Метод 1. Оценка стандартного отклонения

- определяем общую сумму T и сумму квадратов Σ по n измерениям
- оцениваем стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\Sigma - \frac{T^2}{n}\right)}$, которое имеет тенденцию к нормальному распределению в большой выборке
- определяем стандартную ошибку стандартного отклонения $s = \frac{\sigma}{\sqrt{2(n-0{,}75)}}$

Пример. Имеем ряд

2	2	6	9	9	10	15	18	20	20
21	21	23	23	26	27	27	27	28	28
29	29	30	33	34	34	34	34	34	35
35	37	37	37	37	37	38	38	38	39
39	39	40	42	44	44	45	47	51	58

Решение: число измерений $n = 50$,
общая сумма $T = 2 + \cdots + 58 = 1510$,
сумма квадратов $\Sigma = 2^2 + \cdots + 58^2 = 53102$,
стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\Sigma - \frac{T^2}{n}\right)} = \sqrt{\frac{1}{50-1}\left(53102 - \frac{1510^2}{50}\right)} = 12{,}37$,
однако эта оценка смещённая, что легко скорректировать, если разделить на поправочный коэффициент $k = 1 + \frac{1}{4(n-1)} = 1 + \frac{1}{4(50-1)} = 1{,}005$,
несмещённая оценка стандартного отклонения $\sigma_{несм} = \frac{\sigma}{k} = \frac{12{,}37}{1{,}005} = 12{,}31$,
стандартная ошибка стандартного отклонения

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{2(n-0{,}75)}} = \frac{12{,}37}{\sqrt{2(50-0{,}75)}} = \pm 1{,}25$$

Метод 2. Оценка среднего

- определяем общую сумму T по n измерениям
- оцениваем среднее $a = \frac{T}{n}$
- определяем стандартную ошибку среднего $e = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Пример. Имеем ряд

2	2	6	9	9	10	15	18	20	20
21	21	23	23	26	27	27	27	28	28
29	29	30	33	34	34	34	34	34	35
35	37	37	37	37	37	38	38	38	39
39	39	40	42	44	44	45	47	51	58

Решение: число измерений $n = 50$,
общая сумма $T = 2 + \cdots + 58 = 1510$,

среднее $a = \frac{T}{n} = \frac{1510}{50} = 30{,}2$,

стандартная ошибка среднего $e = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12{,}37}{\sqrt{50}} = \pm 1{,}75$

Метод 3. Другие измерители среднего уровня

- ***медиана*** – значение $y\left(\frac{1}{2}\right)$, превышающее половину измерений

  стандартная ошибка медианы $s_{мед} = \frac{5\,\sigma}{4\sqrt{n}}$,

  σ – стандартное отклонение, n – число измерений
- ***среднеквартильный размах*** – среднее из значений $y\left(\frac{1}{4}\right)$ и $y\left(\frac{3}{4}\right)$, превышающих $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$ измерений соответственно

  стандартная ошибка среднеквартильного размаха $s_{разм} = \frac{1{,}1\,\sigma}{\sqrt{n}}$

Пример. Имеем ряд

2	2	6	9	9	10	15	18	20	20
21	21	23	23	26	27	27	27	28	28
29	29	30	33	34	34	34	34	34	35
35	37	37	37	37	37	38	38	38	39
39	39	40	42	44	44	45	47	51	58

Решение: число измерений $n = 50$,

$\frac{1}{2}n = \frac{50}{2} = 25$, эта точка между 25-м и 26-м измерениями с конца, медиана $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{34+34}{2} = 34$,

из метода 1 стандартное отклонение $\sigma = 12{,}37$,

стандартная ошибка медианы $s_{мед} = \frac{5\,\sigma}{4\sqrt{n}} = \frac{5 \cdot 12{,}37}{4\sqrt{50}} = \pm 2{,}19$,

$\frac{1}{4}n = \frac{50}{4} = 12{,}5$, эта точка между 12-м и 13-м измерениями с конца,

