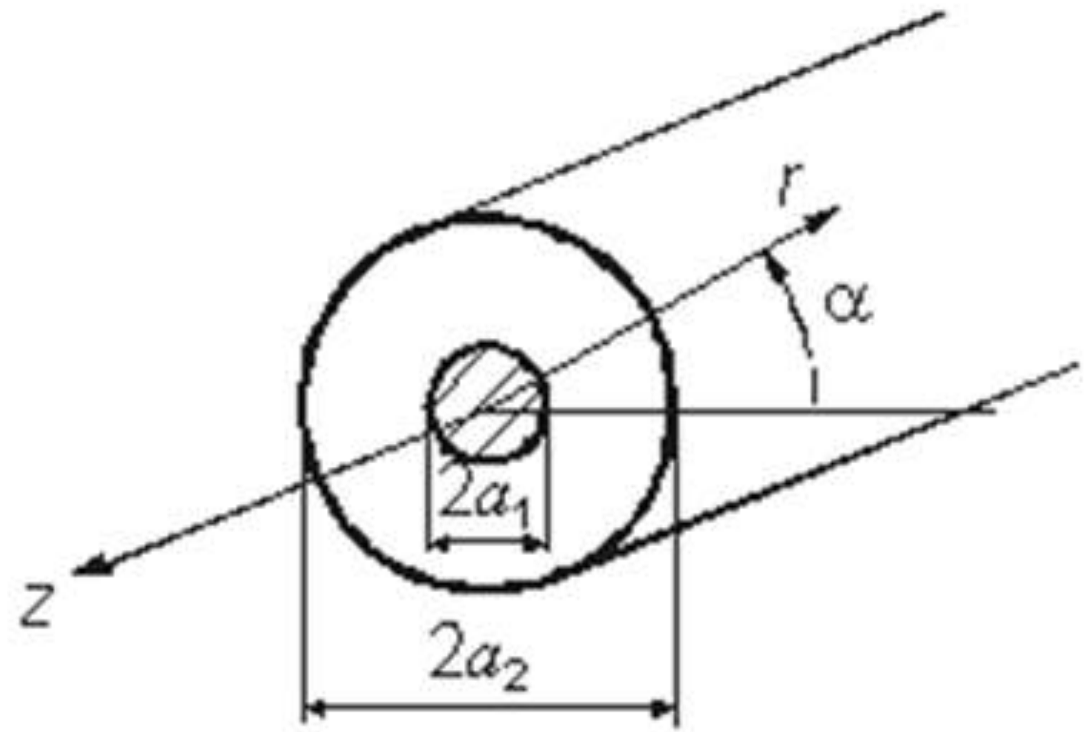
Электродинамика
и распространение радиоволн

Лекция 12
06.05-08.05.2020

Русов Юрий Сергеевич

4.7 Коаксиальный волновод (кабель)



Коаксиальный кабель состоит из центральной цилиндрической жилы и изолированной от нее коаксиальной оболочки. В коаксиальном кабеле могут распространяться H_{nm}-, E_{nm}-, и T-волны.

Коаксиальный волновод. H_{nm}-волны

Волновое уравнение для z-компоненты

$$\Delta \dot{H}_{mz} + k^2 \dot{H}_{mz} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \dot{H}_{mz}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_{mz}}{\partial z^2} + k^2 \dot{H}_{mz} = 0. \qquad (4.40)$$

Решение уравнения можно представить в виде

$$\dot{H}_{mz} = \dot{H}_{mz}(r, \alpha)\mathrm{e}^{-i\,k_0 z}. \qquad (4.41)$$

Коаксиальный волновод. H_{nm}-волны

Подставляя (4.41) в (4.40), получим

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H_{mz}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \dot{H}_{mz}}{\partial \alpha^2}+\chi^2\dot{H}_{mz}=0$$

(4.42)

Применим метод Фурье — метод разделения переменных.

$$\dot{H}_{mz}=R(r)\Phi(\alpha)\mathrm{e}^{-i\,k_0 z}=R\Phi\,\mathrm{e}^{-i\,k_0 z}$$

(4.43)

Коаксиальный волновод. H_{nm}-волны

Подставляя (4.43) в (4.42) и поделив все на выражение (4.43), получим

$$\frac{1}{Rr}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}=-\chi^2. \qquad (4.44)$$

Фиксируя переменную *r*, а α считая переменной, видим, что так как величина χ постоянная, то слагаемое

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}$$

также постоянное. Поле имеет периодическую зависимость и при изменении α на 2π не изменяется.

Коаксиальный волновод. H_{nm}-волны

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\alpha^2} = -n^2, \qquad (4.45)$$

где n — целое число.

Решение этого уравнения имеет вид

$$\Phi = A\cos n\alpha + B\sin n\alpha = \left.\begin{matrix}\cos n\alpha \\ \sin n\alpha\end{matrix}\right\}. \qquad (4.46)$$

Коаксиальный волновод. H_{nm}-волны

Учитывая (4.45) в (4.44), получим

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{Rr}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}-\frac{n^2}{r^2}+\chi^2=0.$$

Поделив на χ^2 и обозначив χr через x, получим

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)=0$$

— уравнение Бесселя

Коаксиальный волновод. H_{nm}-волны

Решение уравнения

$$R = CJ_n(x) + DN_n(x). \qquad (4.47)$$

Здесь функция Неймана $N_n(x)$ учитывается в решении, так как точка x=0, соответствующая r=0, исключается внутренней жилой.

С учетом (4.46) и (4.47) в (4.43) получается выражение для H_{mz}. Остальные составляющие находим из уравнений Максвелла.

