Электродинамика
и распространение радиоволн

Лекции

Русов Юрий Сергеевич

1 ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И СРЕДЫ

1.1 Характеристики электромагнитного поля

В физике принято разграничивать окружающие нас объекты материального мира на два больших самостоятельных класса, один из которых называется веществом, а другой – полем. Вещество в отличие от поля обладает инертной массой в обычном механическом смысле этого понятия. Движение макроскопических объектов, состоящих из вещества, описывается известными законами механики.

Рассматривая поле как вид материи, можно выделить известные науке электромагнитное и гравитационное поля, а также специфические виды внутриатомных полей.

Предметом электродинамики является изучение электромагнитного поля, проявляющего себя посредством сил, действующих на частицы вещества, обладающие электрическим зарядом. Экспериментально обнаружена дискретная структура зарядов. Величины любых зарядов, встречающихся в природе, кратны заряду электрона, равному приблизительно $1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Характеристики электромагнитного поля

Всю совокупность электромагнитных явлений принято разделять на две группы: электрические и магнитные явления. Выделяют две частные разновидности электромагнитного поля, носящие название электрического и магнитного полей. Электрическое поле характеризуется силовым взаимодействием как с неподвижными, так и с движущимися зарядами, причем в результате этого взаимодействия изменяется кинетическая энергия движущейся заряженной частицы. Магнитное поле характеризуется силовым взаимодействием лишь с движущимися зарядами, причем кинетическая энергия заряженных тел остается при этом постоянной.

Характеристики электромагнитного поля

Электромагнитное поле характеризуется векторами электрической напряженности **E** и индукции **D**, магнитной напряженности **H** и индукции **B**. В общем случае нестационарного и неоднородного поля эти векторы являются не только функциями координат, но и времени.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x_i, t), \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}(x_i, t), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(x_i, t), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(x_i, t).$$

Единица измерения напряженности электрического поля, согласно международной системе — вольт на метр (В/м), электрической индукции — кулон на квадратный метр (Кл/м^2), напряженности магнитного поля — ампер на метр (А/м), магнитной индукции — тесла (Тл).

Характеристики электромагнитного поля

Векторы **E** и **B** однозначно определяются силовым воздействием поля на пробный заряд $q_п$ (точечный малый заряд, не изменяющий исследуемое поле). На пробный заряд $q_п$, помещенный в какой-либо точке пространства и движущийся со скоростью v, действует сила Лоренца (Н), равная

$$\mathbf{F} = q_п\mathbf{E} + q_п[\mathbf{vB}].$$

Отсюда вектор напряженности электрического поля **E** определяется как сила, действующая на неподвижный (**v** = 0) единичный заряд

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_п}.$$

Вектор индукции **B** определяется добавочной силой

$$\mathbf{F}_{д} = q_{п}[\mathbf{vB}].$$

Магнитная часть силы Лоренца действует перпендикулярно к траектории частицы и поэтому действительно не может изменить ее кинетической энергии. Под действием этой силы заряд движется по окружности постоянного радиуса в плоскости, перпендикулярной вектору **B**.

Характеристики электромагнитного поля

Электромагнитное поле наглядно можно представить с помощью силовых линий. Линии, в любой точке которых направление вектора **E** совпадает с касательной, называют электрическими силовыми линиями. Линии, в любой точке которых направление вектора **B** совпадает с касательной, называют силовыми линиями магнитной индукции. Силовые линии характеризуют не только направление, но и величину поля, так как число силовых линий на единицу площади, перпендикулярной силовым линиям, пропорционально напряженностям поля. Условимся электрические силовые линии представлять в виде сплошных линий, а магнитные — пунктирных.

Характеристики электромагнитного поля

Электромагнитное поле можно характеризовать так называемыми электромагнитными потенциалами — векторным потенциалом **A** и скалярным φ. Эти величины связаны с векторами **E** и **B** следующим образом:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad (1.1)$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \qquad (1.2)$$

т. е. электрическое поле создается зарядами и изменением во времени магнитного поля; поле магнитной индукции имеет соленоидальный характер.

1.2 Характеристики среды

Среда, в которой происходят электрические и связанные с ними магнитные явления, характеризуется диэлектрической проницаемостью, магнитной проницаемостью и проводимостью.

Связь векторов **D** и **E**, **B** и **H** определяется свойствами среды. В вакууме

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H},$$

где

$\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi} 10^{-9} \left(\dfrac{\text{Ф}}{\text{м}}\right)$ — электрическая постоянная;

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \left(\dfrac{\text{Гн}}{\text{м}}\right)$ — магнитная постоянная.

Характеристики среды

В зависимости от значения удельной проводимости среды делятся на

проводники $\geq 10^4$ См/м (сименс на метр),

полупроводники $10^{-10} < \sigma < 10^4$ См/м,

диэлектрики $\sigma < 10^{-10}$ См/м.

Во многих задачах электродинамики удобно реальные проводник и диэлектрик заменять идеальными проводником ($\sigma = \infty$) и диэлектриком ($\sigma = 0$).

Характеристики среды

Проводники характеризуются наличием свободных зарядов, которые могут свободно перемещаться под действием электрического поля, при этом создается ток проводимости. В металлических проводниках это электроны, в жидких электролитах — ионы.

Плотность тока свободных зарядов **J** (А/м^2) зависит от напряженности **E** и **H**. Если влиянием магнитного поля можно пренебречь, то плотность тока можно определить по выражению

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}.$$

Если проводимость σ не зависит от напряженности электромагнитного поля, то приведенное соотношение выражает закон Ома в дифференциальной форме.

Характеристики среды

Как показывает опыт, электрические токи в проводящей среде могут быть вызваны не только электрическим полем, но и другими причинами неэлектрического происхождения, например, в случае разности температур — токи термического происхождения. В этом случае

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ст}}),$$

$\mathbf{E}^{\text{ст}}$ — напряженность поля сторонних ЭДС, имеющих неэлектрическое происхождение, которое также вызывает ток проводимости. Если проводимость σ не зависит от напряженности поля, то приведенное соотношение выражает обобщенный закон Ома в дифференциальной форме.

Характеристики среды

В общем случае проводимость σ зависит от напряженности электромагнитного поля

$$\sigma = \sigma(\mathbf{E}, \mathbf{H}).$$

Характеристики среды

Диэлектрики характеризуются наличием связанных зарядов, входящих в состав нейтральных молекул диэлектриков. Под действием электрического поля происходит смещение ядра атома, обладающего положительным зарядом, и искажение орбит отрицательных электронов. При этом центр тяжести отрицательных зарядов уже не совпадает с положительным зарядом ядра. Такая система эквивалентна диполю.

Электрическим диполем называется система двух одинаковых по величине, но разных по знаку зарядов $+q$ и $-q$, расположенных на некотором расстоянии l. Электрический диполь характеризуется электрическим моментом

$$\mathbf{p}_{э} = q\mathbf{l}. \qquad (1.3)$$

Характеристики среды

Дипольный момент направлен от заряда $-q$ к заряду $+q$.

