осями инерции для трапеции, показанной на рис. 7.21 ( $\alpha$  — произвольный угол).

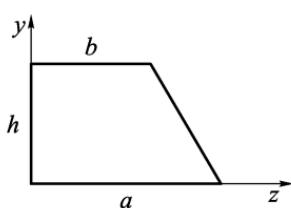


Рис. 7.20

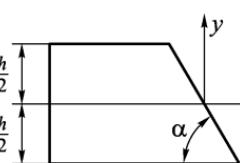


Рис. 7.21

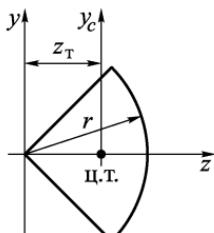


Рис. 7.22

**3.7.3.** Задаваясь в задаче 7.1 значениями  $a = 4b$  и  $h = b$ , найти положение главных центральных осей и вычислить моменты инерции относительно этих осей.

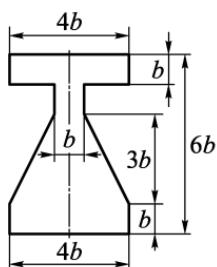


Рис. 7.23

Указание: при вычислении центробежного момента инерции относительно центральных осей треугольника следует воспользоваться выражением, полученным в примере 7.6, и теоремой Штернера.

**3.7.4.** Вычислить осевые моменты инерции четверти круга (рис. 7.22) относительно осей  $z$ ,  $y$  и  $y_c$ .

Указание: абсциссу  $z_t$  центра тяжести четверти круга легко найти, зная положение центра тяжести полукруга, которое определено в примере 7.1.

**3.7.5.** Для показанной на рис. 7.23 фигуры вычислить моменты инерции относительно ее главных центральных осей.

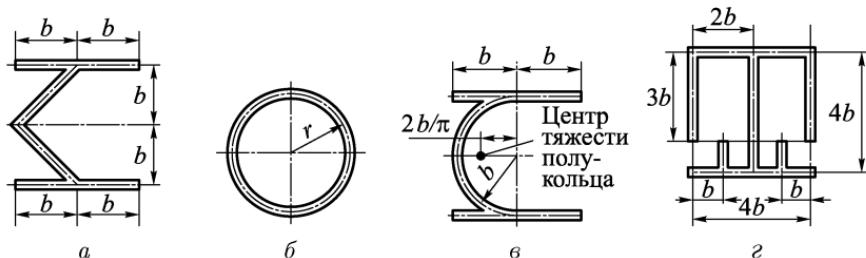


Рис. 7.24

**3.7.6.** Найти положение главных центральных осей и вычислить моменты инерции относительно этих осей для тонкостенных сечений, показанных на рис. 7.24. Толщину стенки  $\delta$  для всех сечений считать постоянной. Для сечения на рис. 7.24 б определить также и полярный момент инерции.

**3.7.7.** Для показанного на рис. 7.25 составного сечения (см. ГОСТы 8240-72 и 8509-72)<sup>0)</sup> вычислить моменты инерции относительно его главных центральных осей.

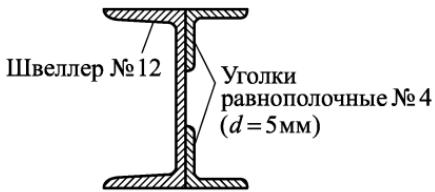


Рис. 7.25

<sup>0)</sup> Таблицы ГОСТов даны в приложении в конце книги.

## ГЛАВА 8

### ПРЯМОЙ ИЗГИБ

*Изгибом* называют такое напряженно-деформированное состояние бруса, когда в его поперечных сечениях из шести возможных внутренних силовых факторов отличны от нуля только перерезывающие силы и изгибающие моменты.

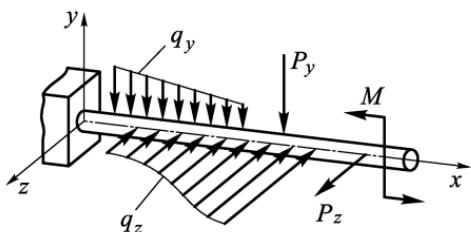


Рис. 8.1

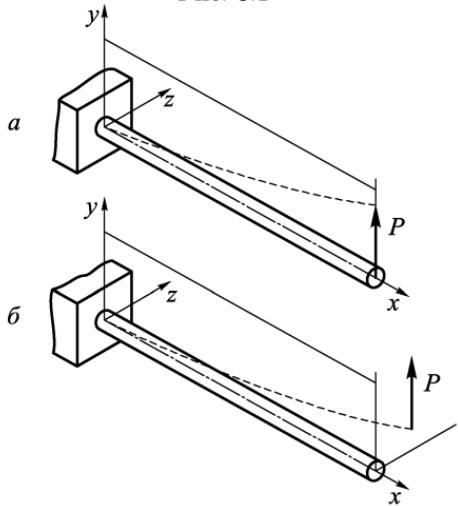


Рис. 8.2

Брус с прямой осью, находящийся в состоянии изгиба, часто называют *балкой*. Из условия равновесия отсеченных частей балки легко понять, что ее изгиб вызывают нагрузки, нормальные к оси бруса (поперечные нагрузки) или сосредоточенные моменты, в плоскости действия которых лежит ось балки (рис. 8.1).

Если все изгибающие балку нагрузки лежат в одной плоскости (или их можно свести к такого вида нагрузкам) и деформированная ось балки остается в этой плоскости, то такой изгиб называют *прямым*.

Общий случай изгиба, как это будет показано в гл. 9, всегда можно представить как суперпозицию двух прямых изгибов. Такой изгиб обычно называют *косым* изгибом. На рис. 8.2 показана деформация

вить как суперпозицию двух прямых изгибов. Такой изгиб обычно называют *косым* изгибом. На рис. 8.2 показана деформация

двух балок, один конец которых защемлен, а к другому приложена вертикальная сила  $P$ . Их деформированное состояние показано штриховой кривой. На рис. 8.2 *а* деформированная ось балки осталась в плоскости  $xy$ , в которой действует сила  $P$ . Такой изгиб балки — прямой. А на рис. 8.2 *б* кроме вертикальных, точки оси балки получили также и горизонтальные смещения. Таким образом, ось балки вышла из плоскости  $xy$  и поэтому ее изгиб является косым. Как мы увидим в дальнейшем, прямой изгиб возникает только при вполне определенной взаимной ориентации плоскости действия нагрузки и сечения балки.

В этой главе мы рассмотрим прямой изгиб балки в плоскости  $xy$  (рис. 8.3). В поперечных сечениях такой балки возникают перерезывающая сила  $Q_y$  и изгибающий момент  $M_z$ .

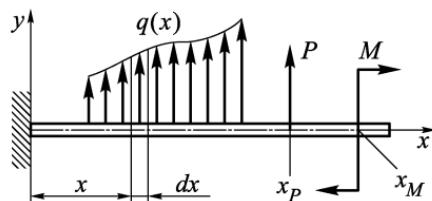


Рис. 8.3

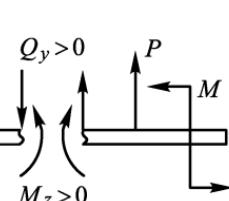


Рис. 8.4

Правила знаков для  $Q_y$  и  $M_z$  проиллюстрированы на рис. 8.4 для отсеченных частей балки. Как видно из этого рисунка,  $Q_y > 0$ , если она стремится повернуть отсеченную часть, к которой она приложена, по часовой стрелке.

Из рис. 8.5, на котором деформированное состояние элемента балки показано штриховыми линиями, ясно, что положительный изгибающий момент  $M_z$  вызывает такой изгиб балки, что ее верхние волокна сжаты, а нижние растянуты.

При  $Q_y = 0$  изгиб называют *чистым*. А если  $Q_y \neq 0$ , то изгиб *поперечный*.

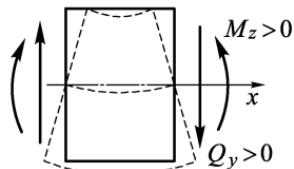


Рис. 8.5

## 8.1. Статические дифференциальные и интегральные соотношения при изгибе

**8.1.1.** Рассмотрим равновесие элемента балки, выделенного сечениями  $x$  и  $x + dx$  (рис. 8.6). На него действует погонная распределенная нагрузка, интенсивность которой из-за малости  $dx$  можно считать постоянной по длине элемента и равной  $q(x)$ .

Тогда равнодействующая этой нагрузки равна  $q(x) dx$ . Со стороны левой отброшенной части балки на элемент  $dx$  действуют  $Q_y(x)$  и  $M_z(x)$ , а со стороны правой —  $Q_y(x + dx) \approx Q_y(x) + dQ_y$  и  $M_z(x + dx) \approx M_z(x) + dM_z$ .

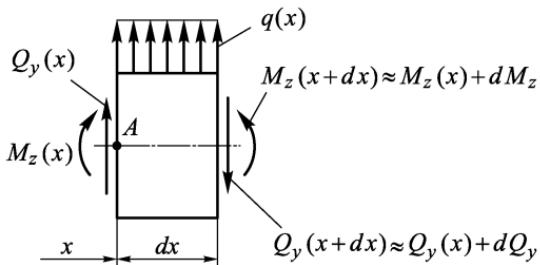


Рис. 8.6

и  $M_z(x + dx) \approx M_z(x) + dM_z$ . Запишем условия равновесия элемента. Так как на балку не действуют нагрузки, направленные вдоль оси  $x$ , то условие  $\sum P_x = 0$  выполняется. Условие  $\sum P_y = 0$  запишется в виде

$$Q_y(x) + q(x) dx - (Q_y(x) + dQ_y) = 0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{dQ_y}{dx} = q(x) \uparrow. \quad (8.1.1)$$

В этом статическом дифференциальном соотношении стрелками показаны принятые при его выводе положительные направления  $x$  и  $q$ .

Составим теперь для элемента второе условие равновесия как условие равенства нулю суммы моментов относительно какой-либо точки, например точки  $A$ :

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 \rightarrow -M_z(x) + (M_z(x) + dM_z) - \\ - (Q_y(x) + dQ_y) dx + q(x) dx \frac{dx}{2} = 0. \end{aligned}$$

Отбрасывая в этом равенстве слагаемые высшего порядка малости  $dQ_y dx$  и  $\frac{1}{2}q(x)(dx)^2$ , получаем второе статическое дифференциальное соотношение:

$$\frac{dM_z}{dx} = Q_y(x). \quad (8.1.2)$$

**8.1.2.** Рассмотрим теперь элемент балки, выделенный в окрестности точки с координатой  $x_P$ , где приложена сосредо-

точенная сила  $P$  (рис. 8.7). На рисунке использованы знакомые читателю обозначения:

$$Q_y^- = Q_y(x_P - dx), \quad Q_y^+ = Q_y(x_P + dx), \dots$$

Условия равновесия этого элемента запишем в виде

$$\begin{aligned} \sum P_y &= 0 \rightarrow Q_y^- + P - Q_y^+ = 0, \\ \sum M_B &= 0 \rightarrow -M_z^- - Q_y^- dx + \\ &+ M_z^+ - Q_y^+ dx = 0. \end{aligned}$$

Во втором из этих соотношений бесконечно малые слагаемые  $Q_y^- dx$  и  $Q_y^+ dx$  должны быть отброшены в сравнении с конечными величинами  $M_z^-$  и  $M_z^+$ . Окончательно получаем, что в окрестности точки приложения сосредоточенной силы  $P$  перерезывающая сила  $Q_y$  претерпевает скачок на величину этой силы, а изгибающий момент  $M_z$  непрерывен:

$$Q_y^+ - Q_y^- = P, \quad M_z^+ = M_z^-. \quad (8.1.3)$$

Характер эпзор  $Q_y$  и  $M_z$  в окрестности точки приложения сосредоточенной силы показан на рис. 8.8. Из этого рисунка видно, что скачок  $Q_y$  происходит в ту сторону, куда направлена сила (если

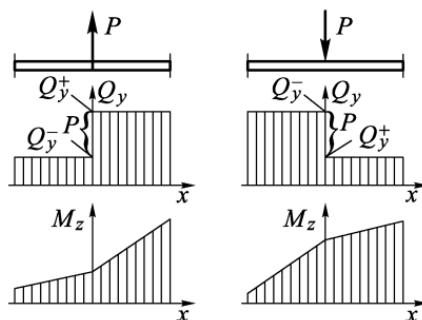


Рис. 8.8

смотреть слева направо), а на эпюре  $M_z$  образуется согласно (8.1.2) угол, направленный навстречу силе.

Рассмотрим теперь равновесие элемента балки, выделенного около сечения  $x_M$ , где приложен сосредоточенный момент  $M$  (рис. 8.9). Из условий его равновесия нетрудно получить, что

$$Q_y^+ = Q_y^-, \quad M_z^+ - M_z^- = M. \quad (8.1.4)$$

Эти соотношения показывают, что в сечении балки, где приложен сосредоточенный момент  $M$ , перерезывающая сила  $Q_y$  непрерывна, а изгиба-

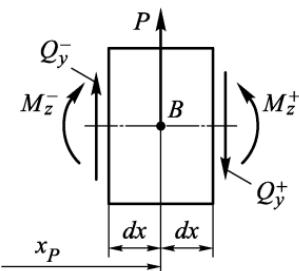


Рис. 8.7

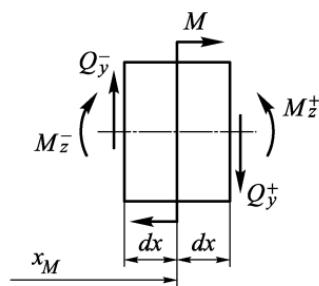


Рис. 8.9

ющий момент  $M_z$  претерпевает скачок, равный  $M$ . Характер эпюр  $Q_y$  и  $M_z$  в окрестности такого сечения показан на рис. 8.10.

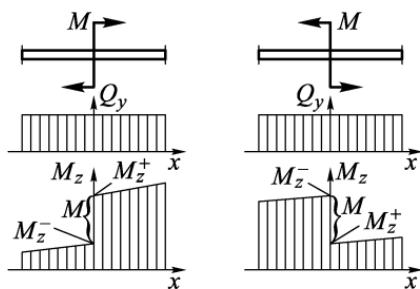


Рис. 8.10

Из него видно, что форма скачка  $M_z$  повторяет форму пары сосредоточенного момента  $M$ .

**8.1.3.** Продифференцируем соотношение (8.1.2) по  $x$  и учтем (8.1.1). В итоге получим

$$\frac{d^2 M_z}{dx^2} = q \uparrow. \quad (8.1.5)$$

Вторая производная, как известно из курса математики, определяет знак кривизны кривой.

Поэтому из (8.1.5) следует, что при  $q > 0$ , т.е. когда нагрузка  $q$  направлена вверх, кривизна эпюры  $M_z$  положительна, т.е. эта эпюра имеет выпуклость вниз. И наоборот, если  $q$  направлена вниз, то у эпюры  $M_z$  выпуклость обращена вверх. Таким образом, выпуклость эпюры  $M_z$  направлена *навстречу* распределенной нагрузке  $q$ . Это правило проиллюстрировано на рис. 8.11.

**8.1.4.** Чтобы получить интегральные статические соотношения, рассмотрим равновесие конечного элемента балки, расположенного между сечениями  $x_1$  и  $x_2$  (рис. 8.12). Условия его равновесия имеют вид

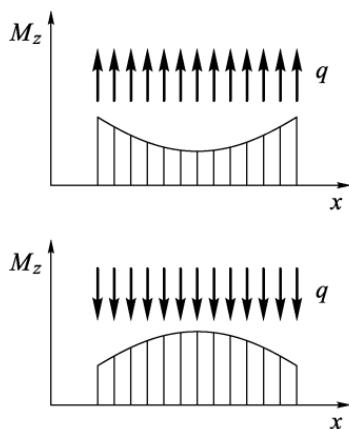


Рис. 8.11

$$\sum P_y = 0 \rightarrow Q_y(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx + \sum_{i \in [x_1, x_2]} P_i - Q_y(x_2) = 0, \quad (8.1.6)$$

$$\begin{aligned} \sum M_a = 0 \rightarrow -M_z(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} (x - x_1) q(x) dx + \sum_{i \in [x_1, x_2]} (x_{P_i} - x_1) P_i - \\ - \sum_{j \in [x_1, x_2]} M_j - Q_y(x_2)(x_2 - x_1) + M_z(x_2) = 0. \end{aligned}$$

В первом из этих соотношений интеграл является равнодействующей распределенной нагрузки с интенсивностью  $q(x)$ , а во втором — ее равнодействующим моментом. Из (8.1.6) получаем

$$Q_y(x_2) - Q_y(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx + \sum_{i \in [x_1, x_2]} P_i, \quad (8.1.7)$$

$$\begin{aligned} M_z(x_2) - M_z(x_1) = & - \int_{x_1}^{x_2} (x - x_1) q(x) dx + Q_y(x_2)(x_2 - x_1) - \\ & - \sum_{i \in [x_1, x_2]} (x_{P_i} - x_1) P_i + \sum_{j \in [x_1, x_2]} M_j. \end{aligned} \quad (8.1.8)$$

Соотношение (8.1.7) является одной из форм записи общего решения дифференциального уравнения (8.1.1) с учетом скач-

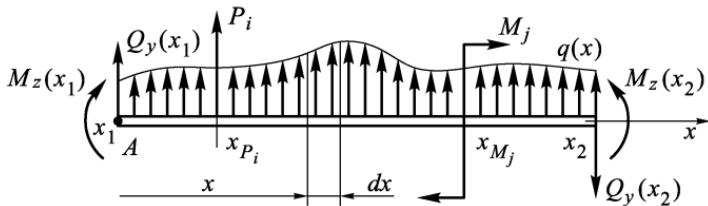


Рис. 8.12

ков  $Q_y$  вида (8.1.3), вызванных действием сосредоточенных сил  $P_i$ . В этом нетрудно убедиться, продифференцировав (8.1.7), например, по  $x_2$ , в результате чего получим  $dQ_y/dx_2 = q(x_2)$ . Это соотношение совпадает с (8.1.3) с точностью до обозначения аргумента. Чтобы установить связь между выражением (8.1.8) и дифференциальным соотношением (8.1.2), продифференцируем (8.1.8) по  $x_2$ . Получим

$$\begin{aligned} \frac{dM_z}{dx_2} = & \frac{d}{dx_2} \left( - \int_{x_1}^{x_2} x q(x) dx + x_1 \int_{x_1}^{x_2} q(x) dx \right) + \frac{dQ_y}{dx_2}(x_2 - x_1) + \\ & + Q_y(x_2) = -x_2 q(x_2) + x_1 q(x_2) + q(x_2)(x_2 - x_1) + Q_y(x_2). \end{aligned}$$

Здесь учтено, что  $dQ_y/dx_2 = q(x_2)$ . Первые три слагаемых в правой части взаимно уничтожаются. В результате получаем, что  $dM_z/dx_2 = Q_y(x_2)$ . А это значит, что выражение (8.1.8) является одной из форм записи общего решения дифференциального уравнения (8.1.2), учитывающего скачки вида (8.1.4). Другую более удобную форму общего решения уравнения (8.1.2) можно

построить, интегрируя его непосредственно:

$$M_z(x_2) - M_z(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} Q_y dx + \sum_{j \in [x_1, x_2]} M_j. \quad (8.1.9)$$

**8.1.5.** Рассмотрим примеры построения эпюр  $Q_y$  и  $M_z$  для статически определимых балок. Заметим сразу, что само по себе построение этих эпюр, так же, как и эпюр  $N$  и  $M_k$ , не является самоцелью, но это необходимый этап для расчета балки на прочность и определения ее перемещений.

**Пример 8.1.** Рассмотрим балку, один конец которой свободен, а другой закреплен так, что исключены его перемещения и поворот (рис. 8.13). Такое закрепление балки называют *заделкой* или *защемлением*. Со стороны такого закрепления на балку действуют горизонтальная  $R_x$  и вертикальная  $R_y$  силы, называ-

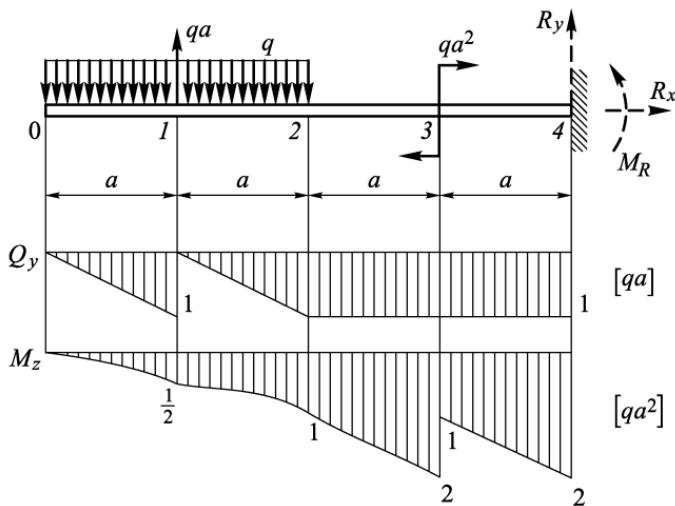


Рис. 8.13

емые *реакциями опоры*, а также момент  $M_R$  — *реактивный момент*. Все они показаны на рис. 8.13 штриховыми линиями. Их можно найти из условий равновесия балки. Но при построении эпюр  $Q_y$  и  $M_z$  для консольной балки в этом нет необходимости, так как после рассечения балки для ее левой части можно составить уравнения равновесия, из которых и определяются  $Q_y$  и  $M_z$ .

При построении эпюры  $Q_y$  прежде всего, исходя из соотношений (8.1.1) и (8.1.3), заметим, что:

- скачок  $Q_y$  будет только в сечении 1, где приложена сосредоточенная сила  $qa$ ;
- на участке 2–4  $q(x) = 0$ , поэтому  $Q_y = \text{const}$ ;

— на участках  $0-1$  и  $1-2$   $q = \text{const}$ , и поэтому  $Q_y$  меняется по линейному закону.

Эти сведения помогают экономично воспользоваться методом сечений. Для построения эпюры  $Q_y$  достаточно рассмотреть отсеченные части балки, выделенные сечениями в точке  $0$ , слева и справа от точки  $1$  и в любой точке на участке  $2-4$  (рис. 8.14  $a-g$ ). Для определения  $Q_y$  составим для них условия равновесия  $\sum P_y = 0$ . Например, для рис. 8.14  $g$  такое условие имеет вид

$$qa - Q_{y2} - \int_{0-2} q dx = 0. \quad (8.1.10)$$

Вошедшй в это условие интеграл является равнодействующей распределенной нагрузки на участке  $0-2$ . Так как  $q = \text{const}$ , то

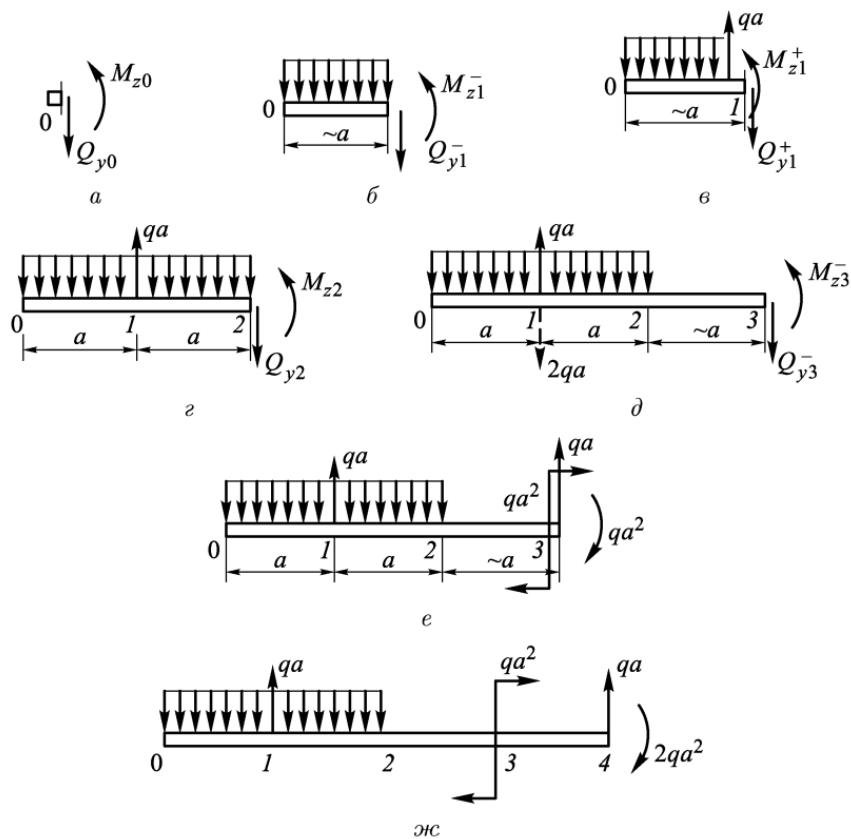


Рис. 8.14

он равен  $q \cdot 2a$ . Учитывая это, получаем из (8.1.10)  $Q_{y2} = -qa$ . Точно так же находим  $Q_{y0} = 0$ ,  $Q_{y1^-} = -qa$ ,  $Q_{y1^+} = 0$ .

Обычно такие условия равновесия просты, и при минимальной тренировке нет необходимости их выписывать и решать. Той же цели можно достигнуть, подбирая такую перерезывающую силу, чтобы для отсеченной части выполнялось условие  $\sum P_y = 0$ , как это сделано для отсеченных частей на рис. 8.14 *e, ж.* Знак полученной перерезывающей силы определяется по тому, как она стремится повернуть отсеченную часть. Для отсеченных частей на рис. 8.14 *e, ж* полученные в сечениях 3 и 4 перерезывающие силы *qa* стремятся повернуть отсеченную часть против часовой стрелки, поэтому они отрицательны.

По полученным значениям легко построить эпюру  $Q_y$ , данную на рис. 8.13.

При построении эпюры  $M_z$  учтем, что на ней будет скачок в сечении 3, где приложен сосредоточенный момент  $qa^2$ . Поэтому для определения необходимых для построения значений  $M_z$  в точках 1, 2, 3, 4 рассмотрим равновесие отсеченных частей, изображенных на рис. 8.14. Моментные условия равновесия для этих отсеченных частей запишем в виде равенств нулю сумм моментов всех действующих на них нагрузок относительно точек, совпадающих с сечениями. Так, для отсеченной части на рис. 8.14 *д* это условие имеет вид

$$\sum M_c = 0 \rightarrow qa \cdot 2a - 2qa \cdot 2a - M_{z3}^- = 0. \quad (8.1.11)$$

В этом уравнении второе слагаемое является равнодействующим моментом распределенной нагрузки. Он подсчитан как момент равнодействующей этой нагрузки. На рис. 8.14 *д* эта равнодействующая  $2qa$  показана штриховой прямой. Из (8.1.11) получаем

$$M_{z3}^- = -2qa^2.$$

Из условий равновесия всех других отсеченных частей получим  $M_{z0} = 0$ ,  $M_{z1} = -\frac{1}{2}qa^2$ ,  $M_{z2} = -qa^2$ ,  $M_{z3}^+ = -qa^2$ ,  $M_{z4} = -2qa^2$ .

Для определения  $M_z$  можно подбирать его величину и направление так, чтобы для отсеченной части выполнялось условие  $\sum M_c = 0$ , как это сделано для частей на рис. 8.14 *е, ж.*

По полученным значениям нетрудно построить эпюру  $M_z$ , показанную на рис. 8.13. При этом нужно учесть, что на участках 2–3 и 3–4  $Q_y = \text{const}$ , поэтому ввиду дифференциального соотношения  $dM_z/dx = Q_y$   $M_z$  меняется линейно. На участках 0–1, 1–2  $Q_y$  изменяется линейно, следовательно,  $M_z$  здесь меняется по квадратичному закону. Более того, так как  $Q_{y0} = 0$ ,  $Q_{y1}^+ = 0$ , то в этих точках касательные к эпюре  $M_z$  горизонтальны.

В точке 2 эпюра  $Q_y$  непрерывна, поэтому парабола  $M_z$  на участке 1–2 касается в точке 2 прямой участка 2–3. В точке 1,

наоборот,  $Q_y$  изменяется скачком из-за сосредоточенной силы  $qa$  и здесь на эпюре  $M_z$  образуется угол, направленный навстречу этой силе.

**Пример 8.2.** Построим эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  для двухопорной балки, показанной на рис. 8.15. Левая опора этой балки называется *шарнирной опорой*.

Она не позволяет сечению  $A$  балки перемещаться горизонтально и вертикально, но не сопротивляется повороту этого сечения. Поэтому результатом взаимодействия балки с такой опорой будет появление горизонтальных и вертикальных сил взаимодействия — реакций опор  $R_x$  и  $R_y$  (рис. 8.16 а).

Правая опора называется *катковой опорой*. Она запрещает перемещения сечения  $B$  балки только по нормали к плоскости опоры (в дан-

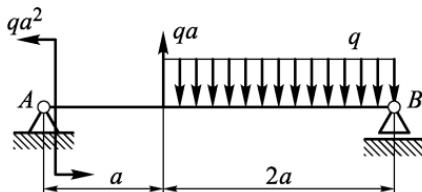


Рис. 8.15

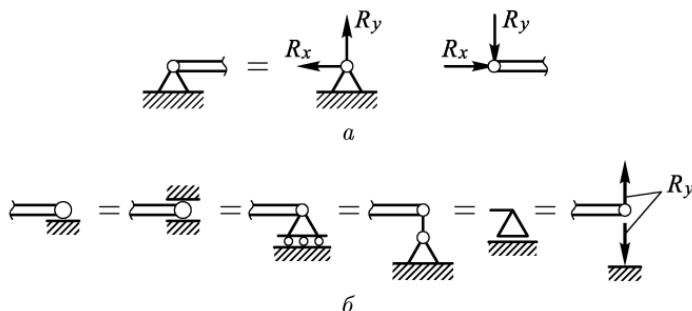


Рис. 8.16

ном случае вертикальные перемещения) и не оказывает сопротивления его перемещениям вдоль плоскости опоры (горизонтальным) и повороту. Поэтому в такой опоре возникает только реакция, нормальная к плоскости опоры. В нашем случае это реакция  $R_y$  (рис. 8.16 б). В литературе можно встретиться с различными схематическими изображениями катковой опоры. Некоторые из них показаны на рис. 8.16 б. Первую и третью схему на этом рисунке используют также для изображения односторонних опор — допускающих отрыв катка от опорной плоскости. Мы такие случаи рассматривать не будем.

Определение реакций опор для двухопорной балки необходимо, так как рассечение ее приводит к образованию таких двух частей, которые взаимодействуют с опорой. Для нахождения реакций опор отбросим опоры и заменим их действие на балку ре-

акциями  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_{By}$  (рис. 8.17). Теперь балка как тело на плоскости имеет три степени свободы и поэтому можно составить три независимых уравнения для определения трех реакций. Так как на балку не действуют горизонтальные силы, то из условия равновесия  $\sum P_x = 0$  сразу следует, что  $R_{Ax} = 0$ . Реакции  $R_{Ay}$  и  $R_{By}$  удобно определять из условий  $\sum M_A = 0$  и  $\sum M_B = 0$ :

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0 &\rightarrow qa^2 + qa \cdot a - 2qa \cdot 2a + R_{By} \cdot 3a = 0, \\ \sum M_B = 0 &\rightarrow qa^2 - qa \cdot 2a + 2qa \cdot a - R_{Ay} \cdot 3a = 0.\end{aligned}\quad (8.1.12)$$

В этих условиях учтено, что равнодействующая распределенной нагрузки равна  $2qa$  и приложена посередине участка 1–2. Она показана пунктиром на рис. 8.17.

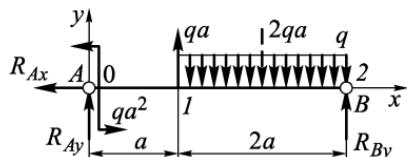


Рис. 8.17

Использование моментных условий для определения реакций двухопорной балки приводит к тому, что каждое из уравнений (8.1.12) содержит только одну неизвестную реакцию и поэтому реакции определяются независимо. Если при определении одной из них допущена

ошибка, она не скажется на второй. Условие  $\sum P_y = 0$  удобно использовать для контроля правильности определения реакций.

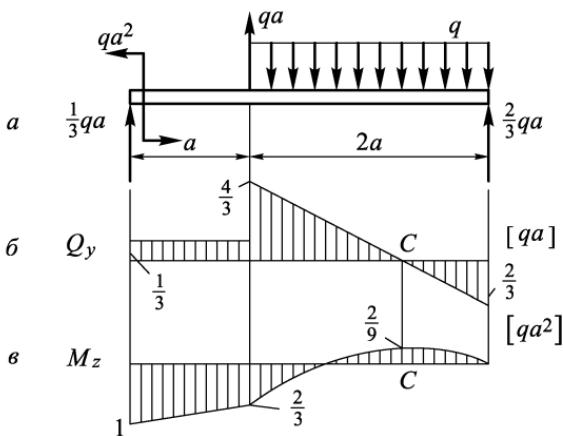


Рис. 8.18

Из (8.1.12) легко получаем, что  $R_{By} = \frac{2}{3}qa$  и  $R_{Ay} = \frac{1}{3}qa$ . Полученный результат показан на рис. 8.18 a. По нему легко

убедиться, что условие  $\sum P_y = 0$  выполняется. Эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  построены точно так же, как и в предыдущей задаче (см. рис. 8.18 б, в). Более того, для такой балки в качестве отсеченной части можно принимать любую из двух образованных сечением частей балки. Поэтому появившуюся возможность выбора можно использовать для упрощения решения. Необходимые для построения эпюр  $Q_y$  и  $M_z$  отсеченные части показаны на рис. 8.19.

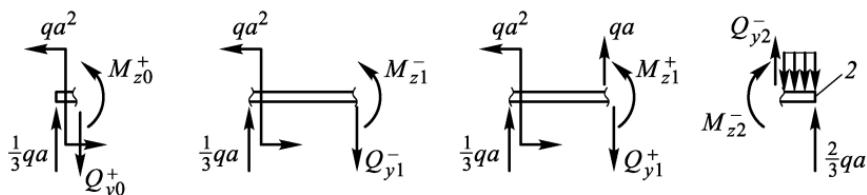


Рис. 8.19

Максимальное значение  $M_z$  на участке 1–2 можно найти двумя способами. Первый из них использует метод сечений непосредственно и определяет  $M_{z\max}$  как изгибающий момент из условия равновесия отсеченной части, образованной сечением в точке, где  $Q_y = 0$ . Эта часть показана на рис. 8.20. Из условия  $\sum M_C = 0$  легко найти, что  $M_{z\max} = \frac{2}{3}qa \cdot \frac{2}{3}a - q \cdot \frac{2}{3}a \cdot \frac{1}{3}a = \frac{2}{9}qa^2$ .

Второй способ основан на соотношении (8.1.9). Так как на участке между точками  $C$  и  $B$  не приложено сосредоточенных моментов, то

$$M_z(x_B) - M_z(x_C) = \int_{C-B} Q_y dx.$$

Но  $M_z(x_B) = 0$ , тогда  $M_z(x_C) = - \int_{x_C}^{x_B} Q_y dx$ , поэтому  $M_z(x_C) = M_{z\max}$  равен площади эпюры  $Q_y$  между точками  $C$  и  $B$ . Вычисляя ее, получаем  $M_{z\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}qa \cdot \frac{2}{3}a = \frac{2}{9}qa^2$ .

**Пример 8.3.** Построим эпюры  $Q_y$  и  $M_z$  для балки, показанной на рис. 8.21. Эта балка состоит из двух частей, соединенных между собой шарнирно в точке  $B$ . Для определения опорных реакций отбросим опоры и заменим их реакциями, а

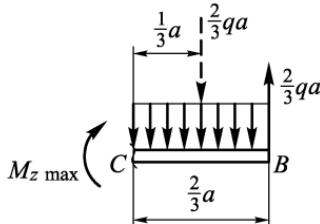


Рис. 8.20

также рассечем балку по шарниру в точке  $B$ . Так как шарнирное соединение не сопротивляется повороту частей балки друг относительно друга, то в сечении  $B$  не возникает изгибающее-

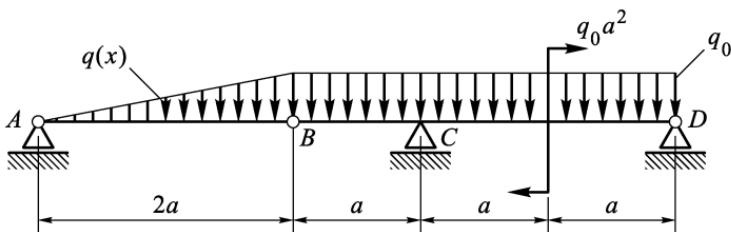


Рис. 8.21

го момента, а будет действовать только перерезывающая сила. Полученные части изображены на рис. 8.22, где учтено, что в шарнирной опоре  $D$  из-за отсутствия горизонтальных нагрузок

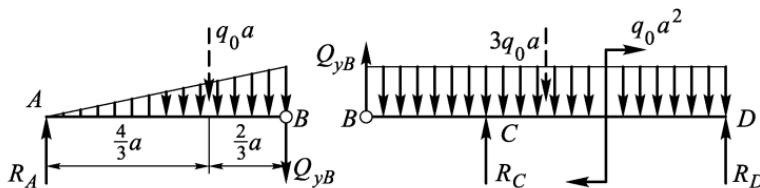


Рис. 8.22

не появится горизонтальной реакции. Теперь из условий равновесия для части балки  $AB$  легко найти  $R_A$  и  $Q_{yB}$ . При этом равнодействующую распределенной по линейному закону нагрузки и точку ее приложения получим как площадь и центр тяжести треугольной эпюры  $q(x)$  на участке  $AB$ . На рис. 8.22 эта равнодействующая, так же, как и равнодействующая постоянной распределенной нагрузки на участке  $BD$ , показана штриховой прямой. Из условия  $\sum M_A = 0$  для части  $AB$  получим  $Q_{yB} = -\frac{2}{3}q_0 a$ ,

а из условия  $\sum M_B = 0$  следует, что  $R_A = \frac{1}{3}q_0 a$ . Теперь, зная  $Q_{yB}$ , найдем, используя для части  $BD$  условие  $\sum M_C = 0$ , что  $R_D = \frac{11}{12}q_0 a$ , а из условия  $\sum M_D = 0$  определим, что  $R_C = \frac{11}{4}q_0 a$ .

Полученные реакции показаны на рис. 8.23 и там же приведены эпюры  $Q_y$  и  $M_z$ . Методика построения этих эпюр по участку  $BD$  ничем не отличается от использованной выше в примерах 8.1 и 8.2. Там в силу достаточной простоты этих эпюр мы обо-

шлись без их аналитических выражений, подсчитывая значения  $Q_y$  и  $M_z$  в характерных сечениях и соединяя полученные точки

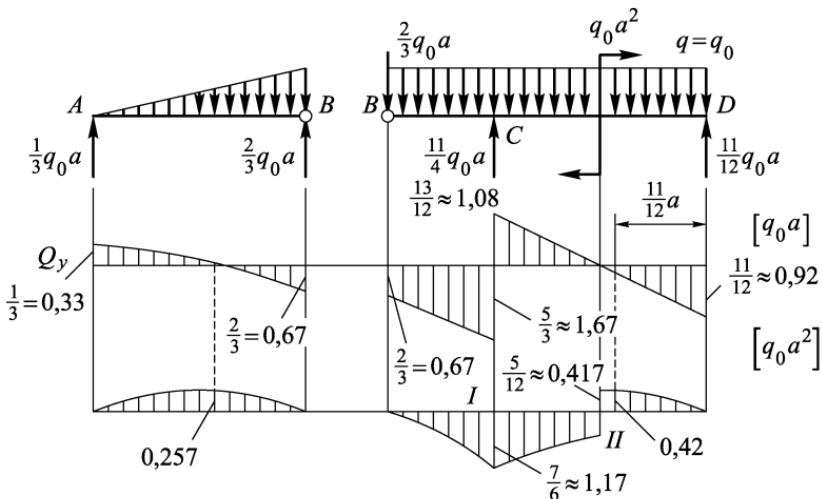


Рис. 8.23

с учетом дифференциальных зависимостей. Предоставляем читателю возможность попрактиковаться в построении эпюр  $Q_y$  и  $M_z$  этим способом.

Для участка  $AB$  такой подход затруднителен.  $Q_y$  и  $M_z$  здесь найдем из условий равновесия отсеченной части, показанной на рис. 8.24:

$$\sum P_y = 0 \rightarrow \frac{1}{3}q_0a - \frac{1}{2}q_0 \frac{x}{2a}x - Q_y = 0 \rightarrow Q_y = \frac{q_0a}{3} - \frac{1}{4} \frac{q_0x^2}{a},$$

$$\sum M_C = 0 \rightarrow -\frac{q_0a}{3}x + \frac{q_0x^2}{4a} \frac{x}{3} + M_z = 0 \rightarrow M_z = -\frac{q_0x^3}{12a} + \frac{q_0ax}{3}.$$

Координату сечения, в котором  $Q_y = 0$  и  $M_z$  достигает максимального значения, найдем из условия  $Q_y = 0$ :

$$q_0 \frac{a}{3} - \frac{q_0x^2}{4a} = 0 \rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}a \approx 1,15a.$$

Очевидно, что искомому максимуму  $M_z$  соответствует положительное значение корня  $x_1$ .

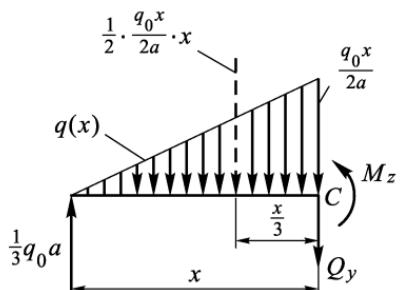


Рис. 8.24

Подставив его в выражение для  $M_z$ , получим

$$M_{z \max} = M_z(x_1) = -\frac{q_0}{12a} \frac{8a^3}{3\sqrt{3}} + \frac{q_0a}{3} \frac{2}{\sqrt{3}}a = \frac{4}{9\sqrt{3}} q_0 a^2 \approx 0,257 q_0 a^2.$$

## 8.2. Геометрия деформаций и нормальные напряжения при чистом изгибе

**8.2.1.** Сначала изучим простейший случай изгиба — прямой чистый изгиб балки постоянного сечения. В таком состоянии балка будет находиться, если она изгибаётся приложенными к ее торцам одинаковыми моментами  $M$  и при этом ее деформированная ось остается в плоскости действия моментов (рис. 8.25). Нетрудно методом сечений убедиться, что  $M_z$  по-

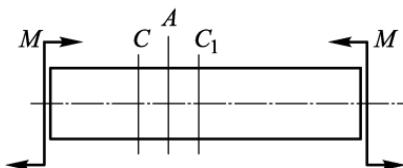


Рис. 8.25

стоянен по длине балки. Более того, напряженно-деформированное состояние балки также однородно по длине (кроме, конечно, прилегающих к торцам зон Сен-Венана, где распределение напряжений зависит от конкретного способа приложения моментов  $M$  к торцам).

Возьмем произвольное сечение  $A$  балки. Двумя симметричными относительно него сечениями  $C$  и  $C_1$  выделим элемент балки (рис. 8.26). Этот элемент симметричен относительно сечения  $A$  и нагружен симметрично, поэтому он должен и деформироваться симметрично. Следовательно, при деформации сечение  $A$  как плоскость симметрии останется плоским и нормальным к деформированной оси бруса. А так как сечение  $A$  выбрано произвольно, то такие же выводы можно сделать и относительно любого сечения балки. Итак, при чистом изгибе поперечные сечения бруса остаются плоскими и нормальными к деформированной оси балки.

Если балка имеет переменное сечение, то выделенный из нее элемент уже не будет симметричным. Поэтому его деформация будет сложнее. Но эксперименты показывают, что при плавном изменении сечения балки характер ее деформирования мало отличается от картины деформирования балки постоянного сечения. Поэтому можно принять так называемую гипотезу плоских сечений, предполагающую, что при изгибе поперечные сечения

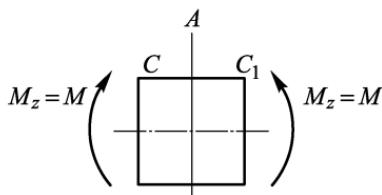


Рис. 8.26

балки остаются плоскими и нормальными к ее деформированной оси.

Автором этой гипотезы является Я. Бернулли (1694).

**8.2.2.** Выделим из балки двумя поперечными сечениями элемент длиной  $dx$  и рассмотрим его деформации. На рис. 8.27 деформированное состояние элемента показано штриховыми линиями. Рассматривая балку как состоящую из продольных волокон, замечаем, что верхние ее волокна укоротились, а нижние удлинились. Волокна  $AB$ , которые отделяют сжатые волокна от растянутых, будем называть *нейтральными* волокнами (на рисунке — штрих-пунктир). После деформации между торцевыми сечениями элемента образуется угол  $d\alpha$ , а нейтральные волокна искривляются. Их радиус кривизны обозначен через  $\rho$ . Найдем относительное удлинение  $\varepsilon_x$  волокна  $CD$ , расположенного на расстоянии  $y$  от нейтральных волокон:

$$\varepsilon_x = -\frac{CD - C'D'}{CD} = -\frac{dx - (\rho - y)d\alpha}{dx} = -\frac{\rho d\alpha - (\rho - y)d\alpha}{\rho d\alpha} = -\frac{y}{\rho}.$$

Здесь учтено, что  $CD = AB$ , а  $AB = dx = \rho d\alpha$ . Знак « $-$ » учитывает, что волокно  $CD$  укорачивается. Полученное соотношение

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} \quad (8.2.1)$$

является математическим выражением гипотезы плоских сечений при изгибе балки в плоскости  $xy$ . Так как изгиб прямой, то все волокна, расположенные на расстоянии  $y$  от нейтральных, имеют одинаковую деформацию  $\varepsilon_x = -y/\rho$ .

Теперь, чтобы перейти от деформаций к напряжениям, будем считать, что каждое продольное волокно балки при изгибе находится в состоянии одноосного растяжения. Это равносильно предположению, что в продольных сечениях балки при изгибе не возникает нормальных напряжений, или, как иногда говорят, продольные волокна друг на друга не давят. Поэтому такое предположение называют *гипотезой о недавливаемости продольных волокон*. Фактически нормальные напряжения в продольных сечениях балки возникают, но они малы по сравнению с  $\sigma_x$  и ими можно пренебречь. Принятая гипотеза при линейно-

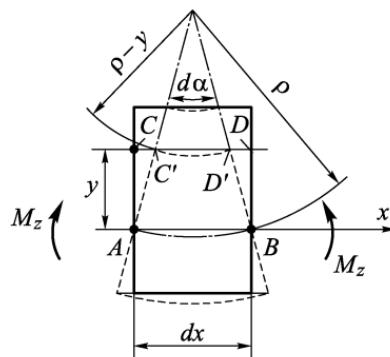


Рис. 8.27

упругой деформации позволяет связать нормальные напряжения в поперечном сечении  $\sigma_x$  с деформациями продольных волокон  $\varepsilon_x$  соотношением закона Гука для одноосного растяжения:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x. \quad (8.2.2)$$

Учитывая гипотезу плоских сечений (8.2.1), получаем, что  $\sigma_x$  распределяются по поперечному сечению линейно:

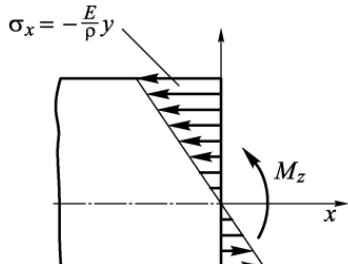


Рис. 8.28

в котором  $M_z$  подсчитан как равнодействующий момент относительно оси  $z$  элементарных продольных усилий  $\sigma_x dF$  (рис. 8.29). Подставив в это соотношение  $\sigma_x$  по (8.2.3), получаем

$$M_z = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF = \frac{EJ_z}{\rho}. \quad (8.2.5)$$

Напоминаем, что  $\int_F y^2 dF = J_z$  —

осевой момент инерции сечения балки  $F$ .

Соотношение (8.2.5) устанавливает связь между кривизной оси балки  $1/\rho$ , жесткостью балки на изгиб  $EJ_z$  и изгибающим моментом  $M_z$ :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EJ_z}. \quad (8.2.6)$$

А после исключения из (8.2.3)  $1/\rho$  получаем формулу, связывающую  $\sigma_x$  и  $M_z$ :

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{J_z}y. \quad (8.2.7)$$

С помощью этой формулы мы могли бы найти нормальные напряжения  $\sigma_x$  в сечении балки по определенному методом сечений изгибающему моменту  $M_z$ . Однако нам пока неизвестно положение нейтральных волокон, от которых отсчитывается расстояние  $y$ . Найдем его, учитывая, что при чистом изгибе

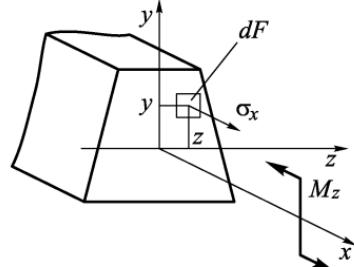


Рис. 8.29

продольная сила  $N$  равна нулю. Но  $N$  можно подсчитать как равнодействующую элементарных продольных усилий  $\sigma_x dF$  в соответствии с разд. 2.3 (см. рис. 8.29):

$$N = \int_F \sigma_x dF. \quad (8.2.8)$$

Подставив сюда (8.2.7) и приняв  $N = 0$ , получим

$$N = \int_F \sigma_x dF = - \int_F \frac{M_z}{J_z} y dF = -\frac{M_z}{J_z} \int_F y dF = -\frac{M_z}{J_z} S_z = 0. \quad (8.2.9)$$

Отсюда ясно, что так как статический момент  $S_z$  равен нулю, то ось  $z$  является центральной осью сечения.

Учтем теперь, что при изгибе в плоскости  $xy$  изгибающий момент  $M_y$  равен нулю. Но в соответствии с разд. 2.3 (см. рис. 8.29)

$$M_y = \int_F \sigma_x z dF. \quad (8.2.10)$$

Следовательно, с учетом формулы (8.2.7) получаем

$$M_y = \int_F \sigma_x z dF = - \int_F \frac{M_z}{J_z} yz dF = -\frac{M_z}{J_z} \int_F yz dF = -\frac{M_z}{J_z} J_{zy} = 0. \quad (8.2.11)$$

Таким образом, при прямом изгибе в плоскости  $xy$  оси  $z$  и  $y$  должны быть такими, чтобы центробежный момент инерции  $J_{zy}$  был равен нулю, т.е. главными осями сечения.

Суммируя полученные результаты, приходим к заключению, что прямой чистый изгиб бруса под действием изгибающего момента  $M_z$  происходит только тогда, когда оси  $z$ ,  $y$  являются главными центральными осями сечения. В этом случае нормальные напряжения  $\sigma_x$  и кривизна нейтральных волокон  $1/\rho$  определяются выражениями

$$\sigma_x = \pm \frac{M_z}{J_z} y, \quad \frac{1}{\rho} = \pm \frac{M_z}{EJ_z}. \quad (8.2.12)$$

В этих формулах введены знаки « $\pm$ », так как знак в них связан с направлением оси  $y$ . На практике по направлению изгибающего момента  $M_z$  всегда видно, как искривляется ось бруса и какие волокна сечения растянуты, а какие сжаты, и поэтому можно легко установить нужный знак.

### 8.3. Напряжения при поперечном изгибе

**8.3.1.** При поперечном изгибе балки в плоскости  $xy$  перерезывающая сила  $Q_y$  не равна нулю. Такой изгиб консольной балки вызывает, например, сила, приложенная к ее концу (рис. 8.30). Рассматривая симметричный относительно сечения  $A$  элемент балки, показанный на рис. 8.31, замечаем, что он нагружен несимметрично. Поэтому и деформироваться он будет также несимметрично относительно сечения  $A$ ,

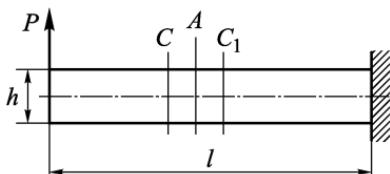


Рис. 8.30

и это сечение не остается плоским. Однако опыт показывает, что геометрию деформации длинных балок ( $l/h \geq 8$ ) при изгибе с достаточной точностью можно описать гипотезой плоских сечений: поперечные сечения балки при изгибе остаются плоскими и нормальными к ее деформированной оси.

А такая картина деформаций показана на рис. 8.27 и подробно исследована в предыдущем разделе. Повторяя без изменений рассуждения, проведенные в пп. 8.2.2 и 8.2.3, приходим снова к формулам,

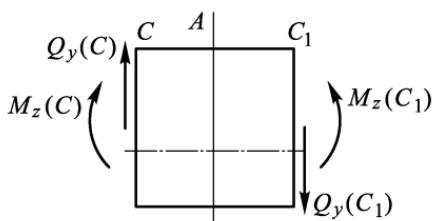


Рис. 8.31

которые определяют нормальные напряжения и кривизну деформированной оси, но теперь уже при поперечном изгибе:

$$\sigma_x = \pm \frac{M_z}{J_z} y, \quad \frac{1}{\rho} = \pm \frac{M_z}{EJ_z}. \quad (8.3.1)$$

**8.3.2.** Кроме нормальных напряжений, при поперечном изгибе должны возникать и касательные напряжения  $\tau_{xy}$ . Это следует из того, что  $Q_y \neq 0$ , а  $Q_y$  является равнодействующей действующих в сечении элементарных касательных усилий:

$$Q_y = \int_F \tau_{xy} dF \neq 0 \rightarrow \tau_{xy} \neq 0. \quad (8.3.2)$$

Принимая гипотезу плоских сечений, мы предполагаем также, что при деформации каждое продольное волокно остается нормальным к поперечным сечениям, т.е., что угол  $AC'D'$  на рис. 8.27 остается прямым. А это значит, что в плоскости  $xy$  деформации сдвига  $\gamma_{xy}$  считаются равными нулю. Поэтому, если мы попытаемся найти  $\tau_{xy}$  по деформации сдвига  $\gamma_{xy}$  с помощью

закона Гука так же, как это было сделано для нормальных напряжений при переходе от (8.2.1) к (8.2.3), то мы получим, что  $\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = 0$ . Но мы только что пришли к выводу, что если при поперечном изгибе  $Q_y \neq 0$ , то и  $\tau_{xy} \neq 0$ . Полученное противоречие, как видно, является следствием гипотезы плоских сечений, которая как раз и пренебрегает сдвигами  $\gamma_{xy}$ .

**8.3.3.** Вопрос о распределении напряжений  $\tau_{xy}$  по сечениям при поперечном изгибе долгое время оставался не решенным, и для приближенной оценки величины  $\tau_{xy}$  принимали, следя Л. Навье, что они равномерно распределены по площади поперечного сечения, т.е. что  $\tau_{xy} = Q_y/F$ . Элементарное решение этого вопроса было найдено видным русским инженером Д. Журавским в 1844 г.

Рассмотрим подробнее напряженное состояние элемента балки, выделенного поперечными сечениями  $x$  и  $x + dx$  (рис. 8.32). В этих сечениях действуют нормальные напряжения

$$\sigma_x(x) = \frac{M_z(x)}{J_z} y$$

и

$$\sigma_x(x + dx) = \frac{M_z(x + dx)}{J_z} y = \frac{M_z(x) + dM_z}{J_z} y, \quad (8.3.3)$$

а также касательные напряжения  $\tau_{xy}$ .

Рассечем этот элемент продольной плоскостью, нормальной к оси  $y$  и проходящей на расстоянии  $y_1$  от оси  $z$  (см. рис. 8.32), и рассмотрим верхнюю отсеченную часть (рис. 8.33). В продольном сечении возникнут касательные напряжения  $\tau_{yx}$ , равные по свойству парности напряжениям  $\tau_{xy}$ . Для того чтобы образованная продольным сечением отсеченная часть была в равновесии, необходимо выполнение условия  $\sum P_x = 0$  для действующих на нее сил. Равнодействующие  $N(x)$  и  $N(x + dx)$  нормальных усилий  $\sigma_x(x) dF$  и  $\sigma_x(x + dx) dF$ , действующих на

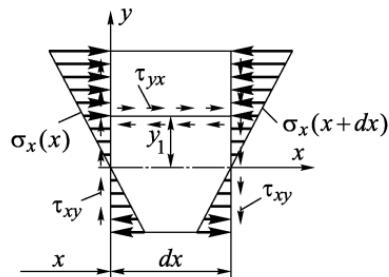


Рис. 8.32

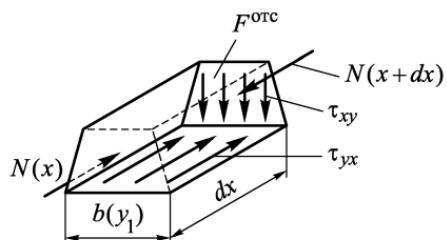


Рис. 8.33

отсеченной части  $F^{\text{отс}}$  сечения  $F$ , будут

$$N(x) = \int_{F^{\text{отс}}} \sigma_x(x) dF = \int_{F^{\text{отс}}} \frac{M_z}{J_z} y dF = \frac{M_z}{J_z} \int_{F^{\text{отс}}} y dF = \frac{M_z}{J_z} S_z^{\text{отс}}, \quad (8.3.4)$$

$$N(x + dx) = \int_{F^{\text{отс}}} \sigma_x(x + dx) dF = \frac{M_z + dM_z}{J_z} S_z^{\text{отс}}.$$

Здесь  $S_z^{\text{отс}}$  — статический момент отсеченной части сечения относительно главной центральной оси  $z$ .

Касательные напряжения  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{yx}$  будем считать равномерно распределенными по ширине  $b(y_1)$  продольного сечения. Тогда действующая вдоль оси  $x$  равнодействующая касательных усилий по площади продольного сечения  $b(y_1) dx$  будет равна  $\tau_{yx} b(y_1) dx$ . Условие  $\sum P_x = 0$  для показанной на рис. 8.33 отсеченной части теперь можно записать в виде

$$N(x) - N(x + dx) + \tau_{yx} b(y_1) dx = 0. \quad (8.3.5)$$

Подставив в это уравнение (8.3.4), получаем после упрощений и деления на  $b(y_1) dx$

$$\tau_{yx} = \frac{dM_z}{dx} \frac{S_z^{\text{отс}}}{J_z b(y_1)}.$$

Но, по статической дифференциальной зависимости,  $dM_z/dx = Q_y$ , а по свойству парности касательных напряжений  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ . Поэтому

$$\tau_{xy}(y_1) = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}(y_1)}{J_z b(y_1)}. \quad (8.3.6)$$

В этой формуле подчеркнута зависимость  $S_z^{\text{отс}}$   $b$  и  $\tau_{xy}$  от координаты продольного сечения  $y_1$ . Саму формулу (8.3.6) часто называют *формулой Д. Журавского*. Рассмотрим примеры ее использования.

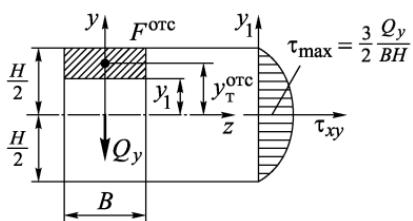


Рис. 8.34

Приимер 8.4. Найдем распределение касательных напряжений по прямоугольному сечению балки, в котором результатом их действия является сила  $Q_y$  (рис. 8.34). Для этого сечения  $J_z = BH^3/12$ ,  $b(y_1) = B$ . Величину  $S_z^{\text{отс}}$  подсчитаем как  $S_z^{\text{отс}} = F^{\text{отс}} y_t^{\text{отс}}$ . Здесь  $F^{\text{отс}}$  — площадь отсеченной части сечения;  $F^{\text{отс}} = B \left(\frac{H}{2} - y_1\right)$ ;  $y_t^{\text{отс}}$  — ко-

ордината центра тяжести  $F^{\text{отс}}$ :  $y_{\text{т}}^{\text{отс}} = \frac{1}{2} \left( \frac{H}{2} + y_1 \right)$ . Поэтому

$$S_z^{\text{отс}} = \frac{B}{2} \left( \frac{H}{2} - y_1 \right) \left( \frac{H}{2} + y_1 \right) = \frac{B}{2} \left[ \left( \frac{H}{2} \right)^2 - y_1^2 \right].$$

После подстановки всех этих величин в формулу (8.3.6) получаем

$$\tau_{xy}(y_1) = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{J_z b} = \frac{6Q_y}{BH^3} \left[ \left( \frac{H}{2} \right)^2 - y_1^2 \right]. \quad (8.3.7)$$

Таким образом, напряжения  $\tau_{xy}$  по высоте сечения распределяются по закону квадратичной параболы. Они обращаются в нуль при  $y_1 = \pm \frac{H}{2}$ , т.е. у верхней и нижней границ сечения. Этот результат находится в соответствии со свойством парности касательных напряжений, так как напряжения  $\tau_{xy}$  у верхней и нижней границ сечения должны быть парны напряжениям  $\tau_{yx}$  на верхней и нижней поверхностях балки, где  $\tau_{yx} = 0$ , поскольку эти поверхности являются наружными.

Из (8.3.7) видно, что максимальная величина  $\tau_{xy}$  достигается при  $y_1 = 0$ , т.е. в средних по высоте точках сечения:

$$\tau_{\max} = \frac{6Q_y}{BH^3} \left( \frac{H}{2} \right)^2 = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{BH}.$$

Таким образом, формула Д. Журавского дает, что величина  $\tau_{\max}$  в 1,5 раза больше средних по сечению напряжений  $Q_y/BH$ . Эпюра  $\tau_{xy}(y_1)$  показана справа на рис. 8.34.

**Пример 8.5.** Рассмотрим теперь распределение  $\tau_{xy}$  в балке треугольного сечения. Из рис. 8.35 видно, что

$$F^{\text{отс}} = \frac{1}{2} b(y_1) \left( \frac{2}{3} H - y_1 \right)$$

и

$$y_{\text{т}}^{\text{отс}} = y_1 + \frac{1}{3} \left( \frac{2}{3} H - y_1 \right) = \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3} H + y_1 \right).$$

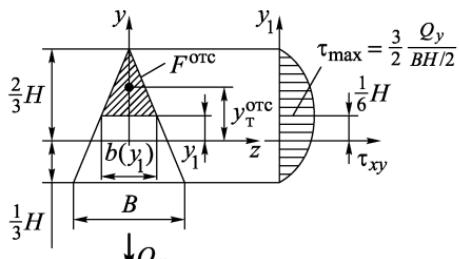


Рис. 8.35

Поэтому, учитывая, что  $J_z = BH^3/36$ , получаем

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{J_z b} = \frac{Q_y F^{\text{отс}} y_{\text{т}}^{\text{отс}}}{J_z b} = \frac{36Q_y}{BH^3} \frac{\frac{1}{2} b(y_1) \left( \frac{2}{3} H - y_1 \right) \cdot \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3} H + y_1 \right)}{b(y_1)}.$$

После упрощений имеем

$$\tau_{xy} = \frac{12Q_y}{BH^3} \left( \frac{2}{3} H - y_1 \right) \left( \frac{1}{3} H + y_1 \right). \quad (8.3.8)$$

Таким образом, и в треугольном сечении  $\tau_{xy}$  изменяются по квадратичному закону и равны нулю при  $y_1 = \frac{2}{3}H$  и  $y_1 = -\frac{1}{3}H$ , т.е. в верхней и нижних точках сечения.

Квадратичная парабола достигает своего максимального значения в точке, равноудаленной от точек, где она обращается в нуль. Поэтому напряжения  $\tau_{xy}$  максимальны при  $y_1 = \frac{1}{6}H$  и равны  $\tau_{\max} = \frac{3}{2}Q_y / \left(\frac{1}{2}BH\right)$ , что снова в 1,5 раза больше их среднего по площади значения  $Q_y / \left(\frac{1}{2}BH\right)$ . Эпюра  $\tau_{xy}(y_1)$  показана справа на рис. 8.35.

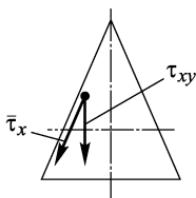


Рис. 8.36

Более подробный анализ распределения касательных напряжений по треугольному сечению показывает приближенность формулы Д. Журавского. В точках вблизи контура сечения, как мы уже показали в пп. 6.4.3 и 6.6.1, вследствие парности касательные напряжения  $\bar{\tau}_x$  должны быть направлены касательно к контуру. А формула Д. Журавского дает только их вертикальную составляющую  $\tau_{xy}$  (рис. 8.36).

Еще большее отличие истинного распределения касательных напряжений от даваемых формулой Д. Журавского (8.3.7) будет у балок сложного сечения. Так, для сечения, данного на рис. 8.37, кривая 1 соответствует формуле Д. Журавского, кривая 2 показывает распределение  $\tau_{xy}$  по оси симметрии сечения  $AB$ , а кривая 3 — по линии  $CD$ . Для сложных сечений формула Д. Журавского дает удовлетворительную оценку величины  $\tau_{\max}$ . В большинстве случаев это верхняя оценка.

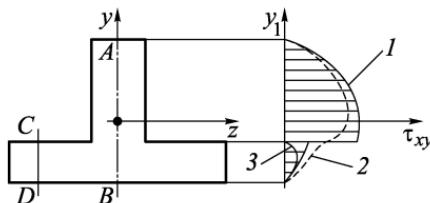


Рис. 8.37

**8.3.4К.** Первые попытки получить распределение напряжений в балках при изгибе были сделаны еще Г. Галилеем в 1638 г. Гипотеза плоских сечений была сформулирована Я. Бернулли (1694). Он пришел ко второму из соотношений (8.3.1), устанавливающему пропорциональность между кривизной оси балки и изгибающим моментом. Правильное решение вопроса о распределении напряжений было найдено, по-видимому, независимо друг от друга Параном (1713) и Ш. Кулоном (1773). Ш. Кулон первым привлек внимание к существованию касательных напряжений. Строгое решение для балки прямоугольного сечения было дано Б. Сен-Венаном. Инженерная теория касательных напряжений в балках была разработана Д. Журавским в

1844–1850 гг. Дмитрий Иванович Журавский (1821–1891) — крупный русский инженер-путеец. Его первые самостоятельные работы были связаны со строительством и проектированием мостов на железнодорожной линии Петербург–Москва. Поскольку в конструкциях мостов тогда широко применялось дерево (а дерево слабо сопротивляется сколу вдоль волокон), то понятно, почему именно вопрос о касательных напряжениях в балках привлек внимание Д.И. Журавского.

## 8.4. Касательные напряжения при изгибе в балках тонкостенного сечения. Центр изгиба

**8.4.1.** Особый интерес представляет распределение касательных напряжений по тонкостенному сечению при поперечном изгибе. В таких сечениях в точках вблизи контура касательные напряжения направлены касательно к контуру. Это их свойство было подробно разобрано в п. 6.6.1 при анализе крученя брусьев тонкостенного замкнутого сечения. Так же, как и там, будем предполагать, что и при поперечном изгибе касательные напряжения в тонкостенных сечениях постоянны по толщине и направлены по касательной к средней линии. Учитывая это, несколько изменим рассуждения, которые проводились в предыдущем разделе.

Рассматривая элемент балки тонкостенного сечения, выделенный сечениями  $x$  и  $x + dx$ , мы рассечем его продольным сечением не нормально к оси  $y$ , а нормально к средней линии сечения, вдоль которой отсчитывается координата  $s$ . Этот элемент показан на рис. 8.38. Составим для него условие равновесия  $\sum P_x = 0$ . Повторив с учетом сделанного изменения все рассуждения разд. 8.33, приходим к формуле Журавского для тонкостенных сечений:

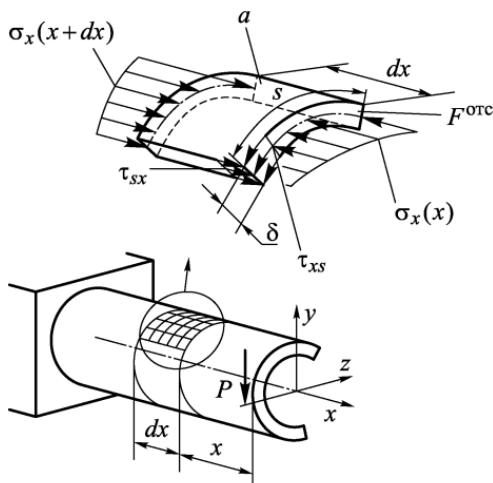


Рис. 8.38

$$\tau_{xs} = \tau_{sx} = \frac{Q_y S_z^{otc}(s)}{J_z \delta(s)}. \quad (8.4.1)$$

В отличие от формулы (8.3.6), здесь отсеченная часть сечения  $F^{\text{отс}}$  выделяется сечением, нормальным к средней линии,

а  $\delta(s)$  — толщина сечения, измеряемая по нормали к средней линии.

Обратим внимание на то, что для успеха вывода край отсеченной части  $a$ , противоположный продольному сечению (см. рис. 8.38), должен быть свободен от напряжений. Для этого достаточно, чтобы сечение было незамкнутым.

Рассмотрим примеры пользования формулой (8.4.1).

Пример 8.6. Найдем касательные напряжения в сечении, показанном на рис. 8.39. Сначала решим вопрос о направлении

$\tau_{xs}$  по участкам сечения. Обратимся к участку 1–4. Перерезывающая сила  $Q_y$  является равнодействующей элементарных касательных усилий, действующих как раз на этом участке. Кроме того, максимальное значение  $\tau_{xs}$ , как это следует из формулы (8.4.1), будет достигаться в тех точках сечения, которым соответствует максимальное значение статического момента  $S_z^{\text{отс}}$  отсеченной части сечения. А это будет точка 3, где главная центральная ось  $z$  пересекает сечение. Учитывая эти два обстоятельства, приходим к выводу, что на участке 1–4  $\tau_{xs}$  направлены

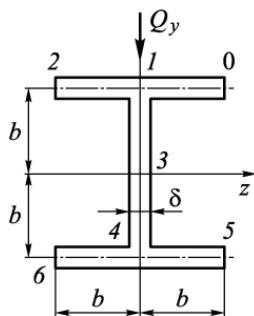


Рис. 8.39

так же, как  $Q_y$ , т.е. вниз. Чтобы найти направления  $\tau_{xs}$  на горизонтальных участках сечения 0–1 и 2–1, выделим из бруса двумя поперечными и тремя продольными сечениями Т-образный элемент, показанный на рис. 8.40. Мы уже знаем направление  $\tau_{xs}^{(1)}$ , тогда направление  $\tau_{xs}^{(2)}$  определяется по свойству парности. Напряжения  $\tau_{xs}^{(3)}$  и  $\tau_{xs}^{(4)}$  должны иметь одинаковое направление ввиду симметрии и такое, чтобы уравновесить усилия от напряжений  $\tau_{xs}^{(2)}$  ( $\sum P_x = 0!$ ). Направления  $\tau_{xs}^{(5)}$  и  $\tau_{xs}^{(6)}$  определяются по свойству парности по направлениям  $\tau_{xs}^{(3)}$  и  $\tau_{xs}^{(4)}$ . Повторяя те же рассуждения для L-образного элемента, выделенного около точки 4, приходим в итоге к показанным стрелками на рис. 8.41 а направлениям напряжений  $\tau_{xs}$ . Чтобы найти закон изменения  $\tau_{xs}$  по участку 0–1, рассмотрим отсеченную часть сечения, показанную на рис. 8.41 б. В качестве координаты сечения примем расстояние  $s$  вдоль средней линии от начала участка, т.е. от точки 0. Тогда

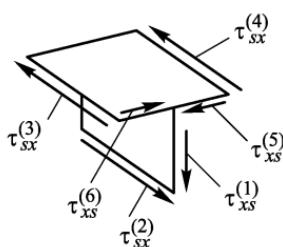


Рис. 8.40

$$S_z^{\text{отс}} = F^{\text{отс}} y_{\text{T}}^{\text{отс}} = s\delta b, \quad \tau_{xs} = \frac{Q_y}{J_z \delta} S_z^{\text{отс}} = \frac{Q_y}{J_z \delta} s\delta b.$$

Видно, что  $S_z^{\text{отс}}$  и  $\tau_{xs}$  здесь линейно зависят от  $s$ . Их эпюры показаны на рис. 8.41 *a*. Форма этих эпюр одинакова, только они различаются масштабными множителями, которые даны

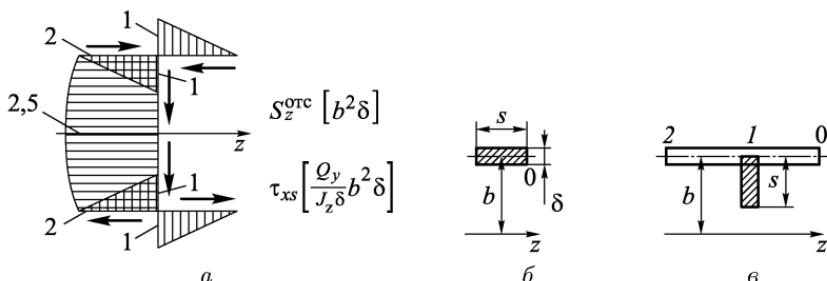


Рис. 8.41

в квадратных скобках. Эпюры на участке  $2-1$  построены точно так же. Отсеченная часть для участка  $1-4$  показана на рис. 8.41 *в*. Чтобы подсчитать для нее  $S_z^{\text{отс}}$ , удобно разбить ее на два прямоугольника — горизонтальный от точки  $2$  до точки  $0$  и вертикальный, который на рисунке заштрихован. Координату  $s$  удобно отсчитывать от точки  $1$ . Тогда

$$S_z^{\text{отс}} = S_z^{0-2} + S_z^{1-s} = 2b\delta b + s\delta \left( b - \frac{s}{2} \right).$$

Как видно из этого выражения, на участке  $1-4$   $S_z^{\text{отс}}$  меняется по квадратичному закону и своего максимума  $2,5b^2\delta$  он достигает, когда сечение совпадает с центральной осью  $z$ , т.е. при  $s = b$ . Пропорционально  $S_z^{\text{отс}}$  меняются напряжения  $\tau_{xs}$ . Поэтому они, как и для участков  $0-1$  и  $1-2$ , изображаются на рис. 8.41 *а* одной эпюри с соответствующими множителями. Удобно строить эпюру  $S_z^{\text{отс}}$  и  $\tau_{xs}$  так, чтобы она располагалась справа от средней линии, если смотреть по стрелке, определяющей направление  $\tau_{xs}$ .

**8.4.2.** Рассмотрим теперь балку с сечением, показанным на рис. 8.42. Рассуждая так же, как в только что решенном примере, читатель без труда построит для него эпюры  $S_z^{\text{отс}}$  и  $\tau_{xs}$ , данные на этом рисунке. Сравнивая результаты для сечений рисунков 8.41 и 8.42, можно заметить, что в первом случае вопрос о линии действия перерезывающей силы  $Q_y$  как равнодействующей элементарных касательных усилий от  $\tau_{xs}$  решается легко с учетом симметрии сечения. Для этого сечения сила действует вдоль его вертикальной стенки  $1-4$ .

Для сечения, данного на рис. 8.42, вопрос о линии действия  $Q_y$  требует специального решения. Воспользуемся тем, что  $Q_y$  как равнодействующая элементарных касательных усилий

лий должна относительно любой точки на плоскости сечения давать такой же момент, что и составляющие ее касательные

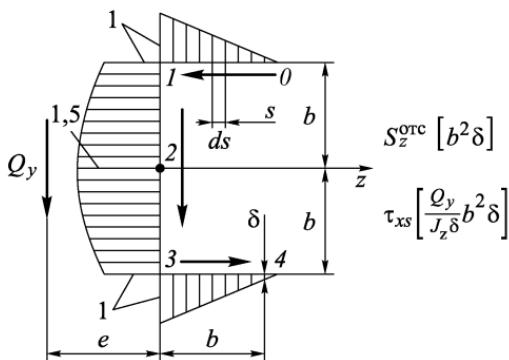


Рис. 8.42

усилия. В качестве такой точки удобно выбрать точку 2. Тогда усилия по вертикальному участку не дадут момента относительно этой точки, а моменты от усилий на горизонтальных участках одинаковы. Чтобы подсчитать момент от касательных усилий по участку 0–1, разобьем его на элементарные участки длиной  $ds$ . Тогда усилие на каждом таком участке будет  $\tau_{xs}\delta ds$  (здесь  $\delta ds = dF$  — площадь элементарного участка). Плечо этого усилия относительно точки 2 равно  $b$ , поэтому его момент будет равен  $b\tau_{xs}\delta ds$ . Момент от элементарных усилий по всему участку 0–1 подсчитаем, суммируя (интегрируя) элементарные моменты по длине участка:

$$\int_{0-1} b\tau_{xs}\delta ds = \int_{0-1} b \frac{Q_y}{J_z} \frac{S_z^{\text{отс}}}{\delta} \delta ds = b \frac{Q_y}{J_z} \int_{0-1} S_z^{\text{отс}} ds.$$

Вашедший в итоговое выражение интеграл можно подсчитать как площадь эпюры  $S_z^{\text{отс}}$  на участке 0–1. Она равна  $\frac{1}{2}bb^2\delta$ . Приравнивая моменты касательных усилий к моменту  $Q_y e$  их равнодействующей, получаем

$$Q_y e = 2 \int_{0-1} b\tau_{xs}\delta ds = 2 \frac{Q_y}{J_z} b \int_{0-1} S_z^{\text{отс}} ds = \frac{Q_y}{J_z} b^4 \delta.$$

Отсюда расстояние  $e$  от линии действия  $Q_y$  до точки 2 будет

$$e = b^4 \delta / J_z.$$

Момент инерции этого сечения можно подсчитать как

$$J_z = J_z^{1-3} + 2J_z^{0-1} = \frac{\delta(2b)^3}{12} + 2\left(\frac{b\delta^3}{12} + b\delta b^2\right) \approx \frac{8}{3}b^3\delta.$$

Окончательно получаем, что  $e = \frac{3}{8}b$ .

Необходимость в определении линии действия  $Q_y$  становится очевидной при анализе изгиба сечения консольной балки, показанной на рис. 8.43. Пусть эта балка нагружена силой  $P$ , приложенной вдоль вертикальной стенки сечения. Тогда, рассматривая отсеченную часть, мы замечаем, что в сечении должны появиться не только касательные усилия, равнодействующая которых  $Q_y = P$  обеспечивает условие равновесия  $\sum P_y = 0$ . Поскольку линии действия  $Q_y$  и  $P$  не совпадают, то в сечении появляются внутренние силы, которые образуют крутящий момент  $M_k = Pe$ ,

уравновешивающий момент  $Pe$  пары сил  $P$  и  $Q_y$ . Это значит, что таким образом нагруженная балка будет не только изгибаться, но и закручиваться. А как это было показано в разд. 6.5 и в примере 6.3, брусья с тонкостенными незамкнутыми сечениями очень плохо работают на кручение.

Чтобы избежать кручения при изгибе рассмотренной балки, нужно совместить линии действия  $P$  и  $Q_y$  так, как показано штриховой линией на рис. 8.43.

**8.4.3.** Теперь можно решить задачу об определении положения линии действия перерезывающей силы для сечения общего вида, данного на рис. 8.44.

Составим условие равенства момента перерезывающей силы  $Q_y$  относительно некоторой точки  $O$  моменту составляющих ее элементарных касательных усилий.

Если  $h(s)$  — плечо относительно точки  $O$  усилия  $\tau_{xs}\delta ds$ , действующего на участке  $ds$ , то это условие примет вид

$$Q_y e = \int_L h(s) \tau_{xs}(s) \delta ds. \quad (8.4.2)$$

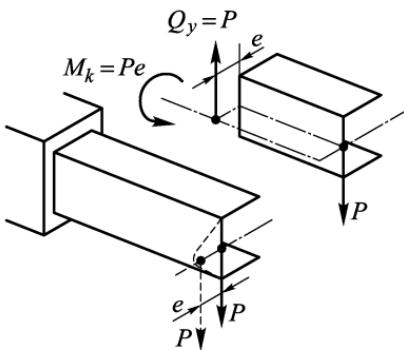


Рис. 8.43

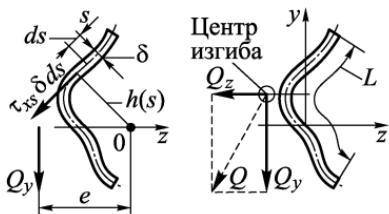


Рис. 8.44

Здесь интегрирование проводится по всей длине  $L$  средней линии сечения.

Подставив в это равенство выражение (8.4.1) для  $\tau_{xs}$ , после простейших преобразований получим

$$e = \frac{1}{J_z} \int_L h(s) S_z^{\text{отс}}(s) ds. \quad (8.4.3)$$

При вычислении интеграла в этой формуле нужно помнить, что он порожден интегралом (8.4.2), который по своему смыслу является равнодействующим моментом элементарных касательных усилий. Поэтому в (8.4.3) статическому моменту  $S_z^{\text{отс}}$  необходимо присваивать направление  $\tau_{xs}$ , а сам интеграл вычислять как «момент» статического момента, т.е. по тем же правилам, что и интеграл в (8.4.2).

Пусть теперь на эту же балку действуют горизонтальные нагрузки, вызывающие появление в ее сечениях таких касательных усилий  $\tau_{xs}\delta ds$ , равнодействующей которых является перерезывающая сила  $Q_z$ . Тогда, рассуждая точно так же, можно найти линию действия  $Q_z$ . Точку пересечения линий действия  $Q_y$  и  $Q_z$  называют *центром изгиба* (рис. 8.44). Силы  $Q_y$  и  $Q_z$  являются составляющими полной перерезывающей силы  $Q$ . Таким образом,  $Q$  является равнодействующей возникающих в сечении касательных усилий, а центр изгиба — это точка ее приложения.

Из примера 8.6 видно, что у симметричного сечения центр изгиба лежит на оси симметрии. Доказательство этого утверждения в общем случае предоставляем читателю.

Если бы при составлении уравнения (8.4.2) мы в качестве точки  $O$  выбрали центр изгиба, то мы бы получили, что  $e = 0$ , а уравнение (8.4.2) приняло вид

$$\int_L h(s)\tau_{xs}(s)\delta ds = 0. \quad (8.4.4)$$



Рис. 8.45

Механический смысл этого равенства позволяет понимать центр изгиба как точку, относительно которой равен нулю суммарный момент возникающих в сечении элементарных касательных усилий. Такое понимание центра изгиба позволяет сразу сделать вывод, что центр изгиба изображенного на рис. 8.45 углового сечения находится в вершине угла.

Центр изгиба также называют *центром жесткости*, а геометрическое место центров изгиба сечений балки называют ее *осью жесткости*.

Рассмотрим примеры определения центра изгиба с помощью формулы (8.4.3).

Пример 8.7. Найдем центр изгиба для сечения, показанного на рис. 8.46. Эпюру  $S_z^{\text{отс}}$ , данную на этом рисунке, можно легко построить так же, как в примере 8.6. На наклонном участке  $0-1$  отсеченная часть сечения от точки  $0$  до точки  $s$  имеет статический момент

$$S_z^{\text{OTC}} = F^{\text{OTC}} y_{\text{T}}^{\text{OTC}} = s \delta \frac{s}{2\sqrt{2}}. \quad (8.4.5)$$

Входящий в формулу (8.4.3) интеграл найдем как сумму интегралов по участкам, учитывая направления моментов от касательных усилий. Примем положительными моменты, направленные против часовой стрелки. Тогда, если  $K$  — точка, относительно которой подсчитывается момент, получим

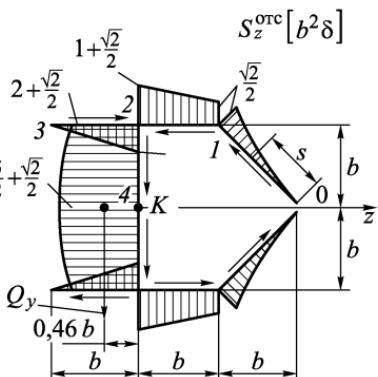


Рис. 8.46

$$\begin{aligned} \int_L h(s) S_z^{\text{OTC}}(s) ds &= \\ &= 2 \left( \int_{0-1} \sqrt{2} b S_z^{\text{OTC}} ds + \int_{1-2} b S_z^{\text{OTC}} ds - \int_{3-2} b S_z^{\text{OTC}} ds \right) = \\ &= 2 \left( \sqrt{2} b \int_{0-1} S_z^{\text{OTC}} ds + b \int_{1-2} S_z^{\text{OTC}} ds - b \int_{3-2} S_z^{\text{OTC}} ds \right). \end{aligned}$$

Первый из этих интегралов вычислим с учетом выражения (8.4.5):

$$\int_{0-1} S_z^{\text{OTC}} \, ds = \int_0^{\sqrt{2}b} \frac{\delta}{2\sqrt{2}} s^2 \, ds = \frac{1}{3} b^3 \delta.$$

Остальные интегралы легко вычислить как площади эпюры  $S_z^{\text{отс}}$  по рис. 8.46:

$$\int_{1-2} S_z^{\text{OTC}} \, ds = b \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} b^2 \delta = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} b^3 \delta,$$

$$\int_{2-3} S_z^{\text{OTC}} \, ds = \frac{1}{2} b^3 \delta.$$

Тогда

$$\int_L h(s) S_z^{\text{OTC}} ds = \frac{5}{3} \sqrt{2} b^4 \delta = 2,36 b^4 \delta.$$

Момент инерции  $J_z$  сечения можно подсчитать как удвоенный момент инерции его верхней половины:

$$J_z = 2(J_z^{2-4} + J_z^{3-1} + J_z^{0-1}) = 2 \left( \frac{\delta b^3}{3} + 2b\delta b^2 + \frac{\sqrt{2}\delta b^3}{3} \right) = 5,6b^3\delta.$$

Таким образом,  $e = \frac{2,36}{5,6}b = 0,42b$ .

**Пример 8.8.** Найдем центр изгиба разрезанной вдоль тонкостенной трубы, сечение которой показано на рис. 8.47. Под-

считаем  $S_z^{\text{OTC}}$  как статический момент отсеченной части, соответствующей центральному углу  $\theta$ :

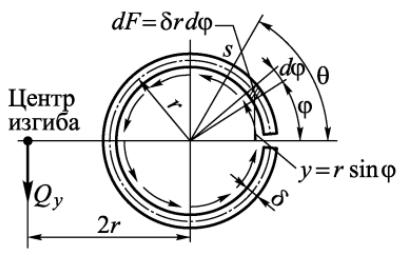


Рис. 8.47

$$S_z^{\text{OTC}}(s) = S_z^{\text{OTC}}(r\theta) = \int_{F^{\text{OTC}}} y dF =$$

$$= \int_0^\theta r \sin \varphi \delta r d\varphi = r^2 \delta (1 - \cos \theta).$$

Взяв центр круга в качестве точки для подсчета момента касательных усилий, получим

$$\int_L h S_z^{\text{OTC}} ds = \int_0^{2\pi} rr^2 \delta (1 - \cos \theta) r d\theta = 2\pi r^4 \delta.$$

Момент инерции  $J_z$  тонкостенного кругового сечения будет

$$J_z = \int_F y^2 dF = \int_0^{2\pi} r^2 \sin \varphi \delta r d\varphi = \pi r^3 \delta.$$

Тогда

$$e = \frac{2\pi r^4 \delta}{\pi r^3 \delta} = 2r.$$

## 8.5. Расчет на прочность при изгибе

**8.5.1.** Как следует из проведенного выше анализа, в поперечных сечениях балки при изгибе возникают нормальные и касательные напряжения:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{J_z} y, \quad \tau_{xy} = \frac{Q_y S_z^{\text{OTC}}}{J_z b} \quad \left( \tau_{xs} = \frac{Q_y S_z^{\text{OTC}}}{J_z \delta} \right). \quad (8.5.1)$$

Рассматривая распределения  $\sigma_x$  и  $\tau_{xy}$  по сечениюю, замечаем, что они обладают следующей важной особенностью. Нормальные напряжения достигают своих максимальных значений в тех точках сечения, для которых  $y = y_{\max}$  (т.е. которые максимально удалены от центральной оси  $z$ ) и где касательные напряжения, как правило, равны нулю или малы. А касательные напряжения максимальны там, где максимально отношение  $S_z^{\text{отс}}/b$ , а это обычно имеет место для точек сечения, лежащих либо на оси  $z$ , либо вблизи нее, т.е. там, где равны нулю или малы нормальные напряжения. Особенно наглядно это свойство видно для балки прямоугольного сечения (рис. 8.48). Поэтому при расчете на прочность балок можно пренебречь взаимным влиянием нормальных и касательных напряжений и сформулировать условия прочности балки отдельно по нормальным и по касательным напряжениям, т.е. считать балку прочной, если выполняются условия

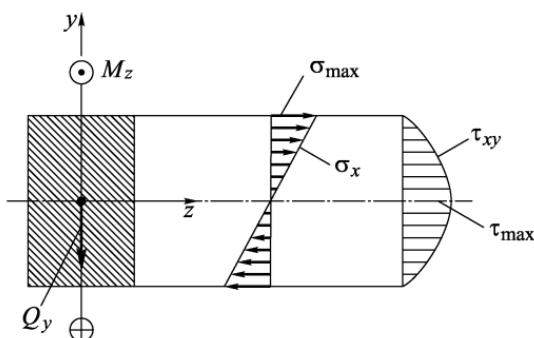


Рис. 8.48

мальных и касательных напряжений и сформулировать условия прочности балки отдельно по нормальным и по касательным напряжениям, т.е. считать балку прочной, если выполняются условия

$$-[\sigma]_c \leq \sigma_x \leq [\sigma]_p, \quad |\tau_{xy}| \leq [\tau]. \quad (8.5.2)$$

Для металлических балок определяющим, как правило, является первое из этих условий, так как в них обычно  $\max |\tau_{xy}|$  мал по сравнению с  $\max |\sigma|_x$ , а  $[\tau] \approx 0,5 \div 0,6 [\sigma]$ .

Для деревянных балок, у которых материал слабо сопротивляется сколу вдоль волокон, т.е.  $[\tau]$  мало в сравнении с  $[\sigma]$ , определяющим может оказаться второе из условий (8.5.2). То же самое и по тем же причинам может случиться и для балок, выполненных из волокнистых композиционных материалов. Особенно, если эти балки тонкостенные.

Ниже мы подробно рассмотрим использование для расчета на прочность первого из условий (8.5.2), т.е. условия прочности по нормальным напряжениям.

**8.5.2.** Рассмотрим балку из материала, который одинаково работает на растяжение и сжатие, т.е. у которого  $[\sigma]_p = [\sigma]_c = [\sigma]$ . Тогда условие прочности по нормальным напряжениям можно записать в виде

$$|\sigma| \leq [\sigma]. \quad (8.5.3)$$

Имея в виду линейный характер распределения нормальных напряжений по сечению, это условие можно заменить равносенным:

$$|\sigma|_{\max} \leq [\sigma]. \quad (8.5.4)$$

Здесь

$$|\sigma|_{\max} = \sigma_{\max} = \left| \frac{M_z}{J_z} y_{\max} \right|,$$

где  $y_{\max}$  — расстояние от центральной оси  $z$  сечения до наиболее удаленных от нее волокон, как это имеет место для балки с сечением, показанным на рис. 8.49. Часто эту формулу записывают в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z}, \quad W_z = \frac{J_z}{y_{\max}}.$$

Величину  $W_z$ , которая по существу является геометрической характеристикой сечения, называют *моментом сопротивления изгибу*.

Для балки постоянного сечения максимальные в сечении напряжения  $\sigma_{\max}$  достигнут своей наибольшей величины там, где действует

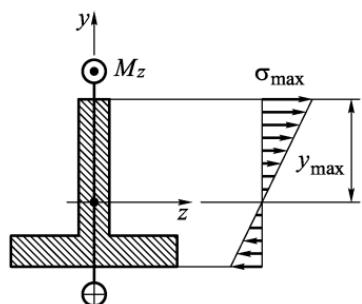


Рис. 8.49

ет максимальный по абсолютной величине изгибающий момент  $M_z$ . Поэтому условие (8.5.4) можно заменить следующим:

$$\max(\sigma_{\max}) = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (8.5.5)$$

Иногда это условие удобно записывать в виде

$$W_z \geq W_{z \text{ потр}} = \frac{|M_z|_{\max}}{[\sigma]}. \quad (8.5.6)$$

Здесь  $W_{z \text{ потр}}$  — минимальный потребный момент сопротивления сечения балки. Как видно из (8.5.6), он определяется величиной  $|M_z|_{\max}/[\sigma]$ , которая зависит только от нагрузки, и материала балки.

**Пример 8.9.** Для балки, рассмотренной в примере 8.3, считая ее стальной, подберем из условий прочности следующие сечения: сплошное круглое, прямоугольное с отношением высоты  $H$  к основанию  $B$ , равным  $H/B = 2$ , и стандартное двутавровое. При этом примем, что  $a = 1$  м,  $q_0 = 0,02$  Мн/м,  $[\sigma] = 200$  МПа.

Как видно из эпюры  $M_z$  для балки, данной на рис. 8.23,  $|M_z|_{\max} = 1,17qa^2$ . Тогда

$$W_z \text{ потр} = \frac{1,17qa^2}{[\sigma]} = \frac{1,17 \cdot 0,02 \cdot 10^6 \cdot 1^2}{200 \cdot 10^6} = 1,17 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 117 \text{ см}^3.$$

Момент сопротивления кругового сечения

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{\pi d^4}{64} / \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3.$$

Минимальная величина  $W_z$ , при которой условие прочности еще будет удовлетворено, равна  $W_z \text{ потр}$ . Минимальный диаметр кругового сечения, обеспечивающий прочность балки, найдем из условия:  $W_z = 0,1d^3 \text{ потр} = W_z \text{ потр} = 117 \text{ см}^3$ . Отсюда следует, что  $d_{\text{потр}} = \sqrt[3]{1170} = 10,5 \text{ см}$ .

Подсчитаем момент сопротивления прямоугольника с учетом того, что  $H = 2B$ :

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{BH^3}{12} / \frac{H}{2} = \frac{1}{6} BH^2 = \frac{2}{3} B^3.$$

Из условия прочности  $W_z = \frac{2}{3} B^3 \text{ потр} = W_z \text{ потр} = 117 \text{ см}^3$  найдем минимальную величину  $B$ :

$$B_{\text{потр}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} 117} = \sqrt[3]{175,5} = 5,6 \text{ см} \quad \text{и} \quad H_{\text{потр}} = 2B_{\text{потр}} = 11,2 \text{ см}.$$

Балку с двутавровым сечением подберем по ГОСТ 8239-72 (см. приложение, табл. 3)<sup>1)</sup>. Как видно из таблицы, наименьший момент сопротивления, удовлетворяющий условию прочности  $W_z \geq W_z \text{ потр} = 117 \text{ см}^3$ , имеет профиль № 18, для которого  $W_z = 143 \text{ см}^3$ .

Все три рассмотренных нами сечения даны в одном масштабе на рис. 8.50. Сравним массы балок, имеющих круглое, прямоугольное и двутавровое сечения. Так как эти балки имеют одинаковую длину и выполнены из одного материала, то их массы относятся как площади поперечных сечений. Площадь круглого сечения  $F_k = \frac{1}{4}\pi d_{\text{потр}}^2 = \frac{1}{4}\pi \cdot 10,6^2 = 88 \text{ см}^2$ . Площадь прямоугольного сечения  $F_p = B_{\text{потр}} H_{\text{потр}} = 5,6 \cdot 11,2 = 62,7 \text{ см}^2$ . Площадь двутаврового сечения берем из табл. 3 приложения  $F_d = 23,4 \text{ см}^2$ . Видно, что двутавровая балка оказывается в  $F_p/F_d = 62,7/23,4 = 2,68$  раза легче балки с прямоугольным сечением

<sup>1)</sup> Наша ось  $z$  соответствует оси  $x$  ГОСТа.

и в  $F_{\text{к}}/F_{\text{д}} = 88/23,4 = 3,75$  раза легче балки круглого сечения. Такая выгодность двутаврового сечения по сравнению с круговым и прямоугольным становится понятной, если рассмотреть распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  по этим сечениям.

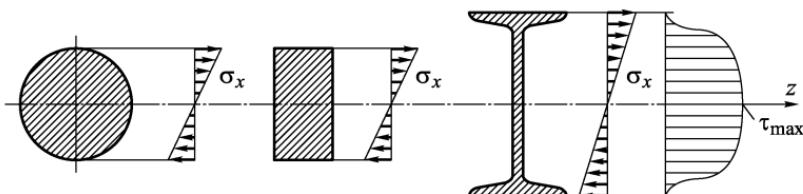


Рис. 8.50

Эпюры  $\sigma_x$  показаны рядом с сечениями на рис. 8.50. Как видно, форма двутаврового сечения такова, что основная часть материала, сосредоточенная в полках, работает при напряжениях, близких к максимальным. В то же время у балки прямоугольного сечения значительная часть материала, расположенная вблизи нейтральных волокон (вблизи оси  $z$ ), испытывает напряжения существенно меньшие, чем допускает материал, т.е. работает с недогрузкой. Еще хуже в этом смысле распределен материал по круговому сечению.

Подсчитаем касательные напряжения в двутавровой балке. Их эпюра, соответствующая формуле Д. Журавского, также показана на рис. 8.50. Найдем  $\tau_{\text{max}}$ . Максимальная величина перерезывающей силы, как это видно из рис. 8.23, равна  $Q_{y \text{ max}} = 1,67q_0a$ . Из табл. 3 приложения берем необходимые для расчета величины для профиля № 18: момент инерции сечения  $J_z = 1290 \text{ см}^4$ , толщина сечения на оси  $z$   $d = 0,51 \text{ см}$ , статический момент верхней половины сечения  $S_z^{\text{отс}} = 81,4 \text{ см}^3$ . Тогда по формуле (8.3.6)

$$\tau_{\text{max}} = \frac{1,67q_0aS_z^{\text{отс}}}{J_z d} = \frac{1,67 \cdot 0,02 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 81,4 \cdot 10^{-6}}{1290 \cdot 10^{-8} \cdot 0,51 \cdot 10^{-2}} = 41,3 \text{ МПа.}$$

Максимальные же нормальные напряжения в этой балке

$$\sigma_{\text{max}} = |M_z|_{\text{max}}/W_z = 163 \text{ МПа.}$$

Поэтому ясно, что касательные напряжения для рассмотренной балки не определяют ее прочность.

Еще меньше касательные напряжения будут в балке прямоугольного сечения и тем более в балке круглого сечения. Представляем читателю самому убедиться в этом.

Следует отметить одно важное свойство двутавровою сечения. Его форма такова, что большая часть нормальных напряжений, а следовательно, основная часть изгибающего момента  $M_z$  воспринимается полками. А большая часть касательных напряжений  $\tau_{xy}$  и, следовательно, основная доля перерезывающей силы  $Q_y$  воспринимаются стенкой.

**8.5.3.** Рассмотрим теперь расчет на прочность при изгибе балки, материал которой по-разному работает на растяжение и сжатие, т.е. когда  $[\sigma]_p \neq [\sigma]_c$ . В этом случае условия прочности сводятся к следующим:

$$\sigma_x p \leq [\sigma]_p, \quad |\sigma_x c| \leq [\sigma]_c. \quad (8.5.7)$$

Наиболее простая ситуация здесь возникает при расчете балки, поперечное сечение которой симметрично относительно оси  $z$ , так как в этом случае

$$\max \sigma_x p = \max |\sigma_x c| = \frac{|M_z|_{\max}}{W_z}. \quad (8.5.8)$$

Поэтому условия прочности (8.5.7) можно заменить одним условием:

$$\frac{|M_z|_{\max}}{W_z} \leq \min \{[\sigma]_p, [\sigma]_c\}. \quad (8.5.9)$$

Это условие отличается от условия (8.5.5) лишь тем, что в его правой части используется минимальное из допускаемых напряжений для материала балки.

Фактически, как это видно из (8.5.8), требование симметрии сечения относительно оси  $z$  не обязательно. Достаточно, чтобы были одинаковы расстояния от оси  $z$  до наиболее удаленных от нее растянутых и сжатых волокон.

Более сложный случай возникает при расчете балок с несимметричным относительно оси  $z$  сечением. Здесь, чтобы избежать ошибок, необходимо рассматривать условия прочности для тех сечений балки, где достигается максимальная и минимальная величины  $M_z$ .

П р и м е р 8.10. Для той же балки, изображенной на рис. 8.23, определим размер  $b$  поперечного сечения, форма которого дана на рис. 8.51. Материал балки — стеклотекстолит, для которого

$$[\sigma]_p = 75 \text{ МПа}, \quad [\sigma]_c = 120 \text{ МПа}.$$

Примем  $q_0 = 0,02 \text{ МН/м}$ . Легко подсчитать, что для рассматриваемого сечения  $J_z = 18,1b^4$ ,  $y_1 = 1,75b$ ,  $y_2 = 3,25b$ . Обозначим через  $I$  — сечение, где действует  $M_{z \min} = -1,17q_0a^2$ , а через  $II$  — сечение, где  $M_z = M_{z \max} = 0,42q_0a^2$ . Эпюры  $\sigma_x$  в этих сечениях показаны на рис. 8.51, причем сжимающие напряжения направлены влево, а растягивающие — вправо. Тогда условия

прочности балки будут выполнены, если

$$|\sigma_2^I| \leq [\sigma]_c, \quad \sigma_1^I \leq [\sigma]_p, \quad \sigma_2^{II} \leq [\sigma]_p; \quad (8.5.10)$$

но

$$\begin{aligned} |\sigma_2^I| &= \frac{|M_{z \min}|}{J_z} |y_2| = \frac{1,17q_0a^2}{J_z} \cdot 3,25b = 3,80 \frac{q_0a^2}{J_z} b, \\ \sigma_1^I &= \frac{|M_{z \min}|}{J_z} |y_1| = \frac{1,17q_0a^2}{J_z} \cdot 1,75b = 2,05 \frac{q_0a^2}{J_z} b, \\ \sigma_2^{II} &= \frac{|M_{z \max}|}{J_z} |y_2| = \frac{0,42q_0a^2}{J_z} \cdot 3,25b = 1,37 \frac{q_0a^2}{J_z} b. \end{aligned}$$

Сравнивая величины напряжений, приходим вместо условий (8.5.10) уже к двум условиям:

$$|\sigma_2^I| = 3,80 \frac{q_0a^2}{J_z} b \leq [\sigma]_c, \quad \sigma_1^I = 2,05 \frac{q_0a^2}{J_z} b \leq [\sigma]_p.$$

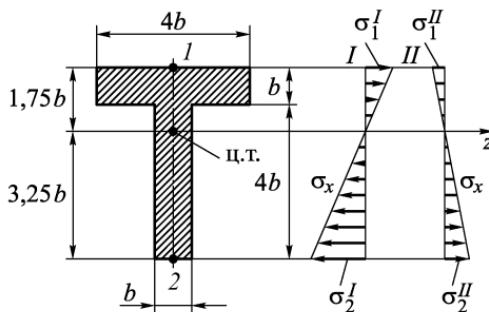


Рис. 8.51

Но так как  $3,80/2,05 = 1,85$ , а  $[\sigma]_c/[\sigma]_p = 1,6$ , окончательно приходим к выводу, что из этих двух условий определяющим является первое:

$$3,80 \frac{q_0a^2}{J_z} b = \frac{3,80q_0a^2}{18,1b^3} \leq [\sigma]_c.$$

Отсюда

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3,80q_0a^2}{18,1[\sigma]_c}} = \sqrt[3]{\frac{3,80 \cdot 0,02 \cdot 10^6 \cdot 1^2}{18,1 \cdot 120 \cdot 10^6}} = 0,0327 \text{ м} = 3,27 \text{ см}.$$

Предоставляем читателю убедиться самому, что, если повернуть сечение балки на  $180^\circ$ , то минимальный его характерный размер  $b$  окажется больше только что рассчитанного. Нетрудно понять, что это получается потому, что в рассчитанном положении (см. рис. 8.51) в сечении I, где действует  $\max |M_z|$ , наиболее удаленные от оси волокна расположены в сжатой зоне. А так как

материал балки лучше работает на сжатие, то при таком расположении сечения максимально используется именно это его свойство.

## 8.6. Дифференциальное уравнение упругой линии балки

**8.6.1.** Приступим к изучению перемещений балок при изгибе. Возможность их определения предоставляет соотношение, связывающее кривизну оси балки  $1/\rho$  с изгибающим моментом  $M_z$  (см. разделы 8.2, 8.3):

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{M_z}{EJ_z}. \quad (8.6.1)$$

Обозначим вертикальные перемещения оси балки, называемые *прогибами*, через  $v$ . Тогда изогнутая ось или, как ее называют, *упругая линия балки*, представляет собой кривую  $v(x)$  в плоскости  $xy$ , где  $x$  — координатная ось, совпадающая с недеформированной осью балки (рис. 8.52). Из курса математического

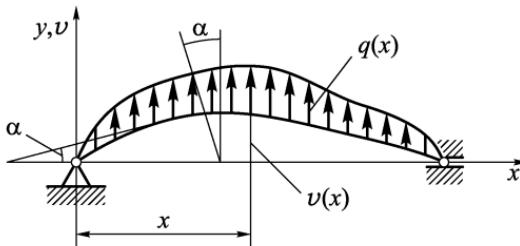


Рис. 8.52

анализа известно выражение для кривизны  $1/\rho$  плоской кривой  $v(x)$ :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{v''}{[1 + (v')^2]^{3/2}}, \quad v' = \frac{dv}{dx}, \quad v'' = \frac{d^2v}{dx^2}. \quad (8.6.2)$$

Подставив (8.6.2) в (8.6.1), получим дифференциальное уравнение для  $v(x)$ :

$$\frac{v''}{[1 + (v')^2]^{3/2}} = \pm \frac{M_z}{EJ_z}. \quad (8.6.3)$$

Решение этого уравнения определяет форму упругой линии балки. Но так как оно нелинейно, то его аналитическое решение может быть получено только для некоторых частных случаев изгиба балок постоянной жесткости, которые были исследованы еще Я. Бернулли, Л. Эйлером, С. Якоби, Ж. Лагранжем. И даже для этих случаев решение связано с преодолением значительных математических трудностей.

Рассмотрим углы  $\alpha(x)$  между касательными к оси балки и осью  $x$ . Ясно, что в условиях гипотезы плоских сечений эти углы равны углам поворота сечений балки (см. рис. 8.52). В соответствии с геометрическим смыслом производной  $\operatorname{tg} \alpha = v'$ .

Как мы уже отмечали ранее в гл. 1, для большинства конструкций деформированная форма мало отличается от недеформированной. Это свойство как раз и положено в основу принципа малости деформаций, используемого при составлении уравнений равновесия отсеченных частей конструкции. Для изогнутой балки это предположение равносильно тому, что углы  $\alpha(x)$  малы настолько, что  $(\operatorname{tg} \alpha)^2 = (v')^2 \ll 1$ . В таком случае можно пренебречь величиной  $(v')^2$  по сравнению с единицей. Тогда  $1/\rho = v''$ , и уравнение (8.6.3) упрощается и становится линейным:

$$v'' = \pm \frac{M_z}{EJ_z}. \quad (8.6.4)$$

Это уравнение называют *дифференциальным уравнением упругой линии*. Знак в нем зависит от выбора положительного направления оси  $v$ . Как видно из рис. 8.53 *a*, если считать прогиб  $v$  положительным, когда он происходит вверх, то при положительном изгибающем моменте  $M_z$  балка изгибается так, что  $v'' > 0$ . В таком случае знаки  $v''$  и  $M_z$  в уравнении (8.6.4) будут согласованы, если в нем принять знак «+». Противоположная ситуация показана на рис. 8.53 *b*.

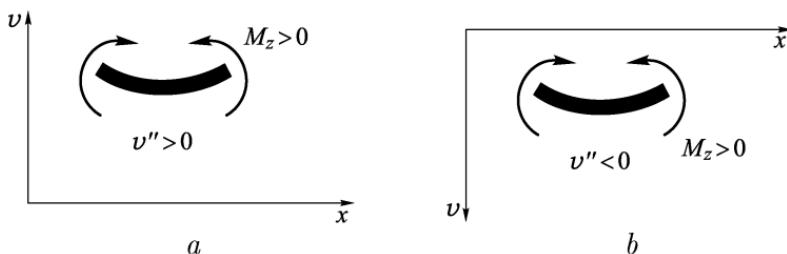


Рис. 8.53

В принятом приближении углы наклона  $\alpha$  упругой линии к оси  $x$  настолько малы, что  $\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = v'$ . Поэтому дифференциальное уравнение второго порядка (8.6.4) можно заменить системой двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d\alpha}{dx} = \pm \frac{M_z}{EJ_z}, \quad \frac{dv}{dx} = \alpha. \quad (8.6.5)$$

Эти дифференциальные уравнения очень просты, и их общее решение можно выписать, причем в различных формах:

1) с использованием неопределенных интегралов

$$\alpha(x) = \pm \int \frac{M_z}{EJ_z} dx + C,$$

$$v(x) = \int \alpha dx + D = \iint \frac{M_z}{EJ_z} dx dx + Cx + D, \quad (8.6.6)$$

здесь  $C$  и  $D$  — постоянные интегрирования, которые определяются из условий закрепления балки;

2) с использованием определенных интегралов

$$\alpha(\xi) = -\alpha(x_0) \pm \int_{x_0}^{\xi} \frac{M_z(x)}{EJ_z} dx,$$

$$v(\eta) = v(x_0) + \int_{x_0}^{\eta} \alpha d\xi =$$

$$= v(x_0) + \alpha(x_0)(\eta - x_0) + \int_{x_0}^{\eta} \left( \int_{x_0}^{\xi} \frac{M_z}{EJ_z} dx \right) d\xi. \quad (8.6.7)$$

Здесь переменные  $x$ ,  $\xi$  и  $\eta$  — координаты сечения, отсчитывающиеся вдоль одной и той же оси и от одного и того же начала.

Рассмотрим примеры применения общих решений (8.6.6), (8.6.7).

**Пример 8.11.** Найдем прогибы двухопорной балки постоянной жесткости  $EJ_z$ , показанной на рис. 8.54 вместе с реакциями опор  $R_A$  и  $R_B$ . На ее участках  $0 \leq x \leq 2l$  и  $2l \leq x \leq 3l$  из условий равновесия отсеченных частей, данных на рис. 8.54, получаем

$$M_z(x) = \frac{3}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2 \quad (0 \leq x \leq 2l), \quad (8.6.8)$$

$$M_z(x)ql(3l - x) \quad (2l \leq x \leq 3l). \quad (8.6.9)$$

Рассмотрим сначала участок между опорами, т.е. участок  $0 \leq x \leq 2l$ . Формулы (8.6.6), (8.6.7) дают следующие выражения для угла  $\alpha$  и прогиба  $v$  (при  $x_0 = 0$ ):

$$\alpha(x) = \frac{q}{EJ_z} \left( \frac{3}{4}lx^2 - \frac{1}{6}x^3 \right) + C, \quad (8.6.10)$$

$$v(x) = \frac{q}{EJ_z} \left( \frac{1}{4}lx^3 - \frac{1}{24}x^4 \right) + Cx + D;$$

$$\alpha(\xi) = \alpha(0) + \frac{q}{EJ_z} \left( \frac{3}{4}l\xi^2 - \frac{1}{6}\xi^3 \right), \quad (8.6.11)$$

$$v(\eta) = v(0) + \eta\alpha(0) + \frac{q}{EJ_z} \left( \frac{1}{4}l\eta^3 - \frac{1}{24}\eta^4 \right).$$

Из сравнения этих форм записи видно, что  $C = \alpha(0)$ ,  $D = v(0)$ . Найдем их из условий закрепления балки  $v(0) = 0$ ,  $v(2l) = 0$ .

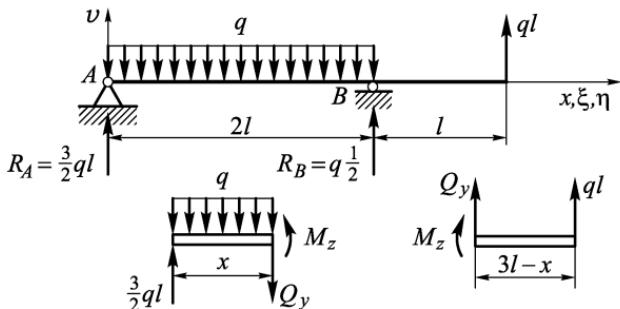


Рис. 8.54

Первое из этих условий сразу дает, что  $D = v(0) = 0$ . Из второго условия легко получаем

$$C = \alpha(0) = -\frac{q}{2lEJ_z} \left[ \frac{l(2l)^3}{4} - \frac{(2l)^4}{24} \right] = -\frac{2}{3} \frac{ql^3}{EJ_z}.$$

Таким образом, при  $0 \leq x \leq 2l$ :

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= -\frac{q}{EJ_z} \left( \frac{2}{3}l^3 - \frac{3}{4}lx^2 + \frac{1}{6}x^3 \right), \\ v(x) &= -\frac{q}{EJ_z} \left( \frac{2}{3}l^3x - \frac{3}{4}lx^3 + \frac{1}{24}x^4 \right).\end{aligned}$$

Отсюда при  $x = 2l$  получаем, что  $\alpha(2l) = ql^3/(EJ_z)$ .

Теперь нетрудно построить выражения для  $\alpha(x)$  и  $v(x)$  на участке  $2l \leq x \leq 3l$ . Так как  $\alpha(2l) = ql^3/EJ_z$ , а  $v(2l) = 0$ , то форма общего решения (8.6.7) и выражение для  $M_z$  (8.6.9) сразу приводят нас к искомому результату:

$$\alpha(\xi) = \alpha(2l) + \int_{2l}^{\xi} \frac{ql}{EJ_z} (3l - x) dx = \frac{ql}{EJ_z} \left( -3l^2 + 3l\xi - \frac{1}{2}\xi^2 \right), \quad (8.6.12)$$

$$v(\eta) = v(2l) + \alpha(2l)(\eta - 2l) +$$

$$+ \int_{2l}^{\eta} \int_{2l}^{\xi} \frac{ql}{EJ_z} (3l - x) dx d\xi = \frac{ql}{EJ_z} \left( \frac{4}{3}l^3 - 3l^2\eta + \frac{3}{2}l\eta^2 - \frac{1}{6}\eta^3 \right).$$

Общее решение (8.6.6) дает с учетом (8.6.9) следующие выражения для этого участка:

$$\alpha(x) = \frac{q}{EJ_z} \left( 3lx - \frac{1}{2}x^2 \right) + C,$$

$$v(x) = \frac{q}{EJ_z} \left( \frac{2}{3}lx^2 - \frac{1}{6}x^3 \right) + Cx + D.$$

Определяя в этих выражениях  $C$  и  $D$  из условий  $\alpha(2l) = \frac{q l^3}{EJ_z}$ ,  $v(2l) = 0$ , без труда приходим к выражениям (8.6.12), если в них заменить  $\eta$  и  $\xi$  на идентичную координату  $x$ .

**Пример 8.12.** Найдем прогиб двухопорной балки, нагруженной сосредоточенной силой (рис. 8.55). Для этой балки

$$M_z = \frac{P}{3}x \quad (0 \leq x \leq 2a); \quad M_z = \frac{2}{3}P(3a - x) \quad (2a \leq x \leq 3a).$$

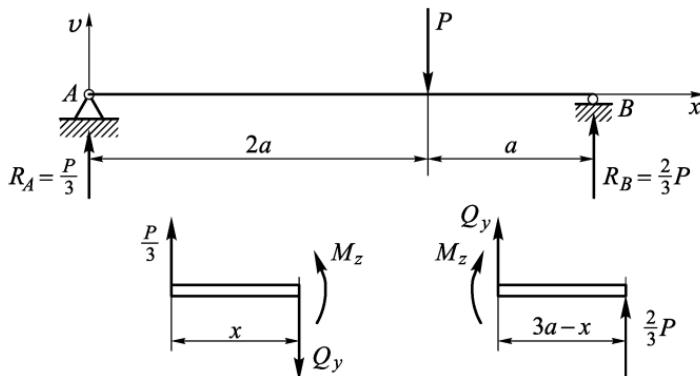


Рис. 8.55

Воспользуемся формой (8.6.6) общего решения дифференциального уравнения упругой линии. Тогда

$$\alpha(x) = \frac{P}{EJ_x} \frac{x^2}{6} + C_1,$$

$$v(x) = \frac{P}{EJ_z} \frac{x^3}{18} + C_1 x + D_1 \quad (0 \leq x \leq 2a); \quad (8.6.13)$$

$$\alpha(x) = \frac{P}{EJ_x} \left( 2ax - \frac{x^2}{3} \right) + C_2,$$

$$v(x) = \frac{P}{EJ_z} \left( ax^2 - \frac{x^3}{9} \right) + C_2 x + D_2 \quad (2a \leq x \leq 3a). \quad (8.6.14)$$

Для определения четырех постоянных интегрирования  $C_1$ ,  $D_1$ ,  $C_2$ ,  $D_2$  используем, кроме условий закрепления концов балки

$v(0) = 0$ ,  $v(3a) = 0$ , также условия непрерывности  $\alpha$  и  $v$  на границе участков, т.е. при  $x = 2a$ :

$$\alpha^-(2a) = \alpha^+(2a), \quad v^-(2a) = v^+(2a).$$

Здесь индексом «-» обозначены значения  $\alpha$  и  $v$  при  $x = 2a$  по выражениям (8.6.13), а индексом «+» — значения  $\alpha$  и  $v$  по выражениям (8.6.14). Такие условия часто называют условиями *сопряжения решений по участкам*. Таким образом, получаем систему уравнений

$$v(0) = 0 \rightarrow D_1 = 0,$$

$$\alpha^-(2a) = \alpha^+(2a) \rightarrow C_1 + \frac{P}{EJ_z} \frac{(2a)^2}{6} = C_2 + \frac{P}{EJ_z} \left[ 4a^2 - \frac{(2a)^2}{3} \right],$$

$$\begin{aligned} v^-(2a) = v^+(2a) \rightarrow C_1 \cdot 2a + \frac{P}{EJ_z} \frac{(2a)^3}{18} = \\ = C_2 \cdot 2a + D_2 + \frac{P}{EJ_z} \left[ a(2a)^2 - \frac{(2a)^3}{9} \right], \end{aligned}$$

$$v(3a) = 0 \rightarrow C_2 \cdot 3a + D_2 + \frac{P}{EJ_z} \left[ a(3a)^2 - \frac{(3a)^3}{9} \right] = 0.$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$C_1 = -\frac{4}{9} \frac{Pa^2}{EJ_z}, \quad C_2 = -\frac{22}{9} \frac{Pa^2}{EJ_z}, \quad D_2 = \frac{4}{3} \frac{Pa^3}{EJ_z}.$$

Поэтому

$$\alpha(x) = \begin{cases} \frac{P}{EJ_z} \left( \frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{9}a^2 \right) & (0 \leq x \leq 2a), \\ \frac{P}{EJ_z} \left( -\frac{1}{3}x^2 + 2ax - \frac{22}{9}a^2 \right) & (2a \leq x \leq 3a); \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} \frac{P}{EJ_z} \left( \frac{1}{18}x^3 - \frac{4}{9}a^2x \right) & (0 \leq x \leq 2a), \\ \frac{P}{EJ_z} \left( -\frac{x^3}{9} + ax^2 - \frac{22}{9}a^2x + \frac{4}{3}a^3 \right) & (2a \leq x \leq 3a). \end{cases}$$

**8.6.2.** Как видно из решения последнего примера, наличие двух участков изменения  $M_z$  по длине балки и вызванная этим необходимость сопрягать решения по участкам при  $x = 2a$  существенно осложнили решение. А. Клебш в 1862 г. для балок постоянной жесткости обнаружил такую форму представления общего решения дифференциального уравнения упругой линии, которая обеспечивает выполнение условий сопряжения решений по границам участков.

