Положительный заряд *q* равномерно распределен по объему шара радиуса *a*. Определить напряженность электрического поля, электрическую индукцию и скалярный потенциал внутри и вне шара. Диэлектрическая проницаемость материала *εa1*, окружающей среды *εa2*. Построить зависимости *E(r), D(r), □(r),* указать характерные особенности графиков и причину их появления. Провести проверку граничных условий на границе раздела сред. Исходные данные: *a*[мм] = M+2N; *q*[Кл] = 0,05·N; *εa* = *ε0*□*εr*; *εr1* = 2+N/10; *εr2* = 1.

- **КОНСТАНТЫ**

```
E0 = 8.85e-12
```

```
E0 = 8.8500e-12
```

- **ДАНО**

```
M = 5; N = 12;
Ea1 = E0 * (2 + N/10)
```

```
Ea1 = 2.8320e-11
```

```
Ea2 = E0
```

```
Ea2 = 8.8500e-12
```

```
a = (M + 2*N)*1e-3 % R
```

```
a = 0.0290
```

```
q = 0.05 * N
```

```
q = 0.6000
```

```
Ea = E0 * Ea1
```

```
Ea = 2.5063e-22
```

- **НАЙТИ**

$\varphi = ?$
$D = ?$
$E = ?$

- **РЕШЕНИЕ**

Для начала введем новую переменную R - радиус сферы, так чтобы R = a. Так как у нас есть две разные среды, то для начала обозначим *k* в зависимости от r,

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0} \text{ при } r > R, k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0} \text{ при } r < R.$$

Дальше в решении будем учитывать просто k, который припостроении графиков надо будет учесть, по зависимости, которая обозначена выше. Найдем для начала напряженность электрического поля и скалярный потенциал внутри и вне шара. Применим теорему Гаусса. Выберем в качестве замкнутый шар радиуса r > R (рис.). Очевидно, что напряженность наповерхности этого шара будет одинакова по величине и направлена по радиусу. Тогда поток напряженности через него будет

$$E 4\pi r^2.$$

Согласно теореме Гаусса

$$E 4\pi r^2 = 4\pi k q,$$

откуда следует

$$E(r) = k\frac{q}{r^2}.$$

Чтобы найти напряженность электрического поля внутри шара, выберем вкачестве замкнутой поверхности сферу радиуса r < R с центром в центре шара.Из симметрии ясно, что напряженность поля направлена по радиусу иодинакова по величине на всей поверхности сферы. Из теоремы Гаусса следует

$$E(r) 4\pi r^2 = 4\pi k q(r),$$

где q(r) – заряд внутри выбранной поверхности. Введем плотность заряда шара ρ. Тогда

$$q(r) = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ и } E(r) = k\frac{q(r)}{r^2} = \frac{4}{3}k\rho\pi r.$$

Плотность заряда равна полному заряду, деленному на объем шара

$$\rho = \frac{3q}{4\pi R^3}\ .$$

Для напряженности поля внутри шара получим

$$E = k\frac{q}{R^3} r.$$

И так подведем итог по напряженность электрического поля внутри и вне шара

$$E = k\frac{q}{r^2} \text{ при } r > R, E = k\frac{q}{R^3} r \text{ при } r < R.$$

Теперь найдем электрическую индукцию

$$D = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0 E + \kappa \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 (1+\kappa) E = \varepsilon_0 \varepsilon E$$

Тогда

$$D = \varepsilon_0 E \text{ при } r > R, D = \varepsilon_0 \varepsilon E \text{ при } r < R.$$

Осталось определить только потенциал внутри и вне шара. Потенциал и напряженность связаны следующим соотношением

$$E = -grad\, \varphi.$$

В сферической системе координат составляющие

E_θ и E_φ равны нулю, тогда $E = E_r = -\frac{\partial}{\partial r}\varphi \Longrightarrow \int \partial\varphi = \int E_r \partial r.$

Тогда для начала найдем потенциал вне шара при r > R выразится в виде

$$\varphi(r) = -\int E = k\frac{q}{r^2}\partial r = k\frac{q}{r} + C_1,$$

Определим C1

$$r \Longrightarrow \infty, \varphi \Longrightarrow 0, \text{тогда } kq\frac{1}{\infty} = 0 \Longrightarrow C_1 = 0.$$

