Электродинамика и распространение радиоволн

Лекция

Русов Юрий Сергеевич

2.7. Распространение электромагнитного поля в безграничных анизотропных средах

Ферромагнитная среда.

Рассмотрим распространение электромагнитного поля в однородной анизотропной среде. Примером такой среды является феррит, нашедший широкое применение в технике сверхвысоких частот. Химическая формула феррита MFe_2O_3, где M – двухвалентный металл (никель, марганец, магний, медь и др.). Феррит обладает малой проводимостью ($s = 10^{-4}\ldots10^{-6}$ См/м) и, следовательно, электромагнитная энергия распространяется в ферритовой среде без значительных потерь. Относительная диэлектрическая проницаемость феррита равна 10–20.

Ферромагнитная среда

Ферромагнитная среда изотропна, однако при наличии постоянного магнитного поля она становится анизотропной с магнитной проницаемостью, определяемой тензором второго ранга.

Если постоянное магнитное поле $\mathbf{H}_0$ направлено по оси x_3, то тензор относительной магнитной проницаемости

$$\left(\mu_{jk}\right)=\begin{pmatrix} \mu & -i\mu_{\alpha} & 0 \\ i\mu_{\alpha} & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}. \qquad (2.62)$$

Ферромагнитная среда

Ограничимся линейным приближением. Распространение электромагнитного поля описывается уравнениями Максвелла в символической форме

$$\mathrm{rot}_j\, \dot{H}_m = i\omega\varepsilon_a \dot{E}_{mj},$$

$$\mathrm{rot}_j\, \dot{E}_m = -i\,\omega\mu_0\mu_{jk}\dot{H}_{mk},$$

или в развернутом виде, с учетом (2.62), в проекциях на оси координат

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_2} - \frac{\partial \dot{H}_{m2}}{\partial x_3} = i\,\omega\varepsilon_a \dot{E}_{m1},\\
&\frac{\partial \dot{H}_{m1}}{\partial x_3} - \frac{\partial \dot{H}_{m3}}{\partial x_1} = i\,\omega\varepsilon_a \dot{E}_{m2},\\
&\frac{\partial \dot{H}_{m2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \dot{H}_{m1}}{\partial x_2} = i\,\omega\varepsilon_a \dot{E}_{m3},
\end{aligned}\right\} \qquad (2.63а)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \dot{E}_{m3}}{\partial x_2} - \frac{\partial \dot{E}_{m2}}{\partial x_3} = -i\,\omega(\mu_a \dot{H}_{m1} - i\,\mu_{\alpha a}\dot{H}_{m2}),\\
&\frac{\partial \dot{E}_{m1}}{\partial x_3} - \frac{\partial \dot{E}_{m3}}{\partial x_1} = -i\,\omega(i\,\mu_{\alpha a}\dot{H}_{m1} + \mu_a \dot{H}_{m2}),\\
&\frac{\partial \dot{E}_{m2}}{\partial x_1} - \frac{\partial \dot{E}_{m1}}{\partial x_2} = -i\,\omega\mu_{3a}\dot{H}_{m3}.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.63б)$$

Случай продольного подмагничивания. Пусть плоская электромагнитная волна распространяется в направлении, совпадающем с направлением приложенного постоянного магнитного поля

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{e}_3 H_0 ,$$

$$\dot{\mathbf{H}}_m = \mathbf{H}_m \, \mathrm{e}^{-i\,kx_3} ,$$

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{E}_m \, \mathrm{e}^{-i\,kx_3} . \tag{2.62}$$

Тогда $\dfrac{\partial}{\partial x_1} = \dfrac{\partial}{\partial x_2} = 0, \quad \dfrac{\partial}{\partial x_3} = -ik$

