

Электродинамика и распространение радиоволн

Семинар 1

Русов Юрий Сергеевич

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

1. Изучить формулы и материалы лекции.
2. Изучить примеры решения задач.
3. Решить предлагаемые задачи.

Формулы

Векторное поле \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = A_{x_1}(x_1, x_2, x_3) \mathbf{1}_{x_1} + A_{x_2}(x_1, x_2, x_3) \mathbf{1}_{x_2} + A_{x_3}(x_1, x_2, x_3) \mathbf{1}_{x_3}.$$

Скалярное поле φ

$$\varphi(x_1, x_2, x_3)$$

Формулы

Градиент скалярного поля φ

$$\text{grad } \varphi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathbf{1}_{x_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \mathbf{1}_{x_2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \mathbf{1}_{x_3},$$

h_1, h_2 и h_3 — коэффициенты Ламэ.

декартова система координат (x, y, z)

$$h_x = h_y = h_z = 1;$$

цилиндрическая система координат (r, φ, z)

$$h_r = 1, \quad h_\varphi = r, \quad h_z = 1;$$

сферическая система координат (r, θ, φ)

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta.$$

Формулы

Дивергенция векторного поля **A** в произвольной системе координат

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 A_{x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 h_3 A_{x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 A_{x_3}) \right],$$

Формулы

Дивергенция векторного поля **A**

в декартовой системе координат

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} ;$$

в цилиндрической системе координат

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} ;$$

в сферической системе координат

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} ,$$

Формулы

Ротор векторного поля **A** в произвольной системе координат

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} = & \frac{\mathbf{l}_{x_1}}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_3 A_{x_3})}{\partial x_2} - \frac{\partial (h_2 A_{x_2})}{\partial x_3} \right] + \frac{\mathbf{l}_{x_2}}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial (h_1 A_{x_1})}{\partial x_3} - \frac{\partial (h_3 A_{x_3})}{\partial x_1} \right] + \\ & + \frac{\mathbf{l}_{x_3}}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial (h_2 A_{x_2})}{\partial x_1} - \frac{\partial (h_1 A_{x_1})}{\partial x_2} \right]. \end{aligned}$$

Формулы

Проекции ротора векторного поля **A**

в декартовой системе координат

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y};$$

Формулы

Проекции ротора векторного поля **A**

в цилиндрической системе координат

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z},$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r},$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_z = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right];$$

Формулы

Проекции ротора векторного поля **A**

в сферической системе координат

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_r = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\varphi) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right],$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_\vartheta = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right],$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_\varphi = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right],$$

Формулы

Дифференциальные операции со скалярными и векторными полями удобно записывать с помощью оператора Гамильтона

$$\text{grad } U = \nabla U, \quad \text{div } \mathbf{A} = \nabla \mathbf{A}, \quad \text{rot } \mathbf{A} = [\nabla \mathbf{A}].$$

Дифференциальная операция второго порядка, действующая на скалярное поле, задается оператором Лапласа

$$\nabla^2 = \Delta \equiv \text{div grad.}$$

Силовые линии поля

Для графического изображения векторных полей принято строить картину их силовых линий.

В каждой точке силовой линии вектор поля касателен к ней.

Там, где интенсивность поля больше, силовые линии проводят чаще, и наоборот.

Задача

В декартовой системе координат проекции векторного поля \mathbf{A} постоянны в каждой точке пространства:

$$A_x = A_0,$$

$$A_y = B_0,$$

$$A_z = 0.$$

Построить картину силовых линий векторного поля.

Задача

Скалярное поле φ задано в декартовой системе координат выражением

$$\varphi = 3x^2y \cos z + 2z^2.$$

Вычислить векторное поле $\text{grad } \varphi$.

Задача

Определить дивергенцию и ротор векторного поля, имеющего в декартовой системе координат единственную составляющую

$$A_x = 20 \sin (x/\pi).$$

Задание для самостоятельного решения

Решение должно быть выслано в день проведения семинара, только в этом случае учитывается присутствие студента. В решении обязательно должна быть показана подстановка исходных данных в формулы и учтены размерности величин.

Решение необходимо формировать в виде одного файла. Файл с решением должен иметь название в следующем формате:

Год_месяц_день_ЭДиРРВ_Семинар_1_группа_ФамилияИО

Например:

2022_03_23_ЭДиРРВ_Семинар_1_РЛ1-41_ИвановИИ

Основная литература по дисциплине

1. Голубева Н.С., Митрохин В.Н. Основы радиоэлектроники сверхвысоких частот: учеб. пособие для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 486 с. ISBN 5-7038-2740-X. Режим доступа: <http://ebooks.bmstu.ru/catalog/205/book1163.html>
2. Кугушев А.М., Голубева Н.С., Митрохин В.Н. Основы радиоэлектроники. Электродинамика и распространение радиоволн. Учеб. пособие для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 368 с.

Дополнительные учебные материалы

1. Сборник задач по курсу «Электродинамика и распространение радиоволн»: учеб. пособие / Баскаков С.И., Карташев В.Г., Лобов Г.Д., Филатова Е.А., Штыков В.В.; Под ред. С.И. Баскакова. М.: Высшая школа, 1981. 208 с.