Под действием внешнего электрического поля связанные заряды смещаются и диэлектрик поляризуется. Эта поляризация называется индуцированной и характеризуется вектором поляризации **P (Кл / м кв.).**

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}. \qquad (1.4)$$

С другой стороны, поляризацию можно определить как электрический момент единицы объема, т. е.

$$\mathbf{P} = \lim \frac{\Delta \mathbf{p}_э}{\Delta V} = \sum_{i=1}^{n} q_i \mathbf{l}_i, \qquad (1.5)$$

где $\Delta\mathbf{p}_э$ — вектор электрического момента объема ΔV, n — число диполей в единице объема.
Если рассматривать связь зарядов в диполе как упругую, то

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_э \mathbf{E}, \qquad (1.6)$$

$\chi_э$ — безразмерный коэффициент, называемый электрической восприимчивостью.

Характеристики среды

Подставляя выражение (1.6) в (1.4), получим

$$\mathbf{D} = (1 + \chi_э)\varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon_a \mathbf{E},$$

где ε_a — коэффициент пропорциональности (Ф/м), называемый абсолютной диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon_a = \varepsilon\varepsilon_0 .$$

Здесь ε — относительная диэлектрическая проницаемость.

Характеристики среды

Линейная зависимость вектора поляризации **P** от напряженности электрического поля определяется величиной поля. При достаточно больших полях электрическая восприимчивость и диэлектрическая проницаемость зависят от напряженности электрического поля

$$\chi_э = \chi_э(E), \quad \varepsilon_a = \varepsilon_a(E).$$

Характеристики среды

Индуцированная поляризация состоит из электронной, ионной и ориентационной составляющих. Первая обусловлена смещением электронов относительно ядра в пределах атома, вторая — взаимным смещением отрицательных и положительных ионов кристаллической решетки. Ориентационная поляризация имеет место в диэлектрике, молекулы которого обладают собственным электрическим моментом с хаотической ориентацией их в отсутствие внешнего электрического поля. Такие молекулы называются полярными. Под действием внешнего поля **E** молекулы ориентируются в соответствующем направлении. Примером полярных молекул могут служить молекулы воды, аммиака. В качестве примера неполярного диэлектрика можно назвать полиэтилен.

Характеристики среды

В электрическом поле процессы смещения электронов, ионов и ориентация молекул происходят не мгновенно, а требуют некоторого времени. Время, в течение которого достигается равновесное состояние 1/е (37%) всех частиц, называется временем релаксации.

Очевидно, чем меньше масса частиц, тем меньше время релаксации; наименьшее время релаксации у электронов. Если период изменения электрического поля сравним или меньше времени релаксации ориентационного, ионного или электронного механизма поляризации, то соответствующий механизм перестает действовать.

Характеристики среды

С увеличением частоты поля перестают действовать сначала ориентационный, затем ионный и, наконец, электронный механизмы. Поэтому вектор поляризации **P**, а, следовательно, и диэлектрическая проницаемость ε с частотой уменьшаются. Этим объясняется изменение диэлектрической проницаемости воды от 80 при статическом поле до 1,77 при оптических частотах. Ориентационная поляризация, играющая значительную роль при низких частотах, при длинах волн, меньших 1 см, становится несущественной.

С увеличением температуры поляризуемость, а, следовательно, $\chi_э$ и ε уменьшаются, так как ориентирующее действие электрического поля уменьшается тепловыми колебаниями.

Характеристики среды

Из-за поляризации внутри диэлектрика создается поле, противоположное по направлению внешнему электрическому полю. В диэлектрике конечных размеров напряженность внутреннего поля, равная сумме противоположно направленных напряженностей внешнего поля и поля связанных зарядов, будет меньше напряженности внешнего поля. Это явление называется деполяризацией.

Диэлектрики, в которых существуют самопроизвольно (спонтанно) поляризованные области (домены) и в отсутствие внешнего электрического поля, называются сегнетоэлектриками. При наличии внешнего поля эти домены ориентируются, вследствие чего

$$\mathrm{D} \gg \varepsilon_0 E \text{ и } \varepsilon \gg 1.$$

Диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектриков может составлять несколько тысяч единиц и $\varepsilon = \varepsilon(E)$. *Пример - титанат бария.*

Характеристики среды

Магнетики — это среды, способные намагничиваться. Аналогично вектору поляризации вектор намагниченности **M** **(А/м)** определяется выражением

$$\mathbf{M} = \lim \frac{\Delta \mathbf{p}_{\mathrm{M}}}{\Delta V} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_{\mathrm{M}ai} = \chi_{\mathrm{M}} \mathbf{H},$$

где $\Delta \mathbf{p}_{\mathrm{M}}$ — вектор магнитного момента объема ΔV;

$\mathbf{p}_{\mathrm{M}ai}$ — магнитный момент атома;

n — число атомов в единице объема.

Характеристики среды

Вектор магнитной индукции определяется выражением

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_a \mathbf{H},$$

μ_a — абсолютная магнитная проницаемость вещества,

$\mu = \dfrac{\mu_a}{\mu_0}$ — относительная магнитная проницаемость

вещества.

Характеристики среды

Элементарный магнитный диполь — это движущийся по орбите электрон, обладающий орбитальным магнитным моментом. Кроме того, он имеет собственный спиновый момент. Во внешнем постоянном магнитном поле $\mathbf{H}_0$ возникает прецессия вектора магнитного момента электрона. В результате прецессии у электронов появляется дополнительный орбитальный момент, направленный против вектора $\mathbf{H}_0$.

Магнетики делят на диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики.

У **диамагнетиков** магнитный момент атома, определяемый магнитными моментами электронов, при отсутствии внешнего магнитного поля

$$\mathbf{p}_{\text{M}ai} = 0.$$

Характеристики среды

Во внешнем магнитном поле вследствие возникновения отрицательного прецессионного магнитного момента **p**пр магнитный момент атома становится отрицательным, и вектор **M** направлен против вектора поля **H**, что соответствует магнитной восприимчивости

$$\chi_{\mathrm{M}} < 0.$$

Характеристики среды

У **парамагнетиков** и в отсутствие внешнего поля

$$\mathbf{p}_{\mathrm{M}ai} \neq 0.$$

Однако вследствие хаотической ориентации атомных моментов намагниченность парамагнитного вещества равна нулю. В присутствии внешнего поля $\mathbf{H}_0 \neq 0$ происходит соответствующая ориентация собственных атомных моментов, причем

$$\mathbf{p}_{\mathrm{M}ai} >> \mathbf{p}_{\text{пр}},$$

и суммарный магнитный момент совпадает с направлением внешнего магнитного поля, т. е.

$$\chi_{\mathrm{M}} > 0.$$

Характеристики среды

В **ферромагнетиках** существуют отдельные микроскопические области (домены) с линейными размерами порядка 10^{-3} см. Внутри каждого домена все элементарные моменты параллельны друг другу, поэтому каждый домен обладает собственным магнитным моментом, величина которого определяется структурой вещества и не зависит от внешнего поля, т. е. каждый домен спонтанно намагничен до насыщения. Однако при отсутствии внешнего поля магнитные моменты доменов ориентированы хаотически, и суммарный магнитный момент равен нулю.