Рассмотрим балку постоянной жесткости, изображенную на рис. 8.56. Эта балка нагружена сосредоточенным моментом  $M$ ,

сосредоточенной силой  $P$  и погонной нагрузкой постоянной интенсивности  $q$ . Запишем выражения для изгибающего момента  $M_z$  по участкам балки:

$$M_z(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < x_M), \\ M & (x_M < x \leq x_P), \\ M + P(x - x_P) & (x_P \leq x \leq x_q), \\ M + P(x - x_P) + q \frac{(x - x_q)^2}{2} & (x_q \leq x). \end{cases} \quad (8.6.15)$$

Для определения  $\alpha(x)$  проинтегрируем первое из уравнений (8.6.5), которое с учетом постоянства жесткости можно предста-

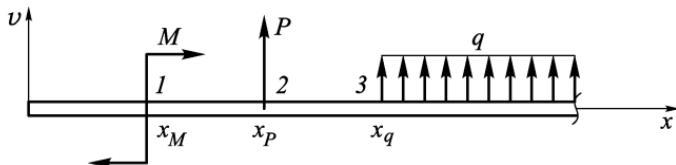


Рис. 8.56

вить как  $EJ_z\alpha' = M_z$ . Запишем его решение в форме неопределенного интеграла (8.6.6), для чего проинтегрируем выражения (8.6.15):

$$EJ_z\alpha(x) = \begin{cases} C_1 & (0 \leq x \leq x_M), \\ C_2 + M(x - x_M) & (x_M < x \leq x_P), \\ C_3 + M(x - x_M) + P \frac{(x - x_P)^2}{2} & (x_P < x \leq x_q), \\ C_4 + M(x - x_M) + P \frac{(x - x_P)^2}{2} + q \frac{(x - x_q)^3}{6} & (x_q < x). \end{cases} \quad (8.6.16)$$

Интегрирование было проведено без раскрытия скобок. Интеграл от  $M$  записан в виде  $M(x - x_M)$ , чтобы сохранить форму решения, полученную для  $P$  и  $q$ . Постоянные  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  нужно выбирать так, чтобы угол наклона упругой линии  $\alpha(x)$  не имел разрывов на границах участков балки, т.е. в сечениях 1, 2, 3. Поэтому в этих сечениях должны выполняться условия

$$\begin{aligned} \alpha^-(x_M) &= \alpha^+(x_M), & \alpha^-(x_P) &= \alpha^+(x_P), \\ \alpha^-(x_q) &= \alpha^+(x_q). \end{aligned} \quad (8.6.17)$$

Здесь мы использовали принятые раньше, например в гл. 2, обозначения

$$\alpha^-(x_M) = \alpha(x_M - dx), \alpha^+(x_M) = \alpha(x_M + dx), \dots$$

Чтобы удовлетворить этим условиям сопряжения, для выражений (8.6.16) должны выполняться соотношения:

$$C_1 = C_2, \quad C_2 + M(x_P - x_M) = C_3 + M(x_P - x_M), \quad (8.6.18)$$

$$C_3 + M(x_q - x_M) + P \frac{(x_q - x_P)^2}{2} = \\ = C_4 + M(x_q - x_M) + P \frac{(x_q - x_P)^2}{2}.$$

Отсюда сразу следует, что  $C_1 = C_2 = C_3 = C_4$ . Если обозначить через  $\alpha_0 = \alpha(0)$  — угол наклона упругой линии в начале координат (точка 0), то из (8.6.16) очевидно, что

$$C_1 = EJ_z \alpha_0. \quad (8.6.19)$$

Прогиб балки  $v$  найдем из уравнений (8.6.5), для чего используем форму его решения (8.6.6) и полученные выражения (8.6.16) и (8.6.19). Тогда

$$v(x) = \begin{cases} D_1 + EJ_z \alpha_0 x & (0 \leq x < x_M), \\ D_2 + EJ_z \alpha_0 x + M \frac{(x - x_M)^2}{2} & (x_M < x \leq x_P), \\ D_3 + EJ_z \alpha_0 x + M \frac{(x - x_M)^2}{2} + P \frac{(x - x_P)^3}{6} & (x_P < x \leq x_q), \\ D_4 + EJ_z \alpha_0 x + M \frac{(x - x_M)^2}{2} + P \frac{(x - x_P)^3}{6} + q \frac{(x - x_q)^4}{24} & (x_q < x). \end{cases} \quad (8.6.20)$$

Постоянные  $D_i$  должны быть выбраны так, чтобы определяющие прогиб балки выражения (8.6.20) не имели разрывов на границах участков, т.е. чтобы были удовлетворены условия

$$v^-(x_M) = v^+(x_M), \quad v^-(x_P) = v^+(x_P), \quad v^-(x_q) = v^+(x_q).$$

Подставив в эти условия выражения (8.6.20), мы получим для  $D_i$  уравнения, сходные с выражениями (8.6.18) для  $C_i$ . Из них очевидно, что  $D_1 = D_2 = D_3 = D_4$ . Обозначив через  $v_0 = v(0)$  прогиб в начале координат, из первого выражения (8.6.20) получаем, что

$$D_1 = EJ_z v_0. \quad (8.6.21)$$

Выражения для  $\alpha(x)$  (8.6.16) и  $v(x)$  (8.6.20) можно записать в компактной форме, если использовать так называемую функ-

цию Хэвисайда

$$H(x_i) = \begin{cases} 0 & (x < x_i), \\ 1 & (x > x_i), \end{cases} \quad (8.6.22)$$

график которой показан на рис. 8.57. С помощью этой функции выражения (8.6.16) и (8.6.20) приводятся к форме:

$$\begin{aligned} EJ_z \alpha(x) &= EJ_z \alpha_0 + M(x - x_M) H(x_M) + \\ &\quad + P \frac{(x - x_P)^2}{2} H(x_P) + q \frac{(x - x_q)^3}{6} H(x_q), \\ EJ_z v(x) &= EJ_z v_0 + EJ_z \alpha_0 x + M \frac{(x - x_M)^2}{2} H(x_M) + \\ &\quad + P \frac{(x - x_P)^3}{6} H(x_P) + q \frac{(x - x_q)^4}{24} H(x_q). \end{aligned} \quad (8.6.23)$$

Последнее из этих выражений называют *универсальным уравнением упругой линии*. При его выводе мы считали, что погонная нагрузка  $q$  действует на участке балки от  $x_q$  до правого ее конца. Если такая нагрузка действует на участке от  $x_q$  до  $x'_q$ , то ее можно рассматривать как результат наложения двух нагрузок, показанных на рис. 8.58. В этом случае универсальное уравнение упругой линии (8.6.23) запишется в форме

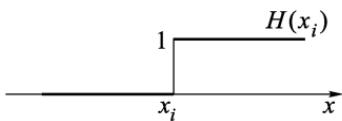


Рис. 8.57

$$\begin{aligned} EJ_z v(x) &= EJ_z v_0 + EJ_z \alpha_0 x + M \frac{(x - x_M)^2}{2} H(x_M) + \\ &\quad + P \frac{(x - x_P)^3}{6} H(x_P) + q \frac{(x - x_q)^4}{24} H(x_q) - q \frac{(x - x'_q)^4}{24} H(x'_q). \end{aligned} \quad (8.6.24)$$

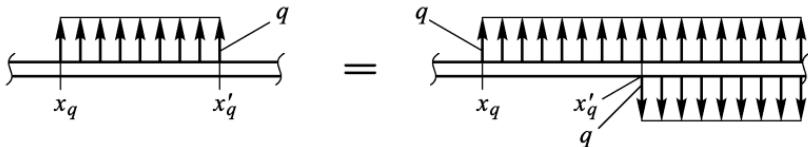


Рис. 8.58

И, наконец, если на балку действуют в сечениях  $x_{Mi}$  несколько сосредоточенных моментов  $M_i$ , в сечениях  $x_{Pj}$  — несколько сосредоточенных сил  $P_j$  и несколько погонных нагрузок  $q_k$  на участках между  $x_{qk}$  и  $x'_{qk}$ , то, используя принцип суперпозиции

нагрузок, можно записать универсальное уравнение упругой линии в форме

$$\begin{aligned} EJ_z v(x) = & EJ_z v_0 + EJ_z \alpha_0 x + \sum_i M_i \frac{(x - x_{Mi})^2}{2} H(x_{Mi}) + \\ & + \sum_j P_j \frac{(x - x_{Pj})^3}{6} H(x_{Pj}) + \\ & + \sum_k \left[ q \frac{(x - x_{qk})^4}{24} H(x_{qk}) - q_k \frac{(x - x'_{qk})^4}{24} H(x'_{qk}) \right]. \quad (8.6.25) \end{aligned}$$

В этом уравнении положительными считаются такие  $M_i$ ,  $P_j$ ,  $q_k$ , которые направлены так, как показано на рис. 8.56.

Рассмотрим примеры использования этого уравнения.

Пример 8.13. Найдем прогибы балки, рассмотренной в примере 8.12 (см. рис. 8.55). На эту балку действуют две сосредоточенные силы:  $\frac{1}{3}P$  при  $x = 0$  и  $-P$  при  $x = 2a$ . Тогда уравнение (8.6.25) для этой балки примет форму

$$\begin{aligned} EJ_z v(x) = & EJ_z v_0 + EJ_z \alpha_0 x + \frac{P}{3} \frac{(x - 0)^3}{6} H(0) - \\ & - P \frac{(x - 2a)^3}{6} H(2a). \quad (8.6.26) \end{aligned}$$

Так как  $v(0) = 0$ , то  $v_0 = 0$ . Величину  $\alpha_0$  найдем из условия, что  $v(3a) = 0$ . Тогда

$$v(3a) = EJ_z \alpha_0 \cdot 3a + \frac{P}{3} \frac{(3a)^3}{6} - P \frac{(3a - 2a)^3}{6} = 0.$$

Отсюда  $\alpha_0 = -\frac{4}{9} \frac{Pa^2}{EJ_z}$ . Тогда из (8.6.26) получаем

$$EJ_z v(x) = \begin{cases} P \left( -\frac{4}{9} a^2 x + \frac{x^3}{18} \right) & (0 \leq x \leq 2a), \\ -\frac{4}{9} Pa^2 x + \frac{Px^3}{18} - P \frac{(x - 2a)^3}{6} = \\ = P \left( \frac{4}{3} a^3 - \frac{22}{9} a^2 x + ax^2 - \frac{x^3}{9} \right) & (2a \leq x \leq 3a). \end{cases}$$

А этот результат конечно совпадает с решением примера 8.12. Но, как видно, он получен проще и без громоздких вычислений.

Пример 8.14. Для консольной балки, данной на рис. 8.59, запишем универсальное уравнение упругой линии и найдем прогиб конца балки и угол поворота ее среднего сечения. В заделке возникают реактивная сила  $2qa$  и реактивный момент  $\frac{5}{2}qa^2$ , по-

казанные штриховой линией. Их необходимо учитывать при написании уравнения упругой линии. Кроме того, в заделке прогиб и угол поворота равны нулю. Поэтому, если начало координаты  $x$  выбрать в заделке, то  $\alpha_0 = 0$  и  $v_0 = 0$ . Тогда согласно (8.6.25):

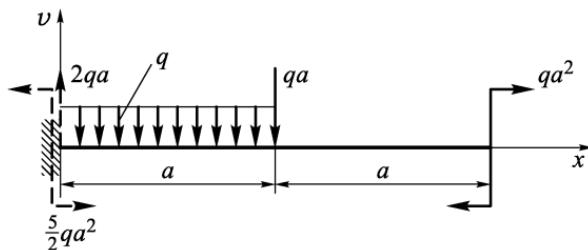


Рис. 8.59

$$\begin{aligned} EJ_z v(x) &= -\frac{5qa^2}{2} \frac{(x-0)^2}{2} H(0) + 2qa \frac{(x-0)^3}{6} H(0) - \\ &\quad - q \frac{(x-0)^4}{24} H(0) + q \frac{(x-a)^4}{24} H(a) - qa \frac{(x-a)^3}{6} H(a), \\ EJ_z \alpha(x) &= -\frac{5qa^2}{2} (x-0) H(0) + 2qa \frac{(x-0)^2}{2} H(0) - \\ &\quad - q \frac{(x-0)^3}{6} H(0) + q \frac{(x-a)^3}{6} H(a) - qa \frac{(x-a)^2}{2} H(a). \end{aligned}$$

Из этих выражений получаем

$$\begin{aligned} v(2a) &= \frac{qa^4}{EJ_z} \left( -\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{2} + \frac{2}{6} \cdot 8 - \frac{16}{24} + \frac{1}{24} - \frac{1}{6} \right) = -\frac{25}{8} \frac{qa^4}{EJ_z} = -3,13 \frac{qa^4}{EJ_z}, \\ \alpha(a) &= \frac{qa^3}{EJ_z} \left( -\frac{5}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = -\frac{5}{3} \frac{qa^3}{EJ_z} = -1,67 \frac{qa^3}{EJ_z}. \end{aligned}$$

Пример 8.15. Запишем выражение для прогиба балки, показанной на рис. 8.60. С учетом реакций опор, которые показаны

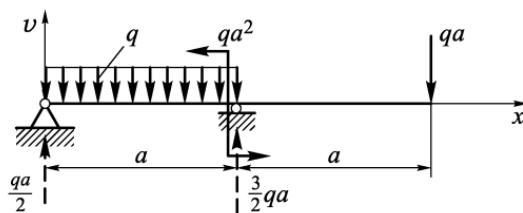


Рис. 8.60

штриховой линией, выражение для прогиба примет вид

$$\begin{aligned} EJ_z v(x) = EJ_z v_0 + EJ_z \alpha_0 x + \frac{qa}{2} \frac{(x-0)^3}{6} H(0) - \\ - q \frac{(x-0)^4}{24} H(0) + q \frac{(x-a)^4}{24} H(a) - qa^2 \frac{(x-a)^2}{2} H(a) + \\ + \frac{3}{2} qa \frac{(x-a)^3}{6} H(a). \end{aligned}$$

Так как прогиб левого конца балки  $v(0) = 0$ , то  $v_0 = 0$ . Величину угла поворота левого конца  $\alpha_0$  найдем из условия, что  $v(a) = 0$ . Тогда

$$EJ_z v(a) = EJ_z \alpha_0 a + \frac{qa}{2} \frac{a^3}{6} - q \frac{a^4}{24} = 0.$$

Отсюда  $\alpha_0 = -\frac{1}{24} \frac{qa^3}{EJ_z}$ .

## 8.7. Потенциальная энергия изгиба балки

**8.7.1.** Найдем потенциальную энергию изгиба балки. При поперечном изгибе в балке возникают нормальные  $\sigma_x$  и касательные  $\tau_{xy}$  или  $\tau_{xs}$  напряжения.

Выделим из балки поперечными и продольными сечениями элемент (продольное волокно) (рис. 8.61), объем которого  $dV = dx \cdot dF$ , и подсчитаем накаплившуюся в нем потенциальную энергию деформации  $d\Pi$ . При линейно-упругой деформации сила  $\sigma_x dF$  совершил упругую работу на пути  $\varepsilon_x dx$ , который она пройдет за счет удли-

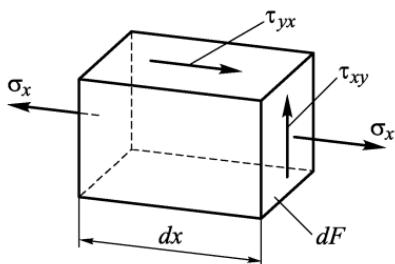


Рис. 8.61

нения элемента вдоль оси  $x$ , а сила  $\tau_{xy} dF$  совершил упругую работу на пути  $\gamma_{xy} dx$ , который образуется из-за сдвига  $\gamma_{xy}$  в плоскости  $xy$ . Эта работа и накопится в волокне в виде потенциальной энергии деформации. Поэтому

$$d\Pi = \frac{1}{2} \sigma_x dF \varepsilon_x dx + \frac{1}{2} \tau_{xy} dF \gamma_{xy} dx. \quad (8.7.1)$$

Заметим, что множитель  $\frac{1}{2}$  здесь появился вследствие линейной упругости деформаций (см. п. 4.7.1). Кроме того, при получении (8.7.1) учтено, что сила  $\tau_{xy} dF$  не совершает работу на удлинении  $\varepsilon_x dx$ , а сила  $\sigma_x dF$  — на перемещении от сдвига  $\gamma_{xy} dx$ . Потенциальную энергию всего бруса получим, проинте-

грировав выражение (8.7.1) по всему объему  $V$  бруса:

$$\Pi = \int_V d\Pi = \int_l \int_F \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dF dx. \quad (8.7.2)$$

Если в этом выражении использовать закон Гука  $\sigma_x = E\varepsilon_x$ ,  $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$  и формулы, определяющие напряжения в сечении,  $\sigma_x = \frac{M_z}{J_z}y$ ,  $\tau_{xy} = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}}{J_z b}$ , то легко получить следующие выражения для  $\Pi$ :

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_l \int_F \left( \frac{\sigma_x^2}{E} + \frac{\tau_{xy}^2}{G} \right) dF dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_l \left[ \frac{M_z^2}{E J_z^2} \int_F y^2 dF + \frac{Q_y^2}{G J_z^2} \int_F \left( \frac{S_z^{\text{отс}}}{b} \right)^2 dF \right] dx. \end{aligned}$$

Так как  $\int_F y^2 dF = J_z$  и  $dF = b dy$ , приходим к выражению

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_z^2}{E J_z} dx + \frac{1}{2} \int_l k_y \frac{Q_y^2}{G F} dx, \quad (8.7.3)$$

где  $k_y$  — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения балки:

$$k_y = \frac{F}{J_z^2} \int_H \frac{(S_z^{\text{отс}})^2}{b} dy. \quad (8.7.4)$$

Интегрирование в (8.7.4) проводится по высоте сечения. Например, для прямоугольного сечения, используя полученное в примере 8.4 выражение  $S_z^{\text{отс}}(y) = \frac{B}{2} \left[ \left( \frac{H}{2} \right)^2 - y^2 \right]$ , легко можно подсчитать, что  $k_y = 6/5$ .

Если сечение балки тонкостенное, то в нем возникают равномерно распределенные по толщине касательные напряжения  $\tau_{xs} = Q_y S_z^{\text{отс}} / (J_z \delta)$ , а  $dF = \delta ds$ .

В этом случае

$$k_y = \frac{F}{J_z^2} \int_L \frac{(S_z^{\text{отс}})^2}{\delta} ds. \quad (8.7.5)$$

Здесь интегрирование проводится по всей длине  $L$  средней линии тонкостенного сечения. Например, для сечения, показанного на рис. 8.39 (пример 8.6), формула (8.7.5) дает  $k_y = 3,38$ .

**8.7.2.** Оценим вклад слагаемых в потенциальную энергию деформаций (8.7.3) на примере консольной балки длиной  $l$  и

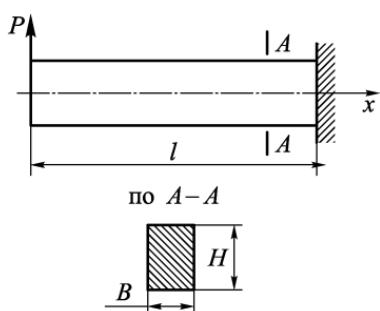


Рис. 8.62

прямоугольного сечения  $B \times H$ , нагруженной силой на конце (рис. 8.62). Если начало координаты  $x$  выбрать на левом конце балки, то для нее  $Q_y = P$  и  $M_z = Px$ . Кроме того,  $F = BH$ ,  $J_z = BH^3/12$ . Материал балки — сталь, для которой коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ . Тогда  $G = E/[2(1 + \mu)] = E/2,6$ . Учитывая это, получим

$$\frac{1}{2} \int_l \frac{M_z^2}{EJ_z} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{(Px)^2}{EJ_z} dx = \frac{2P^2l^3}{EBH^3},$$

$$\frac{1}{2} \int_l k_y \frac{Q_y^2}{GF} dx = \frac{1}{2} \int_l k_y \frac{P^2 dx}{GF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot 2,6 \frac{P^2 l}{EBH} = 1,56 \frac{P^2 l}{EBH}.$$

Тогда потенциальную энергию деформации (8.7.3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_l \frac{M_z^2}{EJ_z} dx \left[ 1 + k_y \int_l \frac{Q_y^2}{GF} dx / \int_l \frac{M_z^2}{EJ_z} dx \right] = \\ &= \frac{2P^2l^3}{EBH} \left[ 1 + 0,78 \left( \frac{H}{l} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что для длинной балки ( $l/H > 8$ ) второе слагаемое, определяющее долю потенциальной энергии деформации балки от перерезывающих сил  $Q_y$ , составляет менее  $0,78/64 \approx \approx 0,0122 = 1,22\%$  от первого слагаемого — потенциальной энергии деформации от изгибающих моментов  $M_z$ . Поэтому для длинных балок второе слагаемое в формуле (8.7.3) можно не учитывать и принимать, что при изгибе балки

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_z^2}{EJ_z} dx. \quad (8.7.6)$$

Проведенные здесь расчеты могут быть использованы и для оценки точности гипотезы плоских сечений, которая как раз и построена на пренебрежении сдвиговыми деформациями.

**8.7.3.** Потенциальную энергию от изгибающих моментов  $M_z$ , т.е. первое слагаемое в формуле (8.7.3), можно получить так же, как получена потенциальная энергия бруса при центральном растяжении–сжатии в п. 4.7.1. Для этого рассмотрим элемент балки длиной  $dx$ . При его деформации под действием изгибающих моментов  $M_z$  ось бруса получит кривизну  $1/\rho = M_z/EJ_z$  (см. формулу (8.3.1)), и поэтому правое сечение повернется относительно левого на угол  $d\alpha = dx/\rho$  (рис. 8.63). Если условно считать левое сечение неподвижным (т.е. вести рассуждения в системе координат, связанной с левым сечением), то при деформации элемента момента  $M_z$

совершит упругую работу  $\frac{1}{2}M_z d\alpha$ , которая и накопится в элементе в виде потенциальной энергии деформации:

$$d\Pi = \frac{1}{2}M_z d\alpha = \frac{1}{2}M_z \frac{dx}{\rho} = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{EJ_z} dx.$$

Тогда потенциальную энергию всей балки получаем, суммируя (интегрируя) ее по всем элементам, т.е.:

$$\Pi = \int_l d\Pi = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_z^2}{EJ_z} dx.$$

Получить второе слагаемое выражения (8.7.3) с помощью аналогичных рассуждений невозможно, так как гипотеза плоских сечений пренебрегает сдвиговыми деформациями.

## 8.8. Интеграл Мора для определения перемещений при изгибе

**8.8.1.** Применим к изгибу балки метод единичной нагрузки Мора, который был подробно разобран в п. 4.7.2 для ферм. Определим прогиб балки  $v_B(P)$  в точке  $B$  от действия поперечной нагрузки, например, сосредоточенной силы  $P$ , приложенной в точке  $C$  (рис. 8.64). Заметим, что при линейно-упругой деформации сила  $P$  совершила на перемещении своей точки приложения  $v_C(P)$  упругую работу  $A(P) = \frac{1}{2}Pv_C(P)$ .

Эта работа накопилась в балке в виде потенциальной энергии деформации  $\Pi(P) = A(P)$ . Если через  $M_z(P)$  обозначить изги-

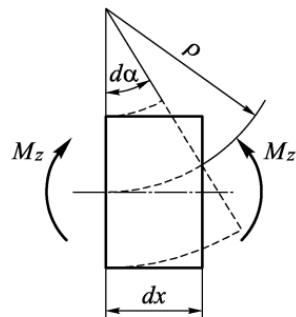


Рис. 8.63

бающие моменты, возникающие в балке в результате действия силы  $P$ , то согласно (8.7.3)  $\Pi(P) = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_z^2(P)}{EJ_z} dx$ . Поэтому

$$A(P) = \frac{1}{2} Pv_C(P) = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_z^2(P)}{EJ_z} dx. \quad (8.8.1)$$

Рассмотрим теперь, как в п. 4.7.2, двухэтапное нагружение балки. На первом этапе нагрузим балку единичной силой в точке  $B$  (рис. 8.65 а). При этом точка  $B$  получит прогиб  $v_B(1)$ , на котором единичная сила совершил работу  $A(1) = \frac{1}{2} \cdot 1v_B(1)$ .

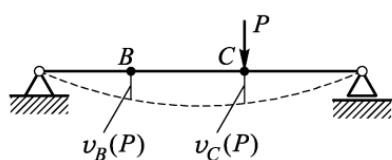


Рис. 8.64

Эта работа накопится в балке в виде потенциальной энергии деформации  $\Pi(1)$ , т.е.  $\Pi(1) = A(1)$ .

Так как в балке в результате действия единичной силы возникли изгибающие моменты  $M_z(1)$ , то

$$\Pi(1) = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_z^2(1)}{EJ_z} dx.$$

Таким образом,

$$A(1) = \frac{1}{2} v_B(1) \cdot 1 = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_z^2(1)}{EJ_z} dx. \quad (8.8.2)$$

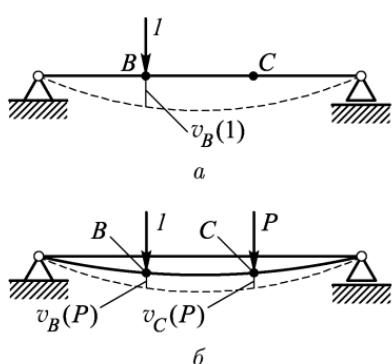


Рис. 8.65

На втором этапе нагрузим балку в точке  $C$  нагрузкой  $P$ , не снимая с нее единичной силы (рис. 8.65 б). На этом этапе сила  $P$  совершил упругую работу  $\frac{1}{2}Pv_C(P)$ , а единичная сила, оставаясь постоянной при изгибе балки на втором этапе, совершил работу  $1 \cdot v_B(P)$  на искомом перемещении  $v_B(P)$ . Всего после двух этапов нагружения единичная сила и сила  $P$  совершают работу

$$A(1 + P) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot v_B(1) + \frac{1}{2} Pv_C(P) + 1 \cdot v_B(P). \quad (8.8.3)$$

В итоге двух этапов нагружения в балке появятся изгибающие моменты  $M_z(1 + P)$ , которые по принципу суперпозиции равны

$$M_z(1 + P) = M_z(1) + M_z(P),$$

и накопится потенциальная энергия изгиба

$$\begin{aligned} \Pi(1 + P) &= \frac{1}{2} \int_l \frac{M_z^2(1 + P)}{EJ_z} dx = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_z^2(1)}{EJ_z} dx + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_l \frac{M_z^2(P)}{EJ_z} dx + \int_l \frac{M_z(1)M_z(P)}{EJ_z} dx. \end{aligned} \quad (8.8.4)$$

Так как при упругой деформации энергия не рассеивается, то  $\Pi(1 + P) = A(1 + P)$ . Сравнивая выражения (8.8.3) и (8.8.4) и учитывая (8.8.1) и (8.8.2), получаем

$$1 \cdot v_B(P) = \int_l \frac{M_z(P)M_z(1)}{EJ_z} dx. \quad (8.8.5)$$

Разделим это равенство на единичную силу и введем  $\overline{M}_z(1) = M_z(1)/1$  как «изгибающий момент» от безразмерного единичного «усилия», т.е. как функцию, которая для приложенного к балке безразмерного единичного вектора строится по тем же правилам, что и  $M_z(1)$  для единичного усилия. Тогда

$$v_B(P) = \int_l \frac{M_z(P)\overline{M}_z(1)}{EJ_z} dx. \quad (8.8.6)$$

Эта формула для определения прогибов балки называется *интегралом Мора*.

Заметим, что при действии на балку более сложной нагрузки все рассуждения можно повторить. И если под  $M_z(P)$  понимать изгибающий момент в балке от этой нагрузки, то равенство (8.8.1) не изменится, а в формуле (8.8.3) второе слагаемое замениется на  $A(P)$ . В итоге мы снова придем к выражению (8.8.6).

Из приведенных рассуждений ясно, что работа  $1 \cdot v_B(P)$  (8.8.5) будет положительна, если прогиб произошел по направлению единичной нагрузки. Поэтому положительное значение интеграла Мора (8.8.6) означает, что направления прогиба и единичной силы совпадают. Если же вычисления привели к отрицательному значению интеграла Мора, то это значит, что балка получила в рассматриваемой точке прогиб, противоположный направлению единичной силы.

**8.8.2.** Найдем угол поворота  $\alpha_B(P)$  сечения  $B$ . Для этого вернемся к только что проведенным рассуждениям и заметим,

что цель двухэтапного нагружения в том, чтобы на втором этапе единичная сила совершила работу на искомом прогибе  $v_B(P)$ .

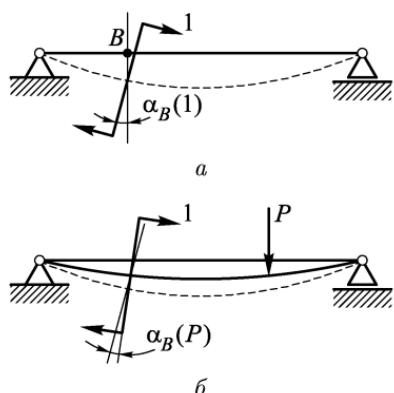


Рис. 8.66

Чтобы создать аналогичную ситуацию для угла поворота  $\alpha_B(P)$ , нужно на первом этапе нагрузить ее в точке  $B$  единичным моментом (рис. 8.66). Тогда, повторяя все рассуждения, проведенные в п. 8.8.1 при определении прогиба, приходим к выражению

$$\alpha_B(P) = \int_l \frac{M_z(P)\bar{M}_z(1)}{EJ_z} dx. \quad (8.8.7)$$

Только здесь, в отличие от (8.8.6),  $\bar{M}_z(1)$  — это «изгибающий момент» от безразмерного единичного «момента», приложенного к балке в точке, где нужно найти  $\alpha$ .

Сравнивая выражения (8.8.6) и (8.8.7), замечаем, что если через  $\delta$  обозначить обобщенное перемещение, а под  $\bar{M}_z(1)$  понимать «изгибающий момент» от соответствующего  $\delta$  безразмерного единичного обобщенного «усилия», то интеграл Мора для определения  $\delta$  примет вид

$$\delta = \int_l \frac{M_z(P)\bar{M}_z(1)}{EJ_z} dx. \quad (8.8.8)$$

Здесь понятия обобщенного перемещения и обобщенного усилия (обобщенной силы) используются точно в таком же смысле, как и в теоретической механике.

Если в качестве обобщенного перемещения принят прогиб балки, то соответствующее ему обобщенное единичное усилие — это единичная сила. Углу поворота сечения соответствует единичный момент.

Связь между обобщенным перемещением и обобщенным усилием определяется самим выводом интеграла Мора. Единичное обобщенное усилие должно быть таким, чтобы на втором этапе нагружения оно на обобщенном перемещении  $\delta$  совершало работу  $1 \cdot \delta$ .

Приведем примеры более сложных обобщенных перемещений и усилий. Так, если требуется найти относительный угол поворота  $\alpha_{A-B}$  сечений  $A$  и  $B$  балки, изображенной на рис. 8.67  $a$ , то в качестве обобщенного единичного усилия нужно принять

два единичных момента, показанных на рис. 8.67 б. В этом легко убедиться, если учесть, что

$$\begin{aligned}\alpha_{A-B} &= \alpha_A + \alpha_B = \int_l \frac{M_z(P) \bar{M}_z^A(1)}{EJ_z} dx + \int_l \frac{M_z(P) \bar{M}_z^B(1)}{EJ_z} dx = \\ &= \int_l \frac{M_z(P) [\bar{M}_z^A(1) + \bar{M}_z^B(1)]}{EJ_z} dx = \int_l \frac{M_z(P) \bar{M}_z^{A+B}(1)}{EJ_z} dx.\end{aligned}$$

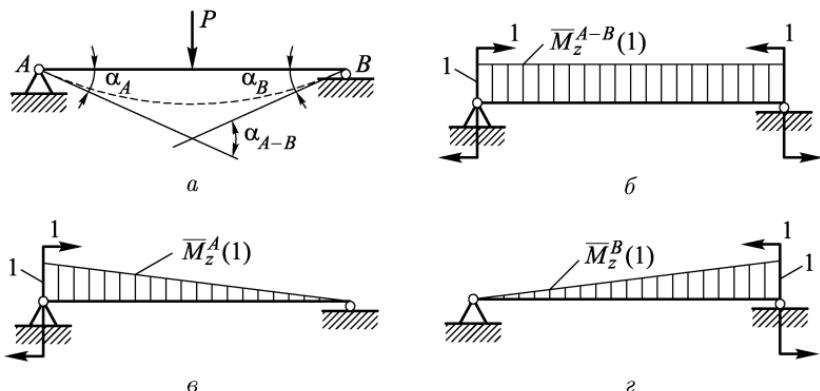


Рис. 8.67

Здесь через  $\bar{M}_z^A(1)$  и  $\bar{M}_z^B(1)$  обозначены изгибающие моменты от единичных моментов, соответствующих углам  $\alpha_A$  и  $\alpha_B$  и показанных на рис. 8.67 в, г.

Рассмотрим более сложный пример. Пусть необходимо найти площадь, заключенную между недеформированной и деформированной осяями балки, заштрихованную на рис. 8.68 а. Предоставляем читателю самому убедиться, что если эту площадь рассматривать в качестве обобщенного перемещения, то ему соответствует единичное обобщенное усилие в виде распределенной по балке равномерной погонной нагрузки единичной интенсивности (рис. 8.68 б).

**8.8.3.** Вернемся к выражению (8.8.5). Заметим, что в нем

$$\frac{M_z(P)}{EJ_z} dx = \frac{1}{\rho} dx = d\alpha, \quad (8.8.9)$$

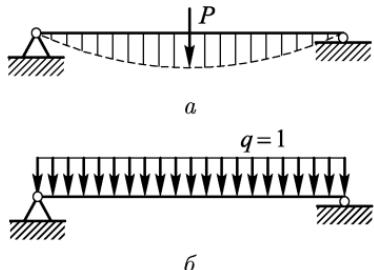


Рис. 8.68

где  $d\alpha$  — угол, который образовался между торцевыми сечениями элемента  $dx$  в результате деформации балки от изгибающего момента  $M_z(P)$  (см. рис. 8.63). Поэтому баланс энергий (8.8.5) можно записать в форме

$$1 \cdot v_B(P) = \int_l d\alpha M_z(1) = \int_l \frac{d\alpha}{dx} M_z(1) dx = \int_l \frac{1}{\rho} M_z(1) dx. \quad (8.8.10)$$

Это соотношение означает очевидный факт, что на втором этапе нагружения балки, когда ее сечения под действием внешних нагрузок (или каких-то других воздействий) поворачиваются на углы  $\alpha(x)$ , возникающие в результате действия единичного усилия изгибающие моменты  $M_z(1)$  совершают в результате деформации элементов балки работу  $\int_l d\alpha M_z(1)$ . Эта работа необходимо должна быть равна работе единичной силы на перемещении  $v_B$  ее точки приложения.

Аналогичные по сути рассуждения мы уже проводили в п. 4.7.3 при пояснении физического содержания баланса энергий (4.7.24).

Записывая баланс энергий вида (8.8.10) для обобщенного перемещения  $\delta$  и соответствующей ему обобщенной единичной силы, получаем после деления на единичную силу следующее выражение:

$$\delta = \int_l \overline{M}_z(1) d\alpha = \int_l \frac{d\alpha}{dx} \overline{M}_z(1) dx = \int_l \frac{1}{\rho} \overline{M}_z(1) dx. \quad (8.8.11)$$

Здесь  $\overline{M}_z(1)$  имеет тот же смысл, что и в (8.8.8). Проведенные выше рассуждения показывают, что формула (8.8.11) не изменится, если причиной деформации балки, т.е. причиной поворота на углы  $\alpha(x)$  ее сечений, будет не внешняя нагрузка, а, например, ее нагрев. Более того, баланс энергий (8.8.10) будет сохраняться и при таких деформациях балки, которые не подчиняются закону Гука (8.8.9), т.е. при нелинейно-упругих и при пластических деформациях. Поэтому формула (8.8.11) является более общей в сравнении с (8.8.8).

#### 8.8.4. Дадим примеры вычисления интеграла Мора.

П р и м е р 8.16. Для балки постоянного сечения, показанной на рис. 8.69 *a*, найдем прогиб в точке *B* и угол поворота сечения *A*.

Необходимые для этого аналитические выражения для изгибающего момента  $M_z(P)$  по участкам балки найдем из условий

равновесия отсеченных частей, показанных на рис. 8.69 б:

$$M_z(P) = \begin{cases} -qa^2 + \frac{5}{6}qax_1 & (0 \leq x_1 \leq a), \\ -qa^2 + \frac{5}{6}qa(a+x_2) - qx_2 \frac{x_2}{2} = \\ = -\frac{qa^2}{6} + \frac{5}{6}qax_2 - \frac{1}{2}qx_2^2 & (0 \leq x_2 \leq 2a). \end{cases} \quad (8.8.12)$$

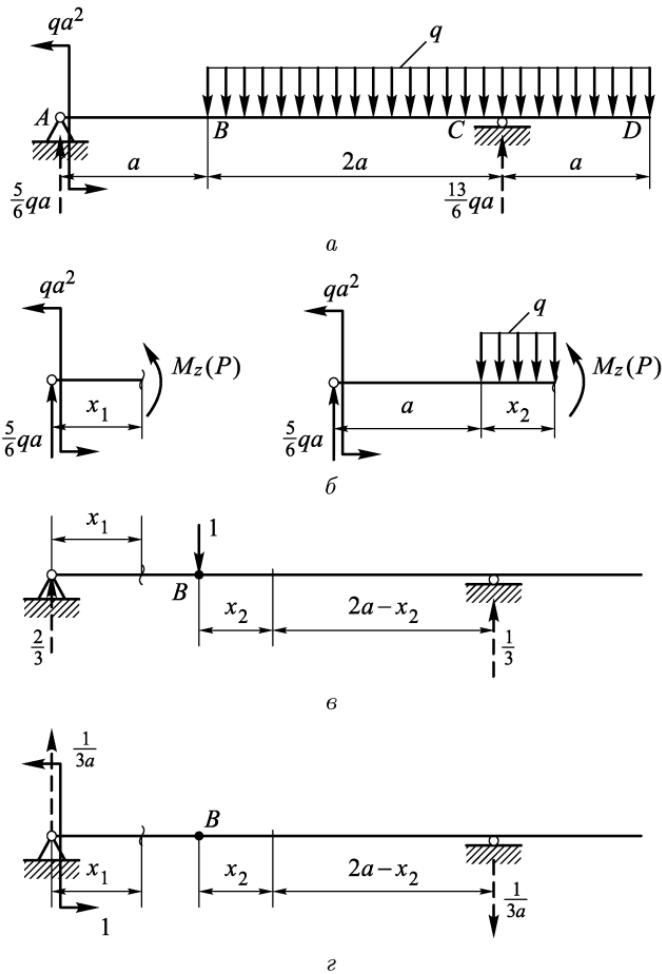


Рис. 8.69

Здесь мы для каждого участка взяли удобные для вычислений координаты  $x_1$  и  $x_2$ . Для определения прогиба в точке  $B$  прило-

жим в этой точке единичную силу (рис. 8.69 *в*) и для таких же отсеченных частей найдем  $\bar{M}_z(1)$ :

$$\bar{M}_z(1) = \begin{cases} \frac{2}{3}x_1 & (0 \leq x_1 \leq a), \\ \frac{2}{3}(a + x_2) - 1 \cdot x_2 & (0 \leq x_2 \leq 2a). \end{cases}$$

Теперь вычислим интеграл Мора, учитывая, что на участке  $CD$   $\bar{M}_z(1) = 0$ :

$$\begin{aligned} v_B = \int_l \frac{M_z(P)\bar{M}_z(1)}{EJ_z} dx &= \int_{AB} \frac{M_z(P)\bar{M}_z(1)}{EJ_z} dx + \\ &+ \int_{BC} \frac{M_z(P)\bar{M}_z(1)}{EJ_z} dx = \int_0^a \frac{\left(-qa^2 + \frac{5}{6}qax_1\right) \frac{2}{3}x_1}{EJ_z} dx_1 + \\ &+ \int_0^{2a} \frac{\left(-\frac{qa^2}{6} + \frac{5}{6}qax_2 - \frac{1}{2}qx_2^2\right) \left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}x_2\right)}{EJ_z} dx_2 = -\frac{qa^4}{9EJ_z}. \end{aligned}$$

Отрицательный знак прогиба  $v_B$  означает, что точка  $B$  сместились против направления единичного усилия (рис. 8.69 *в*), т.е. вверх.

Найдем теперь угол поворота сечения в точке  $A$ . Для этого нагрузим балку в этой точке единичным моментом, как это показано на рис. 8.69 *г*. Из условия равновесия отсеченных частей для сечения на участках  $AB$  и  $BC$  получим

$$\bar{M}_z(1) = \begin{cases} -1 + \frac{1}{3a}x_1 & (0 \leq x_1 \leq a), \\ -\frac{1}{3a}(2a - x_2) & (0 \leq x_2 \leq 2a). \end{cases}$$

Используя это выражение вместе с выражением (8.8.12) для  $M_z(P)$ , получаем

$$\begin{aligned} \alpha_A = \int_l \frac{M_z(P)\bar{M}_z(1)}{EJ_z} dx &= - \int_0^a \frac{\left(qa^2 - \frac{5}{6}qax_1\right)(x_1 - 3a)}{3aEJ_z} dx_1 - \\ &- \int_0^{2a} \frac{\left(-\frac{qa^2}{6} + \frac{5}{6}qax_2 - \frac{1}{2}qx_2^2\right)(2a - x_2)}{3aEJ_z} dx_2 = \frac{17}{36} \frac{qa^3}{EJ_z}. \end{aligned}$$

**8.8.5.** Как видно из рассмотренных примеров, аналитическое вычисление интеграла Мора требует не меньшей вычислительной работы, чем определение перемещений с помощью универсального уравнения упругой линии, рассмотренного в разд. 8.6. Эти вычисления помогают упростить использование следующего графоаналитического приема.

Прежде всего заметим, что при вычислении прогибов и углов поворота сечений балки изгибающий момент от единичного усилия  $\bar{M}_z(1)$  представляет собой функцию, линейную по участкам балки. А  $M_z(P)$  в зависимости от характера нагрузки может быть нелинейной функцией с угловыми точками и разрывами. Поэтому для балок постоянной жесткости вычисление интегралов Мора сводится к вычислению по участкам балки интегралов вида

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)(kx + b) dx, \quad (8.8.13)$$

где  $x_1, x_2$  — координаты границ рассматриваемого участка, в пределах которого  $\bar{M}_z(1)$  является линейной функцией  $kx + b$ . Функция  $f(x)$  в интеграле (8.8.13) представляет  $M_z(P)$ . Раскроем скобки в (8.8.13). В результате получим

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} f(x)(kx + b) dx &= k \int_{x_1}^{x_2} xf(x) dx + b \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \\ &= k \int_{\Omega} x d\Omega + b \int_{\Omega} f(x) dx = kS_f + b\Omega. \end{aligned}$$

Здесь  $d\Omega = f(x) dx$  — элемент площади  $\Omega$ , заключенной между графиком  $f(x)$  и осью  $x$  (рис. 8.70). Интеграл  $\int d\Omega$  является площадью  $\Omega$ ,

а  $\int_{\Omega} x d\Omega = S_f$  — это статический момент площади  $\Omega$  относительно оси  $f$ . Но, как установлено в п. 7.1.3,  $S_f = x_t \Omega$ , где  $x_t$  — координата центра тяжести площади  $\Omega$ .

Поэтому

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)(kx + b) dx = kx_t \Omega + b\Omega = \Omega(kx_t + b) = \Omega h, \quad (8.8.14)$$

где  $h$  — значение функции  $kx + b$  при  $x = x_t$ .

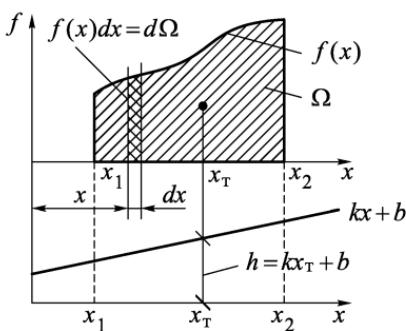


Рис. 8.70

Учитывая представление (8.8.14), вычисление интеграла Мора для балки постоянного сечения  $\frac{1}{EJ_z} \int_l M_z(P) \bar{M}_z(1) dx$  можно свести к вычислению его по участкам  $l_i$ , на которых  $\bar{M}_z(1)$  является линейной функцией, т.е. к  $\sum_i \frac{1}{EJ_z} \int_{l_i} M_z(P) \bar{M}_z(1) dx$ .

Пусть, кроме того, нам удалось представить на участках  $l_i$  сложную функцию  $M_z(P)$  в виде суперпозиции

$$M_z(P) = M_z^{(1)}(P) + M_z^{(2)}(P) + \dots + M_z^{(k)}(P),$$

в которой эпюра, соответствующая каждому из слагаемых, представляет на  $l_i$  такую простую фигуру, что легко найти ее площадь  $\Omega_i^j$  и положение центра тяжести  $x_{ti}^j$ . Тогда, определив значения  $h_i^j$  изгибающего момента  $\bar{M}_z(1)$ , соответствующие  $x_{ti}^j$ , мы сможем подсчитать интеграл Мора как

$$\begin{aligned} \frac{1}{EJ_z} \int_l M_z(P) \bar{M}_z(1) dx &= \frac{1}{EJ_z} \sum_i \int_{l_i} M_z(P) \bar{M}_z(1) dx = \\ &= \frac{1}{EJ_z} \sum_i \int_{l_i} \sum_j M_z^{(j)}(P) \bar{M}_z(1) dx = \\ &= \frac{1}{EJ_z} \sum_i \sum_j \int_{l_i} M_z^{(j)}(P) \bar{M}_z(1) dx = \frac{1}{EJ_z} \sum_{i,j} \Omega_i^j h_i^j. \quad (8.8.15) \end{aligned}$$

Такой способ вычисления интеграла Мора называют *способом Верещагина*.

Задача вычисления интеграла Мора, таким образом, сводится к представлению эпюры  $M_z(P)$  на участках линейности эпюры  $\bar{M}_z(1)$  в виде суммы простых фигур, для которых легко найти площади и положения центров тяжести. Эту операцию называют *расслоением эпюры*. Существует два приема расслоения эпюр. Поясним их на примерах.

Пример 8.17. Для балки, рассмотренной в примере 8.16 и показанной на рис. 8.69, найдем прогиб  $v_B$  точки  $B$ . На рис. 8.71 показаны эпюры  $Q$ ,  $M_z(P)$  и  $\bar{M}_z(1)$ , необходимые для определения  $v_B$ . На участке  $AB$  эпюра  $M_z(P)$  представляет собой трапецию. Поэтому ее можно разбить на прямоугольник  $\Omega_1^1$  и треугольник  $\Omega_1^2$ .

На участке  $BC$  эпюра  $M_z(P)$  представляет собой сложную фигуру. Покажем, как такую фигуру в общем случае можно разбить на простые. Для этого рассмотрим выделенный из балки двумя сечениями участок длиной  $l_i$ , на котором на бал-

ку действует распределенная нагрузка постоянной интенсивности  $q$ . Со стороны отброшенных частей на него действуют

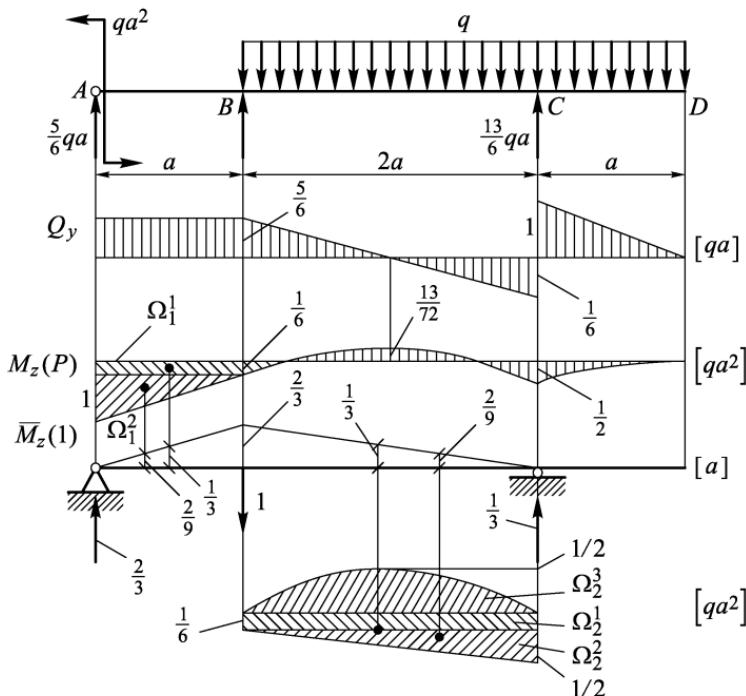


Рис. 8.71

изгибающие моменты  $M_1$ ,  $M_2$  и перерезывающие силы  $Q_1$ ,  $Q_2$  (рис. 8.72). Тогда эпюра  $M_z(P)$  на таком участке может быть разбита на прямоугольник  $\Omega_i^1$ , треугольник  $\Omega_i^2$  и сегмент квадратичной параболы  $\Omega_i^3$ . Чтобы понять это, достаточно представить нагружение участка как суперпозицию нагружений, показанных на рис. 8.73. Причем площадь сегмента  $\Omega_i^3$  с основанием  $l_i$  и высотой  $b = \frac{1}{8}ql_i^2$  можно подсчитать, рассматривая его как разность прямоугольника  $l_i \times b$  и двух квадратичных треугольников, площадь каждого из которых, как мы установ-

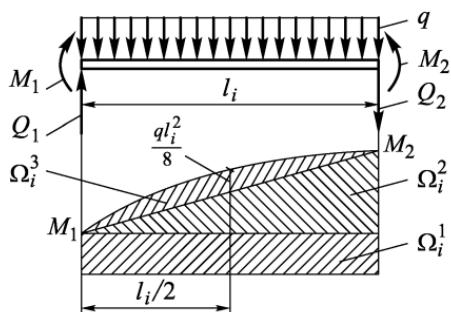


Рис. 8.72

вили в примере 7.3, равна  $\frac{1}{3} \frac{l_i}{2} b$  (см. также рис. 7.9). Поэтому  $\Omega_i^3 = \frac{2}{3} l_i b$ .

Учитывая эти рассуждения, сложную фигуру на участке  $BC$  разбиваем на простые, как это показано на рис. 8.71 внизу.

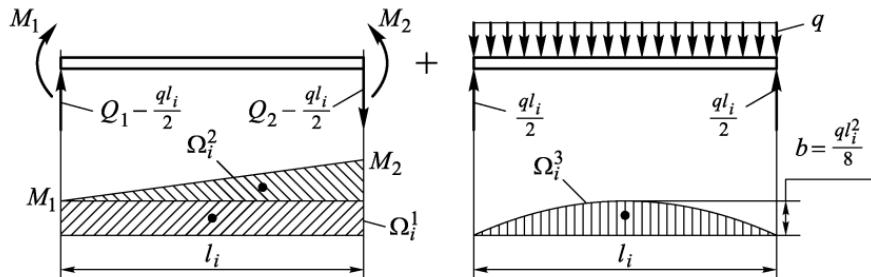


Рис. 8.73

В результате имеем

$$\begin{aligned}\Omega_1^1 &= \frac{1}{6} q a^2 a, \quad \Omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} q a^2 a, \\ \Omega_2^1 &= \frac{q a^2}{6} \cdot 2 a, \quad \Omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} q a^2 \cdot 2 a, \quad \Omega_2^3 = \frac{2}{3} \frac{q(2a)^2}{8} \cdot 2 a.\end{aligned}$$

Значения  $\overline{M}_z(1)$ , соответствующие центрам тяжести площадей  $\Omega_i^j$ , равны  $h_1^1 = a/3$ ,  $h_2^1 = 2a/9$ ,  $h_2^2 = a/3$ ,  $h_2^3 = 2a/9$ ,  $h_2^4 = a/3$ . Вычисляя теперь интеграл Мора по формуле (8.8.15), замечаем, что знаки  $M_z(P)$  и  $\overline{M}_z(1)$  для  $\Omega_1^1$ ,  $\Omega_1^2$ ,  $\Omega_2^1$ ,  $\Omega_2^2$  различны и поэтому соответствующие им интегралы  $\Omega_i^j h_i^j$  в (8.8.15) отрицательны. А для  $\Omega_2^3$  знаки  $M_z(P)$  и  $\overline{M}_z(1)$  совпадают, поэтому  $\Omega_2^3 h_2^3 > 0$ . Таким образом,

$$\begin{aligned}v_B = \frac{1}{EJ_z} \int_l M_z(P) \overline{M}_z(1) dx &= \frac{1}{EJ_z} \left[ -\frac{1}{6} q a^3 \cdot \frac{1}{3} a - \frac{5}{12} q a^3 \cdot \frac{2}{9} a - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} q a^3 \cdot \frac{1}{3} a - \frac{1}{3} q a^3 \cdot \frac{2}{9} a + \frac{2}{3} q a^3 \cdot \frac{1}{3} a \right] = -\frac{qa^4}{9EJ_z}.\end{aligned}$$

Рассмотренный выше способ расслоения эпюры  $M_z(P)$  называют *геометрическим расслоением*. Покажем на примере этой же балки другой способ расслоения эпюры.

Балку, уравновешенную под действием нагрузки и реакций (см. рис. 8.69), защемим в точке  $B$ , которая является границей участков линейности эпюры  $\overline{M}_z(1)$ . Так как действующие на балку нагрузки и реакции уравновешены, то в защемлении

не возникает никаких реакций, и оно поэтуому никак не сказывается на деформациях балки. На полученных консольных балках построим эпюры  $M_z$  от каждой из нагрузок отдельно, как это показано на рис. 8.74, причем распределенную нагрузку будем

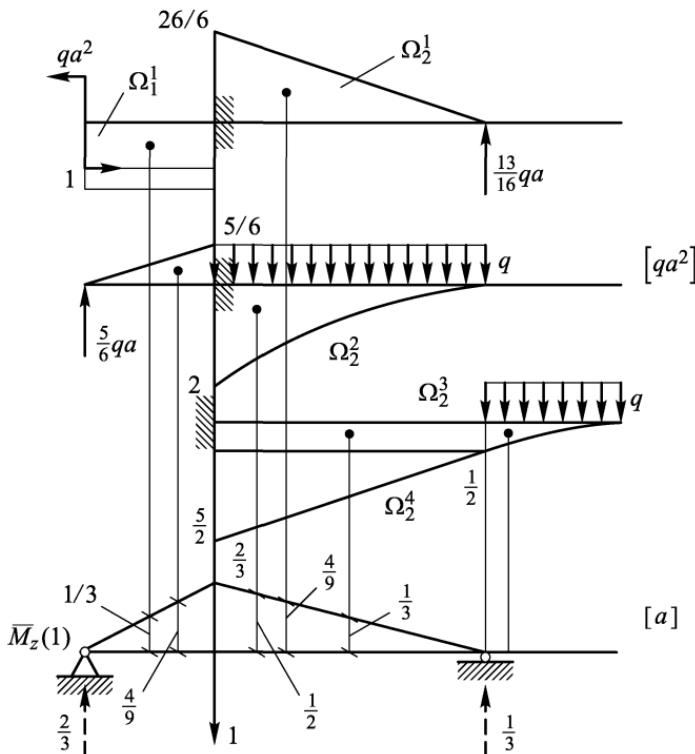


Рис. 8.74

рассматривать как две нагрузки, каждая из которых действует на соответствующем участке линейности  $\bar{M}_z(1)$ . Фактически мы здесь пользуемся принципом суперпозиции и поэтому легко убедиться, что сумма эпюр на рис. 8.74 дает эпюру  $\bar{M}_z(P)$ , показанную на рис. 8.71.

Нетрудно подсчитать, что

$$\Omega_1^1 = qa^2 a, \quad \Omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} qa^2 a, \quad \Omega_2^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{26}{6} qa^2 \cdot 2a,$$

$$\Omega_2^2 = \frac{1}{3} 2qa^2 \cdot 2a, \quad \Omega_2^3 = \frac{qa^2}{2} \cdot 2a, \quad \Omega_2^4 = \frac{1}{2} 2qa^2 \cdot 2a$$

и найти по эпюре  $\bar{M}_z(1)$  соответственно

$$h_1^1 = \frac{a}{3}, \quad h_1^2 = \frac{4}{9}a, \quad h_2^1 = \frac{4}{9}a, \quad h_2^2 = \frac{1}{2}a, \quad h_2^3 = \frac{a}{3}, \quad h_2^4 = \frac{4}{9}a.$$

Здесь для подсчета площади  $\Omega_2^2$  и определения положения ее центра тяжести мы использовали формулы для квадратичного треугольника, полученные в примере 7.3 (см. рис. 7.9). Используя полученные значения  $\Omega_i^j$  и  $h_i^j$ , подсчитаем интеграл Мора для  $v_B$ :

$$\begin{aligned} v_B &= \frac{1}{EJ_z} \int_l M_z(P) \bar{M}_z(1) dx = \frac{1}{EJ_z} \sum_{i,j} \Omega_i^j h_i^j = \\ &= \frac{1}{EJ_z} \left( -qa^3 \cdot \frac{1}{9}a + \frac{5}{12}qa^3 \cdot \frac{4}{9}a + \frac{13}{3}qa^3 \cdot \frac{4}{9}a - \frac{4}{3}qa^3 \cdot \frac{1}{2}a - \right. \\ &\quad \left. - qa^3 \cdot \frac{1}{3}a - 2qa^3 \cdot \frac{4}{9}a \right) = -\frac{qa^4}{9EJ_z}. \end{aligned}$$

Такой прием расслоения эпюры  $M_z(P)$  называют *силовым расслоением*. Он хорош тем, что сводит задачу расслоения к построению эпюр  $M_z$  для консольных балок, нагруженных одной из четырех простых нагрузок (рис. 8.75).

При этом полученные эпюры являются простыми фигурами, площади и положения центров тяжести которых легко найти.

Этот прием легко обобщить на случай треугольной распределенной нагрузки

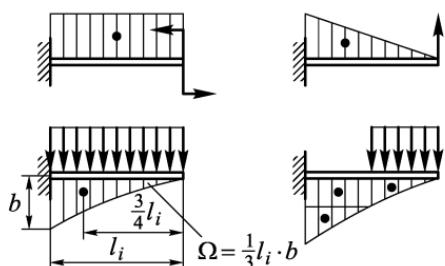


Рис. 8.75

ки  $q(x)$ . Предоставляем читателю самому сделать такое обобщение. При этом для подсчета соответствующих площадей и определения их центров тяжести можно воспользоваться результатами примера 7.3.

**8.8.6.** С помощью вычисления интеграла Мора способом Верещагина легко вычислять перемещения и углы поворота сечений балок, изгибная жесткость которых различна на участках.

П р и м е р 8.18. На рис. 8.76 представлена балка с двумя участками. Жесткость ее на участке  $AB$  равна  $2EJ_z$ , а на участке  $BC$  —  $EJ_z$ . Здесь же приведены силовое расслоение эпюры  $M_z(P)$  и эпюра  $\bar{M}_z(1)$  для определения угла поворота  $\alpha_C$  сечения  $C$ . Используя эти результаты, получаем

$$\begin{aligned} \alpha_C &= \frac{1}{2EJ_z} \left( -qa^3 \frac{1}{4} + \frac{3}{4}qa^3 \frac{1}{3} - \frac{1}{6}qa^3 \frac{3}{8} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{EJ_z} \left( \frac{1}{4}qa^3 \frac{2}{3} - \frac{qa^3}{6} \frac{5}{8} \right) = \frac{1}{32} \frac{qa^3}{EJ_z}. \end{aligned}$$

В этой сумме порядковый номер слагаемого соответствует номеру эпюры  $M_z(P)$ , данному в кружке на рис. 8.76.

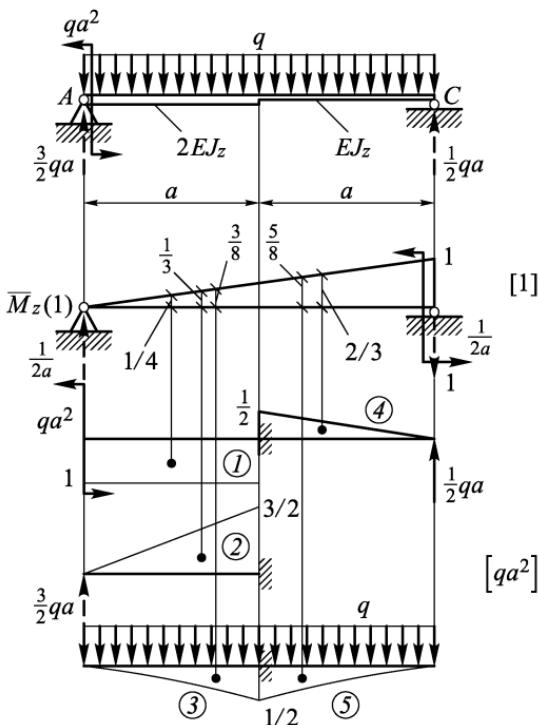


Рис. 8.76

В этой главе мы рассмотрели несколько способов вычисления перемещений при изгибе. Применение их требует определенного навыка, и трудно отдать предпочтение какому-либо из них. Опыт показывает, что обычно наиболее эффективным является тот способ, которым лучше всего владеешь. Однако все эти способы применимы лишь для балок постоянного сечения, нагруженных достаточно простыми нагрузками. В более сложных случаях для облегчения расчетов необходимо привлекать ЭВМ.

**8.8.7К.** Основополагающим соотношением для рассмотренных в этой главе способов определения перемещений балок является полученное на основе гипотезы плоских сечений в 1694 г. Яковом Бернулли соотношение (8.2.6) между кривизной деформированной оси балки и изгибающим моментом. Племянник Я. Бернулли Даниил применил это соотношение к анализу малых поперечных колебаний балки. Он же предложил своему ученику Л. Эйлеру заняться задачей об упругих кривых с помощью разрабатываемого последним аппаратом вариационного исчисления. Этой задачей с разных позиций Эйлер занимался всю свою жизнь. Он разработал метод реше-

ния нелинейного уравнения (8.6.2) и для больших изгибов балок и колец построил целый ряд решений (эластики Эйлера). Эйлер же проинтегрировал дифференциальное уравнение малых поперечных колебаний балки, а также поставил и решил задачу об устойчивости стержней, сжатых продольными силами. Практически одновременно с Эйлером задачами об упругих кривых и об устойчивости стержней занимался Ж.Л. Лагранж (1736–1813).

А. Клебш (1833–1872) в своем курсе «Теория упругости твердых тел» (1862) в качестве одной из многочисленных прикладных задач рассмотрел задачу о малых прогибах балки и показал способ построения универсального уравнения упругой линии (8.6.23). О. Мор (1835–1918) в 1868 г. разработал метод единичной нагрузки, применил его для определения прогибов балок и пришел к интегралу (8.8.6). Позже этот метод был использован им для определения перемещений ферм (см. разд. 4.7). Графоаналитический способ вычисления интеграла Мора предложен А.Н. Верещагиным в 1924 г., когда он был студентом Ленинградского института инженеров транспорта. В силу своей простоты этот метод быстро получил широкое распространение, особенно для расчетов статически неопределеных систем.

## B.8. Контрольные вопросы

**B.8.1.** Чем отличается прямой изгиб от косого? При каких условиях возникает прямой изгиб?

**B.8.2.** Чем отличается чистый изгиб от поперечного?

**B.8.3.** Какими статическими дифференциальными соотношениями связаны между собой интенсивность распределенной нагрузки, перерезывающая сила и изгибающий момент?

**B.8.4.** В каких точках на своих эпюрах перерезывающая сила и изгибающий момент претерпевают скачки? Какова величина каждого такого скачка?

**B.8.5.** Как связано направление выпуклости эпюры изгибающих моментов с направлением распределенной нагрузки? Откуда эта связь следует?

**B.8.6.** Почему при построении эпюр в консольной балке нет необходимости определять опорные реакции?

**B.8.7.** Как используются статические дифференциальные соотношения при построении эпюр  $Q_y$  и  $M_z$  в балках?

**B.8.8.** Как определить равнодействующую распределенной нагрузки? Как вычислить ее равнодействующий момент?

**B.8.9.** Какие связи наложены на балку соответственно в катковой, шарнирной опорах и в заделке? Какие реакции в них возникают?

**B.8.10.** Как используются статические интегральные соотношения при построении эпюр в балках?

**B.8.11.** Какой вид имеет математическое выражение гипотезы плоских сечений при прямом изгибе балки?

**B.8.12.** На чем основывается предположение о том, что деформация продольных волокон балки подчиняется закону Гука для одноосного растяжения–сжатия?

**В.8.13.** Как меняются нормальные напряжения по поперечному сечению балки? Как их вычислить по заданному изгибающему моменту?

**В.8.14.** Как при прямом изгибе связаны между собой кривизна деформированной оси балки и изгибающий момент в данном поперечном сечении?

**В.8.15.** Какое предположение принято относительно распределения  $\tau_{xy}$  по ширине сечения балки? Как определить  $\tau_{xy}$  в поперечном сечении балки по действующей в нем перерезывающей силе  $Q_y$ ?

**В.8.16.** Каким сечением выделяется отсеченная часть  $F^{\text{отс}}$  для подсчета  $S_z^{\text{отс}}$  в формуле для  $\tau_{xy}$ ?

**В.8.17.** В каких точках поперечного сечения действуют максимальные касательные напряжения при изгибе балок прямоугольного и треугольного сечений? Как они отличаются от средних по сечению напряжений?

**В.8.18.** Какие особенности распределения касательных напряжений по тонкостенному сечению?

**В.8.19.** В чем сходство и различие формул для определения касательных напряжений в тонкостенном и нетонкостенном сечениях при изгибе балки?

**В.8.20.** Что такое центр изгиба (центр жесткости) сечения? Для чего необходимо знать положение этой точки в сечении? Что называется осью жесткости балки?

**В.8.21.** Почему при расчете балки на прочность можно пренебречь взаимным влиянием нормальных и касательных напряжений? Какие напряжения могут быть определяющими при расчете металлических, деревянных и композитных балок?

**В.8.22.** Что такое момент сопротивления изгибу?

**В.8.23.** Почему двутавровое сечение выгодно по сравнению с другими сечениями балок, работающих на изгиб?

**В.8.24.** По каким сечениям балки (балка постоянного сечения) необходимо вести расчет на прочность, если:

а) материал балки одинаково работает на растяжение и сжатие;

б) материал балки неодинаково работает на растяжение и сжатие и сечение симметрично относительно нейтральной оси  $z$ ;

в) материал балки неодинаково работает на растяжение и сжатие, но сечение несимметрично относительно оси  $z$ ?

**В.8.25.** Какие величины связываются дифференциальным уравнением упругой линии балки? Как выбирается знак в этом уравнении?

**В.8.26.** Из каких условий определяются произвольные постоянные в общем решении дифференциального уравнения упругой линии балки?

**B.8.27.** Почему в выражении (8.6.16) интеграл от  $M$  можно записать в виде  $M(x - x_M)$ ?

**B.8.28.** Из каких слагаемых складывается потенциальная энергия деформации балки? Какое из них является преобладающим для длинных балок?

**B.8.29.** Какова цель двухэтапного нагружения балки при выводе интеграла Мора?

**B.8.30.** Приведите две формы записи интеграла Мора для обобщенного перемещения. Какая из них является более общей и почему?

**B.8.31.** К чему сводится задача вычисления интеграла Мора по способу Верещагина?

**B.8.32.** Какие два приема расслоения эпюр вы знаете? В чем они заключаются?

### 3.8. Задачи

**3.8.1.** Для шести балок, показанных на рис. 8.77, построить эпюры перерезывающих сил  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_z$ .

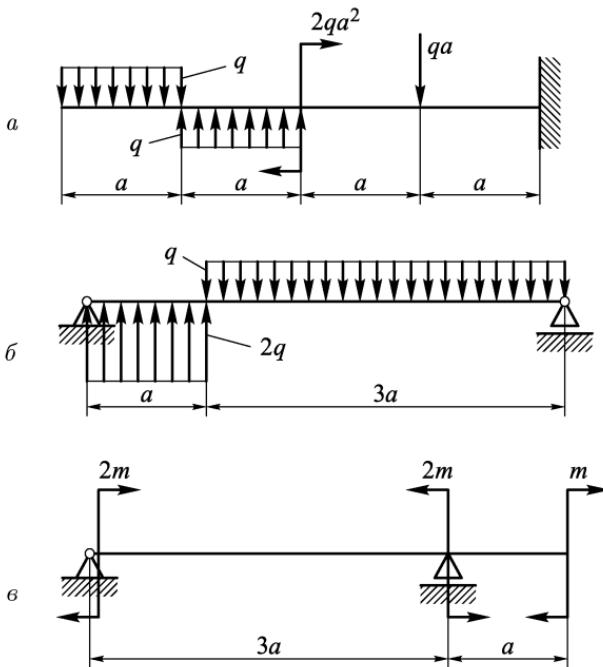


Рис. 8.77 а, б, в

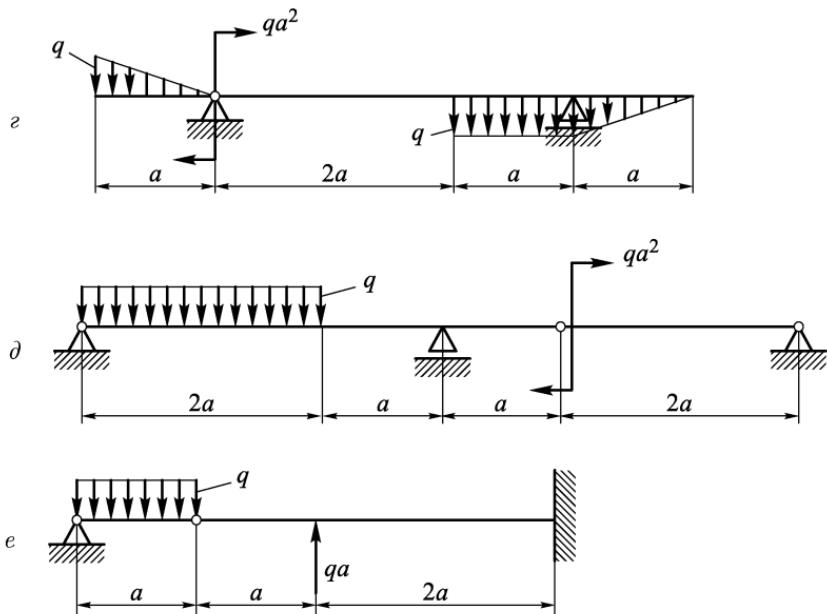


Рис. 8.77 г, д, е

**3.8.2.** Для балки (рис. 8.78) построить эпюры  $Q_y$  и  $M_z$ . Из условия прочности определить размеры показанных на рисунке поперечных сечений и сравнить массы балок этих сечений. Допускаемое напряжение на растяжение  $[\sigma]_p = 70$  МПа, на сжатие  $[\sigma]_c = 40$  МПа,  $q = 10^3$  Н/м,  $a = 0,5$  м.

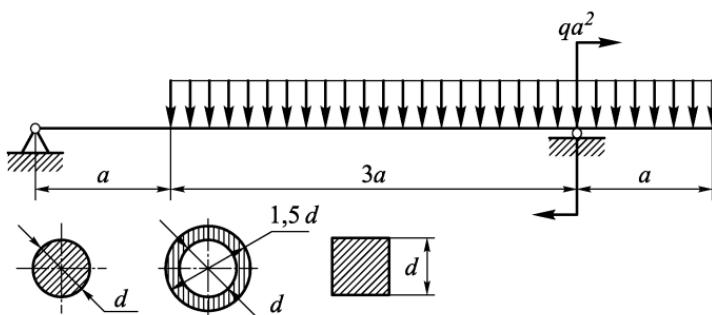


Рис. 8.78

**3.8.3.** Используя для балки в предыдущей задаче поперечное сечение из задачи 7.5 (нагрузка приложена в плоскости сим-

метрии балки на верхней полке), вычислить допускаемую величину интенсивности нагрузки  $[q]$ , полагая  $b = 10$  м, а материал и размеры участков балки прежними.

**3.8.4.** Полагая сечение той же самой балки (см. рис. 8.78 к задаче 8.2) составным (см. рис. 7.25 к задаче 7.7) и приложив нагрузку в плоскости наибольшей жесткости балки, определить ее запас прочности. Принять при этом  $\sigma_t = 240$  МПа,  $q = 2,5 \cdot 10^4$  Н/м,  $a = 0,5$  м.

**3.8.5.** Для сечений, показанных на рис. 7.24 *a*, *б*, *г* к задаче 7.6 построить эпюры  $S_z^{\text{отс}}$  и касательных напряжений. При этом для сечений на рис. 7.24 *a*, *б* нагрузку считать приложенной в вертикальной плоскости ( $Q_y$  направлена сверху вниз), а для сечения на рис. 7.24 *г* — как в вертикальной (то же направление  $Q_y$ ), так и в горизонтальной ( $Q_z$  направлена справа налево) плоскостях. Кроме того, для сечений на рис. 7.24 *a*, *г* определить положение центра изгиба.

**3.8.6.** Для балки постоянного сечения, показанной на рис. 8.79, найти прогиб на левом конце и угол поворота сечения, где приложена сила  $2qa$ , используя универсальное уравнение упругой линии.

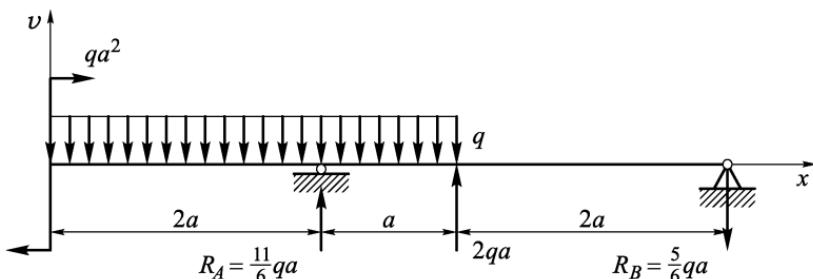


Рис. 8.79

**3.8.7.** Используя интеграл Мора, найти прогиб в середине балки, изображенной на рис. 8.77 *б* к задаче 8.1.

**3.8.8.** Воспользовавшись способом Верещагина, определить взаимный угол поворота двух сечений, расположенных непосредственно слева и справа от промежуточного шарнира, в балке, изображенной на рис. 8.77 *д* к задаче 8.1.

## ГЛАВА 9

### ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ДЕФОРМАЦИИ БРУСА

Рассмотренные в главах 4, 6, 8 элементарные состояния бруса: центральное растяжение–сжатие, кручение и прямой изгиб возникают в брусе при соответствующих специальных нагрузках. Так, в прямолинейном брусе центральное растяжение–сжатие вызывают нагрузки, равнодействующие которых действуют по оси бруса. Прямой изгиб создают поперечные нагрузки в плоскости, содержащей одну из главных центральных осей поперечного сечения бруса. Кручение бруса возникает под действием таких нагрузок, которые сводятся к моментам в плоскости, нормальной к оси бруса.

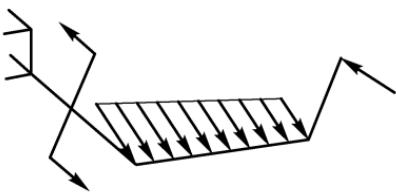


Рис. 9.1

В общем случае нагружения бруса (рис. 9.1) нагрузка не обладает такими специфическими особенностями. Поэтому в его поперечных сечениях могут возникнуть все шесть внутренних силовых факторов (рис. 9.2), определить которые можно из условий равновесия отсеченных частей, как это сделано в разд. 2.1. Но принцип наложения действия сил, или принцип суперпозиции (см. п. 1.2.6), позволяет нам в общем случае нагружения бруса рассматривать напряженное

состояние в его поперечном сечении как суперпозицию шести состояний, в каждом из которых действует только один из внутренних силовых факторов (рис. 9.3).

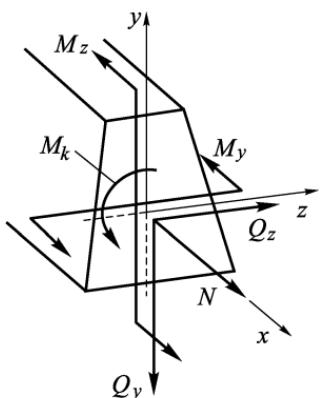


Рис. 9.2

состояние в его поперечном сечении как суперпозицию шести состояний, в каждом из которых действует только один из внутренних силовых факторов (рис. 9.3).

## 9.1. Нормальные напряжения в общем случае деформации бруса

**9.1.1.** В первых трех из показанных на рис. 9.3 шести состояний продольная сила  $N$  и изгибающие моменты  $M_z$ ,  $M_y$  являются

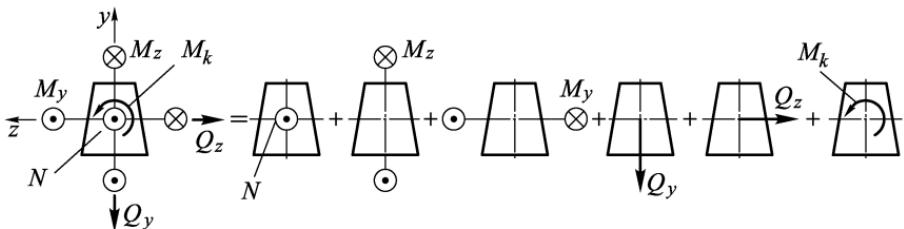


Рис. 9.3

ются результатом действия нормальных напряжений. Если оси  $z$ ,  $y$  — главные центральные оси сечения, то

$$\sigma_x(N) = \frac{N}{F}, \quad \sigma_x(M_z) = -\frac{M_z}{J_z}y, \quad \sigma_x(M_y) = \frac{M_y}{J_y}z. \quad (9.1.1)$$

Знак « $-$ » во второй формуле учитывает, что при показанном на рис. 9.3 направлении  $M_z$  в точках с положительной координатой  $y$  возникают сжимающие напряжения. При одновременном действии  $N$ ,  $M_z$  и  $M_y$  нормальные напряжения (9.1.1) складываются алгебраически, так как все они действуют вдоль оси  $x$ :

$$\sigma_x = \sigma_x(N) + \sigma_x(M_z) + \sigma_x(M_y) = \frac{N}{F} - \frac{M_z}{J_z}y + \frac{M_y}{J_y}z. \quad (9.1.2)$$

Так как направление осей  $z$ ,  $y$  может не совпадать с указанным на рис. 9.3, то формулу (9.1.2) удобно записывать в виде

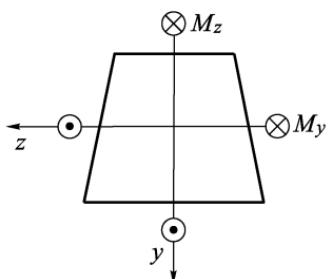


Рис. 9.4

$$\sigma_x = \frac{N}{F} \pm \frac{M_z}{J_z}y \pm \frac{M_y}{J_y}z. \quad (9.1.3)$$

Конкретные знаки у второго и третьего слагаемых определяются направлением осей. Если оси направить в сторону зон растянутых продольных волокон в сечении (в сторону значка  $\odot$  на изображениях  $M_z$  и  $M_y$ ), как это показано на рис. 9.4, то в формуле (9.1.3) нужно выбрать оба знака « $+$ ». Продольные силы

по-прежнему считаются положительными, если они растягивающие.

**9.1.2.** Найдем положение нейтральной линии сечения, т.е. линии, которая отделяет сжатую зону сечения от растянутой и на которой лежат нейтральные продольные волокна. Очевидно, что на этой линии  $\sigma_x = 0$ . Поэтому при взаимной ориентации осей  $z$ ,  $y$  и моментов  $M_z$ ,  $M_y$ , соответствующих выражению (9.1.2) и показанных на рис. 9.3, получаем следующее выражение для нейтральной линии:

$$y = \frac{M_y J_z}{M_z J_y} z + \frac{N J_z}{M_z F}. \quad (9.1.4)$$

Ясно, что на плоскости  $zy$  нейтральная линия является прямой линией (рис. 9.5). Более того, в трехмерном пространстве  $y$ ,  $z$ ,  $\sigma_x$  эта линия является линией пересечения плоскости (9.1.2), определяющей величину  $\sigma_x$  в зависимости от координат  $y$ ,  $z$  точек сечения (плоскость эпюры  $\sigma_x$ ), с плоскостью  $zy$  сечения. Плоскостной закон распределения напряжений позволяет также легко найти те точки сечения, в которых действуют наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения. Это будут точки растянутой и сжатой зон сечения, которые наиболее удалены от нейтральной линии (точки  $A$  и  $B$  на рис. 9.5). Тогда необходимые для расчета на прочность наибольшие растягивающие  $\sigma_{p\max}$  и сжимающие  $\sigma_{c\max}$  напряжения в сечении определяются выражением (9.1.2), в которое надо подставить координаты этих точек. Так, для случая, показанного на рис. 9.5,

$$\sigma_{p\max} = \frac{N}{F} - \frac{M_z}{J_z} y_A + \frac{M_y}{J_y} z_A.$$

В этой формуле в соответствии с выбранными направлениями осей координаты точки  $A$  такие, что  $y_A < 0$  и  $z_A > 0$ .

**9.1.3.** Иногда удобно рассматривать деформацию бруса, привязываясь к осям, которые не являются главными центральными. Деформация бруса, соответствующая закону плоских сечений, при произвольном выборе координатных осей в сечении может быть представлена как наложение (суперпозиция) трех простых деформаций, показанных на рис. 9.6 (недеформированный элемент показан штриховой линией). Деформация 1 соответствует растяжению, когда ось остается прямолинейной и из-



Рис. 9.5

меняется только расстояние между сечениями. Поэтому все волокна бруса получают такое же удлинение, что и ось бруса, т.е.  $\varepsilon_x^{(1)} = \varepsilon$ .

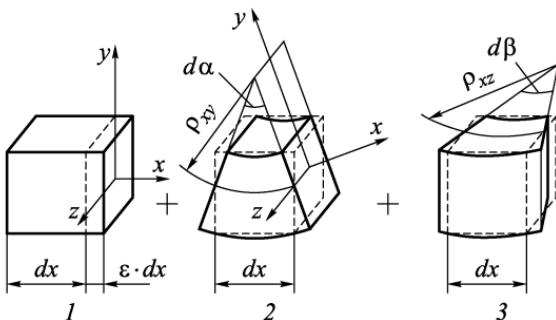


Рис. 9.6

Деформация 2 соответствует искривлению оси  $x$  только в плоскости  $xy$ . При этом длина оси не изменяется, а ось приобретает в плоскости  $xy$  кривизну  $1/\rho_{xy}$ . Эта деформация соответствует рассмотренному в разд. 8.2 прямому изгибу в плоскости  $xy$  (см. рис. 8.27). Поэтому деформация  $\varepsilon_x^{(2)}$  продольного волокна бруса, имеющего координату  $y$ , определится выражением (8.2.1) и будет  $\varepsilon_x^{(2)} = -y/\rho_{xy}$ .

Деформация 3 соответствует аналогичному прямому изгибу, но только в плоскости  $xz$ . И если  $\rho_{xz}$  — радиус кривизны оси бруса в плоскости  $xz$ , то  $\varepsilon_x^{(3)} = z/\rho_{xz}$  (знак плюс здесь соответствует тому, что волокна, у которых  $z > 0$ , удлиняются).

При наложении деформаций удлинение  $\varepsilon_x$  продольного волокна с координатами  $z$ ,  $y$  складывается из трех слагаемых

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^{(1)} + \varepsilon_x^{(2)} + \varepsilon_x^{(3)} = \varepsilon - \frac{y}{\rho_{xy}} + \frac{z}{\rho_{xz}}.$$

Оставаясь в рамках гипотезы о ненадавливаемости продольных волокон, будем, как в п. 8.2.2, считать, что продольные волокна бруса находятся в состоянии одноосного растяжения. Поэтому в силу закона Гука нормальное напряжение

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\left(\varepsilon - \frac{y}{\rho_{xy}} + \frac{z}{\rho_{xz}}\right), \quad (9.1.5)$$

что соответствует плоскостному закону распределения напряжений по сечению.

Чтобы связать удлинение оси бруса  $\varepsilon$  и ее кривизн  $\kappa_z = 1/\rho_{xy}$  и  $\kappa_y = 1/\rho_{xz}$  с внутренними силовыми факторами  $N$ ,  $M_z$  и  $M_y$ , воспользуемся интегральными выражениями (2.3.1),

которые для показанных на рис. 9.5 направлений осей  $z$ ,  $y$  и внутренних силовых факторов  $N$ ,  $M_z$ ,  $M_y$  имеют вид

$$N = \int_F \sigma_x dF, \quad M_z = - \int_F y\sigma_x dF, \quad M_y = \int_F z\sigma_x dF. \quad (9.1.6)$$

Подставим сюда выражение (9.1.5) для  $\sigma_x$ . В результате придем к трем соотношениям:

$$\begin{aligned} N &= E \left( F\varepsilon - S_z \frac{1}{\rho_{xy}} + S_y \frac{1}{\rho_{xz}} \right), \\ M_z &= E \left( -S_z\varepsilon + J_z \frac{1}{\rho_{xy}} - J_{zy} \frac{1}{\rho_{xz}} \right), \\ M_y &= E \left( S_y\varepsilon - J_{zy} \frac{1}{\rho_{xy}} + J_y \frac{1}{\rho_{xz}} \right). \end{aligned} \quad (9.1.7)$$

Удобна матричная форма записи этих соотношений:

$$\begin{bmatrix} N \\ M_z \\ M_y \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} F & -S_z & S_y \\ -S_z & J_z & -J_{zy} \\ S_y & -J_{zy} & J_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 1/\rho_{xy} \\ 1/\rho_{xz} \end{bmatrix} = EJ \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa_z \\ \kappa_y \end{bmatrix}. \quad (9.1.8)$$

Матрица  $J$  составлена из геометрических характеристик сечения. Если оси  $z$ ,  $y$  — главные центральные оси сечения, то равны нулю статические моменты  $S_z$  и  $S_y$  и центробежный момент  $J_{zy}$  и матрица  $J$  упрощается, становясь диагональной, а система уравнений (9.1.7) распадается на три известных нам соотношения:

$$N = EF\varepsilon, \quad M_z = \frac{EJ_z}{\rho_{xy}}, \quad M_y = \frac{EJ_y}{\rho_{xz}}.$$

Подставив полученные отсюда выражения для  $\varepsilon$ ,  $1/\rho_{xy}$  и  $1/\rho_{xz}$  в соотношение (9.1.5), мы легко придем к формуле (9.1.2).

Если оси не являются главными центральными, то  $\varepsilon$ ,  $1/\rho_{xy}$  и  $1/\rho_{xz}$  находятся как решения системы (9.1.7). И хотя эта система трех уравнений относительно трех неизвестных  $\varepsilon$ ,  $1/\rho_{xy}$ ,  $1/\rho_{xz}$  является линейной и ее решение не представляет принципиальных трудностей, аналитические выражения для решения оказываются громоздкими и запомнить их становится трудно. Поэтому проще перейти к главным центральным осям. При численной же реализации на ЭВМ решение системы (9.1.8) не составляет труда, и оно может быть эффективно использовано. Мы же будем далее считать оси  $z$ ,  $y$  главными центральными осями сечения.

**9.1.4.** Если в брусе продольная сила  $N$  и крутящий момент  $M_k$  равны нулю, а изгибающие моменты  $M_z$  и  $M_y$  не равны нулю, то в соответствии с классификацией форм изгиба, данной в

преамбуле к гл. 8, такой изгиб называется *косым*. В соответствии с (9.1.3) нормальные напряжения в этом случае определяются выражением

$$\sigma_x = \pm \frac{M_z}{J_z} y \pm \frac{M_y}{J_y} z. \quad (9.1.9)$$

Нейтральная линия (9.1.4) при косом изгибе проходит через центр тяжести поперечного сечения и определяется соотношением

$$y = \pm \frac{M_y J_z}{M_z J_y} z. \quad (9.1.10)$$

П р и м е р 9.1. Рассмотрим изгиб консольного бруса длиной  $l$  и прямоугольного сечения  $a \times 2a$  под действием силы  $P$ , направленной вдоль одной из диагоналей концевого сечения (рис. 9.7 а). Оси  $z$  и  $y$  являются главными центральными осями, и моменты инерции поперечного сечения равны

$$J_z = \frac{1}{12}a(2a)^3 = \frac{2}{3}a^4, \quad J_y = \frac{1}{12}2aa^3 = \frac{1}{6}a^4.$$

Разложив силу  $P$  на составляющие по главным центральным осям, легко получить эпюры изгибающих моментов  $M_z$  и  $M_y$  в главных плоскостях (см. рис. 9.7 б). Определим нормальные

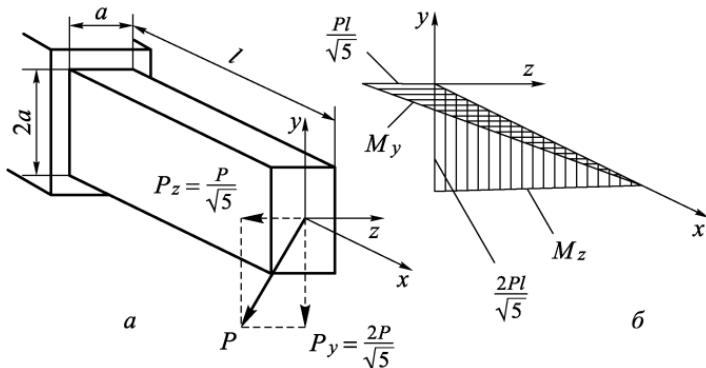


Рис. 9.7

напряжения, возникающие в сечении бруса, соответствующем заделке. Оси  $z$ ,  $y$  направим, как показано на рис. 9.8. Тогда

$$\sigma_x = \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z = \frac{2Pl}{\sqrt{5}} \frac{3}{2a^4} y + \frac{Pl}{\sqrt{5}} \frac{6}{a^4} z.$$

Из условия  $\sigma_x = 0$  следует выражение для нейтральной линии  $y = -2z$ , которое показывает, что нейтральная линия совпадает со второй диагональю прямоугольника. Важно отметить, что в отличие от прямого изгиба, при косом изгибе нейтральная линия не перпендикулярна плоскости действия нагрузки.

Максимальные растягивающие и сжимающие напряжения действуют в наиболее удаленных от нейтральной линии точках *A* и *B*:

в точке *A*

$$\sigma_{p \max} = \frac{M_z}{J_z} y_A + \frac{M_y}{J_y} z_A = \frac{3Pl}{\sqrt{5} a^4} \cdot 2a + \frac{6Pl}{\sqrt{5} a^4} a = \frac{12Pl}{\sqrt{5} a^3};$$

в точке *B*

$$\sigma_{c \ max} = - \frac{12Pl}{\sqrt{5} a^3}.$$

Эти напряжения равны по абсолютной величине, потому что точки *A* и *B* одинаково удалены от нейтральной линии.

Чтобы найти перемещение концевого сечения  $\delta$ , определим его вертикальную  $\delta_y$  и горизонтальную  $\delta_z$  составляющие. Вычислив интеграл Мора с помощью способа Верещагина, получим (эпюры  $\bar{M}_z(1)$  и  $\bar{M}_y(1)$  показаны на рис. 9.9)

$$\delta_y = \int_l \frac{M_z \bar{M}_z(1)}{E J_z} dx = \frac{1}{E \cdot \frac{2}{3} a^4} \cdot \frac{1}{2} \frac{2Pl}{\sqrt{5}} l \cdot \frac{2}{3} l = \frac{Pl^3}{\sqrt{5} E a^4};$$

$$\delta_z = \int_l \frac{M_y \bar{M}_y(1)}{E J_y} dx = \frac{1}{E \cdot \frac{1}{6} a^4} \cdot \frac{1}{2} \frac{Pl}{\sqrt{5}} l \cdot \frac{2}{3} l = \frac{2Pl}{\sqrt{5} E a^4}.$$

Складывая геометрически  $\delta_y$  и  $\delta_z$ , получаем  $\delta$  (см. рис. 9.8). Замечаем, что вектор  $\delta$  здесь нормален к нейтральной линии сечения и не совпадает по направлению с силой  $P$ , что характерно для косого изгиба.

**9.1.5.** Напряженное состояние бруса, возникающее под действием продольных нагрузок, приложенных не по оси бруса, называют *внекентренным* (нецентральным) *растяжением–сжатием*. В этом случае перезывающие силы  $Q_y$ ,  $Q_x$  и крутящий момент  $M_k$  равны нулю. Поэтому в поперечных сечениях бруса возникают только нормальные напряжения  $\sigma_x$ , и они определяются выражением (9.1.3). А уравнение нейтральной линии имеет вид (9.1.4), и она не проходит через центр тяжести сечения.

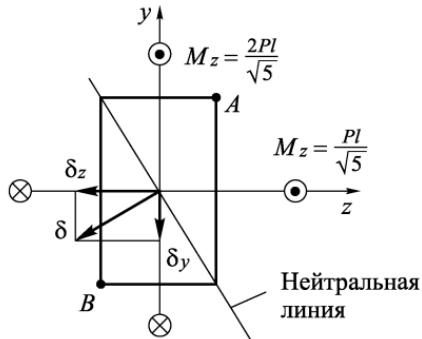


Рис. 9.8

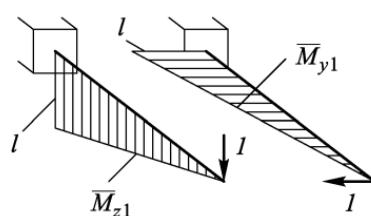


Рис. 9.9

Пример 9.2. Рассмотрим растяжение треугольной призмы силами, действующими вдоль одного из ребер (рис. 9.10). Сечение призмы — прямоугольный равнобедренный треугольник с основанием  $2a$  и высотой  $a$ .

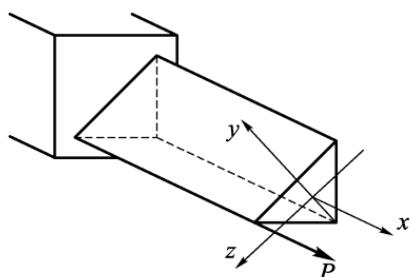


Рис. 9.10

Главные центральные оси его обозначим через  $z$  и  $y$ , как показано на рис. 9.11. Тогда

$$J_z = \frac{1}{36} \cdot 2aa^3 = \frac{a^4}{18},$$

$$J_y = 2 \frac{1}{12} aa^3 = \frac{a^4}{6}.$$

Подсчитаем  $N$ ,  $M_z$  и  $M_y$  из условия равновесия отсеченной части:  $N = P$ ,  $M_z = \frac{1}{3}Pa$ ,

$M_y = Pa$ . Так как оси  $z$  и  $y$  направлены в сторону растянутых продольных волокон (в сторону значка  $\odot$  на изображениях  $M_z$  и  $M_y$ ), в формуле (9.1.3) нужно сохранить знаки «+». Поэтому

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z}y + \frac{M_y}{J_y}z = \\ &= \frac{P}{a^2} + \frac{Pa/3}{a^4/18}y + \frac{Pa}{a^4/6}z.\end{aligned}$$

Уравнение нейтральной линии получим из условия  $\sigma_x = 0$ . Оно принимает вид  $y = -z - \frac{1}{6}a$ . Таким образом, нейтральная линия проходит вертикально, как показано на рис. 9.11. Поэтому видно, что максимальные растягивающие напряжения возникают в точке

$A\left(y_A = \frac{1}{3}a, z_A = a\right)$ , а максимальные сжимающие — в точках стороны  $BC$ , например в точке  $B\left(z_B = 0, y_B = -\frac{2}{3}a\right)$ . Они равны:

$$\sigma_z(A) = \sigma_{p\max} = \frac{P}{a^2} + \frac{6P}{a^3} \cdot \frac{a}{3} + \frac{6P}{a^3}a = \frac{9P}{a^2},$$

$$\sigma_z(B) = \sigma_{c\max} = \frac{P}{a^2} + \frac{6P}{a^3} \left(-\frac{2}{3}a\right) + \frac{6P}{a^3} \cdot 0 = -\frac{3P}{a^2}.$$

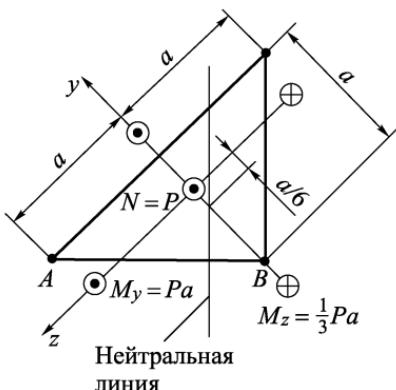


Рис. 9.11

Полезно заметить, что если бы сила  $P$  была приложена вдоль оси бруса, т.е. при центральном растяжении, нормальные на-

пряжения были бы  $\sigma_x = N/F = P/a^2$ . Таким образом, даже кажущееся небольшим (в пределах сечения) смещение растягивающей нагрузки относительно оси бруса, привело к увеличению напряжений в девять (!) раз. Поэтому при проектировании элементов конструкции, которым предстоит работать на растяжение или сжатие, нужно принимать специальные конструктивные меры, чтобы возможно точнее обеспечить соосность нагрузки и оси бруса.

## 9.2. Касательные напряжения в общем случае деформации бруса

**9.2.1.** Перерезывающие силы  $Q_y$ ,  $Q_z$  и крутящий момент  $M_k$  в последних трех из данных на рис. 9.3 состояний являются результатом действия касательных напряжений в сечении бруса. При рассмотрении кручения (см. гл. 6) и изгиба (см. гл. 8) было показано, что характер распределения касательных напряжений по сечению существенно зависит от его формы. В этом смысле все сечения можно разбить на две группы: тонкостенные и нетонкостенные. В тонкостенных сечениях направление касательных напряжений близко к направлению касательной к средней линии (см. п. 6.6.1), и с достаточной точностью можно считать, что они направлены вдоль средней линии. Это свойство позволяет в тонкостенных сечениях суммировать касательные напряжения, связанные с различными внутренними силовыми факторами, алгебраически. Таким образом, если  $s$  — координата вдоль средней линии, то в каждой точке тонкостенного сечения

$$\tau_{xs} = \tau_{xs}(Q_y) + \tau_{xs}(Q_z) + \tau_{xs}(M_k). \quad (9.2.1)$$

Здесь следует заметить, что при определении слагаемых в этой сумме по формулам, полученным в главах 6 и 8, необходимо, чтобы оси  $z$ ,  $y$  были главными центральными, но система внутренних силовых факторов  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_k$  должна быть приведена к центру изгиба. Иначе говоря, при вычислении крутящего момента  $M_k$  из условий равновесия отсеченной части необходимо помнить, что линии действия перерезывающих сил  $Q_y$  и  $Q_z$  проходят через центр изгиба сечения. Поэтому, чтобы определить  $M_k$  независимо от  $Q_y$  и  $Q_z$ , нужно использовать условие равенства нулю моментов, действующих на отсеченную часть сил, относительно оси жесткости бруса (а не относительно оси бруса  $x$ , проходящей через центры тяжести его сечений, как это иногда делают по инерции).

Если сечение не является тонкостенным, то касательные напряжения, связанные с перерезывающими силами  $Q_y$  и  $Q_z$  и определяемые формулой Журавского (8.3.6), действуют в направлении  $Q_y$  и  $Q_z$ . А касательные напряжения от кручения

брока могут по направлению не совпадать с осями  $z$ ,  $y$ . Поэтому суммирование касательных напряжений, связанных с различными внутренними силовыми факторами, необходимо здесь проводить геометрически (векторно):

$$\vec{\tau}_x = \vec{\tau}_{xy}(Q_y) + \vec{\tau}_{xz}(Q_z) + \vec{\tau}_x(M_k). \quad (9.2.2)$$

Замечание о необходимости приводить систему внутренних силовых факторов  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_k$  к центру изгиба сечения здесь также остается в силе. Но для нетонкостенных сечений центр изгиба обычно либо совпадает с центром тяжести (когда у сечения две оси симметрии), либо близок настолько, что без существенной ошибки можно считать  $Q_y$  и  $Q_z$  приложенными в центре тяжести сечения.

**9.2.2.** Пример 9.3. Пусть брус тонкостенного незамкнутого сечения нагружен так, как показано на рис. 9.12. Рассмотрим напряженное состояние в сечении бруса у заделки. Внутренние силовые факторы, вытекающие из условия равновесия отсеченной части, показаны на рис. 9.13. Величина  $M_k$  получена

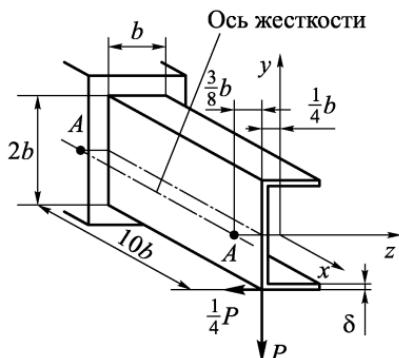


Рис. 9.12

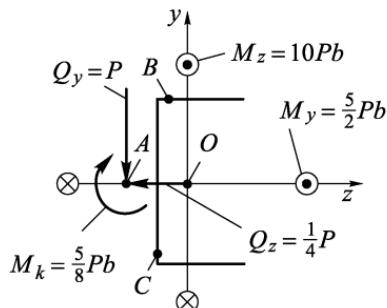


Рис. 9.13

из условия равенства нулю моментов относительно оси жесткости  $A-A$  (см. пп. 8.4.2, 8.4.3) сил, действующих на отсеченную часть:

$$\sum M_{A-A} = 0 \rightarrow M_k = \frac{1}{4}Pb + P \cdot \frac{3}{8}b = \frac{5}{8}Pb.$$

Нормальные напряжения легко определяются на основе формулы (9.1.3):

$$\sigma_x = \frac{M_z}{J_z}y + \frac{M_y}{J_y}z = \frac{10Pb}{\frac{8}{3}b^3\delta}y + \frac{\frac{5}{2}Pb}{\frac{5}{12}b^3\delta}z.$$

Здесь учтено, что для рассмотренного сечения  $J_z = \frac{8}{3}b^3\delta$ , а

$J_y = \frac{5}{12}b^3\delta$ . Величина  $J_z$  подсчитана в п. 8.4.2, а величину  $J_y$  читатель легко может определить самостоятельно.

Касательные напряжения  $\tau_{xs}(Q_y)$  и  $\tau_{xs}(Q_z)$  равномерно распределены по толщине сечения  $\delta$  и направлены касательно к средней линии. Их величины и направления показаны на эпюрах рис. 9.14. Первая из них получена в п. 8.4.1, вторую несложно получить аналогично.

Рассмотренное сечение является тонкостенным незамкнутым сечением. Поэтому, как показано в разд. 6.5, при кручении в нем возникают линейно изменяющиеся по толщине касательные напряжения  $\tau_{xs}(M_k)$ . Их величина вдоль средней линии не меняется. На рис. 9.15  $\tau_{xs}(M_k)$  показаны вблизи точки  $B$  средней ли-

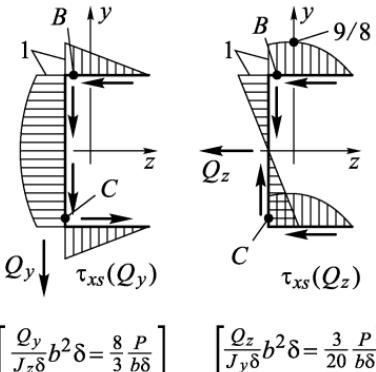


Рис. 9.14

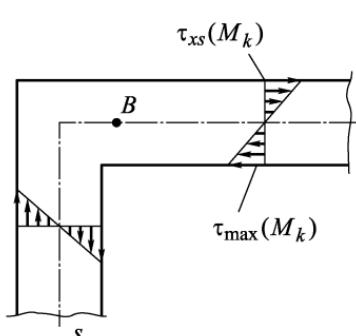


Рис. 9.15

нии сечения. Величина  $\tau_{max}(M_k)$  определяется формулой (6.5.9). Для нашего сечения момент сопротивления кручению (6.5.10)

$$W_k = \frac{1}{3\delta}(b\delta^3 + 2b\delta^3 + b\delta^3) = \frac{4}{3}b\delta^2.$$

Поэтому

$$\tau_{max}(M_k) = \frac{M_k}{W_k} = \frac{5}{8}Pb / \frac{4}{3}b\delta^2 = \frac{15}{32}\frac{P}{\delta^2}.$$

Тогда распределение  $\tau_{xs}$  по толщине сечения, например, в точке  $B$ , можно получить как сумму показанных на рис. 9.16 эпюр. При этом учтено направление  $\tau_{xs}(Q_y)$  и  $\tau_{xs}(Q_z)$ , показанное стрелками на рис. 9.14. Максимальная величина  $\tau_{xs}$  будет в точках внутреннего контура:

$$\tau_{xs\ max} = \frac{8}{3}\frac{P}{b\delta} + \frac{3}{20}\frac{P}{b\delta} + \frac{15}{32}\frac{P}{\delta^2} = \frac{169}{60}\frac{P}{b\delta} + \frac{15}{32}\frac{P}{\delta^2}.$$

Например, при  $\delta = 0,1b$  получаем

$$\tau_{xs\ max} = \frac{490}{15}\frac{P}{b^2} + \frac{1500}{32}\frac{P}{b^2} = 28,2\frac{P}{b^2} + 46,9\frac{P}{b^2}.$$

Появление  $\tau_x(M_k)$  вызвано тем, что нагрузка  $P$  приложена не к оси жесткости бруса. Как видно, это привело к увеличению касательных напряжений в брусе в 2,7 раза, что связано с плохой работой на кручение открытых сечений. Чтобы избежать возникновения  $\tau_x(M_k)$  в рассмотренном брусе, нужно с помощью

простых конструктивных мер (например, закрепив в торцевом сечении простейший кронштейн) перенести внешние силы на ось жесткости (в точку  $A$  торцевого сечения). При таком нагружении окажется, что  $M_k = 0$  и  $\tau_x(M_k)$  не возникнет.

При расчете на прочность рассмотренного бруса замечаем, что опасным является сечение в заделке бруса; в нем одновременно действуют нормальные и касательные напряжения.

Например, в точке  $C$  (см. рис. 9.13) с координатами  $y_C = -b$ ,  $z_C = -\frac{1}{4}b$  действуют максимальные сжимающие напряжения

$$\sigma_C = \sigma_{c \max} = -\frac{10Pb}{3b^3\delta}b + \frac{\frac{5}{2}Pb}{\frac{5}{12}b^3\delta}\left(-\frac{b}{4}\right) = -\frac{21}{4}\frac{P}{b\delta}.$$

В этой же точке (при условии, что силы  $P$  приложены к оси жесткости) возникают касательные напряжения

$$\tau_C = \tau_{xs}(Q_y) - \tau_{xs}(Q_z) = \frac{3}{8}\frac{P}{b\delta} - \frac{3}{20}\frac{P}{b\delta} = \frac{9}{40}\frac{P}{b\delta}.$$

Это обстоятельство не позволяет проводить расчет на прочность только по нормальным напряжениям, как это делалось в гл. 8. Вопрос об учете одновременно действующих нормальных и касательных напряжений будет рассмотрен в гл. 11.

**Пример 9.4.** Рассмотрим брус прямоугольного сечения (рис. 9.17). Эпюры возникающих в его сечениях изгибающих и крутящих моментов показаны на рис. 9.18. Изгибающие моменты изображены в тех плоскостях, в которых они действу-

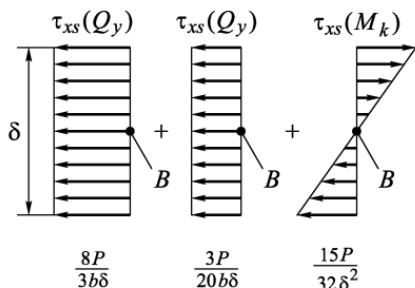


Рис. 9.16

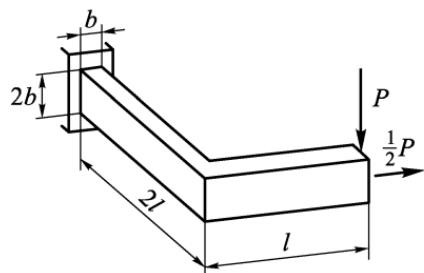


Рис. 9.17

ют, со стороны сжатых волокон. Видно, что наиболее нагруженным будет сечение бруса вблизи заделки. Действующие в нем

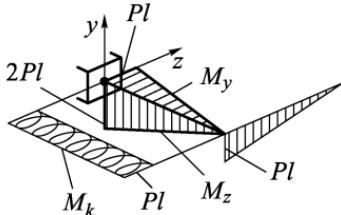


Рис. 9.18

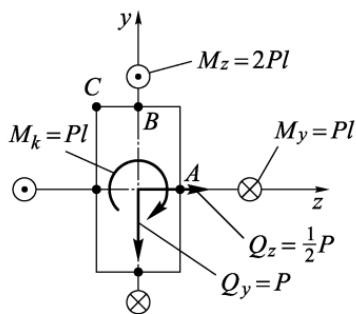


Рис. 9.19

внутренние силовые факторы показаны на рис. 9.19. Наибольшие нормальные напряжения возникают в точке  $C$  и согласно (9.1.3)

$$\sigma_{x \max} = \frac{M_z}{J_z} y_C - \frac{M_y}{J_y} z_C = 6 \frac{Pl}{b^3}.$$

Здесь и далее учтено, что  $J_z = \frac{2}{3}b^4$ ,  $J_y = \frac{1}{6}b^4$ ,  $y_C = b$ ,  $z_C = -\frac{b}{2}$ . Касательные напряжения в точке  $C$  равны нулю.

В точке  $A$  действуют нормальные напряжения

$$\sigma_{xA} = -\frac{M_y}{J_y} z_A = -3 \frac{Pl}{b^3},$$

а также касательные напряжения

$$\tau_{xyA}(M_k) = \frac{M_k}{W_k} = \frac{Pl}{\alpha \cdot 2bb^2} = 2,03 \frac{Pl}{b^3} \quad (\alpha = 0,246)$$

и

$$\tau_{xyA}(Q_y) = \frac{Q_y S_z^{\text{отс}}(A)}{J_z b} = P \cdot \frac{1}{2} b^3 / \left( \frac{2}{3} b^4 b \right) = \frac{3}{4} \frac{P}{b^2},$$

а  $\tau_{xzA}(Q_z) = 0$ . Поэтому в точке  $A$

$$\tau_{xA} = \tau_{xyA} = \tau_{xyA}(M_k) + \tau_{xyA}(Q_y) = \frac{Pl}{b^3} \left( 2,03 + 0,75 \frac{b}{l} \right).$$

Аналогично находим, что в точке  $B$  действуют напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{xB} &= 3 \frac{Pl}{b^3}, & \tau_{xzB}(M_k) &= \gamma \tau_{xyA}(M_k) = 0,795 \cdot 2,03 \frac{Pl}{b^3} = \\ &= 1,62 \frac{Pl}{b^3}, & \tau_{xzB}(Q_z) &= \frac{3}{2} \frac{Q_z}{F} = \frac{3}{2} \frac{P/2}{2b^2} = \frac{3}{8} \frac{P}{b^2} = 0,38 \frac{P}{b^2}. \end{aligned}$$

Поэтому в этой точке  $\tau_{xB} = \tau_{xzB} = \frac{Pl}{b^3} \left( 1,62 + 0,38 \frac{b}{l} \right)$ .

Сравним напряженные состояния в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ , например при  $b = 0,1l$ . Тогда  $\sigma_{xC} = 6Pl/b^3$ ,  $\tau_{xC} = 0$ ,  $\sigma_{xA} = -3Pl/b^3$ ,  $\tau_{xA} = 2,1Pl/b^3$ ,  $\sigma_{xB} = 3Pl/b^3$ ,  $\tau_{xB} = 1,66Pl/b^3$ .

Так как в точках  $A$  и  $B$  действуют одинаковые нормальные напряжения, но в точке  $A$  касательные напряжения больше, то, очевидно, что точка  $A$  опаснее точки  $B$ . Сравнивая же точки  $A$  и  $C$ , мы не можем сказать заранее, какая из них опаснее, так как хотя в точке  $A$  нормальные напряжения меньше, но они действуют одновременно с касательными напряжениями. Таким образом, мы снова пришли к проблеме, которая возникла в предыдущем примере, т.е. к проблеме расчета на прочность при одновременном действии нормальных и касательных напряжений.

### 9.3. Деформации в общем случае нагружения бруса

**9.3.1.** Получим потенциальную энергию деформации для общего случая деформации бруса. Для этого найдем сначала потенциальную энергию  $d\Pi$ , накапливавшуюся в элементе  $dx$  бруса. В результате возникновения в брусе шести внутренних силовых факторов элемент деформируется, т.е. ось элемента удлинится на величину  $\varepsilon dx$ , а сечение  $x + dx$  повернется относительно сечения  $x$  в плоскости  $xy$  на угол  $d\alpha = \frac{dx}{\rho_{xy}}$ , в плоскости  $xz$  — на угол  $d\beta = dx/\rho_{xz}$  (см. рис. 9.6) и в плоскости  $zy$  (относительно оси  $x$ ) — на угол  $d\varphi = \theta dx$  ( $\theta$  — относительный угол закручивания бруса). На рис. 9.20 схематично показаны деформации оси

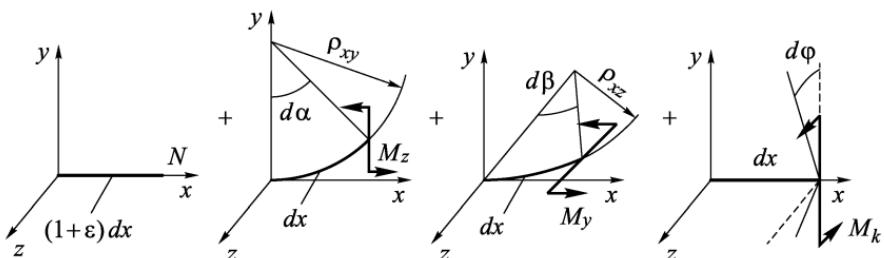


Рис. 9.20

вместе с теми внутренними силовыми факторами, которые совершают на перемещениях, вызванных этими деформациями, работу, накапливающуюся в элементе при его упругой деформации в виде потенциальной энергии деформаций. Левый конец элемента условно считаем неподвижным, т.е. введем оси координат, связанные с левым сечением. Важно отметить, что каждый

внутренний силовой фактор совершают работу только на соответствующем ему перемещении или угле поворота. Тогда при деформациях в пределе закона Гука

$$\begin{aligned} d\Pi = d\Pi_N + d\Pi_{M_z} + d\Pi_{M_y} + d\Pi_{M_k} &= \frac{1}{2} N\varepsilon dx + \frac{1}{2} M_z d\alpha + \\ &+ \frac{1}{2} M_y d\beta + \frac{1}{2} M_k d\varphi = \frac{1}{2} N\varepsilon dx + \frac{1}{2} \frac{M_z}{\rho_{xy}} dx + \frac{1}{2} \frac{M_y}{\rho_{xz}} dx + \frac{1}{2} M_k \theta dx. \end{aligned} \quad (9.3.1)$$

Суммируя по элементам бруса, получаем его потенциальную энергию деформации:

$$\begin{aligned} \Pi = \int_l d\Pi &= \frac{1}{2} \int_l \left( N\varepsilon + \frac{M_z}{\rho_{xy}} + \frac{M_y}{\rho_{xz}} + M_k \theta \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_l (N\varepsilon + M_z \kappa_z + M_y \kappa_y + M_k \theta) dx. \end{aligned} \quad (9.3.2)$$

Если оси  $x$ ,  $y$  — главные центральные оси сечения, то, как показано в разд. 9.1:

$$\varepsilon = \frac{N}{EF}, \quad \frac{1}{\rho_{xy}} = \kappa_z = \frac{M_z}{EJ_z}, \quad \frac{1}{\rho_{xz}} = \kappa_y = \frac{M_y}{EJ_y}.$$

Добавив к этим соотношениям полученную в гл. 6 формулу  $\theta = M_k/GJ_k$ , мы можем легко получить одно из следующих выражений для  $\Pi$ :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_l \left( \frac{N^2}{EF} + \frac{M_z^2}{EJ_z} + \frac{M_y^2}{EJ_y} + \frac{M_k^2}{GJ_k} \right) dx, \quad (9.3.3)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_l (EF\varepsilon^2 + EJ_z\kappa_z^2 + EJ_y\kappa_y^2 + GJ_k\theta^2) dx. \quad (9.3.4)$$

В проведенных рассуждениях пока не учтена энергия деформаций от напряжений  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{xz}$ , связанных с перерезывающими силами  $Q_y$  и  $Q_z$ . В разд. 8.7 показано, что для достаточно длинных балок, т.е. для балок, деформацию изгиба которых удовлетворительно представляет гипотеза плоских сечений, перерезывающие силы дают малую в сравнении с изгибающими моментами энергию деформации. Однако в случае необходимости можно учесть и ее, добавив, например, к выражению (9.3.3) слагаемые (см. п. 8.7.3)

$$\Pi_{Q_y} + \Pi_{Q_z} = \frac{1}{2} \int_l k_y \frac{Q_y^2}{GF} dx + \frac{1}{2} \int_l k_z \frac{Q_z^2}{GF} dx. \quad (9.3.5)$$

Полученные выражения нетрудно распространить на брус, ось которого в недеформированном состоянии имеет небольшую

кривизну (т.е. когда радиус кривизны велик по сравнению с максимальным размером сечения в плоскости кривизны). Ведь для такого бруса можно, как и ранее, считать, что внутренние силовые факторы совершают работу только на соответствующих им

перемещениях. Для этого рассмотрим показанную на рис. 9.21 деформацию оси элемента бруса с начальным радиусом кривизны оси  $\frac{1}{\rho_{xy}^0} = \frac{d\alpha^0}{ds}$  в плоскости  $xy$ . Если  $\frac{1}{\rho_{xy}} = \frac{d\alpha}{ds}$  — кривизна оси бруса в деформированном состоянии, тогда его правое сечение при деформации повернется, относительно левого, на угол

$$d\alpha - d\alpha^0 = \frac{ds}{\rho_{xy}} - \frac{ds}{\rho_{xy}^0}.$$

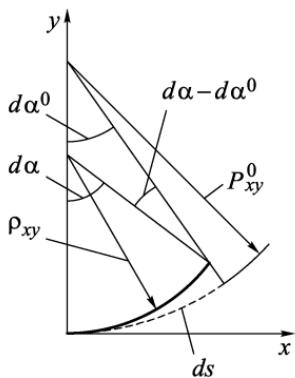


Рис. 9.21

Поэтому при линейно-упругой деформации изгибающий момент  $M_z$  совер-

шит на этом угле работу, которая накопится в элементе в виде потенциальной энергии деформации:

$$d\Pi_{M_z} = \frac{1}{2} M_z \left( \frac{1}{\rho_{xy}} - \frac{1}{\rho_{xy}^0} \right) ds = \frac{1}{2} M_z \kappa_z ds. \quad (9.3.6)$$

Здесь  $\kappa_z$  — изменение кривизны оси бруса при изгибе в плоскости  $xy$ . Рассуждая так же, как в разд. 9.1, можно получить, что для бруса с малой начальной кривизной оси сохраняется пропорциональная зависимость между изгибающим моментом  $M_z$  и изменением  $\kappa_z$  кривизны оси:  $\kappa_z = M_z/EJ_z$ . Таким образом, для такого бруса мы снова приходим к формулам (9.3.2)–(9.3.4), только суммирование в них будет производиться вдоль криволинейной оси  $s$ . Кстати, так как для прямого бруса кривизны недеформированной оси равны нулю, то для него  $\kappa_z$  и  $\kappa_y$  являются также изменениями кривизны, произошедшим вследствие изгиба бруса.

