Домашнее задание №2.

Задача №1.

В прямоугольном волноводе сечением 23×10 мм^2 *распространяется волна* H_{10}. *Волновод заполнен диэлектриком с проницаемостью* $\varepsilon_r = 1{,}69$. *Амплитуда напряжённости электрического поля в центре волновода равна* $12 \cdot 10^5$ В/м. *Частота колебаний* $10{,}45$ *ГГц. Написать выражения для составляющих поля, определить мощность, передаваемую волноводом, фазовую и групповую скорости, плотности поверхностных токов на стенках, длину волны в волноводе и сопротивление согласованной нагрузки.*

Дано:
$a = 23$ мм
$b = 10$ мм
$\varepsilon_r = 1{,}69$
$\mu_r = 1$
$E_0 = 1{,}2 \cdot 10^6$ В/м
$f = 1{,}045 \cdot 10^{10}$ Гц

<u>*Решение.*</u>

1).Поле H_{10} *в прямоугольном волноводе:*

$$\begin{cases} \dot{H}_{mz} = H\cos\dfrac{\pi x}{a} e^{-jk_0 z} \\ \dot{H}_{mx} = i\dfrac{2a}{\lambda}\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{2a}\right)^2} H\sin\dfrac{\pi x}{a} e^{-jk_0 z} \\ \dot{E}_{my} = -i\dfrac{2a}{\lambda} Z_0 H\sin\dfrac{\pi x}{a} e^{-jk_0 z} \\ \dot{H}_{my} = \dot{E}_{mx} = \dot{E}_{mz} = 0 \end{cases}$$

2).Критическая длина волны для поля H_{10} *в прямоугольном волноводе:*

$\lambda_{\text{кр}} = 2a$

$\lambda_{\text{кр}} = 2 \cdot 0{,}023 = 0{,}046$ (м)

3).Длина волны в среде волновода, при условии, что она не ограничена:

$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}$, *где* λ_0 *– длина волны в воздухе.*

$\lambda_0 = \frac{c}{f}$, *где c – скорость света.*

$$\lambda = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon_r}}$$

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}045 \cdot 10^{10} \cdot \sqrt{1{,}69}} = 0{,}022 \text{ (м)}$$

4).Длина волны в волноводе

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}$$

$$\Lambda = \frac{0{,}022}{\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}022}{0{,}046}\right)^2}} = 0{,}025 \text{ (м)}$$

5).Продольная постоянная распространения:

$$k_0 = k\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}$$

$$k_0 = \frac{2 \cdot 3{,}14}{0{,}022}\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}022}{0{,}046}\right)^2} = 250{,}629 \text{ (1/м)}$$

6).Характеристическое сопротивление среды, заполняющей волновод:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{1{,}69 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}} = 289{,}861 \text{ (Ом)}$$

7).Характеристическое сопротивление волновода для волны H_{10}:

$$Z_{OH} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}$$

$$Z_{OH} = \frac{289{,}861}{\sqrt{1 - \left(\frac{0{,}022}{2 \cdot 0{,}023}\right)^2}} = 330{,}138 \text{ (Ом)}$$

8).

$$E_0 = -\frac{240\pi a}{\lambda\sqrt{\varepsilon_r}} H$$

$$H = -\frac{\lambda\sqrt{\varepsilon_r}}{240\pi a} E_0$$

$$H = -\frac{0{,}022 \cdot 1{,}3 \cdot 1{,}2 \cdot 10^6}{240 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}023} = -1{,}98 \cdot 10^3 \text{ (А/м)}$$

Выражения для составляющих поля в численном виде:

$$\begin{cases} \dot{H}_{mz} = -1{,}98 \cdot 10^3 cos(136{,}59x)e^{-j250{,}629z} \\ \dot{H}_{mx} = -3{,}63 \cdot 10^3 \ i \ sin(136{,}59x)e^{-j250{,}629z} \\ \dot{E}_{my} = 1{,}2 \cdot 10^6 \ i \ sin(136{,}59x)e^{-j250{,}629z} \\ \dot{H}_{my} = \dot{E}_{mx} = \dot{E}_{mz} = 0 \end{cases}$$