Во внешнем магнитном поле происходит ориентация магнитных моментов доменов по направлению внешнего поля, вследствие чего $\mathbf{B} \gg \mathbf{H}$, т. е.

$$\chi_{\mathrm{M}} \gg 1 \text{ и } \mu \gg 1.$$

Характеристики среды

У ферромагнетиков μ зависит от величины поля

$$\mu = \mu(H).$$

В случае поля насыщения $H_{\text{нас}}$ моменты всех доменов ориентируются в одном направлении, и при дальнейшем увеличении поля намагниченность вещества остается практически неизменной. Это явление называется насыщением, а соответствующая намагниченность — намагниченностью насыщения $M_{\text{нас}}$.

Характеристики среды

Среда называется однородной, если параметры ε, μ и σ не зависят от координат, линейной — если эти параметры не зависят от величины векторов **E** и **H**, и изотропной (в электромагнитном смысле) — если параметры ε, μ и σ являются скалярными величинами, т. е. не зависят от направления векторов **E** и **H**.

Среда называется неоднородной, если ε, μ или σ зависят от координат; нелинейной — если хотя бы один из этих параметров зависит от напряженности поля, и анизотропной — если свойства среды зависят от направления векторов поля. В последнем случае параметры среды являются тензорными величинами.

Характеристики среды

Уравнения состояния среды

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_a \mathbf{E},\\
&\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_a \mathbf{H},\\
&\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ст}}).
\end{aligned}\right\} \qquad (1.7)$$

Характеристики среды

Если анизотропия проявляется в магнитном поле (анизотропный магнетик), то

$$B_i = \mu_0 \mu_{ik} H_k .$$

Аналогично описывается анизотропия диэлектрических свойств и проводимости

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ik} E_k ,$$

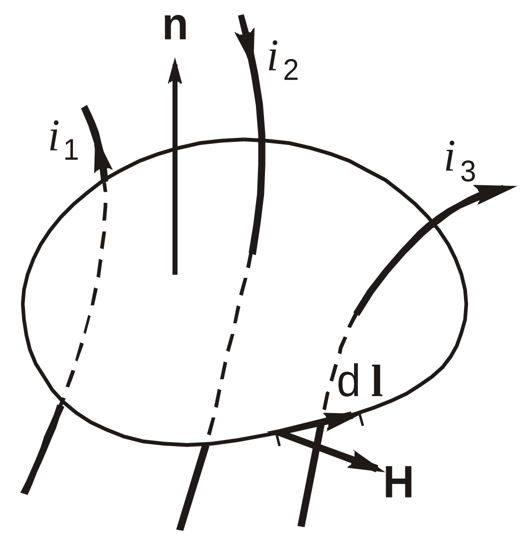
$$J_i = \sigma_{ik} (E_k + E_k^{\text{ст}}).$$

В случае анизотропных сред векторы **D**, **J** и **B** соответственно не параллельны **E** и **H**.

1.3 Интегральные уравнения электромагнитного поля

В основу уравнений электромагнитного поля легли следующие экспериментально установленные законы и факты.

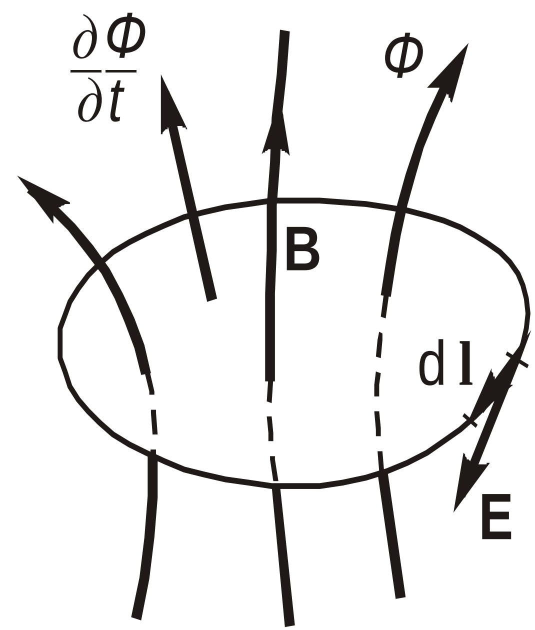
1. Закон о возбуждении магнитного поля — закон Ампера



$$\oint_L \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = \sum_k i_k. \quad (1.8)$$

Циркуляция напряженности магнитного поля равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром (рис. 1.1). Этот закон указывает, что причиной существования магнитного поля является ток.

2. Закон электромагнитной индукции — закон Фарадея



$$e = \oint\limits_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (1.9)$$

Наводимая в контуре ЭДС, равная циркуляции напряженности электрического поля **E** вдоль всего контура проводника *L*, равна изменению во времени потока магнитной индукции Ф (Вб) через площадь, ограниченную этим контуром (рис. 1.2). Это означает, что причиной создания электрического поля (ЭДС) является изменение магнитного потока во времени.

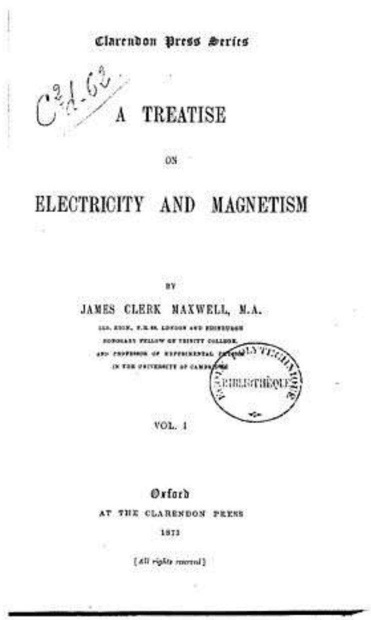
3. Закон взаимодействия электрических зарядов — закон Кулона

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_r \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_a r^2}. \qquad (1.10)$$

Между двумя покоящимися зарядами действует сила, прямо пропорциональная произведению зарядов и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними. Эта сила направлена от одного заряда к другому.

4. Отсутствие магнитных зарядов, аналогичных электрическим.

Эти экспериментальные законы и факты обобщил Джеймс Клерк Максвелл в 1873 г.


Clarendon Press Series

A TREATISE

ON

ELECTRICITY AND MAGNETISM

BY

JAMES CLERK MAXWELL, M.A.

VOL. I

Oxford

AT THE CLARENDON PRESS

1873

[All rights reserved]

Трактат об электричестве и магнетизме

Правую часть уравнения закона Ампера (1.8) можно представить в виде

$$\sum_k i_k = \int_S (\mathbf{J} + \mathbf{J}_{\text{см}})\, \mathrm{d}\mathbf{S},$$

где

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ст}})$$

– плотность тока проводимости, обусловленного движением свободных зарядов;

$\mathbf{J}_{\text{см}}$ – плотность тока смещения, обусловленного изменением электрического поля.