Коаксиальный волновод. H_{nm}-волны

$$\dot{H}_{mz} = [CJ_n(\chi r) + DN_n(\chi r)] \begin{matrix} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{matrix} \mathrm{e}^{-i k_0 z},$$

$$\dot{H}_{mr} = -\frac{ik_0}{\chi}[CJ'_n(\chi r) + DN'_n(\chi r)] \begin{matrix} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{matrix} \mathrm{e}^{-i k_0 z},$$

$$\dot{H}_{m\alpha} = -\frac{ink_0}{\chi^2 r}[CJ_n(\chi r) + DN_n(\chi r)] \begin{matrix} -\sin n\alpha \\ \cos n\alpha \end{matrix} \mathrm{e}^{-i k_0 z},$$

$$\dot{E}_{mr} = -\frac{i\omega\mu_a n}{\chi^2 r}[CJ_n(\chi r) + DN_n(\chi r)] \begin{matrix} -\sin n\alpha \\ \cos n\alpha \end{matrix} \mathrm{e}^{-i k_0 z},$$

$$\dot{E}_{m\alpha} = \frac{i\omega\mu_a}{\chi}[CJ'_n(\chi r) + DN'_n(\chi r)] \begin{matrix} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{matrix} \mathrm{e}^{-i k_0 z}. \qquad (4.48)$$

Коаксиальный волновод. H_{nm}-волны

Поперечное волновое число χ определим из граничных условий. Согласно граничным условиям

$$E_\tau = 0,$$

т. е. $E_{m\alpha} = 0$ при $r = a_1$ и $r = a_2$,

что соответствует системе уравнений

$$CJ_n'(\chi a_1) + DN_n'(\chi a_1) = 0,$$

$$CJ_n'(\chi a_2) + DN_n'(\chi a_2) = 0,$$

или

$$\frac{N_n'(\chi a_1)}{J_n'(\chi a_1)} = \frac{N_n'(\chi a_2)}{J_n'(\chi a_2)}.$$

Коаксиальный волновод. H_{nm}-волны

Корни трансцендентного уравнения

$$N_n'(\chi a_1) J_n'(\chi a_2) -$$

$$- N_n'(\chi a_2) J_n'(\chi a_1) = 0$$

определяют поперечные волновые числа χ, зависящие от геометрии волновода (a_1 и a_2) и типа волны (значений n и m).

Коаксиальный волновод. E_{nm}-волны

Структура поля E_{nm} определяется аналогично.

$$\dot{E}_{mz} = [CJ_n(\chi r) + DN_n(\chi r)] \begin{matrix} \cos n\alpha \\ \sin n\alpha \end{matrix} \mathrm{e}^{-i k_0 z}$$

Поперечные волновые числа определяются из трансцендентного уравнения

$$N_n(\chi a_1) J_n(\chi a_2) - N_n(\chi a_2) J_n(\chi a_1) = 0$$

Коаксиальный волновод. E_{nm}-волны

Критическая длина волны

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi}{\chi}$$

отличается для E_{nm}- и H_{nm}-волн.

Коаксиальный волновод. Т-волна

Основной волной в коаксиальном волноводе является Т-волна. При работе на этой волне размеры коаксиального волновода минимальны.

Постоянная распространения Т-волны

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$$

равна постоянной распространения в неограниченном пространстве. Поле эквивалентно полю между двумя параллельными плоскостями, свернутыми в цилиндр. При этом

$$E_z = H_z = E_\alpha = H_r = 0.$$

Коаксиальный волновод. Т-волна

Проекция волнового уравнения на ось *r*

$$\Delta\dot{E}_{mr} - \frac{\dot{E}_{mr}}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\dot{E}_{m\alpha}}{\partial\alpha} + k^2\dot{E}_{mr} = 0$$

будет содержать одну составляющую $\dot{E}_{mr}$,
так как $\dot{E}_{m\alpha} = 0,$ т. е.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\dot{E}_{mr}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\dot{E}_{mr}}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\dot{E}_{mr}}{\partial z^2} -$$

$$-\frac{\dot{E}_{mr}}{r^2} + k^2\dot{E}_{mr} = 0 \qquad (4.49)$$

Коаксиальный волновод. Т-волна

Решение будет иметь вид

$$\dot{E}_{mr} = R(r)\,\mathrm{e}^{-i\,kz}\,. \qquad (4.50)$$

Подставляя (4.50) в (4.49) и поделив на (4.50) с учетом того, что

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = -k^2,$$

получаем

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{rR}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{r^2} = 0. \qquad (4.51)$$

Коаксиальный волновод. Т-волна

Уравнение решаем подстановкой

$$r = \mathrm{e}^{t},\ \mathrm{d}r = \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}r.$$

Первая производная

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = \mathrm{e}^{-t}\,\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}.$$

Вторая производная

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\mathrm{e}^{-t}\,\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right) = \mathrm{e}^{-t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-t}\,\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right) = \mathrm{e}^{-t}\left(\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right).$$

Коаксиальный волновод. Т-волна

Подставляя эти значения в (4.51), получим

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}t^2} - R = 0 \qquad (4.52)$$

— дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Решение уравнения имеет вид

$$R = A\,\mathrm{e}^{t} + B\,\mathrm{e}^{-t} = Ar + \frac{B}{r},$$

но физический смысл имеет лишь второе слагаемое, так как с увеличением *r* электрическое поле уменьшается.

