Электродинамика
и распространение радиоволн

Лекция 13
15.05.2020

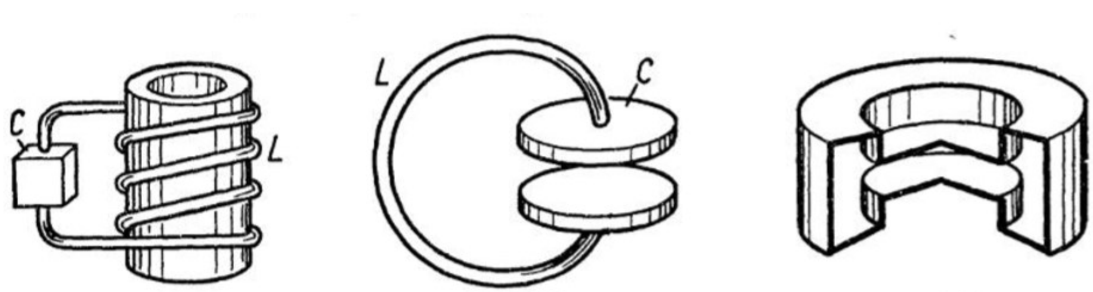
Русов Юрий Сергеевич

5. Резонаторы
5.1 Колебательные системы СВЧ и КВЧ

Системы, в которых под действием внешнего воздействия возбуждаются свободные колебания, называются колебательными системами. Свободные колебания существуют в изолированной системе и после прекращения внешнего воздействия. Характер свободных колебаний определяется только параметрами системы, необходимая энергия доставляется извне в начальный момент возбуждения колебаний.

Колебательные системы СВЧ и КВЧ

В радиоэлектронике широкое применение нашел колебательный контур, состоящий из сосредоточенных индуктивности L и емкости С. Общей чертой таких систем является то, что их геометрические размеры значительно меньше резонансной длины волны $\lambda_{рез}$. При переходе к волнам дециметрового диапазона наблюдается резкое падение колебательных свойств, в частности добротности, у колебательных контуров, построенных на сосредоточенных элементах. Причина в следующем. Для повышения резонансной частоты $f_{рез}$ приходится уменьшать величины L и С контура.



Колебательные системы СВЧ и КВЧ

Поэтому в пределе от обычного контура переходят к системе, в которой конденсатор представляет собой пластины, а роль индуктивности играет одиночный виток, соединяющий последние. Однако при таком подходе существенно уменьшается величина энергии электромагнитного поля, запасаемой в системе. Кроме того, в контуре возрастает относительная доля активных потерь, что связано с ростом омического сопротивления проводников на высоких частотах из-за поверхностного эффекта, а также из-за излучения электромагнитной энергии. Это приводит к падению добротности колебательной системы.

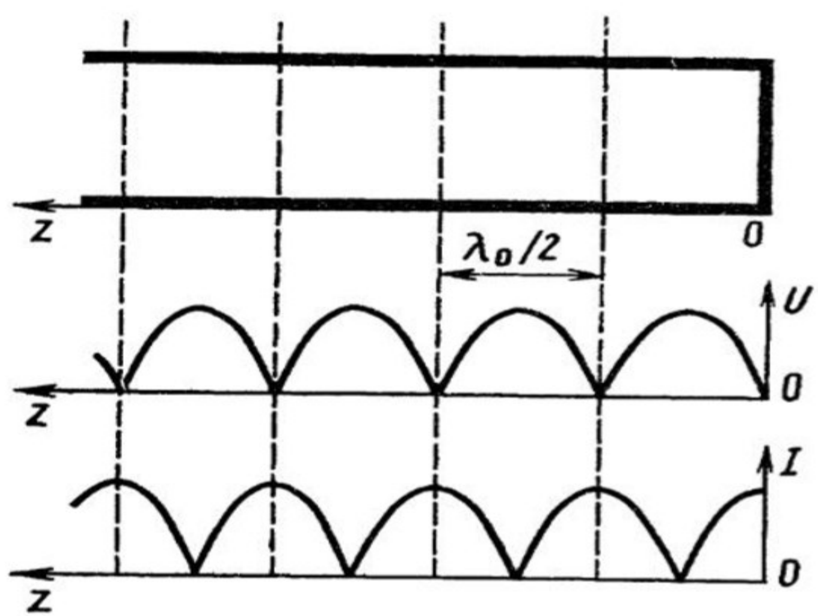
Колебательные системы СВЧ и КВЧ

Электромагнитные колебательные системы, представляющие собой замкнутые объемные полости с проводящими стенками, носят название объемных резонаторов. Переход к замкнутым системам тороидального типа не позволяет разрешить все трудности. Тороидальный объемный резонатор является прямым аналогом колебательного контура. С повышением резонансной частоты приходится уменьшать размеры тороидальной полости, а это приводит к уменьшению запасаемой энергии и к снижению добротности.

Принципиально другой, более прогрессивный путь создания колебательных систем СВЧ и КВЧ состоит в использовании резонансных свойств отрезков линий передачи с малыми потерями.

Рассмотрим полубесконечную короткозамкнутую на конце двухпроводную линию, вдоль которой могут распространяться волны типа Т. Как известно, в такой системе устанавливается стоячая волна, причем амплитуда суммарного напряжения UΣ будет определяться граничным условием в точке короткого замыкания:

UΣ = Uпад + Uотр = 0 при z = 0.



Подобные условия будут выполняться также и во всех точках оси z, удовлетворяющих соотношению

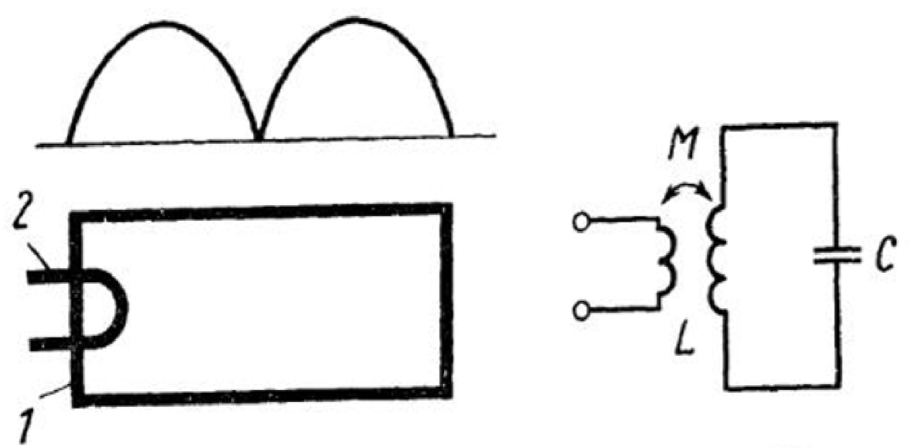
$z = p\lambda_0/2$, где $p = 1,2,3...$ – целое положительное число.

Отсюда следует, что если взять замкнутый с обоих концов отрезок линии длиной $l = p\lambda_0/2$, то получим колебательную систему, причем ее частотная характеристика вблизи резонансной частоты будет в точности соответствовать частотной характеристике обычного колебательного контура.

Колебательные системы СВЧ и КВЧ

Колебательная система, образованная отрезком линии передачи и ее эквивалентная схема: 1 – отрезок линии, замкнутый с двух сторон, 2 – элемент индуктивной связи.

