

# Электронный учебно-методический комплекс

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Учебная программа дисциплины

### ➤ Учебное пособие

Конспект лекций

Практикум

Методические указания по лабораторным работам

Методические указания по самостоятельной работе

Банк тестовых заданий в системе UniTest



Красноярск  
ИПК СФУ  
2008

УДК 621.3.01(07)  
ББК 31.2я73  
И18

Электронный учебно-методический комплекс по дисциплине «Теоретические основы электротехники» подготовлен в рамках инновационной образовательной программы «Создание инновационного центра подготовки специалистов мирового уровня в области автоматизированных электротехнических комплексов для цветной металлургии и машиностроения», реализованной в ФГОУ ВПО СФУ в 2007 г.

Рецензенты:

Красноярский краевой фонд науки;  
Экспертная комиссия СФУ по подготовке учебно-методических комплексов дисциплин

**Иванова, С. Г.**

И18

Теоретические основы электротехники. Версия 1.0 [Электронный ресурс] : электрон. учеб. пособие / С. Г. Иванова, В. В. Новиков. – Электрон. дан. (10 Мб). – Красноярск : ИПК СФУ, 2008. – (Теоретические основы электротехники : УМКД № 11-2007 / рук. творч. коллектива С. Г. Иванова). – 1 электрон. опт. диск (DVD). – Систем. требования : Intel Pentium (или аналогичный процессор других производителей) 1 ГГц ; 512 Мб оперативной памяти ; 10 Мб свободного дискового пространства ; привод DVD ; операционная система Microsoft Windows 2000 SP 4 / XP SP 2 / Vista (32 бит) ; Adobe Reader 7.0 (или аналогичный продукт для чтения файлов формата pdf).

ISBN 978-5-7638-1037-0 (комплекса)

ISBN 978-5-7638-1529-0 (пособия)

Номер гос. регистрации в ФГУП НТЦ «Информрегистр» 0320802411 от 27.11.2008 г. (комплекса)

Настоящее издание является частью электронного учебно-методического комплекса по дисциплине «Теоретические основы электротехники», включающего учебную программу, конспект лекций, практикум, методические указания по самостоятельной работе, методические указания по лабораторным работам, контрольно-измерительные материалы «Теоретические основы электротехники. Банк тестовых заданий», а также наглядное пособие «Теоретические основы электротехники. Презентационные материалы».

Изложен теоретический материал по разделу «Электрические цепи». Рассмотрены процессы в линейных электрических цепях при постоянных синусоидальных воздействиях; переходные процессы, нелинейные электрические и магнитные цепи при постоянных синусоидальных воздействиях, а также пассивные четырехполюсники. Приведен анализ однофазных и трехфазных цепей, сопровождающийся решением конкретных примеров.

Предназначено для студентов направлений подготовки бакалавров 140200.62 «Электроэнергетика» и 140600.62 «Электротехника, электромеханика и электротехнологии» укрупненной группы 140000 «Энергетика, энергетическое машиностроение и электротехника».

© Сибирский федеральный университет, 2008

Рекомендовано Инновационно-методическим управлением СФУ  
в качестве учебного пособия

Редактор Л. И. Злобина

Разработка и оформление электронного образовательного ресурса: Центр технологий электронного обучения информационно-аналитического департамента СФУ; лаборатория по разработке мультимедийных электронных образовательных ресурсов при КрЦНИТ

Содержимое ресурса охраняется законом об авторском праве. Несанкционированное копирование и использование данного продукта запрещается. Встречающиеся названия программного обеспечения, изделий, устройств или систем могут являться зарегистрированными товарными знаками тех или иных фирм.

Подп. к использованию 30.09.2008

Объем 10 Мб

Красноярск: СФУ, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79

## Оглавление

<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>9</b>
<b>ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ .....</b>	<b>11</b>
1.1. Интегральные величины электромагнитного поля, применяемые в теории электрических цепей .....	11
1.2. Элементы схем замещения электрических цепей .....	12
1.3. Геометрические элементы схем замещения .....	14
<b>ГЛАВА 2. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА .....</b>	<b>15</b>
2.1. Основные законы .....	15
2.1.1. Закон Ома .....	15
2.1.2. Первый закон Кирхгофа .....	16
2.1.3. Второй закон Кирхгофа .....	16
2.1.4. Закон Ома для активной ветви .....	17
2.1.5. Баланс мощностей.....	18
2.2. Взаимное преобразование схем замещения источников энергии .....	19
2.3. Потенциальная диаграмма.....	20
2.4. Методы расчета токов .....	22
2.4.1. Метод непосредственного использования законов Кирхгофа .....	22
2.4.2. Метод контурных токов .....	24
2.4.3. Метод узловых потенциалов.....	27
2.4.4. Метод напряжения между двумя узлами .....	29
2.4.5. Метод эквивалентных преобразований .....	30
2.4.6. Метод пропорционального пересчета .....	32
2.4.7. Метод наложения .....	33
2.4.8. Метод эквивалентного генератора .....	36
2.5. Передача энергии от активного двухполюсника к пассивному.....	38
<b>ГЛАВА 3. ОДНОФАЗНЫЕ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА .....</b>	<b>41</b>
3.1. Преимущества переменного тока .....	41

<b>3.2. Способы представления гармонических функций.....</b>	<b>42</b>
<b>3.3. Действующие и средние значения гармонических величин.....</b>	<b>46</b>
3.3.1. Действующие значения .....	46
3.3.2. Средние значения.....	47
<b>3.4. Приемники в схемах замещения цепей синусоидального тока .....</b>	<b>48</b>
3.4.1. Идеальный резистор либо резистивный элемент .....	48
3.4.2. Индуктивный элемент либо идеальная индуктивная катушка.....	50
3.4.3. Идеальный конденсатор либо емкостный элемент.....	53
<b>3.5. Основные законы цепей переменного тока.....</b>	<b>56</b>
<b>3.6. Анализ цепи с последовательным соединением приемников .....</b>	<b>57</b>
<b>3.7. Резонанс напряжений .....</b>	<b>61</b>
<b>3.8. Анализ цепи с параллельным соединением приемников .....</b>	<b>64</b>
<b>3.9. Резонанс токов.....</b>	<b>67</b>
<b>3.10. Резонанс при смешанном соединении приемников .....</b>	<b>71</b>
<b>3.11. Расчет цепей синусоидального тока .....</b>	<b>72</b>
<b>3.12. Мощности цепей синусоидального тока.....</b>	<b>76</b>
<b>3.13. Понятие о коэффициенте мощности и способах его улучшения .....</b>	<b>77</b>
<b>3.14. Электрические цепи с взаимной индуктивностью.....</b>	<b>79</b>
3.14.1. Основные понятия и определения .....	79
3.14.2. Анализ цепи с последовательным соединением индуктивно связанных катушек.....	81
3.14.3. Анализ цепи с параллельным соединением индуктивно связанных катушек .....	85
3.14.4. Расчет электрических цепей при наличии взаимной индуктивности.....	88
3.14.5. Трансформатор без ферромагнитного сердечника.....	89
<b>ГЛАВА 4. ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ .....</b>	<b>91</b>
<b>4.1. Преимущества трехфазных цепей.....</b>	<b>91</b>
<b>4.2. Трехфазный генератор .....</b>	<b>92</b>
4.2.1. Принцип действия и разметка зажимов фаз обмотки .....	92
4.2.2. Способы изображения симметричной системы ЭДС .....	92
4.2.3. Способы соединения фаз обмоток генератора .....	94
4.2.4. Условные положительные направления фазных и линейных напряжений и соотношения между ними .....	95
<b>4.3. Классификация и способы включения в трехфазную цепь приемников ...</b>	<b>97</b>

<b>4.4. Расчет трехфазных цепей .....</b>	<b>97</b>
4.4.1. Соединение фаз приемника треугольником .....	97
4.4.2. Соединение звездой четырехпроводной с нейтральным проводом, обладающим сопротивлением.....	101
4.4.3. Соединение звездой четырехпроводной с нейтральным проводом без сопротивления .....	104
4.4.4. Соединение звездой трехпроводной.....	107
4.4.5. Общий случай расчета симметричных режимов .....	110
<b>4.5. Анализ аварийных режимов в трехфазных цепях .....</b>	<b>111</b>
4.5.1. Соединение звездой четырехпроводной .....	111
4.5.2. Соединение звездой трехпроводной.....	113
4.5.3. Соединение треугольником .....	122
<b>4.6. Мощности трехфазных цепей.....</b>	<b>124</b>
<b>4.7. Указатели последовательности чередования фаз (фазоуказатели) .....</b>	<b>128</b>
<b>4.8. Расчет цепей с несимметричной системой ЭДС .....</b>	<b>130</b>
4.8.1. Расчет при статической нагрузке.....	130
4.8.2. Расчет цепей при динамической нагрузке .....	133

## **ГЛАВА 5. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПРИ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ .....** 141

<b>5.1. Причины возникновения.....</b>	<b>141</b>
<b>5.2. Способы изображения несинусоидальных периодических функций.....</b>	<b>141</b>
<b>5.3. Действующие значения несинусоидальных периодических токов и напряжений.....</b>	<b>142</b>
<b>5.4. Коэффициенты, характеризующие периодические несинусоидальные функции.....</b>	<b>143</b>
<b>5.5. Мощности в цепях несинусоидального тока.....</b>	<b>144</b>
<b>5.6. Расчет однофазных цепей при несинусоидальных периодических воздействиях.....</b>	<b>146</b>
<b>5.7. Высшие гармоники в трехфазных цепях .....</b>	<b>148</b>

## **ГЛАВА 6. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ .....** 153

<b>6.1. Основные понятия. Законы коммутации.....</b>	<b>153</b>
<b>6.2. Классический метод расчета переходных процессов .....</b>	<b>154</b>
6.2.1. Суть метода .....	154

6.2.2. Подключение реального конденсатора к источнику постоянного напряжения .....	155
6.2.3. Разряд конденсатора на резистор.....	160
6.2.4. Подключение реальной катушки к источнику постоянного напряжения ....	163
6.2.5. Короткое замыкание индуктивной катушки .....	165
6.2.6. Подключение реальной индуктивной катушки к источнику синусоидального напряжения .....	167
6.2.7. Учет первого закона коммутации на практике .....	169
6.2.8. Подключение цепи с последовательным соединением реальной индуктивной катушки и конденсатора к источнику постоянного напряжения .....	169
6.2.9. Подключение цепи с последовательным соединением реальной индуктивной катушки и конденсатора к источнику синусоидального напряжения	177
6.2.10. Расчет переходного процесса в разветвленной цепи .....	178
<b>6.3. Операторный метод расчета переходных процессов .....</b>	<b>186</b>
<b>6.4. Применение метода переменных состояния для расчета переходных процессов .....</b>	<b>198</b>
<b>6.5. Расчет переходных процессов с помощью интеграла Дюамеля .....</b>	<b>204</b>

## **ГЛАВА 7. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА .....** 211

<b>7.1. Основные понятия и определения.....</b>	<b>211</b>
<b>7.2. Расчет простейших нелинейных цепей постоянного тока графическими методами.....</b>	<b>214</b>
7.2.1. Расчет нелинейной цепи с последовательным соединением элементов .	214
7.2.2. Расчет нелинейной цепи с параллельным соединением элементов.....	216
7.2.3. Расчет нелинейной цепи со смешанным соединением элементов.....	217
<b>7.3. Расчет нелинейных цепей методом итерации.....</b>	<b>219</b>
<b>7.4. Расчет нелинейных цепей методом Ньютона – Рафсона.....</b>	<b>221</b>
<b>7.5. Расчет нелинейных цепей методом напряжения между двумя узлами...</b>	<b>224</b>
<b>7.6. Замена нескольких параллельных ветвей, пассивных и активных, одной или эквивалентной.....</b>	<b>226</b>

## **ГЛАВА 8. МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА .....** 229

<b>8.1. Основные величины, характеризующие магнитные цепи .....</b>	<b>229</b>
<b>8.2. Основные законы магнитных цепей .....</b>	<b>231</b>

<b>8.3. Расчет неразветвленных магнитных цепей.....</b>	235
8.3.1. Прямая задача .....	235
8.3.2. Обратная задача.....	236
<b>8.4. Расчет разветвленных магнитных цепей.....</b>	238
8.4.1. Симметричные цепи .....	238
8.4.2. Несимметричные цепи .....	238
<b>8.5. Расчет магнитной цепи постоянного магнита.....</b>	242

## **ГЛАВА 9. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА .....** 245

<b>9.1. Магнитный поток и ЭДС катушки с ферромагнитным сердечником.....</b>	245
<b>9.2. Потери в катушке с ферромагнитным сердечником .....</b>	246
<b>9.3. Ток катушки с ферромагнитным сердечником .....</b>	247
<b>9.4. Схема замещения и векторная диаграмма катушки с ферромагнитным сердечником .....</b>	250
<b>9.5. Расчет параметров схемы замещения катушки с ферромагнитным сердечником .....</b>	251
9.5.1. Расчет параметров схемы замещения по результатам опытов .....	251
9.5.2. Расчет параметров схемы замещения по кривым удельных потерь .....	252
<b>9.6. Расчет нелинейных цепей методом кусочно-линейной аппроксимации ..</b>	253
9.6.1. Расчет цепи с однополупериодным выпрямителем.....	253
9.6.2. Расчет катушки с ферромагнитным сердечником .....	256
<b>9.7. Явление феррорезонанса .....</b>	259
9.7.1. Феррорезонанс напряжений .....	259
9.7.2. Феррорезонанс токов .....	262
<b>9.8. Феррорезонансные стабилизаторы напряжения .....</b>	263
9.8.1. Стабилизатор, в котором наблюдается явление феррорезонанса напряжений .....	264
9.8.2. Стабилизатор напряжения, в котором наблюдается феррорезонанс токов .....	265
9.8.3. Стабилизатор с обратной связью .....	266

## **ГЛАВА 10. ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ ПРИ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ .....** 268

<b>10.1. Четырехполюсники и их основные уравнения .....</b>	268
<b>10.2. Определение коэффициентов уравнений связи четырехполюсника ....</b>	272

10.3. Схемы замещения пассивного четырехполюсника .....	273
10.4. Режим четырехполюсника под нагрузкой .....	275
10.5. Характеристические параметры четырехполюсника.....	277
<b>ГЛАВА 11. ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ .....</b>	<b>281</b>
11.1. Основные понятия .....	281
11.2. Уравнения однородной линии.....	282
11.3. Синусоидальные напряжения и токи в линии.....	283
11.4. Вторичные параметры однородной линии.....	289
11.5. Зависимость режима работы линии от нагрузки .....	291
11.6. Согласованная и несогласованная нагрузка .....	295
11.7. Линии без потерь .....	296
11.8. Согласованная нагрузка линии без потерь.....	297
11.9. Входное сопротивление линии .....	298
<b>Глава 12. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ .....</b>	<b>302</b>
12.1. Общие сведения.....	302
12.2. Основные векторные величины, характеризующие электромагнитное поле.....	303
12.3. Две теории электричества .....	306
12.4. Рождение великих уравнений Максвелла .....	307
12.5. Основные уравнения .....	311
12.6. Поверхностный эффект (ПЭ).....	311
12.7. Поверхностный эффект в массивных проводах из ферромагнитного материала .....	312
12.8. Эффект близости.....	313
12.9. Графическое изображение электростатического поля .....	314
12.10. Электростатическое экранирование .....	315
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>317</b>
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....</b>	<b>318</b>

## **ВВЕДЕНИЕ**

Учебное пособие представляет собой теоретический курс по первой части ТОЭ – теории электрических цепей. Оно полностью соответствует программе дисциплины и государственному образовательному стандарту.

В предлагаемом пособии изложен важнейший материал дисциплины: история и методология науки, последние достижения и проблемы, расчеты линейных электрических цепей при постоянных, синусоидальных и несинусоидальных воздействиях, процессы как в однофазных, так и в трехфазных цепях. Оригинальным является материал, посвященный анализу аварийных режимов в трехфазных цепях.

Предмет ТОЭ изучает количественные и качественные стороны электромагнитных процессов в электрических цепях и электромагнитном поле.

В теории электрических цепей представлены процессы в определенной области пространства. При расчетах оперируют интегральными величинами, дающими общее понятие об исследуемой области.

В теории электромагнитного поля используют алгебраические и дифференциальные уравнения в частных производных, которые позволяют характеризовать любую точку пространства.

Существование человеческого общества требует постоянных затрат энергии. Уровень производства и потребления энергии в значительной степени характеризует уровень производительных сил общества.

Электрическая энергия – вторичная форма энергии, не существующая в готовом виде в природе. Сто лет назад электротехника только зарождалась. Жизнь современного общества без применения электрической энергии представить себе невозможно. Это объясняется ее важными достоинствами, среди которых, прежде всего, универсальность (сравнительно легко преобразуется в другие виды энергии: механическую, тепловую, световую, химическую) и возможность передачи на огромные расстояния с относительно небольшими потерями.

Теория электрических цепей изучает электромагнитные явления в технических системах, предназначенных для производства, передачи и распределения электрической энергии, распространения, преобразования и переработки информации.

В основе методологии теории цепей лежит системный подход, в соответствии с которым реальные электрические цепи заменяют их схемами замещения, составленными из идеализированных элементов.

Теория электрических цепей базируется на основных физических понятиях об электрических и магнитных явлениях. Для освоения дисциплины необходимы знания, полученные студентами в различных областях высшей математики – алгебре, теории дифференциальных уравнений, интегральных преобразованиях Фурье и Лапласа, теории численного решения алгебраических и дифференциальных уравнений.



В свою очередь, на базе теории электрических цепей строятся многие последующие специальные дисциплины электро- и системотехнического циклов, связанные с анализом конкретных классов систем, в которых методы и приемы теории цепей развиваются и получают проблемную ориентацию.

Учебный материал излагается в пособии в соответствии с хронологией развития электротехники.

В период с 1800 по 1880 г. в тесной связи с развитием прикладной электротехники, в частности с телеграфией, гальванопластикой и техникой электрического освещения, развивалась теория цепей постоянного тока. В этот период были установлены основные понятия теории электрических цепей и разработаны первые методы их расчета.

Расширение потребления электрической энергии выдвинуло проблему передачи ее на значительные расстояния. Решение этой проблемы требовало применения различных напряжений для передачи и распределения электрической энергии. Эта задача была решена для переменного тока при помощи трансформаторов, изобретенных П. Н. Яблочковым.

Применение переменного тока потребовало решения многих теоретических вопросов и практических задач. Особенно значительным толчком в развитии теории переменных токов было предложение американского ученого Ч. П. Штейнмеца использовать комплексные числа для расчетов цепей.

Важнейшей задачей стало создание электрического привода. Выяснилось, что однофазный двигатель переменного тока не имеет пускового момента.

М. О. Доливо-Добровольский разработал трехфазную систему, получившую повсеместное распространение. В 1889 г. он построил первый трехфазный двигатель, разработал все остальные звенья трехфазной цепи и в 1891 г. построил Лауфен-Франкфуртскую трехфазную линию передачи электрической энергии расстоянием в 175 км. Это событие считают рождением электротехники.

Несомненными достоинствами учебного пособия по сравнению с существующими учебниками являются краткость и доступность при достаточно полном изложении материала в соответствии с программой курса, а также наличие большого количества конкретных примеров.

# ГЛАВА 1

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

### 1.1. Интегральные величины электромагнитного поля, применяемые в теории электрических цепей

Интегральными величинами являются ток, напряжение, мощность, которые уже рассматривались в курсе физики.

**1. Электрический ток** – это явление направленного движения заряженных частиц.

Количественную меру этого движения в ГОСТе определяют как силу тока. Но в электротехнических дисциплинах принято говорить просто – ток.

Величину тока определяют как скорость изменения заряда во времени:

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt},$$

где  $q$  – заряд.

Так как током называют и явление, и его количественную меру, у многих складывается впечатление, что ток – величина векторная. Стрелкой на схеме обозначают направление движения положительно заряженных частиц.

Если величину тока определить упрощенно, то это – количество зарядов через поперечное сечение проводника в единицу времени. Очевидно, что эта величина скалярная.

В результате расчетов ток может получиться с разными знаками. Ток положительный, если его выбранное направление совпадает с направлением движения положительных зарядов.

Ток измеряют в амперах (А). Французский академик Андре Мари Ампер ввел понятие электрического тока.

Человек начинает ощущать ток в своем теле при его величине 0,005 А. Ток 0,05 А опасен для жизни. Ток в люминесцентной лампе 0,15 А, в лампе накаливания – (0,2–1) А, в холодильнике – (0,5–0,8) А, в бытовых нагревательных приборах – (2–8) А, в электродвигателе трамвайного вагона – от 100 А и выше, в индукторе печи для плавления алюминия – 18000 А.

**2. Напряжение** – количество энергии, затраченной на перемещение единичного заряда из одной точки электромагнитного поля в другую:

$$u = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta q} = \frac{dW}{dq},$$

где  $W$  – энергия.

**Потенциал** – количество энергии, затраченной на перемещение единичного заряда из бесконечности в какую-либо точку электромагнитного по-



## ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

### 1.1. Интегральные величины электромагнитного поля, применяемые в теории электрических цепей

ля. Отсюда напряжение – это разность потенциалов.

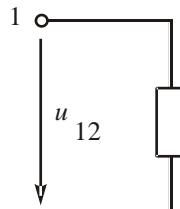


Рис. 1.1

Эта величина тоже скалярная, может быть положительной и отрицательной. Напряжение положительно, если потенциал точки 1, из которого направлена стрелка  $u_{12}$  (рис. 1.1), выше потенциала точки 2. Индексация показывает направление – ко второму индексу.

Единица измерения напряжения – вольт (В). Названа в честь итальянца Алесандро Вольта, создателя первого источника электрической энергии – «вольтова столба». Он первым ввел понятие напряжения.

**3. Мощность** – это скорость изменения энергии во времени:

$$p = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}.$$

Умножим и разделим на  $dq$ :

$$p = \frac{dW}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = u \cdot i .$$

Следовательно, мощность – это произведение напряжения на ток. Единица измерения мощности в общем случае – В · А .

## 1.2. Элементы схем замещения электрических цепей

**Электрическая цепь** – это совокупность генерирующих, приемных и вспомогательных устройств, соединенных между собой электрическими проводами.

В теории электрических цепей (ТЭЦ) оперируют не реальными электрическими цепями, а их схемами замещения.

**Электрическая схема замещения** – это графическое изображение электрической цепи идеализированными элементами, которые учитывают явления, происходящие в реальной цепи.

Генерирующие устройства преобразуют различные виды энергии (механическую, химическую, тепловую, световую) в электрическую.

Роль источника энергии заключается в поддержании разности потенциалов. Для этого нужны силы неэлектрического происхождения (сторонние силы), совершающие работу против сил электрического поля.

В ТЭЦ различают два вида идеализированных источников энергии: идеальный источник ЭДС (рис. 1.2, а) и идеальный источник тока (рис. 1.2, б).

У идеального источника ЭДС сопротивление бесконечно мало. Вследствие этого напряжение на зажимах источника при изменении нагрузки не



# ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

## 1.2. Элементы схем замещения электрических цепей

меняется, а меняется ток. Стрелка источника показывает направление увеличения потенциала.

У идеального источника тока ([рис. 1.2, б](#)) сопротивление бесконечно велико. Поэтому при изменении нагрузки ток источника тока не меняется, а меняется напряжение на его зажимах. Величины внутренних сопротивлений учтены в условных обозначениях: закоротка в кружке идеального источника ЭДС и разрыв – у идеального источника тока.

Идеальных устройств в реальной жизни нет. Реальный источник ЭДС обладает небольшим сопротивлением ([рис. 1.3, а](#)). Реальный источник тока обладает большим, но конечным сопротивлением ([рис. 1.3, б](#)).

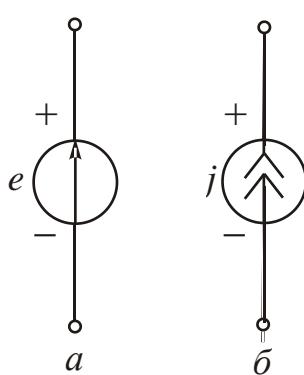


Рис. 1.2

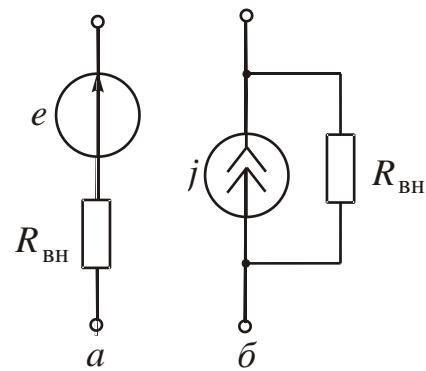


Рис. 1.3

Приемные устройства образуют внешнюю часть схемы.

Различают три идеализированных приемных элемента ([рис. 1.4, а, б, в](#)).

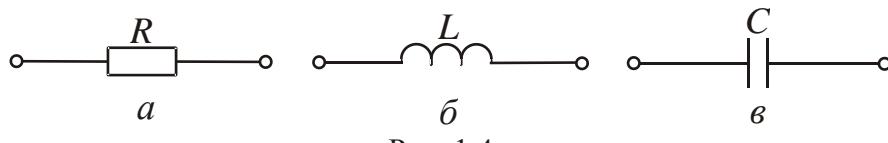


Рис. 1.4

**1. Резистивный элемент, или идеальный резистор** ([рис. 1.4, а](#)), учитывает преобразование электрической энергии в другие виды энергии. Обладает сопротивлением  $R$ , которое измеряют в омах (Ом).

**2. Индуктивный элемент, или идеальная индуктивная катушка** ([рис. 1.4, б](#)), учитывает энергию магнитного поля катушки, а также ЭДС самоиндукции. Обладает индуктивностью  $L$ , которую измеряют в генри (Гн).

**3. Емкостный элемент, или идеальный конденсатор** ([рис. 1.4, в](#)), учитывает энергию электрического поля конденсатора, а также токи смещения. Обладает емкостью  $C$ , измеряемой в фардах ( $\Phi$ ).

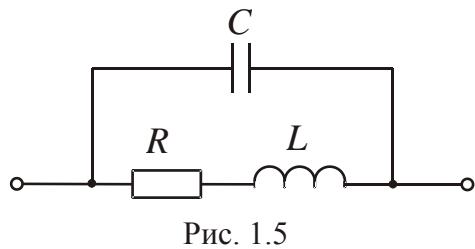


Рис. 1.5

Элементы электрических цепей различным образом соединяют между собой.

В реальных электрических цепях есть реальные резисторы, индуктивные катушки и конденсаторы. В схемы замещения реальных деталей входят все три идеальных элемента, но



количественно значения их параметров существенно различны.

Рассмотрим схему замещения реальной индуктивной катушки, которую содержат большинство электротехнических устройств. Индуктивная катушка греется, что учитывает резистивный элемент ([рис. 1.5](#)), в ней наводится ЭДС (индуктивный элемент). Емкостный элемент учитывает энергию электрических полей между витками.

### 1.3. Геометрические элементы схем замещения

**1. Ветвь** – часть электрической схемы, состоящая из одного или нескольких последовательно соединенных источников и приемников энергии, ток в которых один и тот же.

Можно сформулировать короче. Ветвь – участок схемы с одним током.

Ветви могут быть активными, содержащими источники энергии, и пассивными, состоящими из одних приемников.

**2. Узел** – это точка в схеме, где сходятся не менее трех ветвей. Тогда ветвь – участок схемы от одного узла до другого.

**3. Контур** – любой замкнутый по ветвям схемы путь. Схема может быть одноконтурной ([рис. 1.6](#)) и многоконтурный ([рис. 1.7](#)).

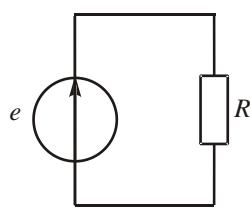


Рис. 1.6

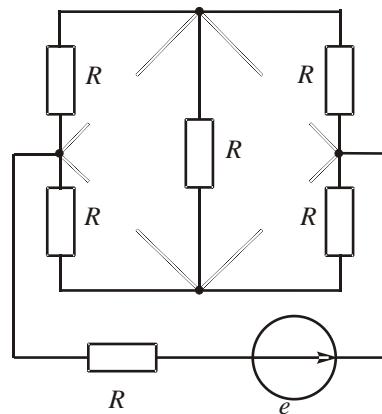


Рис. 1.7

Подумайте, сколько узлов, активных и пассивных ветвей, а также контуров в схеме [рис. 1.7](#)

## ГЛАВА 2

# ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

В схемах замещения цепей постоянного тока только один вид приемников – резистивный элемент. Все электрические величины обозначают заглавными печатными буквами:  $I$ ,  $U$ ,  $E$ , кроме тока источника тока, который обозначают буквой  $J$ . Линейные электрические цепи состоят из линейных элементов, параметры которых не зависят от тока и напряжения.

### 2.1. Основные законы

#### 2.1.1. Закон Ома

В настоящее время под законом Ома понимают все соотношения, связывающие между собой напряжение и ток. По закону Ома напряжение на резистивном элементе пропорционально току в нем. Коэффициент пропорциональности назван сопротивлением:  $U_R = RI$ . Закон Ома можно сформулировать и относительно тока:

$$I = GU,$$

где  $G$  – проводимость, величина, обратная сопротивлению  $\left( G = \frac{1}{R} \right)$ .

Проводимость измеряют в сименсах (См).

Геометрической интерпретацией закона Ома является вольт-амперная характеристика (ВАХ). Для линейного элемента она имеет вид прямой линии ([рис. 2.1](#)).

История создания закона Ома показывает роль личности и интернационализм в науке.

В 1802 г. профессор физики петербургской Медико-хирургической академии, академик В. В. Петров впервые установил зависимость тока в проводнике от площади поперечного сечения проводника. Он первым ввел термин «сопротивление».

В. В. Петрова можно считать первым русским электротехником, так как им впервые была показана и доказана возможность практического применения электричества для целей освещения. Свои разнообразные опыты В. В. Петров подробно описал в книге «Известие о гальвани-вольтовских опытах», которая вышла в С.-Петербурге в 1803 г. Это была первая книга на русском языке.

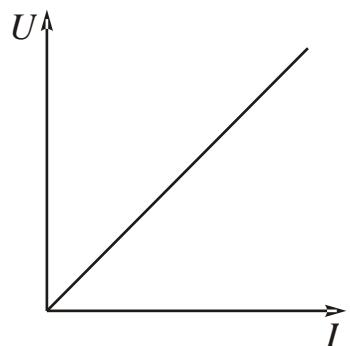


Рис. 2.1

ке, посвященная исследованиям явлений электрического тока.