значение, превышающее $\frac{1}{4}$ измерений $y\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{38+38}{2} = 38$,

$\frac{3}{4}n = \frac{3 \cdot 50}{4} = 37{,}5$, эта точка между 37-м и 38-м измерениями с конца,

значение, превышающее $\frac{3}{4}$ измерений $y\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{23+23}{2} = 23$,

среднеквартильный размах $\frac{y\left(\frac{1}{4}\right) + y\left(\frac{3}{4}\right)}{2} = \frac{38+23}{2} = 30{,}5$,

стандартная ошибка среднеквартильного размаха

$s_{разм} = \frac{1{,}1\,\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}1 \cdot 12{,}37}{\sqrt{50}} = \pm 1{,}92$

Метод 4. Оценка размаха вариации

Размах вариации Р – разница между наибольшим и наименьшим измерениями в ряду.

Пример. Имеем пять рядов

(1)	2	6	10	23	28	34	38	39	45	47
(2)	4	17	20	30	36	39	39	42	44	46
(3)	13	25	31	31	33	33	34	38	41	42
(4)	26	27	33	40	41	43	43	44	45	57
(5)	17	28	31	34	41	42	43	47	52	66

Решение: размах вариации $Р_1 = 47 - 2 = 45$,

$Р_2 = 46 - 4 = 42$,

$Р_3 = 42 - 13 = 29$,

$Р_4 = 57 - 26 = 31$,

$Р_5 = 66 - 17 = 49$.

Метод 5. Оценка стандартного отклонения в случайно отобранном ряду

- разделяем ряд на группы по девять измерений в каждой, при этом конец одной группы и начало следующей могут совпадать
- находим размах вариации в каждой группе измерений
- оцениваем стандартное отклонение как треть среднего размаха вариации
- определяем стандартную ошибку стандартного отклонения $s = \frac{0{,}8\,\sigma}{\sqrt{n}}$

Пример. Имеем ряд

34	23	38	2	10	6	47	39	45	28
42	15	34	37	44	2	37	28	18	40
38	37	29	21	27	29	9	34	30	27
21	35	37	39	20	37	51	27	38	34
34	33	44	26	58	23	20	9	39	35

Решение: число измерений $n = 50$,

$\frac{n}{9} = \frac{50}{9} = 5{,}56 \to 6$ групп,

^{1}[34	23	38	2	10	6	47	39	^{2}[45]	28
42	15	34	37	44	2	^{3}[37]	28	18	40
38	37	29	21	^{4}[27]	29	9	34	30	27
21	35	^{5}[37]	39	20	37	51	27	38	34
34]	^{6}[33	44	26	58	23	20	9	39	35]

размах вариации $P_1 = 47 - 2 = 45$,

$P_2 = 45 - 2 = 43$,

$P_3 = 40 - 18 = 22$,

$P_4 = 37 - 9 = 28$,

$P_5 = 51 - 20 = 31$,

$P_6 = 58 - 9 = 49$,

средний размах вариации $P_{ср} = \frac{45 + 43 + 22 + 28 + 31 + 49}{6} = 36{,}33$,

стандартное отклонение $\sigma = \frac{1}{3} P_{ср} = \frac{36{,}33}{3} = 12{,}11$,

стандартная ошибка стандартного отклонения $s = \frac{0{,}8\,\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}8 \cdot 12{,}11}{\sqrt{50}} = \pm 1{,}37$

Метод 6. Оценка среднего и стандартного отклонения при большой выборке

- определяем медиану и значения $y\left(\frac{1}{16}\right)$ и $y\left(\frac{15}{16}\right)$, превышающие $\frac{1}{16}$ и $\frac{15}{16}$ измерений соответственно
- оцениваем среднее $a = 0{,}2\, y\left(\frac{1}{16}\right) + 0{,}6\, y\left(\frac{1}{2}\right) + 0{,}2\, y\left(\frac{15}{16}\right)$
- оцениваем стандартное отклонение $\sigma = \frac{1}{3}\left[y\left(\frac{1}{16}\right) - y\left(\frac{15}{16}\right)\right]$
- определяем стандартную ошибку среднего $e = \frac{1{,}1\,\sigma}{\sqrt{n}}$
- определяем стандартную ошибку стандартного отклонения $s = \frac{0{,}9\,\sigma}{\sqrt{n}}$