Коаксиальный волновод. Т-волна

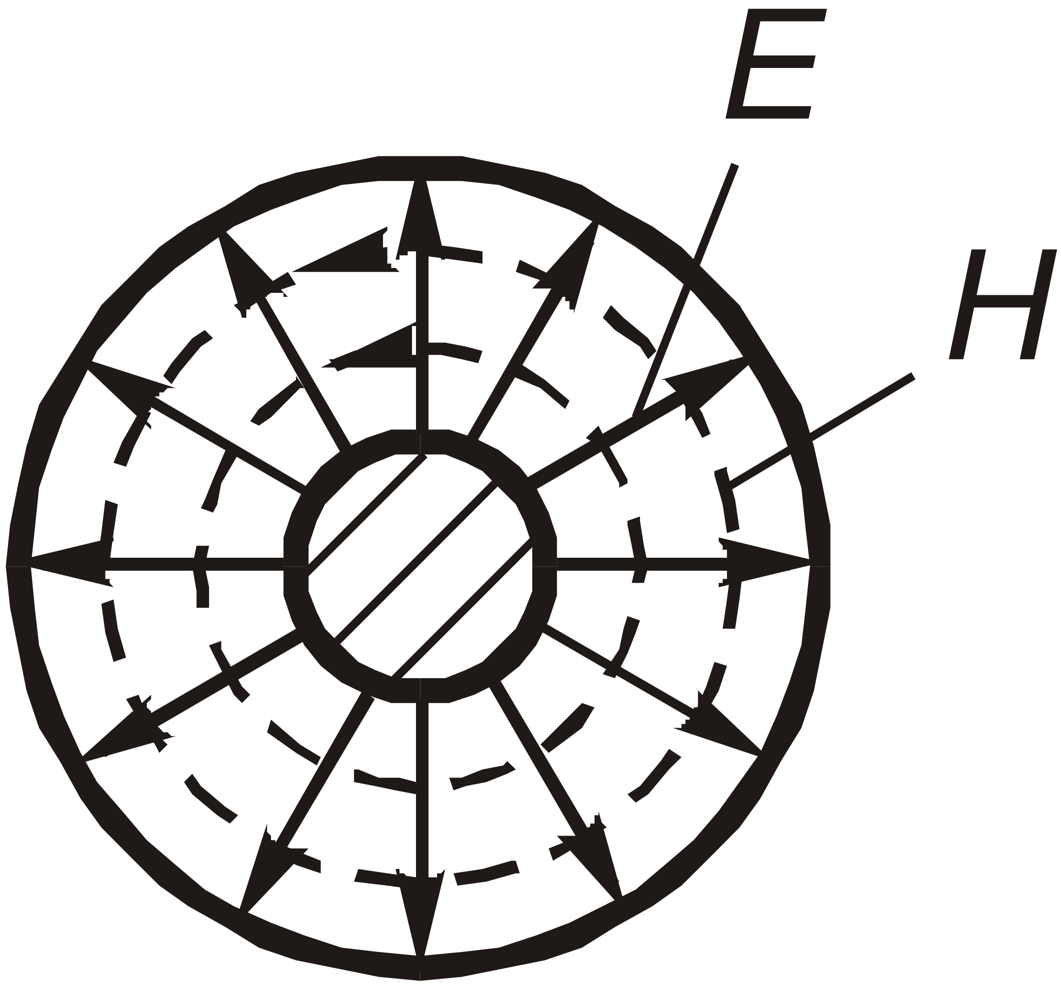
Окончательно

$$\left.\begin{aligned} \dot{E}_{mr} &= \frac{E_m}{r} \mathrm{e}^{-i\,kz}, \\ \dot{H}_{m\alpha} &= \frac{E_m}{Z_c r} \mathrm{e}^{-i\,kz}, \end{aligned}\right\} \qquad (4.53)$$

$$Z_c = \sqrt{\mu_a / \varepsilon_a}\,.$$

Коаксиальный волновод. Т-волна

Структура поля Т-волны в коаксиальном волноводе



Коаксиальный волновод. Т-волна

Обычный коаксиальный кабель характеризуют интегральными величинами — током и напряжением.

Ток, текущий по кабелю, определяется выражением

$$\dot{I} = \oint_L \dot{\mathbf{J}}_{пов}\, \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \frac{E_m}{a_1 Z_c} \mathrm{e}^{-i\,kz}\, a_1\, \mathrm{d}\alpha = \frac{2\pi}{Z_c} E_m\, \mathrm{e}^{-i\,kz}$$

Напряжение между цилиндрическими проводниками коаксиальной линии

$$\dot{U} = \int_{a_1}^{a_2} \dot{E}_{mr}\, \mathrm{d}r = E_m \ln\frac{a_2}{a_1} \mathrm{e}^{-i\,kz},$$

Коаксиальный волновод. Т-волна

Волновое сопротивление коаксиальной линии (Волновым сопротивлением называют отношение напряжения к току в линии в режиме бегущей волны. Волновое сопротивление обычно определяется для линий с Т-волной.)

$$Z_{\text{в}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Z_c}{2\pi} \ln \frac{a_2}{a_1}.$$

Если среда, заполняющая волновод, не обладает потерями, то фазовая и групповая скорости Т-волны не зависят от частоты

$$\text{v}_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}}, \qquad \text{v}_{\text{гр}} = \text{v}_{\phi},$$

т. е. дисперсии нет. Коаксиальная линия передачи с Т-волной применяется в диапазоне частот от постоянного тока до 10 ГГц и выше.

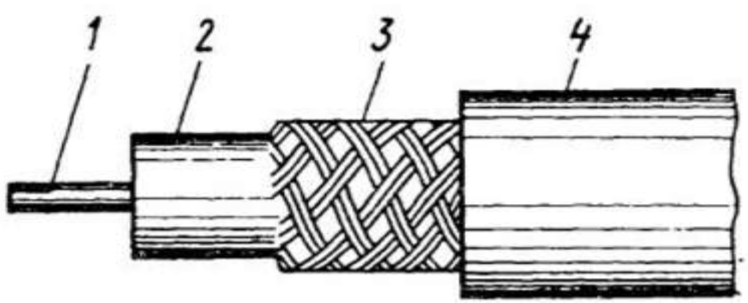
Коаксиальный волновод. Т-волна

Мощность, переносимая Т-волной в коаксиальном волноводе

$$P = \frac{U^2}{2Z_\text{в}} = \frac{U^2}{120}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{1}{\ln\frac{a_2}{a_1}}.$$

Коаксиальный кабель

Коаксиальные волноводы часто выполняют в виде гибких кабелей. Для обеспечения гибкости в качестве диэлектрика применяют полимерные материалы, такие как полиэтилен, фторопласт и др. Для этой же цели внешний проводник коаксиального кабеля выполняют из тонкой фольги или в виде оплетки из большого числа тонких проводников.