**9.3.2.** Чтобы получить интеграл Мора для определения перемещений в общем случае деформации бруса, воспользуемся, как в разделах 4.7 и 8.8, методом единичной нагрузки. Для это-

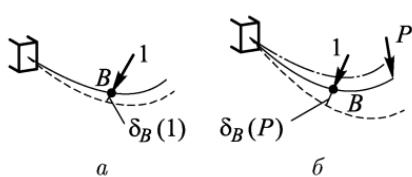


Рис. 9.22

го рассмотрим двухэтапное нагружение бруса. На первом этапе нагружим брус единичным усилием в направлении искомого перемещения (рис. 9.22 а). При этом точка  $B$  получит в направлении единичного усилия перемещение  $\delta_B(1)$ , на котором

это единичное усилие совершил работу  $A(1)$ . Эта работа накопится в брусе в виде потенциальной энергии деформации  $\Pi(1) = A(1)$ . Так как в результате действия единичного усилия в брусе возникли внутренние силовые факторы  $N(1)$ ,  $M_z(1)$ ,  $M_y(1)$ ,  $M_k(1)$ , то согласно (9.3.3)

$$\Pi(1) = \frac{1}{2} \int_l \left( \frac{N^2(1)}{EF} + \frac{M_z^2(1)}{EJ_z} + \frac{M_y^2(1)}{EJ_y} + \frac{M_k^2(1)}{GJ_k} \right) ds. \quad (9.3.7)$$

На втором этапе нагрузим брус основной нагрузкой, которая на рис. 9.22 б представлена силой  $P$ . При этом сила  $P$  совершила работу

$$A(\Pi) = \Pi(P) = \frac{1}{2} \int_l \left( \frac{N^2(P)}{EF} + \frac{M_z^2(P)}{EJ_z} + \frac{M_y^2(P)}{EJ_y} + \frac{M_k^2(P)}{GJ_k} \right) ds, \quad (9.3.8)$$

а единичная сила произведет работу  $1 \cdot \delta_B(P)$  на искомом перемещении  $\delta_B(P)$ . Всего же за два этапа нагружения единичная сила и нагрузка  $P$  производят работу

$$A(1 + P) = A(1) + A(P) + 1 \cdot \delta_B(P). \quad (9.3.9)$$

Эта работа накопится в брусе в виде потенциальной энергии деформации  $\Pi(1 + P)$ , которую найдем по возникшим в брусе силовым факторам:

$$\begin{aligned} N(1 + P) &= N(1) + N(P); & M_z(1 + P) &= M_z(1) + M_z(P); \\ M_y(1 + P) &= M_y(1) + M_y(P); & M_k(1 + P) &= M_k(1) + M_k(P). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Pi(1 + P) &= \frac{1}{2} \int_l \left( \frac{N^2(1 + P)}{EF} + \frac{M_z^2(1 + P)}{EJ_z} + \frac{M_y^2(1 + P)}{EJ_y} + \frac{M_k^2(1 + P)}{GJ_k} \right) ds = \\ &= \frac{1}{2} \int_l \left( \frac{N^2(1)}{EF} + \frac{M_z^2(1)}{EJ_z} + \frac{M_y^2(1)}{EJ_y} + \frac{M_k^2(1)}{GJ_k} \right) ds + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_l \left( \frac{N^2(P)}{EF} + \frac{M_z^2(P)}{EJ_z} + \frac{M_y^2(P)}{EJ_y} + \frac{M_k^2(P)}{GJ_k} \right) ds + \\ &\quad + \int_l \left( \frac{N(P)N(1)}{EF} + \frac{M_z(P)M_z(1)}{EJ_z} + \frac{M_y(P)M_y(1)}{EJ_y} + \frac{M_k(P)M_k(1)}{GJ_k} \right) ds. \end{aligned} \quad (9.3.10)$$

Так как  $\Pi(1 + P) = A(1 + P)$ , то из (9.3.8)–(9.3.10) получаем, что  $1 \cdot \delta_B(P) =$

$$= \int_l \left( \frac{N(P)N(1)}{EF} + \frac{M_z(P)M_z(1)}{EJ_z} + \frac{M_y(P)M_y(1)}{EJ_y} + \frac{M_k(P)M_k(1)}{GJ_k} \right) ds.$$

Разделим это равенство на единичное усилие и введем безразмерные единичные «внутренние силовые факторы»  $\bar{N}(1) = N(1)/1$ ,  $\bar{M}_z(1) = M_z(1)/1$ ,  $\bar{M}_y(1) = M_y(1)/1$ ,  $\bar{M}_k(1) = M_k(1)/1$  как функции, которые для единичного вектора, совпадающего по направлению с искомым перемещением, строятся по тем же правилам, что и обычные внутренние силовые факторы. В результате приходим к интегралу Мора для общего случая нагружения бруса:

$$\begin{aligned} \delta_B(P) &= \\ &= \int_l \left( \frac{N(P)\bar{N}(1)}{EF} + \frac{M_z(P)\bar{M}_z(1)}{EJ_z} + \frac{M_y(P)\bar{M}_y(1)}{EJ_y} + \frac{M_k(P)\bar{M}_k(1)}{GJ_k} \right) ds. \end{aligned} \quad (9.3.11)$$

Так как деформации оси бруса связаны с внутренними силовыми факторами соотношениями

$$\varepsilon = \frac{N}{EF}, \quad \kappa_z = \frac{M_z}{EJ_z}, \quad \kappa_y = \frac{M_y}{EJ_y}, \quad \theta = \frac{M_k}{GJ_k},$$

то, рассуждая так же, как в п. 8.8.3, приходим к другой форме интеграла Мора:

$$\delta = \int_l (\varepsilon \bar{N}(1) + \kappa_z \bar{M}_z(1) + \kappa_y \bar{M}_y(1) + \theta \bar{M}_k(1)) ds. \quad (9.3.12)$$

Эта формула используется и в том случае, если деформация бруса вызвана не нагрузками, а какими-либо другими причинами, например нагревом.

Из рассуждений, аналогичных приведенным в пп. 4.7.3 и 8.3.3, ясно, что интеграл Мора в форме (9.3.12) можно применять и при деформациях бруса, которые не подчиняются закону Гука, т.е. при нелинейно-упругих и пластических деформациях.

## 9.4. Плоские статически определимые рамы

**9.4.1.** Рамами называют составленные из брусьев плоские или пространственные системы (конструкции), элементы которых работают преимущественно на изгиб и кручение. Рамами

являются, например, шпангоуты самолета, рама грузового автомобиля, каркас панельного здания и т.п. Примеры расчетных схем рам показаны на рис. 9.23.

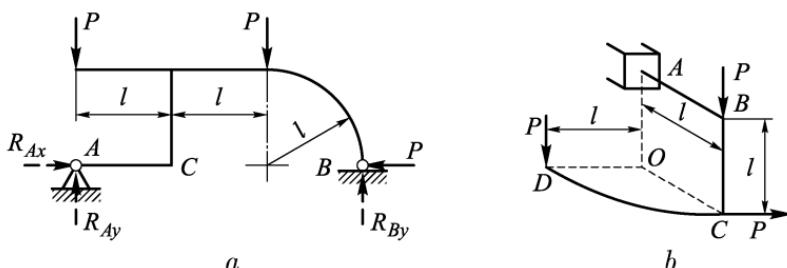


Рис. 9.23

Если оси жесткости составляющих раму элементов расположены в одной плоскости и в этой плоскости лежат также и действующие на раму нагрузки, то такую раму называют *плоской*. Она изгибается только в своей плоскости. Если же оси жесткости рамы не лежат в одной плоскости, как, например, у составленного из балок швеллерного сечения рамы (рис. 9.24), то она под действием нагрузки в плоскости  $xy$  не только изгибается, но и закручивается (см. пример 9.3).

В дальнейшем ограничимся рассмотрением таких плоских рам, у сечений которых имеется хотя бы одна ось симметрии, лежащая в плоскости рамы. Так как всегда ось симметрии сечения проходит через его центр изгиба, то у такой рамы оси жесткости элементов лежат в плоскости рамы.

**9.4.2.** Будем вводить такую систему координат, чтобы рама лежала в плоскости  $xy$ , а ось  $z$  была бы нормальна к плоскости рамы. С помощью метода сечений легко убедиться, что действующие в плоскости рамы нагрузки вызовут в раме появление только тех внутренних силовых факторов, которые лежат в плоскости рамы, т.е. продольной силы  $N$ , изгибающего момента  $M_z$  и перерезывающей силы  $Q$ . Они показаны на рис. 9.25 для рамы, данной на рис. 9.23 *a*. Для рам удобно вводить координату  $s$  вдоль оси брусьев, составляющих раму. Тогда знаки

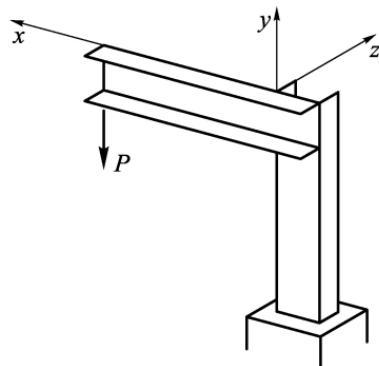


Рис. 9.24

для  $Q$  и  $M_z$  логично ввести так, как показано на рис. 9.26. В таком случае при совмещении элемента рамы с элементом бал-

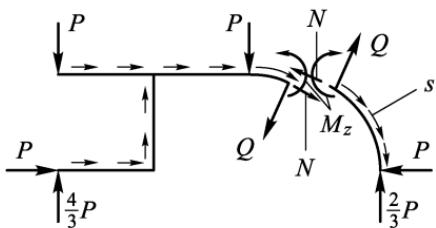


Рис. 9.25

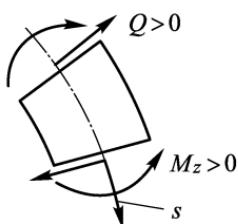


Рис. 9.26

ки (см. рис. 8.5) положительные направления перерезывающих сил и изгибающих моментов для них совпадут. Растягивающая продольная сила по-прежнему считается положительной.

Рассмотрим равновесие элемента  $ds$  рамы, показанного на рис. 9.27. Радиус кривизны его оси обозначен через  $\rho_0$ . Тогда  $d\alpha_0 = ds/\rho_0$ . Кроме внутренних силовых факторов  $N$ ,  $Q$ ,  $M_z$ , на элементы действует погонная нагрузка интенсивностью  $q$ . Составляющие ее по нормали к оси  $s$  рамы и вдоль нее обозначены как  $q_n$  и  $q_s$ .

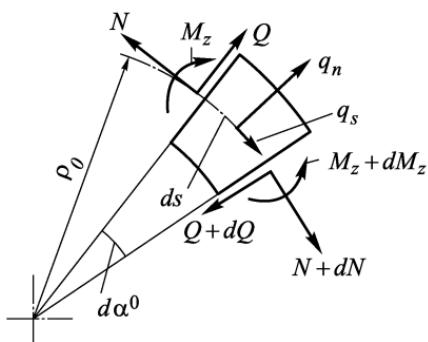


Рис. 9.27

Рассуждая точно так же, как в пп. 4.1.2 и 8.1.1, приходим из условий равновесия элемента к следующим соотношениям:

$$\sum P_s = 0 \rightarrow \frac{dN}{ds} - \frac{Q}{\rho_0} = -q_s, \quad (9.4.1)$$

$$\sum P_n = 0 \rightarrow \frac{dQ}{ds} + \frac{N}{\rho_0} = q_n, \quad (9.4.2)$$

$$\sum M = 0 \rightarrow \frac{dM_z}{ds} = Q. \quad (9.4.3)$$

Соотношение (9.4.1) является аналогом дифференциальной зависимости (4.1.2) и для элементов рамы с прямолинейной осью ( $1/\rho_0 = 0$ ) полностью совпадает с ним. Точно так же соотношение (9.4.2) обобщает зависимость (8.1.1) на криволинейные элементы плоских рам. А равенства (9.4.3) и (8.1.2) совпадают полностью.

Рассматривая равновесие элемента рамы, выделенного около сечения, в котором приложены сосредоточенные силы или моменты, можно без труда получить соотношения, обобщающие на рамы ранее построенные для бруса соотношения (4.1.3) и (8.1.4). Общий вывод здесь, по существу, тот же, что и в пп. 4.1.3 и 8.1.2: в окрестности сечения, где приложен сосредоточенный внешний силовой фактор, соответствующий внутренний силовой фактор претерпевает скачок, причем на величину, равную сосредоточенному внешнему фактору.

Все это позволяет распространить на рамы те приемы построения эпюр внутренних силовых факторов, которые использовались для бруса (см. гл. 4) и балки (см. гл. 8). Напомним, что в основе этих приемов лежит метод сечений.

**9.4.3.** Для определения перемещений в плоскости рамы можно воспользоваться интегралом Мора (9.3.11), (9.3.12), с учетом того, что в плоских рамках  $M_y = 0$  и  $M_k = 0$ . Поэтому интеграл Мора для плоских рам имеет вид

$$\delta = \int_l \left( \frac{N(P)\bar{N}(1)}{EF} + \frac{M_z(P)\bar{M}_z(1)}{EJ_z} \right) ds \quad (9.4.4)$$

$$\delta = \int_l (\varepsilon\bar{N}(1) + \kappa_z\bar{M}_z(1)) ds. \quad (9.4.5)$$

Первое слагаемое в этих интегралах составляет долю перемещения, образующуюся за счет удлинений и укорочений оси элементов рамы, а второе — долю за счет изгиба оси.

Оценим порядок слагаемых в интеграле (9.4.4). Если  $b$  — характерный размер поперечного сечения рамы, то  $F = O(b^2)$ ,  $J_z = O(b^4)$ . При нагружении рамы сосредоточенными силами, величина которых имеет порядок  $O(P)$ , порядок  $M_z(P)$  будет равен  $O(Pl)$ ,  $O(\bar{M}_z(1)) = O(l)$ ,  $O(N(P)) = O(P)$ ,  $O(\bar{N}(1)) = O(1)$  ( $l$  — характерный размер оси рамы). Учитывая, что порядок произведения равен произведению порядков сомножителей, получим для (9.4.4)

$$O(\delta) = O(l) \left[ \frac{O(P)O(1)}{E0(b^2)} + \frac{O(Pl)O(l)}{E0(b^4)} \right] = O\left(\frac{Pl^3}{E(b^4)}\right) \left[ O\left(\frac{b^2}{l^2}\right) + O(1) \right].$$

Отсюда следует, что так как характерный размер в сечении рамы значительно меньше характерного размера  $l$  ее оси, то первое слагаемое в интеграле (9.4.4) мало в сравнении со вторым и его можно не учитывать. Поэтому обычно для плоских рам достаточную точность при определении перемещения обеспечива-

ет использование интеграла Мора, учитывающего перемещение только от изгиба их элементов:

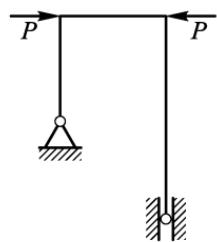


Рис. 9.28

$$\delta = \int_l \frac{M_z(P)\bar{M}_z(1)}{EJ_z} ds; \quad (9.4.6)$$

$$\delta = \int_l \kappa_z \bar{M}_z(1) ds. \quad (9.4.7)$$

Исключение составляют только те случаи нагружения рам, когда изгибающие моменты в них либо равны нулю, как для рамы, приведенной на рис. 9.28, либо их появление вызвано деформациями удлинения оси элементов рамы. Последний случай характерен для некоторых статически неопределенных рам, и мы рассмотрим его в гл. 10.

**9.4.4. Пример 9.5.** Рассмотрим раму, показанную на рис. 9.23 а. Сначала определим реакции, возникающие в ее опорах. Для этого воспользуемся уравнениями равновесия:

$$\sum M_A = 0 : R_{By} \cdot 3l - P \cdot 2l = 0 \rightarrow R_{By} = \frac{2}{3}P,$$

$$\sum M_B = 0 : P + P \cdot 3l - R_{Ay} \cdot 3l = 0 \rightarrow R_{Ay} = \frac{4}{3}P,$$

$$\text{Проверка: } \sum P_y = 0? \rightarrow -P - P + \frac{4}{3}P + \frac{2}{3}P = 0!,$$

$$\sum P_x = 0 : R_{Ax} = P.$$

Эти реакции показаны на рис. 9.25.

Так как на раму не действуют распределенные нагрузки, то на ее прямолинейных участках внутренние силовые факторы либо постоянны, либо меняются линейно. На рис. 9.29 приведены отсеченные части, из условия равновесия которых удобно определить  $N$ ,  $Q$  и  $M_z$  в характерных сечениях.

На рисунке показаны положительные направления  $N$ ,  $Q$  и  $M_z$  в соответствии с рис. 9.26 и с указанным на рис. 9.25 положительным направлением отсчета координаты  $s$ .

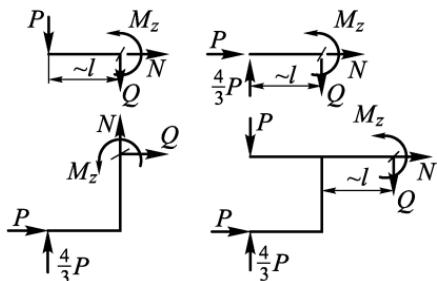


Рис. 9.29

На рис. 9.30 дана отсеченная часть для криволинейного участка рамы.

Из условий равновесия легко получить аналитические выражения:

$$N = -\frac{2}{3}P \cos \varphi - P \sin \varphi,$$

$$Q = P \cos \varphi - \frac{2}{3}P \sin \varphi,$$

$$M_z = \frac{2}{3}P(l - l \cos \varphi) - Pl \sin \varphi.$$

На рис. 9.31 показаны эпюры  $N$ ,  $Q$  и  $M_z$ . Эпюра  $M_z$ , как и в балках, построена со стороны сжатых волокон. На криволинейном участке  $M_z$  достигает максимального для этого участка значения. Соответствующий ему угол  $\varphi_0$  легко найти из условия  $Q(\varphi_0) = 0$ . Получаем  $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{3}{2}$ , поэтому  $\varphi_0 = 56^{\circ}20'$ .

Если сечение рамы постоянно, то опасным будет сечение вблизи точки  $C$  на вертикальном участке, так как в нем максимальный изгибающий момент  $M_{z \max} = \frac{4}{3}Pl$  действует совместно с наибольшим продольным усилием — сжимающей силой  $N = -\frac{4}{3}P$ . В этом сечении

$$\sigma_{p \max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{N}{F},$$

$$|\sigma_{c \max}| = \frac{M_z}{W_z} - \frac{N}{F}.$$

Оценим слагаемые в этих выражениях. Пусть сечение рамы — квадратное, со стороной  $a$ . Тогда для него  $W_z = \frac{1}{6}a^3$ ,  $F = a^2$  и

$$\sigma_{p \max} = 8 \frac{Pl}{a^3} - \frac{4}{3} \frac{P}{a^2} = 8 \frac{Pl}{a^3} \left(1 - \frac{a}{6l}\right), \quad \sigma_{c \max} = 8 \frac{Pl}{a^3} \left(1 + \frac{a}{6l}\right).$$

Так как  $a \ll l$ , то вторым слагаемым в скобках, т.е. напряжениями от продольной силы по сравнению с напряжениями от изгибающего момента, можно пренебречь. Такая ситуация обычна для рам. Исключение составляют те случаи, о которых упоминалось в п. 9.4.3. Поэтому при расчете на прочность плоских

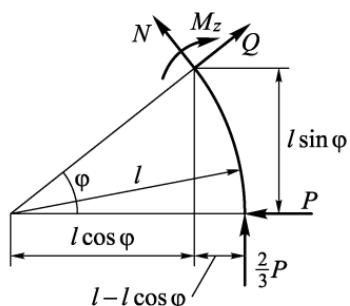


Рис. 9.30

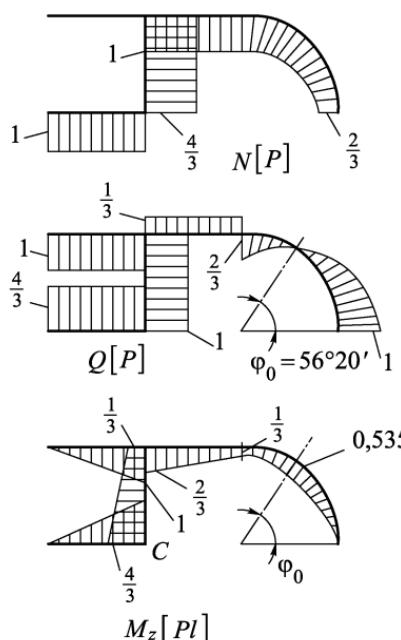


Рис. 9.31

рам обычно учитывают только напряжения от их изгиба и условия прочности для них записывают так же, как и для балок (см. разд. 8.5), например, в случае, когда материал одинаково работает на растяжение и сжатие, они сводятся к условию

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma].$$

На основе этого условия можно произвести проектировочный или поверочный расчет точно так же, как это делалось для балок (см. разд. 8.5).

Найдем угол поворота сечения  $C$  рассмотренной рамы. Для вычисления интеграла Мора приложим в сечении  $C$  единичный момент и найдем  $\bar{M}_z(1)$ . Эпюра  $\bar{M}_z(1)$  показана на рис. 9.32. Там же показана отсеченная часть для криволинейного участка, из условия равновесия которой следует, что

$$\bar{M}_z(1) = -\frac{1}{3l}(l - l \cos \varphi) = -\frac{1}{3}(1 - \cos \varphi).$$

Заметим, что как при вычислении интеграла Мора необходимо вычислять произведение  $M_z(P)\bar{M}_z(1)$ , то в выборе направления  $\bar{M}_z(1)$  и координаты  $\varphi$  сечения на криволинейном участке мы не вольны. Они должны быть такие же, как и при определении  $M_z(P)$  (см. рис. 9.30).

Интеграл Мора для прямолинейных участков можно вычислить по способу Верещагина. В результате получаем

$$\begin{aligned} \theta_C &= \int_l \frac{M_z(P)\bar{M}_z(1)}{EJ_z} ds = \frac{1}{EJ_z} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} Pll \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} - \right. \\ &- \frac{1}{2} \left( \frac{4}{3} Pl + \frac{1}{3} Pl \right) l \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} Pll \cdot \frac{1}{2} l + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} Pll \left( \frac{1}{3} l + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} l \right) + \\ &+ \left. \int_0^{\pi/2} Pl \left( \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cos \varphi - \sin \varphi \right) \cdot \left[ -\frac{1}{3}(1 - \cos \varphi) \right] l d\varphi \right\} = \\ &= \frac{Pl^2}{EJ_z} \left[ \frac{4}{27} - \frac{5}{9} + \frac{1}{6} + \frac{5}{54} - \frac{1}{18}(3\pi - 11) \right] = -0,235 \frac{Pl^2}{EJ_z}. \end{aligned}$$

Для вычисления интегралов по криволинейным участкам можно воспользоваться табл. 9.1.

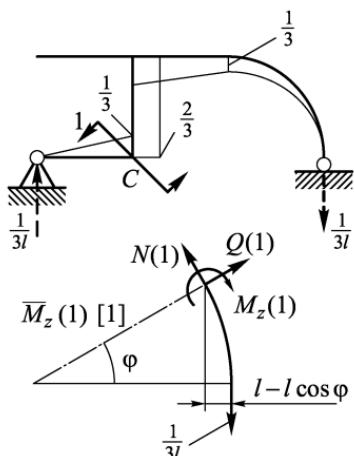


Рис. 9.32

Таблица 9.1

$f(\varphi)$	$\int_0^\varphi f(\varphi) d\varphi$	$\int_0^{\pi/2} f(\varphi) d\varphi$	$\int_0^\pi f(\varphi) d\varphi$	$\int_0^{(3/2)\pi} f(\varphi) d\varphi$	$\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi$
$\sin \varphi$	$-\cos \varphi$	1	2	1	0
$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	1	0	-1	0
$\sin^2 \varphi$	$\frac{1}{2} \left( \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right)$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\pi$
$\cos^2 \varphi$	$\frac{1}{2} \left( \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right)$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\pi$
$\sin \varphi \cos \varphi$	$\frac{1}{2} \sin^2 \varphi$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
$1 - \cos \varphi$	$\varphi - \sin \varphi$	$\frac{\pi}{2} - 1$	$\pi$	$\frac{3}{2}\pi + 1$	$2\pi$
$(1 - \cos \varphi)^2$	$\frac{3}{2}\varphi - 2 \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi$	$\frac{3}{4}\pi - 2$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{9}{4}\pi + 2$	$3\pi$
$(1 - \cos \varphi) \sin \varphi$	$1 - \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0
$(1 - \cos \varphi) \cos \varphi$	$\sin \varphi - \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi$	$1 - \frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-1 - \frac{3}{4}\pi$	$-\pi$

## 9.5. Пространственные статически определимые рамы

**9.5.1.** Пример пространственной статически определимой рамы показан на рис. 9.23 б. В сечениях такого рода рам могут возникнуть все шесть внутренних силовых факторов.

Так же, как и для плоских, для пространственных рам обычно напряжения и деформации, связанные с действием продольных и перерезывающих сил, малы по сравнению с напряжениями и деформациями от изгиба и кручения. Поэтому в расчете на прочность и при вычислении перемещений учитываются только последние. Исключение составляют лишь те специальные случаи, когда изгиб и кручение рамы происходят лишь вследствие деформаций растяжения–сжатия ее элементов.

Таким образом, для вычисления перемещений достаточно воспользоваться следующими выражениями для интеграла Мора:

$$\delta = \int_l \left[ \frac{M_z(P)\bar{M}_z(1)}{EJ_z} + \frac{M_y(P)\bar{M}_y(1)}{EJ_y} + \frac{M_k(P)\bar{M}_k(1)}{GJ_k} \right] ds,$$

$$\delta = \int_l [\kappa_z \bar{M}_z(1) + \kappa_y \bar{M}_y(1) + \theta \bar{M}_k(1)] ds. \quad (9.5.1)$$

Здесь  $s$  — координата вдоль оси рамы.

При расчете на прочность пространственных рам необходимо учитывать, что в их сечениях одновременно действуют нормальные и касательные напряжения. Эта проблема уже возникла ранее в примерах 9.3 и 9.4. Способы ее решения будут рассмотрены в гл. 11.

**9.5.2.** Пример 9.6. Определим угол поворота  $\alpha$  свободного конца рамы в плоскости  $AOD$  (рис. 9.23 б). Для этого сначала найдем изгибающие и крутящие моменты, возникающие в раме от действия приложенных к ней сил  $P$ . Отсеченные части, из равновесия которых они определяются, изображены на рис. 9.33.

Для определения  $\alpha$  нагрузим свободный конец рамы безразмерным единичным моментом в плоскости  $AOD$ . Отсеченные части для определения  $\bar{M}_z(1)$ ,  $\bar{M}_y(1)$  и  $\bar{M}_k(1)$  изображены на рис. 9.34. Во всех сечениях показаны только те внутренние силовые факторы, которые в них не равны нулю.

На рис. 9.35 представлены эпюры моментов  $M_z(P)$ ,  $M_y(P)$ ,  $M_k(P)$ ,  $\bar{M}_z(1)$ ,  $\bar{M}_y(1)$ ,  $\bar{M}_k(1)$ . Эпюры изгибающих моментов расположены со стороны сжатых волокон в тех плоскостях, в которых они действуют, а для эпюр  $M_k$  использовано введенное в гл. 6 правило знаков:  $M_k > 0$ , если со стороны внешней нормали к сечению видно, что этот момент поворачивает отсеченную часть против часовой стрелки.

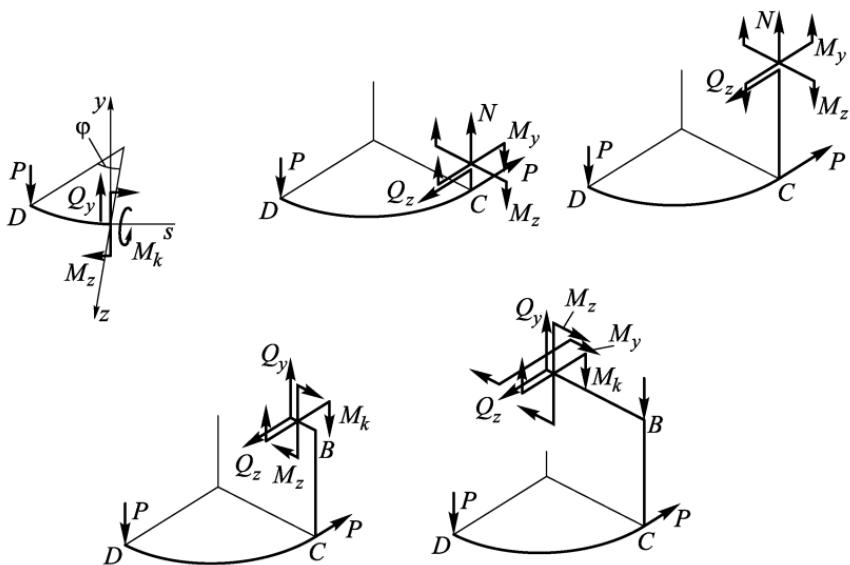


Рис. 9.33

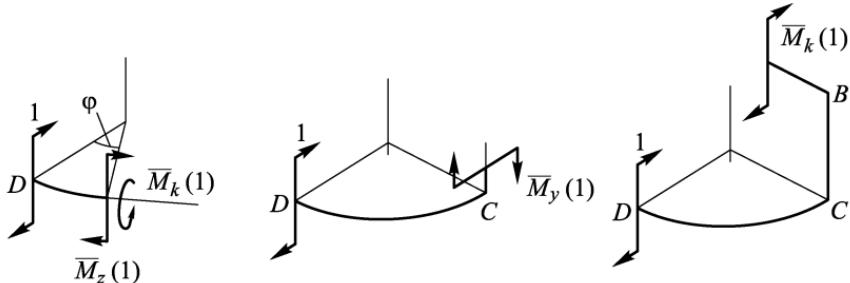


Рис. 9.34

Для построения аналитических выражений иногда удобно пользоваться проекциями отсеченных частей на плоскость, в которой лежит криволинейная часть рамы. Они показаны на рис. 9.36 *a*, *б*. Причем на рис. 9.36 *б* моменты представлены их векторами. Из этих рисунков следует:

$$M_z(P) = Pl \sin \varphi, \quad M_k(P) = Pl(1 - \cos \varphi),$$

$$\bar{M}_z(1) = -1 \cdot \sin \varphi, \quad \bar{M}_k(1) = 1 \cdot \cos \varphi.$$

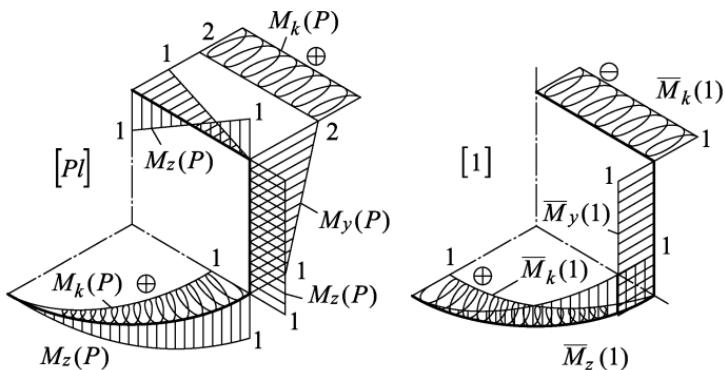


Рис. 9.35

Таким образом, угол поворота сечения  $D$  в плоскости  $AOD$  (см. рис. 9.23 б) будет равен

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{1}{EJ_z^{CD}} \int_{CD} M_z(P) \bar{M}_z(1) ds + \frac{1}{CJ_k^{CD}} \int_{CD} M_k(P) \bar{M}_k(1) ds + \\ & + \frac{1}{EJ_y^{BC}} \int_{BC} M_y(P) \bar{M}_y(1) ds + \frac{1}{GJ_k^{AB}} \int_{AB} M_k(P) \bar{M}_k(1) ds = \\ & = \frac{1}{EJ_z^{CD}} \int_0^{\pi/2} Pl \sin \varphi (-\sin \varphi) l d\varphi + \\ & + \frac{1}{GJ_k^{CD}} \int_0^{\pi/2} Pl(1 - \cos \varphi) \cos \varphi l d\varphi - \frac{1}{EJ_z^{BC}} \cdot \frac{1}{2}(2Pl + Pl)l \cdot 1 - \\ & - \frac{1}{GJ_k^{AB}} 2Pl \cdot 1 = -\frac{Pl^2}{EJ_z^{CD}} \frac{\pi}{4} + \frac{Pl^2}{GJ_k^{CD}} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} \frac{Pl^2}{EJ_z^{BC}} - \frac{2Pl^2}{GJ_k^{AB}}. \end{aligned}$$

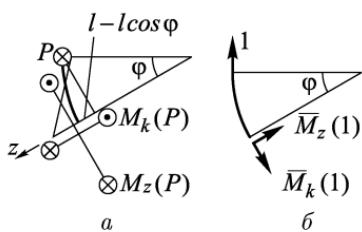


Рис. 9.36

и длинная сторона его расположена вдоль оси  $z$ , то

$$J_z^{CD} = J_z^{BC} = 2bb^3/12, \quad J_k^{CD} = J_k^{AB} = \beta \cdot 2bb^3 = 0,458b^4.$$

В этих выражениях выписаны только те слагаемые интеграла Мора, которые на соответствующих участках не равны нулю. Дальнейшие вычисления не трудны. В них нужно учесть форму и размеры поперечного сечения рамы. Если, например, участки рамы имеют прямоугольное сплошное сечение со сторонами  $2b$  и  $b$

## 9.6. Витые пружины

**9.6.1.** С помощью разработанных в этой главе методов можно легко решить вопрос о напряжениях и деформациях, возникающих в витых пружинах, которые являются широко распространенным элементом самых различных конструкций. В зависимости от характера работы витые пружины подразделяются на пружины растяжения, сжатия и кручения (рис. 9.37). Если

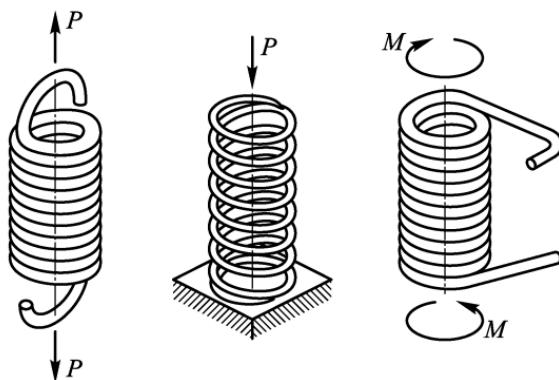


Рис. 9.37

отвлечься от особенностей конструктивного выполнения концов пружин, то их рабочая часть может быть рассмотрена как про-

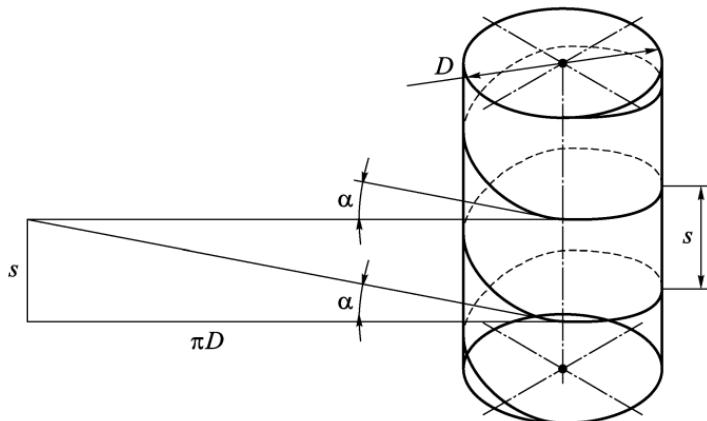


Рис. 9.38

странственный стержень, ось которого обычно является винтовой линией. Параметрами винтовой линии, которая на рис. 9.38

изображена на поверхности образующего цилиндра, являются диаметр витка  $D$ , угол подъема  $\alpha$  и число витков  $n$ . Подъем витка можно задать также шагом  $s$ , который связан с  $\alpha$  очевидным соотношением

$$s = \pi D \operatorname{tg} \alpha. \quad (9.6.1)$$

Поперечное сечение проволоки, из которой навита пружина, обычно бывает круглым, но используются также пружины из проволоки с квадратным и прямоугольным сечением.

Мора (9.3.11) остаются только два слагаемых:

$$\delta = \int_l \frac{M_k \bar{M}_k(1)}{GJ_k} dl + \int_l \frac{M_{изг} \bar{M}_{изг}(1)}{EJ_z} dl.$$

Угол  $\alpha$  для витых пружин обычно мал (менее  $10^\circ$ ). Поэтому с достаточной для практических расчетов точностью можно положить, что  $l = n\pi D$  ( $n$  — число витков рабочей части),  $\cos^2 \alpha \approx 1$  и  $\sin^2 \alpha \approx 0$ . Таким образом, видим, что удлинение пружины накапливается практически только за счет кручения образующего ее винтового стержня и равно

$$\delta = \frac{Pn\pi D^3}{4GJ_k}. \quad (9.6.4)$$

Для пружины, навитой из круглой проволоки диаметром  $d$ ,  $J_k = J_p = \frac{\pi d^4}{32}$  и из (9.6.4) получаем

$$\delta = \frac{8PnD^3}{Gd^4}. \quad (9.6.5)$$

Так как образующий пружину растяжения–сжатия витой стержень работает в основном на кручение, то в нем преобладают касательные напряжения и

$$\tau_{\max} = \frac{|M_k|}{W_k} = \frac{PD}{2W_k}.$$

Для круглой проволоки  $W_k = \pi d^3 / 16$  и  $\tau_{\max} = 8PD/\pi d^3$ .

Для пружины кручения (рис. 9.40 а) наибольший интерес представляет угол поворота одного ее конца относительно другого при нагружении ее моментом  $M$ .

Как видно из рис. 9.40 б, для

нее  $M_{изг} = M \cos \alpha$ ,  $M_k = M \sin \alpha$ . При нагружении ее единичным моментом, совпадающим по направлению с  $M$ , появляются  $\bar{M}_{изг}(1) = \cos \alpha$  и  $\bar{M}_k(1) = \sin \alpha$ . Ввиду малости угла  $\alpha$  кручение вносит малый вклад в деформацию пружины. Поэтому, полагая  $\cos^2 \alpha \approx 1$ , получаем

$$\varphi = \int_l \frac{M_{изг} \bar{M}_{изг}(1)}{EJ_z} dl = \frac{M\pi Dn}{EJ_z}.$$

Определяющими в пружине кручения являются нормальные напряжения изгиба, и так как  $M_{изг} \approx M$ , то

$$\sigma_{\max} = M/W_z.$$

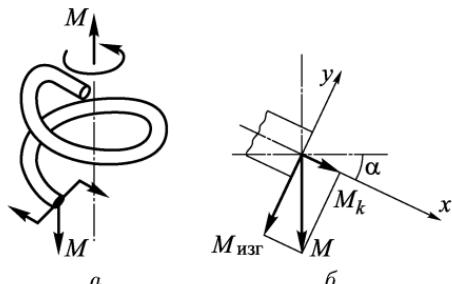


Рис. 9.40

Рассмотренный здесь подход без принципиальных трудностей можно распространить и на витые нецилиндрические пружины.

Выше мы неявно предполагали, что диаметр проволоки  $d$  мал по сравнению с диаметром пружины  $D$ . Если это условие не выполнено, то возникает необходимость учета кривизны витого бруса, а иногда и перерезывающей силы  $Q$ .

## 9.7. Теоремы взаимности работ и перемещений. Теорема Кастилиано

**9.7.1.** В разд. 9.3 была получена потенциальная энергия деформации бруса. Она дает нам один из примеров потенциальной энергии деформации упругого тела. Являясь некоторой интегральной характеристикой напряженно-деформированного состояния тела, эта энергия обладает рядом общих свойств, ко-

торые можно эффективно использовать при изучении состояния тела. Здесь мы остановимся на некоторых из этих свойств.

Рассмотрим линейно-упругую деформацию тела, закрепленного так, что исключены его смещения как жесткого тела, под действием сил  $P_1$ ,  $P_2$ , приложенных в точках 1 и 2 (рис. 9.41). Обозначим через  $\delta_1$  перемещение точки 1 в направлении силы

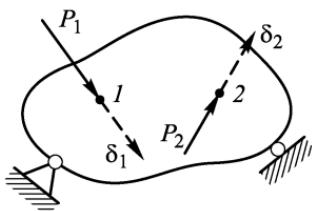


Рис. 9.41

$P_1$ . Если это перемещение вызвано силой  $P_1$ , то запишем его как  $\delta_1(P_1)$ . Точно так же,  $\delta_1(P_2)$  — перемещение точки 1 в направлении  $P_1$ , но от силы  $P_2$ . Аналогично  $\delta_2(P_1)$  и  $\delta_2(P_2)$  — перемещения точки 2 в направлении силы  $P_2$ , которые образовались в результате действия сил  $P_1$  и  $P_2$  соответственно.

Пусть сначала тело нагружается силой  $P_1$ . Эта сила совершил при своем возрастании от нуля до конечного значения работу  $\frac{1}{2}P_1\delta_1(P_1)$ . Далее приложим к телу силу  $P_2$ . Она совершил

работу  $\frac{1}{2}P_2\delta_2(P_2)$ . Но по мере роста этой силы точка 1 также получит перемещение  $\delta_1(P_2)$ , на котором сила  $P_1$  произведет работу  $P_1\delta_1(P_2)$ . Всего в результате суммарного нагружения силы  $P_1$  и  $P_2$  совершают работу

$$\frac{1}{2}P_1\delta_1(P_1) + \frac{1}{2}P_2\delta_2(P_2) + P_1\delta_1(P_2), \quad (9.7.1)$$

которая накопится в теле в виде потенциальной энергии деформации.

Изменим порядок нагружения, т.е. приложим сначала силу  $P_2$ , а потом  $P_1$ . Тогда они произведут работу

$$\frac{1}{2}P_2\delta_2(P_2) + \frac{1}{2}P_1\delta_1(P_1) + P_2\delta_2(P_1), \quad (9.7.2)$$

которая также перейдет в потенциальную энергию деформации тела.

Так как при упругой деформации конечное напряженно-деформированное состояние не зависит от порядка приложения нагрузок, то два выражения (9.7.1) и (9.7.2) для потенциальной энергии деформации тела в конечном состоянии должны быть равны. Сравнивая их, видим, что

$$P_1\delta_1(P_2) = P_2\delta_2(P_1). \quad (9.7.3)$$

А это равенство означает, что работа первой силы на перемещении точки ее приложения, вызванном действием второй силы, равна работе второй силы на перемещении точки ее приложения под действием первой силы.

Это утверждение и составляет содержание *теоремы взаимности работ*. Для случая двух сил эта теорема была доказана в 1864 г. Д. Максвеллом. Но, как следует из самого понятия обобщенных сил и обобщенных перемещений, соотношение (9.7.3) не изменится, если под  $P_1$  и  $P_2$  понимать обобщенные силы, а под  $\delta_1$  и  $\delta_2$  — соответствующие им обобщенные перемещения. Это было впервые понято итальянским ученым Е. Бетти в 1872 г. Как мы уже отмечали в связи с интегралом Мора, работа Д. Максвеля осталась незамеченной, и Е. Бетти сформулировал теорему взаимности работ независимо. Поэтому ее часто называют *теоремой Бетти*.

Если силы  $P_1$  и  $P_2$  равны по величине, то из (9.7.3) следует, что

$$\delta_1(P_2) = \delta_2(P_1), \quad |P_1| = |P_2|. \quad (9.7.4)$$

Это соотношение называют *теоремой взаимности перемещений*: перемещение точки 1, вызванное силой, приложенной в точке 2, равно перемещению точки 2 под действием такой же по величине силы, приложенной в точке 1.

Напомним, что речь идет о перемещениях точек приложения сил по направлению этих сил.

С помощью теорем взаимности удается достаточно просто разрешить ряд вопросов, которые другими способами решаются громоздко. Примеры применения теорем взаимности даны в разд. 11.3, где доказывается симметрия тензора упругих коэффициентов анизотропного материала, и в разд. 10.2, где из теоремы взаимности перемещений сразу следует симметрия коэффициентов матрицы канонических уравнений метода сил.

**9.7.2.** Другое общее энергетическое соотношение дал в 1873 г. также итальянский ученый А. Кастилиано.

Рассмотрим упругое тело, закрепленное от смещений как жесткого тела и нагруженное силами  $P_1, P_2, \dots, P_n$  (рис. 9.42). Работа этих сил при упругой деформации накопится в теле в виде потенциальной энергии деформации  $\Pi$ . Пусть  $\Pi$  тем или иным способом удалось выразить как функцию сил  $P_i$ , т.е.  $\Pi = \Pi(P_1, \dots, P_n)$ . Дадим одной из сил, например  $P_i$ , приращение  $dP_i$  (см. рис. 9.42). Тогда и энергия деформации тела изменится и станет равной

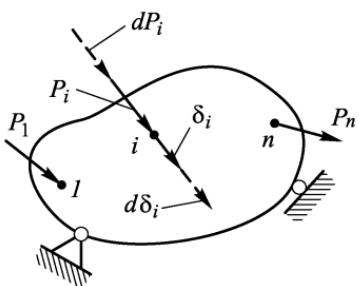


Рис. 9.42

Давая силе  $P_i$  приращение  $dP_i$ , мы по существу сначала нагружаем тело силами  $P_1, \dots, P_n$ , а потом силой  $dP_i$ . Изменим порядок нагружения. Сначала приложим силу  $dP_i$ . При этом в точке приложения силы появится малое перемещение  $d\delta_i$  в направлении этой силы, на котором сила  $dP_i$  совершил упругую работу  $\frac{1}{2} dP_i d\delta_i$ . Приложим затем к телу все силы  $P_1, \dots, P_n$ . Эти силы совершают работу, которая накопится в теле в виде потенциальной энергии деформации  $\Pi(P_1, \dots, P_n)$ . Кроме того, при этой деформации тела сила  $dP_i$ , оставаясь неизменной, переместится вместе со своей точкой приложения на величину ее перемещения  $\delta_i$  и при этом совершил работу  $dP_i \delta_i$ , которая также перейдет в потенциальную энергию деформаций. Таким образом, при таком нагружении потенциальная энергия деформации тела равна

$$\frac{1}{2} dP_i d\delta_i + \Pi + dP_i \delta_i. \quad (9.7.6)$$

Заметим, что здесь сила  $dP_i$  ведет себя точно так же, как единичная сила при выводе интеграла Мора (см. п. 9.3.2).

Так как потенциальная энергия деформации упругого тела не зависит от порядка приложения сил, а определяется только его конечным состоянием, то выражения (9.7.5) и (9.7.6) равны. Отсюда, пренебрегая в (9.7.6) первым слагаемым, которое имеет высший порядок малости, получаем

$$\delta_i = \frac{\partial \Pi}{\partial P_i}. \quad (9.7.7)$$

Это и есть *теорема Кастилиано*: частная производная от потенциальной энергии деформации по внешней силе равна перемещению точки приложения этой силы в направлении самой силы.

Как и ранее, во всех проведенных рассуждениях силы  $P_1, \dots, P_n$  могут пониматься как обобщенные силы, а перемещение их точек приложения  $\delta_1, \dots, \delta_n$  — как соответствующие этим силам обобщенные перемещения.

Анализируя вывод теоремы Кастилиано, замечаем, что для ее выполнения достаточно соблюдения двух условий:

1. Деформированное состояние тела должно однозначно определяться действующими на него нагрузками, тогда потенциальная энергия деформации тела, представленная как функция этих нагрузок, будет однозначной функцией этих нагрузок.

2. Работа внешних сил при переходе из недеформированного состояния в деформированное не должна зависеть от порядка приложения этих сил.

Оба этих условия выполняются, если тело линейно-упруго, справедлив принцип малости деформаций и внешние силы консервативны.

Рассмотрим примеры использования теоремы Кастилиано для определения перемещений.

**Пример 9.7.** Определим прогиб конца консольной балки, нагруженной силой  $P$  (рис. 9.43). Ее потенциальная энергия деформации

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_l^l \frac{M_z^2}{EJ_z} dx = \frac{1}{2EJ_z} \int_0^l (Px)^2 dx = \frac{1}{6} \frac{P^2 l^3}{EJ_z}.$$

Тогда прогиб консоли  $\delta = \partial\Pi/\partial P = \frac{1}{3}Pl^3/EJ_z$ . Подсчитав этот прогиб с помощью интеграла Мора, читатель может легко убедиться в совпадении результатов.

**Пример 9.8.** Теорему Кастилиано можно использовать для вывода интеграла Мора. Чтобы избежать громоздких выкладок, покажем, как это можно сделать, на примере изгиба балки. В примере 9.7 было определено перемещение точки приложения силы. В общем случае, когда нужно найти прогиб произвольной точки, например прогиб  $\delta_A$  точки  $A$  на рис. 9.44, введем фиктивную силу  $\Phi$ , приложенную в этой точке. Идея состоит в том, чтобы найти  $\delta_A$  как функцию  $P$  и  $\Phi$ . Тогда искомый прогиб будет равен значению этой функции при  $\Phi = 0$ . По принципу суперпозиции,  $M_z(P + \Phi) = M_z(P) + M_z(\Phi)$ .

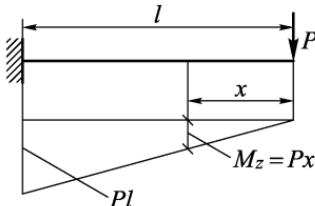


Рис. 9.43

Поэтому потенциальная энергия деформации будет

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_z^2}{EJ_z} dx = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_z^2(P) + 2M_z(P)M_z(\Phi) + M_z^2(\Phi)}{EJ_z} dx.$$

Прогиб  $\delta_A(P, \Phi)$  получим как

$$\delta_A(P, \Phi) = \frac{\partial \Pi}{\partial \Phi} = \int_l \frac{M_z(P)}{EJ_z} \frac{\partial M_z(\Phi)}{\partial \Phi} dx + \int_l \frac{M_z(\Phi)}{EJ_z} \frac{\partial M_z(\Phi)}{\partial \Phi} dx.$$

Но  $M_z(\Phi) = \Phi \bar{M}_z(1)$ , где  $\bar{M}_z(1)$  — изгибающий момент от единичной силы, приложенной в точке  $A$ . Поэтому  $\partial M_z / \partial \Phi = \bar{M}_z(1)$ . Учитывая это, а также то, что  $M_z(\Phi = 0) = 0$ , приходим к интегралу Мора:

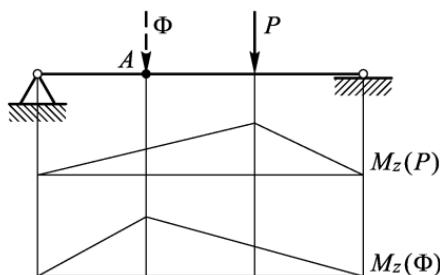


Рис. 9.44

$$\begin{aligned} \delta_A(P, \Phi)|_{\Phi=0} &= \delta_A = \\ &= \int_l \frac{M_z(P) \bar{M}_z(1)}{EJ_z} dx. \end{aligned}$$

Этот способ получения интеграла Мора называется *методом фиктивной нагрузки*.

Он без труда может быть обобщен на случай произвольно нагруженного бруса.

## B.9. Контрольные вопросы

**B.9.1.** С какими внутренними силовыми факторами связаны нормальные напряжения в поперечном сечении бруса?

**B.9.2.** Как распределяются нормальные напряжения в поперечном сечении бруса в общем случае его деформации? Как при этом определяется нейтральная линия, и в каких точках сечения будут действовать наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения?

**B.9.3.** Как проходит нейтральная линия в поперечном сечении при косом изгибе?

**B.9.4.** Как определяются перемещения при косом изгибе?

**B.9.5.** Как проходит нейтральная линия сечения в случае внекцентренного растяжения–сжатия? Почему надо стремиться к соосности нагрузки и оси бруса?

**B.9.6.** Почему в тонкостенных сечениях касательные напряжения, связанные с различными внутренними силовыми факторами, нужно суммировать алгебраически, а в нетонкостенных — геометрически?

**B.9.7.** Из каких слагаемых складываются потенциальная энергия деформации прямого бруса в случае общего нагружения?

**B.9.8.** Какие две формы записи интеграла Мора вы знаете? Какая из них является более общей и может быть применена при нелинейно-упругих и пластических деформациях?

**B.9.9.** Какие внутренние силовые факторы могут возникнуть в поперечных сечениях плоской рамы? Какое правило знаков принимается для них?

**B.9.10.** Какие деформации элементов плоской рамы преимущественно учитываются при определении ее перемещений? В какой форме при этом записывается интеграл Мора?

**B.9.11.** Какие напряжения учитываются обычно при расчете на прочность плоских рам? Как проводится такой расчет?

**B.9.12.** Какие деформации преимущественно учитывают при расчете перемещений пространственных рам? В какой форме записывается при этом интеграл Мора?

**B.9.13.** Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечном сечении витка пружины? Какие из них вносят основной вклад в общую деформацию пружины?

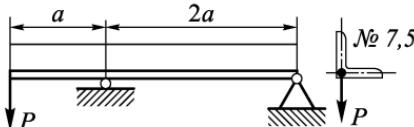
**B.9.14.** По каким, в основном, напряжениям ведут расчет на прочность пружин растяжения (сжатия) и кручения соответственно?

**B.9.15.** В чем заключается содержание теорем взаимности работ и взаимности перемещений?

**B.9.16.** Сформулируйте теорему Кастилиано. При каких условиях она выполнима? Как она используется для определения перемещений?

### 3.9. Задачи

**3.9.1.** Шарнирно опертая балка (рис. 9.45) выполнена из равнополочного уголка № 7,5 ( $d = 5$  мм). Найти допускаемое значение силы  $P$  и величину перемещения  $\delta$ , если  $[\sigma] = 150$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $a = 0,5$  м.



**3.9.2.** Для консольной балки (рис. 9.46), нагруженной силой  $P$  в центре тяжести концевого сечения, найти размер  $b$  поперечного сечения, имеющего форму четверти круга (см. задачу 7.4). Принять  $P = 10$  кН,  $[\sigma] = 120$  МПа,  $l = 1,5$  м.

**3.9.3.** Равнополочный уголок № 7,5 (см. задачу 9.1) растягивается силой  $P$ , как это показано на рис. 9.47. Определить запас

Рис. 9.45

прочности уголка, если  $P = 12,5$  кН,  $\sigma_t = 240$  МПа. Какой уголок при этом же запасе прочности понадобится, если силу  $P$

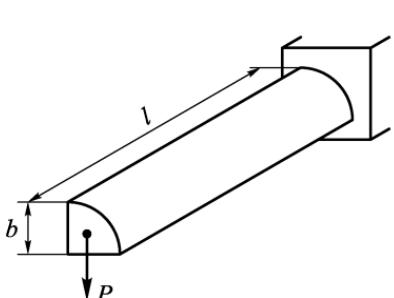


Рис. 9.46

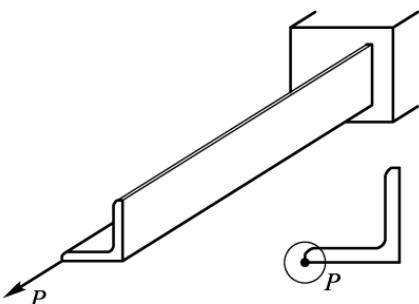


Рис. 9.47

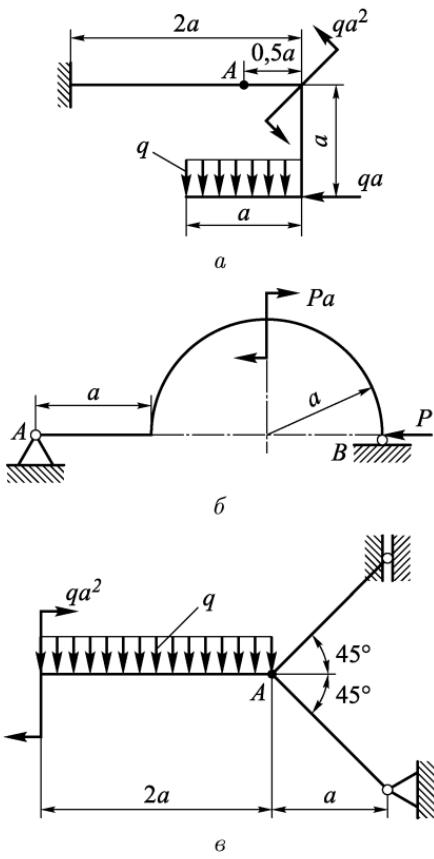


Рис. 9.48

приложить вдоль его оси? Какой будет выигрыш в массе при этом?

**3.9.4.** Для трех плоских рам, показанных на рис. 9.48, построить эпюры  $N$ ,  $Q$ ,  $M_z$ . Кроме того, определить в буквенных выражениях для рамы на рис. 9.48 а вертикальное перемещение  $\delta_A$  точки  $A$ ; для рамы на рис. 9.48 б — горизонтальное перемещение  $\delta_B$  точки  $B$ , а для рамы на рис. 9.48 в — угол поворота сечения  $\alpha_A$  в точке  $A$  и размеры поперечного сечения тонкостенной трубы, из которой выполнена эта рама, приняв  $[\sigma] = 150$  МПа,  $q = 1$  кН/м,  $a = 0,5$  м и отношение среднего диаметра трубы к толщине стенки, равным 20.

**3.9.5.** Построить эпюры изгибающих и крутящих моментов в пространственных рамках (рис. 9.49) и определить в буквенных выражениях угол поворота свободного конца рамы на рис. 9.49 а в

плоскости действия распределенной нагрузки, а также горизонтальное перемещение точки  $A$  рамы на рис. 9.49  $b$  в плоскости

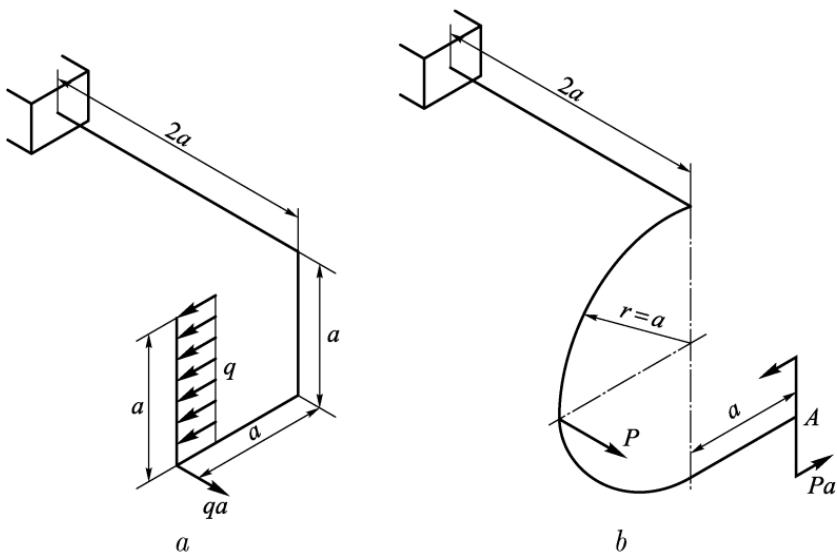


Рис. 9.49

действия сосредоточенного момента. Рамы выполнены из прутка диаметром  $d$ , модуль сдвига  $G$  принять равным  $0,4E$ . Считать, что  $d \ll a$ .

## ГЛАВА 10

# СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ. МЕТОД СИЛ

Напомним, что *статически неопределенными системами* называются такие, внутренние силовые факторы в которых нельзя определить только с помощью уравнений равновесия (статики). Простейшие такие системы, образованные из элементов, работающих только на растяжение–сжатие, мы уже рассматривали в разд. 4.5, 4.6. Дополнительные уравнения для определения продольных сил в стержнях этих систем были построены из условий совместного деформирования их элементов. То же самое относится и к рассмотренному в примере 6.2 статически неопределенному брусу, работающему на кручение.

Для сложных статически неопределенных систем построение условий совместного деформирования элементов затруднительно. Поэтому были разработаны специальные методы для решения таких систем. Среди них наиболее прозрачным и эффективным является метод сил. С его помощью можно сравнительно легко найти внутренние силовые факторы и деформации для наиболее распространенных не очень сложных конструкций.

В последние годы для сложных конструкций создан ориентированный на использование ЭВМ метод конечных элементов. Этот метод изучается в курсе строительной механики. Он реализован в виде универсальных программ для ЭВМ, которые позволяют рассчитать напряженно-деформированное состояние сложных конструкций. Один из вариантов метода конечных элементов базируется на идеях метода сил.

### 10.1. Степени свободы, связи, степень статической неопределенности

**10.1.1.** Чтобы судить о том, является ли сложная система статически определимой или статически неопределенной, нет

необходимости составлять для нее систему уравнений равновесия. Для этого разработан метод анализа структуры системы, основанный на выработанных теоретической механикой понятиях связей и степеней свободы. Напомним об этих понятиях на примере стержневых систем, так как они являются нашим основным объектом изучения.

*Степенями свободы* называются независимые координаты, определяющие положение системы при ее движении. Например, положение стержня на плоскости (рис. 10.1) определяется координатами  $x_A$ ,  $y_A$  его точки  $A$  и углом  $\alpha$  с осью  $x$  прямолинейного участка  $AB$ . Поэтому стержни на плоскости имеют три степени свободы. Положение этого же стержня можно определить, задав координаты его точек  $A$  и  $B$ , но эти четыре координаты не являются независимыми, так как длина  $l$  участка  $AB$  задана. Поэтому между этими координатами имеется зависимость

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l^2,$$

которая позволяет по любым трем координатам найти четвертую. Таким образом, среди координат точек  $A$  и  $B$  независимы только три. Этот пример демонстрирует очень важный факт: число степеней свободы не зависит от выбора системы координат, описывающей положение системы.

Тело в пространстве имеет шесть степеней свободы. Это следует из того, что произвольное перемещение тела можно рассматривать как результат шести независимых движений: трех плоско-параллельных движений вдоль координатных осей и трех поворотов относительно этих осей.

Показанная на рис. 10.2 система из двух стержней  $AB$  и  $CD$  имеет шесть степеней свободы в плоскости  $xy$ , так как эти стержни между собой не связаны и каждый из них имеет три степени свободы.

На рис. 10.2 дана также система  $EFG$  из двух стержней, шарнирно связанных друг с другом в точке  $F$ . Видно, что положение этой системы определяется координатами точки  $E$  и углами  $\alpha$  и  $\beta$ . Поэтому у этой системы четыре степени свободы. Таким образом, скрепление стержней в точке  $F$  с помощью шарнира уменьшило число степеней

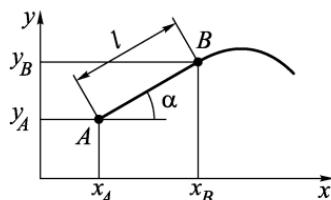


Рис. 10.1

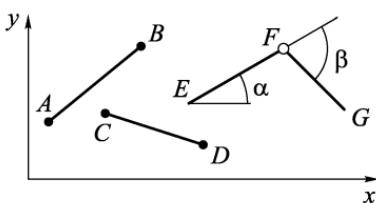


Рис. 10.2

свободы на две. В этом случае на систему из двух стержней наложено две связи.

Вообще *связью* называется устройство, накладывающее такое ограничение на систему, что степень ее свободы уменьшается на единицу.

Мы будем рассматривать обычно такие связи, которые либо запрещают какие-нибудь перемещения точек системы относительно опор (внешние связи), либо запрещают перемещения элементов системы друг относительно друга (внутренние связи). На рис. 10.3 показаны знакомые нам уже опорные устройства.

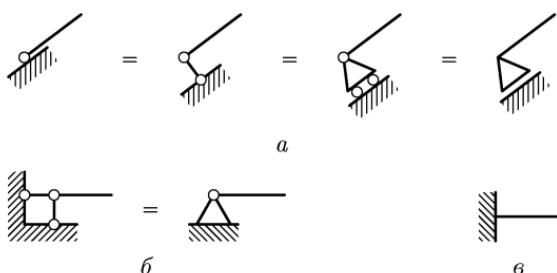


Рис. 10.3

Катковая опора, четыре схематических изображения которых даны на рис. 10.3 *а*, запрещает перемещения конца стержня по нормали к опорной плоскости, но не накладывает ограничения на его перемещение вдоль плоскости и на его поворот. Поэтому катковая опора накладывает на стержень одну связь. Шарнирная опора (рис. 10.3 *б*) накладывает на стержень две связи, так как она запрещает горизонтальные и вертикальные перемещения конца стержня, но не ограничивает его поворот. Жесткое защемление (заделка) (рис. 10.3 *в*) запрещает все три возможных в плоскости перемещения, поэтому оно накладывает на стержень три связи. Эти опоры реализуют внешние связи. Связи, наложенные на стержни *EF* и *FG* в точке *F* (см. рис. 10.2), являются примером внутренних связей. Эти связи запрещают перемещения концов стержней относительно друг друга, но не ограничивают их взаимный поворот (изменение угла  $\beta$ ).

Мы будем рассматривать *идеальные связи*, т.е. связи, действия которых на систему сопровождаются возникновением реактивного усилия (реакции связи) в направлении связи. Иными словами, отбрасывая связь, мы будем заменять ее реакцией в направлении перемещения, запрещенного этой связью. На рис. 10.4 показаны связи и заменяющие их реактивные усилия. Для *внутренних связей* (см. рис. 10.4 *г*, *д*, *е*) реакции, по существу, являются внутренними усилиями или моментами. На этих

на рисунках после снятия связей концы стержней для удобства показаны условно раздвинутыми. Поэтому условно также и несовпадение линий действия некоторых реакций, которые являются

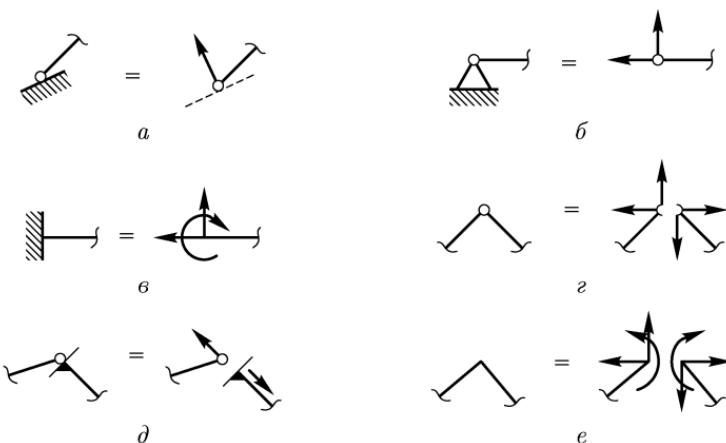


Рис. 10.4

силами взаимодействия и поэтому должны действовать вдоль одной линии.

**10.1.2.** Если система, имеющая степени свободы, не изменяет своего положения и формы под действием внешних сил, то эти силы должны удовлетворять условиям равновесия. Для стержня на плоскости, имеющего три степени свободы, можно составить три независимых уравнения равновесия (например,  $\sum P_x = 0$ ,  $\sum P_y = 0$ ,  $\sum M = 0$ ). Для стержня в пространстве с шестью степенями свободы имеется шесть независимых условий равновесия. Такое совпадение числа степеней свободы с числом независимых уравнений равновесия не случайно. Каждой степени свободы соответствует одно независимое уравнение равновесия.

Во многих решенных в этой книге задачах мы уже часто пользовались этим фактом для определения реакций опор. Отбрасывая опоры и заменяя их действие реакциями, мы отбрасывали связи и тем самым придавали системам степени свободы, а соответствующие последним уравнения равновесия использовали для определения реакций.

То же самое можно сказать и про метод сечений, применение которого сводится к рассечению тела, т.е. к устраниению связывающих отсеченные части связей, замене этих связей соответствующими им реактивными усилиями взаимодействия (внутренними силовыми факторами) и определению этих усилий из

условий равновесия отсеченных частей. Составить эти условия равновесия стало возможным благодаря появлению новых степеней свободы у образовавшейся в результате рассечения системы из двух отсеченных частей.

**10.1.3.** Система, не имеющая степеней свободы, называется *кинематически (геометрически) неизменяемой*. Такие системы меняют свое положение или конфигурацию только за счет деформации составляющих их элементов.

В противоположность им *кинематически изменяемые* системы меняют свою форму без деформации элементов. Примерами таких систем являются различного рода механизмы.

На рис. 10.5 *a, b, в, г* показаны кинематически неизменяемые, а на рис. 10.5 *д, е* — кинематически изменяемые системы. Заметим, что на системы, изображенные на рис. 10.5 *в, г*, наложено больше связей по сравнению с системами на рис. 10.5 *а, б*.

Связи, входящие в тот минимальный набор, который обеспечивает кинематическую неизменяемость системы, называются *необходимыми*. На системы, показанные на рис. 10.5 *а, б*, наложены только необходимые связи.

Связи, наложенные на систему сверх необходимых, называются *дополнительными*, или *лишними*. Данные на рис. 10.5 *в, г* системы получены из показанных на рис. 10.5 *а, б* наложением лишних связей.

Если нам нужно снять с системы лишние связи и оставить только необходимые, то такая задача решается обычно неоднозначно. Так, все системы с необходимыми связями на рис. 10.6 получены из одной, данной на рис. 10.5 *в*, системы. В то же время нельзя произвольно делить связи на необходимые и лишние. Сравнивая системы на рис. 10.5 *г, б* и *е*, замечаем, что снятие с кинематически неизменяемых систем с лишними связями

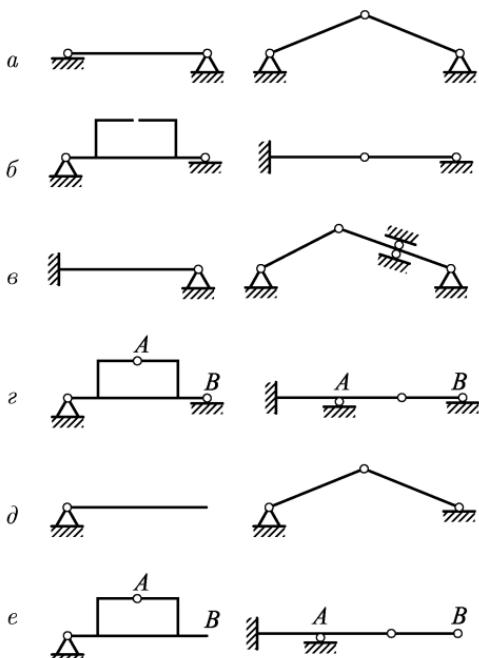


Рис. 10.5

(рис. 10.5 г) связей в точках *B* превращает их в механизмы, показанные на рис. 10.5 е. А если с этих же систем снять связи в точках *A*, то они остаются кинематически неизменяемыми (рис. 10.5 б).

Поэтому, решая вопрос о том, является ли данная связь необходимой или лишней, нужно иметь в виду, что снятие лишней связи оставляет систему кинематически неизменяемой. Если же при снятии связи у системы появляются степени свободы, т.е. она становится кинематически изменяемой, то такая связь является необходимой.

**10.1.4.** Снимем с системы необходимые и лишние связи и заменим их реакциями этих связей. На рис. 10.7 показаны системы, полученные в результате такой операции из систем, данных на рис. 10.5 г. В итоге система получит некоторое число степеней свободы, каждой из которых соответствует независимое уравнение равновесия. Неизвестными в этих уравнениях будут реакции отброшенных связей.

Разность между числом неизвестных реакций отброшенных связей и числом независимых уравнений равновесия называется *степенью статической неопределенности*. Например, системы, показанные на рис. 10.7, получены после отбрасывания связей из систем, данных на рис. 10.5 г, и имеют по шесть степеней свободы. У первой из них — восемь неизвестных реакций, у второй — семь. Поэтому степень статической неопределенности первой системы равна двум, а второй — единице.

При отбрасывании каждой необходимой связи система получает одну степень свободы, которой соответствует одно уравнение равновесия. Поэтому число уравнений равновесия соответствует числу отброшенных необходимых связей. Отсюда становится ясно, что степень статической неопределенности равна числу лишних связей. Кроме того, если мы сохраним часть или даже все из необходимых связей, то это не приведет к ошибке при отыскании степени статической неопределенности. Пример этому дан на рис. 10.8 а. Но лишние связи должны быть отброшены обязательно, иначе будет сделана ошибка. Это видно из

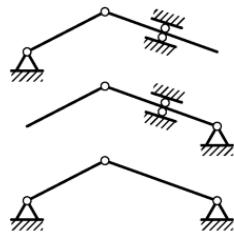


Рис. 10.6

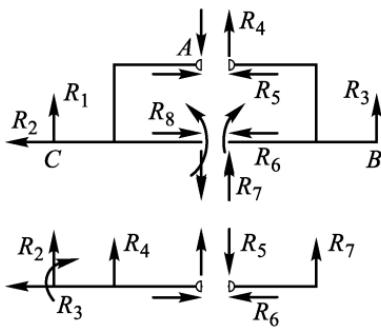


Рис. 10.7

примера на рис. 10.8 б, где снята необходимая связь в точке  $B$  и не сняты две внутренние связи в точке  $A$ .

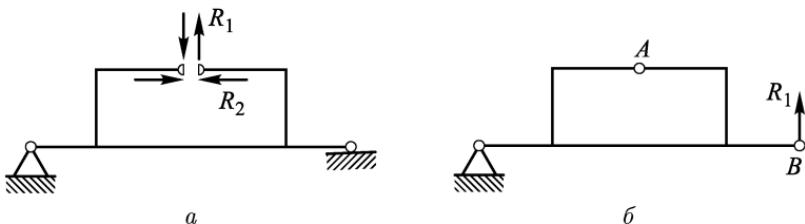


Рис. 10.8

**Пример 10.1.** Покажем, что плоская замкнутая рама трижды статически неопределенна. Снимем с рамы, показанной на рис. 10.9, внешние связи и рассечем ее на две части, заменив

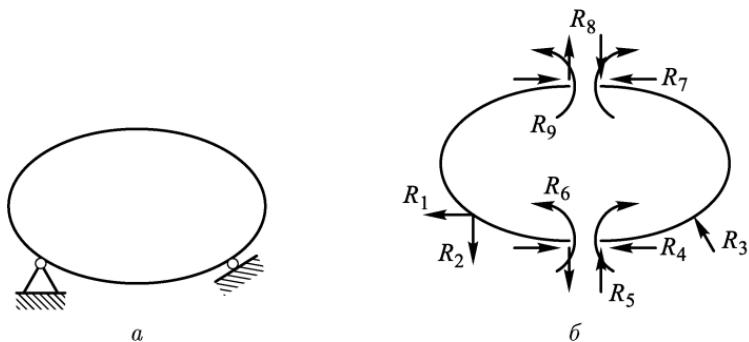


Рис. 10.9

действие отсеченных частей друг на друга внутренними силовыми факторами. Всего получилось девять неизвестных реакций связей. Каждая из двух отсеченных частей, как тело на плоскости, имеет три степени свободы. Поэтому можно составить шесть уравнений равновесия.

Таким образом, степень статической неопределенности плоской замкнутой рамы равна трем. Предоставляем читателю возможность самостоятельно убедиться в том, что каждый врезанный в замкнутый контур шарнир снижает степень статической неопределенности на единицу.

**Пример 10.2.** Для определения степени статической неопределенности плоской рамы, показанной на рис. 10.10 а, можно поступить так же, как в предыдущем примере. В результате придет, например, к системе, показанной на рис. 10.10 б, из которой видно, что для определения реакций тринадцати от-

брошенных связей можно составить лишь шесть уравнений равновесия. Таким образом, система семь раз статически неопределенна. Но, имея уже некоторый опыт, можно рассуждать так: на систему в точках  $A$  и  $B$  наложено пять внешних связей, из которых две лишние; в замкнутом контуре  $2$  — три лишние связи, а в замкнутом контуре  $1$  с шарниром  $C$  — две. Всего, таким образом, в системе семь лишних связей и поэтому она семь раз статически неопределенна.

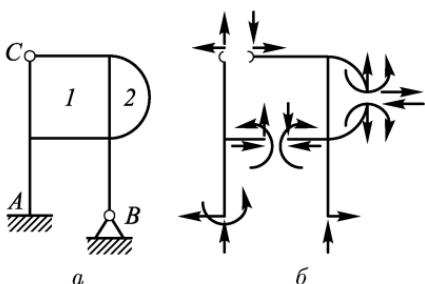


Рис. 10.10

## 10.2. Основная и эквивалентная системы. Канонические уравнения метода сил

**10.2.1.** Если со статически неопределенной системы снять только лишние связи, то полученная система называется *основной*. Так как сняты все лишние связи, то основная система статически определима. На рис. 10.11 показаны примеры основных для данных на рисунках 10.5 г и 10.10 систем. Как мы уже от-

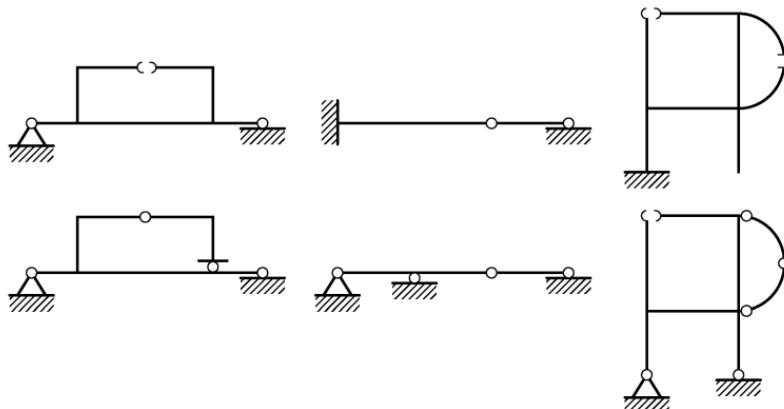


Рис. 10.11

мечали, деление связей на необходимые и лишние может быть сделано по-разному, в соответствии с этим и выбор основной системы неоднозначен.

Реакции лишних связей будем называть *лишними неизвестными* и обозначать через  $X_i$ , где  $i$  — номер лишней связи.

Для решения нагруженной статически неопределенной исходной системы отбросим у нее лишние связи и заменим их реакциями — лишними неизвестными. Полученная система называется *эквивалентной*. На рис. 10.12 *а* показана исходная система — дважды статически неопределенная рама — и один из вариантов

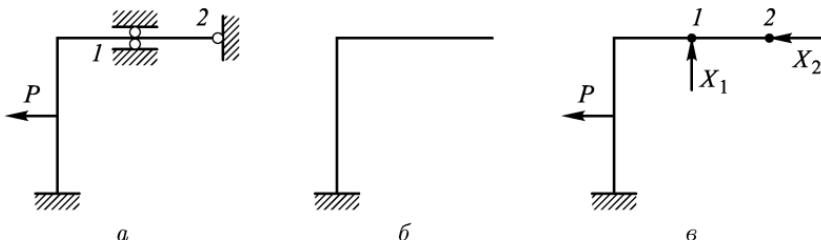


Рис. 10.12

соответствующих ей основной (рис. 10.12 *б*) и эквивалентной (рис. 10.12 *в*) систем. На примере этой рамы мы и будем проводить все рассуждения, обобщив их потом на общий случай.

Эквивалентная система принципиально отличается от исходной тем, что она статически определима, и поэтому мы можем методом сечений найти для нее внутренние силовые факторы, а по ним — перемещения (например, с помощью интеграла Мора). Это новое качество эквивалентной системы образовалось ценой появления лишних неизвестных реакций  $X_1$  и  $X_2$  отброшенных связей. В эквивалентной системе перемещения  $\delta_1$  и  $\delta_2$  в направлении отброшенных связей будут определяться как внешней нагрузкой  $P$ , так и лишними неизвестными  $X_1$  и  $X_2$ , т.е.  $\delta_1$  и  $\delta_2$  являются функциями  $P, X_1, X_2$ .

$$\delta_1 = \delta_1(P, X_1, X_2), \quad \delta_2 = \delta_2(P, X_1, X_2). \quad (10.2.1)$$

Если мы сможем подобрать  $X_1$  и  $X_2$  так, чтобы перемещения в направлении отброшенных связей оказались равными нулю, т.е. чтобы

$$\delta_1(P, X_1, X_2) = 0, \quad \delta_2(P, X_1, X_2) = 0, \quad (10.2.2)$$

то статически определимая эквивалентная система будет деформироваться так же, как статически неопределенная исходная система. А это значит, что найденные значения  $X_1$  и  $X_2$  равны реакциям отброшенных лишних связей. Итак, задача сводится к тому, чтобы найти  $X_1$  и  $X_2$ , удовлетворяющие условиям (10.2.2). Рассмотрим подробнее первое из этих условий. В нем  $\delta_1$  — перемещение в направлении связи 1, т.е. вертикальное перемещение точки 1 (перемещение в направлении  $X_1$ ). По принципу суперпозиции,

$$\delta_1(P, X_1, X_2) = \delta_1(P) + \delta_1(X_1) + \delta_1(X_2). \quad (10.2.3)$$

Этот факт иллюстрирует рис. 10.13.

Если  $\delta_1(P)$  можно определить сразу, то при определении  $\delta_1(X_1)$  и  $\delta_1(X_2)$  нам неизвестны силы  $X_1$  и  $X_2$ . Но перемещения пропорциональны вызывающим их силам (мы, как ранее было условлено, ведем рассуждения в рамках закона Гука и принципа малости деформаций). Поэтому (рис. 10.14)

$$\delta_1(X_1) = \delta_{11}X_1, \quad \delta_1(X_2) = \delta_{12}X_2, \quad (10.2.4)$$

где  $\delta_{11}$  и  $\delta_{12}$  — коэффициенты пропорциональности, смысл ко-

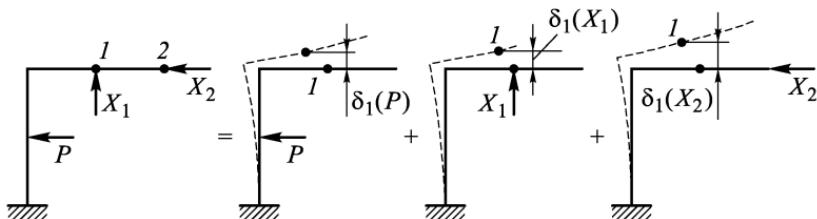


Рис. 10.13

торых становится очевиден из (10.2.4) при  $X_1 = 1$  и  $X_2 = 1$ :

$$\delta_1(X_1 = 1) = \delta_{11} \cdot 1, \quad \delta_1(X_2 = 1) = \delta_{12} \cdot 1. \quad (10.2.5)$$

Таким образом,  $\delta_{11}$  и  $\delta_{12}$  — отнесенные к единице силы перемещения в направлении первой отброшенной связи (в направлении  $X_1$ ) от единичных усилий, приложенных вместо  $X_1$  и  $X_2$ .

Если же «приложить» вместо  $X_1$  и  $X_2$  безразмерные единичные «усилия», как это делалось в методе единичной нагрузки при вычислении перемещений с помощью интеграла Мора в

пп. 4.7.2, 8.8.1, 9.3.2, то единицы в (10.2.5) становятся безразмерными. А  $\delta_{11}$  и  $\delta_{12}$ , принимают смысл перемещений в направлении  $X_1$  от безразмерных единичных «усилий», действующих вместо  $X_1$  и  $X_2$ .

Таким образом, первое из условий (10.2.2)  $\delta_1 = 0$  с учетом соотношений (10.2.3) и (10.2.4) принимает вид

$$\delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0. \quad (10.2.6)$$

Здесь обозначено  $\delta_{10} = \delta_1(P)$ .

Рассуждая точно так же, нетрудно свести и второе условие (10.2.2)  $\delta_2 = 0$  к уравнению

$$\delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0, \quad (10.2.7)$$

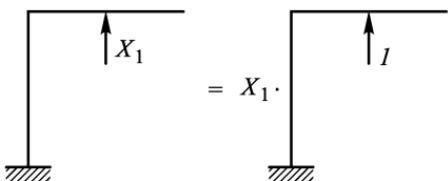


Рис. 10.14

где  $\delta_{20} = \delta_2(P)$ , а  $\delta_{21}$  и  $\delta_{22}$  — перемещения в направлении  $X_2$  от безразмерных единичных «усилий», приложенных вместо  $X_1$  и  $X_2$ .

Уравнения (10.2.6), (10.2.7) составляют систему канонических уравнений метода сил для определения  $X_1$  и  $X_2$  в рассмотренной раме (см. рис. 10.12). Коэффициенты  $\delta_{ij}$  этих канонических уравнений являются перемещениями. Если для их вычисления использовать интеграл Мора, то нужно знать внутренние силовые факторы, возникающие в основной системе от основной нагрузки и от единичных безразмерных «усилий», соответствующих лишним неизвестным. В нашем примере это сводится к задачам (состояниям), изображенным на рис. 10.15. Эти задачи пронумерованы в соответствии с номерами лишних неиз-

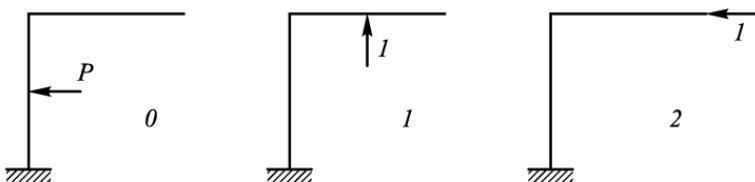


Рис. 10.15

вестных, а за основной нагрузкой закреплен номер «0». В рамках, как отмечалось выше, при определении перемещений достаточно учитывать только изгиб. Поэтому если  $M_{zi}$  — изгибающий момент в раме в  $i$ -м состоянии, то коэффициенты канонического уравнения  $\delta_{ij}$  можно вычислить как интегралы Мора:

$$\delta_{ij} = \int_l \frac{M_{zj} M_{zi}}{E J_z} ds. \quad (10.2.8)$$

В рассмотренном примере  $i = 1, 2$ ,  $j = 0, 1, 2$ .

**10.2.2.** Если исходная система  $n$  раз статически неопределенна, то эквивалентная система для нее строится путем отбрасывания  $n$  лишних связей и замены их  $n$  лишними неизвестными усилиями  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Для определения последних условия равенства нулю перемещений  $\delta_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) в направлении отброшенных лишних связей приводят к  $n$  каноническим уравнениям метода сил:

$$\begin{aligned} \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \dots + \delta_{1n} X_n &= 0, \\ \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \dots + \delta_{2n} X_n &= 0, \\ \dots \\ \delta_{n0} + \delta_{n1} X_1 + \delta_{n2} X_2 + \dots + \delta_{nn} X_n &= 0. \end{aligned} \quad (10.2.9)$$

Математически — это система линейных алгебраических уравнений. Причем, как видно из (10.2.8):

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}, \quad (10.2.10)$$

т.е. матрица коэффициентов канонических уравнений симметрична, что существенно снижает объем вычислений при определении  $\delta_{ij}$ . Рекомендуем читателю самостоятельно убедиться в том, что соотношение (10.2.10) также сразу следует и из теоремы взаимности перемещений.

**Пример 10.3.** Проведем подробно все вычисления для рамы, показанной на рис. 10.16 *a*. Она дважды статически неопре-

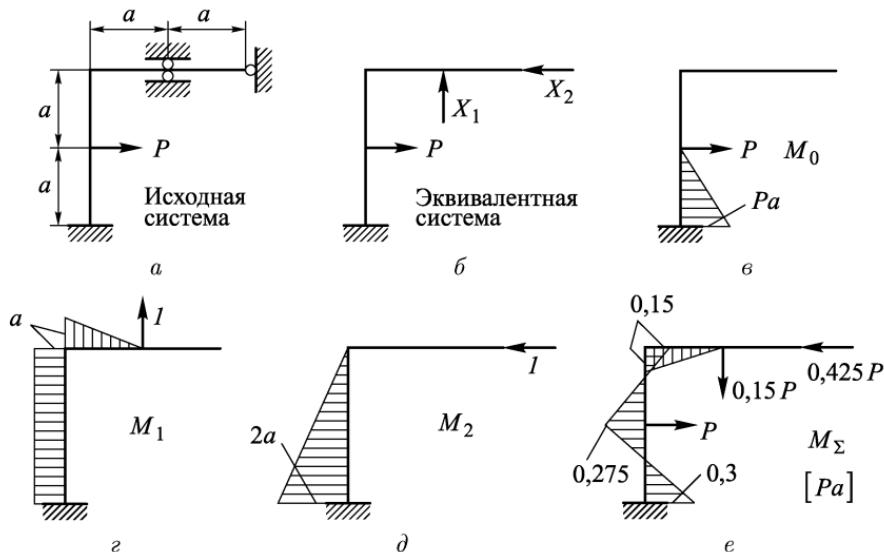


Рис. 10.16

делима. Наиболее очевидная для нее эквивалентная система дана на рис. 10.16 *b*, а система канонических уравнений имеет вид

$$\delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0,$$

$$\delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0.$$

На рис. 10.16 *c*, *d*, *e* даны изгибающие моменты в грузовом и единичных состояниях. При вычислении коэффициентов  $\delta_{ij}$  будем пользоваться формулой (10.2.8). Так как участки рамы прямолинейны и имеют постоянную жесткость, то можно воспользоваться способом Верещагина, вычисляя интегралы как суммы произведений площадей участков одной эпюры на соответствующие их центрами тяжести значения моментов на другой

(линейной) эпюре. Тогда

$$\delta_{10} = \frac{1}{EJ_z} \int_l M_0 M_1 ds = -\frac{1}{EJ_z} \frac{1}{2} Pa \cdot a \times a,$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EJ_z} \int_l M_0 M_2 ds = -\frac{1}{EJ_z} \frac{1}{2} Pa \cdot a \times \frac{5}{3} a,$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_z} \int_l M_1 M_1 ds = \frac{1}{EJ_z} \left( 2a \cdot a \times a + \frac{1}{2} aa \cdot a \times \frac{2}{3} a \right) = \frac{7}{3} \frac{a^3}{EJ_z},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ_z} \int_l M_1 M_2 ds = \frac{1}{EJ_z} \frac{1}{2} 2a \cdot 2a \times a = \frac{2a^3}{EJ_z},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ_z} \int_l M_2 M_2 ds = \frac{1}{EJ_z} \frac{1}{2} 2a \cdot 2a \times \frac{2}{3} 2a = \frac{8}{3} \frac{a^3}{EJ_z}.$$

Система канонических уравнений после сокращений принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{7}{3} X_1 + 2X_2 &= \frac{1}{2} P \\ 2X_1 + \frac{8}{3} X_2 &= \frac{5}{6} P. \end{aligned}$$

Ее решение:  $X_1 = -\frac{3}{20}P = -0,15P$ ,  $X_2 = \frac{17}{40}P = 0,425P$ . Соответствующие этому решению состояние эквивалентной системы и эпюра изгибающих моментов  $M_\Sigma$  показаны на рис. 10.16 e.

**10.2.3.** Как видно из только что рассмотренного примера, раскрытие статической неопределенности требует выполнения целого ряда операций и вычислений: построения эквивалентной системы, определения внутренних силовых факторов (изгибающих моментов) в грузовом и единичных состояниях, вычисления коэффициентов  $\delta_{ij}$ , решения системы канонических уравнений и определения внутренних силовых факторов в эквивалентной системе. На каждом из этих этапов не исключены ошибки. Поэтому необходима проверка решения. Она может быть основана на том факте, что при вычисленных значениях лишних неизвестных эквивалентная система должна деформироваться так же, как исходная. В примере 10.3 это означает, что в эквивалентной системе должны быть равны нулю перемещения в направлении отброшенных лишних связей, т.е. что

$$\delta_1 = \int_l \frac{M_\Sigma M_1}{EJ_z} ds = 0, \quad \delta_2 = \int_l \frac{M_\Sigma M_2}{EJ_z} ds = 0. \quad (10.2.11)$$

Однако при такой проверке, если ошибка сделана при построении эпюор  $M_1$  или  $M_2$ , она войдет как в решение, так и в проверку и не будет замечена. Чтобы избежать этого, можно воспользоваться тем, что результат решения, т.е. внутренние силовые факторы в эквивалентной системе, не зависят от выбора эквивалентной системы, так как все они эквивалентны одной и той же исходной системе. Поэтому проверку можно производить с более общих позиций: соответствуют ли деформации эквивалентной системы связям, наложенным на исходную систему. Для этого достаточно построить новую эквивалентную систему и проверить равенство нулю перемещений, соответствующих новым отброшенным лишним связям, при уже определенных ранее внутренних силовых факторах. Для рассмотренной в примере 10.3 рамы новая эквивалентная система показана на рис. 10.17 а. На рис. 10.17 б построена единичная эпюра для горизонтальной от-

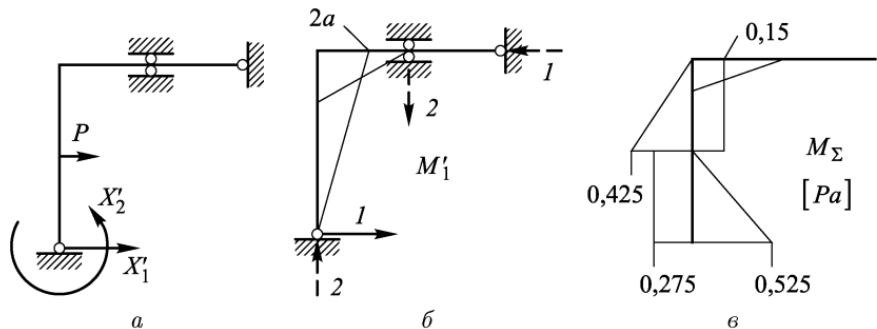


Рис. 10.17

брошенной связи (реакции опор показаны пунктиром). Соответствующее ей перемещение в эквивалентной системе равно нулю, поэтому

$$\delta'_1 = \int_l \frac{M_\Sigma M'_1}{EJ_z} ds = 0.$$

Здесь  $M_\Sigma$  — эпюра, данная на рис. 10.16 е. Читатель может убедиться самостоятельно, что это условие выполняется. При проведении вычислений на вертикальном участке рамы эпюру  $M_\Sigma$  удобно геометрически расслоить. Один из возможных вариантов расслоения дан на рис. 10.17 в.

**10.2.4.** При вычислении перемещений отдельных сечений статически неопределимых систем можно воспользоваться тем, что статически определимая эквивалентная система при определенных из канонических уравнений величинах лишних неизвестных  $X_i$  деформируется так же, как исходная система. По-

этому искомые перемещения могут быть определены как перемещения в любой из эквивалентных систем. Так, если для рамы на рис. 10.16 *a* нужно найти угол поворота в правой катковой опоре, то можно воспользоваться как эквивалентной системой, данной на рис. 10.16 *б*, так и данной на рис. 10.17 *a*. Соответствующие единичные эпюры представлены на рис. 10.18 *а*, *б*. Проведя вычисления искомого угла поворота  $\theta$  как

$$\theta = \int_l \frac{M_{\Sigma} M'_{1\theta}}{EJ_z} ds \quad \text{и} \quad \theta = \int_l \frac{M_{\Sigma} M'_{1\theta}}{EJ_z} ds,$$

можно убедиться, что оба интеграла дают одинаковый результат. Но во втором случае вычисления явно проще и

$$\theta = \int_l \frac{M_{\Sigma} M'_{1\theta}}{EJ_z} ds = -\frac{1}{EJ_z} \frac{1}{2} 0,15 Pa \cdot a \times \frac{1}{3} = -0,025 \frac{Pa^2}{EJ_z}.$$

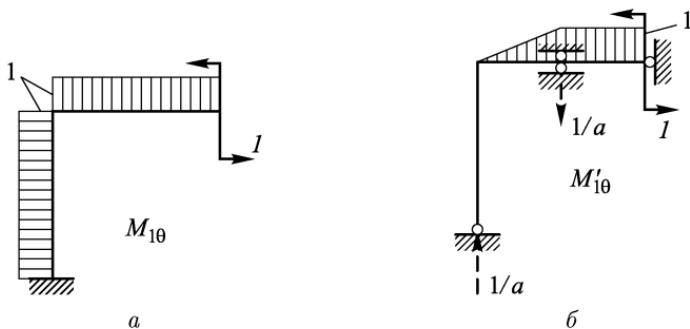


Рис. 10.18

Рассмотрим пример раскрытия статической неопределенности.

**Пример 10.4.** Рама, показанная на рис. 10.19 *а*, дважды статически неопределенна. Одна из возможных эквивалентных систем для нее показана на рис. 10.19 *б*. Соответствующая ей система канонических уравнений будет

$$\begin{aligned}\delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 &= 0, \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 &= 0.\end{aligned}$$

Эпюры изгибающих моментов в грузовом и единичных состояниях даны на рис. 10.19 *в*, *г*, *д*. В качестве координаты сечения на криволинейном участке возьмем угол  $\varphi$ , показанный на этих рисунках. Тогда изгибающие моменты будут:

на участке *AB*

$$M_0(\varphi) = 0, \quad M_1(\varphi) = -a \sin \varphi, \quad M_2(\varphi) = a(1 - \cos \varphi),$$

на участке  $BC$

$$M_0(\varphi) = 2Pa \sin(\varphi - 90^\circ) = 2Pa \cos \varphi,$$

$$M_1(\varphi) = -a \sin \varphi, \quad M_2(\varphi) = a(1 - \cos \varphi).$$

Коэффициенты  $\delta_{ij}$  у интеграла Мора на прямолинейном участке вычислим с помощью способа Верещагина, а на кри-

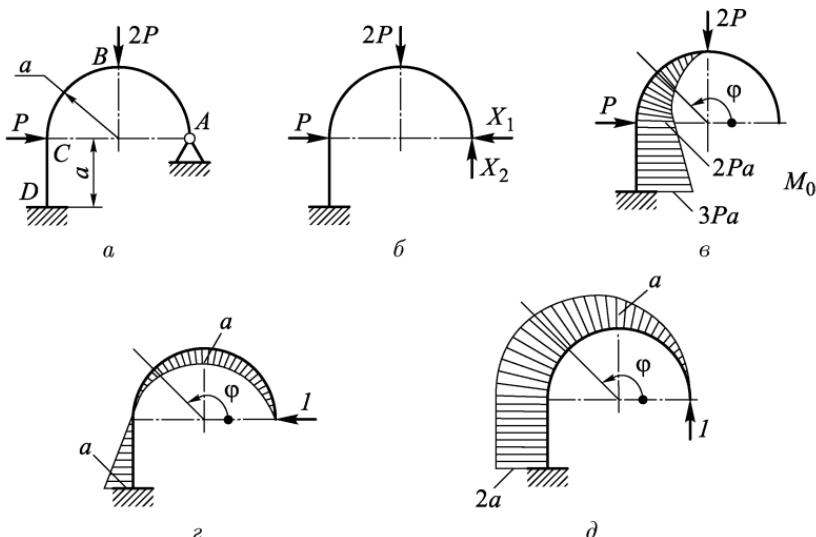


Рис. 10.19

волинейных — с помощью табл. 9.1. Получаем

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \frac{1}{EJ_z} \left( - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2Pa^2 \cos \varphi \sin \varphi a d\varphi - 2Pa^2 \times \frac{a}{2} - \frac{Pa^2}{2} \times \frac{2}{3}a \right) = \\ &= -\frac{Pa^3}{3EJ_z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{20} &= \frac{1}{EJ_z} \left( \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2Pa^2 \cos \varphi (1 - \cos \varphi) a d\varphi + \frac{5}{2}Pa^2 \times 2a \right) = \\ &= -\frac{14 + \pi}{2} \frac{Pa^2}{3EJ_z} \approx -8,57 \frac{Pa^3}{EJ_z}, \end{aligned}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_z} \left( \int_0^{\pi} a^2 \sin^2 \varphi a d\varphi + \frac{a^2}{2} \times \frac{2}{3}a \right) = \frac{3\pi + 2}{6} \frac{a^3}{EJ_z} \approx 1,91 \frac{a^3}{EJ_z},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ_z} \left( - \int_0^\pi a^2 \sin \varphi (1 - \cos \varphi) a d\varphi + \frac{a^2}{2} \times 2a \right) = - \frac{a^3}{EJ_z},$$

$$\begin{aligned} \delta_{22} &= \frac{1}{EJ_z} \left( \int_0^\pi a^2 (1 - \cos \varphi)^2 a d\varphi + 2a^2 \times 2a \right) = \\ &= \left( \frac{3}{2}\pi + 4 \right) \frac{a^3}{EJ_z} \approx 8,71 \frac{a^3}{EJ_z}. \end{aligned}$$

Система канонических уравнений после сокращений принимает вид

$$1,91X_1 - X_2 = \frac{1}{3}P, \quad -X_1 + 8,71X_2 = 8,57P.$$

Решив ее, найдем, что  $X_1 = 0,74P$ ,  $X_2 = 1,08P$ .

Эпюра моментов в эквивалентной системе показана на рис. 10.20 а. При ее построении удобно ориентироваться на эпюру перерезывающих сил  $Q$ , которая показана на рис. 10.20 б.

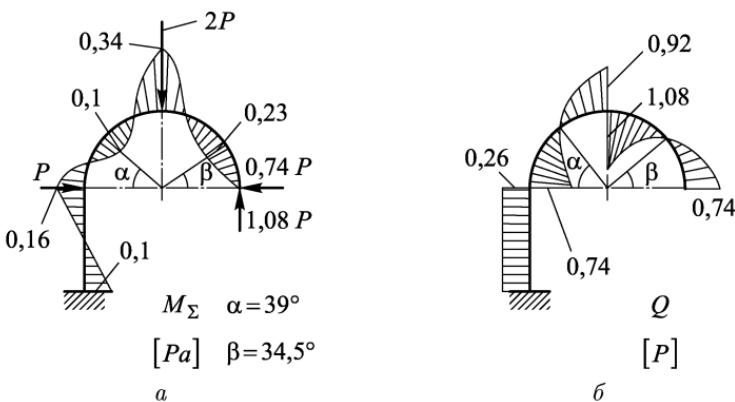


Рис. 10.20

**10.2.5.** Выбор удачной эквивалентной системы иногда позволяет значительно сократить и упростить вычисления. Хороший, наглядный пример тому дает задача о раскрытии статической неопределенности многоопорной балки (рис. 10.21 а). На рис. 10.21 б, в изображены две из возможных для такой балки эквивалентные системы. Сравнивая их, видим, что система на рис. 10.21 в приводит к значительно более простым вычислениям, так как для нее  $\delta_{13} = \delta_{14} = \delta_{15} = \delta_{24} = \delta_{25} = \delta_{35} = 0$ . При этом просматривается простая закономерность  $\delta_{ij} = 0$ , если  $|i - j| \geq 2$ . А это значит, что система канонических уравнений

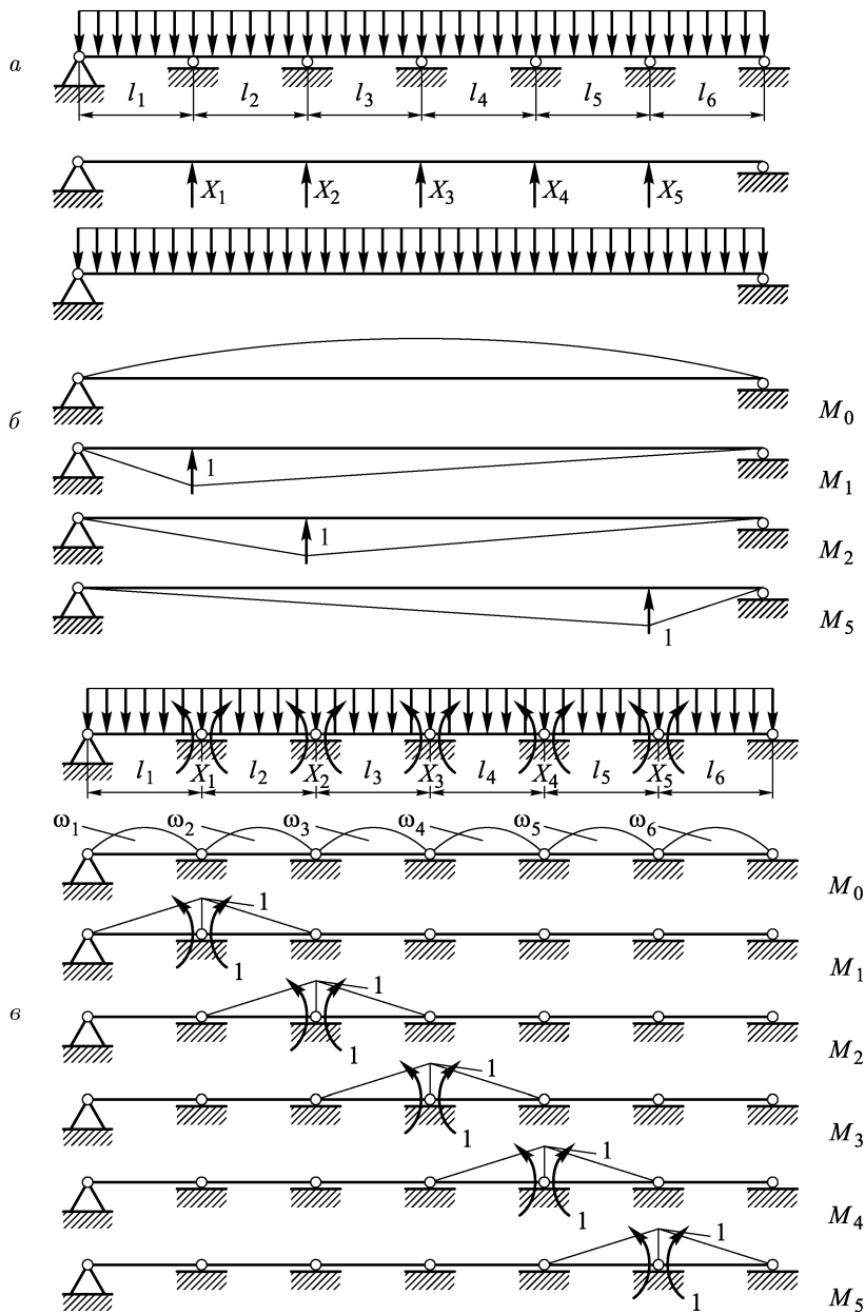


Рис. 10.21

имеет трехдиагональную матрицу:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + 0 + 0 + 0 &= -\delta_{10}, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + 0 + 0 &= -\delta_{20}, \\ 0 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4 + 0 &= -\delta_{30}, \\ 0 + 0 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4 + \delta_{45}X_5 &= -\delta_{40}, \\ 0 + 0 + 0 + \delta_{54}X_4 + \delta_{55}X_5 &= -\delta_{50}. \end{aligned}$$

Данная структура будет сохраняться, сколько бы пролетов не имела балка. Более того, для такой эквивалентной системы легко получить и стандартные формулы для вычисления коэффициентов  $\delta_{ij}$ :

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \frac{1}{EJ_z} \left( \frac{1}{2}l_i \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2}l_{i+1} \times \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3EJ_z}(l_i + l_{i+1}), \\ \delta_{i-1i} &= \frac{1}{EJ_z} \frac{1}{2}l_i \times \frac{1}{3}, \quad \delta_{ii+1} = \frac{1}{EJ_z} \frac{1}{2}l_{i+1} \times \frac{1}{3}, \\ \delta_{i0} &= \frac{1}{EJ_z} \left( \omega_i \frac{r_{i\pi}}{l_i} + \omega_{i+1} \frac{r_{i+1\pi}}{l_{i+1}} \right). \end{aligned}$$

Здесь  $\omega_i$  — площадь эпюры  $M_0$  на  $i$ -м пролете;  $r_{i\pi}$  и  $r_{i+1\pi}$  — расстояния от ее центра тяжести до левой и правой опоры пролета. Таким образом, типовое уравнение для многопролетной балки с произвольной нагрузкой принимает вид

$$l_i X_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1})X_i + l_{i+1}X_{i+1} = 6 \left( \omega_i \frac{r_{i\pi}}{l_i} + \omega_{i+1} \frac{r_{i+1\pi}}{l_{i+1}} \right)$$

и называется *уравнением трех моментов*. Оно значительно упрощает решение многопролетных балок.

### 10.3. Учет симметрии при раскрытии статической неопределенности методом сил

**10.3.1.** Конструкции часто являются симметричными. Учет этого обстоятельства позволяет упростить систему канонических уравнений.

Если геометрия системы симметрична относительно какой-либо оси и если эта система нагружена также симметрично, то систему будем называть *прямосимметричной*. Пример такой системы дан на рис. 10.22 *a*.

Если же симметричная система нагружена обратносимметрично, как это показано на рис. 10.22 *б*, то назовем ее *обратносимметричной*.

Возможны и другие виды симметрии, например центральная симметрия. Но мы здесь ограничимся лишь осевой симметрией, хотя изложенный подход можно распространить и на другие виды симметрии.

Основным свойством прямосимметричной (обратносимметричной) системы является то, что она деформируется симметрично (обратносимметрично). А это значит, что в симметричных ее сечениях внутренние силовые факторы симметричны (обратносимметричны), т.е. равны по величине и направлены так, чтобы сохранялась прямая симметрия (обратная симметрия), как это показано на рис. 10.22.

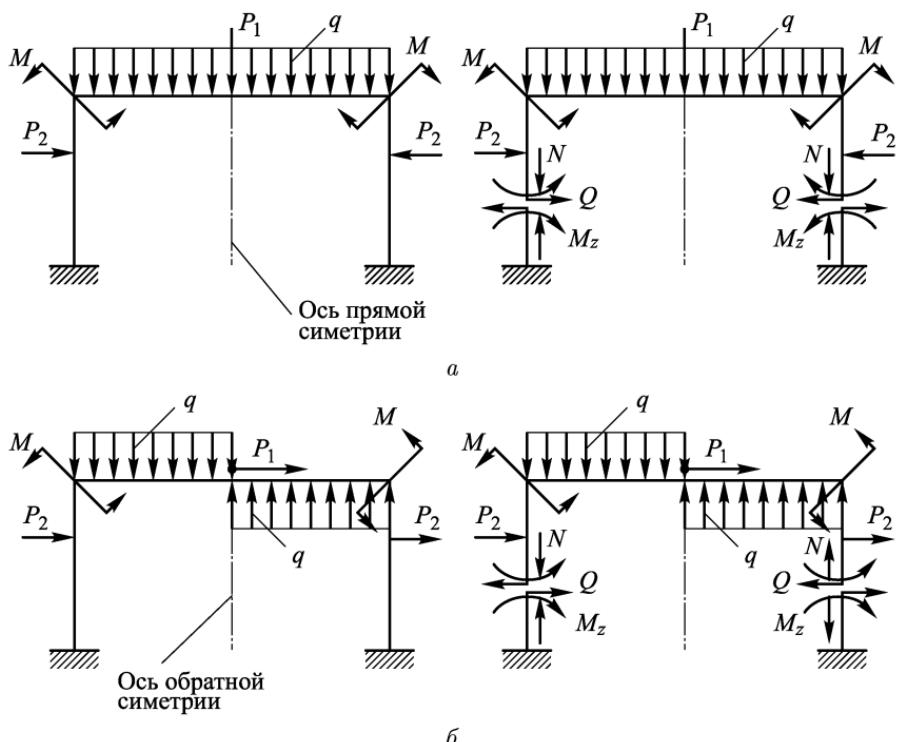


Рис. 10.22

Рассмотрим сечение по оси симметрии прямосимметричной плоской системы (рис. 10.23 а). Как и во всяком другом сечении, возникающие в нем внутренние силовые факторы  $N$ ,  $Q$  и  $M_z$  должны быть взаимны, т.е. попарно равны по величине и противоположны по направлению. В то же время по симметрии они должны быть симметричны. Для  $N$  и  $M_z$  эти два требования непротиворечивы и поэтому удовлетворяются для любых значе-

ний этих факторов. А для  $Q$  они противоречивы, так как взаимность требует для  $Q$  обратной симметрии. Но необходимость удовлетворения обоих условий очевидна. А они могут быть удовлетворены одновременно только при  $Q = 0$  в сечении по оси симметрии.

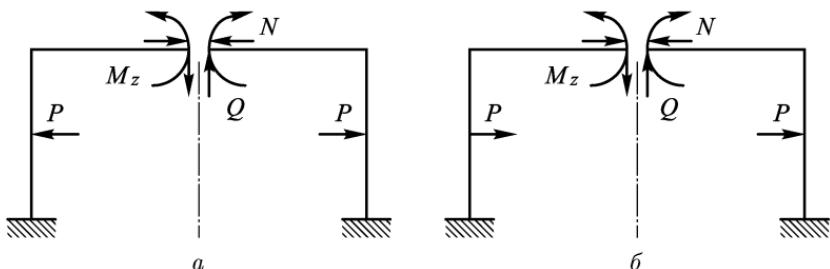


Рис. 10.23

Рассуждая точно так же для сечения по оси обратной симметрии (рис. 10.23 б), приходим к выводу, что в нем должны быть равны нулю  $N$  и  $M_z$ , так как по взаимности они должны быть симметричны, а из требований симметрии — обратносимметричны.

Этот результат можно обобщить, заметив, что все шесть внутренних силовых факторов, которые могут возникнуть в брусе, можно разбить на две группы по симметрии относительно плоскости сечения: прямосимметричные — это продольная сила  $N$  и изгибающие моменты  $M_z$  и  $M_y$  и обратносимметричные — перерезывающие силы  $Q_y$  и  $Q_z$  и крутящий момент  $M_k$  (рис. 10.24).

Общее правило можно сформулировать теперь так: в сечении по оси симметрии прямосимметричной системы равны нулю обратносимметричные внутренние силовые факторы, а в сечении по оси симметрии обратносимметричной системы равны нулю прямосимметричные внутренние силовые факторы.

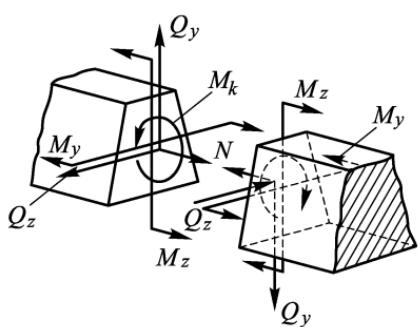


Рис. 10.24

ни по оси симметрии обратносимметричной системы равны нулю прямосимметричные внутренние силовые факторы, а в сечении

**10.3.2.** Проведенные рассуждения носят качественный характер. К тому же результату можно прийти на основании количественных рассуждений. Для этого рассмотрим прямосимметричную трижды статически неопределенную раму, данную

на рис. 10.25 *a*. Эквивалентную систему построим, разрезав раму по оси симметрии, как показано на рис. 10.25 *b*. Система трех канонических уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}\delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 &= 0, \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 &= 0, \\ \delta_{30} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 &= 0.\end{aligned}\quad (10.3.1)$$

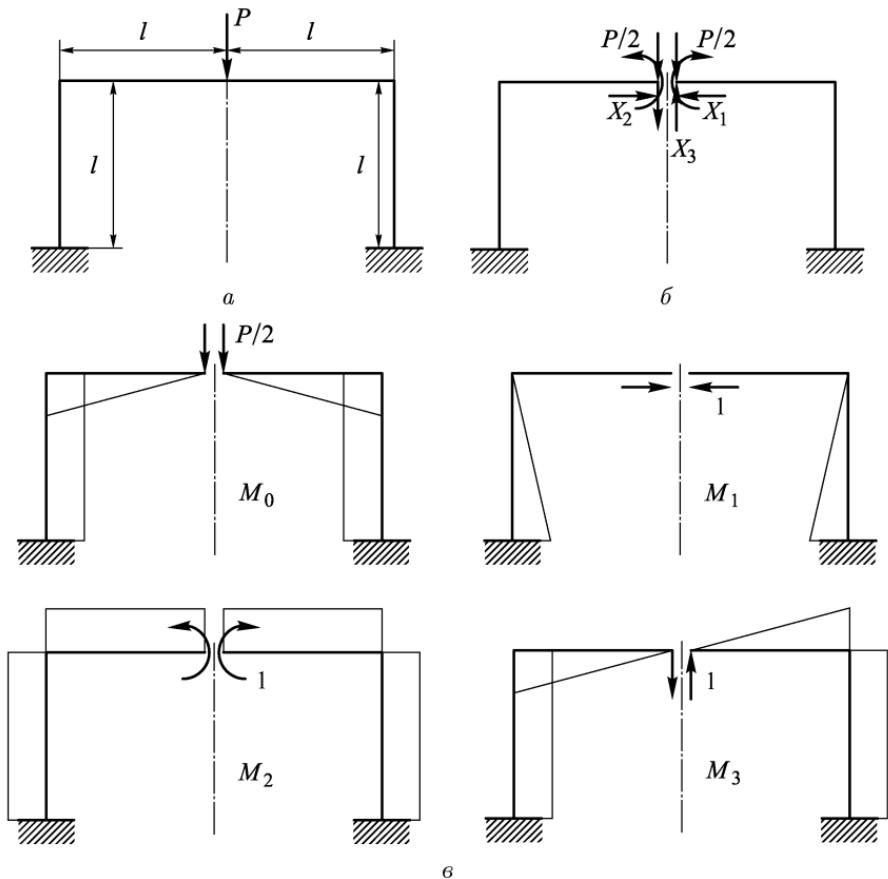


Рис. 10.25

Необходимые для подсчета коэффициентов  $\delta_{ij}$  эпюры в грузовом и единичных состояниях даны на рис. 10.25 *b*. Заметим, что эпюры  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  — прямосимметричны, а эпюра  $M_3$  — обрат-

носимметрична. Поэтому коэффициенты

$$\delta_{30} = \int_l \frac{M_0 M_3}{EJ_z} ds = 0, \quad \delta_{31} = \delta_{13} = \int_l \frac{M_1 M_3}{EJ_z} ds = 0,$$

$$\delta_{32} = \delta_{23} = \int_l \frac{M_2 M_3}{EJ_z} ds = 0$$

как произведения симметричных эпюр на обратносимметричные. Это следствие симметрии системы, не зависящее от ее конкретной формы. Тогда система канонических уравнений (10.3.1) упрощается:

$$\begin{aligned}\delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 &= 0, \\ \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 &= 0, \\ \delta_{33}X_3 &= 0.\end{aligned}$$

Так как  $\delta_{33} = \int_l \frac{M_3 M_3}{EJ_z} ds \neq 0$ , то из последнего уравнения следует, что  $X_3 = 0$ , т.е. в сечении по оси симметрии прямосимметричной рамы обратносимметричный внутренний силовой фактор, каким является перерезывающая сила  $Q$ , равен нулю.

Аналогичные рассуждения можно провести и для обратносимметричной рамы.

**П р и м ер 10.5.** Рассмотрим прямосимметричную раму, показанную на рис. 10.26 *a*. Она трижды статически неопределенна. Если при построении эквивалентной системы лишние связи снять, разрезав раму по оси симметрии, то перерезывающая сила в этом сечении равна нулю, как обратносимметричный фактор. Поэтому нужно определить только два лишних неизвестных — продольную силу  $X_1$  и изгибающий момент  $X_2$ . Это и учтено в эквивалентной системе, данной на рис. 10.26 *б*. Система канонических уравнений для определения  $X_1$  и  $X_2$  имеет вид:

$$\delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 = 0, \quad \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 = 0.$$

Эпюры изгибающих моментов в грузовом и единичных состояниях показаны на рис. 10.26 *в*. Учитывая симметрию, они даны только для половины рамы. Перемножая их, получаем коэффициенты  $\delta_{ij}$ :

$$\delta_{10} = -\frac{1}{EJ_z} \frac{1}{2} ql^2 l \times \frac{l}{2}, \quad \delta_{11} = \frac{1}{EJ_z} \frac{1}{2} ll \times \frac{2}{3} l,$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = -\frac{1}{EJ_z} \frac{1}{2} ll \times 1, \quad \delta_{22} = 2 \frac{1}{EJ_z} 1 \cdot l \times 1,$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EJ_z} \left( \frac{1}{2} ql^2 l \times 1 - \frac{1}{3} \frac{ql^2}{2} l \times 1 + \frac{1}{2} ql^2 l \times 1 \right) = \frac{5}{6} \frac{ql^3}{EJ_z}.$$

Канонические уравнения после сокращений принимают вид

$$\frac{l}{3}X_1 - \frac{1}{2}X_2 = \frac{1}{4}ql^2, \quad -\frac{l}{2}X_1 + 2X_2 = -\frac{5}{6}ql^2.$$

Решая их, получаем  $X_1 = \frac{1}{5}ql = 0,2ql$ ,  $X_2 = -\frac{11}{30}ql^2 = -0,37ql^2$ .