Замечание: симметричность распределения можно проверить по формуле

$$y\left(\frac{1}{16}\right) - 2\, y\left(\frac{1}{2}\right) + y\left(\frac{15}{16}\right) = 0$$

Пример. Имеем ряд

2	2	6	9	9	10	15	18	20	20
21	21	23	23	26	27	27	27	28	28
29	29	30	33	34	34	34	34	34	35
35	37	37	37	37	37	38	38	38	39
39	39	40	42	44	44	45	47	51	58

Решение: число измерений $n = 50$,

из метода 3 медиана $y\left(\frac{1}{2}\right) = 34$,

$\frac{1}{16} n = \frac{50}{16} = 3{,}13$, эта точка между 3-м и 4-м измерениями с конца,

значение, превышающее $\frac{1}{16}$ измерений $y\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{47+45}{2} = 46$,

$\frac{15}{16} n = \frac{15 \cdot 50}{16} = 46{,}88$, эта точка между 46-м и 47-м измерениями с конца,

значение, превышающее $\frac{15}{16}$ измерений $y\left(\frac{15}{16}\right) = \frac{9+9}{2} = 9$, среднее $a = 0{,}2\, y\left(\frac{1}{16}\right) + 0{,}6\, y\left(\frac{1}{2}\right) + 0{,}2\, y\left(\frac{15}{16}\right) = 0{,}2 \cdot 46 + 0{,}6 \cdot 34 + 0{,}2 \cdot 9 = 31{,}4$,

стандартное отклонение $\sigma = \frac{1}{3}\left[y\left(\frac{1}{16}\right) - y\left(\frac{15}{16}\right) \right] = \frac{1}{3}\,[46 - 9] = 12{,}33$,

стандартная ошибка среднего $e = \frac{1{,}1\,\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}1 \cdot 12{,}33}{\sqrt{50}} = \pm 1{,}92$,

стандартная ошибка стандартного отклонения $s = \frac{0{,}9\,\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}9 \cdot 12{,}33}{\sqrt{50}} = \pm 1{,}57$

Метод 7. Уточнённый метод 6

- определяем медиану и значения $y\left(\frac{1}{16}\right)$, $y\left(\frac{1}{4}\right)$, $y\left(\frac{3}{4}\right)$ и $y\left(\frac{15}{16}\right)$, превышающие $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ и $\frac{15}{16}$ измерений соответственно
- оцениваем среднее $a = \frac{1}{6}\left[y\left(\frac{1}{16}\right) + y\left(\frac{1}{4}\right) + 2\, y\left(\frac{1}{2}\right) + y\left(\frac{3}{4}\right) + y\left(\frac{15}{16}\right) \right]$
- оцениваем стандартное отклонение $\sigma = \frac{1}{4}\left[y\left(\frac{1}{16}\right) + \frac{3}{4} y\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4} y\left(\frac{3}{4}\right) - y\left(\frac{15}{16}\right) \right]$
- определяем стандартную ошибку среднего $e = \frac{1{,}04\,\sigma}{\sqrt{n}}$
- определяем стандартную ошибку стандартного отклонения $s = \frac{5\,\sigma}{6\,\sqrt{n}}$

Пример. Имеем ряд

2	2	6	9	9	10	15	18	20	20
21	21	23	23	26	27	27	27	28	28
29	29	30	33	34	34	34	34	34	35
35	37	37	37	37	37	38	38	38	39
39	39	40	42	44	44	45	47	51	58

