Электродинамика и распространение радиоволн

Лекция 7

Русов Юрий Сергеевич

2.4 Плоская однородная монохроматическая волна в неограниченной однородной изотропной линейной среде.
Фазовая и групповая скорости

Среда с потерями.

Диэлектрическая и магнитная проницаемость в общем случае комплексные величины:

$$\dot{k} = \omega\sqrt{\tilde{\varepsilon}_a \tilde{\mu}_a} = \beta - i\alpha$$

$$\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon'_a - i\,\varepsilon''_a \qquad\qquad \tilde{\mu}_a = \mu'_a - i\,\mu''_a$$

Рассмотрим волну в прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3. Направление распространения волны совпадает с осью x_3.

Плоская волна в неограниченной среде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x_3, t) \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}(x_3, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} = 0 \qquad (2.39)$$

$$\frac{\partial^2 \dot{\mathbf{H}}_m}{\partial x_3^2} + \dot{k}^2 \dot{\mathbf{H}}_m = 0, \qquad \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{E}}_m}{\partial x_3^2} + \dot{k}^2 \dot{\mathbf{E}}_m = 0. \qquad (2.40)$$

Уравнения (2.40) называются уравнениями Гельмгольца и представляют собой линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, решения которых имеют вид

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{A}\,\mathrm{e}^{-i\,\dot{k}x_3} + \mathbf{B}\,\mathrm{e}^{i\,\dot{k}x_3}.$$

Плоская волна в неограниченной среде

Рассматриваем только прямую волну

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_m \, \mathrm{e}^{i(\omega t - \dot{k} x_3)},$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_m \, \mathrm{e}^{-\alpha x_3} \mathrm{e}^{i(\omega t - \beta x_3)}.$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 E_m \, \mathrm{e}^{-\alpha x_3} \cos(\omega t - \beta x_3),$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_2 H_m \, \mathrm{e}^{-\alpha x_3} \cos(\omega t - \beta x_3 - \varphi).$$

Здесь φ – возможный фазовый сдвиг;
α – коэффициент затухания (постоянная затухания), характеризует скорость убывания амплитуды;
β – коэффициент фазы (фазовая постоянная), характеризует скорость изменения фазы при распространении волны.

Плоская волна в неограниченной среде

Рассмотрим условие постоянства фазы для различных t и x_3.

$$\omega(t+\Delta t)-\beta(x_3+\Delta x_3)=\omega t-\beta x_3$$

$$\omega\Delta t-\beta\Delta x_3=0.$$

Если в момент времени t в плоскости x_3 = const поле имеет некоторое определенное значение фазы, то такое же значение фазы поле будет иметь через промежуток времени Δt в плоскости, отстоящей от плоскости x_3 = const на расстояние Δx_3 по оси x_3.

Плоская волна в неограниченной среде

Значение фазы распространяется вдоль оси x_3 с фазовой скоростью.

$$\mathrm{v}_{ф} = \frac{\Delta x_3}{\Delta t} = \frac{\omega}{\beta}$$

С такой скоростью перемещается плоскость равных фаз, называемая фронтом волны.

Ближайшее расстояние между точками, где значение фазы в данный момент времени отличается на 2π, называется длиной волны.

$$\beta(x_3 + \lambda) - \beta x_3 = 2\pi$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

Плоская волна в неограниченной среде

Уравнения Максвелла для монохроматического поля в среде с потерями имеют вид

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} = i\,\omega\,\tilde{\varepsilon}_a\,\dot{\mathbf{E}},$$

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} = -i\,\omega\,\tilde{\mu}_a\,\dot{\mathbf{H}}.$$

В декартовой системе координат с учетом (2.39) и зависимости от x_3 в виде $\mathrm{e}^{-i\dot{k}x_3}$ $\left(\frac{\partial}{\partial x_3} = -i\dot{k}\right)$

$$\left.\begin{aligned}
\dot{k}\dot{H}_2 &= \omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{E}_1,\\
\dot{k}\dot{H}_1 &= -\omega\tilde{\varepsilon}_a E_2,\\
\dot{E}_3 &= 0,\\
\dot{k}E_2 &= -\omega\tilde{\mu}_a\dot{H}_1,\\
\dot{k}\dot{E}_1 &= \omega\tilde{\mu}_a\dot{H}_2,\\
\dot{H}_3 &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.41)$$

Плоская волна в неограниченной среде

Коэффициент распространения $\dot{\mathbf{k}}$ можно рассматривать как вектор, направление которого в случае плоской однородной волны определяет направление ее распространения. С учетом (2.41)

$$\left.\begin{aligned} -[\dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{H}}] &= \omega\tilde{\varepsilon}_a\dot{\mathbf{E}}, \\ [\dot{\mathbf{k}}\dot{\mathbf{E}}] &= \omega\tilde{\mu}_a\dot{\mathbf{H}}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.42)$$

Векторы **E**, **H** и **k** взаимно перпендикулярны;

векторы **E** и **H** лежат в плоскости $x_1 0 x_2$.

Плоская волна в неограниченной среде

Если **E** направлен по оси x_1, то **H** — по оси x_2:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 E_m \,\mathrm{e}^{-\alpha x_3} \cos(\omega t - \beta x_3),$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_2 H_m \,\mathrm{e}^{-\alpha x_3} \cos(\omega t - \beta x_3 - \varphi).$$

Из векторных уравнений (2.41) следует выражение

$$\dot{k}\dot{H} = \omega \tilde{\varepsilon}_a \dot{E}$$

или с учетом $\dot{k} = \omega\sqrt{\tilde{\varepsilon}_a \tilde{\mu}_a}$

$$\frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_a}{\tilde{\varepsilon}_a}}, \qquad (2.43)$$

определяющее сдвиг по фазе во времени между **H** и **E**.

Плоская волна в неограниченной среде

Выражение

$$\dot{Z}_c = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_a}{\tilde{\varepsilon}_a}} = \left|Z_c\right| \mathrm{e}^{i\varphi} \qquad (2.44)$$

