Электродинамика
и распространение радиоволн

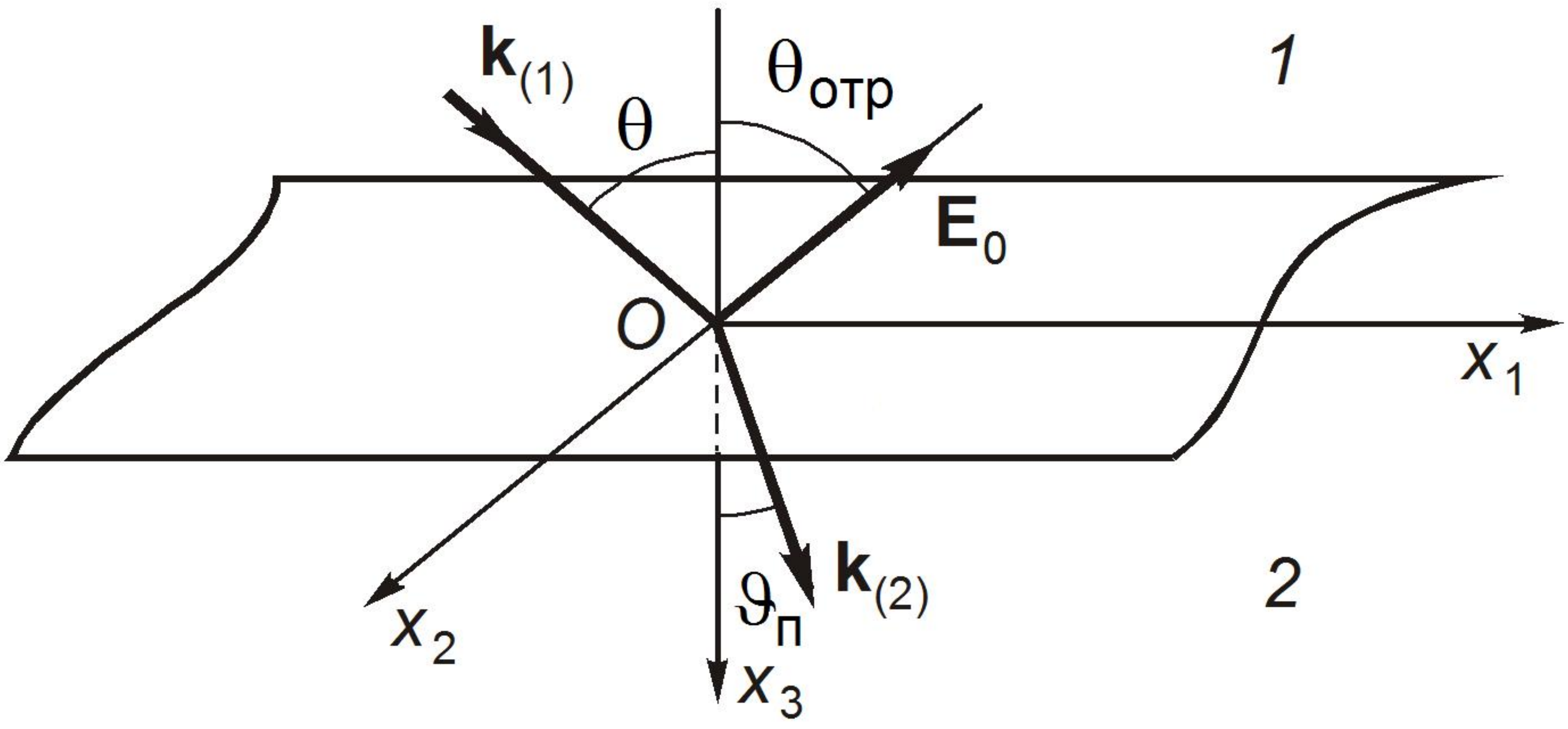
Лекции

Русов Юрий Сергеевич

3 ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ИСТОЧНИКА В ОГРАНИЧЕННЫХ СРЕДАХ

3.1 Наклонное падение электромагнитной волны на плоскую границу раздела двух сред. Формулы Френеля

Распространение волны можно характеризовать волновым комплексным вектором $\boldsymbol{\beta} - i\boldsymbol{\alpha}$.