В 1821 г. англичанин Х. Дэви установил, что проводимость проводника зависит от материала и температуры.

В 1820–1825 гг. немецкий физик Георг Сименс Ом более глубоко исследовал эти явления и сформулировал свой закон.

### 2.1.2. Первый закон Кирхгофа

Первый закон Кирхгофа сформулирован для узла. Узел – это точка в схеме, где сходятся не менее трех ветвей. При использовании ЭВМ для ввода исходных данных узлами выделяют каждый элемент схемы замещения. Эти узлы называют ложными или устранимыми. В дальнейшем речь будет идти о неустранимых узлах.

Алгебраическая сумма токов в узле равна нулю:

$$\sum_{j=1}^n I_j = 0.$$

Правило знаков: токи, одинаково направленные относительно узла, записывают с одинаковыми знаками.

### 2.1.3. Второй закон Кирхгофа

Второй закон Кирхгофа относится к контуру. Алгебраическая сумма напряжений на приемниках в любом контуре равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом же контуре:

$$\sum_{k=1}^m U_k = \sum_{i=1}^p E_i.$$

С учетом закона Ома

$$\sum_{k=1}^m R_k I_k = \sum_{i=1}^p E_i.$$

Правило знаков: со знаком плюс записывают напряжения и ЭДС, направления которых совпадают с выбранным направлением обхода контура.

В 1845 г. Густав Роберт Кирхгоф, будучи студентом, написал работу, в примечании к которой были сформулированы два закона, являющиеся фундаментальными законами теоретической электротехники. Они были выведены в результате опытов.



### 2.1.4. Закон Ома для активной ветви

Активная ветвь, названная так из-за наличия источника ЭДС, изображена на [рис. 2.2](#).

Между выходными зажимами ветви возникает напряжение  $U_{ab}$ . Индексация показывает направление ко второму индексу. Напряжение – это разность потенциалов между двумя точками, т. е.  $U_{ab} = V_a - V_b$ .

Определим потенциал точки  $a$ , исходя из потенциала  $V_b$ . Рассчитаем

изменение потенциала промежуточной точки  $c$  (см. [рис. 2.2](#)) по сравнению с  $V_b$ . Между точками  $b$  и  $c$  расположен источник ЭДС, поэтому потенциал точки  $c$  отличается от потенциала точки  $b$  на величину  $E$ . Стрелка источника показывает направление увеличения потенциала. Следовательно, потенциал точки  $c$  ниже потенциала точки  $b$ . Между точками  $c$  и  $a$  находится резистор сопротивлением  $R$ . Потенциал  $V_a$  отличается от потенциала  $V_c$  величиной напряжения на резисторе  $RI$ . Ток направлен от большего потенциала к меньшему, поэтому потенциал  $V_a$  выше потенциала  $V_c$ .

Таким образом,

$$V_a = V_b - E + RI,$$

$$V_a - V_b = -E + RI.$$

$$\text{Но } V_a - V_b = U_{ab}, \text{ т. е. } U_{ab} = -E + RI.$$

Можно определить напряжение между двумя любыми точками, рассчитав изменение потенциалов между ними. При этом нужно вести расчет в сторону увеличения потенциала, т. е. от второго индекса напряжения к первому.

Решим уравнение относительно тока:

$$I = \frac{U_{ab} + E}{R} = G(U_{ab} + E),$$

где  $G = \frac{1}{R}$  – проводимость ветви.

Это выражение называют законом Ома для активной ветви.

Последнее выражение можно составить, исходя из следующих рассуждений. Для появления тока в ветви (см. [рис. 2.2](#)) есть два условия: наличие разности потенциалов между концами ветви и действие источника ЭДС. Если направления ЭДС и напряжения  $U_{ab}$  совпадают с направлением тока, они

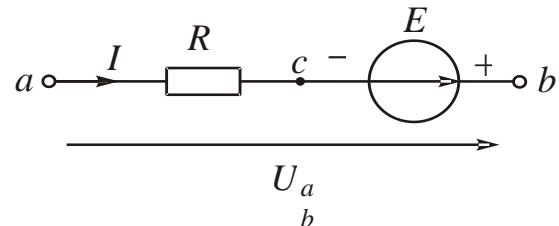


Рис. 2.2

способствуют его появлению и должны быть записаны в уравнение со знаком плюс. В противном случае – со знаком минус. Рассуждая таким образом, получим для тока ветви прежнее выражение.

### 2.1.5. Баланс мощностей

Баланс мощностей – это интерпретация закона сохранения энергии в электротехнике.

Мощность генераторов энергии в электрической цепи равна мощности потребителей:  $P_{\Gamma} = P_{\text{H}}$ , причем

$$P_{\Gamma} = \sum_{i=1}^n E_i I_i + \sum_{j=1}^m U_j J_j,$$

где  $\sum_{i=1}^n E_i I_i$  – мощность источников ЭДС;  $\sum_{j=1}^m U_j J_j$  – мощность источников тока;  $J_j$  – токи источников тока,  $U_j$  – напряжения на зажимах источников тока.

Эти суммы алгебраические. Источник может как вырабатывать, так и потреблять (заряд аккумулятора) электрическую энергию.

Если направления ЭДС и тока через источник ЭДС совпадают, мощность источника записывают в уравнении баланса мощностей с положительным знаком. Он работает в режиме генератора.

При противоположных направлениях ЭДС и тока мощность в уравнении баланса учитывают с отрицательным знаком (режим потребителя).

Определение знака мощности источника тока поясняет [рис. 2.3](#), на котором показана разметка зажимов источника тока, вырабатывающего (*a*) или потребляющего (*б*) электрическую энергию.

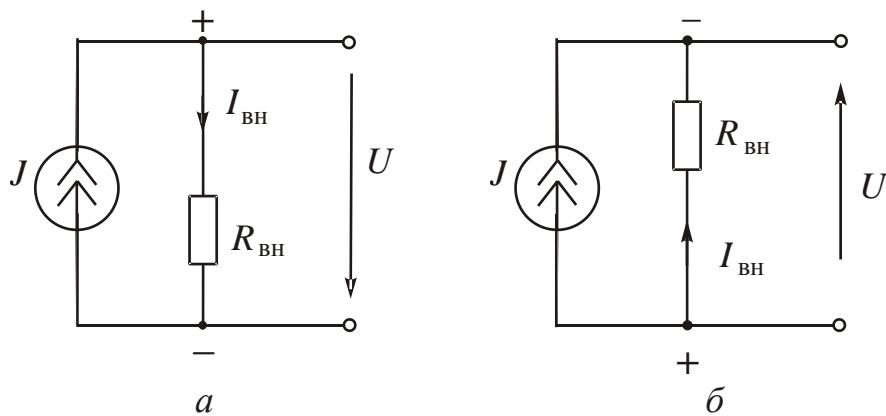


Рис. 2.3

Ток  $I_{\text{BH}}$  и напряжение  $U$  направлены в сторону уменьшения потенциала, что и позволяет разметить зажимы источника.

Мощность потребителей (нагрузок)

$$P_{\text{н}} = \sum_{k=1}^l U_k I_k = \sum_{k=1}^l R_k I_k^2.$$

Эта сумма арифметическая.

Погрешность расчета не должна превышать (1–3) %.

## 2.2. Взаимное преобразование схем замещения источников энергии

В некоторых случаях для упрощения расчетов токов рационально заменить источники тока эквивалентными источниками ЭДС или сделать обратное преобразование.

У идеального источника ЭДС (идеального источника напряжения – ИИН) напряжение на зажимах не зависит от изменения нагрузки и равно ЭДС  $E$ . Напряжение на зажимах реального источника ЭДС (РИН) меньше  $E$  на величину падения напряжения на резисторе, учитывающем внутреннее сопротивление источника ([рис. 2.4](#)), т. е.

$$U_{ab} = E - R_{\text{вн}} I. \quad (2.1)$$

Чтобы получить это уравнение, нужно рассчитать изменение потенциалов между точками  $b$  и  $a$ .

График, иллюстрирующий эту зависимость, изображен на [рис. 2.5](#). Его называют внешней вольт-амперной характеристикой (ВАХ).

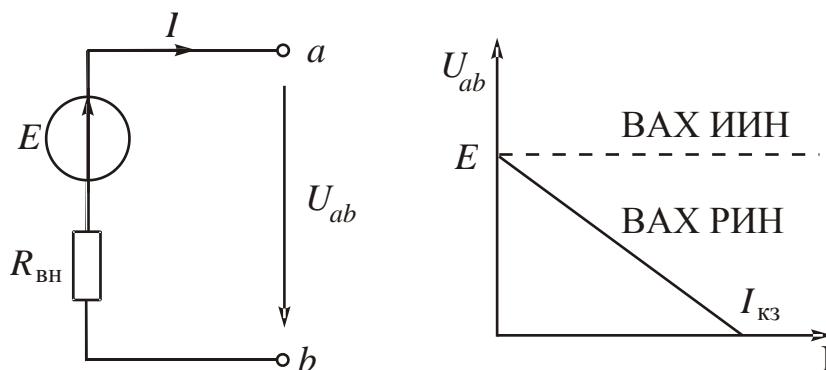


Рис. 2.4

Рис. 2.5

Ток идеального источника тока (ИИТ) не меняется при изменении нагрузки. У реального источника тока (РИТ), схема замещения которого изображена на [рис. 2.6](#), ток приемника связан с напряжением на зажимах источника тока следующей зависимостью:

$$I = J - G_{\text{вн}} U_{ab}, \quad (2.2)$$

так как  $I = J - I_{\text{вн}}$ , а  $I_{\text{вн}} = G_{\text{вн}} U_{ab}$ .

Внешняя ВАХ реального источника тока представлена на [рис. 2.7](#).

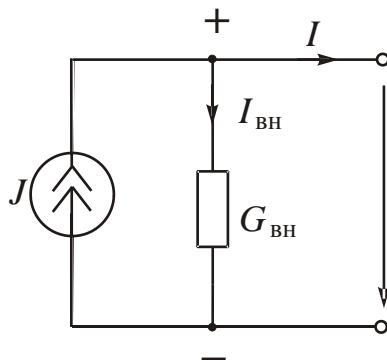


Рис. 2.6

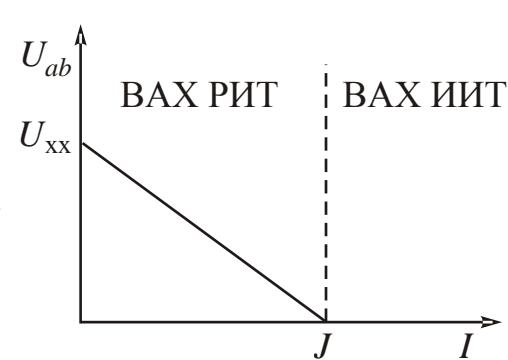


Рис. 2.7

Сопоставив [рис. 2.5](#) и [рис. 2.7](#), видим, что внешние ВАХ реальных источников ЭДС и тока аналогичны, поэтому возможна замена источника электрической энергии одного типа другим. Чтобы замена была эквивалентной, уравнения внешних ВАХ для источников должны быть одинаковыми.

Разделим уравнение [\(2.1\)](#) почленно на  $R_{\text{вн}}$ . Тогда

$$\frac{U_{ab}}{R_{\text{вн}}} = \frac{E}{R_{\text{вн}}} - I,$$

отсюда

$$I = \frac{E}{R_{\text{вн}}} - \frac{U_{ab}}{R_{\text{вн}}}. \quad (2.3)$$

Сравнивая уравнения [\(2.2\)](#) и [\(2.3\)](#), делаем вывод, что замена источников будет эквивалентной, если

$$E = R_{\text{вн}} J; \quad J = \frac{E}{R_{\text{вн}}}; \quad G_{\text{вн}} = \frac{1}{R_{\text{вн}}}; \quad R_{\text{вн}} = \frac{1}{G_{\text{вн}}}.$$

Воспользовавшись последними соотношениями, можно заменить источник тока эквивалентным источником ЭДС или сделать обратное преобразование.

Следует учесть, что эквивалентные источники энергии должны быть одинаково направлены относительно соответствующих узловых точек (см. [рис. 2.4](#) и [рис. 2.6](#)).

### 2.3. Потенциальная диаграмма

Потенциальная диаграмма дает картину распределения потенциалов в контуре.

Построим потенциальную диаграмму для одного из контуров сложной

схемы (рис. 2.8). Потенциал одной из точек контура принимаем равным нулю. Пусть  $V_a = 0$ . Выбираем направление обхода контура по часовой стрелке.

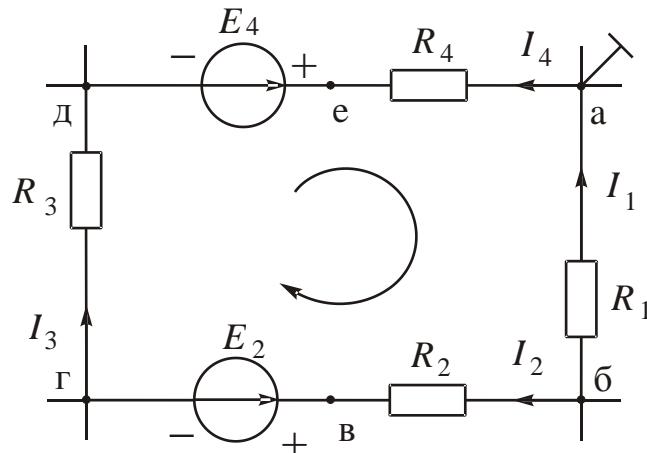


Рис. 2.8

Между точками а и б находится резистор сопротивлением  $R_1$ . Потенциал  $V_b$  точки б отличается от потенциала  $V_a$  на величину напряжения на этом резисторе  $R_1I_1$ . Ток направлен от большего потенциала к меньшему, значит на пути от точки а к точке б потенциал увеличивается:  $V_b = V_a + R_1I_1$ . Потенциал  $V_b$  отличается от потенциала  $V_b$  на величину напряжения на резисторе сопротивлением  $R_2$ . Ток направлен от точки б к точке в, т. е. потенциал точки в меньше потенциала точки б:  $V_b = V_b - R_2I_2$ .

Потенциал  $V_\Gamma$  отличается от потенциала  $V_b$  на величину ЭДС  $E_2$ . Стрелка источника показывает направление увеличения потенциала, т. е. потенциал  $V_\Gamma < V_b$ :

$$V_\Gamma = V_b - E_2.$$

Вычислим потенциалы остальных точек на основании аналогичных рассуждений:

$$V_d = V_\Gamma - R_3I_3; \quad V_e = V_d + E_4; \quad V_a = V_e + R_4I_4.$$

Если расчет токов и потенциалов произведен верно, потенциал последней точки должен быть равен нулю, что дает возможность проверить правильность решения.

По результатам расчетов строят потенциальную диаграмму. По оси абсцисс откладывают друг за другом в соответствующем масштабе сопротивления вдоль контура, начиная с заземленной точки. По оси ординат – потенциалы. Потенциальная диаграмма для контура на рис. 2.8 приведена на

[рис. 2.9](#). Между точками в и г, д и е нет резисторов, поэтому перемещения по оси абсцисс не происходит.

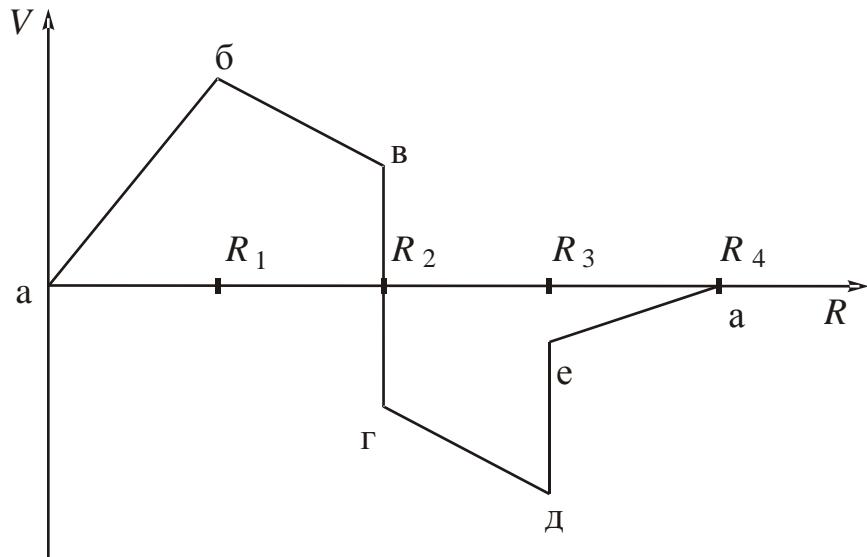


Рис. 2.9

Из потенциальной диаграммы можно найти напряжение между двумя любыми точками как разность потенциалов между ними.

## 2.4. Методы расчета токов

### 2.4.1. Метод непосредственного использования законов Кирхгофа

Предварительно нужно выявить в схеме узлы и ветви. Ветвь – участок с одним током между двумя узлами. В схеме столько токов, сколько ветвей. Направления их указывают произвольно.

Число уравнений должно быть минимальным, но достаточным и равным числу неизвестных токов, т. е.  $m - m_J$ , где  $m$  – общее число ветвей в схеме;  $m_J$  – число ветвей с источниками тока.

По первому закону Кирхгофа составляют  $n - 1$  уравнение, где  $n$  – число узлов схемы. В этих уравнениях учитывают и токи источников тока. При подготовке данных для ввода в ЭВМ известные величины записывают справа от знака равенства. Поэтому первый закон Кирхгофа формулируют следующим образом:

$$\sum I = \sum J,$$

где  $\sum I$  – алгебраическая сумма неизвестных токов ветвей в узле;  $\sum J$  – алгебраическая сумма токов источников тока, присоединенных к этому же узлу.

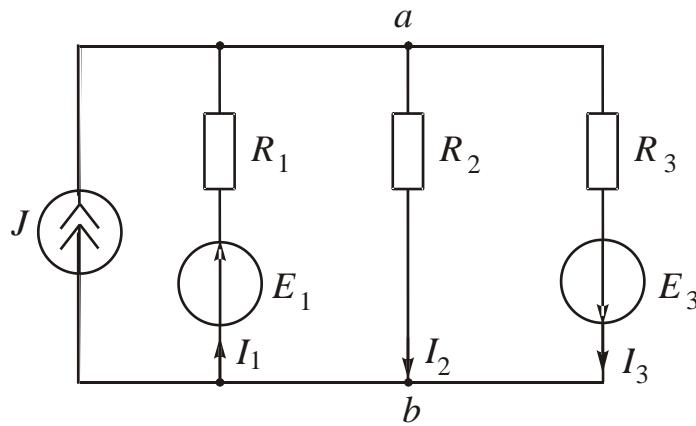


Рис. 2.10

Недостающие уравнения дописывают по второму закону Кирхгофа. Уравнения по второму закону Кирхгофа составляют для контуров, не содержащих источников тока.

Рассмотрим применение метода для схемы [рис. 2.10](#). Нужно определить все токи, если известны значения  $J, E_1, E_3, R_1, R_2, R_3$ .

*Решение*

1. Выявим узлы ( $a$  и  $b$ ) и ветви.
2. Направим токи  $I_1, I_2, I_3$ . Ток источника тока уже обозначен и известен.
3. Определим число расчетных уравнений:

$$m - m_J = 4 - 1 = 3.$$

4. Составим  $(n - 1) = 2 - 1 = 1$  уравнение по первому закону Кирхгофа:

$$J + I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

либо

$$I_1 - I_2 - I_3 = -J.$$

5. Допишем два недостающих уравнения по второму закону Кирхгофа. Следует составлять уравнения для «главных», не содержащих в себе других контуров. Направление обхода разных контуров может быть разным.

Выберем направление обхода контуров по часовой стрелке. Тогда

$$\begin{aligned} U_1 + U_2 &= E_1; \\ -U_2 + U_3 &= E_3. \end{aligned}$$

Подставив выражения напряжений по закону Ома, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = -J; \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 = E_1; \\ -R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_3. \end{cases}$$

6. Решением системы находим токи.

Систему уравнений по законам Кирхгофа можно записать в матричной форме следующим образом:  $[a] \cdot [I] = [F]$ ,

где  $[a]$  – квадратная матрица коэффициентов;

$[I]$  – матрица-столбец неизвестных токов ветвей;

$[F]$  – матрица-столбец активных параметров, которыми являются токи источников тока и ЭДС.

Уравнения в системе не однотипны, так как записаны на основании двух разных законов. В уравнениях по первому закону Кирхгофа коэффициенты  $a_{ij}$  безразмерны и могут принимать значения  $\pm 1$  или 0. В правой части  $F_j = \sum J$ .

В уравнениях по второму закону Кирхгофа коэффициенты  $a_{ij}$  имеют размерность сопротивления,  $F_i = \sum E$ . Если  $j$  – ветвь входит в  $i$ -й контур, для которого составлено уравнение, то  $a_{ij} = \pm R_{ij}$  не входит,  $a_{ij} = 0$ .

Для рассмотренного примера

$$[a] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{vmatrix}; \quad [I] = \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{vmatrix}; \quad [F] = \begin{vmatrix} -J \\ E_1 \\ E_3 \end{vmatrix}.$$

Расчет по законам Кирхгофа является универсальным, но громоздким. Поэтому на его основе разработаны методы, позволяющие упростить решение.

#### 2.4.2. Метод контурных токов

Метод используют для уменьшения числа совместно решаемых уравнений. Расчет производят для промежуточных неизвестных, которыми являются контурные токи, по уравнениям на основании второго закона Кирхгофа. Контурный ток – это нереальный, условный ток, замыкающийся по контурам схемы.

При расчете этим методом источники тока заменяют эквивалентными источниками ЭДС.

Покажем возможность такого преобразования для случая, более общего, чем рассмотренный в [параграфе 2.2](#).

На [рис. 2.11, а](#) изображена часть разветвленной схемы с одним источником тока  $J$ , присоединенным к узлам 1 и 4. Режим в этой схеме не изменится, если вместо одного источника тока  $J$  подключить три источника тока



соответственно к узлам 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, поскольку токи  $I_{22'}$  и  $I_{33'}$  равны нулю (рис. 2.11, б). Очевидно, что схему рис. 2.11, б можно заменить эквивалентной ей схемой рис. 2.11, в, где  $E_{\vartheta 1} = R_1 J$ ;  $E_{\vartheta 2} = R_2 J$ ;  $E_{\vartheta 3} = R_3 J$ .

Направления контурных токов рационально выбирать одинаковыми, а направление обхода контуров – совпадающим с направлением контурных токов.

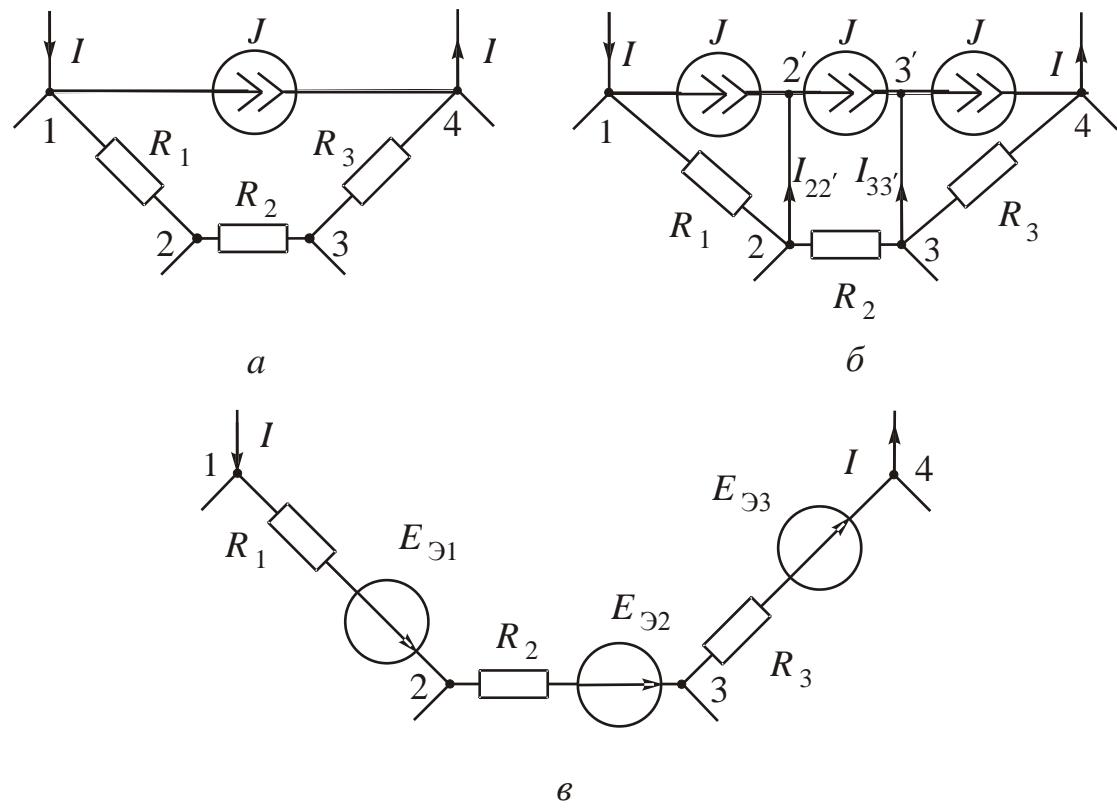


Рис. 2.11

В этом случае можно составить трафаретную систему уравнений. Для схемы с тремя независимыми контурами она имеет вид

$$\begin{cases} R_{11}J_1 - R_{12}J_2 - R_{13}J_3 = E_{11}; \\ -R_{21}J_1 + R_{22}J_2 - R_{23}J_3 = E_{22}; \\ -R_{31}J_1 - R_{32}J_2 + R_{33}J_3 = E_{33}, \end{cases}$$

где  $R_{11}$  – собственное сопротивление первого контура, равное сумме сопротивлений резисторов этого контура;  $R_{12} = R_{21}$  – общее сопротивление первого и второго контуров;  $R_{13} = R_{31}$  – общее сопротивление первого и третьего контуров;  $E_{11}$  – собственная ЭДС первого контура (алгебраическая сумма ЭДС контура) и т. д.

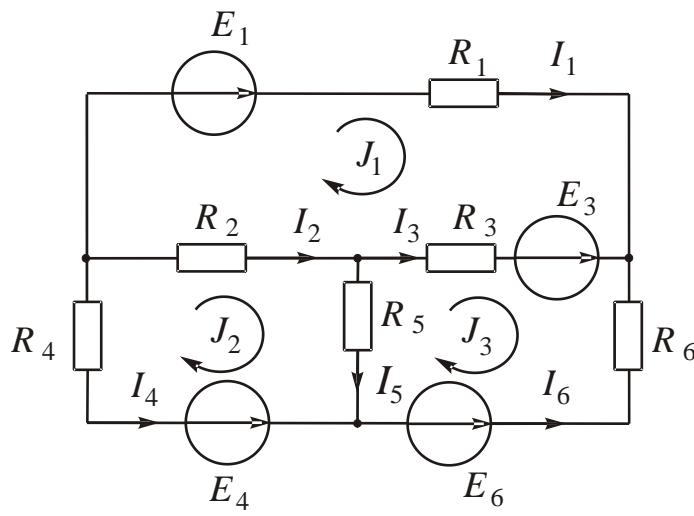


Рис. 2.12

При одинаковых направлениях контурных токов по главной диагонали расположены со знаком плюс собственные падения напряжения контуров, остальные члены записаны в систему со знаком минус. Если пара контуров не имеет общего сопротивления, соответствующий член системы уравнений отсутствует.

Действительные токи находят через контурные, рассматривая каждую ветвь.

Вычислим токи схемы, приведённой на [рис. 2.12](#). Направим контурные токи по часовой стрелке. Подставляя в трафаретную систему значения собственных и общих сопротивлений контуров, а также собственные ЭДС контуров, получаем

$$\begin{cases} (R_1 + R_2 + R_3)J_1 - R_2 J_2 - R_3 J_3 = E_1 - E_3; \\ -R_2 J_1 + (R_2 + R_4 + R_5)J_2 - R_5 J_3 = -E_4; \\ -R_3 J_1 - R_5 J_2 + (R_3 + R_5 + R_6)J_3 = E_3 - E_6. \end{cases}$$

Решением системы найдем контурные токи.

В ветви с действительным током  $I_1$  один контурный ток  $J_1$ . Их направления совпадают, поэтому  $I_1 = J_1$ .

В ветви с действительным током  $I_2$  два контурных тока:  $J_1$  и  $J_2$ . Ток  $I_2$  совпадает по направлению с  $J_2$ , ток  $J_1$  – противоположен. Следовательно,  $I_2 = -J_1 + J_2$ .

Вычислим остальные токи на основании аналогичных рассуждений:

$$I_3 = -J_1 + J_3; I_4 = -J_2; I_5 = J_2 - J_3; I_6 = -J_3.$$

Токи в ветвях, затронутых эквивалентными преобразованиями источников энергии, не равны соответствующим токам в ветвях заданной схемы и отличаются от них на ток  $J$  источника тока. Токи в ветвях исходной схемы можно вычислить, воспользовавшись уравнениями по первому закону Кирхгофа.

### 2.4.3. Метод узловых потенциалов

В качестве промежуточных неизвестных принимают потенциалы узлов.

Потенциал – функция многозначная, поэтому потенциал одного из узлов принимают равным нулю. Рационально заземлять узел, в котором сходится максимальное число ветвей.

Уравнения составляют на основании первого закона Кирхгофа. В них подставляют значения токов, выраженные по закону Ома для активной и пассивной ветвей. Число уравнений равно числу незаземленных узлов. Систему можно записать в трафаретном виде:

$$\begin{cases} G_{11}V_1 - G_{12}V_2 - G_{13}V_3 - \cdots - G_{1m}V_m = J_{11}; \\ -G_{21}V_1 + G_{22}V_2 - G_{23}V_3 - \cdots - G_{2m}V_m = J_{22}; \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ -G_{m1}V_1 - G_{m2}V_2 - G_{m3}V_3 - \cdots + G_{mm}V_m = J_{mm}, \end{cases}$$

где  $G_{11}, G_{22}, \dots, G_{mm}$  – собственные проводимости узлов, равные сумме проводимостей ветвей, соединяющихся в соответствующем узле;

$G_{12}, G_{21}, G_{13}, \dots$  – общие проводимости между двумя узлами, равные сумме проводимостей ветвей, соединяющих эти узлы;

$J_{11}, J_{22}, \dots, J_{mm}$  – узловые токи, равные алгебраической сумме произведений проводимостей активных ветвей на ЭДС этих ветвей и токов источников тока, соединяющихся в этом узле.

