Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Факультет «Радиоэлектроника и лазерная техника(РЛ)»

Кафедра «Радиоэлектронные системы и устройства(РЛ1)»

Домашнее задание №2

по дисциплине

«Электродинамика и распространение радиоволн»

Вариант № 12

Выполнил ст. группы РЛ6-41

Филимонов С.В.

Проверил Русов Ю.С.

Оценка в баллах_________

Москва, 2022

Задание № 1

Условие.

В прямоугольном волноводе сечением 23x10 мм^2 распространяется волна типа H10. Волновод заполнен диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ε_r = (1+0,25·M+0,01·N) и относительной магнитной проницаемостью μ_r = 1. Амплитуда напряжённости электрического поля в центре волновода равна (M+2,4·N)·10^4 В/м. Частота колебаний (1+0,008·N)·10 ГГц. Записать выражения для составляющих поля волны, определить мощность, передаваемую волной, фазовую и групповую скорости, длину волны в волноводе, а также плотности поверхностных токов на стенках (плотности поверхностных токов записать в виде выражений для четырех стенок).

Дано:

M = 5, N = 12

a = 23 [мм], b = 10 [мм]

$\varepsilon_r = 2,37$

$\mu_r = 1$

$f = 10,96\ [\text{ГГц}]$

$E_0 = 338000\ \left[\frac{В}{м}\right]$

Решение.

Поле H_{10} в прямоугольном волноводе:

$$\dot{H_{m3}} = H \cdot \cos\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \cdot e^{-jk_0 x_3}$$

$$\dot{H_{m1}} = i \cdot \frac{2a}{\lambda} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \cdot H \cdot \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \cdot e^{-jk_0 x_3}$$

$$\dot{E_{\text{m2}}} = -i \cdot \frac{2a}{\lambda} \cdot Z_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \cdot e^{-\text{jk}_0 x_3}$$

$$\dot{H_{\text{m2}}} = 0;\ \dot{E_{\text{m1}}} = 0;\ \dot{E_{\text{m3}}} = 0$$

Критическая длина волны для поля H_{10} в прямоугольном волноводе

$$\lambda_{\text{кр}} = 2a \Longrightarrow \lambda_{\text{кр}} = 2 \cdot 0,023 = 0,046\ [\textit{м}].$$

Длина волны в среде волновода, при условии что она не ограничена

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}},$$

где λ_0 - длина волны в воздухе.

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,096 \cdot 10^{10}} = 0,027\ [\textit{м}],$$

$$\lambda = \frac{0,0283}{\sqrt{2,12}} = 0,017\ [\textit{м}].$$

Длина волны в волноводе

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} = \frac{0,017}{\sqrt{1 - \left(\frac{0,017}{0,046}\right)^2}} = 0,019[\textit{м}].$$

Продольная постоянная распространения

$$k_0 = k \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2},$$

$$k_0 = \frac{2\pi}{0,017} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0,017}{0,046}\right)^2} = 325,916\ \left[\frac{1}{\textit{м}}\right].$$

Характеристическое сопротивление среды, заполняющие волновод

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{1,25 \cdot 10^6}{2,37 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}} = 244,12\ [\text{Ом}].$$

Характеристическое сопротивление волновода для волны H_{10}

$$Z_{\text{OH}} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} = \frac{244,12}{\sqrt{1 - \left(\frac{0,017}{2 \cdot 0,023}\right)^2}} = 264,69\ [\text{Ом}].$$

Определим масштабный множитель H

$$|\dot{E_{m2}}| = \frac{2a}{\lambda} Z_0 H \cdot \sin\frac{\pi}{a} \cdot \frac{a}{2} = \frac{2a}{\lambda} Z_0 H \Longrightarrow$$

$$H = \frac{|\dot{E_{m2}}| \cdot \lambda}{2a \cdot Z_0} = \frac{E_0 \cdot \lambda}{2a \cdot Z_c}$$

$$H = \frac{0,017 \cdot 3,38 \cdot 10^6}{0,046 \cdot 244,123} = 533 \left[\frac{A}{м}\right].$$