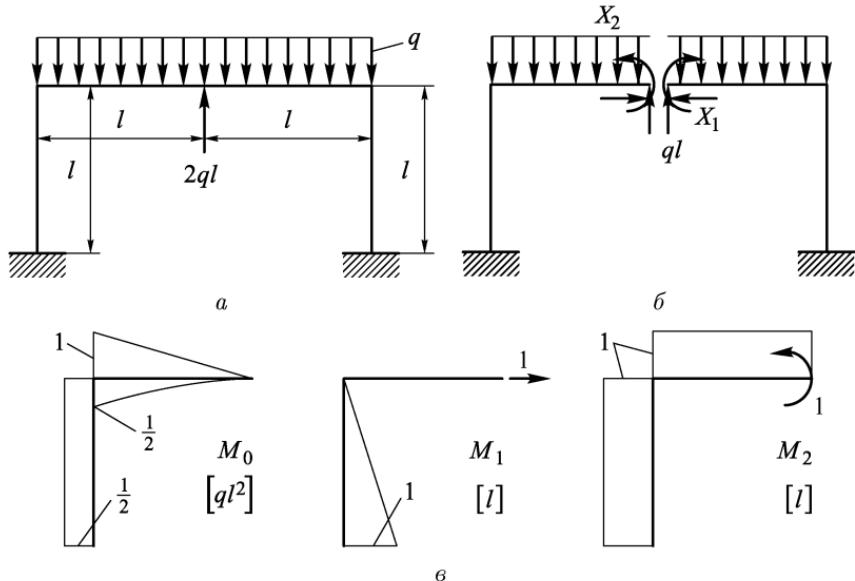


Рис. 10.26

На рис. 10.27 показан результат решения. Для его проверки выберем несимметричную эквивалентную систему, данную

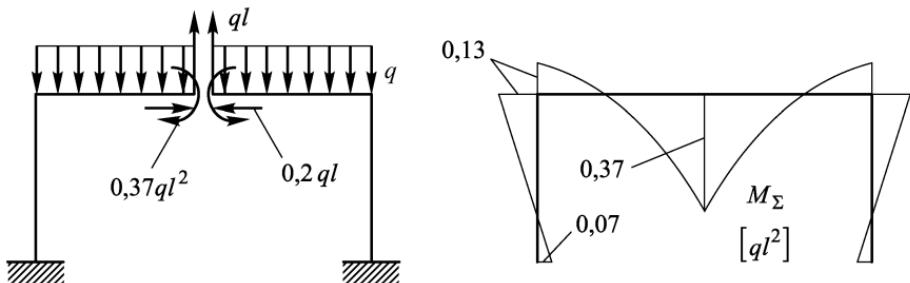


Рис. 10.27

на рис. 10.28 а. Перемножим эпюру  $M_\Sigma$ , которая для удобства показана на рис. 10.28 в расслоенной, с единичной эпюрой  $M'_1$

(рис. 10.28 б). Получим

$$\int_l \frac{M_{\Sigma} M'_1}{E J_z} ds = \frac{q l^4}{E J_z} \left( \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} + 0,5 \times 2 - 0,37 \cdot 2 \times 1 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3} \cdot 0,5 \cdot 2 \times 1 - 0,37 \times 2 - \frac{1}{2} \cdot 0,2 \times 2 \right) =$$

$$= \frac{q l^4}{E J_z} \left( \frac{1}{6} + \frac{5}{6} + 1 - 0,74 - 0,33 - 0,74 - 0,2 \right) = \frac{q l^4}{E J_z} (2 - 2,01).$$

Результат оказался не равным нулю. Это объясняется тем, что вычисления проводились с округлениями. Относительная ошибка составляет  $0,01/2 = 0,005 \approx 0,5\%$ , что соответствует принятой точности вычислений.

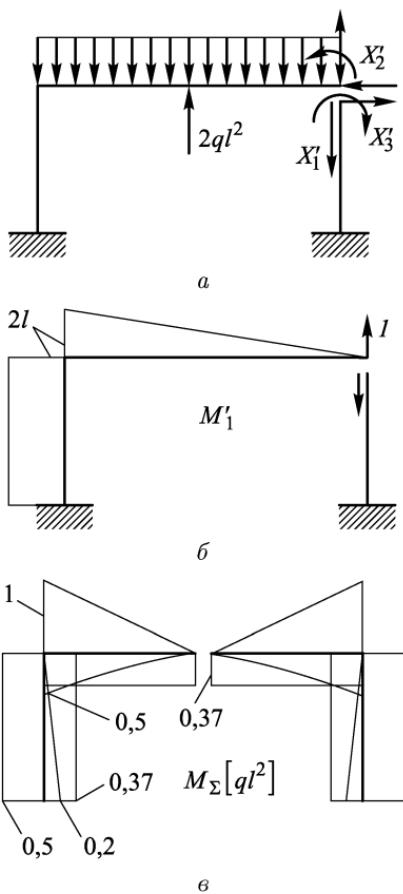


Рис. 10.28

**П р и м ер 10.6.** Рассмотрим трижды статически неопределенную раму, изображенную на рис. 10.29 а. Она обратносимметрична. Чтобы иметь возможность рассечь ее по оси обратной симметрии, отбросим ее статически определимую верхнюю часть и заменим ее действие на оставшуюся часть силой и моментом (рис. 10.29 б). На рис. 10.29 в дана эквивалентная система, учитывающая обратную симметрию, а на рис. 10.29 г показаны эпюры моментов в грузовом и единичном состояниях, необходимых для вычисления коэффициентов канонического уравнения  $\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$ . Получаем

$$\delta_{10} = -\frac{1}{E J_z} \left( \frac{Pl^2}{2} \cdot \frac{l}{2} + \frac{3}{4} Pl^2 \cdot l \right) =$$

$$= -\frac{Pl^3}{E J_z},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{E J_z} \left( \frac{1}{2} l^2 \cdot \frac{2}{3} l + l^2 \cdot l \right) =$$

$$= \frac{4}{3} \frac{l^3}{E J_z}.$$

Поэтому  $X_1 = -\delta_{10}/\delta_{11} = \frac{3}{4} P$ .

На рис. 10.29  $\delta$  показана итоговая эпюра изгибающих моментов  $M_{\Sigma}$ . Как видим, использование обратной симметрии позволяет

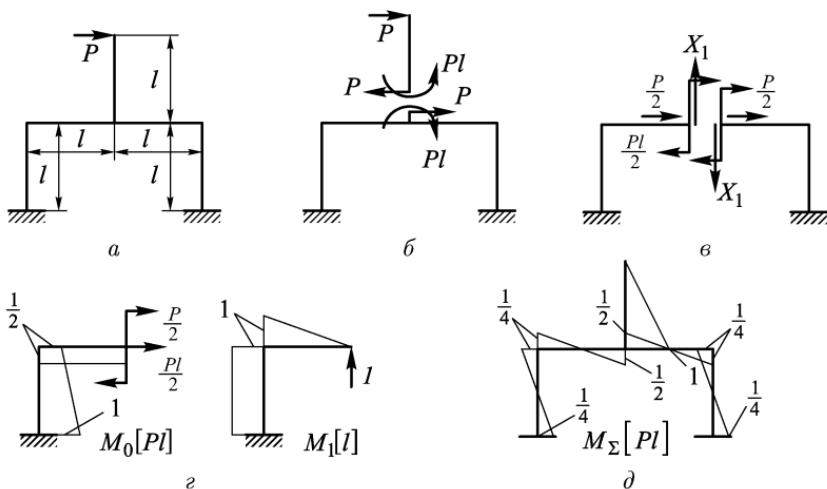


Рис. 10.29

лило свести решение трижды статически неопределенной рамы к решению всего одного канонического уравнения.

**10.3.3.** Встречаются такие системы, рассечение которых по оси прямой или обратной симметрии невозможно. В этом слу-

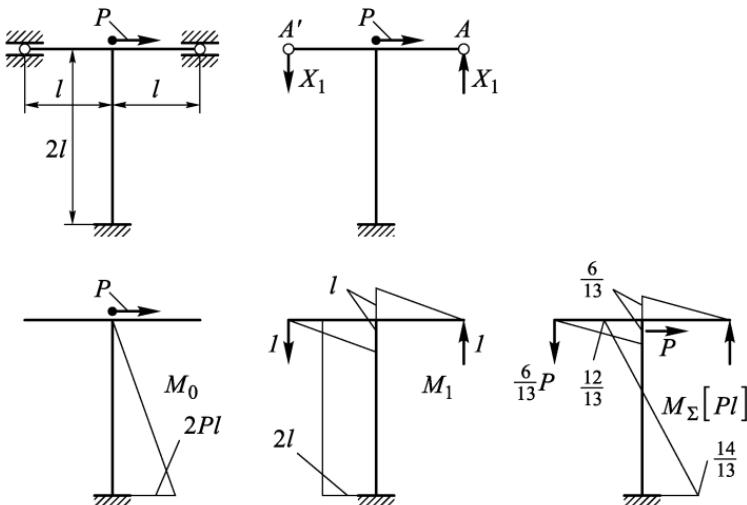


Рис. 10.30

чае при построении эквивалентной системы отбрасывать связи следует так, чтобы эквивалентная система сохранила свою симметрию.

**Пример 10.7.** На рис. 10.30 изображена как раз такая система. Там же даны для нее эквивалентная система, эпюры изгибающих моментов в грузовом и единичном состояниях и результирующая эпюра  $M_{\Sigma}$ . Интересно отметить, что в качестве лишней неизвестной здесь фигурирует обобщенная сила, состоящая из двух реакций  $X_1$  левой и правой опор. А коэффициенты  $\delta_{10}$  и  $\delta_{11}$  равны алгебраической сумме соответствующих вертикальных перемещений точек  $A$  и  $A'$  в грузовом и единичном состояниях.

**10.3.4.** Рассмотрим примеры решения систем с двумя осьми симметрии.

**Пример 10.8.** Кольцевая рама, данная на рис. 10.31 *a*, трижды статически неопределенна и имеет две оси симметрии.

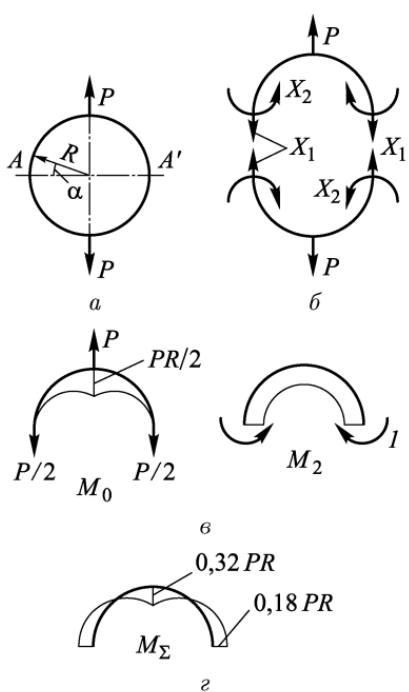


Рис. 10.31

Для построения эквивалентной системы рассечем ее по горизонтальной оси. Поступая так, мы симметрично отбрасываем связи, но при этом отбрасываем шесть вместо трех лишних связей. Так как сечения  $A$  и  $A'$  являются сечениями по осям симметрии (горизонтальной), то в них перерезывающая сила равна нулю. Эти сечения симметричны относительно вертикальной оси, поэтому возникающие в них продольная сила  $X_1$  и изгибающий момент  $X_2$  симметричны, что и учтено на рис. 10.31 *б*.

Поскольку кроме лишних связей отброшены также и необходимые, то система, изображенная на рис. 10.31 *б*, получила степени свободы и поэтому усилия  $X_1$  и  $X_2$  должны удовлетворять условиям равновесия. Рассматривая их, по-

лучаем, что они будут удовлетворены при  $X_1 = \frac{1}{2}P$ . А момент  $X_2$  никак не входит в условия равновесия и может быть определен только из канонического уравнения  $\delta_{20} + \delta_{22}X_2 = 0$ . Соответ-

ствующие грузовое и единичное состояния даны на рис. 10.31 в. Из них получаем

$$M_0 = \frac{1}{2}PR(1 - \cos \alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}; \quad M_2 = 1.$$

Тогда

$$EJ_z \delta_{20} = \int_l M_0 M_2 ds = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}PR(1 - \cos \alpha) \cdot 1 \cdot R d\alpha = (\pi - 2)PR^2,$$

$$EJ_z \delta_{22} = \int_l M_2 M_2 ds = \int_0^{2\pi} 1 \cdot 1R d\alpha = 2\pi R,$$

$$X_2 = -\frac{\delta_{20}}{\delta_{22}} = -\frac{\pi - 2}{2\pi} PR = -0,18PR.$$

Результирующая эпюра  $M_\Sigma$  приведена на рис. 10.31 г.

Пример 10.9. Рама, показанная на рис. 10.32 а, шесть раз статически неопределенна, так как она образована двумя замкну-

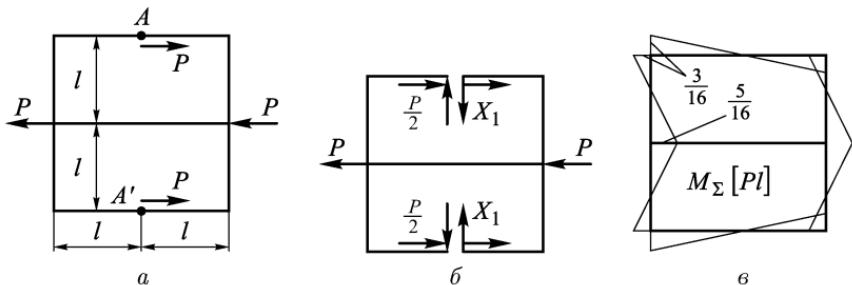


Рис. 10.32

тыми контурами. Нагружена она так, что имеет горизонтальную ось прямой симметрии и вертикальную ось обратной симметрии. Эквивалентную систему образуем, рассекая раму в сечениях  $A$  и  $A'$  по оси обратной симметрии. В этих сечениях равны нулю продольная сила и изгибающий момент. Так как сечения симметричны относительно горизонтальной оси симметрии, то и возникающие в них перерезывающие силы также симметричны, поэтому эквивалентная система получает вид, показанный на рис. 10.32 б. И для раскрытия статической неопределенности нужно решить всего лишь одно каноническое уравнение. Дальнейший ход решения читатель может провести самостоятельно. Мы лишь приводим на рис. 10.32 в результирующую эпюру изгибающих моментов.

## 10.4. Пространственные и плоскопространственные системы

**10.4.1.** Раскрытие статической неопределенности пространственных систем принципиально не отличается от рассмотренного подробно случая плоских систем. Только при вычислении коэффициентов канонических уравнений необходимо учитывать те из шести внутренних силовых факторов, которые вносят существенный вклад в деформации системы. Для пространственных рам, примеры которых приведены на рис. 10.33, определяющими деформациями являются изгиб и кручение.

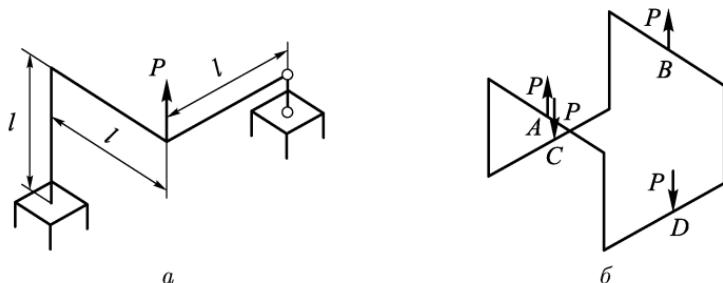


Рис. 10.33

Пример 10.10. На рис. 10.34 *a* дана эквивалентная система для рамы, показанной на рис. 10.33 *a*. Эпюры изгибающих и крутящих моментов в грузовом и единичном состояниях даны на рис. 10.34 *б*, *в*. Вычислим с их помощью коэффициенты канонического уравнения  $\delta_{10} + \delta_{11}X_1 = 0$ . Элементы рамы имеют жесткость на изгиб  $EJ$  и жесткость на кручение  $GJ_k$ . Тогда

$$\delta_{10} = \frac{1}{EJ} \left( -\frac{1}{2} Pl^2 \times \frac{2}{3}l - Pl^2 \times l \right) = -\frac{4}{3} \frac{Pl^3}{EJ},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left( \frac{1}{2} l^2 \times \frac{2}{3}l \cdot 2 + l^2 \times l \cdot 2 \right) + \frac{1}{GJ_k} l^2 \times l = \frac{8l^3}{3EJ} \left( 1 + \frac{3}{8} \frac{EJ}{GJ_k} \right).$$

Тогда

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{P}{2 \left( 1 + \frac{3}{8} \frac{EJ}{GJ_k} \right)}.$$

Если сечения стержней круглые, то  $J_k = 2J$ . И так как  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ , то при  $\mu = 0,3$  получаем, что  $\frac{EJ}{GJ_k} = 1 + \mu \approx \frac{4}{3}$ . Поэтому  $X_1 \approx \frac{1}{3}P$ . Результирующая эпюра  $M_\Sigma$  дана на рис. 10.34 *г*.

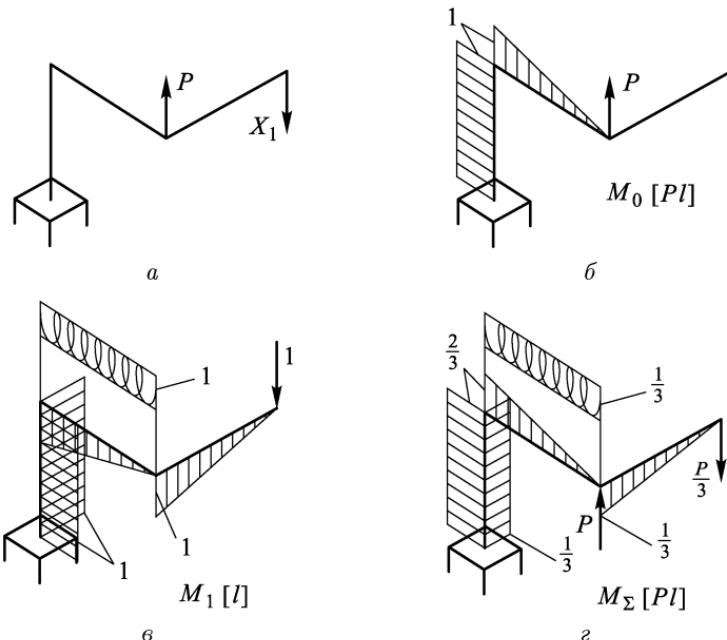


Рис. 10.34

При мер 10.11. Рама, приведенная на рис. 10.33 б, имеет две вертикальные плоскости симметрии, проходящие через точки  $AB$  и  $CD$ . Это учтено при построении эквивалентной системы, половину которой показана на рис. 10.35 вместе с эпюрами  $M_0$  и  $M_1$ . Из условий равновесия этой части рамы видно, что

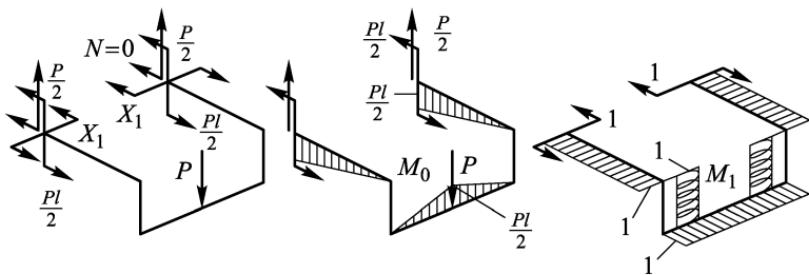


Рис. 10.35

продольная сила  $N$  равна 0, а изгибающий момент в вертикальной плоскости равен  $\frac{1}{2}Pl$ . Поэтому неизвестным остается только момент в горизонтальной плоскости  $X_1$ , который нужно определить из канонического уравнения  $\delta_{10} + \delta_{11}X_1 = 0$ . Однако эпюры  $M_0$  и  $M_1$  таковы, что  $\delta_{10} = 0$ . Поэтому  $X_1 = 0$ .

**10.4.2.** В конструкциях часто встречаются плоскопротранственные рамы — плоские рамы, нагруженные нормальной к их плоскости нагрузкой (рис. 10.36). Напомним, что мы

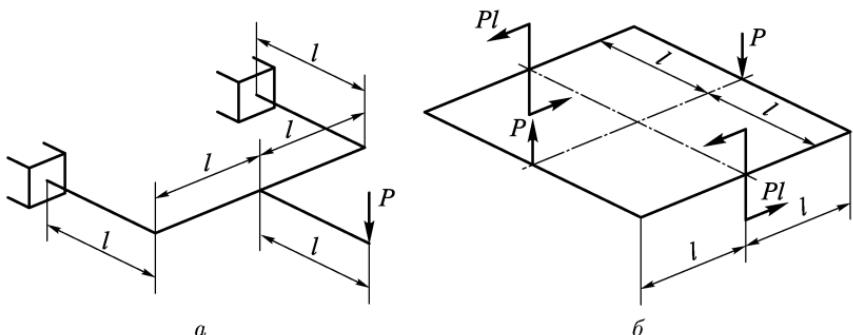


Рис. 10.36

рассматриваем такие плоские рамы, у которых ось симметрии сечения лежит в плоскости рамы. Для статически определимых плоскопротранственных рам из условий равновесия легко показать, что равны нулю все внутренние силовые факторы, лежащие в плоскости рамы. Если рама статически неопределенна, то, рассматривая систему канонических уравнений метода сил для нее, можно убедиться, что она распадается на две независимые системы. Одна из них содержит только лишние неизвестные, действующие в нормальной к раме плоскости, а другая — лежащие в плоскости. Вторая система является однородной и, так как определитель ее ввиду кинематической неизменяемости основной системы не равен нулю, она имеет единственное нулевое решение. Читатель может рассмотреть это на примере си-

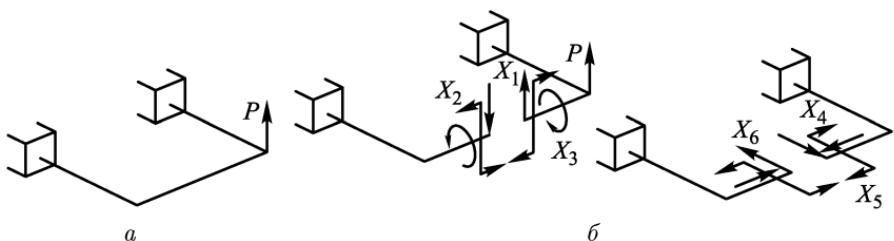


Рис. 10.37

стемы, приведенной на рис. 10.37 а. Эквивалентная система для нее дана на рис. 10.37 б как суперпозиция двух систем: в первой из них действуют те лишние неизвестные, плоскость действия

которых нормальна к плоскости рамы, а во второй — лишние неизвестные, лежащие в плоскости рамы.

Пример 10.12. Рассмотрим раму, показанную на рис. 10.36 *a*. Отбрасывая ее статически определимую часть, приходим к раме, данной на рис. 10.38 *a*, которая имеет вертикальную плоскость прямой симметрии. Построенные с учетом этого эквивалентная система и соответствующие ей эпюры моментов в грузовом и единичном состояниях приведены на рис. 10.38 *б*, *в*, *г*.

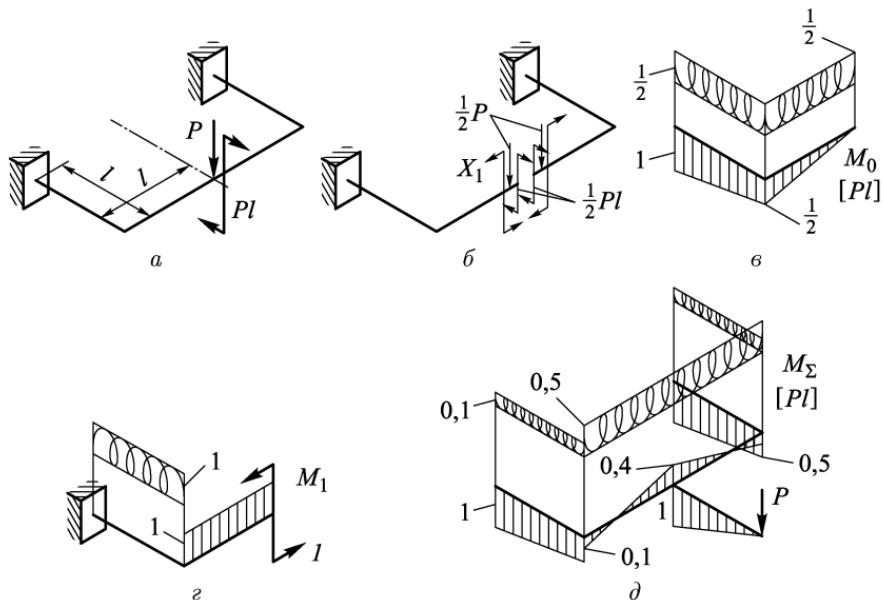


Рис. 10.38

Каноническое уравнение — простейшее:  $\delta_{10} + \delta_{11}X_1 = 0$ . Если составляющие раму стержни имеют жесткость на изгиб  $EJ$  и кручение  $GJ_k$ , то

$$\delta_{10} = -\frac{1}{EJ} \frac{Pl^2}{4} \times 1 - \frac{1}{GJ_k} \frac{Pl^2}{2} \times 1, \quad \delta_{11} = \frac{1}{EJ} l \times 1 + \frac{1}{GJ_k} l \times 1.$$

Поэтому

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{1 + 2 \frac{EJ}{GJ_k} \frac{Pl}{4}}{1 + \frac{EJ}{GJ_k}}.$$

Если, как и в примере 10.11, рама образована брусьями круглого сечения и  $\mu = 0,3$ , то  $EJ/GJ_k = 1 + \mu = 1,3$ . Тогда  $X_1 \approx 0,4Pl$ . Соответствующая эпюра моментов дана на рис. 10.38 *д*.

## 10.5. Комбинированные, или смешанные системы

**10.5.1.** Системы, составленные из элементов, испытывающих различные напряженные состояния, называются *комбинированными*, или *смешанными*. Чаще всего такие системы состоят из элементов, работающих на изгиб или растяжение–сжатие (рис. 10.39). На рисунке элементы *I* работают на изгиб, а элементы *II* — на растяжение.

На рисунке элементы *I* работают на изгиб, а элементы *II* — на растяжение. При расчете перемещений для таких систем, в том числе и при вычислении коэффициентов канонических уравнений, это необходимо учитывать. Поэтому для систем, показанных на рис. 10.39,

$$\delta_{ij} = \int_I \frac{M_j M_i}{EJ} ds + \int_{II} \frac{N_j N_i}{EF} ds. \quad (10.5.1)$$

**Пример 10.13.** На рис. 10.40 приведены эквивалентная, грузовая и единичная системы для системы, данной на

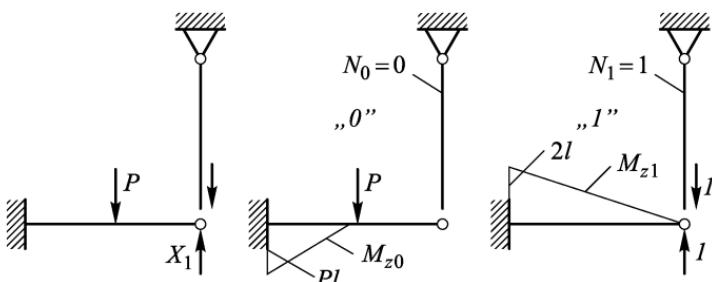


Рис. 10.40

рис. 10.39 *a*. Для нее в соответствии с (10.5.1)

$$\delta_{10} = -\frac{1}{EJ} \frac{Pl^2}{2} \times \frac{5}{3}l; \quad \delta_{11} = \frac{1}{EJ} 2l^2 \times \frac{4}{3}l + \frac{1}{EJ} 2l \times 1;$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{8}{3} + 2 \frac{EJ}{Efl^2}} P.$$

Как видно, результат зависит от величины отношения  $EJ/(Efl^2)$ . Поэтому, чтобы проконтролировать правильность

решения, удобно рассматривать предельные случаи. Один из них возникает при  $F \rightarrow 0$ , т.е. когда жесткость на растяжение стержня  $\Pi$  становится бесконечно малой. Тогда, как следует из решения,  $X_1 \rightarrow 0$ . Это согласуется с механическим пониманием работы системы, которая при  $F \rightarrow 0$  в пределе обращается в консольную балку. Второй предельный случай возникает при  $F \rightarrow \infty$ . Тогда в пределе стержень  $\Pi$  становится абсолютно жестким на растяжение–скатие и по своему действию на балку становится равносилен катковой опоре, а в пределе  $X_1$  принимает значение  $\frac{5}{16}P$ . Предоставляем читателю возможность самому убедиться, что в этом случае вертикальное перемещение правого конца балки  $I$  равно нулю.

**10.5.2.** Рассмотрим раму, изображенную на рис. 10.41 *a*. Эквивалентная система для нее приведена на рис. 10.41 *б*. При ее построении учтено, что рама имеет горизонтальную ось

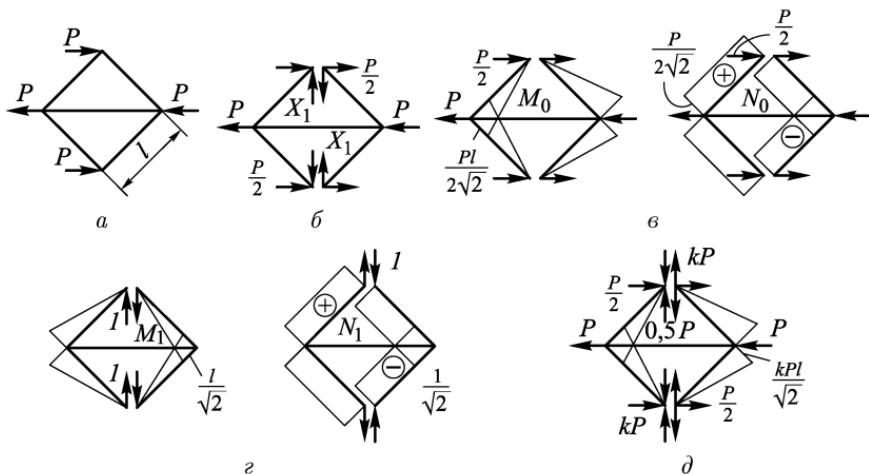


Рис. 10.41

прямой симметрии и вертикальную обратную симметрии. На рис. 10.41 *в*, *г* даны изгибающие моменты и продольные силы в грузовом и единичном состояниях.

Если, как это мы делали для рам во всех предыдущих примерах, считать определяющей деформацию изгиба, т.е. подсчитывать коэффициенты  $\delta_{ij}$  как

$$\delta_{ij} = \int_l \frac{M_j M_i}{EJ} ds,$$

то мы легко получаем, что  $\delta_{10} = -Pl^3/3EJ$ ,  $\delta_{11} = 2l^3/3EJ$ . Тогда  $X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{1}{2}P$ . Но в этом случае, как видно из рис. 10.41 *б*,

усилие, являющееся результатом действия сил  $\frac{1}{2}P$  и  $X_1 = \frac{1}{2}P$ , будет направлено как раз вдоль того участка рамы, к которому оно приложено. А это значит, что участки рамы будут не изгибаться, а соответственно растягиваться и сжиматься. Таким образом, мы пришли к результату, который находится в противоречии с начальным предположением о преимущественном изгибе элементов данной рамы. Поэтому для правильной оценки напряженно-деформированного состояния такой рамы необходимо учитывать как изгиб, так и растяжение–сжатие ее элементов, т.е. подсчитывать  $\delta_{ij}$  как

$$\delta_{ij} = \int_l \frac{M_j M_i}{EJ} ds + \int_l \frac{N_j N_i}{EF} ds.$$

Поступая так, мы получаем, что

$$\delta_{10} = -\frac{Pl^3}{3EJ} + \frac{Pl}{EF}, \quad \delta_{11} = \frac{2}{3} \frac{l^3}{EJ} + \frac{2l}{EF}.$$

Тогда

$$X_1 = \frac{P}{2} \frac{1-k}{1+k}, \quad k = \frac{3J}{Fl^2}.$$

Для длинных балок  $k \ll 1$ , поэтому, раскладывая  $X_1$  в ряд Тейлора по степеням  $k$  и сохраняя в этом разложении первые два слагаемых, получаем, с точностью до величин порядка  $k^2$ , что

$$X_1 \approx \frac{1}{2}P(1-2k) = \frac{1}{2}P - kP.$$

Это учтено в результирующем состоянии, показанном на рис. 10.41 д.

Оценим полученный результат с точки зрения возникающих в раме максимальных нормальных напряжений. Для примера рассмотрим раму прямоугольного сечения шириной  $b$  и высотой  $h$ . Тогда  $F = bh$ ,  $J = \frac{1}{12}bh^3$ . Учитывая, что  $N_\Sigma \approx \frac{1}{\sqrt{2}}P$ , подсчитаем максимальные напряжения в раме как сумму напряжений от растяжения–сжатия и от изгиба:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_\Sigma}{F} + \frac{M_{\Sigma \max}}{W_{изг}} = \frac{P}{\sqrt{2}bh} + \frac{k \frac{1}{\sqrt{2}}Pl}{\frac{1}{6}bh^2}.$$

Но

$$k = 3J/Fl^2 = \frac{1}{4}(h/l)^2.$$

Тогда

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{\sqrt{2}bh} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{Pl}{bh} \frac{h}{l} = \frac{P}{\sqrt{2}bh} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{h}{l}\right).$$

При  $l = 10h$  дополнительные напряжения, вызванные изгибом, составляют всего 15 % от напряжений растяжения или сжатия.

Вообще видно, что появление изгиба в элементах такой рамы вызвано растяжением или сжатием ее элементов. Поэтому такой изгиб называют *вторичным*.

В любой плоской раме, элементы которой образуют треугольники (рис. 10.42 *a*), при ее нагружении силами в узлах определяющим является растяжение или сжатие элементов, а из-

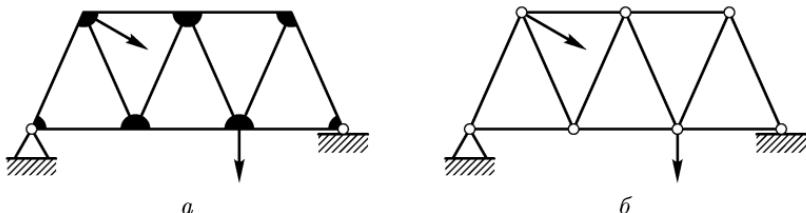


Рис. 10.42

гиб является вторичным. В связи с этим одной из расчетных схем для такой конструкции может быть принята схема фермы, в которой все элементы соединены шарнирно (рис. 10.42 *б*). Такая система становится, как правило, статически определимой (статическая неопределенность может сохраниться только за счет опорных устройств), так как в каждом из замкнутых треугольных контуров появляется три шарнира. А это существенно упрощает расчет. Вторичный изгиб в такой расчетной схеме не учитывается. Его принимают во внимание на этапе расчета на прочность при назначении нормированного коэффициента запаса прочности.

## B.10. Контрольные вопросы

**B.10.1.** Чем определяется число степеней свободы системы? Зависит ли это число от выбора системы координат?

**B.10.2.** Сколько степеней свободы имеет стержень на плоскости и в пространстве?

**B.10.3.** Что такое связь? Как изменяется степень свободы системы при наложении на нее одной связи?

**B.10.4.** Сколько связей накладывают на стержень катковая опора, шарнирная опора, заделка?

**B.10.5.** Что такое реакции связей? Как они направлены?

**B.10.6.** Сколько независимых уравнений равновесия можно составить для системы с  $n$  степенями свободы?

**B.10.7.** Что такое кинематически неизменяемые и изменяющиеся системы?

**B.10.8.** Какой (кинематически изменяемой или неизменяемой) является система, на которую наложены только необходимые связи? Что такое лишние связи? Можно ли произвольно делить связи на необходимые и лишние?

**B.10.9.** Как определяется степень статической неопределенности системы?

**B.10.10.** Обязательно ли отбрасывать все лишние связи при определении степени статической неопределенности системы?

**B.10.11.** Сколько рассечений нужно сделать в плоском замкнутом контуре, чтобы он стал статически определимым?

**B.10.12.** Как получить из статически неопределенной системы основную? Однозначен ли выбор основной системы?

**B.10.13.** Почему основная система статически определима?

**B.10.14.** Что такое эквивалентная система? В чем принципиальное отличие ее от исходной?

**B.10.15.** При каком условии эквивалентная система будет деформироваться так же, как и исходная?

**B.10.16.** Каков смысл коэффициентов  $\delta_{ij}$  канонических уравнений метода сил? Что необходимо знать для их вычисления?

**B.10.17.** Сколько канонических уравнений нужно записать для  $n$  раз статически неопределенной системы и почему?

**B.10.18.** Почему для проверки решения, как правило, выбирается новая эквивалентная система? В чем смысл такой проверки?

**B.10.19.** Почему проще определять перемещения не в исходной, а в эквивалентной системе?

**B.10.20.** Как удобнее раскрыть статическую неопределенность многопролетной балки?

**B.10.21.** В чем сходство и различие прямосимметричной и обратносимметричной систем? Каковы их основные свойства?

**B.10.22.** В каких сечениях прямосимметричной плоской системы перерезывающие силы  $Q$  всегда равны нулю?

**B.10.23.** В каких сечениях обратносимметричной плоской системы продольные силы  $N$  и изгибающие моменты  $M_z$  всегда равны нулю?

**B.10.24.** Как следует выбирать эквивалентную систему для рам, рассечение которых по оси плоской симметрии невозможно?

**B.10.25.** Как выбирается эквивалентная система для рам, имеющих две оси плоской симметрии?

**B.10.26.** Какие внутренние силовые факторы определяют деформацию пространственной системы и учитываются при вычислении коэффициентов канонических уравнений?

**B.10.27.** Чему равны все внутренние силовые факторы, лежащие в плоскости рамы плоскопространственной системы?

**В.10.28.** В чем особенность расчета перемещений (в том числе и коэффициентов канонических уравнений) в комбинированных системах, работающих на изгиб и растяжение?

**В.10.29.** Что такое вторичный изгиб?

### 3.10. Задачи

**3.10.1.** Для рамы (рис. 10.43) раскрыть статическую неопределенность, построить эпюры изгибающих моментов и перерезывающих сил, сделать проверку и определить перемещение точки приложения момента  $M$ . Полагая сечение круглым с диаметром  $d$ , найти  $d$  из условия прочности, если  $M = 75 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ,  $[\sigma] = 150 \text{ МПа}$ .

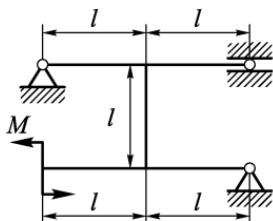


Рис. 10.43

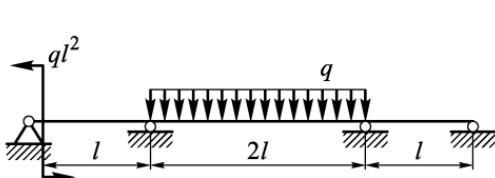


Рис. 10.44

**3.10.2.** Используя уравнение трех моментов, раскрыть статическую неопределенность балки (рис. 10.44) и построить эпюры изгибающих моментов и перерезывающих сил.

**3.10.3.** Для рамы, показанной на рис. 10.45, раскрыть статическую неопределенность, используя ее симметрию, построить эпюру изгибающих моментов и определить взаимный угол поворота  $\theta_{AB}$  поперечных сечений в точках  $A$  и  $B$ .

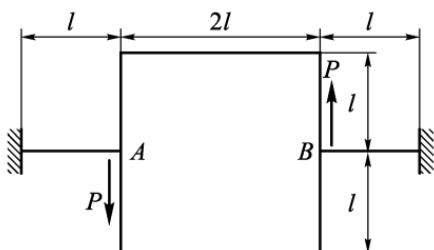


Рис. 10.45

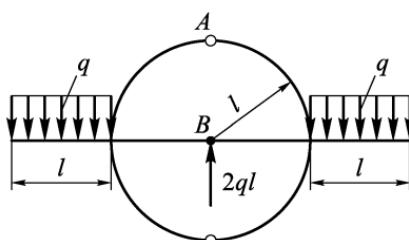


Рис. 10.46

**3.10.4.** Для показанной на рис. 10.46 самоуравновешенной рамы раскрыть статическую неопределенность, построить эпюру изгибающих моментов и определить взаимное перемещение  $\delta_{AB}$  точек  $A$  и  $B$ .

**3.10.5.** Используя симметрию плоскопространственной рамы кольцевого тонкостенного сечения (рис. 10.47), раскрыть ее статическую неопределенность, построить эпюры изгибающих и крутящих моментов и определить угол поворота  $\theta_A$  в точке  $A$  в плоскости, перпендикулярной плоскости рамы и проходящей через точки  $A$  и  $B$ . Принять модуль сдвига материала рамы  $G = \frac{2}{5}E$ .

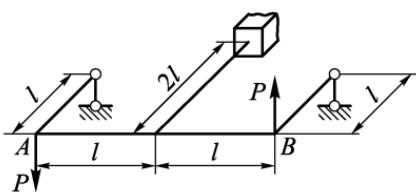


Рис. 10.47

**3.10.6.** Для самоуравновешенной плоскопространственной рамы (рис. 10.48) раскрыть статическую неопределенность и построить эпюры изгибающих и крутящих моментов. Отношение изгибной жесткости рамы  $EJ$  к жесткости на кручение  $GJ_k$  принять равным  $\frac{5}{3}$ .

**3.10.7.** Раскрыть статическую неопределенность комбинированной системы (рис. 10.49) и построить эпюру продольных сил для ферменного элемента и эпюры изгибающих моментов для остальных участков. Принять  $EF = 2\frac{EJ_z}{l^2}$ .

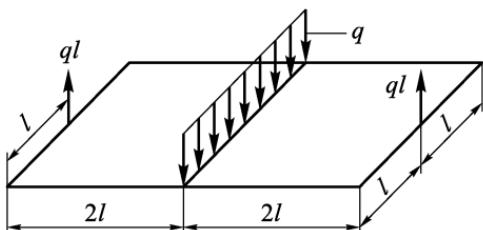


Рис. 10.48

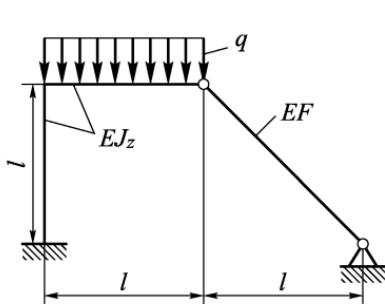


Рис. 10.49

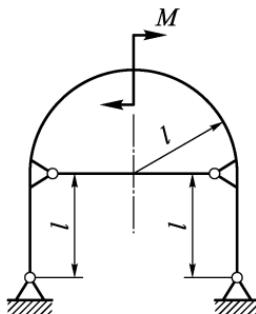


Рис. 10.50

**3.10.8.** Используя симметрию системы (рис. 10.50), определить реакции ее опор и показать, что в горизонтальном элементе системы (тяге) никаких усилий не возникает.

## ГЛАВА 11

### РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

В гл. 9 в примерах 9.3, 9.4 мы столкнулись с напряженными состояниями, которые отличаются от простых состояний растяжения–сжатия и чистого сдвига, воспроизводимых в стандартных экспериментах по определению механических свойств материалов. В этой главе будут рассмотрены вопросы расчета на прочность при таких сложных напряженных состояниях.

#### 11.1. Анализ напряженного состояния в точке

**11.1.1.** Еще в гл. 2 (п. 2.2.2) было отмечено, что через данную точку тела можно провести сколько угодно сечений и на каждом из них в этой точке действует свое напряжение. Напомним, что совокупность напряжений в точке на всевозможных проходящих через нее сечениях называется напряженным состоянием в этой точке. На рис. 11.1 показаны нормальные и касательные напряжения на гранях элементарного кубика, выделенного в окрестности точки  $O$  тела координатными плоскостями системы координат  $x, y, z$ . Как и в п. 2.2.2, первый индекс у касательного напряжения — это индекс нормали к сечению (площадке), на котором оно действует, а второй — индекс оси, вдоль которой оно направлено. Напряжения,

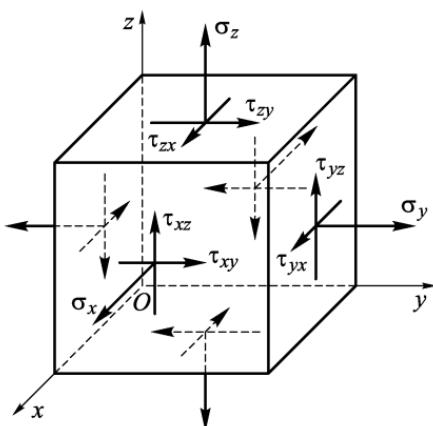


Рис. 11.1

показанные на рис. 11.1, в том числе и данные для невидимых граней штриховой линией, положительны. Таким образом, нормальные напряжения положительны, если они растягивающие. Положительные направления касательных напряжений на тех гранях, внешняя нормаль к которым совпадает с положительным направлением оси, совпадают с положительными направлениями двух других осей. На рис. 11.1 — это видимые грани кубика. Если же внешняя нормаль к площадке противоположна направлению координатной оси, как это имеет место для невидимых на рис. 11.1 граней кубика, то положительные касательные напряжения направлены противоположно соответствующим координатным осям. Они показаны пунктиром.

Девять составляющих напряжений  $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ , действующих на трех взаимно перпендикулярных площадках, называют *компонентами напряженного состояния*. В п. 2.2.3 было доказано свойство парности касательных напряжений:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (11.1.1)$$

Оно следовало из тех условий равновесия элементарного кубика, которые требуют, чтобы были равны нулю суммы моментов действующих на него сил относительно осей  $x, y, z$ .

Свойство парности касательных напряжений показывает, что из девяти компонентов напряженного состояния независимыми являются только шесть.

**11.1.2.** Покажем, что компоненты напряженного состояния полностью определяют напряженное состояние в точке. Иными

словами, если мы знаем компоненты напряженного состояния в данной точке, то мы можем найти напряжения на любой площадке, проходящей через эту точку.

Для этого рассмотрим равновесие показанного на рис. 11.2 элементарного тетраэдра, три грани которого  $OAB, OBC$  и  $OAC$  лежат в координатных плоскостях, а четвертая  $ABC$  является произвольной площадкой с нормалью  $\mathbf{v}$ . Обозначим через  $l, m, n$  направляющие косинусы нормали  $\mathbf{v}$  в осях  $x, y, z$ , т.е.

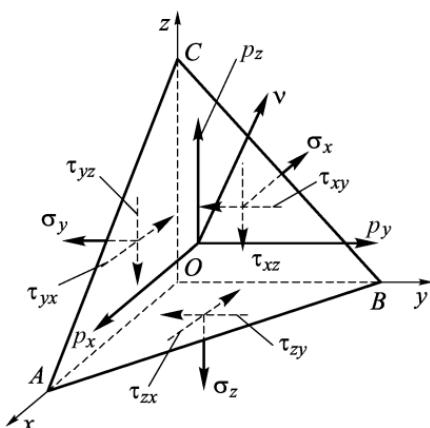


Рис. 11.2

направляющие косинусы нормали  $\mathbf{v}$  в осях  $x, y, z$ , т.е.

$$l = \cos(\mathbf{v}, x), \quad m = \cos(\mathbf{v}, y), \quad n = \cos(\mathbf{v}, z). \quad (11.1.2)$$

Пусть  $F$  — площадь грани  $ABC$ , а  $F_x, F_y, F_z$  — площади координатных граней  $OBC, OAC, OAB$ . Тогда

$$F_x = Fl, \quad F_y = Fm, \quad F_z = Fn. \quad (11.1.3)$$

Для того чтобы определить полное напряжение  $\mathbf{p}_\nu$  на площадке  $ABC$ , достаточно найти его составляющие  $p_x, p_y, p_z$  по координатным осям. Проецируя действующие на тетраэдр силы на координатные оси, получаем условия его равновесия в виде

$$\begin{aligned} \sum P_x &= 0 : p_x F - \sigma_x F_x - \tau_{yx} F_y - \tau_{zx} F_z = 0, \\ \sum P_y &= 0 : p_y F - \tau_{xy} F_x - \sigma_y F_y - \tau_{zy} F_z = 0, \\ \sum P_z &= 0 : p_z F - \tau_{xz} F_x - \tau_{yz} F_y - \sigma_z F_z = 0. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом выражений (11.1.3), после сокращения на  $F$ , приходим к соотношениям, позволяющим определить  $p_x, p_y, p_z$  и, следовательно, полное напряжение  $\mathbf{p}_\nu$ , через компоненты напряженного состояния

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ p_y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ p_z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{aligned} \quad (11.1.4)$$

**11.1.3.** По составляющим  $p_x, p_y, p_z$  полного напряжения на площадке  $ABC$  легко найти нормальное напряжение  $\sigma_\nu$  на этой площадке как

$$\sigma_\nu = p_x l + p_y m + p_z n. \quad (11.1.5)$$

Тогда в соответствии с соотношениями (11.1.4) получаем, учитывая парность касательных напряжений:

$$\sigma_\nu = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl. \quad (11.1.6)$$

Величину касательного напряжения  $\tau_\nu$  на площадке  $ABC$  можем найти как

$$\tau_\nu = \sqrt{p_\nu^2 - \sigma_\nu^2} = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \sigma_\nu^2}.$$

С точки зрения оценки прочности, нас прежде всего должны заинтересовать площадки, на которых действуют экстремальные по величине нормальные напряжения. Такие площадки называются *главными*. Так как направляющие косинусы удовлетворяют соотношению

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad (11.1.7)$$

то задача поиска главных площадок заключается в отыскании соответствующих величин  $l, m$  и  $n$ , при которых функция  $\sigma_\nu$  (11.1.6) принимает экстремальные значения при условии

(11.1.7). Математически это задача на условный экстремум, которая сводится к отысканию экстремума функции Лагранжа:

$$\Phi = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy}lm + 2\tau_{yz}mn + 2\tau_{zx}nl + \sigma(1 - l^2 - m^2 - n^2). \quad (11.1.8)$$

Здесь  $\sigma$  — неопределенный множитель Лагранжа. Условия экстремума функции Лагранжа  $\partial\Phi/\partial l = 0$ ,  $\partial\Phi/\partial m = 0$ ,  $\partial\Phi/\partial n = 0$  приводят нас к соотношениям, которые удобно записать в виде

$$\begin{aligned}\sigma l &= \sigma_x l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n, \\ \sigma m &= \tau_{xy}l + \sigma_y m + \tau_{zy}n, \\ \sigma n &= \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + \sigma_z n.\end{aligned}\quad (11.1.9)$$

Сравнивая эти соотношения с выражениями (11.1.4), видим, что для главных площадок

$$p_x = \sigma l, \quad p_y = \sigma m, \quad p_z = \sigma n, \quad (11.1.10)$$

т.е.  $\sigma l$ ,  $\sigma m$ ,  $\sigma n$  являются составляющими по координатным осям полного напряжения на главной площадке. Более того, они пропорциональны с коэффициентом пропорциональности  $\sigma$  направляющим косинусам  $l$ ,  $m$ ,  $n$ , которые фактически являются составляющими по координатным осям вектора единичной нормали  $\mathbf{v}$  к искомой главной площадке. Поэтому вектор полного напряжения  $\mathbf{p}_v$  на главной площадке направлен вдоль нормали  $\mathbf{v}$  и является, таким образом, нормальным напряжением. А коль

скоро на главной площадке нормальное напряжение и является полным напряжением, то касательное напряжение на такой площадке равно нулю.

На рис. 11.3 показано полное напряжение  $\mathbf{p}_v$  на главной (рис. 11.3 а) и неглавной (рис. 11.3 б) площадках.

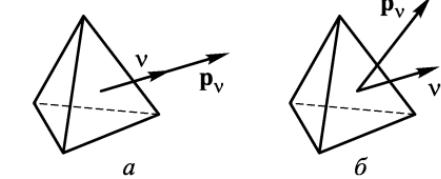


Рис. 11.3

Множитель Лагранжа  $\sigma$  является величиной напряжения на главной площадке. Действительно,  $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$ . Но для главной площадки  $p_x, p_y, p_z$  определены выражениями (11.1.10), поэтому

$$p = \sqrt{\sigma^2 l^2 + \sigma^2 m^2 + \sigma^2 n^2} = \sigma \sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = \sigma.$$

Направляющие косинусы главной площадки определяются из уравнений (11.1.9), которые запишем в виде

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n &= 0, \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n &= 0, \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n &= 0. \end{aligned} \quad (11.1.11)$$

Для неизвестных  $l, m, n$  эти уравнения являются системой линейных однородных уравнений. Так как  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ , то эта система должна иметь ненулевое решение. А это возможно только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (11.1.12)$$

Раскрывая этот определитель, приходим к следующему кубическому уравнению:

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0. \quad (11.1.13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ J_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \end{aligned} \quad (11.1.14)$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}.$$

Все три корня уравнения (11.1.13) вещественны. Действительно, по математической классификации задача (11.1.11) является задачей на собственные значения для системы линейных уравнений, матрица которой в силу парности касательных напряжений — симметрическая. А собственные значения симметрической матрицы, являющиеся корнями ее характеристического (векового) уравнения (11.1.13), всегда вещественны. Каждому из них соответствует собственный вектор, являющийся в нашем случае решением систем (11.1.11) и определяющий единичный вектор нормали к главной площадке. Если корни различны, то соответствующие им собственные векторы ортогональны и поэтому три главные площадки взаимно перпендикулярны.

Сами же корни уравнения (11.1.13) являются напряжениями на главных площадках. Они называются *главными напряжениями*. Их принято обозначать через  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  и располагать в таком порядке, что  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Заметим, что напряженное состояние в точке тела определяется действующими на него нагрузками и поэтому оно не зависит от того, какая система координат выбрана для его описания. Соответственно, и главные напряжения не зависят от выбранной системы координат. Но они являются корнями уравнения (11.1.13). Следовательно, и его коэффициенты  $J_1, J_2, J_3$  также не зависят от выбора системы координат, хотя компоненты напряженного состояния  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  конечно определяются системой координат. Поэтому главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  и коэффициенты характеристического уравнения  $J_1, J_2, J_3$  называют *инвариантами напряженного состояния*.

Если элементарный кубик в окрестности точки тела выделить так, чтобы его грани совпадали с главными площадками,

то напряженное состояние можно рассматривать как трехосное растяжение–скатие (рис. 11.4). А это значительно упрощает анализ напряженного состояния.

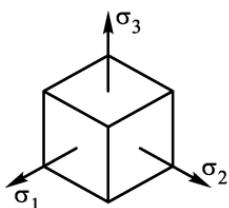


Рис. 11.4

Для определения положения главных площадок, например, той площадки, на которой действует главное напряжение  $\sigma_1$ , нужно задать в системе (11.1.11)  $\sigma = \sigma_1$ , тогда определитель системы становится равным нулю, и следовательно, ее уравнения линейно зависимы, т.е. одно из уравнений является линейной комбинацией двух других. Выразив из этих двух уравнений два неизвестных (например,  $l$  и  $m$ ) через третье ( $n$ ) и подставив полученные выражения в условие  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ , найдем последнее неизвестное ( $n$ ). А его уже используем для вычисления двух оставшихся косинусов ( $l$  и  $m$ ) первой главной площадки.

Для дальнейшего, однако, знание положения главных площадок не существенно.

**П р и м е р 11.1.** Найдем главные напряжения для напряженного состояния, показанного слева на рис. 11.5. Для него  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau$ . Поэтому характеристическое уравнение (11.1.12) имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\sigma & \tau & \tau \\ \tau & -\sigma & \tau \\ \tau & \tau & -\sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв этот определитель, получаем кубическое уравнение (11.1.13):  $\sigma^3 - 3\tau^2\sigma - 2\tau^3 = 0$ . Непосредственной проверкой убеждаемся, что один из корней этого уравнения равен  $\sigma = -\tau$ . Теперь, разделив кубическое уравнение на  $\sigma + \tau$ , сведем его к ква-

дратному и определим его корни:

$$\sigma_1 = 2\tau, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = -\tau.$$

Это же решение можно получить, заметив, что площадка  $ABC$  равнонаклонена к боковым граням и одинаково ориентирована к действующим на них касательным напряжениям. Поэтому она будет главной площадкой. Учитывая, что для нее  $l = m = n = 1/\sqrt{3}$ , легко получаем по формуле (11.1.6) действующее на ней нормальное напряжение  $\sigma = 2\tau$ , которое является одним из корней характеристического кубического уравнения.

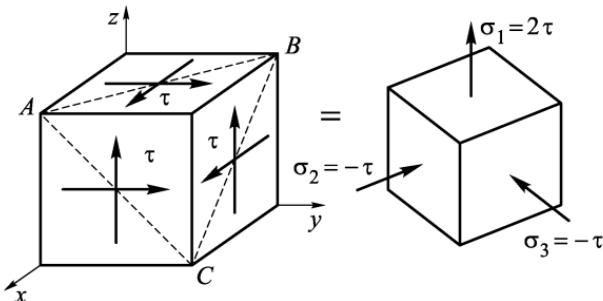


Рис. 11.5

Таким образом, это напряженное состояние сводится к показанному справа на рис. 11.5 трехосному растяжению–сжатию.

**11.1.4.** Полученные в этом разделе соотношения допускают удобную векторно-матричную формулировку. Для этого введем векторы  $\mathbf{v}$  — единичной нормали к площадке и  $\mathbf{p}_\nu$  — полного напряжения на этой площадке, а также матрицу  $T_\sigma$  — тензора напряжений, составленную из компонентов напряженного состояния:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_\nu = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}, \quad T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (11.1.15)$$

Тогда соотношение (11.1.4) примет вид  $\mathbf{p}_\nu = T_\sigma \mathbf{v}$ . Выражение (11.1.5) определяет  $\sigma_\nu = (\mathbf{p}_\nu, \mathbf{v})$  как скалярное произведение векторов  $\mathbf{p}_\nu$  и  $\mathbf{v}$ . Систему (11.1.9) можно записать в форме  $T_\sigma \mathbf{v} = \sigma \mathbf{v}$ , которая с точностью до обозначений совпадает с алгебраической задачей на собственные значения, имеющей в традиционных для линейной алгебры обозначениях вид:  $Ax = \lambda x$  ( $A$  — матрица,  $x$  — вектор,  $\lambda$  — собственное значение).

Отметим, что напряженное состояние в точке относится к таким объектам, которые в математике называются *тензорами* и

являются развитием понятия *вектор*. Не вдаваясь в подробности, заметим, что вектор имеет один инвариант преобразования координат, т.е. одну величину, а именно — длину вектора, которая не зависит от выбора системы координат. У тензора второго ранга, каковым является тензор напряжений  $T_\sigma$ , есть уже три инварианта  $J_1, J_2, J_3$ .

## 11.2. Круговая диаграмма Мора

**11.2.1.** Если для векторов разработаны простые и наглядные геометрические образы, то для тензоров в силу их большей сложности такого пока не удалось добиться. Из известных геометрических представлений тензора напряжений наиболее удачное, на наш взгляд, разработал О. Мор (1882). Он предложил каждой площадке, проходящей через заданную точку тела и определенной нормалью  $v$ , сопоставлять точку на плоскости

$\sigma_v \tau_v$  с координатами, равными действующим на этой площадке нормальному  $\sigma_v$  и касательному  $\tau_v$  напряжениям. Это соответствие показано на рис. 11.6. Плоскость  $\sigma_v \tau_v$  мы далее будем называть *плоскостью Мора*.

Найдем сначала, какие же точки соответствуют площадкам, нормальным к той главной площадке, на которой действует  $\sigma_2$ . Эти площадки параллельны  $\sigma_2$  и вместе с площадками действия  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  они выделяют элементарную приз-

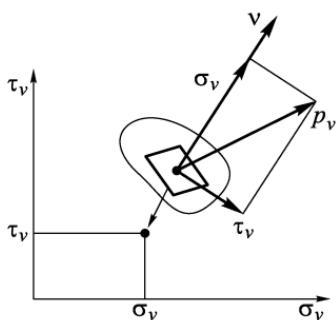


Рис. 11.6

му, показанную на рис. 11.7 а. На рис. 11.7 б показан вид на нее вдоль оси  $z$ . Проецируя силы, действующие на эту призму, на направления  $\sigma_v$  и  $\tau_v$ , получаем условия ее равновесия в форме

$$\begin{aligned}\sigma_v ds dz - \sigma_1 dy dz \cos \alpha - \sigma_3 dx dz \sin \alpha &= 0, \\ \tau_v ds dz - \sigma_1 dy dz \sin \alpha + \sigma_3 dx dz \cos \alpha &= 0.\end{aligned}$$

Так как  $dx = ds \sin \alpha$ ,  $dy = ds \cos \alpha$ , то из этих соотношений после сокращения на  $dz ds$  получаем

$$\begin{aligned}\sigma_v &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha, \\ \tau_v &= (\sigma_1 - \sigma_3) \sin \alpha \cos \alpha.\end{aligned}\tag{11.2.1}$$

Перейдем в этих соотношениях к тригонометрическим функци-

ям угла  $2\alpha$ , имея в виду, что

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha),$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha), \quad \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha.$$

Тогда

$$\sigma_\nu = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha,$$

$$\tau_\nu = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha. \quad (11.2.2)$$

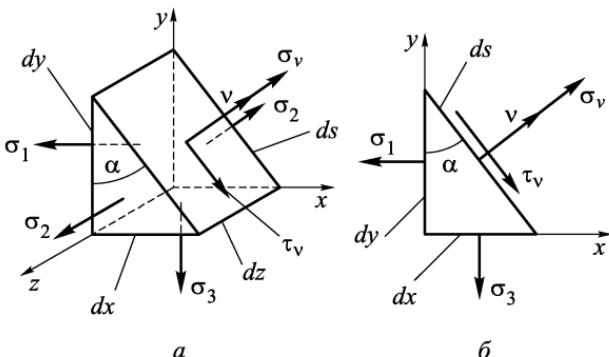


Рис. 11.7

Исключим из этих соотношений  $2\alpha$ . Для этого в первом из них перенесем первое слагаемое из правой части в левую, возведем оба соотношения в квадрат и сложим. В результате получим

$$\left( \sigma_\nu - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau_\nu^2 = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2. \quad (11.2.3)$$

Сравним это выражение с уравнением окружности  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ , которое на плоскости  $xy$  определяет окружность радиусом  $r$  с центром в точке  $x_0, y_0$ . Видно, что уравнению (11.2.3) соответствует на плоскости Мора окружность с центром на оси  $\sigma_\nu$  и радиусом  $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ . На

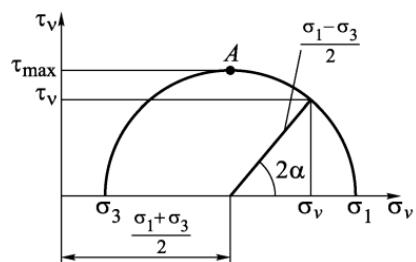


Рис. 11.8

рис. 11.8 это окружность, проходящая через точки, соответствующие площадкам действия главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ . Рассматривая точно так же площадки, параллельные главным

напряжениям  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , можно убедиться, что соответствующие им точки на плоскости Мора лежат на окружностях, проходящих соответственно через точки  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  и  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  на оси  $\sigma_v$ . Все три эти окружности показаны на рис. 11.9 и образуют круговую диаграмму Мора напряженного состояния в точке. Можно показать, что произвольно ориентированным площадкам соответствуют точки, которые лежат в области, заключенной между окружностями круговой диаграммы. На рис. 11.9 эта область заштрихована.

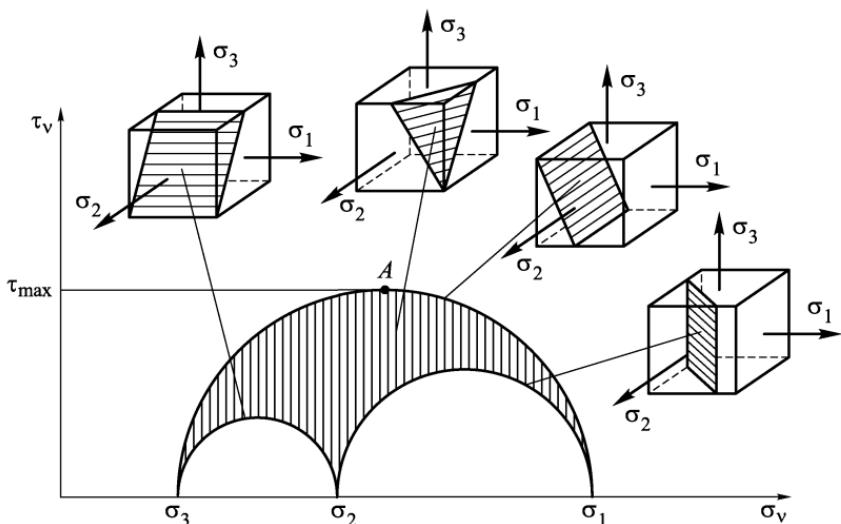


Рис. 11.9

Из изложенного наиболее важны два следующих заключения:

1. Площадкам, параллельным одному из главных напряжений, соответствуют точки, лежащие на той окружности круговой диаграммы, которая проходит через два других главных напряжения.

2. Максимальное касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (11.2.4)$$

Это напряжение действует на площадке, которой соответствует точка  $A$  плоскости Мора. Так как эта точка лежит на большой окружности круговой диаграммы, то площадка действия  $\tau_{\max}$  параллельна  $\sigma_2$ . Обратим внимание также на то, что углу  $\alpha$  между такими площадками и первой главной площадкой (см. рис. 11.7) соответствует угол  $2\alpha$  на диаграмме Мора (см. рис. 11.8). Следовательно, так как для точки  $A$  (см. рис. 11.8)

$2\alpha = 90^\circ$ , площадка действия  $\tau_{\max}$  равнонаклонена к площадкам, где действуют  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ , т.е. образует с этими площадками угол  $45^\circ$ .

**11.2.2.** Построим диаграммы Мора для некоторых характерных состояний.

**Центральное растяжение–сжатие бруса.** Выделим из бруса, находящегося в состоянии центрального растяжения или сжатия, элементарный кубик так, чтобы две его грани совпадали с поперечными сечениями. В этих гранях действует напряжение  $\sigma_x$ . В четырех остальных гранях, которые являются продольными сечениями бруса, в силу гипотезы о ненадавливаемости продольных волокон бруса нормальные напряжения не возникают. Поэтому главные напряжения будут: для растяжения ( $\sigma_x > 0$ ) —  $\sigma_1 = \sigma_x$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = 0$ , а для сжатия ( $\sigma_x < 0$ ) —  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ ,

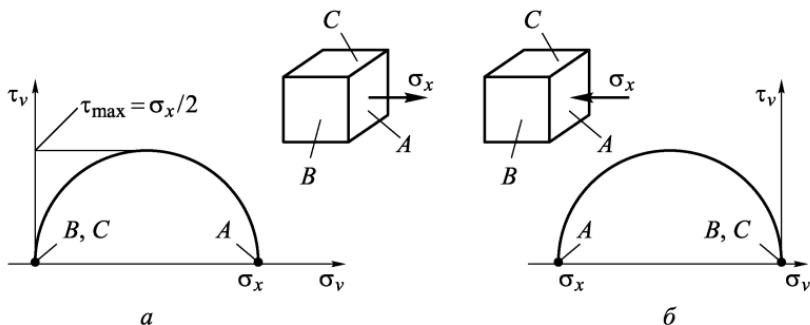


Рис. 11.10

$\sigma_3 = \sigma_x$ . Соответствующие диаграммы показаны на рис. 11.10. Из них сразу следует известный из разд. 4.8 результат: для центрального растяжения–сжатия  $\tau_{\max} = \frac{1}{2}\sigma_x$ .

**Двухосное растяжение.** Для кубика, находящегося в состоянии двухосного растяжения, если  $\sigma_x > \sigma_y$ , то  $\sigma_1 = \sigma_x$ ,  $\sigma_2 = \sigma_y$ ,  $\sigma_3 = 0$ . На рис. 11.11 показано это напряженное состояние и соответствующая ему диаграмма Мора, на которой помечены точки, соответствующие площадкам  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

**Чистый сдвиг.** На рис. 11.12 показано напряженное состояние чистого сдвига и эквивалентное ему двухосное растяжение–

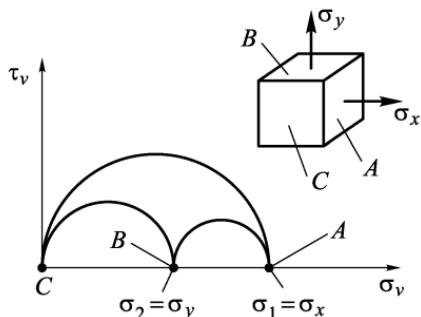


Рис. 11.11

сжатие, а также соответствующая этим состояниям диаграмма Мора.

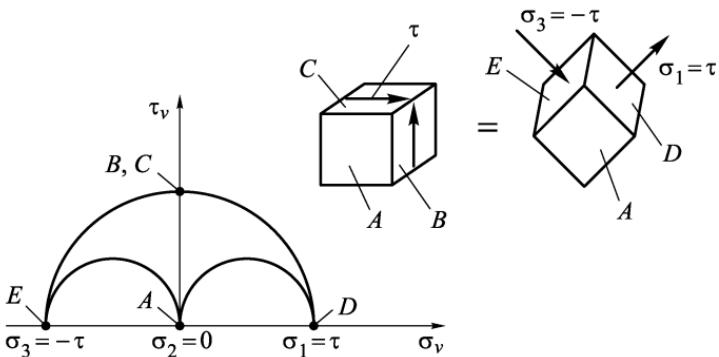


Рис. 11.12

### 11.2.3. Общий случай нагружения бруса.

В подавляющем большинстве случаев при анализе напряженного состояния можно так выделить элементарный кубик, чтобы одна из его площадок оказалась главной. Так, в общем случае нагружения бруса в точках его поперечного сечения всегда можно найти нормальное  $\sigma_x$  и касательное  $\tau_x$  напряжения. Причем  $\sigma_x$  будет связано с действием продольной силы  $N$  и изгибающих моментов  $M_z$  и  $M_y$ , а  $\tau_x$  — с перерезывающими силами  $Q_y$ ,  $Q_z$  и крутящим моментом  $M_k$ . Подробно этот вопрос обсуждался в разделах 9.1, 9.2.

Выделим около точки  $A$  поперечного сечения бруса элементарный кубик так, как это показано на рис. 11.13. Две грани кубика должны лежать в поперечных сечениях. Из оставшихся четырех граней, которые соответствуют продольным сечениям бруса, две выберем так, чтобы они были нормальны  $\tau_x$ , а две — параллельны. Полученное напряженное состояние показано на

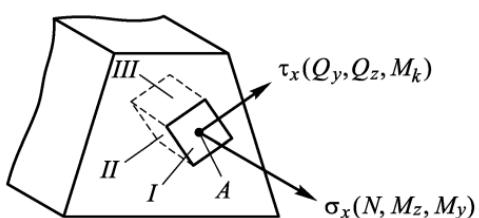


Рис. 11.13

рис. 11.14 *a*. При этом учтено свойство парности касательных напряжений и то, что в продольных сечениях бруса *II* и *III* нормальные напряжения отсутствуют, так как предполагается, что продольные волокна бруса друг на друга не давят. Диаграмма Мора для этого состояния показана на рис. 11.14 *б*. Она постро-

ена по трем точкам  $I$ ,  $II$ ,  $III$ , соответствующим трем граням элементарного кубика. Так как на грани  $III$  нет касательных напряжений, то она является главной площадкой. Тогда площадки  $I$  и  $II$  нормальны к главной площадке. А это значит, что соответствующие им точки лежат на одной из окружностей диаграммы Мора. Центром этой окружности является точка  $\sigma_\nu = \frac{1}{2}\sigma_x$  на оси  $\sigma_\nu$ , а ее радиус  $R = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sigma_x\right)^2 + \tau_x^2}$ .

Точки пересечения этой окружности с осью  $\sigma_\nu$  соответствуют еще двум главным площадкам. При этом одно из действующих на них главных напряжений будет обязательно положительным, а другое — отрицательным. Имея в виду, что главное напряжение на площадке  $III$  равно нулю, получаем, что в общем случае нагружения бруса

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x}{2} \pm R = \frac{\sigma_x}{2} \pm \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_x^2}, \quad \sigma_2 = 0. \quad (11.2.5)$$

Теперь, чтобы полностью построить круговую диаграмму, остается только провести окружности через точки  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , а также  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  оси  $\sigma_\nu$ .

**11.2.4.** Общий случай напряженного состояния с одной известной главной площадкой показан на рис. 11.15 *a*. На рис. 11.15 *b* дана соответствующая этому случаю круговая диаграмма. Она построена с помощью рассуждений, ана-

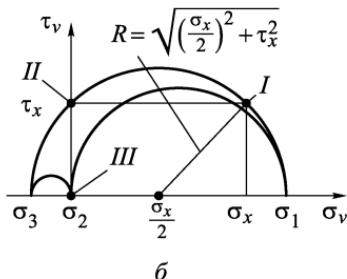
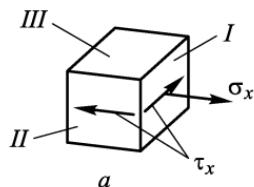


Рис. 11.14

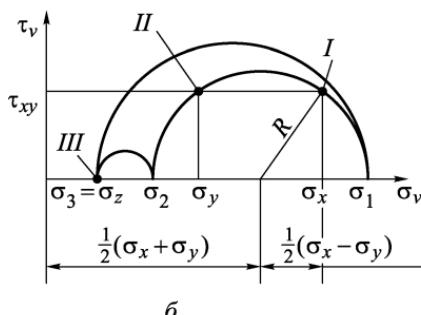
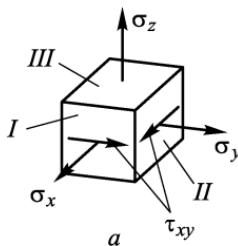


Рис. 11.15

логичных проведенным в п. 11.2.3, для следующих соотношений между нормальными напряжениями:

$$\sigma_x > \sigma_y > \sigma_z \quad \text{и} \quad \sigma_z < \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

Из рисунка видно, что

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm R = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \\ \sigma_3 &= \sigma_z. \end{aligned} \quad (11.2.6)$$

При других соотношениях между  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  индексы у главных напряжений в (11.2.6) могут измениться. Диаграммы Мора для двух других возможных случаев, когда первое из равенств (11.2.6) определит главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  или  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , читатель может легко воспроизвести самостоятельно.

### 11.3. Закон Гука и потенциальная энергия деформации при сложном напряженном состоянии

**11.3.1.** В разд. 5.3 для получения соотношения закона Гука при двухосном растяжении–сжатии был использован принцип суперпозиции. Воспользуемся этим же принципом в общем случае напряженного состояния. Для кубика с единичными ребрами оно может быть представлено как наложение трех одноосных состояний растяжения–сжатия вдоль координатных осей и трех состояний чистого сдвига в координатных плоскостях (рис. 11.16).

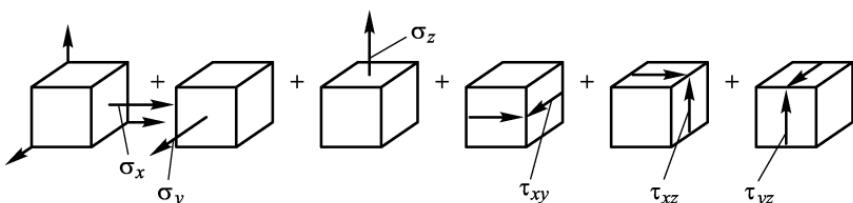


Рис. 11.16

В первых трех из этих состояний ребра кубика удлиняются (или укорачиваются) вдоль координатных осей, а углы между ребрами не меняются. Так как длины ребер равны 1, то их удлинения равны относительным удлинениям  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\varepsilon_z$ . Ограничимся изотропным материалом и рассмотрим подробно удлинение ребра, направленного вдоль оси  $x$ . При действии  $\sigma_x$  оно в пределах закона Гука равно  $\frac{\sigma_x}{E}$ . При действии  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  вследствие

эффекта Пуассона это ребро получает удлинения  $-\mu\varepsilon_y = -\mu\frac{\sigma_y}{E}$  и  $-\mu\varepsilon_z = -\mu\frac{\sigma_z}{E}$ . Для растягивающих  $\sigma_z$  и  $\sigma_y$  эти удлинения отрицательны, т.е. являются укорочениями. При одновременном действии  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$  удлинения суммируются:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_z}{E} \quad \text{или} \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)].$$

Аналогичные рассуждения для ребер, направленных вдоль осей  $y$  и  $z$ , приводят в итоге к трем соотношениям закона Гука:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned} \quad (11.3.1)$$

В последних из трех показанных на рис. 11.16 элементарных состояний происходят только деформации сдвига в одной из координатных плоскостей. И при линейно-упругих деформациях им соответствуют соотношения закона Гука (см. разд. 5.2):

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \quad (11.3.2)$$

**11.3.2.** Закону Гука (11.3.1), (11.3.2) легко придать матричную форму, если ввести векторы, составленные из компонентов напряженного и деформированного состояний. Эта форма имеет вид

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}. \quad (11.3.3)$$

Заметим, что для любого материала, в том числе и для анизотропного, закон Гука означает линейную связь между компонентами деформаций и напряжений. Поэтому для анизотропно-

го материала соотношения закона Гука должны иметь форму

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}. \quad (11.3.4)$$

Коэффициенты  $A_{ik}$ , составляющие матрицу упругих характеристик, называются *коэффициентами податливости*. Отметим, что матрица упругих характеристик симметрическая, т.е.  $A_{ik} = A_{ki}$ .

Проще всего это свойство доказать на основе теоремы о взаимности работ (см. разд. 9.7). Так, например, для кубика с ребрами  $dx, dy, dz$  работа силы  $\sigma_x dy dz$  на перемещении  $A_{12}\sigma_y dz$ , вызванном действием силы  $\sigma_y dx dz$ , равна работе силы  $\sigma_y dx dz$  на перемещении  $A_{21}\sigma_x dy$ , вызванном силой  $\sigma_x dx dz$ , т.е.

$$\sigma_x dy dz \cdot A_{12}\sigma_y dz = \sigma_y dx dz \cdot A_{21}\sigma_x dy.$$

Отсюда сразу следует, что  $A_{12} = A_{21}$ .

Этот же факт можно понять и из других соображений. Так же, как и для напряженного состояния, можно ввести тензор деформаций, составленный из компонент деформированного состояния:

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{yx} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

Он так же, как и  $T_\sigma$  — симметричен. Тогда соотношения закона Гука (11.3.4) можно записать в форме  $T_\varepsilon = AT_\sigma$ , где  $A$  — тензор упругих характеристик. Он должен иметь более высокий ранг, чем  $T_\varepsilon$  и  $T_\sigma$ . Но так как  $T_\varepsilon$  и  $T_\sigma$  симметричны, то и  $A$  также симметричен.

Заметим, что для изотропного материала коэффициенты  $A_{ik}$  не зависят от выбора осей координат. Но не трудно понять, что для анизотропного материала такая зависимость должна появиться. Это обстоятельство подчеркивает тензорный характер совокупности коэффициентов податливости.

**11.3.3.** Рассмотрим потенциальную энергию деформаций  $d\Pi$ , накопившуюся в элементарном кубике объемом  $dV$  с ребрами  $dx, dy, dz$ . Под действием напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}$  он получает относительные деформации  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{zx}$ . В процессе деформаций сила  $\sigma_x dy dz$  совершают упругую работу на пути

$\varepsilon_x dx$ , сила  $\tau_{xy} dy dz$  — на пути  $\gamma_{xy} dx$ , сила  $\sigma_y dx dz$  — на пути  $\varepsilon_y dy$  и т.д. Эта работа в силу закона сохранения энергии, который соблюдается при упругой деформации, аккумулируется в объеме  $dV$  в виде  $d\Pi$ . Поэтому

$$d\Pi = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + 2\tau_{xy} \gamma_{xy} + 2\tau_{yz} \gamma_{yz} + 2\tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz.$$

Тогда удельная потенциальная энергия деформаций (энергия в единице объема) будет

$$U = \frac{d\Pi}{dV} = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + 2\tau_{xy} \gamma_{xy} + 2\tau_{yz} \gamma_{yz} + 2\tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (11.3.5)$$

Если материал изотропный, то, подставив сюда соотношения (11.3.1), (11.3.2), получим выражение удельной потенциальной энергии деформации через напряжения:

$$U = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y)] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \quad (11.3.6)$$

Если напряженное состояние приведено к главным осям, то по координатным площадкам действуют только главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Тогда

$$U = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]. \quad (11.3.7)$$

При анализе условий перехода материала в пластическое состояние оказывается удобным рассматривать напряженное состояние как суперпозицию двух состояний, первое из которых является равномерным всесторонним растяжением, а второе дополняет его до заданного состояния. Это разделение показано на рис. 11.17 для кубика с единичными ребрами.

Напряжение  $\sigma$  подбирается так, чтобы изменения объемов первого  $\Delta V_0$  и исходного  $\Delta V$  состояний совпадали.

Если рассмотреть кубик с единичными ребрами, то для него

$$\Delta V = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1 \cdot 1 \cdot 1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3.$$

Так как наш анализ касается конструкционных материалов, для которых относительные деформации малы ( $\varepsilon_i \ll 1, i = 1, 2, 3$ ), то

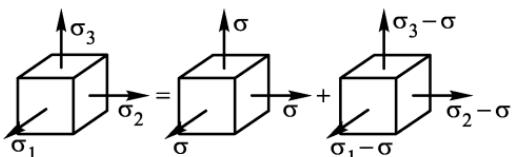


Рис. 11.17

с достаточной точностью  $\Delta V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ . После подстановки в это выражение соотношений закона Гука (11.3.1) получаем, что

$$\Delta V = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (11.3.8)$$

В первом напряженном состоянии все главные напряжения равны  $\sigma$ . Поэтому формула (11.3.8) для него дает

$$\Delta V_0 = \frac{1-2\mu}{E} \cdot 3\sigma. \quad (11.3.9)$$

Тогда из условия  $\Delta V = \Delta V_0$  имеем

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \quad (11.3.10)$$

Потенциальная энергия первого состояния — энергия изменения объема по (11.3.7) равна

$$U_0 = \frac{1-2\mu}{2E} \cdot 3\sigma^2 = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (11.3.11)$$

Во втором напряженном состоянии объем не изменяется, а меняется форма — кубик вследствие деформации становится параллелепипедом того же объема. Тогда потенциальная энергия этого состояния — энергия изменения формы  $U_\Phi$  подсчитывается как разность  $U$  и  $U_0$ . С учетом выражений (11.3.7) и (11.3.11) после простых преобразований получим

$$\begin{aligned} U_\Phi = U - U_0 &= \frac{1+\mu}{3E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1] = \\ &= \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \end{aligned} \quad (11.3.12)$$

Эту же формулу можно получить, если учесть, что силы напряженного состояния изменения объема не совершают работы на деформациях состояния изменения формы и наоборот. Поэтому взаимные работы отсутствуют, и  $U_\Phi$  можно подсчитать, подставив в формулу (11.3.7) выражения для главных напряжений второго состояния  $\sigma_{1\Phi} = \sigma_1 - \sigma$ ,  $\sigma_{2\Phi} = \sigma_2 - \sigma$ ,  $\sigma_{3\Phi} = \sigma_3 - \sigma$ . Однако выкладки в этом случае более громоздки.

## 11.4. Гипотезы прочности

**11.4.1.** Расчет на прочность при одноосных напряженных состояниях растяжения или сжатия основывается на том, что именно такие состояния моделируются в стандартных экспериментах при определении механических характеристик материала, рассмотренных в гл. 3. Совпадение расчетного и экспериментального напряженных состояний позволяет, исходя из результатов эксперимента, прогнозировать поведение материала в рассчитываемой конструкции.

Перенесение такого подхода на сложные напряженные состояния потребует исследования поведения материала по меньшей мере в условиях трехосного растяжения–сжатия, к которому сводится любое сложное напряженное состояние. Здесь мы попадаем в качественно новую ситуацию, связанную с неоднозначностью напряженного состояния. Так, для получения механических характеристик материала при одноосном растяжении–сжатии минимально необходимо испытать только два образца — один на растяжение, а другой на сжатие. Для получения полной информации о поведении материала при трехосном растяжении–сжатии нужны испытания при всевозможных сочетаниях напряжений по разным направлениям. А таких сочетаний бесконечное множество.

Главное, что нас интересует с точки зрения прочности, это напряжения, при которых в материале наступают качественные изменения механических свойств, т.е. когда в пластичном материале наступает текучесть, а в хрупком — разрушение. Такие напряженные состояния мы будем называть *пределыми*. При внешнем разнообразии наблюдаемых в эксперименте видов предельных состояний все они, по существу, могут быть сведены к трем видам. Первый из них наблюдается при испытаниях образцов из хрупких материалов на растяжение. Это разрушение отрыва по плоскости, нормальной по отношению к растягивающим напряжениям. Будем называть такое предельное состояние *хрупким отрывом*. Второй вид предельного состояния соответствует разрушению по плоскостям действия максимальных касательных напряжений хрупких образцов при сжатии, т.е. по плоскостям максимальных сдвигов. Это предельное состояние *хрупкого сдвига*. И, наконец, предельное состояние текучести, которое возникает при испытаниях образцов из пластичного материала и сопровождается пластическими деформациями за счет скольжения по плоскостям действия максимальных касательных напряжений.

Следует помнить, что хрупкий материал при определенных напряженных состояниях может демонстрировать пластические свойства. Так, например, при испытаниях чугуна и мрамора на растяжение и сжатие в условиях высокого всестороннего давления наблюдается хорошо выраженная текучесть. А при испытаниях на растяжение пластичного образца наблюдаются последовательно все три вида предельных состояний. Сначала наступает текучесть, сопровождающаяся появлением на поверхности образца линий Людерса–Чернова, которые указывают на поверхности скольжения. Далее, после образования шейки в ее узкой части происходит хрупкий отрыв с появлением около оси образца концентрической линзообразной трещины. Это вызвано тем, что около оси образца образуется состояние трехосного ра-

стяжения. И, наконец, по периферии шейки происходит хрупкий сдвиг по конической поверхности под углом  $45^\circ$  к оси образца. Эти этапы показаны последовательно на рис. 11.18. Все это еще раз демонстрирует условность деления материалов на хрупкие и пластичные.

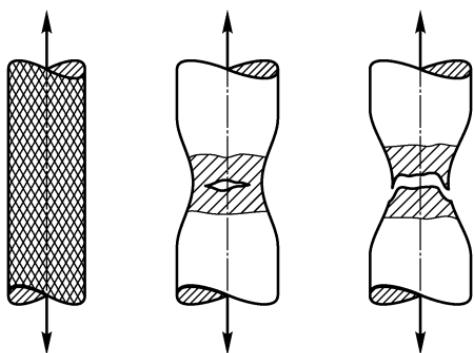


Рис. 11.18

такого эксперимента изобразить в пространстве  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ , то ему будет соответствовать продвижение вдоль выходящего из начала координат луча от точки  $A^0$  с координатами  $\sigma_x^0$ ,  $\sigma_y^0$  и  $\sigma_z^0$  до точки  $A^{\text{пред}}$  с координатами  $\sigma_x^{\text{пред}}$ ,  $\sigma_y^{\text{пред}}$ ,  $\sigma_z^{\text{пред}}$  (рис. 11.19). Задаваясь для различных образцов различными сочетаниями начальных напряжений, можно получить в пространстве  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,

$\sigma_z$  другие точки, соответствующие предельным напряженным состояниям. Геометрическое место таких точек называется *поверхностью предельных состояний*. Эта поверхность дает полную информацию о прочностных свойствах материала, т.е. зная ее, можно для любого напряженного состояния судить о том, допустимо или недопустимо оно для данного материала.

Используя предоставляемые математикой методы аппроксимации (приближенного построения), можно с достаточной точностью по-

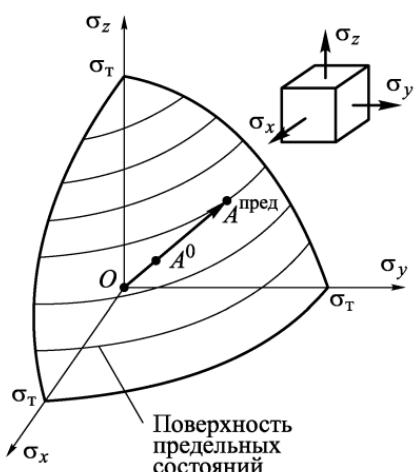


Рис. 11.19

строить поверхность предельных состояний по конечному числу ее точек, т.е. по результатам конечного числа испытаний. Но даже такое приближенное построение потребует значительного

числа экспериментов. Кроме того, имеются чисто технические трудности в создании трехосных напряженных состояний. Единственным из них, которое можно создать достаточно легко, является состояние всестороннего равномерного сжатия. Чтобы его реализовать, достаточно погрузить кубический, сферический или цилиндрический образец в жидкость и создать в ней высокое давление, которое и явится напряжением равномерного сжатия. Испытывая образцы на одноосное растяжение в условиях всестороннего сжатия  $p$ , можно реализовать предельное напряженное состояние, у которого  $\sigma_2 = \sigma_3 = -p$ ,  $\sigma_1 = \sigma_0$ . Такие испытания уже достаточно сложно технически осуществить. При попытке же реализовать предельное напряженное состояние со всеми тремя растягивающими главными напряжениями мы сталкиваемся уже с такими сложностями, которые пока не удалось преодолеть. Таким образом, пытаясь экспериментально установить поверхность предельных состояний, мы сможем в результате значительного числа сложных экспериментов построить лишь некоторые ее участки.

**11.4.2.** Выход из создавшегося положения был найден на пути создания гипотез о механизмах, причинах или условиях возникновения предельного состояния — так называемых гипотез (теорий) прочности.

Обобщим на случай сложного напряженного состояния понятие запаса прочности. Для напряженного состояния  $\sigma_x^0$ ,  $\sigma_y^0$  и  $\sigma_z^0$ , соответствующего точке  $A^0$  на рис. 11.19, запасом прочности  $n$  назовем отношение отрезков  $OA^{\text{пред}}$  и  $OA^0$ . Поэтому

$$n = \frac{OA^{\text{пред}}}{OA^0} = \frac{\sigma_x^{\text{пред}}}{\sigma_x^0} = \frac{\sigma_y^{\text{пред}}}{\sigma_y^0} = \frac{\sigma_z^{\text{пред}}}{\sigma_z^0}. \quad (11.4.1)$$

В дальнейшем все напряженные состояния, соответствующие в пространстве  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  точкам на луче, который выходит из начала координат, будем называть *подобными*. Подобными, например, являются все напряженные состояния, соответствующие точкам на луче  $OA^0A^{\text{пред}}$  на рис. 11.19. Таким образом, напряженные состояния  $\sigma_x^{(1)}, \sigma_y^{(1)}, \sigma_z^{(1)}$  и  $\sigma_x^{(2)}, \sigma_y^{(2)}, \sigma_z^{(2)}$  подобны, если  $\frac{\sigma_x^{(1)}}{\sigma_x^{(2)}} = \frac{\sigma_y^{(1)}}{\sigma_y^{(2)}} = \frac{\sigma_z^{(1)}}{\sigma_z^{(2)}}$ .

Два напряженных состояния назовем *равноопасными*, если у них одинаковый запас прочности.

Подчеркнем, что равноопасными являются неподобные состояния. Поэтому, если имеется критерий равноопасности, то появляется возможность перейти от сложного напряженного состояния к равноопасному состоянию одноосного растяжения. А для одноосного растяжения из эксперимента известно предельное состояние, поэтому легко подсчитать его запас прочности,

который в силу равноопасности равен запасу прочности также и для сложного состояния.

Таким образом, гипотезы прочности должны устанавливать критерий равноопасности. Поэтому их обычно удобно формулировать в виде критерия равноопасности сложного и одноосного напряженных состояний, при этом последнее называют *эквивалентным напряженным состоянием*, а отличное от нуля главное напряжение одноосного состояния называют *эквивалентным напряжением* и обозначают  $\sigma_{\text{экв}}$ .

**11.4.3.** Теория максимальных нормальных напряжений (первая теория) использует следующий критерий равноопасности: два напряженных состояния равноопасны, если у них равны максимальные по абсолютной величине нормальные напряжения. Поэтому для сложного напряженного состояния с главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  равноопасными будут: при преимущественном растяжении ( $\sigma_1 > |\sigma_3|$ ) — одноосное растяжение с  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1$ , а при преимущественном сжатии ( $|\sigma_3| > \sigma_1$ ) — одноосное сжатие с  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_3$ . Таким образом, в этой теории прочности

$$\sigma_{\text{экв}}^I = \begin{cases} \sigma_1 & \text{при } \sigma_1 > |\sigma_3|, \\ \sigma_3 & \text{при } |\sigma_3| > \sigma_1. \end{cases} \quad (11.4.2)$$

Сама формулировка критерия равноопасности построена здесь так, чтобы использовать условие прочности для одноосного растяжения–сжатия (см. разд. 4.9):

$$-|\sigma_{\text{пред.с}}| < \sigma_{\text{экв}}^I < \sigma_{\text{пред.р.}}$$

Теория максимальных нормальных напряжений отражает с современной точки зрения те инженерные подходы к расчету на прочность, которые были предложены еще Г. Галилеем и использовались до конца XIX века преимущественно английскими инженерами, когда недостаточно были еще разработаны вопросы прочности и анализа сложных напряженных состояний. В этой теории учитывается только наибольшее из главных напряжений, а влияние двух остальных главных напряжений полностью игнорируется. Поэтому трудно ожидать от нее хороших результатов в случаях, когда напряженное состояние существенно отличается от одноосного. Это и подтвердили эксперименты. Так, для состояния чистого сдвига, которое реализуется в эксперименте, например при кручении тонкостенных труб, предельное состояние достигается значительно раньше, чем предсказывает первая теория. В испытаниях же на равномерное всестороннее сжатие, когда  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$ , для большинства материалов не удается достичь предельного состояния даже при очень высоких напряжениях. А первая теория здесь предсказывает, что

предельное состояние достигается при  $p = \sigma_{tc}$  для пластичных или при  $p = \sigma_{vc}$  для хрупких материалов. Ввиду этого первой теории придавалось обычно историческое значение.

Однако в последние годы эта теория прочности получила применение для расчета прочности композитных материалов, подобных ориентированным стеклопластикам. Эти материалы называются материалами условно. По существу они представляют собой конструкцию, образованную двумя семействами высокопрочных волокон, которые ортогональны друг другу. Положение этих волокон друг относительно друга зафиксировано путем погружения их в значительно менее прочную и жесткую среду, так называемую матрицу (рис. 11.20). У стеклопластиков, например, матрицей, фиксирующей стекловолокна, является затвердевшая эпоксидная смола. В таком материале прочность при растяжении напряжениями  $\sigma_x$  определяется, в основном, прочностью волокон, расположенных вдоль оси  $x$  и практически не зависит от волокон по оси  $y$  и наоборот. Таким

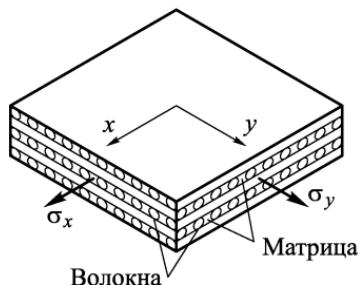


Рис. 11.20

образом, сама конструкция материала позволяет при расчете прочности вдоль одного из семейств волокон игнорировать напряжения в ортогональном направлении. Разумеется, сказанное верно для напряженных состояний, главные напряжения у которых направлены вдоль волокон. А выполнение именно этого условия позволяет наиболее эффективно использовать прочностные свойства ориентированных композитных материалов.

Для бруса (см. п. 11.2.3)  $\sigma_{1,3} = \frac{1}{2} (\sigma_x \pm \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_x^2})$ . Учитывая это, формулу (11.4.2) для  $\sigma_{\text{экв}}$  при расчете бруса можно свести к следующей:

$$\sigma_{\text{экв}}^I = \frac{1}{2} (\sigma_x \pm \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_x^2}). \quad (11.4.3)$$

Здесь знак « $-$ » берется в случае преимущественного сжатия, т.е. при  $\sigma_x < 0$ .

**11.4.4. Теория наибольших деформаций** (вторая теория) связывает переход в предельное состояние с моментом, когда наибольшая деформация достигает определенного предельного значения, которое устанавливается из испытаний на растяжение (или сжатие). Поэтому в ней формулируется следующий критерий равнопасности: два напряженных состояния

равноопасны, если у них равны наибольшие относительные деформации.

Для сложного напряженного состояния с главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , когда  $\sigma_1 > |\sigma_3|$  (преимущественное растяжение) наибольшая деформация, как следует из разд. 11.3, определяется формулой (11.3.1) и равна  $\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$ . По этой же формуле для равноопасного эквивалентного состояния простого растяжения  $\varepsilon_1^{\text{экв}} = \frac{1}{E}\sigma_{\text{экв}}$ . По критерию равноопасности  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{\text{экв}}$ , поэтому

$$\sigma_{\text{экв}}^{II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3). \quad (11.4.4)$$

А условие прочности здесь имеет вид

$$\sigma_{\text{экв}}^{II} < \sigma_{\text{пред.р.}}$$

При преимущественном сжатии, т.е. когда  $|\sigma_3| > \sigma_1$ , условие равноопасности требует, чтобы  $\varepsilon_3 = \varepsilon_3^{\text{экв}}$ . Тогда условие прочности принимает вид

$$|\sigma_{\text{экв}}^{II}| = |\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)| < |\sigma_{\text{пред.с.}}|. \quad (11.4.5)$$

Вторая теория прочности также слабо соответствует экспериментальным данным. Единственная область, где она удовлетворительно совпадает с экспериментом, это разрушение хрупких материалов при сложных напряженных состояниях преимущественного растяжения.

Для бруса, в котором  $\sigma_{1,3} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_x^2})$ ,  $\sigma_2 = 0$  формула (11.4.4) приводит к следующему условию прочности:

$$\sigma_{\text{экв}}^{II} = \frac{1-\mu}{2}\sigma_x \pm \frac{1+\mu}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_x^2} < \sigma_{\text{пред.р.}} \quad (11.4.6)$$

Вторая теория прочности развивает предложение Ф. Мариотта, высказанное им еще в XVII веке. Наибольшее распространение под влиянием трудов Ж. Понселе и Б. Сен-Венана она получила во второй половине XIX века в работах французских инженеров.

**11.4.5.** Теория максимальных касательных напряжений (третья теория) отражает тот наблюдаемый в эксперименте факт, что пластическое течение является результатом скольжения материала по плоскостям действия максимальных касательных напряжений. В пп. 3.2.5, 4.7.2 мы уже обращали внимание читателя на это обстоятельство и отмечали также, что линии Чернова–Людерса являются следами поверхностей скольжения на поверхности образца. С учетом этого третья теория строится на следующем критерии равноопасности

сти: два напряженных состояния равноопасны, если у них равны максимальные касательные напряжения.

Для сложного напряженного состояния  $\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ . По этой же формуле для равноопасного эквивалентного состояния одноосного растяжения ( $\sigma_1 = \sigma_{\text{экв}}, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) имеем  $\tau_{\max}^{\text{экв}} = \frac{1}{2}\sigma_{\text{экв}}$ . По критерию равноопасности,  $\tau_{\max}^{\text{экв}} = \tau_{\max}$ . Поэтому

$$\sigma_{\text{экв}}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (11.4.7)$$

Состояние текучести, по этой теории, не наступит, пока

$$\sigma_{\text{экв}}^{III} < \sigma_t, \quad (11.4.8)$$

и возникнет при

$$\sigma_{\text{экв}}^{III} = \sigma_t.$$

Заметим, что  $\sigma_{\text{экв}}^{III}$  всегда положительно, и поэтому его сравнивают с пределом текучести при растяжении  $\sigma_{tr}$ . Но для большинства пластичных материалов пределы текучести при растяжении и сжатии одинаковы и для них третья теория достаточно надежно предсказывает наступление текучести.

Исключение составляют напряженные состояния, которые близки к всестороннему растяжению–сжатию, когда пластичный материал начинает вести себя как хрупкий. К сожалению, экспериментальное определение границ этого перехода наталкивается на такие технические трудности, которые пока не удалось преодолеть.

Определенным утешением служит то, что такого рода напряженные состояния в конструкциях возникают крайне редко.

Следует заметить, что эта теория прочности дает удовлетворительные результаты и для описания разрушения хрупких материалов в тех случаях, когда разрушение путем отрыва невозможно и оно происходит за счет сдвига по плоскостям действия  $\tau_{\max}$ . Так разрушаются образцы из хрупких материалов при сжатии (см. п. 3.2.5, рис. 3.15 б). Таким образом, третья теория прочности позволяет рассматривать предельные состояния хрупкого сдвига и текучести с единой точки зрения.

Для бруса  $\sigma_{1,3} = \frac{1}{2} \left( \sigma_x \pm \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_x^2} \right)$ ,  $\sigma_2 = 0$ , и для него получаем из (11.4.7)

$$\sigma_{\text{экв}}^{III} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_x^2}. \quad (11.4.9)$$

Впервые роль касательных напряжений при разрушении отметил Ш. Кулон (1776). Связь пластического течения материалов с максимальными касательными напряжениями была экспериментально установлена французским инженером Треска

(Tresca, 1869). На основе его исследований Б. Сен-Венан сформулировал условие (11.4.9) как условие пластичности и построил основные уравнения теории пластичности. Поэтому третью теорию прочности часто называют теорией *Треска–Сен-Венана*.

**11.4.6.** Энергетическая теория (четвертая теория). Эксперименты показывают, что при пластическом течении материала коэффициент Пуассона  $\mu$  становится равным 0,5. А это значит, что при деформации течения объем материала не меняется, а меняется только форма. Это, в свою очередь, наводит на мысль, что при энергетическом анализе пластического течения определяющим фактором должна быть та часть потенциальной энергии деформации, которая связана с изменением формы. Отсюда и возник энергетический критерий равноопасности: два напряженных состояния равноопасны, если у них равны потенциальные энергии изменения формы.

Для сложного напряженного состояния эта энергия определяется формулой (11.3.12)

$$U_{\Phi} = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

По этой же формуле для простого растяжения с  $\sigma_1 = \sigma_{\text{ЭКВ}}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  получаем, что  $U_{\Phi}^{\text{ЭКВ}} = \frac{1+\mu}{6E} 2\sigma_{\text{ЭКВ}}^2$ . По критерию равноопасности,  $U_{\Phi} = U_{\Phi}^{\text{ЭКВ}}$ , откуда сразу следует, что

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (11.4.10)$$

Состояние текучести не наступит, пока

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV} < \sigma_{\text{т}}, \quad (11.4.11)$$

и возникнет, когда

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV} = \sigma_{\text{т}}.$$

Так же, как и третья теория, энергетическая теория прочности хорошо предсказывает появление пластического течения для материалов с одинаковыми пределами текучести при растяжении и сжатии, т.е. когда  $\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}} = \sigma_{\text{т}}$ . Но выражение для  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV}$  (11.4.10) в сравнении с  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{III}$  (11.4.7) имеет определенное преимущество, которое состоит в том, что все главные напряжения входят в него равноправно. Это позволяет отказаться от строгой их расстановки в порядке убывания и связать их с направлением координатных осей. Если координатные оси  $x$ ,  $y$  ориентированы так, что они совпадают с главными осями напряженного состояния, то  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV}$  можно записать в виде

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2}. \quad (11.4.12)$$

Для бруса, у которого  $\sigma_{1,3} = \frac{1}{2}\sigma_x \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sigma_x\right)^2 + \tau_x^2}$ , формула (11.4.10) после несложных преобразований сводится к следующей:

$$\sigma_{\text{экв}}^{IV} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_x^2}. \quad (11.4.13)$$

Сравнивая с  $\sigma_{\text{экв}}^{III}$  (11.4.9), видим, что для бруса третья и четвертая теории дают близкие значения для эквивалентного напряжения.

Первую попытку подойти к анализу предельного состояния с энергетической точки зрения предпринял Е. Бельтрами (1885), который предложил в качестве критерия равнопасности использовать энергию деформации. Но такой подход противоречил опытам, согласно которым при всестороннем равномерном сжатии в материале может накапливаться значительная потенциальная энергия деформации, но предельное состояние при этом не наступает. Поэтому польский ученый М.Т. Губер в 1904 г. предложил исключить из рассмотрения энергию изменения объема и использовать в качестве критерия текучести только ту часть энергии деформации, которая связана с изменением формы. Немецкий ученый Р. Мизес подошел к этому вопросу с другой точки зрения. Он предпринял поиск такого аналитического выражения для  $\sigma_{\text{экв}}$ , которое было бы близко к третьей теории, но было бы равноправно по отношению ко всем главным напряжениям. В результате Р. Мизес пришел к выражению (11.4.12).

Энергетическую теорию прочности часто называют теорией Губера–Мизеса.

**11.4.7.** Теория предельных состояний (пятая теория). Рассмотренные выше четыре теории прочности демонстрируют единый с методологической точки зрения подход к решению проблемы: выдвигается гипотеза о причине возникновения предельного состояния, которая в дальнейшем проверяется экспериментами. Не менее, а часто и более эффективным является так называемый феноменологический подход, когда теория строится на основе экспериментальных данных так, чтобы она не только могла бы охватить все возможные случаи, но и находилась бы в лучшем соответствии с этими данными. При построении теорий прочности впервые такой подход был использован О. Мором (1900). Он исходил из допущения, что из всех площадок с одинаковым по величине нормальным напряжением наиболее вероятно разрушение или текучесть на той, где окажется наибольшим касательное напряжение. А на плоскости Мора точки, соответствующие этим слабейшим площадкам, лежат на большой главной окружности круговой диаграммы Мора (см. рис. 11.9). Поэтому можно рассматривать только эту окружность и считать, что  $\sigma_2$  никак не влияет на предельное состояние.

По результатам экспериментов при различных сочетаниях  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  можно построить на плоскости Мора большие круги, соответствующие достигнутым в экспериментах предельным состояниям. Их огибающую, показанную на рис. 11.21, будем назы-

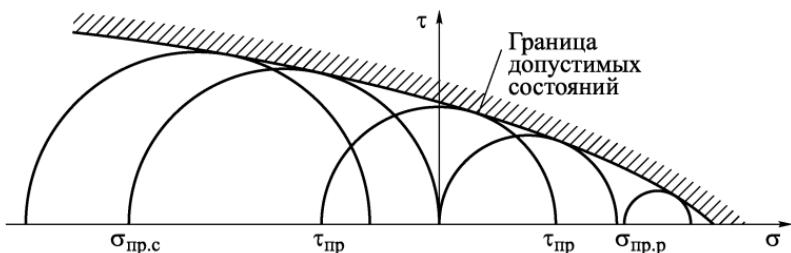


Рис. 11.21

вать *границей допустимых состояний*. Можно предположить, что для всех других неиспытанных напряженных состояний предельное состояние будет достигнуто, когда большой круг диаграммы Мора коснется границы допустимых состояний.

Наиболее просто можно приближенно построить границу допустимых состояний как касательную к диаграммам предельных состояний при растяжении и сжатии, как это показано на

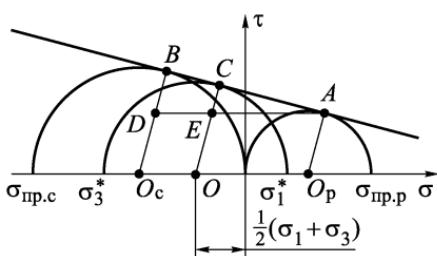


Рис. 11.22

рис. 11.22. Тогда для предельного состояния с  $\sigma_1^*$  и  $\sigma_3^*$ , главный круг которого имеет центр в точке  $O$  и касается границы допустимых состояний в точке  $C$ , можно записать соотношение, следующее из подобия треугольников  $ACE$  и  $ABD$ :

$$\frac{CE}{BD} = \frac{O_p O}{O_p O_c}. \quad (11.4.14)$$

Но

$$CE = OC - OE = \frac{1}{2}(\sigma_1^* - \sigma_3^*) - \frac{1}{2}\sigma_{\text{пред.р}},$$

$$BD = \frac{1}{2}\sigma_{\text{пред.с}} - \frac{1}{2}\sigma_{\text{пред.р}},$$

$$O_p O = \frac{1}{2}\sigma_{\text{пред.р}} - \frac{1}{2}(\sigma_1^* + \sigma_3^*),$$

$$O_p O_c = \frac{1}{2}\sigma_{\text{пред.р}} + \frac{1}{2}\sigma_{\text{пред.с}}.$$

Тогда из (11.4.14) после простых преобразований получаем, что в этом предельном состоянии

$$\sigma_1^* - \frac{\sigma_{\text{пред.р}}}{\sigma_{\text{пред.с}}} \sigma_3^* = \sigma_{\text{пред.р}}. \quad (11.4.15)$$

Во всех ранее рассмотренных теориях прочности предельное состояние достигалось при  $\sigma_{\text{экв}} = \sigma_{\text{пред.р}}$ . Единообразие будет сохранено, если и в этой теории ввести эквивалентное напряжение

$$\sigma_{\text{экв}}^V = \sigma_1 - k\sigma_3, \quad k = \frac{\sigma_{\text{пред.р}}}{\sigma_{\text{пред.с}}}. \quad (11.4.16)$$

Тогда предельное состояние достигается при  $\sigma_{\text{экв}}^V = \sigma_{\text{пред.р}}$ , а условие прочности примет вид  $\sigma_{\text{экв}}^V < \sigma_{\text{пред.р}}$ . Запас прочности подобно остальным теориям прочности можно подсчитать как  $n = \sigma_{\text{пред.р}}/\sigma_{\text{экв}}^V$ .

Наилучшие результаты теория Мора в рассмотренном приближении дает для таких напряженных состояний, предельные диаграммы для которых находятся между предельными кругами для растяжения и сжатия. Для этих состояний  $\sigma_1 > 0$ , а  $\sigma_3 < 0$ .

Для частного случая материалов, у которых  $\sigma_{\text{пред.р}} = \sigma_{\text{пред.с}}$ , формула (11.4.16) дает для  $\sigma_{\text{экв}}$  то же, что и третья теория. Для бруса главные напряжения определяются формулами (11.2.5). Поэтому для него получаем из (11.4.16)

$$\sigma_{\text{экв}}^V = \frac{1-k}{2}\sigma_x + \frac{1+k}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_x^2}. \quad (11.4.17)$$

Рассмотрим теперь примеры использования теорий прочности.

**Пример 11.2.** Завершим расчет на прочность брусьев, рассмотренных в примерах 9.3 и 9.4. В примере 9.3 рассмотрен брус открытого тонкостенного сечения (см. рис. 9.12). Как там отмечено, чтобы избежать появления вызванных кручением больших касательных напряжений, необходимо, чтобы нагрузки были приложены к оси жесткости (в точке  $A$  торцевого сечения). Тогда в опасном сечении вблизи заделки будут действовать  $M_z = 10Pb$  и  $M_y = \frac{5}{2}Pb$ ,  $Q_z = \frac{1}{4}P$  и  $Q_y = P$  (см. рис. 9.13). Нормальные напряжения при выбранных направлениях осей координат определяются выражением

$$\sigma_x = \frac{M_z}{J_z}y + \frac{M_y}{J_y}z = \frac{10Pb}{\frac{8}{3}b^3\delta}y + \frac{\frac{5}{2}Pb}{\frac{5}{12}b^3\delta}z = \frac{P}{b^2\delta} \left( \frac{15}{4}y + 6z \right).$$

Нейтральную линию найдем из условия  $\sigma_x = 0$ . Это прямая  $y = -\frac{8}{5}z = -1,6z$ . Распределение нормальных напряжений по сечению показано на рис. 11.23 *a*. Касательные напряжения, возникающие от действия перерезывающих сил  $Q_y$  и  $Q_z$ , были получены в примере 9.3 и показаны здесь на рис. 11.23 *б*, *в*.

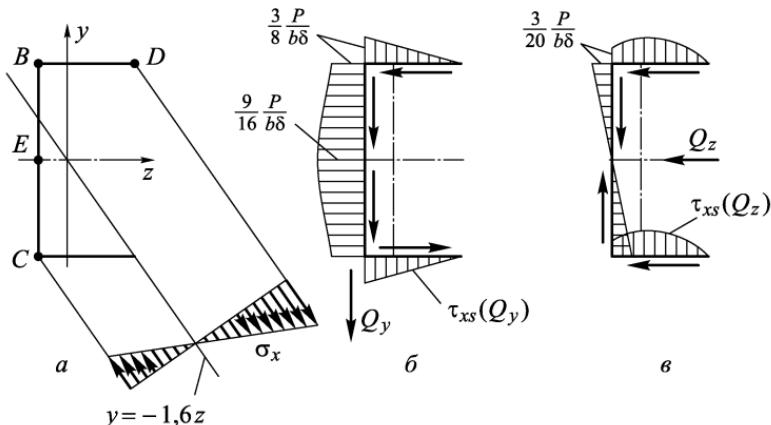


Рис. 11.23

Для расчета на прочность используем третью теорию прочности, по которой для бруса  $\sigma_{\text{экв}}^{III} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_x^2}$ . Опасной точкой сечения будет та, в которой максимальна величина  $\sigma_{\text{экв}}^{III}$ . Анализируя показанные на рис. 11.23 распределения по сечению  $\sigma_x$  и  $\tau_{xs}$ , приходим к выводу, что  $\max \sigma_{\text{экв}}$  может быть достигнуто в точках *D*, *C*, *B*, *E*.

В точке *D* с координатами  $y = b$ ,  $z = \frac{3}{4}b$  действует нормальное напряжение

$$\sigma_x(D) = \frac{P}{b^2\delta} \left( \frac{15}{4}b + 6 \cdot \frac{3}{4}b \right) = 8,25 \frac{P}{b\delta},$$

а касательное напряжение в ней

$$\tau_{xs}(D) = 0.$$

Поэтому

$$\sigma_{\text{экв}}^{III}(D) = \sigma_x(D) = 8,25 \frac{P}{b\delta}.$$

В точке  $C$  с координатами  $y = -b$ ,  $z = -\frac{1}{4}b$ :

$$\sigma_x(C) = \frac{P}{b^2\delta} \left( \frac{15}{4}(-b) + 6 \left( -\frac{1}{4}b \right) \right) = -5,25 \frac{P}{b\delta},$$

$$\tau_x(C) = \tau_{xs}(Q_y) - \tau_{xs}(Q_z) = \frac{3}{8} \frac{P}{b\delta} - \frac{3}{20} \frac{P}{b\delta} = 0,225 \frac{P}{b\delta},$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{III}(C) = \sqrt{\sigma_x^2(C) + 4\tau_x^2(C)} = \frac{P}{b\delta} \sqrt{(-5,25)^2 + 4 \cdot 0,225^2} = 5,27 \frac{P}{b\delta}.$$

В точке  $B$  с координатами  $y = b$ ,  $z = -\frac{1}{4}b$ :

$$\sigma_x(B) = \frac{P}{b^2\delta} \left( \frac{15}{4}b + 6 \left( -\frac{1}{4}b \right) \right) = 2,25 \frac{P}{b\delta},$$

$$\tau_x(B) = \tau_{xs}(Q_y) + \tau_{xs}(Q_z) = \frac{3}{8} \frac{P}{b\delta} + \frac{3}{20} \frac{P}{b\delta} = 0,525 \frac{P}{b\delta},$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{III}(B) = \frac{P}{b\delta} \sqrt{2,25^2 + 4 \cdot 0,525^2} = 2,48 \frac{P}{b\delta}.$$

В точке  $E$  с координатами  $y = 0$ ,  $z = -\frac{1}{4}b$ :

$$\sigma_x(E) = 6 \left( -\frac{1}{4}b \right) \frac{P}{b\delta} = -1,5 \frac{P}{b\delta},$$

$$\tau_x(E) = \tau_{xs}(Q_y) = \frac{9}{16} \frac{P}{b\delta} = 0,563 \frac{P}{b\delta},$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{III}(E) = \frac{P}{b\delta} \sqrt{(-1,5)^2 + 4 \cdot 0,563^2} = 1,88 \frac{P}{b\delta}.$$

Таким образом, опасной будет точка  $D$  и условие прочности примет вид  $\max \sigma_{\text{ЭКВ}}^{III} = 8,25P/b\delta \leq [\sigma]$ . На основе этого условия, как и ранее, можно произвести проверочный или проектировочный (например, определить потребную величину  $\delta$ ) расчеты на прочность или найти допустимую величину нагрузки.

Обратимся теперь к примеру 9.4. Проведенный там анализ напряжений в сечении у заделки бруса, показанного на рис. 9.17, можно

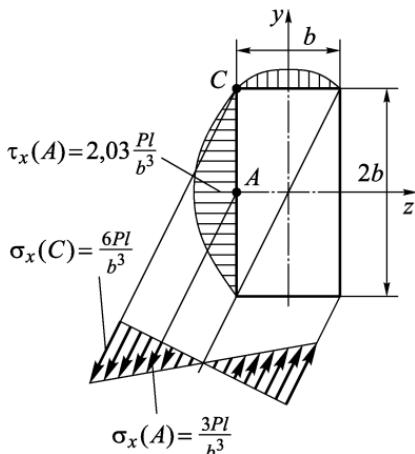


Рис. 11.24

свести к распределению напряжений для этого сечения, данному на рис. 11.24. Тогда в точках  $C$  и  $A$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{III}(C) = \sigma_x(C) = 6 \frac{Pl}{b^3} \quad \text{и}$$

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{III}(A) = \sqrt{\sigma_x^2(A) + 4\tau_x^2(A)} = \sqrt{3^2 + 4 \cdot 2,03^2} \frac{Pl}{b^3} = 5,05 \frac{Pl}{b^3}.$$

Поэтому для этого бруса опасной оказывается точка  $C$ . Условием прочности для него будет

$$\max \sigma_{\text{ЭКВ}}^{III} = 6 \frac{Pl}{b^3} \leq [\sigma].$$

**П р и м ер 11.3.** Рассмотрим брус кольцевого сечения. Пусть в его сечении действуют изгибающие моменты  $M_z$ ,

$M_y$  и крутящий момент  $M_k$  (рис. 11.25). Для кольцевого сечения любая пара центральных осей является главной. Поэтому изгиб в двух плоскостях моментами  $M_z$  и  $M_y$  можно заменить изгибом в плоскости действия момента  $M_u$ , который представляет собой векторную сумму  $M_z$  и  $M_y$ . Тогда

$M_u = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$ , а плоскость его действия определяется углом  $\alpha$ , таким, что  $\cos \alpha = M_z / \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$ .