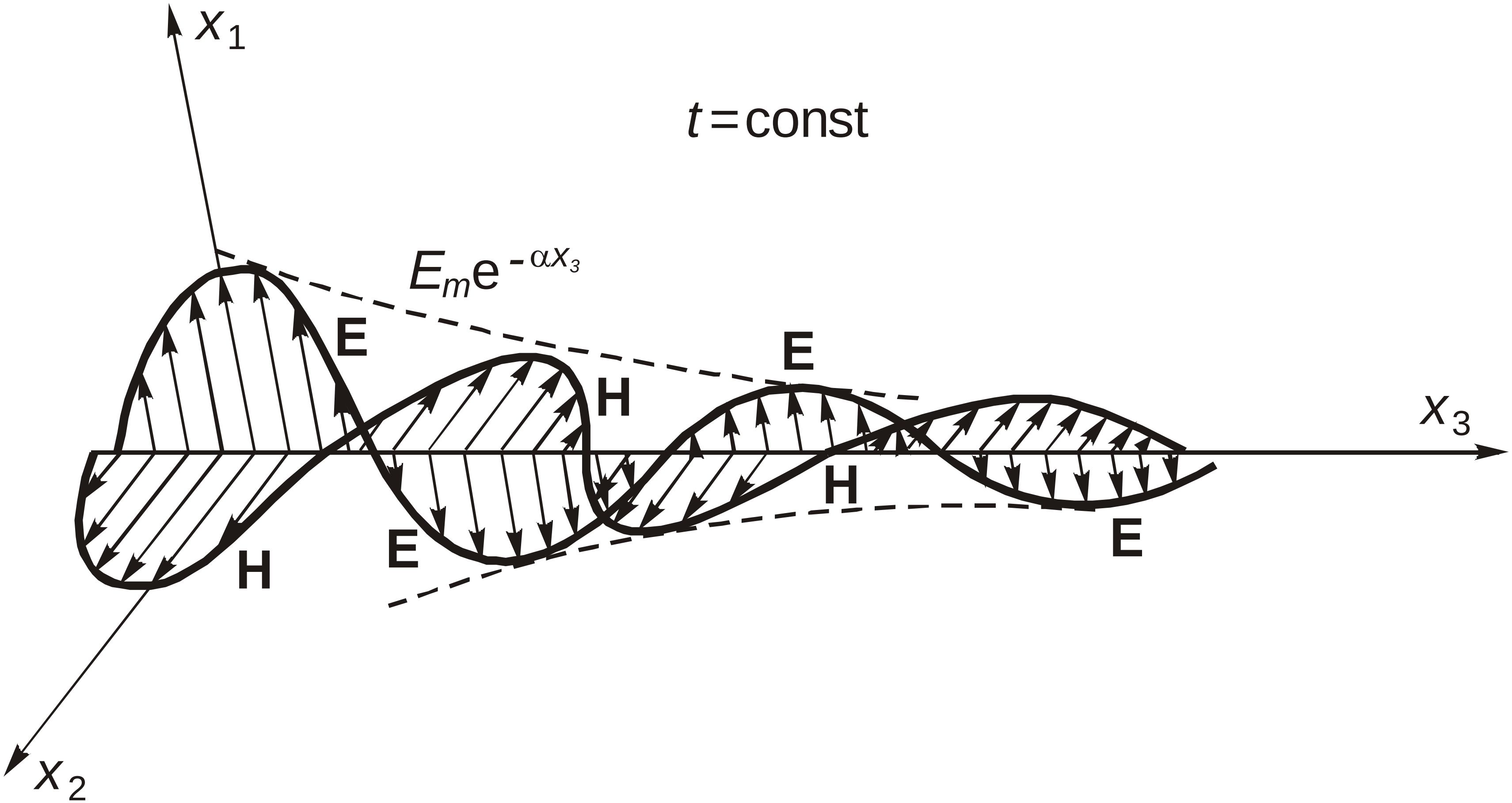
называется характеристическим сопротивлением среды.

Среднее значение вектора Пойнтинга

$$\mathbf{\Pi}_0 = \mathrm{Re}\,\dot{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{e}_3\, \mathrm{e}^{-2\alpha x_3} \frac{E_m H_m}{2} \cos\varphi.$$

Плоская волна в неограниченной среде

Плоская волна в среде с потерями



Плоская волна в неограниченной среде

.

Затухание энергии электромагнитного поля при прохождении волной пути *l* определяется отношением средних плотностей потока мощности на концах этого участка

$$\frac{\Pi_0(x_3)}{\Pi_0(x_3+l)} = \mathrm{e}^{2\alpha l}\,.$$

Затухание волны в децибелах (дБ)

$$L = 10\lg \mathrm{e}^{2\alpha l} \approx 8{,}69\,\alpha l.$$

Плоская волна в неограниченной среде

В общем случае, когда направление распространения поля не совпадает ни с одной из осей координат, волновые уравнения имеют вид

$$\Delta\dot{\mathbf{H}} + \dot{k}^2\dot{\mathbf{H}} = 0,$$

$$\Delta\dot{\mathbf{E}} + \dot{k}^2\dot{\mathbf{E}} = 0,$$

а их решения

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_m\, \mathrm{e}^{i\,(\omega t - \dot{\mathbf{k}}\mathbf{r})},$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_m\, \mathrm{e}^{i\,(\omega t - \dot{\mathbf{k}}\mathbf{r} - \varphi)},$$

где $\dot{\mathbf{k}} = \boldsymbol{\beta} - i\,\boldsymbol{\alpha}$ – комплексный волновой вектор.

Плоская волна в неограниченной среде

.

Определим постоянные α и β через параметры среды:

$$\dot{k} = \omega\sqrt{\tilde{\varepsilon}_a \tilde{\mu}_a} = \omega\sqrt{(\varepsilon'_a - i\,\varepsilon''_a)(\mu'_a - i\,\mu''_a)} = \beta - i\,\alpha,$$

$$\omega^2[(\varepsilon'_a\mu'_a - \varepsilon''_a\mu''_a) - i\,(\varepsilon'_a\mu''_a + \varepsilon''_a\mu'_a)] =$$

$$= (\beta^2 - \alpha^2) - i\,2\alpha\beta.$$

Приравняем действительные и мнимые части

$$\beta^2 - \alpha^2 = \omega^2(\varepsilon'_a\mu'_a - \varepsilon''_a\mu''_a),$$

$$2\alpha\beta = \omega^2(\varepsilon'_a\mu''_a + \varepsilon''_a\mu'_a).$$

Решения этих уравнений

$$\left.\begin{aligned}
\beta &= \\
&= \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\frac{(\varepsilon'\mu' - \varepsilon''\mu'') + \sqrt{(\varepsilon'\mu' - \varepsilon''\mu'')^2 + (\varepsilon'\mu'' + \varepsilon''\mu')^2}}{2}}, \\
\alpha &= \\
&= \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\frac{-(\varepsilon'\mu' - \varepsilon''\mu'') + \sqrt{(\varepsilon'\mu' - \varepsilon''\mu'')^2 + (\varepsilon'\mu'' - \varepsilon''\mu')^2}}{2}}.
\end{aligned}\right\}$$

(2.45)

Плоская волна в неограниченной среде

Для диэлектриков и металлов, у которых $\mu' = 1,\ \mu'' = 0$, формулы (2.45) упрощаются

$$\left.\begin{aligned}
\beta &= \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\frac{\varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}}{2}} = \omega\sqrt{\varepsilon'_a\mu_0}\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\delta_э}}{2}},\\
\alpha &= \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\frac{-\varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2}}{2}} = \omega\sqrt{\varepsilon'_a\mu_0}\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\delta_э}}{2}}.
\end{aligned}\right\}$$

(2.46)

.

Диэлектрики с малыми потерями.

В диэлектриках с малыми потерями ток проводимости мал по сравнению с током смещения.

$$\sigma << \omega\varepsilon'_a \qquad \operatorname{tg}\delta_э = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \le 10^{-4}$$

Следовательно, α – мало. Волна распространяется на большие расстояния практически без затухания.

Фазовая постоянная $$\beta = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon'_a}\,.$$

Если потери в диэлектрике обусловлены только проводимостью, то

$$\varepsilon''_a = \frac{\sigma}{\omega}.$$

Плоская волна в неограниченной среде

Воспользуемся приближенной формулой для малых *a*

$$(1+a)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{a}{2}$$

Тогда

$$\alpha=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\frac{-\varepsilon'+\varepsilon'\left(1+\frac{\varepsilon''^2}{2\varepsilon'^2}\right)}{2}}=\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\varepsilon''}{2\sqrt{\varepsilon'}}=$$

$$=\frac{60\pi\sigma}{\sqrt{\varepsilon'}}.$$

Фазовая скорость в диэлектрике с малыми потерями

$$\mathrm{v}_{\text{ф}}=\frac{\omega}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon'_a}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon'}}.$$

Проводники.

Ток проводимости много больше тока смещения

$$\omega\varepsilon_a' << \sigma, \qquad \varepsilon'' >> \varepsilon', \qquad \tilde{\varepsilon}_a \approx -i\,\varepsilon_a''$$

Рассматриваем среду без магнитных потерь.

$$\beta = \alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu_a\varepsilon_a''}{2}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_a\sigma}{2}}. \qquad (2.47)$$

В проводящей среде наблюдается большое затухание энергии.

Расстояние Δ, на котором амплитуда поля убывает в *e* = 2,72 раза, называется **глубиной проникновения** (м)

$$\Delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_a\sigma}}. \qquad (2.48)$$

Плоская волна в неограниченной среде

Фазовая скорость в среде с потерями зависит от частоты, зависимость фазовой скорости от частоты называется дисперсией.