Выразим для составляющих поля в численном виде

$$\dot{H_{mx_3}} = 533 \cdot \cos\left(\frac{\pi x_1}{0,023}\right) \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot x_3} \left[\frac{A}{м}\right]$$

$$\dot{H_{mx_1}} = i \cdot \frac{2 \cdot 0,023}{0,017} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0,017}{2 \cdot 0,023}\right)^2} \cdot 533 \cdot \sin\left(\frac{\pi x_1}{0,023}\right) \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot x_3} \left[\frac{A}{м}\right],$$

$$\dot{H_{mx_1}} = i \cdot 1340 \cdot \sin\left(\frac{\pi x_1}{0,023}\right) \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot z} \left[\frac{A}{м}\right],$$

$$\dot{E_{mx_2}} = -i \cdot \frac{2 \cdot 0,023}{0,017} \cdot 244,12 \cdot \sin\left(\frac{\pi x_1}{0,023}\right) \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot x_3} \left[\frac{B}{м}\right],$$

$$\dot{E_{mx_2}} = -i \cdot 660,56 \cdot \sin\left(\frac{\pi x_1}{0,023}\right) \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot x_3} \left[\frac{B}{м}\right],$$

$$\dot{H_{m2}} = 0 \left[\frac{A}{м}\right];\ \dot{E_{m1}} = 0 \left[\frac{B}{м}\right];\ \dot{E_{m3}} = 0 \left[\frac{B}{м}\right].$$

Мощность, передаваемая волноводом. Мощность, переносимая волной любого типа в волноводе

$$P_0 = \frac{1}{2} \int_S Re\left\{\vec{z_0} \cdot \left[\vec{\dot{E}}, \overrightarrow{\dot{H}^*}\right]\right\} dS,$$

где $\vec{z_0}$ – орт оси, вдоль которой распростаняется волна.

Для волны H_{10} в прямоугольном волноводе

$$P_0 = \frac{\mathrm{ab}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}{4Z_0} E_0^2,$$

$$P_0 = \frac{0,023 \cdot 0,01 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0,017}{2 \cdot 0,023}\right)^2}}{4 \cdot 244,12} \cdot (3,38 \cdot 10^6)^2 = 24817 \, [\text{Вт}].$$

Фазовая и групповая скорость

$$\upsilon_\phi = \frac{\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} = \frac{\frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2,37 \cdot 1}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{0,017}{0,046}\right)^2}} = 2,11 \cdot 10^8 \left[\frac{м}{с}\right],$$

$$\upsilon_г = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2,37 \cdot 1}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0,017}{0,046}\right)^2} = 1,79 \cdot 10^8 \left[\frac{м}{с}\right].$$

Плотность поверхностных токов

$$\overrightarrow{J_{\text{пов}}} = \left[\overrightarrow{n_0} \overrightarrow{H}\right],$$

1) На левой стенке

$$\overrightarrow{n_{\text{ол}}} = [0, \ 1, \ 0]$$

Составляющие поля ($x_1 = 0$)

$$\dot{H}_{\text{m3}}|_{x_1=0} = 533 \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot x_3} \left[\frac{A}{м}\right]$$

$$\dot{H}_{\text{m2}}|_{x_1=0} = 0 \left[\frac{A}{м}\right]$$

$$\dot{H}_{\text{m1}}|_{x_1=0} = 0 \left[\frac{A}{м}\right]$$

$$\overrightarrow{j_{\text{пов.л.}}} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{e_{x_1}} & \overrightarrow{e_{x_2}} & \overrightarrow{e_{x_3}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{H}_{\text{m3}} \end{bmatrix} = -\dot{H}_{\text{m3}} \cdot \overrightarrow{e_{x_2}} \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{j_{\text{пов.л.}x_1}} = \overrightarrow{j_{\text{пов.л.}x_3}} = 0 \left[\frac{A}{м}\right]$$

$$\overrightarrow{j_{\text{пов.л.}x_2}} = -533 \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot x_3} \left[\frac{A}{м}\right]$$

2) На правой стенке

$$\overrightarrow{n_{\text{оп}}} = [-1, 0,\ 0]$$

Составляющие поля ($x_1 = a$)

$$\dot{H_{m3}}\big|_{x=a} = 533 \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot x_3} \left[\frac{A}{м}\right]$$

$$\dot{H_{m2}}\big|_{x=a} = 0 \left[\frac{A}{м}\right]$$

$$\dot{H_{m1}}\big|_{x=a} = 0 \left[\frac{A}{м}\right]$$

$$\overrightarrow{j_{\text{пов.}n.}} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{e_{x_1}} & \overrightarrow{e_{x_2}} & \overrightarrow{e_{x_3}} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{H_{m3}} \end{bmatrix} = \dot{H_{m3}} \cdot \overrightarrow{e_{x_2}} \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{j_{\text{пов.}n.x_1}} = \overrightarrow{j_{\text{пов.}n.x_3}} = 0 \left[\frac{A}{м}\right]$$

$$\overrightarrow{j_{\text{пов.}n.x_2}} = 533 \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot x_3} \left[\frac{A}{м}\right]$$

