Лабораторная работа №3

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

1. Методические указания

Устойчивость САУ является одним из основных условий ее работоспособности и включает требование затухания во времени переходных процессов.

Система является устойчивой, если при ограниченном входном сигнале её выходной сигнал также является ограниченным. Если система устойчива, то она противостоит внешним воздействиям, а выведенная из состояния равновесия возвращается снова к нему. Система с расходящимся переходным процессом будет неустойчивой и неработоспособной.

Впервые свойства устойчивости были исследованы русским ученым А. М. Ляпуновым в 1892 г. в работе «Общая задача об устойчивости движения». Необходимое и достаточное условие устойчивости заключается в том, чтобы все корни характеристического уравнения (полюсы передаточной функции системы) имели отрицательные вещественные части. Иначе говоря, условием устойчивости системы является расположение всех полюсов в левой комплексной полуплоскости. Тогда все полюсы будут давать затухающую реакцию.

Выше сформулированное условие устойчивости справедливо как для линейных, так и для линеаризованных систем. Однако в случае нулевых или чисто мнимых корней характеристического уравнения вопрос об устойчивости линеаризованной системы может быть решен только на основании исследования ее нелинейных уравнений.

В конце XIX и первой половине XX в. задача вычисления корней характеристического уравнения высокого порядка вызывала большие проблемы. Поэтому были предложены несколько косвенных методов оценки устойчивости, позволяющих обойтись без вычисления корней – по значениям коэффициентов характеристического уравнения.

Критерии устойчивости разделяют на алгебраические и частотные. В частности, к алгебраическим критериям относится критерий Гурвица, к частотным критерия – критерий Найквиста.

Критерий Гурвица является алгебраическим критерием и применяется к коэффициентам характеристического уравнения замкнутой системы.

Пусть имеется характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0.$$

Из коэффициентов характеристического уравнения составляют матрицу по правилу:

1. По диагонали записываются коэффициенты от $a_{n\text{-}1}$ до a_0.
2. Каждая строка дополняется коэффициентами с возрастающими индексами слева направо так, чтобы чередовались строки с нечетными и четными индексами.
3. В случае отсутствия индекса, а также, если он меньше 0 или больше n, на его место пишется 0.

Таким образом, матрица Гурвица приобретает следующий вид:

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_2 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Критерий устойчивости формулируется так:

Чтобы система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы при $a_{n\,\text{В}} > 0$ были положительными все n диагональных определителей, получаемых из матрицы Гурвица.

Первые три определителя матрицы Гурвица имеют следующий вид:

$$\Delta_1 = a_{n\text{-}1}\,;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix};\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, критерий Гурвица позволяет судить об абсолютной устойчивости, но не дает возможности оценивать относительную устойчивость по корням характеристического уравнения.

Частотный критерий устойчивости Найквиста анализирует АФЧХ разомкнутой системы.

Пусть имеется ПФ разомкнутой системы $W(j\omega)$.

Для нахождения вещественной и мнимой части частотной ПФ нужно освободиться от мнимости в знаменателе путем умножения числителя и знаменателя на комплексную величину, сопряженную знаменателю, а затем выполнить разделение на вещественную и мнимую части (см. с. 20). Передаточная функция приобретает вид

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega).$$

Задаваясь различными значениями частоты, можно найти множество пар: $\{P(\omega_1); jQ(\omega_1)\}$, $\{P(\omega_2); jQ(\omega_2)\}$, ..., $\{P(\omega_n); jQ(\omega_n)\}$. Затем по этим парам строится АФЧХ на комплексной плоскости.

Основные свойства АФЧХ разомкнутой системы:

1. Если разомкнутая система не имеет интегрирующих звеньев, то при $\omega = 0$ ее АФЧХ начинается на вещественной оси в точке $P(\omega)=K$ (где K – коэффициент усиления разомкнутой системы). Заканчивается АФЧХ в начале координат при $\omega \to \infty$ (рис. 1, *а*).

2. Если разомкнутая система имеет одно интегрирующее звено, то ее АФЧХ начинается при $\omega = 0$ в бесконечности на отрицательной мнимой полуоси, а заканчивается в начале координат при $\omega \to \infty$ (рис. 1, *б*).

