

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Факультет «Радиоэлектроника и лазерная техника(РЛ)»

Кафедра «Радиоэлектронные системы и устройства(РЛ1)»

Домашняя задание №2

по дисциплине

«Электродинамика и распространение радиоволн»

Вариант № 12

Выполнил ст. группы РЛ-41

Филимонов С.В.

Проверил Русов Ю.С.

Оценка в баллах _____

Москва, 2022

Задание № 1

Условие.

В прямоугольном волноводе сечением $23 \times 10 \text{ мм}^2$ распространяется волна типа H_{10} . Волновод заполнен диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_r = (1 + 0,25 \cdot M + 0,01 \cdot N)$ и относительной магнитной проницаемостью $\mu_r = 1$. Амплитуда напряжённости электрического поля в центре волновода равна $(M + 2,4 \cdot N) \cdot 10^4 \text{ В/м}$. Частота колебаний $(1 + 0,008 \cdot N) \cdot 10 \text{ ГГц}$. Записать выражения для составляющих поля волны, определить мощность, передаваемую волной, фазовую и групповую скорости, длину волны в волноводе, а также плотности поверхностных токов на стенках (плотности поверхностных токов записать в виде выражений для четырех стенок).

Решение.

Поле H_{10} в прямоугольном волноводе:

$$H_{mz} = H \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot e^{-jk_0 z}$$

$$H_{mx} = i \cdot \frac{2a}{\lambda} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \cdot H \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot e^{-jk_0 z}$$

$$E_{my} = -i \cdot \frac{2a}{\lambda} \cdot Z_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot e^{-jk_0 z}$$

$$H_{my} = E_{mx} = E_{mz} = 0$$

Критическая длина волны для поля H_{10} в прямоугольном волноводе

$$\lambda_{кр} = 2a \implies \lambda_{кр} = 2 \cdot 0,023 = 0,046 [\text{м}].$$

Длина волны в среде волновода, при условии что она не ограничена

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}},$$

где λ_0 - длина волны в воздухе.

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,096 \cdot 10^{10}} = 0,027 [\text{м}],$$

$$\lambda = \frac{0,0283}{\sqrt{2,12}} = 0,017 [\text{м}].$$

Длина волны в волноводе

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} = \frac{0,017}{\sqrt{1 - \left(\frac{0,017}{0,046}\right)^2}} = 0,019 [\text{м}].$$

Продольная постоянная распространения

$$k_0 = k \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2},$$

$$k_0 = \frac{2\pi}{0,017} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0,017}{0,046}\right)^2} = 325,916 \left[\frac{1}{\text{м}}\right].$$

Характеристическое сопротивление среды, заполняющие волновод

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{1,25 \cdot 10^6}{2,37 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}} = 244,12 [\text{Ом}].$$

Характеристическое сопротивление волновода для волны Н₁₀

$$Z_{\text{ОН}} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} = \frac{244,12}{\sqrt{1 - \left(\frac{0,017}{2 \cdot 0,023}\right)^2}} = 264,69 [\text{Ом}].$$

Определим коэффициент Н

$$E_0 = -\frac{240\pi a}{\lambda \sqrt{\varepsilon_r}} H \Rightarrow H = -\frac{\lambda \sqrt{\varepsilon_r}}{240\pi a} E_0,$$

$$H = -\frac{0,017 \cdot \sqrt{2,37}}{240 \cdot \pi \cdot 0,023} \cdot 3,38 \cdot 10^6 = -533 \left[\frac{\text{А}}{\text{м}}\right].$$

Выразим для составляющих поля в численном виде

$$H_{\text{mz}} = (-533) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{0,023}\right) \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot z} \left[\frac{\text{А}}{\text{м}}\right]$$

$$H_{\text{mx}} = i \cdot \frac{2 \cdot 0,023}{0,017} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0,017}{2 \cdot 0,023}\right)^2} \cdot (-533) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{0,023}\right) \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot z} \left[\frac{\text{А}}{\text{м}}\right],$$

$$H_{\text{mx}} = i \cdot (-1340) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{0,023}\right) \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot z} \left[\frac{A}{\mathcal{M}}\right],$$

$$E_{\text{my}} = -i \cdot \frac{2 \cdot 0,023}{0,017} \cdot 244,12 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{0,023}\right) \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot z} \left[\frac{B}{\mathcal{M}}\right],$$

$$E_{\text{my}} = -i \cdot 660,56 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{0,023}\right) \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot z} \left[\frac{B}{\mathcal{M}}\right],$$

$$H_{\text{my}} = E_{\text{mx}} = E_{\text{mz}} = 0.$$

Мощность, передаваемая волноводом

$$P_{\text{cp}} = \frac{ab \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}{4Z_0} E_0^2,$$

$$P_{\text{cp}} = \frac{0,023 \cdot 0,01 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0,017}{2 \cdot 0,023}\right)^2}}{4 \cdot 244,12} \cdot (3,38 \cdot 10^6)^2 = 24817 \text{ [Вт]}.$$