Теперь найдем потенциал внутри шара r < R

$$\varphi(r) = -\int k\frac{qr}{R^3}\partial r = -k\frac{qr^2}{R^3} + C_2,$$

Определим C2, но для начала уточним k1 и k2

$$k_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2\varepsilon_0} \text{ при } r > R, k_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0} \text{ при } r < R.$$

$$r \Longrightarrow R, \text{тогда } -k_1\frac{qR^2}{R^3} + C_2 = -k_1\frac{q}{R} + C_2 = k_2\frac{q}{R} \Longrightarrow C_1 = \frac{q}{R}(k_2 + k_1) = 1,279 \cdot 10^{11}.$$

И так подведем итог по потенциалу внутри и вне шара

$$\varphi(r) = k\frac{q}{r} \text{ при } r > R,\ \varphi(r) = -k\frac{qr^2}{R^3} + 1,279 \cdot 10^{11} \text{ при } r < R.$$

```
k1 = 1/(4*pi*Ea1)
```

```
k1 = 2.8099e+09
```

```
k2 = 1/(4*pi*Ea2)
```

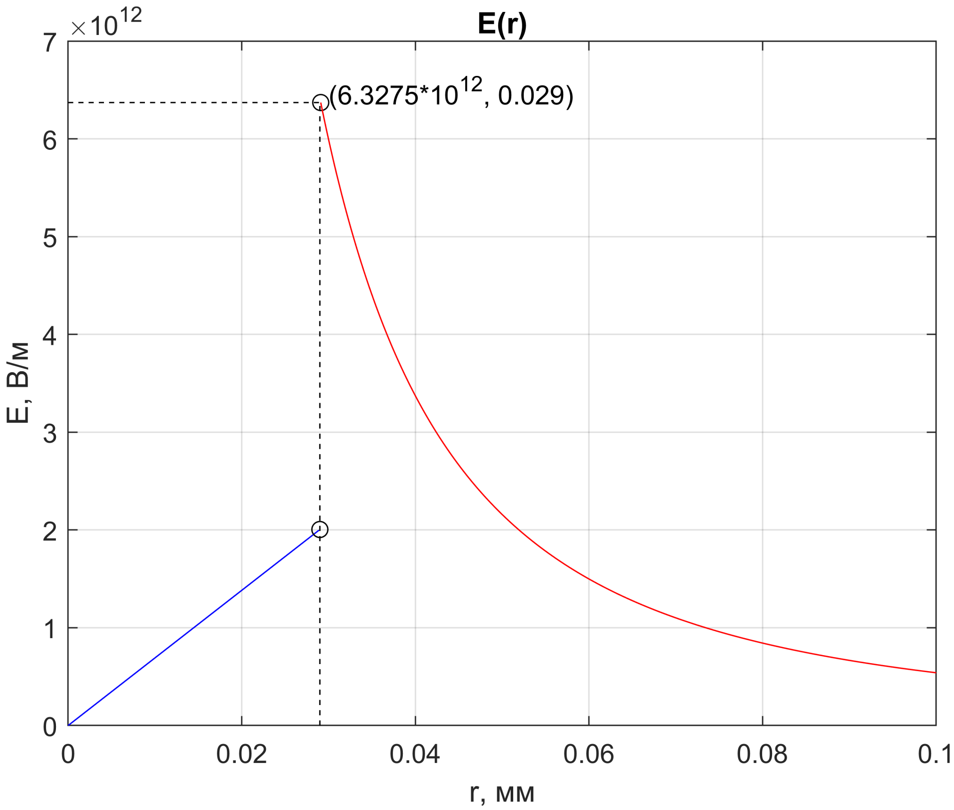
```
k2 = 8.9918e+09
```

```
C2 = (q/a)*(k2 + k1)
```