Наклонное падение на границу раздела сред

Обе среды линейные и без потерь.

Пусть две однородных изотропных среды, из которых первая характеризуется параметрами e_1, m_1, а вторая e_2, m_2, разделены плоской границей, совпадающей с плоскостью Ox_1x_2

В первой среде под углом θ распространяется плоская однородная волна с постоянной распространения

$$k_{(1)} = \omega\sqrt{\varepsilon_{a1}\mu_{a1}}.$$

Поле в первой среде $\mathbf{E}_{(1)}$, $\mathbf{H}_{(1)}$ определяется как сумма падающей **E**, **H** и отраженной $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ волн.

Поле во второй среде $\mathbf{E}_{(2)}$, $\mathbf{H}_{(2)}$ определяется полем преломленной волны.

Наклонное падение на границу раздела сред

Если вектор **E** параллелен плоскости раздела, то поляризация называется *горизонтальной*. При этом вектор **H** лежит в плоскости падения.

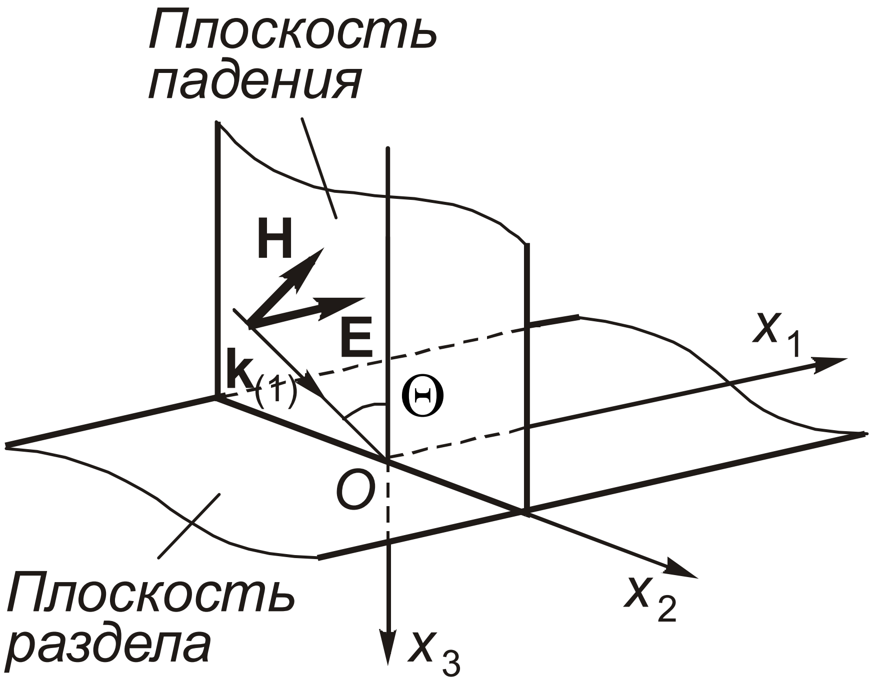
Если вектор **E** лежит в плоскости падения, а вектор **H** параллелен плоскости раздела, то поляризация называется *вертикальной*.

В случае линейной поляризации для упрощения решения удобно совместить координатную плоскость Ox_2x_3 (рис. 3.2), с плоскостью падения. Тогда в случае горизонтальной поляризации с осью x_1 совпадает направление вектора **E**, в случае вертикальной — направление **H.**

$$\mathbf{k}_{(1)} = (0, k_{(1)} \sin\theta, k_{(1)} \cos\theta)$$

$$\mathbf{k}_{(1)}\mathbf{r} = k_{(1)}(x_2 \sin\theta + x_3 \cos\theta).$$

Наклонное падение на границу раздела сред



а при горизонтальной поляризации

б при вертикальной поляризации

Наклонное падение на границу раздела сред

Рассмотрим случай **горизонтальной поляризации**. Поле падающей волны

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{e}_1 E_m \, \mathrm{e}^{i\,[\omega t - k_{(1)}\,(x_2 \sin\theta + x_3 \cos\theta)]},$$

$$\dot{\mathbf{H}} = H_m (\mathbf{e}_2 \cos\theta - \mathbf{e}_3 \sin\theta)\, \mathrm{e}^{i\,[\omega t - k_{(1)}\,(x_2 \sin\theta + x_3 \cos\theta)]}. \tag{3.1}$$

$$E_m = Z_{01} H_m, \qquad Z_{01} = \sqrt{\frac{\mu_{a1}}{\varepsilon_{a1}}}$$

Поле падающей волны не зависит от x_1.