С положительным знаком берут ЭДС и токи, направленные к узлу.

Составим систему уравнений для схемы на [рис. 2.13](#):

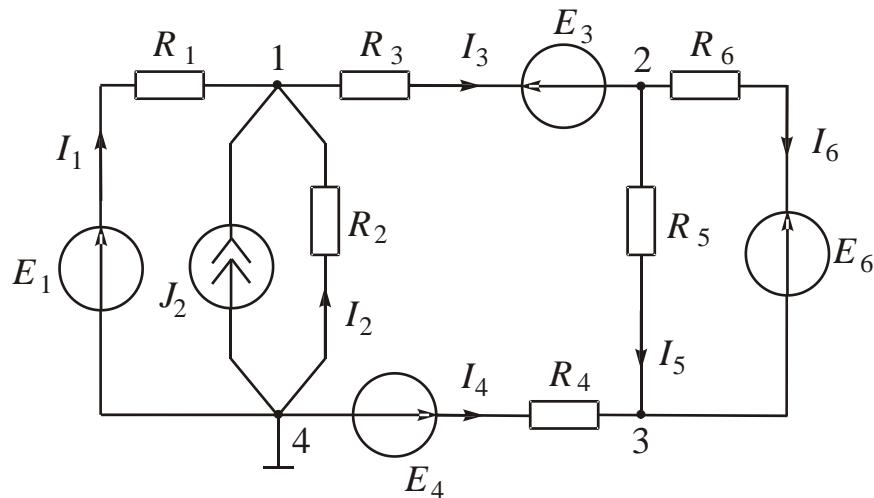


Рис. 2.13

$$\begin{cases} (G_1 + G_2 + G_3)V_1 - G_3V_2 - 0 = G_1E_1 + J_2 + G_3E_3; \\ -G_3V_1 + (G_3 + G_5 + G_6)V_2 - (G_5 + G_6)V_3 = -G_3E_3 + G_6E_6; \\ -0 - (G_5 + G_6)V_2 + (G_4 + G_5 + G_6)V_3 = G_4E_4 - G_6E_6. \end{cases}$$

Решением системы уравнений определим потенциалы узлов. Затем рассчитаем токи ветвей по закону Ома:

$$\begin{aligned} I_1 &= G_1(V_4 - V_1 + E_1) = G_1(-V_1 + E_1), \text{ так как } V_4 = 0; \\ I_2 &= -G_2V_1; \quad I_3 = G_3(V_1 - V_2 - E_3); \quad I_4 = G_4(-V_3 + E_4); \\ I_5 &= G_5(V_2 - V_3); \quad I_6 = G_6(V_2 - V_3 - E_6). \end{aligned}$$

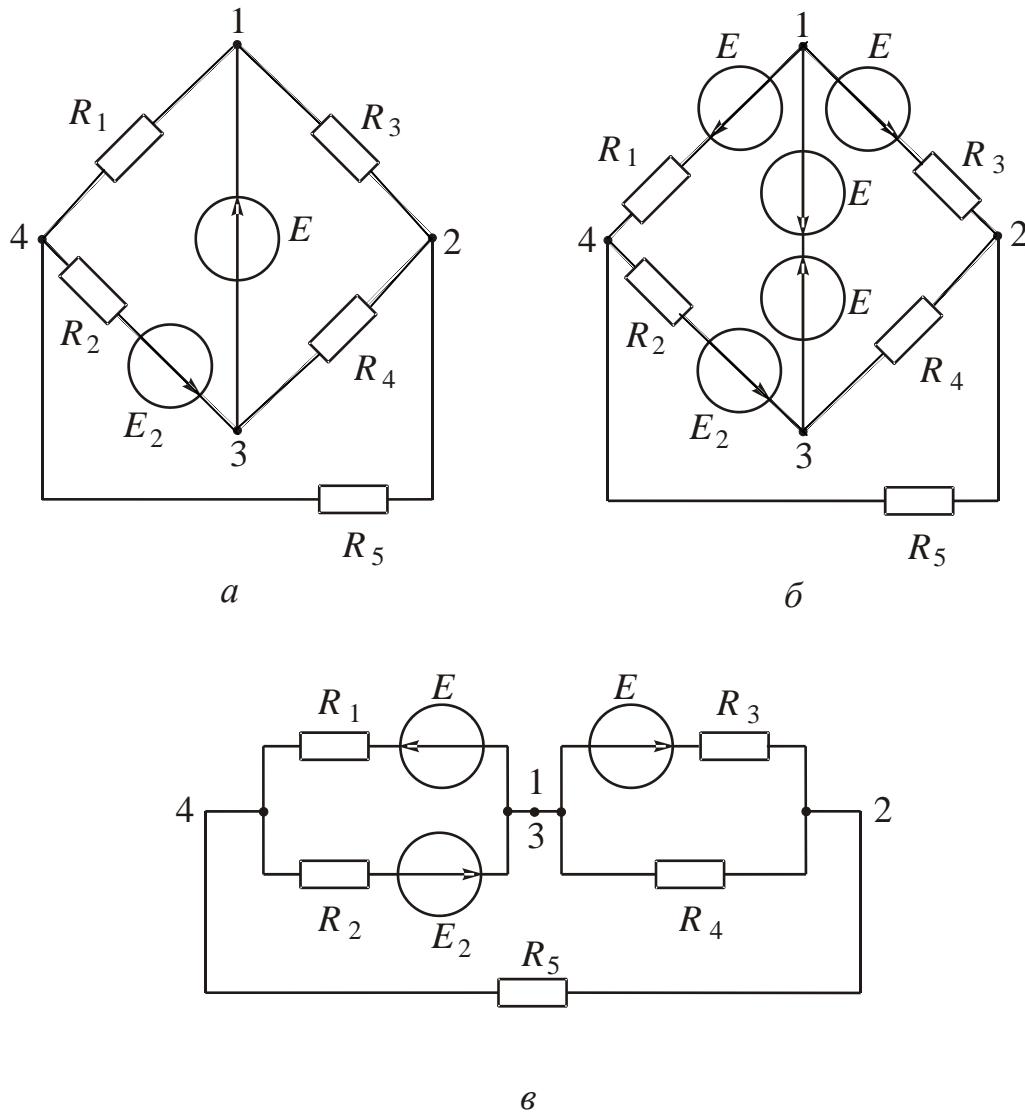


Рис. 2.14

Если в схеме есть ветви, сопротивление которых равно нулю, то при составлении системы уравнений для вычисления узловых потенциалов получим неопределённость, потому что проводимости таких ветвей бесконечно большие. Рассмотрим один из путей устранения этого затруднения.

На [рис. 2.14, а](#) изображена схема, одна из ветвей которой содержит только идеальный источник ЭДС  $E$  без сопротивления.

Если в каждую ветвь, присоединённую, например, к узлу 1, включить источник с ЭДС, равной  $E$  и направленной от узла 1 ([рис. 2.14, б](#)), то токи во всех ветвях останутся неизменными; так как в уравнения по первому закону Кирхгофа ЭДС не входят, а в уравнениях по второму закону Кирхгофа они друг друга компенсируют.

Теперь потенциалы точек 1 и 3 одинаковы ( $V_1 = V_3 + E - E = V_3$ ). Их можно объединить в одну точку ([рис. 2.14, в](#)). Для полученной схемы можно составить два независимых уравнения для определения потенциалов узлов.

Можно поступить иначе. Если потенциал точки 3 принять равным нулю, то потенциал точки 1 будет известен, так как  $V_1 = E$ . Неизвестными являются потенциалы узлов 2 и 4, к которым не присоединены ветви с нулевыми сопротивлениями.

#### 2.4.4. Метод напряжения между двумя узлами

Этот метод является частным случаем метода узловых потенциалов и применим для схемы с двумя узлами.

Так как потенциал одного из узлов принимают равным нулю, то потенциал второго узла равен напряжению между этими узлами.

Если принять  $V_2 = 0$ , то трафаретная система даёт одно уравнение:

$$G_{11}V_1 = J_{11},$$

$$\text{где } V_1 = U_{12}.$$

Формулу для определения напряжения между двумя узлами в общем виде можно записать следующим образом:

$$U_{12} = \frac{\sum_{i=1}^n G_i E_i + \sum_{j=1}^m J_j}{\sum_{i=1}^l G_i},$$

где  $G_i$  – проводимости ветвей;  $n$  – число ветвей, содержащих источники ЭДС с отличными от нуля проводимостями;  $m$  – число ветвей, содержащих источники тока;  $l$  – число ветвей без источников тока.

Число слагаемых в числителе равно числу активных ветвей. С положительным знаком записывают  $E$  и  $J$ , направленные к первому в индексе напряжения узлу.

Сумма в знаменателе формулы – арифметическая.



Вычислив напряжение между двумя узлами, по закону Ома для ветви следует определить токи.

#### 2.4.5. Метод эквивалентных преобразований

Метод эквивалентных преобразований применяют как самостоятельный для расчета токов в схемах с одним источником энергии и несколькими приемниками. Его можно использовать и для упрощения частей сложной схемы при расчетах другими методами.

Все приемники заменяют одним с эквивалентным сопротивлением. При этом токи и напряжения в частях схемы, не затронутых преобразованием, должны оставаться неизменными.

Находят токи в свернутой схеме. Затем возвращаются к исходной схеме с определением остальных токов.

Преобразование схемы проводят постепенно, рассматривая участки с последовательными и параллельными соединениями приемников. Предварительно нужно выявить узлы и ветви. Элементы, принадлежащие одной ветви, соединены между собой последовательно. В них один ток. Эквивалентное сопротивление последовательно соединенных резисторов равно сумме их сопротивлений:

$$R_3 = \sum_{i=1}^n R_i .$$

При параллельном соединении элементы схемы замещения находятся под одним напряжением и соединены между собой двумя выходными зажимами. Эквивалентная проводимость параллельно соединенных резисторов равна сумме их проводимостей:

$$\frac{1}{R_3} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} .$$

Если параллельно соединены два резистора сопротивлениями  $R_1$  и  $R_2$ , эквивалентное сопротивление

$$R_3 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} .$$

При параллельном соединении  $n$  одинаковых резисторов сопротивлением  $R$  эквивалентное сопротивление

$$R_3 = \frac{R}{n} .$$



Если способ соединения резисторов не ясен, нужно перечертить схему, начиная с одного входного зажима и заканчивая другим, изображая узлы с одинаковыми потенциалами (соединенные ветвью без сопротивления) как один узел.

В свернутой схеме ток определяют по закону Ома:  $I = \frac{E}{R_s}$ .

При возвращении к исходной схеме с определением остальных токов удобно пользоваться формулой для определения тока в одной из двух параллельно соединенных пассивных ветвей.

Ток в одной из двух параллельно соединенных пассивных ветвей пропорционален току в неразветвленной части схемы. В числителе коэффициента пропорциональности записывают сопротивление другой пассивной ветви, в знаменателе – сумму сопротивлений двух пассивных ветвей.

Рассмотрим применение этой формулы на конкретном примере.

*Пример.* Вычислить ток  $I_1$  в схеме [рис. 2.15](#), если известны общий ток  $I$  и сопротивления всех резисторов.

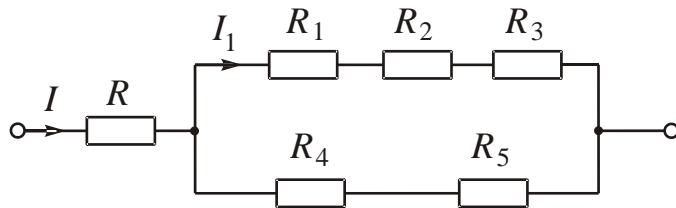


Рис. 2.15

*Решение*

Ток

$$I_1 = \frac{R_4 + R_5}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5} \cdot I.$$

Если схема не содержит последовательные и параллельные соединения резисторов, необходимо соединение треугольником ([рис. 2.16, а](#)), заменить эквивалентной ему звездой ([рис. 2.16, б](#)) или выполнить обратную замену.

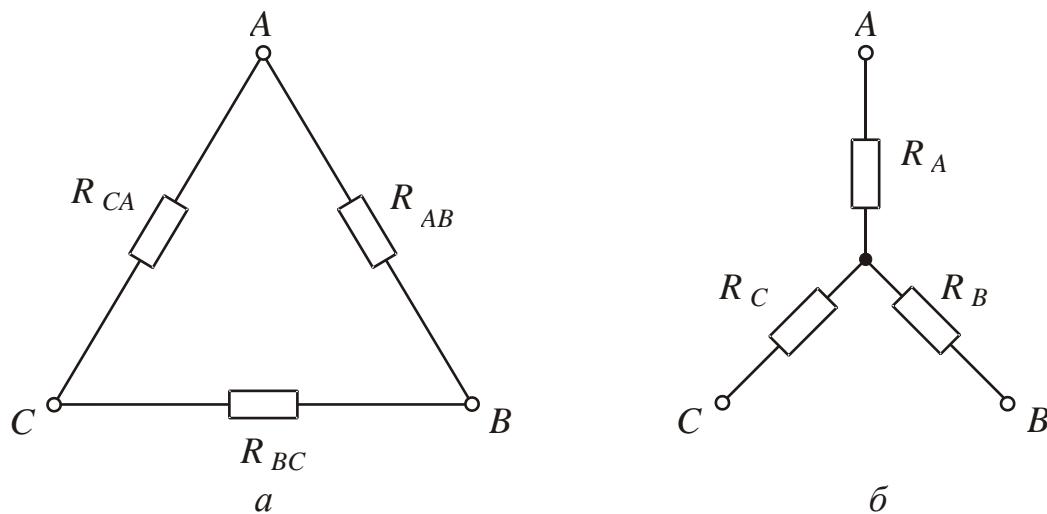


Рис. 2.16

Структура формул эквивалентных преобразований проста для запоминания:

$$R_A = \frac{R_{AB} \cdot R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}; R_B = \frac{R_{BC} \cdot R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}};$$

$$R_C = \frac{R_{CA} \cdot R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}; R_{AB} = R_A + R_B + \frac{R_A \cdot R_B}{R_C};$$

$$R_{BC} = R_B + R_C + \frac{R_B \cdot R_C}{R_A}; R_{CA} = R_C + R_A + \frac{R_C \cdot R_A}{R_B}.$$

После преобразования резисторы в схеме соединены последовательно-параллельно, их можно заменить одним с эквивалентным сопротивлением.

#### 2.4.6. Метод пропорционального пересчета

Метод пропорционального пересчета является следствием линейных связей между токами и напряжениями в схеме. Этот метод пригоден для расчета токов в цепях с одним источником энергии при последовательно-параллельном соединении приемников.

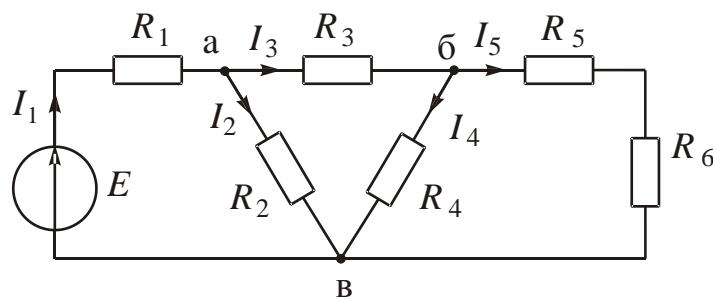


Рис. 2.17

Метод пропорционального пересчета предпочтительнее метода эквивалентных преобразований, если значение входного напряжения меняется.

Вычислим токи схемы, приведенной на [рис. 2.17](#). Найдем узлы и ветви, направим токи. Зададимся каким-либо значением тока в пятой ветви, например  $I'_5 = 1 \text{ A}$ .

Вычислим ЭДС  $E'$ , при которой ток  $I'_5 = 1 \text{ A}$ .

По закону Ома ток  $I'_4 = \frac{U'_{\text{бв}}}{R_4}$ . Очевидно, что напряжение

$$U'_{\text{бв}} = R_6 I'_5 + R_5 I'_5.$$

По первому закону Кирхгофа ток  $I'_3 = I'_4 + I'_5$ .

На основании аналогичных рассуждений ток  $I'_2 = \frac{U'_{\text{ав}}}{R_2}$ ;

$$U'_{\text{ав}} = R_4 I'_4 + R_3 I'_3; \quad I'_1 = I'_2 + I'_3.$$

По второму закону Кирхгофа ЭДС  $E' = R_1 I'_1 + R_2 I'_2$ .

Определим коэффициент пропорциональности между действительным значением ЭДС  $E$  и  $E'$ :

$$k = \frac{E}{E'}.$$

Теперь можно вычислить все токи схемы:

$$I_j = k I'_j.$$

#### 2.4.7. Метод наложения

Метод наложения основан на принципе независимости действия источников энергии. Ток в любой ветви схемы равен алгебраической сумме токов, возникающих в этой ветви под действием каждого отдельно работающего источника.

Схему делят на столько подсхем, сколько источников энергии. В каждой подсхеме оставляют только один источник, остальные источники ЭДС закорачивают, источники тока разрывают.

Приемники во всех подсхемах остаются неизменными.

Токи в подсхемах ищут методом эквивалентных преобразований.

Токи в схеме вычисляют алгебраическим суммированием токов в подсхемах.

Метод наложения рационально применять, если в схеме не больше трех источников энергии.



Рассмотрим применение метода на конкретных примерах.

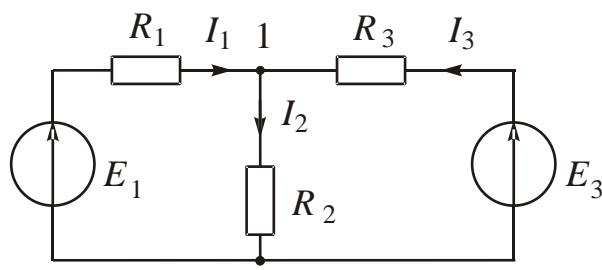


Рис. 2.18

**Пример 2.1.** Вычислить токи в схеме [рис. 2.18](#), если известны значения ЭДС источников и сопротивления всех резисторов.

**Решение**

1. Выявим узлы (1, 2), ветви, направим токи.

2. Разобьем схему на две подсхемы ([рис. 2.19, а и б](#)).

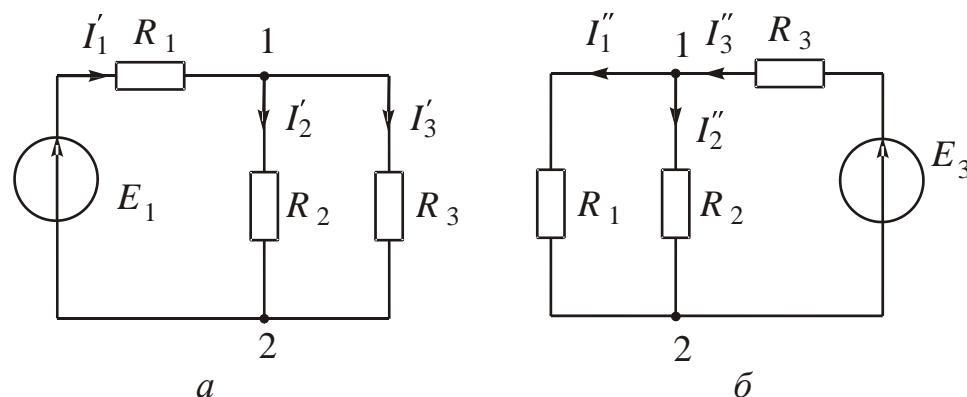


Рис. 2.19

3. Выявим узлы и ветви в первой подсхеме. Ток  $I'_1$  появляется в источнике ЭДС, затем в узле 1 разветвляется на токи  $I'_2$  и  $I'_3$ . Направления токов нужно указывать правильно. В подсхеме нет ветвей, содержащих больше одного резистора, т. е. нет последовательных соединений. Резисторы с сопротивлениями  $R_2$  и  $R_3$  соединены параллельно. Их можно заменить одним резистором с эквивалентным сопротивлением  $R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}$ .

После этого преобразования схема превращается в последовательное соединение с  $R'_3 = R_1 + R_{23}$ .

В свернутой схеме ток  $I'_1$ , вычислим по закону Ома:

$$I'_1 = \frac{E_1}{R'_3}.$$

Ток  $I'_2$  найдем по формуле разброса:

$$I'_2 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \cdot I'_1.$$



Ток  $I'_3$  можно определить с помощью первого закона Кирхгофа:

$$I'_3 = I'_1 - I'_2.$$

4. Выявим узлы и ветви во второй подсхеме, правильно направим токи.

Эквивалентное сопротивление второй подсхемы  $R''_3 = R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ .

В свернутой схеме ток  $I''_3$ , который найдем по закону Ома:

$$I''_3 = \frac{E_3}{R''_3}.$$

Ток  $I''_2$  вычислим для разнообразия с помощью уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$R_2 I''_2 + R_3 I''_3 = E_3.$$

Отсюда  $I''_2 = \frac{E_3 - R_3 I''_3}{R_2}$ .

Ток  $I''_1$  определим, применив первый закон Кирхгофа:

$$I''_1 = I''_3 - I''_2.$$

5. Определим токи в исходной схеме алгебраическим суммированием токов в подсхемах (наложением подсхем):

$$I_1 = I'_1 - I''_1; \quad I_2 = I'_2 + I''_2; \quad I_3 = -I'_3 + I''_3.$$

*Пример 2.2.* Вычислить неизвестные токи в схеме [рис. 2.20](#), если известны значения  $E, J, R$ .

### Решение

1. Выявим узлы (1, 2), ветви, направим токи.

2. Разобьем схему на две подсхемы ([рис. 2.21, а и б](#)), содержащие по одному источнику энергии.

В первой подсхеме нет узлов. Схема является одноконтурной.

$$\text{Ток } I'_1 = I'_2 = \frac{E}{2R}.$$

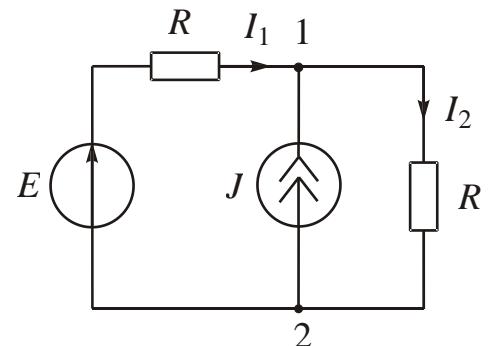


Рис. 2.20



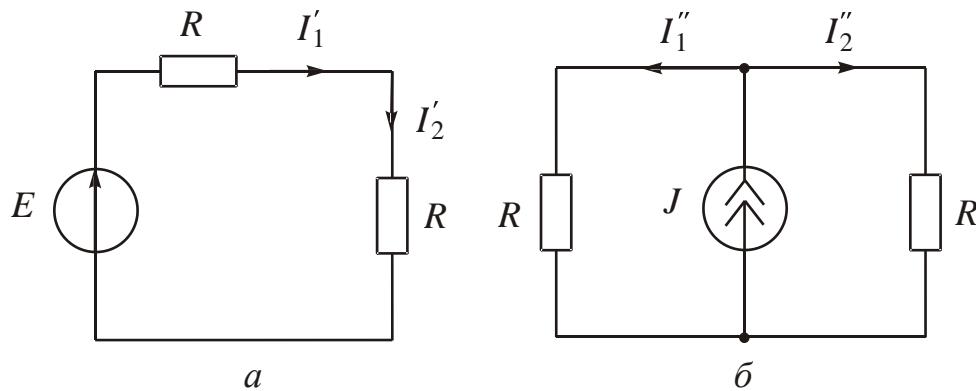


Рис. 2.21

Во второй подсхеме ток источника тока  $J$  разделяется на токи в одинаковых пассивных параллельных ветвях. Поэтому

$$I_1'' = I_2'' = \frac{J}{2}.$$

3. Определим токи в исходной схеме алгебраическим суммированием токов в подсхемах:

$$I_1 = I_1' - I_1'' = \frac{E}{2R} - \frac{J}{2};$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' = \frac{E}{2R} + \frac{J}{2}.$$

#### 2.4.8. Метод эквивалентного генератора

Этот метод дает возможность вычислить ток только одной ветви схемы. Его можно использовать и при необходимости заменить часть схемы эквивалентной ей ветвью. Суть расчета заключается в замене сложной разветвленной схемы эквивалентной ей одноконтурной с подлежащим определению током.

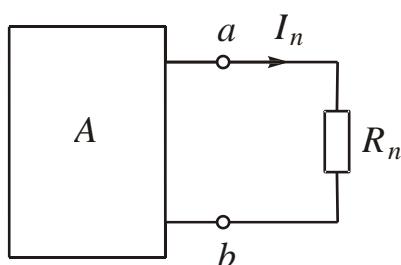


Рис. 2.22

Прежде всего схему разбивают на две части: резистор сопротивлением  $R_n$  (ток в котором  $I_n$  нужно вычислить) и всю остальную часть схемы, которая будет питать этот резистор. Эта часть схемы является активным двухполюсником ([рис. 2.22](#)).

Любой активный двухполюсник можно заменить эквивалентным ему генератором ([рис. 2.23](#)).

ЭДС генератора равна напряжению между зажимами  $a$  и  $b$  активного двухполюсника в режиме холостого хода. Внутреннее сопротивление генератора равно эквивалентному сопротивлению пассивного двухполюсника относительно входных зажимов. Пассивный двухполюсник получают из активного, закорачи-

вав идеальные источники ЭДС и разрываяные источники тока.

Таким образом, исходную схему произвольной конфигурации можно заменить одноконтурной, а расчетный ток вычислить по следующей формуле:

$$I_n = \frac{E_r}{R_r + R_n} = \frac{U_{xx}}{R_r + R_n}.$$

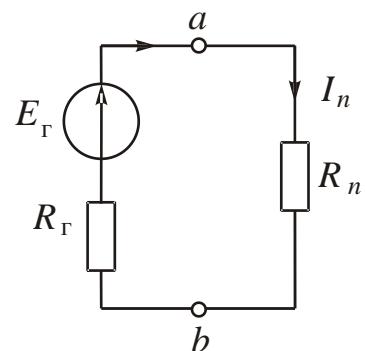


Рис. 2.23

*Пример. 2.3.* Вычислим ток  $I_4$  в схеме, представленной на [рис. 2.24](#).

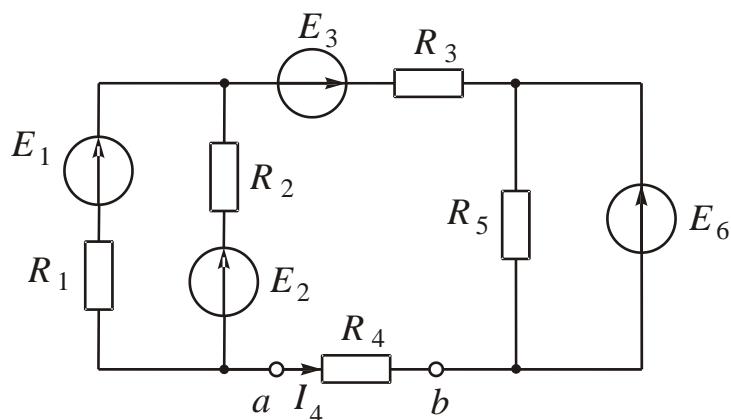


Рис. 2.24

### Решение

1. Разделим схему на две части: резистор сопротивлением  $R_4$  и активный двухполюсник, который заменим эквивалентным ему генератором. Для этого нужно определить  $E_r = U_{xx}$  и  $R_r$ .

2. Нарисуем схему активного двухполюсника в режиме холостого хода ([рис. 2.25](#)). В схеме два тока  $I_{1x}$  и  $I_{2x}$ , замыкающих контуры.

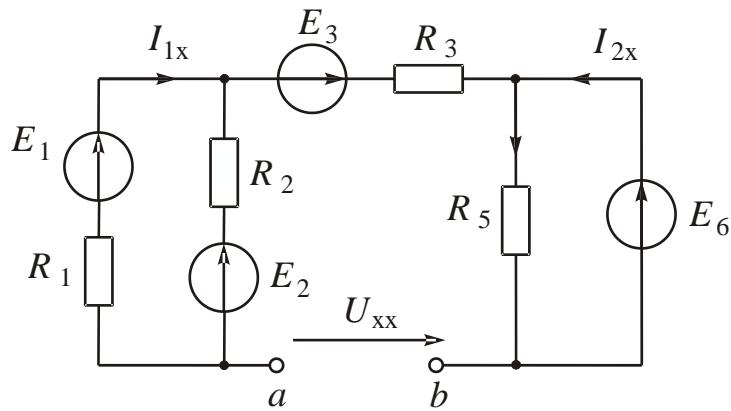


Рис. 2.25

3. Запишем выражение для определения напряжения  $U_{xx}$ , рассчитав изменение потенциалов между точками  $b$  и  $a$ :

$$U_{xx} = E_6 - E_3 - E_1 + R_1 I_{1x}.$$

4. Найдем ток  $I_{1x}$  из уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$R_1 I_{1x} + R_2 I_{1x} = E_1 - E_2.$$

Отсюда

$$I_{1x} = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}.$$

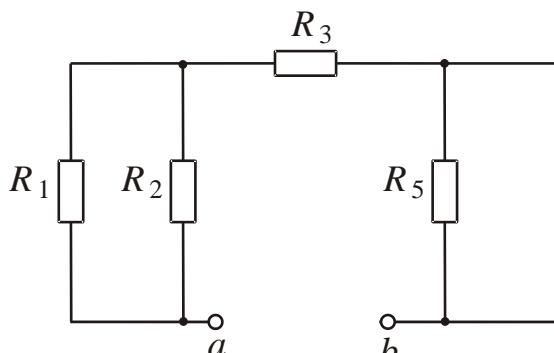


Рис. 2.26

В схеме пассивного двухполюсника (см. [рис. 2.26](#)) резистор сопротивлением  $R_5$  закорочен.