Фазовая и групповая скорость

$$v_{\phi} = \frac{\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} = \frac{\frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2,37}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{0,017}{0,046}\right)^2}} = 2,11 \cdot 10^8 \left[\frac{\mathcal{M}}{c}\right],$$

$$v_z = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2,37}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0,017}{0,046}\right)^2} = 1,79 \cdot 10^8 \left[\frac{\mathcal{M}}{c}\right].$$

Плотность поверхностных токов

$$\vec{J}_{\text{пов}} = \left[\vec{n}_0 \vec{H} \right],$$

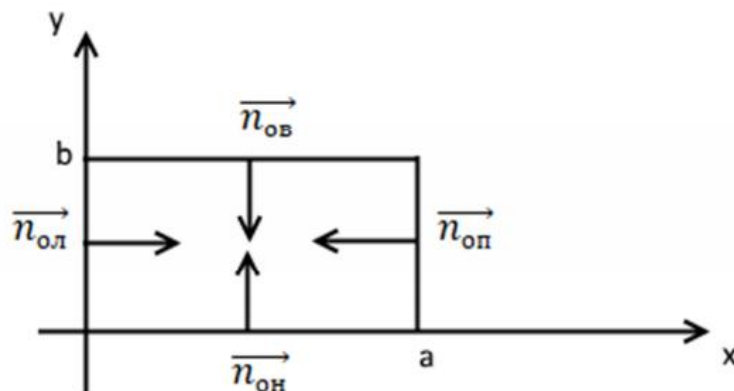


Рисунок 1 - Поверхностные токи.

1) На левой стенке

$$\vec{n}_{\text{ол}} = [0, 1, 0]$$

Составляющие поля ($x = 0$)

$$\dot{H}_{\text{mz}}|_{x=0} = (-533) \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot z} \left[\frac{A}{M} \right],$$

$$\dot{H}_{\text{mx}}|_{x=0} = 0 \left[\frac{A}{M} \right],$$

$$\dot{H}_{\text{my}}|_{x=0} = 0 \left[\frac{A}{M} \right].$$

$$\vec{j}_{\text{пов.л.}} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{H}_{\text{mz}} \end{bmatrix} = -\dot{H}_{\text{mz}} \cdot \vec{e}_2 \Rightarrow$$

$$\vec{j}_{\text{пов.л.}} = 533 \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot z} \cdot \vec{e}_2 \left[\frac{A}{M} \right].$$

2) На правой стенке

$$\vec{n}_{\text{оп}} = [-1, 0, 0]$$

Составляющие поля ($x = a$)

$$\dot{H}_{\text{mz}}|_{x=a} = 533 \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot z} \left[\frac{A}{M} \right],$$

$$\dot{H}_{\text{mx}}|_{x=a} = 0 \left[\frac{A}{M} \right],$$

$$\dot{H}_{\text{my}}|_{x=a} = 0 \left[\frac{A}{M} \right].$$

$$\vec{j}_{\text{пов.п.}} = \begin{bmatrix} \vec{e}_2 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{H}_{\text{mz}} \end{bmatrix} = -\dot{H}_{\text{mz}} \cdot \vec{e}_2 \Rightarrow$$

$$\vec{j}_{\text{пов.п.}} = 533 \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot z} \cdot \vec{e}_2 \left[\frac{A}{M} \right].$$

3) На верхней стенке

$$\vec{n}_{\text{об}} = [0, -1, 0]$$

Составляющие поля не зависят от у

$$\vec{j}_{\text{пов.}\theta,x} = 533 \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot z} \left[\frac{A}{M} \right],$$

$$\vec{j}_{\text{пов.}\theta,y} = 0 \left[\frac{A}{M} \right],$$

$$\vec{j}_{\text{пов.}\theta,z} = i \cdot (-1340) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{0,023}\right) \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot z} \left[\frac{A}{M} \right].$$

$$\vec{j}_{\text{пов.}\theta} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & -1 & 0 \\ \dot{H}_{\text{mx}} & 0 & \dot{H}_{\text{mz}} \end{bmatrix} = -\vec{e}_1 \dot{H}_{\text{mz}} + \vec{e}_3 \dot{H}_{\text{mx}} \Rightarrow$$

$$\vec{j}_{\text{пов.}\theta} = 533 \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot z} \vec{e}_1 + i \cdot 1340 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{0,023}\right) \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot z} \vec{e}_3 \left[\frac{A}{M} \right].$$