Из условия симметрии очевидно, что вторичное поле не зависит от x_1, отраженная и преломленная волны также распространяются в плоскости падения.

Наклонное падение на границу раздела сред

Постоянная распространения отраженной волны

$$k_0 = \omega_0 \sqrt{\varepsilon_{a1}\mu_{a1}},$$

поле отраженной волны

$$\dot{\mathbf{E}}_0 = \mathbf{e}_1 \dot{E}_{m0}\, \mathrm{e}^{i[\omega_0 t - k_0 (x_2 \sin\theta_{omp} - x_3 \cos\theta_{omp})]},$$

$$\dot{\mathbf{H}}_0 = \dot{H}_{m0} (\mathbf{e}_2 \cos\theta_0 - \mathbf{e}_3 \sin\theta_0)\, \mathrm{e}^{i[\omega_0 t - k_0 (x_2 \sin\theta_{omp} - x_3 \cos\theta_{omp})]},$$

$$\dot{E}_{m0} = \dot{H}_{m0} Z_{01}. \qquad (3.2)$$

Поле прошедшей волны

$$k_{(2)} = \omega_2 \sqrt{\varepsilon_{a2}\mu_{a2}},$$

$$\dot{\mathbf{E}}_{(2)} = \mathbf{e}_1 \dot{E}_{m(2)}\, \mathrm{e}^{i[\omega_2 t - k_{(2)} (x_2 \sin\vartheta_n + x_3 \cos\vartheta_n)]},$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{(2)} = \dot{H}_{m(2)} (\mathbf{e}_2 \cos\vartheta_n - \mathbf{e}_3 \sin\vartheta_n)\, \mathrm{e}^{i[\omega_2 t - k_{(2)} (x_2 \sin\vartheta_n + x_3 \cos\vartheta_n)]}, \qquad (3.3)$$

$$\dot{E}_{m(2)} = Z_{02} \dot{H}_{m(2)}, \qquad Z_{02} = \sqrt{\frac{\mu_{a2}}{\varepsilon_{a2}}}$$

Наклонное падение на границу раздела сред

$$E_{\tau(1)} = E_{\tau(2)} \quad \text{при} \quad x_3 = 0,$$

с учетом (3.1), (3.2) и (3.3)

$$E_m \, \mathrm{e}^{i\,(\omega t - k_{(1)} x_2 \sin\theta)} + \dot{E}_{m0} \, \mathrm{e}^{i\,(\omega_0 t - k_0 x_2 \sin\theta_{omp})} =$$

$$= \dot{E}_{m(2)} \, \mathrm{e}^{i\,(\omega_2 t - k_{(2)} x_2 \sin\vartheta_n)} \,. \qquad (3.4)$$

Для выполнения граничного условия (3.4) в любой момент времени t в любой точке плоскости раздела необходимо

$$\omega = \omega_0 = \omega_2, \qquad (3.5)$$

$$k_{(1)} \sin\theta = k_0 \sin\theta_{omp} = k_{(2)} \sin\vartheta_n. \qquad (3.6)$$

Наклонное падение на границу раздела сред

Из (3.6) следуют *законы Снеллиуса*:

1. Угол падения равен углу отражения

$$\theta = \theta_{отр}. \qquad (3.7)$$

2. Углы падения и преломления связаны соотношением

$$\frac{\sin \vartheta_n}{\sin \theta} = \frac{k_{(1)}}{k_{(2)}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}{\sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}} = \frac{n_1}{n_2} = n_{12}, \qquad (3.8)$$