Ферромагнитная среда

Уравнения Максвелла (2.63а) и (2.63б) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} k\dot{H}_{m2} &= \omega\varepsilon_a \dot{E}_{m1}, \\ k\dot{H}_{m1} &= -\omega\varepsilon_a \dot{E}_{m2}, \\ \dot{E}_{m3} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2.64)$$

$$\left.\begin{aligned} k\dot{E}_{m2} &= -\omega(\mu_a \dot{H}_{m1} - i\mu_{\alpha a}\dot{H}_{m2}), \\ k\dot{E}_{m1} &= \omega(i\mu_{\alpha a}\dot{H}_{m1} + \mu_a \dot{H}_{m2}), \\ \dot{H}_{m3} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.65)$$

Ферромагнитная среда

Подставляем $\dot{E}_{m1}$ и $\dot{E}_{m2}$,

$$\left.\begin{aligned}(k^2-\omega^2\varepsilon_a\mu_a)\dot{H}_{m1}+i\omega^2\varepsilon_a\mu_{\alpha a}\dot{H}_{m2}=0,\\ i\omega^2\varepsilon_a\mu_{\alpha a}\dot{H}_{m1}-(k^2-\omega^2\varepsilon_a\mu_a)\dot{H}_{m2}=0.\end{aligned}\right\} \quad (2.66)$$

$$\begin{vmatrix} k^2-\omega^2\varepsilon_a\mu_a & i\omega^2\varepsilon_a\mu_{\alpha a} \\ i\omega^2\varepsilon_a\mu_{\alpha a} & -(k^2-\omega^2\varepsilon_a\mu_a) \end{vmatrix}=0.$$

$$(k^2-\omega^2\varepsilon_a\mu_a)^2=\omega^4\varepsilon_a^2\mu_{\alpha a}^2$$

$$k^2=\omega^2\varepsilon_a(\mu_a\pm\mu_{\alpha a}). \quad (2.67)$$

Ферромагнитная среда

Таким образом, коэффициент распространения k имеет два значения, т. е. в направлении x_3 могут распространяться две волны с разными постоянными распространения и разными составляющими поля.

$$\dot{H}_{m2} = \pm i \dot{H}_{m1},$$

$$\left.\begin{aligned} k^{+} &= \omega\sqrt{\varepsilon_a(\mu_a + \mu_{\alpha a})}, \\ k^{-} &= \omega\sqrt{\varepsilon_a(\mu_a - \mu_{\alpha a})} \end{aligned}\right\} \qquad (2.68)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{v}^{+} &= \frac{\omega}{k^{+}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a(\mu_a + \mu_{\alpha a})}}, \\ \mathrm{v}^{-} &= \frac{\omega}{k^{-}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a(\mu_a - \mu_{\alpha a})}}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.69)$$

Ферромагнитная среда

Из выражений (2.68) и (2.69) следует, что продольно-намагниченную ферритовую среду можно характеризовать эффективными параметрами:

$$\mu^{+}_{a\,\text{эф}} = \mu_a + \mu_{\alpha a}$$ — для волны правой круговой поляризации;

$$\mu^{-}_{a\,\text{эф}} = \mu_a - \mu_{\alpha a}$$ — для волны левой круговой поляризации.

Характеристическое сопротивление среды для каждой из этих волн также различно:

$$Z_0^{+} = \sqrt{\frac{\mu_a + \mu_{\alpha a}}{\varepsilon_a}}, \qquad Z_0^{-} = \sqrt{\frac{\mu_a - \mu_{\alpha a}}{\varepsilon_a}}. \qquad (2.70)$$

Ферромагнитная среда

Таким образом, плоская волна линейной поляризации, распространяющаяся вдоль направления постоянного магнитного поля, распадается на две волны круговой поляризации с одинаковыми амплитудами векторов напряженности магнитного поля. По мере распространения в феррите между этими волнами набегает фазовый сдвиг и вектор **H** суммарной линейно поляризованной волны непрерывно поворачивается.