Рассматриваемая система обладает распределенными параметрами, поэтому эквивалентную схему следует понимать как условную.



Колебательные системы СВЧ и КВЧ

Короткозамкнутый отрезок линии передачи, в отличие от простого колебательного контура, обладает бесконечным множеством резонансных длин волн, определяемых формулой $\lambda_{0рез} = 2l/p$. Физически это соответствует тому, что вдоль линии могут укладываться одна, две, три и т. д. стоячие полуволны. Подобное свойство характерно для любых колебательных систем с распределенными постоянными.

На описанном принципе могут быть созданы объемные резонаторы, представляющие собой короткозамкнутые отрезки прямоугольных или круглых металлических волноводов.

Объемные резонаторы представляют собой часть диэлектрической среды, ограниченной металлической поверхностью — металлические резонаторы, или помещенной в менее плотную (в электромагнитном смысле) среду — диэлектрические резонаторы. В обоих случаях на внутренней поверхности резонатора выполняются условия полного отражения.

Электромагнитные колебания существуют в любом объеме, ограниченном металлической поверхностью, если размеры его достаточно велики по сравнению с длиной волны колебаний.

Для того чтобы свободные колебания в объемном резонаторе не затухали, необходимо выполнение следующих условий: металлические стенки должны обладать бесконечной проводимостью, чтобы токи в этих стенках не вызывали потерь; среда, заполняющая объем резонатора, не должна обладать потерями. Практически потери в стенках и особенно в среде малы и структура электромагнитного поля в реальных условиях мало отличается от структуры идеализированных колебаний в отсутствие потерь.

5.2 Прямоугольный объемный резонатор

Пересечем прямоугольный волновод двумя идеально проводящими плоскостями, параллельными плоскости x_1Ox_2 ($x_3 = 0$ и $x_3 = l$). Определение структуры поля сводится к интегрированию в декартовой системе координат волнового уравнения для любой проекции векторов **E** или **H** и нахождению других составляющих поля из уравнений Максвелла. Постоянные интегрирования находятся из удовлетворения граничных условий на всех стенках резонатора.

Прямоугольный объемный резонатор

Поле H_{mnp} характеризуется наличием составляющих магнитного поля по всем трем осям координат, но одна из составляющих электрического поля отсутствует.

Представим $\dot{H}_{m3}$ в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит от одной переменной

$$\dot{H}_{m3} = X_1(x_1)X_2(x_2)X_3(x_3)$$

Решение волнового уравнения выполняется аналогично рассмотренному для прямоугольного волновода.

Прямоугольный объемный резонатор

подставляем в волновое уравнение, после преобразований

$$\frac{1}{X_1}\frac{\mathrm{d}^2 X_1}{\mathrm{d}x_1^2} + \frac{1}{X_2}\frac{\mathrm{d}^2 X_2}{\mathrm{d}x_2^2} + \frac{1}{X_3}\frac{\mathrm{d}^2 X_3}{\mathrm{d}x_3^2} = -k^2,$$

Это равенство возможно, если каждое из слагаемых представляет постоянную величину, т. е.

$$\frac{1}{X_1}\frac{\mathrm{d}^2 X_1}{\mathrm{d}x_1^2} = -\chi_1^2,\quad \frac{1}{X_2}\frac{\mathrm{d}^2 X_2}{\mathrm{d}x_2^2} = -\chi_2^2,\quad \frac{1}{X_3}\frac{\mathrm{d}^2 X_3}{\mathrm{d}x_3^2} = -\chi_3^2,$$

где $\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 = \chi^2 + \chi_3^2 = k^2$.

Прямоугольный объемный резонатор

Полученные уравнения представляют обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, решения которых имеют вид

$$X_1(x_1) = A\cos\chi_1 x_1 + B\sin\chi_1 x_1,$$
$$X_2(x_2) = C\cos\chi_2 x_2 + D\sin\chi_2 x_2,$$
$$X_3(x_3) = E\cos\chi_3 x_3 + F\sin\chi_3 x_3.$$

$$\dot{H}_{m3} = (A\cos\chi_1 x_1 + B\sin\chi_1 x_1)(C\cos\chi_2 x_2 + D\sin\chi_2 x_2)(E\cos\chi_3 x_3 + F\sin\chi_3 x_3).$$

Решение волнового уравнения выполняется аналогично рассмотренному для прямоугольного волновода.

Прямоугольный объемный резонатор

Согласно граничным условиям

1) $H_{m3} = H_\tau \neq 0$ при $x_1 = 0$ и $x_1 = a$,

2) $H_{m3} = H_\tau \neq 0$ при $x_2 = 0$ и $x_2 = b$,

3) $H_{m3} = H_n = 0$ при $x_3 = 0$ и $x_3 = l$.

Первое условие возможно

при $A \neq 0,\ \ B = 0$ и $\chi_1 = \dfrac{m\pi}{a}$.

Второе условие возможно

при $C \neq 0,\ \ D = 0$ и $\chi_2 = \dfrac{n\pi}{b}$.

Третье условие возможно

при $E = 0,\ \ F \neq 0$ и $\chi_3 = \dfrac{p\pi}{l}$.

Таким образом,

$$H_{m3} = H\cos\chi_1 x_1 \cos\chi_2 x_2 \sin\chi_3 x_3, \text{ где } H = ACF. \quad (5.1)$$

Прямоугольный объемный резонатор

Уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}_m = i\,\omega\,\varepsilon_a \dot{\mathbf{E}}_m,$$

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}_m = -i\,\omega\,\mu_a \dot{\mathbf{H}}_m$$

с учетом $E_3 = 0$ в проекциях на оси координат имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_2} - \frac{\partial \dot{H}_{m2}}{\partial x_3} = i\omega\varepsilon_a \dot{E}_{m1},\\
&\frac{\partial \dot{H}_{m1}}{\partial x_3} - \frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_1} = i\omega\varepsilon_a \dot{E}_{m2},\\
&\frac{\partial \dot{H}_{m2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \dot{H}_{m1}}{\partial x_2} = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (5.2)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \dot{E}_{m2}}{\partial x_3} = i\omega\mu_a \dot{H}_{m1},\\
&\frac{\partial \dot{E}_{m1}}{\partial x_3} = -i\omega\mu_a \dot{H}_{m2},\\
&\frac{\partial \dot{E}_{m2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \dot{E}_{m1}}{\partial x_2} = -i\omega\mu_a \dot{H}_{m3}.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.3)$$

(5.1)

Прямоугольный объемный резонатор

Согласно первым двум уравнениям системы (5.3)

$$\left.\begin{aligned} \dot{H}_{m1} &= -\frac{i}{\omega\mu_a}\frac{\partial \dot{E}_{m2}}{\partial x_3}, \\ \dot{H}_{m2} &= \frac{i}{\omega\mu_a}\frac{\partial \dot{E}_{m1}}{\partial x_3}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.4)$$

Подставляя второе уравнение (5.4) в первое уравнение системы (5.2), учитывая, что $\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = -\chi_3^2$, получим

$$\frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_2} - \frac{i}{\omega\mu_a}\frac{\partial^2 \dot{E}_{m1}}{\partial x_3^2} = i\omega\varepsilon_a \dot{E}_{m1}$$