Решение: число измерений $n = 50$,

из метода 3 медиана $y\left(\frac{1}{2}\right) = 34$,

из метода 6 значение, превышающее $\frac{1}{16}$ измерений $y\left(\frac{1}{16}\right) = 46$, из метода 3 значение, превышающее $\frac{1}{4}$ измерений $y\left(\frac{1}{4}\right) = 38$,

из метода 3 значение, превышающее $\frac{3}{4}$ измерений $y\left(\frac{3}{4}\right) = 23$,

из метода 6 значение, превышающее $\frac{15}{16}$ измерений $y\left(\frac{15}{16}\right) = 9$,

среднее

$$a = \frac{1}{6}\left[y\left(\frac{1}{16}\right) + y\left(\frac{1}{4}\right) + 2\,y\left(\frac{1}{2}\right) + y\left(\frac{3}{4}\right) + y\left(\frac{15}{16}\right)\right] = \frac{1}{6}[46 + 38 + 2 \cdot 34 + 23 + 9] = 30{,}67\ ,$$

стандартное отклонение

$$\sigma = \frac{1}{4}\left[y\left(\frac{1}{16}\right) + \frac{3}{4}y\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4}y\left(\frac{3}{4}\right) - y\left(\frac{15}{16}\right)\right] = \frac{1}{4}[46 + 0{,}75 \cdot 38 - 0{,}75 \cdot 23 - 9] = 12{,}06\ ,$$

стандартная ошибка среднего $e = \frac{1{,}04\,\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}04 \cdot 12{,}06}{\sqrt{50}} = \pm 1{,}77$,

стандартная ошибка стандартного отклонения $s = \frac{5\,\sigma}{6\,\sqrt{n}} = \frac{5 \cdot 12{,}06}{6\,\sqrt{50}} = \pm 1{,}42$

Метод 8. Оценка стандартного отклонения по 1/6 измерений

- находим 1/6 измерений, округляем до ближайшего большего целого числа
- определяем среднее из большей 1/6 ($y_{\max}$) и меньшей 1/6 ($y_{\min}$) измерений
- оцениваем стандартное отклонение $\sigma = \frac{1}{3}(y_{\max} - y_{\min})$
- определяем стандартную ошибку стандартного отклонения $s = \frac{0{,}72\,\sigma}{\sqrt{n}}$

Пример. Имеем ряд

2	2	6	9	9	10	15	18	20	20
21	21	23	23	26	27	27	27	28	28
29	29	30	33	34	34	34	34	34	35
35	37	37	37	37	37	38	38	38	39
39	39	40	42	44	44	45	47	51	58

Решение: число измерений $n = 50$,

$\frac{1}{6}n = \frac{50}{6} = 8{,}33 \to 9$, большая 1/6 измерений $y_{\max} = \dfrac{39+40+42+44+44+45+47+51+58}{9} = 45{,}56$,

меньшая 1/6 измерений $y_{\min} = \dfrac{2+2+6+9+9+10+15+18+20}{9} = 10{,}11$,

стандартное отклонение $\sigma = \dfrac{1}{3}(y_{\max} - y_{\min}) = \dfrac{1}{3}(45{,}56 - 10{,}11) = 11{,}82$,

стандартная ошибка стандартного отклонения $s = \dfrac{0{,}72\,\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{0{,}72 \cdot 11{,}82}{\sqrt{50}} = \pm 1{,}2$

Метод 9. Пределы оценки стандартного отклонения

$\dfrac{(n-1)\,\sigma^2}{\sigma_u^2}$ следует распределению χ^2 с $n-1$ степенями свободы,

n – число измерений, σ и σ_u – расчётное и истинное стандартное отклонение

Пример. Имеем ряд

2	2	6	9	9	10	15	18	20	20
21	21	23	23	26	27	27	27	28	28
29	29	30	33	34	34	34	34	34	35
35	37	37	37	37	37	38	38	38	39
39	39	40	42	44	44	45	47	51	58