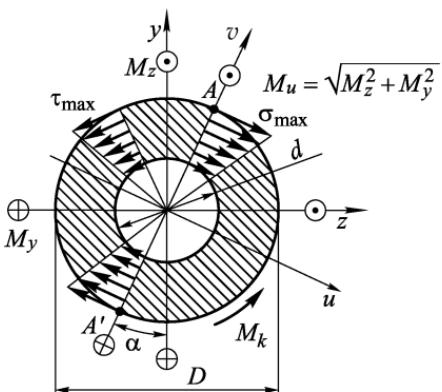


Рис. 11.25

Максимальные нормальные напряжения действуют в точках  $A$  и  $A'$  и равны  $\sigma_{\text{max}} = M_u / W_u$ , где  $W_u$  — момент сопротивления изгибу:  $W_u = J_u / \left(\frac{1}{2}D\right)$ . Максимальные касательные напряжения действуют в точках сечения, прилегающих к его наружному контуру, в том числе и в точке  $A$ :  $\tau_{\text{max}} = M_k / W_k$ , где  $W_k$  — момент сопротивления кручению:  $W_k = J_p / \left(\frac{1}{2}D\right)$ . Для любого сечения  $J_p = J_u + J_v$ , а для кольцевого, кроме того,  $J_u = J_v$ . Поэтому для него  $W_k = 2W_u$ . Если для расчета на прочность использовать теорию максимальных касательных напряжений,

то замечаем, что максимум  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{III}$  достигается в точке A:

$$\begin{aligned}\max \sigma_{\text{ЭКВ}}^{III} &= \sqrt{\sigma_{\text{max}}^2 + 4\tau_{\text{max}}^2} = \sqrt{\left(\frac{M_u}{W_u}\right)^2 + 4\left(\frac{M_k}{W_k}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{M_z^2 + M_y^2}{W_u^2} + 4\frac{M_k^2}{W_k^2}} = \frac{\sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_k^2}}{W_u} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}^{III}}{W_u}.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что опасным сечением такого бруса, т.е. сечением, где  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{III}$  достигает наибольшего значения, будет такое, где максимальна величина  $M_{\text{ЭКВ}}^{III} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_k^2}$  (если, конечно, сечение бруса не меняется по его длине).

Если для расчета применить энергетическую теорию, для которой  $\sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_x^2}$ , то после аналогичных выкладок снова придем к выражению, которое можно записать в виде

$$\max \sigma_{\text{ЭКВ}}^{IV} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}^{IV}}{W_u}, \quad M_{\text{ЭКВ}}^{IV} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + \frac{3}{4}M_k^2}.$$

Заметим, что полученные здесь соотношения справедливы и для брусьев сплошного круглого и кругового замкнутого тонкостенного сечений, так как для этих сечений также  $W_k = 2W_u$ .

## 11.5. О прочности и разрушении

**11.5.1.** В предыдущем разделе сформулированы критерии прочности. Для их правильного применения необходимо разобраться в самих понятиях «прочность» и «разрушение». Обычно считается, что конструкция утратила прочность, если за счет частичного или полного разрушения ее элементов или вследствие недопустимой деформации она перестала выполнять свои функции. В этом смысле прочность является интегральным свойством конструкции. Но критерии прочности связаны с напряженным состоянием в точке конструкции и поэтому определяют локальные свойства как напряженного состояния, так и материала. Чтобы понять соотношение между интегральным и локальным в прочности, рассмотрим сначала такие конструкции, у которых напряженное состояние во всех точках или в существенной части конструкции одинаково (однородно). Простейшим примером такой конструкции является стержень постоянного сечения, находящийся в состоянии центрального растяжения под действием приложенных к его концам сил. Во всех его поперечных сечениях возникают только постоянные по сечению напряжения  $\sigma_x$ . Именно такое напряженное состояние и создается в образце при испытаниях на растяжение. Если этот стержень выполнен из пластичного материала, то при  $\sigma_x = \sigma_t$  насту-

пит состояние текучести, которое будет сопровождаться значительными необратимыми деформациями. А хрупкий стержень при  $\sigma_x = \sigma_{\text{вр}}$  разрушится. И в том, и в другом случаях локальное напряженное состояние, оговоренное критериями прочности

как предельное, наступает одновременно во всех точках стержня и потому интегральная и локальная сторона прочности здесь неразличимы.

Рассмотрим теперь балку, нагруженную сосредоточенной силой (рис. 11.26). Если материал балки пластичный, то момент, когда максимальные напряжения в ее опасном сечении достигли предела текучести, т.е. когда  $\sigma_{\text{max}} = \sigma_t$  и напряженное состояние в точке  $A$  стало предельным, для балки в целом не

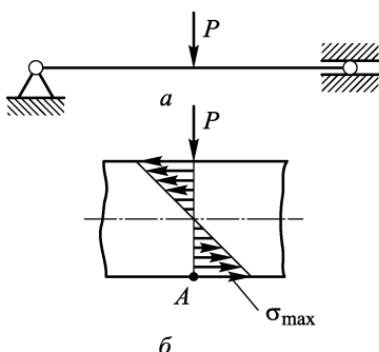


Рис. 11.26

сопровождается появлением недопустимых необратимых деформаций и тем более разрушением. Здесь локальное наступление предельного состояния не оказывается на интегральной прочности балки. Этот и другие подобные случаи будут рассмотрены в гл. 13, где будет показано, что для появления недопустимых деформаций нагрузка должна быть значительно увеличена.

Если же балка выполнена из хрупкого материала, то достижение в точке  $A$  предельного состояния, когда  $\sigma_{\text{max}} = \sigma_{\text{вр}}$ , будет сопровождаться катастрофическим ее разрушением — разделением на части по опасному сечению. Таким образом, здесь локальное невыполнение условий прочности приводит к исчерпанию общей (интегральной) прочности всей балки.

Из сказанного следует, что невыполнение локальных условий прочности является только необходимым условием потери прочности конструкции. В то же время выполнение локальных условий прочности — это достаточное условие прочности всей конструкции.

**11.5.2.** Из проведенного рассуждения следует, что понятия прочности конструкции и прочности материала хотя и связаны, но различны. И сформулированные в разд. 11.4 критерии прочности фактически являются критериями прочности материала, устанавливаемыми экспериментально на основе малого количества простых испытаний материала. В то же время прочность материала интегрально характеризует связи, действующие между частицами материала — кристаллами, молекулами, атомами. Поэтому ее можно оценить, рассматривая, например, взаимо-

действие между двумя слоями атомов. Такие оценки были проделаны и получено, что теоретический предел прочности материала  $\sigma_s$  составляет величину порядка  $E/2\pi \sim 0,1E$ . Получаемые же в экспериментах пределы прочности материала в десятки, а иногда в сотни раз меньше теоретических. В этом можно убедиться, обратившись к табл. 3.1 (с. 50). Снижение прочности объясняется неоднородностью реального материала — наличием дефектов его кристаллической решетки, микропор и микротрещин, неизбежных при кристаллической структуре, инородных включений и т.п.

Впервые разрушение материала при наличии в нем трещин рассмотрел А. Гриффитс (1920). Он использовал энергетический подход. Разберем подход А. Гриффитса на примере упругой пластины, растянутой однородными напряжениями  $\sigma_y = \sigma$  (рис. 11.27). Если в пластине нет трещины, то потенциальная энергия ее деформации с учетом однородности напряженного состояния

$$\Pi_0 = \int_V \frac{1}{2} \sigma_y \varepsilon_y dV = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} F t. \quad (11.5.1)$$

Здесь  $V$ ,  $F$  — объем и площадь пластины, а  $t$  — ее толщина. Возьмем теперь пластину с трещиной, имеющей длину  $2l$  и расположенной вдоль оси  $x$ . Будем рассматривать такие трещины, у которых длина существенно меньше размеров пластины, так чтобы можно было пренебречь влиянием краев пластины на напряженное состояние в районе трещины. Потенциальная энергия деформации  $\Pi$  пластины с трещиной будет меньше, чем у пластины без трещины. Это следует из того, что для восстановления целостности пластины необходимо затратить работу на стягивание краев трещины. Оценим разницу энергий  $\Pi_0$  и  $\Pi$ . Она образуется за счет изменения напряжений в некоторой прилегающей к трещине области  $F_1$  (см. рис. 11.27). В силу эффекта Сен-Венана размеры этой области малы. В вершине трещины образуется местный пик напряжений, а вблизи поверхности трещины  $\sigma_y = 0$ .

Заметим, что для малых трещин, т.е. при отсутствии влияния краев пластины на напряжение в окрестности трещины, размеры области  $F_1$  пропорциональны длине трещины, а форма области  $F_1$  не зависит от длины трещины. Более

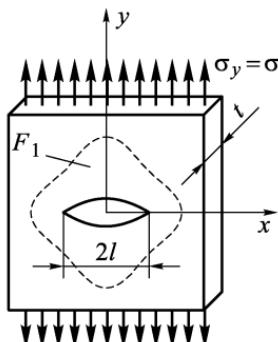


Рис. 11.27

того, и характер распределения напряжений внутри  $F_1$  также не зависит от длины трещины. Математически это значит, что если в функциях  $\sigma_1(x, y)$ ,  $\sigma_2(x, y)$ , определяющих главные напряжения, перейти к безразмерным координатам  $\bar{x} = x/l$ ,  $\bar{y} = y/l$ , то  $\sigma_1(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $\sigma_2(\bar{x}, \bar{y})$  от  $l$  зависеть не будут, а величина и форма соответствующей  $F_1$  области  $\bar{F}_1$  в координатах  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  также не будут зависеть от  $l$ . Кроме того, вследствие упругости деформаций главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  пропорциональны  $\sigma_y = \sigma$ . Все это можно записать в виде следующих соотношений:

$$F_1 = l^2 \bar{F}_1, \quad \sigma_1(x, y) = \sigma f_1(\bar{x}, \bar{y}), \quad \sigma_2(x, y) = \sigma f_2(\bar{x}, \bar{y}). \quad (11.5.2)$$

Здесь  $f_1(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $f_2(\bar{x}, \bar{y})$  — функции, определяющие характер распределения напряжений в области  $\bar{F}_1$  и не зависящие от  $l$  и  $\sigma$ . Тогда в соответствии с (11.5.1) получим для области  $F_1$ :

$$\Pi_0 = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} F_1 t = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} l^2 \bar{F}_1 t. \quad (11.5.3)$$

Учитывая, что напряжения в сечениях, параллельных плоскости пластины, равны нулю, т.е.  $\sigma_3 = 0$ , подсчитаем  $\Pi$  как

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{F_1} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2) t \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int_{\bar{F}_1} \frac{1}{E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mu \sigma_1 \sigma_2) t \, d\bar{x} \, d\bar{y}.$$

Использовав безразмерные координаты  $\bar{x} = x/l$ ,  $\bar{y} = y/l$  и соотношения (11.5.2), получим

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} l^2 t \int_{\bar{F}_1} [f_1^2(\bar{x}, \bar{y}) + f_2^2(\bar{x}, \bar{y}) - 2\mu f_1 f_2] \, d\bar{x} \, d\bar{y}. \quad (11.5.4)$$

Вошедшний в это соотношение интеграл не зависит ни от длины трещины  $2l$ , ни от уровня напряжений  $\sigma$  и является константой, интегрально отражающей неравномерность напряжений в области  $\bar{F}_1$ . Для пластины без трещины напряженное состояние равномерно и  $f_1 = 1$ ,  $f_2 = 0$ . Поэтому этот интеграл для нее равен  $\bar{F}_1$ . Для пластины с трещиной из-за неравномерности напряженного состояния он равен  $\alpha \bar{F}_1$ , где  $\alpha$  — величина, меньшая единицы.

Таким образом, уменьшение энергии деформации пластины за счет образования в ней трещины

$$\Delta \Pi = \Pi_0 - \Pi = \frac{1}{2} A \frac{\sigma^2}{E} l^2 t. \quad (11.5.5)$$

Здесь  $A = \bar{F}_1(1-\alpha)$  — безразмерная константа, которая в случае малой трещины не зависит ни от  $\sigma$ , ни от  $l$ .

Появление трещины сопровождается образованием у пластины новой поверхности — поверхности трещины, площадь которой равна  $2 \cdot 2lt$ . Двойка здесь учитывает, что трещина имеет две стороны. Так же, как и жидкости, твердые тела обладают поверхностным натяжением. Поэтому для образования новой поверхности необходимо затратить энергию, равную энергии поверхностного натяжения этой поверхности. Пусть  $\gamma$  — энергия поверхностного натяжения, приходящаяся на единицу площади поверхности. Тогда

$$\Delta W = \gamma \cdot 4lt \quad (11.5.6)$$

— энергия, необходимая для образования поверхности трещины.

Рассмотрим теперь поведение трещины в пластине при возрастании напряжений  $\sigma$ . Эксперименты показывают, что при малых  $\sigma$  трещина практически не изменяется, а при достижении некоторой критической величины напряжений  $\sigma_c$  трещина начинает стремительно расти, что приводит к разрушению пластины. Чтобы разобраться в этой ситуации, произведем ее энергетический анализ, рассмотрев энергетический баланс при подрастании длины трещины от  $l$  до  $l + dl$ . При таком росте трещины выделится энергия деформации, которая в соответствии с (11.5.5) будет

$$d(\Delta\Pi) = \frac{d(\Delta\Pi)}{dl} dl = A \frac{\sigma^2}{E} lt dl. \quad (11.5.7)$$

На образование новой поверхности  $4t dl$  необходимо затратить энергию

$$d(\Delta W) = \frac{d(\Delta W)}{dl} dl = 4\gamma t dl. \quad (11.5.8)$$

При малых величинах  $\sigma$

$$d(\Delta\Pi) < d(\Delta W), \quad (11.5.9)$$

т.е. при подрастании трещины выделилось упругой энергии  $d(\Delta\Pi)$  меньше, чем необходимо затратить энергии  $d(\Delta W)$  на образование новой поверхности. На подрастание трещины, таким образом, нужна какая-то внешняя энергия. Поэтому трещина в этих условиях без внешних причин не растет. Говорят, что она стационарна.

Критическое состояние наступает, когда при подрастании трещины выделяется ровно столько энергии деформации, сколько необходимо затратить энергии на образование новой поверхности, т.е. когда

$$d(\Delta\Pi) = d(\Delta W). \quad (11.5.10)$$

Отсюда, учитывая выражения (11.5.7), (11.5.8), (11.5.10), легко получим связь между длиной трещины  $l$  и тем критическим

напряжением  $\sigma_c$ , при котором трещина перестанет быть стационарной:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{4E\gamma}{Al}}. \quad (11.5.11)$$

А условие стационарности трещины (11.5.9) можно записать в виде

$$\sigma < \sigma_c. \quad (11.5.12)$$

Это же условие можно использовать и для определения критического размера трещины  $l_c$  при данном уровне напряжений  $\sigma$ :

$$l < l_c = \frac{4\gamma E}{A\sigma^2}. \quad (11.5.13)$$

Для подсчета величины  $A$ , зависящей только от характера распределения напряжений в зоне  $F_1$ , ослабленной трещиной, А. Гриффитс представил трещину как вытянутое эллиптическое отверстие в пластиине. Воспользовавшись известным решением теории упругости, он получил, что  $A = 2\pi$ .

Эксперименты, в которых А. Гриффитс разрушал внутренним давлением тонкостенные трубы с прорезанными в них алмазом продольными трещинами, с удовлетворительной точностью подтвердили зависимость (11.5.11).

Другое подтверждение предположения о том, что дефекты структуры материала существенно сказываются на его прочности, А. Гриффитс получил, определяя предел прочности тонких стеклянных волокон. Он оказался в 50 раз выше, чем у массивных образцов, и приближался к теоретической прочности. Это легко объясняется тем, что при вытягивании тонкого волокна исключается возможность образования в нем трещин, перпендикулярных его длине.

Экспериментальные исследования разрушения выполненных из пластичных материалов образцов с трещинами также подтвердили зависимость (11.5.11). Но при этом величина энергии,

которую необходимо затратить на подрастание трещины, оказалась значительно больше энергии, потребной для образования новой поверхности. Это связано с тем, что вблизи вершин трещины образуются зоны пластического деформирования материала  $F_{пл}$ . Они показаны на рис. 11.28. При продвижении трещины они продвигаются и увеличиваются в размерах.

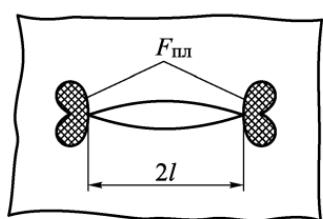


Рис. 11.28

При пластическом деформировании энергия необратимо расходуется. В этом она подобна энергии поверхностного натяжения, необходимой для образования новой поверхности трещины.

Обозначим через  $G_c$  все энергетические затраты, необходимые для образования трещины единичной длины в пластине единичной толщины. В  $G_c$  входит энергия  $2\gamma$ , затрачиваемая на создание двух единиц новой поверхности, и энергия произошедшего при этом пластического деформирования. В этом случае

$$\Delta W = G_c \cdot 2lt. \quad (11.5.14)$$

Тогда из баланса энергий (11.5.10) получаем аналогичную (11.5.11) зависимость:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{EG_c}{\pi l}} \quad (A = 2\pi). \quad (11.5.15)$$

Величину  $G_c$  удобно определять из эксперимента по длине трещины  $2l$  и напряжению  $\sigma_c$ , при котором трещина начинает лавинообразно развиваться:

$$G_c = \frac{\pi l \sigma_c^2}{E}. \quad (11.5.16)$$

Эта величина зависит от материала и характеризует его вязкость как способность противостоять развитию трещин.

Часто вместо  $G_c$  используют показатель вязкости  $k_c$  (трещиностойкость), который связан с  $G_c$  соотношением

$$k_c = \sqrt{G_c E}. \quad (11.5.17)$$

По результатам эксперимента  $k_c$  можно подсчитать по формуле

$$k_c = \sigma_c \sqrt{\pi l}. \quad (11.5.18)$$

Удобство в использовании  $k_c$  связано с тем, что он пропорционален  $\sigma_c$ .

**11.5.3.** Кроме энергетического подхода, при исследовании поведения трещин используются и другие подходы. Среди них наиболее распространенными является так называемый силовой подход, основанный на анализе распределения напряжений в окрестности вершин трещины. Этот анализ показал, что для пластин напряжения в малой окрестности трещины распределяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{k_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta \right), \\ \sigma_y &= \frac{k_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{k_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2}\theta. \end{aligned} \quad (11.5.19)$$

Здесь  $r$  — расстояние от вершины трещины;  $\theta$  — полярный угол, отсчитываемый от оси  $x$ .

Был обнаружен интересный и очень важный факт, что характер распределения напряжений (11.5.19) не зависит от размеров трещины и пластины и от вида действующей на пластину нагрузки. Все эти факторы сказываются только на величине коэффициента интенсивности напряжений  $k_I$ . Так, для рассмотренного случая растянутой напряжениями неограниченной пластины с трещиной  $2l$  коэффициент интенсивности  $k_I$  оказался равным

$$k_I = \sigma \sqrt{\pi l}. \quad (11.5.20)$$

Сравнивая его с показателем вязкости  $k_c$  (11.5.18), замечаем, что трещина начинает лавинообразно развиваться как раз тогда, когда

$$k_I = k_c. \quad (11.5.21)$$

Это условие и является силовым критерием критического состояния трещины.

Независимость характера распределения напряжений (11.5.19) от вида нагрузки позволяет подсчитывать коэффициент интенсивности напряжений

для сложной нагрузки как сумму коэффициентов для отдельных ее составляющих. Так, например, если на неограниченную пластину с трещиной  $2l$  одновременно действуют растягивающие напряжения  $\sigma$ , для которых  $k_I^\sigma = \sigma \sqrt{\pi l}$  и приложенные по центру пластины силы, величина которых на единицу толщины равна  $P$ , и для которых  $k_I^P = P / \sqrt{\pi l}$  (рис. 11.29), то

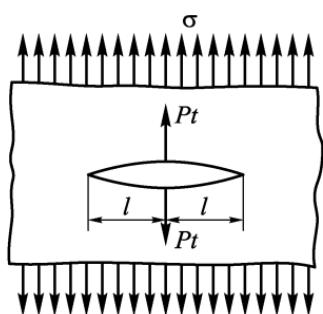


Рис. 11.29

$$k_I^{\sigma+P} = k_I^\sigma + k_I^P = \sigma \sqrt{\pi l} + P / \sqrt{\pi l}.$$

Это свойство коэффициентов интенсивности напряжений существенно облегчает их использование и во многом объясняет популярность их в расчетной практике.

**11.5.4.** Кроме рассмотренного вида трещины, которая называется *трещиной нормального отрыва*, были исследованы также и другие возможные виды развития трещины в пластине: за счет сдвига берегов трещины в плоскости и путем сдвига из плоскости (антиплоская деформация). Все три этих случая показаны на рис. 11.30. Для них характерно, что напряжения в малой окрестности вершины трещины распределяются по закону

$$\sigma_{ij} = \frac{k}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\Theta).$$

Поэтому для сдвига и антиплаской деформации также удобно пользоваться коэффициентами интенсивности напряжений, которые принято соответственно обозначать через  $k_{II}$  и  $k_{III}$ .

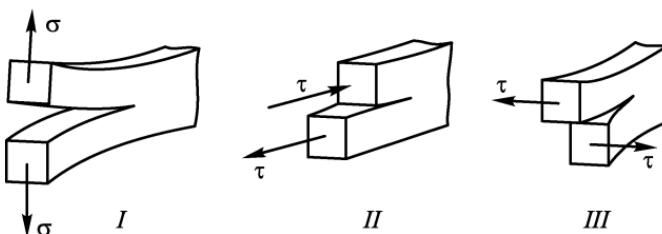


Рис. 11.30

**11.5.5.** Проведенный выше анализ поведения трещины в пластине основан все-таки на модели материала как сплошного и однородного. Реальные же материалы имеют неоднородную структуру, и неоднородности могут как способствовать развитию трещины, так и мешать ей. Так, например, трещина может перестать расти, если она дойдет до гладкого отверстия (рис. 11.31). Это объясняется тем, что в этот момент резко уменьшается концентрация напряжений. На практике часто для того, чтобы увеличить критические напряжения конструкции, в которой появились трещины, засверливают концы трещины.

Неоднородность композитных материалов существенно сказывается на их трещиностойкости. Например, эпоксидная смола и углеродные волокна имеют очень низкую вязкость. В то же время углепластик, представляющий собой композицию из армирующих углеродных волокон в матрице из эпоксидной смолы, может при распространении трещины поперек волокон иметь вязкость, близкую к мартенситной стали, которая относится к вязким материалам. Это объясняется тем, что трещины, развивающиеся в эпоксидной смоле, тормозятся на границах между смолой и волокнами. Но вязкость углепластика на развитие трещин вдоль волокон остается низкой. Вообще у волокнистых материалов с однородной структурой вязкость вдоль волокон существенно ниже, чем поперек. Общеизвестный пример этого — дерево, которое легко колется вдоль волокон и с трудом — поперек.

Для изделий из композитных материалов, как уже отмечалось, характерно то, что их структура формируется одновременно с изготовлением самой детали. Это открывает среди прочих

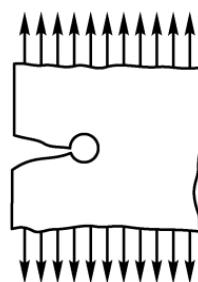


Рис. 11.31

еще и возможность формировать структуру изделия, обеспечивающую его высокую трещиностойкость.

## 11.2. Контрольные вопросы

**B.11.1.** Что такое компоненты напряженного состояния? Сколько их? Сколько из них независимых? Как определяются их знаки?

**B.11.2.** Как понимать утверждение, что компоненты напряженного состояния полностью определяют напряженное состояние в данной точке?

**B.11.3.** Что такое главные площадки? Сколько их? Как они взаимно ориентированы? Чему равны касательные напряжения на этих площадках? Какие напряжения называются главными? Как они обозначаются и соотносятся между собой?

**B.11.4.** Почему главные напряжения называются инвариантами напряженного состояния?

**B.11.5.** Как ориентированы площадки, которым на плоскости Мора соответствуют точки окружностей, проходящих через точки  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответственно?

**B.11.6.** Каким площадкам соответствуют точки, лежащие в области, заключенной между окружностями круговой диаграммы Мора?

**B.11.7.** В какой площадке из всех, проходящих через данную точку, действуют максимальные касательные напряжения?

**B.11.8.** Как определить главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  в точке бруса в общем случае его нагружения?

**B.11.9.** Какие величины связаны шестью соотношениями закона Гука?

**B.11.10.** Что такое удельная потенциальная энергия изменения объема и удельная потенциальная энергия изменения формы?

**B.11.11.** Что такое предельные для материала напряженные состояния? К каким трем видам они сводятся?

**B.11.12.** Что такое поверхность предельных состояний? Что она отражает? В чем трудности ее построения?

**B.11.13.** Какие напряженные состояния называются подобными?

**B.11.14.** Какие напряженные состояния называются равноопасными? Почему таковыми могут быть только неподобные состояния?

**B.11.15.** Что положено в основу сравнения двух напряженных состояний в гипотезах прочности? Почему сложное напряженное состояние обычно сравнивается с одноосным?

**B.11.16.** Что такое эквивалентное напряженное состояние?

**В.11.17.** Какой критерий равноопасности положен в основу теории максимальных нормальных напряжений? В каких случаях находит применение эта теория?

**В.11.18.** Какой критерий равноопасности устанавливается в теории наибольших деформаций? В каких случаях она дает удовлетворительные результаты?

**В.11.19.** На основе какого критерия строится теория максимальных касательных напряжений? Для каких материалов она нашла широкое применение в расчетах?

**В.11.20.** Какой критерий равноопасности положен в основу энергетической теории прочности? Для каких материалов она используется?

**В.11.21.** Какой подход положен в основу теории предельных состояний? Как для заданного напряженного состояния здесь определяется предельное состояние? Для каких материалов и напряженных состояний эта теория дает наилучшие результаты?

**В.11.22.** Что такое локальная или интегральная прочность? Как невыполнение или выполнение локальных условий прочности соотносится с прочностью всей конструкции?

**В.11.23.** Почему прочность реального материала во много раз меньше его теоретической прочности?

**В.11.24.** Почему при малых напряжениях трещина практически не растет? При каком условии наступает критическое состояние, т.е. стремительный рост трещины при энергетическом подходе к проблеме?

**В.11.25.** При каком условии наступает критическое состояние трещины при силовом подходе к проблеме?

### 3.11. Задачи

**3.11.1.** Определить запас прочности в точке нагруженного тела, напряженное состояние в которой, заданное его компонентами, показано на рис. 11.32. Материал тела пластичный, пределы текучести на растяжение и сжатие:  $\sigma_{тр} = 280$  МПа,  $\sigma_{tc} = 220$  МПа.

**3.11.2.** Выбрав соответствующие теории прочности, проверить, выполняется ли условие прочности в точке нагруженного тела, напряженное состояние в которой показано на рис. 11.33, если материал тела пластичный и имеет одинаковые пределы текучести на растяжение и сжатие:  $\sigma_{тр} = \sigma_{tc} = \sigma_t = 280$  МПа; запас прочности  $n$  принять равным двум.

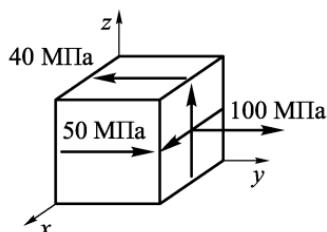


Рис. 11.32

**3.11.3.** Для бруса прямоугольного сечения, показанного на рис. 11.34, найти размер  $b$  из расчета напряжений только по изгибающим и крутящему моментам. Расчет сделать по третьей теории прочности. Принять  $[\sigma]_p = [\sigma]_c = [\sigma] = 120 \text{ МПа}$ ,  $P = 0,6 \text{ кН}$ .

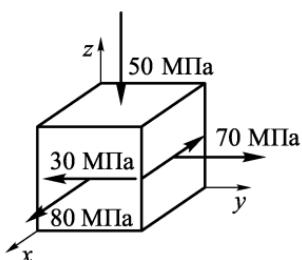


Рис. 11.33

**3.11.4.** Полагая сечение рамы в задаче 10.5 тонкостенным кольцевым со средним диаметром  $d_{cp}$  и толщиной  $\delta = 0,1d_{cp}$ , найти ее запас прочности. Расчет сделать по четвертой теории прочности. Принять  $\sigma_t = 240 \text{ МПа}$ ,  $P = 320 \text{ Н}$ ,  $l = 0,25 \text{ м}$ ,  $d_{cp} = 20 \text{ мм}$ .

**3.11.5.** Вычислить  $\max \sigma_{\text{экв}}$  по третьей теории прочности в тонкостенном брусе, показанном на рис. 11.35. На сколько про-

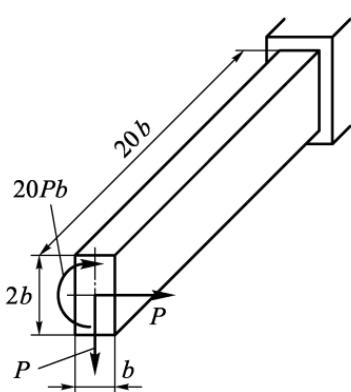


Рис. 11.34

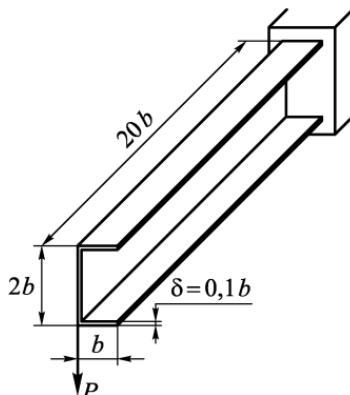


Рис. 11.35

центров увеличится запас прочности бруса, если силу  $P$  перенести в центр изгиба того же сечения, где она приложена. Касательные напряжения, образующие перерезывающую силу, в расчетах не учитывать. Положение центра изгиба и величины осевых моментов инерции взять из примера 9.3 гл. 9.

## ГЛАВА 12

### УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

В этой главе будут рассмотрены особенности поведения стержней под действием продольных сжимающих сил. Как показывает опыт, сжатие стержня, даже если приняты все возможные меры, чтобы сила действовала строго вдоль его оси, сопровождается изгибом (рис. 12.1), который сначала незначителен. Однако при увеличении силы наступает момент, когда изгиб начинает резко возрастать, и именно он приводит к разрушению или недопустимым деформациям стержня, хотя напряжения от сжимающей силы (если считать стержень прямолинейным) далеки от предельных. Решение этой задачи дал в 1744 г. Л. Эйлер в своей знаменитой книге «Методы нахождения кривых линий...». Это исследование Эйлера оказало значительное влияние на формирование в механике и математике понятия устойчивости и легло в основу обширного раздела механики твердого деформируемого тела — устойчивости деформируемых систем, методы и результаты которого особенно важны для расчета тонкостенных конструкций.



Рис. 12.1

#### 12.1. Общее понятие об устойчивости состояния равновесия

**12.1.1.** Понятие устойчивости в механике многогранно и может быть детально определено только в зависимости от объекта, к которому оно применяется, и от методов исследования этого объекта. Но все же в его основе лежит наша практическая деятельность. Например, чтобы на практике убедиться в том, что положение равновесия какого-то предмета устойчиво, мы испытаем его. Для этого мы можем слегка потолкать предмет в разные стороны или как-то по-другому вызовем отклонение

его из положения равновесия. Как говорят, дадим возмущение. И если предмет не отклонится сильно, мы придем к выводу, что его равновесие устойчиво. А если предмет в результате сильно отклонится от положения равновесия, например, упадет, то мы скажем, что оно неустойчиво.

Таким образом, устойчивость положения равновесия системы определяется реакцией системы на возмущение. Подчеркнем, что нельзя исследовать устойчивость какой-либо системы, не возмущив ее!

**12.1.2.** Остановимся подробнее на возмущениях. Положение стоящего на полу стула, с нашей точки зрения, безусловно устойчиво. Но ведь стул можно толкнуть (возмутить) так, что он упадет. Этот простой пример показывает, что всегда можно найти настолько сильное (большое) возмущение, что система перейдет совсем в другое положение равновесия или станет качественно другой, например, сломается. Поэтому при исследовании устойчивости возмущения должны быть малыми, такими, чтобы они вызывали малые отклонения от положения равновесия.

Есть еще одна сторона вопроса, о которой иногда забывают. Обязательно нужно исследовать реакцию системы на все-

возможные возмущения, так как при одних возмущениях отклонения могут оказаться незначительными, а по отношению к другим система окажется неустойчивой. Это видно на примере стержня, закрепленного на оси вращения  $AB$  (рис. 12.2). Его положение равновесия неустойчиво, так как любое малое отклонение стержня в направлении его возможного вращения приведет к тому, что он повернется вокруг оси  $AB$  и в итоге займет нижнее положение равновесия. Если же возмущение происходит в плоскости  $ABC$ , то оно не приведет к значительным отклонениям

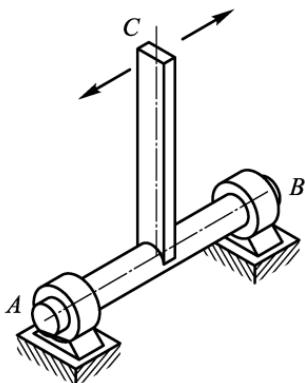


Рис. 12.2

в этой плоскости. Поэтому, если при исследовании устойчивости положения равновесия стержня мы ограничимся только последними возмущениями, то придем к неверному выводу об устойчивости этого положения.

Все сказанное подводит нас к следующему определению: *положение равновесия системы устойчиво, если любые малые возмущения вызывают малые отклонения системы от этого положения*.

По смыслу это определение совпадает с известным в математике определением устойчивости, данным А.М. Ляпуновым

(1892), только в последнем конкретизированы критерии малости возмущений и отклонений. В нашем случае эти критерии могут быть установлены в зависимости от конкретных свойств исследуемой системы.

**12.1.3.** Исследуем с помощью принятого определения положения равновесия шарика, показанные на рис. 12.3.

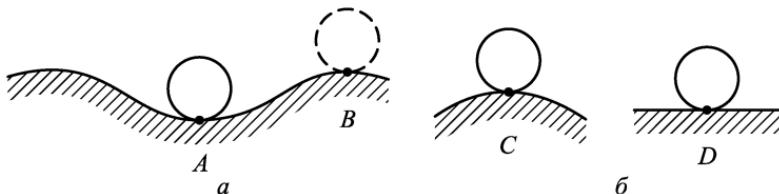


Рис. 12.3

Положение  $A$  на рис. 12.3  $a$  устойчиво, так как при незначительном отклонении от него представленный самому себе шарик будет колебаться около точки  $A$ , оставаясь вблизи нее. Если возмущение будет таким, что шарик перевалит через точку  $B$ , то это не будет свидетельствовать о неустойчивости положения  $A$ , так как такое возмущение нельзя считать малым.

Положение шарика на вершине  $C$  бугорка (рис. 12.3  $b$ ) неустойчиво, так как любое малое смещение шарика из этого положения приведет к его скатыванию с бугорка, т.е. к большому отклонению от точки  $C$ . Положение шарика в точке  $D$  на плоскости на первый взгляд кажется устойчивым, так как если возмутить шарик, переставив его в точку, близкую к точке  $D$ , он в этой новой точке и останется. Но ограничившись только таким возмущением, мы придем к неверному выводу, поскольку не исследовали все возмущения. Действительно, если мы придадим шарику даже малую начальную скорость, то за достаточное время он далеко откатится от точки  $D$  (трение, конечно, не учитывается). Таким образом, положение равновесия шарика на плоскости неустойчиво, но оно имеет характерную особенность: рядом с ним, сколь угодно близко к нему есть сколь угодно много других (смежных) положений равновесия. Такого рода положения равновесия выделяют среди неустойчивых и называют *положениями безразличного равновесия*.

## 12.2. Метод Эйлера

**12.2.1.** Следуя Эйлеру, рассмотрим сжатый стержень, концы которого шарнирно закреплены (рис. 12.4  $a$ ). Такой стержень называют *стойкой Эйлера*. Если он идеально прямой и сила  $P$  приложена строго вдоль оси стержня, то прямолинейное состо-

яние стержня является состоянием его равновесия. Попробуем найти такую величину сжимающей силы, при которой изогнутое состояние стержня (рис. 12.4 б) также является состоянием его равновесия.

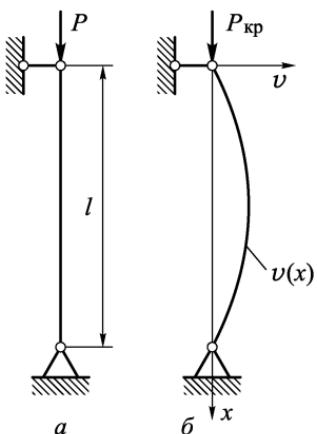


Рис. 12.4

Такую силу (если она, конечно, найдется) назовем *критической* и обозначим через  $P_{\text{кр}}$ . Введем показанную на рис. 12.4 б систему координат, тогда функция  $v(x)$  окажется прогибом стержня. Отбросим опоры, заменим их реакциями и рассмотрим равновесие данной на рис. 12.5 отсеченной части стержня. Из условий  $\sum P_x = 0$  и  $\sum P_y = 0$  следует, что в сечении  $C$  возникают такая продольная  $N$  и перерезывающая  $Q$  силы, что вертикальная составляющая их равнодействующей равна  $P_{\text{кр}}$ , а горизонтальная — нулю. Последнее

условие равновесия  $\sum M_c = 0$  имеет вид

$$\sum M_c = 0 : M_z - P_{\text{кр}}v = 0. \quad (12.2.1)$$

Рассматривая изогнутое состояние стойки, мы фактически исследуем ее возмущенное состояние. А возмущения должны

быть малы, следовательно, прогибы  $v(x)$  будем считать малыми. Поэтому можно воспользоваться известным из теории изгиба (п. 8.6.1) соотношением закона Гука  $\frac{d^2v}{dx^2} = v'' \approx \pm \frac{M_z}{EJ_z}$ . Знак в нем определяется принятой системой координат и правилом знаков для  $M_z$ . Как видно из рис. 12.6, изгибающие моменты, принятые положительными при составлении уравнения равновесия

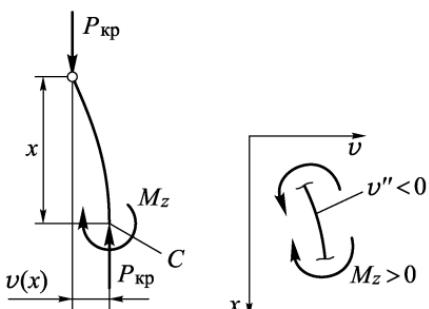


Рис. 12.5

Рис. 12.6

(12.2.1), приводят к такому изгибу балки, что  $v'' < 0$ . Поэтому в рассматриваемом случае

$$v'' = -\frac{M_z}{EJ_z}. \quad (12.2.2)$$

Исключив с помощью этого соотношения  $M_z$  из уравнения (12.2.1), придем к следующему линейному дифференциальному

уравнению с постоянными коэффициентами:

$$v'' + k^2 v = 0, \quad k^2 = \frac{P_{\text{кр}}}{EJ_z}. \quad (12.2.3)$$

Корни соответствующего ему характеристического уравнения чисто мнимые и равны  $\pm ik$ . Поэтому общее решение уравнения (12.2.3) имеет вид

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx. \quad (12.2.4)$$

Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  должны быть определены из граничных условий, которые соответствуют условиям закрепления концов балки:

$$v(0) = 0, \quad v(l) = 0. \quad (12.2.5)$$

Подставив в эти условия решение (12.2.4), приходим к двум уравнениям

$$C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0, \quad C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = 0. \quad (12.2.6)$$

Отсюда следует, что  $C_2 = 0$  и

$$C_1 \sin kl = 0. \quad (12.2.7)$$

Это уравнение имеет два принципиально различных решения.

1.  $C_1 = 0$ . Этот случай, учитывая, что и  $C_2 = 0$ , приводит нас к решению  $v \equiv 0$ . Так как разыскиваются равновесные состояния балки, то это решение соответствует уже известному нам факту, что прямолинейное (неизогнутое) состояние стойки является состоянием равновесия. А то, что равен нулю прогиб  $v$ , который здесь играет роль возмущений, лишает нас возможности высказать какие-либо суждения об устойчивости этого состояния.

2.  $C_1 \neq 0$ . Но тогда для выполнения условия (12.2.7) необходимо, чтобы

$$\sin kl = 0. \quad (12.2.8)$$

А это возможно, если

$$kl = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12.2.9)$$

Отсюда, так как  $k^2 = P_{\text{кр}}/EJ_z$ , следует, что

$$P_{\text{кр}}^{(n)} = \frac{n^2 \pi^2 E J_z}{l^2}, \quad v = C_1 \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12.2.10)$$

**12.2.2.** Чтобы понять механический смысл полученного результата, рассмотрим случай, когда  $n = 1$ .

Так как разыскиваются состояния равновесия стойки, то этот случай означает, что при  $P_{\text{кр}} = P_{\text{кр}}^{(1)} = \pi^2 E J_z / l^2$  изогнутое (возмущенное) состояние стойки

$$v = C_1 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (12.2.11)$$

является состоянием равновесия при любых  $C_1 \neq 0$ . Ясно, что  $C_1$  — максимальный прогиб стойки, равный в рассматриваемом

случае прогибу ее средней точки. Поэтому все показанные на рис. 12.7 изогнутые состояния стойки наряду с ее прямолинейным состоянием также являются состояниями ее равновесия. Поскольку  $C_1$  — любое неравное нулю число, то приходим к выводу, что при  $P_{kp} = P_{kp}^{(1)}$  у стойки, кроме прямолинейного состояния равновесия, появилось сколь угодно много сколь угодно близких к прямолинейному смежных изогнутых состояний равновесия. Таким образом, прямолинейное состояние равновесия стойки при  $P_{kp} = P_{kp}^{(1)}$  стало безразличным, т.е. механически эквивалентным состоянию шарика на плоскости.

Рис. 12.7

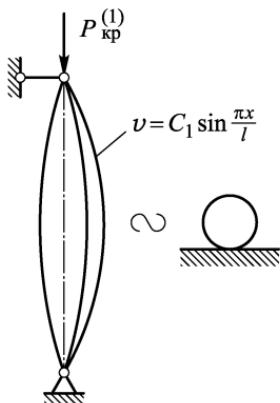
А безразличное состояние равновесия, как было установлено ранее, относится к неустойчивым.

**12.2.3.** Примененный здесь метод исследования называют *методом Эйлера*. Чтобы избежать ошибок при его использовании и при толковании полученных с его помощью результатов, необходимо четко понять, что он устанавливает только следующее.

1. При  $P \neq P_{kp}^{(n)}$  уравнение (12.2.3) при условиях (12.2.5) допускает единственное решение  $v \equiv 0$ . Это означает, что в этих случаях у стойки есть единственное состояние равновесия — прямолинейное.

2. При  $P = P_{kp}^{(n)}$  у уравнения (12.2.3) кроме тривиального решения  $v \equiv 0$  появляется множество решений  $v = C_1 \sin \frac{n\pi x}{l}$ , где  $C_1$  — любое не равное нулю число. То есть у стойки, кроме прямолинейного состояния равновесия, появляются смежные изогнутые состояния.

Никаких сведений о том, является ли прямолинейное состояние стойки при  $P \neq P_{kp}^{(n)}$  устойчивым или неустойчивым, метод Эйлера не дает. Об этом можно судить, опираясь на результаты эксперимента. Простейшие эксперименты показывают, что при малых сжимающих силах  $P < P_{kp}^{(1)}$  стойка устойчива. Для того чтобы в эксперименте сделать силу  $P$  большей, чем  $P_{kp}^{(1)}$ , придется принять какие-то меры, чтобы не дать ей изогнуться, например, поставить промежуточную опору (рис. 12.8). Но, как



только эта опора будет убрана, стойка сразу же начнет сильно изгибаться. Такое поведение свидетельствует о неустойчивости ее прямолинейного состояния при  $P > P_{\text{кр}}^{(1)}$  и позволяет заключить, что реальной критической силой, при которой прямолинейное состояние стойки становится неустойчивым или, другими словами, теряет устойчивость, является сила

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_z}{l^2}. \quad (12.2.12)$$

**12.2.4.** Следует заметить, что проведенный здесь анализ основан на использовании соотношения закона Гука  $v'' = \pm M_z/EJ_z$ , которое справедливо только при малых прогибах. Поэтому  $C_1 \ll l$ , т.е. возмущения малы. Если взять точное выражение для кривизны (8.6.2), то вместо уравнения (12.2.3) мы придем к нелинейному дифференциальному уравнению

$$\frac{v''}{[1 + (v')^2]^{3/2}} + k^2 v = 0. \quad (12.2.13)$$

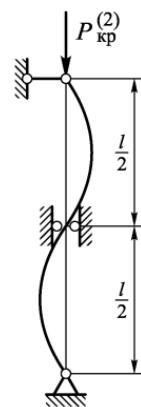


Рис. 12.8

Решение этого уравнения можно свести к эллиптическим функциям Якоби. Представление о множестве решений уравнения (12.2.13) дает диаграмма на плоскости  $Pv_{\text{max}}$  (рис. 12.9), где  $v_{\text{max}}$  — максимальный прогиб стойки. Прямая  $OABE$ , совпадающая с осью  $P$ , соответствует множеству прямолинейных состояний стойки. Кривая  $CAD$  определяет множество состояний стойки, упругая линия которых имеет одну полуволну, кривая  $GBF$  — две полуволны и т.д. Если на этой же диаграмме показать множество, соответствующее решениям уравнения (12.2.3), то оно, кроме прямой  $OABE$ , будет

состоять из показанных пунктиром прямых линий ( $P = P_{\text{кр}}^{(1)}$ ,  $P = P_{\text{кр}}^{(2)}$ , ...).

Как видим, точное и приближенное решения вблизи точек  $A$ ,  $B$ , ... близки как кривая с касательной вблизи точки касания. Поэтому уравнение (12.2.3) при малых прогибах  $v_{\text{max}} \ll l$  с достаточной точностью отражает поведение идеальной стойки при сжатии. Особенности поведения неидеальных (реальных) стоек

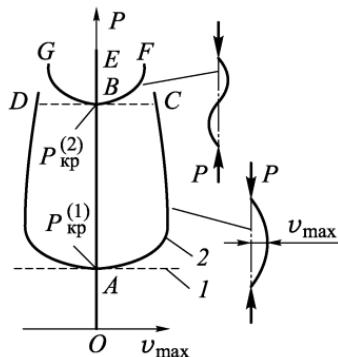


Рис. 12.9

подробно будут обсуждены в разд. 12.6. Здесь же мы, забегая вперед, укажем, что у реальных стоек при приближении сжимающей силы к критическому значению начинают резко нарастать прогибы, что и наблюдается в эксперименте.

**12.2.5.** Рассмотрим стойки, по-другому закрепленные. Для стойки, один конец которой защемлен, а другой — свободен (рис. 12.10 *a*), введем систему координат, связанную со свободным концом. Тогда отсеченная часть (рис. 12.10 *b*), из условий равновесия которой исходим, зеркально совпадет с отсеченной частью для стойки Эйлера, показанной на рис. 12.5. Поэтому после аналогичных рассуждений мы придем

к совпадающему с (12.2.3) уравнению

$$v'' + k^2 v = 0, \quad k^2 = P_{\text{кр}}/EJ_z$$

с тем же общим решением

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx.$$

Различие здесь в условиях закрепления стойки, из которых разыскиваются постоянные интегрирования  $C_1, C_2$ . Система координат на рис. 12.10 выбрана так, что

$$v(0) = 0, \quad v'(l) = 0. \quad (12.2.14)$$

Последнее условие отражает то, что стойка защемлена и поэтому касательная к ее упругой линии при  $x = l$  всегда параллельна оси  $x$ . Эти условия приводят к двум уравнениям

$$C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0, \quad C_1 k \cos kl - C_2 k \sin kl = 0. \quad (12.2.15)$$

Из них следует, что изогнутые формы равновесия стойки ( $C_1 \neq 0$ ) существуют при  $\cos kl = 0$ , т.е. при

$$kl = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots, \frac{2n-1}{2}\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12.2.16)$$

Отсюда получаем, что

$$P_{\text{кр}}^{(n)} = \frac{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 EJ_z}{l^2}, \quad v = C_1 \sin \frac{2n-1}{2l} \pi x, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12.2.17)$$

Так же, как и ранее, стойка фактически теряет устойчивость (равновесие стойки становится безразличным) при наименьшей

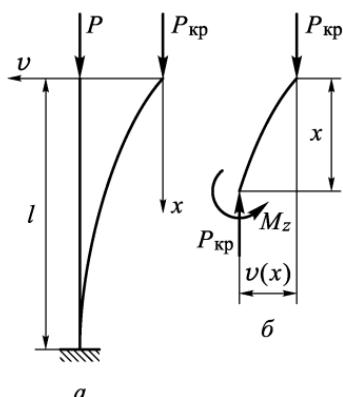


Рис. 12.10

из  $P_{\text{кр}}^{(n)}$ , т.е. при силе ( $n = 1$ ):

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_z}{4l^2} = \frac{\pi^2 E J_z}{(2l)^2}. \quad (12.2.18)$$

При этом у стойки, кроме прямолинейной, появляются смежные изогнутые равновесные формы, определяемые выражением

$$v(x) = C_1 \sin \frac{\pi x}{2l}, \quad C_1 \neq 0. \quad (12.2.19)$$

Рассмотрим стойку, показанную на рис. 12.11 а. Один конец ее защемлен, другой — шарнирно оперт. При рассмотрении равновесия ее отсеченной части (рис. 12.11 б) необходимо учесть реакцию  $R$  ее верхней опоры, возникновение которой легко объяснить, если, рассматривая равновесие отсеченной части  $AB$  стойки, учесть, что кривизна упругой линии в точке  $B$ , а значит, и изгибающий момент в этом сечении стойки равны нулю. Тогда условие  $\sum M_c = 0$  принимает вид

$$M_z - P_{\text{кр}} v = Rx. \quad (12.2.20)$$

Так как при выбранной системе координат и положительном направлении  $M_z$  имеет место  $v'' = -M_z/EJ_z$ , приходим к уравнению

$$v'' + k^2 v = -rx, \quad k^2 = P_{\text{кр}}/EJ_z, \quad r = R/EJ_z. \quad (12.2.21)$$

В отличие от (12.2.3) это уравнение неоднородное, и его общее решение состоит из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного. Поэтому его можно записать в виде

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - \frac{r}{k^2} x. \quad (12.2.22)$$

В этом решении, кроме постоянных интегрирования  $C_1$ ,  $C_2$ , неизвестна также величина  $r$  (так как неизвестна реакция  $R$ ). Поэтому необходимо поставить три условия, отражающие условия закрепления стойки:

$$v(0) = 0, \quad v(l) = 0, \quad v'(l) = 0. \quad (12.2.23)$$

Из первого условия следует, что  $C_2 = 0$ , а два оставшихся условия приводят к системе линейных алгебраических уравнений

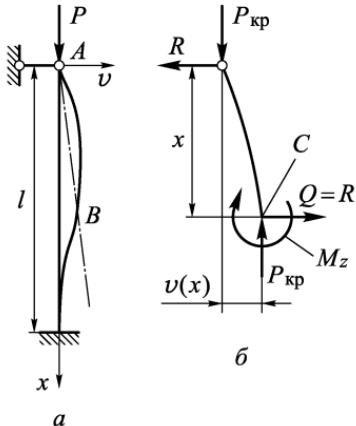


Рис. 12.11

для  $C_1$  и  $r$ :

$$\begin{aligned} C_1 \sin kl - \frac{r}{k^2} l &= 0, \\ C_1 k \cos kl - \frac{r}{k^2} &= 0. \end{aligned} \quad (12.2.24)$$

Так как система однородна, то возможны два случая.

**1. Определитель системы не равен нулю.** Тогда система имеет единственное решение  $C_1 = 0, r = 0$ , которое означает, что  $v \equiv 0$ , т.е. что стойка имеет в этом случае единственное прямолинейное состояние равновесия.

**2. Определитель системы равен нулю.** В этом случае система имеет ненулевые решения, а ее уравнения линейно зависимы, и, например, из первого уравнения (12.2.24) следует, что

$$r = C_1 k^2 \frac{\sin kl}{l}, \quad \text{где } C_1 \neq 0.$$

С учетом этого, а также имея в виду, что  $C_2 = 0$ , получаем из (12.2.22) изогнутую равновесную форму стойки:

$$v = C_1 \left( \sin kx - \frac{\sin kl}{l} x \right) \quad (C_1 \neq 0). \quad (12.2.25)$$

Критическая сила определяется из условия равенства нулю определителя системы (12.2.24):

$$\begin{vmatrix} \sin kl - l/k^2 \\ k \cos kl - r/k^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (12.2.26)$$

Раскрывая этот определитель, приходим к уравнению  $\sin kl - -kl \cos kl = 0$ . Отсюда получаем для определения  $kl$  трансцендентное уравнение

$$\operatorname{tg} kl = kl. \quad (12.2.27)$$

Чтобы получить представление о множестве решений этого уравнения, заметим, что оно состоит из множества точек пересечения графиков двух функций аргумента  $kl$

$$f_1 = \operatorname{tg} kl, \quad f_2 = kl,$$

которые показаны на рис. 12.12. Из рисунка видно, что наименьший положительный корень уравнения (12.2.27) немножко меньше  $\frac{3}{2}\pi \approx 4,71$ .

Задав его приближенное значение, например  $(kl)_0 = 4$ , можно далее уточнить его с помощью одного из итерационных методов. Чтобы успешно применить метод простой итерации, достаточно преобразовать уравнение (12.2.27) к виду

$$kl = \pi + \operatorname{arctg} kl.$$

Тогда итерационный процесс принимает вид

$$(kl)_0 = 4, \quad (kl)_i = \pi + \arctg (kl)_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Его можно легко реализовать даже на микрокалькуляторе. В результате быстро придем к искомому решению  $kl = 4,49$ . Тогда, учитывая, что  $k^2 = P_{\text{кр}}/EJ_z$ , получаем

$$P_{\text{кр}} = \frac{(4,49)^2 E J_z}{l^2} = \frac{\pi^2 E J_z}{(0,7l)^2}. \quad (12.2.28)$$

**12.2.6.** Сравнивая выражения (12.2.12), (12.2.18) и (12.2.28) для критических сил различным образом закрепленных стоек, замечаем, что их можно записать в виде

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_z}{(\mu l)^2}. \quad (12.2.29)$$

Формы потерь устойчивости этих стоек показаны на рис. 12.13 а, б, в. Видно, что длина  $\mu l$ , называемая *приведенной длиной*, соответствует длине полуволны синусоиды на форме по-

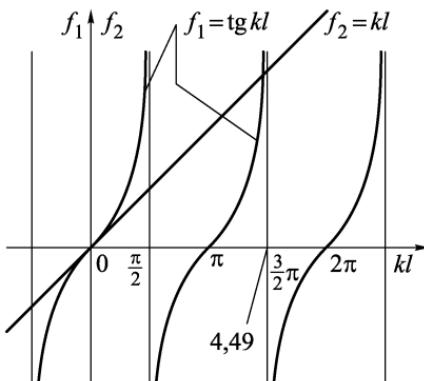


Рис. 12.12

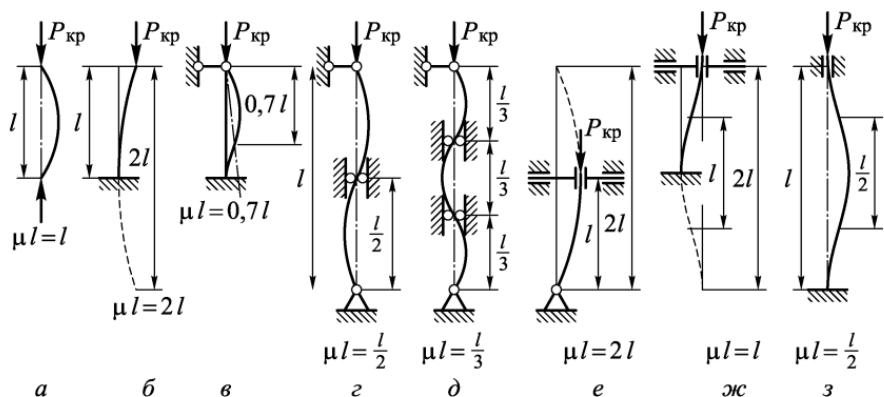


Рис. 12.13

тери устойчивости стойки. Это подтверждается также анализом критических сил и форм потери устойчивости стоек с промежуточными опорами, показанных на рис. 12.13 г, д. Опоры поставлены так, что могут реализоваться только формы потери устойчивости (12.2.10) при  $n = 2$  и  $n = 3$ . При этом приведенная длина  $\mu l$  равна соответственно  $\frac{1}{2}l$  и  $\frac{1}{3}l$ .

Таким образом, знание приведенной длины  $\mu l$ , т.е. длины полуволны синусоиды на форме потери устойчивости стойки, позволяет подсчитать критическую силу по формуле (12.2.29). Рассматривая с этой точки зрения стойки, показанные на рис. 12.13 *е*, *ж*, з легко найти для них приведенные длины.

Формула (12.2.29) называется *обобщенной формулой Эйлера*. Входящий в нее коэффициент приведения длины  $\mu$  определяется условиями закрепления стойки.

### 12.3. Энергетический метод

**12.3.1.** Еще Торричелли (1644) установил, что положение системы тел под действием сил тяжести будет устойчивым, если центр тяжести этой системы занимает наимизшее положение. Использование понятия энергии позволило Лагранжу обобщить принцип Торричелли на случай произвольных потенциальных сил и сформулировать следующий критерий устойчивости состояния равновесия консервативной системы.

*Если в некотором состоянии системы ее потенциальная энергия имеет строгий минимум, то это состояние является состоянием устойчивого равновесия системы.*

*Состояния равновесия, в которых потенциальная энергия системы имеет строгий максимум, являются неустойчивыми.* Это было доказано А.М. Ляпуновым и Н.Г. Четаевым.

Промежуточный случай, когда потенциальная энергия системы в состоянии равновесия имеет экстремум, не являющийся ни строгим минимумом, ни строгим максимумом, пока исчерпывающе не исследован. Но в нашем случае, когда переход стержня из состояния устойчивого равновесия в неустойчивое определяется одним параметром — сжимающей силой, такое промежуточное состояние будет критическим, а сила, при которой оно возникает, явится критической силой.

Проанализируем с точки зрения критерия Лагранжа прямолинейное состояние стойки Эйлера. Потенциальную энергию в этом состоянии обозначим через  $\mathcal{E}_0$ . Сравним прямолинейное состояние со смежным изогнутым состоянием, в котором стойка получила прогиб  $v(x)$  (рис. 12.14).

Энергию стойки в изогнутом состоянии обозначим через  $\mathcal{E}_1$ . Прямолинейное состояние стойки будет устойчивым, если для

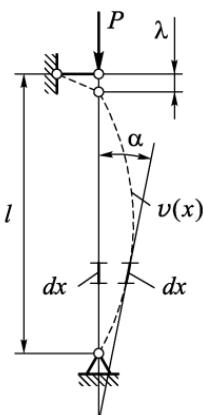


Рис. 12.14

любых  $v(x)$  его энергия  $\mathcal{E}_0$  строго меньше  $\mathcal{E}_1$ , т.е. если

$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0 > 0. \quad (12.3.1)$$

По сравнению с прямолинейным состоянием в изогнутой стойке накопилась потенциальная энергия изгиба  $\Pi$ . Но за счет изгиба стойки точка приложения сжимающей силы  $P$  опустилась на величину  $\lambda$ . И так как сила  $P$  совершила при этом работу  $A = P\lambda$ , то ее потенциальная энергия уменьшилась на величину  $A$ . Поэтому изменение потенциальной энергии системы стойка–сила равно

$$\Delta\mathcal{E} = \Pi - A. \quad (12.3.2)$$

Таким образом, прямолинейное состояние стойки устойчиво, если для любых малых прогибов  $v(x)$ , определяющих смежное состояние, выполняется условие

$$\Delta\mathcal{E} = \Pi - A > 0 \quad (12.3.3)$$

или, что равнозначно, условие

$$\Pi > A. \quad (12.3.4)$$

**12.3.2.** Найдем, как связаны  $\Pi$  и  $A$  с прогибом  $v(x)$ . Потенциальная энергия деформации равна (п. 8.7.6)

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_z^2}{EJ_z} dx.$$

Чтобы перейти в этом выражении к прогибам  $v(x)$ , вспомним (п. 8.6.1), что при малых прогибах при изгибе имеет место соотношение закона Гука  $v'' = \pm M_z/EJ_z$ . Поэтому

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_l EJ_z(v'')^2 dx. \quad (12.3.5)$$

Для определения работы  $A$  необходимо найти укорочение стойки  $\lambda$ , которое образуется за счет того, что при изгибе стойки каждый ее элемент  $dx$  поворачивается на угол  $\alpha$  (см. рис. 12.14) и поэтому его проекция на ось  $x$  станет короче на величину  $d\lambda = dx - dx \cos \alpha$ .

Так как угол  $\alpha$  мал, то  $\cos \alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ ,  $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ . Но  $\operatorname{tg} \alpha = v'$ ,

поэтому  $d\lambda = \frac{1}{2}(v')^2 dx$ .

Тогда

$$\lambda = \int_l d\lambda = \frac{1}{2} \int_l (v')^2 dx. \quad (12.3.6)$$

Таким образом,

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_l E J_z (v'')^2 dx - \frac{P}{2} \int_l (v')^2 dx. \quad (12.3.7)$$

Величина  $\Delta \mathcal{E}$  определяется формой функции  $v(x)$  и математически является функционалом. Для решения вопроса об устойчивости состояния необходимо рассмотреть всевозможные формы  $v(x)$ , т.е. всевозможные смежные (возмущенные) состояния стойки. Ясно, что  $\Delta \mathcal{E}$  больше нуля, когда больше нуля его минимальное значение. Так как минимум необходимо искать на множестве всевозможных функций  $v(x)$ , то мы приходим к стандартной задаче вариационного исчисления о поиске стационарного значения функционала  $\Delta \mathcal{E}$ , которая сводится к условию  $\delta(\Delta \mathcal{E}) = 0$ , где  $\delta$  означает вариацию.

Мы здесь не предполагаем рассматривать полную вариационную формулировку задачи об устойчивости, но читатель самостоятельно может убедиться, что уравнение Эйлера для функционала (12.3.7) сводится к дифференциальному уравнению (12.2.3) с граничными условиями (12.2.5). Таким образом, энергетический метод приводит к тем же результатам, что и метод Эйлера. Но он позволяет судить об устойчивости прямолинейного состояния стойки. Непосредственной проверкой можно убедиться, что при  $v(x) = C \sin(\pi x/l)$  и при  $P < P_{\text{кр}} = \pi^2 E J_z / l^2$  имеет место  $\Delta \mathcal{E} > 0$ , т.е. состояние стойки устойчиво, а слушаю  $P > P_{\text{кр}}$  соответствует  $\Delta \mathcal{E} < 0$ , и поэтому ее состояние неустойчиво.

**12.3.3.** Возможен и другой ход рассуждений, основанный на том, что признаком критического состояния является условие  $\Delta \mathcal{E} = 0$ . Из него с учетом (12.3.7) получаем

$$P = \frac{\int_l E J_z (v'')^2 dx}{\int_l (v')^2 dx}. \quad (12.3.8)$$

Из выражения (12.3.8) видно, что каждой функции  $v(x)$  соответствует свое значение  $P$ . Поэтому это выражение для  $P$  можно также рассматривать как функционал, и тогда задача определения критической силы сводится к определению минимума этого функционала. Таким образом,  $P_{\text{кр}} = \min(P)$ . А функцию  $v(x)$ , для которой достигается  $\min(P)$ , находим из необходимого условия минимума  $\delta P = 0$ . Получающееся из этого условия уравнение Эйлера для функционала (12.3.8) снова может быть сведено к уравнению (12.2.3) с условиями (12.2.5).

Казалось бы, ничего нового такой подход не дает. Но следует вспомнить, что функция и функционал вблизи своего экстремума (если он достигается не в угловой точке) изменяются слабо.

Это свойство позволяет получать на основе выражения (12.3.8) приближенные значения  $\bar{P}_{\text{кр}}$ , задаваясь функциями  $\bar{v}(x)$ , близкими по форме к той функции  $v(x)$ , которой соответствует  $P_{\text{кр}} = \min(P)$ . Причем по самому смыслу минимума приближенные значения критической силы окажутся несколько больше точного значения. Это можно объяснить также и из физических соображений. Ведь при потере устойчивости форма  $v(x)$  изогнутой оси стойки образуется в условиях, когда изгиб ее ничем не стеснен. Изгиб же стойки по другой форме  $\bar{v}(x)$  уже не будет свободным, для его реализации на стойку необходимо наложить дополнительные связи, за счет которых жесткость стойки повышается и критическая сила увеличивается.

Если для стойки Эйлера (стойки с шарнирно закрепленными краями) задать в качестве  $v(x)$  полученную методом Эйлера форму потери устойчивости  $v(x) = C \sin(\pi x/l)$ , то формула (12.3.8) даст после несложных вычислений точное значение  $P_{\text{кр}} = \pi^2 E J_z / l^2$ . Зададим теперь форму потери устойчивости приближенно в виде отрезка квадратичной параболы  $\bar{v}(x) = Cx(l-x)$ , выбранного так, чтобы удовлетворялись условия закрепления  $\bar{v}(0) = \bar{v}(l) = 0$ . Формула (12.3.8) даст нам приближенное значение  $\bar{P}_{\text{кр}} = 12EJ_z/l^2$ . Ошибка около 20 % является следствием довольно грубого приближения, не учитывающего, что из-за шарнирного закрепления стойки изгибающие моменты на ее концах также обращаются в нуль. Чтобы учесть это, зададим функцию  $\bar{v}(x)$  так, чтобы она удовлетворяла условиям

$$\bar{v}(0) = \bar{v}(l) = 0, \quad M_z(0) = M_z(l) = 0.$$

Последние условия, учитывая, что  $M_z = \pm E J_z v''$ , равносильны условиям

$$\bar{v}''(0) = \bar{v}''(l) = 0.$$

Чтобы последние условия были удовлетворены, зададим

$$\bar{v}''(x) = Cx(l-x).$$

Отсюда после двукратного интегрирования получаем

$$\bar{v}(x) = C \left( \frac{l}{6} x^3 - \frac{1}{12} x^4 + C_1 x + C_2 \right). \quad (12.3.9)$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определим из условий  $\bar{v}(0) = \bar{v}(l) = 0$ . Первое из них дает, что  $C_2 = 0$ . Из второго условия получим  $C_1 = -\frac{1}{12}l^3$ . С учетом этого после подстановки

выражения (12.3.9) в формулу (12.3.8) находим  $\bar{P}_{\text{кр}} = \frac{168}{17} \frac{E J_z}{l^2} = 9,88 \frac{E J_z}{l^2}$ , что отличается от точного значения только в третьем знаке.

Разобранный пример подтверждает, что при удачной аппроксимации формы потери устойчивости стойки формула (12.3.8) позволяет достаточно точно оценить критическую силу. Это особенно важно для тех случаев, когда метод Эйлера приводит к громоздким вычислениям или к дифференциальному уравнению, не имеющему точного решения.

**12.3.4.** Среди связей, которые накладывают опорные устройства, наиболее распространены следующие.

1. Запрещается прогиб сечения  $x = x_0$ , т.е.

$$v(x_0) = 0. \quad (12.3.10)$$

2. Запрещается поворот сечения  $x = x_0$ , т.е.

$$v'(x_0) = 0. \quad (12.3.11)$$

Альтернативными этим условиям являются соответственно такие:

1. Разрешается свободный прогиб сечения, т.е. отсутствует поперечная сила, равная реакции связи,

$$Q_y(x_0) = 0. \quad (12.3.12)$$

Так как  $dM_z/dx = Q_y$ , а  $M_z = \pm EJ_z v''$ , то это условие при  $EJ_z = \text{const}$  равносильно условию

$$v'''(x_0) = 0. \quad (12.3.13)$$

2. Разрешается свободный поворот сечения  $x = x_0$ , т.е.

$$M_z(x_0) = 0, \quad (12.3.14)$$

что равносильно условию

$$v''(x_0) = 0. \quad (12.3.15)$$

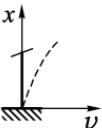
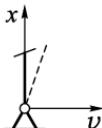
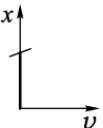
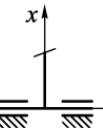
Зашемление	Шарнирное закрепление	Свободный конец	Скользящее защемление
			
$v(0)=0$	$v(0)=0$	$M_z(0)=0$	$v'(0)=0$
$v'(0)=0$	$M_z(0)=0$	$(v''(0)=0)$	$Q_y(0)=0$
	$(v''(0)=0)$	$Q_y(0)=0$	$(v'''(0)=0)$
		$(v'''(0)=0)$	

Рис. 12.15

Условия  $v(x_0) = 0$ ,  $v'(x_0) = 0$  часто называют *кинематическими*, а условия  $M_z(x_0) = 0$ ,  $Q_y(x_0) = 0$  и следующие из них:

$v''(x_0) = 0, v'''(x_0) = 0$  называют *статическими* (т.е. силовыми). На рис. 12.15 показаны различные варианты закрепления конца стойки и соответствующие им условия.

Возможны и более сложные опорные устройства. Например, на рис. 12.16 показано упругое опирание конца стойки на пружину жесткости  $k$ . Тогда прогиб  $v$  конца стойки сопровождается появлением упругой реакции  $R = kv$ . Но  $R = Q_y(0)$ , а для выбранных осей координат и положительных направлений  $Q_y$  и  $M_z$  дифференциальное соотношение и закон Гука имеют вид  $dM_z/dx = -Q_y$  и  $M_z = EJ_z v''$ . Поэтому это условие сводится к следующему:

$$kv(0) + EJ_z v''(0) = 0.$$

**12.3.5.** Удовлетворительную для практики оценку критической силы для стойки можно получить, если в качестве функций, аппроксимирующей форму потери устойчивости стойки, выбрать удовлетворяющий кинематическим и статическим условиям закрепления многочлен минимальной степени. Рассмотрим пример определения  $P_{kp}$  с помощью такого многочлена.

**Пример 12.1.** Для стержня, показанного на рис. 12.17, условиями закрепления будут

$$\begin{aligned} v(0) &= 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(b) = 0, \\ M_z(l) &= 0, \quad Q_y(l) = 0. \end{aligned} \quad (12.3.16)$$

Последние два из этих условий являются статическими и сводятся к следующим:

$$v''(l) = 0, \quad v'''(l) = 0. \quad (12.3.17)$$

Поскольку форма потери устойчивости определяется только с точностью до постоянного множителя, многочлен, удовлетворяющий этим пяти условиям, должен содержать по крайней мере шесть коэффициентов, т.е. это будет многочлен пятой степени:

$$\bar{v}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5.$$

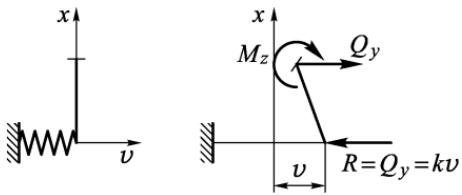


Рис. 12.16

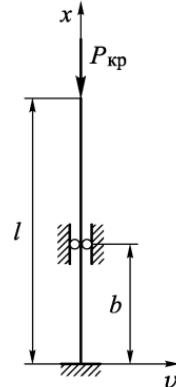


Рис. 12.17

Условия закрепления дают следующие уравнения для определения коэффициентов этого многочлена:

$$v(0) = 0 : \quad a_0 = 0,$$

$$v'(0) = 0 : \quad a_1 = 0,$$

$$v(b) = 0 : \quad a_2 b^2 + a_3 b^3 + a_4 b^4 + a_5 b^5 = 0,$$

$$v''(l) = 0 : \quad 2a_2 + 6a_3 l + 12a_4 l^2 + 20a_5 l^3 = 0,$$

$$v'''(l) = 0 : \quad 6a_3 + 24a_4 l + 60a_5 l^2 = 0.$$

Последние три уравнения составляют систему трех линейных уравнений для четырех коэффициентов  $a_2, a_3, a_4, a_5$ . Она позволяет три из этих коэффициентов, например,  $a_3, a_4, a_5$ , выразить через четвертый —  $a_2$ . Для этого систему запишем в виде

$$a_3 b + a_4 b^2 + a_5 b^3 = -a_2,$$

$$3a_3 l + 6a_4 l^2 + 10a_5 l^3 = -a_2,$$

$$a_3 l + 4a_4 l^2 + 10a_5 l^3 = 0.$$

Последнее уравнение для упрощения вычислений домножено на  $l$ . Дальнейшие вычисления проведем для  $b = \frac{1}{2}l$ . По правилу Крамера получаем

$$a_3 = a_2 \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad a_4 = a_2 \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad a_5 = a_2 \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где  $\Delta$  — определитель системы, а определители  $\Delta_1, \Delta_2$  и  $\Delta_3$  имеют вид

$$\Delta_1 = l^5 \begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -1 & 6 & 10 \\ 0 & 4 & 10 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = l^4 \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{8} \\ 3 & -1 & 10 \\ 1 & 0 & 10 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = l^3 \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -1 \\ 3 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Подсчеты дают:  $\Delta = \frac{23}{4}l^6$ ,  $\Delta_1 = -18l^5$ ,  $\Delta_2 = \frac{121}{8}l^4$ ,  $\Delta_3 = -\frac{17}{4}l^3$ .

После простых преобразований получаем многочлен

$$\bar{v}(x) = c(46l^3x^2 - 144l^2x^3 + 121lx^4 - 34x^5), \quad c = \frac{a_2 l}{8\Delta}.$$

Легко проверить, что он удовлетворяет всем условиям закрепления (12.3.16), (12.3.17). Использовав этот многочлен для

оценки по формуле (12.3.8), получаем

$$P_{kp} = \frac{\int_l^l E J_z (\bar{v}'')^2 dx}{\int_l^l (\bar{v}')^2 dx} = 7,26 \frac{E J_z}{l^2}.$$

Точное значение критической силы:  $P_{kp} = 6,22 E J_z / l^2$ . Вычисления в этом примере можно упростить, задав многочлен так, чтобы он сразу удовлетворял первым трем условиям (12.3.16):

$$\bar{v}(x) = cx^2(x - b)(1 + \alpha x + \beta x^2).$$

Здесь учтено, что при  $x = 0$  и  $x = b$  многочлен должен обращаться в нуль, т.е. эти точки являются корнями многочлена. Легко проверить и что возведение в квадрат первого сомножителя обеспечивает также выполнение условия  $v'(0) = 0$ .

Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  определяются из условий (12.3.17).

Пример 12.2. Эффективность энергетического подхода становится особенно заметна для стоек с непостоянной жесткостью и сложной нагрузкой. Рассмотрим стойку, показанную на рис. 12.18. Если задано возмущение  $v(x)$ , то приращение потенциальной энергии изгиба этой стойки равно

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_l^l E J(v'')^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^b E J_2(v'')^2 dx + \frac{1}{2} \int_b^l E J_1(v'')^2 dx.$$

Обозначим через  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  опускания при возмущении точек приложения сил  $P_1$  и  $P_2$ . Тогда эти силы совершают работу

$$A = P_1 \lambda_1 + P_2 \lambda_2.$$

Но  $\lambda_1$  образуется за счет поворота при возмущении  $v(x)$  всех элементов  $dx$  стойки, а  $\lambda_2$  — только элементов на участке от заделки до промежуточной опоры, т.е.

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \int_0^l (v')^2 dx, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \int_0^b (v')^2 dx.$$

В критическом состоянии  $\Pi = A$ , поэтому

$$P_{kp} = \frac{\int_0^b E J_2(v'')^2 dx + \int_b^l E J_1(v'')^2 dx}{\int_0^l (v')^2 dx + \frac{P_2}{P_1} \int_0^b (v')^2 dx}. \quad (12.3.18)$$

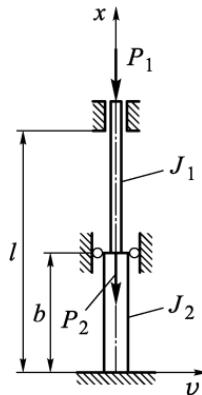


Рис. 12.18

Для приближенного задания формы потери устойчивости можно принять многочлен, удовлетворяющий условиям закрепления стойки

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(b) = 0, \quad v(l) = 0, \quad v'(l) = 0.$$

Используя прием, указанный в конце предыдущего примера, такой многочлен можно выписать сразу:

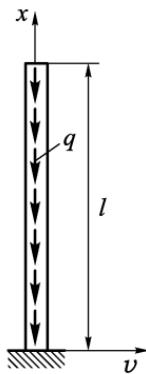


Рис. 12.19

$$v(x) = cx^2(x - b)(x - l)^2.$$

Если задать  $b = 0,5l$ ,  $P_1 = P_2$ ,  $J_2 = 2J_1$ , то после подстановки  $v(x)$  в (12.3.18) и вычислений получим

$$P_{1 \text{ кр}} = 90EJ_1/l^2.$$

**Пример 12.3.** Рассмотрим устойчивость стержня постоянного сечения под действием собственного веса. Эта задача сводится к определению критического значения интенсивности  $q$  равномерно распределенной сжимающей продольной нагрузки (рис. 12.19). Решение этой задачи методом Эйлера приводит к дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами, которое можно проинтегрировать с помощью бесселевых функций. В результате придем к решению:

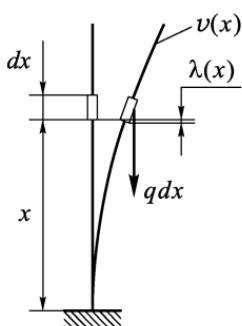


Рис. 12.20

$$q_{\text{кр}} = 7,84EJ/l^2.$$

При использовании энергетического подхода учтем, что потенциальная энергия изгиба стойки при возмущенном прогибе  $v(x)$  равна

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_l EJ(v'')^2 dx.$$

Нагрузка  $q$  совершает при возмущении стойки работу, для подсчета которой рассмотрим эту нагрузку как совокупность сил, действующих на элементах  $dx$ . Одна из таких сил, действующая на элементе с координатой  $x$  (рис. 12.20), совершает работу  $dA$  на укорочении  $\lambda(x)$  длины стойки  $x$ , образовавшемся за счет поворота ее элементов на этой длине. Поэтому

$$dA = q dx \cdot \lambda(x) = q dx \cdot \frac{1}{2} \int_0^x (v'(\xi))^2 d\xi.$$

Тогда работа всей нагрузки будет

$$A = \int_0^l dA = \frac{1}{2} \int_0^l q \left( \int_0^x (v'(\xi))^2 d\xi \right) dx.$$

Зададим аппроксимирующую функцию возмущенного прогиба в форме

$$v(x) = c \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right).$$

Нетрудно видеть, что эта функция удовлетворяет условиям

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v''(l) = 0.$$

Условие  $Q(l) = 0$  не удовлетворяется, так как  $v'''(l) \neq 0$ . Но, несмотря на это, из условия, что в критическом состоянии  $\Pi = A$ , получаем после простых вычислений

$$q_{kp} = \frac{\int_0^l EJ(v'')^2 dx}{\int_0^l \left( \int_0^x (v'(\xi))^2 d\xi \right) dx} = 8,29 \frac{EJ}{l^3}.$$

Читатель может в качестве упражнения подобрать многочлен, удовлетворяющий всем кинематическим и статическим условиям на концах стойки. Использование такого полинома приводит к результату  $q_{kp} = 8,03EJ/l^3$ .

## 12.4. Расчеты на устойчивость за пределами пропорциональности

**12.4.1.** При получении критических нагрузок как методом Эйлера, так и энергетическим методом предполагалось, что деформации стойки удовлетворяют закону Гука. К сожалению, большинство реальных стоек имеют такие размеры, что критические напряжения  $\sigma_{kp}$ , соответствующие подсчитанным по формуле Эйлера (12.2.29) критическим нагрузкам  $P_{kp} = \pi^2 E J / (\mu l)^2$ , превышают предел пропорциональности материала  $\sigma_{pp}$ , т.е.  $\sigma_{kp} > \sigma_{pp}$ . Поэтому для таких стоек формула Эйлера неприменима. Для дальнейшего удобно пользоваться формулой для критических напряжений, которая получается после деления формулы Эйлера на площадь поперечного сечения стойки:

$$\sigma_{kp} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \text{ где } \sigma_{kp} = \frac{P_{kp}}{F}; \quad \lambda = \mu l \sqrt{\frac{F}{J}}. \quad (12.4.1)$$

Введенный здесь безразмерный параметр  $\lambda$  зависит только от геометрических размеров стойки и условий ее закрепления.

Он называется *гибкостью стойки*, так как чем он больше, тем легче изогнуть стойку. Необходимо заметить, что, вообще говоря, гибкость стойки при изгибе ее в главных плоскостях  $xy$  и  $xz$  различна, так как могут быть различны главные центральные моменты инерции  $J_z$  и  $J_y$  и условия закрепления при изгибе в разных плоскостях. Так, для стойки, показанной на рис. 12.21,  $J_z > J_y$ , в то же время при изгибе в плоскости  $xy$  концы стойки закреплены шарнирно и поэтому  $\mu = 1$ ; при изгибе же в плоскости  $xz$  концы стойки защемлены, поэтому  $\mu = 0,5$ . Стойка

потеряет устойчивость, изгибаясь в той плоскости, где гибкость больше. Поэтому в формуле (12.4.1) нужно в качестве параметра гибкости принимать наибольшую из двух величин  $1 \cdot l\sqrt{F/J_z}$  и  $0,5 \cdot l\sqrt{F/J_y}$ .

Формулу (12.4.1) также называют обобщенной формулой Эйлера. Она применима, если

$$\sigma_{kp} \leq \sigma_{pp}. \quad (12.4.2)$$

Это условие более подробно можно записать в виде

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{pp}. \quad (12.4.3)$$

Поэтому условие (12.4.2) можно заменить равносильным условием

$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pp}}} = \lambda_{pp}. \quad (12.4.4)$$

Здесь  $\lambda_{pp}$  — минимальная гибкость, при которой еще можно пользоваться формулой Эйлера.

Условием (12.4.4) удобно пользоваться при практических расчетах, так как гибкость  $\lambda = \mu l \sqrt{F/J}$  определяется конструктивными параметрами стойки и может быть легко подсчитана. Стержни, гибкость которых больше  $\lambda_{pp}$ , т.е. для расчета которых можно использовать формулу Эйлера (12.4.1), называют *стойками большой гибкости*.

Методы расчета на устойчивость стержней, гибкость которых  $\lambda$  меньше, чем  $\lambda_{pp}$  (т.е. стержней, к которым неприменима формула Эйлера), развивались, начиная с последней четверти XIX века, по двум направлениям. Первое направление — назовем его *эмпирическим* — основывалось на обобщении экспериментальных данных. Второе направление — *теоретическое* — составили попытки обобщить на неупругие деформации метод

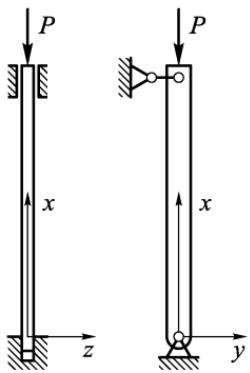


Рис. 12.21

Эйлера. Нам кажется интересным проследить, как оба этих направления объединились, наконец, в едином подходе.

**12.4.2.** Первые корректные опыты по определению критических нагрузок сжатых стержней были проведены И. Баушингером в 1886 г. В этих опытах впервые особое внимание было обращено на реализацию шарнирного закрепления концов стойки и совпадение линии действия сжимающей силы с осью образца. Эти опыты были дополнены и обобщены Л. Тетмайером в 1890 г. Эксперименты проводились над образцами из малоуглеродистой стали. Нанося результаты экспериментов на плоскость  $\sigma_{kp} \lambda$ , Тетмайер приходит к следующим выводам.

1. Для большой гибкости, т.е. при  $\lambda \geq \lambda_{kp}$ , формула Эйлера удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными. На рис. 12.22 это участок  $AB$  квадратичной гиперболы Эйлера  $\sigma_{kp} = \pi^2 E / \lambda^2$ , показанный сплошной линией. Пунктиром показан тот участок  $AC$  гиперболы Эйлера, который не согласуется с экспериментом.

2. Для стоек из пластичного материала критические напряжения  $\sigma_{kp}$  ограничены сверху пределом текучести материала, т.е.  $\sigma_{kp} \leq \sigma_t$ . На рис. 12.22 этой границей является прямая  $\sigma_{kp} = \sigma_t$ . Причем  $\sigma_{kp} = \sigma_t$  для очень коротких стоек, т.е. для стоек с очень малой гибкостью. Это наблюдается при испытании на сжатие коротких цилиндрических образцов, в процессе текучести которых не происходит изгиба образца, а он в результате пластических деформаций принимает бочкообразную формулу (п. 3.2.4, рис. 3.12). Из экспериментов установлено, что такая деформация характерна для стальных стоек, гибкость которых не превышает величины  $\lambda_t \approx 0,2\lambda_{pp}$  (участок  $DF$  на рис. 12.22). Такие стойки будем далее называть *стойками малой гибкости*. Как показали дальнейшие эксперименты со стойками из других пластичных металлов, величина  $\lambda_t$  вполне укладывается в пределы  $0,2 \div 0,4\lambda_{pp}$ . При отсутствии точных экспериментальных данных при расчетах обычно принимают  $\lambda_t = 0,2\lambda_{pp}$ , обеспечивая, таким образом, некоторый запас по устойчивости.

3. На участке между точками  $F$  и  $A$  для стоек средней гибкости ( $\lambda_t < \lambda < 0,2\lambda_{pp}$ ) Тетмайер предложил аппроксимировать зависимость  $\sigma_{kp}(\lambda)$  прямой линией  $FA$ :

$$\sigma_{kp} = a - b\lambda. \quad (12.4.5)$$

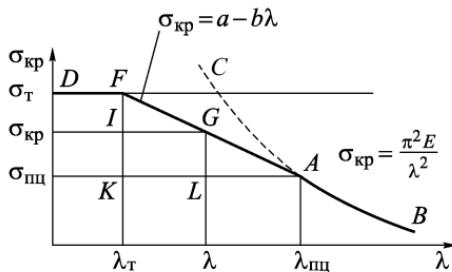


Рис. 12.22

Коэффициенты  $a$  и  $b$  в этой зависимости можно получить с помощью выражения для прямой линии, проходящей через точки  $F$  и  $A$ , с координатами  $(\lambda_t, \sigma_t)$  и  $(\lambda_{pc}, \sigma_{pc})$

$$\frac{\sigma_{kp} - \sigma_t}{\sigma_{pc} - \sigma_t} = \frac{\lambda - \lambda_t}{\lambda_{pc} - \lambda_t}.$$

Это соотношение сразу следует из подобия треугольников  $FGI$  и  $FAK$ . Приведя его к форме (12.4.5), получим

$$b = \frac{\sigma_t - \sigma_{pc}}{\lambda_{pc} - \lambda_t}, \quad a = \frac{\sigma_t \lambda_{pc} - \sigma_{pc} \lambda_t}{\lambda_{pc} - \lambda_t} = \sigma_t + \lambda_t b = \sigma_{pc} + \lambda_{pc} b.$$

Таким образом, предложение Тетмайера по определению критических напряжений сводится к тому, что зависимость  $\sigma_{kp}(\lambda)$  определяется ломаной линией  $DFGAB$ , или, что одно и то же, эмпирической формулой

$$\sigma_{kp} = \begin{cases} \sigma_t & \text{при } \lambda \leq \lambda_t, \\ a - b\lambda & \text{при } \lambda_t < \lambda < \lambda_{pc}, \\ \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} & \text{при } \lambda \geq \lambda_{pc}. \end{cases} \quad (12.4.6)$$

При практических расчетах удобно изобразить диаграмму  $\sigma_{kp}(\lambda)$ , определяемую формулой (12.4.6), на миллиметровой бумаге.

Обратим внимание на тот факт, что для построения этой диаграммы нужно знать только следующие характеристики материала стойки:  $E$ ,  $\sigma_{pc}$ ,  $\sigma_t$ .

При наличии диаграммы  $\sigma_{kp}(\lambda)$  расчет критических напряжений для конкретной стойки сводится к определению ее гибкости  $\lambda = \mu l \sqrt{F/J}$  по конструктивным параметрам стойки и к снятию с графика критических напряжений  $\sigma_{kp}$ , соответствующих подсчитанной гибкости  $\lambda$ .

**12.4.3.** Теоретические исследования устойчивости сжатых стержней за пределами пропорциональности развивались по пути учета в рассуждениях метода Эйлера реальной диаграммы напряжений  $\sigma(\varepsilon)$  материала. Напомним, что при напряжениях выше  $\sigma_{pc}$  зависимость деформаций от напряжений определяется тем, растут эти деформации или убывают. На рис. 12.23 показана диаграмма  $\sigma(\varepsilon)$  при сжатии. Если при напряжениях, соответствующих точке  $A$ , деформация растет, т.е. происходит докрутка, то напря-

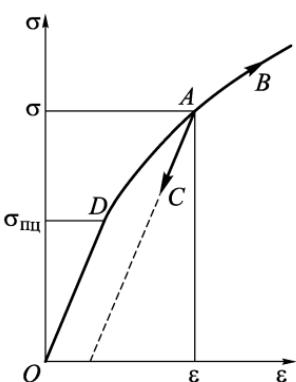


Рис. 12.23

мая  $\sigma(\varepsilon)$  при сжатии. Если при напряжениях, соответствующих точке  $A$ , деформация растет, т.е. происходит докрутка, то напря-

жения растут по кривой  $AB$ . При малом увеличении деформаций  $\Delta\varepsilon$  изменение напряжений  $\Delta\sigma$  в этом случае можно описать с помощью так называемого касательного или тангенциального модуля

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}. \quad (12.4.7)$$

Тогда  $\Delta\sigma = E_t \Delta\varepsilon$ .

Если же деформации убывают, то напряжения изменяются по закону разгрузки  $AC$ . Тогда, учитывая, что разгрузка происходит по закону упругого модуля (участок  $AC$  параллелен участку закона Гука  $OD$ ), имеет место связь

$$\Delta\sigma = E \Delta\varepsilon.$$

Ф. Энгессер (1889), рассматривая неупругое поведение стойки методом Эйлера, предположил, что все продольные волокна при возмущениях работают по закону касательного модуля. Так он пришел к формуле

$$\sigma_{kp} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2}, \quad (12.4.8)$$

которая отличается от формулы Эйлера только тем, что в ней упругий модуль  $E$  заменен касательным  $E_t$ .

Ознакомившись с работой Ф. Энгессера, крупный русский инженер и ученый Ф. С. Ясинский (1895) обратил внимание на имеющиеся в ней неточности. Он указал, что при возмущении, так как сжимающая сила постоянна (!), рост напряжений за счет изгиба в волокнах на вогнутой стороне стержня (волокна  $B$  на рис. 12.24) неизбежно должен сопровождаться их уменьшением на выпуклой стороне (волокна  $C$ ). Таким образом, часть волокон будет испытывать додгрузку и их поведение при этом подчиняется закону касательного модуля, а часть волокон — разгружается и подчиняется закону упругого модуля. Распределение напряжений по сечению в возмущенном состоянии для этого случая показано на рис. 12.25 а. Энгессер, ознакомившись с этими замечаниями, учел их и пришел (1898) к формуле

$$\sigma_{kp} = \frac{\pi^2 E_{pr}}{\lambda^2}. \quad (12.4.9)$$

Здесь  $E_{pr}$  — приведенный модуль — осредненный по сечению модуль упругости.

Так как  $E_t < E_{pr} < E$ , то формула (12.4.9) дает завышенные по сравнению с формулой касательного модуля (12.4.8) критические напряжения. При этом сложилась парадоксальная ситуация, когда казалось бы необоснованная формула (12.4.8) лучше

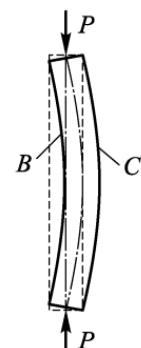


Рис. 12.24

согласовывалась с экспериментальными данными, чем формула (12.4.9). Причина этого была объяснена в 1946 г. американским инженером Шенли. Критически пересмотрев рассуждения Эйлера, Шенли обратил внимание на то, что в них не учитывается

возможность возмущений  $\Delta P$  продольной силы. Если считать, что поперечное возмущение сопровождается одновременным ростом продольной силы, то становится возможным такое возмущение стойки, при котором все ее продольные волокна догружаются (рис. 12.25 б). Тогда получает обоснование формула касательного модуля

$$\sigma_{kp} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2}.$$

Эта ситуация очень убедительно показывает инерционность человеческого мышления. Почти полвека оказалось необходимо

димо, чтобы расширить традиционный для метода Эйлера класс возмущений и, кроме изгибных возмущений при постоянной сжимающей силе, рассмотреть те же изгибные возмущения, но с переменной силой.

**12.4.4.** Формула касательного модуля (12.4.8) фактически является уравнением, т.е. касательный модуль  $E_t$  является функцией критических напряжений  $\sigma_{kp}$ . Поэтому ее для большей наглядности можно записать в форме

$$\sigma_{kp} = \frac{\pi^2 E_t(\sigma_{kp})}{\lambda^2}.$$

При практических расчетах, чтобы избежать решения этого уравнения, строят, исходя из диаграммы  $\sigma(\varepsilon)$  материала, диаграмму  $\sigma_{kp}(\lambda)$ . Предварительно на основе диаграммы  $\sigma(\varepsilon)$  (рис. 12.26 а) строят диаграмму  $E_t(\sigma)$  (рис. 12.26 б). Для этого в точке  $A$  диаграммы  $\sigma(\varepsilon)$  определяют  $E_t = d\sigma/d\varepsilon = = \Delta\sigma/\Delta\varepsilon$  и строят соответствующую точке  $A$  точку  $A'$  на диаграмме  $E_t(\sigma)$ . Затем определяют координаты соответствующей точки  $A''$  на диаграмме  $\sigma_{kp}(\lambda)$  (рис. 12.26 в):  $\sigma_{kp} = \sigma(A)$ ,  $\lambda = = \pi\sqrt{E_t(A)/\sigma_{kp}(A)}$ . Таким путем можно для каждой точки на диаграмме  $\sigma(\varepsilon)$  найти соответствующую точку на диаграмме  $\sigma_{kp}(\lambda)$ . Если же диаграмма  $\sigma_{kp}(\lambda)$  построена, то определение критических напряжений сводится к подсчету гибкости стойки

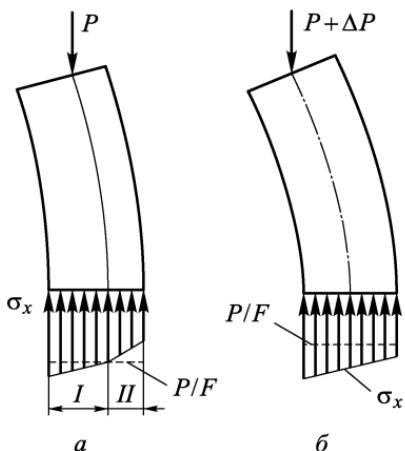


Рис. 12.25

$\lambda = \mu l \sqrt{E/J}$  и нахождению для нее по диаграмме  $\sigma_{\text{кр}}(\lambda)$  соответствующей величины  $\sigma_{\text{кр}}$ .

Читатель уже, по-видимому, заметил, что для построения диаграммы  $\sigma_{\text{кр}}(\lambda)$  нужна только диаграмма  $\sigma(\varepsilon)$  материала, из которого выполнена стойка. Таким образом, ситуация принципиально та же, что и при построении диаграммы  $\sigma_{\text{кр}}(\lambda)$  по Тетмайеру (см. рис. 12.22), только здесь мы используем информацию обо всей кривой  $\sigma(\varepsilon)$ , а не об отдельных ее точках и участках.

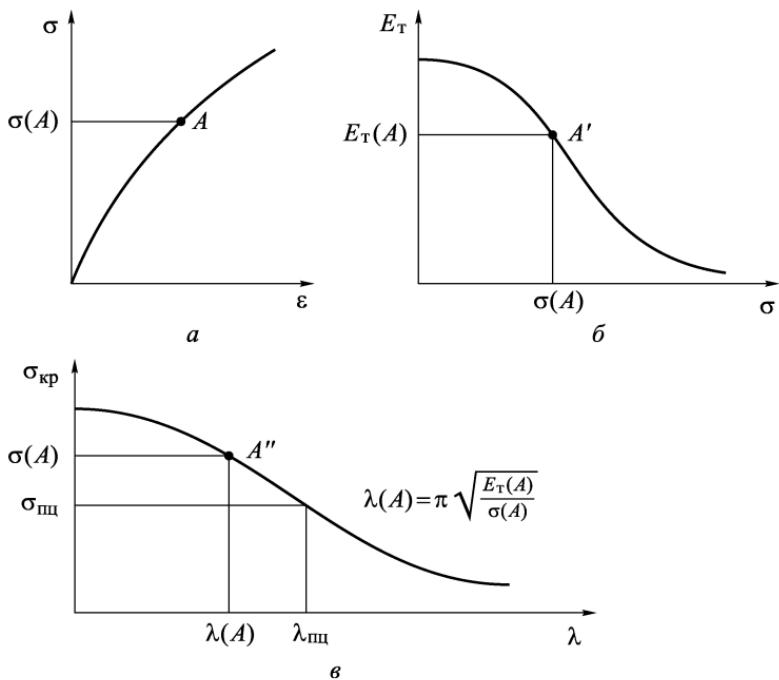


Рис. 12.26

**12.4.5.** По аналогии с запасом прочности при расчетах стержней на устойчивость вычисляют или задают запас устойчивости

$$n_y = \frac{P_{\text{кр}}}{P} = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{\sigma}, \quad (12.4.10)$$

здесь  $P$  — сила, сжимающая стержень;  $\sigma = P/F$  — напряжение от этой силы.

Если запас устойчивости  $n_y$  задан, то допускаемую сжимающую нагрузку и напряжение от нее вычисляют как

$$[P] = \frac{P_{\text{кр}}}{n_y}, \quad [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{n_y}. \quad (12.4.11)$$

П р и м е р 12.4. Для стоек, один конец которых защемлен, а другой — шарнирно оперт (см. рис. 12.13 в), определить допускаемую сжимающую силу, принимая запас устойчивости  $n_y = 2,5$ . Стойки выполнены из двутавра № 12. Материал стоеч — малоуглеродистая конструкционная сталь со следующими характеристиками:  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа,  $\sigma_{\text{пц}} = 210$  МПа,  $\sigma_t = 240$  МПа. Рассмотрим две стойки, одну длиной  $l = 2,3$  м, а другую —  $l = 1,5$  м. Сечение стойки по сортаменту (с. 529) имеет следующие геометрические характеристики:  $F = 14,7$  см<sup>2</sup>,  $J_{\min} = J_y = 27,9$  см<sup>4</sup>,  $i_y = \sqrt{J_y/F} = 1,38$  см.

Гибкость первой стойки  $\lambda = \mu l \sqrt{F/J_y} = \mu l / i_y = 0,7 \times 230 / 1,38 = 117$ ; гибкость второй стойки  $\lambda = 0,7 \cdot 150 / 1,38 = 76$ . Минимальная гибкость, при которой можно применять формулу Эйлера, равна  $\lambda_{\text{пц}} = \pi \sqrt{E/\sigma_{\text{пц}}} = 3,14 \sqrt{2,1 \cdot 10^5 / 210} \approx 100$ . Поэтому критическую силу для первой стойки можно подсчитать по формуле Эйлера

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J}{(\mu l)^2} = \frac{3,14 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 27,9 \cdot 10^{-8}}{(0,7 \cdot 2,3)^2} = 71 \cdot 10^3 \text{ Н} = 71 \text{ кН.}$$

Тогда  $[P] = P_{\text{кр}}/n_y = 71/2,5 = 28,4$  кН.

Для второй стойки  $\lambda < \lambda_{\text{пц}}$ , поэтому формула Эйлера для нее неприменима. Данные для материала позволяют провести расчет по линейной формуле Тетмайера (12.4.5). Приняв  $\lambda_t = 0,3\lambda_{\text{пц}} = 30$ , получаем для нее (п. 12.4.2):

$$a = \frac{\sigma_t \lambda_{\text{пц}} - \sigma_{\text{пц}} \lambda_t}{\lambda_{\text{пц}} - \lambda_t} = \frac{240 \cdot 100 - 210 \cdot 30}{100 - 30} = 253 \text{ МПа,}$$

$$b = \frac{\sigma_t - \sigma_{\text{пц}}}{\lambda_{\text{пц}} - \lambda_t} = \frac{30}{70} = 0,43 \text{ МПа.}$$

Тогда для второй стойки:  $\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda = 253 - 0,43 \cdot 76 = 220$  МПа;  $P_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} F = 220 \cdot 10^6 \cdot 14,7 \cdot 10^{-4} = 323$  кН;  $[P] = P_{\text{кр}}/n_y = 323/2,5 = 129$  кН.

Проведенный расчет по своей структуре аналогичен расчету допускаемой нагрузки из условия прочности. Дадим пример проектировочного расчета на устойчивость.

П р и м е р 12.5. Стойка с защемленными концами, выполненная из той же стали, что и в предыдущем примере, имеет длину 1 м и нагружена силой 30 кН. Определить размер  $C$  квадратного сечения, обеспечивающего запас устойчивости  $n_y = 3$ .

Основная трудность такого расчета в том, что неизвестно, какой из трех расчетных формул (12.4.6) нужно пользоваться. Оценим  $C$  по первой из них:  $\sigma_{\text{кр}} = \sigma_t$ . Тогда

$$F = C^2 = P n_y / \sigma_t = 30 \cdot 10^3 \cdot 3 / (240 \cdot 10^6) = 0,375 \cdot 10^3 \text{ м}^2 = 3,75 \text{ см}^2.$$

Гибкость стойки  $\lambda = \mu l \sqrt{F/J} = 0,5 \cdot 100 \cdot 1,79 = 90$ . Так как  $\lambda > \lambda_t$ , то такой расчет неверен. Поэтому воспользуемся формулой Тетмайера  $\sigma_{kp} = a - b\lambda$ . Для материала стойки, как подсчитано в предыдущем примере,  $\sigma_{kp} = (253 - 0,43\lambda)$  МПа. Поскольку

$$\lambda = \mu l \sqrt{F/J} = 0,5 \cdot 1 \sqrt{12/C^2} = 1,73/C,$$

а  $\sigma_{kp} = Pn_y/F = Pn_y/C^2 = 30 \cdot 3/C^2$  кН, то приходим к уравнению

$$\frac{90}{C^2} \cdot 10^3 = \left( 253 - \frac{0,43 \cdot 1,73}{C} \right) \cdot 10^6.$$

Решая это квадратичное уравнение, получим  $C = 2,05$  см. Соответствующая гибкость равна  $\lambda = 84,5$ . Это удовлетворяет условию применимости линейной формулы Тетмайера ( $\lambda_t < \lambda < \lambda_{tip}$ ). Значит, расчет верен.

При использовании в проектировочном расчете диаграммы  $\sigma_{kp}(\lambda)$ , построенной в соответствии с формулой касательного модуля, приходится вычислять несколько приближений, так как аналитическое выражение  $\sigma_{kp}(\lambda)$  отсутствует. Можно также получить решение графически, подобно тому, как это сделано ниже, в примере 12.6.

**12.4.6.** При расчете строительных конструкций допускаемые напряжения  $[\sigma]_c$  для стержневых элементов, работающих на сжатие, рассчитывают с помощью коэффициента снижения допускаемого напряжения  $\varphi$  по формуле

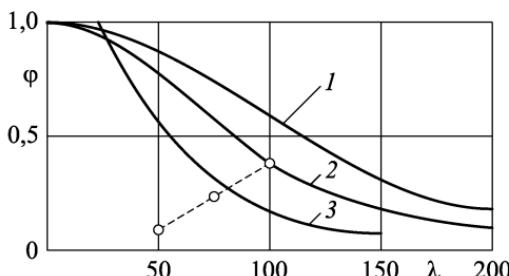
$$[\sigma]_c = \varphi \frac{\sigma_{pred,c}}{n}. \quad (12.4.12)$$

Здесь  $n$  — запас прочности, а  $\sigma_{pred,c}$  — предельное напряжение для материала стойки при сжатии. Для пластичных материалов оно равно пределу текучести  $\sigma_{tc}$ . Значения  $\varphi$  в зависимости от материала и гибкости  $\lambda$  задаются в Строительных нормах и правилах (СНИП) таблицами. На рис. 12.27 на основе этих таблиц построены графики  $\varphi(\lambda)$  для некоторых металлов. Величины  $\varphi(\lambda)$  определяются на основе диаграмм  $\sigma_{kp}(\lambda)$ .

П р и м е р 12.6. Проведем проектировочный расчет стойки круглого сечения, два конца которой защемлены. Стойка нагружена силой  $P = 20$  кН, ее длина  $l = 1$  м, и выполнена она из дюралюминия Д16Т ( $\sigma_t = 314$  МПа). При расчете обеспечим запас устойчивости  $n_y = 2$ .

Расчет удобно производить графически. Для этого, учитывая, что  $[\sigma]_c = P/F = 4P/(\pi d^2)$ , получим из формулы (12.4.12)  $d = \sqrt{0,16/(10^3 \varphi)}$ . В то же время гибкость  $\lambda = \mu l \sqrt{F/J} = 2/d$ , так как  $\mu = \frac{1}{2}$ ,  $l = 1$ ,  $J = \pi d^4/64$ . Из этих двух соотношений исключим  $d$  и получим  $\varphi = (\lambda/158)^2$ . График этой зависимости

показан на рис. 12.27 штриховой линией. Точка его пересечения с заданным СНИП графиком зависимости  $\varphi(\lambda)$  для Д16Т



1 – сталь Ст3, Ст4; 2 – сталь  $\sigma_t = 400$  МПа; 3 – D16T

Рис. 12.27

и определит гибкость  $\lambda = 82$  искомой стойки. Диаметр сечения стойки равен  $d = 2/\lambda = 0,0244$  м = 24,4 мм.

## 12.5. Об устойчивости деформированного состояния

**12.5.1.** Рассмотренные задачи об устойчивости являются простейшими. В них исследован простейший по форме объект — прямолинейный стержень, находящийся под действием нагрузок в простейшем напряженно-деформированном состоянии — центральном сжатии. Само же явление потери устойчивости деформированного состояния относится к числу самых сложных в механике и может проявиться при работе конструкции самым неожиданным образом. Ниже дадим понятие о некоторых более сложных случаях потери устойчивости.

**12.5.2.** Консольный стержень, который изгибается приложенной к его концу силой, также может потерять устойчивость. Это выразится в том, что с какого-то момента изгиб в плоскости действия нагрузки (прямой изгиб) начнет сопровождаться изгибом в другой плоскости и кручением. Особенно наглядно это явление можно наблю-

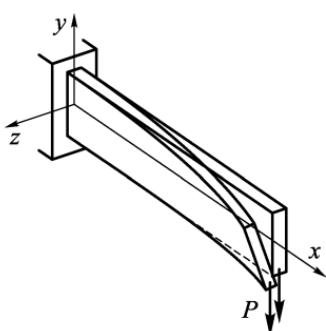


Рис. 12.28

дать на примере изгиба плоской полосы (рис. 12.28). Читатель вполне может самостоятельно провести такой эксперимент, пытаясь изогнуть плоскую металлическую (слесарную) линейку

«на ребро», т.е. в плоскости наибольшей жесткости. Для этого один конец линейки можно закрепить в тисках. В этом случае происходит потеря устойчивости прямого изгиба в плоскости  $xy$  (см. рис. 12.28), в результате чего и появляется изгиб в плоскости  $xz$  и кручение. Многочисленные примеры подобной потери устойчивости стержней рассмотрены, например, в книгах [3, 11, 12, 9, 13].

**12.5.3.** Для бруса, образующего круговое кольцо, можно наблюдать потерю устойчивости при сжатии его равномерной нагрузкой. Причем он может терять устойчивость, изгинаясь в плоскости кольца, как показано пунктирной линией на рис. 12.29. Но если жесткость кольца на изгиб в его плоскости велика по сравнению с жесткостью на изгиб из плоскости (кольцо по форме близко к плоской шайбе), то такое кольцо может потерять устойчивость, прогнувшись из плоскости, т.е. перестав быть плоским кольцом (рис. 12.30).

Длинная тонкостенная труба (цилиндрическая оболочка) под внешним давлением может потерять устойчивость так же, как

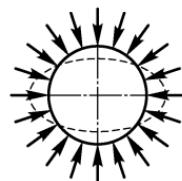


Рис. 12.29

кольцевой стержень на рис. 12.29. Если длина трубы значительно больше ее радиуса, то можно не учитывать влияние ее концов на деформацию средней части, и тогда деформация средней части будет однородна по длине. Поэтому в качестве модели для определения критического давления можно взять вырезанное из трубы кольцо единичной ширины и рассмотреть его потерю устойчивости как для кольцевого бруса. Здесь нужно учесть, что для трубы деформация вдоль ее оси равна нулю, что равносильно рассмотрению деформаций в плоскости поперечного сечения с несколько увеличенным модулем упругости.

Более сложная задача возникает для цилиндрической оболочки, длина и диаметр которой имеют один порядок. Если торцы оболочки закреплены от радиальных смещений, то ее потеря устойчивости имеет более сложный характер (рис. 12.31). В этом случае нужна более сложная модель.

При осевом сжатии цилиндрическая оболочка также может потерять устойчивость, но не изгинаясь как стержень, а с появлением на ее поверхности периодической системы вмятин (рис. 12.32).

Для потери устойчивости оболочек характерна существенная зависимость критической нагрузки от незначительных отклонений их формы от идеальной. Так, при осевом сжатии цилиндри-

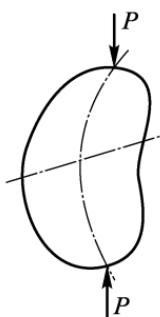


Рис. 12.30

ческой оболочки критические напряжения за счет этого могут снизиться в 3-4 раза.

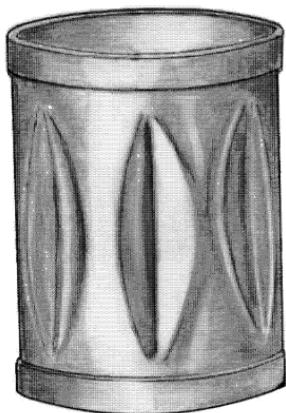


Рис. 12.31

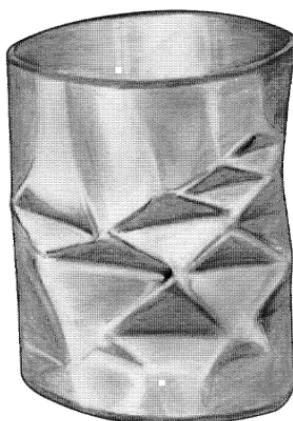


Рис. 12.32

**12.5.4.** Во всех рассмотренных случаях деформированная форма в момент непосредственно перед потерей устойчивости незначительно отличается от недеформированной формы, и это отличие можно не учитывать. Но для некоторых систем неучет

деформации системы до ее потери устойчивости может привести к существенной ошибке. Одной из простейших систем такого рода является двухстержневая ферма (ферма Мизеса), показанная на рис. 12.33. Пунктиром дано ее

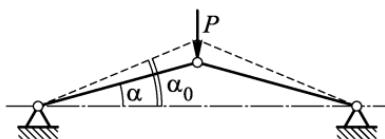


Рис. 12.33

недеформированное состояние. При больших углах  $\alpha_0$  потеря устойчивости такой фермы происходит за счет потери устойчивости ее стержней, в которых сжимающие усилия  $N = \frac{P}{2 \sin \alpha}$

достигают критической эйлеровой силы. Но если угол  $\alpha_0$  мал и усилия в стержнях, даже когда все три шарнира окажутся на одной линии ( $\alpha = 0$ ), не достигают критических, такая ферма также теряет устойчивость. Читатель легко может убедиться, что зависимость между силой  $P$  и углом  $\alpha$  в равновесных состояниях фермы при прямолинейных стержнях имеет характер, показанный на рис. 12.34. По мере увеличения деформации фермы происходит уменьшение угла  $\alpha$ , что соответствует движению из точки  $A$  на кривой  $P(\alpha)$  (см. рис. 12.34) к точке  $B$ . В точке  $B$  равновесие перестает быть устойчивым в том смысле, что рядом

с основным состоянием появляются смежные формы равновесия. В результате происходит перескок из точки  $B$  в точку  $E$ , где равновесное состояние устойчиво.

В данной системе особенно интересно то обстоятельство, что для нагрузки  $P$ , которая находится в пределах между  $P_1$  и  $-P_1$ , у системы имеется три состояния равновесия, соответствующие точкам 1, 2 и 3. Исследование этих состояний показывает, что два из них (точки 1 и 3) устойчивы, а одно (точка 2) — неустойчиво (рис. 12.35).

Примерами технического использования систем, обладающих подобными свойствами, являются, например, хлопающие мембранны (рис. 12.36), применяемые в предохранительных и переключающих устройствах.

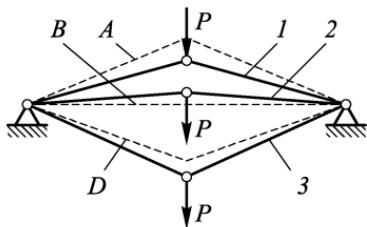


Рис. 12.35

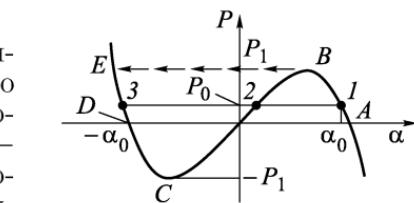


Рис. 12.34

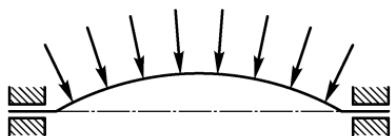


Рис. 12.36

**12.5.5.** Примером другой сложной ситуации, связанной с потерей устойчивости, является стержень, нагруженный следящей силой, т.е. силой, которая сохраняет направление конца стержня, к которому она приложена (рис. 12.37). Исследования показывают, что при такой нагрузке у стержня имеется единственное состояние равновесия — прямолинейное. Так как по критерию Эйлера (см. 12.2) в критическом состоянии должны появляться смежные состояния равновесия, то казалось бы, прямолинейное состояние такого стержня можно считать устойчивым всегда. Но такое заключение ошибочно, поскольку появление смежных форм равновесия — лишь один из возможных признаков потери устойчивости. Исследование движения стержня, нагруженного следящей сжимающей силой, показывает, что существует такая сила, при превышении которой малые возмущения приводят к колебаниям стержня с нарастающей амплитудой. Причиной такого поведения является неконсервативность следящей силы. Напомним, что *консервативной* силой называ-

ют такую, работа которой определяется только начальным и конечным состоянием. Работа же неконсервативной силы зависит от пути, каким система пришла из начального в конечное состояние.

В нашем примере при превышении силой критической величины колебания стержня происходят таким образом, что на каждом цикле колебаний сила совершает положительную работу, которая идет на увеличение потенциальной энергии деформаций (ведь рассеивание энергии не учитывается). Поэтому-то и начинают нарастать деформации.

К подобного рода явлениям относится и флаттер крыла самолета. Как известно, он выражается в том, что при достижении некоторой скорости возникают колебания крыла с нарастающей амплитудой. Известен также случай разрушения металлического моста от флаттера (Токомская катастрофа).

Потеря устойчивости деформированного состояния системы — явление интересное и многообразное. Мы здесь остановились лишь на некоторых ее примерах и аспектах. По этому вопросу имеется обширная литература, из которой для начального чтения можно порекомендовать книги [11–13].

## 12.6. Продольный изгиб реальных (неидеальных) стержней

**12.6.1.** До сих пор мы рассматривали поведение идеально прямых стержней (стоеч) под действием сжимающих сил, действующих строго по их оси.

Реальные стойки слегка искривлены и сжаты силами, приложенными не строго центрально, а с эксцентризитетом. Рассмотрим на примерах, насколько поведение таких стоек отличается от идеальных.

Сначала оценим роль эксцентризитета сжимающих сил. На рис. 12.38 показан такой стержень и его

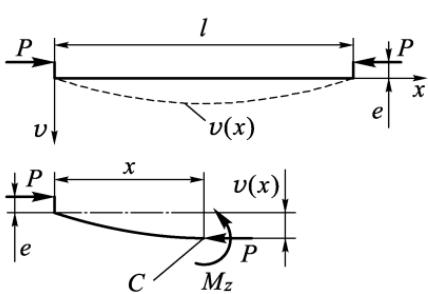


Рис. 12.38

отсеченная часть в деформированном состоянии. Условие равновесия отсеченной части:

$$\sum M_C = 0 : \quad M_z - P(v + e) = 0.$$

При выбранных направлениях координат  $x$  и  $v$

$$M_z = -EJ_z v''.$$

Поэтому приходим к неоднородному дифференциальному соотношению

$$v'' + k^2 v = -k^2 e, \quad k^2 = P/EJ_z. \quad (12.6.1)$$

Общее решение этого уравнения

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - e$$

в силу выбора осей координат должно удовлетворять граничным условиям

$$v(0) = 0, \quad v(l) = 0.$$

Из этих условий получаем, что  $C_2 = e$ ,  $C_1 = e(1 - \cos kl)/\sin kl$ . Поэтому

$$v(x) = e \left[ \frac{1 - \cos kl}{\sin kl} \sin kx - (1 - \cos kx) \right].$$

Максимальный прогиб будет в центре балки. После несложных преобразований получим

$$v_{\max} = v \left( \frac{l}{2} \right) = e \frac{1 - \cos \frac{kl}{2}}{\cos \frac{kl}{2}}.$$

Из этого выражения видно, что при  $kl \rightarrow \pi$ , т.е. при приближении  $P$  к критической силе  $P_{\text{кр}} = \pi^2 EJ_z/l^2$  знаменатель  $\cos \frac{kl}{2}$  стремится к нулю и поэтому  $v_{\max}$  неограниченно возрастает. На рис. 12.39 показаны кривые изменения  $v_{\max}$  в зависимости от  $P$  для двух разных величин эксцентриситета и таких, что  $e_1 > e_2$ . Чем меньше эксцентриситет, тем ближе кривая  $v_{\max}(P)$  к ломаной  $OAB$ , которая характеризует поведение идеально прямой стойки, сжатой без эксцентриситета.

**12.6.2.** Рассмотрим теперь сжатие слегка искривленного стержня. Начальное искривление стержня обозначим через  $v_0(x)$ , а его прогиб — через  $v(x)$  (рис. 12.40). Согласно условию равновесия данной на рис. 12.40 отсеченной части

$$\sum M_C = 0 : \quad M_z - P(v + v_0) = 0,$$

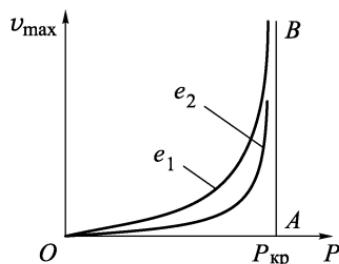


Рис. 12.39

но по закону Гука  $M_z = -EJ_z v''$ . В итоге приходим к неоднородному дифференциальному уравнению

$$v'' + k^2 v = -k^2 v_0, \quad k^2 = P/EJ_z. \quad (12.6.2)$$

Соответствующее ему однородное решение имеет вид  $C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$ , а частное решение для любой правой части  $v(x)$  может быть построено, например, методом вариации произвольных постоянных. Мы же здесь рассмотрим простейшую начальную искривленную форму в виде полуволны синусоиды

$v_0 = f_0 \sin \frac{\pi x}{l}$ . Тогда уравнение (12.6.2) принимает вид

$$v'' + k^2 v = -k^2 f_0 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (12.6.3)$$

Стержень закреплен так, что прогибы его концов равны нулю. Поэтому нужно найти решение уравнения (12.6.3),

удовлетворяющее условиям  $v(0) = v(l) = 0$ . Легко проверить, что функция  $v = f \sin \frac{\pi x}{l}$  при  $f = \frac{k^2 f_0}{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - k^2}$  удовлетворяет и уравнению (12.6.3), и условиям  $v(0) = v(l) = 0$ . Преобразуем выражение для  $f$ :

$$f = \frac{k^2 l^2}{\pi^2} \frac{f_0}{1 - \frac{l^2 k^2}{\pi^2}} = \frac{P}{\pi^2 E J_z} \frac{f_0}{1 - P / \left(\frac{\pi^2 E J_z}{l^2}\right)} = \frac{P/P_{kp}}{1 - P/P_{kp}} f_0.$$

Но  $f$  является как раз максимальным прогибом стержня  $v_{max}$ . На рис. 12.41 показана зависимость  $v_{max} = f$  от сжимающей силы для двух значений параметра начального искривления, таких, что  $f_0^{(1)} > f_0^{(2)}$ .