На основании (3.5) и (3.6) выражение (3.4)

$$E_m + \dot{E}_{m0} = \dot{E}_{m(2)}. \qquad (3.9)$$

Наклонное падение на границу раздела сред

$$J_{\text{пов}} = 0,$$

$$H_{\tau(1)} = H_{\tau(2)} \quad \text{при} \quad x_3 = 0,$$

Учитывая (3.1)—(3.3), (3.5) и (3.6)

$$H_m \cos\theta + \dot{H}_{m0} \cos\theta_{отр} = \dot{H}_{m(2)} \cos\vartheta_n .$$

$\theta = \theta_{отр}$, тогда

$$(H_m - \dot{H}_{m0}) \cos\theta = H_{m(2)} \cos\vartheta_n \qquad (3.10)$$

$$(E_m - \dot{E}_{m0}) \cos\theta = \frac{Z_{01}}{Z_{02}} \dot{E}_{m(2)} \cos\vartheta_n . \qquad (3.11)$$

Наклонное падение на границу раздела сред

Явления отражения и прохождения волны через границу раздела двух сред при горизонтальной поляризации можно характеризовать коэффициентами отражения и прохождения по электрическому полю

$$\dot{\Gamma}_E = \frac{\dot{E}_{m0}}{E_m}, \quad \dot{P}_E = \frac{\dot{E}_{m(2)}}{E_m}. \qquad (3.12)$$

Преобразуя (3.9) и (3.11) с помощью (3.12), получим систему

$$1 + \dot{\Gamma}_E = \dot{P}_E,$$

$$(1 - \dot{\Gamma}_E)\cos\theta = \frac{Z_{01}}{Z_{02}} \dot{P}_E \cos\vartheta_n.$$

Наклонное падение на границу раздела сред

Решение системы

$$\dot{\Gamma}_E = \frac{Z_{02}\cos\theta - Z_{01}\cos\vartheta_n}{Z_{02}\cos\theta + Z_{01}\cos\vartheta_n},$$

$$\dot{P}_E = \frac{2Z_{02}\cos\theta}{Z_{02}\cos\theta + Z_{01}\cos\vartheta_n}. \qquad (3.13)$$

- формулы Френеля

Наклонное падение на границу раздела сред

В случае **вертикальной поляризации** поле падающей волны

$$\dot{\mathbf{E}} = E_m(\mathbf{e}_2 \cos\theta - \mathbf{e}_3 \sin\theta)\,\mathrm{e}^{i\,[\omega t - k_{(1)}(x_2 \sin\theta + x_3 \cos\theta)]},$$

$$\dot{\mathbf{H}} = -\mathbf{e}_1 H_m\, \mathrm{e}^{i\,[\omega t - k_{(1)}(x_2 \sin\theta + x_3 \cos\theta)]}.$$

(3.14)

При сравнении (3.14) и (3.1) видим, что уравнения, описывающие случай вертикальной поляризации, можно получить из уравнений для горизонтальной поляризации при замене E на H.

Наклонное падение на границу раздела сред

(3.9) и (3.10) при замене будут иметь вид

$$H_m + \dot{H}_{m0} = \dot{H}_{m(2)},$$
$$(E_m - \dot{E}_{m0})\cos\theta = \dot{E}_{m(2)}\cos\vartheta_n, \qquad (3.15)$$

или

$$(H_m - \dot{H}_{m0})\cos\theta = \dot{H}_{m(2)}\frac{Z_{02}}{Z_{01}}\cos\vartheta_n. \qquad (3.16)$$

Наклонное падение на границу раздела сред

В случае вертикальной поляризации явления на границе раздела можно характеризовать коэффициентом отражения и прохождения по магнитному полю

$$\dot{\Gamma}_H = \frac{\dot{H}_{m0}}{H_m}, \quad \dot{P}_H = \frac{\dot{H}_{m(2)}}{H_m}. \qquad (3.17)$$

Преобразуем (3.15) и (3.16) с помощью (3.17)

$$1 + \dot{\Gamma}_H = \dot{P}_H,$$

$$(1 - \dot{\Gamma}_H)\cos\theta = \dot{P}_H \frac{Z_{02}}{Z_{01}} \cos\vartheta_n.$$

