Положительный заряд *q* равномерно распределен по объему шара радиуса *a*. Определить напряженность электрического поля, электрическую индукцию и скалярный потенциал внутри и вне шара. Диэлектрическая проницаемость материала *εa1*, окружающей среды *εa2*. Построить зависимости *E(r), D(r), (r),* указать характерные особенности графиков и причину их появления. Провести проверку граничных условий на границе раздела сред. Исходные данные: *a*[мм] = M+2N; *q*[Кл] = 0,05·N; *εa = ε0εr*; *εr1* = 2+N/10; *εr2* = 1.

- **КОНСТАНТЫ**

```
E0 = 8.85e-12
```

```
E0 = 8.8500e-12
```

- **ДАНО**

```
M = 5; N = 12;
Ea1 = E0 * (2 + N/10)
```

```
Ea1 = 2.8320e-11
```

```
Ea2 = E0
```

```
Ea2 = 8.8500e-12
```

```
a = (M + 2*N)*1e-3 % R
```

```
a = 0.0290
```

```
q = 0.05 * N
```

```
q = 0.6000
```

```
Ea = E0 * Ea1
```

```
Ea = 2.5063e-22
```

- **НАЙТИ**

$\varphi = ?$
$D = ?$
$E = ?$

- **РЕШЕНИЕ**

R = a. Так как у нас есть две разные среды, то для начала обозначим *k* в зависимости от r,

$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$при r > R, $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}$при r < R

Дальше в решении будем учитывать просто k, который припостроении графиков надо будет учесть, по зависимости, которая обозначена выше. Найдем для начала напряженность электрического поля и скалярный потенциал внутри и вне шара. Применим теорему Гаусса. Выберем в качестве замкнутый шар радиуса r > R (рис.). Очевидно, что напряженность наповерхности этого шара будет одинакова по величине и направлена по радиусу. Тогда поток напряженности через него будет $E * 4\pi r^2$. Согласно теореме Гаусса

$$E * 4\pi r^2 = 4\pi kq \ ,$$

откуда следует $E(r) = k\frac{q}{r^2}$. Вне шара напряженность поля совпадает с напряженностью заряда, находящегося вцентре, то и потенциал при r > R выразится в виде

$$\varphi(r) = k\frac{q}{r} \ .$$

Чтобы найти напряженность электрического поля внутри шара, выберем вкачестве замкнутой поверхности сферу радиуса r < R с центром в центре шара.Из симметрии ясно, что напряженность поля направлена по радиусу иодинакова по величине на всей поверхности сферы. Из теоремы Гауссаследует

$$E(r) * 4\pi r^2 = 4\pi kq(r) \ ,$$

где q(r) – заряд внутри выбранной поверхности. Введем плотность заряда шара ρ. Тогда

$q(r) = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$ и $E(r) = k\frac{q(r)}{r^2} = \frac{4}{3}k\rho\pi r$.

Плотность заряда равна полному заряду, деленному на объем шара

$$\rho = \frac{3q}{4\pi R^3} \ .$$

Для напряженности поля внутри шара получим

$$E = k\frac{q}{R^3}r.$$

Найдем потенциал внутри шара

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^{R} k\frac{q}{r^2}\mathrm{dr} - \int_{R}^{r} k\frac{q}{R^3}\mathrm{rdr} \ .$$

Первый интеграл имеет смысл работы по переносу единичного положительногозаряда из бесконечности до поверхности шара и равен $\frac{kq}{R}$. Второй член будет равен $-\int_{R}^{r} k\frac{q}{R^3}\mathrm{rdr} = -k\frac{q}{R^3}\frac{r^2}{2} + k\frac{qr^2}{2R^3}$. Значение потенциала внутри шара определится выражением

$$\varphi(r) = \frac{3}{2}k\frac{q}{R} - k\frac{qr^2}{2R^3}.$$

И так подведем итог напряженность электрического поля и скалярный потенциал внутри и вне шара.

$E = k\frac{q}{r^2}$ при r > R, $E = k\frac{q}{R^3}r$ при r < R , и

$\varphi = k\frac{q}{r}$ при r > R, $\varphi = \frac{3}{2}k\frac{q}{R} - k\frac{qr^2}{2R^3}$ при r < R