1 – центральный проводник,
2 – диэлектрик,
3 – оплетка,
4 – наружное защитное покрытие

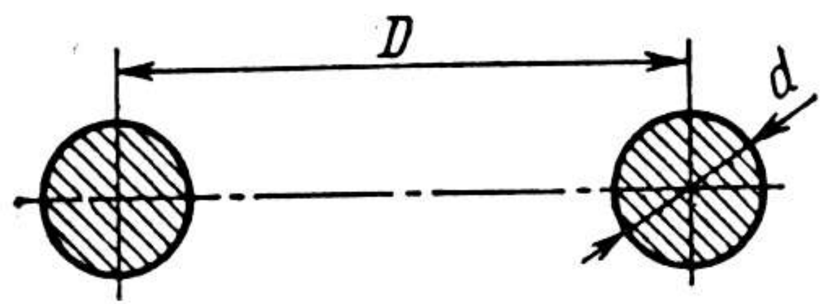
Коаксиальный кабель

Чаще используют коаксиальные линии передач с волновым сопротивлением 50 и 75 Ом. Стандартизация волновых сопротивлений упрощает создание унифицированных узлов радиоэлектронной аппаратуры.

4.8 Двухпроводная линия

Двухпроводная линия образована системой из двух параллельных проводников, окруженных однородным веществом с параметрами ε_a и μ_a. Применяется на гектометровых и метровых волнах для подключения антенн к приемным и передающим устройствам.

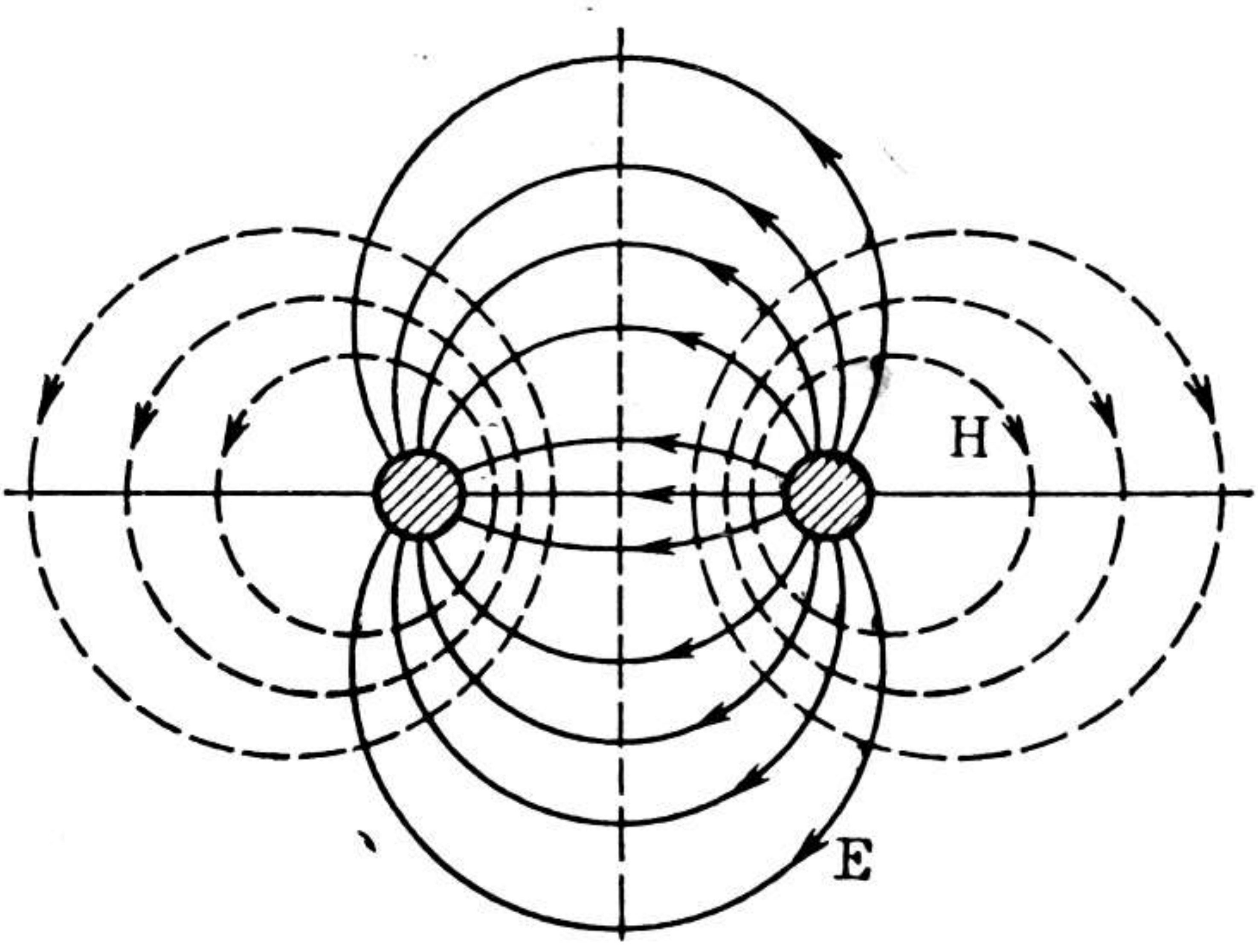
Основной тип волны: Т-волна.



Критическая длина для Т-волны $\lambda_{кр} = \infty$

Двухпроводная линия

Распределение силовых линий электромагнитного поля для Т-волны в двухпроводной линии



Двухпроводная линия

Комплексные амплитуды тока и напряжения в линии

$$\dot{I} = Ie^{-ikz},$$
$$\dot{U} = Ue^{-ikz}.$$

Погонные параметры двухпроводной линии (индуктивность и емкость отрезка линии длиной 1 м)

$$L_1 \approx \frac{\mu_a}{\pi}\ln\left(\frac{2D-d}{d}\right), \frac{\text{Гн}}{\text{м}},$$
$$C_1 \approx \pi\varepsilon_a \frac{1}{\ln\left(\frac{2D-d}{d}\right)}, \frac{\Phi}{\text{м}}.$$

Волновое сопротивление

$$Z_{\text{в}} \approx 120\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ln\left(\frac{2D-d}{d}\right), \text{Ом}.$$