Рассмотрим частный случай, когда

$$\mathrm{tg}\delta_{э} = \mathrm{tg}\delta_{м} \qquad \varepsilon''\mu' = \varepsilon'\mu''$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{(\varepsilon'_a\mu'_a - \varepsilon''_a\mu''_a) + (\varepsilon'_a\mu'_a + \varepsilon''_a\mu''_a)}{2}} = \omega\sqrt{\varepsilon'_a\mu'_a}$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{-(\varepsilon'_a\mu'_a - \varepsilon''_a\mu''_a) + (\varepsilon'_a\mu'_a + \varepsilon''_a\mu''_a)}{2}} = \omega\sqrt{\varepsilon''_a\mu''_a}$$

Плоская волна в неограниченной среде

$$\mathrm{v}_{\text{ф}} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a' \mu_a'}}$$

– в этом случае фазовая скорость от частоты не зависит и среда с потерями не обладает дисперсией.

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0(\mu' - i\mu'')}{\varepsilon_0(\varepsilon' - i\varepsilon'')}} = \sqrt{\frac{\mu_a'}{\varepsilon_a'}}$$

Сдвиг фазы между **E** и **H** отсутствует.

Групповая скорость.

Сигнал представляет собой спектр частот. Вследствие влияния дисперсии сложный сигнал изменяет форму. В связи с этим вводят понятие **групповой скорости**, характеризующей распространение в пространстве максимума энергии.

Рассмотрим сигнал, состоящий из двух синусоид с одинаковыми амплитудами и мало отличающимися частотами.

$$E(x_3, t) = E_m \mathrm{e}^{-\alpha x_3} \cos(\omega t - \beta x_3) +$$

$$+ E_m \mathrm{e}^{-\alpha x_3} \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (\beta + \Delta\beta)x_3] =$$

$$= 2E_m \mathrm{e}^{-\alpha x_3} \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta\beta}{2} x_3\right) \cos\left[\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(\beta + \frac{\Delta\beta}{2}\right)x_3\right].$$

Плоская волна в неограниченной среде

$$\Delta\omega \ll \omega, \qquad \Delta\beta \ll \beta,$$

$$E(x_3, t) = 2E_m\, e^{-\alpha x_3} \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta\beta}{2} x_3\right) \cos(\omega t - \beta x_3).$$

Это колебание можно рассматривать как сигнал с несущей частотой ω и огибающей:

$$2E_m\, e^{-\alpha x_3} \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta\beta}{2} x_3\right).$$

Плоская волна в неограниченной среде

Групповая скорость – это скорость распространения сигнала.

Максимум огибающей перемещается со скоростью, определяемой из условия

$$\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\Delta\beta}{2}x_3=\frac{\Delta\omega}{2}(t+\Delta t)-\frac{\Delta\beta}{2}(x_3+\Delta x_3),$$

$$\frac{\Delta x_3}{\Delta t}=\frac{\Delta\omega}{\Delta\beta}.$$

$$\mathrm{v}_{\text{гр}}=\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\beta}. \qquad (2.49)$$

Определим зависимость между фазовой и групповой скоростью

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{v}_{\text{ф}}}{\mathrm{d}\omega}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{\omega}{\beta}\right)=\frac{\beta-\omega\dfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\omega}}{\beta^2}=\frac{\beta-\omega\dfrac{1}{\mathrm{v}_{\text{гр}}}}{\beta^2}.$$

$$\mathrm{v}_{\text{гр}}=\frac{\mathrm{v}_{\text{ф}}}{1-\dfrac{\omega}{\mathrm{v}_{\text{ф}}}\dfrac{\mathrm{d}\mathrm{v}_{\text{ф}}}{\mathrm{d}\omega}}. \qquad (2.50)$$

Это соотношение называется **формулой Релея**.

Плоская волна в неограниченной среде

Если среда не обладает дисперсией (фазовая скорость не зависит от частоты и $\dfrac{dv_ф}{d\omega} = 0$),

то $$V_{гр} = V_ф.$$

Если с возрастанием частоты фазовая скорость возрастает, то групповая скорость больше фазовой, если убывает, то групповая скорость меньше фазовой.

Дисперсия, при которой групповая скорость меньше фазовой, называется нормальной дисперсией, в противном случае — аномальной. Дисперсия, обусловленная проводимостью среды, является аномальной.

Среда без потерь.

В этом случае выражения (2.42) имеют вид

$$-[\mathbf{k}\dot{\mathbf{H}}] = \omega\varepsilon_a \dot{\mathbf{E}},$$

$$[\mathbf{k}\dot{\mathbf{E}}] = \omega\mu_a \dot{\mathbf{H}},$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \frac{E_m}{H_m}$$

– действительная величина. Магнитное и электрическое поля совпадают по фазе, и поле плоской волны является полем бегущей волны.

Для воздуха характеристическое сопротивление

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi \quad \text{(Ом)}.$$

Плоская волна в неограниченной среде

Поле плоской волны определяется выражениями

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 E_m \cos(\omega t - kx_3) = \mathbf{e}_1 H_m Z_0 \cos(\omega t - kx_3),$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_2 H_m \cos(\omega t - kx_3) = \mathbf{e}_2 \frac{E_m}{Z_0} \cos(\omega t - kx_3).$$

Мгновенное значение вектора Пойнтинга

$$\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}\mathbf{H}] = \mathbf{e}_3 H_m^2 Z_c \cos^2(\omega t - kx_3).$$

Среднее значение вектора Пойнтинга

$$\mathbf{\Pi}_0 = \mathrm{Re}\,\dot{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{e}_3 \frac{H_m^2 Z_c}{2}.$$

Плоская волна в неограниченной среде

Вектор Пойнтинга в любой момент времени t направлен в сторону распространения волны и определяет плотность потока мощности.

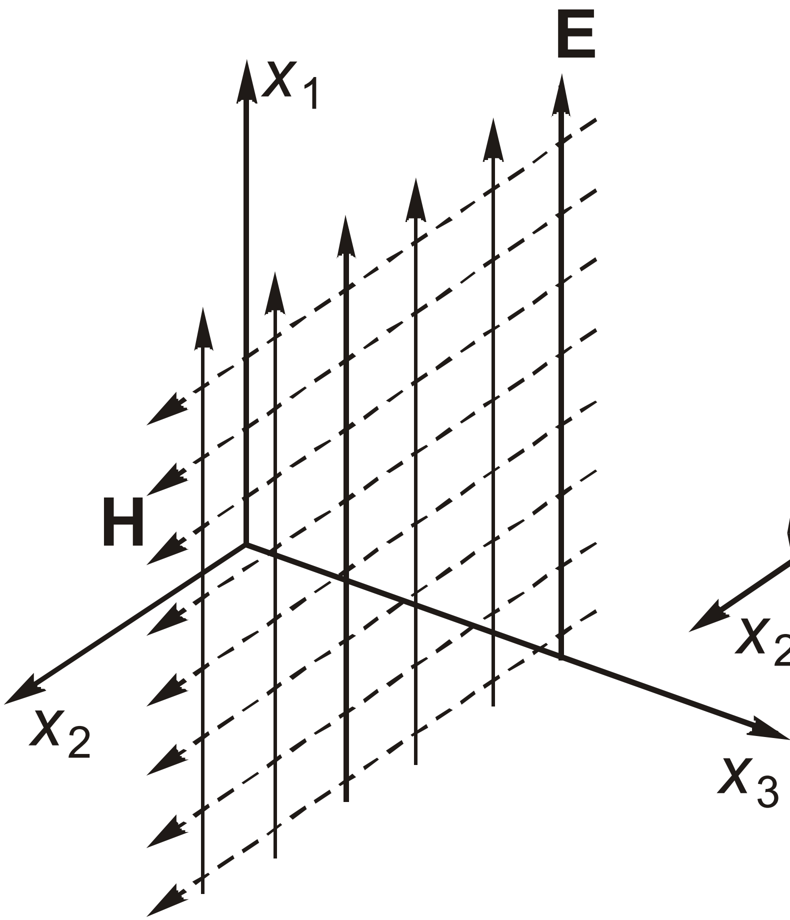
$$\mathrm{v}_{\text{ф}} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}.$$