4) На нижней стенке

$$\vec{n}_{\text{он}} = [0, 1, 0]$$

Составляющие поля не зависят от у

$$\vec{j}_{\text{пов.н},x} = -533 \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot z} \left[\frac{A}{M} \right],$$

$$\vec{j}_{\text{пов.н},y} = 0 \left[\frac{A}{M} \right],$$

$$\vec{j}_{\text{пов.н},z} = i \cdot 1340 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{0,023}\right) \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot z} \left[\frac{A}{M} \right].$$

$$\vec{j}_{\text{пов.н}} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dot{H}_{\text{mx}} & 0 & \dot{H}_{\text{mz}} \end{bmatrix} = \vec{e}_1 \dot{H}_{\text{mz}} - \vec{e}_3 \dot{H}_{\text{mx}} \Rightarrow$$

$$\vec{j}_{\text{пов.н}} = i \cdot 1340 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{0,023}\right) \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot z} \cdot \vec{e}_1 + 533 \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot z} \cdot \vec{e}_3 \left[\frac{A}{M} \right].$$

Задание № 2

Условие.

В круглом заполненном воздухом волноводе диаметром $(1+0,12 \cdot M + 0,1 \cdot N) \cdot 5$ см распространяется волна типа H_{11} . Частота колебаний $5 \cdot (1+0,012 \cdot N)$ ГГц, передаваемая мощность $(1+0,012 \cdot M) \cdot 1$ кВт. Определить максимальное значение напряжённости электрического поля в волноводе.

Решение.

Для начала определим радиус волновода

$$a = \frac{d}{2} = \frac{0,14}{2} = 0,07 \text{ [м]}.$$

Длина волны в среде волновода (среда неограниченная)

$$\lambda = \frac{c}{f}, (\epsilon_r = \mu_r = 1)$$

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{5,132 \cdot 10^9} = 0,058 \text{ [м]}.$$

Волновое сопротивление среды

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120 \cdot \pi = 377 \text{ [Ом]}.$$

Критическая длина волны для H_{11}

$$\lambda_{кр} = 3,41 \cdot a = 3,41 \cdot 0,07 = 0,23 \text{ [м]}.$$

Максимальное значение напряжённости электрического поля

$$P_{cp} = \frac{\pi a^2 E_0^2}{4,28 \cdot Z_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}, \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{4,28 \cdot Z_0 \cdot P_{cp}}{\pi a^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}},$$

$$E_0 = \sqrt{\frac{4,28 \cdot 377 \cdot 1060}{\pi \cdot 0,07^2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0,058}{0,23}\right)^2}}} = 10705 \text{ [В/м]}.$$

Задание № 3

Условие.

При каком диаметре круглого волновода, заполненного диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_r = (M+0,055 \cdot N)$ и относительной магнитной проницаемостью $\mu_r = 1$, в нем может распространяться только основной тип волны на частоте $(1+0,055 \cdot N) \cdot 12$ ГГц.

Решение.

Критическая длина волны типа H_{11}

$$\lambda_{кр} = 3,41 \cdot a,$$

где a - радиус сечения волновода. Исходя из условия распространения для волны типа H_{11}

$$\lambda < \lambda_{кр H_{11}} = 3,41 \cdot a,$$

и условия распространения в волноводе только основного типа волны

$$f_{кр H_{11}} < f < f_{кр E_{01}} \text{ или } \lambda_{кр E_{01}} < \lambda < \lambda_{кр H_{11}}.$$

Критическая длина волны для поля E_{01}

$$\lambda_{кр E_{01}} = 2,61 \cdot a.$$

Длина волны в неограниченной среде волновода

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{f \cdot \sqrt{\epsilon_r}}, \text{ при } (\mu_r = 1),$$

где λ_0 - длина волны в воздухе, а c - скорость света в вакууме.

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{1,92 \cdot 10^{10} \cdot \sqrt{5,6}} = 0,006 [\text{м}].$$

Тогда

$$2,61 \cdot a < 0,006 < 3,41 \cdot a,$$

$$1,86 [\text{мм}] < a < 2,43 [\text{мм}] \implies 3,71 [\text{мм}] < d < 4,85 [\text{мм}].$$

Задание № 4

Условие.