или

$$i\left(\omega\varepsilon_a - \frac{\chi_3^2}{\omega\mu_a}\right)\dot{E}_{m1} = \frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_2}$$

или

$$\frac{i\chi^2}{\omega\mu_a}\dot{E}_{m1} = \frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_2},$$

Прямоугольный объемный резонатор

т. е. с учетом (6.1)

$$\dot{E}_{m1} = \frac{i\omega\mu_a\chi_2}{\chi^2} H \cos\chi_1 x_1 \sin\chi_2 x_2 \sin\chi_3 x_3. \qquad (5.5)$$

Подставляя первое уравнение системы (5.4) во второе уравнение системы (5.2), получаем

$$-\frac{i}{\omega\mu_a}\frac{\partial^2 \dot{E}_{m2}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_1} = i\omega\varepsilon_a \dot{E}m2$$

или

$$\frac{i\chi_3^2}{\omega\mu_a}\dot{E}_{m2} - i\omega\varepsilon_a\dot{E}_{m2} = \frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_1}$$

или

$$\frac{i(k^2 - \chi_3^2)}{\omega\mu_a}\dot{E}_{m2} = -\frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_1},$$

т. е. с учетом (5.1)

$$\dot{E}_{m2} = -\frac{i\omega\mu_a\chi_1}{\chi^2} H \sin\chi_1 x_1 \cos\chi_2 x_2 \sin\chi_3 x_3. \qquad (5.6)$$

Прямоугольный объемный резонатор

Согласно (5.4)–(5.6)

$$\dot{H}_{m1} = -\frac{\chi_1\chi_3}{\chi^2} H \sin \chi_1 x_1 \cos \chi_2 x_2 \cos \chi_3 x_3 ,$$

$$\dot{H}_{m2} = -\frac{\chi_2\chi_3}{\chi^2} H \cos \chi_1 x_1 \sin \chi_2 x_2 \cos \chi_3 x_3 .$$

Прямоугольный объемный резонатор

Таким образом, поле H_{mnp} имеет вид

$$
\left.
\begin{aligned}
&\dot{H}_{m3} = H \cos\chi_1 x_1 \cos\chi_2 x_2 \sin\chi_3 x_3, \\
&\dot{H}_{m1} = -\frac{\chi_1 \chi_3}{\chi^2} H \sin\chi_1 x_1 \cos\chi_2 x_2 \cos\chi_3 x_3, \\
&\dot{H}_{m2} = -\frac{\chi_2 \chi_3}{\chi^2} H \cos\chi_1 x_1 \sin\chi_2 x_2 \cos\chi_3 x_3, \\
&\dot{E}_{m1} = \frac{i\omega_{\text{р}} \mu_a \chi_2}{\chi^2} H \cos\chi_1 x_1 \sin\chi_2 x_2 \sin\chi_3 x_3, \\
&\dot{E}_{m2} = -\frac{i\omega_{\text{р}} \mu_a \chi_1}{\chi^2} H \sin\chi_1 x_1 \cos\chi_2 x_2 \sin\chi_3 x_3.
\end{aligned}
\right\}
$$

Прямоугольный объемный резонатор

$$\chi_1 = \frac{m\pi}{a}, \quad \chi_2 = \frac{n\pi}{b}, \quad \chi_3 = \frac{p\pi}{l},$$

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 = \chi^2, \qquad \chi^2 + \chi_3^2 = k^2,$$

$$k = \omega_{\text{р}} \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$$

a, b, l — размеры резонатора по трем осям соответственно, $\omega_{\text{р}}$ — резонансная частота; ε_a, μ_a — параметры среды, заполняющей резонатор; *m*, *n* и *p* — целые числа (*m* и *n* = 0, 1, 2, …, *p* = 1, 2, 3, …). Одновременно *m* и *n* нулю равняться не могут.

Прямоугольный объемный резонатор

Поле E_{mnp} в прямоугольном резонаторе определяется аналогично полю H_{mnp}

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_{m3} &= E \sin\chi_1 x_1 \sin\chi_2 x_2 \cos\chi_3 x_3\,,\\
\dot{E}_{m1} &= -\frac{\chi_1\chi_3}{\chi^2} E \cos\chi_1 x_1 \sin\chi_2 x_2 \sin\chi_3 x_3\,,\\
\dot{E}_{m2} &= -\frac{\chi_2\chi_3}{\chi^2} E \sin\chi_1 x_1 \cos\chi_2 x_2 \sin\chi_3 x_3\,,\\
\dot{H}_{m1} &= \frac{i\chi_2\omega_{\text{р}}\varepsilon_a}{\chi^2} E \sin\chi_1 x_1 \cos\chi_2 x_2 \cos\chi_3 x_3\,,\\
\dot{H}_{m2} &= -\frac{i\chi_1\omega_{\text{р}}\varepsilon_a}{\chi^2} E \cos\chi_1 x_1 \sin\chi_2 x_2 \cos\chi_3 x_3\,.
\end{aligned}\right\}$$