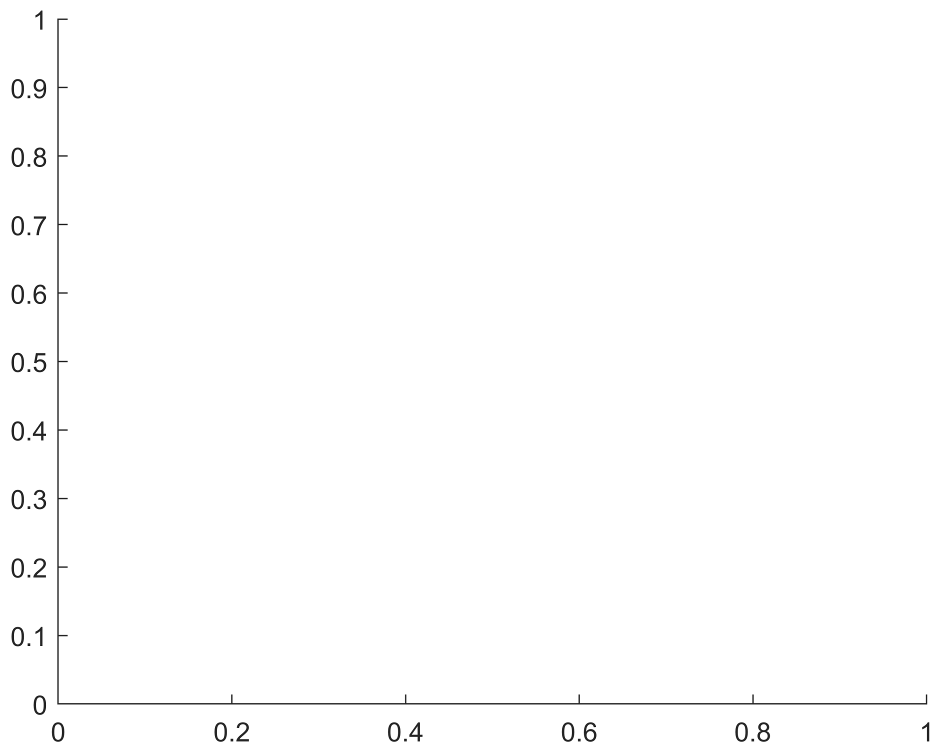
Теперь найдем электрическую индукцию

$D = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0 E + \kappa \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 (1 + \kappa) E = \varepsilon_0 \varepsilon E$

Тогда

$D = \varepsilon_0 E$ при r > R, $D = \varepsilon_0 \varepsilon E$ при r < R.

```
cla reset;
```




```
% [E, r] = E_graph(Ea1, Ea2, q, a, 1);
% plot(r, E, "Color","blue");
% hold on;
% plot([a a], [0 6.7e12], '--');
% hold off;
% xlabel("r, мм");
% ylabel("E, В/м");
% title("E(r)");
% text(a,1e11,'a', 'Color','red');
% grid on;
% saveas(gcf, "E_gr_true.png")

% [Phi, r] = phi_graph(Ea1, Ea2, q, a, 1);
% plot(r, Phi, "Color","blue");
% hold on;
% plot([a a], [0 1.9e11], '--');
% hold off;
```

```
% xlabel("r, мм");
% ylabel("Phi, B");
% title("Phi(r)");
% text(a, 0.55e11,'a', 'Color','red');
% grid on;
% saveas(gcf, "Phi_gr_true.png")

% [D, r] = D_graph(Ea1, Ea2, q, a, 1);
% plot(r, D, 'Color','blue');
% hold on;
% plot([a a], [0 59], '--');
% hold off;
% xlabel("r, мм");
% ylabel("D, Кл/м^2");
% title("D(r)");
% text(a, 20,'a', 'Color','red');
% grid on;
% saveas(gcf, "D_gr_true.png")
```

$E = k\frac{q}{r^2}$ при r > R, $E = k\frac{q}{R^3}r$ при r < R

```
function [E, r] = E_graph(Ea1, Ea2, q, a, n)
    r = linspace(0, 0.1, 1001);
    E = zeros(1, 1001);
    k1 = 1/(4*pi*Ea1);
    k2 = 1/(4*pi*Ea2);
    for v = 0.0:0.0001:0.1
        if v <= a
            E(n) = (k1*q*v)/(a^3);
            n = n + 1;
        else
            E(n) = (k2*q)/(v^2);
            n = n + 1;
        end
    end
end
```

$\varphi = k\frac{q}{r}$ при r > R, $\varphi = \frac{3}{2}k\frac{q}{R} - k\frac{qr^2}{2R^3}$ при r < R

```
function [Phi, r] = phi_graph(Ea1, Ea2, q, a, n)
    r = linspace(0, 0.1, 1001);
    Phi = zeros(1, 1001);
    k1 = 1/(4*pi*Ea1);
    k2 = 1/(4*pi*Ea2);
    Po = (k1*q)/(2*a);
    for v = 0.0:0.0001:0.1
        if v <= a
            Phi(n) =  Po*(3 - ((v^2)/(a^2)));
            n = n + 1;
        else
            Phi(n) = (k2*q)/v;
```

```
            n = n + 1;
        end
    end
end
```

$D = \varepsilon_0 E$ при r > R, $D = \varepsilon_0 \varepsilon E$ при r < R

```
function [D, r] = D_graph(Ea1, Ea2, q, a, n)
    [E, r] = E_graph(Ea1, Ea2, q, a, 1);
    D = zeros(1, 1001);
    for v = 0.0:0.0001:0.1
        if v <= a
            D(n) = Ea1*E(n);
            n = n + 1;
        else
            D(n) = Ea2*E(n);
            n = n + 1;
        end
    end
end
```