Решение: число измерений $n = 50$,

из метода 1 расчётное стандартное отклонение $\sigma = 12{,}37$,

$(n-1)\,\sigma^2 = (50-1)\cdot 12{,}37^2 = 7497{,}83$,

$\dfrac{7497{,}83}{\sigma_u^2}$ следует распределению χ^2 с $n-1 = 50-1 = 49$ степенями свободы,

обращаемся к таблице с процентными точками распределения χ^2:

Степень свободы	97,5 %	2,5 %	Степень свободы	97,5 %	2,5 %
2	0,05	7,38	14	5,63	26,1
3	0,22	9,35	16	6,91	28,8
4	0,48	11,10	18	8,23	31,5
5	0,83	12,80	20	9,59	34,2
6	1,24	14,40	25	13,10	40,6
8	2,18	17,50	30	16,80	47,0
10	3,25	20,50	40	24,40	59,3
12	4,40	23,30	50	31,60	70,2

49 нет, берём ближайшую большую степень свободы 50,

$$31{,}6 \le \frac{7497{,}83}{\sigma_u^2} \le 70{,}2\,,$$

истинное стандартное отклонение $10{,}33 \le \sigma_u \le 15{,}4$,
проверяем: $10{,}33 \le 12{,}37 \le 15{,}4$, верно

Метод 10. Пределы оценки среднего

$\dfrac{a-a_u}{e}$ следует распределению Стьюдента t с $n-1$ степенями свободы,
a и a_u – расчётное и истинное среднее, e – стандартная ошибка среднего,
n – число измерений

Пример. Имеем ряд

2	2	6	9	9	10	15	18	20	20
21	21	23	23	26	27	27	27	28	28
29	29	30	33	34	34	34	34	34	35
35	37	37	37	37	37	38	38	38	39
39	39	40	42	44	44	45	47	51	58

Решение: число измерений $n = 50$,
из метода 2 расчётное среднее $a = 30{,}2$,
из метода 2 стандартная ошибка среднего $e = \pm 1{,}75$,

$\dfrac{a-a_u}{e}$ следует распределению Стьюдента с $n-1 = 50-1 = 49$ степенями свободы, обращаемся к уровню значимости 5 %:

Степень свободы	T (5 %)	Степень свободы	t (5 %)	Степень свободы	t (5 %)
1	12,70	6	2,45	25	2,06
2	4,30	8	2,31	30	2,04
3	3,18	10	2,23	40	2,02
4	2,78	15	2,13	60	2,00
5	2,57	20	2,09	120	1,98

49 нет, берём ближайшую большую степень свободы 60,

$$\frac{a-a_u}{e} = 2\,,$$

истинное среднее $a_u = a - 2\,e = 30{,}2 - 2\cdot(\pm\,1{,}75) = 26{,}7;\ \ 33{,}7$ или $26{,}7 \le a_u \le 33{,}7$,
проверяем: $26{,}7 \le 30{,}2 \le 33{,}7$, верно

Метод 11. Проверка разницы между средними двух больших групп измерений

- для каждого ряда по методу 6 определяем среднее a_1 и a_2 и его стандартную ошибку e_1 и e_2
- оцениваем разницу между средними $a_p = |a_1 - a_2| \pm \sqrt{e_1^2 + e_2^2}$
- по методу 2 проверяем полученный диапазон

Пример. Имеем два ряда

(1)	2,7	4,01	4,14	4,16	4,22	4,59	4,66	4,82	4,97	4,98
	5,01	5,03	5,11	5,34	5,35	5,62	5,64	5,66	5,76	5,78
	5,83	6,16	6,37	7,12	7,82					
(2)	1,22	1,73	2,5	2,74	2,83	3,18	3,18	3,36	3,58	3,66
	3,68	3,7	3,77	3,85	3,86	3,87	3,89	4,24	4,29	4,41
	4,54	4,81	4,87	4,89	5,48					

Решение: число измерений $n = 25$,

$\frac{1}{16}n = \frac{25}{16} = 1{,}56$, эта точка между 1-м и 2-м измерениями с конца,