Двухпроводная линия

Мощность, переносимая волной типа Т в двухпроводной линии передачи

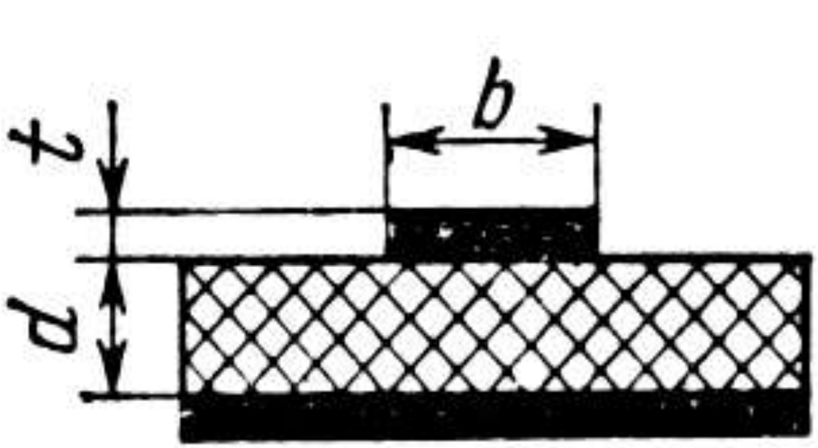
$$P = \frac{U^2}{2Z_{\text{в}}} = \frac{U^2}{240}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{1}{\ln\left(\frac{2D-d}{d}\right)}, \text{Вт}.$$

4.9 Полосковые и микрополосковые линии

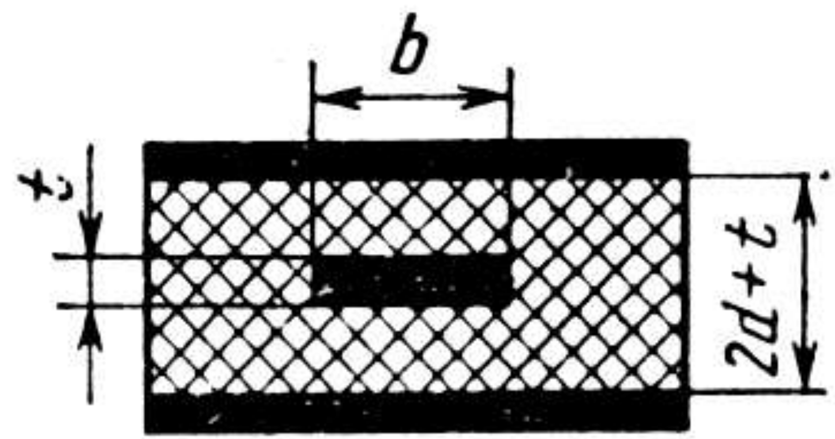
В технике СВЧ широко применяют линии передачи, называемые полосковыми линиями. В этих линиях проводники представляют собой тонкие полоски металла, между которыми расположена подложка из диэлектрика с малыми потерями.

Несимметричные полосковые волноводы для сантиметрового и миллиметрового диапазонов волн называют микрополосковыми линиями.

Несимметричная



Симметричная



Полосковые и микрополосковые линии

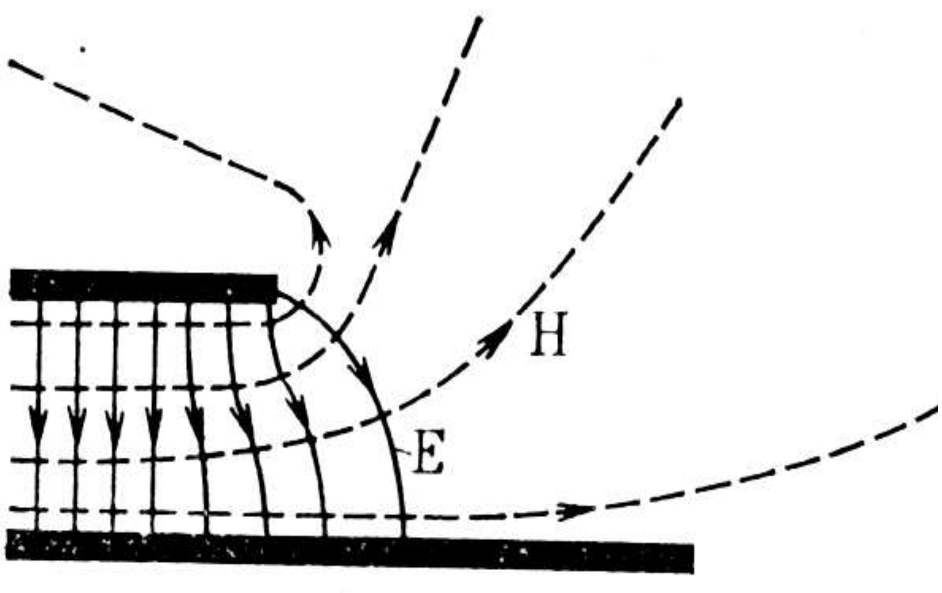
Строгий электродинамический анализ полей в несимметричном полосковом волноводе является сложной задачей и проводится численными методами. Это связано с тем, что параметры заполняющей среды неоднородны по сечению. Как следствие, векторы электромагнитного поля **E** и **H** имеют все шесть декартовых проекций и, строго говоря, волн Т-типа здесь не существует. Однако на практике обычно применяют волноводы, у которых толщина подложки *d* намного меньше ширины проводника *b*. Поэтому электрическое поле в поперечном сечении волновода распределено так же, как в плоском конденсаторе. Достаточно высокое значение относительной диэлектрической проницаемости подложки снижает роль краевых эффектов, так что поле во внутренней области оказывается близким к однородному.