При воздействии переменного поля **E** на диэлектрик в нем происходит смещение связанных зарядов в пределах молекулы, что также является током.

Пусть за время dt электрическое поле **E** изменяется на d**E,** что вызовет смещение зарядов диполя на d**l** и изменение дипольного момента согласно выражению (1.3), на величину

$$\mathrm{d}\mathbf{p}_{\text{э}} = q\,\mathrm{d}\mathbf{l} = q\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = q\mathbf{v}\,\mathrm{d}t,$$

где **v** — скорость смещения связанных разноименных зарядов друг относительно друга.

Изменение электрического момента единицы объема, т. е. изменение вектора поляризации, согласно (1.5) определяется выражением

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{n} q_i \mathbf{l}_i = \mathbf{v}\sum_{i=1}^{n} q_i = \rho_{\text{св}}\mathbf{v} = \mathbf{J}_{\text{пол}},$$

где

$\rho_{\text{св}}$ – объемная плотность одноименных связанных смещающихся зарядов;

$\mathbf{J}_{\text{пол}}$ – плотность тока поляризации.

Ток поляризации, как и ток проводимости, сопровождается магнитным полем. Магнитное поле появляется при изменении электрического поля и в отсутствие диэлектрика в вакууме. Экспериментально это было подтверждено Генрихом Герцем в 1886 г.

Ток смещения в вакууме определяется выражением

$$\mathbf{J}_{\text{см.вак}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Интегральные уравнения электромагнитного поля

Полный ток, создающий магнитное поле

$$\mathbf{J}_{\text{полн}} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

и первое интегральное уравнение электромагнитного поля имеет вид

$$\oint_L \mathbf{H}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S (\mathbf{J} + \mathbf{J}_{\text{см}})\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \mathrm{d}\mathbf{S}. \quad (\mathrm{I}')$$

Представим правую часть уравнения в законе электромагнитной индукции (1.9) в виде

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{S},$$

и получим второе интегральное уравнение электромагнитного поля

$$\oint_L \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{S}. \qquad (\mathrm{II}')$$

Полагая в уравнении закона Кулона (1.10)

$$q' \ll q$$

и рассматривая q' как пробный заряд, определим напряженность электрического поля **E**, создаваемого зарядом q в точке расположения пробного заряда, в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_r \frac{q}{4\pi\varepsilon_a r^2}$$

или электрическую индукцию

$$\mathbf{D} = \mathbf{e}_r \frac{q}{4\pi r^2}.$$

Определяя поток электрической индукции через поверхность сферы радиуса *r*, получим

$$\oint_S \mathbf{D}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = q.$$

В общем случае

$$q = \int_V \rho\,\mathrm{d}V,$$

где ρ — объемная плотность заряда (Кл/м^3).

С учетом этого получим третье интегральное уравнение электромагнитного поля

$$\oint_S \mathbf{D}\,d\mathbf{S} = \int_V \rho\, dV, \qquad (\mathrm{III'})$$

представляющее известную теорему Гаусса:

поток вектора электрической индукции **D** через замкнутую поверхность *S* равен величине заряда *q*, расположенного в объеме *V*, ограниченном этой поверхностью.

Это уравнение является обобщением опытного факта о прерывности электрических силовых линий на поверхности зарядов.

Интегральные уравнения электромагнитного поля

Обобщая опытный факт об отсутствии магнитных зарядов, аналогичных электрическим, получим четвертое интегральное уравнение электромагнитного поля

$$\oint_S \mathbf{B}\,d\mathbf{S} = 0. \qquad (\mathrm{IV}')$$

Это уравнение указывает на непрерывность силовых линий магнитной индукции.

Полученные интегральные уравнения определяют основные законы электромагнитных процессов. Однако эти уравнения не учитывают в явном виде конечное значение скорости распространения электромагнитного поля.

1.4 Дифференциальные уравнения электромагнитного поля

Эти уравнения применимы к более широкому диапазону волн. Однако они не пригодны для описания электромагнитных процессов на частотах, соответствующих волнам, длина которых λ сравнима с расстоянием между элементарными частицами вещества *d*.

Условие применимости уравнений Максвелла

$$\lambda \gg d.$$

Дифференциальные уравнения электромагнитного поля

Первое дифференциальное уравнение электромагнитного поля получается из первого интегрального уравнения (I´) путем применения теоремы Стокса и приравнивания подынтегральных выражений

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \qquad \text{(I)}$$

Из этого уравнения следует, что вихревое магнитное поле связано с наличием токов проводимости и смещения.

Дифференциальные уравнения электромагнитного поля

Второе дифференциальное уравнение получается аналогично первому из второго интегрального уравнения (II´)

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \qquad \text{(II)}$$

Отсюда следует, что вихревое электрическое поле связано с изменением во времени магнитной индукции.

Из уравнений (I) и (II) следует возможность распространения электромагнитных волн вдали от проводников с током, так как электрическое и магнитное поля могут существовать, взаимно возбуждая друг друга.

Третье дифференциальное уравнение получается из третьего интегрального уравнения (III´) путем применения теоремы Остроградского–Гаусса и приравнивания подынтегральных выражений

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho. \qquad \text{(III)}$$

Из этого уравнения следует, что электрическое поле кроме вихревой компоненты может иметь и потенциальную, определяемую электрическими зарядами.

Четвертое дифференциальное уравнение получается аналогично предыдущему из четвертого интегрального уравнения (IV´)

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \qquad \text{(IV)}$$

Из этого уравнения следует, что нет магнитных зарядов, аналогичных электрическим.

Четыре уравнения Максвелла в дифференциальной форме представляют пространственно-временное описание электромагнитного процесса. Однако этих уравнений еще недостаточно для решения задач, так как они не учитывают свойств среды, которые задаются зависимостью векторов ***D****,* ***J*** *и* ***B*** *от* ***E*** *и* ***H****.*

1.5 Уравнения непрерывности (закон сохранения заряда)

Из первого уравнения Максвелла в дифференциальной форме (I), применяя к нему операцию дивергенции, с учетом формулы

$$\operatorname{div}\,\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0,$$

получим

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) = 0,$$

т. е. линии полного тока должны быть замкнуты.

Если контур тока проходит через проводники, диэлектрики или вакуум, то ток проводимости, протекающий в проводниках, замыкается на ток смещения в вакууме и диэлектрике.

Уравнения непрерывности

Учитывая (III) и поменяв местами операции div и $\frac{\partial}{\partial t}$, получим пятое дифференциальное уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \qquad \text{(V)}$$

выражающее закон сохранения заряда и называемое уравнением непрерывности.