значение, превышающее $\frac{1}{16}$ измерений

$y_1\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{7{,}12 + 7{,}82}{2} = 7{,}47$ и $y_2\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{4{,}89 + 5{,}48}{2} = 5{,}19$,

$\frac{1}{2}n = \frac{25}{2} = 12{,}5$, эта точка между 12-м и 13-м измерениями с конца,

медиана $y_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5{,}11 + 5{,}34}{2} = 5{,}23$ и $y_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3{,}77 + 3{,}85}{2} = 3{,}81$,

точка $\frac{15}{16}n$ симметрична $\frac{1}{16}n$, поэтому между 1-м и 2-м измерениями с начала,

значение, превышающее $\frac{15}{16}$ измерений

$y_1\left(\frac{15}{16}\right) = \frac{2{,}7 + 4{,}01}{2} = 3{,}36$ и $y_2\left(\frac{15}{16}\right) = \frac{1{,}22 + 1{,}73}{2} = 1{,}48$,

по методу 6 среднее $a = 0{,}2\,y\left(\frac{1}{16}\right) + 0{,}6\,y\left(\frac{1}{2}\right) + 0{,}2\,y\left(\frac{15}{16}\right)$,

$a_1 = 0{,}2 \cdot 7{,}47 + 0{,}6 \cdot 5{,}23 + 0{,}2 \cdot 3{,}36 = 5{,}3$ и $a_2 = 0{,}2 \cdot 5{,}19 + 0{,}6 \cdot 3{,}81 + 0{,}2 \cdot 1{,}48 = 3{,}62$, по методу 6 стандартное отклонение $\sigma = \frac{1}{3}\left[y\left(\frac{1}{16}\right) - y\left(\frac{15}{16}\right)\right]$,

$\sigma_1 = \frac{7{,}47 - 3{,}36}{3} = 1{,}37$ и $\sigma_2 = \frac{5{,}19 - 1{,}48}{3} = 1{,}24$,

по методу 6 стандартная ошибка среднего $e = \frac{1{,}1\,\sigma}{\sqrt{n}}$,

$e_1 = \frac{1{,}1 \cdot 1{,}37}{\sqrt{25}} = \pm 0{,}3$ и $e_2 = \frac{1{,}1 \cdot 1{,}24}{\sqrt{25}} = \pm 0{,}27$,

разница между средними

$a_p = \left|a_1 - a_2\right| \pm \sqrt{e_1^2 + e_2^2} = 5{,}3 - 3{,}62 \pm \sqrt{0{,}3^2 + 0{,}27^2} = 1{,}68 \pm 0{,}4 = 1{,}28; \quad 2{,}08$,

общая сумма $T_1 = 2{,}7 + \ \cdots \ + 7{,}82 = 130{,}85$ и $T_2 = 1{,}22 + \ \cdots \ + 5{,}48 = 92{,}13$,

по методу 2 среднее $a = \frac{T}{n}$,

$a_1 = \frac{130{,}85}{25} = 5{,}23$ и $a_2 = \frac{92{,}13}{25} = 3{,}69$,

по методу 2 разница между средними $a_p = \left|a_1 - a_2\right| = 5{,}23 - 3{,}69 = 1{,}54$,

проверяем: $1{,}28 \le 1{,}54 \le 2{,}08$, верно

Метод 12. Пределы оценки медианы

- оцениваем медиану
- определяем пределы её оценки как $\frac{1}{2}(n+1) \pm \sqrt{n}$, где n – число измерений
- при двух больших группах измерений оцениваем разницу между медианами
- определяем пределы её оценки как $\frac{1}{2}(n+1) \pm \sqrt{\frac{n}{2}}$ (по рядам перекрёстно)

Пример. Имеем два ряда

(1)	2,7	4,01	4,14	4,16	4,22	4,59	4,66	4,82	4,97	4,98
	5,01	5,03	5,11	5,34	5,35	5,62	5,64	5,66	5,76	5,78
	5,83	6,16	6,37	7,12	7,82					
(2)	1,22	1,73	2,5	2,74	2,83	3,18	3,18	3,36	3,58	3,66
	3,68	3,7	3,77	3,85	3,86	3,87	3,89	4,24	4,29	4,41
	4,54	4,81	4,87	4,89	5,48					