Прямоугольный объемный резонатор

Для поля E_{mnp} в прямоугольном резонаторе

m, n = 1, 2, 3, …; p = 0, 1, 2, …

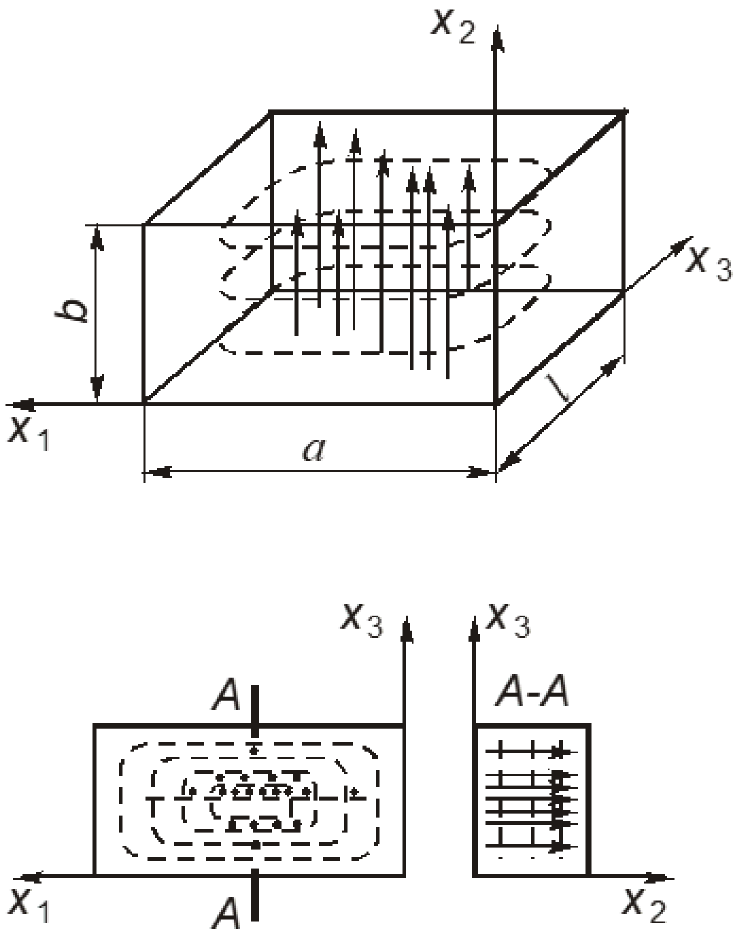
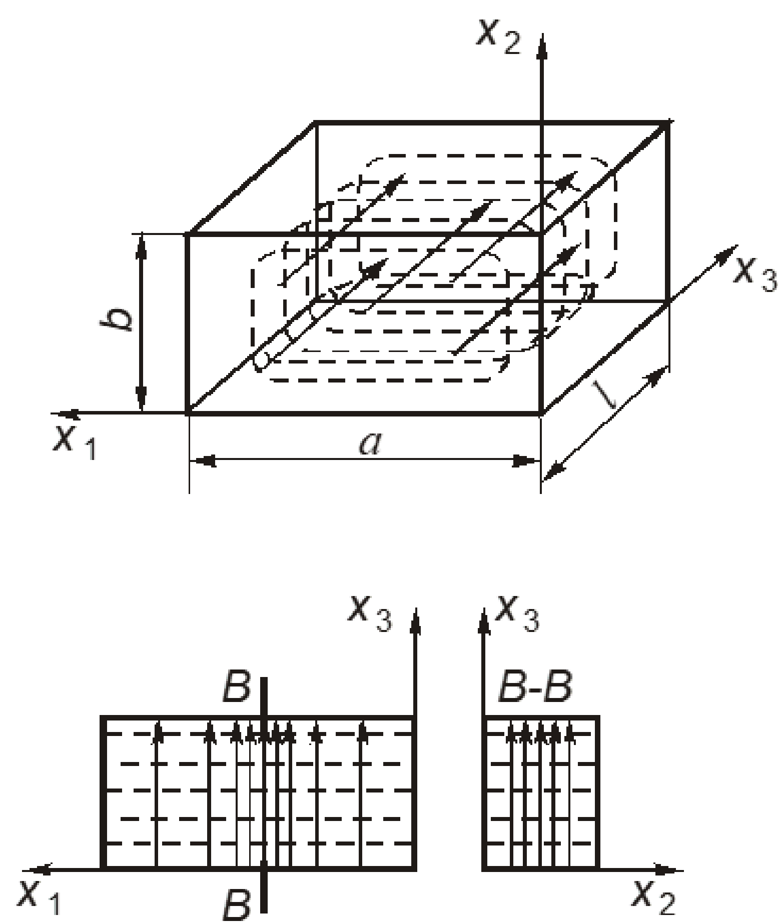
Фаза полей не меняется в пространстве (стоячая волна).

На соответствующих длинах a, b и l должно укладываться целое число полуволн.

На гранях резонатора касательные составляющие электрического и нормальные составляющие магнитного поля равны нулю, а нормальные составляющие электрического и касательные составляющие магнитного поля достигают максимума.

Прямоугольный объемный резонатор

Структура полей

<table>
<tr><th>H_{101}</th><th>E_{110}</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$$\lambda_p = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{l^2}}}$$</td><td>$$\lambda_p = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}$$</td></tr>
</table>

Прямоугольный объемный резонатор

Величина k принимает определенные значения, называемые собственными волновыми числами резонатора. Соответствующие им E- и H-поля - собственные функции.

$$k = \omega_\text{р}\sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = \sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2},$$

Резонансные частоты

$$\omega_\text{р} = \frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2},$$

Резонансные длины волн

$$\lambda_\text{р} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}.$$

Прямоугольный объемный резонатор

Резонансные длины волн зависят от размеров резонатора и целых чисел m, n и p, определяющих тип колебания.

Наименьшая длина волны имеет место для одной из комбинаций значений mnp: 011, 101 или 110.

Значение, равное нулю, соответствует наименьшему ребру.

Длины волны для E_{mnp} и H_{mnp} полей в прямоугольном резонаторе, определяемых одной и той же комбинацией чисел m, n и p, равны. Соответствие разных полей одной и той же длине волны называется вырождением.

5.2 Круглый цилиндрический резонатор

Структура поля находится решением волнового уравнения и уравнений Максвелла в цилиндрической системе координат.

H_{nmp}-поле

$$\left.\begin{aligned}
\dot{H}_{mz} &= HJ_n(\chi r)\begin{matrix}\cos n\alpha\\ \sin n\alpha\end{matrix}\sin\chi_z z,\\
\dot{H}_{mr} &= \frac{\chi_z}{\chi}HJ'_n(\chi r)\begin{matrix}\cos n\alpha\\ \sin n\alpha\end{matrix}\cos\chi_z z,\\
\dot{H}_{m\alpha} &= \frac{n\chi_z}{\chi^2 r}HJ_n(\chi r)\begin{matrix}-\sin n\alpha\\ \cos n\alpha\end{matrix}\cos\chi_z z,\\
\dot{E}_{mr} &= -\frac{i\,n\omega_\text{р}\mu_a}{\chi^2 r}HJ_n(\chi r)\begin{matrix}-\sin n\alpha\\ \cos n\alpha\end{matrix}\sin\chi_z z,\\
\dot{E}_{m\alpha} &= \frac{i\,\omega_\text{р}\mu_a}{\chi}HJ'_n(\chi r)\begin{matrix}\cos n\alpha\\ \sin n\alpha\end{matrix}\sin\chi_z z,
\end{aligned}\right\}$$

Круглый цилиндрический резонатор

$$\chi_z = \frac{p\pi}{l}; \qquad \chi = \frac{B_{nm}}{a},$$

$p = 1, 2, 3, \ldots;$

B_{nm} — корни уравнения $\quad J_n'(x) = 0;$

a — радиус резонатора,

l — длина резонатора;

Круглый цилиндрический резонатор

E_{nmp}-поле

$$\left.\begin{aligned}
\dot{E}_{mz} &= E J_n(\chi r)\begin{matrix}\cos n\alpha\\ \sin n\alpha\end{matrix}\cos\chi_z z,\\
\dot{E}_{mr} &= -\frac{\chi_z}{\chi} E J_n'(\chi r)\begin{matrix}\cos n\alpha\\ \sin n\alpha\end{matrix}\sin\chi_z z,\\
\dot{E}_{m\alpha} &= -\frac{n\chi_z}{\chi^2 r} E J_n(\chi r)\begin{matrix}-\sin n\alpha\\ \cos n\alpha\end{matrix}\sin\chi_z z,\\
\dot{H}_{mr} &= \frac{in\omega_{\text{р}}\varepsilon_a}{\chi^2 r} J_n(\chi r)\begin{matrix}-\sin n\alpha\\ \cos n\alpha\end{matrix}\cos\chi_z z,\\
\dot{H}_{m\alpha} &= -\frac{i\omega_{\text{р}}\varepsilon_a}{\chi} J_n'(\chi r)\begin{matrix}\cos n\alpha\\ \sin n\alpha\end{matrix}\cos\chi_z z,
\end{aligned}\right\}$$

Круглый цилиндрический резонатор

$$\chi_z = \frac{p\pi}{l}; \qquad \chi = \frac{A_{nm}}{a},$$

p = 0, 1, 2, 3, ...;

A_{nm} — корни уравнения $\quad J_n(x) = 0;$

a — радиус резонатора,

l — длина резонатора.