Очевидно, что эквивалентное сопротивление относительно входных зажимов  $a$  и  $b$  равно:

$$R_\Gamma = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3.$$

5. Вычислим ток  $I_4$  по формуле

$$I_4 = \frac{E_\Gamma}{R_\Gamma + R_4} = \frac{U_{xx}}{R_\Gamma + R_4}.$$

## 2.5. Передача энергии от активного двухполюсника к пассивному

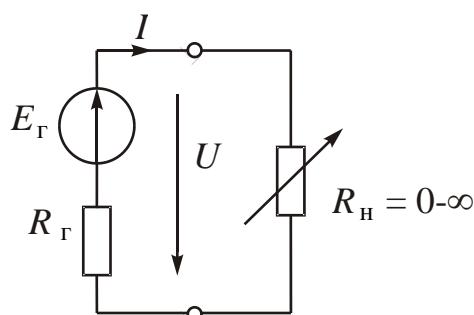


Рис. 2.27

Для исследования вопроса рассмотрим схему [рис. 2.27](#), где  $E_\Gamma$  и  $R_\Gamma$  активного двухполюсника (источника энергии) остаются постоянными, а сопротивление пассивного двухполюсника (нагрузки) меняется от нуля до бесконечности.

Выясним, при каком сопротивлении  $R_h$  на нагрузке будет выделяться максимальная мощность. Составим уравнение баланса мощностей:

$$E_\Gamma I = P_h + R_\Gamma I^2.$$



Отсюда  $P_H = E_\Gamma I - R_\Gamma I^2$ .

Определим, при каком токе на нагрузке будет выделяться максимальная мощность. Для этого нужно найти производную  $P_H$  по току и приравнять ее нулю:

$$\frac{dP_H}{dI} = E_\Gamma - 2R_\Gamma I = 0.$$

Отсюда следует, что при максимальной мощности ток  $I = \frac{E_\Gamma}{2R_\Gamma}$ . Но по закону Ома для полной цепи ток  $I = \frac{E_\Gamma}{R_\Gamma + R_H}$ .

Сравнение этих формул показывает, что максимальная мощность выделяется на нагрузке при  $R_H = R_\Gamma$ . Такой режим называют согласованным.

Коэффициент полезного действия определяют как отношение мощности полезной к мощности затраченной, т. е.

$$\eta = \frac{P_H}{P_\Gamma} = \frac{R_H I^2}{E_\Gamma \cdot I} = \frac{R_H I}{E_\Gamma} = \frac{R_H E_\Gamma}{E_\Gamma (R_H + R_\Gamma)} = \frac{R_H}{R_H + R_\Gamma}.$$

При согласованном режиме  $\eta = 0,5$ , поэтому этот режим не применяют для передачи электрической энергии. Его применяют для передачи сигналов и информации на линиях связи. При увеличении сопротивления нагрузки  $R_H$  КПД увеличивается и стремится к единице. Представляется, что в режиме холостого хода, когда  $R_H = \infty$  и тока нет, понятие КПД не существует, так как мощности генератора  $P_\Gamma$  и нагрузки  $P_H$  равны нулю.

Уравнение внешней вольт-амперной характеристики генератора имеет следующий вид:

$$U = E_\Gamma - R_\Gamma I.$$

Графики зависимостей  $U(I)$ ,  $P_\Gamma(I)$ ,  $P_H(I)$  и  $\eta(I)$  приведены на [рис. 2.28](#).

В режиме холостого хода ток равен нулю, в режиме короткого за-

мыкания ( $R_H = 0$ ) ток имеет максимальное значение  $I_{kz} = \frac{E_\Gamma}{R_\Gamma}$ .

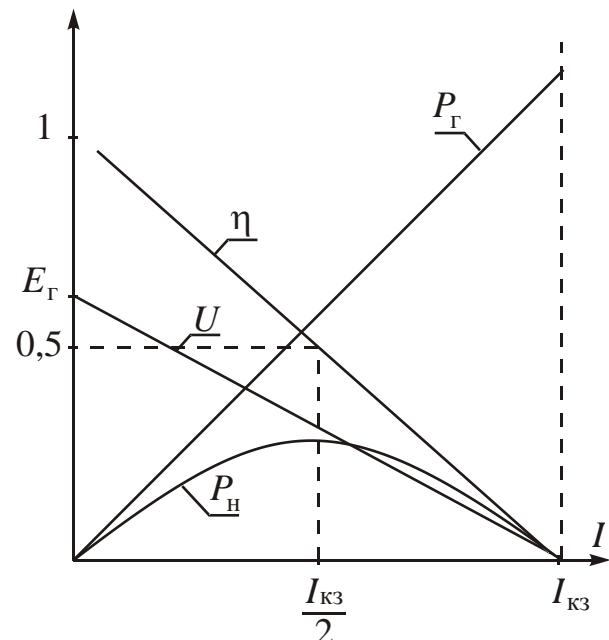


Рис. 2.28

При согласованном режиме ток  $I = \frac{E_g}{2R_g} = \frac{I_{kz}}{2}$ , мощность нагрузки

$$P_h = \frac{1}{2} P_g, \eta = 0,5.$$

Эти зависимости полностью характеризуют режим линии передачи электрической энергии небольшой длины, у которой утечкой тока можно пренебречь.



# ГЛАВА 3

## ОДНОФАЗНЫЕ ЦЕПИ

### СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

#### 3.1. Преимущества переменного тока

Впервые явление электрического тока наблюдал профессор анатомии Болонского университета Луиджи Гальвани в 1780 г. Термин «электрический ток» был введен А. М. Ампером. Первые же опыты с электрическим током привели к открытию различных его действий.

Русский профессор В. В. Петров первым указал на возможность применения электричества для целей освещения. Развитие электрического освещения шло по двум направлениям: конструирование дуговых ламп (В. В. Петров, П. Н. Яблочков) и ламп накаливания (А. Н. Лодыгин, Т. Эдисон).

В начальный период исследования электрического тока источник и приемник энергии находились в непосредственной близости друг от друга. Использование электрического освещения вызвало необходимость передачи электрической энергии на расстояние. Оказалось, что это расстояние не превышает 500 м. Состоятельные люди начинают строить собственные электрические станции.

А. П. Чехов, проезжая в 1891 г. через Красноярск, был поражен электрическим освещением в доме купцов Гадаловых (ныне здание магазина «Детский мир»). Электростанция располагалась в доме, где в настоящее время находится магазин «Пассаж».

$$\text{Потери в линии } \Delta P = R I^2. \text{ Сопротивление } R = \frac{\rho \cdot l}{S},$$

где  $\rho$  – удельное сопротивление материала;  $l$  – длина линии;  $S$  – площадь поперечного сечения проводов.

Снижение удельного сопротивления проводов практически неосуществимо, так как их изготавливали из меди, имеющей предельно малое удельное сопротивление.

Следовательно, можно было лишь увеличить сечение проводов.

В 1875 г. русский военный инженер Ф. А. Пироцкий провел опыты передачи электроэнергии по рельсам заброшенного участка Сестрорецкой железной дороги. Рельсы изолировали от земли. Электрическая энергия передавалась от небольшого генератора к электродвигателю, удаленному на расстояние 1 км. Аналогичные предложения высказывал и В. Сименс, посетивший в 1876 г. Ниагарский водопад и оценивший энергетические возможности его использования.

Несмотря на нерациональность этого практического направления, опыты Ф. А. Пироцкого привлекли внимание к вопросам электропередачи и вызвали ряд новых исследований.

Другой путь, связанный с уменьшением тока, длительное время осмысливался теоретически. Чтобы мощность  $P = U \cdot I$  не изменилась, нужно бы-



ло увеличивать напряжение. Наиболее обстоятельное исследование этого вопроса выполнили в 1880 г. независимо друг от друга французский инженер (впоследствии академик) Марсель Депре и профессор физики Петербургского лесного института Д. А. Лачинов.

В 1882 г. М. Депре построил первую линию высокого напряжения (2 кВ) расстоянием 57 км. В г. Мисбахе была установлена паровая машина, приводившая в действие генератор постоянного тока мощностью 3 л. с. В Мюнхене была установлена такая же машина, работавшая в режиме электродвигателя и приводившая в действие насос для искусственного водопада. КПД передачи не превышал 25 %. Технические возможности не позволяли производить энергию высокого напряжения. Электроэнергию постоянного высокого напряжения не могли использовать потребители, поэтому пришла идея перехода к переменному току, который поддается трансформации.

В 1896 г. Городская Дума г. Красноярска сделала предложение компании «Сименс и Гальске»: город строит здание электростанции, выполняет подсобные работы и дает неквалифицированную рабочую силу; фирма дает все машины, приборы, материалы и осуществляет установку.

На набережной у центрального парка было построено здание первой красноярской электростанции (ныне здание Энергосбыта). В нижнем этаже были установлены две паро-турбо-динамомашины с  $P_n = 675$  л. с. и два паровых котла.

7 апреля 1912 г., на Пасху, на центральных улицах Красноярска загорелись 1662 лампочки.

#### ***Преимущества переменного тока:***

1. Поддается трансформации, отсюда возможность передачи на большие расстояния.
2. Производство переменного тока просто и рационально.
3. Потребитель при переменном токе легче решает вопросы преобразования электрической энергии в механическую.

#### ***Преимущества синусоидальной формы кривых тока и напряжения перед другими периодическими формами:***

1. Форма кривых после трансформации не меняется.
2. Величины меняются плавно, нет перенапряжений, толчков тока, которые недопустимы в энергетике.

## **3.2. Способы представления гармонических функций**

1. Графическое изображение – синусоида ([рис. 3.1](#)).

Значение переменной величины в данный момент называют **мгновенным**. Мгновенные значения обозначают строчными буквами:  $i$ ,  $u$ ,  $e$ .

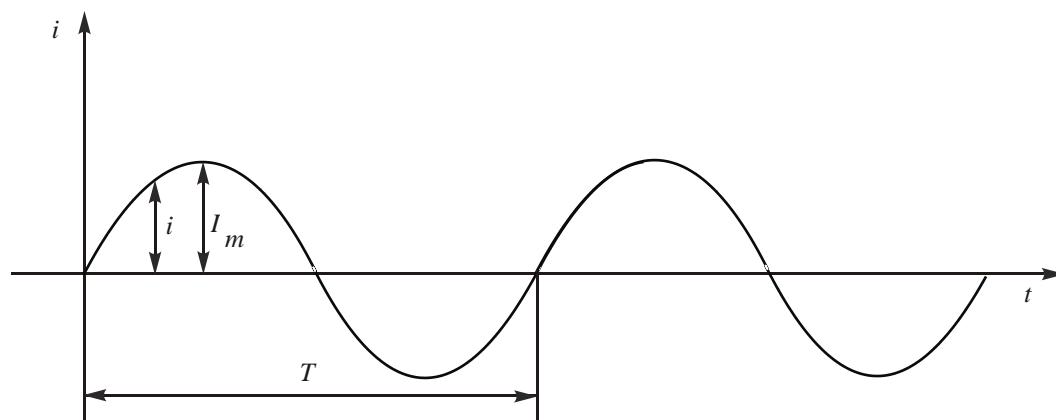


Рис. 3.1

Наименьший промежуток времени, через который мгновенные значения повторяются, называют **периодом**  $T$ :

$$i(t) = i(t + T).$$

**Период** – время одного полного колебания.

Величину, обратную периоду, называют **частотой**  $f$ :

$$f = \frac{1}{T}.$$

**Частота** – число полных колебаний в единицу времени.

$$[f] = \frac{1}{\text{с}} = \text{с}^{-1} = \text{Гц}.$$

Промышленная частота в России – 50 Гц, в США, Японии – 60 Гц. Была выбрана частота, которая представлялась оптимальной. Нижний предел определяли требованиями освещения (чтобы не были заметны отключения при нулевых значениях тока), верхний – требуемой скоростью вращения валов электродвигателей, которая пропорциональна частоте. В настоящее время такие значения частоты признаны неудачными. При увеличении частоты уменьшаются вес и габариты оборудования. На переход к другой частоте по-всеместно нет материальных ресурсов. Когда необходимо уменьшить вес и габариты устройств, используют преобразователи частоты (на лесоповале для питания используют напряжение частотой 400 Гц) или автономные источники (в самолетах напряжение частотой несколько тысяч герц).

2. Изображение тригонометрическими функциями.

Мгновенные значения электрических величин являются синусоидальными функциями времени:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i);$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u);$$

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e),$$

где  $i, u, e$  – мгновенные значения;

$I_m, U_m, E_m$  – максимальные (амплитудные) значения (см. [рис. 3.1](#));

$(\omega t + \psi)$  – фаза колебания, характеризующая развитие процесса во времени;

$\omega t$  – текущий угол, который отсчитывают от начала отсчета времени;

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$  – угловая циклическая частота, определяющая скорость изменения фазы;

$\psi$  – начальная фаза. Это угол, определяющий значение функции в начальный момент времени.

Начальная фаза может быть положительной и отрицательной. У синусоиды, изображенной на [рис. 3.1](#), начальная фаза  $\psi = 0$ .

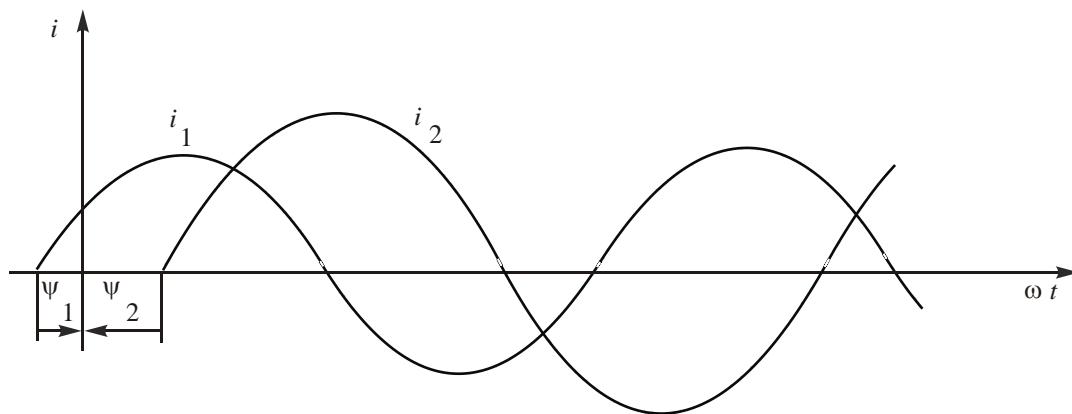


Рис. 3.2

Положительную начальную фазу откладывают влево от начала координат (см. ток  $i_1$  на [рис. 3.2](#)), отрицательную – вправо (см. ток  $i_2$  на [рис. 3.2](#)).

Между токами  $i_1$  и  $i_2$  есть сдвиг по фазе. При заданных начальных фазах фазовый сдвиг остается величиной постоянной.

Угол сдвига фаз напряжения и тока  $\varphi = \psi_u - \psi_i$  является важнейшей характеристикой электрической цепи. Если угол  $\varphi = 0$ , напряжение и ток совпадают по фазе.

### 3. Изображение врачающимися векторами.

Непосредственные математические действия с синусоидальными величинами весьма трудоемки. Поэтому для облегчения практических расчетов синусоидальные величины изображают врачающимися векторами. Вспомним, как получается синусоида. В некоторой системе координат располагаем

вектор, длина которого равна амплитуде синусоиды. Вращая этот вектор вокруг начала координат со скоростью  $\omega$  и проектируя на вертикальную ось, для каждого момента времени получим мгновенное значение. Положительное направление вращения вектора принято против часовой стрелки. За один полный оборот вектора его проекция на вертикальную ось дает все мгновенные значения синусоидальной величины.

Возможен и обратный процесс: любую синусоиду можно изобразить вектором, вращающимся против часовой стрелки со скоростью  $\omega$ .

Вектор изображают в начальный момент времени ( $t = 0$ ). Тогда фаза колебания  $(\omega t + \psi) = \psi$ . Длина вектора в масштабе выражает амплитудное значение величины. Вращающиеся векторы обозначают заглавной печатной буквой с точкой над ней.

*Пример.* Изобразим ток, меняющийся по закону  $i = I_m \sin(\psi t + \psi)$ , при чём  $\psi > 0$ , синусоидой (рис. 3.3, а) и вращающимся вектором на плоскости  $xOy$  (рис. 3.3, б).

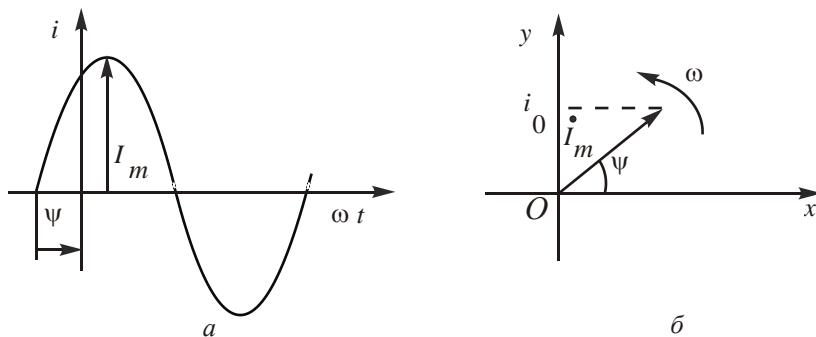


Рис. 3.3

Вертикальная проекция вектора определяет мгновенное значение тока при  $t = 0$ :  $i_0 = I_m \sin \psi$ .

При вращении с одинаковой скоростью все векторы взаимно неподвижны.

Совокупность векторов, отображающих процесс в цепи, называют векторной диаграммой.

Применение вращающихся векторов позволяет заменить тригонометрические и графические действия над мгновенными значениями действиями над вращающимися векторами. Но векторные диаграммы дают только графическое решение задачи.

#### 4. Изображение комплексными числами.

Для аналитического решения плоскость координат  $xOy$  заменим комплексной плоскостью (рис. 3.4).

Так как буквой  $i$  в электротехнических дисциплинах обозначают ток, то мнимую единицу обозначают буквой

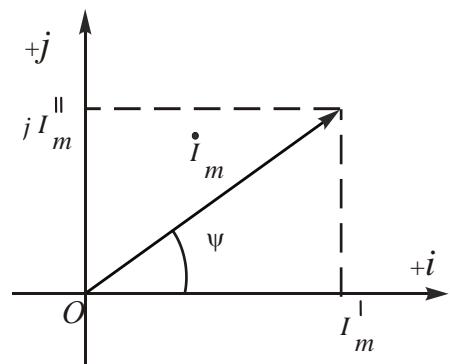


Рис. 3.4

$$j = \sqrt{-1}.$$

Вектору на комплексной плоскости можно сопоставить комплексное число:

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\psi}.$$

Величину характеризуют модулем комплекса  $I_m$ , положение на комплексной плоскости – аргументом комплекса  $\psi$ .

Такую форму записи комплексного числа в математике называют показательной. Ее можно использовать для умножения и деления комплексных чисел.

Складывать и вычитать в такой форме записи нельзя, следует перейти к так называемой алгебраической форме. Для этого раскладывают вектор на проекции по осям координат, действительную  $I'_m$  и мнимую  $jI''_m$ :

$$\dot{I}_m = I'_m + jI''_m.$$

Переход от одной формы записи к другой делают по формулам, полученным из решения треугольника (см. [рис. 3.4](#)):

$$I_m = \sqrt{(I'_m)^2 + (I''_m)^2}; \quad \psi = \arctg \frac{I''_m}{I'_m};$$

$$I'_m = I_m \cos \psi; \quad I''_m = I_m \sin \psi.$$

Метод расчета цепей синусоидального тока при помощи комплексных чисел называют символическим. Его предложил американский ученый Карл Протеус Штейнмец. Немец по происхождению, профессор математики из города Бреслау, был приглашен Эдисоном в фирму, созданную для реализации изобретенной Эдисоном лампы накаливания. Не без помощи К. П. Штейнмеца эта скромная фирма превратилась во всемирно известного гиганта «Дженерал Электрик Компани».

### 3.3. Действующие и средние значения гармонических величин

#### 3.3.1. Действующие значения

По тепловому действию сравнивают синусоидальный ток с постоянным ([рис. 3.5, а и б](#)).

Постоянный ток подбирают таким, чтобы за одинаковое количество времени выделялось одинаковое количество тепла:



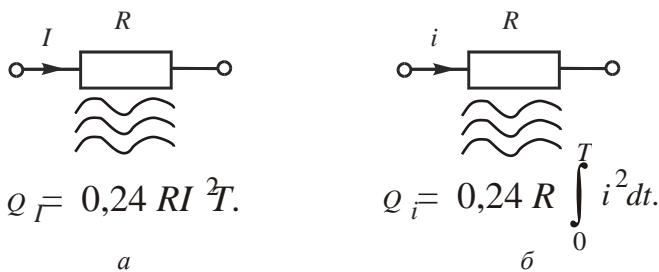


Рис. 3.5

$$Q_I = Q_i;$$

$$I^2 T = \int_0^T i^2 dt.$$

Отсюда

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}.$$

**Действующим значением** тока считают такой постоянный ток, который производит тот же тепловой эффект, что и реальный переменный ток.

Примем начальную фазу  $\psi_i$  для простоты равной нулю. Тогда  $i = I_m \sin \omega t$ .

Действующее значение тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m.$$

$$\text{Аналогично } U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = 0,707 U_m; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 0,707 E_m.$$

Так как действие переменного тока характеризуют действующие значения, то на векторных диаграммах принято изображать векторы действующих, а не максимальных значений.

Действующие значения токов и напряжений показывают амперметры и вольтметры электромагнитной и электродинамической систем.

### 3.3.2. Средние значения

В общем случае **среднее значение** – это среднее значение за период:

$$I_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T i dt.$$

Но для синусоидальной величины это выражение равно нулю.

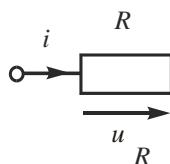
Поэтому среднее значение определяют для половины периода:

$$I_{\text{ср}} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} I_m = 0,637 I_m.$$

Аналогично  $U_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi} U_m = 0,637 U_m$ ;  $E_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi} E_m = 0,637 E_m$ .

### 3.4. Приемники в схемах замещения цепей синусоидального тока

#### 3.4.1. Идеальный резистор либо резистивный элемент



Резистивный элемент (рис. 3.6) обладает сопротивлением  $R$ , которое измеряют в омах (Ом).

Закон Ома для мгновенных значений:  $u_R = R i$ .

Если  $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ ,  $u_R = R I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ .

Отсюда можно сделать выводы:

При синусоидальном токе напряжение на резистивном элементе изменяется тоже по синусоидальному закону.

2. Ток и напряжение резистивного элемента совпадают по фазе.

Проиллюстрируем эти выводы графиками: синусоидами (рис. 3.7, а) и векторной диаграммой (рис. 3.7, б).

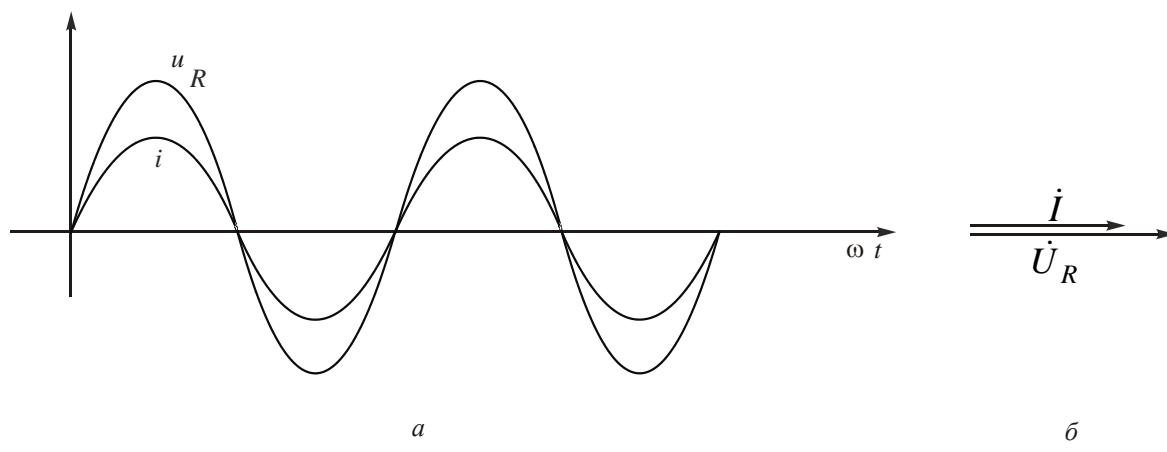


Рис. 3.7

Перед знаком синуса записывают максимальное значение, т. е.

$$U_{Rm} = R I_m.$$

Это закон Ома для максимальных значений.

Если левую и правую части уравнения разделить на  $\sqrt{2}$ , получим закон



Ома для действующих значений:

$$U_R = RI.$$

Закон Ома для комплексов действующих значений:

$$\dot{U}_R = R \dot{I}.$$

**Мгновенная мощность** – это произведение мгновенных значений напряжения и тока:

$$\begin{aligned} p = u_R \cdot i &= U_{Rm} I_m \sin^2(\omega t + \psi_i) = \frac{U_{Rm} \cdot I_m}{2} [1 - \cos 2(\omega t + \psi_i)] = \\ &= U_R \cdot I [1 - \cos 2(\omega t + \psi_i)]. \end{aligned}$$

Круговой косинус не может быть больше единицы, т. е. выражение в квадратной скобке не может быть меньше нуля.

**Выводы:**

1. Мгновенная мощность резистивного элемента всегда положительная.
2. Мгновенная мощность меняется с удвоенной частотой.

Эти выводы можно получить и при графическом умножении  $u_R$  на  $i$  (рис. 3.8).

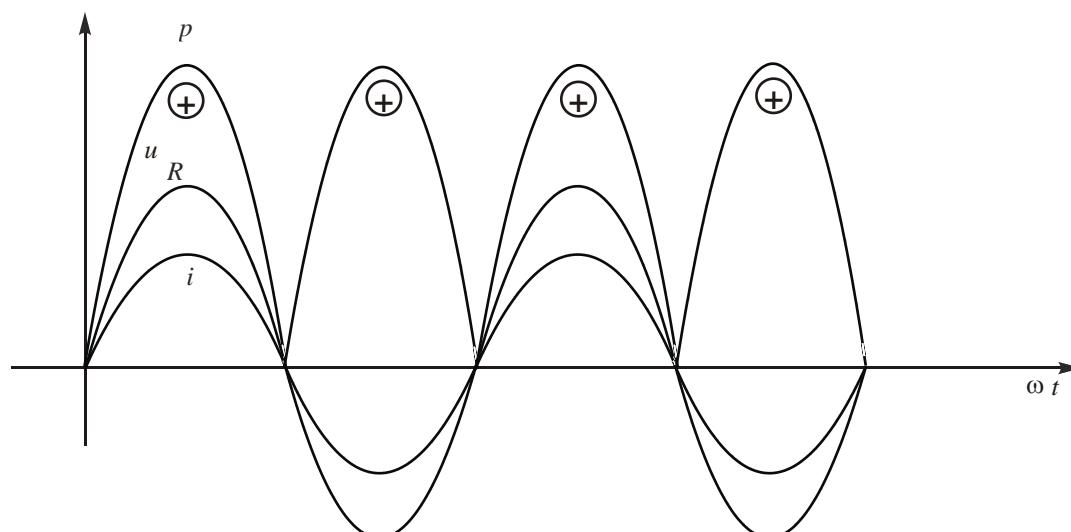


Рис. 3.8

Среднее значение мощности за период называют **активной мощностью**  $P$ . Для резистивного элемента

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_R I [1 - \cos 2(\omega t + \psi_i)] dt = \frac{1}{T} U_R I T = U_R \cdot I = R I^2.$$

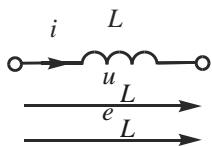
*Обратите внимание:* в формуле активной мощности фигурируют дей-

ствующие значения тока и напряжения.

Измеряют активную мощность в ваттах (Вт).

### 3.4.2. Индуктивный элемент либо идеальная индуктивная катушка

Ток индуктивного элемента (рис. 3.9) создает магнитный поток, направленный по оси катушки.



**Потокосцепление**  $\psi$  – это произведение числа витков катушки на магнитный поток:

$$\psi = W\Phi .$$

Рис. 3.9        Однаковыми буквами могут быть обозначены разные физические величины.

Индуктивный элемент учитывает ЭДС самоиндукции, которая пропорциональна скорости изменения потокосцепления и мешает этому изменению:

$$e_L = -\frac{d\psi}{dt} = -W \frac{d}{dt}.$$

Индуктивная катушка обладает индуктивностью. **Индуктивность** – это коэффициент, характеризующий способность тока создавать магнитный поток:

$$L = \frac{d\psi}{di}.$$

Индуктивность измеряют в генри ( $\Gamma\text{н} = \Omega\text{м} \cdot \text{с}$ ).

Можно записать  $d\psi = Ldi$ . Тогда  $e_L = -L \frac{di}{dt}$ . Напряжение на индуктивном элементе  $u_L = -e_L$ , т. е.

$$u_L = L \frac{di}{dt}.$$

**Это закон Ома для мгновенных значений.**

Если  $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ , напряжение  $u_L = L\omega I_m \cos(\omega t + \psi_i) = L\omega I_m \sin\left(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}\right)$ .

Отсюда можно сделать **выводы**:

1. При синусоидальном токе напряжение на индуктивном элементе тоже синусоидально.



2. Напряжение опережает по фазе ток на угол, равный  $\frac{\pi}{2}$ .

Проиллюстрируем эти выводы графиками: синусоидами (рис. 3.10, а) и векторной диаграммой (рис. 3.10, б).