Решение: из метода 11 медиана $y_1\left(\frac{1}{2}\right) = 5{,}23$ и $y_2\left(\frac{1}{2}\right) = 3{,}81$, число измерений $n = 25$,

$\frac{1}{2}(n+1) \pm \sqrt{n} = \frac{25+1}{2} \pm \sqrt{25} = 13 \pm 5 = 18;\ 8$, получили целые числа, не считаем пределы – это 18-е и 8-е измерения с конца,

проверяем: $4{,}82 \le 5{,}23 \le 5{,}66$, верно и $3{,}36 \le 3{,}81 \le 4{,}24$, верно,

поскольку два ряда, $y_1\left(\frac{1}{2}\right) - y_2\left(\frac{1}{2}\right) = 5{,}23 - 3{,}81 = 1{,}42$,

$\frac{1}{2}(n+1) \pm \sqrt{\frac{n}{2}} = \frac{25+1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{2}} = 13 \pm 3{,}54 = 16{,}54;\ 9{,}46$, считаем пределы,

16,54 – эта точка между 16-м и 17-м измерениями с конца,

(1) $\frac{4{,}97 + 4{,}98}{2} = 4{,}98$ и (2) $\frac{3{,}58 + 3{,}66}{2} = 3{,}62$,

9,46 – эта точка между 9-м и 10-м измерениями с конца,

(1) $\frac{5{,}62 + 5{,}64}{2} = 5{,}63$ и (2) $\frac{3{,}87 + 3{,}89}{2} = 3{,}88$,

проходим по рядам перекрёстно: $4{,}98 - 3{,}88 = 1{,}1$ и $5{,}63 - 3{,}62 = 2{,}01$,

проверяем: $1{,}1 \le 1{,}42 \le 2{,}01$, верно

Метод 13. Пределы оценки средних двух небольших групп измерений и разницы между ними

- для каждого ряда по методу 2 определяем среднее a_1 и a_2
- для каждого ряда по методу 4 определяем размах вариации P_1 и P_2
- устанавливаем пределы для каждого среднего как $a \pm k_1\,\mathrm{P}$ и разницы между средними как $|a_1 - a_2| \pm k_2\,(\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2)$, где k – соответствующий коэффициент:

Число измерений	k_1 (95 %)	k_2 (95 %)	Число измерений	k_1 (95 %)	k_2 (95 %)
3	1,303	0,637	8	0,288	0,187
4	0,717	0,407	9	0,255	0,167
5	0,506	0,306	10	0,230	0,152
6	0,399	0,249	11	0,210	0,140
7	0,333	0,213	12	0,194	0,130

Пример. Имеем два ряда

(1)	1,73	2,5	3,18	3,18	3,58	3,68	4,41	5,48
(2)	4,01	4,16	4,82	5,34	5,35	6,37	7,12	7,82

Решение: число измерений $n = 8$,
общая сумма $T_1 = 1{,}73 + \cdots + 5{,}48 = 27{,}74$ и $T_2 = 4{,}01 + \cdots + 7{,}82 = 44{,}99$,

по методу 2 среднее $a = \dfrac{T}{n}$,

$a_1 = \dfrac{27{,}74}{8} = 3{,}47$ и $a_2 = \dfrac{44{,}99}{8} = 5{,}62$,

по методу 4 размах вариации $\mathrm{P}_1 = 5{,}48 - 1{,}73 = 3{,}75$ и $\mathrm{P}_2 = 7{,}82 - 4{,}01 = 3{,}81$,

из таблицы коэффициент $k_1 = 0{,}288$,

$a_1 \pm k_1\, \mathrm{P}_1 = 3{,}47 \pm 0{,}288 \cdot 3{,}75 = 3{,}47 \pm 1{,}08 = 2{,}39;\quad 4{,}55$