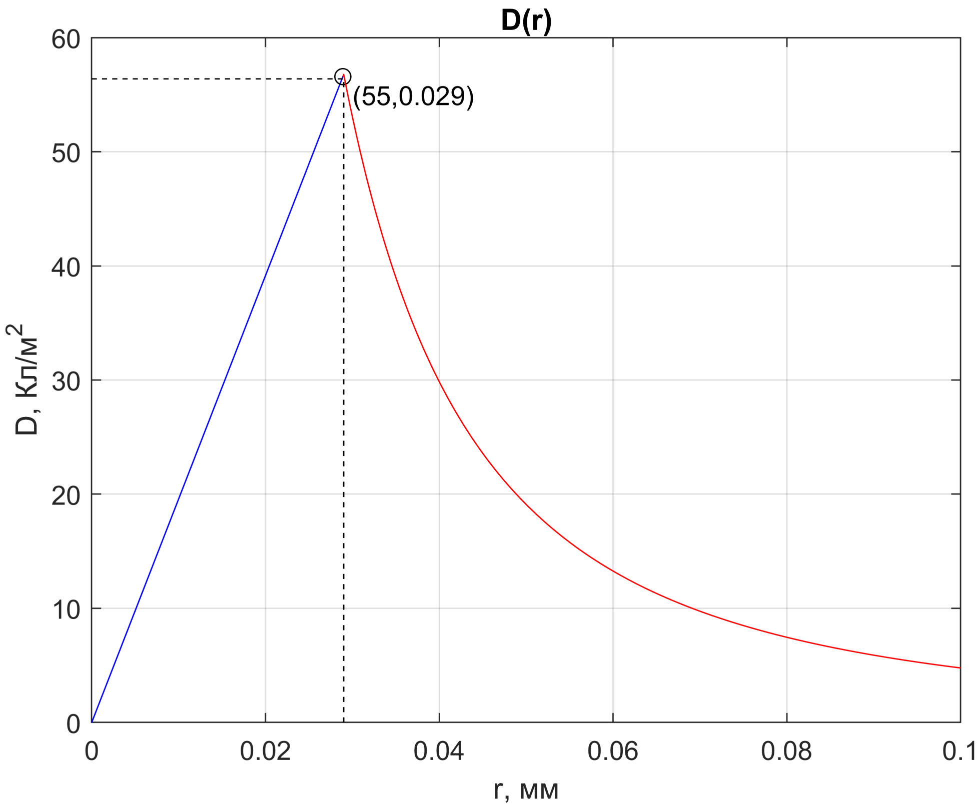
```
C2 = 2.4417e+11
```

```
cla reset;

[E, r] = E_graph(Ea1, Ea2, q, a, 1);
% plot(r, E, "Color","blue");
E_contrl = find(r<a);
plot(r(E_contrl), E(E_contrl), 'blue', r(291:292), E(291:292), ['o', 'black'], r(292:end), E(29
xlabel("r, мм");
ylabel("E, В/м");
title("E(r)");
hold on;
plot([a a], [0 E(292)], '--', 'Color', 'black');
plot([0 a], [E(292) E(292)], '--', 'Color', 'black');
```