Решение системы - **формулы Френеля** для случая вертикальной поляризации

$$\dot{\Gamma}_H = \frac{Z_{01}\cos\theta - Z_{02}\cos\vartheta_n}{Z_{01}\cos\theta + Z_{02}\cos\vartheta_n},$$

$$\dot{P}_H = \frac{2Z_{01}\cos\theta}{Z_{01}\cos\theta + Z_{02}\cos\vartheta_n}. \qquad (3.18)$$

Наклонное падение на границу раздела сред

Горизонтальная поляризация. Поле в первой среде

$$\dot{\mathbf{E}}_{m(1)} = \mathbf{E}_m + \dot{\mathbf{E}}_{m0}.$$

$$\dot{\mathbf{E}}_{m(1)} = \mathbf{e}_1 E_m \,\mathrm{e}^{-i\,k_{(1)}\,(x_2 \sin\theta + x_3 \cos\theta)} +$$

$$+\mathbf{e}_1 \Gamma_E E_m \,\mathrm{e}^{-i\,k_{(1)}\,(x_2 \sin\theta_{omp} - x_3 \cos\theta_{omp})}.$$

С учетом $\theta = \theta_{omp}$,

$$\dot{\mathbf{E}}_{m(1)} = \mathbf{e}_1 E_m [\mathrm{e}^{-i\,k_{(1)}\,(x_2 \sin\theta + x_3 \cos\theta)} +$$

$$+\Gamma_E \,\mathrm{e}^{-i\,k_{(1)}\,(x_2 \sin\theta - x_3 \cos\theta)}].$$

Наклонное падение на границу раздела сред

Выражение преобразуется к виду

$$\dot{\mathbf{E}}_{m(1)} = \mathbf{e}_1 E_m [(1-\Gamma_E)\,\mathrm{e}^{-i\,k_{(1)}(x_2 \sin\theta + x_3 \cos\theta)} +$$

$$+2\Gamma_E \cos(k_{(1)} x_3 \cos\theta)\,\mathrm{e}^{-i\,k_{(1)} x_2 \sin\theta}].$$

Поле в первой среде можно представить как сумму двух волн, одна из которых распространяется вдоль направления падения, а вторая вдоль границы раздела в направлении оси x_2 с амплитудой, изменяющейся по закону косинуса вдоль оси x_3.

Поле в первой среде является неоднородным.
Поле во второй среде является однородным.