В волноводе квадратного сечения с размерами $a = b = 7,2$ мм, заполненном воздухом, стенки которого сделаны из материала с проводимостью $\sigma = (0,5 \cdot M + 0,011 \cdot N) \cdot 10^7$ См/м, распространяется волна типа H_{11} . Определить частоту поля, при которой затухание минимально, минимальное значение коэффициента затухания и диапазон частот, в пределах которого значение коэффициента затухания отличается от минимального не более чем на 10%. Показать этот диапазон на графике. При расчётах учитывать только потери в металле.

Решение.

Потери в волноводе

$$\alpha = \alpha_M + \alpha_D,$$

где α_M - коэффициент ослабления в металле и α_D - коэффициент ослабления в диэлектрике. Так как средой, заполняющей волновод, является воздух, потерями в диэлектрике можно пренебречь

$$(\alpha_D \rightarrow 0), \Rightarrow \alpha \approx \alpha_M.$$

Коэффициент ослабления в металле для волны типа H_{11}

$$\alpha_M = \frac{2R_s}{Z_0 a \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} \left(2 \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2\right) \right),$$

$$\alpha_M = \frac{2R_s}{Z_0 a \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} \left(1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2 \right),$$

где

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{\chi} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{0,072}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,072}\right)^2}} = 0,0102 \text{ [м]},$$

это критическая длина волны для поля Н₁₁,

$$\lambda = \frac{c}{f},$$

длина волны в среде волновода, где с - скорость света.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120 \cdot \pi = 377 \text{ [Ом]},$$

волновое сопротивление среды и

$$R_s = \sqrt{\frac{w\mu_a}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{\pi f \mu_0}{\sigma}},$$

поверхностное сопротивление металла.

$$\alpha_M = \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot f \cdot 1,25 \cdot 10^{-6}}{2,62 \cdot 10^7}}}{377 \cdot 0,0072 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{3 \cdot 10^8}{0,0102 \cdot f}\right)^2}} \left(1 + \left(\frac{3 \cdot 10^8}{0,0102 \cdot f}\right)^2\right),$$

$$\alpha_M = \frac{2,85 \cdot 10^{-7} \cdot \sqrt{f}}{\sqrt{1 - \frac{8,41 \cdot 10^{20}}{f^2}}} \left(1 + \frac{8,41 \cdot 10^{20}}{f^2}\right).$$

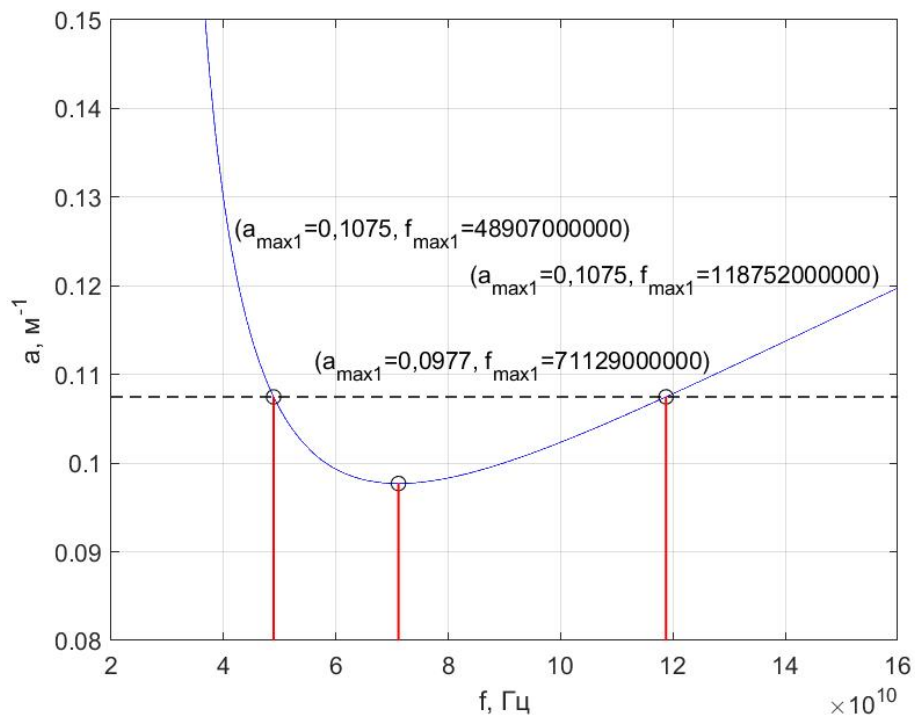


Рисунок 1 - график $a(f)$.