Суперпозиция этих волн дает линейно поляризованную волну

$$\mathbf{H}^{-} = H_m(\mathbf{e}_1 - i\,\mathbf{e}_2)\,\mathrm{e}^{-ik^{-}x_3},$$

$$\mathbf{H}^{+} = H_m(\mathbf{e}_1 + i\,\mathbf{e}_2)\,\mathrm{e}^{-ik^{+}x_3}.$$

$$\dot{\mathbf{H}}_m = H_m[(\mathrm{e}^{-ik^{+}x_3} + \mathrm{e}^{-ik^{-}x_3})\mathbf{e}_1 + i(\mathrm{e}^{-ik^{+}x_3} - \mathrm{e}^{-ik^{-}x_3})\mathbf{e}_2]. \quad (2.71)$$

Ферромагнитная среда

Обозначим

$$k^0 = \frac{k^+ + k^-}{2},$$

$$k^+ = k^0 + a,$$

$$k^- = k^0 - a$$

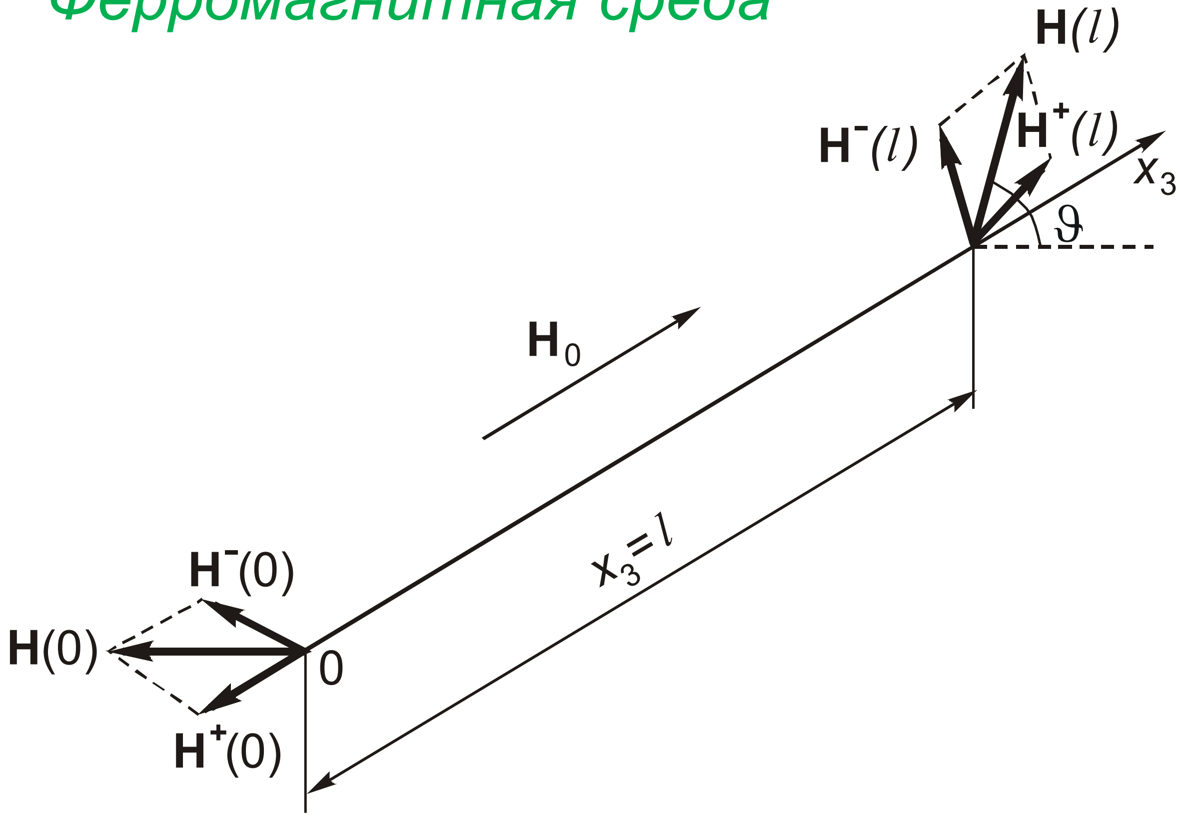
Преобразуем (2.71) по формуле Эйлера

$$\dot{\mathbf{H}}_m = H_m \,\mathrm{e}^{-i\,k^0 x_3}[(\mathrm{e}^{i\,ax_3} + \mathrm{e}^{-i\,ax_3})\mathbf{e}_1 - i\,(\mathrm{e}^{i\,ax_3} - \mathrm{e}^{-i\,ax_3})\mathbf{e}_2] =$$

$$= 2H_m \,\mathrm{e}^{-i\,k^0 x_3}(\mathbf{e}_1 \cos ax_3 + \mathbf{e}_2 \sin ax_3).$$