Видно, что чем меньше  $f_0$ , тем ближе зависимость  $v_{max}(P)$  к ломаной  $OAB$ , которая характеризует изгиб идеальности прямой стойки. Ситуация аналогична эксцентрично сжатой стойке.

Общий вывод из рассмотрения влияния двух видов неидеальности — эксцентричности сжимающей силы и начального искривления — следующий: по мере роста сжимающей силы неидеальные стойки изгибаются. Но пока сжимающая сила  $P$  далека от  $P_{kp}$ , про-

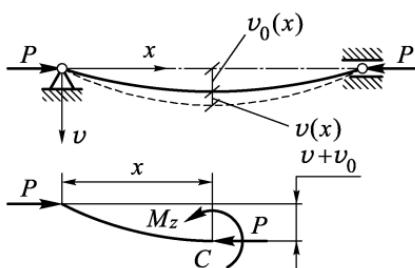


Рис. 12.40

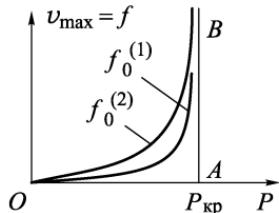


Рис. 12.41

гибы незначительны. Когда же сила  $P$  приближается к своему критическому значению, прогибы начинают возрастать, и тем сильнее, чем ближе  $P$  к  $P_{\text{кр}}$ . Это и наблюдается обычно в экспериментах, так как даже при очень тщательном изготовлении реальные стойки далеко не идеальны.

## 12.7. Продольно-поперечный изгиб

**12.7.1.** Напряженно-деформированное состояние, возникающее в брусе при одновременном действии поперечных нагрузок и продольной сжимающей силы, называют *продольно-поперечным изгибом*. Как будет видно из дальнейшего, наличие продольной сжимающей силы может существенно увеличить прогибы и напряжения по сравнению с теми, которые возникают в брусе от действия только поперечной нагрузки.

На рис. 12.42 *a* показано деформированное состояние балки. Составим дифференциальное уравнение для ее деформированной оси. Прогиб балки обозначим через  $v(x)$ . Для отсеченной части, данной на рис. 12.42 *б*, потребуем равенства нулю момента действующих на нее сил относительно сечения  $C$ :

$$\sum M_C = 0 : \quad M_z + S v - M_{\text{поп}} = 0. \quad (12.7.1)$$

Здесь  $M_{\text{поп}}$  — момент относительно сечения  $C$  действующих на отсеченную часть поперечных нагрузок, включая реакцию  $R_1$  левой опоры. Этот момент принят положительным, если он направлен противоположно  $M_z$ , т.е. для рассматриваемой отсеченной части — по часовой стрелке. Если бы продольная сила  $S$  была равна нулю, то это уравнение приняло бы простейший вид  $M_z = M_{\text{поп}}$  и означало очевидный факт, что изгибающий момент уравновешивает момент действующих на отсеченную часть поперечных нагрузок. Поэтому мы иногда будем обозначать  $M_{\text{поп}} = M_z$  поп, рассматривая его как изгибающий момент поперечных нагрузок. При малых прогибах в пределах закона Гука (п. 8.2.3)

$$v'' = \pm M_z / E J_z. \quad (12.7.2)$$

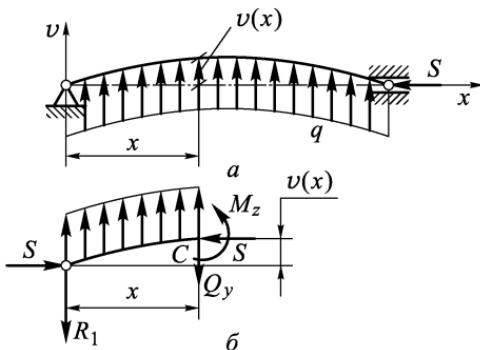


Рис. 12.42

При принятых на рис. 12.42 положительных направлениях  $M_z$  и  $v$ , как это видно из рис. 12.43, в формуле (12.7.2) нужно принять знак «+». Тогда уравнение (12.7.1) после исключения из него  $M_z$  сводится к виду

$$EJ_z v'' + Sv = M_z \text{ поп.} \quad (12.7.3)$$

Это и есть дифференциальное уравнение деформированной оси балки при продольно-поперечном изгибе. Рассмотрим примеры его применения.

Пример 12.7. Найдем прогибы балки, показанной на рис. 12.44 а. Ее отсеченная часть для  $x \leq \frac{1}{2}l$  дана на рис. 12.44 б.

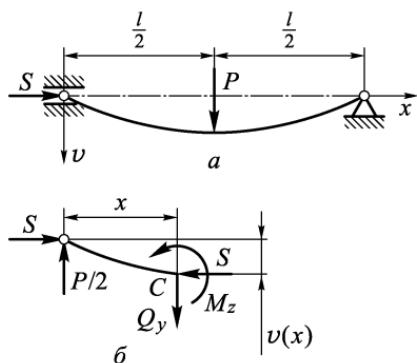


Рис. 12.44

$= P/EJ_z$ . Тогда оно сводится к виду

$$v'' + k^2 v = -\frac{1}{2}px \quad \left( x \leq \frac{1}{2}l \right). \quad (12.7.4)$$

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Соответствующее ему однородное уравнение совпадает с уравнением (12.2.3), и его решение нам известно. Так как корни характеристического уравнения мнимые, то однородное решение равно  $C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$ . Частное решение для (12.7.4) можно легко подобрать, оно равно  $-\frac{1}{2} \frac{p}{k^2} x$ . Поэтому общее решение уравнения (12.7.4) будет

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - \frac{1}{2} \frac{p}{k^2} x. \quad (12.7.5)$$

Одно условие для определения постоянных интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  получим, учитывая, что прогиб при  $x = 0$  равен нулю:

$$v(0) = 0 : C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 - \frac{1}{2} \frac{p}{k^2} \cdot 0 = 0 \rightarrow C_2 = 0.$$

Уравнение равновесия для нее принимает вид  $\sum M_C = 0 :$

$$M_z - Sv = \frac{1}{2}Px \quad \left( x \leq \frac{1}{2}l \right).$$

Принимая положительным направление  $v$  вниз, получаем, что  $v'' = -M_z/EJ_z$ . Поэтому уравнение деформированной оси балки будет

$$EJ_z v'' + Sv = -\frac{1}{2}Px \quad \left( x \leq \frac{1}{2}l \right).$$

Разделим его на  $EJ_z$  и обозначим  $k^2 = S/EJ_z$ ,  $p =$

Использовать условие  $v(l) = 0$  мы не можем, так как все полученные выше выражения, в том числе и (12.7.5), справедливы только при  $x \leq \frac{1}{2}l$ . Но так как сила  $P$  приложена посередине балки, то ее деформированная ось будет симметрична относительно середины и в середине окажется максимальный прогиб. Поэтому  $v'(\frac{1}{2}l) = 0$ . Используя это условие, получаем из (12.7.5)

$$C_1 k \cos \frac{kl}{2} - C_2 k \sin \frac{kl}{2} - \frac{1}{2} \frac{p}{k^2} = 0.$$

Отсюда, учитывая, что  $C_2 = 0$ , получаем  $C_1 = \frac{1}{2} \frac{p}{k^3 \cos(kl/2)}$ . Таким образом, выражение для прогиба балки принимает вид

$$v(x) = \frac{1}{2} \frac{p}{k^2} \left( \frac{\sin kx}{k \cos(kl/2)} - x \right) = \frac{1}{2} \frac{P}{S} \left( \frac{\sin kx}{k \cos(kl/2)} - x \right). \quad (12.7.6)$$

Видно, что прогиб неограниченно растет, когда  $kl/2$  стремится к  $\pi/2$ . Но так как  $k^2 = S/EJ_z$ , то последнее равносильно тому, что сжимающая сила  $S$  стремится к значению  $\pi^2 E J_z / l^2$ , а это значение и есть эйлерова критическая сила  $S_{kp}$  для рассматриваемой балки. Физически это означает, что балка при  $S = S_{kp}$  потеряет устойчивость независимо от того, действует на нее поперечная нагрузка или нет.

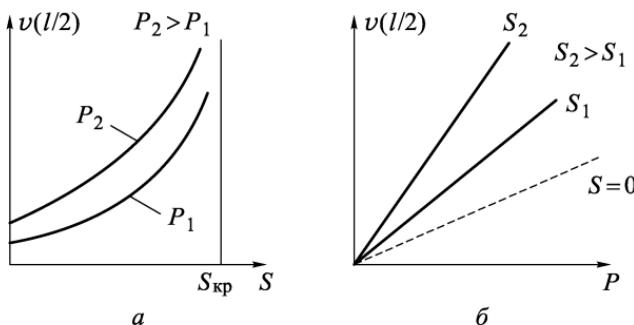


Рис. 12.45

На рис. 12.45 *a* показан график изменения прогиба в средней точке балки  $v(l/2)$  в зависимости от продольной силы  $S$  при двух постоянных значениях поперечной нагрузки  $P = P_1$  и  $P = P_2$  ( $P_2 > P_1$ ).

Следует заметить, что, вообще говоря, прогиб не может превысить величину  $l/2$ , так как его максимум будет достигнут в

момент, когда концы балки соединяются (рис. 12.46). Полученное неограниченное возрастание прогиба является следствием использования приближенного выражения для кривизны балки  $1/\rho \approx v''$ . Поэтому уравнение продольно-поперечного изгиба (12.7.3) применимо лишь при малых прогибах ( $(v')^2 \ll 1$ ).

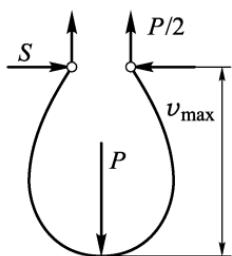


Рис. 12.46

На рис. 12.45 *б* даны зависимости прогиба в центре балки от поперечной нагрузки при постоянных значениях продольной силы  $S = S_1$  и  $S = S_2$  ( $S_2 > S_1$ ). Пунктиром показан график для случая поперечного изгиба ( $S = 0$ ). Видно, что с увеличением продольной нагрузки возрастает податливость (падает жесткость) балки на поперечную нагрузку.

Сравнение графиков 12.45 *а* и *б* приводит нас к важному заключению, что пропорциональная зависимость между нагрузкой и прогибом (а значит, и принцип суперпозиции) имеет место только для поперечной нагрузки!

**12.7.2.** Для расчета на прочность необходимо знать изгибающий момент  $M_z$ . При продольно-поперечном изгибе для вычисления  $M_z$  можно воспользоваться двумя выражениями. Первое из них следует из (12.7.2):

$$M_z = \pm E J_z v'' . \quad (12.7.7)$$

Второе — из уравнения (12.7.1):

$$M_z = M_{z \text{ поп}} - S v . \quad (12.7.8)$$

Для балки, рассмотренной в примере 12.7, получаем с учетом (12.7.6)

$$M_z = -E J_z v'' = \frac{1}{2} P \frac{\sin kx}{k \cos(kl/2)},$$

$$M_z = M_{z \text{ поп}} + S v = \frac{1}{2} P x + \frac{1}{2} P \left( \frac{\sin kx}{k \cos(kl/2)} - x \right) = \frac{1}{2} P \frac{\sin kx}{k \cos(kl/2)}.$$

Результаты, разумеется, совпадают. Максимальное значение  $M_z$  достигается в середине балки ( $x = l/2$ ) и равно

$$M_{z \text{ max}} = \frac{P}{2k} \operatorname{tg} \frac{kl}{2} . \quad (12.7.9)$$

**Пример 12.8.** Рассмотрим балку, нагруженную поперечной равномерно распределенной нагрузкой  $q$  и сжимающей силой  $S$  (рис. 12.47). Из условия равновесия отсеченной части,

которая дана на рис. 12.47 в деформированном состоянии, имеем

$$\sum M_c = 0 : \quad M_z + Sv = \frac{1}{2}qx^2 - \frac{1}{2}qlx.$$

Так как  $M_z = +EJ_z v''$ , то приходим к дифференциальному уравнению

$$v'' + k^2 v = \frac{q}{2EJ_z}(x^2 - lx), \quad k^2 = \frac{S}{EJ_z}.$$

Его общее решение

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - \frac{q}{2EJ_z} \frac{1}{k^2} \left( \frac{2}{k^2} + lx - x^2 \right).$$

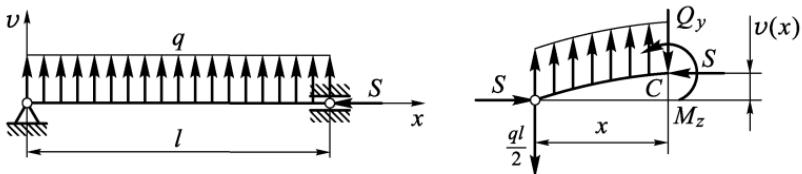


Рис. 12.47

Учитывая условия закрепления балки ( $v(0) = 0$ ,  $v(l) = 0$ ), определяем постоянные  $C_1$  и  $C_2$  и получаем

$$v = \frac{q}{EJ_z k^4} \left[ \frac{1 - \cos kl}{\sin kl} \sin kx - (1 - \cos kx) - \frac{k^2}{2} (lx - x^2) \right].$$

Изгибающий момент любым из двух возможных способов вычисления получим в виде

$$\begin{aligned} M_z &= EJ_z v'' = \frac{1}{2}qx^2 - \frac{1}{2}qlx - Sv = \\ &= -\frac{q}{k^2} \left[ \frac{1 - \cos kl}{\sin kl} \sin kx - (1 - \cos kx) \right]. \end{aligned}$$

Ясно, что максимальный изгибающий момент действует в середине балки и равен

$$M_{z \max} = M_z \left( \frac{l}{2} \right) = -\frac{q}{k^2} \frac{1 - \cos(kl/2)}{\sin(kl/2)}. \quad (12.7.10)$$

Видно, что при  $S \rightarrow S_{kp} = \frac{\pi^2 E J_z}{l^2}$  имеет место  $k \rightarrow \pi$ , поэтому  $\sin kl \rightarrow 0$  и  $\cos \frac{kl}{2} \rightarrow 0$ . Иными словами, при приближении сжимающей силы к критической прогиб и изгибающий момент неограничено возрастают.

**12.7.3.** В рассмотренном только что примере изгибающий момент  $M_z$  можно найти, не определяя сначала прогиб  $v$ . Для этого продифференцируем дважды уравнение (12.7.1) и учтем, что  $v'' = M_z/EJ_z$  и  $d^2M_z/\partial x^2 = q$ . В результате придем к уравнению

$$M_z'' + k^2 M_z = q, \quad k^2 = \frac{S}{EJ_z}. \quad (12.7.11)$$

Такого вида уравнение при продольно-поперечном изгибе называют *дифференциальным уравнением изгибающих моментов*. Его общее решение

$$M_z = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + M_z \text{ частн.}$$

Вид частного решения зависит от характера распределенной нагрузки  $q(x)$ . В нашем случае  $q = \text{const}$ , поэтому  $M_z \text{ частн.} = \frac{q}{k^2}$ .

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  найдем, учитывая равенство нулю изгибающих моментов по концам балки ( $M(0) = 0$ ,  $M_z(l) = 0$ ), что является следствием ее шарнирного опирания. В результате придем к выражению (12.7.10).

Важно отметить, что переход к уравнению (12.7.11) связан с двукратным дифференцированием уравнения равновесия (12.7.1), а это требует, чтобы на участке балки, где применяется уравнение (12.7.11), изгибающий момент был дважды дифференцируемой функцией, т.е. не испытывал скачков и не имел угловых точек. Это равносильно требованию, чтобы на этом участке балки к ней не прикладывались сосредоточенные моменты и силы.

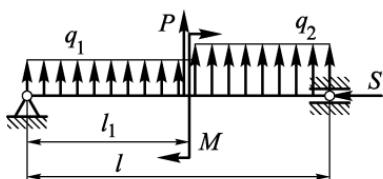


Рис. 12.48

Если же таковые имеют место, как, например, для балки, показанной на рис. 12.48, то приходится записывать уравнение вида (12.7.11) для каждого из участков и стыковать решения на границе участков с учетом

скакков перерезывающей силы и изгибающего момента. Для примера приведем полную систему уравнений и условий для данной на рис. 12.48 балки и уравнения моментов по участкам:

$$M_z'' + k^2 M_z = q_1 \quad (0 \leq x \leq l_1), \quad M_z'' + k^2 M_z = q_2 \quad (l_1 \leq x \leq l).$$

Их решения

$$M_z = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + \frac{q_1}{k^2} \quad (0 \leq x \leq l_1),$$

$$M_z = C_3 \sin kx + C_4 \cos kx + \frac{q_2}{k^2} \quad (l_1 \leq x \leq l).$$

Границные условия и условия сопряжения:

$$M_z(0) = 0 : \quad C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + \frac{q_1}{k^2} = 0,$$

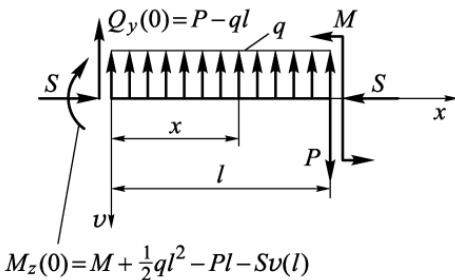
$$M_z^+(l_1) - M_z^-(l_1) = M : \quad C_3 \sin kl_1 + C_4 \cos kl_1 - \\ - C_1 \sin kl_1 - C_2 \cos kl_1 = M,$$

$$Q_y^+(l_1) - Q_y^-(l_1) = P : \quad (M'_z(l_1))^+ - (M'_z(l_1))^- = P :$$

$$C_3 k \cos kl_1 - C_4 k \sin kl_1 - C_1 k \cos kl_1 + C_2 k \sin kl_1 = P,$$

$$M_z(l) = 0 : \quad C_3 \sin kl + C_4 \cos kl = 0.$$

**12.7.4.** Внимательный читатель, по-видимому, уже заметил, что мы ограничились пока рассмотрением только шарнирно-упорной балки. Не более сложна задача продольно-поперечного изгиба консольной балки, показанной на рис. 12.49, на котором защемление левого конца заменено реакциями. Уравнение деформированной оси такой балки, полученное из условия равновесия участка от сечения в заделке ( $x = 0$ ) до сечения  $x$ , имеет вид



$$M_z(0) = M + \frac{1}{2}ql^2 - Pl - Sv(l)$$

Рис. 12.49

Общее решение этого уравнения

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - \frac{M + \frac{ql^2}{2} - Pl}{S} - \frac{P - ql}{S}x + \frac{q}{Sk^2} - \frac{q}{2S}x^2.$$

Из условий в заделке  $v(0) = 0$ ,  $v'(0) = 0$  следует, что

$$C_2 = -\frac{q}{Sk^2} + \frac{M + \frac{ql^2}{2} - Pl}{S}, \quad C_1 = \frac{P - ql}{kS}.$$

Изгибающий момент в этой задаче можно подсчитать по одному из следующих выражений:

$$M_z = M_z \text{ поп} - S[v(l) - v(x)], \quad M_z = -EJ_z v''.$$

Уравнение изгибающих моментов здесь имеет вид

$$M_z'' + kM_z = q.$$

При формулировке граничных условий для него необходимо учитывать первое из приведенных выражений для  $M_z$ . В соответствии с ним:

$$\begin{aligned} M_z(0) &= M_{z \text{ поп}}(0) - Sv(l), \\ Q_y(0) &= M'_z(0) = Q_{z \text{ поп}}(0) + Sv'(0) = P - ql, \\ M_z(l) &= M_{z \text{ поп}}(l) = M, \\ Q_y(l) &= M'_z(l) = Q_{y \text{ поп}}(l) + Sv'(l). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что получить  $M_z$  независимо от прогибов позволяют только следующие два граничных условия:

$$M'_z(0) = Q_y(0) = P - ql, \quad M_z(l) = M.$$

Более сложная ситуация возникает, когда балка закреплена так, что она статически неопределенна (рис. 12.50). В этом случае неизвестны опорные реакции, а от них зависит  $M_{z \text{ поп}}$ , который составляет правую часть уравнения деформированной оси балки (12.7.3):

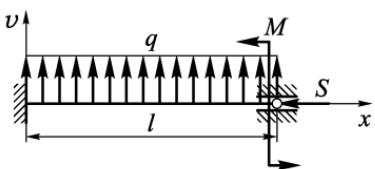


Рис. 12.50

$$EJ_z v'' + Sv = M_{z \text{ поп}}.$$

Продифференцируем это уравнение два раза по  $x$  и учтем, что  $M''_{z \text{ поп}} = q$ .

В итоге получим уравнение для прогибов балки четвертого порядка

$$(EJ_z v'')'' + Sv'' = q.$$

При  $EJ_z = \text{const}$  оно сводится к виду

$$v^{IV} + k^2 v'' = \frac{q}{EJ_z}, \quad k^2 = \frac{S}{EJ_z}. \quad (12.7.12)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 x + C_4 + v^*,$$

где  $v^*$  — частное решение, определяемое видом нагрузки  $q(x)$ .

При  $q = \text{const}$  имеем  $v^* = \frac{q}{2k^2 EJ_z} x^2$ .

Для определения четырех постоянных  $C_1, C_2, C_3, C_4$  используются условия закрепления балки

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(l) = 0, \quad M_z(l) = EJ_z v''(l) = M,$$

которые приводят к следующей системе линейных алгебраических уравнений (рассмотрен случай  $q = \text{const}$ ):

$$C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 + C_3 \cdot 0 + C_4 = 0,$$

$$C_1 k + C_2 \cdot 0 + C_3 = 0,$$

$$C_1 \sin kl + C_2 \cos kl + C_3 l + C_4 = -\frac{ql^2}{2k^2 E J_z},$$

$$-C_1 k^2 \sin kl - C_2 k^2 \cos kl = -\frac{q}{k^2 E J_z} + \frac{M}{E J_z}.$$

Решение этой системы хотя и громоздко, но может быть получено сравнительно легко.

**12.7.5.** Точное решение задачи о продольно-поперечном изгибе балки на основе уравнения деформированной оси (12.7.3), или (12.7.12), или уравнения изгибающих моментов (12.7.11) обычно связано с громоздкими вычислениями. Рассмотрим один из приближенных способов решения этой задачи, основанный на энергетическом подходе, который по смыслу близок к энергетическому подходу в задачах устойчивости (разд. 12.3).

Сначала рассмотрим энергетический баланс при линейно-упругой деформации балки под действием только поперечной нагрузки (рис. 12.51 а). Прогиб в этом случае обозна-

чим через  $v_{\pi}$ . Работа внешних сил  $P_i$  будет равна  $A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m P_i v_{\pi i}$ . Она полностью перейдет в потенциальную энергию изгиба балки

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_l E J_z (v''_{\pi})^2 dx.$$

Поэтому энергетический баланс в этом случае имеет вид

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m P_i v_{\pi i} = \frac{1}{2} \int_l E J_z (v''_{\pi})^2 dx. \quad (12.7.13)$$

Рассматривая продольно-поперечный изгиб (рис. 12.51 б), будем считать, что сначала балка нагружена продольной силой  $S$ , а затем поперечными нагрузками  $P_i$ . Тогда в энергетическом балансе необходимо учесть работу  $S\lambda$  силы  $S$  на укорочении  $\lambda$ ,

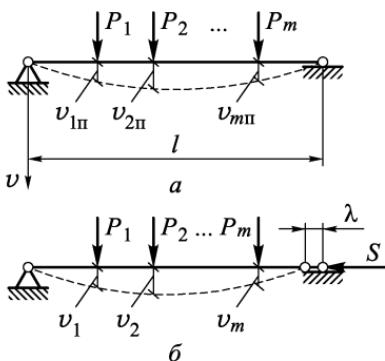


Рис. 12.51

чим через  $v_{\pi}$ . Работа внешних сил  $P_i$  будет равна  $A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m P_i v_{\pi i}$ . Она полностью перейдет в потенциальную энергию изгиба балки

Поэтому энергетический баланс в этом случае имеет вид

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m P_i v_{\pi i} = \frac{1}{2} \int_l E J_z (v''_{\pi})^2 dx. \quad (12.7.13)$$

Рассматривая продольно-поперечный изгиб (рис. 12.51 б), будем считать, что сначала балка нагружена продольной силой  $S$ , а затем поперечными нагрузками  $P_i$ . Тогда в энергетическом балансе необходимо учесть работу  $S\lambda$  силы  $S$  на укорочении  $\lambda$ ,

которое балка приобретает при изгибе ее силами  $P_i$ . Но, как это показано в разд. 12.3 (см. (12.3.6)),  $\lambda = \frac{1}{2} \int_l (v')^2 dx$ .

Поэтому энергетический баланс примет вид

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m P_i v_i + \frac{1}{2} S \int_l (v')^2 dx = \frac{1}{2} \int_l E J_z (v'')^2 dx.$$

Разделим это равенство на интеграл, стоящий в его правой части. При этом второе слагаемое левой части можно представить в форме

$$\frac{\int_l E J_z (v'')^2 dx / \int_l (v')^2 dx}{S} = \frac{S}{S_{kp}}. \quad (12.7.14)$$

Его знаменатель совпадает с энергетическим выражением для критической силы (12.3.8), которая здесь обозначена через  $S_{kp}$ .

При преобразовании первого слагаемого будем предполагать, что упругие линии балки при поперечном и продольно-поперечном изгибах подобны, т.е.

$$v(x) = a v_n(x). \quad (12.7.15)$$

Это предположение основано на интуитивном представлении о том, что наличие продольной силы не приводит к существенному изменению формы деформированной оси балки. С его учетом первое слагаемое принимает форму

$$\frac{\sum_{i=1}^m P_i v_i}{\int_l E J_z (v'')^2 dx} = \frac{a \sum_{i=1}^m P_i v_{ni}}{a^2 \int_l E J_z (v''_n)^2 dx} = \frac{1}{a}.$$

Последнее равенство получено с учетом (12.7.13).

Таким образом, после деления на правую часть равенство (12.7.3) сводится к следующему:

$$\frac{1}{a} + \frac{S}{S_{kp}} = 1.$$

Отсюда получаем, что

$$a = \frac{1}{1 - S/S_{kp}}.$$

Таким образом, в соответствии с предположением (12.7.15) прогиб при продольно-поперечном изгибе можно получить как

$$v = \frac{v_n}{1 - S/S_{kp}}. \quad (12.7.16)$$

Для вычисления приближенного значения изгибающего момента имеются две возможности, которые предоставляют формулы (12.7.7), (12.7.8). Но так как полученное по (12.7.16) выражение для прогиба является приближенным, а всякая ошибка

при дифференцировании возрастает, то предпочтительно пользоваться формулой (12.7.8), которая в нашем случае принимает вид

$$M_z = M_{z \text{ поп}} + \frac{S|v_n|}{1 - S/S_{kp}}. \quad (12.7.17)$$

Однако и формула, следующая из (12.7.7),

$$M_z = \frac{M_{z \text{ поп}}}{1 - S/S_{kp}}, \quad (12.7.18)$$

дает удовлетворительные результаты в тех случаях, когда деформированная форма балки не слишком сильно отличается от формы потери устойчивости.

Например, для равномерно нагруженной балки (пример 12.8) при  $S = 0,5S_{kp}$  формула (12.7.18) дает для  $M_{z \text{ max}}$

$$M_{z \text{ max}} = \frac{M_{z \text{ max поп}}}{1 - S/S_{kp}} = \frac{0,125ql^2}{1 - 0,5} = 0,25ql^2.$$

Вычисления по точной формуле (12.7.10) с учетом того, что

$$k = \sqrt{S/(EJ_z)} = \sqrt{0,5S_{kp}/EJ_z} = \frac{\pi}{\sqrt{2}l}, \quad S_{kp} = \frac{\pi^2 E J_z}{l^2}$$

приводят к значениюю  $M_{z \text{ max}} = 0,254ql^2$ .

**12.7.6.** При продольно-поперечном изгибе нормальные напряжения в поперечных сечениях возникают как вследствие действия продольной силы  $S$ , так и от изгибающего момента  $M_z$ .

Для сечения, показанного на рис. 12.52, их значения в точках  $A$  и  $B$  подсчитываются по формуле

$$\sigma_{\min \max} = -\frac{S}{F} \mp \frac{M_{z \text{ max}}}{J_z} y_B. \quad (12.7.19)$$

Если сечение симметрично относительно оси  $z$ , то

$$\sigma_{\min \max} = -\frac{S}{F} \mp \frac{M_{z \text{ max}}}{W_z}. \quad (12.7.20)$$

Далее мы ограничимся рассмотрением только таких балок.

По сравнению с ранее рассмотренными случаями расчета на прочность здесь возникает принципиально новая ситуация, связанная с тем, что  $M_{z \text{ max}}$ , а следовательно, и  $\sigma_{\min \max}$  нелинейно зависят от продольной нагрузки  $S$ . Этую нелинейную зависимость наиболее наглядно демонстрируют приближенные формулы (12.7.17) и (12.7.18). Поэтому необходимо более детально

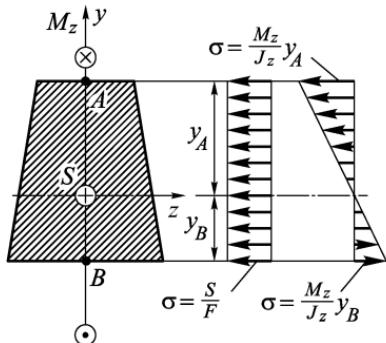


Рис. 12.52

разобраться с понятием «запас прочности». Для конструктора удобно понимать запас прочности как число, на которое нужно умножить нагрузку, чтобы в опасных точках сечений конструкции были достигнуты предельные напряжения. До сих пор, пока напряжения были пропорциональны нагрузкам, это число можно было подсчитать как отношение предельного напряжения к максимальному действующему, т.е.  $n = \sigma_{\text{пред}} / \sigma_{\text{max}}$ . Но при продольно-поперечном изгибе нелинейная зависимость напряжений от продольной силы не позволяет поступить так же. В связи с этим при продольно-поперечном изгибе, как правило, возможен только поверочный расчет, который сводится к двум основным случаям.

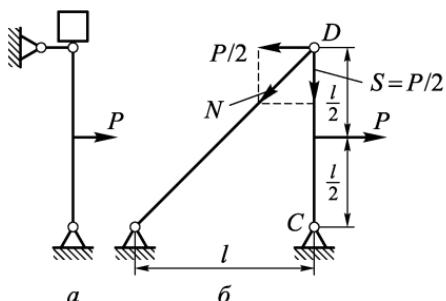


Рис. 12.53

1. Продольная нагрузка  $S$  на балку остается постоянной, а могут изменяться только поперечные нагрузки. Так нагружена, например, стойка (рис. 12.53 *a*), продольная сила в которой создается весом груза  $S$ . В таких случаях под запасом прочности обычно понимают

число, на которое нужно умножить поперечную нагрузку, чтобы напряжения достигли предельных. Если материал одинаково работает на растяжение и сжатие, то из (12.7.20) получаем уравнение для определения  $n$ :

$$\sigma_{\text{пред}} = \left| -\frac{S}{F} - \frac{n|M_z \text{ max}|}{W_z} \right|.$$

Здесь учтено, что  $M_z$  пропорционален поперечной нагрузке. Если для подсчета  $M_z \text{ max}$  использовать приближенную формулу (12.7.18), то придем к уравнению

$$\sigma_{\text{пред}} = \frac{S}{F} + \frac{n|M_z \text{ поп max}|}{W_z (1 - S/S_{kp})}.$$

Более точное значение получим при использовании формулы (12.7.17), но при этом нужно учесть, что сечение, в котором максимально значение  $M_z$ , может не совпасть с сечением, где действует максимальный момент от поперечной нагрузки  $M_z \text{ поп max}$ . Поэтому получаем уравнение

$$\sigma_{\text{пред}} = \frac{S}{F} + \frac{n}{W_z} \max \left| M_z \text{ поп} + \frac{Sv_n}{1 - S/S_{kp}} \right|.$$

2. Продольная сила и поперечная нагрузка на балку меняются одновременно и пропорционально. Так, например, нагруженна стойка в конструкции, которая показана на рис. 12.53 б. Для определения ее запаса прочности получаем уравнение

$$\sigma_{\text{пред}} = \frac{nS}{F} + \frac{M_{z \max}^{(nP, nS)}}{W_z}.$$

Для определения  $M_{z \max}$ , возникающего при увеличении нагрузки в  $n$  раз, воспользуемся точным решением (12.7.9), в которой учтем, что  $k = \sqrt{nS/(EJ_z)} = \sqrt{nP/(2EJ_z)}$ .

Тогда приходим к трансцендентному уравнению для  $n$ :

$$\sigma_{\text{пред}} = \frac{nP}{2F} + \frac{1}{W_z} \frac{P}{2\sqrt{\frac{nP}{2EJ_z}}} \operatorname{tg} \left( \sqrt{\frac{nP}{2EJ_z}} \frac{l}{2} \right).$$

Это уравнение можно упростить, если воспользоваться приближенным решением (12.7.17) или (12.7.18). В последнем случае приходим к сравнительно простому уравнению

$$\sigma_{\text{пред}} = \frac{nP}{2F} + \frac{\frac{1}{4}Pl}{W_z \left( 1 - \frac{nP}{2S_{kp}} \right)}.$$

Это уравнение, в свою очередь, сводится к квадратному уравнению для  $n$ .

## B.12. Контрольные вопросы

**B.12.1.** Чем определяется устойчивость состояния равновесия системы?

**B.12.2.** Какими должны быть возмущения при исследовании устойчивости системы: малыми или большими? Достаточно ли при этом ограничиваться всего одним возмущением? Что является критерием устойчивости состояния равновесия системы?

**B.12.3.** Сформулируйте условия устойчивого, неустойчивого и безразличного положения равновесия системы.

**B.12.4.** Какое состояние центрально-скжатого прямого стержня называется критическим?

**B.12.5.** В каком смысле метод Эйлера дает ответ на вопрос об устойчивости прямолинейного состояния равновесия системы?

**B.12.6.** Какие выводы позволяет сделать метод Эйлера при  $P > P_{kp}^{(1)}$ ?

**B.12.7.** При каких прогибах дифференциальное уравнение (12.2.3) упругой линии стойки с достаточной точностью отражает поведение идеальной стойки при сжатии?

**B.12.8.** Какова структура обобщенной формулы Эйлера для стоек с различным закреплением? Что такое приведенная длина стойки? Чем определяется коэффициент приведения длины  $\mu$ ?

**B.12.9.** При каком энергетическом условии состояние равновесия системы будет устойчивым (критерий Лагранжа)?

**B.12.10.** Как формулируется энергетическое условие устойчивости прямолинейного состояния стойки?

**B.12.11.** Признаком какого состояния стойки является условие  $\Delta\mathcal{E} = \Pi - A = 0$ ? Как определяется соответствующая этому условию сжимающая стойку сила  $P$ ? Как при этом определяется критическая сила —  $P_{\text{кр}}$ ?

**B.12.12.** При каком условии значение критической силы —  $P_{\text{кр}}$ , полученное энергетическим методом, будет совпадать с точным значением этой силы, полученным методом Эйлера?

**B.12.13.** От чего зависит точность определения  $P_{\text{кр}}$  энергетическим методом?

**B.12.14.** Каким статическим (силовым) условиям соответствуют следующие способы закрепления стойки: а) шарнир; б) свободный конец; в) скользящее защемление?

**B.12.15.** Что такое критическое напряжение стойки —  $\sigma_{\text{кр}}$ ? Чему оно равно согласно обобщенной формуле Эйлера?

**B.12.16.** Что такое гибкость стойки? От чего она зависит? В какой плоскости изогнется стойка при потере устойчивости?

**B.12.17.** Каковы пределы применимости формулы Эйлера?

**B.12.18.** Как аппроксимируется диаграмма  $\sigma_{\text{кр}}(\lambda)$  согласно Тетмайеру? Зависит ли диаграмма  $\sigma_{\text{кр}}(\lambda)$  от конструктивных параметров стойки или определяется диаграммой  $\sigma(\varepsilon)$  ее материала?

**B.12.19.** Какие две формулы предложил Энгессер для определения  $\sigma_{\text{кр}}$  за пределами пропорциональности?

**B.12.20.** Чем принципиально отличаются подходы Энгессера и Шенли, приводящие к формулам приведенного и касательного модулей?

**B.12.21.** Как выбирается допускаемое напряжение для сжатых элементов при расчете строительных конструкций? От чего зависит значение коэффициента снижения допускаемых напряжений  $\varphi$ ?

**B.12.22.** Какое влияние на поведение сжатой стойки оказывает эксцентризитет сжимающей силы и начальное ее искривление?

**B.12.23.** При каких нагрузках возникает продольно-поперечный изгиб?

**B.12.24.** Почему уравнение продольно-поперечного изгиба (12.7.3) применимо только при малых прогибах?

**B.12.25.** Почему принцип суперпозиции при продольно-поперечном изгибе применим только для поперечной нагрузки?

**B.12.26.** Как найти изгибающий момент при продольно-поперечном изгибе, не определяя прогибов в балке?

**B.12.27.** Как определяется прогиб при продольно-поперечном изгибе при энергетическом подходе к решению задачи?

**B.12.28.** Как определяется изгибающий момент при том же подходе?

**B.12.29.** Как определяются нормальные напряжения при продольно-поперечном изгибе?

**B.12.30.** Почему запас прочности при продольно-поперечном изгибе не может быть подсчитан так, как это делалось ранее, т.е.  $n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma_{\text{max}}}$ ?

**B.12.31.** Какие два случая поверочного расчета (определения запаса прочности) возможны при продольно-поперечном изгибе?

### 3.12. Задачи

**3.12.1.** Четыре стойки из одного и того же пластичного материала и одинаково закрепленные по концам имеют одну и ту же длину и площадь поперечного сечения, но разные формы этого сечения, а именно: круг, кольцо ( $d_{\text{вн}}/d_{\text{вн}} = 0,5$ ), квадрат и прямоугольник ( $h/b = 2$ ). В какой последовательности стойки должны терять устойчивость при одинаковых условиях нагружения их продольными силами, если гибкость каждой из них превышает  $\lambda_t$ ?

**3.12.2.** При какой температуре  $T_{\text{кр}}$  равномерно нагреваемый стержень постоянного сечения (рис. 12.54) теряет устойчивость, если: начальная температура  $T_0$ , длина, форма и размеры поперечного сечения, а также материал стержня заданы? Поведение материала считать линейно упругим.

**3.12.3.** Применив метод Эйлера, определить критическую силу для ступенчатого стержня, показанного на рис. 12.55.

**3.12.4.** Для стойки, показанной на рис. 12.56, определить критическую силу и коэффициент приведения длины энергетическим методом, задавшись приближенной формой потери устойчивости сразу в виде многочлена, удовлетворяющего условиям закрепления стойки.

**3.12.5.** Задаваясь полиномом соответствующей степени с неопределенными коэффициентами, найти критическую силу

и коэффициент приведения длины для стойки, показанной на рис. 12.57.

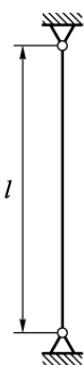


Рис. 12.54

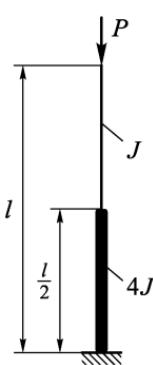


Рис. 12.55

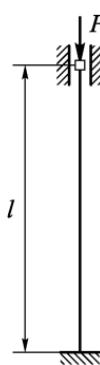


Рис. 12.56

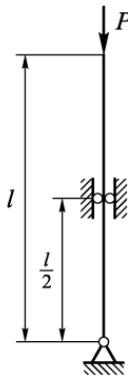


Рис. 12.57

**3.12.6.** Для консольной балки постоянной жесткости  $EJ_z$  в плоскости изгиба составить дифференциальное уравнение ее оси (рис. 12.58), найти функцию ее прогибов, определить максимальный прогиб и максимальный изгибающий момент.

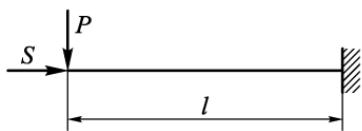


Рис. 12.58

**3.12.7.** Пользуясь приближенным выражением для прогиба, вычислить максимальные нормальные напряжения и запас прочности для балки прямоугольного сечения, показанной на рис. 12.59. Принять  $P = 0,5$  кН,  $S = 2$  кН,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,

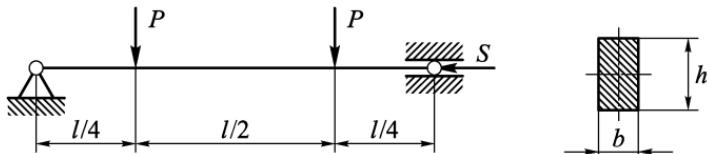


Рис. 12.59

$\sigma_t = 240$  МПа,  $l = 1$  м,  $b = 10$  мм,  $h = 30$  мм. При решении задачи учесть, что поперечные и продольная силы возрастают одновременно и пропорционально.

## ГЛАВА 13

# РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

Прочность является интегральным свойством конструкции и для конструкций из пластичного материала достижение предельных напряженных состояний в отдельных ее точках или даже частях еще не означает, что она недопустимо сдеформировалась или потеряла способность воспринимать возрастающие нагрузки (см. п. 11.5.1).

В этой главе мы рассмотрим методы расчета конструкций с учетом пластических деформаций их частей и оценки предельных для конструкций нагрузок, или, как принято говорить, предельной несущей способности конструкций.

### 13.1. Схематизация диаграмм напряжений

**13.1.1.** Как видно из рисунков 3.5, 3.8, экспериментально получаемые диаграммы напряжения  $\sigma(\varepsilon)$  для пластичных материалов являются довольно сложными зависимостями, особенно если учесть поведение материала при разгрузке (см. рис. 3.7). И хотя расчет деформаций таких простых стержневых конструкций, как фермы, балки и рамы с учетом реальных зависимостей  $\sigma(\varepsilon)$  принципиальных трудностей не содержит, обычно он сводится к громоздким вычислениям. Поэтому рационально упростить расчет, схематизировав диаграмму  $\sigma(\varepsilon)$  простой зависимостью. Вносимая при этом небольшая ошибка может быть легко оценена и вполне окупается простотой вычислений.

Одной из самых простых и в то же время позволяющих достаточно точно аппроксимировать реальную диаграмму  $\sigma(\varepsilon)$  является модель упругопластичного материала с упрочнением (рис. 13.1 а). В ней участки реальной диаграммы заменены прямыми линиями. Соответствующие такой схематизации уравнен-

ния по участкам будут

$$\sigma = \begin{cases} -\sigma_t + E_1(\varepsilon + \varepsilon_t) & \text{при } \varepsilon < -\varepsilon_t, \\ E\varepsilon & \text{при } -\varepsilon_t \leq \varepsilon \leq \varepsilon_t, \\ \sigma_t + E_1(\varepsilon - \varepsilon_t) & \text{при } \varepsilon > \varepsilon_t. \end{cases}$$

Здесь  $E_1$  — модуль упрочнения, который является угловым коэффициентом прямых  $AB$  и  $A'B'$ .

При развитых пластических деформациях можно принять модель жесткопластичного материала с упрочнением (рис. 13.1 б). Простейшей является диаграмма  $\sigma(\varepsilon)$ , реализующая модель жестко-пластичного материала (рис. 13.1 в).

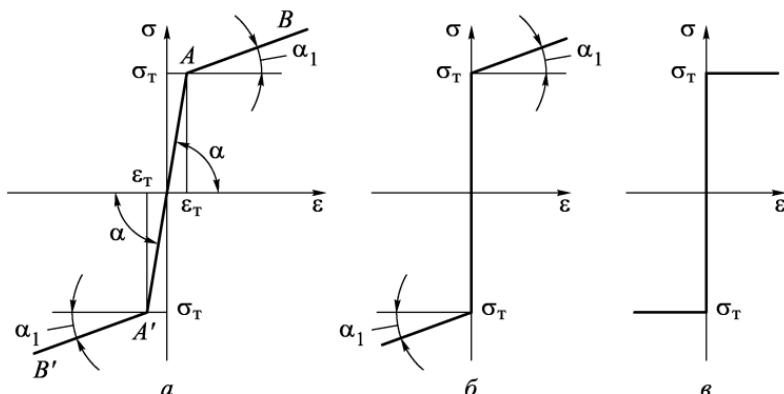


Рис. 13.1

**13.1.2.** Для основных конструкционных материалов максимальная упругая деформация составляет доли процента. Так, для стали с  $\sigma_{пц} = 200$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа

$$\varepsilon_{пц} = \frac{\sigma_{пц}}{E} 100 \% = \frac{2 \cdot 10^2}{2 \cdot 10^5} 100 \% = 0,1 \%.$$

В дальнейшем при расчетах ограничимся упругопластическими деформациями, лежащими в пределах 2 %, т.е.  $|\varepsilon| \leq 2\%$ . В этом случае пластические деформации сильно развиты и существенно превышают упругие. Но так как максимальные деформации остаются все же малыми в сравнении с единицей, то это позволяет рассматривать исследуемые системы в рамках принципа малости деформаций, т.е. при составлении уравнений равновесия для систем и их частей не учитывать изменение их размеров и формы за счет деформаций.

**13.1.3.** Одним из необходимых условий выполнения принципа независимости действия сил является деформация в пре-

делах закона Гука. При упругопластических деформациях это условие не выполняется, и поэтому принцип независимости действия сил не действует. Это демонстрирует пример, представленный на рис. 13.2. Пусть действующие на стержень силы  $P_1$  и  $P_2$  такие, что сила  $P_1$  вызывает в стержне пластические деформации, а  $P_2$  их не вызывает. Тогда при нагружении стержня силой  $P_1$  деформация стержня будет соответствовать участку  $OA$  диаграммы нагружения, данной на рис. 13.2 *a*. Если теперь,

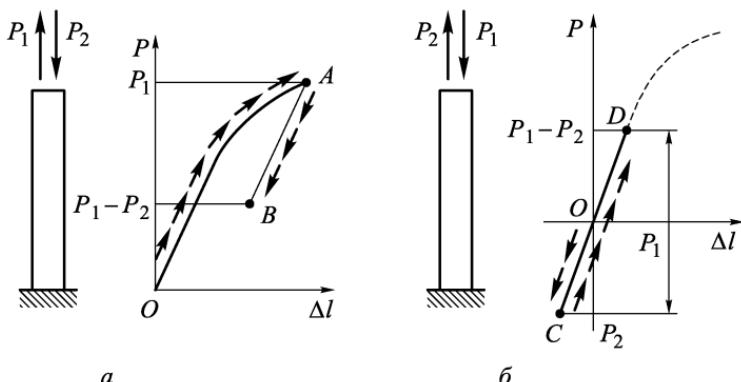


Рис. 13.2

не снимая силы  $P_1$ , нагрузить стержень силой  $P_2$ , то его деформация в соответствии с законом разгрузки будет происходить по участку  $AB$ . Если изменить порядок приложения сил и сначала нагрузить его силой  $P_2$ , а потом  $P_1$  (рис. 13.2 *б*), то деформации останутся в пределах закона Гука и итоговое удлинение стержня окажется меньше, чем в первом случае. А одним из следствий принципа независимости действия сил является независимость результата от порядка приложения сил.

### 13.2. Расчет предельных нагрузок для статически определимых систем

**13.2.1.** Ограничимся рассмотрением конструкций из идеального упругопластичного материала без упрочнения, диаграмма  $\sigma(\varepsilon)$  которого показана на рис. 13.3. Главное внимание уделим предельным нагрузкам для таких конструкций, среди которых рассмотрим сначала статически определимые. Простейшими среди них являются статически определимые фермы, т.е. системы, составленные из стержней, работающих только на растяжение или сжатие.

Самой простой фермой является стержень, нагруженный растягивающей силой (рис. 13.4). Из условия равновесия пока-

занной на рис. 13.4 отсеченной части сразу видно, что  $N = P$ . Но продольная сила, которая может возникнуть в стержне, ограничена его текучестью и ее максимальная (предельная) величина равна  $N_{\text{пред}} = \sigma_t F$ , где  $F$  — площадь поперечного сечения. Поэтому предельная величина нагрузки  $P_{\text{пред}} = \sigma_t F$ .

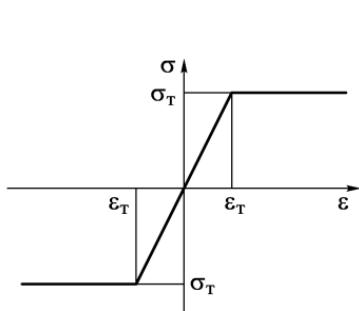


Рис. 13.3

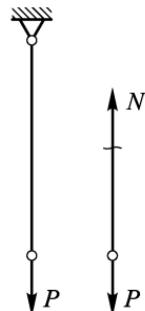


Рис. 13.4

Рассмотрим двухстержневую ферму, данную на рис. 13.5. Предельное значение нагрузки  $P$  будет достигнуто, когда напряжения хотя бы в одном из стержней станут равными  $\sigma_t$ . Из

условий равновесия узла легко получить, что  $N_1 = P/\sqrt{2}$ ,  $N_2 = P/\sqrt{2}$ . Площади поперечных сечений стержней равны соответственно  $2F$  и  $F$ . Поэтому  $\sigma_1 = N_1/(2F) = P/(2\sqrt{2}F)$ ;  $\sigma_2 = N_2/F = P/(\sqrt{2}F)$ . Предельная нагрузка будет достигнута, когда напряже-

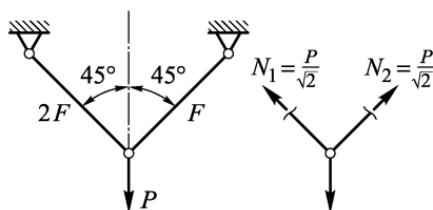


Рис. 13.5

ния во втором стержне станут равными  $\sigma_t$ , т.е. когда  $\sigma_2 = P_{\text{пред}}/(\sqrt{2}F) = \sigma_t$ . Отсюда  $P_{\text{пред}} = \sqrt{2}\sigma_t F$ .

Анализируя эти два решения, можно отметить два определяющих обстоятельства.

1. Продольная сила в  $i$ -м стержне  $N_i$  ограничена предельным значением  $N_{i \text{ пред}}$ , которое достигается при возникновении в этом стержне напряжений  $\sigma_t$ . Поэтому  $|N_{i \text{ пред}}| = \sigma_t F_i$ . Здесь учтено, что усилие в стержне может быть и сжимающим.

2. Так как ферма статически определима, возникающие в ней продольные силы определяются только внешней нагрузкой и пропорциональны ей (конечно, в условиях действия принципа малости деформаций), т.е.  $N_i = k_i P$ , где  $k_i$  — коэффициент пропорциональности между усилием в  $i$ -м стержне и нагрузкой.

Таким образом, нагрузка на ферму может возрастать до тех пор, пока хотя бы в одном из ее стержней напряжения не достигнут предела текучести  $\sigma_t$ , т.е. пока выполняются условия

$$|\sigma_i| = \left| \frac{N_i}{F_i} \right| = \left| \frac{k_i P}{F_i} \right| \leq \sigma_t. \quad (13.2.1)$$

Отсюда ясно, что предельная нагрузка будет достигнута, когда напряжение станет равным  $\sigma_t$  в том стержне, где оно максимально, т.е. когда

$$\max_i |\sigma_i| = \sigma_t. \quad (13.2.2)$$

**Пример 13.1.** Определим предельную нагрузку на ферму, рассмотренную в примере 4.2 (рис. 4.18). Если площади всех стержней одинаковы, то максимальное напряжение возникает в том стержне, где усилие максимально, т.е. в 5-м стержне. Тогда условие (13.2.2) принимает вид  $P_{\text{пред}} \sqrt{5}/F = \sigma_t$ . Отсюда  $P_{\text{пред}} = \sigma_t F / \sqrt{5}$ .

Что же произойдет с фермой, когда нагрузка достигнет предельного значения, т.е. когда напряжения хотя бы в одном из стержней достигли  $\sigma_t$ ? В этот момент этот стержень перестает работать как связь, так как его деформация  $\varepsilon$  становится неопределенной. То есть его действие на систему фактически сводится к действию на нее неизменной нагрузки, равной предельному усилию в стержне (рис. 13.6). Но так как на статически определимую систему наложены только необходимые связи, то устранение хотя бы одной из связей превращает ее в кинематически изменяющую — говорят, что система превратилась в *пластический механизм*.

Сжатые стержни могут потерять устойчивость, поэтому для них продольная сила ограничена также и критической силой. С учетом этого условия (13.2.1) по сжатым стержням должны быть дополнены условиями

$$|\sigma_i| \leq \sigma_{\text{кр}\ i} = P_{\text{кр}\ i} / F_i.$$

Таким образом, для сжатых стержней условия (13.2.1) можно записать так:

$$|\sigma_i| \leq \sigma_{\text{пред}\ i}.$$

Здесь  $\sigma_{\text{пред}\ i}$  — минимальное напряжение из двух:  $\sigma_t$  и  $\sigma_{\text{кр}\ i}$ . Ясно, что учет этого уточнения при расчете не вызовет принципиальных трудностей.

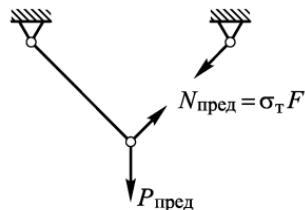


Рис. 13.6

**13.2.2.** Обратимся теперь к статически определимым системам, элементы которых работают на изгиб, т.е. к балкам и рамам. Ограничимся случаем прямого изгиба.

Сначала рассмотрим простейший случай — чистый изгиб балки прямоугольного сечения и определим для него предельный момент (рис. 13.7).

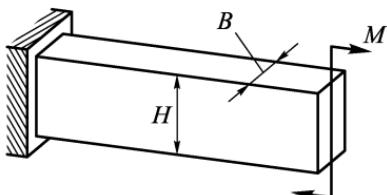


Рис. 13.7

Пока момент  $M$  невелик — деформации упруги и распределение напряжений по высоте сечения носит линейный характер. Это будет продолжаться до тех пор, пока напряжения в верхних и нижних волокнах не достигнут  $\sigma_t$  (рис. 13.8 а). Соответствующий момент  $M_t$

подсчитать легко, так как при линейном распределении напряжений  $\sigma_{\max} = M_z/W_z$ . Поэтому  $M_t = \sigma_t W_z = \sigma_t \cdot \frac{1}{6} BH^2$ .

При дальнейшем увеличении момента  $M$  пластические деформации распространяются от верхних и нижних волокон к волокнам, лежащим ближе к нейтральной оси, и распределение напряжений примет характер, показанный на рис. 13.8 б. В пре-

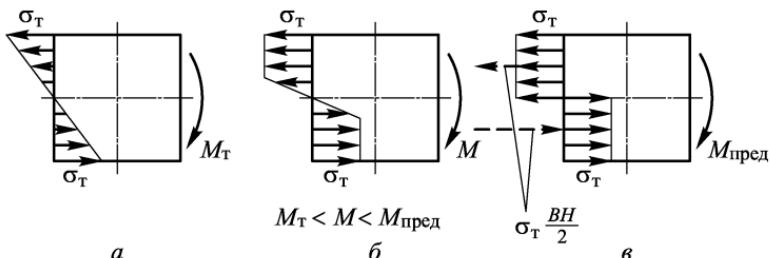


Рис. 13.8

дельном случае пластическая деформация распространится на все сечение (рис. 13.8 в). Пунктиром на рисунке показаны равнодействующие усилий в растянутых и сжатых волокнах. Значение предельного момента равно

$$M_{\text{пред}} = N_p y_{\text{тр}} + N_c y_{\text{tc}} = 2\sigma_t \cdot \frac{1}{2} BH \cdot \frac{1}{4} H = \frac{1}{4} \sigma_t BH^2. \quad (13.2.3)$$

Таким образом, для балки прямоугольного сечения  $M_{\text{пред}}$  в 1,5 раза больше  $M_t$ .

Предельный момент для балки произвольного по форме сечения можно подсчитать аналогично. В предельном состоянии (рис. 13.9) равнодействующие усилия в растянутой и сжатой

зоне образуют момент, поэтому они равны, т.е.

$$\sigma_{tp} F_p = \sigma_{tc} F_c.$$

Здесь  $F_p$  и  $F_c$  — площади действия растягивающих и сжимающих напряжений. Отсюда видно, что для рассматриваемого нами случая материала, одинаково работающего на растяжение и сжатие, т.е. при  $\sigma_{tp} = \sigma_{tc} = \sigma_t$  в предельном состоянии площади растянутой и сжатой зоны сечения равны и нейтральная линия делит площадь сечения пополам (тогда как при упругих деформациях нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения). Величину предельного момента подсчитать нетрудно. Если  $y_{tp}$  и  $y_{tc}$  — расстояния от нейтральной линии до центров тяжести растянутой и сжатой зон сечения, то

$$M_{\text{пред}} = N_p y_{tp} + N_c y_{tc} = \sigma_t F_p y_{tp} + \sigma_t F_c y_{tc} = \sigma_t (|S_p| + |S_c|). \quad (13.2.4)$$

Здесь  $S_p$  и  $S_c$  — статические моменты относительно нейтральной линии растянутой и сжатой зон.

Деформацию балки по мере увеличения момента характеризует зависимость ее кривизны  $1/\rho$  от момента  $M$  (рис. 13.10.).

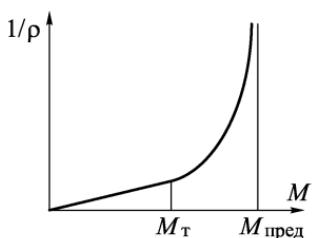


Рис. 13.10

смысле, что при достижении предельной нагрузки деформация стержня становится неопределенной.

**13.2.3.** Рассмотрим теперь двухпорную балку прямоугольного сечения, нагруженную силой посередине пролета (рис. 13.11). Предельная величина силы  $P_{\text{пред}}$  будет достигнута, когда максимальный изгибающий момент станет равным  $M_{\text{пред}}$ . При этом на балке образуются следующие характерные участки: 1)  $AB$ ,  $DE$ , где  $M_z \leq M_t$  и поэтому деформации упруги,

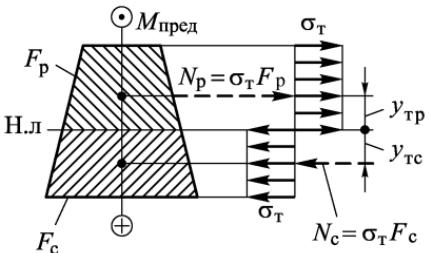


Рис. 13.9

Пока  $M < M_t$ , деформации упруги и  $1/\rho = M/(EJ_z)$ , т.е. кривизна пропорциональна моменту. Далее рост кривизны начинает непропорционально увеличиваться. При приближении  $M$  к  $M_{\text{пред}}$  малому приращению момента соответствует большое приращение кривизны, т.е. поведение балки становится близким к поведению растянутого стержня при возникновении в нем текучести в том

т.е.  $\sigma_{\max} < \sigma_t$ ; 2)  $BCD$ , где  $M_t < M_z \leq M_{\text{пред}}$  и деформация части волокон становится пластической. Соответствующие эпюры напряжений  $\sigma_x$  показаны на рис. 13.11 а. Зона пластических деформаций волокон заштрихована.

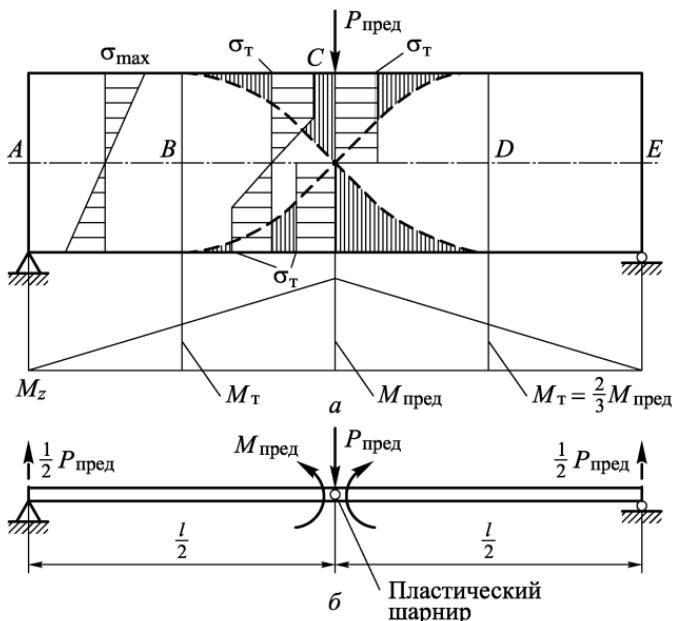


Рис. 13.11

В сечении  $C$ , где действует момент  $M_{\text{пред}}$ , все волокна находятся в состоянии текучести, и становится неопределенным значение кривизны, т.е. одному и тому же моменту  $M_{\text{пред}}$  отвечает бесконечное множество значений кривизны. Поэтому балка ведет себя так, как будто в сечении  $C$  имеется шарнир, т.е. как балка, изображенная на рис. 13.11 б. Говорят, что в сечении  $C$  образовался пластический шарнир. Используя такую модель балки, легко найти величину  $P_{\text{пред}}$  из условий равновесия, например, ее части  $CE$ . Для нее условие  $\sum M_C = 0$  запишется как  $M_{\text{пред}} - \frac{1}{2}P_{\text{пред}} \cdot \frac{1}{2}l = 0$ . Отсюда с учетом (13.2.3)  $P_{\text{пред}} = 4M_{\text{пред}}/l = \sigma_t BH^2/l$ .

Отметим две важные особенности приведенного решения.

1. Для определения  $P_{\text{пред}}$  не важны размеры и формы зоны пластических деформаций, а важен только тот факт, что в момент, когда  $M_{z\max}$  становится равным  $M_{\text{пред}}$  и в сечении  $C$  образуется пластический шарнир. В результате этого балка ста-

новится механизмом (пластическим механизмом), т.е. приобретает степень свободы — возможность участков балки  $AC$  и  $CE$  поворачиваться друг относительно друга. А это и позволяет составить уравнение равновесия  $\sum M_C = 0$  для части балки  $CE$ . Таким образом, как и для ферм, момент достижения предельной нагрузки сопровождается превращением системы в кинематически изменяемую — в пластический механизм.

2. Так как балка находится в состоянии поперечного изгиба, в ней кроме изгибающих моментов  $M_z$  возникают перерезывающие силы  $Q_y$  и, следовательно, касательные напряжения  $\tau_{xy}$ . Их влиянием мы пренебрегаем, предположив, что продольные волокна достигают состояния текучести, когда нормальные напряжения в них становятся равными  $\sigma_t$ . Это предположение частично оправдано тем, что пластический шарнир образуется в сечении, где действует  $M_{z\max}$ , а в таких сечениях перерезывающая сила  $Q_y$ , как правило, меняет знак (плавно или скачком), а значит, меняют знак касательные напряжения  $\tau_{xy}$ , т.е. вблизи этого сечения изгиб балки близок к чистому.

Пример 13.2. Найдем предельную нагрузку для рамы, показанной на рис. 13.12 *a*. Сечение рамы — тонкостенная труба

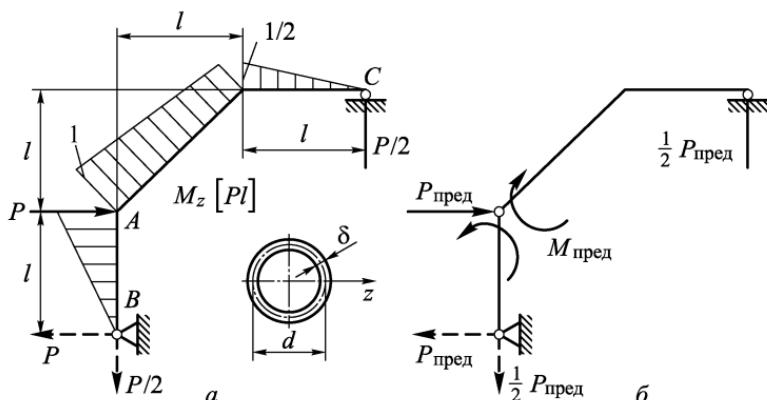


Рис. 13.12

диаметра  $d$  и толщины  $\delta$ . Видно, что  $M_{z\max}$  возникает в сечении  $A$ , где и образуется пластический шарнир. Поэтому в предельном состоянии рама становится пластическим механизмом (рис. 13.12 *б*). Из условий его равновесия, например, из условия  $\sum M_A = 0$ , для участка  $AB$  получаем  $M_{\text{пред}} = P_{\text{пред}}l$ . Поэтому  $P_{\text{пред}} = M_{\text{пред}}/l$ . Величину  $M_{\text{пред}}$  для тонкостенной трубы найдем по формуле (13.2.4)

$$M_{\text{пред}} = 2\sigma_t S_z,$$

где  $S_z$  — статический момент верхней части сечения. Легко подсчитать, что  $S_z = \frac{1}{2}d^2\delta$ . Поэтому  $M_{\text{пред}} = \sigma_t d^2\delta$ , а  $P_{\text{пред}} = \sigma_t d^2\delta/l$ .

### 13.3. Расчет предельных нагрузок для статически неопределеных систем

**13.3.1.** Чтобы разобраться в особенностях поведения статически неопределенных систем при упругопластических деформациях, рассмотрим простую трехстержневую систему (рис. 13.13). По мере роста нагрузки  $P$  наступит момент, когда в том стержне, где возникают наибольшие напряжения (сжимающие или растягивающие), они станут равными  $\sigma_t$ , т.е. в этом стержне наступит текучесть. Однако это еще не значит, что несущая способность конструкции исчерпана — два других стержня обеспечивают кинематическую неизменяемость системы. При дальнейшем росте нагрузки усилие в том стержне, где наступила текучесть, будет

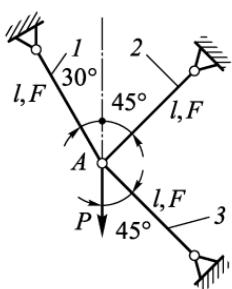


Рис. 13.13

оставаться постоянным и равным предельному  $N_{\text{пред}} = \sigma_t F$ . А в оставшихся стержнях усилия растут, пока в одном из них также не будет достигнуто предельное усилие. В этот момент текучесть наступит уже в двух стержнях; оставшийся упругим стержень уже не может обеспечить кинематическую неизменяемость системы, и она превращается в пластический механизм, т.е. ее несущая способность будет исчерпана. Рассуждая так для случая более сложной статически неопределенной системы, необходимо для определения предельной нагрузки рассмотреть весь процесс ее нагружения, а для этого уже на первом этапе нагружения потребуется раскрыть статическую неопределенность системы, чтобы найти тот стержень, в котором текучесть наступит в первую очередь. Однако если нужно найти только предельную нагрузку, то возможно более простое решение. Рассмотрим его для системы, показанной на рис. 13.13. Стержни системы одинаковые и имеют одинаковую предельную силу  $N_{\text{пред}} = \sigma_t F$  на растяжение и сжатие. Выбираем в этой один раз статически неопределенной системе в качестве лишней связи стержень 1 и заменим его усилием  $X$ . Напряженное состояние построенной таким образом статически определенной системы (рис. 13.14 а) можно представить как сумму грузового состояния (рис. 13.14 б) и состояния самонапряжения (рис. 13.14 в). Усилия в стержнях

в этих двух состояниях легко найти из условий равновесия узла  $A$ . В грузовом состоянии они равны

$$N_1^0 = 0, \quad N_2^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}P, \quad N_3^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}P.$$

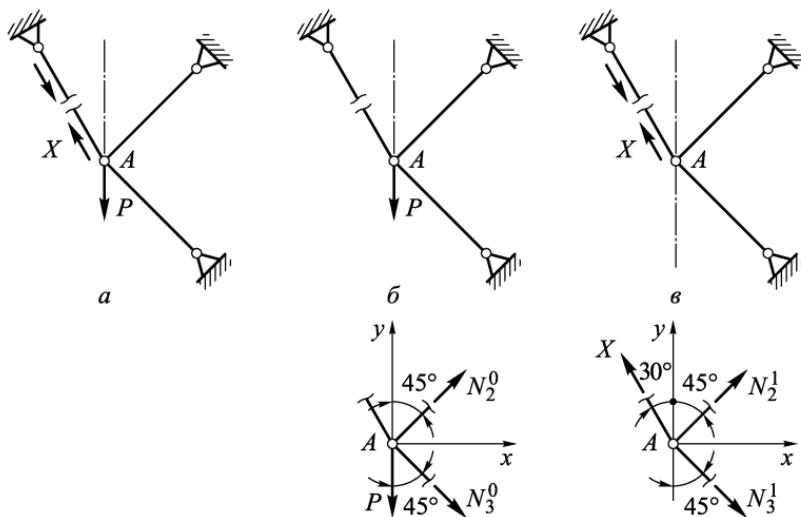


Рис. 13.14

Для состояния самонапряжения  $N_1^1 = X$  уравнения равновесия узла  $A$  следующие:

$$\sum P_y = 0 : \quad N_2^1 \cos 45^\circ - N_3^1 \cos 45^\circ + X \cos 30^\circ = 0,$$

$$\sum P_x = 0 : \quad N_2^1 \sin 45^\circ + N_3^1 \sin 45^\circ - X \sin 30^\circ = 0.$$

Решая их, получаем

$$N_1^1 = X, \quad N_2^1 = -0,258X, \quad N_3^1 = 0,965X.$$

Тогда усилия в стержнях системы равны

$$N_1 = N_1^0 + N_1^1 = X, \quad N_2 = N_2^0 + N_2^1 = 0,707P - 0,258X, \quad (13.3.1)$$

$$N_3 = N_3^0 + N_3^1 = -0,707P + 0,965X.$$

Эти выражения построены так, что усилия независимо от величин сил  $P$  и  $X$  всегда удовлетворяют условиям равновесия. Поэтому их называют *статически возможными*. Если усилие  $X$  равно действующему в 1-м стержне усилию, то статически возможные усилия оказываются равными истинным усилиям.

При упругопластических деформациях усилия в стержнях системы ограничены предельными величинами, т.е. должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} -N_{\text{пред}} &\leq N_1 \leq N_{\text{пред}}, \quad -N_{\text{пред}} \leq N_2 \leq N_{\text{пред}}, \\ -N_{\text{пред}} &\leq N_3 \leq N_{\text{пред}}. \end{aligned} \quad (13.3.2)$$

Учитывая выражения (13.3.1), приходим к системе неравенств:

$$\begin{aligned} -N_{\text{пред}} &\leq X \leq N_{\text{пред}}, \\ -N_{\text{пред}} &\leq 0,707P - 0,258X \leq N_{\text{пред}}, \\ -N_{\text{пред}} &\leq -0,707P + 0,965X \leq N_{\text{пред}}. \end{aligned} \quad (13.3.3)$$

На плоскости  $PX$  эти неравенства определяют шестиугольную область, показанную на рис. 13.15. Точкам внутри этой области соответствуют статически возможные состояния, строго удовлетворяющие условиям (13.3.3). Поэтому в этих состояниях усилия в стержнях не достигают предельных величин. Точкам, находящимся на сторонах шестиугольника, соответствуют такие состояния, когда в одном из стержней появилось предельное усилие. Например, в точке  $F$  усилие  $N_2$  равно  $N_{\text{пред}}$ . При этом два оставшихся упругими стержня обеспечивают кинематическую

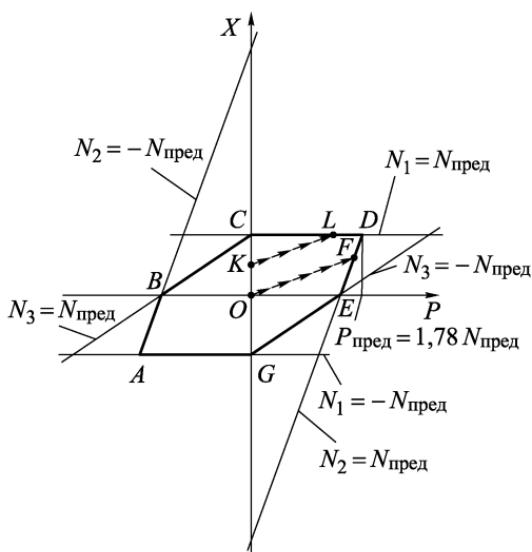


Рис. 13.15

неизменяемость системы. И, наконец, точкам в вершинах области соответствуют состояния, когда усилия уже в двух стержнях достигают предельных величин. В этих случаях упругим остается только один стержень, и система становится кинематически изменяемой.

Сама рассматриваемая область называется *областью допустимых состояний*. Рассмотрим, в каком виде процесс нагружения отображается на плоскость  $PX$ . Пусть в ненагруженном состоянии усилия в стержнях системы равны нулю. Этому состоянию системы соответствует точка  $O$  начала координат на плоскости  $PX$  (см. рис. 13.15). По мере увеличения силы  $P$

сначала деформации всех стержней будут упругими, и поэтому усилие  $X$  будет расти пропорционально нагрузке  $P$ . Следовательно, точка, соответствующая такому состоянию системы, будет двигаться по прямой, выходящей из начала координат, пока она не достигнет границы области допустимых состояний (точка  $F$  на рис. 13.15). В этот момент в одном из стержней системы будет достигнуто предельное усилие  $N_{\text{пред}}$ , в данном случае  $N_2 = N_{\text{пред}}$ . В дальнейшем при увеличении  $P$  усилие в этом стержне остается постоянным и равным  $N_{\text{пред}}$  и в нем развиваются пластические деформации. А точка, соответствующая состоянию системы, начинает двигаться уже вдоль границы области допустимых состояний, пока не достигнет угловой точки  $D$ . В этот момент пластические деформации появятся также и в другом стержне ( $N_1 = N_{\text{пред}}$ ), система станет кинематически изменяемой и ее несущая способность исчерпается, т.е. будет достигнута предельная нагрузка. Координаты точки  $D$  легко найти как координаты точки пересечения двух прямых

$$N_1 = N_{\text{пред}} \text{ и } N_2 = N_{\text{пред}}.$$

С учетом выражений (13.3.1) получаем систему двух уравнений

$$X = N_{\text{пред}}, \quad 0,707P - 0,258X = N_{\text{пред}}.$$

Решение этой системы и дает предельную нагрузку для системы

$$P_{\text{пред}} = 1,78N_{\text{пред}}.$$

Отметим два важных момента.

1. Хотя в других угловых точках области допустимых состояний пластичность также имеет место в двух стержнях, но в этих точках возможна такая деформация системы, что нагрузка на нее увеличивается, а состояние остается допустимым. Например, при увеличении нагрузки на систему соответствующая ей точка из точки  $E$  будет двигаться по прямой  $ED$  в сторону точки  $D$  (см. рис. 13.15).

2. Состояние самонапряжения может возникнуть в системе и при отсутствии внешней нагрузки, например, вследствие нагрева или при монтаже из-за неточностей изготовления и т.п. Тогда начальному состоянию ( $P = 0$ ) будет соответствовать некоторая точка на оси  $X$ . Пусть это будет точка  $K$  (см. рис. 13.15). В этом случае при увеличении силы  $P$  упругим деформациям соответствует путь  $KL$ . В точке  $L$  в системе появится текучесть в 1-м стержне. При дальнейшем росте силы  $P$  точка пройдет путь  $LD$  и снова достигнет предельного состояния в точке  $D$ . Таким образом, становится очевидно, что предельная нагрузка на систему не зависит от предварительного состояния ее самонапряжения. И как бы система не деформировалась при увеличении нагруз-

ки, соответствующая ей точка на плоскости  $PX$  достигнет в итоге точки  $D$ , и в этот момент система исчерпает свою несущую способность. Рассмотренный здесь метод определения предельной нагрузки называется *статическим*. Для определения этим методом предельной нагрузки необходимо знать область допустимых состояний. Тогда не нужно рассматривать процесс нагружения системы.

Среди множества допустимых состояний предельным будет то, для которого нагрузка максимальна. Это и есть общий принцип статического метода. Он применим и для многократно статически неопределенных систем, для которых область допустимых состояний будет уже не плоской, а многомерной. Хотя наглядность метода в таком случае теряется, но, так как решение сводится к анализу системы неравенств вида (13.3.2), его легко формализовать и реализовать в виде программы для ЭВМ.

**13.3.2.** Другой метод оценки предельной нагрузки, называемый *кинематическим*, основан на рассмотрении возможных пластических механизмов, которые могут образоваться в результате появления предельных усилий в элементах системы. Так, для данной на рис. 13.13 фермы возможны три пластиче-

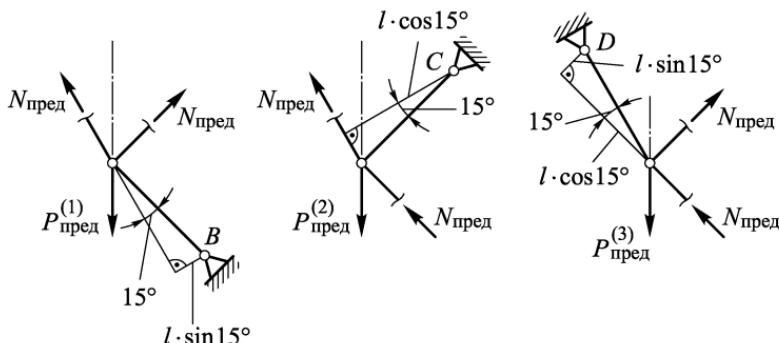


Рис. 13.16

ских механизма, показанные на рис. 13.16. Для определения величин  $P_{\text{пред}}^{(i)}$  потребуем равенства нулю моментов, действующих на эти системы сил, относительно точек  $B$ ,  $C$  и  $D$  соответственно. Получим:

- $\sum M_B = 0: N_{\text{пред}}l + N_{\text{пред}}l \sin 15^\circ - P_{\text{пред}}^{(1)}l \cos 45^\circ = 0 \rightarrow P_{\text{пред}}^{(1)} = 1,78N_{\text{пред}}.$
- $\sum M_C = 0: N_{\text{пред}}l + N_{\text{пред}}l \cos 15^\circ - P_{\text{пред}}^{(2)}l \cos 45^\circ = 0 \rightarrow P_{\text{пред}}^{(2)} = 2,78N_{\text{пред}}.$

$$3. \sum M_D = 0: N_{\text{пред}} l \cos 15^\circ - N_{\text{пред}} l \sin 15^\circ - P_{\text{пред}}^{(3)} l \sin 30^\circ = 0 \rightarrow P_{\text{пред}}^{(3)} = 1,414 N_{\text{пред}}.$$

Очевидно, что реальная предельная нагрузка не может быть меньше, чем минимальная из полученных.

Поэтому

$$P_{\text{пред}} \geq P_{\text{пред}}^{(3)} = 1,414 N_{\text{пред}}.$$

Сопоставим полученный результат с решением статическим методом, которое дало, что  $P_{\text{пред}} = 1,78 N_{\text{пред}}$ . Видно, что нижняя оценка предельной нагрузки может оказаться даже ниже той силы  $P_t$ , при которой пластические деформации появились только в одном 2-м стержне. На рис. 13.15 величина  $P_{\text{пред}}^{(3)}$  соответствует точке  $E$ , а  $P_t$  соответствует точке  $F$ , и поэтому  $P_t > P_{\text{пред}}^{(3)}$ .

Основной принцип кинематического метода следующий: *предельная нагрузка не может быть меньше нагрузки, минимальной для всех возможных пластических механизмов.*

**13.3.3.** Во многих случаях статический и кинематический методы приводят к одному и тому же решению для  $P_{\text{пред}}$ . Это можно увидеть на следующих примерах.

Пример 13.3. Найдем предельную величину силы  $P$ , приложенной к статически неопределенной балке (рис. 13.17 а).

Сначала применим кинематический метод. Характер эпюры изгибающих моментов можно восстановить по характеру упругой линии, которая показана пунктиром. Вблизи заделки сжатые волокна расположены снизу, а на остальной части — сверху. А эпюра  $M_z$  должна располагаться со стороны сжатых волокон. Нужно также учесть, что ввиду отсутствия распределенной нагрузки эпюра будет линейна по участкам балки, а в точке приложения сосредоточенной силы на ней будет угловая точка. Пластический механизм образуется

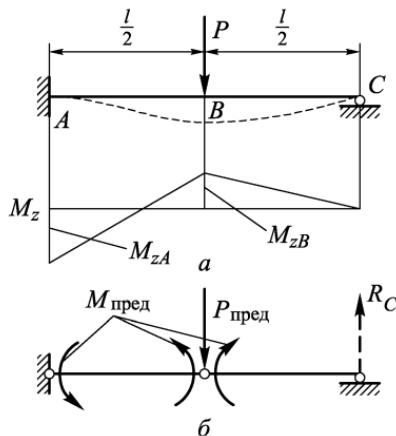


Рис. 13.17

тогда, когда изгибающие моменты в сечениях  $A$  и  $B$  достигнут своего предельного значения, и в этих сечениях образуются пластические шарниры. Этот пластический механизм показан на рис. 13.17 б. Реакцию  $R_C$  можно найти из условия, что для

участка  $BC$  должна быть равна нулю сумма моментов действующих на него усилий относительно точки  $B$ . Поэтому  $R_C = \frac{M_{\text{пред}}}{l/2}$ . Составив моментное условие равновесия относительно

точки  $A$  для всей балки, получим  $P_{\text{пред}} \geq 6M_{\text{пред}}/l$ . Величина  $M_{\text{пред}}$  определяется формой и размерами поперечного сечения балки и пределом текучести  $\sigma_T$  ее материала по формуле (13.2.4).

Рассмотрим теперь решение этой задачи статическим методом. В качестве лишней примем связь, запрещающую поворот сечения в заделке, и заменим ее моментом  $X$ . На рис. 13.18 показана эквивалентная система и изгибающие моменты в грузовом состоянии и состоянии самонапряженния. Состояние балки

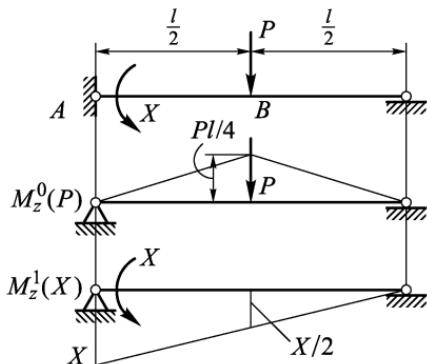


Рис. 13.18

будет допустимым, если максимальные изгибающие моменты, действующие в сечениях  $A$  и  $B$ , не превысят предельных моментов, т.е. если выполняются неравенства

$$\begin{aligned} -M_{\text{пред}} &\leq M_{zA} = X \leq M_{\text{пред}}, \\ -M_{\text{пред}} &\leq M_{zB} = \frac{1}{4}Pl - \frac{1}{2}X \leq M_{\text{пред}}. \end{aligned} \quad (13.3.4)$$

Область допустимых моментов (рис. 13.19) ограничена на плоскости  $\frac{1}{4}Pl$ ,  $X$  линиями 1, 2, 3, 4, и предельное состояние соответствует точке  $A$ , в которой

$$\frac{1}{4}P_{\text{пред}}l = \frac{3}{2}M_{\text{пред}}.$$

Отсюда  $P_{\text{пред}} = 6M_{\text{пред}}/l$ .

Ситуация, когда пластичный шарнир возникает в опоре, типична для статически неопределенных балок. Поэтому в рассмотренном примере первое из неравенств (13.3.4) можно сразу

заменить на равенство  $X = M_{\text{пред}}$ . Тогда второе неравенство в предельном состоянии обращается в равенство:

$$\frac{1}{4}P_{\text{пред}}l - \frac{1}{2}M_{\text{пред}} = M_{\text{пред}}.$$

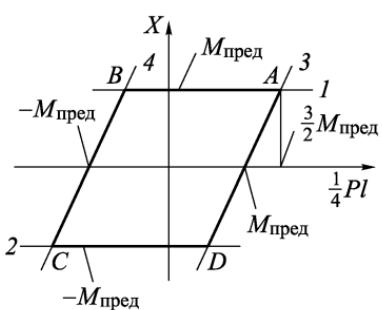


Рис. 13.19

Характер наложения в предельном состоянии эпюра грузового состояния и состояния самонапряжения показан на рис. 13.20. Этот вариант статического метода называется *методом выравнивания моментов*.

Пример 13.4. Найдем предельную нагрузку  $q$  для балки длиной  $l$ , показанной на рис. 13.21 а. Сначала сделаем это кинематическим методом. Пластические шарниры возникают в сечениях  $A$  и  $B$ , но положение сечения  $B$  неизвестно. Обозначим его координату через  $x$ . Соответствующий пластический механизм показан на рис. 13.21 б. Из условий равновесия полученного механизма найдем  $q_{\text{пред}}$ . В этой задаче удобно воспользоваться принципом возможных перемещений, который устанавливает, что в положении равновесия работа действующих на систему сил на возможных перемещениях равна нулю. В качестве возможного перемещения зададим перемещение  $\delta$  сечения  $B$ . Тогда работа предельной нагрузки будет равна

$$R_q = q_{\text{пред}} x \cdot \frac{1}{2} \delta + q_{\text{пред}} (l - x) \cdot \frac{1}{2} \delta = \frac{1}{2} q_{\text{пред}} l \delta.$$

Кроме нагрузки, работу совершают моменты  $M_{\text{пред}}$ , два из которых повернутся на угол  $\beta = \delta/(l - x)$  и один — на угол  $\alpha = \delta/x$ . Поэтому

$$R_M = -2M_{\text{пред}} \frac{\delta}{l - x} - M_{\text{пред}} \frac{\delta}{x} = -M_{\text{пред}} \delta \left( \frac{2}{l - x} + \frac{1}{x} \right).$$

Знак « $-$ » здесь учитывает, что поворот происходит против направления моментов. Так как  $R_q + R_M = 0$ , то легко получить, что

$$q_{\text{пред}}(x) = \frac{2M_{\text{пред}}}{l} \left( \frac{2}{l - x} + \frac{1}{x} \right). \quad (13.3.5)$$

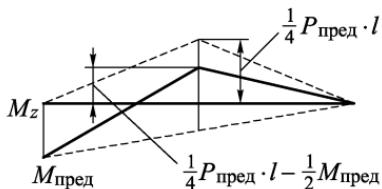


Рис. 13.20

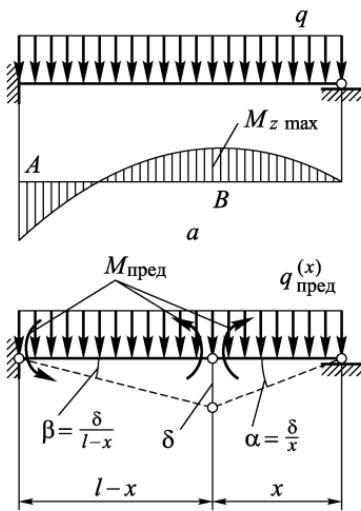


Рис. 13.21

Каждому положению пластического шарнира, т.е. каждой величине  $x$ , соответствует пластический механизм, поэтому мы

имеем в этой задаче бесконечное множество пластических механизмов. По принципу кинематического метода нижнюю оценку дает тот механизм, которому соответствует минимальная предельная нагрузка. Таким образом, реальная предельная нагрузка для балки

$$q_{\text{пред}} \geq \min_x q_{\text{пред}}(x).$$

Из условия  $dq_{\text{пред}}(x)/dx = 0$  получаем уравнение

$$\frac{2}{(l-x)^2} - \frac{1}{x^2} = 0.$$

После приведения его к общему знаменателю приходим к квадратному уравнению  $x^2 + 2lx - l^2 = 0$ , корни которого  $x_{1,2} = l(\pm\sqrt{2}-1)$ . Ясно, что поскольку пластический шарнир должен быть расположен внутри пролета, то  $0 < x < l$ . Поэтому имеет смысл только один из корней, а именно  $x = l(\sqrt{2}-1)$ . Этот корень и определяет реальное положение пластического шарнира. Подставив его значение в выражение (13.3.1), получаем

$$q_{\text{пред}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)(2-\sqrt{2})} \frac{M_{\text{пред}}}{l^2} = 11,7 \frac{M_{\text{пред}}}{l^2}.$$

Особенность применения кинематического метода здесь в том, что рассматривается бесконечное множество пластических механизмов, определенное одним параметром — координатой  $x$  положения пластического шарнира.

Для анализа этой балки статическим методом используем метод выравнивания моментов. На рис. 13.22 показано наложение эпюр грузового состояния

$$M_0 = \frac{1}{2}q\xi(l-\xi)$$

и состояния самонагружения (при  $X = M_{\text{пред}}$ )

$$M_z^1 = -M_{\text{пред}} \frac{\xi}{l}.$$

Здесь  $\xi$  — расстояние от

правой опоры до сечения. Тогда в предельном состоянии максимальный изгибающий момент внутри пролета должен оказаться равным  $M_{\text{пред}}$ . Поэтому

$$\max_{\xi} \left[ \frac{1}{2}q\xi(l-\xi) - M_{\text{пред}} \frac{\xi}{l} \right] = M_{\text{пред}}.$$

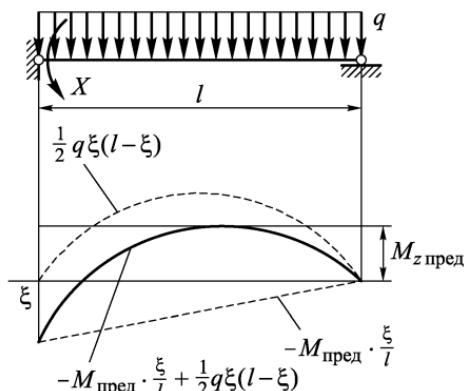


Рис. 13.22

Из этого равенства легко получаем тот же результат  $q_{\text{пред}} = 11,7M_{\text{пред}}/l^2$ , который только что получен кинематическим методом.

### B.13. Контрольные вопросы

**B.13.1.** Как схематизируются диаграммы  $\sigma(\varepsilon)$  для упругопластичного материала с упрочнением и без упрочнения (идеального), для жесткопластичного материала с упрочнением и без упрочнения?

**B.13.2.** Почему при упругопластических деформациях не действует принцип суперпозиции?

**B.13.3.** Из какого условия определяется предельная нагрузка для статически определимой фермы? Какое дополнительное условие определения предельной нагрузки необходимо учесть для сжатых стержней фермы?

**B.13.4.** Как качественно изменится состояние фермы, если нагрузка достигнет предельного значения?

**B.13.5.** При каком характере распределения напряжений в поперечном сечении консольной балки прямоугольного сечения приложенный на ее конце момент достигает значений  $M_T$  и  $M_{\text{пред}}$ ? Как вычислить эти значения?

**B.13.6.** Как нейтральная линия делит поперечное сечение балки в предельном состоянии? Как вычисляется предельный момент  $M_{\text{пред}}$  для балки произвольного по форме сечения?

**B.13.7.** Что такое пластический шарнир? Почему при образовании пластического шарнира в балке она становится кинематически изменяемой?

**B.13.8.** Какие условия определяют область допустимых состояний для статически неопределенной фермы?

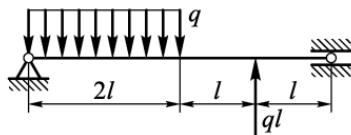
**B.13.9.** Как по области допустимых состояний определяется предельное состояние системы и, соответственно, предельная нагрузка? Сформулируйте принцип, лежащий в основе определения предельной нагрузки статическим методом.

**B.13.10.** Как формулируется основной принцип кинематического метода определения предельной нагрузки в статически неопределенной системе?

### 3.13. Задачи

**3.13.1.** Предполагая материал балки (см. рис. 13.23) упругопластичным без упрочнения, определить предельное значение интенсивности нагрузки  $q_{\text{пред}}$ , если  $l$ ,  $a$  и  $\sigma_t$  заданы.

**3.13.2.** Для показанной на рис. 13.24 стержневой системы определить статическим и кинематическим методами величину предельной нагрузки  $P_{\text{пред}}$ , полагая предел текучести материала стержней  $\sigma_t$  и площадь поперечного сечения  $F$  заданными. Материал стержней — идеально упругопластичный.



Сечение балки

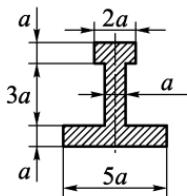


Рис. 13.23

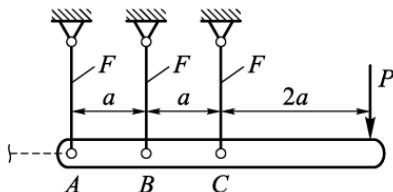


Рис. 13.24

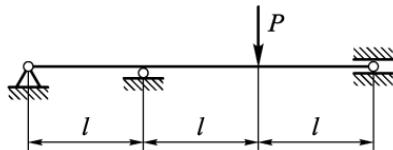


Рис. 13.25

**3.13.3.** Применяя статический метод, найти предельное значение нагрузки  $P_{\text{пред}}$  для балки (см. рис. 13.25) прямоугольного поперечного сечения  $B \times H$ , если  $B$ ,  $H$  и  $\sigma_t$  заданы. Материал балки считать идеально упругопластичным. Решить эту же задачу кинематическим методом.

## ГЛАВА 14

# ДИНАМИЧЕСКОЕ НАГРУЖЕНИЕ

В первой главе (п. 1.1.3) в качестве критерия, разделяющего нагрузки на статические и динамические, названа существенность инерционных сил деформационного движения тела. Если тело закреплено так, что у него нет степеней свободы, то его точки способны совершать движение только вследствие его деформаций. В практике часты случаи, когда деформационное движение является лишь частью общего движения тела (самолет, автомобиль, детали кривошипно-шатунного и других механизмов и т.п.). Поэтому прежде всего возникает необходимость разделения общего движения на движение как жесткого тела и деформационное движение. Примеры такого разделения даны в 14.1. А в 14.2–14.5 как пример динамического нагружения рассмотрено поведение упругих систем при ударном нагружении.

## 14.1. Квазистатическое нагружение

**14.1.1.** Рассмотрим стержень длины  $l$  и постоянного по-перечного сечения  $F$ , движущийся вертикально под действием осевой силы  $P$  (рис. 14.1 а). Это — простейшая модель ракеты. Кроме силы  $P$ , на стержень действует его вес  $G = g\rho Fl = gM$  ( $\rho$  — массовая плотность;  $g$  — ускорение свободного падения). Вес непрерывно распределен по стержню и его можно представить в виде равномерной погонной вертикальной нагрузки с интенсивностью  $q_b = G/l = g\rho F$ .

В неподвижной системе координат стержень движется с вертикальным ускорением, которое по закону Ньютона равно  $a = (P - G)/\rho Fl = (P - G)/M$ . Для определения возникающих в стержне внутренних сил перейдем в систему координат, связанную с ним (ось  $x$  на рис. 14.1 а). Так как эта система неинерциальна, то по принципу Даламбера переход к ней должен быть компенсирован приложением к стержню сил инерции. Как и вес, силы инерции также равномерно распределены по объ-

ему стержня (ускорения всех его точек одинаковы) и их также можно представить как равномерную погонную нагрузку с интенсивностью  $q_i = aM/l = = (P - G)/l$ . И вес, и инерционная сила направлены вниз, поэтому общая их интенсивность  $q = q_b + q_i = P/l$ . Таким образом, переход к связанной со стержнем системе координат привел нас к расчетной схеме, данной на рис. 14.1 б, где также показана продольная сила  $N$ , напряжения  $\sigma_x$  и перемещения  $\delta$  сечений стержня относительно его нижнего сечения.

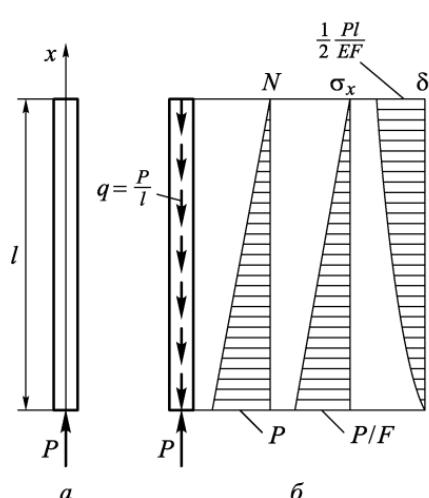


Рис. 14.1

нем, и начало координат выбрать на оси вращения, то, по принципу Даламбера, необходимо в этой системе координат учесть силы инерции, которые в данном случае являются центробежными. Центробежная сила, действующая на элемент  $dr$  с массой  $dm = \rho F dr$ , равна  $dm\omega^2 r$ . Ее можно представить как погонную радиальную на-

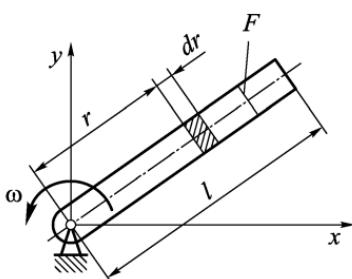


Рис. 14.2

грузку с интенсивностью  $q(r) = dm \cdot \omega^2 r / dr = \rho F \omega^2 r$ . Тогда расчетная схема для стержня примет вид, показанный на рис. 14.3,

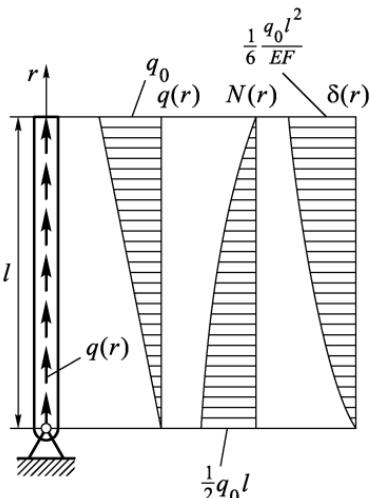


Рис. 14.3

где  $q_0 = \rho F \omega^2 l$ . Там же даны эпюры продольной силы  $N(r)$  и радиальных перемещений  $\delta(r)$  сечений стержня. Собственный вес стержня не учитывается.

При расчете вращающейся рамы (рис. 14.4 а) собственный вес также учитывать не будем. Если угловая скорость враще-

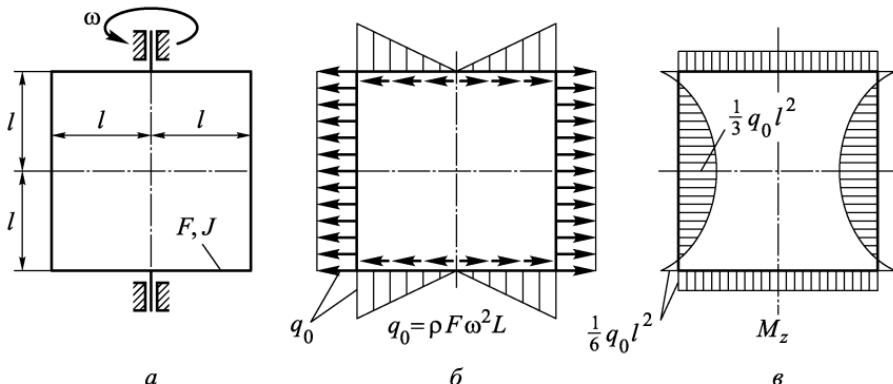


Рис. 14.4

ния рамы постоянна, то при переходе к системе координат, связанной с плоскостью рамы, нужно учесть только центробежные силы. В результате приходим к расчетной схеме, показанной на рис. 14.4 б. Раскрыв статическую неопределенность этой рамы с учетом двух осей симметрии, приходим к эпюре изгибающих моментов  $M_z$ , действующих в плоскости рамы и показанных на рис. 14.4 в.

Если рама плавно разгоняется или затормаживается приложенным к верхней оси моментом  $M$ , то ее движение равноускорено или равнозамедлено и имеет ускорение  $\varepsilon = M/J_0$ , где  $J_0$  — момент инерции рамы относительно ее оси вращения. В этом случае при переходе в связанную с рамой координатную систему необходимо учесть силы инерции, которые действуют перпендикулярно плоскости рамы. Они показаны на рис. 14.5. Величину  $q_n$  можно определить из условия равновесия рамы в связанной с ней системе координат:

$$\sum M_y = 0 : \quad M - 2 \cdot 2q_n ll - 4 \cdot \frac{1}{2}q_n l \frac{2}{3}l = 0.$$

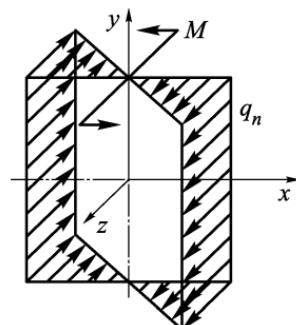


Рис. 14.5

Здесь второе слагаемое является моментом нагрузки, приложенной к вертикальным участкам, а третье — к горизонтальным. Из этого уравнения видно, что  $q_n = \frac{3}{16} \frac{M}{l^2}$ .

Во всех рассмотренных выше примерах после перехода к связанной с телом системе координат задача сводилась к расчетной схеме, в которой нагрузка не зависела от времени. Такого рода нагрузка называется *квазистатической*.

**14.1.2.** Более сложным является случай, когда при переходе к связанной с телом координатной системе нагрузка остается

зависимой от времени. Так, например, будет при расчете шатуна  $AB$  кривошипного механизма (рис. 14.6 *a*). При вращении кривошипа  $OA$  шатун совершает сложное движение в плоскости. При переходе к связанной с шатуном системе координат  $\xi, \eta$  нужно, по принципу Даламбера, учесть действующие на шатун инерционные силы, появляющиеся вследствие ускорений его точек. Сам шатун при этом рассматривается как жесткое тело.

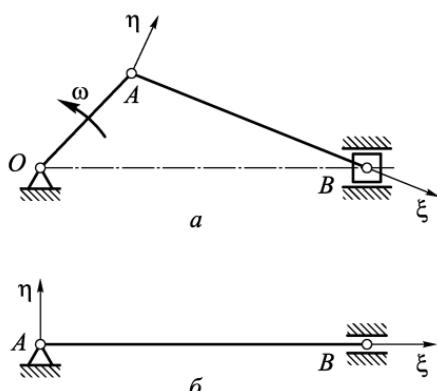


Рис. 14.6

А движение точек шатуна в системе  $\xi, \eta$  уже будет деформационным движением. Инерционные нагрузки, действующие на шатун, должны быть уравновешены реакциями его взаимодействия с кривошипом  $OA$  и поршнем  $B$ . Инерционные нагрузки здесь периодические, поэтому деформационное движение шатуна также периодическое, иными словами, шатун в системе координат  $\xi, \eta$  совершает упругие колебания. Возникает вопрос, как велики эти колебания, надо ли их учитывать. На этот счет есть общая рекомендация: если частота изменения периодической нагрузки существенно меньше частоты собственных колебаний шатуна как балки в осях  $\xi, \eta$  (рис. 14.6 *b*), то действующие на шатун инерционные нагрузки можно рассматривать как статические и не учитывать его колебаний. При этом расчетным окажется тот момент времени, в который в шатуне возникают максимальные напряжения. Если же частоты нагрузки и собственных колебаний шатуна близки, то колебания существенны. Они нарастают при сближении частот, т.е. при приближении к резонансу.

Непериодические нагрузки можно разделить на статические и динамические аналогично. Если время нарастания нагрузки

велико по сравнению с периодом собственных колебаний системы — такие нагрузки можно рассматривать как статические. Если же это время близко или меньше периода собственных колебаний системы, то динамический эффект существенен и расчет системы на действие таких нагрузок требует рассмотрения процесса ее деформационного движения.

## 14.2. Ударное нагружение. Техническая теория удара

**14.2.1.** Ударное нагружение происходит при соударении тел. Будем рассматривать удар движущегося тела по неподвижной упругой системе. Размеры площадки, по которой происходит контактное взаимодействие тела с системой, будем считать малыми в сравнении с характерным размером системы, чтобы возникающие силы ударного взаимодействия можно было считать сосредоточенными в точке удара.

Деформации системы при ударном взаимодействии можно разделить на локальные и общие. Локальные деформации сосредоточены вблизи точки удара. Они зависят от механических свойств материала как ударяющего тела, так и системы, от формы соударяющихся поверхностей в районе их контакта и т.д. Здесь возможен широкий диапазон моделей — от абсолютно упругого до абсолютно неупругого удара.

*Абсолютно упругий удар* — это очень кратковременный процесс взаимодействия ударяющего тела и системы, в результате которого тело отскакивает, а система приобретает некоторый импульс движения в направлении удара. При этом кинетическая энергия, которую имело тело в момент непосредственно перед ударом, полностью переходит в кинетическую энергию тела и системы после удара.

При *абсолютно неупругом ударе* ударяющее тело как бы «прилипает» к системе и далее движется вместе с ней.

**14.2.2.** Чтобы разобраться в том, какой из этих случаев приведет к большим общим деформациям системы, рассмотрим их на примере соударения двух шаров.

А б с о л ю т н о н е у п р у г и й у д а р . Пусть шар с массой  $M_1$  движется со скоростью  $V_0$  и, столкнувшись с неподвижным шаром массы  $M_2$ , продолжает двигаться вместе с ним со скоростью  $V$ . На рис. 14.7 *a* шары показаны до столкновения, а на рис. 14.7 *б* — после него. По закону сохранения импульса  $M_1 V_0 = (M_1 + M_2)V$ . Отсюда легко получить скорость шаров после

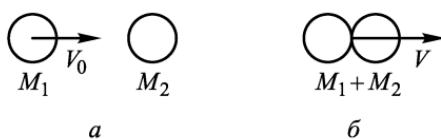


Рис. 14.7

удара

$$V = \frac{M_1}{M_1 + M_2} V_0. \quad (14.2.1)$$

Кинетические энергии шаров до и после столкновения равны соответственно

$$T_0 = \frac{1}{2} M_1 V_0^2, \quad (14.2.2)$$

$$T_{\text{неупр}} = \frac{1}{2} (M_1 + M_2) V^2 = \frac{1}{2} \frac{M_1}{M_1 + M_2} M_1 V_0^2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} T_0.$$

Различие кинетических энергий в моменты до и после удара объясняется тем, что при абсолютно неупругом ударе часть энергии рассеивается на необратимую деформацию ударяющихся тел.

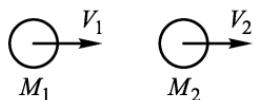


Рис. 14.8

А б с о л у т н о у п р у г и й у д а р . Пусть столкновение тех же шаров  $M_1$  и  $M_2$  абсолютно упруго, т.е. энергия сохраняется. Если  $V_1$  и  $V_2$  — скорости шаров  $M_1$  и  $M_2$  после удара (рис. 14.8), то, по закону сохранения импульса,

$$M_1 V_0 = M_1 V_1 + M_2 V_2, \quad (14.2.3)$$

а по закону сохранения энергии,

$$\frac{1}{2} M_1 V_0^2 = \frac{1}{2} M_1 V_1^2 + \frac{1}{2} M_2 V_2^2. \quad (14.2.4)$$

Решая совместно эти два уравнения, получим

$$V_2 = \frac{2M_1}{M_1 + M_2} V_0, \quad V_1 = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} V_0. \quad (14.2.5)$$

В результате столкновения второй шар приобретает кинетическую энергию:

$$T_{\text{упр}} = \frac{1}{2} M_2 V_2^2 = \frac{4M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2} T_0. \quad (14.2.6)$$

**14.2.3.** Для исследования удара по упругой системе рассмотрим ее простейшую модель, когда масса  $M_2$  подкреплена в направлении удара упругой пружиной (рис. 14.9). В этой модели общей деформацией является деформация пружины. В результате удара масса  $M_2$  начинает двигаться, сжимать пружину и в конце концов достигает крайнего правого положения, в котором пружина будет максимально сжата. С точки зрения прочности, этот момент самый опасный, так как именно тогда в пружине будут достигнуты максимальные деформации и, следовательно, максимальные напряжения. Далее под действием упру-

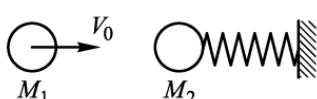


Рис. 14.9

гих сил масса  $M_2$  начнет двигаться влево, а пружина — распрымляться (возможные повторные столкновения при упругом ударе не учитываются).

Время, прошедшее от начала соприкосновения масс до момента максимальной общей деформации, обозначим через  $t_1$ . Другим характерным временем будет время соприкосновения масс при упругом ударе или время от начала соприкосновения масс до момента, когда их скорости сравняются при неупругом ударе. Это — время локальных деформаций, обозначим его через  $t_2$ .

Время максимальных деформаций  $t_1$  определяется в основном массами и жесткостью пружины. Нетрудно понять, что для абсолютно неупругого удара оно близко к одной четверти периода  $t_0$  собственных колебаний массы  $M_1 + M_2$  на пружине. Действительно, движение системы близко к колебательному движению масс  $M_1 + M_2$  на пружине, которое возникает после получения этими массами толчка в начальном (т.е. при недеформированной пружине) положении.

Время локальных деформаций  $t_2$  зависит в основном от деформационных характеристик материала, его плотности, формы соударяющихся масс. Как правило, оно мало по сравнению с  $t_1$ , т.е.  $t_2 \ll t_1$ .

В технической теории удара в качестве первой гипотезы принимается, что время локальных деформаций  $t_2$  мало в сравнении со временем  $t_1$  достижения максимальных общих деформаций (гипотеза I).

$$\text{Гипотеза I: } t_2 \ll t_1. \quad (14.2.7)$$

В таком случае деформация пружины и возникающее вследствие этого упругое усилие будут за время  $t_2$  малы и можно пренебречь их влиянием на процесс соударения масс  $M_1$  и  $M_2$ , т.е. считать, что передача импульса от массы  $M_1$  к  $M_2$  происходит мгновенно и результат ее определяется формулами (14.2.1), (14.2.2) — для абсолютно неупругого и (14.2.5), (14.2.6) — для абсолютно упругого удара. В этих формулах  $T_{\text{неупр}}$  и  $T_{\text{упр}}$  представляют собой те кинетические энергии, которые в момент наибольшей деформации пружины полностью перейдут в потенциальную энергию деформации. Сравнивая  $T_{\text{упр}}$  и  $T_{\text{неупр}}$ , видим, что

$$T_{\text{упр}} = \frac{4M_2}{M_1 + M_2} T_{\text{неупр}}.$$

Поэтому  $T_{\text{упр}} > T_{\text{неупр}}$  при  $M_1 < 3M_2$ , и в этом случае модели абсолютно упругого удара соответствуют большие деформации пружины, потому ее и следует принять в качестве расчетной. А если  $M_1 > 3M_2$ , то расчетной окажется модель абсолютно неупругого удара.

Заметим, что выше рассмотрен простейший случай упругого удара, когда обе массы после удара двигаются в том же направлении, в каком двигалась ударяющаяся масса. Это так называемый *лобовой удар*. При соударении шаров этот случай реализуется только тогда когда траектория ударяющего шара проходит через центр ударяемого.

В остальных случаях (это можно наблюдать на примере биллиардных шаров) после удара шаров их скорости меняют направление. Анализ этой ситуации показывает, что наиболее опасным является как раз случай лобового удара.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением абсолютно неупругого удара. Решение тех же задач для случая абсолютно упругого удара не вносит принципиальных трудностей, и читатель вполне может провести его самостоятельно.

**14.2.4.** Пока обсуждался вопрос о модели локальных деформаций при ударе, общую деформацию можно было представить в рамках простейшей модели упругой системы — массы  $M_2$  на упругой пружине, собственная масса которой не учитывалась. Рассмотрим более сложную упругую систему — балку с массой  $M_2$  (рис. 14.10 *a*). Процесс деформации балки при

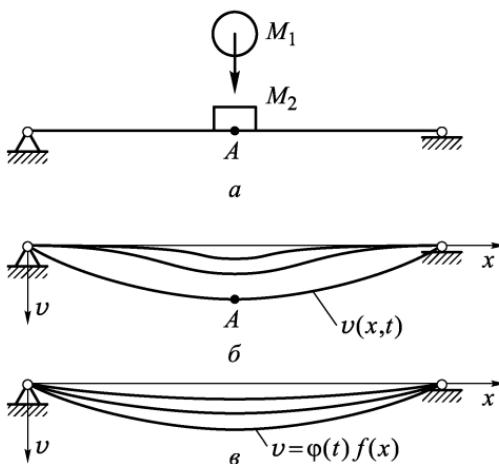


Рис. 14.10

ударе, вообще говоря, очень сложен. От точки удара по балке распространяются возмущения (рис. 14.10 *б*). Скорости их распространения различны. Так, продольные возмущения распространяются со скоростью звука в материале балки, изгибные — со скоростью распространения изгибных волн и т.д. Эти скорости, как правило, велики и время распространения возмущений вдоль балки от точки удара до опор обычно существенно мень-

ше того времени, которое проходит от начала удара до момента, когда точка удара достигнет своего нижнего положения, а балка максимально деформируется. Поэтому естественно пренебречь волновыми процессами и предположить, что возмущения вдоль балки распространяются мгновенно. А такое предположение равносильно пренебрежению влиянием инерционных сил на деформирование балки. Другими словами, при ударе деформация балки в каждый момент подобна статической. Математически это предположение означает, что поперечные прогибы балки  $v$ , которые, вообще говоря, зависят от времени и координаты, могут быть представлены в форме

$$v(x, t) = \varphi(t)f(x), \quad (14.2.8)$$

где функция  $f(x)$  и определяет деформированную форму балки.

Если  $\delta_A$  — прогиб в точке удара  $A$ , то представление (14.2.8) можно записать в виде

$$v(x, t) = \delta_A(t)f(x), \quad (14.2.9)$$

и так как  $v(x_A, t) = \delta_A(t)$ , то  $f(x_A) = 1$ .

Важно понять, что в таком представлении функция  $f(x)$  не зависит от вида функции  $\delta(t)$ , т.е. от того, является  $\delta(t)$  быстро или медленно изменяющейся во времени функцией. Иными словами, вид функции  $f(x)$ , которая определяет форму деформирования балки, не зависит от того, какой процесс деформирования балки — статический или динамический. Это предположение и составляет содержание второй гипотезы технической теории удара, которую удобно сформулировать в следующем виде:

*Гипотеза II: в каждый момент времени динамическая деформированная форма системы подобна статической, принимаемой системой при статическом нагружении ее со средоточенной силой в точке удара и в направлении удара.*

Гипотеза II позволяет вычислять потенциальную энергию динамической деформации балки в каждый момент времени так же, как при статическом деформировании.

При изгибе балки в пределах закона Гука ее потенциальная энергия деформации выражается формулой (8.7.6):

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_z^2}{EJ_z} dx. \quad (14.2.10)$$

Но в то же время  $M_z = \pm EJ_z v''$  по (8.6.4). Поэтому

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_l EJ_z (v'')^2 dx. \quad (14.2.11)$$

Если подставить сюда представление (14.2.9), то

$$\Pi = \frac{1}{2} \delta_A^2 \int_l E J_z (f'')^2 dx. \quad (14.2.12)$$

Это выражение в рамках гипотезы II можно использовать как для статического, так и для динамического деформирования.

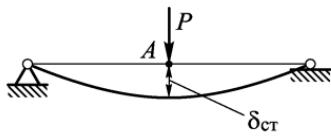


Рис. 14.11

Если  $\delta_{\text{ст}}$  — статический прогиб балки при нагружении ее силой  $P$  в точке удара  $A$  (рис. 14.11), то при линейно упругой деформации сила  $P$  совершаает работу  $\frac{1}{2}P\delta_{\text{ст}}^2$ . В то же

время  $\delta_{\text{ст}} = P\delta_1$ , где  $\delta_1$  — прогиб в точке  $A$  от единичной силы. По-

этому работа силы  $P$  может быть записана как  $\frac{1}{2}\frac{\delta_{\text{ст}}^2}{\delta_1}$ . Эта работа накопится в балке в виде потенциальной энергии деформации. Следовательно, при статическом нагружении

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{\delta_{\text{ст}}^2}{\delta_1}. \quad (14.2.13)$$

Сравнивая выражения (14.2.12), (14.2.13), видим, что

$$\int_l E J_z (f'')^2 dx = \frac{1}{\delta_1}.$$

Кроме того, замечаем, что и при динамической деформации потенциальную энергию деформации также можно подсчитать по формуле вида (14.2.13)

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{\delta_A^2}{\delta_1}. \quad (14.2.14)$$

Это является следствием гипотезы II. Отметим, что выражения (14.2.13), (14.2.14) не зависят от конкретного вида упругой системы, будь то пружина, балка и т.п. Важно только, чтобы ее деформация была линейно упруга.

В качестве примеров применения технической теории удара рассмотрим удар по системе горизонтально движущейся массой, а также вертикально падающей массой.

### 14.3. Удар горизонтально движущейся массой

**14.3.1.** Сначала рассмотрим удар горизонтально движущейся со скоростью  $V_0$  массой  $M$  по балке (упругой системе),

массой которой можно пренебречь (рис. 14.12). Кинетическая энергия ударяющей массы  $T_1 = \frac{1}{2}MV_0^2$  по мере торможения массы силами упругой деформации балки будет преобразовываться в потенциальную энергию деформации. В момент максимальной деформации балки, когда ее прогиб в точке  $A$  равен  $\delta_{\text{дин}}$ , кинетическая энергия массы полностью перейдет в потенциальную энергию деформации  $\Pi = \frac{1}{2} \frac{\delta_{\text{дин}}^2}{\delta_1}$ . Таким образом,  $T_1 = \Pi$  или

$$\frac{1}{2}MV_0^2 = \frac{1}{2} \frac{\delta_{\text{дин}}^2}{\delta_1}.$$

Отсюда

$$\delta_{\text{дин}} = \sqrt{M\delta_1} V_0.$$

Силу  $P_{\text{max}}$ , действующую в момент максимальной деформации со стороны массы на балку, можно найти, учитывая, что  $\delta_{\text{дин}} = P_{\text{max}}\delta_1$ . Поэтому

$$P_{\text{max}} = \frac{\delta_{\text{дин}}}{\delta_1} = \sqrt{\frac{M}{\delta_1}} V_0.$$

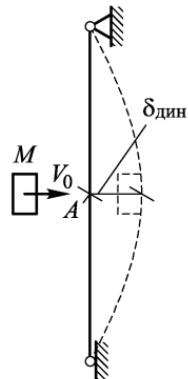
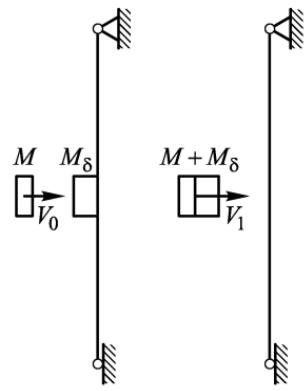


Рис. 14.12

**14.3.2.** Пусть в месте удара на балке закреплена буферная масса  $M_\delta$  (рис. 14.13 а). При абсолютно неупругом ударе по закону сохранения импульса сразу же после удара обе массы движутся со скоростью  $V_1 = \frac{M}{M + M_\delta}V_0$ . Поэтому эта задача может быть рассмотрена как предыдущая (рис. 14.13 б). Тогда

$$\delta_{\text{дин}} = \sqrt{(M_1 + M_\delta)\delta_1} V_1 =$$

$$= \sqrt{\frac{M}{M + M_\delta}M\delta_1} V_0 = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{M_\delta}{M}}M\delta_1} V_0; \quad (14.3.1)$$



$$P_{\text{max}} = \sqrt{\frac{M + M_\delta}{\delta_1}} V_1 = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{M_\delta}{M}} \frac{M}{\delta_1}} V_0.$$

Рис. 14.13

**14.3.3.** Гипотеза II (см. (14.2.9)) позволяет в энергетическом балансе учесть кинетическую энергию распределенной массы. Рассмотрим балку, погонная масса которой равна  $m$ , а в

точке удара расположена буферная масса  $M_\delta$  (рис. 14.14). Согласно (14.2.9) скорость точки удара с координатой  $x_A$  будет

$$V(x_A) = \frac{d}{dt}(v(x_A, t)) = \frac{d\delta_A}{dt}f(x_A) = \frac{d\delta_A}{dt}.$$

Скорость точки с координатой  $x$  равна

$$V(x) = \frac{\partial}{\partial t}(v(x, t)) = \frac{d\delta_A}{dt}f(x) = V(x_A)f(x).$$

В момент непосредственно после удара  $V(x_A) = V_1$ . В этот момент кинетическая энергия системы равна

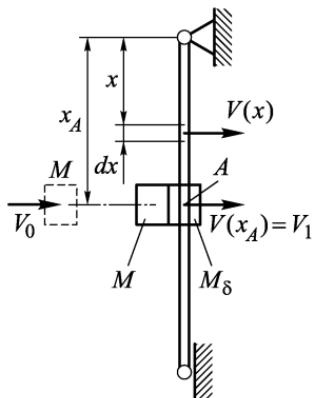


Рис. 14.14

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(M + M_\delta)V_1^2 + \int_l \frac{1}{2}m dx V^2(x) = \\ &= \frac{1}{2}(M + M_\delta)V_1^2 + \int_l \frac{1}{2}m dx [V_1 f(x)]^2. \end{aligned} \quad (14.3.2)$$

В этом выражении под интегралом стоит кинетическая энергия элемента балки  $dx$ , а сам интеграл представляет собой кинетическую энергию распределенной массы балки. Можно найти такую массу, которую называют *приведенной массой*  $M_{\text{пр}}$  и которая, будучи расположена в точке

удара, имела бы такую же кинетическую энергию, что и распределенная масса балки. Условие для определения  $M_{\text{пр}}$  имеет поэтом вид

$$\frac{1}{2}M_{\text{пр}}V_1^2 = \int_l \frac{1}{2}m dx [V_1 f(x)]^2.$$

Отсюда, после сокращения на  $\frac{1}{2}V_1^2$ , получаем, что

$$M_{\text{пр}} = \int_l m f^2(x) dx.$$

Введение приведенной массы позволяет записать кинетическую энергию (14.3.2) в виде

$$T = \frac{1}{2}(M + M_\delta + M_{\text{пр}})V_1^2.$$

Но такая кинетическая энергия будет у безынерционной балки, которая в точке ударя массой  $M$  имеет сосредоточенную массу

$M_\delta + M_{\text{пр}}$ . Поэтому задачу удара по балке с распределенной массой (рис. 14.14) можно заменить задачей с сосредоточенной в точке удара массой  $M_\delta + M_{\text{пр}}$  (рис. 14.15), рассмотренной только что в п. 14.3.2. Расчетные формулы (14.3.1) в этом случае примут вид

$$\delta_{\text{дин}} = \sqrt{\frac{M}{M + M_\delta + M_{\text{пр}}} M \delta_1 V_0};$$

$$P_{\text{max}} = \sqrt{\frac{M + M_\delta + M_{\text{пр}}}{\delta_1} V_1} =$$

$$= \sqrt{\frac{M}{M + M_\delta + M_{\text{пр}}} \frac{M}{\delta_1} V_0}.$$

Приведенную массу удобно представлять в форме

$$M_{\text{пр}} = k_{\text{пр}} M_c, \quad (14.3.3)$$

где  $M_c = \int_l m dx$  — суммарная масса балки,  $k_{\text{пр}}$  — коэффициент приведения массы.