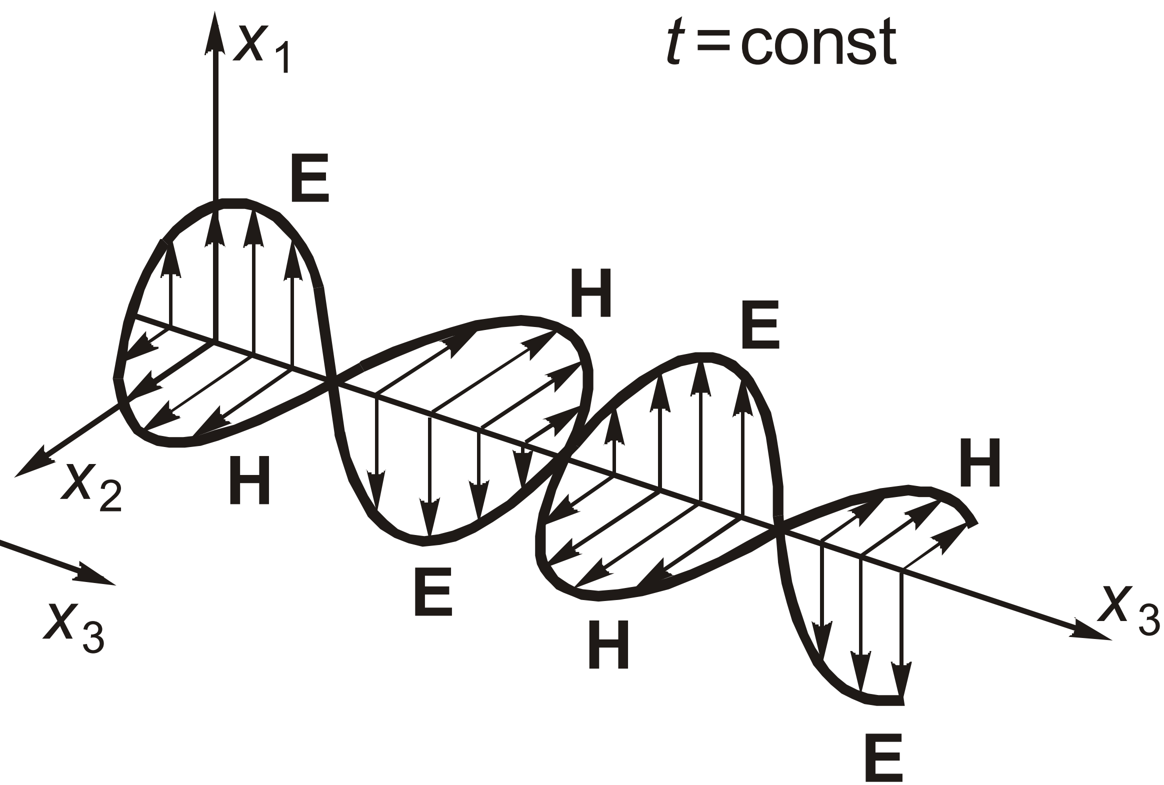
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} = \frac{\mathrm{v}_{\text{ф}}}{f} = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon \mu}},$$

где λ_0 – длина волны в свободном пространстве (вакууме).