и $a_2 \pm k_1\, \mathrm{P}_2 = 5{,}62 \pm 0{,}288 \cdot 3{,}81 = 5{,}62 \pm 1{,}1 = 4{,}52;\quad 6{,}72$,

из таблицы коэффициент $k_2 = 0{,}187$,

$\left| a_1 - a_2 \right| \pm k_2 \left(\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 \right) = \left| 3{,}47 - 5{,}62 \right| \pm 0{,}187 \cdot (3{,}75 + 3{,}81) = 2{,}15 \pm 1{,}41 = 0{,}74;\quad 3{,}56$

Метод 14. Проверка грубости пределов оценки среднего

- устанавливаем пределы для среднего как $a \pm 2\,e$, где e – стандартная ошибка среднего
- определяем отклонения измерений от нижнего и верхнего пределов, ранжируем (присваиваем ранг – порядковый номер в вариационном ряду) их в порядке увеличения модуля
- проверяем условие $R - \dfrac{n\,(n+1)}{4} + 2\sqrt{\dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{24}} = 0$, где R – сумма рангов отклонений измерений, n – число измерений. Если условие не выполняется, то пределы оценки среднего грубые и должны быть уточнены

Пример. Имеем ряд:

4,01 4,14 4,16 4,82 4,98 5,11 5,34 5,35 5,64 6,37 7,12 7,82

Решение: число измерений $n = 12$,
общая сумма $T = 4{,}01 + \cdots + 7{,}82 = 64{,}86$,

среднее $a = \dfrac{T}{n} = \dfrac{64{,}86}{12} = 5{,}41$,

сумма квадратов $\Sigma = 4{,}01^2 + \cdots + 7{,}82^2 = 366{,}04$,

стандартное отклонение $\sigma = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\left(\Sigma - \dfrac{T^2}{n}\right)} = \sqrt{\dfrac{1}{12-1}\left(366{,}04 - \dfrac{64{,}86^2}{12}\right)} = 1{,}19$, стандартная ошибка среднего $e = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}19}{\sqrt{12}} = \pm 0{,}34$,

$a \pm 2\,e = 5{,}41 \pm 2 \cdot (\pm 0{,}34) = 5{,}41 \pm 0{,}68 = 4{,}73; \quad 6{,}09$,

отклонения измерений от нижнего предела 4,73:

[–0,72] [–0,59] [–0,57] 0,09 0,25 0,38 0,61 0,62 0,91 1,64 2,39 3,09

в квадратных скобках интересующие нас отрицательные значения, ранжируем:

1	0,09
2	0,25
3	0,38
[4]	–0,57
[5]	–0,59
6	0,61
7	0,62
[8]	–0,72

отклонения измерений от верхнего предела 6,09:

–2,08 –1,95 –1,93 –1,23 –1,11 –0,98 –0,75 –0,74 –0,45 [0,28] [1,03] [1,73]

в квадратных скобках интересующие нас положительные значения, ранжируем:

[1]	0,28
2	–0,45
3	–0,74
4	–0,75
5	–0,98
[6]	1,03
7	–1,11
8	–1,23
[9]	1,73

$$R - \frac{n\,(n+1)}{4} + 2\sqrt{\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{24}} = R - \frac{12\cdot(12+1)}{4} + 2\sqrt{\frac{12\cdot(12+1)\cdot(2\cdot 12+1)}{24}} =$$

$= R - 39 + 25 = R - 14 = 0$, где R – сумма рангов отклонений измерений,

для нижнего предела $R_{-} = 4 + 5 + 8 = 17$,

$R_{-} - 14 = 17 - 14 = 3 \neq 0$, нижний предел грубый и должен быть уточнён,

для верхнего предела $R_{+} = 1 + 6 + 9 = 16$,

$R_{+} - 14 = 16 - 14 = 2 \neq 0$, верхний предел грубый и должен быть уточнён