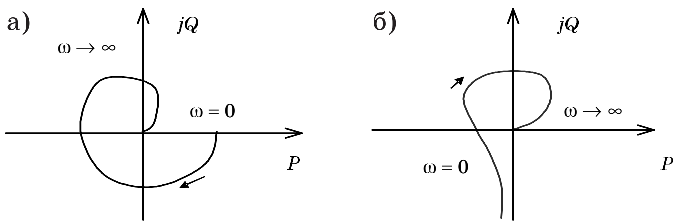

Рис. 1. АФЧХ разомкнутой системы

Критерий устойчивости Найквиста формулируется так:

1. Если разомкнутая система устойчива или находится на границе устойчивости, то для того чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы при изменении частоты ω от 0 до ∞ не охватывала точку с координатами $-1, j0$.

2. Если разомкнутая система неустойчива, а ее передаточная функция имеет m полюсов справа от мнимой оси на комплексной плоскости, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы при изменении частоты от ω от $-\infty$ до $+\infty$ охватывала m раз точку с координатами -1, $j0$.

При использовании этого критерия нужно учитывать две особенности:

1. Если разомкнутая система находится на границе устойчивости, то ее АФЧХ уходит в бесконечность. Для проверки критерия Найквиста нужно мысленно соединить конец АФЧХ дугой бесконечно большого радиуса с положительной вещественной полуосью.

2. На практике АФЧХ может строиться только для положительных частот ($0 \le \omega < +\infty$). При применении критерия Найквиста считается, что ветвь АФЧХ для отрицательных частот симметрична относительно вещественной оси.

Физический смысл критерия устойчивости Найквиста заключается в том, что система будет неустойчива, если фаза выходного сигнала противоположна фазе входного сигнала, а коэффициент усиления >1. Поэтому для анализа устойчивости можно использовать не АФЧХ, а ЛАХ системы (для минимально-фазовых систем). Система устойчива, если на частоте среза значение фазы не превышает $-\pi$. Соответственно для устойчивой системы можно рассматривать на ЛФЧХ запас устойчивости по фазе – расстояние от значения фазы на частоте среза до уровня $-\pi$, и запас устойчивости по амплитуде – расстояние от оси частот ЛАЧХ до значения усиления на частоте, где фаза становится равной $-\pi$.

2. Использование MatLab

Для проверки устойчивости САУ по Гурвицу постройте матрицу Гурвица и найдите ее детерминант (функция det). Затем, последовательно уменьшая размер матрицы, найдите значения всех диагональных детерминантов.

Пример:

```
>> A=[1 14 18; 2 5 2; 3 4 3]
A =
1 14 18
2 5 2
3 4 3
>> det(A)
ans = -119
>> A1=A(1:2, 1:2)
A1 =
1 14
2 5
>> det(A1)
ans = -23
```

Для проверки устойчивости САУ по Найквисту сначала нужно выяснить, является ли устойчивой разомкнутая система.

Пример. Пусть дана передаточная функция разомкнутой системы

$$W = \frac{2p+1}{2p^4+3p^3+2p^2+3p+1}.$$

Рассмотрим реакцию на скачок:

```
>> w=tf([2 1],[2 3 2 3 1])
>> step(w)
```

График переходного процесса показан на рис. 2.

Разомкнутая система неустойчива, и, согласно критерию Найквиста, надо, чтобы АФЧХ разомкнутой системы охватывала точку -1, $j0$ столько раз, сколько полюсов имеется справа от мнимой оси.

Для построения АФЧХ достаточно вызвать команду nyquist

```
>> nyquist(w)
```

Диаграмма Найквиста показана на рис. 3.

Как показывает рис. 3, АФЧХ ни разу не охватывает точку $-1, j0$, поэтому замкнутая система будет неустойчивой. Частотный критерий Найквиста можно использовать и в том случае, когда рассматривается не АФЧХ, а ЛАЧХ разомкнутой системы:

Замкнутая минимально-фазовая система устойчива, если при достижении ЛФЧХ значения $-\pi$ ЛАЧХ будет отрицательной.

Используя ЛАЧХ и ЛФЧХ, можно оценить запасы устойчивости системы по амплитуде и по фазе с помощью команды

```
>> margin(w)
```

Пример:

```
>> w=tf([10],[2 2 3 1]);
>> margin(w)
```

Соответствующий график показан на рис. 4.

