

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Факультет «Радиоэлектроника и лазерная техника(РЛ)»

Кафедра «Радиоэлектронные системы и устройства(РЛ1)»

Домашнее задание №2

по дисциплине

«Электродинамика и распространение радиоволн»

Вариант № 12

Выполнил ст. группы РЛ6-41

Филимонов С.В.

Проверил Русов Ю.С.

Оценка в баллах _____

Москва, 2022

Задание № 1

Условие.

В прямоугольном волноводе сечением $23 \times 10 \text{ мм}^2$ распространяется волна типа H_{10} . Волновод заполнен диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_r = (1 + 0,25 \cdot M + 0,01 \cdot N)$ и относительной магнитной проницаемостью $\mu_r = 1$. Амплитуда напряжённости электрического поля в центре волновода равна $(M + 2,4 \cdot N) \cdot 10^4 \text{ В/м}$. Частота колебаний $(1 + 0,008 \cdot N) \cdot 10 \text{ ГГц}$. Записать выражения для составляющих поля волны, определить мощность, передаваемую волной, фазовую и групповую скорости, длину волны в волноводе, а также плотности поверхностных токов на стенках (плотности поверхностных токов записать в виде выражений для четырех стенок).

Дано:

$$M = 5, N = 12$$

$$a = 23 \text{ [мм]}, b = 10 \text{ [мм]}$$

$$\epsilon_r = 2,37$$

$$\mu_r = 1$$

$$f = 10,96 \text{ [ГГц]}$$

$$E_0 = 338000 \left[\frac{\text{В}}{\text{м}} \right]$$

Решение.

Поле H_{10} в прямоугольном волноводе:

$$H_{m3} = H \cdot \cos\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \cdot e^{-ik_0 x_3}$$

$$H_{m1} = i \cdot \frac{2a}{\lambda} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \cdot H \cdot \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \cdot e^{-ik_0 x_3}$$

$$E_{m2} = -i \cdot \frac{2a}{\lambda} \cdot Z_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \cdot e^{-ik_0 x_3}$$

$$H_{m2} = 0; E_{m1} = 0; E_{m3} = 0$$

Критическая длина волны для поля Н₁₀ в прямоугольном волноводе

$$\lambda_{кр} = 2a \implies \lambda_{кр} = 2 \cdot 0,023 = 0,046 [\text{м}].$$

Длина волны в среде волновода, при условии что она не ограничена

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r}},$$

где λ_0 - длина волны в воздухе.

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{1,096 \cdot 10^{10}} = 0,027 [\text{м}],$$

$$\lambda = \frac{0,0283}{\sqrt{2,12}} = 0,017 [\text{м}].$$

Длина волны в волноводе

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} = \frac{0,017}{\sqrt{1 - \left(\frac{0,017}{0,046}\right)^2}} = 0,019 [\text{м}].$$

Продольная постоянная распространения

$$k_0 = k \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2},$$

$$k_0 = \frac{2\pi}{0,017} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0,017}{0,046}\right)^2} = 325,916 \left[\frac{1}{\text{м}}\right].$$

Характеристическое сопротивление среды, заполняющие волновод

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_r \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{1,25 \cdot 10^6}{2,37 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}} = 244,12 [\text{Ом}].$$

Характеристическое сопротивление волновода для волны Н₁₀

$$Z_{OH} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} = \frac{244,12}{\sqrt{1 - \left(\frac{0,017}{2 \cdot 0,023}\right)^2}} = 264,69 [\text{Ом}].$$

Определим масштабный множитель Н

$$|E_{m2}| = \frac{2a}{\lambda} Z_0 H \cdot \sin \frac{\pi}{a} \cdot \frac{a}{2} = \frac{2a}{\lambda} Z_0 H \Rightarrow$$

$$H = \frac{|E_{m2}| \cdot \lambda}{2a \cdot Z_0} = \frac{E_0 \cdot \lambda}{2a \cdot Z_c}$$

$$H = \frac{0,017 \cdot 3,38 \cdot 10^6}{0,046 \cdot 244,123} = 533 \left[\frac{A}{\mathcal{M}} \right].$$

