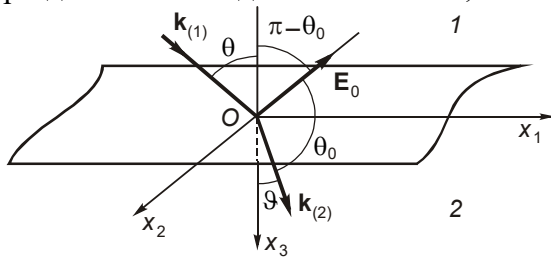


Семинар №5

Отражение и преломление плоских электромагнитных волн

При распространении плоской электромагнитной волны в пространстве, представляющем собой области с различным значением параметров $\tilde{\epsilon}_a, \tilde{\mu}_a, \sigma$ и границами раздела в виде плоскостей, возникает отражение и преломление волн.



Комплексные амплитуды этих волн связаны с комплексной амплитудой падающей волны коэффициентами отражения $\dot{\Gamma}_E = \frac{\dot{E}_{m0}}{E_m}$, $\dot{\Gamma}_H = \frac{\dot{H}_{m0}}{H_m}$, и коэффициентом прохождения

(преломления) $\dot{P}_E = \frac{\dot{E}_{m(2)}}{E_m}$, $\dot{P}_H = \frac{\dot{H}_{m(2)}}{H_m}$. Эти коэффициенты в каждом конкретном случае

могут быть найдены на основании граничных условий на плоскостях, разделяющих среды с различными значениями электродинамических параметров. Для среднего значения плотности потока мощности также вводят понятия коэффициентов отражения и

преломления. $\Gamma_{\Pi} = \frac{\Pi_{отр}}{\Pi_{пад}}$, $P_{\Pi} = \frac{\Pi_{пр}}{H_{пад}}$.

Рассмотрим нормальное падение электромагнитной волны.

Если вектор Пойнтинга падающей волны перпендикулярен границе раздела сред, то значения коэффициентов отражения и прохождения для комплексных амплитуд векторов напряженности электрического поля будут определяться выражениями:

$$\dot{\Gamma}_E = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}}, \quad \dot{P}_E = \frac{2 * Z_{c2}}{Z_{c2} + Z_{c1}}, \text{ где } Z_{c1} - \text{характеристическое сопротивление среды,}$$

в которой существует падающая волна, Z_{c2} – характеристическое сопротивление среды, в которой существует преломленная волна.

При наклонном падении плоской электромагнитной волны на границу раздела сред задача о нахождении коэффициентов отражения и преломления имеет простое решение только для сред без потерь. Поэтому ниже приведенные соотношения можно применять только тогда, когда потери в реальных средах пренебрежимо малы, т.е. $\text{tg } \delta \ll 1$. При наклонном падении направление распространения волн по отношению к границе раздела задаются углами, измеряемыми относительно нормали к этой границе. Плоскость, проведенная через направление распространения волны, т. е. содержащая вектор Пойнтинга и нормаль к границе раздела сред называют плоскостью падения. Из граничных условий можно определить, что угол падения, (угол между нормалью к плоскости раздела и направлением распространения падающей волны), угол отражения (угол между нормалью и направлением отраженной волны) и угол преломления (угол между нормалью и направлением распространения преломленной волны) связаны законами зеркального отражения и законом Снеллиуса.

$$\frac{\sin \theta}{\sin \vartheta} = \frac{\beta_2}{\beta_1}, \text{ где } 1 - \text{среда, содержащая падающую волну, } 2 - \text{среда, содержащая}$$

преломленную волну. С учетом выражения для β $\frac{\sin \theta}{\sin \vartheta} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r2} \mu_{r2}}{\epsilon_{r1} \mu_{r1}}}$.

Коэффициенты отражения $\dot{\Gamma}_E = \frac{\dot{E}_{m0}}{E_m}$ и преломления $\dot{P}_E = \frac{\dot{E}_{m(2)}}{E_m}$ для заданного

значения угла падения θ зависят от ориентации векторов электромагнитного поля относительно плоскости падения. Если \vec{E} лежит в плоскости падения (вертикальная поляризация), то выражения для коэффициентов отражения и преломления имеют вид:

$$\dot{\Gamma}_H = \frac{Z_{01} \cos \theta - Z_{02} \cos \vartheta}{Z_{01} \cos \theta + Z_{02} \cos \vartheta}, \quad \dot{\Gamma}_E = \frac{Z_{02} \cos \theta - Z_{01} \cos \vartheta}{Z_{02} \cos \theta + Z_{01} \cos \vartheta},$$

, а для горизонтальной поляризации

$$\dot{P}_H = \frac{2Z_{01} \cos \theta}{Z_{01} \cos \theta + Z_{02} \cos \vartheta}, \quad \dot{P}_E = \frac{2Z_{02} \cos \theta}{Z_{02} \cos \theta + Z_{01} \cos \vartheta}.$$

При $\theta \rightarrow 0$ независимо от ориентации вектора \vec{E} формулы приобретают вид соотношений для нормального падения плоской электромагнитной волны на плоскую границу раздела двух сред.

Угол падения при котором наблюдается полное прохождение электромагнитной волны во вторую среду называется углом Брюстера. Это явление наблюдается только для волны вертикальной поляризации, а угол Брюстера определяется формулой:

$$\theta_B = \arctg \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}}.$$

Согласно закону Снеллиуса, при $\epsilon_{r2} \mu_{r2} < \epsilon_{r1} \mu_{r1}$ угол преломления больше угла падения, поэтому, если угол падения определяется выражением $\theta_{кр} = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_{r2} \mu_{r2}}{\epsilon_{r1} \mu_{r1}}}$, то

преломленная волна будет скользить вдоль границы раздела и коэффициенты отражения по модулю будут равны 1. При дальнейшем увеличении угла падения модуль коэффициентов отражения останется равным единице, а будет меняться лишь фаза коэффициентов отражения. Такое явление называется полным внутренним отражением. Исключая из выражений для коэффициентов отражения угол преломления, можно найти,

что при $\theta \geq \theta_{кр} = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_{r2} \mu_{r2}}{\epsilon_{r1} \mu_{r1}}}$, коэффициенты отражения равны для вертикальной

поляризации $\dot{\Gamma}_H = -\exp -2j \arctg \frac{\epsilon_{r1} \sqrt{\sin^2 \theta - (\epsilon_{r2} \mu_{r2} / \epsilon_{r1} \mu_{r1})}}{\epsilon_{r2} \cos \theta}$, для горизонтальной

поляризации $\dot{\Gamma}_E = \exp -2j \arctg \frac{\mu_{r1} \sqrt{\sin^2 \theta - (\epsilon_{r2} \mu_{r2} / \epsilon_{r1} \mu_{r1})}}{\mu_{r2} \cos \theta}$.

Коэффициенты преломления при полном внутреннем отражении не равны нулю. Поле во второй области представляет собой плоскую неоднородную волну, которую с учетом закона Снеллиуса можно представить в виде:

$$\mathbf{E}_{m(2)} = \mathbf{e}_1 P_E E_m e^{-k_{(2)} |\cos \vartheta| x_3} e^{-j k_{(2)} x_2 \sin \vartheta - \frac{\Psi E}{2}},$$

$$\mathbf{H}_{m(2)} = P_E H_m (-j \mathbf{e}_2 |\cos \vartheta| - \mathbf{e}_3 \sin \vartheta) e^{-k_{(2)} x_3 |\cos \vartheta|} e^{-j k_{(2)} x_2 \sin \vartheta - \frac{\Psi E}{2}}.$$

Коэффициент преломления при условии, что поляризация вертикальная, равен:

$$\dot{P}_H = \frac{2 \cos \theta}{\frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}} - j \sqrt{\sin^2 \theta - \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}}} \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}} e^{-j\beta_1 x \sin \theta} e^{-\alpha z}, \text{ а если поляризация горизонтальная то:}$$

$$\dot{P}_E = \frac{2 \cos \theta}{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} \cos \theta - j \sqrt{\sin^2 \theta - \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}} e^{-j\beta_1 x \sin \theta} e^{-\alpha z}.$$

Для реальных металлов угол между фазовым фронтом и плоскостью равных амплитуд мал, поэтому можно полагать, что угол преломления равен нулю. Это позволяет ввести приближенное граничное условие для реальных металлов (граничное условие Леонтовича) $\vec{E}_\tau = Z_{\text{ом}} \vec{H}, \vec{n}_0$ или $|\vec{E}_\tau| = |Z_{\text{ом}} \dot{H}_\tau|$. \vec{n}_0 - единичный вектор нормали к поверхности металла, направленный внутрь, $Z_{\text{ом}} = \sqrt{j \frac{\mu_a \omega}{\sigma}}$, характеристическое сопротивление металла, \dot{H}_τ - касательная к поверхности металла составляющая вектора напряженности магнитного поля, которую можно приближенно положить равной касательной составляющей для идеального металла, т.к. ошибка будет незначительной, а $|\dot{G}| \rightarrow 1$.

Задачи к семинару №5

1. Плоская электромагнитная волна падает нормально из вакуума на границу раздела со средой имеющей параметры $\varepsilon_{r2}=81$, $\mu_{r2}=1$, $\sigma_2=0,1$ См/м. Определить комплексные коэффициенты отражения и преломления на частоте $f=100$ МГц. Полагая, что амплитуда напряженности электрического поля в плоскости $z=0$, совпадающей с границей раздела равна $E=1$ В/м, записать выражение для мгновенного значения напряженности электрического поля отраженной волны.