Перед знаком синуса записывают максимальное значение, т. е.

$$U_{Lm} = L\omega I_m.$$

Если левую и правую части уравнения разделим на  $\sqrt{2}$ , то получим **закон Ома для действующих значений**:

$$U_L = L\omega I.$$

По аналогии с резистором для упрощения расчетов вводят понятие индуктивного сопротивления  $X_L$ :

$$X_L = L\omega.$$

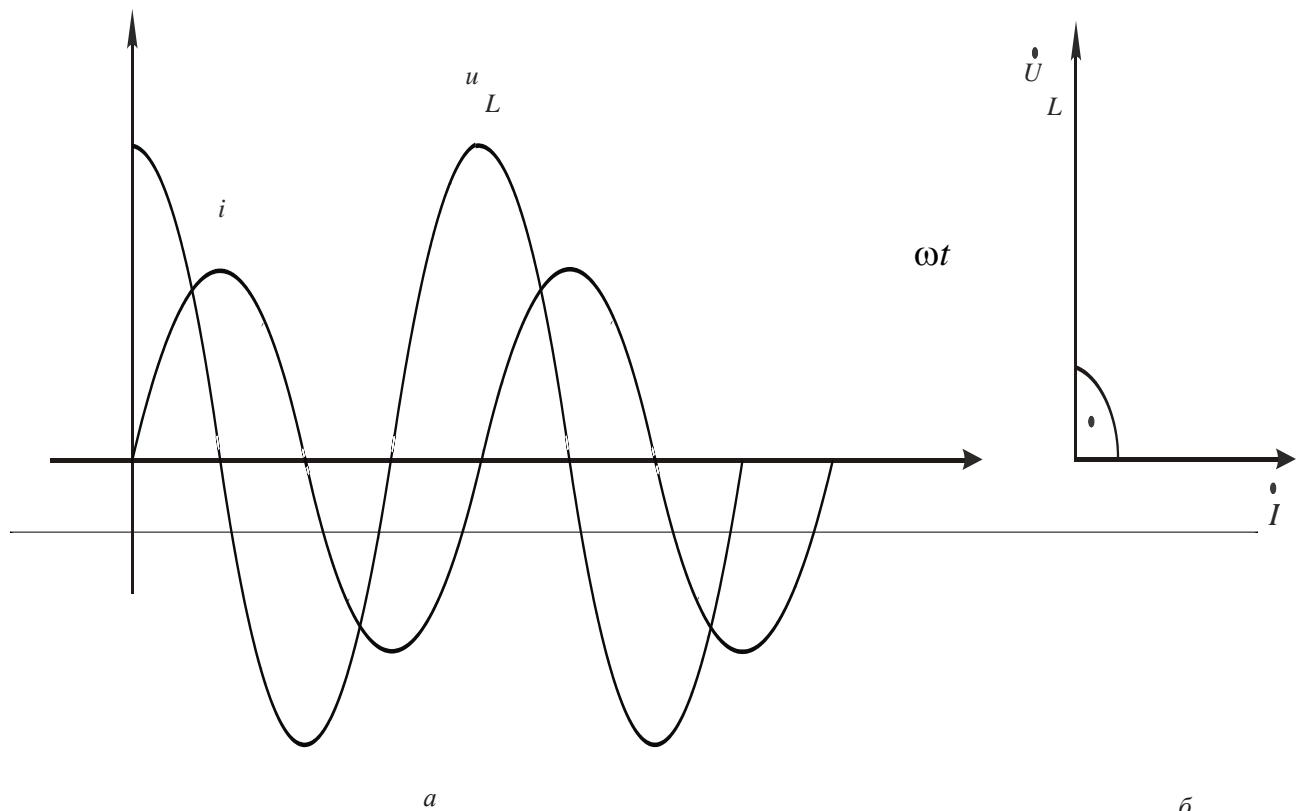


Рис. 3.10

$$[X_L] = \text{Ом} \cdot \text{с} \cdot \frac{1}{\text{с}} = \text{Ом}.$$

Тогда  $U_L = X_L \cdot I$ .

Индуктивное сопротивление – это расчетное понятие, учитывающее

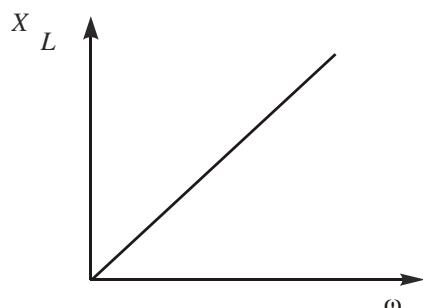


Рис. 3.11

ЭДС самоиндукции. Частотная характеристика индуктивного сопротивления представлена на [рис. 3.11](#).

В цепи постоянного тока  $\omega = 0$ , поэтому  $X_L = L\omega = 0$ . Вместо индуктивного элемента в схеме замещения будет закоротка.

Расчеты в цепях синусоидального тока делают символическим методом. **Закон Ома для комплексных значений:**

$$\dot{U}_L = j X_L \dot{I} = X_L \dot{I} e^{j\frac{\pi}{2}} = X_L \dot{I} e^{j90^\circ}.$$

Умножение вектора на  $j$  или на  $e^{j90^\circ}$  означает его поворот на комплексной плоскости на угол  $+90^\circ$ .

**Мгновенная мощность** индуктивного элемента

$$p = u_L \cdot i = U_{Lm} I_m \cos(\omega t + \psi_i) \cdot \sin(\omega t + \psi_i).$$

Умножим и разделим на 2:

$$p = \frac{U_{Lm} \cdot I_m}{2} 2\cos(\omega t + \psi_i) \cdot \sin(\omega t + \psi_i) = U_L I \cdot \sin 2(\omega t + \psi_i).$$

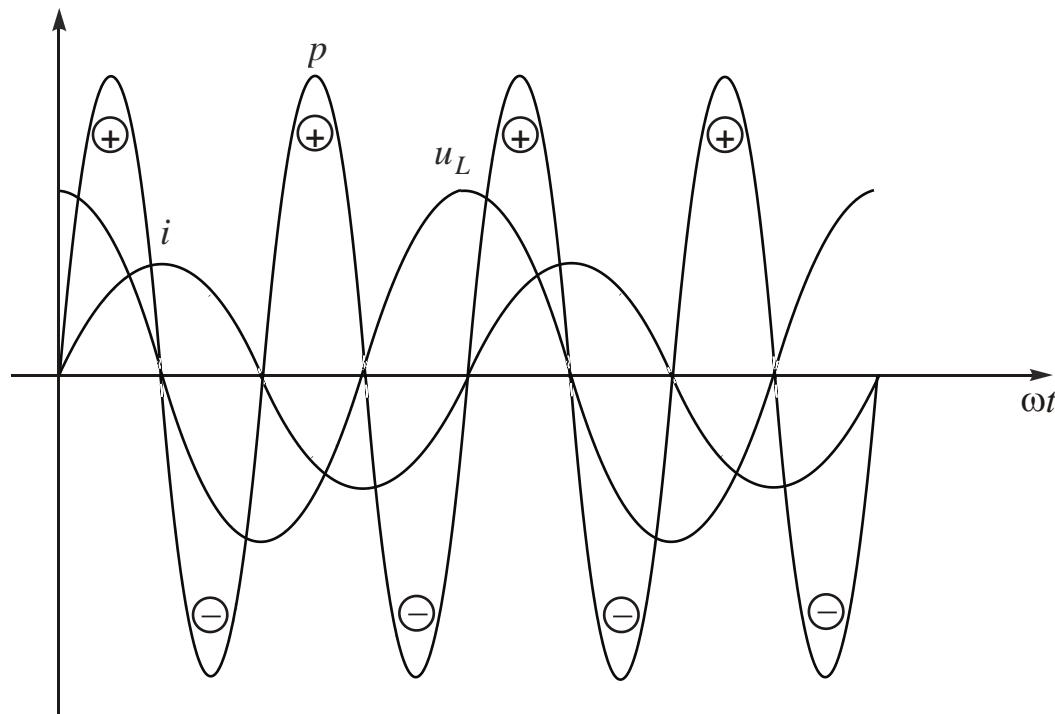


Рис. 3.12

Отсюда следуют **выводы**:

1. Мощность меняется с удвоенной частотой.

2. Мощность знакопеременная.

Эти же выводы можно получить при графическом перемножении  $u_L$  и  $i$  (рис. 3.12).

При  $p > 0$  энергия от источника поступает в индуктивную катушку и запасается в ее магнитном поле.

При  $p < 0$  энергия возвращается в сеть.

Активная мощность  $P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = 0$ , так как мгновенная мощность меняется по синусоидальному закону.

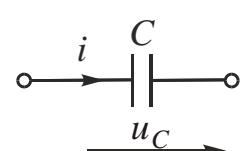
**Идеальная индуктивная катушка энергии не потребляет.**

**Энергия магнитного поля** индуктивного элемента

$$W_M = \int p dt = \int u_L i dt = \int L \frac{di}{dt} \cdot i dt = \int L i di = \frac{L i^2}{2}.$$

### 3.4.3. Идеальный конденсатор либо емкостный элемент

Емкостный элемент (рис. 3.13) обладает емкостью  $C$ , которую измеряют в фарадах  $\left( \Phi = \frac{C}{\text{Ом}} \right)$ .



Первые наблюдения электрических и магнитных явлений относятся к глубокой древности.

Слово «электричество» произошло от греческого слова «электрон», которым называли янтарь. Многие замечали, что натертый янтарь притягивает легкие тела.

В 1650 г. бургомистр г. Магдебурга Отто фон Герике изготовил первую простейшую электростатическую машину. Возникло предположение, что электричество является жидкостью, пропитывающей обычную материю как губку. Было установлено, что тела в зависимости от их отношения к электричеству можно разделить на две группы: проводники и непроводники.

У голландского профессора Мушенбрека из г. Лейдена возникла идея «накопить» электрические заряды в стеклянном сосуде. В 1745 г. он взял стеклянную банку, наполненную водой, опустил в нее медную проволоку, соединенную с электростатической машиной и, взяв банку в правую руку, попросил своего помощника вращать шар машины. После того как, по его мнению, в банке накопилось достаточно количество зарядов, он решил левой рукой отсоединить медную проволоку. При этом он ощутил сильнейший удар. В письме Реомюру в Париж Мушенбрек писал, что не согласился бы повторить этот опыт даже ради короны Франции.

Так была изобретена лейденская банка, а вскоре и первый простейший конденсатор.

Одним из важнейших последствий изобретения лейденской банки яви-

лось установление влияния электрических зарядов на организм человека, что привело к зарождению электромедицины.

Опыт Мушенбрека повторил в присутствии французского короля аббат Нолле. Он образовал цепь из 180 гвардейцев, взявшись за руки, причем первый держал банку в руке, а последний прикасался к проволоке, извлекая искру. Удар чувствовался всеми в один момент. Десятки людей мгновенно вскрикивали и делали непроизвольные жесты. От этой цепи солдат и произошел термин «электрическая цепь».

Из курса физики известно, что  $i = \frac{dq}{dt}$ , а  $q = C u_C$ .

Отсюда  $i = C \frac{du_C}{dt}$ .

Это **закон Ома для мгновенных значений**.

Пусть напряжение  $u_{CCm} = U \sin(\omega t_u + \psi)$ .

Тогда  $i = C\omega U_{Cm} \cos(\omega t + \psi_u) = C\omega U_{Cm} \sin\left(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}\right)$ .

Из полученного выражения можно сделать **выводы**:

1. При синусоидальном токе напряжение на емкостном элементе тоже синусоидально.

2. Напряжение на емкостном элементе отстает по фазе от тока на угол  $\frac{\pi}{2}$  ( $90^\circ$ ).

Эти выводы можно проиллюстрировать графиками: синусоидами (рис. 3.14, а) и векторной диаграммой (рис. 3.14, б).

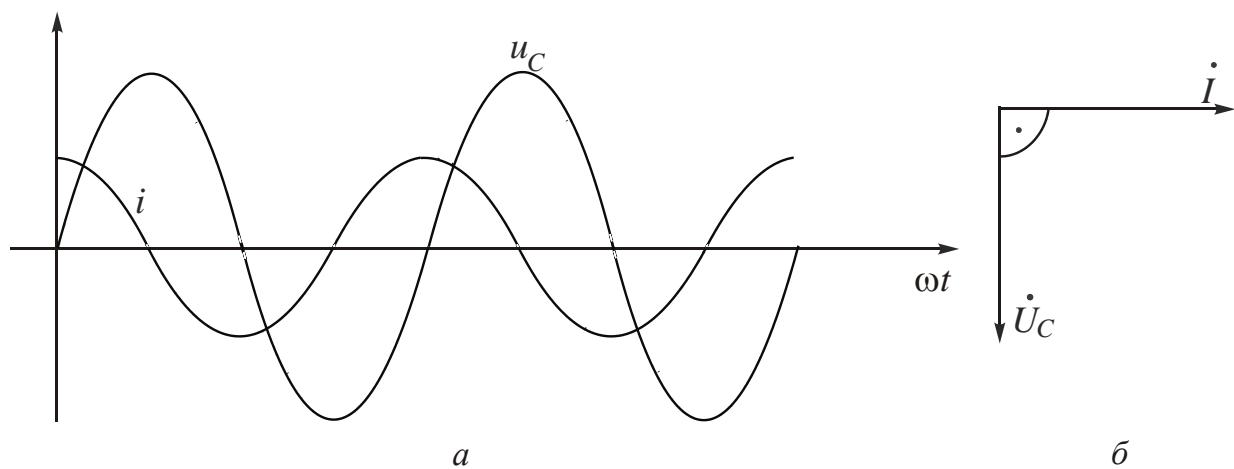


Рис. 3.14

Максимальное значение тока  $I_m = C\omega U_{Cm}$ . Разделив обе части уравнения на  $\sqrt{2}$ , получим **закон Ома для действующих значений**:

$$I = C \omega U_C \text{ либо } U_C = \frac{1}{C \omega} \cdot I.$$

По аналогии с резистором для упрощения расчетов вводят понятие емкостного сопротивления  $X_C$ :

$$X_C = \frac{1}{C \omega}.$$

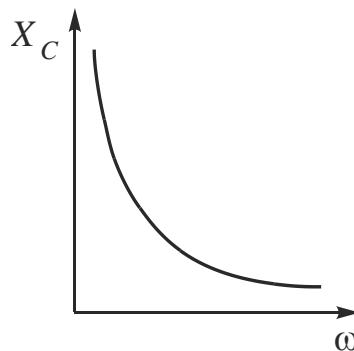


Рис. 3.15

$$[X_C] = \frac{1}{\frac{C}{\text{с}} \cdot \frac{1}{\text{с}}} = \text{Ом.}$$

Частотная характеристика емкостного сопротивления приведена на [рис. 3.15](#). В цепи постоянного тока  $X_C = \infty$ , конденсатор постоянный ток не пропускает.

Напряжение  $U_C = X_C I$ .

**Закон Ома для комплексных значений:**

$$\dot{U}_C = -j X_C \dot{I} = X_C \dot{I} e^{-j\frac{\pi}{2}} = X_C \dot{I} e^{-j90^\circ}.$$

Умножение вектора на  $-j$  или на  $e^{-j90^\circ}$  означает его поворот на комплексной плоскости на угол  $-90^\circ$ .

**Мгновенная мощность** емкостного элемента

$$\begin{aligned} p &= u_C i = U_{Cm} I_m \cos(\omega t + \psi_u) \cdot \sin(\omega t + \psi_u) = \\ &= \frac{U_{Cm} I_m}{2} 2 \cos(\omega t + \psi_u) \sin(\omega t + \psi_u) = U_C I \sin 2(\omega t + \psi_u). \end{aligned}$$

Отсюда следуют **выводы**:



1. Мощность меняется с удвоенной частотой.

2. Мощность знакопеременная.

Эти же выводы можно получить и при графическом перемножении  $u_C$  и  $i$  (рис. 3.16).

При  $p > 0$  энергия от источника поступает в конденсатор и запасается в его электрическом поле.

При  $p < 0$  энергия возвращается в сеть.

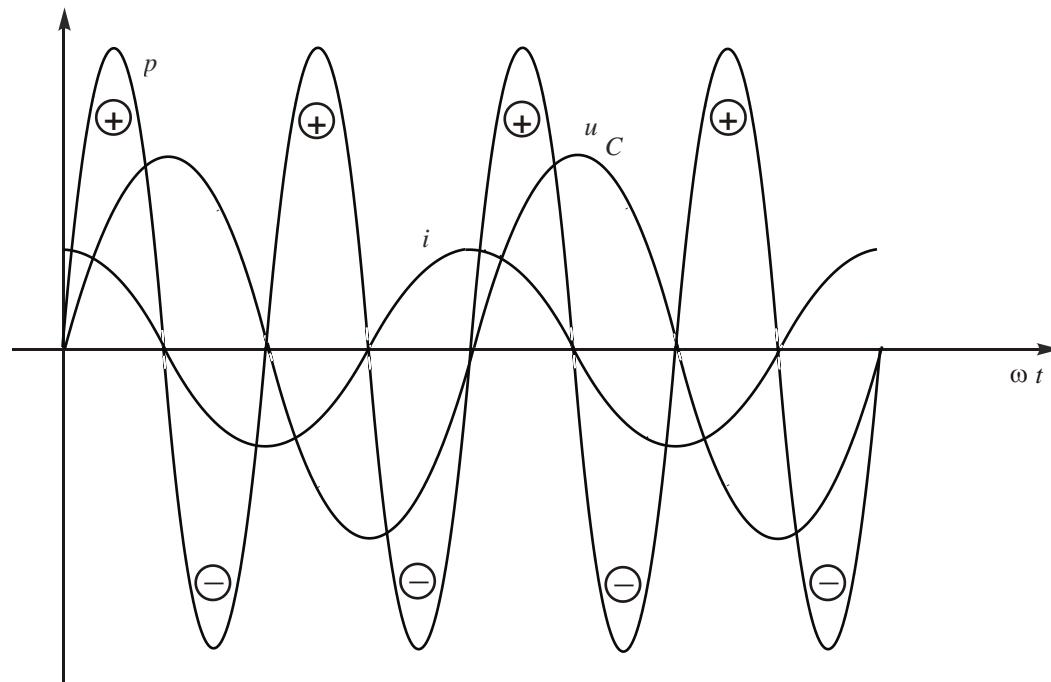


Рис. 3.16

Активная мощность  $P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = 0$ , так как мгновенная мощность меняется по синусоидальному закону.

**Идеальный конденсатор энергии не потребляет.**

**Энергия электрического поля** емкостного элемента

$$W_e = \int p dt = \int u_C \cdot idt = \int u_C C \frac{du_C}{dt} dt = \frac{Cu_C^2}{2}.$$

### 3.5. Основные законы цепей переменного тока

В цепях переменного тока закон Ома выполняется для всех значений, законы Кирхгофа – только для мгновенных и комплексных, которые учитывают фазные соотношения.

**Первый закон Кирхгофа.** Алгебраическая сумма мгновенных значений токов в узле равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0,$$

либо алгебраическая сумма комплексных значений токов в узле равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0.$$

**Второй закон Кирхгофа.** Алгебраическая сумма мгновенных значений напряжений на приемниках в контуре равна алгебраической сумме мгновенных значений ЭДС, действующих в этом же контуре:

$$\sum_{i=1}^m u_i = \sum_{j=1}^l e_j,$$

либо алгебраическая сумма комплексных значений напряжений на приемниках в контуре равна алгебраической сумме комплексных значений ЭДС в этом же контуре:

$$\sum_{i=1}^m \dot{U}_i = \sum_{j=1}^l \dot{E}_j.$$

Уравнения, составленные по законам Кирхгофа, называют уравнениями электрического состояния.

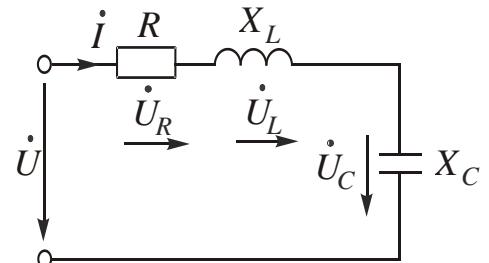
### 3.6. Анализ цепи с последовательным соединением приемников

Схема замещения представлена на [рис. 3.17](#).

Ток меняется по синусоидальному закону:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Для анализа процессов воспользуемся уравнением на основании второго закона Кирхгофа:



$$u = u_R + u_L + u_C.$$

Рис. 3.17

Подставим в это уравнение значения напряжений, выраженные по закону Ома для мгновенных значений:



$$u = R i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt.$$

Получаем уравнение электрического состояния в дифференциальной форме. Оперировать синусоидальными функциями весьма сложно, поэтому переходим к операциям с комплексными значениями.

Уравнение электрического состояния в комплексной форме:

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C.$$

Подставим в это уравнение значения напряжений, выраженные по закону Ома:

$$\dot{U} = R \dot{I} + j X_L \dot{I} - j X_C \dot{I} = [R + j(X_L - X_C)] \dot{I} = \underline{Z} \dot{I},$$

где  $\underline{Z}$  – комплексное сопротивление цепи.

Очевидно, что

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = R + jX,$$

где  $R$  – активное сопротивление,  $X$  – реактивное сопротивление.

**Закон Ома в комплексной форме** для цепи с последовательным соединением приемников:

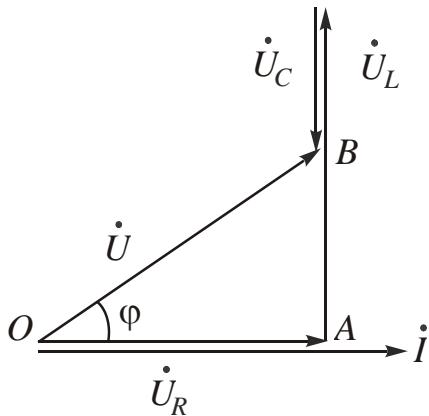


Рис. 3.18

$$\dot{U} = \underline{Z} \dot{I}.$$

Реактивное сопротивление  $X$  может быть положительным и отрицательным.

Реактивное сопротивление  $X > 0$ , если  $X_L > X_C$ . В этом случае цепь имеет индуктивный характер.

Реактивное сопротивление  $X < 0$ , если  $X_L < X_C$ . Тогда цепь имеет емкостный характер.

Построим векторную диаграмму. Обычно при ее построении не привязываются к комплексной плоскости, так как имеет значение только взаимное расположение векторов.

Построение векторной диаграммы начинают с вектора величины, общей для данной цепи. При последовательном соединении элементов такой величиной является ток. Вид диаграммы зависит от характера цепи. По-

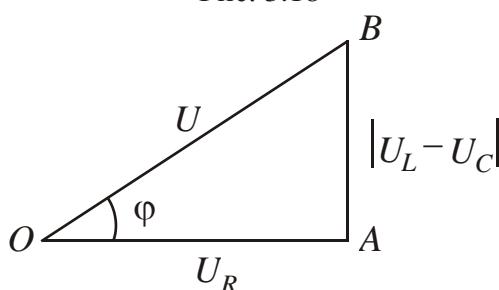


Рис. 3.19



строение векторной диаграммы для цепи, имеющей активно-индуктивный характер, т. е.  $X_L > X_C$  и  $X > 0$ , показано на [рис. 3.18](#).

Входное напряжение складывается из напряжений на трех идеальных элементах при учете сдвига фаз. Напряжение на резисторе совпадает с током по фазе. Напряжение на индуктивном элементе опережает ток на  $90^\circ$ , на емкостном – отстает на  $90^\circ$ . Полученный при построении векторной диаграммы треугольник  $OAB$  изображен на [рис. 3.19](#).

Угол  $\varphi = \psi_u - \psi_i$  – угол сдвига фаз тока и полного напряжения.

Треугольник  $OAB$  дает возможность оперировать действующими значениями, для которых законы Кирхгофа не выполняются:

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2},$$

$$\varphi = \arctg \frac{|U_L - U_C|}{U_R},$$

$$U_R = U \cdot \cos \varphi, |U_L - U_C| = U \cdot \sin \varphi.$$

Если разделить все стороны треугольника напряжений на ток  $I$ , получим подобный ему треугольник сопротивлений ([рис. 3.20](#)), где  $Z$  – полное сопротивление цепи,  $R$  – активное сопротивление,  $X$  – реактивное сопротивление,  $X_L = L \cdot \omega$  – индуктивное сопротивление,  $X_C = \frac{1}{C \cdot \omega}$  – емкостное сопротивление.

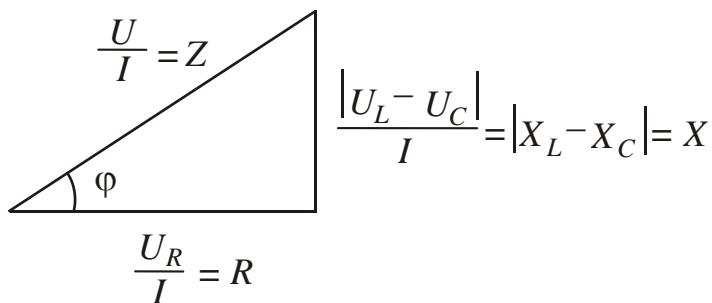


Рис. 3.20

**Закон Ома для действующих значений** при последовательном соединении приемников имеет вид

$$U = Z I.$$

Из свойств треугольника сопротивлений получаем соотношения:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2};$$

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R};$$

$$R = Z \cdot \cos \varphi; \quad X = Z \cdot \sin \varphi.$$

**Угол  $\varphi$  зависит от соотношения сопротивлений цепи.**

Сравнение формул полного и комплексного сопротивлений позволяет сделать вывод, что полное сопротивление является модулем комплексного. Из треугольника сопротивлений видно, что аргументом комплексного сопротивления является угол  $\varphi$ .

Поэтому можно записать:

$$\underline{Z} = R + j X = Z e^{j\varphi}.$$

Полное сопротивление любого количества последовательно соединенных приемников

$$Z = \sqrt{(\sum R)^2 + (\sum X_L - \sum X_C)^2}.$$

Умножением всех сторон треугольника напряжений на ток получаем треугольник мощностей ([рис. 3.21](#)).

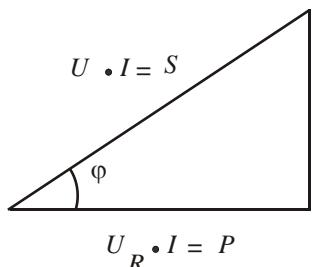


Рис. 3.21

**Активная мощность**

$$P = U_R \cdot I = R \cdot I^2 = U \cdot I \cdot \cos \varphi$$

характеризует энергию, которая передается в одном направлении от генератора к приемнику. Она связана с резистивными элементами.

Реактивная мощность  $Q = |U_L - U_C| \cdot I = X \cdot I^2 = U I \sin \varphi$  характеризует часть энергии, непрерывно циркулирующей в цепи и не совершающей полезной работы. Она связана с реактивными элементами.

Полная (кажущаяся) мощность  $S = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2}$ .

Активную мощность измеряют в ваттах (Вт), реактивную – вольт-амперах реактивных (вар), полную – вольт-амперах (В·А).



### 3.7. Резонанс напряжений

Индуктивная катушка и конденсатор – взаимоподавляющие антиподы.

Когда они полностью компенсируют действие друг друга, в цепи наблюдается резонансный режим.

Резонанс напряжений возникает при последовательном соединении индуктивных катушек и конденсаторов. Условие резонанса напряжений: входное реактивное сопротивление  $X$  равно нулю.

Рассмотрим режим резонанса для цепи, схема замещения которой представлена на [рис. 3.17](#).

При резонансе

$$X = X_L - X_C = 0.$$

Отсюда  $X_L = X_C$ .

На [рис. 3.22](#) изображены частотные характеристики реактивных сопротивлений. Частоту  $\omega_0$  называют резонансной.

Так как  $X_L = L\omega$ , а  $X_C = \frac{1}{C\omega}$ , то при резонансе  $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$ .

Тогда  $LC\omega_0^2 = 1$ .

Отсюда следует, что добиться резонанса напряжений в схеме на [рис. 3.17](#) можно изменением индуктивности  $L$ , емкости  $C$  и частоты  $\omega$ .

Циклическая резонансная частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Тогда частота

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

При резонансе полное сопротивление  $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = R$ . Цепь имеет чисто активный характер.

Построим частотные характеристики  $Z(\omega)$  и  $I(\omega)$ . Для этого проведем небольшой анализ.

1. Когда частота  $\omega \rightarrow 0$ , индуктивное сопротивление  $X_L = L\omega \rightarrow 0$ , емкостное сопротивление  $X_C = \frac{1}{C\omega} \rightarrow \infty$ , полное сопротивление

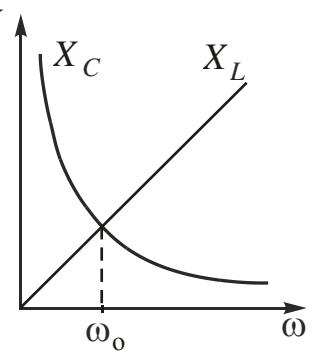


Рис. 3.22

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \rightarrow \infty, \text{ ток } I = \frac{U}{Z} \rightarrow 0.$$

2. Когда частота  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $X_L = L\omega \rightarrow \infty$ ,  $X_C = \frac{1}{C\omega} \rightarrow 0$ ,

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \rightarrow \infty, I = \frac{U}{Z} \rightarrow 0.$$

3. При резонансной частоте ( $\omega = \omega_0$ )  $X = 0$ ,  $X_L = X_C$ ,

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = R = Z_{\min}, I = \frac{U}{R} = I_{\max}.$$

Графики зависимостей  $Z(\omega)$  и  $I(\omega)$  представлены соответственно на [рис. 3.23](#) и [рис. 3.24](#).

При резонансе  $X_L = X_C = L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} = L \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$ . Это сопротивление называют **волновым или характеристическим**.

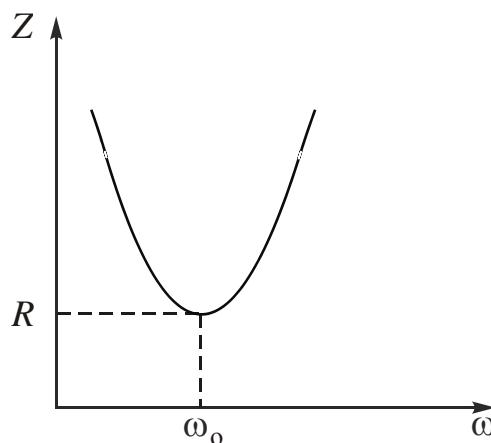


Рис. 3.23

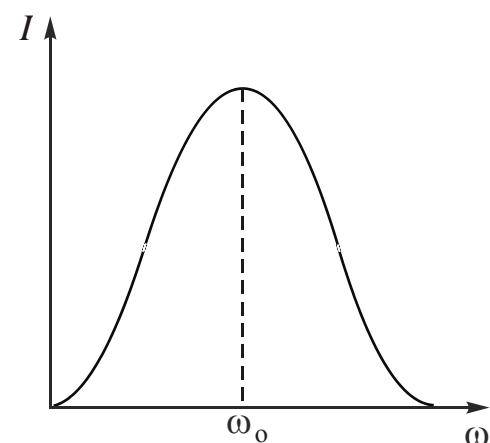


Рис. 3.24

### Добротность резонансного контура

$$Q = \frac{X_L}{R} = \frac{X_C}{R} = \frac{\rho}{R}.$$

Чем выше добротность, тем острее резонансные кривые  $Z(\omega)$  и  $I(\omega)$  (см. [рис. 3.25](#)).