Плоская волна в неограниченной среде

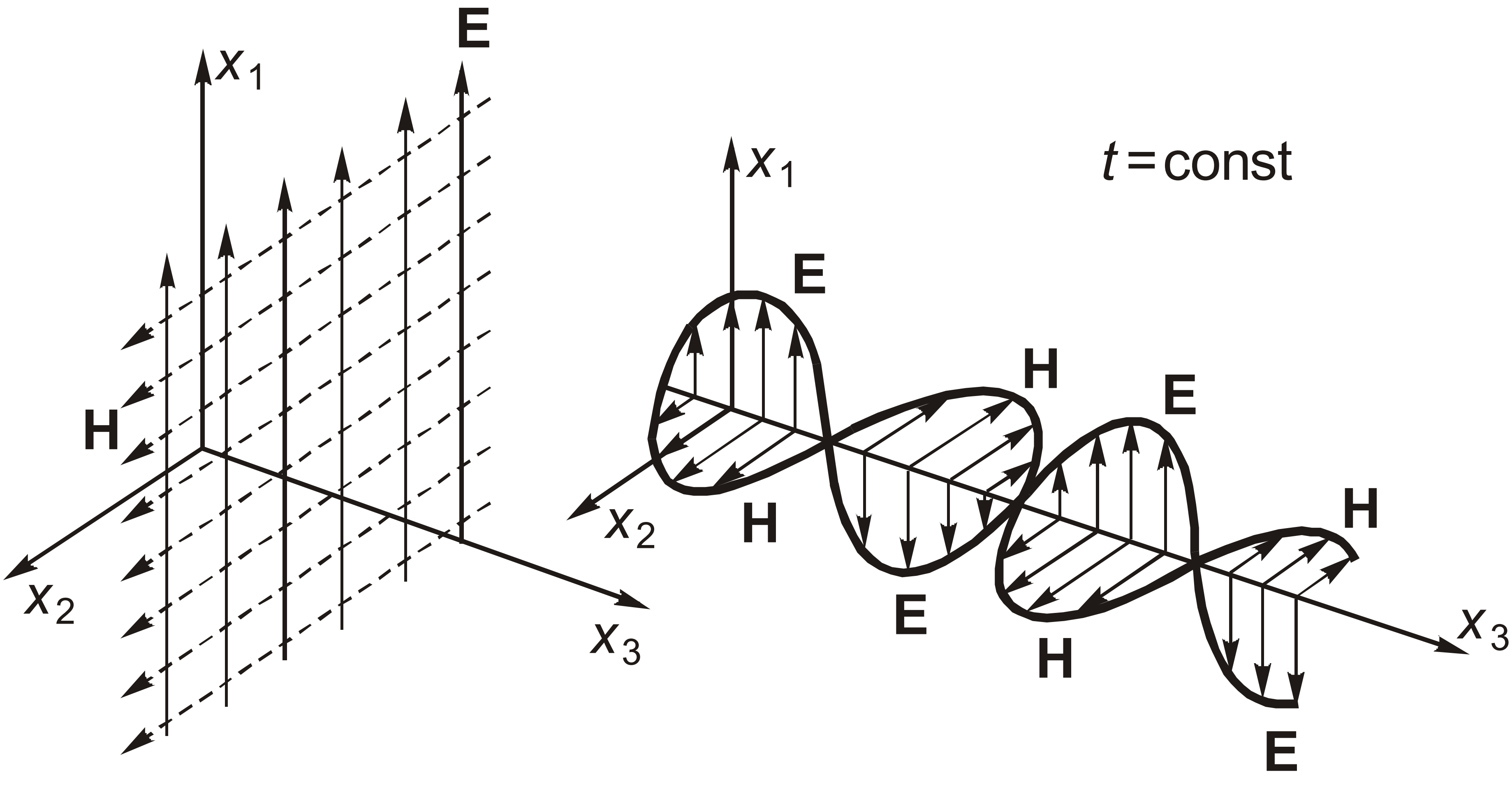
Плоская волна в среде без потерь



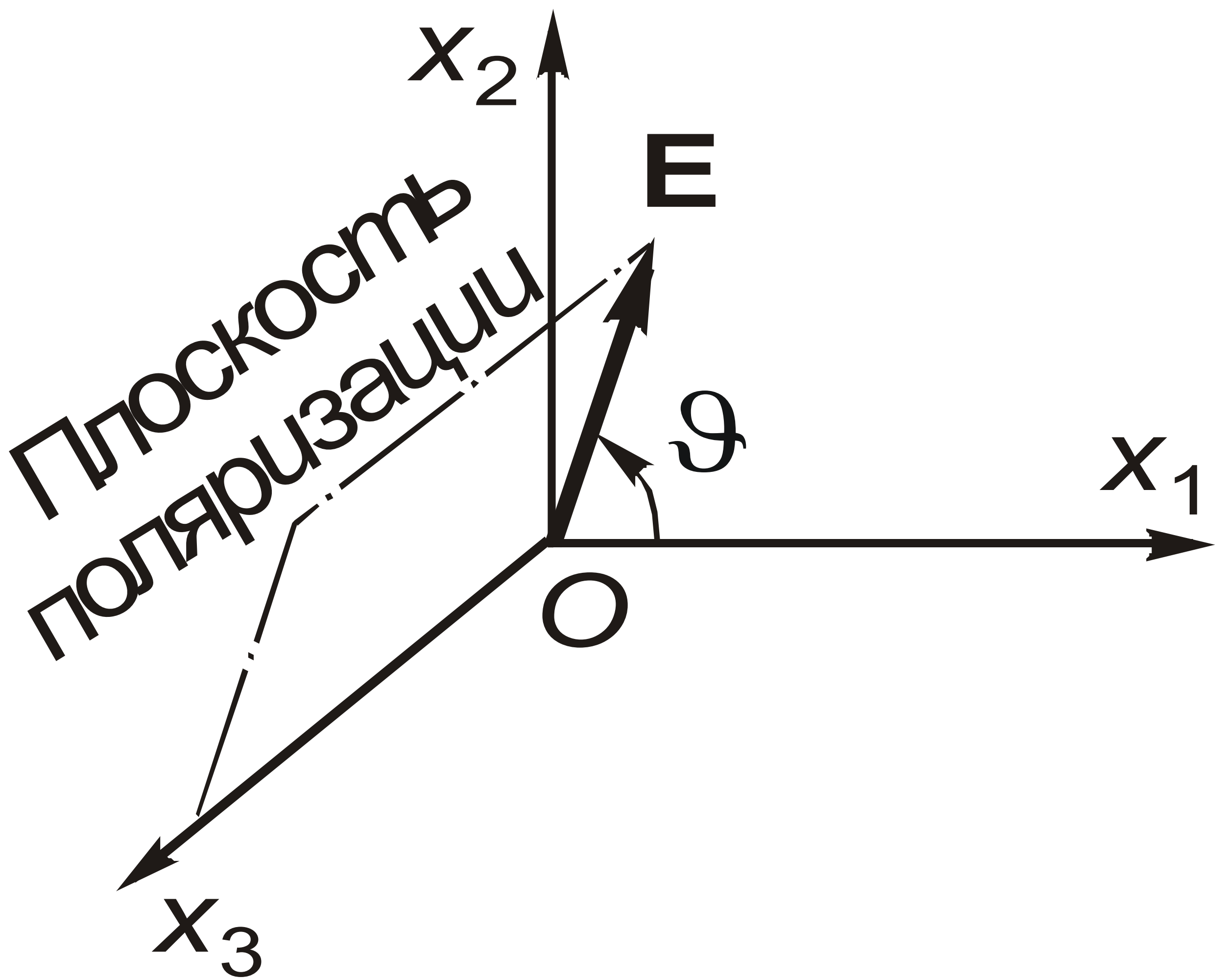


Плоская волна в неограниченной среде

Плоская волна в среде без потерь



2.5. Поляризация электромагнитных волн



Поляризация электромагнитных волн

Любая волна, электрический вектор которой составляет произвольный угол с горизонтальной плоскостью, может быть разложена на составляющие горизонтальной и вертикальной поляризаций

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 E_1 + \mathbf{e}_2 E_2,$$

$$E_1 = E_m \cos\vartheta \cos(\omega t - kx_3) = E_{m1} \cos(\omega t - kx_3),$$

$$E_2 = E_m \sin\vartheta \cos(\omega t - kx_3) = E_{m2} \cos(\omega t - kx_3),$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{e}_1 E_{m1}\, \mathrm{e}^{i(\omega t - kx_3)} + \mathbf{e}_2 E_{m2}\, \mathrm{e}^{i(\omega t - kx_3)}.$$

Поляризация электромагнитных волн

Вектор **E** в любой момент времени лежит в плоскости, составляющей с горизонтальной плоскостью угол

$$\vartheta = \operatorname{arctg}\frac{E_2}{E_1} = \operatorname{arctg}\frac{E_{m2}}{E_{m1}},$$

называемый **углом линейной поляризации**, а модуль **E** равен

$$|\mathbf{E}| = E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}.$$

$$E_m = \sqrt{E_{m1}^2 + E_{m2}^2}.$$

Поляризация электромагнитных волн

Рассмотрим суперпозицию двух линейно поляризованных волн горизонтальной и вертикальной поляризаций с разными амплитудами и сдвинутыми по фазе во времени

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 E_{m1} \cos(\omega t - k x_3) + \mathbf{e}_2 E_{m2} \cos(\omega t - k x_3 - \varphi).$$

(2.51)

При φ = 0 получается линейно поляризованная волна.

Поляризация электромагнитных волн

Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $E_{m1} = E_{m2} = E_m$,

$$\mathbf{E} = E_m[\mathbf{e}_1 \cos(\omega t - kx_3) + \mathbf{e}_2 \sin(\omega t - kx_3)]. \tag{2.52}$$

Выражение (2.52) представляет уравнение окружности в параметрической форме.

Угол $$\vartheta = \operatorname{arctg}\frac{E_2}{E_1} = \omega t - kx_3$$

изменяется во времени и пространстве. При фиксированном x_3 вектор **E** вращается с угловой скоростью ω вокруг оси распространения x_3.

Поляризация электромагнитных волн

При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ вращение осуществляется от оси x_1 к оси x_2, т. е. по часовой стрелке, если смотреть вдоль направления распространения волны. Такое вращение называется левым.

При $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ вектор **E** вращается против часовой стрелки — правое вращение.

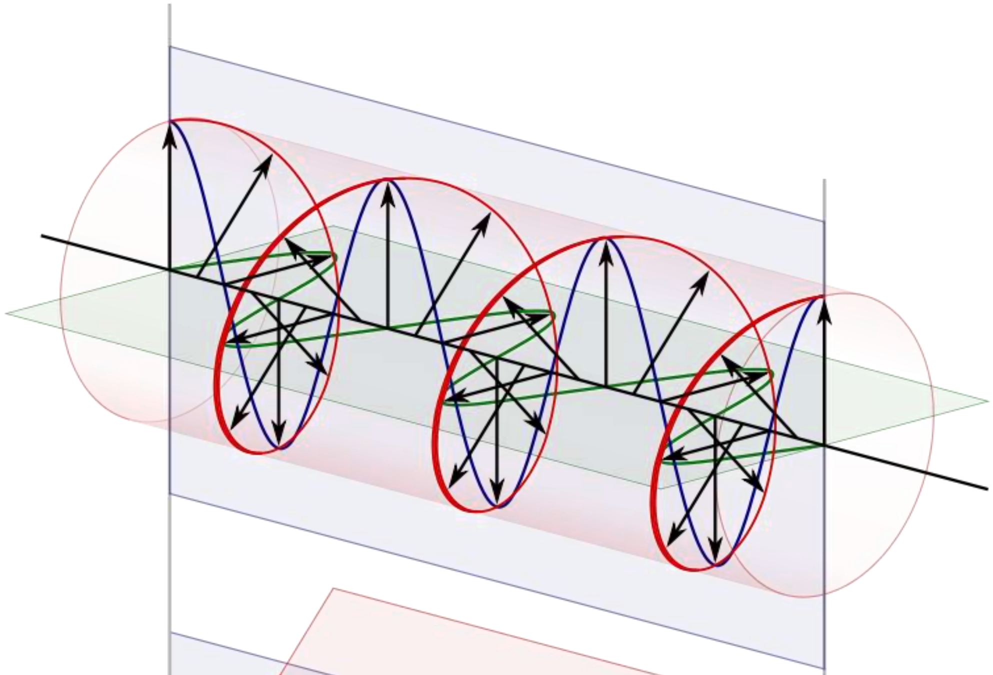
Поляризация электромагнитных волн

Если вектор **E** вращается в плоскости, перпендикулярной направлению распространения с угловой частотой ω и абсолютное значение его остается постоянным, то поляризация называется **круговой**. Конец вектора **E** описывает в этом случае окружность.