Решение

$$\dot{\Gamma}_E = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_a}} - \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_a}} + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}}; \quad \tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon_a - j \varepsilon_a; \quad tg \delta_3 = \frac{\varepsilon_a}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_r}.$$

$$\dot{\Gamma}_E = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon_{r2}} \sqrt{(1 - jtg \delta_3)}}{1 + \sqrt{\varepsilon_{r2}} \sqrt{(1 - jtg \delta_3)}}; \quad tg \delta_3 = \frac{0,1 * 36\pi}{2\pi * 10^8 * 10^{-9} * 81} = \frac{2}{9} < 1. \quad \text{Возьмем приближенное}$$

значение для $\sqrt{(1 - jtg \delta_3)} \approx 1 - 0,5 jtg \delta_3$. Тогда $\dot{\Gamma}_E = -\frac{8+j}{10-j} = 0,8e^{-j0,025}$

$$\dot{P}_E = \frac{2 * Z_{c2}}{Z_{c2} + Z_{c1}} = 1 + \dot{\Gamma}_E = \frac{2-2j}{10-j}$$

$$\dot{E}_{\text{отр}} = \dot{\Gamma}_E \dot{E}_{\text{пад}} = -0,8e^{j\omega t} e^{-j0,025} e^{-j\beta z}. \text{ Переходя к мгновенным значениям}$$

$$\dot{E}_{\text{отр}} = -0,8 \cos(2\pi 10^8 t - 0,25 - \beta z)$$

2. Плоская электромагнитная волна падает нормально на границу раздела между вакуумом и диэлектриком с параметрами $\varepsilon_r=4$, $\mu_r=1$, $\sigma=0$. Определить среднее значение плотности потока мощности в диэлектрике, если среднее значение плотности потока мощности падающей волны 1 Вт/м²

Решение

$$\dot{P}_E = \frac{2 * Z_{c2}}{Z_{c2} + Z_{c1}}; \quad Z_{c1} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377 \text{ Ом}; \quad Z_{c2} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} = 188,5.$$

$$\dot{P}_E = \frac{377}{188,5 + 377} = \frac{377}{565,5} = 0,67.$$

$$\Pi_{cp} = \frac{1}{2} |\dot{E}_m|^2 \operatorname{Re} \frac{1}{Z_c}; E_m = \sqrt{2Z_0 \Pi_{cp}}; E_{m2} = 0,67 \sqrt{2Z_0 \Pi_{cp}};$$

$$\Pi_{cp2} = \frac{1}{2} |\dot{E}_{m2}|^2 \frac{1}{Z_{c2}} = \frac{0,67^2 * 377 * 1}{2 * 188,5} = 0,9$$

3. Плоская электромагнитная волна падает под углом θ на поверхность реального металла с электрической проводимостью σ . Вывести формулу для удельной мощности потерь на площадке в 1 м, обусловленной свойствами металла.

Решение

Для определения $P_{уд}$ надо найти Π_{cp} , направленный в металл. Если поля на поверхности металла известны, то $\vec{\Pi}_{cp} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \vec{E}_\tau, \vec{H}_\tau^*$; Используя граничное условие

$$\vec{\Pi}_{cp} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} Z_{cm} [\vec{H}, \vec{n}_0], \vec{H}_\tau^* = \frac{|\vec{H}_\tau|^2}{2} \operatorname{Re}(Z_{cm}) \vec{n}_0;$$

Леонтовича

$$\operatorname{Re}(Z_{cm}) = \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{2\sigma}}, \text{ то } P_{y0} = \vec{\Pi}_{cp} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{2\sigma}} |\vec{H}_\tau|^2$$

4. Плоская электромагнитная волна падает нормально на границу раздела между вакуумом и металлом с удельной электрической проводимостью $\sigma = 6 \cdot 10^7$ Сим/м. Определить коэффициент отражения по электрическому полю на частоте 10 ГГц, если $\mu_a = \mu_0$.

Решение

Для нормального падения:

$$\dot{\Gamma}_E = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\tilde{\epsilon}_a}} - \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\tilde{\epsilon}_a}} + \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}; \quad \tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega} = \epsilon_a - j \epsilon_a \approx j \frac{\sigma}{\omega};$$

$$\dot{\Gamma}_E = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0 \omega}{j\sigma}} - \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}{\sqrt{\frac{\mu_0 \omega}{j\sigma}} + \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\mu_0 \omega \epsilon_0}{\sigma \epsilon_0}} (1-j) - \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\mu_0 \omega \epsilon_0}{\sigma \epsilon_0}} (1-j) + \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}},$$

$$\dot{\Gamma}_E = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\omega \epsilon_0}{\sigma}} (1-j) - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\omega \epsilon_0}{\sigma}} (1-j) + 1} = -1 + 1,36 \cdot 10^{-4} (1+j).$$

5. При наклонном падении плоской электромагнитной волны на плоскую границу раздела с параметрами $\epsilon_{r1}=2$, $\mu_{r1}=1$, $\epsilon_{r2}=5$, $\mu_{r2}=1$ угол преломления составляет 30° . Чему равен угол отражения?

Решение

Согласно закону Снеллиуса углы преломления и падения связаны соотношением

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \theta} = \frac{k_{(1)}}{k_{(2)}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}\mu_{r1}}}{\sqrt{\varepsilon_{r2}\mu_{r2}}} = \frac{n_1}{n_2} = n_{12},$$

откуда $\theta = \arcsin \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}} \sin \vartheta = \arcsin \sqrt{\frac{5}{2}} \sin 30^\circ = 52,239^\circ$. Угол отражения согласно первому закону Снеллиуса равен углу падения.

Семинар №6

Волноводы

Передачу энергии высокой частоты на короткие расстояния осуществляют при помощи направляющих систем, основанных на способности металлических поверхностей или границ раздела двух диэлектриков направлять электромагнитные волны.

Волноводы представляют собой металлические трубы различных сечений, заполненные диэлектриком, в том числе и воздухом. Однако следует заметить, что существуют диэлектрические волноводы, использующие способность границы раздела двух диэлектрических сред при полном отражении направлять движение энергии электромагнитной волны. В оптическом диапазоне используют световоды. Металлические волноводы используются на СВЧ в сантиметровом (10-1)см и миллиметровом (10-1)мм диапазонах волн. Наиболее часто используются волноводы прямоугольного и круглого сечений. Иногда применяют волноводы Н и П образных сечений.

Прямоугольные волноводы

В прямоугольном волноводе могут существовать волны электрического типа, обозначаемые E_{mn} и магнитного типа H_{mn} и невозможно существование волн типа Т.

Электрические волны прямоугольного волновода ($E_{x3} \neq 0$, $H_{x3} = 0$).

Начало декартовой системы координат поместим в одну из вершин прямоугольника, а оси системы совместим со сторонами прямоугольника, как показано на рис. Поперечные составляющие векторов \vec{E} и \vec{H} у волн E_{mn} выражаются через продольную составляющую E_{x3} . Поэтому, если найти решение уравнения Гельмгольца, которое в декартовой системе

координат имеет вид $\frac{\partial^2 \dot{E}_{x3}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_{x3}}{\partial x_2^2} + (k^2 - k_0^2) \dot{E}_{x3} = 0$, то можно определить структуру поля

в волноводе. Уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных и решается методом разделения переменных, т.е. решение представляется в виде произведения $\dot{E}_{x3} = X_1(x_1)X_2(x_2)e^{-jk_0x_3} = X_1X_2e^{-jk_0x_3}$, где $X_1(x_1)$ функция только от координаты x_1 , а $X_2(x_2)$ только от координаты x_2 . Подставляя полученное в уравнение и разделив на произведение $X_1X_2e^{-jk_0x_3}$, получим:

$\frac{1}{X_1} \frac{d^2 X_1}{dx_1^2} + \frac{1}{X_2} \frac{d^2 X_2}{dx_2^2} = -k_\perp^2$, где x_1 и x_2 независимые переменные. Равенство возможно,

только при $\frac{1}{X_1} \frac{d^2 X_1}{dx_1^2} = -k_{x1}^2$ и $\frac{1}{X_2} \frac{d^2 X_2}{dx_2^2} = k_{y2}^2$, где $k_{x1}^2 + k_{y2}^2 = k_{\perp}^2$ – поперечное волновое число.

Решение полученных уравнений, которые можно записать в виде $\frac{d^2 X_1}{dx_1^2} + k_{x1}^2 X_1 = 0$ и имеют вид: $X_1 = A \cos(k_{x1} x_1) + B \sin(k_{x1} x_1)$, $X_2 = C \cos(k_{x2} x_2) + D \sin(k_{x2} x_2)$. Подставляя полученные решения в выражение для E_z , получаем $E_{x3} = [A \cos(k_{x1} x_1) + B \sin(k_{x1} x_1)] [C \cos(k_{x2} x_2) + D \sin(k_{x2} x_2)] e^{-jk_0 x_3}$. Положим стенки волновода идеально проводящими. Тогда на их поверхности касательная составляющая вектора напряженности электрического поля должна равняться нулю. В нашем случае это сводится к тому, что $E_{x3} = 0$ при $x_1 = 0$, $x_1 = a$ и $E_{x3} = 0$ при $x_2 = 0$, $x_2 = b$. Полагая $x_1 = 0$, получим $A [C \cos(k_{x2} x_2) + D \sin(k_{x2} x_2)] e^{-jk_0 x_3} = 0$. Так как это равенство должно выполняться $\forall x_2$, то $A = 0$. Полагая $x_1 = a$, получаем уравнение $B \sin(k_{x1} a) [C \cos(k_{x2} x_2) + D \sin(k_{x2} x_2)] e^{-jk_0 x_3} = 0$. Отсюда $B \sin(k_{x1} a) = 0$ и следовательно $k_{x1} a = m\pi$, при $m = 0, 1, 2, \dots$, а $k_{x1} = m\pi/a$. Аналогично полагая $x_2 = 0$ и $x_2 = b$ приходим к соотношениям $C = 0$ и $D \sin(k_{x2} b) = 0$. Откуда следует, что $k_{x2} = n\pi/b$ при $n = 0, 1, 2, \dots$. При $m = 0$ или $n = 0$ $E_z = 0$, что соответствует отсутствию волны E_{mn} , поэтому $m \geq 1$, $n \geq 1$. Окончательно запишем: $E_{x3} = E_{0x3} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b} e^{-jk_0 x_3}$, где $E_{0z} = BD$ – амплитуда

продольной составляющей напряженности электрического поля. Эта величина не может быть определена из граничных условий т.к. амплитуда составляющих поля зависит от мощности источника, возбуждающего электромагнитную волну в волноводе. Подставляя в уравнения Максвелла полученное выражение для E_{x3} и полагая $H_{x3} = 0$, определим поперечные составляющие электромагнитного поля.

$$\begin{aligned} E_{x1} &= -\frac{jk_0}{k_{\perp}^2} \frac{\partial E_{x3}}{\partial x_1}, \quad H_{x1} = \frac{j\omega\epsilon_a}{k_{\perp}^2} \frac{\partial E_{x3}}{\partial x_2}, \\ E_{x2} &= -\frac{jk_0}{k_{\perp}^2} \frac{\partial E_{x3}}{\partial x_2}, \quad H_{x2} = -\frac{j\omega\epsilon_a}{k_{\perp}^2} \frac{\partial E_{x3}}{\partial x_1}. \\ E_{x1} &= -\frac{jk_0 k_{x1}}{k_{\perp}^2} E_{0x3} \cos \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b} e^{-jk_0 x_3} \\ E_{x2} &= -\frac{jk_0 k_{x2}}{k_{\perp}^2} E_{0x3} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \cos \frac{n\pi x_2}{b} e^{-jk_0 x_3} \\ H_{x1} &= \frac{j\omega\epsilon_a k_{x2}}{k_{\perp}^2} E_{0x3} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \cos \frac{n\pi x_2}{b} e^{-jk_0 x_3} \\ H_{x2} &= -\frac{j\omega\epsilon_a k_{x1}}{k_{\perp}^2} E_{0x3} \cos \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b} e^{-jk_0 x_3}, \text{ где } k_{\perp} = \sqrt{k_{x1}^2 + k_{y2}^2} = \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}}, \end{aligned}$$

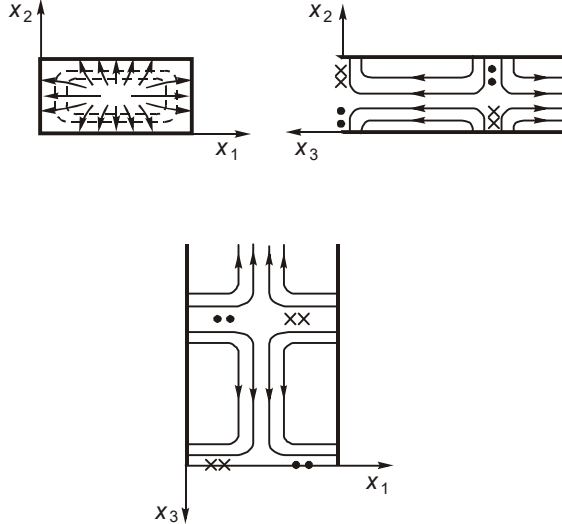
а изменение составляющих вдоль продольной координаты описывается множителем $e^{-jk_0 x_3}$. Структура поля в плоскости поперечного сечения соответствует структуре стоячих волн, причем m равно числу полувольт, укладываемых вдоль стенки длиной a , n – числу полувольт, укладываемых вдоль стенки длиной b . Следовательно, каждой паре чисел m и n соответствует определенная структура электромагнитного поля E_{mn} . Например E_{11} – волна типа E_{mn} , у которой $m=n=1$. Структура поля в некоторый момент времени $t=t_0$ для трех сечений волновода имеет вид показанный ниже.

