# Электродинамика и распространение радиоволн

## Лекции

Русов Юрий Сергеевич

# 1 ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И СРЕДЫ

## 1.9 Уравнения электромагнитного поля в частных производных второго порядка (волновые уравнения)

**Уравнения для напряженностей поля.** Первое и второе уравнения Максвелла с учетом уравнений состояния среды (1.7) можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \varepsilon_a \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.14)$$

# Волновые уравнения

Для определения волнового уравнения напряженности электрического поля возьмем rot от обеих частей второго уравнения системы (1.14)

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\mu_a \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,\mathbf{H}.$$

Подставляя сюда $\mathrm{rot}\,\mathbf{H}$ из первого уравнения системы (1.14), получаем волновое уравнение

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} + \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_a \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}. \qquad (1.15)$$

Если свободные заряды отсутствуют (ρ = 0), то $\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 0$

и $$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} - \Delta\mathbf{E} = -\Delta\mathbf{E}.$$

При этом уравнение (1.15) примет вид

$$\Delta \mathbf{E} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_a \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}. \qquad (1.16)$$

Аналогичным образом, взяв rot от обеих частей первого уравнения системы (1.14) и подставляя $\operatorname{rot}\mathbf{E}$ из второго уравнения, получим волновое уравнение для напряженности магнитного поля

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{rot}\mathbf{E}\right) + \operatorname{rot}\mathbf{J} = -\mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \operatorname{rot}\mathbf{J}.$$

$$\Delta \mathbf{H} - \mu_a \varepsilon_a \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot}\mathbf{J}. \qquad (1.17)$$

# *Волновые уравнения*

Векторные уравнения (1.16) и (1.17) эквивалентны шести скалярным, в то время как уравнения Максвелла (I–IV) эквивалентны восьми скалярным уравнениям.

Уравнения (1.16) и (1.17) называются неоднородными векторными волновыми уравнениями или уравнениями Даламбера.

**Уравнения для электромагнитных потенциалов.** Эти уравнения получим для линейной среды. Из уравнения Максвелла (IV)

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$$

следует, что поле магнитной индукции соленоидально, и вектор **B** можно представить в виде

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A},$$

где **A** – векторный электромагнитный потенциал.

Если среда линейна, то

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a}\operatorname{rot}\mathbf{A}. \qquad (1.18)$$

# Волновые уравнения

Подставляя (1.18) в (II), получим

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E}+\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)=0.$$

Используем соотношение

$$\mathbf{E}+\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}=\operatorname{grad}(-\varphi).$$

Отсюда

$$\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad (1.19)$$

где $\varphi$ – электромагнитный скалярный потенциал.

## Волновые уравнения

Потребуем, чтобы **E** и **H**, выраженные через **A** и φ, удовлетворяли уравнению (I). Подставим (1.18) и (1.19) в (I)

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A} = \mu_a \mathbf{J} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial}{\partial t}\left( -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\varphi \right).$$

Преобразуя $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, получим

$$-\Delta \mathbf{A} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \nabla\left( \nabla \mathbf{A} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \mu_a \mathbf{J}. \quad (1.20)$$

Это векторное уравнение эквивалентно трем скалярным, связывающим четыре скалярных величины $A_i$ и φ.

## Волновые уравнения

Для того чтобы решить уравнение (1.20), необходимо ввести дополнительное условие для потенциалов **A** и $\varphi$, называемое условием калибровки

$$\nabla \mathbf{A} + \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \qquad (1.21)$$

Тогда (1.20) переходит в уравнение

$$\Delta \mathbf{A} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_a \mathbf{J}. \qquad (1.22)$$

## Волновые уравнения

Уравнение для $\varphi$ найдем подстановкой (1.19) в (III)

$$-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\mathbf{A}-\Delta\varphi=\frac{\rho}{\varepsilon_a},$$

Подставляя значение $\nabla\mathbf{A}$ из (1.21), получим

$$\Delta\varphi-\varepsilon_a\mu_a\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_a}. \qquad (1.23)$$

## Волновые уравнения

Уравнения (1.22) и (1.23) представляют собой неоднородные волновые уравнения, связывающие скалярный и векторный потенциалы с величинами плотностей заряда $\rho$ и тока **J**.

Введение электромагнитных потенциалов **A** и $\varphi$ упрощает решение задач электродинамики, так как решение уравнений сводится к определению четырех величин (трех проекций **A** и $\varphi$) вместо шести (проекций **E** и **H**); **E** и **H** находятся простым дифференцированием выражений (1.18) и (1.19).

## Волновые уравнения

Два поля физически тождественны, если они характеризуются одними и теми же векторами **E** и **H**. Если заданы потенциалы **A** и $\varphi$, то согласно (1.18) и (1.19) однозначно определены **E** и **H**, а значит, и поле. Однако одному и тому же полю могут соответствовать разные потенциалы. Если в выражения (1.18) и (1.19) подставить

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f, \qquad \varphi' = \varphi - \frac{\partial f}{\partial t}, \qquad (1.24)$$

где *f* – произвольная функция от координат и времени, то **E** и **H** не изменяются. Таким образом, преобразование потенциалов вида (1.24) не изменяет поля. Такая инвариантность называется градиентной. При наложении калибровочного условия (1.21) электромагнитные потенциалы определяются однозначно.