3) На верхней стенке

$$\overrightarrow{n_{\text{ов}}} = [0,\ -1,\ 0]$$

Составляющие поля не зависят от x_2

$$\overrightarrow{j_{\text{пов.}в.}} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{e_{x_1}} & \overrightarrow{e_{x_2}} & \overrightarrow{e_{x_3}} \\ 0 & -1 & 0 \\ \dot{H_{m1}} & 0 & \dot{H_{m3}} \end{bmatrix} = -\overrightarrow{e_{x_1}}\dot{H_{m3}} + \overrightarrow{e_{x_3}}\dot{H_{m1}} \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{j_{\text{пов.}в.x_1}} = 533 \cdot \cos\left(\frac{\pi x_1}{0,023}\right) \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot x_3} \left[\frac{A}{м}\right]$$

$$\overrightarrow{j_{\text{пов.}в.x_2}} = 0 \left[\frac{A}{м}\right]$$

$$\overrightarrow{j_{\text{пов.}в.x_3}} = -i \cdot 1340 \cdot \sin\left(\frac{\pi x_1}{0,023}\right) \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot x_3} \left[\frac{A}{м}\right]$$

4) На нижней стенке

$$\overrightarrow{n_{\text{он}}} = [0, 1, 0]$$

Составляющие поля не зависят от x2

$$\overrightarrow{j_{\text{пов.}н.}} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{e_{x_1}} & \overrightarrow{e_{x_2}} & \overrightarrow{e_{x_3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dot{H_{\text{m1}}} & 0 & \dot{H_{\text{m3}}} \end{bmatrix} = \overrightarrow{e_{x_1}} \dot{H_{\text{m3}}} - \overrightarrow{e_{x_3}} \dot{H_{\text{m1}}} \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{j_{\text{пов.}н.x_1}} = -533 \cdot \cos\left(\frac{\pi x_1}{0,023}\right) \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot x_3} \left[\frac{A}{м}\right],$$

$$\overrightarrow{j_{\text{пов.}н.x_2}} = 0 \left[\frac{A}{м}\right],$$

$$\overrightarrow{j_{\text{пов.}н.x_3}} = i \cdot 1340 \cdot \sin\left(\frac{\pi x_1}{0,023}\right) \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot x_3} \left[\frac{A}{м}\right].$$

Задание № 2

Условие.

В круглом заполненном воздухом волноводе диаметром (1+0,12·M+0,1·N)·5 см распространяется волна типа H_{11}. Частота колебаний 5 ·(1+0,012·N) ГГц, передаваемая мощность (1+0,012·M)· 1 кВт. Определить максимальное значение напряжённости электрического поля в волноводе.

Дано:

$M = 5, N = 12$

$d = 0,14$ [м]

$f = 5,132$ [ГГц]

$P_0 = 1060$ [Вт]

$\varepsilon_r = 1$

$\mu_r = 1$

Решение.

Для начала определим радиус волновода

$$a = \frac{d}{2} = \frac{0,14}{2} = 0,07\ [м].$$

Длина волны в среде волновода (среда неограниченная)

$$\lambda = \frac{c}{f}, (\varepsilon_r = \mu_r = 1)$$

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{5,132 \cdot 10^9} = 0,058\ [м].$$

Волновое сопротивление среды

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120 \cdot \pi = 377\ [Ом].$$

Критическая длина волны для H_{11}

$$\lambda_{\text{кр}} = 3,41 \cdot a = 3,41 \cdot 0,07 = 0,23\ [м].$$

Мощность, переносимая волной любого типа в волноводе

$$P_0 = \frac{1}{2}\int_S \ Re\left\{\vec{z_0} \cdot \left[\vec{\dot{E}}, \vec{\dot{H}^*}\right]\right\} dS,$$

где $\vec{z_0}$ – орт оси, вдоль которой распростаняется волна.