9).Сопротивление согласованной нагрузки:

$$Z_{CH} \approx Z_{OH}$$

$$Z_{CH} \approx 330{,}138 \text{ (Ом)}$$

10).Мощность, передаваемая волноводом (соотношение для волны H_{10}):

$$P_{\text{ср}} = \frac{ab\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}}{4Z_0} E_0^2$$

$$P_{\text{ср}} = \frac{0{,}023 \cdot 0{,}01 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0{,}022}{2 \cdot 0{,}023}\right)^2}}{4 \cdot 289{,}861} \cdot (1{,}2 \cdot 10^6)^2 = 2{,}5 \cdot 10^5 \text{ (Вт)}$$

11).Фазовая и групповая скорости:

$$v_ф = \frac{\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}$$

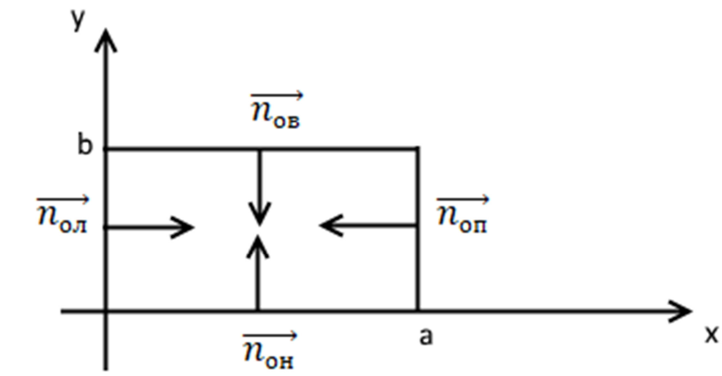
$$v_ф = \frac{3\cdot 10^8}{\sqrt{1{,}69}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{0{,}022}{0{,}046}\right)^2}} = 2{,}628\cdot 10^8 \text{ (м/с)}$$

$$v_{гр} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}$$

$$v_{гр} = \frac{3\cdot 10^8}{\sqrt{1{,}69}}\sqrt{1-\left(\frac{0{,}022}{0{,}046}\right)^2} = 2{,}026\cdot 10^8 \text{ (м/с)}$$

12).Плотность поверхностных токов:

$$\vec{J}_{пов} = [\overrightarrow{n_0}\,\vec{H}]$$



А).На левой стенке:

$$\overrightarrow{n_{ол}} = (1{,}0{,}0)$$

Составляющие поля (x=0):

$$\dot{H}_{mz}|_{x=0} = -1{,}98\cdot 10^3 e^{-j250{,}629z}$$

$$\dot{H}_{mx}|_{x=0} = 0$$

$$\dot{H}_{my}|_{x=0} = 0$$

$$\vec{J}_{\text{пов л}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1{,}98 \cdot 10^3 e^{-j250{,}629z} \end{vmatrix} = 1{,}98 \cdot 10^3 e^{-j250{,}629z}\, \overrightarrow{e_y} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{J}_{\text{пов л}\, x} = \vec{J}_{\text{пов л}\, z} = 0 \\ \vec{J}_{\text{пов л}\, y} = 1{,}98 \cdot 10^3 e^{-j250{,}629z} \end{cases}$$

Б).На правой стенке:

$$\overrightarrow{n_{\text{оп}}} = (-1{,}0{,}0)$$

Составляющие поля (x=a):

$$\dot{H}_{mz}|_{x=a} = 1{,}98 \cdot 10^3 e^{-j250{,}629z}$$

$$\dot{H}_{mx}|_{x=a} = 0$$

$$\dot{H}_{my}|_{x=a} = 0$$

$$\vec{J}_{\text{пов пр}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}98 \cdot 10^3 e^{-j250{,}629z} \end{vmatrix} = 1{,}98 \cdot 10^3 e^{-j250{,}629z}\, \overrightarrow{e_y} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{J}_{\text{пов пр}\, x} = \vec{J}_{\text{пов л}\, z} = 0 \\ \vec{J}_{\text{пов пр}\, y} = 1{,}98 \cdot 10^3 e^{-j250{,}629z} \end{cases}$$