Выразим для составляющих поля в численном виде

$$H_{mx3} = 533 \cdot \cos \left(\frac{\pi x_1}{0,023} \right) \cdot e^{-i \cdot 325,91 \cdot x_3} \left[\frac{A}{\mathcal{M}} \right]$$

$$H_{mx1} = i \cdot \frac{2 \cdot 0,023}{0,017} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0,017}{2 \cdot 0,023} \right)^2} \cdot 533 \cdot \sin \left(\frac{\pi x_1}{0,023} \right) \cdot e^{-i \cdot 325,91 \cdot x_3} \left[\frac{A}{\mathcal{M}} \right],$$

$$H_{mx1} = i \cdot 1340 \cdot \sin \left(\frac{\pi x_1}{0,023} \right) \cdot e^{-i \cdot 325,91 \cdot z} \left[\frac{A}{\mathcal{M}} \right],$$

$$E_{mx2} = -i \cdot \frac{2 \cdot 0,023}{0,017} \cdot 244,12 \cdot \sin \left(\frac{\pi x_1}{0,023} \right) \cdot e^{-i \cdot 325,91 \cdot x_3} \left[\frac{B}{\mathcal{M}} \right],$$

$$E_{mx2} = -i \cdot 660,56 \cdot \sin \left(\frac{\pi x_1}{0,023} \right) \cdot e^{-i \cdot 325,91 \cdot x_3} \left[\frac{B}{\mathcal{M}} \right],$$

$$H_{m2} = 0 \left[\frac{A}{\mathcal{M}} \right]; E_{m1} = 0 \left[\frac{B}{\mathcal{M}} \right]; E_{m3} = 0 \left[\frac{B}{\mathcal{M}} \right].$$

Мощность, передаваемая волноводом. Мощность, переносимая волной
любого типа в волноводе

$$P_0 = \frac{1}{2} \int_S Re \left\{ \vec{z}_0 \cdot \left[\vec{E}, \vec{H}^* \right] \right\} dS,$$

где \vec{z}_0 — орт оси, вдоль которой распространяется волна.

Для волны Н₁₀ в прямоугольном волноводе

$$P_0 = \frac{ab \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2}}{4Z_0} E_0^2,$$

$$P_0 = \frac{0,023 \cdot 0,01 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0,017}{2 \cdot 0,023}\right)^2}}{4 \cdot 244,12} \cdot (3,38 \cdot 10^6)^2 = 24817 \text{ [Вт]}.$$

Фазовая и групповая скорость

$$v_\phi = \frac{\frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}} = \frac{\frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2,37 \cdot 1}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{0,017}{0,046}\right)^2}} = 2,11 \cdot 10^8 \left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right],$$

$$v_z = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2,37 \cdot 1}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0,017}{0,046}\right)^2} = 1,79 \cdot 10^8 \left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right].$$

Плотность поверхностных токов

$$\vec{J}_{\text{пов}} = \left[\vec{n}_0 \vec{H} \right],$$

1) На левой стенке

$$\vec{n}_{\text{ол}} = [0, 1, 0]$$

Составляющие поля ($x_1 = 0$)

$$\dot{H}_{m3}|_{x_1=0} = 533 \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot x_3} \left[\frac{\text{А}}{\text{м}}\right]$$

$$\dot{H}_{m2}|_{x_1=0} = 0 \left[\frac{\text{А}}{\text{м}}\right]$$

$$\dot{H}_{m1}|_{x_1=0} = 0 \left[\frac{\text{А}}{\text{м}}\right]$$

$$\vec{j}_{\text{пов.л.}} = \begin{bmatrix} \vec{e}_{x_1} & \vec{e}_{x_2} & \vec{e}_{x_3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{H}_{m3} \end{bmatrix} = -\dot{H}_{m3} \cdot \vec{e}_{x_2} \Rightarrow$$

$$\vec{j}_{\text{пов.л.}x_1} = \vec{j}_{\text{пов.л.}x_3} = 0 \left[\frac{\text{А}}{\text{м}}\right]$$

$$\vec{j}_{\text{пов.л.}x_2} = -533 \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot x_3} \left[\frac{\text{А}}{\text{м}}\right]$$

2) На правой стенке

$$\vec{n}_{\text{оп}} = [-1, 0, 0]$$

Составляющие поля ($x_1 = a$)

$$H_{m3}|_{x=a} = 533 \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot x_3} \left[\frac{A}{M} \right]$$

$$H_{m2}|_{x=a} = 0 \left[\frac{A}{M} \right]$$

$$H_{m1}|_{x=a} = 0 \left[\frac{A}{M} \right]$$

$$\vec{j}_{\text{пов.л.}} = \begin{bmatrix} \vec{e}_{x_1} & \vec{e}_{x_2} & \vec{e}_{x_3} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{m3} \end{bmatrix} = H_{m3} \cdot \vec{e}_{x_2} \Rightarrow$$

$$\vec{j}_{\text{пов.л.}x_1} = \vec{j}_{\text{пов.л.}x_3} = 0 \left[\frac{A}{M} \right]$$

$$\vec{j}_{\text{пов.л.}x_2} = 533 \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot x_3} \left[\frac{A}{M} \right]$$