Круглый цилиндрический резонатор

Резонансные частоты и длины волн

для поля H$_{nmp}$

$$\omega_{\text{p}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{B_{nm}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2},$$

$$\lambda_{\text{p}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{B_{nm}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}};$$

Круглый цилиндрический резонатор

для поля E_{nmp}

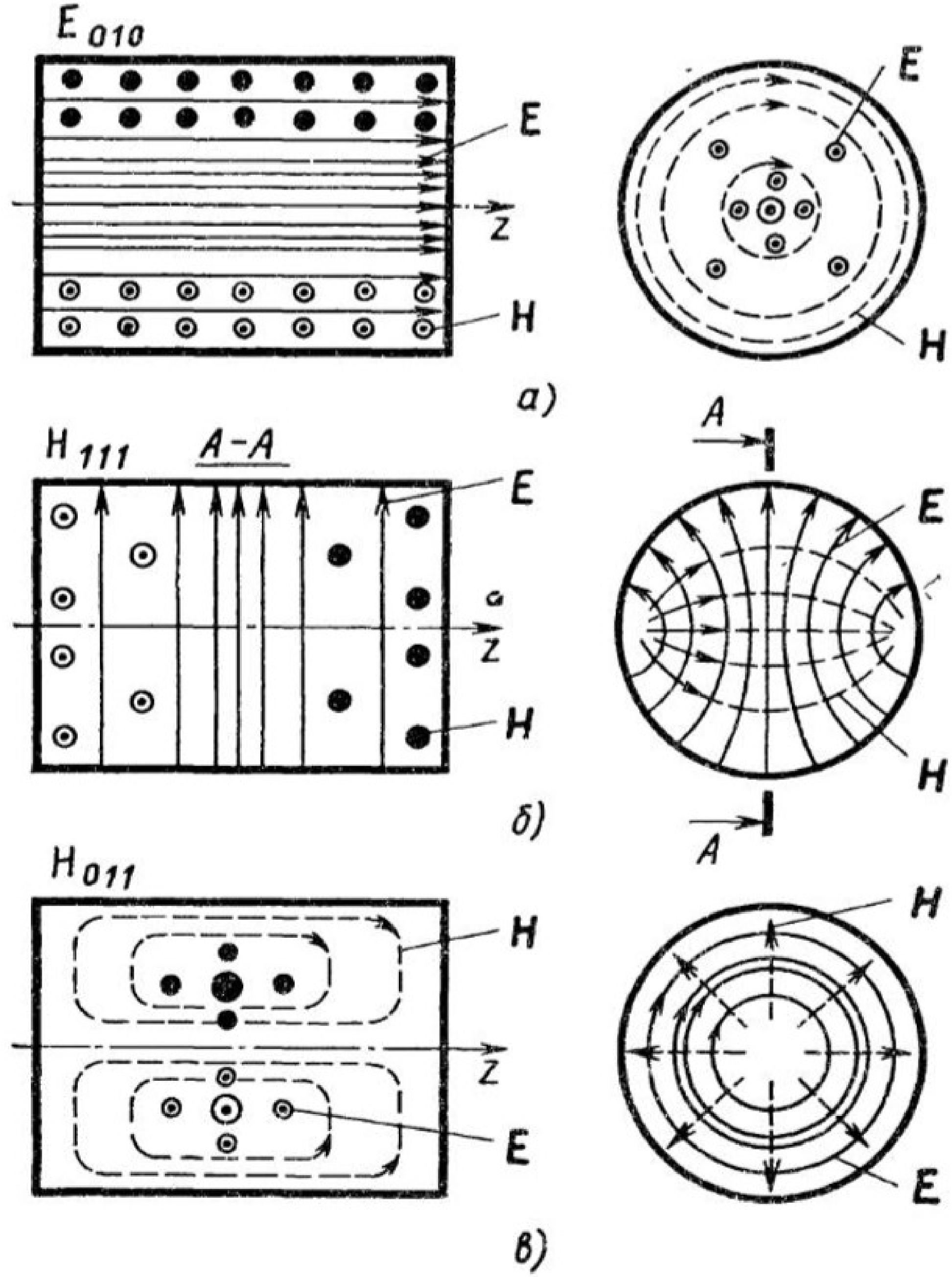
$$\omega_{\text{p}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{A_{nm}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2},$$

$$\lambda_{\text{p}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{A_{nm}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}}.$$

Наибольшая резонансная длина волны для E-колебаний соответствует полю E_{010}, для H-колебаний — H_{111}.
В отличие от прямоугольного резонатора длины волн для колебаний H_{nmp} и E_{nmp} не совпадают.

Круглый цилиндрический резонатор

Структуры электромагнитных полей для некоторых типов колебаний в круглом объемном резонаторе



5.3 Резонатор с потерями

Потери в резонаторах обусловлены потерями в стенках резонатора, в среде, заполняющей объем резонатора, а также излучением через отверстия в стенках резонатора.

Потери в стенках резонатора

$$P_{0\,\text{ст}} = \sqrt{\frac{\mu_{a\,\text{ст}}\omega_{\text{р}}}{2\sigma_{\text{ст}}}} \int_S H_{\text{дτ}}^2 \, \mathrm{d}S,$$

интегрирование ведется по всей внутренней поверхности резонатора.

$H_{\text{дτ}}$ — действующее значение тангенциальной составляющей магнитного поля у поверхности резонатора, вычисленное в предположении отсутствия потерь; $\mu_{a\,\text{ст}}$ и $\sigma_{\text{ст}}$ — соответственно магнитная проницаемость и проводимость материала стенок.

Резонатор с потерями

Потери в среде, заполняющей резонатор

$$P_{0\,\text{диэл}} = \mathrm{Re}\int_V (\dot{\mathbf{J}}_\text{д}\dot{\mathbf{E}}^*_\text{д})\,\mathrm{d}V = \int_V \sigma E^2_\text{д}\,\mathrm{d}V$$

$E_\text{д}$ — действующее значение напряженности электрического поля в резонаторе;

σ — проводимость среды.

Резонатор с потерями

Если в стенках резонатора имеются отверстия, то через них будет излучаться электромагнитная энергия. Это излучение может происходить как в свободное пространство, так и в связанный с резонатором волновод или другой резонатор.

Излучаемая мощность

$$P_{0\,\text{изл}} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\int\limits_{S_0} [\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^*]\,d\mathbf{S}$$

Интегрирование ведется по поверхности, соответствующей отверстию.

Резонатор с потерями

Общая мощность потерь

$$P_0 = P_{0\,\text{ст}} + P_{0\,\text{диэл}} + P_{0\,\text{изл}}.$$

Представляет интерес случай малых потерь, когда распределение поля близко к идеальному и резонатор рассматривается как изолированная система, обладающая запасом энергии

$$\left.\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int_V \mu_a H_m^2\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_a E_m^2\,\mathrm{d}V, \\ W &= \int_V \mu_a H_{\text{д}}^2\,\mathrm{d}V = \int_V \varepsilon_a E_{\text{д}}^2\,\mathrm{d}V. \end{aligned}\right\}$$

Резонатор с потерями

Потери энергии характеризуются добротностью Q (безразмерная величина). С точностью до множителя 2π добротность определяется отношением запасенной энергии W к потерям энергии W_T за период

$$Q = 2\pi \frac{W}{W_T} = \frac{\omega_\text{р} W}{P_0},$$

P_0 — средняя мощность потерь.

Потери приводят к затуханию колебаний и уменьшению запасенной энергии резонатора, если она не восполняется извне.