Полосковые и микрополосковые линии

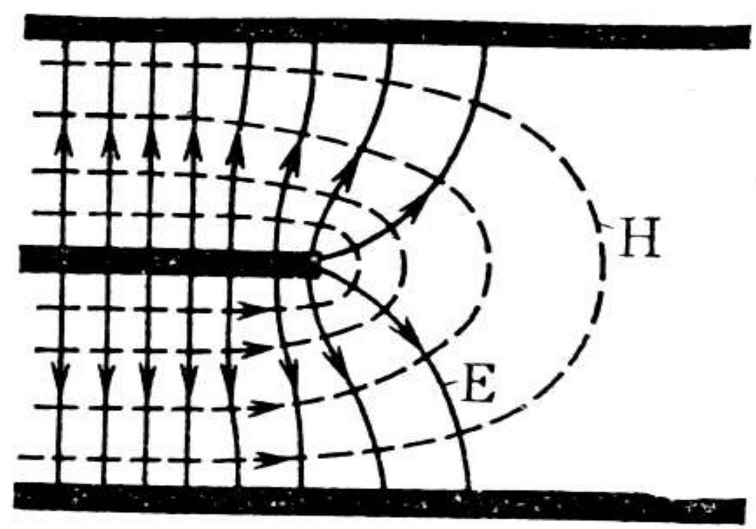
При $d/b \ll 1$ и $\varepsilon \gg 1$ можно обоснованно пренебречь малыми продольными проекциями векторов **E** и **H**. Низший тип волны в таком микрополосковом волноводе, имеющий нулевую критическую частоту, называют квази-Т-волной.

Распределение поля в поперечном сечении линии:

несимметричной



симметричной



Волновое сопротивление несимметричной полосковой линии с учетом толщины проводника определяется формулами

$$Z_{\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{314}{1+\frac{b}{d}}\left(1-\frac{t}{d}\right),\ \text{при}\ \frac{b}{d} < 2,$$

$$Z_{\text{в}} = 314\,\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\frac{1}{1+\frac{b}{d}\left(\frac{1}{1-\frac{t}{d}}\right)},\ \text{при}\ \frac{b}{d} > 2.$$

Волновое сопротивление для симметричной полосковой линии с учетом толщины проводника можно рассчитать по формулам

$$Z_{\text{в}} = 216\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\left(1-\frac{t}{d}\right)}{\left(1-\frac{b}{d}\right)}, \text{при } \frac{b}{d} < 2,$$

$$Z_{\text{в}} = 216\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{1}{1+\frac{b}{d}\left(\frac{1}{1-\frac{t}{d}}\right)}, \text{при } \frac{b}{d} > 2.$$

Потери в линиях с волной типа T

Коэффициент ослабления за счет потерь в металлических стенках для волны типа T в коаксиальной линии

$$\alpha_{\text{м}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\ \frac{\dfrac{R_{s1}}{2a_1} + \dfrac{R_{s2}}{2a_2}}{120\pi\ \ln\dfrac{a_2}{a_1}}\ ,$$

где R_{s1} и R_{s2} – поверхностные сопротивления металла внутреннего и внешнего проводников соответственно.

Потери в линиях с волной типа Т

Коэффициент ослабления за счет потерь в металлических стенках для волны типа Т в двухпроводной линии

$$\alpha_{\text{м}} = \frac{R_S}{\pi d Z_{\text{в}} \sqrt{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2}}.$$

Потери в линиях с волной типа Т

Коэффициент ослабления, обусловленный потерями в металлических пластинах симметричной полосковой линии при $t/d < 0{,}3$ и $b/d > 1$

$$\alpha_{\text{м}} = \frac{R_s}{120\pi d}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{7 - 50\dfrac{t}{d} + \dfrac{b}{d}}{3{,}2\left(0{,}1 + \dfrac{t}{d}\right)\left(4 + \dfrac{b}{d}\right)}.$$

R_s – поверхностное сопротивление металла.

Потери в линиях с волной типа Т

Коэффициент ослабления волны типа Т за счет потерь в диэлектрике в рассмотренных линиях определяется соотношением

$$\alpha_{д} = \frac{1}{2}\omega\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}\, tg\delta_{э}\,.$$

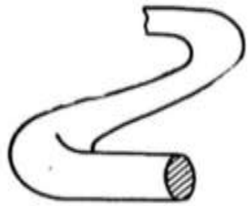
Поверхностные волны и замедляющие структуры

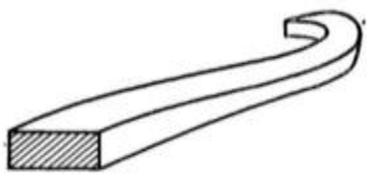
В электронике СВЧ часто требуются волноводные системы, в которых фазовая скорость направляемой волны была бы уравнена со скоростью пучка электронов. В этом случае фазовая скорость меньше скорости света. Волноводные системы, удовлетворяющие этому условию, носят название замедляющих структур. Степень замедления характеризуют коэффициентом замедления волны