Наклонное падение на границу раздела сред

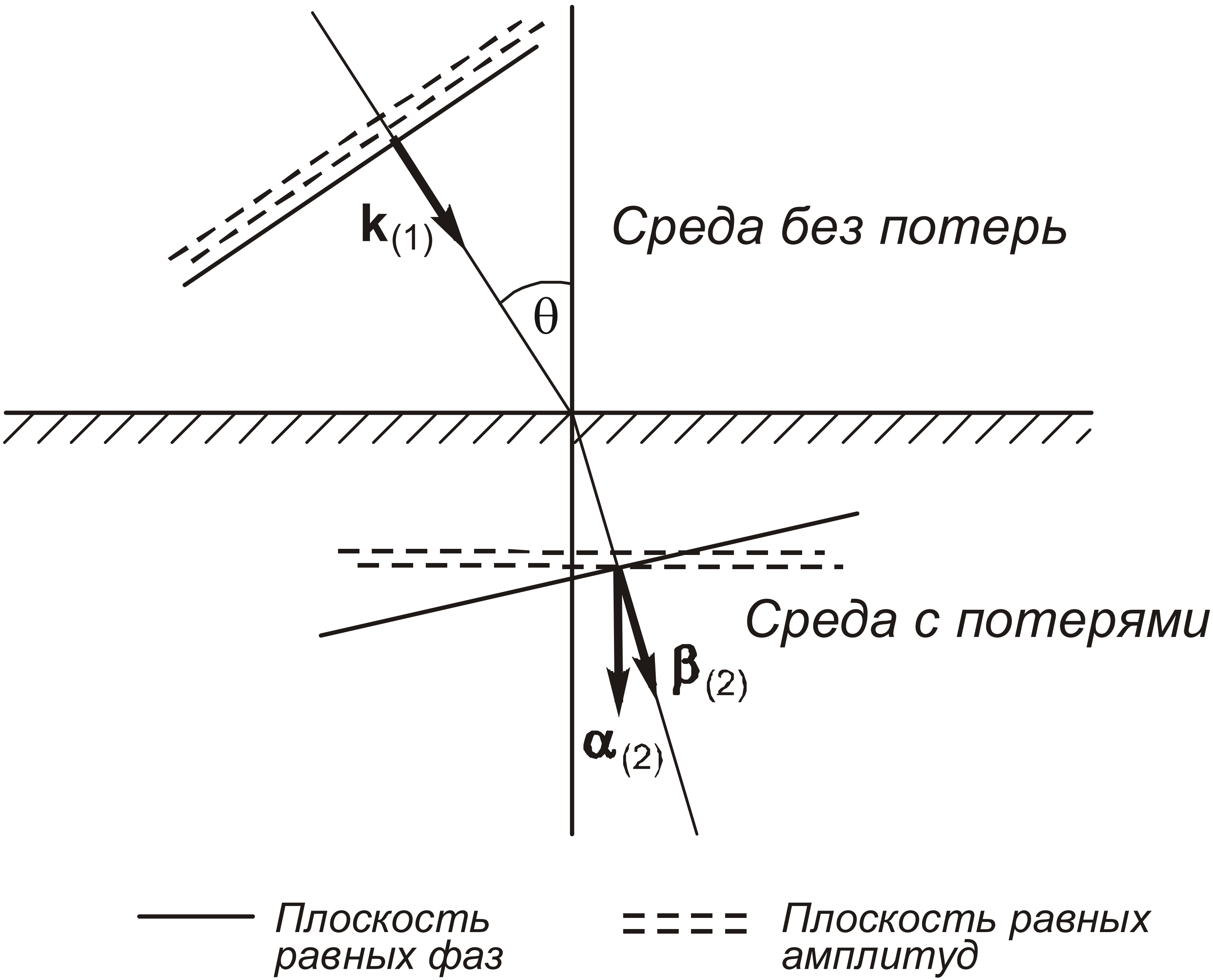
Обе среды линейные, но вторая – с потерями.

Рассмотрим прохождение плоской волны через поверхность раздела из среды без потерь в среду с потерями. Распространение преломленной волны характеризуется множителем распространения

$$e^{-i\,\mathbf{k}_{(2)}\mathbf{r}},$$

где $\dot{\mathbf{k}}_{(2)} = \boldsymbol{\beta}_{(2)} - i\boldsymbol{\alpha}_{(2)}$ и в общем случае векторы $\boldsymbol{\beta}_{(2)}$ и $\boldsymbol{\alpha}_{(2)}$ не параллельны, но вследствие симметрии возбуждения волны лежат в плоскости падения.

Наклонное падение на границу раздела сред



Наклонное падение на границу раздела сред

Если плоскость падения совпадает с плоскостью x_2Ox_3, то скалярное произведение

$$(\dot{\mathbf{k}}_{(2)}\mathbf{r}) = \dot{k}_{(2)} \frac{(\beta_{(2)} \sin\vartheta_\beta - j\alpha_{(2)} \sin\vartheta_\alpha)}{\dot{k}_{(2)}} x_2 + \frac{(\beta_{(2)} \cos\vartheta_\beta - j\alpha_{(2)} \cos\vartheta_\alpha)}{\dot{k}_{(2)}} x_3 \;.$$

Вводим комплексные углы

$$\cos\dot{\vartheta}_n = \frac{\beta_{(2)} \cos\vartheta_\beta - i\,\alpha_{(2)} \cos\vartheta_\alpha}{\dot{k}_{(2)}},$$

$$\sin\dot{\vartheta}_n = \frac{\beta_{(2)} \sin\vartheta_\beta - i\,\alpha_{(2)} \sin\vartheta_\alpha}{\dot{k}_{(2)}}.$$

Наклонное падение на границу раздела сред

ϑ_β – угол между нормалью к поверхности и вектором $\boldsymbol{\beta}_{(2)}$;

ϑ_α – угол между нормалью к поверхности и вектором $\boldsymbol{\alpha}_{(2)}$.