Резонатор с потерями

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -P_0 \qquad\qquad Q = \frac{\omega_\mathrm{p} W}{-\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}}$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} + \frac{\omega_\mathrm{p}}{Q} W = 0,$$

$$W = W_0\, \mathrm{e}^{-\frac{\omega_\mathrm{p}}{Q} t},$$

запас энергии убывает по экспоненциальному закону, и тем быстрее, чем меньше добротность.

Резонатор с потерями

коэффициент затухания $\alpha = \dfrac{\omega_{\text{р}}}{2Q}$

Так как энергия пропорциональна квадрату амплитуды напряженности поля, то очевидно изменение амплитуды напряженности происходит по закону

$$E_m(t) = E_m\,\mathrm{e}^{-\alpha t},$$

$$H_m(t) = H_m\,\mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

Резонатор с потерями

Эти выражения характеризуют колебания частотой $\omega_р$, затухающие во времени по экспоненциальному закону.

С учетом временной зависимости значения напряженности можно записать в виде

$$\dot{E} = E_m \,\mathrm{e}^{-\frac{\omega_\text{р}}{2Q}t}\,\mathrm{e}^{i\,\omega_\text{р} t} = E_m \,\mathrm{e}^{i\,\dot{\omega}_\text{р} t},$$

$$\dot{H} = H_m \,\mathrm{e}^{-\frac{\omega_\text{р}}{2Q}t}\,\mathrm{e}^{i\,\omega_\text{р} t} = H_m \,\mathrm{e}^{i\,\dot{\omega}_\text{р} t}.$$

Величина

$\dot{\omega}_p = \omega_p\left(1 + i\,\frac{1}{2Q}\right)$ называется комплексной частотой собственных колебаний.

Резонатор с потерями

Можно записать

$$\frac{1}{Q}=\frac{P_0}{\omega_р W}=\frac{1}{Q_{ст}}+\frac{1}{Q_{диэл}}+\frac{1}{Q_{изл}},$$

где $Q_{ст}=\dfrac{\omega_р W}{P_{0\,ст}}$ — добротность резонатора при наличии потерь только в стенках;

$Q_{диэл}=\dfrac{\omega_р W}{P_{0\,диэл}}$ — добротность резонатора, обусловленная потерями только в диэлектрике;

$Q_{изл}=\dfrac{\omega_р W}{P_{0\,изл}}$ — добротность резонатора при наличии потерь только за счет излучения.

Резонатор с потерями

Добротности $Q_{\text{ст}}$, $Q_{\text{диэл}}$ и $Q_{\text{изл}}$ называют частичными добротностями.

Добротность, обусловленную потерями в стенках и диэлектрике, называют собственной добротностью Q_0

$$\frac{1}{Q_0} = \frac{1}{Q_{\text{ст}}} + \frac{1}{Q_{\text{диэл}}}.$$

Добротность, определяемая излучением $Q_{\text{изл}}$, называется внешней, общая добротность Q — нагруженной.

Резонатор с потерями

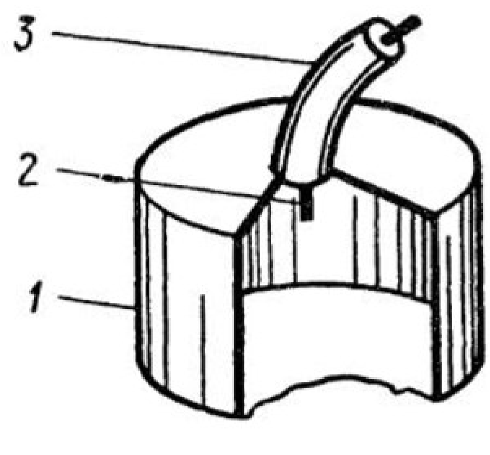
На практике чаще применяют круглые цилиндрические резонаторы, работающие на колебаниях типа H_{01p}. Такие резонаторы при данном объеме обладают наибольшей добротностью. Отсутствие продольных составляющих тока на боковой поверхности и радиальных составляющих на торцах резонатора позволяет изготавливать резонаторы разъемными без ухудшения добротности, так как разрывы не прерывают линий тока.

Объемные металлические резонаторы нашли широкое применение в технике СВЧ для выделения сигнала определенной частоты, определения длины волны и измерения электромагнитных параметров веществ.

5.5 Некоторые способы возбуждения и включения объемных резонаторов

Возбуждение при помощи штыря. Небольшая штыревая антенна вводится внутрь объемного резонатора. Такой антенной может служить, например, отрезок внутреннего проводника коаксиального кабеля. Для эффективного возбуждения резонатора необходимо, зная структуру возбуждаемого поля, расположить штырь параллельно силовым линиям вектора напряженности электрического поля. При этом поток мощности от источника внутрь резонатора будет наибольшим.

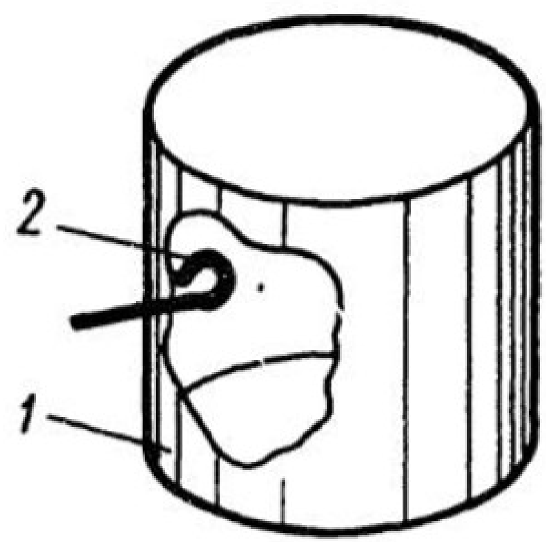
1 – резонатор,
2 – возбуждающий штырь,
3 – коаксиальный кабель



Некоторые способы возбуждения и включения объемных резонаторов

Возбуждение при помощи петли. Элементом возбуждения резонатора может быть небольшая петля, по которой протекает переменный ток. Амплитуда колебаний, возбужденных в резонаторе, будет наибольшей в том случае, когда плоскость петли в максимальной степени пронизывается магнитным потоком поля резонатора. Возбуждающую петлю следует располагать там, где напряженность магнитного поля максимальна.