В).На верхней стенке:

$$\overrightarrow{n_{\text{ов}}} = (0,-1{,}0)$$

Составляющие поля не зависят от y.

$$\vec{J}_{\text{пов в}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ 0 & -1 & 0 \\ \dot{H}_{mx} & 0 & \dot{H}_{mz} \end{vmatrix} = -\overrightarrow{e_x}\dot{H}_{mz} + \overrightarrow{e_z}\dot{H}_{mx} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{J}_{\text{пов в}\, x} = 1{,}98 \cdot 10^3 e^{-j250{,}629z} \\ \vec{J}_{\text{пов в}\, y} = 0 \\ \vec{J}_{\text{пов в}\, z} = -3{,}63 \cdot 10^3\ i\, sin(136{,}59x) e^{-j250{,}629z} \end{cases}$$

Г).На нижней стенке:

$$\overrightarrow{n_{\text{он}}} = (0,1,0)$$

$$\dot{\vec{J}}_{\text{пов в}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dot{H}_{mx} & 0 & \dot{H}_{mz} \end{vmatrix} = \overrightarrow{e_x}\dot{H}_{mz} - \overrightarrow{e_z}\dot{H}_{mx} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{\vec{J}}_{\text{пов в}\,x} = -1{,}98 \cdot 10^3 e^{-j250{,}629z} \\ \dot{\vec{J}}_{\text{пов в}\,y} = 0 \\ \dot{\vec{J}}_{\text{пов в}\,z} = 3{,}63 \cdot 10^3\ i\, sin(136{,}59x) e^{-j250{,}629z} \end{cases}$$

Задача №2.

В круглом волноводе диаметром 19,5 см распространяется волна типа H_{11}. Частота колебаний 6,054 ГГц, передаваемая мощность 14,5 кВт. Определить максимальное значение напряжённости электрического поля и амплитуду поверхностной плотности тока на стенках волновода.

Дано:

$d = 0{,}195$ м

$f = 6{,}054 \cdot 10^9$ Гц

$P_{\text{ср}} = 14{,}5 \cdot 10^3$ Вт

$\varepsilon_r = \mu_r = 1$

Решение.

1).Радиус волновода:

$$a = \frac{d}{2}$$

$$a = \frac{0{,}195}{2} = 0{,}0975 \text{ (м)}$$

2).Длина волны в среде волновода (среда неограниченная):

$$\lambda = \frac{c}{f} \; (\varepsilon_r = \mu_r = 1)$$

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{6{,}054 \cdot 10^9} = 0{,}0496 \text{ (м)}$$

3).Волновое сопротивление среды:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi = 377 \text{ (Ом)}$$

4).Критическая длина волны для поля H_{11}:

$$\lambda_{\text{кр}} = 3{,}41a$$

$$\lambda_{\text{кр}} = 3{,}41 \cdot 0{,}0975 = 0{,}332 \text{ (м)}$$

5).Максимальное значение напряжённости электрического поля:

$$P_{\text{ср}} = \frac{\pi a^2 E_0^2}{4{,}28 Z_0}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}, \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{4{,}28 Z_0 P_{\text{ср}}}{\pi a^2 \sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}}$$

$$E_0 = \sqrt{\frac{4{,}28 \cdot 377 \cdot 14{,}5 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0{,}0975^2 \sqrt{1-\left(\frac{0{,}0496}{0{,}332}\right)^2}}} \approx 28000\ (\text{В/м})$$

6).Продольная постоянная распространения:

$$k_0 = k\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}$$

$$k_0 = \frac{2\pi}{0{,}0496}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{0{,}0496}{0{,}332}\right)^2} = 126{,}55\ (1/\text{м})$$

$$g = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{кр}}}$$

$$g = \frac{2\pi}{0{,}332} = 18{,}925\ (1/\text{м})$$

7).Выражения для составляющих поля H_{11} в круглом волноводе:

$$\dot{E}_r = i\frac{w\mu_a}{g^2 r} H J_1(gr) sin\varphi e^{-ik_0 z}$$

$$\dot{E}_\varphi = i\frac{w\mu_a}{g} H J_1'(gr) cos\varphi e^{-ik_0 z}$$

$$\dot{E}_z = 0$$

$$\dot{H}_r = i\frac{k_0}{g} H J_1'(gr) cos\varphi e^{-ik_0 z}$$

$$\dot{H}_\varphi = i\frac{k_0}{g^2 r} H J_1(gr) sin\varphi e^{-ik_0 z}$$

$$\dot{H}_z = H J_1(gr) cos\varphi e^{-ik_0 z}$$

Определим H из условия:

$$E_r\left(0,\frac{\pi}{2},0\right)=E_0$$

$$\frac{w\mu_a}{g^2}H\frac{J_1(0)}{0}=E_0$$

$$\frac{J_1(0)}{0}=\frac{1}{2},\Longrightarrow E_0=\frac{w\mu_a}{2g^2}H$$

$$H=\frac{2E_0g^2}{w\mu_a}$$

$$H=\frac{2\cdot 28000\cdot 18{,}925^2}{2\pi\cdot 6{,}054\cdot 10^9\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}}=419{,}59\ (\text{А/м})$$

Составляющие поля:

$$\dot{E}_r=56\cdot 10^3 i\frac{J_1(18{,}925r)}{r}sin\varphi e^{-i126{,}55z}$$

$$\dot{E}_\varphi=1{,}06\cdot 10^6 i\,J_1'(18{,}925r)cos\varphi e^{-i126{,}55z}$$

$$\dot{E}_z=0$$

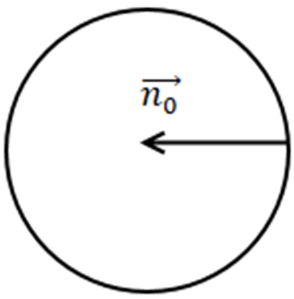
$$\dot{H}_r=2805{,}76i\,J_1'(18{,}925r)cos\varphi e^{-i126{,}55z}$$

$$\dot{H}_\varphi=148{,}257i\,\frac{J_1(18{,}925r)}{r}sin\varphi e^{-i126{,}55z}$$

$$\dot{H}_z=419{,}59J_1(18{,}925r)cos\varphi e^{-i126{,}55z}$$

8).Плотность поверхностных токов:

$$\overrightarrow{n_0}=(-r_0,0{,}0)$$



$\overrightarrow{J_{\text{пов}}} = [\overrightarrow{n_0}, \vec{H}]$ *при r=a*

$$\overrightarrow{J_{\text{пов}}} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\overrightarrow{e_r} & \overrightarrow{e_\varphi} & \frac{1}{r}\overrightarrow{e_z} \\ -r_0 & 0 & 0 \\ \dot{H}_r & \dot{H}_\varphi & \dot{H}_z \end{vmatrix} = r_0\dot{H}_z\overrightarrow{e_\varphi} - \frac{1}{r}r_0\dot{H}_\varphi\overrightarrow{e_z}$$

$r_0 = 1; \quad \overrightarrow{n_0} = (-1,0,0)$

$J_1(18{,}925r)|_{r=a} = J_1(1{,}845) = 0{,}5814$

Составляющие плотности поверхностных токов

$\overrightarrow{J_r} = 0$

$\overrightarrow{J_\varphi} = 243{,}95 cos\varphi e^{-i126{,}55z}$

$\overrightarrow{J_z} = -9067{,}363i\ sin\varphi e^{-i126{,}55z}$

Задача №3.

При каком диаметре круглого волновода, заполненного диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon_r = 9{,}9$, в нём может распространяться только основной тип волны на частоте 10,9 ГГц?

Дано:
$\varepsilon_r = 9{,}9$
$\mu_r = 1$
$f = 10{,}9 \cdot 10^9$ Гц

Решение.

1).Критическая длина волны типа H_{11} (основного типа волны в круглом волноводе):

$\lambda_{\text{кр}} = 3{,}41a$

a *– радиус сечения волновода*

2).Условие распространения для волны типа H_{11}:

$\lambda < \lambda_{\text{кр}\,H_{11}} = 3{,}41a$

3).Условие распространения в волноводе только основного типа волны:

$f_{\text{кр}\,H_{11}} < f < f_{\text{кр}\,E_{01}}$ *или* $\lambda_{\text{кр}\,E_{01}} < \lambda < \lambda_{\text{кр}\,H_{11}}$.