Для волны H11 в круглом волноводе

$$P_{\text{ср}} = \frac{\pi a^2 E_0^2}{4,28 \cdot Z_0}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}, \Longrightarrow E_0 = \sqrt{\frac{4,28 \cdot Z_0 \cdot P_{\text{ср}}}{\pi a^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}},$$

$$E_0 = \sqrt{\frac{4,28 \cdot 377 \cdot 1060}{\pi \cdot 0,07^2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0,058}{0,23}\right)^2}}} = 10705\ \left[\frac{В}{м}\right].$$

Задание № 3

Условие.

При каком диаметре круглого волновода, заполненного диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ε_r = (M+0,055·N) и относительной магнитной проницаемостью μ_r = 1, в нем может распространяться только основной тип волны на частоте (1+0,055·N)·12 ГГц.

Дано:

$M = 5, N = 12$

$\varepsilon_r = 5,66$

$\mu_r = 1$

$f = 19,92\ [\text{ГГц}]$

Решение.

Критическая длина волны типа H_{11}

$$\lambda_{\text{кр}} = 3,41 \cdot a,$$

где a - радиус сечения волновода. Исходя из условия распространения для волны типа H_{11}

$$\lambda < \lambda_{\text{кр}\,H_{11}} = 3,41 \cdot a,$$

и условия распространения в волноводе только основного типа волны

$$f_{\text{кр}\,H_{11}} \le f < f_{\text{кр}\,E_{01}} \text{ или } \lambda_{\text{кр}\,E_{01}} < \lambda \le \lambda_{\text{кр}\,H_{11}}.$$

Критическая длина волны для поля E_{01}

$$\lambda_{\text{кр}\,E_{01}} = 2,61 \cdot a.$$

Длина волны в неограниченной среде волновода

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}} = \frac{c}{f \cdot \sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}},$$

где λ_0 - длина волны в воздухе, а с - скорость света в вакууме.

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{1,92 \cdot 10^{10} \cdot \sqrt{5,6 \cdot 1}} = 0,006 \, [м].$$

Тогда

$$2,61 \cdot a < 0,006 \leq 3,41 \cdot a,$$

$$1,86 \, [мм] < a \leq 2,43 [мм] \Longrightarrow 3,71 \, [мм] < d \leq 4,85 \, [мм].$$

Задание № 4

Условие.

В волноводе квадратного сечения с размерами a = b = 7,2 мм, заполненном воздухом, стенки которого сделаны из материала с проводимостью σ = (0,5·M+0,011·N)·10^7 См/м, распространяется волна типа H_{11}. Определить частоту поля, при которой затухание минимально, минимальное значение коэффициента затухания и диапазон частот, в пределах которого значение коэффициента затухания отличается от минимального не более чем на 10%. Показать этот диапазон на графике. При расчётах учитывать только потери в металле.

Дано:

$M = 5, N = 12$

$a = b = 7,2\ [\text{мм}]$

$\sigma = 26320000\ \left[\frac{\text{См}}{м}\right]$

$\mu_r = \varepsilon_r = 1$

Решение.

Потери в волноводе

$$\alpha = \alpha_M + \alpha_Д,$$

где $a_м$ - коэффициент ослабления в металле и $a_д$ -коэффициент ослабления в диэлектрике. Так как средой, заполняющей волновод, является воздух, потерями в диэлектрике можно пренебречь

$$(\alpha_Д \longrightarrow 0), \Longrightarrow \alpha \approx \alpha_M.$$

Коэффициент ослабления за счёт потерь в металлических стенках для любого типа волны в волноводе произвольного поперечного сечения площадью S

$$\alpha_M = \frac{1}{2}\frac{R_s\int_L |\dot{H}_\tau|^2 dl}{\int_S Re\left[\overrightarrow{\dot{E}}, \overrightarrow{\dot{H}^*}\right] dS}$$

Коэффициент ослабления в металле для волны типа H_{11}

$$\alpha_M = \frac{2R_s}{Z_0 b\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2}}\left(\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2 + \left(1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2\right)\cdot\frac{\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}n^2+m^2\right)}{\frac{b^2}{a^2}n^2+m^2}\right),$$

Так как a = b = 7,2 [мм], а m = n = 1, то

$$\alpha_M = \frac{2R_s}{Z_0 a\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}\left(1+\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2\right),$$

где

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{\chi} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{0,072}\right)^2+\left(\frac{1}{0,072}\right)^2}} = 0,0102\ [м],$$