3) На верхней стенке

$$\vec{n}_{\text{ов}} = [0, -1, 0]$$

Составляющие поля не зависят от x_2

$$\vec{j}_{\text{пов.в.}} = \begin{bmatrix} \vec{e}_{x_1} & \vec{e}_{x_2} & \vec{e}_{x_3} \\ 0 & -1 & 0 \\ H_{m1} & 0 & H_{m3} \end{bmatrix} = -\vec{e}_{x_1} H_{m3} + \vec{e}_{x_3} H_{m1} \Rightarrow$$

$$\vec{j}_{\text{пов.в.}x_1} = 533 \cdot \cos\left(\frac{\pi x_1}{0,023}\right) \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot x_3} \left[\frac{A}{M} \right]$$

$$\vec{j}_{\text{пов.в.}x_2} = 0 \left[\frac{A}{M} \right]$$

$$\vec{j}_{\text{пов.в.}x_3} = -i \cdot 1340 \cdot \sin\left(\frac{\pi x_1}{0,023}\right) \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot x_3} \left[\frac{A}{M} \right]$$

4) На нижней стенке

$$\overrightarrow{n_{\text{OH}}} = [0, 1, 0]$$

Составляющие поля не зависят от x_2

$$\overrightarrow{j_{\text{пов.н.}}} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{e_{x_1}} & \overrightarrow{e_{x_2}} & \overrightarrow{e_{x_3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dot{H}_{m1} & 0 & \dot{H}_{m3} \end{bmatrix} = \overrightarrow{e_{x_1}} \dot{H}_{m3} - \overrightarrow{e_{x_3}} \dot{H}_{m1} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{j_{\text{пов.н.}x_1}} = -533 \cdot \cos\left(\frac{\pi x_1}{0,023}\right) \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot x_3} \left[\frac{A}{\mathcal{M}}\right],$$

$$\overrightarrow{j_{\text{пов.н.}x_2}} = 0 \left[\frac{A}{\mathcal{M}}\right],$$

$$\overrightarrow{j_{\text{пов.н.}x_3}} = i \cdot 1340 \cdot \sin\left(\frac{\pi x_1}{0,023}\right) \cdot e^{-j \cdot 325,91 \cdot x_3} \left[\frac{A}{\mathcal{M}}\right].$$

Задание № 2

Условие.

В круглом заполненном воздухом волноводе диаметром $(1+0,12 \cdot M + 0,1 \cdot N) \cdot 5$ см распространяется волна типа H_{11} . Частота колебаний $5 \cdot (1+0,012 \cdot N)$ ГГц, передаваемая мощность $(1+0,012 \cdot M) \cdot 1$ кВт. Определить максимальное значение напряжённости электрического поля в волноводе.

Дано:

$$M = 5, N = 12$$

$$d = 0,14 \text{ [м]}$$

$$f = 5,132 \text{ [ГГц]}$$

$$P_0 = 1060 \text{ [Вт]}$$

$$\varepsilon_r = 1$$

$$\mu_r = 1$$

Решение.

Для начала определим радиус волновода

$$a = \frac{d}{2} = \frac{0,14}{2} = 0,07 \text{ [м]}.$$

Длина волны в среде волновода (среда неограниченная)

$$\lambda = \frac{c}{f}, (\varepsilon_r = \mu_r = 1)$$

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{5,132 \cdot 10^9} = 0,058 \text{ [м]}.$$

Волновое сопротивление среды

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120 \cdot \pi = 377 \text{ [Ом]}.$$

Критическая длина волны для H_{11}

$$\lambda_{\text{кр}} = 3,41 \cdot a = 3,41 \cdot 0,07 = 0,23 \text{ [м]}.$$

Мощность, переносимая волной любого типа в волноводе

$$P_0 = \frac{1}{2} \int_S \operatorname{Re} \left\{ \vec{z}_0 \cdot [\vec{E}, \vec{H}^*] \right\} dS,$$

где \vec{z}_0 – орт оси, вдоль которой распространяется волна.