Критическая длина волны для поля E_{01}:

$\lambda_{\text{кр}\,E_{01}} = 2{,}61a$

4).Длина волны в неограниченной среде волновода:

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c}{f\sqrt{\varepsilon_r}}\ (\mu_r = 1)$$

λ_0 *– длина волны в воздухе*

$c = 3 \cdot 10^8$ (м/с) *– скорость света*

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{10{,}9 \cdot 10^9 \cdot \sqrt{9{,}9}} = 0{,}00875 \text{ (м)}$$

5). $\quad 2{,}61a < 0{,}00875 < 3{,}41a$

$2{,}56 \text{ (мм)} < a < 3{,}35 \text{ (мм)}, \Longrightarrow\ 5{,}12 \text{ (мм)} < d < 6{,}7 \text{ (мм)}$

Задача №4.

В волноводе квадратного сечения, стенки которого сделаны из материала с проводимостью $\sigma = 7{,}5 \cdot 10^7\ \text{См/м}$*, распространяется волна типа* H_{11}. *Определить частоту поля, при котором затухание минимально, минимальное значение коэффициента ослабления и диапазон частот, в пределах которого погонное затухание отличается не более чем на 50%.*

Дано:
$\sigma = 7{,}5 \cdot 10^7\ \text{См/м}$
$\mu_r = \varepsilon_r = 1$ *(из допущения, что среда – воздух)*
$a = 10\ \text{мм}$ *(допущение)*

<u>Решение.</u>

Потери в волноводе:
$\alpha = \alpha_M + \alpha_д$

α_M *– коэффициент ослабления в металле*
$\alpha_д$ *– коэффициент ослабления в диэлектрике*

Так как средой, заполняющей волновод, является воздух, потерями в диэлектрике можно пренебречь $(\alpha_д \to 0), \Longrightarrow \alpha \approx \alpha_д$.

Коэффициент ослабления в металле для волны типа H_{11}*:*

$$\alpha_M = \frac{2R_s}{Z_0 a \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} \left(2\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2 + \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2\right)$$

$\lambda_{кр} = 3{,}41a = 0{,}0341\ (\text{м})$ *– критическая длина волны для поля* H_{11}*;*

$\lambda = \frac{c}{f}$ *– длина волны в среде волновода, где с – скорость света;*

$Z_0 = 377\ (\text{Ом})$ *– волновое сопротивление среды;*

$R_s = \sqrt{\frac{w\mu_a}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{\pi f \mu_0}{\sigma}}$ *– поверхностное сопротивление металла*

Таким образом, получим функцию от частоты:

$$\alpha(f) = \frac{2\sqrt{\frac{\pi f \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{7{,}5 \cdot 10^{7}}} \cdot \sqrt{2\left(\frac{3 \cdot 10^{8}}{0.0341f}\right)^{2} + \left(1 - \frac{3 \cdot 10^{8}}{0.0341f}\right)^{2}}}{377 \cdot 0{,}01 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{3 \cdot 10^{8}}{0.0341f}\right)^{2}}}$$

Условие максимума/минимума функции:

$$\frac{d\alpha(f)}{df} = 0, \Longrightarrow f_{min} = 1{,}927 \cdot 10^{10}\ \text{Гц}$$

Минимальный коэффициент ослабления:

$$\alpha(f_{min}) = 0.016\ (1/\text{м})$$

Погонное затухание по мощности:

$$k(f) = e^{-2\alpha(f)L}$$

$$L = 1\ (\text{м})$$

$$k_{max}(f) = e^{-2\alpha_{min}(f)L} = e^{-2\cdot 0.016\cdot 1} = 0.968$$

Половина погонного затухания:

$$\frac{1}{2}k_{max} = 0.484$$

Диапазон частот, в пределах которого погонное затухание отличается не более чем на 50% (от 0.968 до 0.484):

$$88.0635 \cdot 10^{8}\ (\text{Гц}) < f < 8.9 \cdot 10^{12}\ (\text{Гц})$$