Закон Снеллиуса

$$k_{(1)}\sin\theta = \dot{k}_{(2)}\sin\dot{\vartheta}_n .$$

Отсюда

$$k_{(1)}\sin\theta = \beta_{(2)}\sin\vartheta_\beta - i\,\alpha_{(2)}\sin\vartheta_\alpha ,$$

$$\sin\vartheta_\alpha = 0$$

$$\vartheta_\alpha = 0°,$$

$$\sin\vartheta_\beta = \frac{k_{(1)}\sin\theta}{\beta_{(2)}}.$$

Наклонное падение на границу раздела сред

Если потери во второй среде малы, то

$$k_{(2)} \approx \beta_{(2)}$$

$$\vartheta_{\beta} \approx \vartheta_{n}.$$

В этом случае положение плоскости равных фаз в пространстве определяется выражением

$$x_2 \sin\vartheta + x_3 \cos\vartheta_n = \mathrm{const},$$

а положение плоскости равных амплитуд выражением

$$x_3 = \mathrm{const}$$

Наклонное падение на границу раздела сред

Среда с потерями характеризуется комплексным характеристическим сопротивлением и, следовательно, коэффициенты отражения и преломления являются комплексными.

Отраженная и преломленная волны сдвинуты по фазе относительно падающей.

Этот сдвиг для случая горизонтальной и вертикальной поляризаций будет различным, и при падении на границу среды с потерями волны´ произвольной линейной поляризации отраженная и преломленная волны будут поляризованы эллиптически.

3.2 Полное прохождение электромагнитного поля при наклонном падении на границу линейных сред без потерь. Угол Брюстера

В случае горизонтальной поляризации отраженная волна отсутствует, если

$$\Gamma_E = 0$$

Согласно формулам Френеля

$$Z_{02}\cos\theta - Z_{01}\cos\vartheta_n = 0.$$

Учитывая закон Снеллиуса,

$$Z_{02}\cos\theta - Z_{01}\sqrt{1 - \frac{k_{(1)}^2}{k_{(2)}^2}\sin^2\theta} = 0$$

Угол Брюстера

$$\sin^2\theta = \frac{\varepsilon_2/\varepsilon_1 - \mu_2/\mu_1}{\mu_1/\mu_2 - \mu_2/\mu_1}. \qquad (3.19)$$

Для обычных диэлектриков $\mu_1 = \mu_2 = 1$,

и выражение (3.19) не имеет смысла, горизонтально-поляризованная часть поля отражается при любом угле падения.

Угол Брюстера

В случае вертикальной поляризации условие полного прохождения волны

$$\Gamma_H = 0.$$

Согласно формулам Френеля

$$Z_{02} \cos \vartheta_n - Z_{01} \cos \theta = 0.$$

Учитывая закон преломления Снеллиуса,

$$Z_{02} \sqrt{1 - \frac{k_{(1)}^2}{k_{(2)}^2} \sin^2 \theta} - Z_{01} \cos \theta = 0,$$

Угол Брюстера

$$\sin^2\theta = \frac{\mu_2/\mu_1 - \varepsilon_2/\varepsilon_1}{\varepsilon_1/\varepsilon_2 - \varepsilon_2/\varepsilon_1}.$$

Для обычного диэлектрика $\mu_1 = \mu_2 = 1$

тогда
$$\sin^2\theta = \frac{1}{\varepsilon_1/\varepsilon_2 + 1}$$

$$\theta = \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \qquad (3.20)$$

Угол Брюстера

Вертикально поляризованная волна не отражается при падении на границу раздела идеальных диэлектриков под углом, определяемым выражением (3.20) и называемым **углом Брюстера**.

При падении под углом Брюстера волны любой линейной, круговой или эллиптической поляризации отраженная волна имеет горизонтальную поляризацию.

Угол преломления

$$\sin\vartheta_n = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\sin\theta.$$

С учетом (3.20)

$$\sin\vartheta_n = \cos\theta$$

$$\sin\vartheta_n = \sin \quad \frac{\pi}{2} - \theta \quad .$$

$$\vartheta_n + \theta = \frac{\pi}{2}.$$