Из (14.3.3) следует

$$k_{\text{пр}} = \frac{\int_l m f^2(x) dx}{\int_l m dx}. \quad (14.3.4)$$

Для балки постоянного сечения  $m = \text{const}$ , поэтому

$$k_{\text{пр}} = \frac{1}{l} \int_l f^2(x) dx. \quad (14.3.5)$$

Для вычисления  $k_{\text{пр}}$  необходимо знать  $f(x)$ . Найти эту функцию, определяющую деформированную форму балки, позволяет выражение гипотезы II (14.2.9), которое справедливо, в частности, и для статического деформирования балки под действием сосредоточенной силы в точке удара. В этом случае оно имеет вид

$$v_{\text{ст}}(x) = \delta_{\text{ст}} f(x).$$

Если сосредоточенную силу принять единичной, то

$$f(x) = \frac{v_{\text{ст}}(x)}{\delta_1}. \quad (14.3.6)$$

П р и м е р 14.1. Найдем приведенную массу консольной балки постоянного сечения при ударе по ее свободному концу (рис. 14.16). Изгибающий момент в этой балке при действии единичной силы на конце (в точке удара) равен  $M_{z1} =$

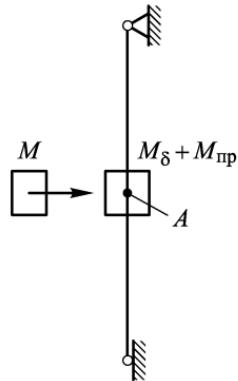


Рис. 14.15

$= 1 \cdot (l - x)$ . Тогда, интегрируя дифференциальное уравнение упругой линии

$$v'' = M_z/EJ_z,$$

получаем

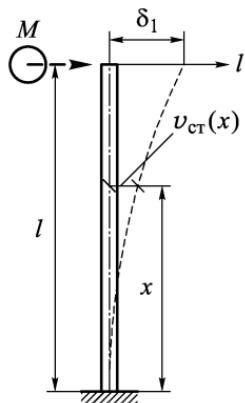


Рис. 14.16

$$v_{ct} = \frac{1}{EJ_z} \left( \frac{1}{2}lx^2 - \frac{1}{6}x^3 \right) + C_1x + C_2.$$

Постоянные интегрирования определяются из условий защемления балки в точке  $x = 0$ :  $v(0) = 0$ ,  $v'(0) = 0$ . Они равны нулю. Поэтому, имея в виду, что  $\delta_1 = v_{ct}(l)$ , получаем

$$f(x) = \frac{v_{ct}(x)}{\delta_1} = \frac{3}{2} \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right].$$

После подстановки этого выражения в формулу (14.3.5) получаем

$$k_{\text{пр}} = \frac{33}{140} = 0,235.$$

Тогда  $M_{\text{пр}} = 0,235M_c$ .

#### 14.4. Удар вертикально движущейся массой

**14.4.1.** Для того чтобы разобраться в особенностях энергетического баланса при ударе вертикально движущейся массой, рассмотрим балку с пренебрежимо малой собственной массой, по которой ударяет падающая с высоты  $h$  масса  $M$  (рис. 14.17).

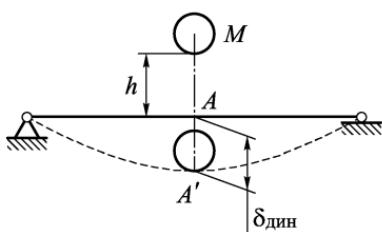


Рис. 14.17

сама движется вместе с ней и достигает нижнего положения, в котором скорость массы равна нулю. При этом из-за опускания на величину  $\delta_{\text{дин}}$  уменьшится также и потенциальная энергия положения массы. Это уменьшение будет равно работе силы тяжести массы на пути  $\delta_{\text{дин}}$ , т.е.  $\Delta\Pi_M = Mg\delta_{\text{дин}}$ . Вся эта энергия

При таком ударе нет столкновения двух масс, поэтому скорости массы  $M$  в моменты непосредственно до и после удара будут одинаковы и равны  $V_0 = \sqrt{2gh}$ , где  $g$  — ускорение свободного падения. В этот момент кинетическая энергия массы равна  $T = \frac{1}{2}MV_0^2$ . После соприкосновения с балкой

аккумулируется в балке в виде потенциальной энергии изгиба  $\Delta\Pi_{\text{деф}} = \frac{1}{2}\delta_{\text{дин}}^2/\delta_1$ . Поэтому энергетический баланс имеет вид

$$\frac{1}{2}MV_0^2 + Mg\delta_{\text{дин}} = \frac{1}{2}\delta_{\text{дин}}^2/\delta_1. \quad (14.4.1)$$

Так как  $Mg\delta_1 = \delta_{\text{ст}}$  является прогибом балки при статическом нагружении ее силой, равной весу балки  $Mg$ , то уравнение (14.4.1) легко свести к квадратному уравнению

$$\delta_{\text{дин}}^2 - 2\delta_{\text{ст}}\delta_{\text{дин}} - \delta_{\text{ст}}\frac{V_0^2}{g} = 0, \quad \frac{V_0^2}{g} = 2h.$$

Корнями этого уравнения будут выражения

$$\delta_{\text{дин}} = \delta_{\text{ст}} \pm \sqrt{\delta_{\text{ст}}^2 + \frac{V_0^2}{g}\delta_{\text{ст}}} = \delta_{\text{ст}} \pm \sqrt{\delta_{\text{ст}}^2 + 2h\delta_{\text{ст}}}. \quad (14.4.2)$$

Положительному значению радиала соответствует прогиб в самом нижнем положении балки, а отрицательному — прогиб в самом верхнем положении, которого балка с массой достигает при возвратном движении из нижнего положения. Наибольшие напряжения возникают, конечно, в нижнем положении, так как в нем деформация больше.

Выражение (14.4.2) удобно представлять в форме

$$\delta_{\text{дин}} = k_{\text{дин}}\delta_{\text{ст}}; \quad k_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{V_0^2}{g\delta_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{\text{ст}}}}. \quad (14.4.3)$$

Здесь  $k_{\text{дин}}$  — коэффициент динамичности, который показывает, во сколько раз динамический прогиб больше статического. Видно, что если даже масса падает на балку с нулевой высоты, то  $k_{\text{дин}} = 2$ . Значит, если мы поднесем массу к балке, слегка коснувшись ее, и отпустим массу, то прогибы балки будут вдвое больше, чем при медленном и плавном опускании массы на балку.

**14.4.2.** Рассмотрим теперь удар падающей с высоты  $h$  массы  $M$  по балке с буферной массой  $M_\delta$  в точке удара (рис. 14.18). Скорость падающей массы  $M$  в момент непосредственно перед ударом о массу  $M_\delta$  равна  $V_0 = \sqrt{2gh}$ . Сразу же после удара при абсолютно неупругом ударе по закону сохранения импульса скорость обеих масс равна

$$V_1 = \frac{M}{M + M_\delta} V_0,$$

а их кинетическая энергия в этот момент будет

$$T = \frac{1}{2}(M + M_\delta)V_1^2 = \frac{1}{2} \frac{M}{M + M_\delta} MV_0^2.$$

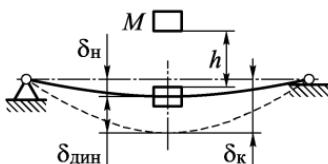


Рис. 14.18

Кроме этой энергии, в нижнем положении в потенциальную энергию деформации балки перейдет также изменение энергии положения массы  $M$  и  $M_\delta$ :

$$\Delta\Pi_M = g(M + M_\delta)\delta_{\text{дин}}.$$

Здесь  $\delta_{\text{дин}}$  — динамический прогиб точки  $A$  за счет удара.

Как видно из рис. 14.18,  $\delta_{\text{дин}} = \delta_k - \delta_h$ , где  $\delta_h = M_\delta g \delta_1$  — начальный прогиб, вызванный весом буферной массы, а  $\delta_k$  — конечный прогиб, т.е. прогиб балки в момент наибольшей деформации.

Для того чтобы подсчитать изменение потенциальной энергии деформаций балки при переходе из начального положения

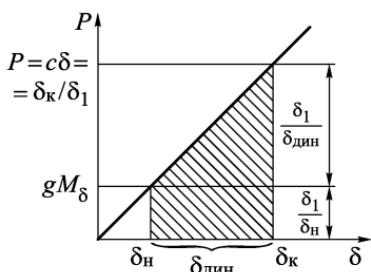


Рис. 14.19

в конечное, обратимся к диаграмме статического деформирования балки под действием приложенной в точке удара силы взаимодействия  $P$  между массой  $M + M_\delta$  и балкой (рис. 14.19). Эта диаграмма в силу гипотезы II не отличается от диаграммы статического деформирования балки силой  $P$ . Работа, которую совершает сила  $P$  при переходе балки из начального положения в конечное, равна

площади заштрихованной области. Она-то и пойдет на изменение потенциальной энергии деформаций балки. Поэтому

$$\Delta\Pi_{\text{деф}} = \frac{1}{2}\delta_{\text{дин}} \frac{\delta_{\text{дин}}}{\delta_1} + \frac{\delta_h}{\delta_1}\delta_{\text{дин}} = \frac{1}{2}\frac{\delta_{\text{дин}}^2}{\delta_1} + gM_\delta\delta_{\text{дин}}.$$

Из энергетического баланса  $T + \Delta\Pi_M = \Delta\Pi_{\text{деф}}$  легко получаем

$$\frac{1}{2}\frac{M}{M + M_\delta}MV_0^2 + gM\delta_{\text{дин}} = \frac{1}{2}\frac{\delta_{\text{дин}}^2}{\delta_1}.$$

Отсюда, если обозначить через  $\delta_{\text{ст}} = gM\delta_1$  статический прогиб балки, вызванный силой веса  $Mg$  массы  $M$ , приходим к квадратному уравнению

$$\delta_{\text{дин}}^2 - 2\delta_{\text{ст}}\delta_{\text{дин}} - \frac{M}{M + M_\delta}\delta_{\text{ст}}\frac{V_0^2}{g} = 0.$$

Из этого уравнения следует:

$$\delta_{\text{дин}} = k_{\text{дин}}\delta_{\text{ст}},$$

$$k_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{M}{M + M_\delta}\frac{V_0^2}{g\delta_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{M}{M + M_\delta}\frac{2h}{\delta_{\text{ст}}}}. \quad (14.4.4)$$

Заметим, что  $\delta_{\text{дин}}$  — это дополнительный прогиб, который получит балка в результате удара. Полный прогиб  $\delta_k = \delta_h + \delta_{\text{дин}}$ .

**14.4.3.** Распределенную массу балки можно, как и при горизонтальном ударе, привести к точке удара. Тогда задача сводится к только что рассмотренной (см. рис. 14.18), но только масса в точке удара будет равна  $M_\delta + M_{\text{пр}}$ , где  $M_{\text{пр}} = k_{\text{пр}} \int_l m dx = k_{\text{пр}} M_c$ .

Таким образом, коэффициент динамичности в этом случае будет равен

$$k_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{M}{M + M_\delta + M_{\text{пр}}} \frac{2h}{\delta_{\text{ст}}}}. \quad (14.4.5)$$

При проведении расчета на прочность при динамическом нагружении нужно учитывать, что внутренние силы, а следовательно, и напряжения возрастают по сравнению со статическими в том же отношении, что и деформации, т.е.

$$\sigma_{\text{дин}} = k_{\text{дин}} \sigma_{\text{ст}}, \quad (14.4.6)$$

где  $\sigma_{\text{ст}}$  — напряжения, возникающие в балке при статическом нагружении ее силой, равной весу падающей массы.

## B.14. Контрольные вопросы

**B.14.1.** Какими силами необходимо компенсировать переход из инерционной системы координат в неинерционную?

**B.14.2.** Какая нагрузка называется квазистатической?

**B.14.3.** В каких случаях переменные во времени нагрузки можно рассматривать как статические?

**B.14.4.** Что такое абсолютно упругий и абсолютно неупругий удар?

**B.14.5.** Почему при неупругом ударе кинетические энергии в моменты до и сразу после соударения не равны?

**B.14.6.** Какая гипотеза принимается в технической теории удара о соотношении времени локальных и общих деформаций системы?

**B.14.7.** При каких соотношениях масс соударяемых тел принимаются расчетные модели абсолютно упругого и абсолютно неупругого удара и почему?

**B.14.8.** Сформулируйте вторую гипотезу технической теории удара. Как на основании этой гипотезы можно вычислить потенциальную энергию динамической деформации балки?

**B.14.9.** Что такое приведенная масса? Как она вычисляется?

**B.14.10.** Чем различаются энергетические балансы для балки при горизонтальном и вертикальном ударах?

**B.14.11.** Что такое коэффициент динамичности? Как он определяется? Чему он равен при падении массы с нулевой высоты?

**B.14.12.** Как выражаются напряжения при динамическом нагружении через статические напряжения?

### 3.14. Задачи

**3.14.1.** Для рамы круглого поперечного сечения (рис. 14.20), вращающейся с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , построить эпюру изгибающих моментов и найти допускаемое число оборотов, если  $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$ ; плотность материала  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$ ;  $l = 0,3 \text{ м}$ ;  $d = 4 \text{ см}$ .

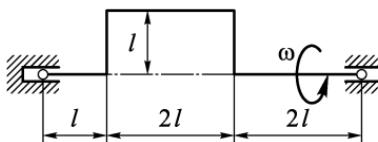


Рис. 14.20

**3.14.2.** Построить эпюру изгибающих моментов в тонкостенном кольце, равномерно вращающемся вокруг горизонтальной оси (рис. 14.21).

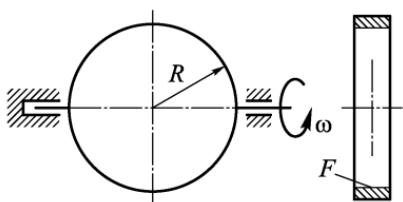


Рис. 14.21

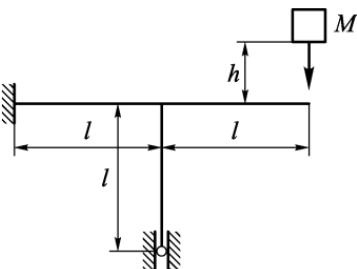


Рис. 14.22

**3.14.3.** Пренебрегая массой рамы постоянной жесткости  $EJ_z$ , определить максимальное динамическое напряжение

$\sigma_{\text{дин}}(\text{max})$  и динамический прогиб  $\delta_{\text{дин}}$  в точке удара, вызываемые падением массы  $M$  с высоты  $h$  (рис. 14.22). Удар считать абсолютно неупругим.

**3.14.4.** Полагая удар абсолютно неупругим, найти приведенную массу балки постоянного сечения (рис. 14.23).

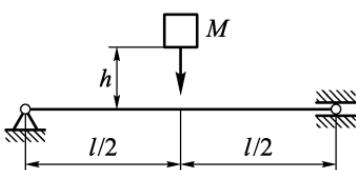


Рис. 14.23

## ГЛАВА 15

# ПРОЧНОСТЬ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ВО ВРЕМЕНИ НАПРЯЖЕНИЯХ

В предыдущих главах при формулировке условий прочности не учитывалось, что многие детали машин работают при переменных во времени нагрузках и, следовательно, возникающие в них напряжения также переменны во времени. Практика машиностроения уже в середине XIX века показала, что это обстоятельство необходимо учитывать. Особенно наглядно влияние переменности напряжений на прочность выявили железнодорожные катастрофы, вызванные поломками осей вагонов. Эти оси, рассчитанные по статическим механическим характеристикам  $\sigma_t$  или  $\sigma_v$ , разрушались, проработав некоторое время в условиях переменных напряжений, вызванных вращением оси относительно вагона и ударными нагрузками из-за неправильностей рельсового пути. Законы изменения нагрузок во времени могут быть самыми разнообразными. Например, крыло самолета за один полет нагружается различными нагрузками при взлете и посадке, на режимах набора высоты, крейсерского полета и снижения. Причем полет происходит в условиях неспокойной атмосферы, что также является причиной переменности нагрузок. Здесь подобные сложные режимы нагружения рассматриваться не будут (методы расчета на прочность, позволяющие их учесть, сейчас интенсивно разрабатываются). Будут рассмотрены только простейшие режимы, которые вызывают в деталях циклически изменяющиеся во времени напряжения. К таким режимам сводится или может быть сведено нагружение большинства деталей машин и элементов конструкций.

### 15.1. Усталость материала

**15.1.1.** Анализ разрушения деталей и конструкций, работающих при циклически изменяющихся нагрузках, а также специ-

ально поставленные эксперименты показывают, что уровень нагрузок, вызывающих разрушение после многократного их приложения, значительно ниже, чем при однократном статическом нагружении до разрушения. Другими словами, многократное приложение нагрузки приводит к понижению прочности. Такое явление называется *усталостью*. Например, для того чтобы сломать проволоку, мы перегибаем ее несколько раз то в одну, то в другую сторону. При этом в продольных волокнах проволоки создаются попеременно то растягивающие, то сжимающие напряжения. Если проволоку перегибать сильно, то она сломается после 5–10 циклов. Нетрудно убедиться, что если уменьшить степень перегиба, то число циклов до разрушения увеличится. Перегибая проволоку, мы стремимся создать в ней пластическую деформацию. Если этого не делать, то максимальные нормальные напряжения окажутся меньше предела текучести  $\sigma_t$  и проволока может выдержать миллионы циклов, а при еще меньших напряжениях она способна работать неограниченно долго.

Рассмотрим характер усталостного разрушения на примере оси железнодорожного вагона. На рис. 15.1 дана схема на-

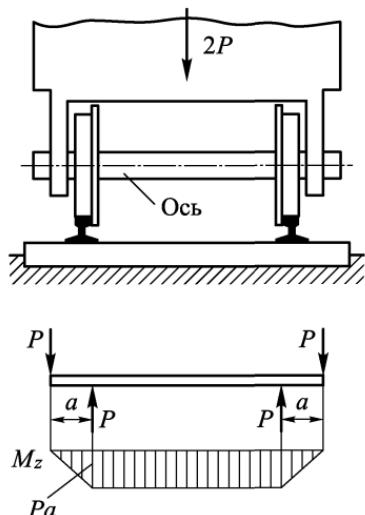


Рис. 15.1

гружения оси и соответствующая эпюра изгибающих моментов, возникающих в оси в результате действия приложенной к ней нагрузки  $2P$ . Так как ось при движении вагона вращается, то каждое продольное волокно расстягивается, когда оно оказывается вверху, и сжимается, оказавшись внизу. Таким образом, нормальное напряжение в каждой точке поперечного сечения циклически меняется во времени, становясь то растягивающим, то сжимающим. В сечении оси, по которому она разрушается, имеются две ярко выраженные зоны (рис. 15.2). Одна из них (зо-

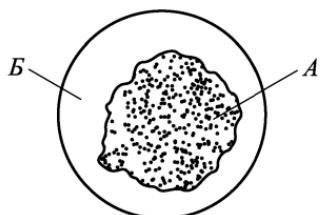


Рис. 15.2

на  $A$ ) имеет такую же крупнозернистую структуру, какая возникает на изломе у образцов из чугуна, разрушенных при одно-

основ статическом растяжении. Поверхность же зоны *Б* блестящая, как бы отполированная, без видимых следов зерен металла. Иногда часть ее покрыта ржавчиной.

Такой характер поверхности излома оси позволяет заключить, что разрушение оси не является быстрым, одномоментным актом. Это длительный процесс, в котором сначала образуется небольшая поверхность зоны *Б*. При повторяющихся нагрузлениях она постепенно растет, а ее зернистая структура сглаживается при повторяющихся нажатиях сторон поверхности излома друг на друга и от их взаимного трения и наклеива. Этот процесс настолько долг, что часть поверхности даже успевает заржаветь. По мере роста зоны *Б* сечение ослабляется и напряжения в оставшейся неразрушенной части сечения (соответствующей зоне *А*) возрастают. Наконец наступает момент, когда сечение ослабевает настолько, что происходит внезапное разрушение детали с образованием поверхности (зоны *А*), характерной для хрупкого разрушения.

**15.1.2.** Первые исследователи этого явления считали, что при переменных напряжениях происходит перерождение структуры металла, он как бы устает. Отсюда и пришли названия — усталость металла, усталостное разрушение. Но дальнейшие исследования показали, что структура металла не меняется. По современным представлениям природа усталостного разрушения связана с неоднородностью строения материала. Локальные неоднородности структуры металла (их называют *дислокациями*) являются местами, около которых сосредоточиваются пластические деформации, происходящие еще при напряжениях, меньших предела текучести. Дислокации могут при каждом цикле нагрузления при достижении некоторого уровня напряжений слегка перемещаться. Когда они встречаются — происходит их слияние. В результате в конце концов образуется микротрещина, которая постепенно растет, поглощает все новые и новые дислокации и превращается в макротрещину (зона *Б*). Дальнейший рост трещины все более и более ослабляет сечение, и деталь наконец разрушается.

В вершине трещины, как было отмечено в разд. 11.5, у пластического материала появляется область пластических деформаций. При циклическом нагружении периодическая дозагрузка и разгрузка материала приводит к его упрочнению в этой области (3.2). Он теряет пластические свойства, *охрупчивается*. А это, в свою очередь, способствует подрастанию трещины, так как хрупкий материал более чувствителен к трещинам.

Пока не удалось построить соответствующую таким представлениям математическую модель процесса усталостного разрушения, которая позволила бы по некоторым количественным характеристикам свойств материала и неоднородности его

структурой спрогнозировать процесс усталостного разрушения с удовлетворительной точностью. Поэтому математическое описание явления усталости строится сейчас на основе феноменологического подхода, т.е. целиком на базе экспериментальных данных. (Сейчас в научных исследованиях преобладает модельный подход. Он основан на проникновении в существование явления и создания таким путем математической модели явления. В этом случае эксперимент используется для установления степени адекватности модели явления и для определения численного значения констант, входящих в математическую модель).

## 15.2. Цикл напряжений. Методика экспериментального определения предела выносливости

**15.2.1.** Общий вид периодически или циклически изменяющегося во времени  $t$  напряжения  $\sigma$  показан на рис. 15.3. Но

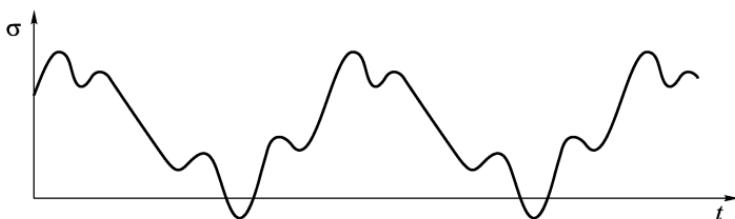


Рис. 15.3

практически все эксперименты на усталость проводились для более простых законов, данных на рис. 15.4; для них характер-

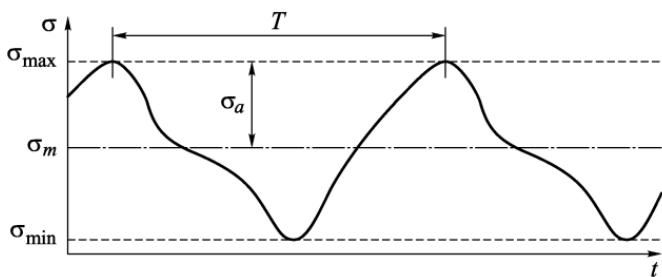


Рис. 15.4

но монотонное изменение  $\sigma$  между максимальными  $\sigma_{\max}$  и минимальными  $\sigma_{\min}$  значениями.

Совокупность значений напряжений за один период их изменения  $T$  называют *циклом напряжений*. Циклы напряжений, подобные показанным на рис. 15.4, назовем *монотонными*. Для немонотонных циклов (см. рис. 15.3) имеется очень мало экспериментальных результатов, поэтому пока трудно судить о возможности обобщать на них данные, полученные для монотонных циклов.

Для монотонного цикла основными характеристиками являются максимальное напряжение  $\sigma_{\max}$ , минимальное напряжение  $\sigma_{\min}$ , период  $T$  или частота  $\nu = 1/T$ .

Через  $\sigma_{\min}$  и  $\sigma_{\max}$  можно выразить среднее напряжение цикла  $\sigma_m$  и его амплитуду  $\sigma_a$

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} + \sigma_{\min}), \quad \sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}), \quad (15.2.1)$$

и наоборот,

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a, \quad \sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a. \quad (15.2.2)$$

Важной характеристикой цикла напряжений является коэффициент асимметрии цикла

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}. \quad (15.2.3)$$

Для статического нагружения  $\sigma_{\min} = \sigma_{\max}$ , поэтому для него  $R = +1$  (рис. 15.5 *a*). Цикл, у которого  $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$ , т.е.

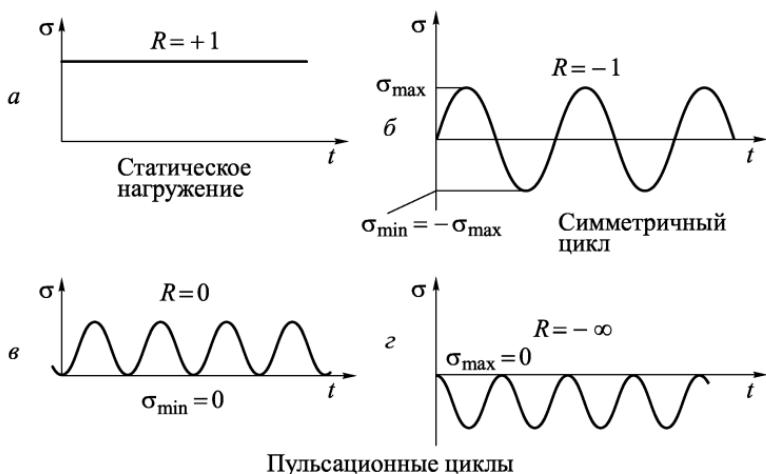


Рис. 15.5

$R = -1$ , называется *симметричным* (рис. 15.5 *б*). Он наиболее распространен и реализуется, например, во вращающихся валах и осях.

Если  $\sigma_{\min} = 0$  или  $\sigma_{\max} = 0$ , то цикл называют *пульсационным* (рис. 15.5 в, г). Такой цикл характерен для зубьев, зубчатых колес или звеньев цепных передач. Для него  $R = 0$  или  $R = -\infty$ . Циклы с одинаковым коэффициентом асимметрии  $R$  называют *подобными*.

Величины  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$ ,  $\sigma_m$ ,  $\sigma_a$ ,  $r$  называются *параметрами цикла*. Задав любые два из них, легко вычислить все остальные.

**15.2.2.** Первым из ученых, кто обратился к явлению усталости и ввел сам термин «усталость», был, по-видимому, французский ученый Ж. Понселе (J. Poncelet, 1839). Немецкий ученый А. Велер (A. Wöhler) впервые провел систематические экспериментальные исследования. Разработанная им методика испытаний усталости осталась в основном фактически неизменной до настоящего времени.

Чтобы исключить влияние самых различных конструктивных факторов и выявить усталостные характеристики самого материала, испытания проводят на образцах, имеющих одинаковые размеры, форму и чистоту обработки поверхности. Стандартная форма образца показана на рис. 15.6. Образец не имеет резких изменений формы, его поверхность полированная. Испытывается партия не менее чем из десяти образцов.

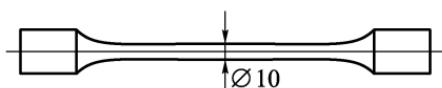


Рис. 15.6

Испытания проводятся на испытательной машине, которая позволяет в сечении образца создавать циклические изменения напряжения с заданным коэффициентом асимметрии  $R$ . Вся партия образцов испытывается при одном и том же  $R$ . От образца к образцу изменяется величина  $\sigma_{\max}$ . Испытания первого образца проводят при  $\sigma_{\max} \sim 0,7\sigma_{\text{вр}}$ . Он обычно разрушается, выдержав немного циклов нагружения (примерно  $10^3 \div 10^4$ ). Для следующего образца слегка снижают  $\sigma_{\max}$ . Количество циклов, которые он выдерживает до разрушения, возрастает. При снижении  $\sigma_{\max}$  от образца к образцу наблюдается, что чем меньше  $\sigma_{\max}$ , тем больше циклов нагружения  $N$  выдерживает образец до разрушения.

По результатам испытаний строят график зависимости между  $\sigma_{\max}$  и  $N$ . Так как с уменьшением  $\sigma_{\max}$  число циклов до разрушения  $N$  растет очень быстро, то по оси  $N$  удобно пользоваться логарифмической шкалой. График такой зависимости показан на рис. 15.7. Его называют *кривой усталости* (выносливости), или *кривой Велера*. В экспериментах на усталость обычно наблюдается значительный разброс результатов. Поэтому при построении кривой усталости используются методы статистической обработки экспериментов.

Стандартная форма образца показана на рис. 15.6. Образец не имеет резких изменений формы, его поверхность полированная. Испытывается партия не менее чем из десяти образцов.

Эксперименты со стальными образцами показали, что если образец выдерживает  $10^7$  циклов нагружения, то он не разрушается.

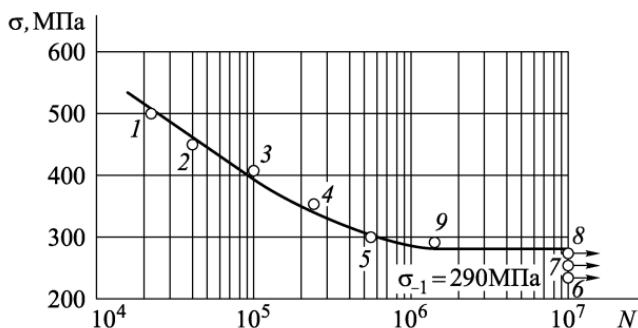


Рис. 15.7

шится и при любом большем числе циклов. Это значит, что имеется некоторый уровень  $\sigma_{\max}$  (горизонтальная асимптота на плоскости  $N\sigma_{\max}$ ), к которому кривая усталости стремится при понижении уровня напряжений. Это напряжение и называют *пределом выносливости*. Кривая усталости имеет вид кривой 1 на рис. 15.8. Для предела выносливости принято обозначение  $\sigma_R$ , где  $R$  – коэффициент асимметрии цикла, при котором проведены испытания.

Для цветных металлов и некоторых закаленных легированных сталей не удается установить асимптоту на кривой усталости. Это кривая 2 на рис. 15.8. Поэтому в качестве предела

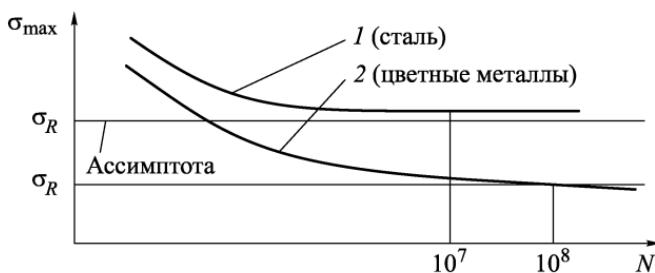


Рис. 15.8

выносливости  $\sigma_R$  принимают наибольшее по величине максимальное напряжение цикла, при котором образец выдерживает не менее  $10^8$  циклов.

Принятое здесь число  $10^8$  циклов называют *базовым*. Для сталей базовое число циклов равно  $10^7$  циклов. Введение базового числа циклов позволяет принять следующее определение.

*Предел выносливости  $\sigma_R$  — это наибольшее по величине значение максимального напряжения цикла, при котором образец выдерживает без разрушения базовое число циклов.*

Подчеркнем, что у материала не один предел выносливости, а совокупность  $\sigma_R$  — в зависимости от коэффициента асимметрии цикла  $R$ .

Наиболее часто испытания проводят при симметричном цикле. При этом в испытательной машине обычно образец вращается, и для него реализуется та же схема нагружения чистым изгибом, что и показанная на рис. 15.1 для оси железнодорожного вагона. При симметричном цикле  $R = -1$ . Поэтому соответствующий предел выносливости обозначается через  $\sigma_{-1}$ . Следует заметить, что при чистом изгибе максимальные напряжения возникают только на периферийных волокнах. Если же симметричный цикл реализуется в образце в условиях центрального растяжения–сжатия, т.е. если напряжения в опасном сечении образца распределены равномерно, то получаемая в таких испытаниях величина предела выносливости  $\sigma_{-1p}$  составляет только  $0,7 \div 0,9$  от предела выносливости  $\sigma_{-1}$ , полученного при чистом изгибе образцов.

По испытаниям стальных образцов на симметричный цикл при чистом изгибе имеется большое количество данных. На их основе можно заключить, что для сталей  $\sigma_{-1}$  составляет около половины  $\sigma_{\text{вр}}$  предела прочности:

$$\sigma_{-1} \approx (0,4 \div 0,5)\sigma_{\text{вр}}.$$

Для высокопрочных сталей можно оценивать предел выносливости по формуле

$$\sigma_{-1} \approx 400 + \frac{1}{6}\sigma_{\text{вр}} [\text{МПа}].$$

Для цветных металлов предел выносливости изменяется в более широких пределах:  $\sigma_{-1} = (0,25 \div 0,5)\sigma_{\text{вр}}$ .

Предел выносливости при пульсационном цикле ( $R = 0$ ) обозначается через  $\sigma_0$ . Испытательные машины для создания пульсационных и других асимметричных циклов значительно сложнее машин для испытаний на симметричный цикл в условиях чистого изгиба. Поэтому данных по таким испытаниям существенно меньше.

Проводятся также аналогичные испытания на усталость при действии касательных напряжений. Обычно они реализуются в условиях кручения образцов. Получаемые при этом пределы выносливости обозначаются через  $\tau_R$ . По результатам этих испытаний следует, что для сталей  $\tau_{-1} \approx 0,6\sigma_{-1}$ .

В пределах срока службы (ресурса), установленного для машины или конструкции, отдельные ее элементы могут испытывать число циклов нагружения, значительно меньшее базового.

Поэтому в них можно допустить возникновение напряжений, больших по величине предела выносливости. Но эти напряжения не должны превосходить предел ограниченной выносливости, который определяется по кривой усталости как напряжение, соответствующее установленному для этого элемента числу циклов нагружения за весь срок его службы.

Все данные выше определения относятся к циклам, у которых  $\sigma_{\max} \geq |\sigma_{\min}|$ . Для таких циклов среднее напряжение  $\sigma_m \geq 0$ . В случае цикла с  $\sigma_m < 0$  при определении предела выносливости используется не  $\sigma_{\max}$ , а абсолютная величина  $|\sigma_{\min}|$ , или, что равноценно,  $\max |\sigma|$ .

**15.2.3.** В большинстве испытательных машин создается такой закон нагружения образца во времени, что его переменная составляющая изменяется во времени по закону синусоиды. Нагружения по другим законам показали, что предел выносливости практически не зависит от формы цикла, а определяется только величинами  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$ . Так что для всех циклов, показанных на рис. 15.9, предел выносливости одинаков.

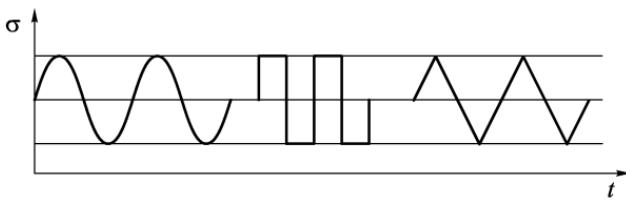


Рис. 15.9

Экспериментально установлено также, что при частотах до 5000 циклов в минуту никакого сколько-нибудь заметного влияния частоты на предел выносливости не наблюдается. Но при очень высоких частотах (свыше  $10^6$  циклов в минуту) отмечено повышение пределов более чем на 30 процентов.

### 15.3. Диаграмма предельных амплитуд и ее схематизация

**15.3.1.** Всякий цикл можно рассмотреть как сумму постоянной составляющей  $\sigma_m$  и переменного напряжения с амплитудой  $\sigma_a$ . Для асимметричных циклов ( $\sigma_m \neq 0$ ) интерес представляет взаимовлияние  $\sigma_m$  и  $\sigma_a$ , их доля в предельном цикле, т.е. в цикле, у которого  $\sigma_{\max} = \sigma_R$ . Эту зависимость удобно представить в виде кривой  $DAFBC$  на плоскости  $\sigma_m \sigma_a$  (рис. 15.10). Получается эта кривая по результатам испытаний на определение предела выносливости для циклов с различными коэффициента-

ми асимметрии. Симметричному циклу соответствует точка  $A$ , пульсационному — точка  $B$ . Эта кривая называется *диаграммой предельных амплитуд*.

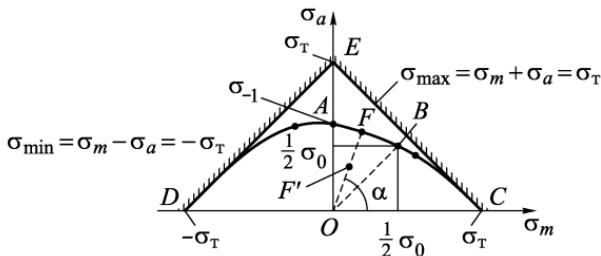


Рис. 15.10

*мой предельных амплитуд*. Она делит всю плоскость  $\sigma_m\sigma_a$  на две области. Если циклу нагружения образца соответствует точка, лежащая между кривой  $DAFBC$  и началом координат или на самой кривой, то образец при испытаниях выдержит базовое число циклов. Если же циклу соответствует точка, лежащая выше кривой — он разрушится при числе циклов меньше базового.

Для пластичного материала диаграмма предельных амплитуд должна лежать ниже прямых  $CE$  и  $DE$ , ниже которых область таких циклов, при которых не происходит пластических деформаций образца. Действительно, аналитическое выражение прямой  $CE$  следующее:

$$\sigma_m + \sigma_a = \sigma_T.$$

Но поскольку  $\sigma_m + \sigma_a = \sigma_{\max}$ , то точкам на прямой соответствуют как раз такие циклы, у которых  $\sigma_{\max} = \sigma_T$ . Точно так же точкам прямой  $DE$  соответствуют циклы с  $\sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a = -\sigma_T$ , т.е. цикл с пластическими деформациями при сжатии.

Аналогичные ограничительные прямые существуют и для крупных материалов. Только они связаны с ограничениями напряжений по пределу прочности и определяются выражениями

$$\sigma_m + \sigma_a = \sigma_{vp}, \quad \sigma_m - \sigma_a = \sigma_{vc}.$$

Если  $\sigma_{vp} \neq \sigma_{vc}$ , то точка пересечения этих прямых не будет уже лежать на оси  $\sigma$ . Но такое усложнение не принципиально.

**15.3.2.** По аналогии с запасом прочности вводится *запас выносливости*, или *запас циклической прочности* как множитель, на который нужно умножить напряжения данного цикла, чтобы получить предельный цикл.

Ясно, что для цикла, которому соответствует точка  $F'$  на плоскости  $\sigma_m\sigma_a$  (см. рис. 15.10), запас выносливости равен отношению отрезков  $OF$  и  $OF'$ :

$$n_k = \frac{OF}{OF'} \quad (15.3.1)$$

Нетрудно установить коэффициент асимметрии  $R$ , соответствующий лежащим на прямой  $OF$  циклам. Действительно,

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_m - \sigma_a}{\sigma_m + \sigma_a} = \frac{1 - \frac{\sigma_a}{\sigma_m}}{1 + \frac{\sigma_a}{\sigma_m}} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} \quad (\sigma_m \neq 0). \quad (15.3.2)$$

При  $\sigma_m = 0$  цикл симметричный и  $R = -1$ .

**15.3.3.** Диаграмма предельных амплитуд касательных напряжений строится на основании испытаний образцов на усталость при кручении. Она должна быть симметрична относительно оси  $\tau_a$ , так как прочностные характеристики материала при чистом сдвиге не зависят от знака касательных напряжений, а определяются только его величиной. Поэтому диаграмма  $\tau_a$  ( $\tau_m$ ) имеет вид, показанный на рис. 15.11. В дальнейшем будем рассматривать только одну из ее симметрических половин.

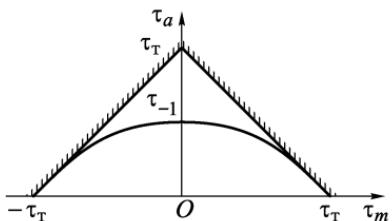


Рис. 15.11

**15.3.4.** Усталостные испытания требуют значительных затрат времени. Чтобы нагрузить стальной образец базовым числом циклов —  $10^7$  даже при высокой скорости (3000 циклов в минуту) придется затратить более 55 часов. А для построения диаграммы предельных амплитуд по 5-ти экспериментальным точкам необходимо испытать 50 образцов. Поэтому такую диаграмму обычно строят приближенно, как показано на рис. 15.12.

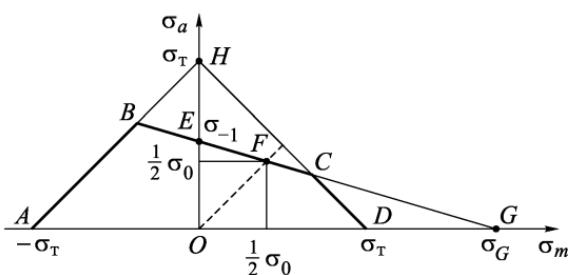


Рис. 15.12

Она состоит из трех отрезков. Два из них  $AB$  и  $CD$  соответствуют требованию об отсутствии в образцах пластических дефор-

маций  $-\sigma_t < \sigma(t) < \sigma_t$ , или, что равносильно:

$$AB : \quad \sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a > -\sigma_t,$$

$$CD : \quad \sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a < \sigma_t.$$

Отрезок  $BC$  является отрезком прямой, которая проводится через точку  $E$ , соответствующую результатам испытаний на симметричный цикл, и точку  $F$ , найденную по испытаниям на пульсационный цикл.

При отсутствии результатов испытаний на пульсационный цикл удовлетворительная точность обеспечивается, если прямую  $BC$  провести так, чтобы напряжения  $\sigma_G$ , соответствующие пересечению этой прямой с осью  $\sigma_m$ , оказались равными  $\sigma_v$  и — истинным напряжениям разрушения образца при растяжении.

Напомним (см. п. 3.2.1), что эти напряжения примерно равны:  $\sigma_v \approx \approx P_{\max}/F_{\min}$ , где  $P_{\max}$  — максимальное усилие, которое выдерживает образец при растяжении;  $F_{\min}$  — площадь того сечения образца, по которому он разрушился (с учетом образовавшейся шейки).

Менее точно, но с ошибкой в запас по выносливости, можно провести прямую  $BC$  так, чтобы  $\sigma_G = \sigma_v$ .

Вид приближенно построенной

диаграммы предельных амплитуд касательных напряжений показан на рис. 15.13. Отрезок  $AB$  выбирают обычно так, чтобы он был параллелен оси  $\tau_m$ .

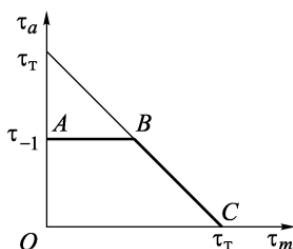


Рис. 15.13

## 15.4. Влияние конструктивных факторов на сопротивление усталости

**15.4.1.** Детали машин, работающие при циклически изменяющихся нагрузках, отличаются от стандартных образцов, по испытаниям которых определяется предел выносливости. Опыт показывает, что наибольшее влияние на сопротивление выносливости имеют различия в форме, размерах и обработке поверхности.

Остановимся сначала на влиянии формы. Эксперименты и теоретические исследования показывают, что даже, казалось бы, небольшие, локальные изменения формы детали могут привести к существенному изменению ее напряженного состояния. Наглядно это видно при сравнении равномерно растянутых полос без отверстия (рис. 15.14 *a*) и с небольшим отверстием (рис. 15.14 *б*). Как видим, напряжения вблизи отверстия резко возрастают. Если отверстие мало, то  $\sigma_{\max} \approx 3\sigma_{\text{ном}}$  (при линейно-

упругих деформациях). Номинальные напряжения  $\sigma_{\text{ном}}$  возникают в полосе без отверстия.

Аналогичное явление наблюдается около выточки на круглом вале (рис. 15.15), около сечения, вблизи которого меняется диаметр ступенчатого валика (рис. 15.16) и т.п. На этих рисунках распределения напряжений, которые имеются в вале без выточки или при постоянном диамetre, показаны пунктиром. Величина  $\sigma_{\text{ном}}$  может быть подсчитана здесь по элементарным формулам сопротивления материалов  $\sigma_{\text{ном}} = P/F$  — для рис. 15.15 и  $\sigma_{\text{ном}} = M_z/W_z$  — для

рис. 15.16. Отношение  $\sigma_{\text{max}}/\sigma_{\text{ном}}$  тем больше, чем меньше радиус  $R$ , т.е. чем резче меняется форма.

Явление резкого локального увеличения напряжений, возникающего вблизи мест резких изменений формы детали, называется *концентрацией напряжений*.

Как видно из приведенных примеров, концентрация напряжений вызвана именно резким изменением формы и имеет место при любых нагрузках.

При статических нагрузках для деталей из пластических материалов концентрация напряжений практически не снижает несущей способности детали.

Это объясняется тем, что рост напряжений ограничен пределом текучести. Несущая способность, например, полосы (см. рис. 15.14 б) из-за появления малого отверстия практически не изменится, так как в предельном состоянии напряжения в сечении с отверстием будут распределены равномерно и равны  $\sigma_t$ . В то же время наличие концентрации напряжений существенно ухудшает сопротивление усталости, т.е. существенно снижает прочность при циклически изменяющихся напряжениях.

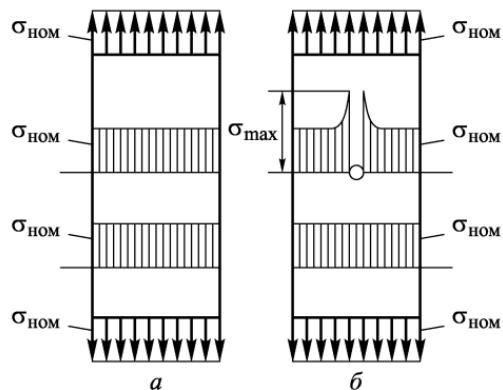


Рис. 15.14

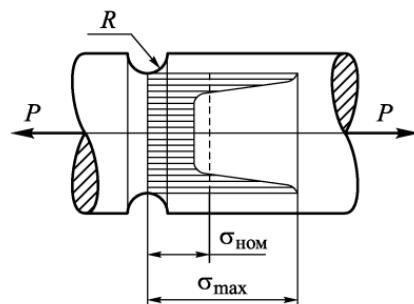


Рис. 15.15

Для деталей из хрупких материалов концентрация напряжений обычно существенно уменьшает прочность и при статических нагрузках. Этим пользуются, например, стекольщики, когда наносят алмазом на лист стекла царапину, которая как раз и является концентратором напряжений. Но из этого правила имеются исключения. Так, эксперименты показывают, что наличие кольцевой

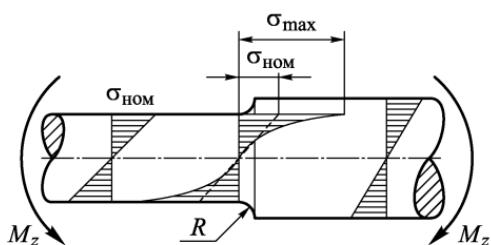


Рис. 15.16

выточки мало сказывается на прочности образца из чугуна. Это объясняется тем, что чугун является неоднородным материалом. Он представляет собой смесь кристаллов железа и зерен графита. Каждое зерно графита — своеобразный концентратор напряжений, поэтому такой внешний концентратор, как выточка, практически не меняет характера распределения напряжений, который уже определен внутренними концентраторами.

**15.4.2.** Степень концентрации напряжений при деформациях в пределах закона Гука определяется теоретическим коэффициентом концентрации  $\alpha$ . Для нормальных и касательных напряжений он равен соответственно

$$\alpha_\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{ном}}}, \quad \alpha_\tau = \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\text{ном}}}, \quad (15.4.1)$$

где  $\sigma_{\max}$  и  $\tau_{\max}$  — наибольшие местные напряжения, а  $\sigma_{\text{ном}}$  и  $\tau_{\text{ном}}$  — напряжения, определяемые расчетом по формулам сопротивления материалов (или методами теории упругости) без учета концентрации напряжений.

Как видим, влияние концентрации при статических и циклически меняющихся нагрузках различно, оно также зависит от материала и от характера концентратора. Поэтому вводится эффективный коэффициент концентрации  $K_R$ , равный отношению пределов выносливости образцов без концентратора и с концентратором. Таким образом,

$$K_{R\sigma} = \frac{\sigma_R}{\sigma'_R}, \quad K_{R\tau} = \frac{\tau_R}{\tau'_R}. \quad (15.4.2)$$

Здесь  $\sigma'_R$  и  $\tau'_R$  — пределы выносливости образцов, имеющих концентратор напряжений данного вида.

Ясно, что экспериментальное определение эффективных коэффициентов концентрации для различных концентраторов требует больших затрат времени и средств. Поэтому на прак-

тике обычно определяют только для статического нагружения  $K_{+1\sigma}$  и  $K_{+1\tau}$  и для симметричного цикла  $K_{-1\sigma}$  и  $K_{-1\tau}$ :

$$K_{-1\sigma} = K_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma'_{-1}}, \quad K_{-1\tau} = K_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau'_{-1}}. \quad (15.4.3)$$

На рис. 15.17 *a*, *б* приведены значения эффективных коэффициентов концентрации напряжений  $K_\sigma$  и  $K_\tau$  для очень рас-

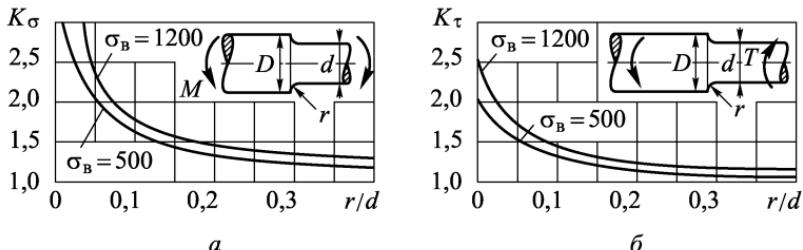


Рис. 15.17

пространенного в деталях машин концентратора — перехода от одного диаметра вала  $D$  к другому  $d$  с галтелью радиуса  $r$  при

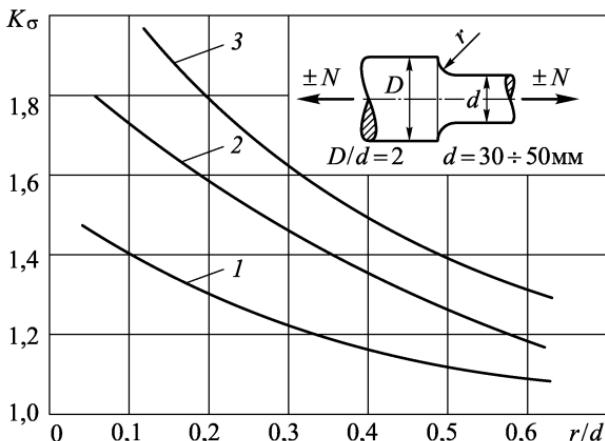


Рис. 15.18

испытании вала на изгиб и кручение. На рис. 15.18 приведены данные по  $K_\sigma$  для этого же концентратора, но при испытании на растяжение. Кривые 1, 2, 3 даны для сталей с пределами прочности  $\sigma_{\text{вр}} = 400$  МПа, 800 МПа, 1200 МПа.

Другим очень распространенным источником концентрации является шпоночная канавка. График зависимости  $K_\sigma$  от  $\sigma_{\text{в}}$  стали при изгибе для вала со стандартной шпоночной канавкой приведен на рис. 15.19. При расчетах с помощью этого графика

момент сопротивления изгибу сечения вала должен находиться по формуле

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} - \frac{Bt(d-t)^2}{2d}. \quad (15.4.4)$$

График для определения эффективных коэффициентов концентрации болтов с резьбой ( $d = 12$  мм) при растяжении–сжатии дан на рис. 15.20. Кривая 1 соответствует метрической резьбе, а кривая 2 — дюймовой.

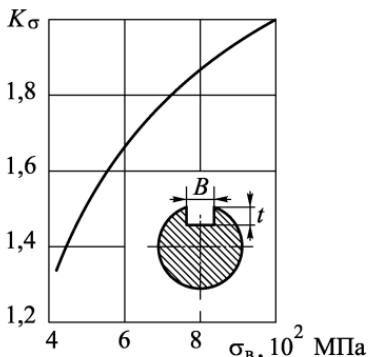


Рис. 15.19

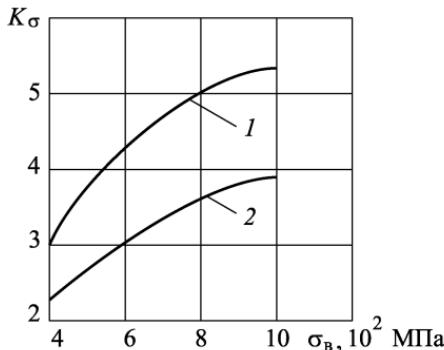


Рис. 15.20

Если экспериментальных значений эффективного коэффициента концентрации для данного концентратора нет, то его

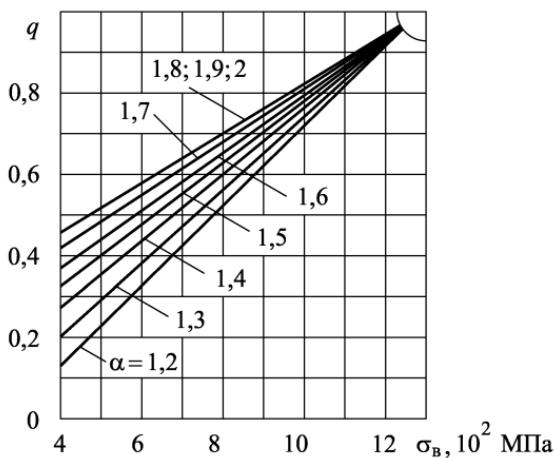


Рис. 15.21

можно оценить по эмпирической формуле

$$K_{\sigma,\tau} = 1 + q(\alpha_{\sigma,\tau} - 1). \quad (15.4.5)$$

Коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений  $q$  в зависимости от  $\sigma_b$  и  $\alpha$  определяется по графику, данному на рис. 15.21.

Снижение вредного влияния концентрации напряжений — один из главных вопросов, который необходимо решать на стадии проектирования. Особенно, как показывает рис. 15.21, это важно для деталей из высокопрочных сталей. Уменьшение концентрации напряжения в деталях достигается прежде всего созданием плавности изменений их формы (увеличением радиусов галтелей, устранением острых входящих углов, введением разгрузочных канавок (рис. 15.22 *a*, *б*, *в*)).

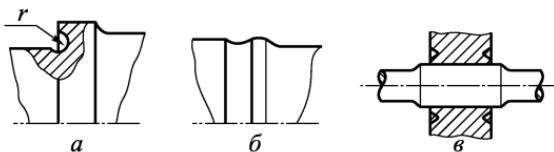


Рис. 15.22

**15.4.3.** Усталостные испытания, проведенные на образцах разных размеров, показали, что с увеличением размера образцов предел выносливости уменьшается. Это явление получило название *масштабного эффекта*. Для его количественной оценки приняты коэффициенты масштабного эффекта  $K_{d\sigma}$  или  $K_{d\tau}$ . Они определяются экспериментально как отношения

$$K_{d\sigma} = \frac{\sigma''_{-1}}{\sigma_{-1}}, \quad K_{d\tau} = \frac{\tau''_{-1}}{\tau_{-1}}, \quad (15.4.6)$$

где  $\sigma_{-1}$  и  $\tau_{-1}$  — пределы выносливости для стандартного образца с диаметром  $d = 10$  мм, а  $\sigma''_{-1}$  и  $\tau''_{-1}$  — пределы выносливости для образцов с диаметром  $D > d$ .

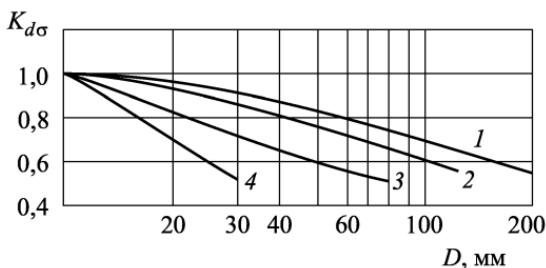


Рис. 15.23

На рис. 15.23 приведены данные по  $K_{d\sigma}$ : для углеродистой стали без концентратора (кривая 1); для легированной ста-

ли при отсутствии концентратора и для углеродистой стали при наличии концентратора (кривая 2); для легированной стали с концентратором (кривая 3); для любой стали при большой концентрации напряжений (кривая 4).

Экспериментальных данных по определению  $K_{d\tau}$  сейчас недостаточно. Можно приближенно принимать  $K_{d\tau} = K_{d\sigma}$ .

**15.4.4.** Чистота обработки поверхности также сказывается на сопротивлении усталости. Чем чище обработана поверхность, тем выше у детали сопротивление усталости. Количественно это

влияние характеризует коэффициент качества поверхности  $K_F$ , который определяется экспериментально следующим образом:

$$K_F = \frac{\sigma'''_{-1}}{\sigma_{-1}}. \quad (15.4.7)$$

Здесь  $\sigma_{-1}$  — предел выносливости образцов с тщательно полированной поверхностью;  $\sigma'''_{-1}$  — предел выносливости, определенный по испытаниям образцов с более шероховатой, чем полированная, поверхностью. Шероховатость поверхности измеряется в микрометрах ГОСТ 2789-73. Тонкой обработке образца резцом на токарном станке соответствует шероховатость 12 мкм. На рис. 15.24 даны кривые, характеризующие изменение  $K_F$  в зависимости от предела прочности и шероховатости поверхности.

Существенно понижает сопротивление усталости коррозия.

Для повышения сопротивления усталости используют механическое упрочнение поверхности — обкатку роликами, дробеструйную обработку и т.п. При такой обработке упрочнение поверхности достигается за счет пластической деформации поверхностных слоев детали (наклеп).

Повышения сопротивления усталости добиваются также с помощью термической или термохимической обработки поверхности детали (закалка, обработка токами высокой частоты, азотирование, цементация и т.п.).

**15.4.5.** При расчете запаса выносливости детали действующие в ней циклические напряжения разделяют на постоян-

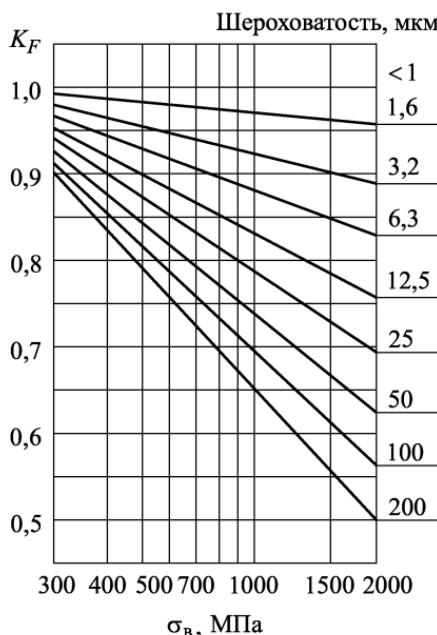


Рис. 15.24

мости от предела прочности и шероховатости поверхности.

ную  $\sigma_m^d$  и переменную  $\sigma_a^d$  составляющие. Считается, что на  $\sigma_m^d$  влияют те факторы, которые сказываются при статическом нагружении ( $R = +1$ ), т.е. учитывают эффективный коэффициент концентрации  $K_{+1\sigma}$ . На  $\sigma_a^d$  влияют все те факторы, которые уменьшают предел выносливости при симметричном цикле нагружения, т.е.  $K_{-1\sigma}$ ,  $K_{d\sigma}$  и  $K_F$ . Причем считается, что для совместного учета концентрации напряжений, масштабного эффекта и состояния поверхности их общее влияние характеризует коэффициент

$$K_\sigma^d = \frac{K_{-1\sigma}}{K_{d\sigma} K_F}. \quad (15.4.8)$$

Это позволяет найти среднюю  $\sigma_m^0$  и переменную  $\sigma_a^0$  составляющие циклических напряжений образца, имеющего такой же запас выносливости, что и деталь, следующим образом:

$$\sigma_m^0 = \sigma_m^d K_{+1\sigma}, \quad \sigma_a^0 = \sigma_a^d K_\sigma^d. \quad (15.4.9)$$

Запас выносливости образца определяется по диаграмме предельных амплитуд, как было дано в п. 15.3.2. С использованием приближенной диаграммы предельных амплитуд его можно подсчитать, как следует из рис. 15.25, по формуле

$$n = \frac{OM'}{OM}.$$

Уравнение прямой  $BC$  имеет вид

$$\sigma_a = \sigma_{-1} \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_G} \right). \quad (15.4.10)$$

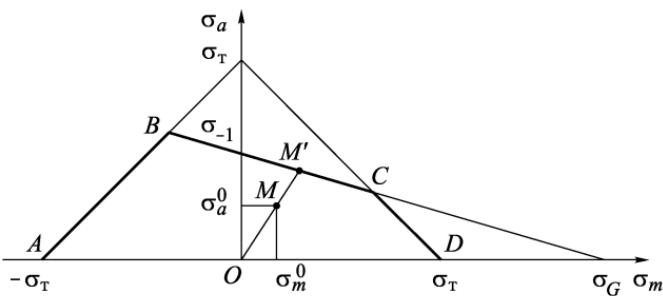


Рис. 15.25

Точки  $M'$  на этой прямой соответствуют

$$\sigma_a = \sigma_a^0 n, \quad \sigma_m = \sigma_m^0 n. \quad (15.4.11)$$

Подставив эти значения в выражение (15.4.10), получим уравнение для определения запаса выносливости  $n$ :

$$\frac{\sigma_a^0 n}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m^0 n}{\sigma_G} = 1. \quad (15.4.12)$$

Отсюда

$$n = \frac{1}{\frac{\sigma_a^0}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m^0}{\sigma_G}}. \quad (15.4.13)$$

Учитывая выражения (15.4.9), (15.4.8), получаем окончательную формулу для определения запаса выносливости детали:

$$n = \frac{1}{\frac{\sigma_a^\alpha K_\sigma}{\sigma_{-1} K_d K_F} + \frac{\sigma_m^\alpha K_{+1}}{\sigma_G}}. \quad (15.4.14)$$

В качестве  $\sigma_G$  можно взять истинный предел прочности  $\sigma_v = P_{max}/F_{min}$ . Если же известен предел выносливости образца при пульсационном цикле  $\sigma_0$ , то можно найти  $\sigma_G$  как точку пересечения прямой  $BC$  (см. рис. 15.12) с осью  $\sigma_m$ . Предоставляем читателю самому проделать эти несложные выкладки.

Если прямая  $OM$  пересекает диаграмму предельных амплитуд на участке  $BC$ , то запас выносливости равен запасу по текучести, т.е.

$$n = \frac{\sigma_t}{\sigma_{max}^\alpha} = \frac{\sigma_t}{\sigma_m^\alpha + \sigma_a^\alpha}. \quad (15.4.15)$$

В практических расчетах вычисляют запасы выносливости детали по формулам (15.4.14) и (15.4.15) и выбирают из них минимальный.

Аналогично можно найти и запас выносливости при действии касательных напряжений.

При совместном действии нормальных и касательных циклических напряжений для определения запаса выносливости наиболее часто пользуются эмпирической формулой Гафа и Полларда

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2}, \quad (15.4.16)$$

где  $n_\sigma$  и  $n_\tau$  — запасы выносливости по нормальным и по касательным напряжениям. Напомним, что запас выносливости называют также *запасом циклической прочности*. Он вводится (п. 15.3.2) аналогично запасу прочности при статическом нагружении.

**Пример 15.1.** Ступенчатый стержень круглого сечения диаметрами  $D = 80$  мм и  $d = 40$  мм (рис. 15.26) изготовлен из стали, для которой  $\sigma_v = 1000$  МПа,  $\sigma_{-1} = 350$  МПа. Стержень имеет галтель радиуса  $\rho = 8$  мм. Поверхность стержня чисто обработана резцом. Определить значение переменной осевой силы  $P$ , изменяющейся по симметричному циклу, при которой будет обеспечен коэффициент запаса выносливости  $n = 1,5$ .

Для стали с  $\sigma_v = 1000$  МПа из графика рис. 15.18 путем линейной интерполяции находим эффективный коэффициент кон-

центрации  $K_\sigma = 1,7$ . При чистой обработке резцом шероховатость имеет порядок 12 мкм. По графику рис. 15.24 получаем  $K_F = 0,83$ . Предел выносливости  $\sigma_{-1}$  и для данной стали дается по испытаниям на изгиб. При растяжении он должен быть уменьшен на  $10 \div 30\%$ . Примем  $\sigma_{-1} = 0,8\sigma_{-1}$  и  $= 0,8 \cdot 350 = 280$  МПа. Запас выносливости для детали при симметричном цикле равен

$$n = \frac{\sigma_{-1} K_d K_F}{K_\sigma \sigma_a^d}.$$

Здесь принимаем  $K_d = 1$ , так как для образцов, по результатам испытаний которых построен график рис. 15.18,  $d = 30 \div 50$  мм. Отсюда

$$\sigma_a^d = \frac{\sigma_{-1} K_d K_F}{K_\sigma n} = \frac{280 \cdot 1 \cdot 0,83}{1,7 \cdot 1,5} = 91 \text{ МПа.}$$

Поэтому максимальное значение  $P$  равно

$$P_{\max} = \sigma_a^d \frac{\pi d^2}{4} = 91 \cdot 10^6 \cdot 0,25 \cdot 3,14 \cdot (0,04)^2 = 113 \cdot 10^3 \text{ Н} = 113 \text{ кН.}$$

П р и м е р 15.2. Деталь, изображенная на рис. 15.27, изготовлена из углеродистой стали Ст. 6, для которой:  $\sigma_b = 600$  МПа,

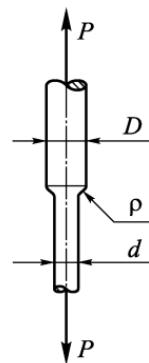


Рис. 15.26

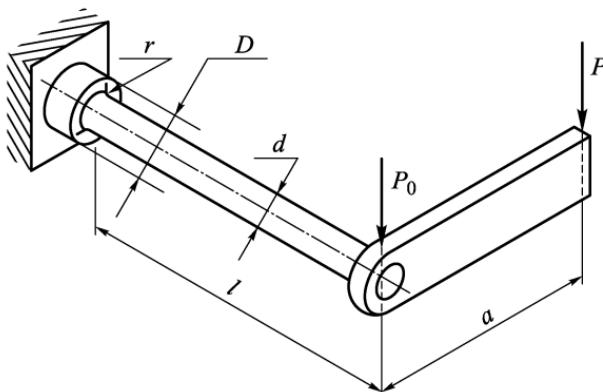


Рис. 15.27

$\sigma_t = 320$  МПа,  $\tau_t = 220$  МПа,  $\sigma_{-1} = 250$  МПа,  $\tau_{-1} = 150$  МПа. Размеры детали:  $D = 80$  мм,  $d = 40$  мм,  $r = 2$  мм,  $l = 400$  мм,  $a = 100$  мм. Сила  $P_0 = 1500$  Н постоянна, сила  $P$  меняется по симметричному циклу так, что  $P_{\max} = \pm 500$  Н. Деталь грубо обточена резцом. Определить запас выносливости детали.

Найдем сначала запас выносливости по нормальным напряжениям  $n_\sigma$  по формуле (15.4.14). Коэффициент  $K_\sigma$  найдем по

графикам на рис. 15.17 а. Для  $r/d = 2/40 = 0,05$  и  $\sigma_{\text{в}} = 600$  МПа линейной интерполяцией получаем

$$K_{\sigma} = 2 + \frac{(2,3 - 2)(600 - 500)}{1200 - 500} = 2,04.$$

Из графиков рис. 15.23 нам подходит кривая 2 для деталей из углеродистой стали при наличии концентратора. По ней для  $d = 40$  мм получаем  $K_d = 0,8$ .

Грубой обработке резцом соответствуют шероховатости поверхности в пределах  $25 \div 50$  мкм. Поэтому согласно рис. 15.24 коэффициент  $K_F$ , учитывающий состояние поверхности, равен  $\sim 0,82$ .

Для малоуглеродистой стали можно принять  $K_{+1} \approx 1$ . Примем также в запас по выносимости  $\sigma_G = \sigma_{\text{в}} = 600$  МПа.

Найдем характеристики цикла для нормальных напряжений. Последние возникают вследствие изгиба детали. Тогда

$$\sigma_{\text{max}}^{\text{изг}} = \frac{M_{\text{изг}}^{\text{max}}}{W_{\text{изг}}} = \frac{(P_0 + P_{\text{max}}^{\text{min}})l}{0,1d^3} = \frac{(1500 \pm 500)0,4}{0,1(0,04)^3} = \frac{125}{62,5} \text{ МПа.}$$

Среднее и амплитудное напряжения поэтому равны

$$\sigma_m = 93,7 \text{ МПа}, \quad \sigma_a = 31,25 \text{ МПа.}$$

Тогда по формулам (15.4.14) подсчитываем

$$n_{\sigma} = \frac{1}{\frac{31,25 \cdot 2,04}{250 \cdot 0,8 \cdot 0,82} + \frac{93,7 \cdot 1}{600}} = 1,85.$$

Запас прочности по текучести (15.4.15) равен

$$n_t = \frac{\sigma_t}{\sigma_{\text{max}}} = \frac{320}{125} = 2,56.$$

Он больше  $n_{\sigma}$ , поэтому в дальнейших расчетах не учитывается.

По касательным напряжениям деталь испытывает симметричный цикл вследствие кручения силой  $P$ . Тогда

$$\tau_{\text{max}} = \frac{P_{\text{max}}a}{W_k} = \frac{500 \cdot 0,1}{0,2(0,04)^3} = 4 \text{ МПа.}$$

Эффективный коэффициент концентрации  $K_{\tau}$  определяем по рис. 15.17 б:

$$K_{\tau} = 1,5 \frac{(1,7 - 1,5)(600 - 500)}{1200 - 500} \approx 1,52.$$

Масштабный и поверхностный коэффициенты примем такими же, как и для нормальных напряжений  $K_d = 0,8$ ,  $K_F = 0,82$ . В этом случае напряжениям детали  $\tau_a$  по формулам вида (15.4.9) будут соответствовать напряжения образца  $\tau_a^0$ :

$$\tau_a^0 = \tau_a \frac{K_{\tau}}{K_d K_F} = 4 \frac{1,52}{0,8 \cdot 0,82} = 9,3 \text{ МПа.}$$

Тогда запас выносливости по касательным напряжениям будет

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a^0} = \frac{150}{9,3} = 16,1.$$

Общий запас выносливости по формуле Гафа и Полларда равен

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_{\sigma}^2} + \frac{1}{n_{\tau}^2} = \frac{1}{1,85^2} + \frac{1}{16,1^2} = 0,296.$$

Тогда

$$n = \sqrt{1/0,296} = 1,83.$$

## B.15. Контрольные вопросы

**B.15.1.** Какие условия нагружения могут привести к усталостному разрушению?

**B.15.2.** Как протекает процесс усталостного разрушения?

**B.15.3.** Назовите основные характеристики монотонного цикла и его параметры.

**B.15.4.** Что такое коэффициент асимметрии цикла? Чему он равен для статического нагружения? Для симметричного и пульсационных циклов?

**B.15.5.** Что такое кривая усталости? Как она строится?

**B.15.6.** Что такое базовое число циклов? Что называется пределом выносливости? Что такое предел ограниченной выносливости?

**B.15.7.** Влияет ли форма цикла на величину предела выносливости?

**B.15.8.** Как зависит предел выносливости от частоты изменения напряжений?

**B.15.9.** В каких координатах и как строится диаграмма предельных амплитуд? Что она определяет?

**B.15.10.** Что такое запас выносливости (запас циклической прочности)? Как он определяется по диаграмме предельных амплитуд?

**B.15.11.** Как строится приближенная диаграмма предельных амплитуд?

**B.15.12.** Что такое концентрация напряжений? Как она влияет на прочность при циклически изменяющихся напряжениях?

**B.15.13.** Чему равен теоретический коэффициент концентрации?

**B.15.14.** Что такое эффективный коэффициент концентрации? Как он связан с теоретическим коэффициентом концентрации?

**B.15.15.** Как влияют размеры деталей на предел выносливости? Что такое коэффициент масштабного эффекта?

**B.15.16.** Каково влияние чистоты обработки деталей на сопротивление усталости? Как определяется коэффициент качества поверхности?

**B.15.17.** Какие процессы обработки деталей используют для повышения сопротивления усталости?

**B.15.18.** Каким коэффициентом оценивается совместное влияние концентрации напряжений, масштабного фактора и состояния поверхности?

**B.15.19.** Как находятся параметры цикла образца, запас выносливости которого такой же, как у детали?

**B.15.20.** Как определить запасы выносливости детали по заданной диаграмме предельных амплитуд?

**B.15.21.** Как определяется запас выносливости при совместном действии нормальных и касательных напряжений?

## ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

### Глава 1

**B.1.1.** См. п. 1.1.2.

**B.1.2.** См. п. 1.1.2.

**B.1.3.** Брус, оболочка, массив. См. п. 1.1.4.

**B.1.4.** См. п. 1.1.4.

**B.1.5.** См. п. 1.1.4.

**B.1.6.** См. п. 1.2.1.

**B.1.7.** См. п. 1.2.1.

**B.1.8.** См. п. 1.2.3.

**B.1.9.** См. п. 1.2.4.

**B.1.10.** См. п. 1.2.4.

**B.1.11.** См. п. 1.2.4.

**B.1.12.** См. п. 1.2.5.

**B.1.13.** См. п. 1.2.6.

**B.1.14.** См. п. 1.3.1.

**B.1.15.** См. п. 1.3.2.

**B.1.16.** См. п. 1.3.3.

### Глава 2

**B.2.1.** См. п. 2.1.1, 2.1.2.

**B.2.2.** В недеформированном — не возникают, в ненагруженном — могут иметь место. См. п. 2.2.1.

**B.2.3.** Там, где внутренние силы превышают предел. См. п. 2.1.1.

**B.2.4.** См. п. 2.1.2.

**B.2.5.** Потому что внутренние силы — силы взаимодействия отсеченных частей. См. п. 2.1.2.

**B.2.6.** См. п. 2.1.3.

**B.2.7.** Из условий равновесия правой отсеченной части (для сечения 1) и нижней (для сечения 2) главные векторы и главные моменты внутренних сил в этих сечениях равны нулю. См.пп. 2.1.2, 2.1.3.

**B.2.8.** Шесть уравнений в координатной форме. См. п. 2.1.3.

**B.2.9.** От характера действия на отсеченную часть. Здесь  $N$  — отрицательна. См. п. 2.1.4.

**B.2.10.** Внутренние силовые факторы и соответствующие интенсивности внешних нагрузок. См. п. 2.1.4.

**B.2.11.** Там, где приложены соответствующие сосредоточенные внешние нагрузки. См. п. 2.1.5.

**B.2.12.** Нет. Необходимо знать закон распределения внутренних сил по поперечному сечению. См. пп. 2.1.1, 2.2.1.

**B.2.13.** См. п. 2.2.1.

**B.2.14.** См. рис. к вопросу.  $\sigma_x > 0$ ,  $\tau_{xy} > 0$ ,  $\tau_{xz} < 0$ . См. п. 2.2.2.

**B.2.15.** См. п. 2.2.2.

**B.2.16.** См. п. 2.2.3.

**B.2.17.** См. рис. к вопросу. По закону парности следует добавить в видимых гранях кубика напряжения  $\tau_{yx}$  и  $\tau_{zy}$ . См. пп. 2.2.2, 2.2.3.

**B.2.18.** Надо воспользоваться выражениями внутренних силовых факторов через напряжения в поперечном сечении. См. пп. 2.3.1, 2.3.2.

**B.2.19.** См. пп. 2.4.1, 2.4.2.

## Глава 3

**B.3.1.** См. п. 3.1.2.

**B.3.2.** См. п. 3.1.2.

**B.3.3.** См. п. 3.1.1.

**B.3.4.** Это график  $P(\Delta l)$ , построенный по результатам испытания образца на растяжение. См. п. 3.2.1.

**B.3.5.** См. п. 3.2.1.

**B.3.6.** См. п. 3.2.1.

**B.3.7.** См. п. 3.2.1.

**B.3.8.** См. п. 3.2.2.

**B.3.9.** См. п. 3.2.2.

**B.3.10.** Отпуском. См. п. 3.2.2.

**B.3.11.** См. п. 3.2.3.

**B.3.12.** См. п. 3.2.4.

**B.3.13.** См. п. 3.2.5.

**B.3.14.** См. п. 3.2.5.

**B.3.15.** См. п. 3.3.1.

**B.3.16.** См. пп. 3.4.1, 3.4.2.

**B.3.17.** См. п. 3.4.3.

**B.3.18.** См. п. 3.4.4.

**B.3.19.** См. п. 3.4.5.

**B.3.20.** См. п. 3.5.1.

## Глава 4

**B.4.1.** См. преамбулу к гл. 4, п. 4.1.1.

**B.4.2.** Нет, не связан. См. п. 4.1.2.

**B.4.3.** См. пп. 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4.

**B.4.4.** См. п. 4.2.1.

**B.4.5.** См. п. 4.2.2.

**B.4.6.** Равномерно.  $\sigma_x = \frac{N}{F}$ . См. п. 4.3.2.

**B.4.7.**  $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$ ,  $\Delta l = \frac{Nl}{EF}$ . См. пп. 4.3.2, 4.4.1, 4.4.2.

**B.4.8.** Записать уравнения равновесия для отсеченных частей.  
См. п. 4.4.1.

**B.4.9.** Деформацию системы. См. пп. 4.5.1, 4.5.2.

**B.4.10.** Для ненагретого бруса  $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ , для нагретого —  $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha\Delta t$ .  
См. п. 4.6.1.

**B.4.11.** Нет, не сказывается. См. п. 4.6.2.

**B.4.12.**  $\Pi = A \cdot A = \frac{1}{2}N\Delta l$ . См. п. 4.7.1.

**B.4.13.** См. п. 4.7.2.

**B.4.14.** См. п. 4.7.3.

**B.4.15.** Максимальные нормальные действуют в поперечных сечениях бруса, максимальные касательные — в сечениях, расположенных под углом  $45^\circ$  к оси бруса. См. п. 4.8.1.

**B.4.16.**  $-[\sigma]_c \leq \sigma_x \leq [\sigma]_p$ , или  $\sigma_{p\max} \leq [\sigma]_p$ ,  $|\sigma_c|_{\max} \leq [\sigma]_c$ . См. пп. 4.9.1, 4.9.2.

**B.4.17.** См. п. 4.9.1.

**B.4.18.** См. п. 4.9.1.

**B.4.19.** См. п. 4.9.1.

**B.4.20.** Коэффициент запаса определяется (задается) нормативными документами, фактический же запас прочности вычисляется при проверочном расчете конструкции. См. пп. 4.9.1, 4.9.2.

**3.4.1.**  $P_{\text{доп}} \leq 2[\sigma]_p F$ ;  $\delta_A^{\text{верт}} = 2,44 \frac{[\sigma]_p l}{E}$ ; перемещение увеличится на  $0,75\alpha\Delta tl$ .

Допускаемую величину груза находим из условия прочности конструкции (см. п. 4.9.2), для чего сначала определим продольные силы, а затем и нормальные напряжения во всех пяти стержнях фермы (см. п. 4.4.2 и пример 4.2). Для определения перемещений воспользуемся методом Мора (см. п. 4.7.2 и пример 4.9, а также п. 4.7.3).

**3.4.2.** Эпюры показаны на рисунке;  $n = 2 \frac{\sigma_{0,2} F}{ql}$ ;  $u_3 = 0$ .

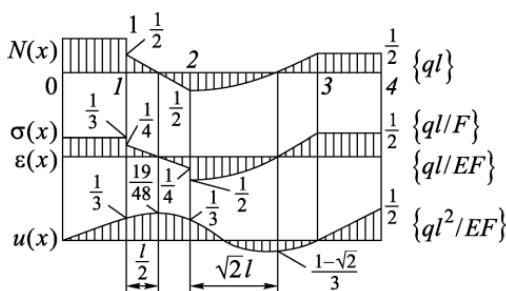


Рис. 3.4.2

Расчет напряженно-деформированного состояния бруса проводим по методике, изложенной в п. 4.4.1 и примере 4.1. Для определения запаса прочности проводим поверочный расчет на прочность (см. п. 4.9.2).

**3.4.3.** Эпюры показаны на рисунке; продольная сила в наклонном стержне  $N_{CD} = ql$ , в горизонтальном — показаны на эпюре; нетрудно видеть, что продольное перемещение правого конца горизонтального бруса будет равно горизонтальной составляющей полного перемещения узла  $C$ , но ведь есть еще и вертикальная составляющая этого перемещения, обусловленная деформацией наклонного стержня.

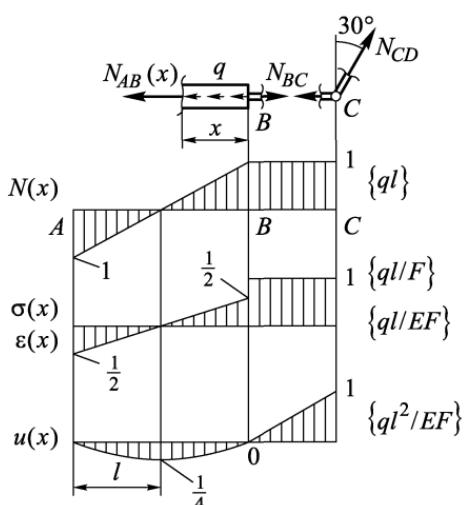


Рис. 3.4.3

вертикальной составляющих (см. п. 4.7.2), поставленный в задаче, воспользуемся формулой для вычисления температурных перемещений в статически определимых фермах, полученной в п. 4.7.3.

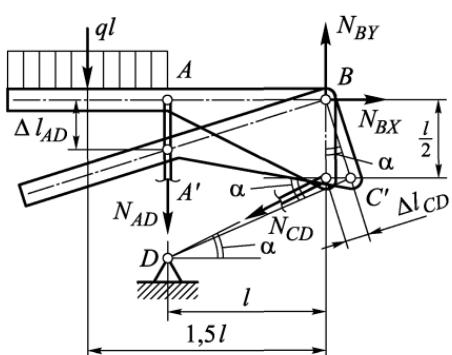


Рис. 3.4.5

ния (см. п. 4.5.1, пример 4.3 и п. 4.4.2). Для решения задачи прочности конструкции (см. п. 4.9.2 — проектировочный расчет). Температурные напряжения определяем по методике, изложенной в п. 4.6.1 и примере 4.8.

$$\text{3.4.6. } N_c = \frac{E_c F_c}{E_d F_d + E_c F_c} P; \quad N_d = \frac{E_d F_d}{E_d F_d + E_c F_c} P;$$

$$\Delta l = -\frac{1}{E_d F_d + E_c F_c} P l.$$

Продольные силы находим из условий равновесия отсеченных частей, показанных на рисунке (см. пп. 4.4.1, 4.4.2).

$$\text{3.4.4. } \delta_c = \frac{Pl}{EF}; \quad \Delta t = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{P}{\alpha EF}.$$

Для решения задачи воспользуемся методом Мора. Полное перемещение узла  $C$  будем искать как геометрическую сумму его горизонтальной и

$$\text{3.4.5. } F = 1,1 \frac{ql}{[\sigma]_c}; \quad \delta_c = 0,474 \frac{l[\sigma]_c}{E}; \quad \sigma_{AD} = -0,263 \alpha \Delta t E, \quad \sigma_{CD} = -0,292 \alpha \Delta t E.$$

Рассматриваемая ферма является статически неопределенной. Для ее решения рассмотрим равновесие отсеченной части, показанной на рисунке, и рассмотрим деформацию фермы, показанную там же. Таким образом, мы найдем продольные силы в стержнях, а значит, и напряже-

ния (см. п. 4.5.1, пример 4.3 и п. 4.4.2). Для решения задачи прочности конструкции (см. п. 4.9.2 — проектировочный расчет). Температурные напряжения определяем по методике, изложенной в п. 4.6.1 и примере 4.8.

Нагрузка, воспринимаемая каждым из элементов, равна соответствующей продольной силе, действующей в его поперечном сечении, и эта нагрузка пропорциональна их жесткостям. К такому выводу приходим в результате решения уравнения равновесия отсеченной части и уравнения совместности деформаций обоих элементов (см. 4.5).

$$3.4.7. r = 5 \frac{[\sigma]l}{E}.$$

Итак, из самого условия задачи ясно, что  $r$  будем искать из условия прочности собранной конструкции (см. п. 4.9.2), для чего надо знать напряжения, а значит, — продольные силы в стержнях конструкции. Последние определим, составив уравнения равновесия для узлов  $A$  и  $C$  собранной конструкции и уравнение совместности деформаций, которое получим, связав деформацию стержня  $AC$  с деформациями стержней  $AB$  и  $CB$  (см. рисунок). Для этого используем материал, изложенный в примере 4.3, но заметим, что геометрическая связь между деформациями стержней здесь будет сложнее, а именно:

$$\Delta l_{AC} = \left( r - \frac{\Delta l_{CB}}{\cos 60^\circ} \right) - \frac{\Delta l_{AB}}{\cos 60^\circ}.$$

$$3.4.8. \Delta t = 50^\circ\text{C}; \sigma_{\max} = 36,4 \text{ МПа.}$$

Отметим важную особенность монтажных напряжений (это относится и к температурным напряжениям): они не зависят от величины заданной площади поперечного сечения стержня, т.е., если, например, пропорционально увеличить или уменьшить площади всех стержней, то это не изменит величин монтажных напряжений в них, ибо одновременно в той же пропорции изменяются и продольные силы в стержнях.

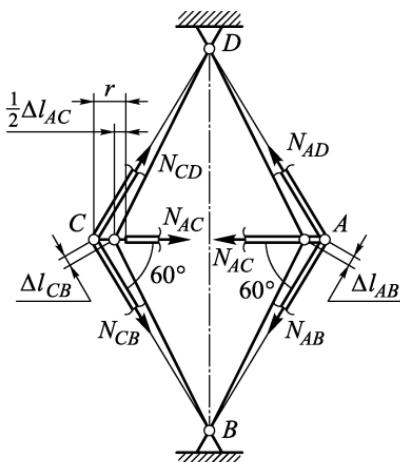


Рис. 3.4.7

## Глава 5

**B.5.1.** См. п. 5.2.1.

**B.5.2.** См. п. 5.2.2, выражение (5.2.3).

**B.5.3.** См. п. 5.3.1, соотношения (5.3.2), (5.3.3).

**B.5.4.** Определяются только площадью. См. п. 5.3.3.

**B.5.5.** См. п. 5.3.4, соотношение (5.3.10).

**3.5.1.**  $\sigma_n = \sigma_n (\alpha=45^\circ) = \frac{1}{2}\sigma; \tau_{nt} = \tau_{nt} (\alpha=45^\circ) = \frac{3}{2}\sigma$ ; см. п. 5.1.1 (формула 5.1.4), анализируя вторую из них, приходим к выводу, что максимальные касательные напряжения действуют именно в площадках с  $\alpha = \pm 45^\circ$ .

**3.5.2.** При значениях  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , равных  $\pm\sigma$ ; во всех сечениях при этом  $\sigma_n$  также равны  $\pm\sigma$ ; см. п. 5.1.1, формулы (5.1.4).

**3.5.3.** В диагональных сечениях касательные напряжения равны нулю; в сечении  $AC$   $\sigma = -\tau$ , в сечении  $BD$   $\sigma = \tau$ ; такое состояние может быть реализовано только тогда, когда в диагональных сечениях элемента действуют только нормальные растягивающие (в сечении  $BD$ ) и сжимающие (в сечении  $AC$ ) напряжения; см. п. 5.2.1 (см. рис. 5.5).

**3.5.4.**  $\varepsilon_{AC} = \frac{1+\mu}{E}\tau$ ;  $\varepsilon_{BD} = -\frac{1+\mu}{E}\tau$ ; см. п. 5.3.1.

**3.5.5.** Из решения задачи 5.4  $\varepsilon_{AC} = \frac{1+\mu}{E}\tau$ . Согласно закону Гука,  $\gamma = \frac{\tau}{G}$ , но  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$  (см. п. 5.3.3). Тогда  $\gamma/\varepsilon_{AC} = 2$ .

## Глава 6

**B.6.1.** См. преамбулу к гл. 6.

**B.6.2.** См. п. 6.1.1, соотношение (6.1.1).

**B.6.3.** См. п. 6.1.1, соотношение (6.1.2).

**B.6.4.** См. п. 6.2.1, соотношение (6.2.1).

**B.6.5.** См. п. 6.3.1.

**B.6.6.** См. п. 6.3.2, соотношение (6.3.3); п. 6.3.3, соотношение (6.3.8).

**B.6.7.** См. п. 6.3.3, соотношение (6.3.6).

**B.6.8.** См. п. 6.3.4, соотношения (6.3.8), (6.3.9).

**B.6.9.** См. п. 6.3.6.

**B.6.10.** См. п. 6.4.1.

**B.6.11.** См. п. 6.4.3.

**B.6.12.** См. п. 6.4.4, соотношение (6.4.6).

**B.6.13.** См. п. 6.4.5.

**B.6.14.** См. пп. 6.5.1, 6.6.1.

**B.6.15.** На участке, где толщина стенки максимальна. См. п. 6.5.3, соотношения (6.5.9), (6.5.10).

**B.6.16.** См. п. 6.5.4.

**B.6.17.** См. п. 6.6.1, соотношение (6.6.3).

**B.6.18.** См. п. 6.6.2, соотношения (6.6.6), (6.6.7).

**3.6.1.**  $[M] = 0,4[\tau]b^3$ ,  $[\varphi_{\max}] = 1,5 \frac{[\tau]l}{Gb}$ .  $[M]$  уменьшится в 20 раз,  $[\varphi_{\max}]$  — в 6,7 раза.

**3.6.2.**  $n = 2, 1$  (см. рис. 3.6.2).

**3.6.3.** Из уравнения совместности деформаций  $\frac{M_k^{\text{bh}}l}{GJ_k^{\text{bh}}} = \frac{M^{\text{нап}}l}{GJ_k^{\text{нап}}}$  получаем  $\frac{M_k^{\text{bh}}}{M_k^{\text{нап}}} = \frac{GJ_k^{\text{bh}}}{GJ_k^{\text{нап}}}$ . Приравнивая максимальный угол закручивания  $\varphi_{\max}$  допускаемому  $[\varphi]$ , определяем длину  $l$

$$l = 0,73 \frac{[\varphi]Gd^4}{M}.$$

**3.6.4.**  $\tau_{\max}^{\text{трубы}} = 0,05 \frac{\varphi_0 GD_{\text{cp}}}{l}$ ;  $\tau_{\max}^{\text{кв. стержня}} = 0,3 \frac{\varphi_0 GD_{\text{cp}}}{l}$ .

Из уравнения равновесия реактивные моменты в левой и правой опорах будут одинаковы, а значит, равны будут и крутящие моменты в сечениях

трубы и квадратного стержня, которые определяются из уравнения совместности деформаций  $\varphi_{10} + \varphi_{21} = \varphi_0$ .

$$3.6.5. \tau_{\max} = 0,4 \frac{M}{b\delta^2}.$$

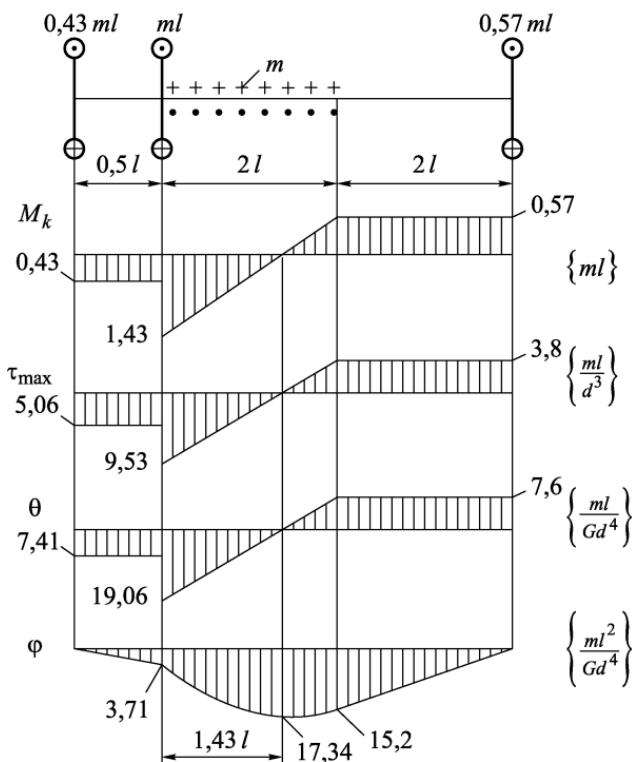


Рис. 3.6.2

## Глава 7

**B.7.1.** См. преамбулу к гл. 7.

**B.7.2.** См. п. 7.1.1, соотношение (7.1.2) и п. 7.1.2.

**B.7.3.** См. п. 7.1.2, соотношения (7.1.2), (7.1.3) и п. 7.1.4. Статические моменты расположенных по обеим сторонам от оси симметрии частей сечения различаются только знаками. Следовательно, их суммарный статический момент, т.е. статический момент всего сечения относительно этой оси, будет равен нулю. А такая ось по определению является центральной.

**B.7.4.** См. п. 7.1.3, соотношение (7.1.7), примеры 7.1, 7.2, 7.3.

**B.7.5.** См. п. 7.2.2, соотношение (7.2.5).

**B.7.6.** См. п. 7.2.1, соотношение (7.2.2), п. 7.2.2, соотношение (7.2.4). Центробежные моменты инерции расположенных по обеим сторонам от оси симметрии частей сечения различаются только знаками, а значит, их суммарный центробежный момент, т.е. центробежный момент инерции всего

сечения относительно этой оси, будет равен нулю. Но, по определению, такая ось является главной.

**B.7.7.** См. п. 7.3.1, соотношение (7.3.2) и п. 7.3.2, соотношение (7.3.3).

**B.7.8.** См. п. 7.2.2, соотношение (7.2.5) и п. 7.3.3, пример 7.7.

$$\mathbf{B.7.9.} J_z = J_y = \frac{\pi D^4}{64} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right].$$

**B.7.10.** Относительно главных осей инерции:

$$J_{\min} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{J_z - J_y}{2} \right)^2 + J_{zy}^2}.$$

См. п. 7.4.1, соотношение (7.4.4); п. 7.4.2, соотношения (7.4.6) и (7.4.7).

$$\mathbf{3.7.1.} y_t = \frac{1}{3} \frac{h(a+2b)}{a+b}; z_t = \frac{1}{3} \frac{a^2 + ab + b^2}{a+b}.$$

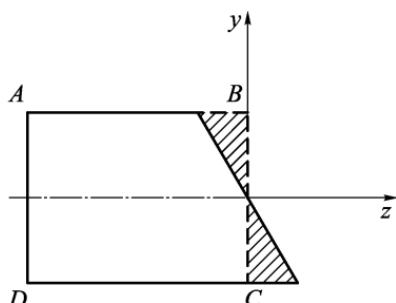


Рис. 3.7.2

**3.7.2.** Для прямоугольника  $ABCD$  (см. рисунок) оси  $z$  и  $y$  являются главными ( $z$  — ось симметрии) и, следовательно, центробежный момент его относительно этих осей равен нулю. Нетрудно показать, что центробежный момент исходной трапеции относительно тех же осей также равен нулю, ибо его можно получить, прибавив к центробежному моменту прямоугольника центробежный момент нижнего заштрихованного треугольника и вычтя из него такой же по величине и знаку центробежный момент

верхнего заштрихованного треугольника. Но в таком случае оси  $z$  и  $y$  будут главными и для данной трапеции.

**3.7.3.**  $\alpha_{\text{пл}} = -16^\circ 05' + 90^\circ; J_{\max} = J_y = 1,137b^4; J_{\min} = J_z = 0,104b^4$  (см. рисунок).

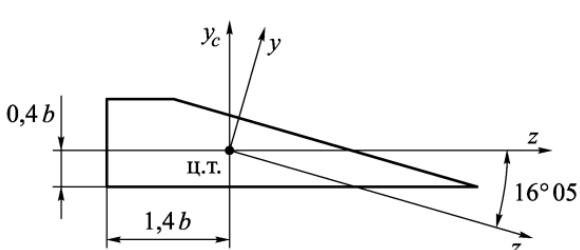


Рис. 3.7.3

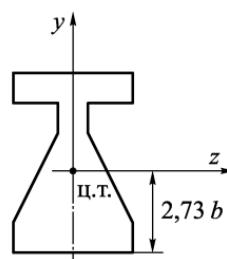


Рис. 3.7.5

$$\mathbf{3.7.4.} z_t = 0,6r, J_z = 0,071r^4, J_y = 0,32r^4, J_{y_c} = 0,038r^4.$$

$$\mathbf{3.7.5.} J_{\max} = J_z = 62,9b^4; J_{\min} = J_y = 16,0b^4 \text{ (см. рисунок).}$$

- 3.7.6.** а)  $J_{\max} = J_z = 4,94b^3\delta$ ;  $J_{\min} = J_y = 1,98b^3\delta$ ;  
 б)  $J_{\max} = J_{\min} = \pi r^3\delta$ ,  $J_p = 2\pi r^3\delta$ ;

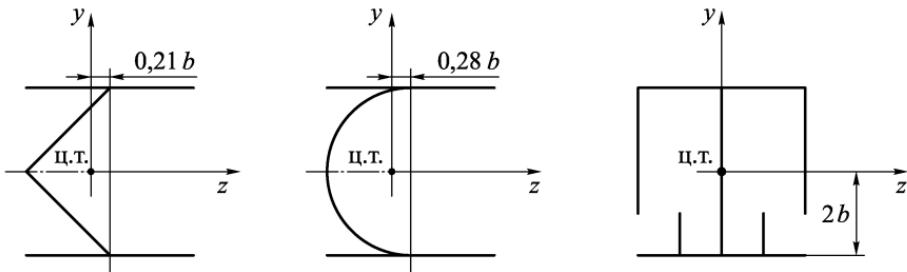


Рис. 3.7.6

- в)  $J_{\max} = J_z = 5,57b^3\delta$ ;  $J_{\min} = J_y = 1,79b^3\delta$ ;  
 г)  $J_{\max} = J_z = 48,0b^3\delta$ ;  $J_{\min} = J_y = 36,7b^3\delta$  (см. рисунок).

**3.7.7.**  $J_{\max} = J_z = 492,0 \text{ см}^4$ ;  $J_{\min} = J_y = 77,7 \text{ см}^4$  (см. рисунок).

## Глава 8

- B.8.1.** См. преамбулу к гл. 8.  
**B.8.2.** См. преамбулу к гл. 8.  
**B.8.3.** См. п. 8.1.1, соотношения (8.1.1), (8.1.2).  
**B.8.4.** См. п. 8.1.2, соотношение (8.1.3).  
**B.8.5.** См. п. 8.1.3, соотношение (8.1.5).  
**B.8.6.** См. п. 8.1.5, пример 8.1.  
**B.8.7.** См. п. 8.1.5, примеры 8.1, 8.2, 8.3.  
**B.8.8.** См. п. 8.1.5, пример 8.1, соотношения (8.1.10), (8.1.11).  
**B.8.9.** См. п. 8.1.5, примеры 8.1, 8.2.  
**B.8.10.** См. п. 8.1.4, соотношения (8.1.7), (8.1.8), (8.1.9); п. 8.1.5, примеры 8.2, 8.3.  
**B.8.11.** См.пп. 8.2.1, 8.2.2, соотношение (8.2.1).  
**B.8.12.** См. п. 8.2.2.  
**B.8.13.** См. п. 8.2.2, соотношения (8.2.3), (8.2.7), (8.2.12).  
**B.8.14.** См. п. 8.2.2, соотношения (8.2.6), (8.2.12).  
**B.8.15.** См. п. 8.3.3, соотношение (8.3.6).  
**B.8.16.** Продольным сечением, нормальным к оси  $y$ ; см. п. 8.3.3, примеры 8.4, 8.5.  
**B.8.17.** См. п. 8.3.3, примеры 8.4, 8.5.  
**B.8.18.** См. п. 8.4.1, пример 8.6.  
**B.8.19.** См. п. 8.3.3, соотношение (8.3.6) и п. 8.4.1, соотношение (8.4.1).  
 Сходство — в структуре формул (8.3.6) и (8.4.1). Главное различие в том, что по (8.4.1) определяется полное касательное напряжение в точке, в то время как по (8.3.6) только его составляющая вдоль оси  $y$ . Различие также — в выделении отсеченной части сечения для подсчета ее статического момента.

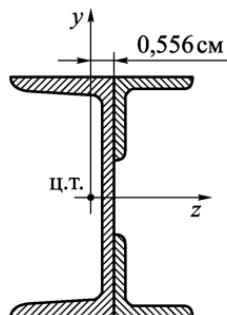


Рис. 3.7.7

**B.8.20.** См. п. 8.4.2, примеры 8.7, 8.8.

**B.8.21.** См. п. 8.5.1, соотношения (8.5.2).

**B.8.22.** См. п. 8.5.2, соотношение (8.5.5).

**B.8.23.** См. п. 8.5.2, пример 8.9.

**B.8.24. а) и б)** По сечению, где  $M_z = |M_z|_{\max}$ ; см. п. 8.5.2, соотношение (8.5.5) и п. 8.5.3, соотношение (8.5.9), пример 8.9.

**в)** По сечениям, где  $M_z = M_{z \max}$  и  $M_z = M_{z \min}$ ; см. п. 8.5.3, пример 8.10.

**B.8.25.** См. п. 8.6.1, соотношение (8.6.4).

**B.8.26.** См. п. 8.6.1, соотношения (8.6.5), (8.6.6), (8.6.7); пример 8.11, соотношения (8.6.10), (8.6.11); пример 8.12, соотношения (8.6.13), (8.6.14).

**B.8.27.** Представляя в (8.6.15) слагаемое  $M$  как  $M(x - x_M)^0$  и интегрируя его без раскрытия скобок, приходим к выражению  $M(x - x_M)$ .

**B.8.28.** См. п. 8.7.1, соотношения (8.7.1), (8.7.2), (8.7.3); п. 8.7.2, соотношение (8.7.6).

**B.8.29.** См. п. 8.8.1. При таком нагружении на втором этапе единичная сила совершает работу на искомом перемещении  $v_B(P)$ , равную  $1 \cdot v_B(P)$ , которая может быть вычислена из баланса энергий в балке. А это дает возможность, разделив  $1 \cdot v_B(P)$  на единичную силу, получить прогиб  $v_B$ .

**B.8.30.** См. п. 8.8.2, соотношение (8.8.8); п. 8.8.3, соотношение (8.8.11).

**B.8.31.** См. п. 8.8.5, соотношение (8.8.15).

**B.8.32.** См. п. 8.8.5, пример 8.17; п. 8.8.6, пример 8.18.

**3.8.1.** Эпюры представлены на рисунках.

**3.8.2.**  $d^{\text{круга}} = 45,3$  мм;  $d^{\text{кольца}} = 32,5$  мм;  $d^{\text{квадрата}} = 48,2$  мм. Наименьшая масса будет у балки кольцевого сечения. Эта балка в 2,25 раза легче балки квадратного сечения и в 1,55 раза легче балки круглого сечения (см. рисунок).

**3.8.3.**  $[q] = 2,46$  кН/м. В данном случае помимо сечения с  $M_z = \frac{3}{2}qa^2$  необходимо провести расчет и по сечению с  $M_z = \frac{33}{32}qa^2$  (см. пример 8.10).

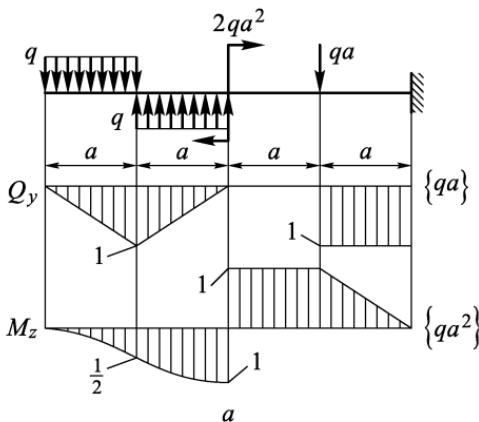


Рис. 3.8.1 а

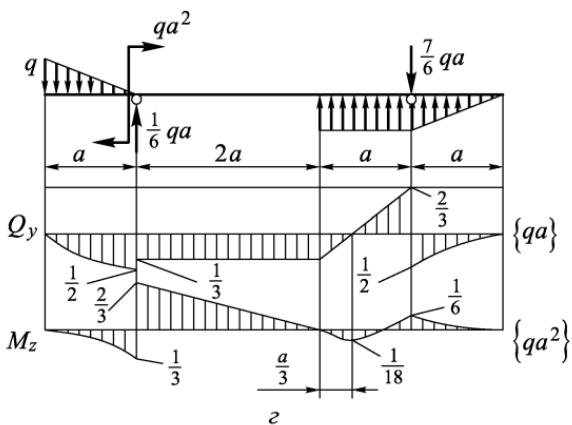
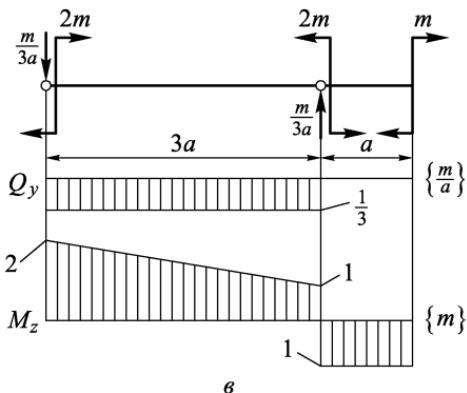
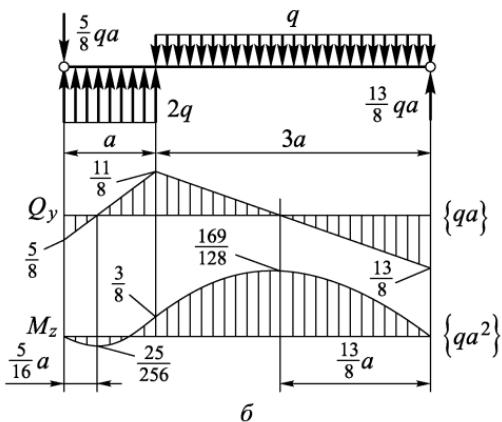


Рис. 3.8.1 б, е, з

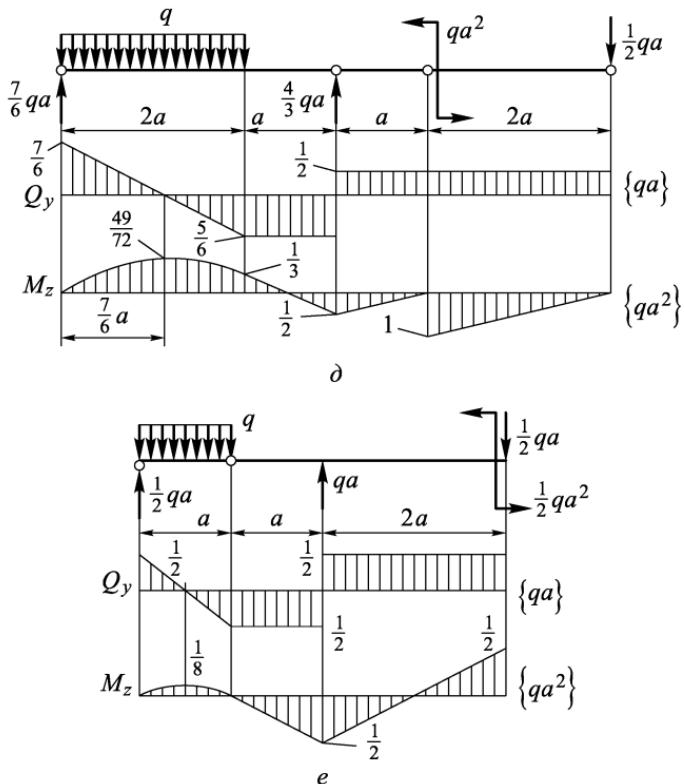
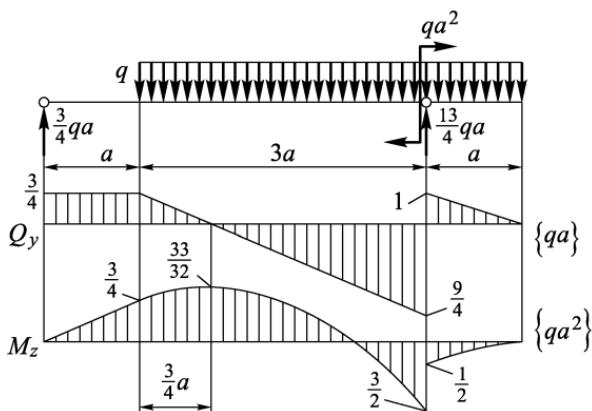
Рис. 3.8.1  $d, e$ 

Рис. 3.8.2

**3.8.4.**  $n = 2, 1.$

**3.8.5.** Эпюры и положение центра изгиба показаны на рисунках.

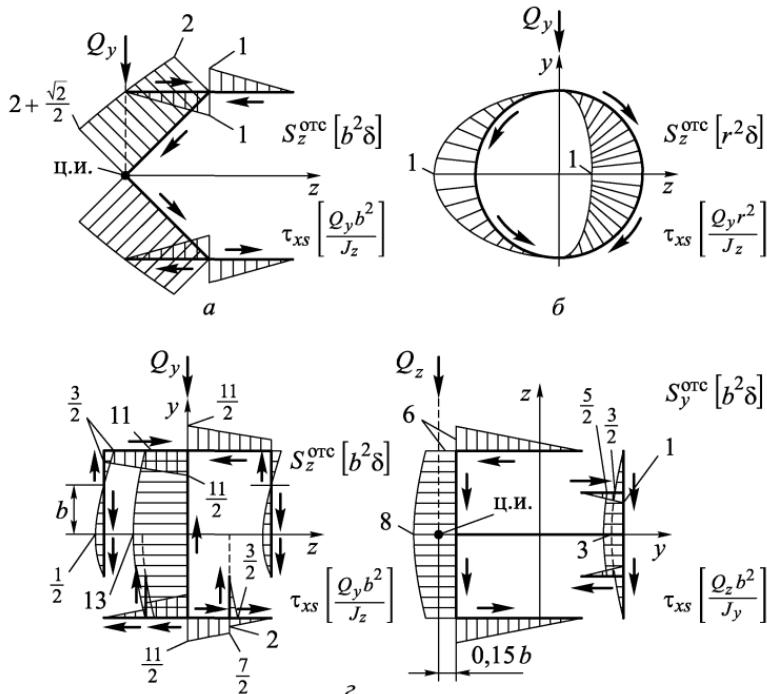


Рис. 3.8.5

**3.8.6.**  $v(0) = -3,53qa^4/(EJ_z)$ ;  $\alpha(3a) = 0,51qa^3/(EJ_z)$ .

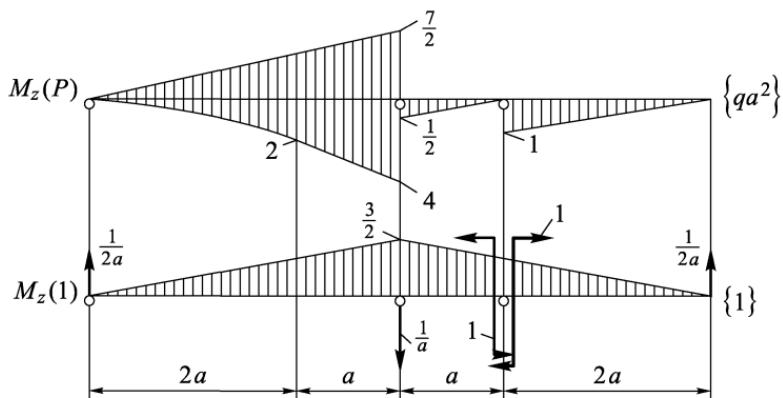


Рис. 3.8.8

**3.8.7.**  $v = 1,9qa^4/(EJ_z)$  (вниз).

**3.8.8.**  $\alpha = 0,58qa^3/(EJ_z)$  (см. рисунок).

## Глава 9

**B.9.1.** См. п. 9.1.1, соотношения (9.1.1), (9.1.2), (9.1.3).

**B.9.2.** См. п. 9.1.2, соотношение (9.1.4).

**B.9.3.** См. п. 9.1.4, соотношение (9.1.10).

**B.9.4.** См. п. 9.1.4, пример 9.1.

**B.9.5.** См. п. 9.1.5, пример 9.2.

**B.9.6.** См. п. 9.2.1, соотношения (9.2.1), (9.2.2).

**B.9.7.** См. п. 9.3.1, соотношения (9.3.1), (9.3.4) и (9.3.5).

**B.9.8.** См. п. 9.3.1, соотношения (9.3.11), (9.3.12).

**B.9.9.** См. п. 9.4.2.

**B.9.10.** См. п. 9.4.3, соотношения (9.4.6), (9.4.7).

**B.9.11.** См. п. 9.4.4, пример 9.5.

**B.9.12.** См. п. 9.5.1, соотношения (9.5.1).

**B.9.13.** См. п. 9.6.1, соотношения (9.6.2).

**B.9.14.** См. п. 9.6.1.

**B.9.15.** См. п. 9.7.1, выражения (9.7.3), (9.7.4).

**B.9.16.** См. п. 9.7.2, выражение (9.7.7); пример 9.7.

**3.9.1.**  $[P] = 1,93 \text{ кН}$ ;  $\delta = 5,37 \text{ мм}$ . Так как сила  $P$  приложена в центре изгиба, то крутящий момент будет равен нулю. Эпюры изгибающих моментов, построенные в главных центральных плоскостях, внутренние силовые факторы в расчетном сечении и положение нейтральной линии и расчетной точки показаны на рисунках.

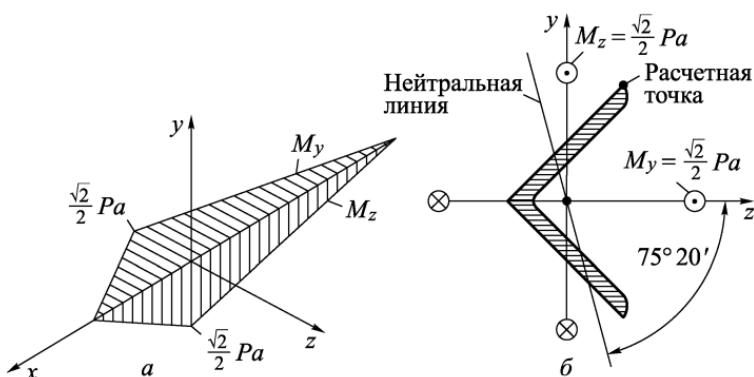


Рис. 3.9.1

**3.9.2.**  $b = 111,6 \text{ мм}$  (см. рисунок).

**3.9.3.**  $n = 2,02$ ; уголок № 2 ( $d = 3 \text{ мм}$ ); этот уголок легче уголка № 7,5 в 6,5 раза (см. рисунок).

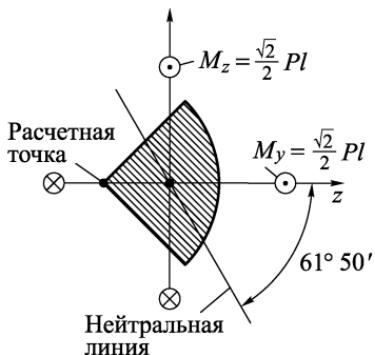


Рис. 3.9.2

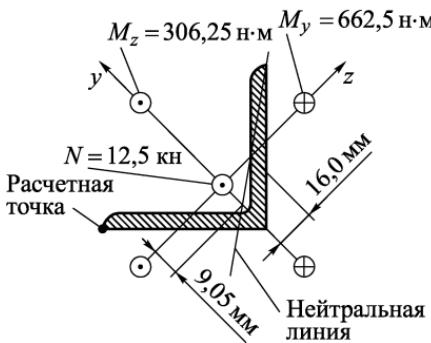


Рис. 3.9.3

**3.9.4.** а)  $\delta_A = 1,12qa^4/(EJ_z)$  (вниз) (см. рис. 3.9.4 а);

б)  $\delta_B = 1,14Pa^3/(EJ_z)$  (влево) (см. рис. 3.9.4 б);

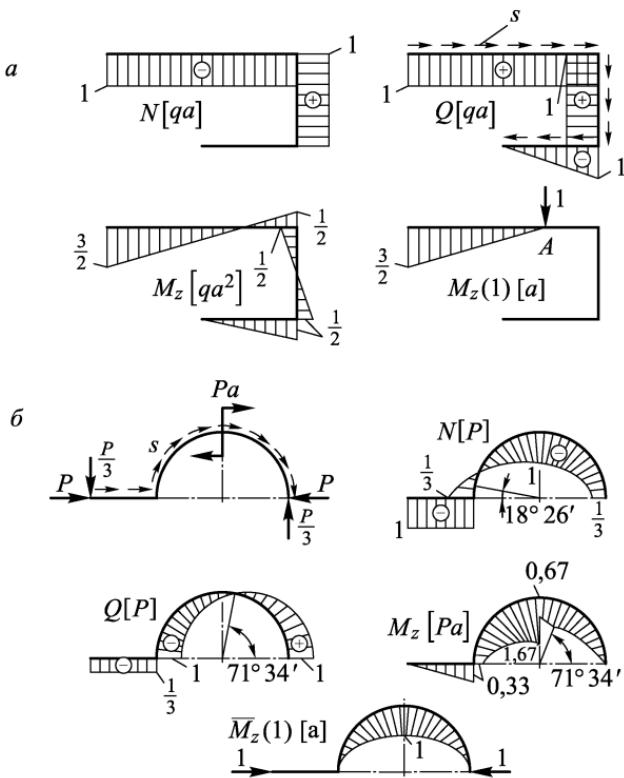


Рис. 3.9.4 а, б

в)  $\alpha_A = 0,167 \frac{qa^3}{EJ_z}$ ,  $d_{cp} = 40,0$  мм,  $\delta = 2,0$  мм (см. рис. 3.9.4 6).