Каждый конкретный тип волны может распространяться в полом волноводе только в случае, если длина волны λ меньше критической длины волны т.е. $\lambda < \lambda_{кр}$. Для волн типа E_{mn} критическая длина волны определяется соотношением:

$$\lambda_{кр} = \frac{c}{f_{кр}} = \frac{2\pi}{k_{\perp}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{m\pi^2}{a^2} + \frac{n\pi^2}{b^2}}} . \text{ Фазовая скорость волны в полом волноводе}$$

определяется выражением: $v_{\phi E_{mn}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{кр}}^2}}$, где v – фазовая скорость в свободном

пространстве.



Постоянная распространения волны находится из соотношения: $\beta_{E_{mn}} = \beta \sqrt{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{кр}}^2}$, где β - постоянная распространения в свободном пространстве. Скорость переноса энергии или групповая скорость определяется как $v_{\varepsilon E_{mn}} = v \sqrt{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{кр}}^2}$. Длина волны в волноводе $\lambda_{вE_{mn}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{кр}}^2}}$. Характеристическое сопротивление $Z_{E_{mn}} = Z_0 \sqrt{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{кр}}^2}$.

В случае, если волновод заполнен диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ε_r и магнитной проницаемостью μ_r , то условие распространения волны в волноводе будет выглядеть так $\frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon_r}} < \lambda_{кр}$. Соответственно, в выражениях для постоянной распространения, фазовой скорости, скорости переноса энергии, длины волны и характеристического сопротивления подкоренное выражение изменится на $\sqrt{\varepsilon_r - \frac{\lambda}{\lambda_{кр}}^2}$.

Низшим типом волны, т.е. типом волны обладающим наибольшей критической длиной волны, для волн типа E_{mn} является волна E_{11} . Если волнам E_{mn} с различной структурой поля соответствует одинаковое значение k_{\perp} , то такие волны называются вырожденными. Для них постоянные распространения, фазовые скорости, и скорости распространения

энергии имеют одинаковые значения. В прямоугольном волноводе две волны E_{m1n1} и E_{m2n2} вырождены, когда $\frac{m_1\pi}{a}^2 + \frac{n_1\pi}{b}^2 = \frac{m_2\pi}{a}^2 + \frac{n_2\pi}{b}^2$.

Магнитные волны ($H_{x3} \neq 0$, $E_{x3} = 0$)

В этом случае составляющие поля выражаются через H_z , которая определяется из уравнения $\frac{\partial^2 \dot{H}_{x3}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_{x3}}{\partial x_2^2} + (k^2 - k_0^2) \dot{H}_{x3} = 0$. Аналогично тому, как это было сделано для электрических волн, получим

$H_{x3} = [A \cos(k_{x1}x_1) + B \sin(k_{x1}x_1)] [C \cos(k_{x2}x_2) + D \sin(k_{x2}x_2)] e^{-jk_0x_3}$. На поверхности идеального проводника должно выполняться условие

$$E_{x_2} = \frac{j\omega\mu_a}{k_{\perp}^2} \frac{\partial H_{x3}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = \frac{j\omega\mu_a}{k_{\perp}^2} \frac{\partial H_{x3}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=a},$$

$$E_{x_1} = -\frac{j\omega\mu_a}{k_{\perp}^2} \frac{\partial H_{x3}}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = -\frac{j\omega\mu_a}{k_{\perp}^2} \frac{\partial H_{x3}}{\partial x_2} \Big|_{x_2=b}.$$

Подставляя выражение для H_{x3} , получим $B=0$ и $A \sin(k_{x1}a)=0$, $D=0$ и $C \sin(k_{x2}b)=0$. Откуда следует, что у волн H_{mn} , как и у волн типа E_{mn} $k_{x1} = m\pi/a$, $k_{x2} = n\pi/b$. Следовательно, при равных m и n критическая длина волны, постоянная распространения, фазовая скорость и скорость распространения энергии у волн H_{mn} и E_{mn} будут одинаковыми, т.е. волны H_{mn} и E_{mn} с равными индексами являются вырожденными. Подставляя значения B , D , k_{x1} , k_{x2} получаем $H_{x3} = H_{0x3} \cos \frac{m\pi x_1}{a} \cos \frac{n\pi x_2}{b} e^{-jk_0x_3}$, где $H_{0x3} = AC$.

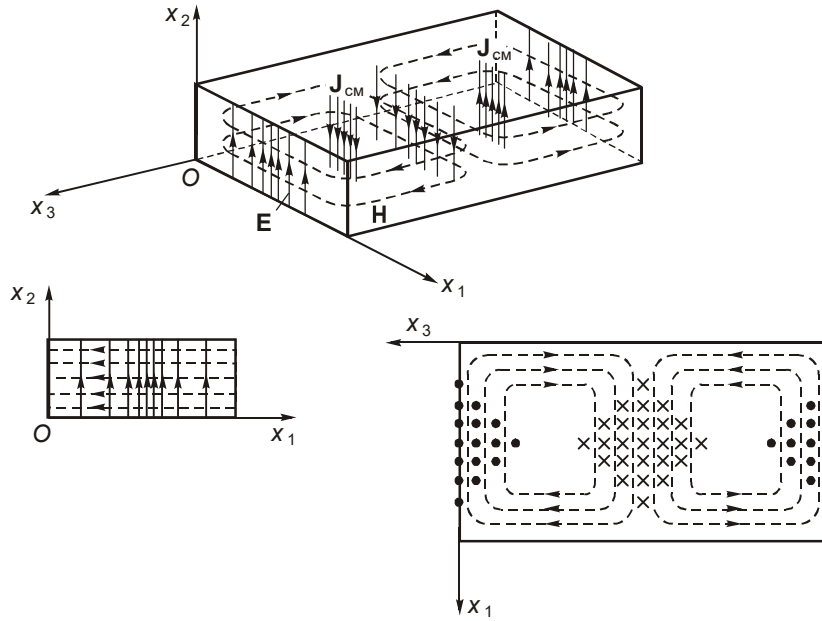
$$E_{x_1} = -\frac{j\omega\mu_a k_{x_2}}{k_{\perp}^2} H_{0x3} \cos \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b} e^{-jk_0x_3},$$

$$E_{x_2} = \frac{j\omega\mu_a k_{x_1}}{k_{\perp}^2} H_{0x3} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \cos \frac{n\pi x_2}{b} e^{-jk_0x_3},$$

$$H_{x_1} = \frac{jk_0 k_{x_1}}{k_{\perp}^2} H_{0x3} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \cos \frac{n\pi x_2}{b} e^{-jk_0x_3},$$

$$H_{x_2} = -\frac{jk_0 k_{x_2}}{k_{\perp}^2} H_{0x3} \cos \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi x_2}{b} e^{-jk_0x_3}.$$

Низшим типом волны для магнитных волн является волна H_{10} , структура поля которой показана на рис.



Структура волн H_{mn} , также как и E_{mn} соответствует в плоскости поперечного сечения структуре стоячих волн. При $m_1 \neq m_2$ и $n_1 \neq n_2$, но $k_{\perp 1} = k_{\perp 2}$ волны $H_{m_1 n_1}$ $H_{m_2 n_2}$ также являются вырожденными. При обращении в ноль одного из индексов не все составляющие поля обращаются в ноль. Для волны H_{10} $\lambda_{кр}^{H_{10}} = 2a$. Поскольку $\lambda_{кр}^{H_{10}} > \lambda_{кр}^{E_{11}}$, то этот тип является низшим из всех возможных типов волн, в прямоугольном волноводе.

Характеристическое сопротивление волн H_{mn} определяется по формуле

$$Z_{H_{mn}} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{кр}}^2}}. \text{ Длина волны в волноводе, постоянная распространения, фазовая}$$

скорость и скорость распространения энергии определяется по тем же формулам, что и для волн E_{mn} .

Мощность переносимая волной H_{10} в прямоугольном волноводе, определяется выражением $P = \frac{ab\sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2}}{4Z_0} E_0^2$, где E_0 – максимальная амплитуда напряженности

электрического поля. Максимально допустимая переносимая мощность в волноводе определяется максимально допустимой (пробивной) напряженностью электрического поля в волноводе. Для сухого воздуха $E_{\max} = 30 \text{ кВ/см}$ при нормальном атмосферном давлении. Затухание волн в волноводах зависит от потерь в металлических стенках и в диэлектрике $\alpha_{\text{общ}} = \alpha_m + \alpha_d$.

Для волн типа H_{10} прямоугольного волновода

$$\alpha_m = \frac{R_s \left[1 + \left(\frac{\lambda_0}{2a} \right)^2 \frac{2b}{a} \right]}{Z_0 b \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a} \right)^2}}. \text{ Для волн типа } H_{mn} \text{ прямоугольного волновода}$$

$$\alpha_m = \frac{2R_s}{Z_0 b \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}} \right)^2}} \left\{ \left(1 + \frac{b}{a} \right) \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}} \right)^2 + \left[1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}} \right)^2 \right] \frac{\frac{b}{a} \left(\frac{b}{a} n^2 + m^2 \right)}{\frac{b^2 n^2}{a^2} + m^2} \right\}. \text{ Для волн типа } E_{mn} \alpha_m =$$

$$\frac{2R_s \left(\frac{b}{a} \right)^3 \frac{n^2 + m^2}{b^2 n^2 + m^2}}{Z_0 b \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}} \right)^2}}$$

Энергетические соотношения для прямоугольного волновода

Мощность, переносимая волной любого типа в прямоугольном волноводе, определяется интегрированием вектора Пойнтинга по поперечному сечению $P_{cp} = \frac{1}{2} \int_s \operatorname{Re} \left\{ \vec{z}_0 [\vec{E}, \vec{H}^*] \right\} ds$.