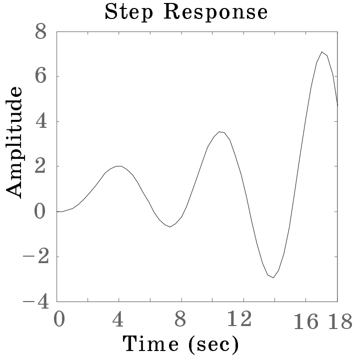

Рис. 2. Переходная реакция неустойчивой системы

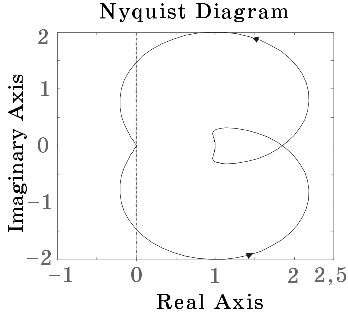

Рис. 3. Диаграмма Найквиста для неустойчивой системы

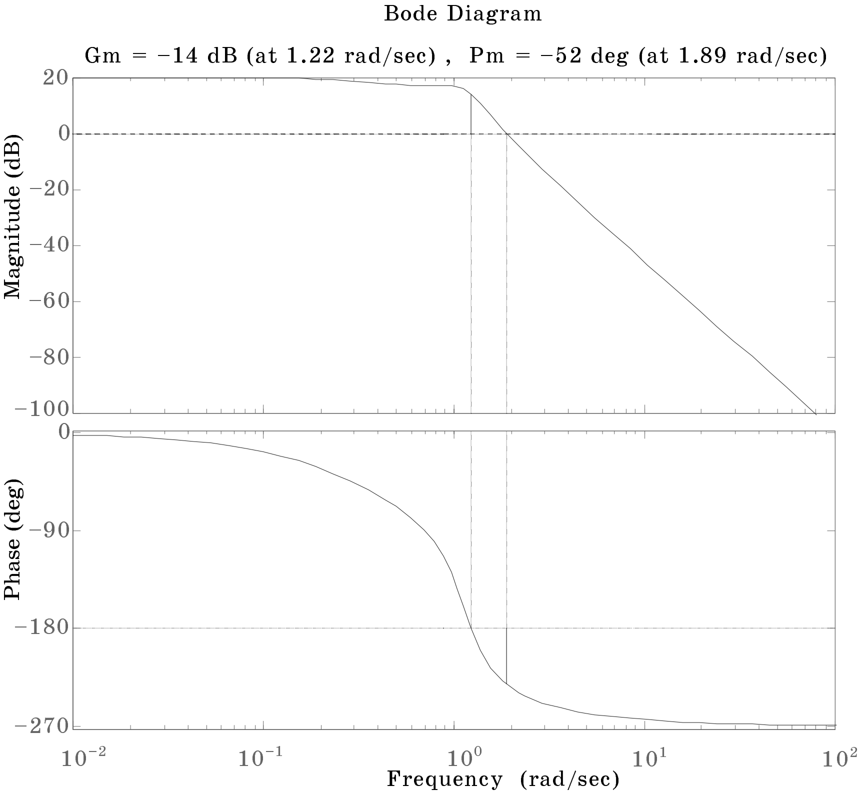

Рис. 4. Определение запасов устойчивости по амплитуде и по фазе

3. Задание на лабораторную работу

Выполнить исследование устойчивости замкнутой САУ по заданной передаточной функции разомкнутой системы. Варианты заданий приведены в таблице.

Отчет должен содержать:

– краткие теоретические сведения;

– переходную функцию разомкнутой системы;

– расчет передаточной функции замкнутой системы;

– расчетные выражения для обоснования устойчивости замкнутой системы по алгебраическому критерию Гурвица;

– годограф Найквиста разомкнутой системы, на основании которого делается вывод об устойчивости замкнутой системы;

– переходную функцию замкнутой системы;

– проверку полученных результатов путем компьютерного моделирования переходных процессов разомкнутой и замкнутой системы в MatLab Simulink;

– выводы по всем полученным результатам.

Таблица

Варианты заданий

№	Передаточная функция разомкнутой системы
1	$W = \dfrac{2}{s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 3s + 1}$
2	$W = \dfrac{1}{0,05s^4 + 0,1s^3 + s^2 + s + 1}$
3	$W = \dfrac{1}{0,1s^3 + 0,1s^2 + s + 1}$
4	$W = \dfrac{100}{5s^4 + 0,1s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$
5	$W = \dfrac{1}{8s^3 + 4s^2 + 2s + 1}$
6	$W = \dfrac{10}{s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1}$
7	$W = \dfrac{3}{0,1s^3 + 0,01s^2 + 0,1s + 1}$
8	$W = \dfrac{10}{2s^3 + 2s^2 + s + 1}$
9	$W = \dfrac{1}{s^3 + 0,1s^2 + 0,1s + 1}$
10	$W = \dfrac{10}{2s^5 + 3s^4 + 3s^3 + 0,5s^2 + 0,5s + 1}$