При резонансе  $U_L = U_C = X_L I = X_L \frac{U}{R} = \frac{X_L}{R} U = Q U$ , т. е. напряжения на реактивных элементах превосходят напряжение питания в  $Q$  раз. Добротность реаль-

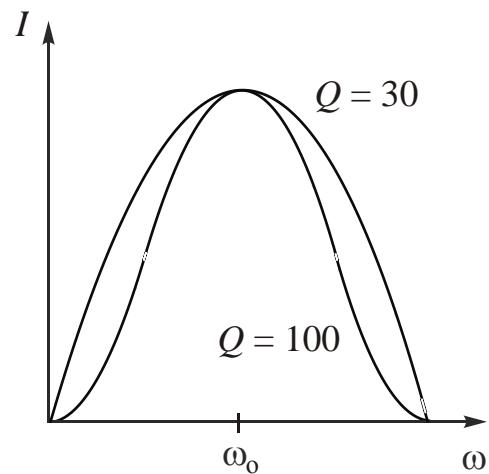


Рис. 3.25



ных избирательных систем обычно несколько сотен, волноводов – порядка нескольких тысяч. Поэтому в резонанском режиме даже при небольших входных напряжениях на индуктивных катушках и конденсаторах могут возникать перенапряжения, опасные для оборудования и обслуживающего персонала.

Построим частотные характеристики напряжений  $U_R(\omega)$ ,  $U_L(\omega)$  и  $U_C(\omega)$ .

Предварительно проведем анализ.

1. Когда частота  $\omega \rightarrow 0$ , ток  $I \rightarrow 0$ , напряжение  $U_R = RI \rightarrow 0$ , сопротивление  $X_L \rightarrow 0$ , напряжение  $U_L = X_L I \rightarrow 0$ . По второму закону Кирхгофа  $\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$ . Отсюда  $U_C = U$ .

2. Когда частота  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $I \rightarrow 0$ ,  $U_R = RI \rightarrow 0$ , сопротивление  $X_C \rightarrow 0$ ,  $U_C = X_C \cdot I \rightarrow 0$ . Так как  $\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$ , то  $U_L = U$ .

3. При резонансной частоте ( $\omega = \omega_0$ )  $U_R = RI = R \cdot \frac{U}{R} = U$ ,  $U_L = U_C = Q \cdot U$ .

Частотные характеристики напряжений приведены на [рис. 3.26](#).

Если  $Q \leq 0,707$ , то подъема частотных характеристик  $U_L(\omega)$  и  $U_C(\omega)$  выше значения  $U$  не будет.

Построим фазо-частотную характеристику  $\varphi(\omega)$ , предварительно проводя анализ.

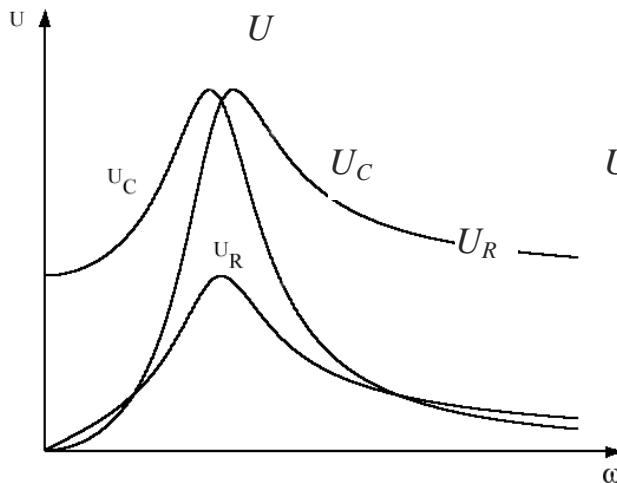


Рис. 3.26

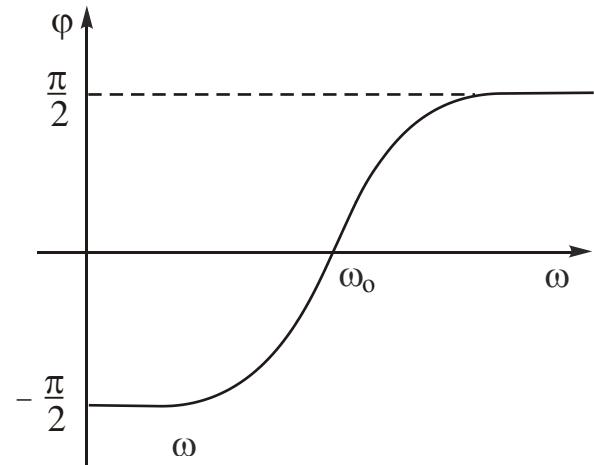


Рис. 3.27

1. Когда  $\omega \rightarrow 0$ ,  $X_L \rightarrow 0$ ,  $X_C \rightarrow \infty$ ,  $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ .

2. Когда



$$\omega \rightarrow \infty, X_L \rightarrow \infty, X_C \rightarrow 0, \varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

3. При резонансе  $\omega = \omega_0, X_L = X_C, X = 0, Z = R, \varphi = 0$ .

Фазо-частотная характеристика приведена на [рис. 3.27](#).

Во время резонанса цепь не обменивается реактивной энергией с источником. Происходит обмен энергией между конденсатором и индуктивной катушкой, причем максимальные значения этих энергий равны между собой. Вся энергия источника рассеивается в резисторе.

Построим векторную диаграмму ([рис. 3.28](#)).

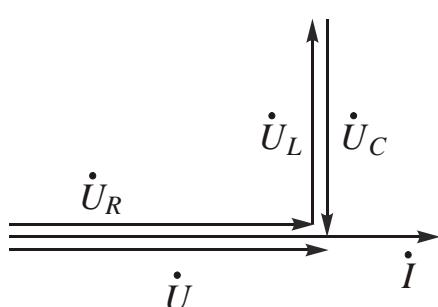


Рис. 3.28

Очевидно, что  $\dot{U} = \dot{U}_R, \dot{U}_L = -\dot{U}_C, U_L = U_C$ , угол  $\varphi = 0$ .

Цепь имеет чисто активный характер.

**Значение резонанса напряжений:**

1. В электроэнергетических устройствах в большинстве случаев явление, связанное с неожиданным появлением перенапряжений, нежелательное.

2. В электротехнике связи (радиотехника, проволочная телефония, автоматика) явление резонанса напряжений широко используют для настройки цепи на определенную частоту.

### 3.8. Анализ цепи с параллельным соединением приемников

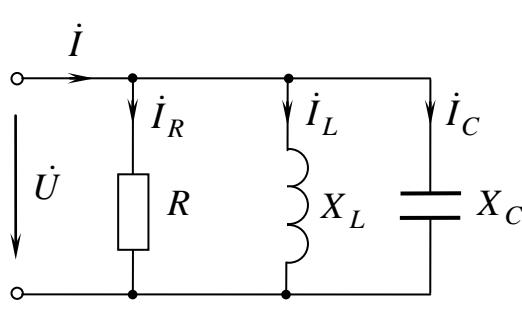


Рис. 3.29

Схема замещения цепи с параллельным соединением приемников изображена на [рис. 3.29](#).

Запишем уравнение электрического состояния в дифференциальной форме:

$$i = i_R + i_L + i_C.$$

Подставив в это уравнение выражения токов по закону Ома для мгновенных значений, получим:

$$i = \frac{u}{R} + \frac{1}{L} \int u dt + C \frac{du_C}{dt}.$$

Для анализа цепи воспользуемся уравнением по первому закону Кирхгофа для комплексных значений:



$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C.$$

Подставим в это уравнение значения токов, выраженные по закону Ома:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R} + \frac{\dot{U}}{jX_L} - \frac{\dot{U}}{jX_C} = \left[ \frac{1}{R} + \frac{1}{j} \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right) \right] \dot{U} = \underline{Y} \dot{U},$$

где  $\underline{Y}$  – комплексная проводимость.

Очевидно, что

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j} \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right) = \frac{1}{R} - j \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right),$$

где  $\frac{1}{R}$  – активная проводимость резистивного элемента ( $\frac{1}{R} = G$ );  $\frac{1}{X_L}$  – индуктивная проводимость индуктивного элемента ( $\frac{1}{X_L} = B_L$ );  $\frac{1}{X_C}$  – емкостная проводимость емкостного элемента ( $\frac{1}{X_C} = B_C$ ).

Используя эти обозначения, записываем:

$$\underline{Y} = G - j(B_L - B_C) = G - jB,$$

где  $B$  – реактивная проводимость.

Построение векторной диаграммы начинаем с вектора напряжения, которое является одинаковым для всех элементов схемы. Векторная диаграмма для случая, когда  $X_L < X_C$ , приведена на [рис. 3.30](#).

Ток в неразветвленной части схемы складывается из токов трех параллельных ветвей при учете сдвига фаз. Ток через резистор совпадает с напряжением по фазе, через индуктивный элемент отстает от напряжения на  $90^\circ$ , ток через конденсатор опережает его на  $90^\circ$ .

Полученный при построении векторной диаграммы треугольник токов  $OAB$  изображен на [рис. 3.31](#).

Из свойств треугольника токов получаем следующие соотношения, позволяющие оперировать действующими значениями:

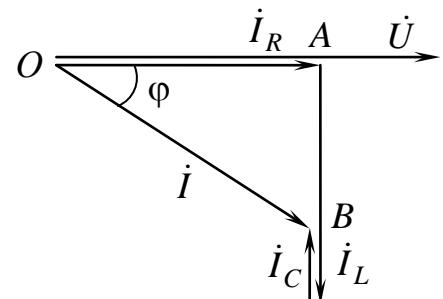


Рис. 3.30

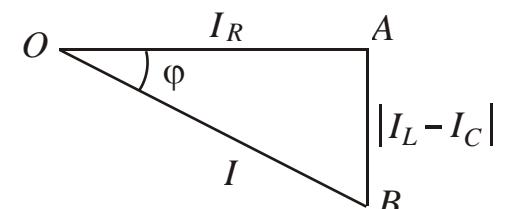


Рис. 3.31

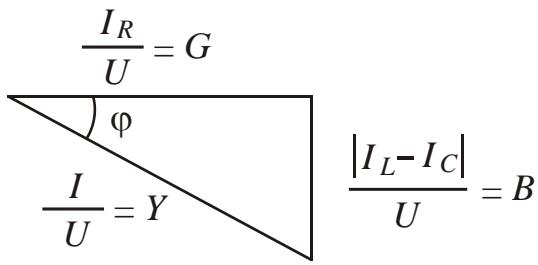


$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2};$$

$$\varphi = \arctg \frac{|I_L - I_C|}{I_R};$$

$$I_R = I \cos \varphi;$$

$$|I_L - I_C| = I \cdot \sin \varphi.$$



Разделив все стороны треугольника токов на напряжение, получим подобный ему треугольник проводимостей ([рис. 3.32](#)), где  $Y$  – полная проводимость. **Закон Ома для действующих значений** при параллельном соединении примет вид

Рис. 3.32

$$I = YU.$$

Из свойств треугольника проводимостей получим соотношения:

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}; \quad G = Y \cos \varphi;$$

$$B = Y \sin \varphi; \quad \varphi = \arctg \frac{B}{G}.$$

Полная проводимость  $Y$  является модулем комплексной проводимости  $\underline{Y}$ :

$$\underline{Y} = Y e^{-j\varphi} = G - jB.$$

Полная проводимость любого количества параллельно соединенных приемников

$$Y = \sqrt{(\sum G)^2 + (\sum B_L - \sum B_C)^2}.$$

Умножив все стороны треугольника токов на напряжение, получим уже знакомый треугольник мощностей ([рис. 3.33](#)).



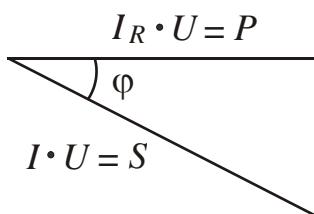


Рис. 3.33

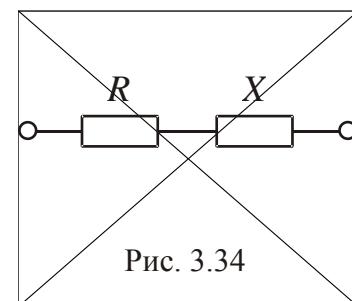


Рис. 3.34

Выведем формулы активной и реактивной проводимостей ветви. Все резистивные элементы ветви можно заменить одним с эквивалентным сопротивлением. Все реактивные элементы также можно заменить одним эквивалентным, индуктивным или емкостным. Схема замещения любой ветви в общем виде приведена на [рис. 3.34](#).

Комплексная проводимость – это величина, обратная комплексному сопротивлению:  $\underline{Y} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX}$ .

Чтобы избавиться от мнимости в знаменателе, домножим числитель и знаменатель на сопряженный знаменателю комплекс:

$$\underline{Y} = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2}.$$

Выражение в знаменателе  $R^2 + X^2 = Z^2$ .

$$\text{Тогда } \underline{Y} = \frac{R}{Z^2} - j \frac{X}{Z^2} = G - jB.$$

Активная проводимость  $G$  является действительной составляющей комплексной проводимости  $\underline{Y}$ :

$$G = \operatorname{Re}(\underline{Y}) = \frac{R}{R^2 + X^2} = \frac{R}{Z^2}.$$

Реактивная проводимость  $B$  является мнимой составляющей комплексной проводимости  $\underline{Y}$ :

$$B = \operatorname{Im}(\underline{Y}) = \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{X}{Z^2}.$$

### 3.9. Резонанс токов

Этот режим наблюдается в цепи с параллельным соединением индук-

тивных катушек и конденсаторов.

Условие резонанса токов: входная реактивная проводимость  $B = 0$ .

Рассмотрим резонансный режим для цепи, схема замещения которой изображена на [рис. 3.35](#).

Так как  $B = B_L - B_C = 0$ , то  $B_L = B_C$ .

Индуктивная проводимость

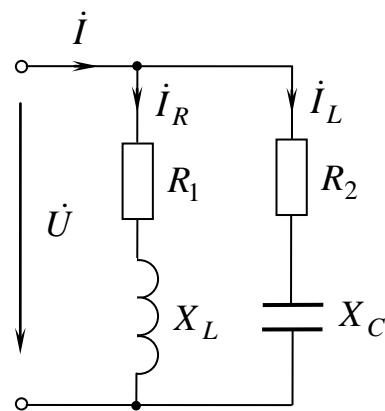


Рис. 3.35

$$B_L = \frac{X_L}{R_1^2 + X_L^2}.$$

Емкостная проводимость

$$B_C = \frac{X_C}{R_2^2 + X_C^2}.$$

Подставив в эти формулы расчетные значения  $X_L$  и  $X_C$  при резонансе, получим:

$$\frac{\frac{L\omega'_0}{R_1^2 + (L\omega'_0)^2}}{\frac{1}{C\omega'_0}} = \frac{\frac{1}{C\omega'_0}}{\frac{R_2^2 + \left(\frac{1}{C\omega'_0}\right)^2}{R_2^2 + \left(\frac{1}{C\omega'_0}\right)^2}}.$$

Отсюда частота  $\omega'_0$ , при которой наступит резонанс токов:

$$\omega'_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}.$$

Проведем анализ полученной формулы.

1. При  $R_1 = R_2$  частота  $\omega'_0 = \omega_0$ .
2. Резонанс невозможен, если
  - a)  $R_1 > \rho, \rho < R_2$  ;
  - б)  $R_1 < \rho, \rho < R_2$  .

При таком соотношении параметров подкоренное выражение будет отрицательным.

3. При  $R_1 = R_2 = \rho$  получаем неопределенность типа  $\frac{0}{0}$ .

Дополнительные исследования показывают, что в этом случае резонанс наступает при любой частоте и носит название безразличный.

Эквивалентное комплексное сопротивление

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{(\rho + jL\omega) \left( \rho - j \frac{1}{C\omega} \right)}{\rho + jL\omega + \rho - j \frac{1}{C\omega}} = \frac{\rho^2 + \rho jL\omega - \rho \cdot j \frac{1}{C\omega} + \frac{L}{C}}{2\rho + jL\omega - j \frac{1}{C\omega}}.$$

Так как  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ , то  $\frac{L}{C} = \rho^2$ .

Тогда

$$\underline{Z} = \frac{\rho \left( 2\rho + jL\omega - j \frac{1}{C\omega} \right)}{2\rho + jL\omega - j \frac{1}{C\omega}} = \rho.$$

При резонансе полная проводимость  $Y = \sqrt{G^2 + B^2} = G = Y_{\min}$ .

Ток  $I = YU = GU = I_{\min}$ .

Графики зависимостей  $Y(\omega)$  и  $I(\omega)$  изображены соответственно на [рис. 3.36](#) и [рис. 3.37](#).



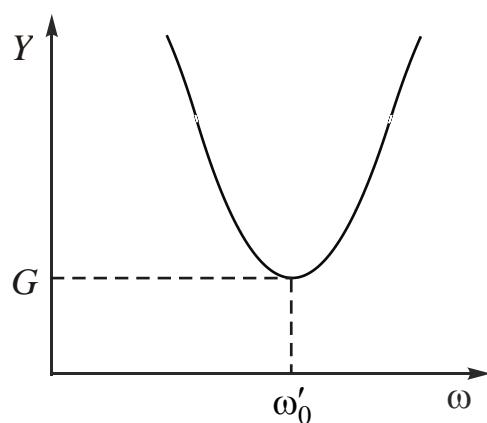


Рис. 3.36

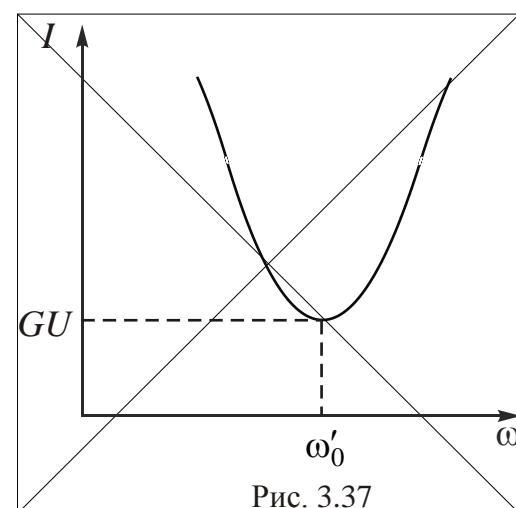


Рис. 3.37

Построим векторную диаграмму. Величины, общей для схемы [рис. 3.35](#), нет. Поэтому сначала построим векторные диаграммы для отдельных ветвей, в которых элементы соединены последовательно ([рис. 3.38, а и б](#)).

Если ветвь имеет активно-индуктивный характер, то вектор напряжения  $\dot{U}$  опережает вектор тока  $\dot{I}_1$  на острый угол  $\varphi_1 = \arctg \frac{X_L}{R_1}$ .

Если ветвь имеет активно-емкостный характер, то вектор напряжения  $\dot{U}$  отстает от вектора тока  $\dot{I}_2$  на острый угол  $\varphi_2 = \arctg \frac{X_C}{R_2}$ .

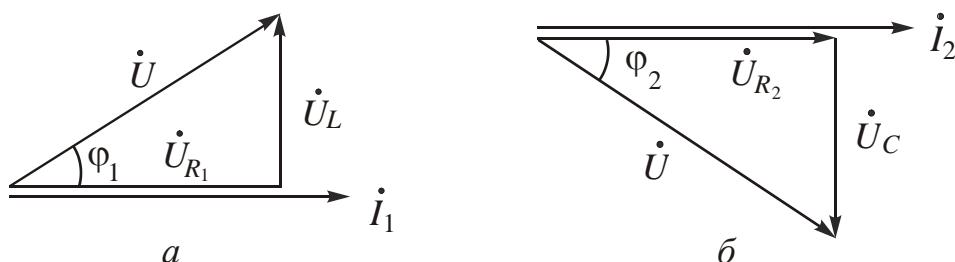


Рис. 3.38

Вектор напряжения  $\dot{U}$  одинаков, поэтому можно построить объединенную векторную диаграмму ([рис. 3.39](#)).

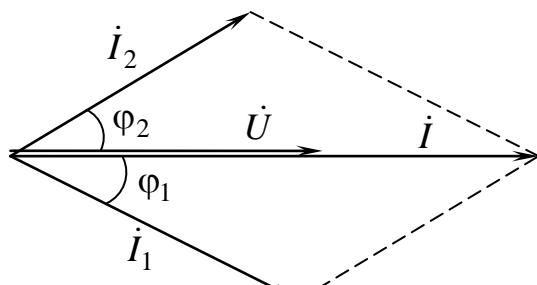


Рис. 3.39

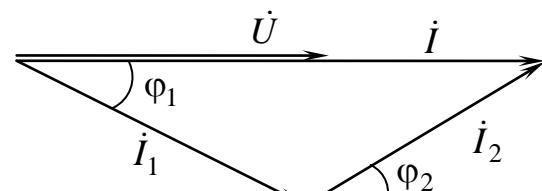


Рис. 3.40

Входной ток  $\dot{I}$  совпадает по фазе с входным напряжением  $\dot{U}$ .

Более удачным представляется порядок построения векторной диаграммы на [рис. 3.40](#).

Рассмотрим частный случай, когда схема имеет чисто реактивный характер ([рис. 3.41](#)).

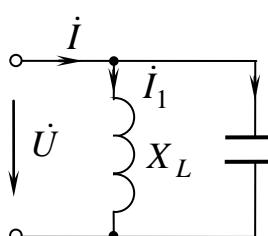


Рис. 3.41

При резонансе  $B_L = B_C$ . Так как  $B_L = \frac{1}{X_L}$ , а  $B_C = \frac{1}{X_C}$ , то  $X_L = X_C$ .

Резонансная частота  $\omega'_0 = \omega$ . Ток в неразветвленной части схемы

$$I = YU = \sqrt{G^2 + B^2} \cdot U = 0.$$

Частотная характеристика  $I(\omega)$  представлена на [рис. 3.42](#). Векторная диаграмма приведена на [рис. 3.43](#).

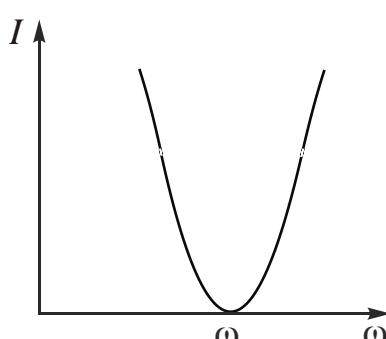


Рис. 3.42

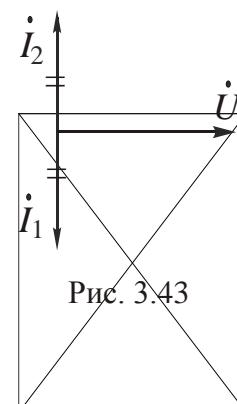


Рис. 3.43

### Применение режима резонанса токов:

1. Фильтр-пробка для определенной частоты.
2. Для улучшения коэффициента мощности.

## 3.10. Резонанс при смешанном соединении приемников

В цепи, схема замещения которой представлена на [рис. 3.44](#), возможны два резонансных режима.

В пассивной части цепи возможен **резонанс токов** при условии, что  $B_{12} = 0$ .

Реактивная проводимость  $B_{12} = B_1 - B_2$ .

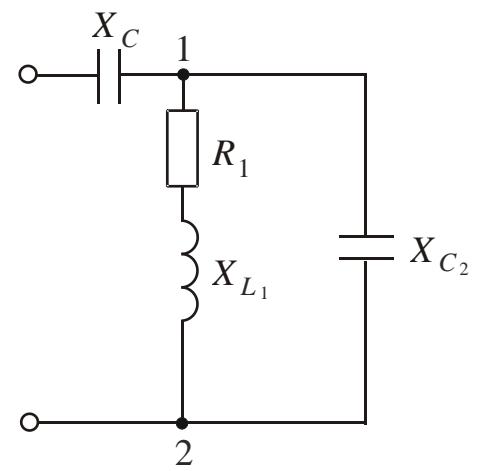


Рис. 3.44



$$\text{Отсюда } B_1 = B_2: \frac{X_{L_1}}{R_1^2 + X_{L_1}^2} = \frac{1}{X_{C_2}}.$$

В том случае, когда входное реактивное сопротивление  $X = 0$ , будет наблюдаться **режим резонанса напряжений**. Входное комплексное сопротивление

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= -jX_C + \underline{Z}_{12} = -jX_C + \frac{(R_1 + jX_{L_1})(-jX_{C_2})}{R_1 + jX_{L_1} - jX_{C_2}} = \\ &= -jX_C + R_{12} + jX_{12}.\end{aligned}$$

Реактивное сопротивление является мнимой составляющей комплексного сопротивления:

$$X = \text{Im}(\underline{Z}) = -X_C + X_{12} = 0.$$

Отсюда  $X_C = X_{12}$ .

Очевидно, что оба резонанса одновременно быть не могут.

### 3.11. Расчет цепей синусоидального тока

Для расчета цепей синусоидального тока применяют те же методы, что и для расчета цепей постоянного тока. Но их можно использовать только для комплексных значений. Рассмотрим несколько примеров.

*Пример 3.1.* Вычислить токи в цепи с одним источником энергии, схема замещения которой изображена на [рис. 3.45](#), если известны значения  $\dot{U}$ ,  $R$ ,  $R_1$ ,  $X_L$ ,  $X_{L_1}$ ,  $X_C$ . Построить векторную диаграмму.

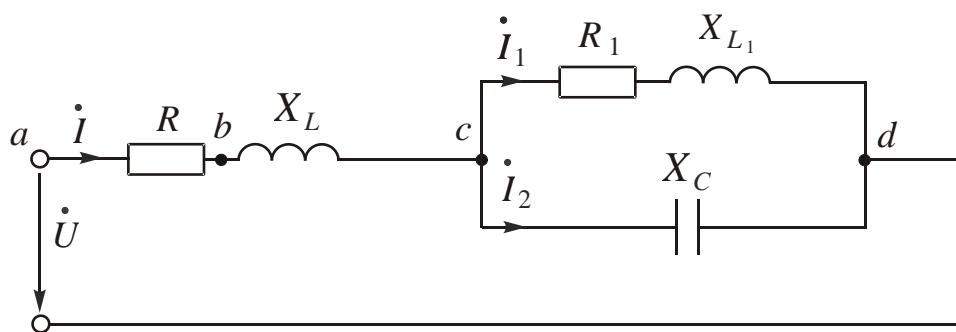


Рис. 3.45

*Решение*

1. Выявим узлы (*c* и *d*), ветви, направим токи.
2. Для расчета токов в схеме с одним источником энергии рационально использовать метод эквивалентных преобразований.

Эквивалентное комплексное сопротивление

$$\underline{Z} = R + jX_L + \frac{(R_1 + jX_L)(-jX_C)}{R_1 + jX_L - jX_C}.$$

3. Комплекс тока в свернутой схеме найдем по закону Ома:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}.$$

4. Токи в пассивных параллельных ветвях вычислим по формулам:

$$\dot{I}_1 = \frac{-jX_C}{R_1 + jX_L - jX_C} \cdot \dot{I}; \quad \dot{I}_2 = \frac{R_1 + jX_L}{R_1 + jX_L - jX_C} \cdot \dot{I}.$$

Действующие значения токов являются модулями комплексных значений. Векторную диаграмму ([рис. 3.46](#)) строим в соответствии с алгоритмом:

1. Построим вектор напряжения между двумя узлами  $\dot{U}_{cd}$ .

2. Построим векторы токов в пассивных параллельных ветвях  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$ .

Первая ветвь имеет активно-индуктивный характер, поэтому вектор тока  $\dot{I}_1$  отстает от вектора напряжения  $\dot{U}_{cd}$  на угол  $\varphi_1 = \arctg \frac{X_{L_1}}{R_1}$ , являющийся аргументом комплексного сопротивления первой пассивной ветви  $\underline{Z}_1$ .

Вторая ветвь имеет емкостный характер. Поэтому вектор тока  $\dot{I}_2$  опережает вектор напряжения  $\dot{U}_{cd}$  на угол  $90^\circ$ .

3. Построим вектор тока  $\dot{I}$ , равный геометрической сумме векторов токов  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$ .

Вектор входного напряжения складывается из векторов трех напряжений:  $\dot{U}_{ab}$ ,  $\dot{U}_{bc}$  и  $\dot{U}_{cd}$ . К вектору  $\dot{U}_{cd}$  прибавим вектор напряжения  $\dot{U}_{ab}$ . Между точками  $a$  и  $b$  в схеме находится резистор с сопротивлением  $R$ . Напряжение на нем совпадает по фазе с током  $\dot{I}$ , поэтому вектор  $\dot{U}_{ab}$  параллелен вектору тока  $\dot{I}$ . Напряжение на индуктивном элементе опережает ток на  $90^\circ$ , поэтому вектор  $\dot{U}_{bc}$  перпендикулярен вектору тока  $\dot{I}$ .

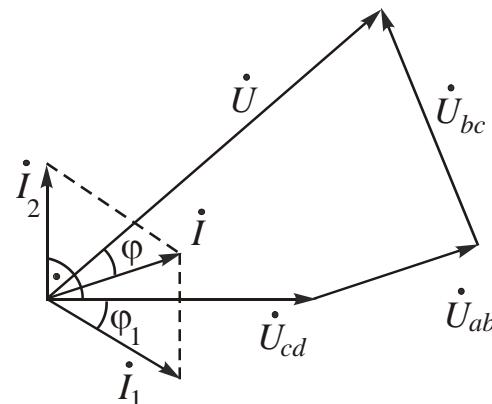


Рис. 3.46

*Пример 3.2.* Вычислить токи в цепи с несколькими источниками энергии, схема замещения которой представлена на [рис. 3.47](#). Построить векторнотопографическую диаграмму.

1. Расчет можно выполнить методом непосредственного использования законов Кирхгофа.

Система уравнений электрического состояния в дифференциальной форме:

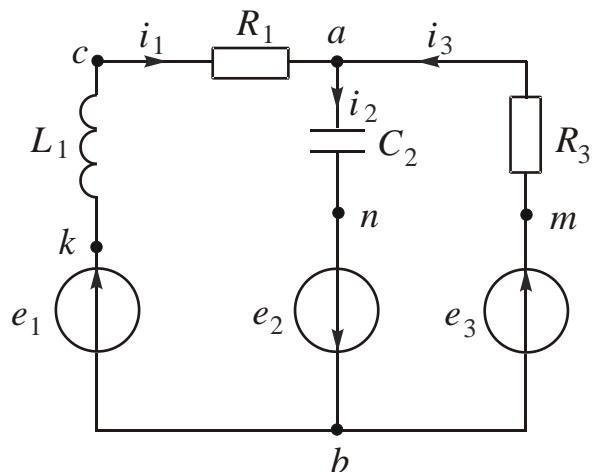


Рис. 3.47

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0; \\ L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt = e_1 + e_2; \\ \frac{1}{\tilde{N}_2} \int i_2 dt + R_3 i_3 = e_2 + e_3. \end{cases}$$

Для расчета токов систему уравнений электрического состояния нужно записать для комплексных значений:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 0; \\ jX_{L_1} \dot{I}_1 + R_1 \dot{I}_1 - jX_{C_2} \dot{I}_2 = \dot{E}_1 + \dot{E}_2; \\ -jX_{C_2} \dot{I}_2 + R_3 \dot{I}_3 = \dot{E}_2 + \dot{E}_3. \end{cases}$$

Решением системы найдем комплексные значения токов.