Подставляя выражения для составляющих поля для волны H_{10} , получим формулу для расчета мощности переносимой волной H_{10}

$$P = \frac{ab \sqrt{1 - (\lambda_0 / 2a)^2}}{4Z_0} E_0^2, \text{ где } E_0 - \text{максимальная амплитуда напряженности}$$

электрического поля в волноводе.

Максимально допустимая переносимая мощность в волноводе определяется максимально допустимой (пробивной) напряженностью электрического поля в волноводе. Для сухого воздуха $E_{\max} = 30 \text{ кВ/см}$ при нормальном атмосферном давлении. Затухание волн в волноводах зависит от потерь в металлических стенках и в диэлектрике $\alpha_{\text{общ}} = \alpha_m + \alpha_d$.

Коэффициент затухания вследствие потерь в металлических стенках для любого типа волны в волноводе произвольного сечения S

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \frac{R_s \int_L |\vec{H}_t|^2 dl}{\int_s \operatorname{Re} [\vec{E}, \vec{H}^*] ds}$$

Подставляя соотношения для составляющих поля волн типа H_{10} прямоугольного волновода получим

$$\alpha_m = \frac{R_s \left[1 + \left(\frac{\lambda_0}{2a} \right)^2 \frac{2b}{a} \right]}{Z_0 b \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a} \right)^2}}.$$

Здесь $R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}}$ - поверхностное сопротивление металла. Если волновод заполнен диэлектриком, то λ_0 заменяется на $\lambda_d = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$. Коэффициент ослабления за счет потерь в диэлектрике определяется как $\alpha_d = \operatorname{Im} \sqrt{\beta^2 \epsilon_r (1 - j \operatorname{tg} \delta_3) - k_{\perp}^2}$. При $\operatorname{tg} \delta \ll 1$ $\alpha_d \approx \frac{\pi \epsilon_r \operatorname{tg} \delta_3}{\lambda_d \sqrt{1 - \frac{1}{\epsilon_r} \left(\frac{\lambda_d}{\lambda_{кр}} \right)^2}}$.

Задачи к семинару №6

1. В прямоугольном волноводе сечением $4 \times 3 \text{ см}$ распространяется волна H_{11} . Волновод заполнен диэлектриком с проницаемостью $\epsilon = 1,15$. Частота колебаний 8 ГГц . Определить фазовую скорость и длину волны в волноводе.

Решение

$$\text{Критическая длина волны } \lambda_{кр}^{H_{11}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{m\pi^2}{a^2} + \frac{n\pi^2}{b^2}}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = 4,8 \text{ см}$$

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} = 3,75 \text{ см}$$

$$v_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r - \frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}}} = 4,084 * 10^8 \frac{м}{с}$$

$$\lambda_{\epsilon} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r - \frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}}} = 5,105 \text{ см}$$

2. Какие типы волн могут распространяться в заполненном воздухом прямоугольном волноводе сечением 10*4 см при частоте 5 ГГц?

Решение

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} = 6 \text{ см}$$

Ответ: H₁₀, H₂₀, H₃₀, H₀₁, H₁₁, H₂₁, E₁₁, E₂₁? Например

$$\lambda_{кр}^{H_{11}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{m\pi}{a}^2 + \frac{n\pi}{b}^2}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a}^2 + \frac{1}{b}^2}} = 3,92 \text{ см} . \text{ Не может распространяться.}$$

3. Определить критическую длину волны, критическую частоту и длину волны в прямоугольном волноводе для волны типа E₁₁. Размеры поперечного сечения волновода 4*3 см, частота f=10 ГГц.

Решение

$$\lambda_{кр}^{E_{11}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{m\pi}{a}^2 + \frac{n\pi}{b}^2}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a}^2 + \frac{1}{b}^2}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{4}^2 + \frac{1}{3}^2}} = 4,8 \text{ см}$$

$$f_{кр} = \frac{c}{\lambda_{кр}} = \frac{c \sqrt{\frac{m}{a}^2 + \frac{n}{b}^2}}{2} = \frac{3 * 10^8}{4,8 * 10^{-2}} = 6,25 \text{ ГГц}$$

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} = 3 \text{ см}$$

$$\lambda_{\epsilon} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r - \frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}}} = \frac{3}{\sqrt{1 - \frac{3}{4,8}}} = \frac{3}{0,7806} = 3,84 \text{ см}$$

4. Определить размеры поперечного сечения квадратного волновода, в котором при частоте 4 ГГц может распространяться лишь низшая волна электрического типа. $\epsilon_r=1$.

Решение

$$\lambda_{кр}^{E_{11}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{m\pi}{a}^2 + \frac{n\pi}{b}^2}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a}^2 + \frac{1}{a}^2}} = \frac{2a}{\sqrt{2}} > \lambda_0 = \frac{c}{f},$$

$$a > \frac{\sqrt{2}c}{2f}, a > 5,303 \text{ см.}$$

С другой стороны условие нераспространения волны E₁₂

$$\lambda_{кр}^{E_{12}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{m\pi^2}{a^2} + \frac{n\pi^2}{b^2}}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^2}}} = \frac{2a}{\sqrt{3}} < \lambda_0 = \frac{c}{f},$$

$$a < \frac{\sqrt{3}c}{2f}, a < 8,385 \text{ см.}$$

5. Фазовая скорость волны типа H_{10} в прямоугольном волноводе равна $5c$, где c – скорость света. Определить размеры волновода, если длина волны в свободном пространстве равна 10 см.

Решение

$$v_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{кр}^2}}} = 5c, \quad 1 = 25 * 1 - \frac{\lambda_0^2}{2a^2}, \quad a = \frac{\lambda_0}{2\sqrt{1 - \frac{1}{25}}} = \frac{0,1}{2\sqrt{0,96}} = 5,1 \text{ см.}$$

Определить b нельзя.

6. Для измерения параметров диэлектриков используется установка, состоящая из генератора, измерительной линии, и закороченного на конце прямоугольного волновода. Волновод и измерительная линия заполнены диэлектриком, расстояние $l=1$ м от зонда короткозамкнутого конца волновода. Сечение волновода $23*10$ мм. Материал стенок – медь. Длина волны генератора $\lambda_0=3,2$ см. Определить относительную диэлектрическую проницаемость и тангенс угла диэлектрических потерь, если измеренное значение длины волны в волноводе $\lambda_{в}=25,4$ мм и коэффициент стоячей волны $KCB=4$.

Решение

$$\text{Определим } \varepsilon_r. \quad \lambda_{\varepsilon} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r - \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{кр}^2}}}, \quad \frac{\lambda_{\varepsilon}^2}{\lambda_0^2} = \frac{1}{\varepsilon_r - \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{кр}^2}},$$

$$\varepsilon_r = \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{\varepsilon}^2} + \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{кр}^2}, \quad \varepsilon_r = 2,07.$$

Определим $\text{tg}\delta$ по значению KCB .

$$KCB = \frac{1 + |\dot{\Gamma}|}{1 - |\dot{\Gamma}|}, \quad |\dot{\Gamma}| = \left| \frac{E_{отр}}{E_{пад}} \right| = \frac{KCB - 1}{KCB + 1}, \quad \text{по условию задачи } |\dot{\Gamma}| = e^{-2\alpha l}, \quad \text{где } \alpha -$$

коэффициент затухания в волноводе. Откуда $\alpha = -\frac{\ln|\dot{\Gamma}|}{2l} = -\frac{\ln 0,6}{2} = 0,255 \text{ м}^{-1}$.

$$\alpha = \alpha_M + \alpha_D.$$

$$\alpha_M = \frac{R_s \left(1 + \frac{\lambda_0^2}{2a^2} \frac{2b}{a} \right)}{Z_0 b \sqrt{1 - \frac{\lambda_0^2}{2a^2}}}, \quad \lambda_D = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}, \quad R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2\sigma}}.$$

Me	Ag	Cu	Al	Латунь
σ	$6,1*10^7$	$5,5*10^7$	$3,2*10^7$	$1,6*10^7$

$$\alpha_M = 1,26*10^{-2} \text{ м}^{-1}; \quad \alpha_D = \alpha - \alpha_M = 0,246 \text{ м}^{-1}.$$

$$\alpha_d \approx \frac{\pi \varepsilon_r \operatorname{tg} \delta_{\varepsilon}}{\lambda_d \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\lambda_d^2}{2a}}}; \quad \operatorname{tg} \delta_{\varepsilon} = \frac{\alpha_d \lambda_d}{\pi \varepsilon_r} \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\lambda_d^2}{2a}}, \quad \operatorname{tg} \delta_{\varepsilon} = 1,5 \cdot 10^{-3}.$$

7. Прямоугольный волновод сечением 23×10 мм заполнен диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_r = 2,25$, частота колебаний $8,4$ ГГц. Определить v_{ϕ} и $\lambda_{\text{в}}$.

Решение

$$v_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r - \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{\text{кр}}^2}}} = 2,34 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$\lambda_{\text{в}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r - \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{\text{кр}}^2}}} = 2,78 \text{ см}$$

Семинар №7

Круглый волновод

В круглом волноводе, как и в прямоугольном, возможно существование волн типа H_{mn} и E_{mn} . При анализе структуры поля естественно использовать цилиндрическую систему координат r, α, z , совместив ось z с продольной осью волновода.

Рассмотрим распространение волн электрического типа H_{mn} .

В цилиндрической системе координат

$$\Delta \mathbf{H} = \Delta H_r - \frac{H_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial H_{\alpha}}{\partial \alpha} \mathbf{e}_r + \Delta H_{\alpha} - \frac{H_{\alpha}}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial H_r}{\partial \alpha} \mathbf{e}_{\alpha} + \Delta H_z \mathbf{e}_z,$$

где $\Delta H_r, \Delta H_{\alpha}, \Delta H_z$ — лапласианы скалярных величин, здесь

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Только проекция векторного лапласиана на ось z (прямолинейную ось) зависит от одной составляющей вектора \mathbf{H} . Для этой составляющей скалярное волновое уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial z^2} + k^2 \dot{H}_z = 0$$

$$\text{или так как } \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -k_0^2$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{H}_{mz}}{\partial \alpha^2} + \chi^2 \dot{H}_{mz} = 0, \quad (5.33)$$

где

$$\chi^2 = k^2 - k_0^2.$$

Очевидно, решение этого уравнения имеет вид

$$\dot{H}_{mz} = \dot{H}_m(r, \alpha) e^{-jk_0 z}. \quad (5.34)$$

Зависимость амплитуды от координат r и α обусловлена граничными условиями на стенках волновода. Применим метод Фурье, согласно которому \dot{H}_{mz} можно представить как произведение функций, каждая из которых зависит только от одной переменной

$$\dot{H}_{mz} = R(r)\Phi(\alpha)e^{-jk_0 z} = R\Phi e^{-jk_0 z}. \quad (5.35)$$

Подставляя это выражение в уравнение (5.33) и разделив его на произведение $R\Phi e^{-jk_0 z}$, получим

$$\frac{1}{Rr} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} + \chi^2 = 0 \quad (5.36)$$

или

$$\frac{1}{Rr} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} = -\chi^2,$$

где χ^2 — величина, не зависящая от r и α .