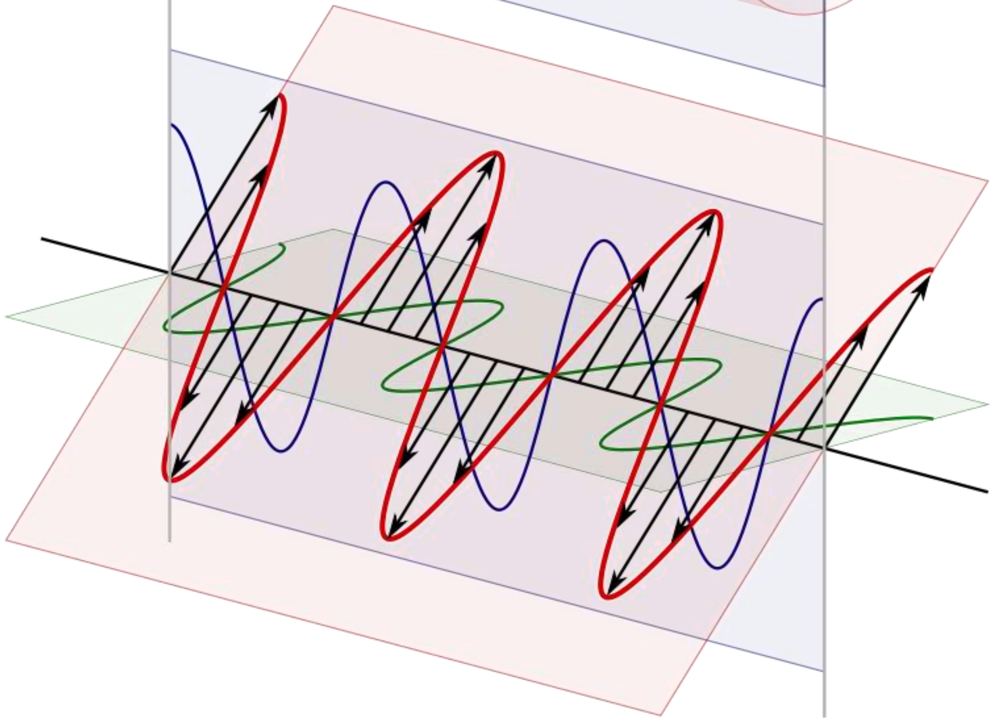
В зависимости от направления вращения поляризация может быть **правой** или **левой**.

С течением времени волна перемещается в направлении оси x_3 и конец вектора **E** описывает винтовую линию, расположенную на круглом цилиндре. Шаг винта равен длине волны.

Поляризация электромагнитных волн



Круговая поляризация



Линейная поляризация

Поляризация электромагнитных волн

Если $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}$ и $E_{m1} \neq E_{m2}$, то

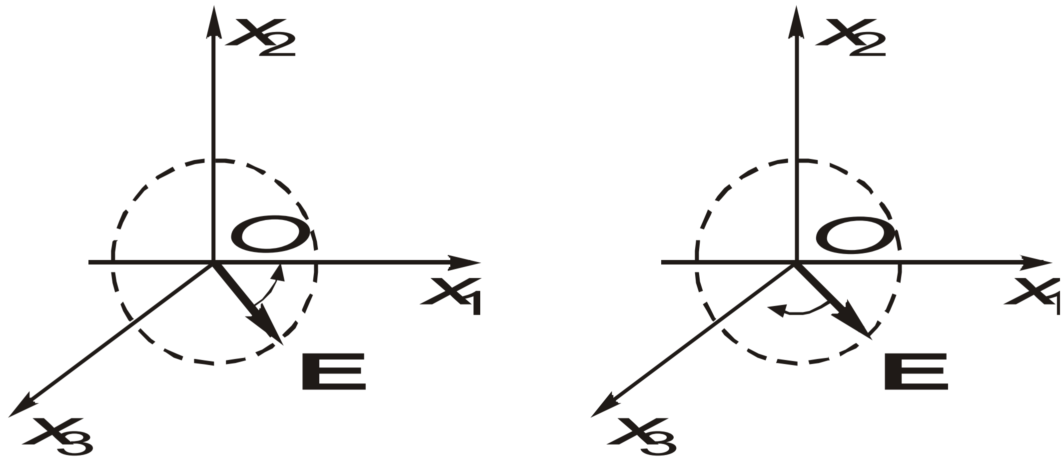
$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 E_{m1} \cos(\omega t - kx_3) \pm \mathbf{e}_2 E_{m2} \sin(\omega t - kx_3). \tag{2.53}$$

Это уравнение эллипса в параметрической форме. Вектор **E** вращается в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, изменяя свое абсолютное значение так, что конец его описывает эллипс. Такая поляризация называется **эллиптической**.

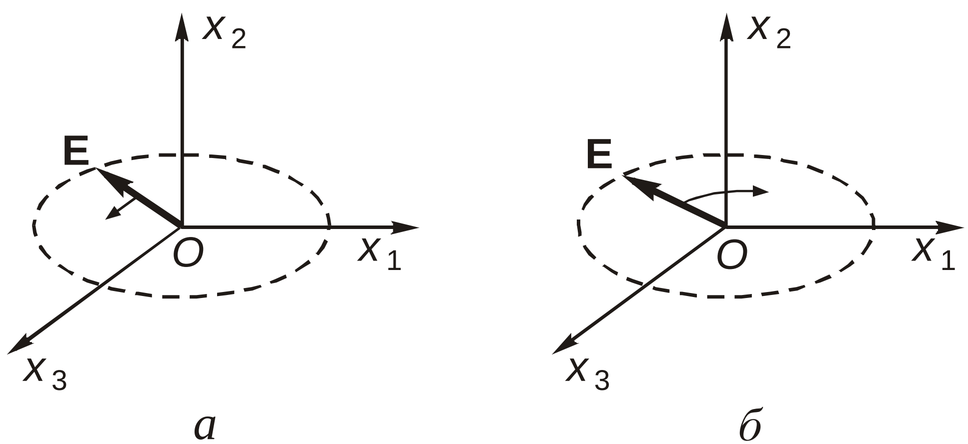
В зависимости от направления вращения поляризация может быть **правой** или **левой**.

В пространстве вектор **E** описывает винтовую линию, расположенную на эллиптическом цилиндре.

Поляризация электромагнитных волн



Левая и правая круговые поляризации



Левая и правая эллиптические поляризации

Поляризация электромагнитных волн

В общем случае выражение (2.53) при любом φ представляет волну эллиптической поляризации. Причем эллипс может быть ориентирован в плоскости Ox_1x_2 любым образом.

Поляризация электромагнитных волн

Всякая линейно поляризованная волна может быть разложена на две круговые с противоположным направлением вращения и одинаковыми амплитудами, равными половине амплитуды линейно поляризованной волны.