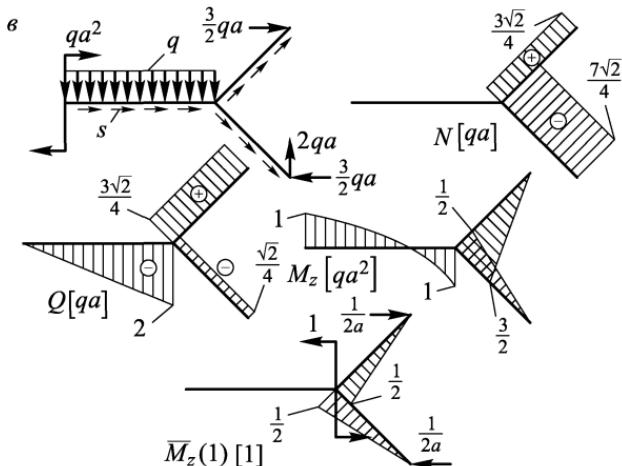


Рис. 3.9.4 6

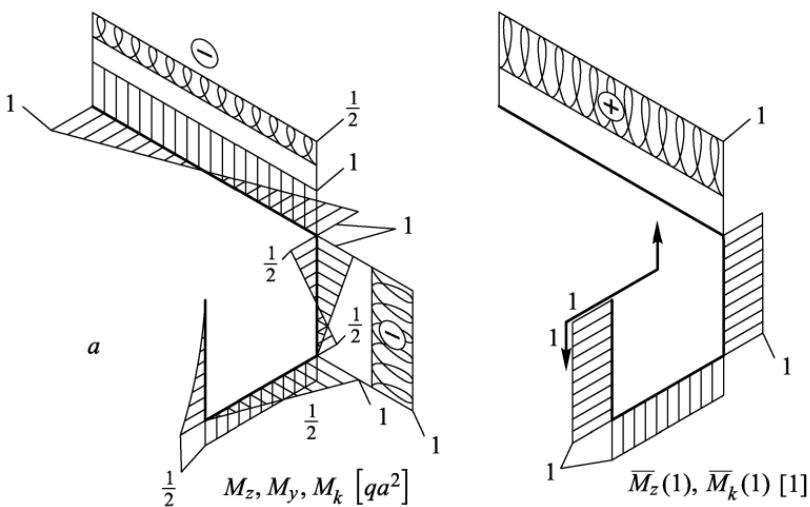


Рис. 3.9.5 а

**3.9.5.** а)  $\alpha = -0,47 \frac{qa^3}{EJ_p}$  (в направлении, противоположном единичному моменту); б)  $\delta_A = 81,12 \frac{Pa^3}{Gd^4}$  (в направлении единичной нагрузки на рисунке). Эпюры крутящих моментов заштрихованы спиральной линией.

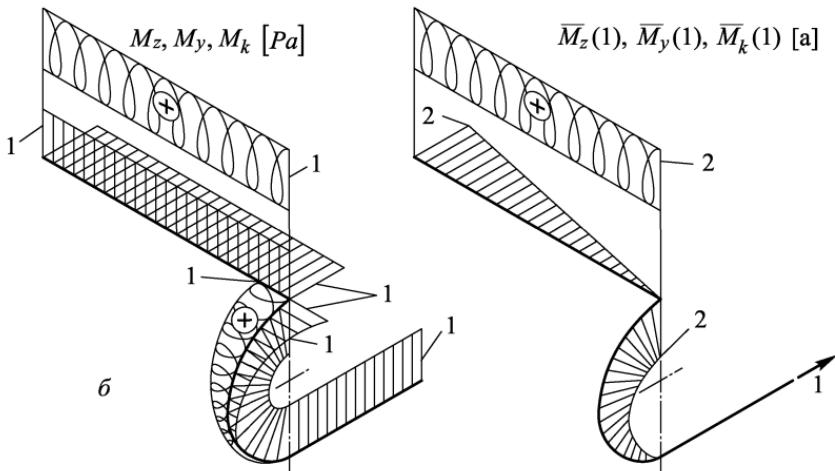


Рис. 3.9.5 б

**Глава 10**

- B.10.1.** См.п. 10.1.1.
- B.10.2.** См. п. 10.1.1.
- B.10.3.** См. п. 10.1.1.
- B.10.4.** См. п. 10.1.1.
- B.10.5.** См. п. 10.1.1.
- B.10.6.** См. п. 10.1.2.
- B.10.7.** См. п. 10.1.3.
- B.10.8.** См. п. 10.1.3.
- B.10.9.** См. п. 10.1.4.
- B.10.10.** См. п. 10.1.4, рис. 10.8 б.
- B.10.11.** См. п. 10.1.4, примеры 10.1, 10.2.
- B.10.12.** См. п. 10.2.1.
- B.10.13.** См. п. 10.2.1.
- B.10.14.** См. п. 10.2.1.
- B.10.15.** См. п. 10.2.1.
- B.10.16.** См. п. 10.2.1.
- B.10.17.** См. п. 10.2.2.
- B.10.18.** См. п. 10.2.3.
- B.10.19.** См. п. 10.2.4.
- B.10.20.** См. п. 10.2.6.
- B.10.21.** См. п. 10.3.1.
- B.10.22.** См.пп. 10.3.1, 10.3.2.
- B.10.23.** См.пп. 10.3.1, 10.3.2.
- B.10.24.** См. п. 10.3.3, пример 10.7.
- B.10.25.** См. п. 10.3.4, примеры 10.8, 10.9.
- B.10.26.** См. п. 10.4.1.
- B.10.27.** См. п. 10.4.2, пример 10.12.
- B.10.28.** См.пп. 10.5.1, 10.5.2, пример 10.13.
- B.10.29.** См. п. 10.5.2.

**3.10.1.** Рама дважды статически неопределенна, эквивалентная система выбрана путем отбрасывания двух лишних связей в правой нижней опоре и замене их действия силами  $X_1$ ,  $X_2$  (см. рисунок). Обращаем внимание, что

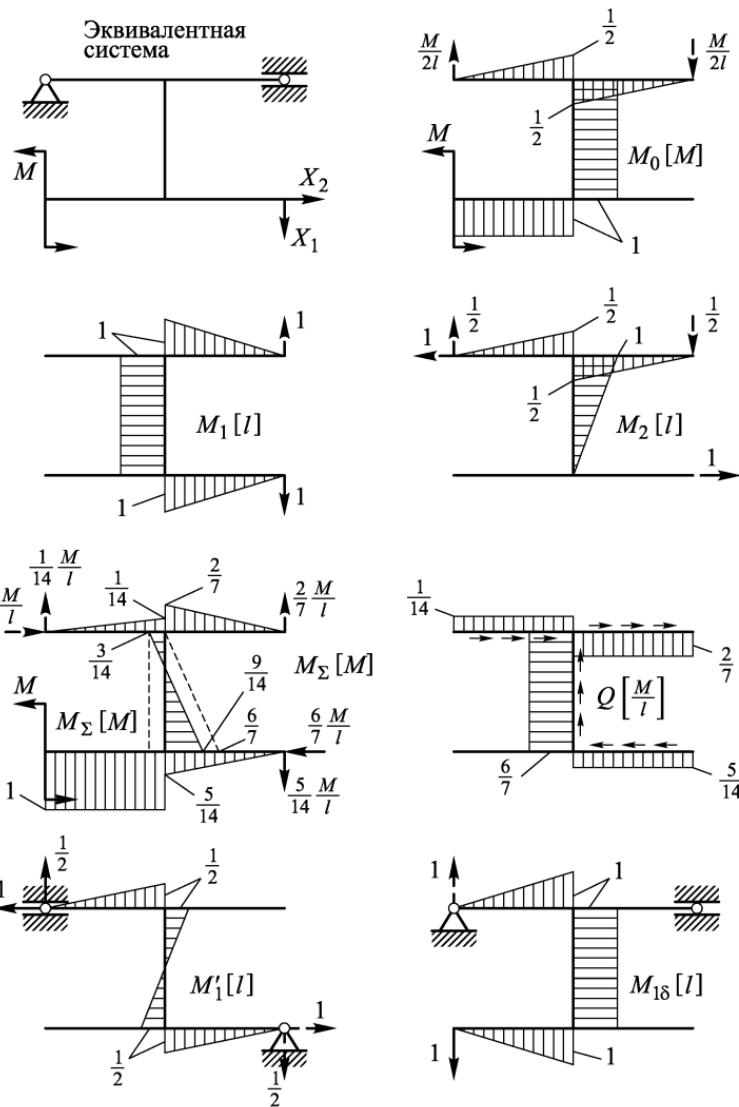


Рис. 3.10.1

было бы ошибкой при выборе эквивалентной системы отбросить две связи в левой опоре, т.е. в этом случае оставшиеся три связи пересекались бы в одной точке, что, как известно, является признаком мгновенно изменяемой

системы (мгновенного механизма). В выбранной эквивалентной системе:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EJ_z} \left( -Ml \times l - \frac{1}{2} \frac{M}{2} l \times \frac{1}{3} l \right) = -\frac{7}{6} \frac{Ml^2}{EJ_z},$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EJ_z} \left( Ml \times \frac{l}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{M}{2} l \times \frac{1}{3} l \right) = \frac{2}{3} \frac{Ml^2}{EJ_z},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_z} \left( 2 \cdot \frac{1}{2} l \cdot l \times \frac{2}{3} l + l \cdot l \times l \right) = \frac{5}{3} \frac{l^3}{EJ_z},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ_z} \left( -l \cdot l \times \frac{l}{2} - \frac{1}{2} l \cdot l \times \frac{1}{3} l \right) = -\frac{2}{3} \frac{l^3}{EJ_z},$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ_z} \left( \frac{1}{2} l \cdot l \times \frac{3}{2} l + 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{l}{2} \cdot l \times \frac{1}{3} l \right) = \frac{1}{2} \frac{l^3}{EJ_z}.$$

Решая систему канонических уравнений

$$-\frac{7}{6} M + \frac{5}{3} l X_1 - \frac{2}{3} l X_2 = 0,$$

$$\frac{2}{3} M - \frac{2}{3} l X_1 + \frac{1}{2} l X_2 = 0,$$

получаем  $X_1 = \frac{5}{14} \frac{M}{l}$ ,  $X_2 = -\frac{6}{7} \frac{M}{l}$ .

Для проверки выбираем новую эквивалентную систему и определяем в ней перемещение катка в направлении горизонтальной отброшенной связи в левой опоре. В результате получаем (пунктиром показано расслоение эпюры  $M_\Sigma$  на вертикальном участке)

$$\delta'_1 = \frac{1}{EJ_z} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{14} Ml \times \frac{1}{3} l + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{14} Ml \times \frac{1}{3} l - \frac{3}{14} Ml \times 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{7} Ml \times \frac{1}{6} l \right) = 0.$$

Нетрудно видеть, что, так как учитываются только изгибные деформации рамы, горизонтальное перемещение точки приложения  $M$  равно нулю. Вертикальное, а значит, и полное перемещение этой точки

$$\delta = \frac{1}{EJ_z} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{14} Ml \times \frac{2}{3} l - \frac{3}{14} Ml \times l + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{7} Ml \times l + Ml \times \frac{1}{2} l \right) = \frac{31}{42} \frac{Ml^2}{EJ_z}.$$

Диаметр сечения  $d$  определяется из условия прочности

$$\frac{M_{\Sigma \max}}{0,1d^3} \leq [\sigma], \text{ откуда } d \geq 17,1 \text{ мм.}$$

**3.10.2.** Балка дважды статически неопределенна. Уравнения трех моментов для левого и среднего и для среднего и правого пролетов запишутся так (см. рисунок):

$$l(-ql^2) + 2 \cdot 3lX_1 + 2lX_2 = 6 \left( \omega_1 \frac{\frac{1}{3}l}{l} + \omega_2 \frac{l}{2l} \right),$$

$$2lX_1 + 2 \cdot 3lX_2 + l \cdot 0 = 6 \left( \omega_2 \frac{l}{2l} + 0 \right).$$

Здесь  $\omega_1 = -\frac{1}{2}ql^3$ ,  $\omega_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}ql^2 \cdot 2l = \frac{2}{3}ql^3$ .

Решая систему, получаем  $X_1 = X_2 = \frac{1}{4}ql^2$ . Для построения эпюры  $Q_y$  надо предварительно определить реакции опор, что легко сделать, если за-

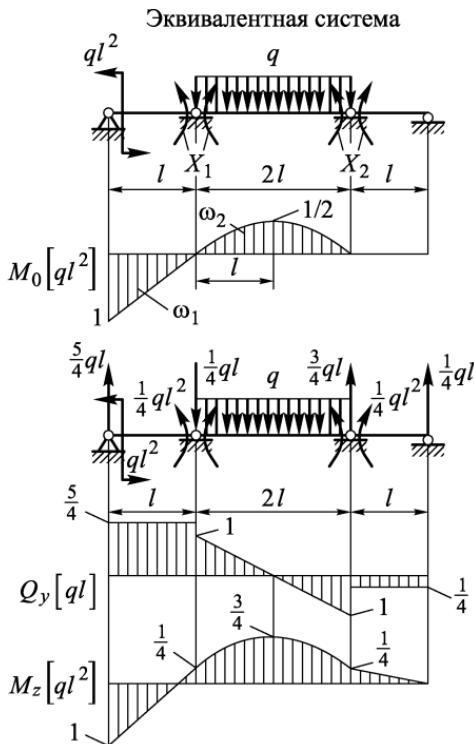


Рис. 3.10.2

писать условия равновесия для соответствующих пролетов балки. Например, для левого пролета балки это условие запишется так:  $-Rl + ql^2 + \frac{1}{4}ql^2 = 0$ ; здесь  $R$  — реакция в левой опоре. Откуда  $R = \frac{5}{4}ql$ .

**3.10.3.** Рама 6 раз статически неопределенна ( $\Gamma$  замкнутый контур и I заделка), но она имеет две оси обратной симметрии, а поэтому эквивалентная система для нее выбрана путем удаления лишних связей одновременно в двух симметричных сечениях (см. рисунок). Из трех реакций связи в каждом сечении неизвестной остается только перерезывающая сила ( $N = M_z = 0$ ). В выбранной эквивалентной системе  $\delta_{10} = -\frac{10}{3} \frac{Pl^3}{EJ_z}$ ,  $\delta_{11} = 12 \frac{l^3}{EJ_z}$  (здесь перемножаются эпюры только для половины рамы). Решая каноническое уравнение, находим  $X_1 = \frac{5}{18}P$ . Сравнивая эпюры  $M_\Sigma$  и  $M_{1\theta}$ , видим, что одна из них обратносимметричная, а другая прямосимметричная, т.е.

их перемножение по способу Верещагина даст нулевой результат, а значит,  $\theta_{AB} = 0$ .

### Эквивалентная система

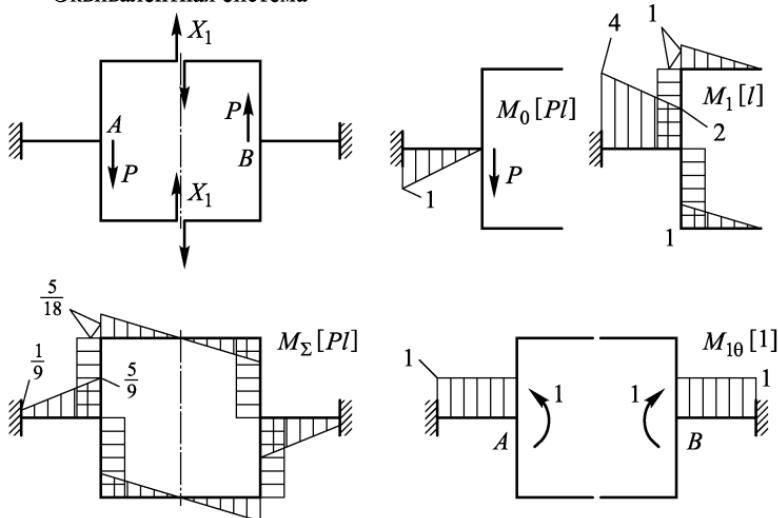


Рис. 3.10.3

### Эквивалентная система

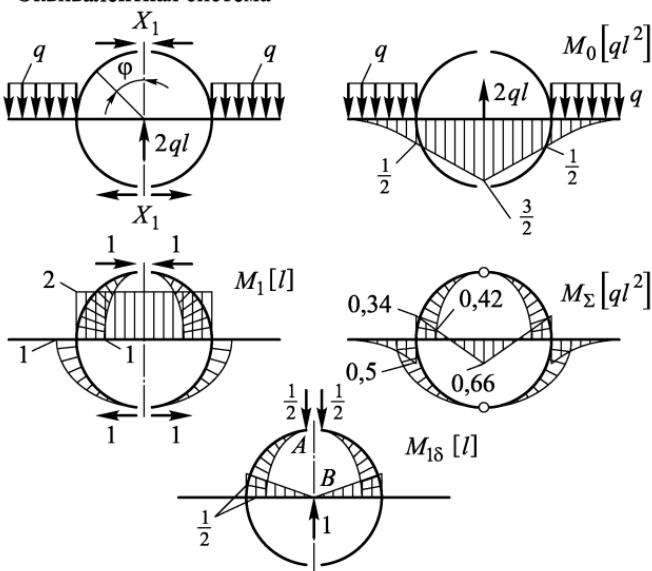


Рис. 3.10.4

**3.10.4.** Рама, как и в задаче 10.3, шесть раз статически неопределенна (два замкнутых контура), но она имеет вертикальную ось прямой симметрии.

метрии и горизонтальную ось обратной симметрии. Эквивалентная система здесь выбрана путем удаления трех лишних связей в верхнем и нижнем сечениях, расположенных на вертикальной оси симметрии (разумеется, нельзя разрезать раму целиком по этой оси, так как в этом случае мы удалим и необходимые связи, обеспечивающие ее кинематическую неизменяемость). Единственной неизвестной здесь остается только продольная сила ( $Q$  равняется нулю, потому что сечение расположено на оси прямой симметрии,  $M_z = 0$  из-за наличия шарнира). Вычислив коэффициенты канонического уравнения  $\delta_{10} = -4 \frac{ql^4}{EJ_z}$ ,  $\delta_{11} = \frac{3\pi l^3}{EJ_z}$ , получим  $X_1 = 0,42ql$ ,  $\delta_{AB} = 0,21 \frac{ql^4}{EJ_z}$ .

#### Эквивалентная система

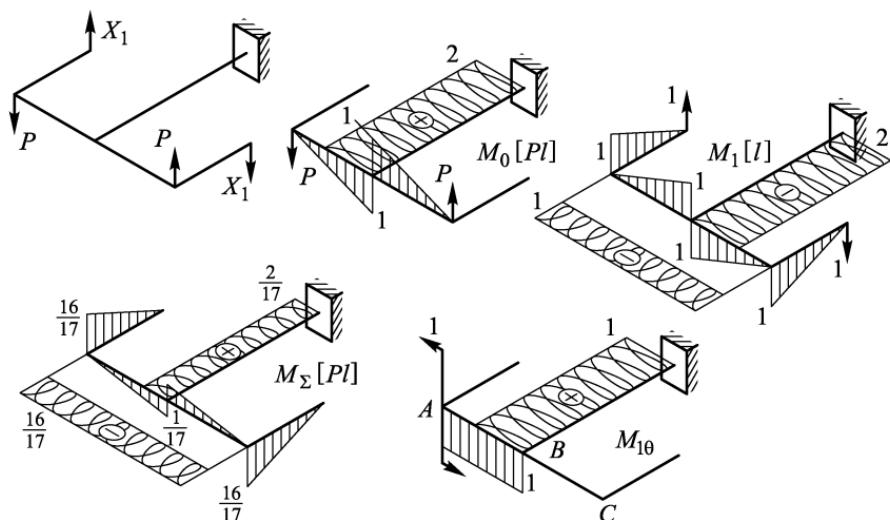


Рис. 3.10.5

**3.10.5.** Задача дважды статически неопределенна, но, учитывая обратную симметрию рамы, приходим к эквивалентной системе, показанной на рисунке. Вычислив коэффициенты канонического уравнения  $\delta_{10} = -\frac{2Pl^3}{EJ} \left( \frac{1}{3} + 4 \frac{EJ}{GJ_k} \right)$ ,  $\delta_{11} = \frac{4l^3}{EJ} \left( \frac{1}{3} + \frac{2EJ}{GJ_k} \right)$  и, учитывая, что  $\frac{EJ}{GJ_k} = \frac{EJ}{(2/5) \cdot E2J} = \frac{5}{4}$  (для кольцевого сечения  $J_k = J_p = 2J$ ), получаем  $X_1 = \frac{16}{17}P$ ,  $\theta_A = \frac{11}{34} \frac{Pl^2}{EJ}$ .

**3.10.6.** Плоскопространственная рама имеет две плоскости прямой симметрии. С учетом этого и выбрана эквивалентная система, показанная на рис. 3.10.6. Вычислив коэффициенты канонического уравнения  $\delta_{10} = -7 \frac{ql^3}{EJ}$ ,  $\delta_{11} = \frac{56}{3} \frac{l}{EJ}$ , находим  $X_1 = \frac{3}{8}ql^2$ .

## Эквивалентная система

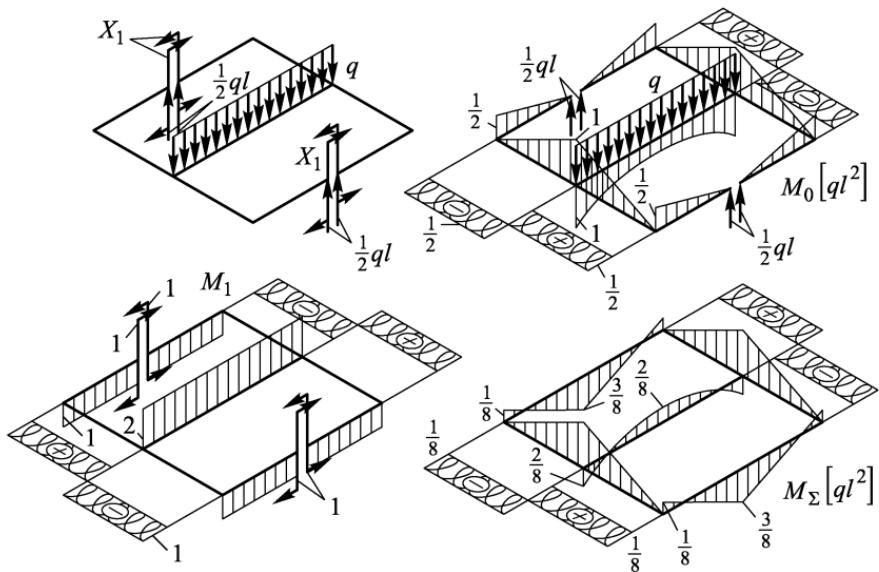


Рис. 3.10.6

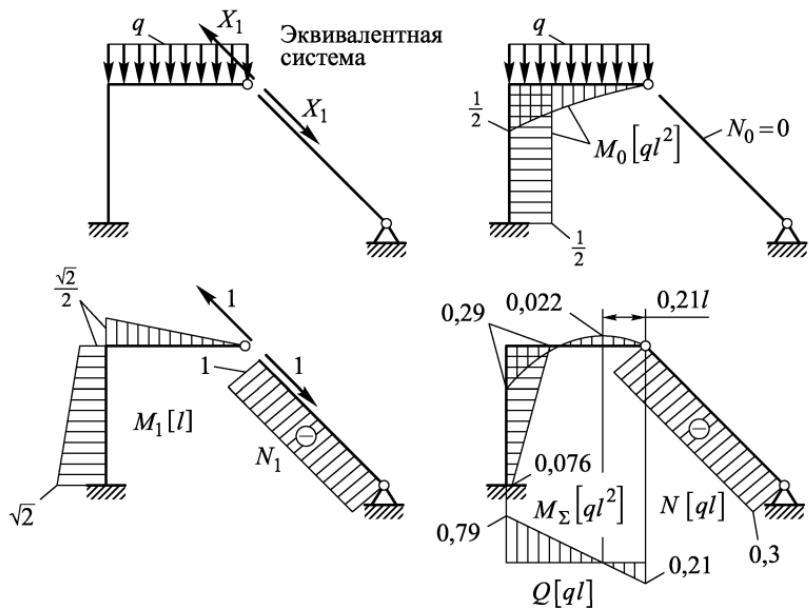


Рис. 3.10.7

**3.10.7.** Так как в наклонном ферменном элементе могут возникнуть только продольные силы, то эквивалентная система здесь выбрана путем удаления именно этой связи (см. рисунок). Вычисляем коэффициенты канонического уравнения:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EJ_z} \left[ -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ql^3 \times \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} l - \frac{1}{2} ql^3 \times \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} l + \sqrt{2} l \right) \right] = -0,62 \frac{ql^4}{EJ_z},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_z} \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} l^2 \times \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} l + \frac{\sqrt{2}}{2} l^2 \times \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} l + \sqrt{2} l \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} l^2 \times \left( \frac{\sqrt{2}}{2} l + \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} l \right) \right] + \frac{(-1)(-1)\sqrt{2}l}{EF} = 2,04 \frac{l^3}{EJ_z};$$

здесь учтено, что  $EF = \frac{2EJ_z}{l^2}$ . Тогда  $X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = 0,3ql$ .

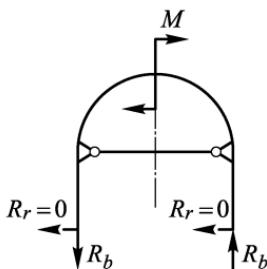


Рис. 3.10.8

**3.10.8.** В силу обратной симметрии системы реакции в ее опорах должны быть обратносимметричными. Но при наличии горизонтальных реакций система будет неуравновешенной, следовательно, они равны нулю. Вертикальные реакции определяются из следующего уравнения равновесия:  $R_B 2l - M = 0$ ,

$R_B = \frac{M}{2l}$ . В ферменном элементе может возникнуть только постоянная по его длине продольная сила, но в сечении по оси обратной симметрии она равна нулю, а значит, равна нулю и во всех остальных его сечениях.

## Глава 11

**B.11.1.** См. п. 11.1.1.

**B.11.2.** См. п. 11.1.2.

**B.11.3.** См. п. 11.1.3.

**B.11.4.** См. п. 11.1.3.

**B.11.5.** Площадки параллельны  $\sigma_2$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  соответственно. См. п. 11.2.1.

**B.11.6.** Произвольно ориентированным площадкам. См. п. 11.2.1.

**B.11.7.** См. п. 11.2.1, формулу (11.2.4).

**B.11.8.** См. формулы (11.2.5) в п. 11.2.3.

**B.11.9.** См. формулы (11.3.1), (11.3.2), (11.3.3), (11.3.4) в п. 11.3.1.

**B.11.10.** См. соотношения (11.3.6), (11.3.7), (11.3.11) и (11.3.12) в п. 11.3.3.

**B.11.11.** См. п. 11.4.1.

**B.11.12.** См. п. 11.4.1.

**B.11.13.** См. п. 11.4.2.

**B.11.14.** См. п. 11.4.2.

**B.11.15.** См. п. 11.4.2.

**B.11.16.** См. п. 11.4.2.

**B.11.17.** См. п. 11.4.3.

**B.11.18.** См. п. 11.4.4.

**B.11.19.** См. п. 11.4.5.

**B.11.20.** См. п. 11.4.6.

**B.11.21.** См. п. 11.4.7.

**B.11.22.** См. п. 11.5.1.

**B.11.23.** См. п. 11.5.2.

**B.11.24.** См. п. 11.5.2, соотношения (11.5.9), (11.5.10).

**B.11.25.** См. пп. 11.5.2, 11.5.3, соотношения (11.5.17), (11.5.18), (11.5.20) и (11.5.21).

**3.11.1.** Запас прочности  $n = \frac{\sigma_{\text{пред.р}}}{\sigma_{\text{экв}}}$ . Так как материал имеет различные характеристики на растяжение и сжатие, то расчет ведем по теории предельных состояний (V теория). Эквивалентное напряжение по этой теории  $\sigma_{\text{экв}}^V = \sigma_1 - k\sigma_3 = \sigma_1 - \frac{\sigma_{\text{тр}}}{\sigma_{\text{tc}}} \sigma_3$  (см. (11.4.16)). Вычислим  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ . Согласно принятой системе координат (см. рисунок к условию задачи), имеем:  $\sigma_x = 0$ ,  $\sigma_y = 100$  МПа,  $\sigma_z = 0$ ,  $\tau_{xy} = 50$  МПа,  $\tau_{yz} = -40$  МПа,  $\tau_{zx} = 0$ .

Тогда инварианты напряженного состояния, определяемые выражениями (11.1.15), будут равны:  $J_1 = 100$  МПа,  $J_2 = -4100$  МПа<sup>2</sup>,  $J_3 = 0$ . Кубическое уравнение относительно главных напряжений (см. выражение (11.1.14)) запишется в виде  $\sigma^3 - 100\sigma^2 - 4100\sigma = 0$ , откуда  $\sigma^I = 0$ ,  $\sigma^{II, III} = 50 \pm \sqrt{50^2 + 4100}$ , т.е.  $\sigma^{II} = 131,2$  МПа,  $\sigma^{III} = -31,2$  МПа. Согласно принятому соотношению между главными напряжениями, получаем  $\sigma_1 = 131,2$  МПа,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -31,2$  МПа. Тогда  $\sigma_{\text{экв}}^V = 131,2 - \frac{280}{220}(-31,2) = 171$  МПа и запас прочности  $n = \frac{280}{171} = 1,64$ .

**3.11.2.** Вычислим допускаемое напряжение  $[\sigma] = \frac{\sigma_t}{n} = \frac{280}{2} = 140$  МПа.

Условие прочности будет выполняться, если  $\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma]$ . Так как материал имеет одинаковые характеристики на растяжение и сжатие, то расчет ведем по двум теориям прочности — максимальных касательных напряжений (III теория) и энергетической теории (IV теория). Эквивалентные напряжения согласно этим теориям определяются выражениями (11.4.7) и (11.4.10). Вычислим главные напряжения для заданного напряженного состояния (см. рисунок к условию задачи). В нашем случае это легко сделать, если воспользоваться выражениями (11.2.6), так как в заданном напряженном состоянии одна главная площадка известна (площадка, нормальная к оси  $z$ ). Обозначая  $\sigma_x =$

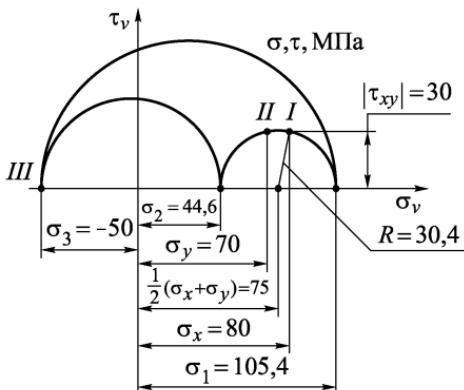


Рис. 3.11.2

$\sigma_x = 80 \text{ МПа}, \sigma_y = 70 \text{ МПа}, \sigma_z = -50 \text{ МПа}, \tau_{xy} = -30 \text{ МПа}$ , получаем

$$\sigma_{1,2} = \frac{80 + 70}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{80 - 70}{2}\right)^2 + (-30)^2},$$

откуда

$$\sigma_1 = 105,4 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = 44,6 \text{ МПа}, \quad \text{а } \sigma_3 = \sigma_z = -50 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = 105,4 - (-50) = 155,4 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(105,4 - 44,6)^2 + (44,6 + 50)^2 + (-50 - 105,4)^2} = 136 \text{ МПа}.$$

Сравнивая эквивалентные напряжения с допускаемым, приходим к выводу, что условие прочности удовлетворяется только во втором случае.

Главные напряжения могут быть также найдены, если для заданного напряженного состояния построить круговую диаграмму Мора (см. п. 11.2.4, рис. 11.15). Обозначим грани кубика, нормальные к осям  $x, y, z$ , соответственно I, II, III. Вычислим радиус и абсциссу центра окружности, точки которой определяют напряжения во всех площадках, нормальных к верхней (III) грани кубика:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{80 - 70}{2}\right)^2 + (-30)^2} = 30,4 \text{ МПа}.$$

Абсцисса центра равна  $\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(80 + 70) = 75 \text{ МПа}$ . В результате получаем следующую диаграмму (ввиду симметрии диаграммы относительно оси  $\sigma_y$ , изображаем только ее верхнюю часть).

**3.11.3.** Расчетным сечением бруса будет сечение в заделке, где действуют (см. рисунок) изгибающие моменты  $M_z = 20Pb$ ,  $M_y = 20Pb$  (сжатые волокна соответственно снизу и справа) и крутящий момент  $M_{kp} = 20Pb$ .

В принятой системе координат нормальное напряжение в любой точке сечения (см. п. 9.1.4)

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z}y - \frac{M_y}{J_y}z = \frac{20Pb}{b(2b)^3/12}y - \frac{20Pb}{2bb^3/12}z = \frac{30P}{b^3}(y - 4z).$$

Уравнение нейтральной линии  $y = 4z$ . Изображаем эпюры нормальных и касательных напряжений (см. п. 9.1.4). Из анализа этих эпюр, учитывая, что  $[\sigma]_p = [\sigma]_{ck}$ , следует, что расчетными точками

могут быть точки A или B (точка C исключается, так как в ней и нормальные, и касательные напряжения меньше, чем в точке B) или симметричные им относительно начала координат точки. Вычислим напряжения в этих

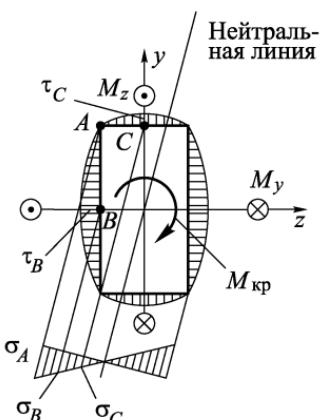


Рис. 3.11.3

точках:

$$\sigma_A = \frac{30P}{b^3}(y_A - 4z_A) = \frac{30P}{b^3} \left[ b - 4 \left( -\frac{b}{2} \right) \right] = 90 \frac{P}{b^2}, \quad \tau_A = 0,$$

$$\sigma_B = \frac{30P}{b^3}(y_B - 4z_B) = \frac{30P}{b^3} \left[ 0 - 4 \left( -\frac{b}{2} \right) \right] = 60 \frac{P}{b^2},$$

$$\tau_B = \frac{M_k}{\alpha b^2 2b} = \frac{20Pb}{0,246 \cdot 2b^3} = 40,6 \frac{P}{b^2}.$$

Тогда

$$\sigma_{\text{экв } A}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_A^2 + 4\tau_A^2} = 90 \frac{P}{b^2},$$

$$\sigma_{\text{экв } B}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_B^2 + 4\tau_B^2} = 101 \frac{P}{b^2}.$$

Таким образом, расчетной точкой будет точка  $B$ . Из условия прочности  $\sigma_{\text{экв } B} \leq [\sigma]$ ,  $\frac{101P}{b^2} \leq [\sigma]$ , получаем  $b \geq 22,5$  мм.

**3.11.4.** Анализируя эпюру  $M_{\Sigma}$  (см. ответ к задаче 10.5), приходим к выводу, что расчетным сечением будет крайнее правое участок  $AB$  (или левое крайнее участка  $BC$ ) с  $M_z = \frac{1}{17}Pl$ ,  $M_k = \frac{16}{17}Pl$ . Но для кольцевого сечения (см. пример 11.3) эквивалентное напряжение по IV теории прочности определяется формулой  $\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \frac{M_{\text{экв}}^{\text{IV}}}{W_u}$ , где в нашем случае

$$M_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_z^2 + \frac{3}{4}M_k^2} = 0,94Pl,$$

$$W_u = \frac{J_z}{d_{\text{cp}}/2} = \frac{\pi d_{\text{cp}}^3 \delta / 8}{d_{\text{cp}}/2} = 0,0785d_{\text{cp}}^3,$$

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \frac{0,94Pl}{0,0785d_{\text{cp}}} = 12 \frac{Pl}{d_{\text{cp}}^3}.$$

$$\text{Тогда запас прочности } n = \frac{\sigma_{\text{т}}}{\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}}} = \frac{240 \cdot 10^6 (20 \cdot 10^{-3})^3}{12 \cdot 320 \cdot 0,25} = 2.$$

**3.11.5.** Расчетное сечение бруса — сечение в заделке с действующими в нем (см. рисунок) изгибающим моментом  $M_z = 20Pb$  и крутящим моментом  $\frac{3}{8}Pb$ , возникающим вследствие

того, что линия действия силы  $P$  не пересекается с осью жесткости бруса (см. п. 8.4.2). Положение центра изгиба в этом сечении определено в п. 8.4.2.

Вычисляем нормальные и касательные напряжения в сечении. Анализируя эпюры напряжений, видим, что расчетными точками, т.е. точками, для которых эквивалентные напряжения максимальны, будут точки на верхней

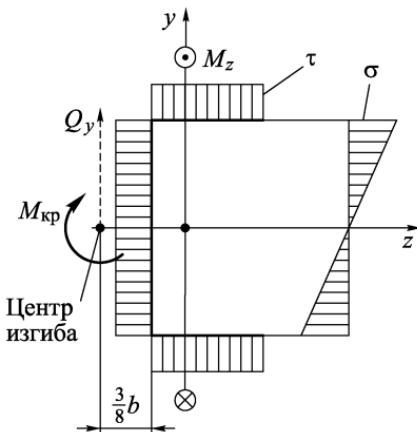


Рис. 3.11.5

или нижней полке сечения. Напряжения в этих точках  $\sigma = \frac{M_z}{W_z}$ ,  $\tau = \frac{M_{kp}}{W_k}$ .

Из примера 9.3  $J_z = \frac{8}{3}b^3\delta$ . Тогда

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\max}} = \frac{(8/3)b^3\delta}{b} = \frac{8}{3}b^2\delta, \quad W_k = \frac{1}{3}\delta^2L \text{ (см. п. 6.5.1)},$$

$$L = 4b, \quad W_k = \frac{4}{3}\delta^2b.$$

Тогда

$$\sigma = \frac{20Pb}{(8/3)\delta b^2} = 75 \frac{P}{b^2}, \quad \tau = \frac{(3/8)Pb}{(4/3)\delta^2b} = 28,1 \frac{P}{b^2},$$

$$\max \sigma_{ekb}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 93,7 \frac{P}{b^2}.$$

При перенесении силы  $P$  в центр изгиба исчезнет деформация кручения бруса, и  $\max \sigma_{ekb}^{III}$  будет равно  $75 \frac{P}{b^2}$ . Но так как запас прочности  $n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\max \sigma_{ekb}^{III}}$ , то отношение запасов прочности во II и I случаях будет  $\frac{n_I}{n_{II}} = \frac{93,7}{75} = 1,25$ , т.е. запас прочности бруса без деформации кручения будет на 25 % больше запаса прочности бруса, испытывающего наряду с изгибом и кручение.

## Глава 12

**B.12.1.** См. п. 12.1.1.

**B.12.2.** См.пп. 12.1.2, 12.1.3.

**B.12.3.** См.пп. 12.1.2, 12.1.3.

**B.12.4.** См. п. 12.2.1.

**B.12.5.** См. п. 12.2.2.

**B.12.6.** См. п. 12.2.3.

**B.12.7.** См. п. 12.2.4.

**B.12.8.** См. п. 12.2.6.

**B.12.9.** См. п. 12.3.1.

**B.12.10.** См. п. 12.3.1, условия (12.3.3), (12.3.4).

**B.12.11.** См. п. 12.3.3.

**B.12.12.** См. п. 12.3.3.

**B.12.13.** См. п. 12.3.3.

**B.12.14.** См. п. 12.3.4.

**B.12.15.** См. п. 12.4.1.

**B.12.16.** См. п. 12.4.1.

**B.12.17.** См. п. 12.4.1.

**B.12.18.** См. п. 12.4.2.

**B.12.19.** См. п. 12.4.3.

**B.12.20.** См. п. 12.4.4.

**B.12.21.** См. соотношение (12.4.12) в п. 12.4.6.

**B.12.22.** См. 12.6.

**B.12.23.** См. п. 12.7.1.

- B.12.24.** См. п. 12.7.1, пример 12.7.  
**B.12.25.** См. п. 12.7.1, пример 12.7.  
**B.12.26.** См. п. 12.7.3.  
**B.12.27.** См. формулу (12.7.16) в п. 12.7.5.  
**B.12.28.** См. формулы (12.7.17) и (12.7.18) в п. 12.7.5.  
**B.12.29.** См. формулы (12.7.19) и (12.7.20) в п. 12.7.6.  
**B.12.30.** См. п. 12.7.6.  
**B.12.31.** См. п. 12.7.6.

**3.12.1.** Стойки должны терять устойчивость в такой последовательности: стойка прямоугольного сечения, круглого сечения, квадратного сечения, кольцевого сечения. См. пп. 12.4.1, 12.4.2. Приравнивая площади сечений, выражим их характерные размеры через какой-нибудь один, например, через диаметр круга, и, воспользовавшись формулой (12.4.1), вычислим гибкости всех четырех стоек:

$$\lambda_{\text{круга}} = \frac{4\mu l}{d}, \quad \lambda_{\text{кольца}} = 3,1 \frac{\mu l}{d}, \quad \lambda_{\text{квадр}} = 3,9 \frac{\mu l}{d}, \quad \lambda_{\text{пр-ка}} = 7,8 \frac{\mu l}{d}.$$

(В последнем случае в формулу для  $\lambda$  подставляется минимальный момент инерции.)

Анализируя результаты, приходим к вышеуказанному выводу.

**3.12.2.** Стержень потеряет устойчивость, когда реакции в его опорах достигнут критического значения  $R_{\text{кр}}$ . Так как деформации стержня подчиняются закону Гука, то  $R_{\text{кр}}$  определяется по формуле Эйлера  $R_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_z}{(\mu l)^2}$ .

Здесь  $\mu$  равно 1. Найдем реакции  $R$  опор (см. рисунок), возникающие при нагреве стержня на  $\Delta T$  градусов. Задача, как видим, статически неопределенная. Запишем уравнение совместности деформаций: суммарное удлинение стержня  $\Delta l_{\Sigma} = \alpha \Delta T l - \frac{Rl}{EF} = 0$ , откуда  $R = \alpha \Delta T E F$ . Приравниваем  $R$  его критическому значению:  $\alpha \Delta T_{\text{кр}} E F = \frac{\pi^2 E J_z}{l^2}$ , здесь  $\Delta T_{\text{кр}} = T_{\text{кр}} - T_0$ , откуда  $T_{\text{кр}} = T_0 + \frac{\pi^2 J_z}{\alpha F l^2}$ .

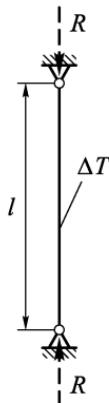


Рис. 3.12.2

**3.12.3.** Дифференциальное уравнение упругой линии: на первом участке (см. рисунок)

$$v''_I + k_I^2 v_I = 0, \quad k_I^2 = P_{\text{кр}}/EJ;$$

на втором участке

$$v''_{II} + k_{II}^2 v_{II} = 0, \quad k_{II}^2 = P_{\text{кр}}/4EJ.$$

Общими решениями этих уравнений будут:

$$v_I = C_1 \sin 2k_I x + C_2 \cos 2k_I x;$$

$$v_{II} = C_3 \sin k_{II} x + C_4 \cos k_{II} x.$$

Запишем граничные условия (см. рисунок):

$$v_I(0) = 0, \quad v'_{II}(l) = 0,$$

$$v_I\left(\frac{l}{2}\right) = v_{II}\left(\frac{l}{2}\right), \quad v'_I\left(\frac{l}{2}\right) = v'_{II}\left(\frac{l}{2}\right).$$

Подставляя функции  $v_I, v_{II}, v'_I, v'_{II}$  в эти условия, получаем систему трех уравнений относительно  $C_1, C_3, C_4$  ( $C_2 = 0$ )

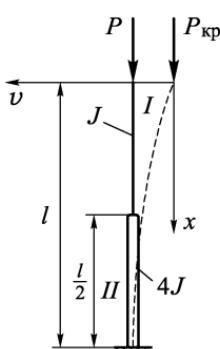


Рис. 3.12.3

$$C_3 \cos k_{II}l - C_4 \sin k_{II}l = 0,$$

$$C_1 \sin k_{II}l - C_3 \sin \frac{k_{II}l}{2} - C_4 \cos \frac{k_{II}l}{2} = 0,$$

$$C_1 2 \cos k_{II}l - C_3 \cos \frac{k_{II}l}{2} + C_4 \sin \frac{k_{II}l}{2} = 0.$$

Поскольку  $C_1, C_3$  и  $C_4$  одновременно не могут быть равны нулю (так как прогибы отличны от нуля), система относительно  $C_1, C_3, C_4$  должна иметь ненулевое решение, для чего необходимо, чтобы определитель этой системы был равен нулю

$$\begin{vmatrix} 0 & \cos k_{II}l & -\sin k_{II}l \\ \sin k_{II}l & -\sin \frac{k_{II}l}{2} & -\cos \frac{k_{II}l}{2} \\ 2 \cos k_{II}l & -\cos \frac{k_{II}l}{2} & \sin \frac{k_{II}l}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладывая определитель по элементам первого столбца и применяя затем формулы для синуса и косинуса разности двух аргументов, имеем

$$\sin k_{II}l \cdot \sin \frac{k_{II}l}{2} - 2 \cos k_{II}l \cdot \cos \frac{k_{II}l}{2} = 0.$$

После несложных преобразований получаем следующее уравнение:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{k_{II}l}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{откуда} \quad \frac{k_{II}l}{2} = 0,61, \quad k_{II}^2 = \frac{(1,22)^2}{l^2}, \quad \text{но}$$

$$k_{II}^2 = \frac{P_{kp}}{4EJ}, \quad \text{откуда} \quad P_{kp} = 5,96 \frac{EJ}{l^2}.$$

### 3.12.4. Границные условия (см. рисунок)

$$v(0) = v'(0) = v(l) = v'(l) = 0.$$

Этим граничным условиям удовлетворяет многочлен  $v(x) = Ax^2(x-l)^2$  и его производная  $v'(x) = 2Ax(x-l)(2x-l)$ . Вторая производная:  $v''(x) = 2A(6x^2 - 6lx + l^2)$ . Согласно энергетическому методу

$$P_{kp} = \frac{\int_0^l EJ_z(v'')^2 dx}{\int_0^l (v')^2 dx}.$$

Рис. 3.12.4

Подставляя  $v'(x)$  и  $v''(x)$  в формулу для  $P_{kp}$  (12.3.8), получаем  $P_{kp} = 42 \frac{EJ_z}{l^2}$ . Сравнивая это выражение с формулой Эйлера (12.2.29), находим  $\mu = \pi \sqrt{\frac{1}{42}} \approx 0,485$ . Как известно, точное решение дает  $\mu = 0,5$ , а значит, ошибка чуть более 3 %.

**3.12.5.** Граничные условия для стойки (см. рисунок):

$$v(0) = v''(0) = v\left(\frac{l}{2}\right) = v''(l) = 0.$$

Функцию прогибов задаем полиномом 4-й степени:  $v = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ , откуда

$$\begin{aligned} v' &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3, \\ v'' &= 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2. \end{aligned}$$

Подставляя  $v'$  и  $v''$  в граничные условия, получаем  $a_0 = a_2 = 8a_1 + 2a_3l^2 + a_4l^3 = 0$ ,  $a_3 + 2a_4l = 0$ . Выражая  $a_1$  и  $a_3$  через  $a_4$ , имеем

$$a_1 = \frac{3}{8}a_4l^3, \quad a_3 = -2a_4l.$$

Тогда функции  $v'$  и  $v''$  примут вид

$$\begin{aligned} v' &= a_4 \left( \frac{3}{8}l^3 - 6lx^2 + 4x^3 \right), \\ v'' &= 12a_4(x^2 - lx). \end{aligned}$$

Подставляя  $v'$  и  $v''$  в формулу (12.3.8), получаем

$$P_{kp} = 5,48 \frac{EJ_z}{l^2}.$$

Сравнивая последнее выражение с формулой Эйлера (12.2.29), находим

$$\mu = \pi \sqrt{\frac{1}{5,48}} \approx 1,34.$$

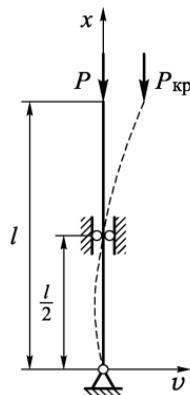


Рис. 3.12.5

**3.12.6.** Записывая уравнение моментов относительно точки  $A$  для отсеченной части балки (см. рисунок), имеем

$$M_z = -Px - Sv(x).$$

При принятых на рисунке положительных направлениях  $M_z$  и  $v$  уравнение упругой линии балки (12.7.2) будет иметь вид  $EJ_z v''(x) = M_z$ , или после подстановки  $M_z$ :

$$EJ_z v''(x) = -Px - Sv(x).$$

Обозначив  $k^2 = S/EJ_z$ , получаем

$$v''(x) + k^2 v(x) = -\frac{P}{EJ_z}x.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$v(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - \frac{P}{k^2 E J_z} x.$$

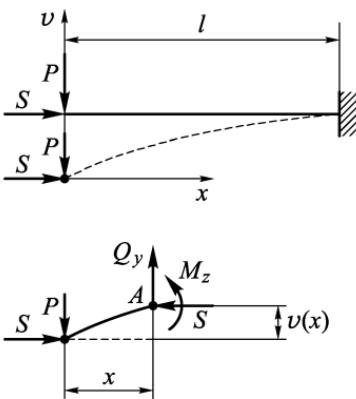


Рис. 3.12.6

Из граничных условий  $v(0) = v'(l) = 0$  находим

$$C_2 = 0, \quad C_1 = \frac{P}{k^3 E J_z} \frac{1}{\cos kl}.$$

Тогда  $v(x) = \frac{P}{k^3 E J_z} \left( \frac{\sin kx}{\cos kl} - kx \right)$ .

Найдем максимальный прогиб  $v_{\max} = v(l) = \frac{Pl}{S} \left( \frac{\tg kl}{kl} - 1 \right)$ , здесь учтено, что  $k^2 = \frac{S}{E J_z}$ .

Максимальный изгибающий момент будет в заделке, т.е.

$$M_{z \max} = M_z(l) = -Pl - Sv(l) = -Pl \frac{\tg kl}{kl}.$$

**3.12.7.** Приближенное значение прогиба определяем по формуле (12.7.16)

$$v = \frac{v_n}{1 - \frac{S}{S_{kp}}}.$$

Вычисляем  $S_{kp}$ :

$$S_{kp} = \frac{\pi^2 E J_z}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E \frac{bh^3}{12}}{(1 \cdot l)^2} = 44,4 \text{ кН.}$$

Очевидно, максимальный изгибающий момент, а значит, и максимальное напряжение будут в середине балки (см. рисунок), где прогиб  $v$  и изгиба-

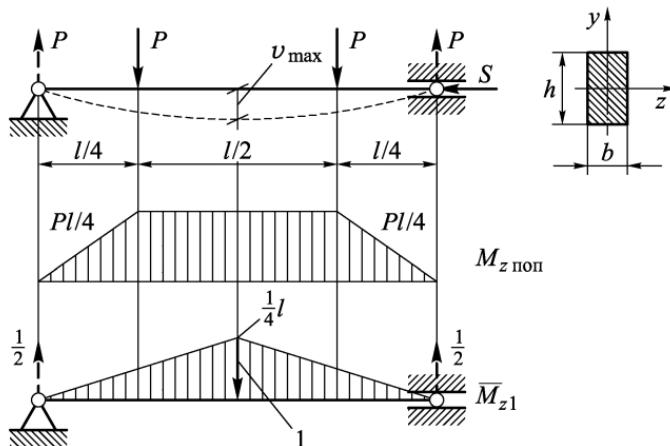


Рис. 3.12.7

ющий момент от поперечной нагрузки  $M_z \text{ поп}$  максимальны. Для определения  $v_{\max}$  вычислим  $v_{n \max}$ , для чего построим эпюру  $\bar{M}_{z1}$ . Перемножая по

способу Верещагина эпюры  $M_z$  поп и  $\bar{M}_{z1}$ , получаем

$$v_{\text{поп}} = \frac{11}{384} \frac{Pl^3}{EJ_z} = 3,18 \text{ мм.}$$

Тогда

$$v_{\text{max}} = \frac{v_{\text{поп}}}{1 - \frac{S}{S_{\text{кр}}}} = 3,33 \text{ мм.}$$

Максимальными напряжениями будут напряжения сжатия (см. формулу (12.7.20))

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{S}{F} + \frac{\frac{Pl}{4} + Sv_{\text{max}}}{W_z},$$

где  $F = bh$ ,  $W_z = \frac{bh^2}{6}$ .

Вычисляя, получаем  $\sigma_{\text{max}} = 94,5 \text{ МПа.}$

Для определения запаса прочности воспользуемся выражением

$$\sigma_t = \frac{nS}{F} + \frac{\frac{nPl}{4} + nS \frac{nv_{\text{поп}}}{1 - nS/S_{\text{кр}}}}{W_z},$$

откуда, решая квадратное уравнение относительно  $n$ , получаем

$$n = 2,37.$$

## Глава 13

**B.13.1.** См. п. 13.1.1, рис. 13.1, 13.3.

**B.13.2.** См. п. 13.1.3.

**B.11.3.** См. п. 13.2.1, соотношения (13.2.1), (13.2.2), пример 13.1.

**B.13.4.** Ферма становится кинематически изменяемой (механизмом).

См. п. 13.2.1, пример 13.1.

**B.13.5.** См. п. 13.2.3.

**B.13.6.** На две равные по площадям части. См. п. 13.2.3, формулу (13.2.4).

**B.13.7.** См. п. 13.2.4.

**B.13.8.** См. п. 13.3.1, пример 13.3. См. соотношения (13.3.2), (13.3.3) и рис. 13.15 в п. 13.3.1.

**B.13.9.** См. п. 13.3.1 и пример 13.3.

**B.13.10.** См. п. 13.3.2, примеры 13.3, 13.4.

**3.13.1.** Предельное значение интенсивности распределенной нагрузки  $q_{\text{пред}}$  будет достигнуто, когда максимальный изгибающий момент в балке станет равным  $M_{\text{пред}}$  (в этом сечении балки образуется пластический шарнир). Из эпюры изгибающих моментов (см. рисунок) имеем:  $\frac{25}{32}q_{\text{пред}}l^2 =$

$= M_{\text{пред}}$ , откуда  $q_{\text{пред}} = \frac{32M_{\text{пред}}}{25l^2}$ .  $M_{\text{пред}}$  для балки заданного сечения определим по формуле (13.2.4)

$$M_{\text{пред}} = \sigma_t(|S_p| + |S_c|).$$

Статические моменты  $|S_p|$  и  $|S_c|$  вычисляем относительно оси  $z_{пл}$ , которая делит сечение на две равные по площадям части:

$$|S_p| = 5a^2 \frac{1}{2}a = \frac{5}{2}a^3,$$

$$|S_c| = 2a^2 \frac{1}{2}a + 3a^2 \frac{3}{2}a = \frac{23}{2}a^3.$$

Тогда  $M_{пред} = 14\sigma_t a^3$ , а

$$q_{пред} = \frac{32 \cdot 14\sigma_t a^3}{25l^2} \approx 17,9 \frac{\sigma_t a^3}{l^2}.$$

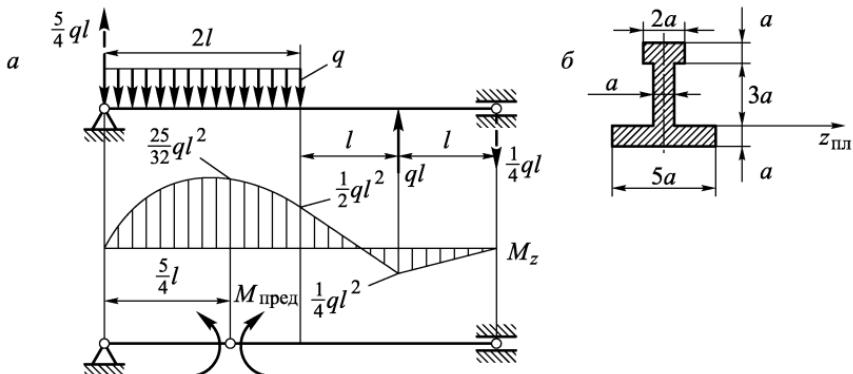


Рис. 3.13.1

**3.13.2. Статический метод.** Построим эквивалентную систему, заменив лишнюю связь, например, стержень 2, действующим в нем усилием  $X$  (рис. 3.13.2 а). Тогда напряженное состояние основной системы можно разбить на два: грузовое состояние, вызванное основной нагрузкой (рис. 3.13.2 б), и состояние самонапряжения под действием усилия  $X$  (рис. 3.13.2 в). Усилия в стержнях в грузовом состоянии равны:  $N_1^0 = -P$ ,

$N_2^0 = 0$ ,  $N_3^0 = 2P$ , а в состоянии самонапряжения  $N_1^1 = -\frac{1}{2}X$ ,  $N_2^1 = X$ ,

$N_3^1 = -\frac{1}{2}X$ . Тогда усилия в стержнях исходной системы будут  $N_1 = N_1^0 + N_1^1 = -P - \frac{1}{2}X$ ,  $N_2 = N_2^0 + N_2^1 = X$ ,  $N_3 = N_3^0 + N_3^1 = 2P - \frac{1}{2}X$ .

Так как стержни выполнены из идеально упругопластичного материала, усилия в них по абсолютной величине не могут превышать предельного усилия  $N_{пред} = \sigma_t F$ , т.е. должны выполняться следующие неравенства:

- а)  $-N_{пред} \leq N_1 = -P - \frac{1}{2}X \leq N_{пред}$ ,
- б)  $-N_{пред} \leq N_2 = X \leq N_{пред}$ , (13.3.2)
- в)  $-N_{пред} \leq N_3 = 2P - \frac{1}{2}X \leq N_{пред}$ .

Построим область допустимых состояний (рис. 3.13.2 г). На плоскости  $PX$  каждое из этих неравенств выделяет полосу, границами которой являются линии, определяемые соответствующими неравенствами. Например, неравенству  $a$  соответствует полоса, ограниченная линиями

$$-N_{\text{пред}} = -P - \frac{1}{2}X \quad \text{и} \quad -P - \frac{1}{2}X = N_{\text{пред}}.$$

На рис. 3.13.2 г это линии  $a_1$  и  $a_2$ . Неравенству б) соответствуют линии  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , а неравенству в) — линии  $b_1$  и  $b_2$ .

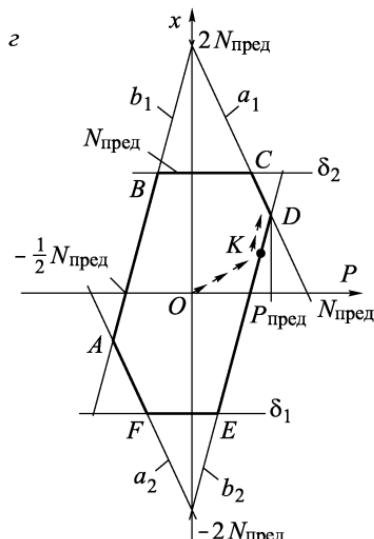
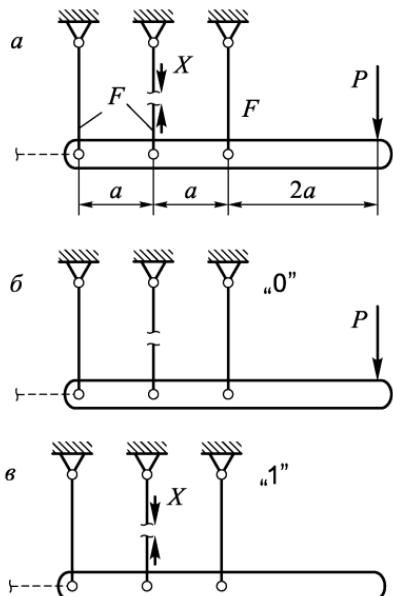


Рис. 3.13.2 а–г

Проследим теперь на плоскости  $PX$  путь, соответствующий нагрузкению системы. Сначала деформации системы упругие и поэтому усилия в ее стержнях, в том числе и усилие  $X$ , растут пропорционально нагрузке. Это соответствует продвижению по линии  $OK$  (рис. 3.13.2 г). В точке  $K$  в одном из стержней наступает пластическая деформация (в нашем случае это третий стержень, так как точка лежит на линии  $b_2$ ). С этого момента приросте силы  $P$  усилия в этом стержне остаются постоянными и равными предельному, а в остальных стержнях они возрастают уже не пропорционально нагрузке. Происходит движение по линии  $KD$ , пока не будет достигнута точка  $D$ . Дальнейшее повышение нагрузки  $P$  становится невозможным, т.е. достигается ее предельное значение. Легко убедиться, что точке  $D$  соответствует предельная нагрузка  $P_{\text{пред}} = \frac{2}{3}N_{\text{пред}}$ .

б) Кинематический метод. Рассматриваемая система станет механизмом, если текучесть наступит в двух ее стержнях. Поэтому для нее возможны три различных пластических механизма, показанные

на рис. 3.13.2 *д*, *е*, *жс*. Эти механизмы отличаются друг от друга парами стержней, в которых наступила текучесть. Величину предельной нагрузки

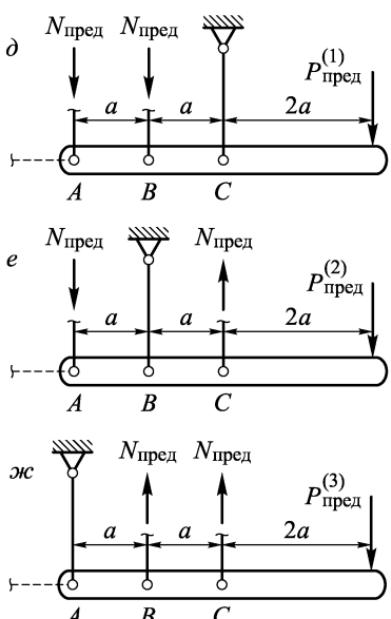


Рис. 3.13.2 *д*, *е*, *жс*

$P_{\text{пред}}^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) в каждом из трех механизмов легко определить из условия равенства нулю моментов относительно точек *C*, *B* и *A* соответственно. Например, для первого механизма

$$\sum M_c = 0 : N_{\text{пред}} 2a + N_{\text{пред}} a - P_{\text{пред}}^{(1)} 2a = 0 \rightarrow P_{\text{пред}}^{(1)} = \frac{3}{2} N_{\text{пред}}.$$

Точно так же получим, что  $P_{\text{пред}}^{(2)} = \frac{2}{3} N_{\text{пред}}$  и  $P_{\text{пред}}^{(3)} = \frac{3}{4} N_{\text{пред}}$ . Очевидно, что реальная предельная нагрузка  $P_{\text{пред}} \geq \frac{2}{3} N_{\text{пред}} = \frac{2}{3} \sigma_t F$ .

**3.13.3.** а) Статический метод. Вариант эквивалентной системы, грузовое состояние и состояние самонапряжения с соответствующими им эпюрами изгибающих моментов показаны на рис. 3.13.3 *а*, *б* и *в*. Как видно из эпюар, наибольшие по абсолютной величине суммарные изгибающие моменты действуют в сечениях приложения сил  $P$  и  $X$ . Эти моменты, равные соответственно  $\frac{2}{3} Pl - \frac{1}{3} Xl$  и  $\frac{1}{3} Pl - \frac{2}{3} Xl$ , не должны превышать предельного момента  $M_{\text{пред}}$ , а значит, должны выполняться следующие неравенства:

$$-M_{\text{пред}} \leq \frac{2}{3} Pl - \frac{1}{3} Xl \leq M_{\text{пред}},$$

$$-M_{\text{пред}} \leq \frac{1}{3} Pl - \frac{2}{3} Xl \leq M_{\text{пред}}.$$

Построенная по этим соотношениям в координатах  $Pl$ ,  $Xl$  область допустимых состояний *ABCD* показана на рис. 3.13.3 *г*. Из рисунка ясно, что предельная нагрузка определяется абсциссой точки *C*, равной  $3M_{\text{пред}}$ , т.е.  $P_{\text{пред}}l = 3M_{\text{пред}}$ , откуда предельная нагрузка  $P_{\text{пред}} = \frac{3M_{\text{пред}}}{l}$ , или, учи-

тывая, что для балки сечением  $B \times H$   $M_{\text{пред}} = \frac{\sigma_t BH^2}{4}$ , получаем  $P_{\text{пред}} = \frac{3 \sigma_t BH^2}{4l}$ .

б) Кинематический метод (см. рис. 3.13.3 *д*). Балка станет кинематически изменяющейся, когда в ее сечениях *B* и *C* образуются пластические шарниры (то, что это произойдет именно в сечениях *B* и *C*,

вытекает из анализа эпюры изгибающих моментов при упругом деформировании балки, показанной на рисунке пунктиром). Из рисунка имеем

$$\sum M_C \text{ (справа)} = 0, \quad Rl - M_{\text{пред}} = 0, \quad R = \frac{M_{\text{пред}}}{l},$$

$$\sum M_B \text{ (справа)} = 0, \quad R2l - P_{\text{пред}}l + M_{\text{пред}} = 0.$$

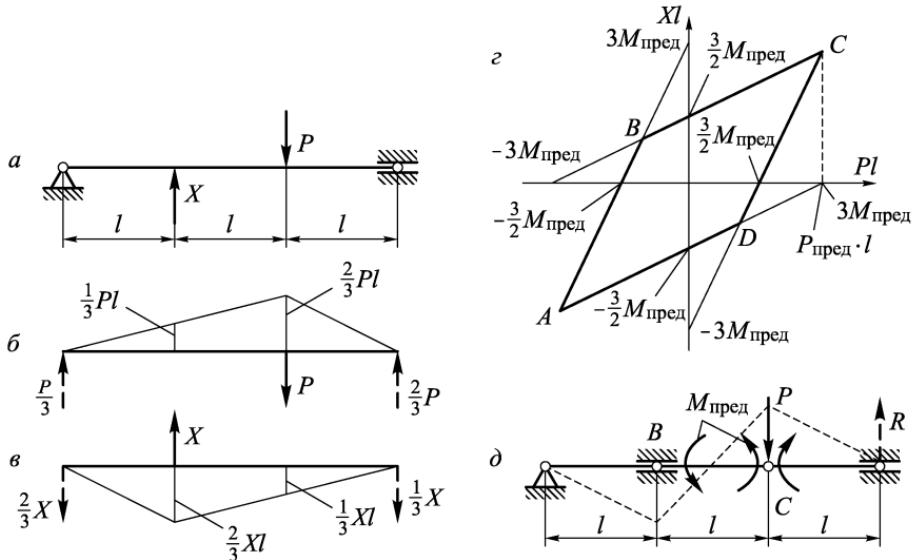


Рис. 3.13.3

Отсюда  $P_{\text{пред}} = 2R + \frac{M_{\text{пред}}}{l}$ , или, подставляя  $R$  из первого уравнения, получаем, что реальная предельная нагрузка должна быть не меньше  $\frac{3M_{\text{пред}}}{l}$ , т.е.  $P_{\text{пред}} \geq \frac{3M_{\text{пред}}}{l} = \frac{3\sigma_{\text{T}}BH^2}{4l}$ .

## Глава 14

**B.14.1.** См. п. 14.1.1.

**B.14.2.** См. п. 14.1.1.

**B.14.3.** См. п. 14.1.1.

**B.14.4.** См. п. 14.1.1.

**B.14.5.** См. п. 14.2.2, соотношение (14.2.2).

**B.14.6.** См. п. 14.2.3, соотношение (14.2.7).

**B.14.7.** См. п. 14.2.3.

**B.14.8.** См. п. 14.2.4, соотношения (14.2.12), (14.2.14).

**B.14.9.** См. п. 14.3.3, соотношения (14.3.2), (14.3.3), (14.3.4), (14.3.5), пример 14.1.

**B.14.10.** См. п. 14.4.1, соотношения (14.4.1).

**B.14.11.** См. пп. 14.4.1, 14.4.2, соотношения (14.4.3), (14.4.4), (14.4.5).  
 $K_{\text{дин}} = 2$ .

**B.14.12.**  $\sigma_{\text{дин}} = K_{\text{дин}} \sigma_{\text{ст}}$ . См. п. 14.4.3, соотношение (14.4.6).

**З.14.1.** Расчетная схема показана на рис. З.14.1 *a*, где  $q = \rho F \omega^2 l$ , эпюра  $M_z$  — на рис. З.14.1 *б*.

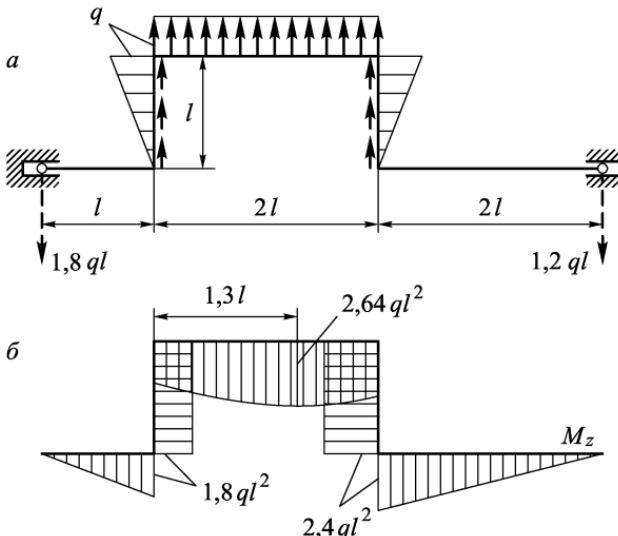


Рис. З.14.1

Максимальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z \max}}{W_z} = \frac{2,64ql^2}{0,1d^3} = 26,4 \frac{\rho F \omega^2 l^3}{d^3}.$$

Учитывая, что  $F = \frac{\pi d^2}{4}$ , а  $\omega^2 = \left(\frac{\pi n}{30}\right)^2$ , где  $n$  — число оборотов рамы в минуту, имеем

$$\sigma_{\max} = 7,33 \cdot 10^{-3} \frac{\rho \pi^3 l^3}{d} n^2.$$

Допускаемыми оборотами для рамы будут обороты, при которых максимальное напряжение достигнет допускаемого значения  $[\sigma]$ , т.е.  $7,33 \times 10^{-3} \frac{\rho \pi^3 l^3}{d} n_{\text{доп}}^2 = [\sigma]$ , откуда  $n_{\text{доп}} = 317$  об/мин.

**З.14.2.** Действующая на элемент с массой  $dm = \rho F R d\varphi$  центробежная сила равна (рис. З.14.2 *a*):

$$dP_j = dm \omega^2 R \sin \varphi = \rho F \omega^2 R^2 \sin \varphi d\varphi.$$

Приходящаяся на единицу длины элемента погонная нагрузка

$$q(\varphi) = \frac{dP_j}{R d\varphi} = \rho F \omega^2 R \sin \varphi$$

или

$$q(\varphi) = q \sin \varphi,$$

где  $q = \rho F \omega^2 R$  — максимальная погонная нагрузка.

Тогда расчетная схема для кольца примет следующий вид (рис. 3.14.2 б). Как видим, эта рама три раза статически неопределенна, но выбирая соот-

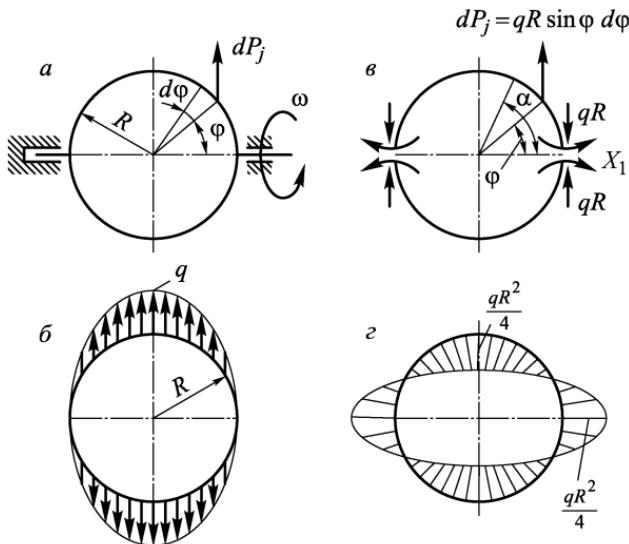


Рис. 3.14.2

ветствующим образом эквивалентную систему (см. пример 10.8), приходим к следующему ее виду (рис. 3.14.2 б).  $X_1$  найдем из канонического уравнения  $\delta_{10} + \delta_{11}X_1 = 0$ . При вычислении  $\delta_{10}$  и  $\delta_{11}$  воспользуемся интегралом Мора, для чего запишем функции  $M_0(\alpha)$  и  $\overline{M}_1(\alpha)$ :

$$\begin{aligned} M_0(\alpha) &= \int_0^\alpha dP_j(R \cos \varphi - R \cos \alpha) - qR(R - R \cos \alpha) = \\ &= qR^2 \left( \cos^2 \alpha - \frac{1}{4} \cos 2\alpha - \frac{3}{4} \right), \\ \overline{M}_1 &= 1. \end{aligned}$$

Тогда

$$\delta_{10} = \frac{1}{EJ_z} \int_0^\pi M_0 \overline{M}_1 R d\alpha = \frac{qR^3}{EJ_z} \int_0^\pi \left( \cos^2 \alpha - \frac{1}{4} \cos 2\alpha - \frac{3}{4} \right) d\alpha = -\frac{\pi qR^3}{4EJ_z},$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ_z} \int_0^\pi 1 \cdot 1 \cdot R d\alpha = \frac{\pi R}{EJ_z},$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{qR^2}{4}.$$

Суммарный изгибающий момент

$$M_{\Sigma}(\alpha) = M_0(\alpha) + X_1 = qR^2 \left( \cos^2 \alpha - \frac{1}{4} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \right),$$

$$M_{\Sigma}(0) = \frac{qR^2}{4}, \quad M_{\Sigma}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{qR^2}{4}.$$

На рис. 3.14.2 г показана суммарная эпюра изгибающих моментов.

**Задача 3.14.3.**  $\sigma_{\text{дин (max)}} = K_{\text{дин}} \sigma_{\text{ст (max)}}$  (см. формулу (14.4.6)),  $\delta_{\text{дин}} = K_{\text{дин}} \delta_{\text{ст}}$  (см. формулу (14.4.4)). Построим эпюру изгибающих моментов при стати-

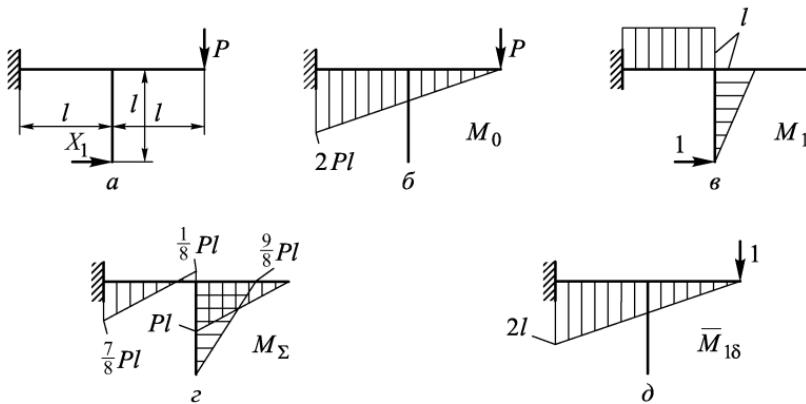


Рис. 3.14.3

ческом нагружении рамы силой  $P = Mg$ . Рама один раз статически неопределенна. Эквивалентная система показана на рис. 3.14.3 а.  $X_1$  определим из канонического уравнения

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0.$$

Эпюры  $M_0$  и  $\bar{M}_1$  для вычисления  $\delta_{10}$  и  $\delta_{11}$  показаны на рис. 3.14.3 б и в. Применяя способ Верещагина, получим

$$\delta_{10} = -\frac{3}{2} \frac{Pl^3}{EJ_z}, \quad \delta_{11} = \frac{4}{3} \frac{l^3}{EJ_z}.$$

Тогда  $X_1 = \frac{9}{8}P$ .

Суммарная эпюра  $M_{\Sigma}$  у показана на рис. 3.14.3 г, откуда

$$M_{z \text{ max}} = \frac{9}{8} Pl.$$

Максимальное статическое напряжение

$$\sigma_{\text{ст (max)}} = \frac{M_{z \text{ max}}}{W_z} = \frac{9Pl}{8W_z}.$$

Для вычисления  $\delta_{\text{ст}}$  построим в той же эквивалентной системе эпюру  $\bar{M}_{1\delta}$  (рис. 3.14.3 л), приложив единичную силу в точке удара и в направлении удара. Перемножая  $M_{\Sigma}$  и  $\bar{M}_{1\delta}$ , находим

$$\delta_{\text{ст}} = \frac{47}{48} \frac{Pl^3}{EJ_z}.$$

Для вычисления  $K_{\text{дин}}$  воспользуемся формулой (14.4.3)

$$K_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{\text{ст}}}}.$$

Подставляя  $\delta_{\text{ст}}$ , имеем

$$K_{\text{дин}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{96hEJ_z}{47Pl^3}}.$$

Тогда

$$\sigma_{\text{дин (max)}} = \frac{9}{8} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{96hEJ_z}{47Mgl^3}} \right) \frac{Mgl}{W_z},$$

$$\delta_{\text{дин}} = \frac{47}{48} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{96hEJ_z}{47Mgl^3}} \right) \frac{Mgl^3}{EJ_z}.$$

**3.14.4.** Кинетическая энергия системы в момент сразу после удара с учетом симметрии ее деформации будет равна (см. выражение (14.3.2)):

$$T = \frac{1}{2}MV_1^2 + 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{1}{2}m dx V^2(x) = \frac{1}{2}MV_1^2 + \int_0^{\frac{l}{2}} m dx [V_1 f(x)]^2.$$

Условие для определения приведенной к точке удара массы будет иметь вид

$$\frac{1}{2}M_{\text{пр}}V_1^2 = \int_0^{\frac{l}{2}} m dx [V_1 f(x)]^2,$$

откуда

$$M_{\text{пр}} = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} m f^2(x) dx.$$

Представим  $M_{\text{пр}}$  в форме  $M_{\text{пр}} = K_{\text{пр}} M_c$ , откуда, учитывая, что  $M_c = \int_0^l m dx$  и  $m = \text{const}$ , получаем

$$K_{\text{пр}} = \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} f^2(x) dx,$$

где  $f(x) = \frac{v_{\text{ст}}(x)}{\delta_1}$ .

Для нахождения функции статического прогиба  $v_{\text{ст}}(x)$  от единичной силы, приложенной в точке удара, запишем дифференциальное уравнение упругой линии для половины балки (см. рисунок):

$$EJ_z v''_{\text{ст}} = M_z, \quad M_z = \frac{1}{2}x, \quad EJ_z v''_{\text{ст}} = \frac{1}{2}x.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$EJ_z v'_{\text{ст}} = \frac{1}{4}x^2 + C_1,$$

$$EJ_z v_{\text{ст}} = \frac{1}{12}x^3 + C_1 x + C_2.$$

Из граничных условий  $v_{ct}(0) = 0$ ,  $v'_{ct}\left(\frac{l}{2}\right) = 0$  имеем

$$C_2 = 0, \quad C_1 = -\frac{l^2}{16}$$

Тогда, имея в виду, что  $\delta_1 = v_{ct}\left(\frac{l}{2}\right)$ , получаем

$$f(x) = \frac{4}{l^3} \left( x^3 - \frac{3}{4} l^2 x \right).$$

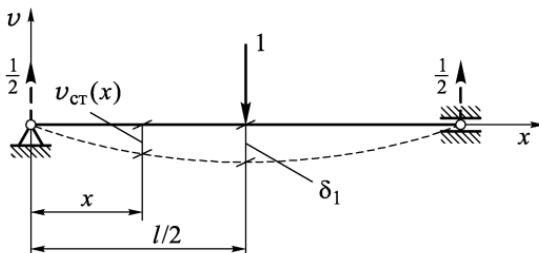


Рис. 3.14.4

Подставляя  $f(x)$  в выражение для  $K_{np}$ , получаем

$$K_{np} = \frac{17}{35} \approx 0,486,$$

$$M_{np} = 0,486 M_c.$$

## Глава 15

**B.15.1.** См. п. 15.1.1.

**B.15.2.** См.пп. 15.1.1, 15.1.2.

**B.15.3.** См. п. 15.2.1.

**B.15.4.** См. п. 15.2.1.

**B.15.5.** См. п. 15.2.2.

**B.15.6.** См. п. 15.2.2.

**B.15.7.** См. п. 15.2.3.

**B.15.8.** См. п. 15.2.3.

**B.15.9.** См. п. 15.3.1.

**B.15.10.** См. п. 15.3.2.

**B.15.11.** См. п. 15.3.3.

**B.15.12.** См. п. 15.4.1.

**B.15.13.** См. п. 15.4.2.

**B.15.14.** См. п. 15.4.2.

**B.15.15.** См. п. 15.4.3.

**B.15.16.** См. п. 15.4.4.

**B.15.17.** См. п. 15.4.4.

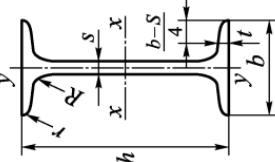
**B.15.18.** См. п. 15.4.5.

**B.15.19.** См. п. 15.4.5.

**B.15.20.** См. п. 15.4.5.

**B.15.21.** См. п. 15.4.5.

## СОРТАМЕНТ ПРОКАТНОЙ СТАЛИ



## Балки двутавровые (ГОСТ 8239-72\*)

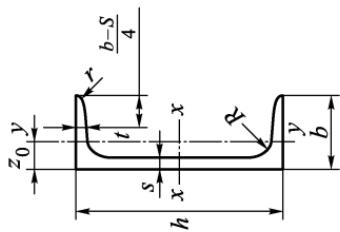
 $J$  – момент инерции, $W$  – момент сопротивления, $S$  – статический момент полусечения, $i$  – радиус инерции.

Таблица 1

Номер балки	$h$	$b$	$s$	$t$	$R$	$r$	Площадь сечения, $\text{см}^2$	Н	Справочные величины для осей						
									$I_x, \text{см}^4$	$W_x, \text{см}^3$	$x - x$	$S_x, \text{см}^3$	$I_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$	$y - y$
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	94,6	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	115	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	137	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	159	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	184	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	210	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	240	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	273	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	315	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	365	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	422	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	486	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	570	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03

Таблица 2

## Швеллеры (ГОСТ 8240-72\*)



Номер швел- лера	$h$	$b$	$s$	$t$	$R$	$r$	Площадь сече- ния, $\text{см}^2$	Вес 1 м, Н	Справочные величины для осей						$Z_0, \text{ см}$	
									$I_x, \text{ см}^4$	$W_x, \text{ см}^3$	$i_x, \text{ см}$	$S_x, \text{ см}^3$	$I_y, \text{ см}^4$	$W_y, \text{ см}^3$	$i_y, \text{ см}$	
5	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	48,4	22,8	9,1	1,92	2,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	59,0	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,080	1,24
8	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	70,5	89,4	22,4	3,16	13,30	12,80	4,75	1,190	1,31
10	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,90	85,9	174,0	34,8	3,99	20,40	20,40	6,46	1,370	1,44
12	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,30	104	304,0	50,6	4,78	29,60	31,20	8,52	1,530	1,54
14	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,60	123	491,0	70,2	5,60	40,80	45,40	11,00	1,700	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	8,0	3,0	17,00	133	545,0	77,8	5,66	45,10	57,50	13,30	1,840	1,87
16	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,10	142	747,0	93,4	6,42	54,10	63,30	13,80	1,870	1,80

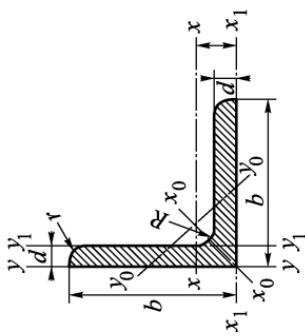
## П р о д о л ж е н и е т а б л . 2

Номер швел- лера	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>R</i>	<i>r</i>	Площадь сече- ния, см <sup>2</sup>	1 м, Вес	Справочные величины для осей						<i>Z<sub>0</sub></i> , см	
									<i>I<sub>x</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>W<sub>x</sub></i> , см <sup>3</sup>	<i>i<sub>x</sub></i> , см	<i>S<sub>x</sub></i> , см <sup>3</sup>	<i>I<sub>y</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>W<sub>y</sub></i> , см <sup>3</sup>	<i>i<sub>y</sub></i> , см	
16a	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,50	153	823,0	103,0	6,49	59,40	78,80	16,40	2,010	2,00
18	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,70	163	1090,0	121,0	7,24	69,80	86,00	17,00	2,040	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,20	174	1190,0	132,0	7,32	76,10	105,00	20,00	2,180	2,13
20	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,40	184	1520,0	152,0	8,07	87,80	113,00	20,50	2,200	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	9,5	4,0	25,20	198	1670,0	167,0	8,15	95,90	139,00	24,20	2,350	2,28
22	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,70	210	2110,0	192,0	8,89	110,00	154,00	25,10	2,370	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	10,0	4,0	28,80	226	2330,0	212,0	8,99	121,00	187,00	30,00	2,550	2,46
24	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,60	240	2900,0	242,0	9,73	139,00	208,00	31,60	2,600	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	10,5	4,0	32,90	258	3180,0	265,0	9,84	151,00	254,00	37,20	2,780	2,67
27	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,20	277	4160,0	308,0	10,90	178,00	262,00	37,30	2,730	2,47
30	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,50	318	5810,0	387,0	12,00	224,00	327,00	43,60	2,840	2,52
33	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,50	365	7980,0	484,0	13,10	281,00	410,00	51,80	2,970	2,59
36	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,40	419	10820,0	601,0	14,20	350,00	513,00	61,70	3,100	2,68
40	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,50	483	15220,0	761,0	15,70	444,00	642,00	73,40	3,230	2,75

Таблица 3

## Уголки равнополочные (ГОСТ 8509-72\*)

Но- мер про- филя	$b$	$d$	$R$	$r$	Площадь сечения, $\text{см}^2$	Справочные величины для осей						Вес 1 м, кг	
						$x - x$		$x_0 - x_0$		$y_0 - y_0$			
						$I_x$ , $\text{см}^4$	$V_x$ , $\text{см}^3$	$i_x$ , $\text{см}$	$I_{x_0 \text{ max}}$ , $\text{см}^4$	$W_{x_0}$ , $\text{см}^3$	$i_{x_0 \text{ max}}$ , $\text{см}$		
2	20	3	3,5	1,2	1,13	0,40	0,28	0,59	0,63	0,45	0,75	0,17	
	4	3,5	1,2	1,46	0,50	0,37	0,58	0,78	0,57	0,73	0,22	0,16	
2,5	3	3,5	1,2	1,43	0,81	0,46	0,75	1,29	0,73	0,95	0,34	0,19	
2,8	28	3	4,0	1,3	1,62	1,16	0,58	0,85	1,84	0,92	1,07	0,48	
3,2	32	3	4,5	1,5	1,86	1,77	0,77	0,97	2,80	1,22	1,23	0,74	
	4	4,5	1,5	2,43	2,26	1,0	0,96	3,58	1,58	1,21	0,94	0,42	
3,6	36	3	4,5	1,5	2,10	2,56	0,98	1,10	4,06	1,56	1,39	1,06	
	4	4,5	1,5	2,75	3,29	1,28	1,09	5,21	2,03	1,38	1,36	0,53	
4	40	4	5,0	1,7	2,35	3,55	1,22	1,23	5,63	1,93	1,55	1,47	
	5	5,0	1,7	3,08	4,58	1,60	1,22	7,26	2,53	1,53	1,90	0,66	
	5	5,0	1,7	3,79	5,53	1,95	1,21	8,75	3,09	1,52	2,30	0,81	



Но- мер про- филя	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>R</i>	<i>r</i>	Площадь сече- ния, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей				<i>I<sub>x</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>W<sub>x</sub></i> , см <sup>3</sup>	<i>i<sub>x</sub></i> , см	<i>I<sub>x0</sub> max,</i> см <sup>4</sup>	<i>W<sub>x0</sub>,</i> см <sup>3</sup>	<i>i<sub>x0</sub> max.,</i> см	<i>I<sub>y0</sub> min.,</i> см <sup>4</sup>	<i>W<sub>y0</sub>,</i> см <sup>3</sup>	<i>i<sub>y0</sub> min.,</i> см	<i>x</i> <sub>1</sub> — <i>x</i> <sub>1</sub> <i>I<sub>x1</sub>,</i> см <sup>4</sup>	<i>i<sub>x0</sub>,</i> см	<i>I<sub>x1</sub>,</i> см <sup>4</sup>	<i>z<sub>0</sub>,</i> см	Вес 1 м, Н
						<i>x</i> — <i>x</i>	<i>x</i> <sub>0</sub> — <i>x</i> <sub>0</sub>	<i>y</i> <sub>0</sub> — <i>y</i> <sub>0</sub>	<i>x</i> <sub>1</sub> — <i>x</i> <sub>1</sub>														
4,5	45	3	5,0	1,7	2,65	5,13	1,56	1,39	8,13	2,48	1,75	1,12	0,65	0,89	9,04	1,21	20,8						
	4	5,0	1,7	3,48	6,63	2,04	1,38	10,52	3,24	1,74	2,74	0,84	0,89	12,13	1,26	27,3							
	5	5,0	1,7	4,29	8,03	2,51	1,37	12,74	3,98	1,72	3,33	1,04	0,88	15,25	1,30	33,7							
5	50	3	5,5	1,8	2,96	7,11	1,94	1,55	11,27	3,07	1,95	2,95	0,80	1,00	12,38	1,33	23,2						
	4	5,5	1,8	3,89	9,21	2,54	1,54	14,63	4,04	1,94	3,80	1,05	0,99	16,61	1,38	30,5							
	5	5	5,5	1,8	4,80	11,20	3,13	1,53	17,77	4,96	1,92	4,63	1,29	0,98	20,87	1,42	37,7						
5,6	56	4	6,0	2,0	4,38	13,10	3,21	1,73	20,79	5,10	2,18	5,41	1,33	1,11	23,28	1,52	34,4						
	5	6,0	2,0	5,41	15,97	3,96	1,72	25,36	6,29	2,16	6,59	1,63	1,10	29,25	1,57	42,5							
6,3	63	4	7,0	2,3	4,96	18,86	4,09	1,95	29,90	6,49	2,45	7,81	1,70	1,25	33,06	1,69	39,0						
	5	7,0	2,3	6,13	23,10	5,05	1,94	36,60	8,02	2,44	9,52	2,09	1,25	41,50	1,74	48,1							
	6	7,0	2,3	7,28	27,06	5,98	1,93	42,94	9,49	2,43	11,18	2,47	1,24	50,04	1,78	57,2							
	4,5	8,0	2,7	6,20	29,04	5,67	2,16	46,03	8,99	2,72	12,04	2,35	1,39	50,95	1,88	48,7							
	5	8,0	2,7	6,86	31,94	6,27	2,16	50,67	9,94	2,72	13,22	2,59	1,39	56,75	1,90	53,8							
	7	70	6	8,0	8,15	37,58	7,43	2,15	59,64	11,80	2,71	15,52	3,07	1,38	68,39	1,94	63,9						
	7	7	8,0	2,7	9,42	42,98	8,57	2,14	68,19	13,60	2,69	17,77	3,54	1,37	80,10	1,99	73,9						
	8	8,0	2,7	10,67	48,16	9,68	2,12	76,35	15,35	2,68	19,97	4,01	1,37	91,90	2,02	83,7							
	5	9,0	3,0	7,39	39,53	7,21	2,31	62,65	11,43	2,91	16,41	2,99	1,49	69,62	2,02	59,0							
	6	9,0	3,0	8,78	46,57	8,57	2,30	73,87	13,59	2,90	19,28	3,55	1,48	83,92	2,06	68,9							
	7	9,0	3,0	10,15	53,34	9,89	2,29	84,61	15,68	2,89	22,07	4,09	1,47	98,29	2,10	79,6							
	8	9,0	3,0	11,50	59,84	11,18	2,28	94,89	17,72	2,87	24,80	4,63	1,47	112,7	2,15	90,2							
	9	9,0	3,0	12,83	66,10	12,43	2,27	104,72	19,70	2,86	27,48	5,17	1,46	127,3	2,18	100,7							

## П р о д о л ж е н и е т а б л . 3

Но- мер про- филя	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>R</i>	<i>r</i>	Площадь сече- ния, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей						Вес 1 м, Н					
						<i>I<sub>x</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>W<sub>x</sub></i> , см <sup>3</sup>	<i>i<sub>xy</sub></i> , см	<i>I<sub>xy</sub></i> max, см <sup>4</sup>	<i>W<sub>x0</sub></i> , см <sup>3</sup>	<i>i<sub>x0</sub></i> max, см	<i>I<sub>y0</sub></i> min, см <sup>4</sup>	<i>W<sub>y0</sub></i> , см <sup>3</sup>	<i>i<sub>y0</sub></i> min, см	<i>x<sub>1</sub> - x<sub>0</sub></i>	<i>y<sub>0</sub> - y<sub>0</sub></i>	
8	5,5	9,0	3,0	8,63	52,68	9,03	2,47	83,56	14,32	3,11	21,80	3,74	1,59	93,16	2,17	67,8	
	6	9,0	3,0	9,38	56,97	9,80	2,47	90,40	15,55	3,11	23,54	4,05	1,58	101,8	2,19	73,6	
	80	7	9,0	10,85	65,31	11,32	2,45	103,66	17,96	3,09	26,97	4,67	1,58	119,2	2,23	85,1	
	8	9,0	3,0	12,30	73,36	12,80	2,44	116,39	20,31	3,08	30,32	5,29	1,57	136,7	2,27	96,5	
9	6	10,0	3,3	10,61	82,10	12,49	2,78	130,22	19,82	3,50	33,97	5,17	1,79	144,7	2,43	83,3	
	7	10,0	3,3	12,28	94,30	14,45	2,77	149,67	22,93	3,49	38,94	5,97	1,78	169,4	2,47	96,4	
	90	8	10,0	3,3	13,93	106,11	16,36	2,76	168,42	25,97	3,48	43,80	6,75	1,77	194,2	2,51	109,3
	9	10,0	3,3	15,60	118,00	18,29	2,75	186,00	28,84	3,46	48,60	7,53	1,77	219,0	2,55	122,0	
10	6,5	12,0	4,0	12,82	122,10	16,69	3,09	193,46	26,44	3,89	50,73	6,94	1,99	214,4	2,68	100,6	
	7	12,0	4,0	13,75	130,59	17,90	3,08	207,01	28,38	3,88	54,16	7,43	1,98	231,3	2,71	107,9	
	8	12,0	4,0	15,60	147,19	20,30	3,07	233,46	32,20	3,87	60,92	8,40	1,98	265,2	2,75	122,5	
	100	10	12,0	4,0	19,24	178,95	24,97	3,05	283,83	39,61	3,84	74,08	10,34	1,96	333,4	2,83	151,0
11	12	12,0	4,0	22,80	208,90	29,47	3,03	330,95	46,70	3,81	86,84	12,25	1,95	402,3	2,91	179,0	
	14	12,0	4,0	26,28	237,15	33,83	3,00	374,98	53,49	3,78	99,32	14,17	1,94	472,0	2,99	206,3	
	16	12,0	4,0	29,68	263,82	38,04	2,98	416,04	59,98	3,74	111,61	16,09	1,94	542,4	3,06	233,0	
	110	7	12,0	4,0	15,15	175,61	21,83	3,40	278,54	34,63	4,29	72,68	9,03	2,19	307,9	2,96	118,9
	8	12,0	4,0	17,20	198,17	24,77	3,39	314,51	39,31	4,28	81,83	10,23	2,18	352,9	3,00	135,0	

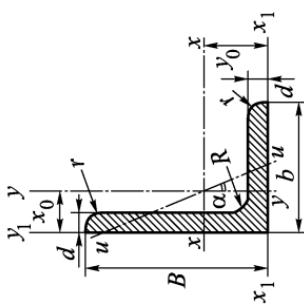
Но- мер про- филя	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>R</i>	<i>r</i>	Площадь сече- ния, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей								Вес 1 м, Н		
						<i>x</i> — <i>x</i>				<i>x</i> <sub>0</sub> — <i>x</i> <sub>0</sub>				<i>y</i> <sub>0</sub> — <i>y</i> <sub>0</sub>		
						<i>I<sub>x</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>W<sub>x</sub></i> , см <sup>3</sup>	<i>i<sub>x</sub></i> , см	<i>I<sub>z0 max</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>W<sub>z0</sub></i> , см <sup>3</sup>	<i>i<sub>z0 max</sub></i> , см	<i>I<sub>y0 min</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>W<sub>y0</sub></i> , см <sup>3</sup>	<i>i<sub>y0 min</sub></i> , см	<i>I<sub>z1</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>z<sub>0</sub></i> , см
12,5	8	14,0	4,6	19,69	294,36	32,20	3,87	466,76	51,06	4,87	121,96	13,34	2,49	516,4	3,36	154,6
	9	14,0	4,6	22,0	327,48	36,00	3,86	520,0	57,11	4,86	135,38	14,88	2,48	582,0	3,40	173,0
	10	14,0	4,6	24,33	359,82	39,74	3,85	571,04	63,07	4,84	148,59	16,41	2,47	648,6	3,45	191,0
	12	14,0	4,6	28,89	422,23	47,06	3,82	670,02	74,68	4,82	174,43	19,44	2,46	781,7	3,53	226,8
	14	14,0	4,6	33,37	481,76	54,17	3,80	763,90	85,89	4,78	199,62	22,45	2,45	915,8	3,61	262,0
	16	14,0	4,6	37,77	538,56	61,09	3,78	852,84	96,73	4,75	224,29	25,44	2,44	1051	3,68	296,5
14	9	14,0	4,6	24,72	465,72	45,55	4,34	739,40	72,32	5,47	192,03	18,78	2,79	818,2	3,78	194,1
	10	14,0	4,6	27,33	512,29	50,32	4,33	813,62	79,92	5,46	210,96	20,72	2,78	910,9	3,82	214,5
	12	14,0	4,6	32,49	602,49	59,66	4,31	956,98	94,77	5,43	248,01	24,56	2,76	1097	3,90	255,0
	10	16,0	5,3	31,43	774,24	66,19	4,96	1229,10	105,08	6,25	319,38	27,30	3,19	1356	4,30	246,7
	11	16,0	5,3	34,42	844,21	72,44	4,95	1340,66	115,04	6,24	347,77	29,84	3,18	1494	4,35	270,2
	12	16,0	5,3	37,39	912,89	78,62	4,94	1450,00	124,88	6,23	375,78	32,26	3,17	1633	4,39	293,5
16	14	16,0	5,3	43,57	1046,47	90,77	4,92	1662,13	144,16	6,20	430,81	37,37	3,16	1911	4,47	339,7
	16	16,0	5,3	49,07	1175,19	102,64	4,89	1865,73	162,95	6,17	484,62	42,33	3,14	2191	4,55	385,2
	18	16,0	5,3	54,79	1290,24	114,24	4,87	2061,03	181,23	6,13	537,46	47,26	3,13	2472	4,63	430,1
	20	16,0	5,3	60,4	1418,85	125,60	4,85	2248,26	199,02	6,10	589,43	52,18	3,12	2756	4,70	474,4
18	11	16,0	5,3	38,8	1216,44	92,47	5,60	1933,10	146,95	7,06	499,78	37,99	3,59	2128	4,85	304,7
	12	16,0	5,3	42,19	1316,62	100,41	5,59	2092,78	159,60	7,04	540,45	41,22	3,58	2325	4,89	331,2

## Окончание табл. 3

Но- мер про- филия	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>R</i>	<i>r</i>	Площадь сече- ния, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей						Вес 1 м, Н						
						<i>I<sub>x</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>W<sub>x</sub></i> , см <sup>3</sup>	<i>i<sub>xz</sub></i> , см	<i>I<sub>x0 max</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>W<sub>x0</sub></i> , см <sup>3</sup>	<i>i<sub>x0 max</sub></i> , см	<i>I<sub>y0 min</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>W<sub>y0</sub></i> , см <sup>3</sup>	<i>i<sub>y0 min</sub></i> , см	<i>I<sub>x1</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>x<sub>1</sub> - x<sub>1</sub></i>		
20	12	18,0	6,0	47,10	1822,78	124,61	6,22	2896,16	197,99	7,84	749,40	51,23	3,99	3182	5,37	369,7		
	13	18,0	6,0	50,85	1960,77	134,44	6,21	3116,18	213,66	7,83	805,35	55,22	3,98	3452	5,42	399,2		
	14	18,0	6,0	54,6	2097,0	144,17	6,20	3333,0	229,16	7,81	861,0	59,18	3,97	3722	5,46	428,0		
	20	200	16	18,0	6,0	61,98	2362,57	163,37	6,17	3755,39	259,69	7,78	969,74	67,06	3,96	4264	5,54	486,5
	20	18,0	6,0	76,54	2871,47	200,73	6,12	4560,42	318,83	7,72	1181,92	82,63	3,93	5355	5,70	600,8		
	25	18,0	6,0	94,29	3466,21	245,59	6,06	5494,04	389,26	7,63	1438,38	101,91	3,91	6733	5,89	740,2		
	30	18,0	6,0	111,54	4019,60	288,57	6,00	6351,05	455,94	7,55	1688,16	121,19	3,89	8130	6,07	875,6		
	22	220	14	21,0	7,0	60,38	2814,36	175,18	6,83	4470,15	278,25	8,60	1158,56	72,12	4,38	4941	5,91	474,0
	16	21,0	7,0	68,58	3175,44	198,71	6,80	5045,37	315,73	8,58	1305,52	81,70	4,36	5661	6,02	538,3		
	16	24,0	8,0	78,40	4717,10	258,43	7,76	7492,10	410,46	9,78	1942,09	106,40	4,98	8286	6,75	615,5		
25	18	24,0	8,0	87,72	5247,24	288,82	7,73	8336,69	458,87	9,75	2157,78	118,77	4,96	9342	6,83	688,6		
	20	24,0	8,0	96,96	5764,87	318,76	7,71	9159,73	506,48	9,72	2370,01	131,05	4,94	10401	6,91	761,1		
	25	250	22	24,0	8,0	106,12	6270,32	348,26	7,69	9961,60	553,28	9,69	2579,04	143,24	4,93	11463	7,00	383,1
	28	24,0	8,0	119,71	7006,39	391,72	7,65	11125,52	622,01	9,64	2887,26	161,42	4,91	13064	7,11	939,7		
	30	24,0	8,0	133,12	7716,86	434,25	7,61	12243,84	688,99	9,59	3189,89	179,50	4,90	14674	7,23	104,5		
				8176,82	462,11	7,59	12964,66	723,69	9,56	3388,98	191,53	4,89	15753	7,31	1114			

Таблица 4

Уголки неравнополочные (ГОСТ 8510-72\*)



Номер про-филя	<i>B</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>R</i>	<i>r</i>	Площадь сече-ния, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей						Угол наклона оси, град	Вес 1 м, Н								
							<i>x</i> – <i>x</i>			<i>y</i> – <i>y</i>												
							<i>I<sub>x</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>W<sub>x</sub></i> , см <sup>3</sup>	<i>i<sub>x</sub></i> , см	<i>I<sub>y</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>W<sub>y</sub></i> , см <sup>3</sup>	<i>i<sub>y</sub></i> , см	<i>I<sub>x</sub><sub>1</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>y<sub>0</sub></i> , см	<i>I<sub>y</sub><sub>1</sub></i> , см <sup>4</sup>	<i>x<sub>0</sub></i> , см	<i>I<sub>u</sub> min</i> , см <sup>4</sup>	<i>W<sub>u</sub></i> , см <sup>3</sup>	<i>i<sub>u</sub> min</i> , см			
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,70	0,43	0,78	0,22	0,19	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0,16	0,34	0,392	9,1	
3,2/2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	1,52	0,72	1,01	0,46	0,30	0,55	3,26	1,08	0,82	0,49	0,28	0,25	0,43	0,382	11,7	
4/2,5	40	25	3	4,0	1,3	1,89	3,06	1,14	1,27	0,93	0,49	0,70	6,37	1,32	1,58	0,59	0,56	0,41	0,54	0,385	14,8	
4,5/2,8	45	28	3	5,0	1,7	2,14	4,41	1,45	1,43	1,32	0,61	0,79	9,02	1,47	2,19	0,64	0,79	0,52	0,61	0,382	16,8	
5/3,2	50	32	3	5,5	1,8	2,42	6,18	1,82	1,60	1,99	0,81	0,91	12,37	1,60	3,26	0,72	1,18	0,68	0,70	0,403	19,0	
5,6/3,6	56	36	4	6,0	2,0	3,58	11,37	3,01	1,78	3,70	1,34	1,02	23,24	1,82	6,25	0,84	2,19	1,13	0,78	0,406	28,1	
							4,41	13,82	3,70	1,77	4,48	1,65	1,01	29,16	1,87	7,91	0,88	2,65	1,37	0,78	0,404	34,6

## П р о д о л ж е н и е т а б л . 4

Номер про-филя	B	b	d	R	r	Площадь сече-ния, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей								Угол накло-на оси, °	Вес 1 м, Н					
							x - x		y - y		x <sub>1</sub> - x <sub>1</sub>		y <sub>1</sub> - y <sub>1</sub>								
							I <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> , см	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см	I <sub>x1</sub> , см <sup>4</sup>	y <sub>0</sub> , см	I <sub>y1</sub> , см <sup>4</sup>	x <sub>0</sub> , см	W <sub>u</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>u</sub> min., см			
6,3/4,0	63	40	4	7,0	2,3	4,04	16,33	3,83	2,01	5,16	1,67	1,13	33,00	2,03	8,52	0,91	3,07	1,41	0,87	0,397	31,7
	5	7,0	2,3	4,98		19,91	4,72	2,00	6,26	2,05	1,12	41,42	2,08	10,78	0,95	3,73	1,72	0,86	0,396	39,1	
	6	7,0	2,3	5,90		23,31	5,58	1,09	7,29	2,42	1,11	49,87	2,12	13,09	0,99	4,36	2,02	0,86	0,393	46,3	
	8	7,0	2,3	7,68		29,60	7,22	1,96	9,15	3,12	1,09	66,87	2,20	17,92	1,07	5,58	2,60	0,85	0,386	60,3	
7/4,5	70	45	5	7,5	2,5	5,59	27,76	5,88	2,23	9,05	2,62	1,27	56,74	2,28	15,24	1,05	5,34	2,20	0,98	0,406	43,9
	5	50	5	8,0	2,7	6,11	34,81	6,81	2,39	12,47	3,25	1,43	69,70	2,39	20,81	1,17	7,24	2,73	1,09	0,436	47,9
	6	8,0	2,7	7,25		40,92	8,08	2,38	14,60	3,85	1,42	83,91	2,44	25,20	1,21	8,48	3,21	1,08	0,435	56,9	
	8	8,0	2,7	9,47		52,38	10,52	2,35	18,52	4,99	1,40	112,48	2,52	34,22	1,29	10,87	4,14	1,07	0,430	74,3	
8/5	80	50	5	8,0	2,7	6,36	41,64	7,71	2,56	12,68	3,28	1,41	84,60	2,60	20,83	1,13	7,57	2,75	1,09	0,387	49,9
	6	8,0	2,7	7,55		48,98	9,15	2,55	14,85	3,88	1,40	101,81	2,65	25,23	1,17	8,88	3,24	1,08	0,386	59,2	
	8	9,0	3,0	7,86		65,28	10,74	2,88	19,67	4,53	1,58	132,49	2,92	32,17	1,26	11,77	3,81	1,22	0,384	61,7	
	6	9,0	3,0	8,54		70,58	11,66	2,88	21,22	4,91	1,58	144,73	2,95	35,25	1,28	12,70	4,12	1,22	0,384	67,0	
	8	9,0	3,0	11,18		90,87	15,24	2,85	27,08	6,39	1,56	193,85	3,04	47,81	1,36	16,29	5,32	1,21	0,380	87,7	
10/6,3	100	63	6	10,0	3,3	9,59	98,29	14,52	3,20	30,58	6,27	1,79	198,25	3,23	49,93	1,42	18,20	5,27	1,38	0,393	75,3
	7	10,0	3,3	11,09		112,86	16,78	3,19	34,99	7,23	1,78	231,85	3,28	58,68	1,46	20,83	6,06	1,37	0,392	87,0	
	8	10,0	3,3	12,57		126,96	19,01	3,18	39,21	8,17	1,77	265,52	3,32	67,56	1,50	23,38	6,82	1,36	0,391	98,7	
	10	10,0	3,3	15,47		133,83	23,32	3,15	47,13	9,99	1,75	333,11	3,40	85,75	1,58	28,34	8,31	1,35	0,387	121,4	
11/7	110	70	6,5	10,0	3,3	11,45	142,42	19,11	3,53	45,61	8,42	2,00	286,34	3,55	74,31	1,58	26,94	7,05	1,53	0,402	89,8
	8	10,0	3,3	13,93		171,54	23,22	3,51	54,64	10,20	1,98	353,42	3,61	92,31	1,64	32,31	8,50	1,52	0,400	109,3	

ТАБЛИЦЫ

Номер профилей	B	b	d	R	r	Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Справочные величины для осей								Угол наклона, град.	Вес 1 м, кг					
							x - x		y - y		x <sub>1</sub> - x <sub>1</sub>		y <sub>1</sub> - y <sub>1</sub>								
							I <sub>x</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>x</sub> , см <sup>3</sup>	I <sub>y</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> , см <sup>3</sup>	I <sub>x1</sub> , см <sup>4</sup>	y <sub>0</sub> , см	I <sub>y1</sub> , см <sup>4</sup>	x <sub>0</sub> , см	I <sub>u min</sub> , см <sup>4</sup>	W <sub>u</sub> , см <sup>3</sup>	i <sub>u min</sub> , см		
12,5/8	80	7	11,0	3,7	14,06	226,53	26,67	4,01	73,73	11,89	2,29	452,27	4,01	119,21	1,80	43,40	9,96	1,76	0,407	110,4	
	8	11,0	3,7	15,96	255,62	30,26	4,00	82,95	13,47	2,28	517,81	4,05	136,97	1,84	48,82	11,25	1,75	0,406	125,3		
	10	11,0	3,7	19,70	311,61	37,27	3,98	100,47	16,52	2,26	649,23	4,14	173,05	1,92	59,33	13,74	1,74	0,404	154,7		
14/9	12	11,0	3,7	23,36	364,79	44,07	3,95	116,84	19,46	2,24	781,15	4,22	209,98	2,00	69,47	16,11	1,72	0,400	183,4		
	90	8	12,0	4,0	18,00	363,68	38,25	4,49	119,79	17,19	2,58	728,84	4,49	194,28	2,03	70,27	14,39	1,98	0,411	141,3	
16/10	10	12,0	4,0	22,24	444,45	47,19	4,47	145,54	21,14	2,56	911,17	4,58	245,09	2,12	85,51	17,58	1,96	0,409	174,6		
	100	9	13,0	4,3	22,87	605,97	56,04	5,15	186,03	23,96	2,85	1221,48	5,19	300,29	2,24	110,40	20,01	2,20	0,391	179,6	
	10	13,0	4,3	25,28	666,97	61,91	5,13	204,09	26,42	2,84	1358,89	5,23	335,03	2,28	121,16	22,02	2,19	0,390	198,5		
18/11	14	13,0	4,3	34,72	897,19	84,65	5,08	271,60	35,89	2,80	1910,29	5,40	477,12	2,43	162,49	29,75	2,16	0,385	272,6		
	110	10	14,0	4,7	28,33	952,28	78,59	5,80	276,37	32,27	3,12	1932,87	5,88	444,42	2,44	165,44	26,96	2,42	0,375	222,4	
20/12,5	12	14,0	4,7	33,69	1122,56	93,33	5,77	324,09	38,20	3,10	2324,20	5,97	537,38	2,52	194,28	31,83	2,40	0,374	264,4		
	200	125	11	14,0	4,7	34,87	1449,02	107,31	6,45	446,36	45,98	3,58	2620,49	6,50	618,07	2,79	263,84	38,27	2,75	0,392	273,7
	12	14,0	4,7	37,89	1568,19	116,51	6,43	481,93	49,85	3,57	3188,68	6,54	785,73	2,83	285,04	41,45	2,74	0,392	297,4		
25/16	14	14,0	4,7	43,87	1800,83	134,64	6,41	550,77	57,43	3,54	3725,91	6,62	922,37	2,91	326,54	47,57	2,73	0,390	344,3		
	250	160	12	18,0	6,0	48,3	3147,46	184,78	8,07	1032,28	82,97	4,62	6212,53	7,97	1634,44	3,53	604,13	69,12	3,54	0,383	379,2
	18	18,0	6,0	71,1	4545,07	270,98	8,00	1475,10	120,63	4,55	9358,07	9,23	2486,49	3,77	865,82	99,87	3,49	0,383	558,1		

## Т а б л и ц а 5

Некоторые геометрические и механические величины  
и их единицы (СИ)

Величина		Обозначение единицы
Обозначение	Наименование	
$l, a$	Длина	м
$F$	Площадь	м <sup>2</sup>
$J_z, J_y, J_k,$ $J_p, J_{zy}, J_1, J_2$	Моменты инерции плоской области	м <sup>4</sup>
$S_z, S_y$	Статические моменты плоской области	м <sup>3</sup>
$W_z, W_y, W_k$	Моменты сопротивления деформации	м <sup>3</sup>
$i_z, i_y$	Радиусы инерции плоской области	м
$P$	Сила	Н
$M$	Момент силы	Н · м
$q$	Погонная сила	Н/м
$m$	Погонный момент	Н
$\rho$	Плотность	кг/м <sup>3</sup>
$A$	Работа	Дж = Н · м
$\Pi$	Потенциальная энергия	Дж = Н · м
$p$	Давление	Па = Н/м <sup>2</sup> , МПа
$\sigma, \tau$	Напряжения	Па = Н/м <sup>2</sup> , МПа
$E, G$	Модули упругости	Па = Н/м <sup>2</sup> , МПа
$\mu$	Коэффициент Пуассона	б/р
$\alpha$	Коэффициент температурного расширения	1/°C
$t$	Температура	°C
$\omega$	Угловая скорость	рад/с

## Т а б л и ц а 6

Приставки и множители для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименований

Приставка	Обозначение приставки		Множитель
	международное	русское	
экза	E	Э	$10^{18}$
пета	P	П	$10^{15}$
тера	T	Т	$10^{12}$
гига	G	Г	$10^9$
мега	M	М	$10^6$
кило	k	к	$10^3$
гекто	h	г	$10^2$
дека	da	да	$10^1$
деци	d	д	$10^{-1}$
санти	c	с	$10^{-2}$
милли	m	м	$10^{-3}$
микро	$\mu$	мк	$10^{-6}$
nano	n	н	$10^{-9}$
пико	p	п	$10^{-12}$
фемто	F	ф	$10^{-15}$
атто	a	а	$10^{-18}$

**Список учебной литературы, рекомендованной НМС по  
сопротивлению материалов, строительной механике, теории  
упругости и пластичности, для изучения дисциплины  
«Сопротивление материалов»**

**Основная литература**

1. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов. — М.: Изд. МГТУ, 1999. — 591 с.
2. *Вольмир А.С. и др.* Сборник задач по сопротивлению материалов. — М.: Наука, 1984. — 407 с.

**Дополнительная литература**

1. *Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П.* Сопротивление материалов. — М.: Высшая школа, 2000. — 560 с.
2. *Биргер И.А., Мавлютов Р.Р.* Сопротивление материалов. — М.: Изд. МАИ, 1994. — 511 с.
3. *Варданян Г.С. и др.* Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. — М.: Изд. Ассоц. Стройт. Вузов, 1995. — 572 с.
4. *Дарков А.В., Шпиро Г.С.* Сопротивление материалов. — М.: Высшая школа, 1989. — 622 с.
5. *Долинский Ф.В., Михайлов М.Н.* Краткий курс сопротивления материалов. — М.: Высшая школа, 1988. — 437 с.
6. *Заславский Б.В.* Краткий курс сопротивления материалов. — М.: Машиностроение, 1986. — 328 с.
7. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. — М.: Физматлит Наука, 1979. — 744 с.
8. *Степин П.А.* Сопротивление материалов. — М.: ИНТЕГРАЛ-ПРЕСС, 1997. — 320 с.
9. *Терегулов И.Г.* Сопротивление материалов и основы упругости и пластичности. — М.: Высшая школа, 1984. — 472 с.
10. *Тимошенко С.П., Гере Дж.* Механика материалов. — М.: Мир, 1976. — 669 с.
11. *Шалишишин В.И., Горшков А.Г., Трошин В.Н.* Сопротивление материалов. — М.: Изд. МАИ, 2000. — 616 с.

**Задачники и пособия по решению задач**

1. Антуфьев Б.А., Горшков А.Г., Егорова О.В. и др. Сборник задач по сопротивлению материалов.— М.: Изд. МАИ, 2000. — 380 с.
2. Ицкович Г.М., Минин Л.С., Винокуров А.И. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов. — М.: Высшая школа, 1999. — 592 с.
3. Лихарев К.К., Сухова Н.А. Сборник задач по курсу «Сопротивление материалов». — М.: Машиностроение, 1980. — 224 с.
4. Миролюбов И.Н. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. — М.: Высшая школа, 1985. — 399 с.

Учебное издание

*ГОРШКОВ Анатолий Герасимович  
ТРОШИН Виктор Никитович  
ШАЛАШИЛИН Владимир Иванович*

## СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Редактор *Д. А. Миртова*  
Оригинал-макет: *О. Б. Широкова*  
Компьютерная графика: Н. В. Заварицкий  
Оформление переплета: *А. Ю. Алёхина*

ЛР № 071930 от 06.07.99  
Подписано в печать 14.12.04. Формат 60×90/16  
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная  
Усл. печ. л. 34. Уч.-изд. л. 38,5. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерperiодика»  
117997 Москва, Профсоюзная, 90  
E-mail: fizmat@maik.ru; <http://www.fml.ru>

Отпечатано с диапозитивов  
в ОАО «Чебоксарская типография № 1»  
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковleva, 15

ISBN 5-9221-0181-1

A standard linear barcode representing the ISBN number 5-9221-0181-1. The barcode is composed of vertical black lines of varying widths on a white background.

9 785922 101813