Величина α входит только во второе слагаемое. Если r постоянно, а α изменяется, то сумма этих слагаемых не изменяется. Это возможно лишь в том случае, когда $\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2}$ не зависит от α . Поле должно иметь периодическую зависимости от α и при изменении угла α на 2π иметь то же значение. Таким образом,

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\alpha^2} = -n^2, \quad (5.37)$$

где n — целое число.

Решение этого уравнения

$$\Phi = A \cos n\alpha + B \sin n\alpha$$

можно представить в виде

$$\Phi = \frac{\cos n\alpha}{\sin n\alpha}.$$

Дифференцируя (5.36) с учетом (5.37), получим

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{Rr} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} + \chi^2 = 0.$$

Обозначив $\chi r = x$, получим

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{Rx} \frac{dR}{dx} + 1 - \frac{n^2}{x^2} = 0$$

или

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + 1 - \frac{n^2}{x^2} R = 0. \quad (5.38)$$

Это уравнение называется уравнением Бесселя.

Решение его представляет сумму

$$R = C J_n(x) + D N_n(x),$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя n -го порядка; $N_n(x)$ — функция Неймана n -го порядка.

При $\chi = 0$, т. е. при $r = 0$ $N_n(0) = -$, и второе слагаемое физического смысла не имеет, так как электромагнитное поле в центре волновода имеет конечное значение. Таким образом, решение уравнения (5.33) имеет вид

$$\dot{H}_{mz} = HJ_n(\chi r) \frac{\cos n\alpha}{\sin n\alpha} e^{-jk_0 z}.$$

Остальные составляющие находятся из уравнений Максвелла. В проекциях на оси цилиндрической системы координат имеем

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial \alpha} - \frac{\partial(r\dot{H}_{m\alpha})}{\partial z} = j\omega\epsilon_a \dot{E}_{mr},$$

$$\frac{\partial \dot{H}_{mr}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial r} = j\omega\epsilon_a \dot{E}_{m\alpha},$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\dot{H}_{m\alpha})}{\partial r} - \frac{\partial \dot{H}_{mr}}{\partial \alpha} = j\omega\epsilon_a \dot{E}_{mz},$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial \alpha} - \frac{\partial(r\dot{E}_{m\alpha})}{\partial z} = -j\omega\mu_a \dot{H}_{mr},$$

$$\frac{\partial \dot{E}_{mr}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial r} = -j\omega\mu_a \dot{H}_{m\alpha},$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r\dot{E}_{m\alpha})}{\partial r} - \frac{\partial \dot{E}_{mr}}{\partial \alpha} = -j\omega\mu_a \dot{H}_{mz}.$$

Для Н-волн $H_{mz} = 0$ и $E_{mz} = 0$. Кроме того, $\frac{\partial}{\partial z} = -jk_0$. С учетом этого, получим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial \alpha} + jk_0 r \dot{H}_{m\alpha} = j\omega\epsilon_a \dot{E}_{mr}, \quad (5.39)$$

$$-jk_0 \dot{H}_{mr} - \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial r} = j\omega\epsilon_a \dot{E}_{m\alpha}, \quad (5.40)$$

$$jk_0 \dot{E}_{m\alpha} = -j\omega\mu_a \dot{H}_{mr},$$

$$jk_0 \dot{E}_{mr} = j\omega\mu_a \dot{H}_{m\alpha}.$$

Отсюда

$$\dot{E}_{m\alpha} = -\frac{\omega\mu_a}{k_0} \dot{H}_{mr},$$

$$\dot{E}_{mr} = \frac{\omega\mu_a}{k_0} \dot{H}_{m\alpha}.$$

С учетом значений $\dot{E}_{m\alpha}$ и \dot{E}_{mr} в (5.39) и (5.40) получим

$$\dot{H}_{m\alpha} = -\frac{jk_0}{\chi^2 r} \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial \alpha},$$

$$\dot{H}_{mr} = -\frac{jk_0}{\chi^2} \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial r}.$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned}
\dot{H}_{mz} &= HJ_n(\chi r) \frac{\cos n\alpha}{\sin n\alpha} e^{-jk_0 z}, \\
\dot{H}_{mr} &= -\frac{jk_0}{\chi} HJ_n(\chi r) \frac{\cos n\alpha}{\sin n\alpha} e^{-jk_0 z}, \\
\dot{H}_{m\alpha} &= -\frac{jn k_0}{\chi^2 r} HJ_n(\chi r) \frac{-\sin n\alpha}{\cos n\alpha} e^{-jk_0 z}, \\
\dot{E}_{mr} &= -\frac{j\omega\mu_a n}{\chi^2 r} HJ_n(\chi r) \frac{-\sin n\alpha}{\cos n\alpha} e^{-jk_0 z}, \\
\dot{E}_{m\alpha} &= \frac{j\omega\mu_a}{\chi} HJ_n(\chi r) \frac{\cos n\alpha}{\sin n\alpha} e^{-jk_0 z}.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Согласно граничным условиям $E_r = 0$ при $r = a$, т. е. на стенке волновода. Это условие соответствует $E_\alpha = 0$ при $r = a$, т. е. $J_n(\chi a) = 0$.

График функций Бесселя имеет вид затухающих синусоид. Все $J_n(x)$ за исключением $J_0(x)$ при $x=0$ обращаются в нуль, $J_0(0)=1$. Корни уравнения $J_n(x)=0$ представляют значения, соответствующие точкам пересечения функции $J_n(x)$ с осью x . Это значения A_{nm} , где n — порядок функций Бесселя; m — номер корня. B_{nm} — корни уравнения $J_n(x)=0$, т. е. точки пересечения функции $J_n(x)$ с осью x .

Таким образом,

$$\chi = \frac{B_{nm}}{a}.$$

Критическая длина волны

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{\chi} = \frac{2\pi a}{B_{nm}}.$$

Числа n в выражениях (5.41) определяют число вариаций по углу, m — по радиусу. Постоянная распространения

$$k_0 = k \sqrt{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{кр}}^2},$$

где $k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ — постоянная распространения в свободном пространстве; λ — длина волны в свободном пространстве.

Фазовая скорость

$$v_\phi = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{кр}}^2}},$$

где $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}$ — скорость распространения в свободном пространстве.

Групповая скорость

$$v_{гр} = v \sqrt{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{кр}}^2}.$$

Длина волны в волноводе

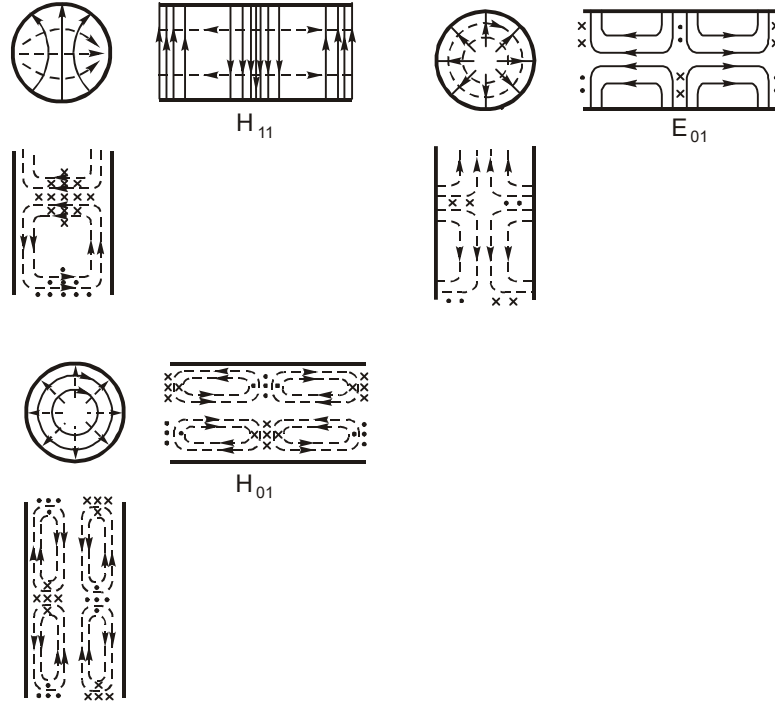
$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{кр}}^2}}.$$

Волновое сопротивление волновода

$$Z_{0H} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{кр}}}},$$

где $Z_0 = \sqrt{\mu_a/\epsilon_a}$ — волновое сопротивление свободного пространства.

Аналогичным образом определяется структура поля E_{nm}



$$\begin{aligned} \dot{E}_{mz} &= EJ_n(\chi r) \frac{\cos n\alpha}{\sin n\alpha} e^{-jk_0 z}, \\ \dot{E}_{mr} &= -\frac{jk_0}{\chi} EJ_n(\chi r) \frac{\cos n\alpha}{\sin n\alpha} e^{-jk_0 z}, \\ \dot{E}_{m\alpha} &= -\frac{jn k_0}{\chi^2 r} EJ_n(\chi r) \frac{-\sin n\alpha}{\cos n\alpha} e^{-jk_0 z}, \\ \dot{H}_{mr} &= \frac{j\omega \epsilon_a n}{\chi^2 r} EJ_n(\chi r) \frac{-\sin n\alpha}{\cos n\alpha} e^{-jk_0 z}, \\ \dot{H}_{m\alpha} &= -\frac{j\omega \epsilon_a}{\chi} EJ_n(\chi r) \frac{\cos n\alpha}{\sin n\alpha} e^{-jk_0 z}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Согласно граничным условиям $E_r = 0$ при $r = a$, или $E_{mz} = 0$ при $r = a$. Отсюда

$$J_n(\chi a) = 0$$

или

$$\chi a = A_{nm}.$$

Критическая длина волны в этом случае определяется выражением

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{\chi} = \frac{2\pi a}{A_{nm}},$$

где A_{nm} — корни уравнения $J_n(x) = 0$.