Горизонтально поляризованная волна может быть представлена

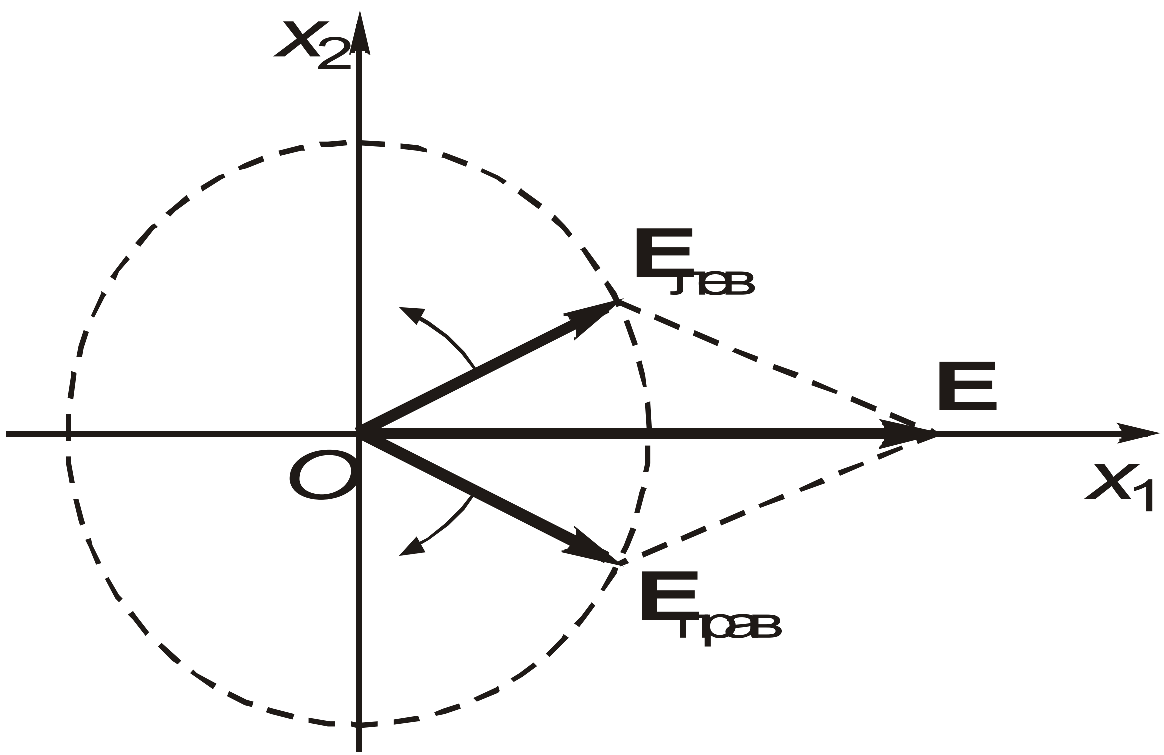
$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_1 E_m \cos(\omega t - kx_3) =$$

$$\frac{E_m}{2}[\mathbf{e}_1 \cos(\omega t - kx_3) + \mathbf{e}_2 \sin(\omega t - kx_3)] +$$

$$+\frac{E_m}{2}[\mathbf{e}_1 \cos(\omega t - kx_3) - \mathbf{e}_2 \sin(\omega t - kx_3)].$$

Поляризация электромагнитных волн

Разложение волны линейной поляризации на две круговые



2.6. Распространение электромагнитного поля в безграничной изотропной плазме

Плазма представляет собой ионизированный газ, содержащий заряженные частицы, нейтральные атомы и молекулы. Обычно плазма электрически нейтральна, т. е. на единицу ее объема приходится одинаковое число положительных и отрицательных зарядов, но в объемах, линейные размеры которых сравнимы с величиной называемой радиусом Дебая, возможны флуктуации заряда. Радиус Дебая определяется расстоянием, на котором происходит экранирование любого заряда плазмы из-за группировки вокруг этого заряда противоположно заряженных частиц. Нелинейность проявляется в плазме при сравнительно небольших полях.

Так как плазма нейтральна, то

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$$

Изотропная плазма

Волновое уравнение

$$\Delta\mathbf{E} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial\mathbf{J}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial\mathbf{J}^{\text{ст}}}{\partial t} \qquad (2.54)$$

Пренебрегая движением тяжелых ионов, считаем, что ток в плазме определяется только движением электронов.

Уравнение движения электронов в плазме под действием распространяющегося поля

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} + m\nu\mathbf{v} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{vB}],$$

где **v** – скорость движения; *ν* – частота эффективных соударений электронов; слагаемое m*ν***v** определяет потери, поскольку при соударении с ионами или молекулой электрон передает импульс m**v**; e – заряд электрона; m – масса электрона.

Изотропная плазма

На достаточно высоких частотах слагаемым $m\nu\mathbf{v}$ можно пренебречь, тогда

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{vB}]. \qquad (2.55)$$

Плотность тока $\mathbf{J} = en\mathbf{v},$

где n – концентрация плазмы.

Нелинейный эффект в плазме связан с составляющей $e[\mathbf{vB}],$ так как скорость электронов $\mathbf{v}$ зависит от напряженности поля. Отбрасывая это слагаемое, получаем линейное приближение уравнения (2.55).

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = e\mathbf{E}.$$

Изотропная плазма

Для монохроматического поля $i\omega m\dot{\mathbf{v}} = e\dot{\mathbf{E}},$

отсюда $$\dot{\mathbf{v}} = -i\frac{e}{\omega m}\dot{\mathbf{E}} \qquad (2.56)$$

и $$\dot{\mathbf{J}} = -i\frac{e^2 n}{\omega m}\dot{\mathbf{E}}. \qquad (2.57)$$

Подставляем (2.57) в волновое уравнение (2.54), переписанное в символической форме

$$\Delta\dot{\mathbf{E}} + \omega^2\varepsilon_0\mu_0\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\dot{\mathbf{E}} = i\omega\mu_0\dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}},$$

$\omega_{\text{p}} = e\sqrt{\dfrac{n}{m\varepsilon_0}}$ – собственная или резонансная частота плазмы. С этой частотой электроны колеблются около своего равновесного положения.

Изотропная плазма

С другой стороны волновое уравнение записывается в виде

$$\Delta\dot{\mathbf{E}} + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_a^{\text{л}} \dot{\mathbf{E}} = i\omega\mu_0 \dot{\mathbf{J}}^{\text{ст}}. \qquad (2.58)$$

В линейном приближении плазму можно рассматривать как среду с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon_a^{\text{л}} = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right). \qquad (2.59)$$

Изотропная плазма

Коэффициент распространения волны

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon_a^{\text{л}}\mu_0} = k_0\sqrt{1 - \frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega^2}}, \qquad (2.60)$$

фазовая скорость

$$\text{v}_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}. \qquad (2.61)$$

Изотропная плазма

Если $\omega < \omega_{\text{р}}$, то $\varepsilon_a^{\text{л}} < 0$ и постоянная распространения становится мнимой

$$\dot{k} = \omega\sqrt{\varepsilon_a^{\text{л}}\mu_0} = \pm i\, k_0\sqrt{\left|\varepsilon^{\text{л}}\right|} = \pm i\left|\dot{k}\right|.$$

$$\dot{E}_m = E_m\, \mathrm{e}^{-i\,\dot{k}x_3} = E_m\, \mathrm{e}^{-\left|\dot{k}\right| x_3}.$$

Глубина проникновения

$$\Delta = \frac{1}{\left|\dot{k}\right|} = \frac{1}{\omega\sqrt{\left|\varepsilon_a^{\text{л}}\right|\mu_0}} = \frac{c}{\omega_{\text{р}}\sqrt{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_{\text{р}}^2}}}.$$

Изотропная плазма

Если $\omega > \omega_p$, то $\varepsilon_a^{\text{л}} > 0$, постоянная распространения является действительной величиной и плазма ведет себя как диэлектрик.