Ферромагнитная среда

Вращение плоскости поляризации



Угол поворота
$$\vartheta = \operatorname{arctg}\frac{H_{m2}}{H_{m1}} = a x_3 = \frac{k^+ - k^-}{2} x_3 =$$

(2.72)
$$= \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_a}\left(\sqrt{\mu_a + \mu_{\alpha a}} - \sqrt{\mu_a - \mu_{\alpha a}}\right) x_3}{2}.$$

Ферромагнитная среда

Так как характеристические сопротивления для волн круговой поляризации с различным направлением вращения различны, то амплитуды напряженности электрического поля отличаются.

$$E_m^+ \neq E_m^-$$

Две волны круговой поляризации с разными амплитудами дадут волну эллиптической поляризации.

Под углом поворота плоскости поляризации в этом случае подразумевается угол между большой осью эллипса и направлением поляризации исходной линейно поляризованной волны. Этот угол также можно определить по формуле (2.72).

Ферромагнитная среда

Вращение плоскости поляризации линейно поляризованной волны, распространяющейся в намагниченной ферритовой среде вдоль направления подмагничивающего постоянного поля $\mathbf{H}_0$, называется **эффектом Фарадея.** Среда, в которой этот эффект наблюдается, называется гиротропной (вращающей).

Свойством этого эффекта является **невзаимность**. Независимо от направления распространения, выбор k^+ или k^- для каждой из поляризованных по кругу волн связан с тем, в какую сторону вращается вектор поля, если смотреть по направлению постоянного подмагничивания. Поэтому волна, распространяющаяся в направлении постоянного поля будет поворачивать плоскость поляризации в ту же сторону, что и волна, распространяющаяся против направления постоянного поля.

Случай поперечного подмагничивания.

Пусть плоская волна распространяется в направлении x_1, перпендикулярном направлению постоянного поля $\mathbf{H}_0 = \mathbf{e}_3 H_0$. Полагая в уравнениях (2.63а) и (2.63б)

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} = -ik,$$

получим две независимые системы

$$\left.\begin{aligned} k\dot{H}_{m2} &= -\omega\varepsilon_a \dot{E}_{m3}, \\ \mu_a \dot{H}_{m1} &= i\mu_{\alpha a}\dot{H}_{m2}, \\ k\dot{E}_{m3} &= -\omega(i\mu_{\alpha a}\dot{H}_{m1} + \mu_a \dot{H}_{m2}), \end{aligned}\right\} \quad (2.73)$$

$$\left.\begin{aligned} k\dot{H}_{m3} &= \omega\varepsilon_a \dot{E}_{m2}, \\ k\dot{E}_{m2} &= \omega\mu_{3a}\dot{H}_{m3}. \end{aligned}\right\} \quad (2.74)$$

Ферромагнитная среда

Система (2.73) соответствует волне с продольной составляющей магнитного поля, электрический вектор которой совпадает с направлением подмагничивания. Составляющие H_{m1} и H_{m2} сдвинуты друг относительно друга по фазе на 90°, а их величины связаны отношением

$$\frac{H_{m1}}{H_{m2}} = \frac{\mu_{\alpha a}}{\mu_a},$$

Волна линейно поляризована по вектору **E** и эллиптически поляризована по **H**.