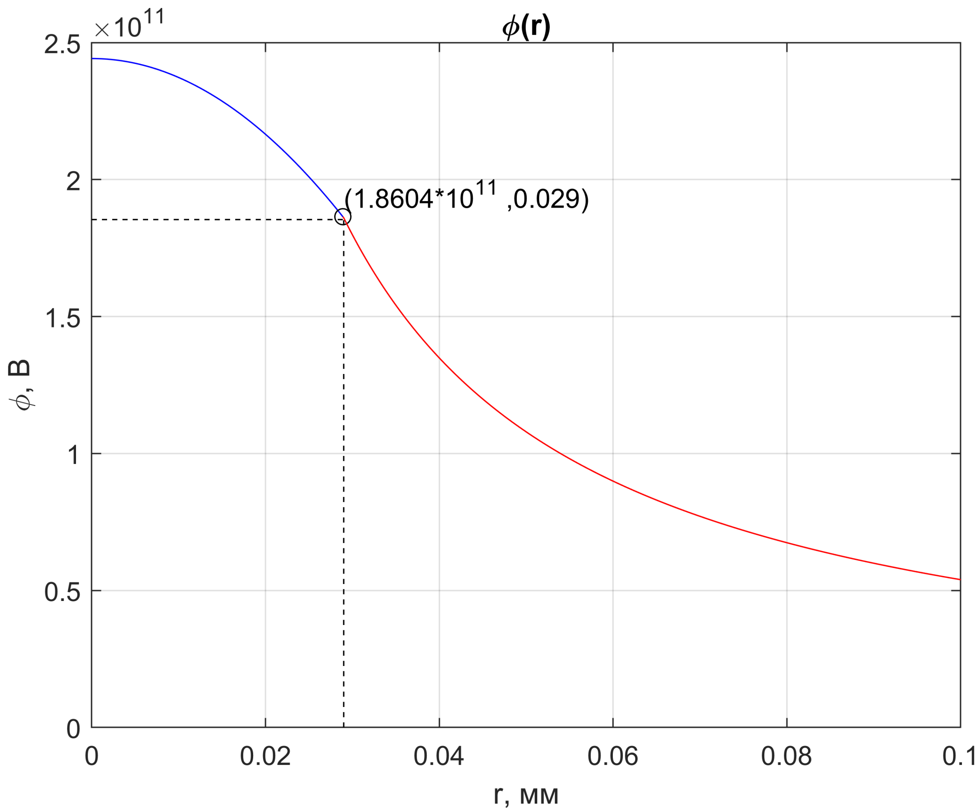
```
hold off;
grid on;
% При смене варианта за // строку ниже, заначения надо индивидуально
% подставлять
text(0.03, 6.5e12, ['(6.3275*10^{12}, ', num2str(a), ')'], 'Color','black');
```




```
% saveas(gcf, "E_gr_true.png")

[D, r] = D_graph(Ea1, Ea2, q, a, 1);
% plot(r, D, 'Color','blue');
D_contrl = find(r<a);
plot(r(D_contrl), D(D_contrl), 'blue', r(D_contrl(end)), D(D_contrl(end)), ['o', 'black'], r(D_
hold on;
plot([a a], [0 D(292)], '--', 'Color', 'black');
plot([0 a], [D(292) D(292)], '--', 'Color', 'black');
hold off;
xlabel("r, мм");
ylabel("D, Кл/м^2");
title("D(r)");
% При смене варианта за // строку ниже, заначения надо индивидуально
% подставлять
text(0.03, 55,['(55,', num2str(a),')'], 'Color','black');
grid on;
```




```
% saveas(gcf, "D_gr_true.png")

[Phi, r] = phi_graph(Ea1, Ea2, q, a, 1);
% plot(r, Phi, "Color","blue");
Phi_contrl = find(r<a);
plot(r(Phi_contrl), Phi(Phi_contrl), 'blue', r(Phi_contrl(end)), Phi(Phi_contrl(end)), ['o', 'b
hold on;
plot([0 a], [Phi(292) Phi(292)], '--', "Color", "black");
plot([a a], [0 Phi(292)], '--', "Color", "black");
hold off;
xlabel("r, мм");
ylabel("\phi, В");
title("\phi(r)");
% При смене варианта за // строку ниже, заначения надо индивидуально
% подставлять
text(a, 1.95e+11,['(1.8604*10^{11} ,', num2str(a), ')'], 'Color','black');
grid on;
```




```
% saveas(gcf, "Phi_gr_true.png")
```

$E = k\frac{q}{r^2}$ при r > R, $E = k\frac{q}{R^3}r$ при r < R

```
function [E, r] = E_graph(Ea1, Ea2, q, a, n)
    r = linspace(0, 0.1, 1001);
    E = zeros(1, 1001);
    k1 = 1/(4*pi*Ea1);
    k2 = 1/(4*pi*Ea2);
    for v = 0.0:0.0001:0.1
        if v <= a
            E(n) = (k1*q*v)/(a^3);
            n = n + 1;
        else
            E(n) = (k2*q)/(v^2);
            n = n + 1;
        end
    end
end
```

$D = \varepsilon_0 E$ при r > R, $D = \varepsilon_0 \varepsilon E$ при r < R

```
function [D, r] = D_graph(Ea1, Ea2, q, a, n)
    [E, r] = E_graph(Ea1, Ea2, q, a, 1);
    D = zeros(1, 1001);
    for v = 0.0:0.0001:0.1
```

```
        if v <= a
            D(n) = Ea1*E(n);
            n = n + 1;
        else
            D(n) = Ea2*E(n);
            n = n + 1;
        end
    end
end
```

$\varphi(r) = k\frac{q}{r}$ при $r > R$, $\varphi(r) = -k\frac{qr^2}{R^3} + 1,279 \cdot 10^{11}$ при $r < R$.

```
function [Phi, r] = phi_graph(Ea1, Ea2, q, a, n)
    r = linspace(0, 0.1, 1001);
    Phi = zeros(1, 1001);
    k1 = 1/(4*pi*Ea1);
    k2 = 1/(4*pi*Ea2);
    Po = (k1*q)/(a^3);
    C2 = (q/a)*(k2 + k1);
    for v = 0.0:0.0001:0.1
        if v <= a
            Phi(n) =  -Po*(v^2)  + C2;
            n = n + 1;
        else
            Phi(n) = (k2*q)/v;
            n = n + 1;
        end
    end
end
```