При этом $0 < \varepsilon^{\text{л}} < 1$ и

фазовая скорость $$\mathrm{v}_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon^{\text{л}}}} > c,$$

групповая скорость

$$\mathrm{v}_{гр} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}} = c\sqrt{\varepsilon^{\text{л}}}.$$

Контрольные вопросы

Для контроля усвоения материала лекции студентам необходимо ответить на вопросы. Вариант вопросов соответствует порядковому номеру в списке группы.

Ответы на контрольные вопросы должны быть высланы в день проведения лекции, только в этом случае учитывается присутствие студента. Файл с ответами должен иметь название в следующем формате:

Год_месяц_день_ЭДиРРВ_Лекция_группа_ФамилияИО

Например:
2020_03_23_ЭДиРРВ_Лекция_РЛ1-41_ИвановИИ

Контрольные вопросы

Вариант 1

1. Как записываются параметры для среды с потерями?

2. Перечислите виды поляризации электромагнитных волн.

3. Приведите выражение для диэлектрической проницаемости изотропной плазмы и перечислите входящие в него величины.

Контрольные вопросы

Вариант 2

1. Приведите выражения для комплексного коэффициента распространения волны в среде с потерями.

2. Приведите выражение для напряженности электрического поля волны с линейной поляризацией.

3. В каком случае постоянная распространения волны в изотропной плазме является действительной величиной?

Контрольные вопросы

Вариант 3

1. Приведите выражения для коэффициента распространения волны в среде без потерь.
2. Приведите выражение для напряженности электрического поля волны с круговой поляризацией.
3. В каком случае постоянная распространения волны в изотропной плазме является мнимой величиной?

Контрольные вопросы

Вариант 4

1. Приведите выражения для коэффициента распространения волны для немагнитной среды с потерями.

2. Приведите выражение для напряженности электрического поля волны с эллиптической поляризацией.

3. Приведите определение плазмы.

Контрольные вопросы

Вариант 5

1. Приведите выражения для коэффициента распространения волны для среды с малыми потерями.

2. Как волна с круговой поляризацией может быть представлена в виде волн с линейной поляризацией?

3. Приведите уравнение движения электронов в плазме.

Контрольные вопросы

Вариант 6

1. Приведите выражения для коэффициента распространения волны для среды с высокой проводимостью.

2. Как волна с эллиптической поляризацией может быть представлена в виде волн с круговой поляризацией?

3. С чем связаны нелинейные эффекты в плазме?

Контрольные вопросы

Вариант 7

1. Приведите выражение для характеристического сопротивления среды.

2. Перечислите виды поляризации электромагнитных волн.

3. Приведите выражение для диэлектрической проницаемости изотропной плазмы и перечислите входящие в него величины.

Контрольные вопросы

Вариант 8

1. Чему равно отношение значений комплексных амплитуд напряженностей электрического и магнитного полей?

2. Приведите условия формирования волны с круговой поляризацией при рассмотрении ее в виде суммы двух волн с линейной поляризацией.

3. В каком случае постоянная распространения волны в изотропной плазме является действительной величиной?

Контрольные вопросы

Вариант 9

1. Приведите выражение для фазовой скорости плоской волны в неограниченной среде.

2. Приведите выражение для напряженности электрического поля волны с линейной поляризацией.

3. В каком случае постоянная распространения волны в изотропной плазме является мнимой величиной?

Контрольные вопросы

Вариант 10

1. Что такое длина волны. Приведите выражение.

2. Приведите выражение для напряженности электрического поля волны с круговой поляризацией.

3. В каком случае постоянная распространения волны в изотропной плазме является действительной величиной?

Контрольные вопросы

Вариант 11

1. Дайте определение групповой скорости.

2. Приведите выражение для напряженности электрического поля волны с линейной поляризацией.

3. С чем связаны нелинейные эффекты в плазме?

Контрольные вопросы

Вариант 12

1. Приведите формулу для связи групповой и фазовой скоростей.

2. Приведите выражение для напряженности электрического поля волны с эллиптической поляризацией.

3. В каком случае постоянная распространения волны в изотропной плазме является действительной величиной?

Контрольные вопросы

Вариант 13

1. Приведите формулу Рэлея с расшифровкой входящих в нее величин.

2. Приведите выражение для напряженности электрического поля волны с линейной поляризацией.

3. В каком случае постоянная распространения волны в изотропной плазме является мнимой величиной?

Контрольные вопросы

Вариант 14

1. Приведите формулу для затухания энергии электромагнитного поля в среде с потерями.

2. Приведите выражение для напряженности электрического поля волны с круговой поляризацией.

3. С чем связаны нелинейные эффекты в плазме?

Контрольные вопросы

Вариант 15

1. Приведите формулу для расчета в дБ затухания энергии электромагнитного поля в среде с потерями.

2. На какие виды разделяют круговую поляризацию в зависимости от направления вращения?

3. В каком случае постоянная распространения волны в изотропной плазме является действительной величиной?

Контрольные вопросы

Вариант 16

1. Что такое глубина проникновения электромагнитного поля? Для какой среды применяется эта величина?

2. На какие виды разделяют круговую поляризацию в зависимости от направления вращения?

3. В каком случае постоянная распространения волны в изотропной плазме является мнимой величиной?

Контрольные вопросы

Вариант 17

1. Приведите выражения для глубины проникновения электромагнитного поля? Для какой среды применяется эта величина?

2. Приведите выражение для напряженности электрического поля волны с линейной поляризацией.

3. С чем связаны нелинейные эффекты в плазме?

Контрольные вопросы

Вариант 18

1. Приведите выражения для электромагнитного поля в среде с потерями.

2. Приведите выражение для напряженности электрического поля волны с линейной поляризацией.

3. В каком случае постоянная распространения волны в изотропной плазме является действительной величиной?

Контрольные вопросы

Вариант 19

1. Приведите выражения для электромагнитного поля в среде без потерь.

2. Приведите выражение для напряженности электрического поля волны с линейной поляризацией.

3. В каком случае постоянная распространения волны в изотропной плазме является мнимой величиной?

Контрольные вопросы

Вариант 20

1. Что такое фронт волны.
2. Приведите определение круговой поляризации.
3. С чем связаны нелинейные эффекты в плазме?

Контрольные вопросы

Вариант 21

1. С какой скоростью движется поверхность равных фаз плоской волны?

2. Приведите выражение для напряженности электрического поля волны с линейной поляризацией.

3. В каком случае постоянная распространения волны в изотропной плазме является действительной величиной?

Контрольные вопросы

Вариант 22

1. Приведите определение групповой скорости.

2. Приведите выражение для напряженности электрического поля волны с линейной поляризацией.

3. В каком случае постоянная распространения волны в изотропной плазме является мнимой величиной?

Литература

Основная литература по дисциплине

1. Голубева Н.С., Митрохин В.Н. Основы радиоэлектроники сверхвысоких частот: учеб. пособие для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. 486 с. ISBN 5-7038-2740-X. Режим доступа: http://ebooks.bmstu.ru/catalog/205/book1163.html

2. Кугушев А.М., Голубева Н.С., Митрохин В.Н. Основы радиоэлектроники. Электродинамика и распространение радиоволн. Учеб. пособие для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. 368 с.

Дополнительные учебные материалы

1. Сборник задач по курсу «Электродинамика и распространение радиоволн»: учеб. пособие / Баскаков С.И., Карташев В.Г., Лобов Г.Д., Филатова Е.А., Штыков В.В.; Под ред. С.И. Баскакова. М.: Высшая школа, 1981. 208 с.