Низшими типами волн в круглых волноводах являются волны H_{11} и E_{01} . Структура поля H_{11} (рис. 5.18) имеет вид, аналогичный структуре поля H_{10} в прямоугольном волноводе; структура E_{01} (рис. 5.18) аналогична E_{11} в прямоугольном волноводе. При плавном переходе от прямоугольного волновода к круглому H_{10} переходит в H_{11} , E_{11} — в E_{01} . Вследствие осевой симметрии волну E_{01} применяют во вращающихся соединениях. Волна H_{01} имеет структуру поля, получаемую из структуры E_{01} , если поменять местами электрические и магнитные составляющие (см. рис. 5.18). При всех типах волн за исключением H_{01} в круглом волноводе потери в стенках волновода при увеличении частоты увеличиваются. При H_{01} они уменьшаются, так как тангенциальная составляющая вектора \mathbf{H} , определяющая энергию, поглощаемую стенками, уменьшается по сравнению с поперечной составляющей, определяющей передаваемую волноводом мощность.

Таблица 1

Корни A_{nm}

m	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
1	2,405	3,832	5,136	6,380
2	5,520	7,016	8,417	9,761
3	8,654	10,173	11,620	13,015
4	11,792	13,323	14,372	16,224

Таблица 2

Корни B_{nm}

m	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
1	3,832	1,841	3,054	4,201
2	7,016	5,331	6,706	8,015
3	10,173	8,536	9,969	11,346
4	13,324	11,706	13,170	14,586

Энергетические соотношения для круглого волновода

Исходя из записанного ранее соотношения для средней мощности, подставив выражения для составляющих поля, получим, что мощность, переносимая волной H_{11} ,

определяется как $P_{cp} = \frac{1}{2} \int_s \operatorname{Re} \left\{ \vec{z}_0 [\vec{E}, \vec{H}^*] \right\} ds$, и соответственно $P = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_{kp})^2}}{4,28Z_0} E_0^2$.

Значения общего коэффициента ослабления определяется аналогично прямоугольному волноводу: $\alpha_{\text{общ}} = \alpha_m + \alpha_d$, где α_m для волн типа H_{nm} круглого волновода

$$\alpha_m = \frac{R_s}{Z_0 a \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{kp}}\right)^2}} \left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{kp}}\right)^2 + \frac{m^2}{B_{nm} - m^2} \right]$$

Для волн типа E_{nm}

$$\alpha_m = \frac{R_s}{Z_0 a \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{kp}}\right)^2}}$$

Коэффициент ослабления в диэлектрике рассчитывается аналогично

прямоугольному волноводу $\alpha_d \approx \frac{\pi \varepsilon_r \operatorname{tg} \delta_\varepsilon}{\lambda_d \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\lambda_d}{\lambda_{kp}}^2}}$.

Задачи к семинару №7

1. Какие типы волн могут распространяться в круглом волноводе диаметром 3 см, заполненном диэлектриком с относительной проницаемостью $\epsilon_r=3,2$, если частота колебаний $f=10$ ГГц

Решение

$$\lambda_d = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^{10} \sqrt{3,2}} = 1,675 \text{ см.}$$

В круглом волноводе критическая длина волны E_{nm}

$$\lambda_d < \lambda_{кр} = \frac{2\pi a}{A_{nm}}; A_{nm} < \frac{2\pi a}{\lambda_d} \quad . \quad \text{Критическая} \quad \text{длина} \quad \text{волны} \quad H_{nm}$$

$$\lambda_d < \lambda_{кр} = \frac{2\pi a}{B_{nm}}; B_{nm} < \frac{2\pi a}{\lambda_d}; \frac{2\pi a}{\lambda_d} = 5,627 \text{ . Условию удовлетворяют волны:}$$

2. При каком диаметре круглого волновода может распространяться только один основной тип волны при частоте колебаний 10 ГГц.

Решение

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} = 3 \text{ см}; \lambda_{кр H_{11}} = \frac{2\pi a}{B_{nm}} = \frac{2\pi a}{1,841} = 3,413a; \lambda_0 < \lambda_{кр H_{11}} = 3,413a; a > \frac{\lambda_0}{3,413} = 8,79 \text{ .}$$

Ближайший высший тип E_{01} .

$$\lambda_{кр E_{01}} = \frac{2\pi a}{A_{01}}; \lambda_0 > \lambda_{кр E_{01}} = \frac{2\pi a}{2,405}; a < \frac{\lambda_0}{2,613} < \frac{30}{2,613} = 11,48$$

3. Определить радиус полого круглого волновода, если фазовая скорость волны E_{01} при частоте колебаний 10 ГГц равна $5 \cdot 10^8$ м/с.

Решение

$$v_\phi = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{кр}}}}, \quad \lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^{10}} = 3 \text{ см}; \quad \lambda_{кр E_{01}} = 2,61a;$$

$$\frac{v_\phi}{v} = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{кр}}}, \quad 1 - \frac{\lambda}{\lambda_{кр}} = \frac{v}{v_\phi}, \quad \lambda_{кр} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \frac{v}{v_\phi}}} = 14,34 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

$$a = 5,49.$$

4. Определить характеристическое сопротивление волны типа E_{01} в круглом волноводе диаметром 30 мм при длине волны генератора $\lambda=3,2$ см.

Решение

$$Z_{E_{01}} = Z_0 \sqrt{1 - \frac{\lambda}{\lambda_{кр}}}$$

$$Z_{E_{01}} = 120\pi \sqrt{1 - \frac{3,2}{2,61 \cdot 1,5}} = 217,7 \text{ Ом.}$$

Семинар №8

Объемные резонаторы

Объемный резонатор – замкнутая полость, ограниченная металлическими стенками внутри которой могут существовать электромагнитные колебания. На описанном принципе могут быть созданы объемные резонаторы, представляющие собой короткозамкнутые с двух сторон отрезки прямоугольных или круглых волноводов.

Отличие таких систем от короткозамкнутого отрезка двухпроводной линии состоит в следующем:

1. В следствие частотной дисперсии такая система резонирует не на кратных частотах;
2. Возможно установление стоячих волн по всем трем координатным осям.

Прямоугольный объемный резонатор. Пересечем прямоугольный волновод, изображенный на рис. 5.12 двумя идеально проводящими плоскостями, параллельными плоскости x_1Ox_2 ($x_3 = 0$ и $x_3 = l$). Определение структуры поля сводится к интегрированию в декартовой системе координат волнового уравнения для любой проекции векторов \mathbf{E} или \mathbf{H} и нахождению других составляющих поля из уравнений Максвелла. Постоянные интегрирования находятся из удовлетворения граничных условий на всех стенках резонатора.

Поле H_{mnp} характеризуется наличием составляющих магнитного поля по всем трем осям координат, но одна из составляющих электрического поля отсутствует.

Очевидно $H_{m3} = H_{m3}(x_1, x_2, x_3)$, так как граничные условия должны выполняться на всех стенках резонатора, ограничивающих его объем по осям x_1 , x_2 и x_3 .

Представим H_{m3} в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит от одной переменной

$$H_{m3} = X_1(x_1)X_2(x_2)X_3(x_3) = X_1X_2X_3,$$

подставляя ее в волновое уравнение (2.11) и разделив на $X_1X_2X_3$, получим

$$\frac{1}{X_1} \frac{d^2 X_1}{dx_1^2} + \frac{1}{X_2} \frac{d^2 X_2}{dx_2^2} + \frac{1}{X_3} \frac{d^2 X_3}{dx_3^2} = -k^2,$$

где $k = \omega\sqrt{\epsilon_a\mu_a}$, т. е. от координат x_1 , x_2 и x_3 не зависит. Это равенство возможно, если каждое из слагаемых представляет постоянную величину, т. е.

$$\frac{1}{X_1} \frac{d^2 X_1}{dx_1^2} = -\chi_1^2, \quad \frac{1}{X_2} \frac{d^2 X_2}{dx_2^2} = -\chi_2^2, \quad \frac{1}{X_3} \frac{d^2 X_3}{dx_3^2} = -\chi_3^2,$$

$$\text{где } \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 = \chi^2 + \chi_3^2 = k^2.$$

Полученные уравнения представляют обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, решения которых имеют вид

$$X_1(x_1) = A \cos \chi_1 x_1 + B \sin \chi_1 x_1,$$

$$X_2(x_2) = C \cos \chi_2 x_2 + D \sin \chi_2 x_2,$$

$$X_3(x_3) = E \cos \chi_3 x_3 + F \sin \chi_3 x_3.$$

Таким образом,

$$H_{m3} = (A \cos \chi_1 x_1 + B \sin \chi_1 x_1)(C \cos \chi_2 x_2 + D \sin \chi_2 x_2)(E \cos \chi_3 x_3 + F \sin \chi_3 x_3).$$

Согласно граничным условиям

$$1) \quad H_{m3} = H_\tau = 0 \text{ при } x_1 = 0 \text{ и } x_1 = a,$$

$$2) \quad H_{m3} = H_\tau = 0 \text{ при } x_2 = 0 \text{ и } x_2 = b,$$

$$3) \quad H_{m3} = H_n = 0 \text{ при } x_3 = 0 \text{ и } x_3 = l.$$

Первое условие возможно

$$\text{при } A = 0, B = 0 \text{ и } \chi_1 = \frac{n\pi}{a}.$$

Второе условие возможно

$$\text{при } C = 0, D = 0 \text{ и } \chi_2 = \frac{m\pi}{b}.$$

Третье условие возможно

$$\text{при } E = 0, F = 0 \text{ и } \chi_3 = \frac{p\pi}{l}.$$

Таким образом,

$$H_{m3} = H \cos \chi_1 \chi_1 \cos \chi_2 \chi_2 \sin \chi_3 \chi_3, \text{ где } H = ACF. \quad (6.1)$$

Уравнения Максвелла

$$\text{rot} \dot{\mathbf{H}}_m = j\omega \epsilon_a \dot{\mathbf{E}}_m,$$

$$\text{rot} \dot{\mathbf{E}}_m = -j\omega \mu_a \dot{\mathbf{H}}_m$$

с учетом $E_3 = 0$ в проекциях на оси координат имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial \chi_2} - \frac{\partial \dot{H}_{m2}}{\partial \chi_3} &= j\omega \epsilon_a \dot{E}_{m1}, \\ \frac{\partial \dot{H}_{m1}}{\partial \chi_3} - \frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial \chi_1} &= j\omega \epsilon_a \dot{E}_{m2}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \dot{H}_{m2}}{\partial \chi_1} - \frac{\partial \dot{H}_{m1}}{\partial \chi_2} = 0,$$

$$\frac{\partial \dot{E}_{m2}}{\partial \chi_3} = j\omega \mu_a \dot{H}_{m1},$$

$$\frac{\partial \dot{E}_{m1}}{\partial \chi_3} = -j\omega \mu_a \dot{H}_{m2}, \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_{m2}}{\partial \chi_1} - \frac{\partial \dot{E}_{m1}}{\partial \chi_2} = -j\omega \mu_a \dot{H}_{m3}.$$