$$K_{\text{зам}} = \frac{v_{\text{ф}}}{c}\ .$$

Диэлектрический волновод

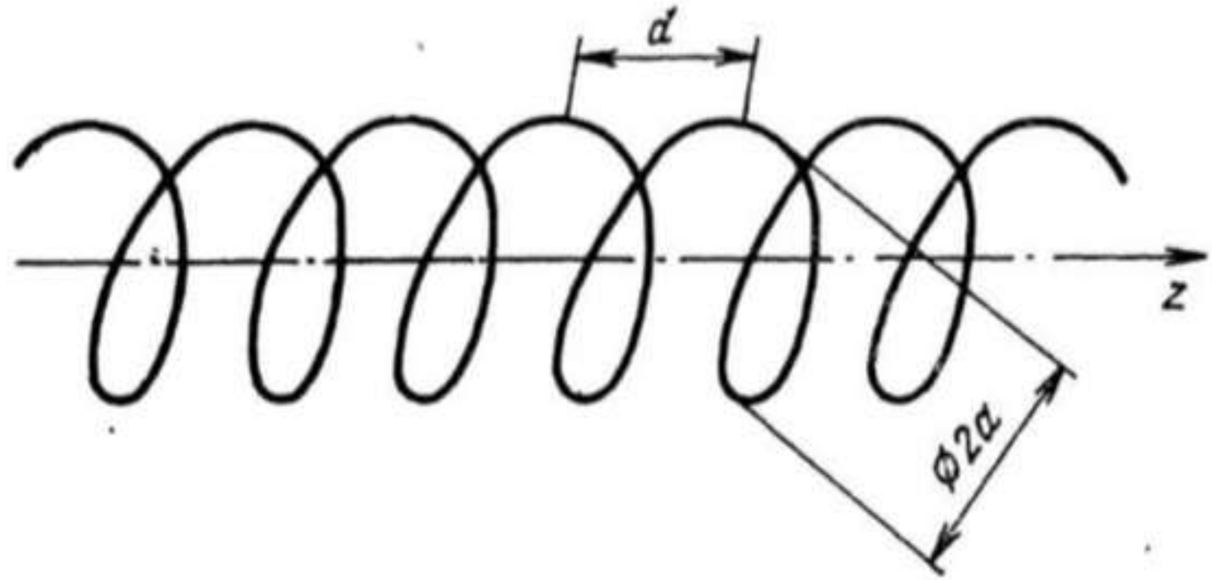
Диэлектрический волновод представляет собой стержень круглого или прямоугольного сечения, изготовленный из диэлектрика с малыми потерями. Такая линия передачи может применяться на волнах миллиметрового диапазона. Важное свойство такого волновода – его механическая гибкость. Следует учитывать, что при изгибах часть электромагнитной энергии неизбежно излучается в пространство. Диэлектрический волновод является основой диэлектрических стержневых антенн. В таких волноводах распространяются гибридные волны типов HE или EH, имеющие продольные составляющие векторов как электрического, так и магнитного полей. Эффект замедления волны достигается за счет применения диэлектрика с $\varepsilon > 1$.





Спиральный волновод

Такая система представляет собой достаточно тонкий проводник, навитый на цилиндр радиуса *a* по винтовой линии с шагом *d*



Вдоль проводника распространяется волна тока, причем скорость этой волны близка к скорости распространения в вакууме. Поскольку путь тока вдоль провода значительно превышает проекцию этого пути на ось волновода, фактическая скорость распространения колебаний вдоль оси волновода уменьшается по сравнению со скоростью распространения в вакууме.

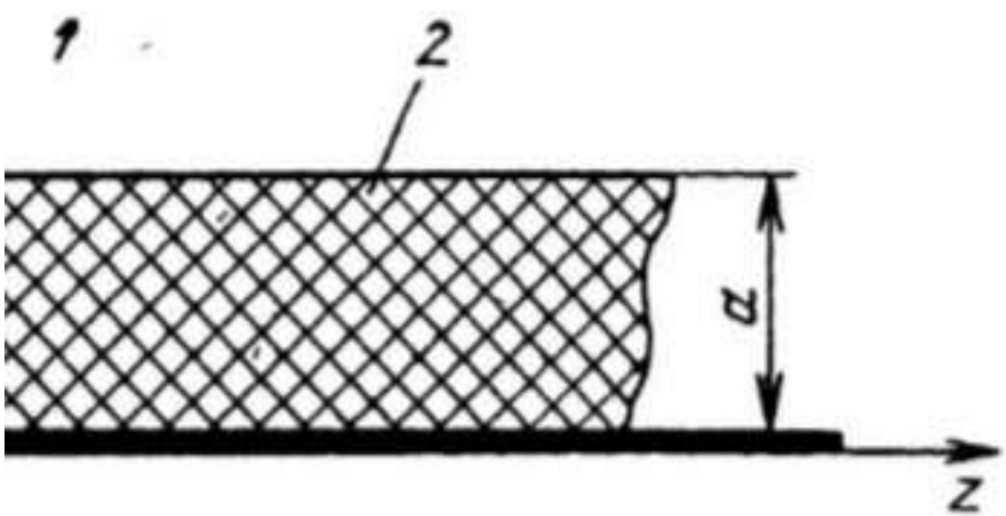
Спиральный волновод

В первом приближении фазовая скорость замедленной волны в спиральном волноводе определяется лишь геометрией спирали и не зависит от частоты. Это свойство объясняет высокую широкополосность лампы бегущей волны (ЛБВ), используемой в качестве усилителя СВЧ колебаний. Работа ЛБВ основана на том, что часть кинетической энергии пучка электронов может быть передана электромагнитной волне, распространяющейся вдоль спирального волновода при условии синхронизма между волной и электронным потоком.

Диэлектрическая пластина над идеально проводящей плоскостью

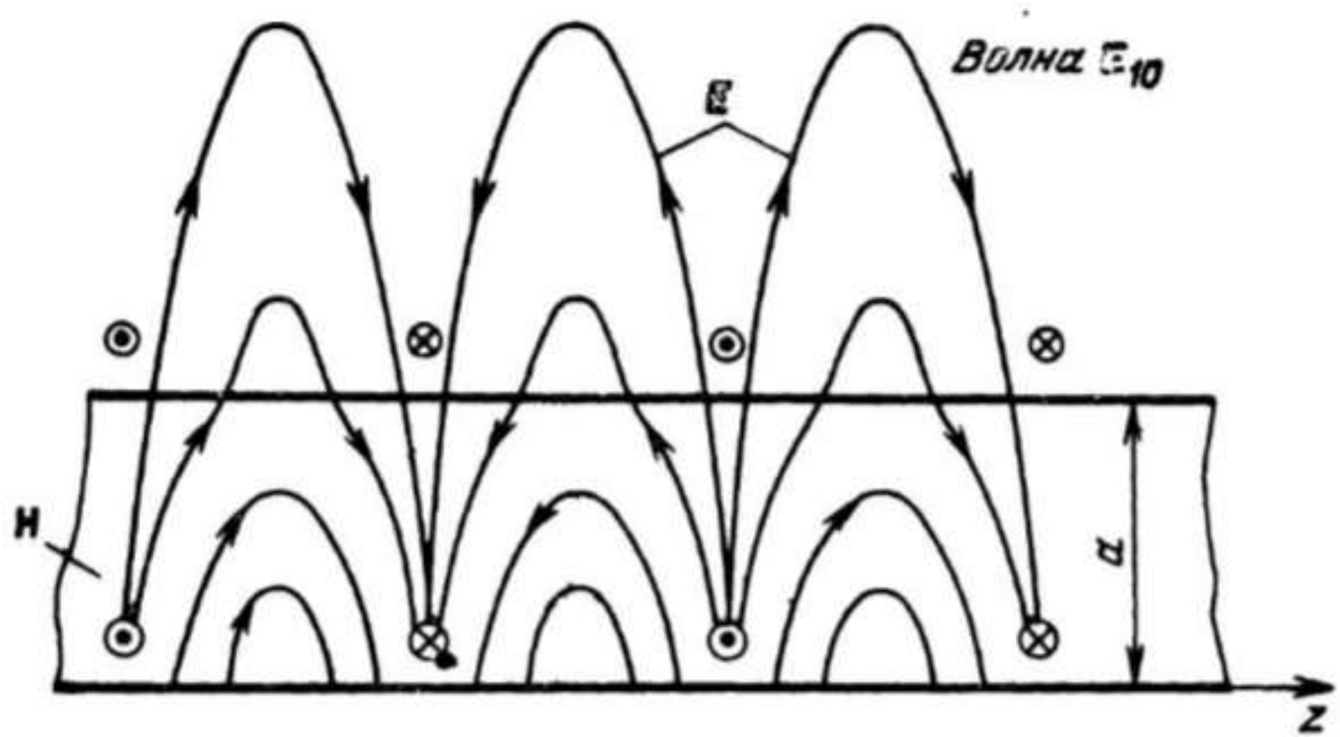
Подобная система может играть роль волновода замедленных волн.