**Вектор Герца.** Потенциалы **A** и φ, удовлетворяющие условию калибровки (1.21), можно выразить через вектор **Z** – поляризационный потенциал или вектор Герца:

$$\mathbf{A} = \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}, \quad \varphi = -\operatorname{div} \mathbf{Z}. \qquad (1.25)$$

Эти выражения удовлетворяют уравнению калибровки (1.21).

Подставляя выражения (1.25) в уравнение (1.22) или (1.23), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2 \mathbf{Z} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2}\right) = -\frac{\mathbf{J}}{\varepsilon_a} \qquad (1.26)$$

## Волновые уравнения

или

$$\Delta \mathbf{Z} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{p}}{\varepsilon_a}, \tag{1.27}$$

где вектор $\mathbf{p} = \int \mathbf{J}\, \mathrm{d}t$

– называется вектором поляризации по аналогии. С током свободных разрядов он связан также

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}$$

как истинный вектор поляризации **P** (вектор поляризации единицы объема диэлектрика) с током поляризации

$$\mathbf{J}_{\text{пол}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}.$$

# *Волновые уравнения*

Подставляя (1.25) в (1.18) и (1.19), получим

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{Z},\\ \mathbf{H} &= \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{Z}.\end{aligned}\right\} \qquad (1.28)$$

# Волновые уравнения

Сравнивая уравнения (1.16), (1.17), (1.22), (1.23) и (1.27) для напряженностей поля **E** и **H**, потенциалов **A** и φ, вектора Герца **Z**, видим, что все эти величины удовлетворяют одинаковым уравнениям вида

$$\Delta\mathbf{F} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathbf{F}}{\partial t^2} = -\boldsymbol{\chi}, \qquad (1.29)$$

где $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}(\rho, J, t)$, $\quad v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}$.

Решение уравнения (1.29) имеет вид

$$F(r,t) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \frac{\boldsymbol{\chi}(t - r/v)}{r}\,\mathrm{dV}.$$

## Волновые уравнения

Учитывая в (1.16), (1.17), (1.22), (1.23) и (1.27) значение $\boldsymbol{\chi}(t-r/v)$, получим следующие выражения:

для запаздывающего скалярного потенциала

$$\varphi(t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int_V \frac{\rho(t-r/v)}{r}\,\mathrm{d}V, \tag{1.30}$$

для запаздывающего векторного потенциала

$$\mathbf{A}(t)=\frac{\mu_a}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}(t-r/v)}{r}\,\mathrm{d}V, \tag{1.31}$$

для запаздывающего потенциала Герца

$$\mathbf{Z}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int_V \frac{\mathbf{p}(t-r/v)}{r}\,\mathrm{d}V. \tag{1.32}$$

Во многих случаях объемное распределение токов и зарядов можно заменить их линейным распределением по проводнику, тогда выражения (1.30) и (1.31) примут вид

$$\varphi(t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a} \int_L \frac{\tau(t - r/v)}{r} \mathrm{d}l, \qquad (1.33)$$

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_L \frac{I(t - r/v)}{r} \mathrm{d}\mathbf{l}, \qquad (1.34)$$

где $\tau$ – линейная плотность заряда; *I* – ток.

# Волновые уравнения

Из полученных выражений видно, что потенциалы в любой точке переменного поля, отстоящей от источника на расстоянии *r*, в любой момент времени *t* определяются плотностью зарядов и токов источников в предшествующий момент $t - r/v$.

Поэтому эти потенциалы называются запаздывающими. Здесь $r/v$ – время, необходимое для распространения поля от источника к исследуемой точке.

Электромагнитное поле возбуждается зарядами и токами проводимости и распространяется от места возбуждения с конечной скоростью $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}$.

В воздухе скорость распространения электромагнитных волн равна скорости света.

## 1.10 Классификация электромагнитных полей

Классификация электромагнитных полей основана на зависимости векторов поля **E** и **H** от времени.

**Нестационарное** поле, или быстро изменяющееся во времени поле, создается неравномерно движущимися зарядами. Это поле в линейной среде описывается всей системой уравнений Максвелла (I–IV) и волновыми уравнениями (1.16), (1.17), (1.22), (1.23) и (1.27).

Электромагнитные потенциалы и напряженности поля связаны соотношениями (1.18) и (1.19).

Уравнения состояния для сред записываются в форме (1.7), граничные условия приведены в § 1.7.

## *Классификация электромагнитных полей*

При быстро изменяющемся во времени поле составляющие

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

в уравнениях Максвелла (I) и (II) значительны, т. е. электромагнитное поле в этом случае может распространяться вдали от зарядов и токов, создающих поле.