Для волны Н₁₁ в круглом волноводе

$$P_{\text{ср}} = \frac{\pi a^2 E_0^2}{4,28 \cdot Z_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2}, \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{4,28 \cdot Z_0 \cdot P_{\text{ср}}}{\pi a^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2}}},$$

$$E_0 = \sqrt{\frac{4,28 \cdot 377 \cdot 1060}{\pi \cdot 0,07^2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0,058}{0,23} \right)^2}}} = 10705 \left[\frac{B}{\text{м}} \right].$$

Задание № 3

Условие.

При каком диаметре круглого волновода, заполненного диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью $\epsilon_r = (M+0,055 \cdot N)$ и относительной магнитной проницаемостью $\mu_r = 1$, в нем может распространяться только основной тип волны на частоте $(1+0,055 \cdot N) \cdot 12$ ГГц.

Дано:

$$M = 5, N = 12$$

$$\epsilon_r = 5,66$$

$$\mu_r = 1$$

$$f = 19,92 \text{ [ГГц]}$$

Решение.

Критическая длина волны типа H_{11}

$$\lambda_{кр} = 3,41 \cdot a,$$

где a - радиус сечения волновода. Исходя из условия распространения для волны типа H_{11}

$$\lambda < \lambda_{кр H_{11}} = 3,41 \cdot a,$$

и условия распространения в волноводе только основного типа волны

$$f_{кр H_{11}} \leq f < f_{кр E_{01}} \text{ или } \lambda_{кр E_{01}} < \lambda \leq \lambda_{кр H_{11}}.$$

Критическая длина волны для поля E_{01}

$$\lambda_{кр E_{01}} = 2,61 \cdot a.$$

Длина волны в неограниченной среде волновода

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r}} = \frac{c}{f \cdot \sqrt{\epsilon_r \cdot \mu_r}},$$

где λ_0 - длина волны в воздухе, а c - скорость света в вакууме.

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{1,92 \cdot 10^{10} \cdot \sqrt{5,6 \cdot 1}} = 0,006 [\mu].$$

Тогда

$$2,61 \cdot a < 0,006 \leq 3,41 \cdot a,$$

$$1,86 [\text{мм}] < a \leq 2,43 [\text{мм}] \implies 3,71 [\text{мм}] < d \leq 4,85 [\text{мм}].$$

Задание № 4

Условие.

В волноводе квадратного сечения с размерами $a = b = 7,2$ мм, заполненном воздухом, стенки которого сделаны из материала с проводимостью $\sigma = (0,5 \cdot M + 0,011 \cdot N) \cdot 10^7$ См/м, распространяется волна типа H_{11} . Определить частоту поля, при которой затухание минимально, минимальное значение коэффициента затухания и диапазон частот, в пределах которого значение коэффициента затухания отличается от минимального не более чем на 10%. Показать этот диапазон на графике. При расчётах учитывать только потери в металле.

Дано:

$$M = 5, N = 12$$

$$a = b = 7,2 \text{ [мм]}$$

$$\sigma = 26320000 \left[\frac{\text{См}}{\text{м}} \right]$$

$$\mu_r = \varepsilon_r = 1$$

Решение.

Потери в волноводе

$$\alpha = \alpha_M + \alpha_D,$$

где α_M - коэффициент ослабления в металле и α_D - коэффициент ослабления в диэлектрике. Так как средой, заполняющей волновод, является воздух, потерями в диэлектрике можно пренебречь

$$(\alpha_D \rightarrow 0), \Rightarrow \alpha \approx \alpha_M.$$

Коэффициент ослабления за счёт потерь в металлических стенках для любого типа волны в волноводе произвольного поперечного сечения площадью S

$$\alpha_M = \frac{1}{2} \frac{R_s \int_L |\dot{H}_\tau|^2 dl}{\int_S \operatorname{Re} [\vec{E}, \vec{H}^*] dS}$$

Коэффициент ослабления в металле для волны типа Н₁₁

$$\alpha_M = \frac{2R_s}{Z_0 b \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} \left(\left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2\right) \cdot \frac{\frac{b}{a} \left(\frac{b}{a} n^2 + m^2\right)}{\frac{b^2}{a^2} n^2 + m^2} \right),$$

Так как $a = b = 7,2$ [мм], а $m = n = 1$, то

$$\alpha_M = \frac{2R_s}{Z_0 a \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} \left(1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2 \right),$$

где

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2\pi}{\chi} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{0,072}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,072}\right)^2}} = 0,0102 \text{ [м]},$$