Уравнения непрерывности

Интегрируя по объему V и применяя теорему Остроградского-Гаусса

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{J}\, dV = \oint_S \mathbf{J}\, d\mathbf{S},$$

получим этот закон в интегральной форме

$$\oint_S \mathbf{J}\, d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV. \quad \text{(V´)}$$

Ток через замкнутую поверхность равен убыли заряда в объеме, ограниченном этой поверхностью.

1.6 Линейные, нелинейные и параметрические электромагнитные процессы в средах

Электромагнитные процессы описываются уравнениями Максвелла (I)–(IV) и уравнениями состояния среды (1.7).

Электромагнитный процесс, протекающий в среде, свойства которой не зависят от напряженности электромагнитного поля (линейная среда), называется линейным.

Уравнения (I)–(IV) для линейной среды представляют систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Основные свойства электромагнитных процессов вытекают из линейности описывающих их уравнений:

– выполнение принципа суперпозиции. Различные частотные составляющие поля распространяются независимо друг от друга;

– амплитуды частотных составляющих распространяющегося поля пропорциональны амплитудам соответствующих составляющих источника (закон Ома);

– спектр распространяющегося поля неизменен, в нем нет составляющих, не содержащихся в спектре источника.

Электромагнитные процессы в средах

Электромагнитные процессы, протекающие в средах, свойства которых зависят от напряженности распространяющегося электромагнитного поля, называются нелинейными.

Нелинейные процессы связаны с нелинейными свойствами среды, которые проявляются в нелинейном взаимодействии вещества с распространяющимся электромагнитным полем.

Среда называется нелинейной, если хотя бы один из ее параметров (диэлектрическая проницаемость ε, магнитная проницаемость μ или проводимость σ) зависит от напряженности распространяющегося поля.

Электромагнитные процессы в нелинейных средах с учетом уравнений состояния среды (1.7) описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений (I)–(IV). Принцип суперпозиции для таких уравнений невыполним.

Электромагнитные поля, возбужденные различными источниками или различными частотными составляющими спектра источника и распространяющиеся в нелинейной среде, взаимодействуют друг с другом.

Изменение параметров среды под влиянием одной из составляющих поля оказывает влияние на распространение других составляющих.

Электромагнитные процессы в средах

Взаимодействие распространяющегося поля со средой приводит к существенному изменению поля. Характер этого изменения зависит от природы и свойств нелинейной среды, напряженности распространяющегося поля.

При распространении в нелинейной среде в спектре электромагнитного поля появляются новые частоты, не содержащиеся в спектре источника. Этим нелинейные электромагнитные процессы принципиально отличаются от линейных. При этом амплитуды частотных составляющих распространяющегося поля оказываются непропорциональными амплитудам частотных составляющих источника.

В радиоэлектронике наряду с нелинейными широкое применение нашли параметрические процессы. Если параметры среды не зависят от напряженности распространяющегося поля, но изменяются во времени по определенному закону внешними силами (электрические, механические и др.), то такая среда называется параметрической, и явления, происходящие в ней — параметрическими.

Электромагнитные процессы в средах

Электромагнитный процесс в параметрической среде описывается системой линейных дифференциальных уравнений (I)–(IV) с коэффициентами, зависящими от времени.

Для таких уравнений выполняется принцип суперпозиции, и составляющие распространяющегося поля не взаимодействуют друг с другом; при этом также наблюдается преобразование частоты.

Спектр распространяющегося поля не зависит от напряженности поля, а определяется лишь спектром источника и изменением во времени параметров среды.

Электромагнитные процессы в средах

Нелинейные и параметрические процессы проявляются как обратное воздействие среды на распространяющееся поле. При распространении электромагнитного поля и в нелинейной, и в параметрической средах изменяется спектр частот.

Основное различие этих процессов состоит в том, что нелинейные процессы зависят от интенсивности распространяющегося поля, а параметрические не зависят.

Примерами нелинейных и параметрических процессов является усиление и генерирование электрических колебаний, детектирование, умножение частот.

Электромагнитные процессы в средах

В основе генерирования и усиления лежит взаимодействие электромагнитного поля с активной средой.

В электронных приборах (триодах, клистронах, магнетронах, лампах бегущей волны и т. п.) энергия постоянного тока преобразуется в энергию высокой частоты в результате взаимодействия движущихся электронов с электромагнитным полем. Усиление или генерирование здесь происходит за счет кинетической энергии электронов, которая получается от источников постоянного тока.

В квантовых генераторах и усилителях внутренняя энергия возбужденных атомов, молекул или ионов преобразуется в энергию электромагнитного излучения, а возбуждение частиц осуществляется за счет внешних источников энергии (электрических, тепловых и др.).