это критическая длина волны для поля H_{11},

$$\lambda_0 = \frac{c}{f},$$

длина волны в среде волновода, где c - скорость света.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\cdot\pi = 377\ [\text{Ом}],$$

волновое сопротивление среды и

$$R_s = \sqrt{\frac{w\mu_a}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{\pi f\,\mu_r\mu_0}{\sigma}},$$

поверхностное сопротивление металла.

$$\alpha_M = \frac{2\cdot\sqrt{\frac{\pi\cdot f\cdot 1,25\cdot 10^{-6}}{2,62\cdot 10^7}}}{377\cdot 0,0072\cdot\sqrt{1-\left(\frac{3\cdot 10^8}{0,0102\cdot f}\right)^2}}\left(1+\left(\frac{3\cdot 10^8}{0,0102\cdot f}\right)^2\right),$$

$$\alpha_M = \frac{2,85 \cdot 10^{-7} \cdot \sqrt{f}}{\sqrt{1 - \frac{8,41 \cdot 10^{20}}{f^2}}} \left(1 + \frac{8,41 \cdot 10^{20}}{f^2}\right).$$

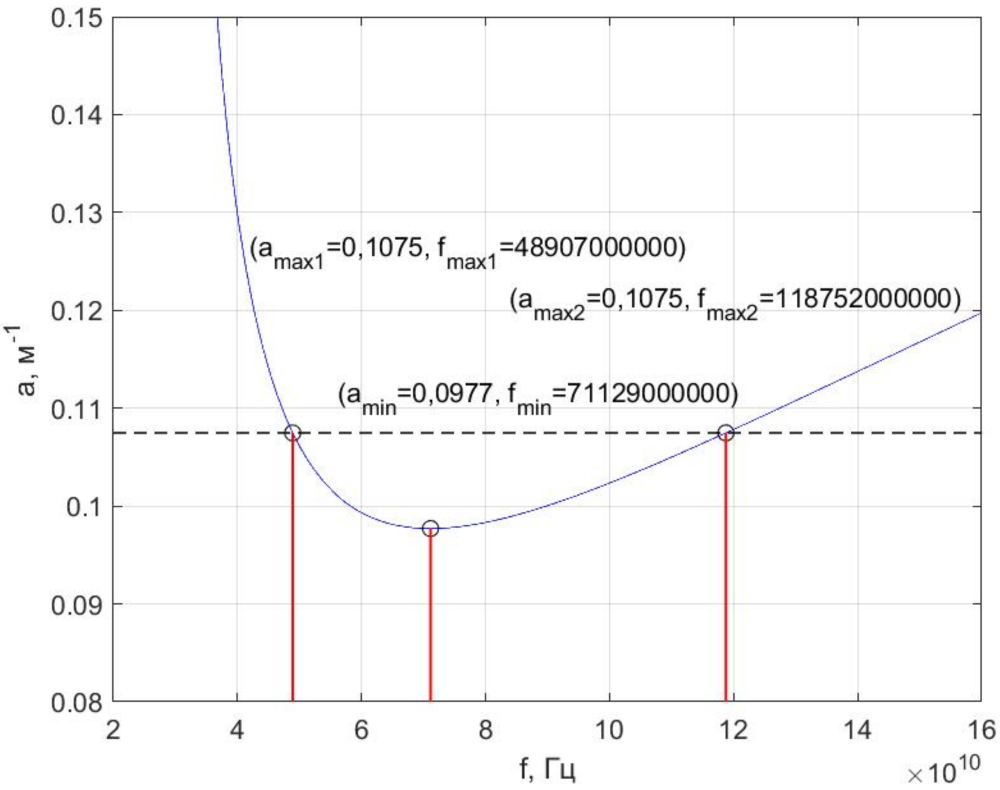

Рисунок 1 - график a(f).

По графику функции видно, что при частоте

$$f_0 = 71129000000 \, [\text{Гц}]$$

Минимальный коэффициент ослабления

$$\alpha(f_0) = 0,0977 \, [м^{-1}]$$

Коэффициент ослабления, отличающийся на 10 % от минимального

$$\alpha(f_0) \cdot 1,1 = 0,1075 \, [м^{-1}]$$

Согласно графику, диапазон частот, в пределах которого значение коэффициента затухания отличается от минимального не более чем на 10 %

$$48907000000 \, [\text{Гц}] \leq f \leq 118752000000 \, [\text{Гц}].$$