это критическая длина волны для поля Н₁₁,

$$\lambda_0 = \frac{c}{f},$$

длина волны в среде волновода, где c - скорость света.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120 \cdot \pi = 377 \text{ [Ом]},$$

волновое сопротивление среды и

$$R_s = \sqrt{\frac{w\mu_a}{2\sigma}} = \sqrt{\frac{\pi f \mu_r \mu_0}{\sigma}},$$

поверхностное сопротивление металла.

$$\alpha_M = \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot f \cdot 1,25 \cdot 10^{-6}}{2,62 \cdot 10^7}}}{377 \cdot 0,0072 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{3 \cdot 10^8}{0,0102 \cdot f}\right)^2}} \left(1 + \left(\frac{3 \cdot 10^8}{0,0102 \cdot f}\right)^2 \right),$$

$$\alpha_M = \frac{2,85 \cdot 10^{-7} \cdot \sqrt{f}}{\sqrt{1 - \frac{8,41 \cdot 10^{20}}{f^2}}} \left(1 + \frac{8,41 \cdot 10^{20}}{f^2} \right).$$

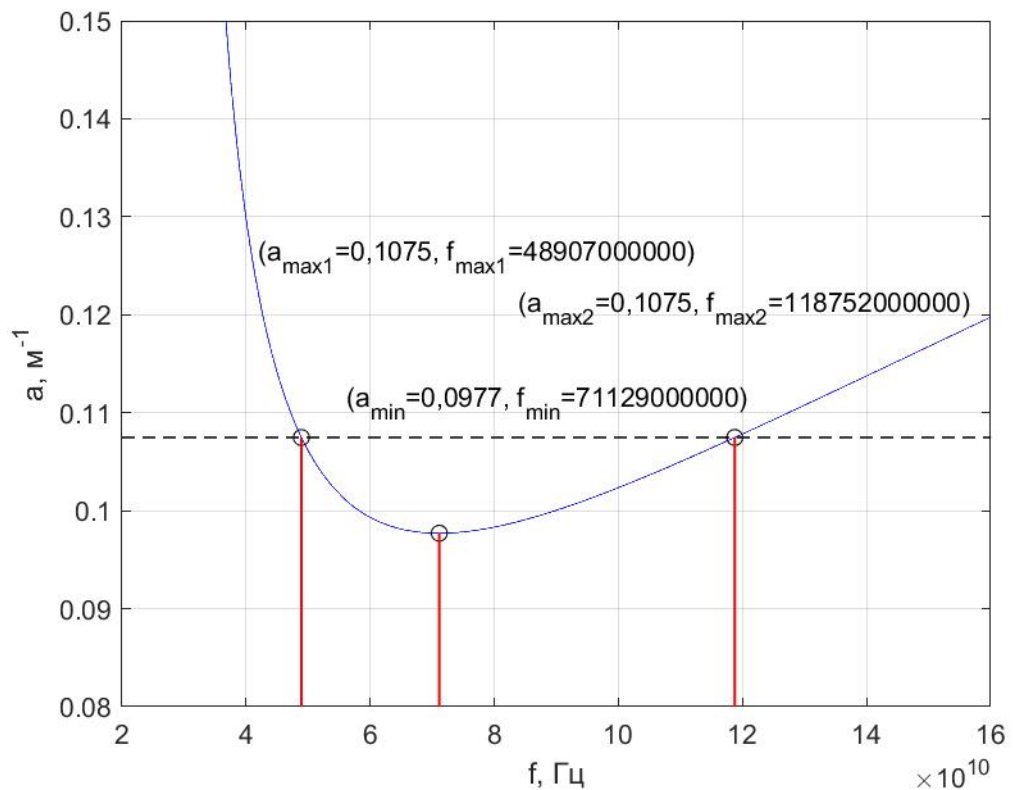


Рисунок 1 - график $a(f)$.

По графику функции видно, что при частоте

$$f_0 = 71129000000 \text{ [Гц]}$$

Минимальный коэффициент ослабления

$$\alpha(f_0) = 0,0977 \text{ [м}^{-1}\text{]}$$

Коэффициент ослабления, отличающийся на 10 % от минимального

$$\alpha(f_0) \cdot 1,1 = 0,1075 \text{ [м}^{-1}\text{]}$$

Согласно графику, диапазон частот, в пределах которого значение коэффициента затухания отличается от минимального не более чем на 10 %

$$48907000000 \text{ [Гц]} \leq f \leq 118752000000 \text{ [Гц]}.$$