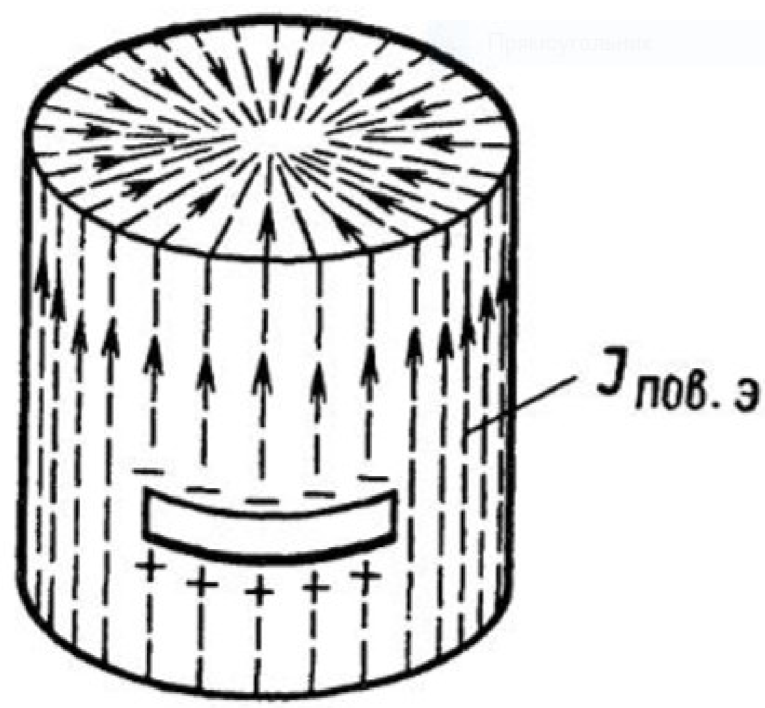
1 – резонатор,
2 – петля



Некоторые способы возбуждения и включения объемных резонаторов

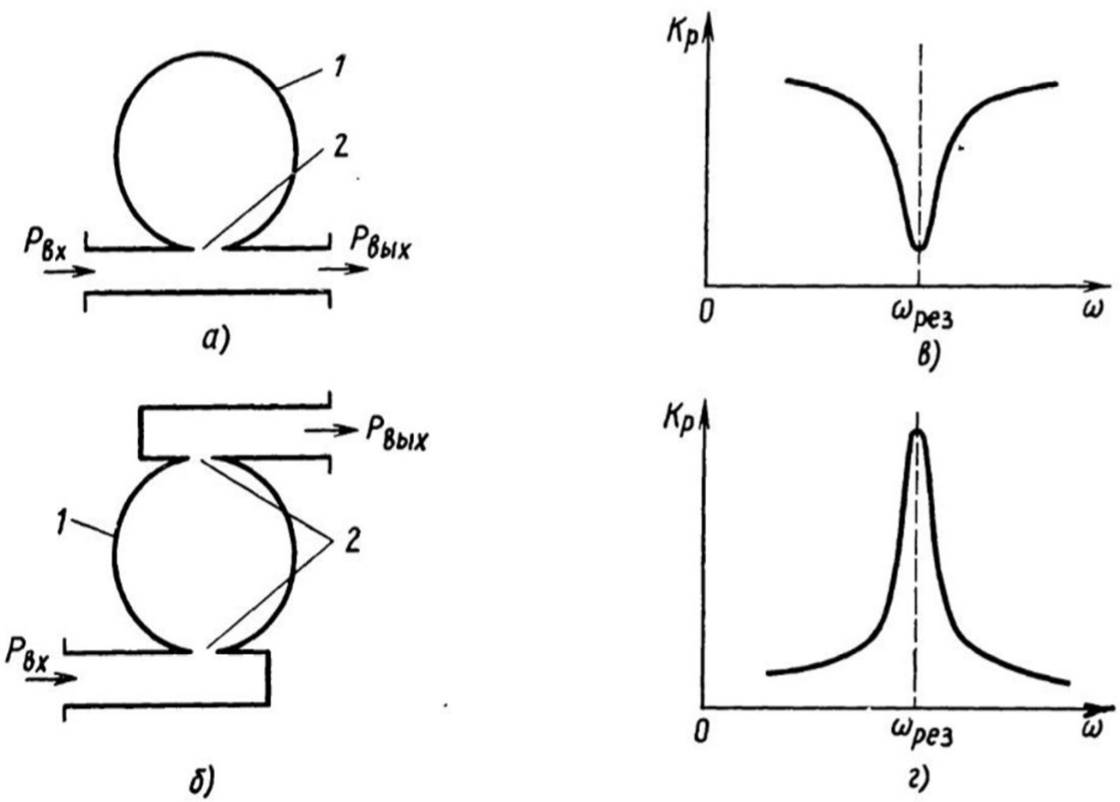
Возбуждение при помощи щели. Узкая щель, прорезанная в стенке резонатора, является излучающей, если она перерезает линии поверхностного тока. Она может служить элементом связи между резонатором и внешними устройствами, например, волноводами.

Пример щели на стенке цилиндрического резонатора с колебанием типа E_{010}



Некоторые способы возбуждения и включения объемных резонаторов

Способы включения объемных резонаторов. Рассмотрим два характерных способа включения объемных резонаторов. При первом (а), так называемом адсорбционном, способе на резонансной частоте происходит интенсивный отбор мощности из основной линии передачи. Как следствие, в частотной характеристике коэффициента передачи наблюдается провал (в).



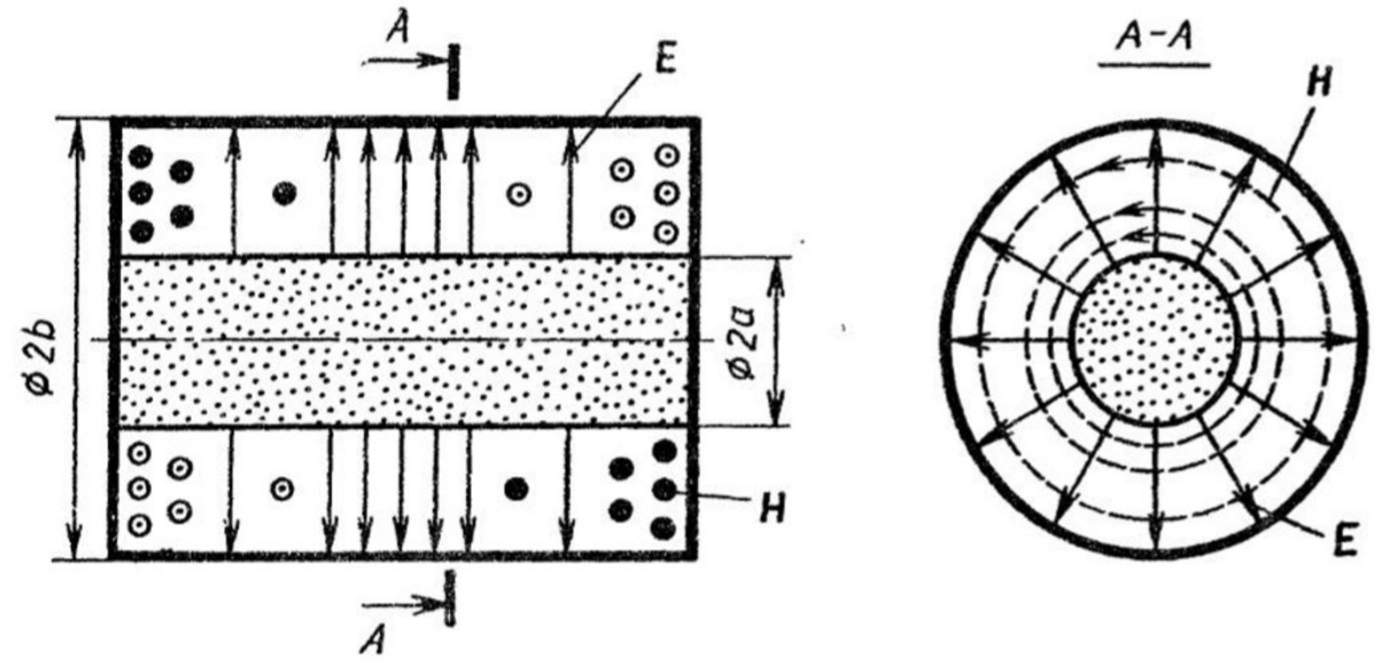
При втором (б), так называемом проходном, способе включения резонатор имеет два возбуждающих устройства и используется как четырехполюсник. Частотная характеристика системы имеет максимум на резонансной частоте используемого типа колебаний (г).