## Классификация электромагнитных полей

**Квазистационарное**, или медленно изменяющееся во времени поле, также создается неравномерно движущимися зарядами ( $\mathbf{J} = \mathbf{J}(t)$ ). Однако скорость изменения процесса в этом случае много меньше, чем в предыдущем.

Квазистационарное поле описывается теми же уравнениями Максвелла, что и нестационарное. Изменяется лишь первое уравнение. При наличии тока проводимости в этом уравнении можно пренебречь током смещения, так как для квазистационарных процессов

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} << \mathbf{J}.$$

В этом случае уравнение Максвелла (I) будет иметь вид

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} \approx \mathbf{J}.$$

Остальные уравнения останутся без изменения. Излучение во внешнее пространство электромагнитной энергии из-за малости производных

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$ незначительно.

Электромагнитное поле концентрируется около зарядов и проводников с током.

Учитывая малость $\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$

по сравнению с другими составляющими, можно переписать уравнения Даламбера в виде:

$$\left.\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} &\approx -\mu_a \mathbf{J}, \\ \Delta \varphi &\approx -\rho / \varepsilon_a . \end{aligned}\right\} \qquad (1.35)$$

Решение этих уравнений, называемых уравнениями Пуассона, имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \frac{\mu_a}{4\pi}\int\limits_V \frac{\mathbf{J}(t)}{r}\,\mathrm{d}V, \\ \varphi(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int\limits_V \frac{\rho(t)}{r}\,\mathrm{d}V. \end{aligned}\right\} \qquad (1.36)$$

Выражения для напряженностей поля через электромагнитные потенциалы, уравнения состояния среды и граничные условия те же, что и в случае нестационарного поля.

## *Классификация электромагнитных полей*

Понятие быстроты электромагнитного процесса относительно. Если область достаточно мала, то при любой скорости изменения процесс, протекающий в ней, можно рассматривать как квазистационарный.

В области, значительной по размерам, проявятся все особенности этого процесса как быстропеременного.

К квазистационарным полям относятся поля, создаваемые переменным током, текущим в проводах.

## *Классификация электромагнитных полей*

**Стационарное поле** – поле, не меняющееся во времени, создается равномерно движущимися зарядами (поле постоянного тока). Это поле описывается уравнениями Максвелла, в которых

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0.$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Излучение электромагнитного поля отсутствует.

Стационарное поле создается около проводов, по которым течет постоянный ток.

# Классификация электромагнитных полей

Уравнения состояния среды и граничные условия не изменяются. Электромагнитные потенциалы находятся решением уравнений Пуассона

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_a}{4\pi}\int_V \frac{\mathbf{J}}{r}\,\mathrm{d}V, \qquad \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int_V \frac{\rho}{r}\,\mathrm{d}V. \tag{1.37}$$

Напряженности поля связаны с электромагнитными потенциалами согласно (1.18) и (1.19) соотношениями

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a}\operatorname{rot}\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi.$$

Уравнения стационарного поля не являются какими-то приближениями исходных уравнений Максвелла, а точно соответствуют определенному частному случаю.

**Статические поля** характеризуются независимостью от времени и полным отсутствием движения зарядов (т. е. **J** = 0).

Исходные уравнения и граничные условия в этом случае имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \\ &\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho, \\ &\mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}, \\ &E_{\tau(1)} = E_{\tau(2)}, \\ &D_{n(1)} - D_{n(2)} = \kappa \end{aligned}\right\} \quad (1.38) \qquad \left.\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0, \\ &\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \\ &\mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}, \\ &H_{\tau(1)} = H_{\tau(2)}, \\ &B_{n(1)} = B_{n(2)} \end{aligned}\right\} \quad (1.39)$$

## *Классификация электромагнитных полей*

Уравнения разбиваются на две независимые системы; в одну из них входят только электрические величины, в другую – только магнитные.

Уравнения (1.38) описывают электростатические поля. Так как $\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=0,$ то поле потенциально и

$$\mathbf{E}=-\mathrm{grad}\,\varphi,$$

где $\varphi$ – электростатический потенциал, удовлетворяющий уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi=-\rho/\varepsilon_a\,.$$

Решение этого уравнения

$$\varphi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_a}\int\limits_V\frac{\rho}{r}\,\mathrm{d}V.$$

## *Классификация электромагнитных полей*

Уравнения (1.39) описывают магнитостатические поля. Первое уравнение позволяет формально записать

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \varphi_{\text{M}},$$

где $\varphi_{\text{M}}$ – магнитостатический потенциал, который, как видно из второго уравнения (1.39), удовлетворяет уравнению Лапласа.

Так как граничные условия для **H** совпадают с граничными условиями для **E** электростатической задачи, то решения магнитостатической задачи совпадают с решениями соответствующей электростатической задачи и могут быть получены из них простой заменой **E** на **H** и $\varepsilon_a$ на $\mu_a$.