Ферромагнитная среда

Система имеет решение, отличное от нуля, если

$$\begin{vmatrix} \mu_a & -i\mu_{\alpha a} & 0 \\ i\omega\mu_{\alpha a} & \omega\mu_a & k \\ 0 & k & \omega\varepsilon_a \end{vmatrix} = 0$$

$$-\mu_a k^2 + \omega^2\mu_a^2\varepsilon_a - \omega^2\mu_{\alpha a}^2\varepsilon_a = 0.$$

$$k = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon_a(\mu_a^2 - \mu_{\alpha a}^2)}{\mu_a}}, \qquad v_\phi = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_a(\mu_a^2 - \mu_{\alpha a}^2)}{\mu_a}}}.$$

Ферромагнитная среда

Волна называется «***необыкновенной»***. Эта волна распространяется со скоростью, которой обладает обычная волна в среде с магнитной проницаемостью, равной

$$\mu_{a\ \text{эф}} = \frac{\mu_a^2 - \mu_{\alpha a}^2}{\mu_a}.$$

Характеристическое сопротивление для этой волны

$$Z_0 = \frac{E_{m3}}{H_{m2}} = \frac{k}{\omega\varepsilon_a} = \sqrt{\frac{\mu_a^2 - \mu_{\alpha a}^2}{\varepsilon_a \mu_a}} = \sqrt{\frac{\mu_{a\ \text{эф}}}{\varepsilon_\text{a}}}.$$

Ферромагнитная среда

Система (2.74) определяет плоскую волну с составляющими **E** и **H** в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, и вектором **E**, перпендикулярным направлению подмагничивания. Система имеет решение, не равное нулю, если

$$\begin{vmatrix} k & -\omega\varepsilon_a \\ \omega\mu_{за} & -k \end{vmatrix} = 0.$$

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon_a \mu_{за}}.$$

$$v_{ф} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_{за}}}, \qquad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_{за}}{\varepsilon_a}}.$$

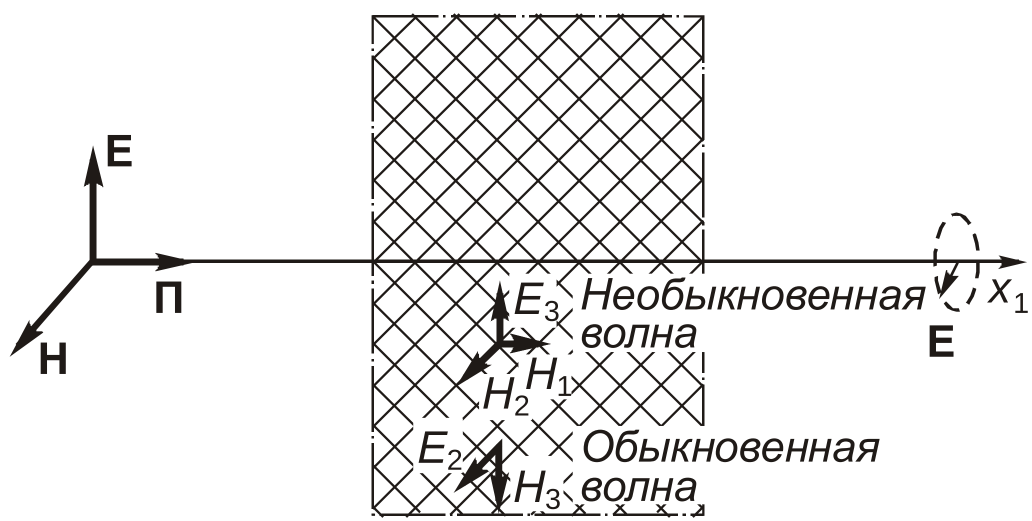
Ферромагнитная среда

При насыщении феррита $\mu_{3a} = \mu_0$, и характеристики волны и среды не зависят от постоянного магнитного поля. Волна ведет себя как плоская волна в изотропной среде. Такая волна называется «***обыкновенной***». Вектор Пойнтинга обыкновенной и необыкновенной волн не совпадает по направлению.

Ферромагнитная среда

Если в гиротропную среду в направлении, перпендикулярном намагничиванию, входит плоская волна произвольной линейной поляризации, то она разбивается на две — обыкновенную и необыкновенную, распространяющиеся с разными скоростями.