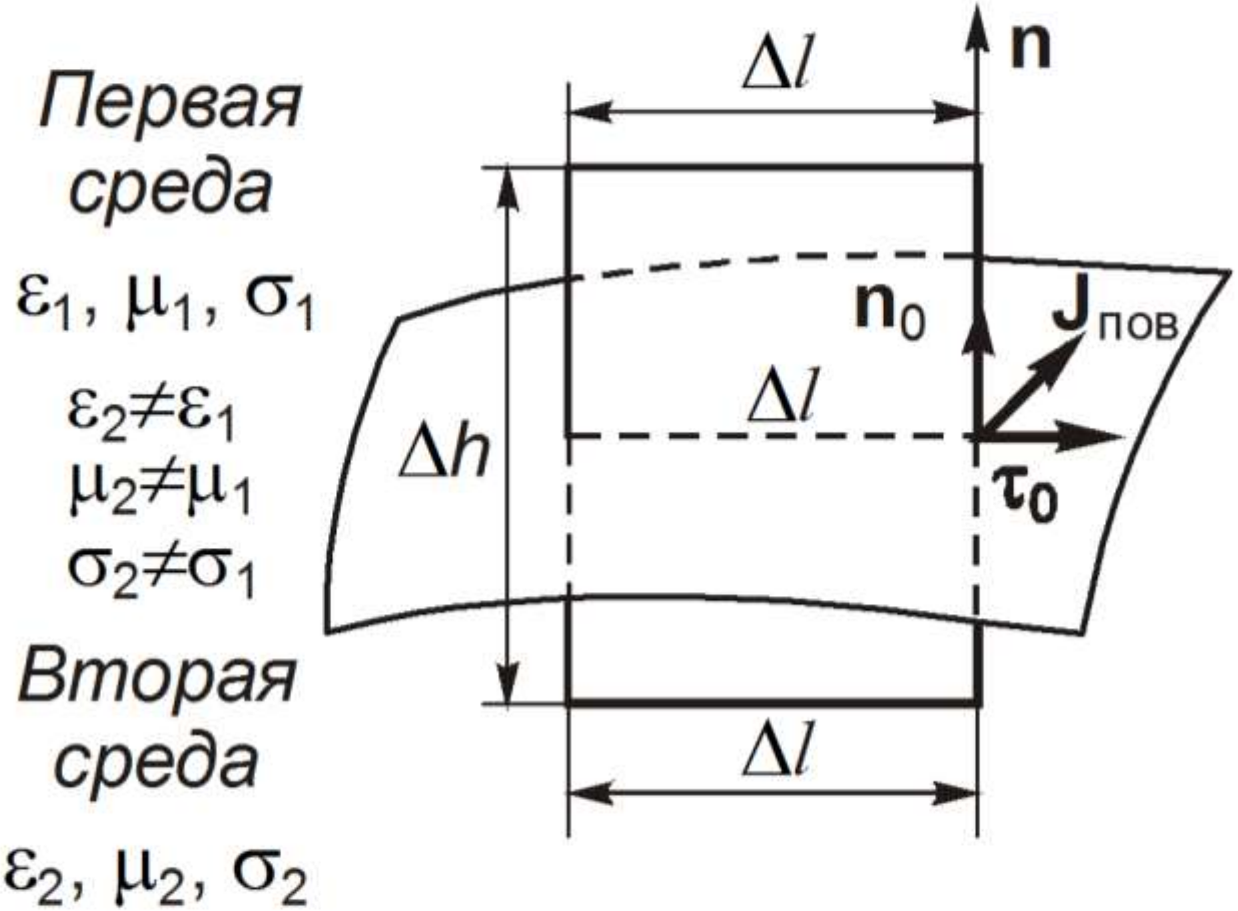
1.7 Граничные условия

Для решения уравнений Максвелла необходимы дополнительные данные, позволяющие определить постоянные интегрирования. К таким данным относятся граничные условия, т. е. условия на границах разнородных сред.

Рассмотрим границу двух сред с параметрами ε_1, μ_1, σ_1 и ε_2, μ_2, σ_2. Граница этих двух сред может быть заряжена свободными зарядами, располагающимися на поверхности в бесконечно тонком слое с поверхностной плотностью заряда κ (Кл/м^2), и по ней могут течь поверхностные токи проводимости с поверхностной плотностью Jпов (А/м).

Примером поверхностных зарядов могут служить заряды, возникающие на поверхности проводника, внесенного в электростатическое поле, а примером поверхностных токов – токи, возникающие на поверхности проводника, в поле высокой частоты.

Граничные условия для тангенциальных составляющих определим, вычисляя циркуляцию вектора по контуру, находящемуся частично в первой *1*, частично во второй *2* среде и стягивающемуся к линии раздела.



Граничные условия для тангенциальных составляющих

Согласно второму интегральному уравнению (II´)

$$\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{B}\,d\mathbf{S}.$$

Применим это уравнение к контуру на рисунке. Интеграл в левой части распадается на четыре интеграла, взятых по сторонам контура.

При $\Delta h \to 0$ интегралы, взятые по сторонам с длиной Δh, обратятся в нуль.

В нуль обратится и интеграл по поверхности, стоящий справа, так как площадь, ограниченная контуром $\Delta l \Delta h$, будет равна нулю.

Граничные условия для тангенциальных составляющих

Считая контур достаточно малым, можно принять, что поле вдоль отдельных участков контура постоянно. Таким образом,

$$E_{\tau(1)}\Delta l - E_{\tau(2)}\Delta l = 0.$$

Здесь $E_{\tau(2)}$ со знаком «–», так как согласно направлению обхода контура $\mathbf{E}_{(2)}$ проецируется на направление $-\tau_0$. Отсюда

$$E_{\tau(1)} = E_{\tau(2)},$$

т. е. на поверхности раздела двух сред тангенциальная составляющая напряженности электрического поля непрерывна. Это условие можно записать в векторной форме

$$[\mathbf{n}_0(\mathbf{E}_{(1)} - \mathbf{E}_{(2)})] = 0,$$

Граничные условия для тангенциальных составляющих

Аналогично из первого интегрального уравнения Максвелла (I´)

$$\oint_L \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}$$

получаются граничные условия для тангенциальных составляющих магнитного поля.

Произведя интегрирование по контуру на рисунке и переходя к пределу при $\Delta h \to 0,$ получим

$$H_{\tau(1)}\Delta l - H_{\tau(2)}\Delta l = \Delta l \lim_{\Delta h \to 0} J\Delta h,$$

так как здесь интегралы, взятые по сторонам Δh, и поток **D** через площадь $\Delta l \Delta h$ равны нулю.

Граничные условия для тангенциальных составляющих

$\lim\limits_{\Delta h \to 0} J\Delta h$ представляет ток, текущий в бесконечно тонкой пленке, т. е.

$$\lim_{\Delta h \to 0} J\Delta h = J_{\text{пов}}.$$

$J_{\text{пов}}$ (А/м) – поверхностная плотность тока, т. е. плотность тока, текущего по поверхности и не занимающего объем.

Таким образом,

$$H_{\tau(1)} - H_{\tau(2)} = J_{\text{пов}},$$

т. е. тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля изменяется при переходе через границу раздела, **если поверхностный ток не равен нулю**.

Граничные условия для тангенциальных составляющих

В противном случае, **если поверхностный ток равен нулю**,

$$H_{\tau(1)} = H_{\tau(2)},$$

т. е. тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля на поверхности раздела при отсутствии поверхностного тока непрерывна.

В общем случае это выражение в векторной форме имеет вид

$$[\mathbf{n}_0(\mathbf{H}_{(1)} - \mathbf{H}_{(2)})] = \mathbf{J}_{\text{пов}}.$$

Граничные условия для тангенциальных составляющих

Граничные условия для тангенциальных составляющих плотности тока проводимости получаются из условия для тангенциальных составляющих напряженности электрического поля