Решение уравнения Гельмгольца для такой системы показывает, что в ней распространяется замедленная волна, которая одновременно является поверхностной волной в том смысле, что при более интенсивном замедлении ($K_{зам}$ падает) поле становится более прижатым к направляющей поверхности диэлектрика.



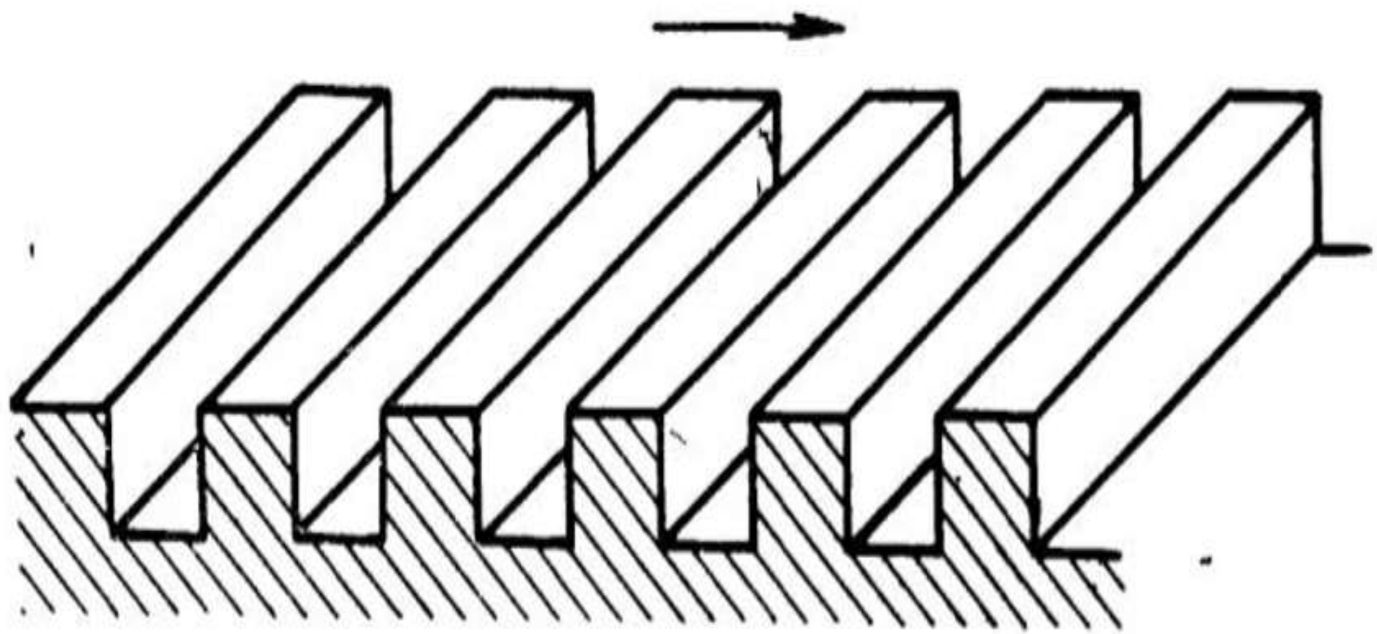
Диэлектрическая пластина над идеально проводящей плоскостью

Низшим типом колебаний данной замедляющей структуры является волна типа E_{10}. Этот тип колебаний существует при сколь угодно низких частотах. Структура поля этой волны



Гребенчатая замедляющая структура

Такая структура представляет собой металлическую поверхность с прямоугольными канавками, глубина которых не более четверти длины волны в свободном пространстве.



Гребенчатая замедляющая структура

Фазовая скорость замедляется тогда, когда электромагнитные волны распространяются в направлении, перпендикулярном канавкам. Физическая природа замедления, осуществляемого периодическими структурами, заключается в следующем. Каждый отдельный период структуры может рассматриваться как колебательная система, обладающая конечным временем установления колебаний. В случае гребенчатого волновода такой колебательной системой служит отдельная канавка, которая может рассматриваться как закороченный на конце отрезок длинной линии с волной типа Т. Для достижения установившейся амплитуды колебаний требуется конечный отрезок времени, тем больший, чем ближе размеры системы к резонансным, т.е. чем ближе глубина канавки к $\lambda/4$.

Гребенчатая замедляющая структура

Интересной модификацией гребенчатой замедляющей структуры является диафрагмированный волновод, представляющий собой круглую металлическую трубу, внутри которой с одинаковым шагом расположены металлические диафрагмы. Подобную систему можно рассматривать как гребенчатую структуру, свернутую в кольцо по направлению канавок.