При выходе из гиротропной среды эти волны окажутся в разных фазах и образуют волну эллиптической поляризации. Явление это носит название **двойного лучепреломления.**



Плазма в постоянном магнитном поле.

В постоянном магнитном поле $\mathbf{H}_0 = \mathbf{e}_3 H_0$ плазма ведет себя как анизотропная среда, диэлектрическая проницаемость которой является эрмитовым тензором второго ранга.

Плотность электронного тока в плазме

$$\mathbf{J} = en\mathbf{v},$$

v — скорость движения электрона, определяемая без учета столкновений уравнением движения

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{m}(\mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}]).$$

Плазма в постоянном магнитном поле

В проекциях на оси декартовой системы координат для монохроматического поля

$$\left.\begin{aligned} i\omega\dot{\mathrm{v}}_1 &= \frac{e}{m}\dot{E}_1 + \frac{e\mu_0 H_0}{m}\dot{\mathrm{v}}_2, \\ i\omega\dot{\mathrm{v}}_2 &= \frac{e}{m}\dot{E}_2 - \frac{e\mu_0 H_0}{m}\dot{\mathrm{v}}_1, \\ i\omega\dot{\mathrm{v}}_3 &= \frac{e}{m}\dot{E}_3. \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\mathrm{v}}_1 &= \gamma\frac{i\,\omega\dot{E}_1 + \omega_H\dot{E}_2}{\omega_H^2 - \omega^2}, \\ \dot{\mathrm{v}}_2 &= \gamma\frac{-\omega_H\dot{E}_1 + i\,\omega\dot{E}_2}{\omega_H^2 - \omega^2}, \\ \dot{\mathrm{v}}_3 &= -i\frac{\gamma}{\omega}\dot{E}_3. \end{aligned}\right\}$$

$$\omega_{\text{н}} = \frac{e}{m}\mu_0 H_0 = \mu_0\gamma H_0,$$

Плазма в постоянном магнитном поле

Подставим значения компонент скорости в первое уравнение Максвелла в символической форме

$$\mathrm{rot}\,\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}} + i\,\omega\varepsilon_0\dot{\mathbf{E}},$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{rot}_1\dot{\mathbf{H}} &= \varepsilon_0\omega_{\text{р}}^2\frac{i\omega\dot{E}_1 + \omega_H\dot{E}_2}{\omega_H^2 - \omega^2} + i\omega\varepsilon_0\dot{E}_1,\\
\mathrm{rot}_2\,\dot{\mathbf{H}} &= -\varepsilon_0\omega_{\text{р}}^2\frac{\omega_H\dot{E}_1 - i\omega\dot{E}_2}{\omega_H^2 - \omega^2} + i\omega\varepsilon_0\dot{E}_2,\\
\mathrm{rot}_3\,\dot{\mathbf{H}} &= -i\varepsilon_0\frac{\omega_{\text{р}}^2}{\omega}\dot{E}_3 + i\omega\varepsilon_0\dot{E}_3,
\end{aligned}\right\} \qquad (2.75)$$

$\omega_{\text{р}}$ – собственная частота плазмы

Приводим уравнения (2.75) к виду

$$\mathrm{rot}_j\,\mathbf{H} = i\,\omega\varepsilon_0\varepsilon_{jk}\dot{E}_k\,,$$

$$\left(\varepsilon_{jk}\right) = \begin{pmatrix} \varepsilon & -i\varepsilon_\alpha & 0 \\ i\varepsilon_\alpha & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon = 1 + \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega_H^2 - \omega^2}, \qquad \varepsilon_\alpha = \frac{\omega_\mathrm{p}^2\omega_H}{\omega(\omega_H^2 - \omega^2)}, \qquad \varepsilon_3 = 1 - \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}.$$

Плазма в постоянном магнитном поле

При наличии магнитного поля плазма является гиротропной средой.

При распространении электромагнитной волны в продольном поле подмагничивания наблюдается вращение плоскости поляризации (эффект Фарадея), в поперечном — двойное лучепреломление.