$$E_{\tau(1)} = E_{\tau(2)}.$$

Так как

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E},$$

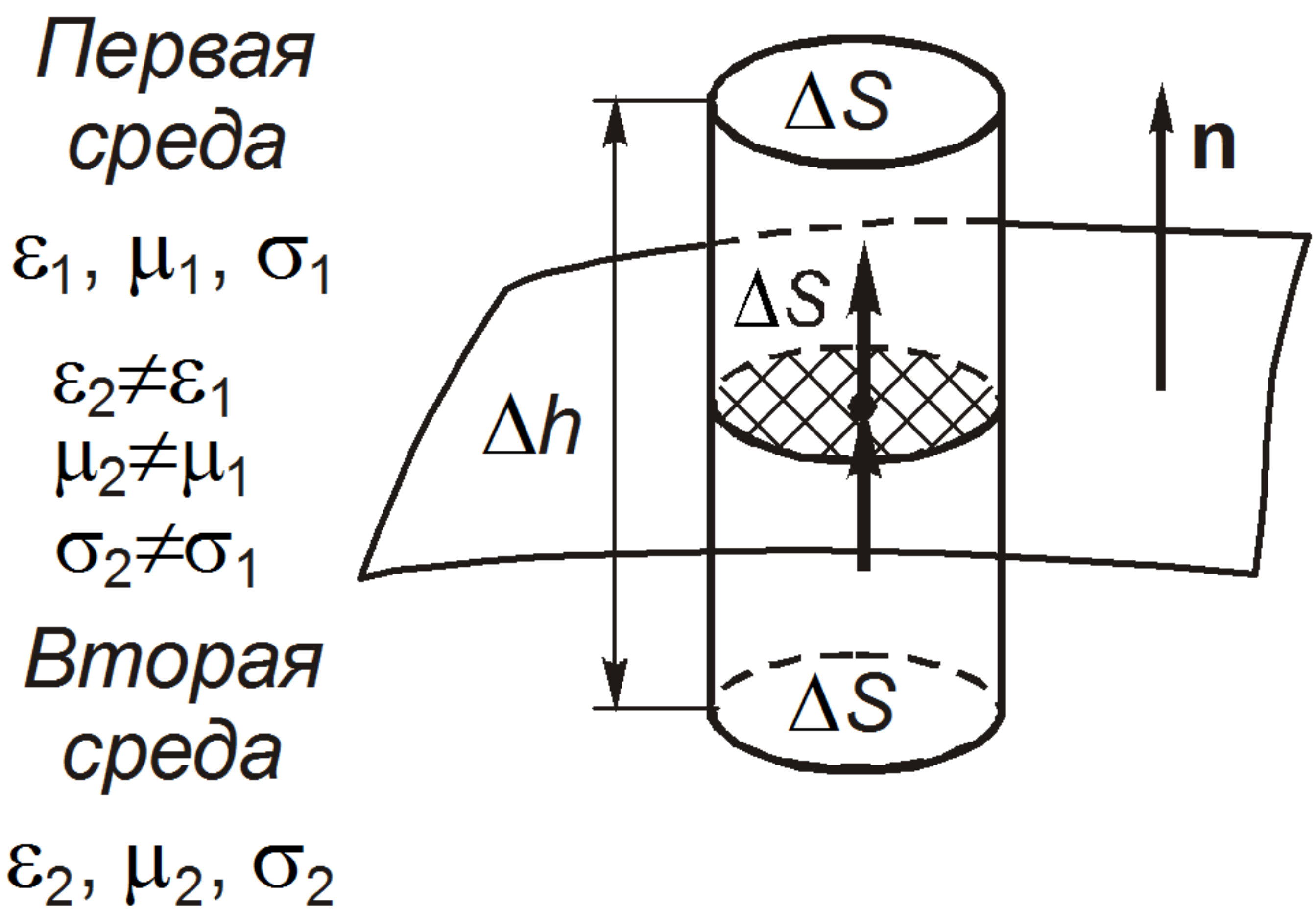
то

$$\frac{J_{\tau(1)}}{J_{\tau(2)}} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2},$$

т. е. тангенциальные составляющие плотности тока на границе раздела терпят разрыв.

Граничные условия для нормальных составляющих

Граничные условия для нормальных составляющих определим, вычисляя поток вектора через поверхность, расположенную в первой и второй средах и стягивающуюся к поверхности раздела.



Граничные условия для нормальных составляющих

Согласно четвертому интегральному уравнению (IV´)

$$\oint_S \mathbf{B}\,d\mathbf{S} = 0.$$

Применим это уравнение к цилиндру, представленному на рисунке.

Считая магнитное поле на верхнем и нижнем основании вследствие малости цилиндра постоянным, а поток через боковую поверхность при $\Delta h \to 0$ равным нулю, с учетом направления нормали к поверхности, получим

$$B_{n(1)}\Delta S - B_{n(2)}\Delta S = 0.$$

Граничные условия для нормальных составляющих

Отсюда

$$B_{n(1)} = B_{n(2)},$$

т. е. нормальная составляющая вектора магнитной индукции на поверхности раздела непрерывна.

В векторной форме это выражение имеет вид

$$(\mathbf{n}_0(\mathbf{B}_{(1)} - \mathbf{B}_{(2)})) = 0.$$

Граничные условия для нормальных составляющих

Применяя интегральное уравнение (III´) получим

$$D_{n(1)} - D_{n(2)} = \lim_{\Delta h \to 0} \rho \Delta h = \kappa,$$

т. е. нормальная составляющая вектора электрической индукции изменяется скачком, если на поверхности имеются свободные заряды.

Здесь κ (Кл/м^2) – поверхностная плотность заряда, т. е. плотность заряда, не занимающего объема, а сосредоточенного в геометрической поверхности (бесконечно тонкой пленке).

В векторной форме последнее выражение имеет вид

$$(\mathbf{n}_0(\mathbf{D}_{(1)} - \mathbf{D}_{(2)})) = \kappa.$$

Граничные условия для нормальных составляющих

Условие для нормальных составляющих вектора плотности тока проводимости определяется из уравнения непрерывности для полного тока

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{J}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)=0$$

или

$$\oint_S \left(\mathbf{J}+\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) d\mathbf{S} = 0.$$

Граничные условия для нормальных составляющих

Аналогично определению граничных условий для нормальных составляющих **B** и **D**, нормальные составляющие плотности тока проводимости

$$J_{n(1)} + \frac{\partial D_{n(1)}}{\partial t} = J_{n(2)} + \frac{\partial D_{n(2)}}{\partial t}$$

или

$$J_{n(2)} = J_{n(1)} + \frac{\partial}{\partial t}(D_{n(1)} - D_{n(2)}) = J_{n(1)} + \frac{\partial \kappa}{\partial t},$$

т. е. нормальные составляющие плотности тока проводимости на границе раздела терпят разрыв.

В векторной форме это условие имеет вид

$$(\mathbf{n}_0(\mathbf{J}_{(2)} - \mathbf{J}_{(1)})) = \frac{\partial \kappa}{\partial t}.$$

Граничные условия

Сведем полученные результаты в таблицу

Векторы	Тангенциальные составляющие	Нормальные составляющие
E, D	$E_{\tau(1)} = E_{\tau(2)}$	$D_{n(1)} - D_{n(2)} = \kappa$ $D_{n(1)} = D_{n(2)}$ при $\kappa = 0$
H, B	$H_{\tau(1)} - H_{\tau(2)} = J_{\text{пов}}$ $H_{\tau(1)} = H_{\tau(2)}$ при $J_{\text{пов}} = 0$	$B_{n(1)} = B_{n(2)}$
J	$\dfrac{J_{\tau(1)}}{J_{\tau(2)}} = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$	$J_{n(2)} = J_{n(1)} + \dfrac{\partial \kappa}{\partial t}$ $J_{n(1)} = J_{n(2)}$ при $\kappa = 0$ или $\dfrac{\partial \kappa}{\partial t} = 0$

Граничные условия - частные случаи

В частном случае, когда второй средой является идеальный проводник, поле в котором всегда равно нулю, граничные условия принимают вид

$$E_\tau = 0, \quad H_\tau = J_{\text{пов}}, \quad E_n = \frac{\kappa}{\varepsilon_a}, \quad H_n = 0,$$

или в векторной форме

$$[\mathbf{n}_0\mathbf{H}] = \mathbf{J}_{\text{пов}}, \quad [\mathbf{n}_0\mathbf{E}] = 0,$$

$$(\mathbf{n}_0\mathbf{H}) = 0, \quad (\mathbf{n}_0\,\mathbf{E}) = \frac{\kappa}{\varepsilon_a}.$$

В соответствии с этими условиями электрические силовые линии подходят к поверхности идеального проводника по направлению нормали, а магнитные силовые линии – по касательной.