2. Расчет методом напряжения между двумя узлами выполняют в два этапа:

а) вычисление напряжения  $\dot{U}_{ab}$ :

$$\dot{U}_{ab} = \frac{\sum \underline{J} + \sum \underline{Y} \dot{E}}{\sum \underline{Y}};$$

$$\dot{U}_{ab} = \frac{\frac{1}{R_1 + jX_{L_1}} \dot{E}_1 - \frac{1}{-jX_{C_2}} \dot{E}_2 + \frac{1}{R_3} \dot{E}_3}{\frac{1}{R_1 + jX_{L_1}} - \frac{1}{jX_{C_2}} + \frac{1}{R_3}};$$

б) вычисление токов:

$$\dot{I}_1 = \frac{-\dot{U}_{ab} + \dot{E}_1}{R_1 + jX_{L_1}}; \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{ab} + \dot{E}_2}{-jX_{C_2}}; \quad \dot{I}_3 = \frac{-\dot{U}_{ab} + \dot{E}_3}{R_3}.$$

**Топографическая диаграмма** – это потенциальная диаграмма в цепи синусоидального тока.

В отличие от цепей постоянного тока топографическую диаграмму строят для всей схемы, а не для контура. Странят ее на комплексной плоскости и обычно совмещают с векторной диаграммой токов ([рис. 3.48](#)).

Пусть  $\dot{E}_1 = 40e^{-j45^\circ}$  В,  $\dot{E}_2 = 30e^{-j105^\circ}$  В,  $\dot{E}_3 = 25e^{j60^\circ}$  В,

$$\dot{I}_1 = 5e^{-j30^\circ}$$
 А,  $\dot{I}_2 = 6,2e^{-j14^\circ}$  А,  $\dot{I}_3 = 2e^{j30^\circ}$  А.

Потенциал точки  $b$  примем равным нулю. Рассчитаем потенциалы остальных точек схемы:  $\dot{V}_b = 0$ ;  $\dot{V}_m = \dot{V}_b + \dot{E}_3$ ;  $\dot{V}_a = \dot{V}_m - R_3 \dot{I}_3$ ;  $\dot{V}_c = \dot{V}_a + R_1 \dot{I}_1$ ;

$$\dot{V}_k = \dot{V}_c + jX_{L_1} \dot{I}_1; \quad \dot{V}_b = \dot{V}_k - \dot{E}_1; \quad \dot{V}_n = \dot{V}_a - (-jX_{C_2} \dot{I}_2); \quad \dot{V}_b = \dot{V}_n + \dot{E}_2.$$

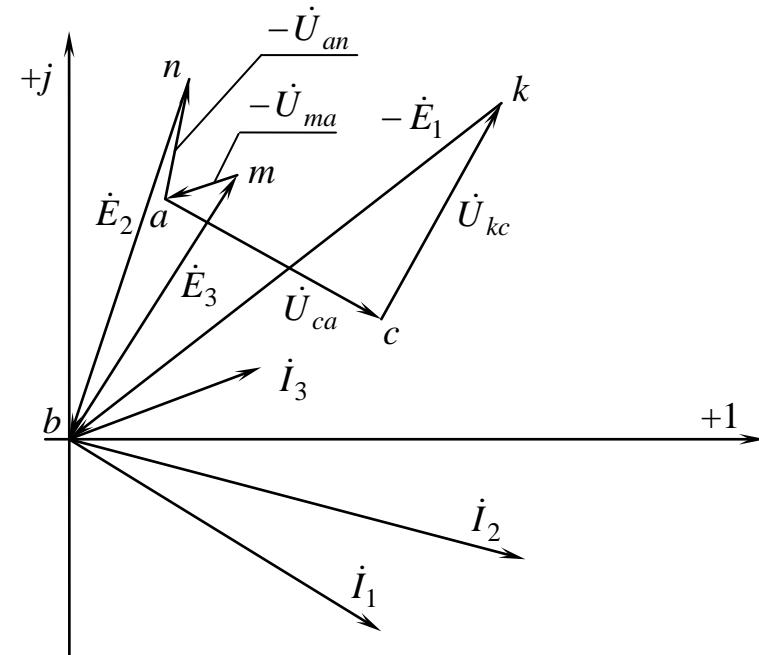


Рис. 3.48

Не рекомендуют вычислять значение потенциала. Целесообразно определять лишь вектор, показывающий изменение потенциала на пути от одной точки к другой. Его строят, исходя из предыдущей точки.

Векторы на диаграмме (в отличие от направлений на схеме) направлены к первому индексу, т. е. в сторону повышения комплексного потенциала. Топографическая диаграмма позволяет проверить правильность решения и

определить напряжение между двумя любыми точками как разность потенциалов между ними.

### 3.12. Мощности цепей синусоидального тока

В цепях синусоидального тока существуют уже рассматривавшиеся мгновенная  $p$ , активная  $P$ , реактивная  $Q$  и полная  $S$  мощности.

При расчетах удобно пользоваться понятием комплексной мощности

$$\underline{S} = \dot{\underline{U}} \cdot \overset{*}{I},$$

где  $\dot{\underline{U}} = U e^{j\psi_u}$  – комплекс напряжения;  $\overset{*}{I} = I e^{-j\psi_i}$  – комплекс, сопряженный комплексу тока.

Подставив значения  $\dot{\underline{U}}$  и  $\overset{*}{I}$  в формулу комплексной мощности, получим

$$\begin{aligned} \underline{S} &= U e^{j\psi_u} \cdot I e^{-j\psi_i} = U \cdot I e^{j(\psi_u - \psi_i)} = \\ &= U \cdot I e^{j\phi} = UI \cos \phi + jUI \sin \phi = P + jQ. \end{aligned}$$

Активная мощность является действительной составляющей комплексной мощности:

$$P = \operatorname{Re}(\underline{S}) = \operatorname{Re}\left(\dot{\underline{U}} \cdot \overset{*}{I}\right).$$

Реактивная мощность является мнимой составляющей комплексной мощности:

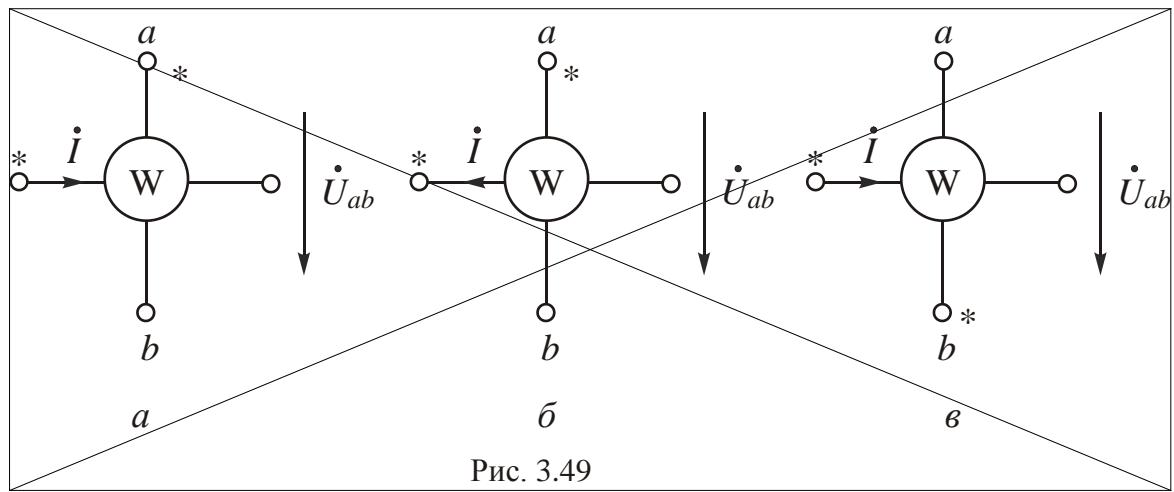
$$Q = \operatorname{Im}(\underline{S}) = \operatorname{Im}\left(\dot{\underline{U}} \cdot \overset{*}{I}\right).$$

Для измерения активной (потребляемой) мощности служат ваттметры, представляющие собой сочетание амперметра и вольтметра.

Два зажима ваттметра (один – обмотки напряжения и один – обмотки тока) обозначают одинаковыми знаками, обычно звездочками. Угол сдвига фаз между напряжением на ваттметре и током в нем соответствует одинаковым положительным направлениям  $\dot{U}_W$  и  $\overset{*}{I}_W$  относительно зажимов, отмеченных звездочками.

Для указанных на [рис. 3.49, а](#) направлений напряжения и тока  $P = \operatorname{Re}(\underline{S}) = \operatorname{Re}\left(\dot{\underline{U}}_{ab} \overset{*}{I}\right)$  или  $P = U_{ab} I \cos(\dot{U}_{ab} \overset{*}{I})$ .





Для схемы, приведенной на [рис. 3.49, б](#), активная мощность

$$P = \operatorname{Re}(S) = \operatorname{Re}\left[\dot{U}_{ab}^* (-I)\right] = U_{ab} I \cos\left[\dot{U}_{ab}^* \wedge (-I)\right].$$

$$\text{Для схемы } \text{рис. 3.49, в} \quad P = \operatorname{Re}\left[(-\dot{U}_{ab})^* I\right] = U_{ab} I \cos\left[(-\dot{U}_{ab})^* I\right].$$

### 3.13. Понятие о коэффициенте мощности и способах его улучшения

Потребляемой, полезной мощностью является активная мощность  $P$ . Разделение полной мощности на активную и реактивную зависит от угла сдвига фаз  $\phi$  между напряжением и током. Величина угла  $\phi$  определяется соотношением между активным и реактивным сопротивлениями потребителя.

Активная мощность

$$P = S \cos \phi.$$

Косинус угла  $\phi$  называют коэффициентом мощности, потому что от его величины зависит, какая доля полной мощности потребляется. Под улучшением коэффициента мощности понимают увеличение  $\cos \phi$ , т. е. уменьшение угла  $\phi$ .

Если увеличение потребляемой мощности не требуется, то увеличение  $\cos \phi$  необходимо для уменьшения тока.

Полезную работу совершают только активная составляющая тока  $I_a$ . Так называют проекцию вектора тока на вектор напряжения ([рис. 3.50](#)). Но в цепи циркулирует ток  $I > I_a$ , поэтому нужно делать большее сечение проводов.

дов линии передачи, обмоток генераторов, трансформаторов и других электрических машин. Кроме того, увеличиваются потери на нагрев проводников ( $RI^2$ ).

Коэффициент мощности определяется постановлением правительства (~0,92). В целях стимулирования повышения коэффициента мощности промышленные предприятия оплачивают электрическую энергию по дифференцированному тарифу. Чем ниже  $\cos \varphi$ , тем дороже электрическая энергия обходится предприятию.

### Способы улучшения $\cos \varphi$ .

Коэффициент мощности

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X^2}}.$$

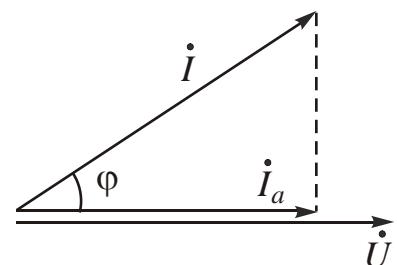


Рис. 3.50

Очевидно, что для повышения  $\cos \varphi$  нужно увеличивать активную мощность и активное сопротивление либо уменьшать реактивную мощность и реактивное сопротивление.

**Естественный путь** – увеличение активной мощности, повышение загрузки оборудования.

Коэффициент мощности асинхронных двигателей и трансформаторов при номинальной нагрузке бывает порядка 0,8–0,9. Асинхронные двигатели и трансформаторы, работающие недогруженными, снижают  $\cos \varphi$  в сетях и на станциях.

**Искусственный путь** – уменьшение реактивной мощности, которая связана с реактивным сопротивлением.

Основные современные потребители электроэнергии (асинхронные двигатели, трансформаторы, сварочные аппараты, дуговые и индукционные печи) имеют активно-индуктивный характер. Уменьшить реактивное сопротивление, не изменив параметры схемы

потребителя, позволяет режим резонанса токов. Он наблюдается при параллельном соединении, которое обеспечивает независимую работу приемников.

Параллельно нагрузке подключают батарею конденсаторов (рис. 3.51), параметры которой подбирают таким образом,

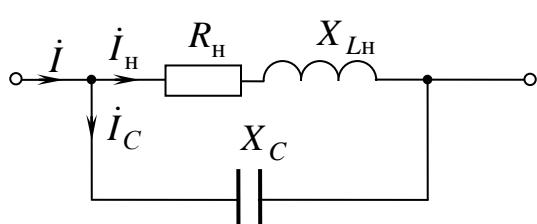


Рис. 3.51

чтобы выполнялось условие резонанса токов:  $B_L = B_C$ .

В этом случае цепь имеет чисто активный характер, угол  $\varphi \rightarrow 0$ ,  $\cos \varphi \rightarrow 1$ .



### 3.14. Электрические цепи с взаимной индуктивностью

#### 3.14.1. Основные понятия и определения

При всяком изменении магнитного потока, пронизывающего какой-либо контур, в последнем наводится ЭДС.

Если магнитный поток создан током этого же контура, то говорят о явлении самоиндукции, ЭДС самоиндукции  $e_L$  и индуктивности  $L$ .

Если магнитный поток создан током другого контура, то говорят о явлении взаимоиндукции, ЭДС взаимоиндукции  $e_M$  и взаимной индуктивности  $M$ .

Рассмотрим две индуктивные катушки, имеющие магнитную связь (рис. 3.52). Зажимы второй катушки разомкнуты.

Если первую индуктивную катушку подключить к источнику напряжения  $u_1$ , в ней появится ток  $i_1$ , который создает магнитный поток  $\Phi_{11}$ , часть которого  $\Phi_{12}$  пронизывает витки второй катушки. Часть магнитного потока замыкается по воздуху (магнитный поток рассеяния  $\Phi_{1S}$ ).

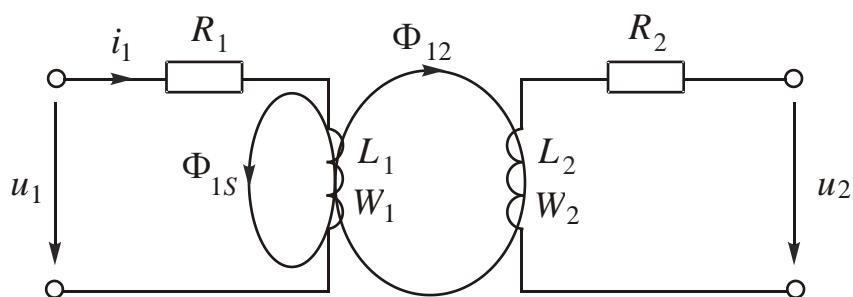


Рис. 3.52

Потокосцепление самоиндукции  $\psi_{11} = W_1 \Phi_{11}$  наводит в первой катушке ЭДС самоиндукции  $e_{L_1} = -\frac{d\psi_{11}}{dt} = -W_1 \frac{di_1}{dt} = -L_1 \frac{i_1}{dt}$ .

Потокосцепление взаимоиндукции  $\psi_{12} = W_2 \Phi_{12}$  наводит во второй катушке ЭДС взаимоиндукции  $e_{M_2} = -\frac{d\psi_{12}}{dt} = -W_2 \frac{di_1}{dt}$ .

Коэффициент, характеризующий способность тока создавать магнитный поток в другом контуре, называют **взаимной индуктивностью  $M$** .

Взаимная индуктивность

$$M_{12} = \frac{d\psi_{12}}{di_1}.$$

Тогда  $e_{M_2} = -M_{12} \frac{di_1}{dt}$ .



Уравнения электрического состояния схемы замещения цепи на [рис. 3.52](#):

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt}; \quad u_2 = -e_{M_2} = M_{12} \frac{di_1}{dt}.$$

Если зажимы второй катушки замкнуть, в ней появится ток  $i_2$ . Все рассмотренное ранее наблюдается и в этом случае. Ток  $i_2$  создает магнитный поток  $\Phi_{22} = \Phi_{21} + \Phi_{2S}$ .

Потокосцепление самоиндукции  $\psi_{22} = W_2 \hat{O}_{22}$  наводит во второй катушке ЭДС самоиндукции

$$e_{L_2} = -\frac{d\psi_{22}}{dt} = -W_2 \frac{dd_{22}}{dt} = -L_2 \frac{i_2}{dt}.$$

Потокосцепление взаимоиндукции  $\psi_{21} = W_1 \hat{O}_{21}$  наводит в первой катушке ЭДС взаимоиндукции

$$e_{M_1} = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -W_1 \frac{d_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{i_2}{dt}.$$

По принципу взаимности для линейных цепей  $M_{12} = M_{21} = M$ .

Степень индуктивной связи характеризуют коэффициентом связи  $k$ , под которым понимают отношение:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} = \frac{M \omega}{\sqrt{L_1 \omega \cdot L_2 \omega}} = \frac{X_M}{\sqrt{X_{L_1} \cdot X_{L_2}}},$$

где  $X_M = M \omega$  – сопротивление взаимной индукции.

Для решения вопроса о знаках прибегают к специальной разметке зажимов индуктивно связанных катушек. Два зажима двух индуктивно связанных элементов называют одноименными, если при одинаковых направлениях токов относительно них магнитные потоки самоиндукции и взаимоиндукции складываются. Одноименные зажимы обозначают точками.

Одноименные зажимы двух индуктивно связанных элементов обладают особенностью: при увеличении тока, направленного к зажиму одного элемента, возрастает потенциал на одноименном зажиме другого элемента. Поэтому на практике одноименные зажимы определяют следующим образом ([рис. 3.53](#)):



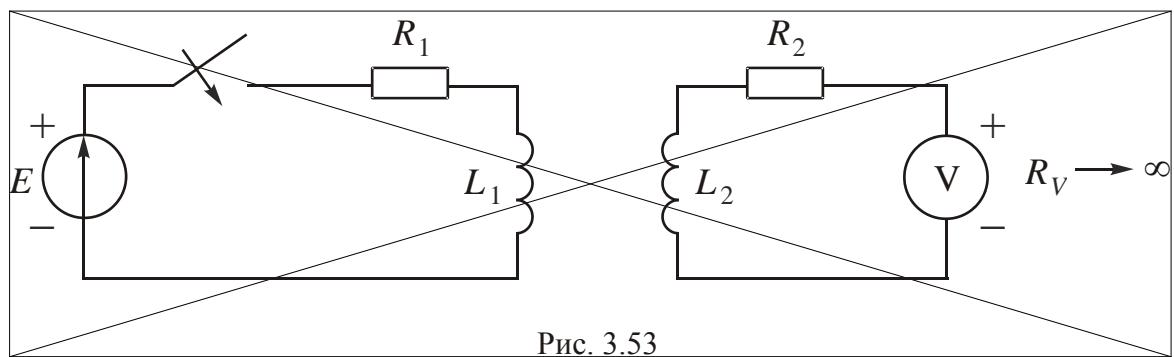


Рис. 3.53

- 1) одну индуктивную катушку подключают к источнику постоянного напряжения;
- 2) к другой индуктивной катушке подключают вольтметр для измерения постоянного напряжения;
- 3) концы индуктивных катушек, подключенные к положительному полюсу источника и к положительному зажиму вольтметра, будут одноименными, если при замыкании ключа стрелка прибора отклонится в сторону положительных значений измеряемого напряжения.

### 3.14.2. Анализ цепи с последовательным соединением индуктивно связанных катушек

Возможны два случая включения: согласное и встречное.

При согласном включении магнитный поток самоиндукции совпадает по направлению с магнитным потоком взаимной индукции другой катушки. Это будет при одинаковых направлениях токов относительно одноименных зажимов ([рис. 3.54](#)). Направление магнитного потока определяют по правилу буравчика или правой руки: если охватить рукой катушку (пальцы направлены по току), то большой палец покажет направление магнитного потока.

При встречном включении магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции направлены противоположно. Это будет, если токи ориентированы относительно одноименных зажимов по-разному ([рис. 3.55](#)).

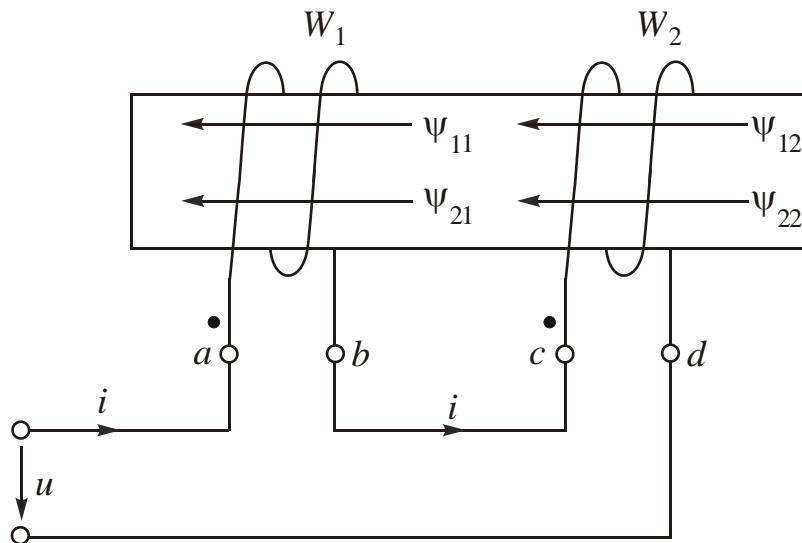


Рис. 3.54

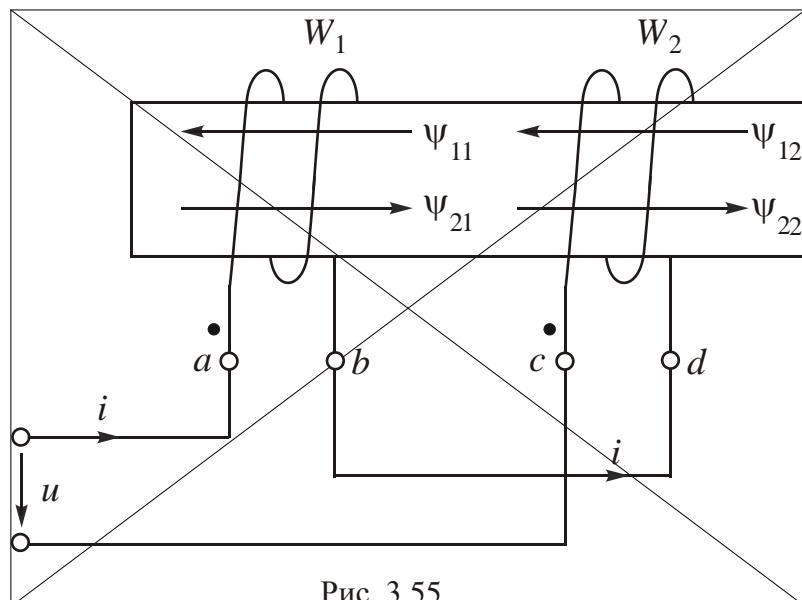


Рис. 3.55

1. Согласное включение.

Схема замещения цепи представлена на [рис. 3.56](#).

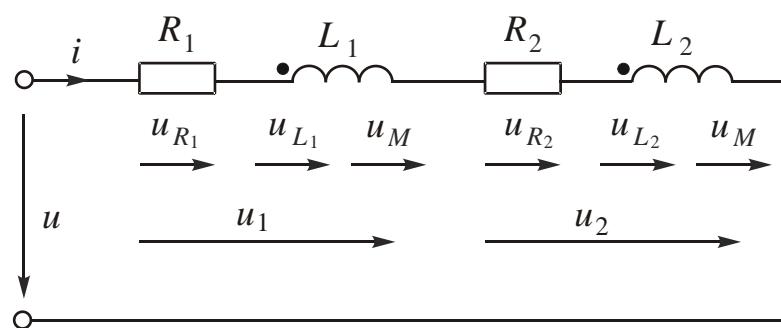


Рис. 3.56

Входное напряжение складывается из напряжений на двух индуктив-

ных катушках. Напряжения собственной индуктивности  $u_L$  и взаимной индуктивности  $u_M$  имеют одинаковые знаки.

Уравнение электрического состояния в дифференциальной форме:

$$u = u_1 + u_2 = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + R_2 i + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}.$$

Для комплексных значений

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = R_1 \dot{I} + jX_L \dot{I} + jX_M \dot{I} + R_2 \dot{I} + jX_{L_2} \dot{I} + jX_M \dot{I} = \\ &= [(R_1 + R_2) + j(X_{L_1} + X_{L_2} + 2X_M)] \dot{I} = \underline{Z}_{\text{согл}} \cdot \dot{I}. \end{aligned}$$

Комплексное сопротивление

$$\underline{Z}_{\text{согл}} = R_{\text{согл}} + jX_{\text{согл}},$$

где  $R_{\text{согл}} = R_1 + R_2$ ,  $X_{\text{согл}} = X_{L_1} + X_{L_2} + 2X_M$ .

Векторная диаграмма приведена на [рис. 3.57](#).

2. Встречное включение.

Схема замещения цепи представлена на [рис. 3.58](#).

Напряжения собственной индуктивности  $u_L$  и взаимной индуктивности  $u_M$  направлены противоположно. Уравнение электрического состояния в дифференциальной форме:



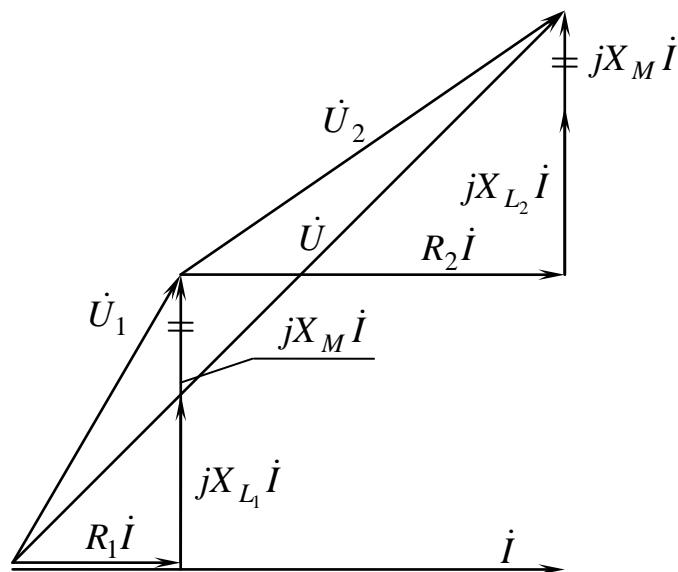


Рис. 3.57

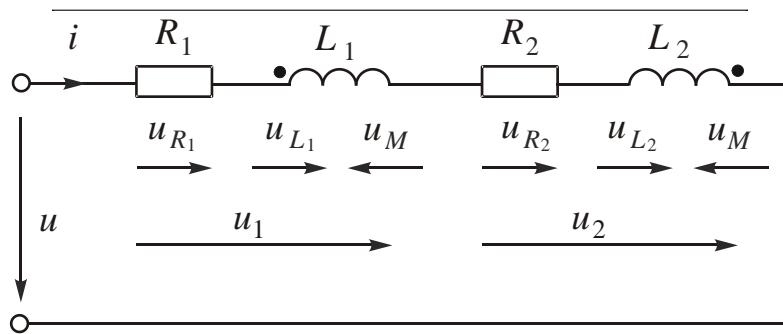


Рис. 3.58

$$u = u_1 + u_2 = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} + R_2 i + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt}.$$

Для комплексных значений

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = R_1 \dot{I} + jX_{L_1} \dot{I} - jX_M \dot{I} + R_2 + jX_{L_2} \dot{I} - jX_M \dot{I} = \\ &= [(R_1 + R_2) + j(X_{L_1} + X_{L_2} - 2X_M)] \dot{I} = Z_{\text{встр}} \dot{I}. \end{aligned}$$

Комплексное сопротивление

$$Z_{\text{встр}} = R_{\text{встр}} + jX_{\text{встр}},$$

где  $R_{\text{встр}} = R_{\text{согл}} = R_1 + R_2$ ,  $X_{\text{встр}} = X_{L_1} + X_{L_2} - 2X_M$ .

Величину сопротивления взаимной индуктивности  $X_M$  и взаимной

индуктивности  $M$  находят вычитанием из  $X_{\text{согл}}$  значения  $X_{\text{встр}}$ :

$$\begin{aligned} X_{\text{согл}} &= X_{L_1} + X_{L_2} + 2X_M; \\ - & \\ X_{\text{встр}} &= X_{L_1} + X_{L_2} - 2X_M; \\ \hline X_{\text{согл}} - X_{\text{встр}} &= 4X_M. \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } X_M = \frac{X_{\text{согл}} - X_{\text{встр}}}{4}, \text{ а } M = \frac{X_M}{\omega}.$$

Векторная диаграмма представлена на [рис. 3.59](#).

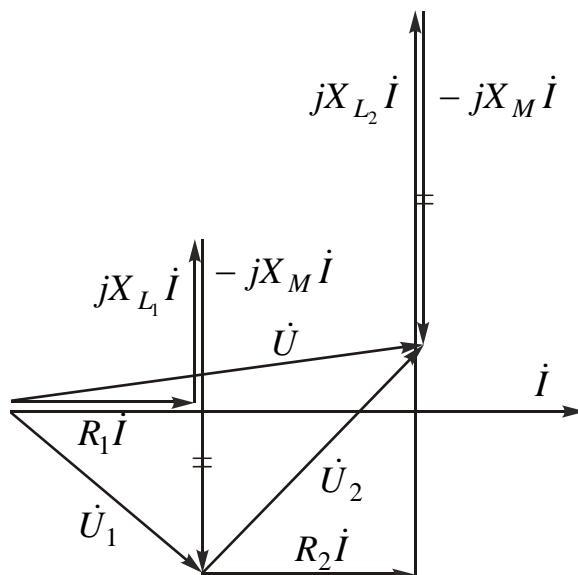


Рис. 3.59

На участке цепи может наблюдаться емкостный эффект, если  $M > L$ . Реактивное сопротивление всей цепи в целом имеет индуктивный характер, так как  $M$  не может быть одновременно больше  $L_1$  и  $L_2$ ,  $L_1 + L_2 \geq 2M$ .