5.6 Некоторые другие типы объемных резонаторов

Коаксиальный объемный резонатор представляет собой закороченный с обоих концов отрезок коаксиального волновода. Такой резонатор, как правило, работает на волнах типа Т, и поэтому его поперечные размеры могут быть любыми независимо от значения резонансной частоты. Это способствует использованию коаксиальных объемных резонаторов на волнах дециметрового диапазона, где аналогичные прямоугольные или круглые резонаторы имели бы недопустимо большие габариты. Типы колебаний в коаксиальном резонаторе обозначаются как T_{00p}, где нулевые значения первых двух индексов указывают на отсутствие стоячих волн вдоль координатных направлений *r* и φ, последний индекс равен числу стоячих полуволн вдоль координаты *z*.

Некоторые другие типы объемных резонаторов

Колебание типа T_{001} в коаксиальном объемном резонаторе



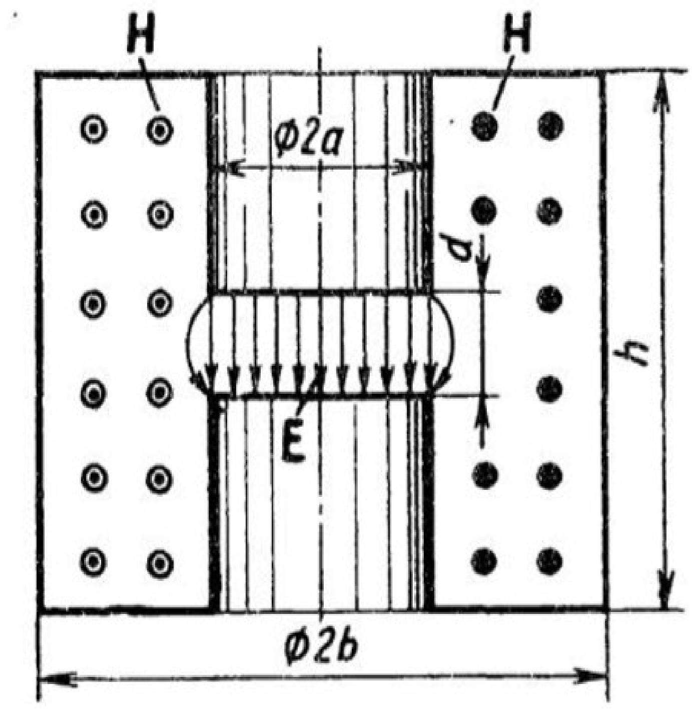
Наличие внутреннего проводника увеличивает поверхность стенок резонатора, поэтому добротность коаксиального резонатора ниже добротности аналогичной колебательной системы, построенной на базе полого металлического волновода.

Некоторые другие типы объемных резонаторов

Сферический объемный резонатор представляет собой металлическую сферу, радиус которой близок к резонансной длине волны. Здесь можно получить наилучшее соотношение между объемом и поверхностью, а значит, и наивысшую добротность. Однако сферические резонаторы трудно перестраивать по частоте, поэтому их редко применяют на практике.

Некоторые другие типы объемных резонаторов

Тороидальный объемный резонатор представлен на рисунке. Для такого резонатора можно приближенно считать, что энергия электрического поля локализуется в малой цилиндрической области зазора с осевым размером $d \ll h$. Энергия магнитного поля концентрируется в тороидальной области с наружным диаметром $2b$ и внутренним диаметром $2a$.



Некоторые другие типы объемных резонаторов

Можно считать, что в области зазора вдоль оси резонатора протекает ток смещения с комплексной амплитудой *I*. За счет этого по закону Ампера в тороидальной области на расстоянии *r* от оси возникает магнитное поле с единственной азимутальной проекцией вектора напряженности

$$H_\varphi = \frac{\dot{I}}{2\pi r}\ .$$

Полагая приближенно, что магнитное поле в резонаторе однородно вдоль оси z, находим магнитный поток

$$\dot{\Phi} = \int_0^h dz \int_a^b \dot{B}_\varphi(r)dr = \frac{\mu_0 h \dot{I}}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)\ .$$

Некоторые другие типы объемных резонаторов

Эквивалентная индуктивность тороидального резонатора

$$L_{\text{эк}} = \frac{\dot{\Phi}}{\dot{I}} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) .$$

Эквивалентная емкость тороидального резонатора определяется по приближенной формуле для плоского конденсатора

$$C_{\text{эк}} = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{d} .$$

Резонансная частота этой колебательной системы

$$f_{\text{рез}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_{\text{эк}} C_{\text{эк}}}} .$$

5.4 Открытые резонаторы

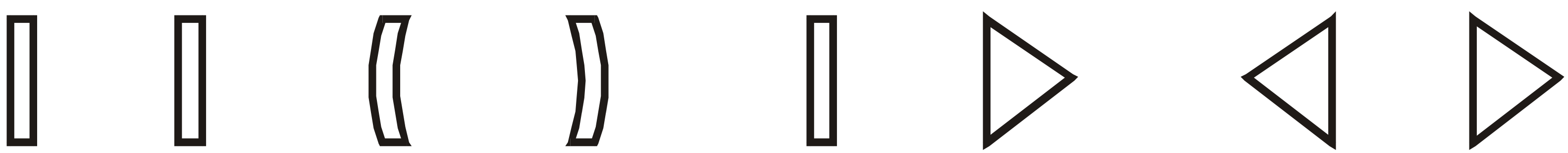
Применение обычных объемных резонаторов, геометрические размеры которых соответствуют настройке на одну собственную частоту, в оптическом диапазоне нецелесообразно, так как технологически трудно создать резонатор с размерами порядка длины волны (доли микрона). Кроме того, при таких малых размерах добротность резонатора резко уменьшается, а резонатор, размеры которого много больше длины волны, практически теряет свои резонансные свойства.

Открытые резонаторы

В оптическом диапазоне волн используются резонаторы, образуемые системой двух обращенных друг к другу отражающих поверхностей (зеркал). С точки зрения геометрической оптики между системой параллельных зеркал могут существовать пары параллельных, преобразующихся при отражении друг в друга лучей. Эти лучи и определяют собственные колебания резонатора, который эквивалентен одномерной колебательной системе. Так как резонатор ограничен лишь двумя поверхностями и открыт с других сторон, то его называют открытым. Размеры такого резонатора много больше длины волны, а спектр достаточно разрежен. Открытый резонатор длиной 1 м имеет в 10^{10} раз меньше резонансных частот, чем объемный резонатор такой же длины.

Открытые резонаторы

Отражающие поверхности могут представлять собой зеркала (плоские, сферические, параболические), грани призм полного внутреннего отражения или границы сред с различными показателями преломления. При этом необходимо иметь поверхности с большим коэффициентом отражения и малыми потерями на поглощение.



а *б* *в* *г*

Открытые резонаторы, образованные: *а* — плоскими зеркалами; *б* — сферическими; *в* — плоским зеркалом и призмой полного отражения; *г* — призмами полного отражения