1.8 Теорема Умова - Пойнтинга

В электромагнитном поле происходит перенос энергии от источников к потребителю. Характер движения энергии определяется теоремой Умова-Пойнтинга.

Умножим первое уравнение Максвелла (I) скалярно на **E**, а второе уравнение (II) – на **H** и, вычтя из первого уравнения второе, получим

$$\mathbf{E}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}-\mathbf{H}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+\mathbf{JE}.$$

Теорема Умова - Пойнтинга

Преобразуя левую часть этого уравнения по формуле

$$\operatorname{div}[\mathbf{AB}] = \mathbf{B}\operatorname{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\operatorname{rot}\mathbf{B},$$

а правую часть с учетом уравнений состояния среды (1.7)

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \qquad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}),$$

получим

$$\operatorname{div}[\mathbf{EH}] + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2} + \mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} +$$

$$+\mu_0\mathbf{H}\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial t} + \mathbf{JE} = 0. \qquad (1.11)$$

Это теорема Умова-Пойнтинга в дифференциальной форме (*закон сохранения энергии электромагнитного поля*).

Теорема Умова - Пойнтинга

Интегрируя (1.11) по произвольному объему и применяя теорему Остроградского-Гаусса к интегралу от дивергенции, получим теорему Умова-Пойнтинга в интегральной форме

$$\oint_S [\mathbf{E}\mathbf{H}]\,\mathrm{d}\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2}\,\mathrm{d}V + $$

$$+\int_V \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int_V \mu_0 \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}\,\mathrm{d}V + \int_V \mathbf{J}\mathbf{E}\,\mathrm{d}V = 0. \qquad (1.12)$$

Теорема Умова - Пойнтинга

Здесь

$[\mathbf{EH}] = \mathbf{\Pi}$ – вектор Пойнтинга, представляющий

плотность потока мощности (Вт/м^2) (направление этого вектора совпадает с направлением движения энергии);

$\oint\limits_S \mathbf{\Pi}\, d\mathbf{S}$ – мощность, входящая (если < 0) или

излучаемая (если > 0) через поверхность *S*. В частных случаях это выражение представляет либо мощность, излучаемую антенной, либо мощность, отводимую из данного объема проводами или волноводами, пересекающими поверхность, ограничивающую этот объем;

Теорема Умова - Пойнтинга

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \frac{\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2}{2}\,\mathrm{d}V$$ – изменение энергии в единицу времени в объеме *V* в вакууме;

$$\int\limits_V \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\,\mathrm{d}V$$ – изменение энергии в единицу времени в объеме *V* в среде из-за поляризации;

$$\int\limits_V \mu_0 \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}\,\mathrm{d}V$$ – изменение энергии в единицу времени в объеме *V* в среде из-за намагниченности;

$$\int\limits_V \mathbf{J}\mathbf{E}\,\mathrm{d}V$$ – изменение энергии в единицу времени в объеме *V* в среде из-за проводимости.

Теорема Умова - Пойнтинга

Плотность мощности, обусловленная взаимодействием поля с проводящей средой, равна

$$p_{\text{пров}} = \mathbf{JE}. \qquad (1.13а)$$

Плотности мощности, обусловленные процессами поляризации и намагничивания среды, определяются выражениями

$$p_{\text{пол}} = \mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \qquad (1.13б)$$

$$p_{\text{нам}} = \mu_0 \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}. \qquad (1.13в)$$

Теорема Умова - Пойнтинга

Полагая для простоты среду линейной (принципиального значения это предположение не имеет), перепишем выражение (1.12) с учетом в следующем виде:

$$\oint_S [\mathbf{EH}]\,\mathrm{d}\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{\varepsilon_a E^2 + \mu_a H^2}{2}\,\mathrm{d}V +$$

$$+\int_V \frac{J^2}{\sigma}\,\mathrm{d}V - \int_V \mathbf{JE}^{\text{ст}}\,\mathrm{d}V = 0$$

или

$$\oint_S \mathbf{\Pi}\,\mathrm{d}\mathbf{S} + \frac{\partial W}{\partial t} + Q + P^{\text{ст}} = 0,$$

Теорема Умова - Пойнтинга

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \frac{\varepsilon_a E^2 + \mu_a H^2}{2}\,\mathrm{d}V$$ – изменение энергии в единицу времени в объеме *V*;

$$Q = \int\limits_V \frac{J^2}{\sigma}\,\mathrm{d}V$$ – мощность, преобразуемая в тепло по закону Джоуля-Ленца (потери);

$$P^{\text{ст}} = -\int\limits_V \mathbf{J}\mathbf{E}^{\text{ст}}\,\mathrm{d}V$$ – мощность сторонних источников.

Теорема Умова - Пойнтинга

Если $P^{\text{ст}} < 0,$ источники отдают энергию полю,

если $P^{\text{ст}} > 0,$ энергия поля переходит к источникам.

Под токами сторонних источников понимают токи, которые в системе уравнений считаются заданными, возбуждающие электромагнитное поле, но создаваемые иными причинами, иным электромагнитным полем, чем поле, описываемое уравнениями.

Теорема Умова - Пойнтинга

Для создания электромагнитного поля обычно используют излучающий элемент (антенну), энергия к которому подводится от генератора соединительной линией. Строго говоря, источником электромагнитного поля являются все токи сложной системы: генератор, линия, излучатель. Однако при решении задач считают, что источником поля являются лишь токи излучателя, так как практически генератор и соединительная линия полностью экранированы и участия в образовании электромагнитного поля во внешнем пространстве не принимают. Поэтому генератор и соединительную линию при исследовании электромагнитного поля из рассмотрения можно исключить, считая, что они играют лишь роль источника сторонней напряженности поля, приложенной непосредственно к излучателю.

Теорема Умова - Пойнтинга

Если $P^{\text{ст}} < 0,$ то $$\oint\limits_S \mathbf{\Pi}\, d\mathbf{S} + \frac{\partial W}{\partial t} + Q = -P^{\text{ст}},$$

т. е. мощность сторонних источников, распределенных в исследуемом объеме, расходуется на тепло, выделяющееся в этом объеме, изменение энергии в нем и излучение через поверхность, ограничивающую этот объем.

Если $P^{\text{ст}} > 0$ то $$-\oint\limits_S \mathbf{\Pi}\, d\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial t} + Q + P^{\text{ст}},$$

т. е. приток мощности через поверхность, ограничивающую исследуемый объем, расходуется на тепло, выделяющееся в этом объеме, изменение энергии в нем и возбуждение сторонних источников, размещенных в этом объеме.