Согласно первым двум уравнениям системы (6.3)

$$\begin{aligned} \dot{H}_{m1} &= -\frac{j}{\omega \mu_a} \frac{\partial \dot{E}_{m2}}{\partial \chi_3}, \\ \dot{H}_{m2} &= \frac{j}{\omega \mu_a} \frac{\partial \dot{E}_{m1}}{\partial \chi_3}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Подставляя второе уравнение (6.4) в первое уравнение системы (6.2), учитывая, что

$$\frac{\partial^2}{\partial \chi_3^2} = -\chi_3^2, \text{ получим}$$

$$\frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial \chi_2} - \frac{j}{\omega \mu_a} \frac{\partial^2 \dot{E}_{m1}}{\partial \chi_3^2} = j\omega \epsilon_a \dot{E}_{m1}$$

или

$$j\omega \epsilon_a - \frac{\chi_3^2}{\omega \mu_a} \dot{E}_{m1} = \frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial \chi_2}$$

или

$$\frac{j\chi_3^2}{\omega \mu_a} \dot{E}_{m1} = \frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial \chi_2},$$

т. е. с учетом (6.1)

$$\dot{E}_{m1} = \frac{j\omega \mu_a \chi_2}{\chi^2} H \cos \chi_1 \chi_1 \sin \chi_2 \chi_2 \sin \chi_3 \chi_3. \quad (6.5)$$

Подставляя первое уравнение системы (6.4) во второе уравнение системы (6.2), получаем

$$-\frac{j}{\omega \mu_a} \frac{\partial^2 \dot{E}_{m2}}{\partial \chi_3^2} - \frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial \chi_1} = j\omega \epsilon_a \dot{E}_{m2}$$

или

$$\frac{j\chi_3^2}{\omega \mu_a} \dot{E}_{m2} - j\omega \epsilon_a \dot{E}_{m2} = \frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial \chi_1}$$

или

$$\frac{j(k^2 - \chi_3^2)}{\omega \mu_a} \dot{E}_{m2} = -\frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_1},$$

т. е. с учетом (6.1)

$$\dot{E}_{m2} = -\frac{j\omega \mu_a \chi_1}{\chi^2} H \sin \chi_1 x_1 \cos \chi_2 x_2 \sin \chi_3 x_3. \quad (6.6)$$

Согласно (6.4)—(6.6)

$$\begin{aligned} \dot{H}_{m1} &= -\frac{\chi_1 \chi_3}{\chi^2} H \sin \chi_1 x_1 \cos \chi_2 x_2 \cos \chi_3 x_3, \\ \dot{H}_{m2} &= -\frac{\chi_2 \chi_3}{\chi^2} H \cos \chi_1 x_1 \sin \chi_2 x_2 \cos \chi_3 x_3. \end{aligned}$$

Таким образом, поле H_{mnp} имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{H}_{m3} &= H \cos \chi_1 x_1 \cos \chi_2 x_2 \sin \chi_3 x_3, \\ \dot{H}_{m1} &= -\frac{\chi_1 \chi_3}{\chi^2} H \sin \chi_1 x_1 \cos \chi_2 x_2 \cos \chi_3 x_3, \\ \dot{H}_{m2} &= -\frac{\chi_2 \chi_3}{\chi^2} H \cos \chi_1 x_1 \sin \chi_2 x_2 \cos \chi_3 x_3, \\ \dot{E}_{m1} &= \frac{j\omega_p \mu_a \chi_2}{\chi^2} H \cos \chi_1 x_1 \sin \chi_2 x_2 \sin \chi_3 x_3, \\ \dot{E}_{m2} &= -\frac{j\omega_p \mu_a \chi_1}{\chi^2} H \sin \chi_1 x_1 \cos \chi_2 x_2 \sin \chi_3 x_3. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Здесь

$$\chi_1 = \frac{m\pi}{a}, \quad \chi_2 = \frac{n\pi}{b}, \quad \chi_3 = \frac{p\pi}{l}, \quad (6.8)$$

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 = \chi^2, \quad \chi^2 + \chi_3^2 = k^2, \quad k = \omega_p \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}, \quad (6.9)$$

где ω_p — резонансная частота; ε_a, μ_a — параметры среды, заполнявшей резонатор; m, n и p — целые числа (m и $n = 0, 1, 2, \dots, p = 1, 2, 3, \dots$). Одновременно m и n нулю равняться не могут.

Поле E_{mnp} в прямоугольном резонаторе можно найти аналогично H_{mnp} или рассматривая поле в резонаторе как суперпозицию волн, определяемых формулами (5.31), бегущих в противоположных направлениях с учетом коэффициента отражения от металлической стенки для различных составляющих поля. В результате получим:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{m3} &= E \sin \chi_1 x_1 \sin \chi_2 x_2 \cos \chi_3 x_3, \\ \dot{E}_{m1} &= -\frac{\chi_1 \chi_3}{\chi^2} E \cos \chi_1 x_1 \sin \chi_2 x_2 \sin \chi_3 x_3, \\ \dot{E}_{m2} &= -\frac{\chi_2 \chi_3}{\chi^2} E \sin \chi_1 x_1 \cos \chi_2 x_2 \sin \chi_3 x_3, \\ \dot{H}_{m1} &= \frac{j\chi_2 \omega_p \varepsilon_a}{\chi^2} E \sin \chi_1 x_1 \cos \chi_2 x_2 \cos \chi_3 x_3, \\ \dot{H}_{m2} &= -\frac{j\chi_1 \omega_p \varepsilon_a}{\chi^2} E \cos \chi_1 x_1 \sin \chi_2 x_2 \cos \chi_3 x_3. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Здесь $\chi_1 = \frac{m\pi}{a}$; $\chi_2 = \frac{n\pi}{b}$; $\chi_3 = \frac{p\pi}{l}$; $\chi^2 = \chi_1^2 + \chi_2^2$, $m, n = 1, 2, 3, \dots$; $p = 0, 1, 2, \dots$

Из выражений (6.7) и (6.10) видно, что фаза полей не меняется в пространстве (стоячая волна). На гранях резонатора касательные составляющие электрического и нормальные составляющие магнитного поля равны нулю, а нормальные составляющие электрического и касательные составляющие магнитного поля достигают максимума. Этим и объясняется, что величины χ_1, χ_2, χ_3 принимают значения, лишь определяемые выражениями (6.8), так как на соответствующих длинах a, b и l должно укладываться целое число полуволн. Структура полей в объемном прямоугольном резонаторе представлена на рис. 6.1.

Величина $k = \omega_p \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ согласно (6.9) и (6.8) может иметь только определенные, образующие бесконечный ряд, значения, называемые собственными волновыми числами резонатора. Соответствующие им значения Е- и Н-полей объемного резонатора называются собственными функциями.

Учитывая, что

$$k = \omega_p \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = \sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2},$$

получим резонансные частоты прямоугольного резонатора

$$\omega_p = \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{l^2}},$$

образующие бесконечный дискретный спектр. Этим частотам соответствуют резонансные длины волн

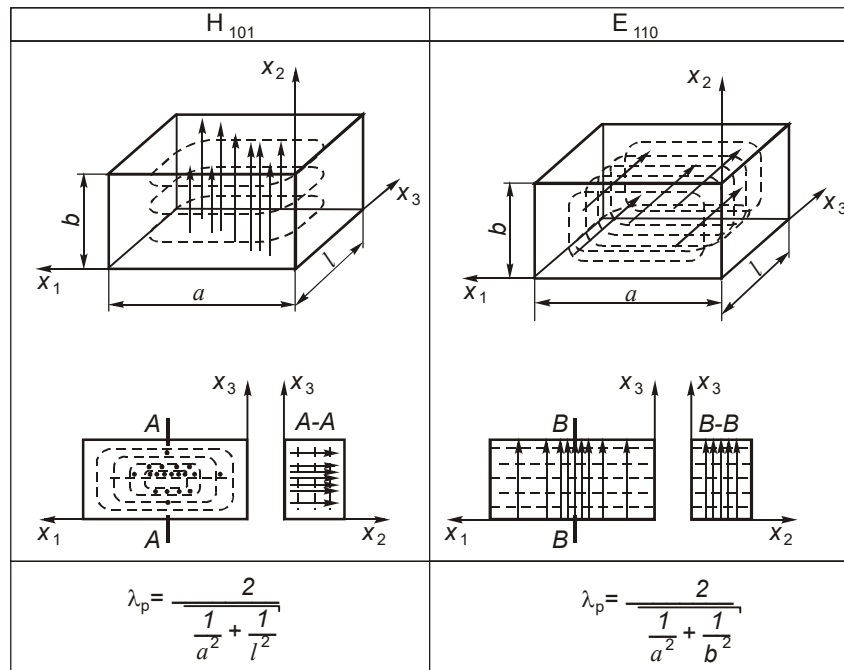


Рис. 6.1. Структура полей в прямоугольном резонаторе

$$\lambda_p = \frac{2}{\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{l^2}}}.$$

Таким образом, резонансные длины волн зависят от геометрических размеров резонатора и целых чисел m, n и p , определяющих тип колебания. Наименьшая длина волны имеет место для одной из комбинаций значений mnp : 011, 101 или 110. При этом значение, равное нулю, соответствует наименьшему ребру прямоугольного резонатора.

Длины волны для E_{mnp} и H_{mnp} полей в прямоугольном резонаторе, определяемых одной и той же комбинацией чисел m , n и p , равны. Соответствие разных полей одной и той же длине волны называется вырождением.

Круглый цилиндрический резонатор. В случае круглого цилиндрического резонатора структура поля находится решением волнового уравнения и уравнений Максвелла в цилиндрической системе координат. Составляющие поля имеют следующий вид:

H_{mnp} -поле

$$\begin{aligned}\dot{H}_{mz} &= H J_n(\chi r) \frac{\cos n\alpha}{\sin n\alpha} \sin \chi_z z, \\ \dot{H}_{mr} &= \frac{\chi_z}{\chi} H J_n(\chi r) \frac{\cos n\alpha}{\sin n\alpha} \cos \chi_z z, \\ \dot{H}_{m\alpha} &= \frac{n\chi_z}{\chi^2 r} H J_n(\chi r) \frac{-\sin n\alpha}{\cos n\alpha} \cos \chi_z z, \\ \dot{E}_{mr} &= -\frac{j\omega_p \mu_a}{\chi^2 r} H J_n(\chi r) \frac{-\sin n\alpha}{\cos n\alpha} \sin \chi_z z, \\ \dot{E}_{m\alpha} &= \frac{j\omega_p \mu_a}{\chi} H J_n(\chi r) \frac{\cos n\alpha}{\sin n\alpha} \sin \chi_z z,\end{aligned}\quad (6.11)$$

где $\chi_z = \frac{p\pi}{l}$; $p = 1, 2, 3, \dots$; $\chi = \frac{B_{nm}}{a}$, B_{nm} — корни уравнения $J_n(x) = 0$; a — радиус резонатора, l — длина резонатора;

E_{mnp} -поле

$$\begin{aligned}\dot{E}_{mz} &= E J_n(\chi r) \frac{\cos n\alpha}{\sin n\alpha} \cos \chi_z z, \\ \dot{E}_{mr} &= -\frac{\chi_z}{\chi} E J_n(\chi r) \frac{\cos n\alpha}{\sin n\alpha} \sin \chi_z z, \\ \dot{E}_{m\alpha} &= -\frac{n\chi_z}{\chi^2 r} E J_n(\chi r) \frac{-\sin n\alpha}{\cos n\alpha} \sin \chi_z z, \\ \dot{H}_{mr} &= \frac{j\omega_p \varepsilon_a}{\chi^2 r} J_n(\chi r) \frac{-\sin n\alpha}{\cos n\alpha} \cos \chi_z z, \\ \dot{H}_{m\alpha} &= -\frac{j\omega_p \varepsilon_a}{\chi} J_n(\chi r) \frac{\cos n\alpha}{\sin n\alpha} \cos \chi_z z,\end{aligned}\quad (6.12)$$

где $\chi_z = \frac{p\pi}{l}$; $p = 0, 1, 2, 3, \dots$; $\chi = \frac{A_{nm}}{a}$, A_{nm} — корни уравнения $J_n(x) = 0$; a — радиус резонатора, l — длина резонатора.

Из полученных выражений (6.11) и (6.12) видно, что электромагнитное поле как для Н-, так и для Е-колебаний представляет собой систему стоячих волн с узлами E_r , E_α и H_z на основаниях цилиндра и узлами E_z , E_α и H_r на боковой поверхности.

Резонансные частоты и длины волн резонатора:

для поля H_{mnp}

$$\begin{aligned}\omega_p &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{\frac{B_{nm}^2}{a^2} + \frac{p\pi^2}{l^2}}, \\ \lambda_p &= \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{B_{nm}^2}{a^2} + \frac{p\pi^2}{l^2}}};\end{aligned}$$

для поля E_{mnp}

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{\frac{A_{nm}^2}{a} + \frac{p\pi^2}{l}},$$

$$\lambda_p = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{A_{nm}^2}{a} + \frac{p\pi^2}{l}}}.$$

Наибольшая резонансная длина волны для Е-колебаний соответствует E_{010} , для Н-колебаний — H_{111} .

В отличие от прямоугольного резонатора длины волн для колебаний H_{nmp} и E_{nmp} не совпадают.

Резонатор с потерями. Потери в резонаторах обусловлены потерями в стенках резонатора, в среде, заполняющей объем резонатора, а также излучением через отверстия в стенках резонатора.

Потери в стенках резонатора аналогично потерям в стенках волновода определяются выражением

$$P_{0\text{ст}} = \sqrt{\frac{\mu_{a\text{ст}} \omega_p}{2\sigma_{\text{ст}}}} H_{\text{дт}}^2 dS, \quad (6.13)$$

где интегрирование ведется по всей внутренней поверхности резонатора. Напомним, что $H_{\text{дт}}$ — действующее значение тангенциальной составляющей магнитного поля у поверхности резонатора, вычисленное в предположении отсутствия потерь; $\mu_{a\text{ст}}$ и $\sigma_{\text{ст}}$ — соответственно магнитная проницаемость и проводимость материала стенок.

Потери в среде, заполняющей резонатор

$$P_{0\text{диэл}} = \operatorname{Re} \int_V (\mathbf{J}_d \mathbf{E}_d^*) dV = \int_V \sigma E_d^2 dV, \quad (6.14)$$

где E_d — действующее значение напряженности электрического поля в резонаторе; σ — проводимость среды.

Если в стенках резонатора имеются отверстия, то через них будет излучаться электромагнитная энергия. Это излучение может происходить как в свободное пространство, так и в связанный с резонатором волновод или другой резонатор. Излучаемая мощность

$$P_{0\text{изл}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{S_0} [\mathbf{E} \dot{\mathbf{H}}^*] dS, \quad (6.15)$$

где интегрирование производится по поверхности, соответствующей отверстию.

Общая мощность потерь

$$P_0 = P_{0\text{ст}} + P_{0\text{диэл}} + P_{0\text{изл}}. \quad (6.16)$$

Конечно, потери всех видов изменяют распределение поля в резонаторе, но практически представляет интерес случай малых потерь, при котором распределение поля близко к идеальному и резонатор можно рассматривать как изолированную систему, обладающую запасом энергии

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mu_a H_m^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_a E_m^2 dV, \quad (6.17)$$

$$W = \int_V \mu_a H_d^2 dV = \int_V \varepsilon_a E_d^2 dV.$$

Потери энергии в такой системе характеризуются добротностью Q (безразмерная величина). С точностью до постоянного множителя 2π добротность определяется отношением запасенной энергии W к потерям энергии W_T за период

$$Q = 2\pi \frac{W}{W_T} = \frac{\omega_p W}{P_0}, \quad (6.18)$$

где P_0 — средняя мощность потерь.

Потери приводят к затуханию колебаний и уменьшению запасенной энергии резонатора, если она не восполняется извне.

$$\frac{dW}{dt} = -P_0.$$

Учитывая это соотношение в (6.18), получаем уравнение

$$Q = \frac{\omega_p W}{-\frac{dW}{dt}}$$

или

$$\frac{dW}{dt} + \frac{\omega_p}{Q} W = 0,$$

решение которого имеет вид

$$W = W_0 e^{-\frac{\omega_p}{2Q} t},$$

т. е. запас энергии убывает по экспоненциальному закону, причем тем быстрее, чем меньше добротность.

Так как энергия пропорциональна квадрату амплитуды напряженности поля, то очевидно изменение амплитуды напряженности происходит по закону

$$E_m(t) = E_m e^{-\frac{\omega_p}{2Q} t},$$

$$H_m(t) = H_m e^{-\frac{\omega_p}{2Q} t}.$$

Эти выражения характеризуют колебания частотой ω_p , затухающие во времени по экспоненциальному закону.

Коэффициент $\alpha = \frac{\omega_p}{2Q}$ называется коэффициентом затухания.

Мгновенные значения напряженности можно записать в виде

$$\dot{E} = E_m e^{-\frac{\omega_p}{2Q} t} e^{j\omega_p t} = E_m e^{j\dot{\omega}_p t},$$

$$\dot{H} = H_m e^{-\frac{\omega_p}{2Q} t} e^{j\omega_p t} = H_m e^{j\dot{\omega}_p t}.$$

Величина

$$\dot{\omega}_p = \omega_p \left(1 + j \frac{1}{2Q} \right) \quad (6.19)$$

называется комплексной частотой собственных колебаний.

Согласно (6.16) и (6.18) можно записать

$$\frac{1}{Q} = \frac{P_0}{\omega_p W} = \frac{1}{Q_{\text{ст}}} + \frac{1}{Q_{\text{диэл}}} + \frac{1}{Q_{\text{изл}}},$$

где $Q_{\text{ст}} = \frac{\omega_p W}{P_{0\text{ст}}}$ — добротность резонатора при наличии потерь только в стенках;

$Q_{\text{диэл}} = \frac{\omega_p W}{P_{0\text{диэл}}}$ — добротность резонатора, обусловленная потерями только в диэлектрике;

$Q_{\text{изл}} = \frac{\omega_p W}{P_{0\text{изл}}}$ — добротность резонатора при наличии потерь только за счет излучения.

Добротности $Q_{\text{ст}}$, $Q_{\text{диэл}}$ и $Q_{\text{изл}}$ называют частичными добротностями. Добротность, обусловленную потерями в стенках и диэлектрике, называют собственной добротностью Q_0

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{1}{Q_{\text{ст}}} + \frac{1}{Q_{\text{дизл}}}.$$

Добротность, определяемая излучением $Q_{\text{изл}}$, называется внешней, общая добротность Q — нагруженной.

На практике чаще применяют круглые цилиндрические резонаторы, работающие на колебаниях типа H_{01p} . Такие резонаторы при данном объеме обладают наибольшей добротностью. Отсутствие продольных составляющих тока на боковой поверхности и радиальных составляющих на торцах резонатора позволяет изготавливать резонаторы разъемными без ухудшения добротности, так как разрывы не прерывают линий тока.

Объемные металлические резонаторы нашли широкое применение в технике СВЧ, для выделения сигнала определенной частоты, определения длины волны и измерения электромагнитных параметров веществ.

Задачи к семинару №8

1. Определить резонансную длину волны двух низших типов колебаний возбуждаемых в прямоугольном резонаторе размерами 20*25*30 мм.

Решение

$$\lambda_p = \frac{2}{\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{l^2}}}.$$

Резонансные длины волн зависят от геометрических размеров резонатора и целых чисел m , n и p , определяющих тип колебания. Наименьшая длина волны имеет место для одной из комбинаций значений mnp : 011, 101 или 110. При этом значение, равное нулю, соответствует наименьшему ребру прямоугольного резонатора.

$$\lambda_p^{110} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1^2}{30^2} + \frac{1^2}{25^2} + \frac{0^2}{20^2}}} = \frac{2}{\sqrt{0,033^2 + 0,04^2}} = \frac{2}{0,052} = 38,46$$

$$\lambda_p^{101} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1^2}{30^2} + \frac{0^2}{25^2} + \frac{1^2}{20^2}}} = \frac{2}{\sqrt{0,033^2 + 0,05^2}} = \frac{2}{0,06} = 33,38$$

$$\lambda_p^{011} = \frac{2}{\sqrt{\frac{0^2}{30^2} + \frac{1^2}{25^2} + \frac{1^2}{20^2}}} = \frac{2}{\sqrt{0,04^2 + 0,05^2}} = \frac{2}{0,064} = 31,23$$

2. Определите длину l прямоугольного резонатора сечением 23*10 мм², если в резонаторе возбуждается колебание H_{103} и $f_{\text{рез}} = 9$ ГГц.

Решение

3. Перестраиваемый резонатор образован отрезком прямоугольного волновода сечением 23*10 мм² внутри которого перемещается поршень. В резонаторе возбуждается поле H_{101} . Определить пределы перемещения поршня для перестройки резонатора в пределах 8...12 ГГц.

Решение

4. В объемном прямоугольном резонаторе с размерами $20 \times 10 \times 30 \text{ см}^3$ возбуждается поле H_{101} . Резонатор заполнен воздухом, проводимость стенок резонатора $\sigma = 5,6 \cdot 10^7 \text{ Сим/м}$. Максимальная напряженность электрического поля в центре резонатора $E_m = 10^5 \text{ В/м}$. Определить $f_{\text{рез}}$, структуру поля H_{101} , запасаемую энергию, потери в стенках резонатора, добротность Q и полосу пропускания.

Решение

5. Определить составляющие поля H_{011} в цилиндрическом резонаторе и его длину l , если $R = 5 \text{ см}$, а резонансная частота $8,35 \text{ ГГц}$.

Решение