На приведенной диаграмме взаимная индуктивность  $M > L_1$ , но  $M < L_2$ .

### 3.14.3. Анализ цепи с параллельным соединением индуктивно связанных катушек

Схема замещения анализируемой цепи представлена на [рис. 3.60](#).

Входное напряжение связано сразу с токами в двух пассивных параллельных ветвях, поэтому выведенные ранее формулы эквивалентных преобразований не пригодны.

Выведем формулу  $\underline{Z}_3$  с помощью уравнений, составленных по законам Кирхгофа для комплексных значений. Будем одновременно рассматривать согласное и встречное включения.

Введем обозначения:

$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{L_1}$  – комплексное сопротивление первой индуктивной катушки;

$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L_2}$  – комплексное сопротивление второй индуктивной катушки;

$\underline{Z}_M = jX_M$  – комплексное сопротивление взаимной индуктивности.

Система уравнений по законам Кирхгофа имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{I} - \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = \dot{U}; \\ \underline{Z}_1 \dot{I}_1 \pm \underline{Z}_M \dot{I}_2 = \dot{U}; \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} \dot{I} - \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = \dot{U}; \\ \underline{Z}_2 \dot{I}_2 \pm \underline{Z}_M \dot{I}_1 = \dot{U}; \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} \dot{I} - \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = \dot{U}; \\ \underline{Z}_1 \dot{I}_1 \pm \underline{Z}_M \dot{I}_1 = \dot{U}; \end{cases} \quad (3.3)$$

где знак плюс относится к случаю согласного включения.

Выразим из уравнения (3.3) ток

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U} \mp \underline{Z}_M \dot{I}_1}{\underline{Z}_2}. \quad (3.4)$$

Подставив это выражение в уравнение (3.2), получим:

$$\underline{Z}_1 \dot{I}_1 \pm \underline{Z}_M \frac{\dot{U} \mp \underline{Z}_M \dot{I}_1}{\underline{Z}_2} = \dot{U}.$$

Умножим левую и правую части на  $\underline{Z}_2$ :

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 \dot{I}_1 \pm \underline{Z}_M \dot{U} - \underline{Z}_M^2 \dot{I}_1 = \underline{Z}_2 \dot{U}_1.$$

$$\text{Отсюда } \dot{I}_1 = \frac{\underline{Z}_2 \mp \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} \cdot \dot{U}.$$

Подставив значение  $\dot{I}_1$  в выражение (3.4), получим:

$$\dot{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1 \mp \underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} \cdot \dot{U}.$$

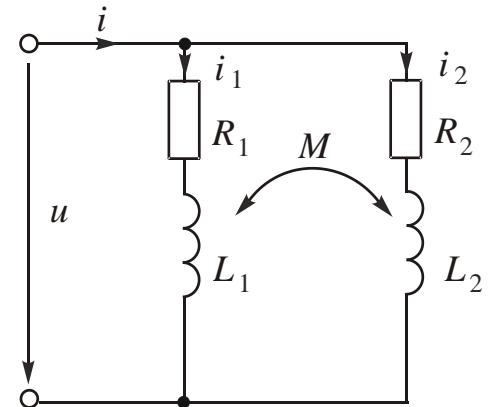


Рис. 3.60

$$\text{Входной ток } \dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2\underline{Z}_M}{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} \cdot \dot{U} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_s}.$$

$$\text{Отсюда } \underline{Z}_s = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2\underline{Z}_M}.$$

Знак минус в знаменателе относится к случаю согласного включения.

$$\text{Если } \underline{Z}_M = 0, \text{ то } \underline{Z}_s = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}, \quad \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_1}, \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_2}.$$

Векторная диаграмма представлена на [рис. 3.61](#) (согласное включение) и [рис. 3.62](#) (встречное включение).

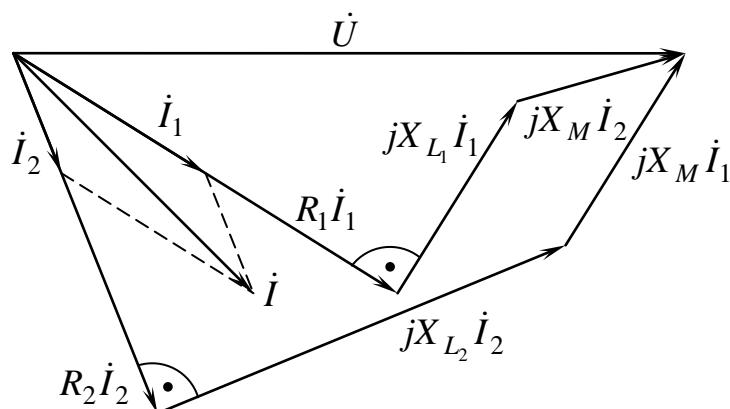


Рис. 3.61

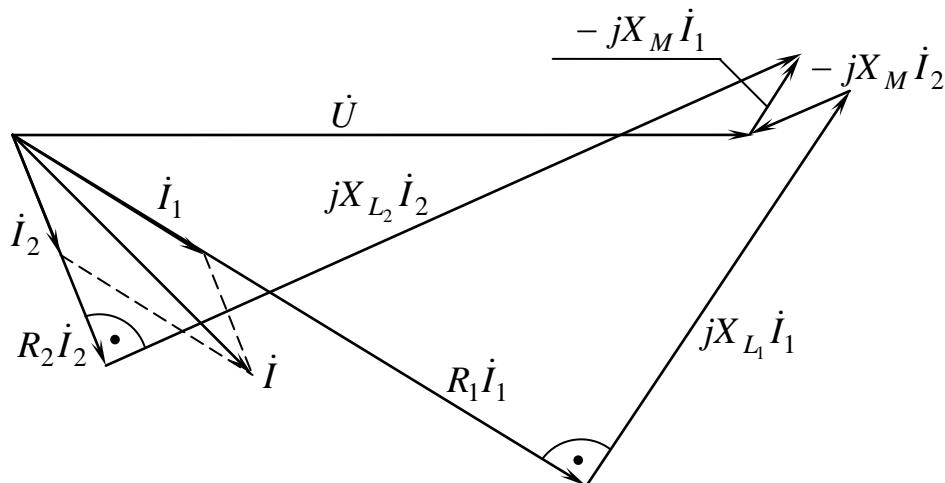


Рис. 3.62

Вектор  $\pm jX_M \dot{I}_k$  перпендикулярен вектору тока  $\dot{I}_k$ , а не вектору тока рассматриваемой ветви.

### 3.14.4. Расчет электрических цепей при наличии взаимной индуктивности

При наличии взаимной индуктивности токи в ветвях зависят от токов других ветвей, поэтому для расчета можно использовать только методы непосредственного использования законов Кирхгофа и контурных токов, в которых эти зависимости учитываются.

В общем случае направление напряжения  $\dot{U}_M$ , обусловленного взаимной индуктивностью, можно определить по правилу: ток  $\dot{I}_k$  и напряжение  $jM\omega\dot{I}_k$  одинаково направлены относительно одноименных зажимов индуктивных элементов. Это правило дает возможность составить уравнение по второму закону Кирхгофа в случае, когда нельзя определить характер включения индуктивных элементов (согласное или встречное).

Чтобы устранить ограничения, накладываемые на методы расчета, прибегают к развязке магнитных связей, т. е. к замене цепи с взаимной индуктивностью ей эквивалентной, но без магнитных связей. Магнитная развязка применима для узлов, в которых сходятся не более трех ветвей ([рис. 3.63](#)).

Составим систему уравнений по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0; \\ R_1 \dot{I}_1 + jX_{L_1} \dot{I}_1 \pm jX_M \dot{I}_2 = \dot{U}_{13}; \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} R_1 \dot{I}_1 + jX_{L_1} \dot{I}_1 \pm jX_M \dot{I}_2 = \dot{U}_{13}; \\ R_2 \dot{I}_2 + jX_{L_2} \dot{I}_2 \pm jX_M \dot{I}_1 = \dot{U}_{23}. \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} R_2 \dot{I}_2 + jX_{L_2} \dot{I}_2 \pm jX_M \dot{I}_1 = \dot{U}_{23}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Подставив в уравнения [\(3.6\)](#) и [\(3.7\)](#) выражения «лишних» токов, найденные из уравнения [\(3.5\)](#), получим:

$$R_1 \dot{I}_1 + j(X_{L_1} \mp X_M) \dot{I}_1 \pm jX_M \dot{I}_3 = \dot{U}_{13};$$

$$R_2 \dot{I}_2 + j(X_{L_2} \mp X_M) \dot{I}_2 \pm jX_M \dot{I}_3 = \dot{U}_{23}.$$

Этим уравнениям соответствует схема замещения без магнитных связей, представленная на [рис. 3.64](#).

Правило развязки: если в узле сходятся три ветви и две из них индуктивно связаны, то для развязки в первые две ветви добавляют индуктивный элемент с сопротивлением  $\pm X_M$ , а в третью ветвь – элемент с сопротивлением  $\pm X_M$ . Верхние знаки относятся к случаю, когда в узле соединены одноименные зажимы индуктивно связанных элементов.

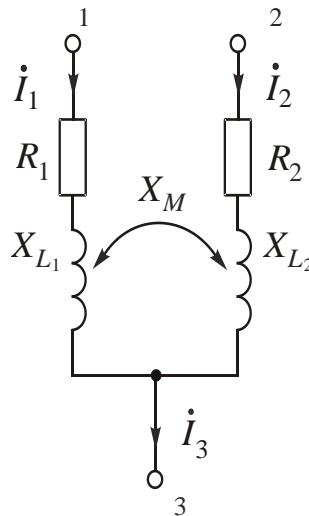


Рис. 3.63

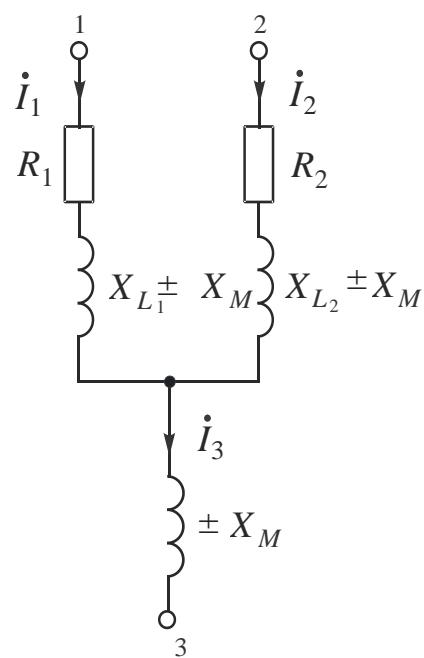


Рис. 3.64

При построении векторных диаграмм добавляются векторы напряжений, обусловленных взаимной индуктивностью. Они опережают на  $90^\circ$  векторы вызвавших их токов при согласном включении и отстают на  $90^\circ$  – при встречном.

### 3.14.5. Трансформатор без ферромагнитного сердечника

Такие трансформаторы называют воздушными или линейными. Они находят широкое применение в устройствах измерительной техники низких частот, автоматики и связи на высоких частотах.

Схема замещения воздушного трансформатора представлена на [рис. 3.65](#).

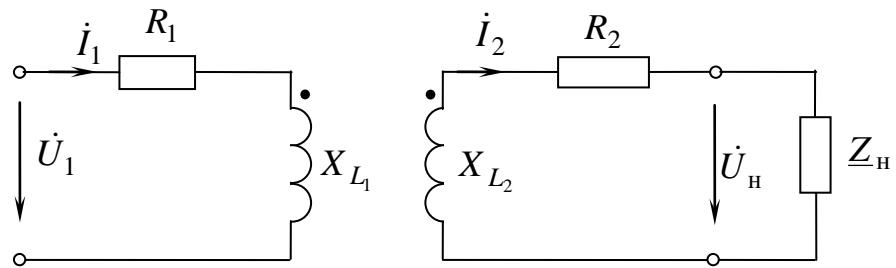


Рис. 3.65

Уравнения электрического состояния имеют следующий вид:

$$R_1 \dot{I}_1 + jX_{L_1} \dot{I}_1 - jX_M \dot{I}_2 = \dot{U}_1;$$

$$\underline{Z}_1 \dot{I}_2 + R_2 \dot{I}_2 + jX_{L_2} \dot{I}_2 - jX_M \dot{I}_1 = 0.$$

Векторная диаграмма представлена на [рис. 3.66](#). Ее вид зависит от характера нагрузки. Построение начинаем с вектора тока  $\dot{I}_2$ . Нагрузку будем считать активно-индуктивной:  $Z_h = R_h + jX_h$ .

Вектор напряжения  $R_h \dot{I}_2$  совпадает по направлению с вектором тока  $\dot{I}_2$ , вектор напряжения  $jX_h \dot{I}_2$  опережает его на  $90^\circ$ . Аналогично строим векторы напряжений  $R_2 \dot{I}_2$  и  $jX_{L_2} \dot{I}_2$ . Вектор напряжения  $-jX_M \dot{I}_1$  – направлен из конца вектора  $jX_{L_2} \dot{I}_2$  в начало вектора  $R_h \dot{I}_2$ , так как  $Z_h \dot{I}_2 + R_2 \dot{I}_2 + jX_{L_2} \dot{I}_2 - jX_M \dot{I}_1 = 0$ .

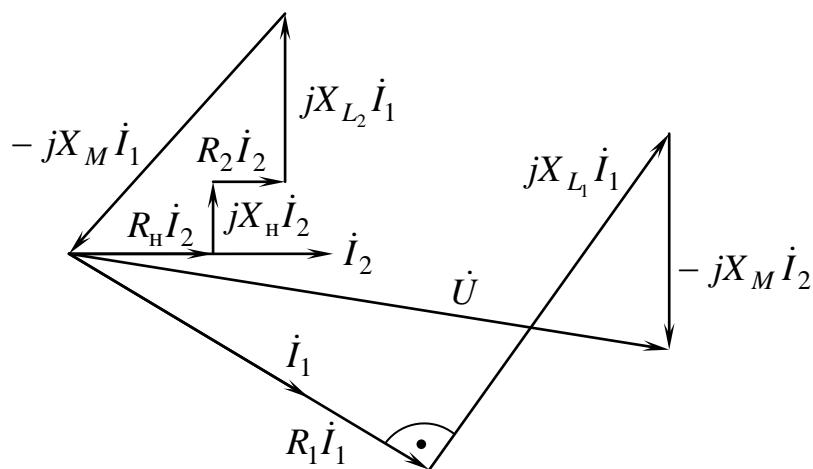


Рис. 3.66

Вектор тока  $\dot{I}_1$  опережает вектор напряжения  $-jX_M \dot{I}_1$  на  $90^\circ$ , поскольку умножение на  $-j$  означает поворот на  $-90^\circ$ . Вектор напряжения  $R_1 \dot{I}_1$  совпадает по направлению с вектором тока  $\dot{I}_1$ , вектор напряжения  $jX_{L_1} \dot{I}_1$  опережает вектор тока  $\dot{I}_1$  на  $90^\circ$ . Вектор напряжения  $-jX_M \dot{I}_2$  отстает от вектора тока  $\dot{I}_2$  на  $90^\circ$ . Вектор входного напряжения равен геометрической сумме напряжений  $R_1 \dot{I}_1$ ,  $jX_{L_1} \dot{I}_1$  и  $-jX_M \dot{I}_2$ .

## **ГЛАВА 4** **ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ**

### **4.1. Преимущества трехфазных цепей**

Применение электрической энергии началось с разработки осветительных цепей. Но главным направлением использования любой энергии является создание привода. Однофазный электродвигатель был изготовлен. Оказалось, что он не имеет пускового момента, поэтому его надо принудительно раскручивать. В 1887–1889 гг. несколькими учеными и инженерами в разных странах мира с большим или меньшим успехом разрабатывались многофазные системы.

Наибольших успехов в развитии многофазных систем добился М. О. Доливо-Добровольский, сумевший придать своим работам практический характер. Он доказал, что наиболее целесообразной является трехфазная система, разработал конструкцию асинхронного электродвигателя, в принципе не изменившуюся до настоящего времени. В 1889 г. Доливо-Добровольский изобрел трехфазный трансформатор, в 1890 г. разработал четырехпроводную систему трехфазной цепи с нейтральным проводом.

Годом рождения электрификации справедливо считают 1891 г., когда состоялось генеральное испытание трехфазной системы на международной электротехнической выставке во Франкфурте-на-Майне.

На ее создание М. О. Доливо-Добровольскому был выделен год. Турина с полезной мощностью около 300 л. с. использовалась для преобразования в электрическую энергию водопада на р. Неккар близ местечка Лауфен. В августе 1891 г. на выставке во Франкфурте, удаленном от Лауфена на 170 км, зажглись 1000 ламп накаливания; 12 сентября того же года двигатель Доливо-Добровольского привел в действие декоративный водопад.

Трехфазные цепи позволили комплексно решить проблему создания электропривода и сетей электроснабжения.

#### ***Достоинства трехфазных цепей:***

1. Наличие вращающегося магнитного поля, на основе которого построен асинхронный двигатель.
2. При передаче энергии на расстояние в трехфазных цепях по сравнению с однофазными достигается существенная экономия материала проводов.
3. Возможность иметь два эксплуатационных напряжения.

С 1891 г. начинается триумфальное шествие трехфазных цепей. Все современные сети электроснабжения являются трехфазными.

Трехфазные цепи – это частный случай многофазных систем.

**Многофазной системой** называют совокупность электрических цепей, в которых действуют синусоидальные ЭДС одинаковой частоты, отличающиеся одна от другой по фазе и индуцируемые в одном источнике питания.



Каждую из цепей, входящих в многофазную систему, называют **фазой**.

Трехфазная цепь состоит из трех основных элементов: генератора, линии передачи и приемника.

## 4.2. Трехфазный генератор

### 4.2.1. Принцип действия и разметка зажимов фаз обмотки

Простейший трехфазный генератор состоит из неподвижной (статора) и подвижной (ротора) частей. Статор – это полый цилиндр, набранный из листов электротехнической стали. На его внутренней поверхности фрезеруют пазы, в которые укладывают три одинаковые обмотки, повернутые относительно друг друга на  $120^\circ$ . Ротор является электромагнитом. Его необходимо принудительно вращать.

При пересечении магнитными силовыми линиями поля ротора обмоток статора в последних наводятся ЭДС одинаковой величины с фазовым сдвигом  $120^\circ$ . Такую систему называют **симметричной**.

Условное изображение фаз обмоток генератора и их разметка представлены на [рис. 4.1](#).

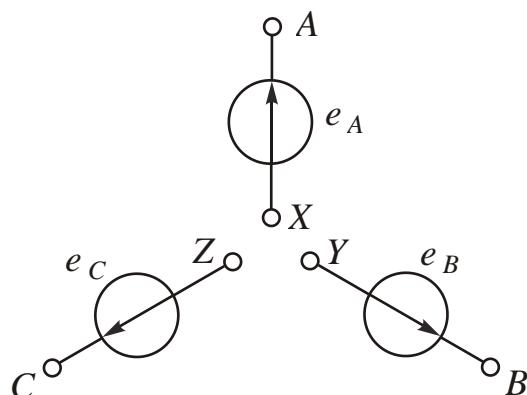


Рис. 4.1

Буквами  $A, B, C$  обозначают начала фаз обмоток;  $X, Y, Z$  – их концы.

### 4.2.2. Способы изображения симметричной системы ЭДС

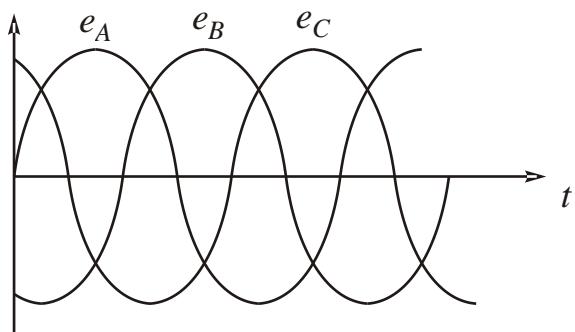


Рис. 4.2

1. Графический способ.

Симметричная система ЭДС – это три синусоиды, сдвинутые относительно друг друга по фазе на угол  $120^\circ$  ([рис. 4.2](#)). Принято считать, что начальная фаза ЭДС фазы  $A$  равна нулю, ЭДС фазы  $B$  отстает от ЭДС фазы  $A$  на  $120^\circ$ , ЭДС фазы  $C$  отстает от ЭДС фазы  $B$  на  $120^\circ$ .

Для любого момента времени

$$e_A + e_B + e_C = 0.$$

2. Тригонометрический способ.

ЭДС можно записать как синусоидальные функции времени следующим образом:

$$e_A = E_m \sin \omega t;$$

$$e_B = E_m \sin(\omega t - 120^\circ);$$

$$e_C = E_m \sin(\omega t - 240^\circ) = E_m \sin(\omega t + 120^\circ).$$

3. Способ вращающимися векторами в декартовой системе координат.

Векторная диаграмма трехфазной симметричной системы ЭДС показана на [рис. 4.3](#).

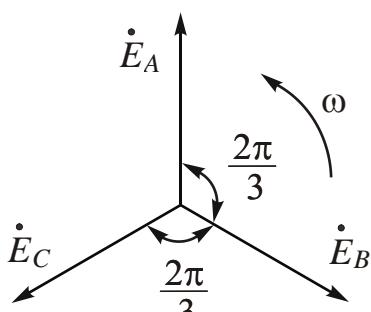


Рис. 4.3

4. Способ комплексными числами.

При изображении векторной диаграммы на комплексной плоскости ([рис. 4.4](#)) каждому вектору можно сопоставить комплексное число. При расчете трехфазных цепей комплексную плоскость обычно поворачивают на угол  $\frac{\pi}{2}$  против часовой стрелки.

Комплексы действующих значений ЭДС фаз в показательной форме могут быть записаны уравнениями:

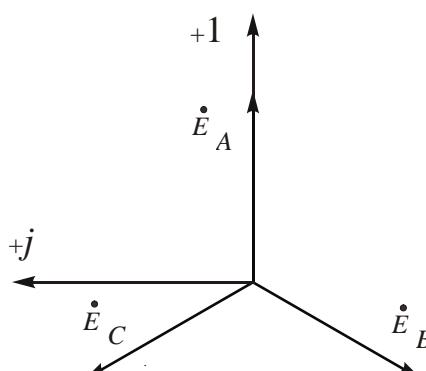


Рис. 4.4

$$\dot{E}_A = E; \quad \dot{E}_B = E e^{-j\frac{2\pi}{3}} = E e^{-j120^\circ} = a^2 E;$$

$$\dot{E}_C = E e^{j\frac{2\pi}{3}} = E e^{j120^\circ} = E e^{-j\frac{4\pi}{3}} = a E,$$

где  $a = e^{j120^\circ}$  — оператор поворота,  
 $a^2 = e^{j240^\circ} = e^{-j120^\circ}$ .

$$\text{Значение } 1 + a + a^2 = 1 - \frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

Сумма комплексных значений ЭДС трех фаз равна нулю:

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = E + E e^{-j120^\circ} + E e^{+j120^\circ} = E - \frac{E}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} E - \frac{E}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} E = 0.$$

### 4.2.3. Способы соединения фаз обмоток генератора

#### 1. Несвязанная система.

Несвязанная система появилась первой. Каждую фазу генератора с фазой приемника соединяют два провода. Сеть является шестипроводной. В настоящее время не применяется из-за неэкономичности.

#### 2. Соединение звездой.

Соединение звездой получается при объединении концов фаз обмоток  $X, Y, Z$  в нейтральную точку  $N$  (рис. 4.5).

От начала фаз к приемнику отходят линейные провода, от нейтральной точки – нейтральный провод.

Это четырехпроводная система.

Если нейтрального провода нет, получится трехпроводная система, обозначение которой  $Y$ .

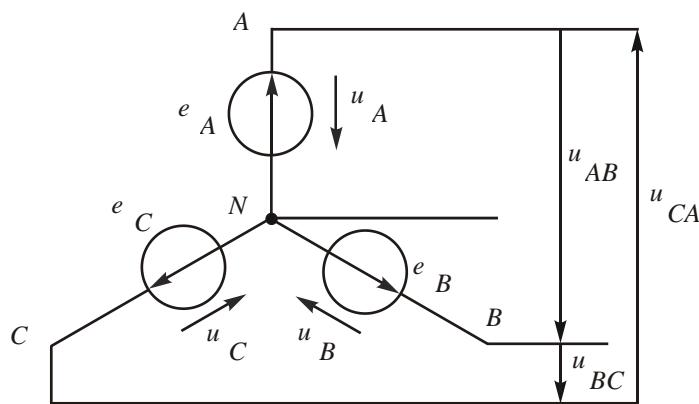


Рис. 4.5

#### 3. Соединение треугольником.

Соединение треугольником получается при соединении начала одной фазы с концом другой (рис. 4.6).

Условное обозначение  $\Delta$ .

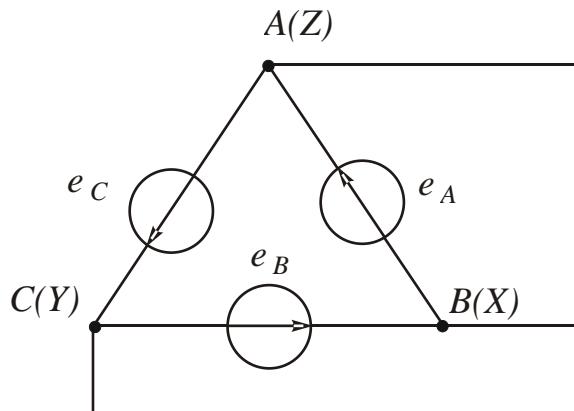


Рис. 4.6

#### 4.2.4. Условные положительные направления фазных и линейных напряжений и соотношения между ними

Обычно обмотки генератора соединяют звездой. Напряжения между началом и концом фазы (см. [рис. 4.5](#)) называют **фазными** ( $u_A$ ,  $u_B$  и  $u_C$ ), а напряжения между началами фаз генератора – **линейными** ( $u_{AB}$ ,  $u_{BC}$ ,  $u_{CA}$ ).

Внутренним сопротивлением фаз генератора можно пренебречь. В этом случае фазные напряжения  $U_A$ ,  $U_B$  и  $U_C$  считают численно равными ЭДС фаз.

Стрелка источника показывает направление повышения потенциала, поэтому за условные положительные направления фазных напряжений принимают направления от начала к концу фаз обмоток, а линейных напряжений – к началу фазы, являющейся вторым индексом в обозначении напряжения.

Любое линейное напряжение можно определить, рассчитав изменение потенциалов между соответствующими началами фаз генератора:

$$u_{AB} = u_A - u_B; \quad u_{BC} = u_B - u_C; \quad u_{CA} = u_C - u_A.$$

Для комплексных значений эти уравнения имеют вид:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B; \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C; \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A.$$

Эти уравнения дают возможность построить топографическую диаграмму фазных и линейных напряжений ([рис. 4.7](#)).

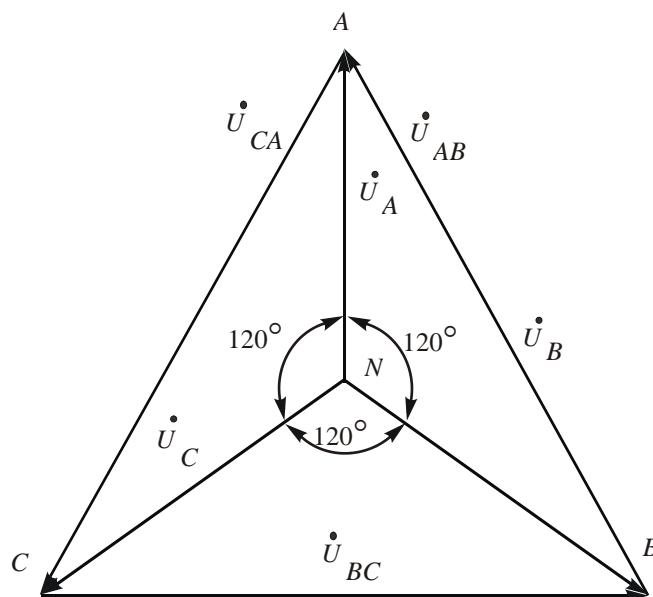


Рис. 4.7

Следует обратить внимание на противоположное направление стрелок на схеме, указывающих условное положительное направление напряжений и

соответствующих им векторов на топографической диаграмме.

Из диаграммы видно, что векторы линейных напряжений  $\dot{U}_{AB}$ ,  $\dot{U}_{BC}$ ,  $\dot{U}_{CA}$  опережают по фазе соответственно векторы фазных напряжений  $\dot{U}_A$ ,  $\dot{U}_B$  и  $\dot{U}_C$  на угол  $30^\circ$ .

Линейное напряжение по величине больше фазного в  $\sqrt{3}$  раз, т. е.  $U_{\text{л}} = \sqrt{3} U_{\phi}$  или  $U_{\phi} = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}}$ .

При соединении фаз обмоток генератора треугольником конец одной фазы соединяют с началом другой ([рис. 4.8](#)). В этом случае линейные напряжения равны фазным:  $U_{\text{л}} = U_{\phi}$ .

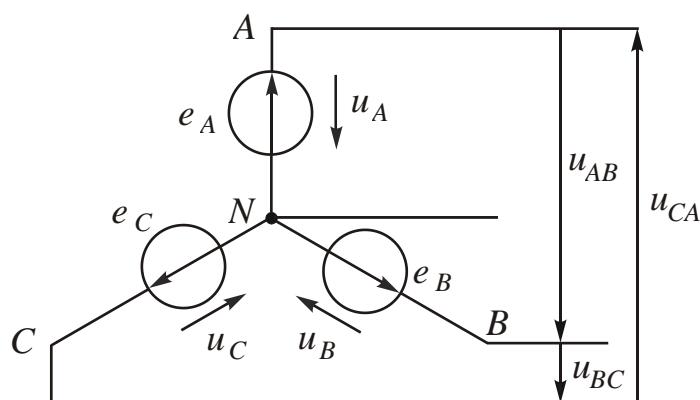


Рис. 4.8

Топографическую диаграмму напряжений в зависимости от способа соединения фаз приемников строят как представлено на [рис. 4.9](#).

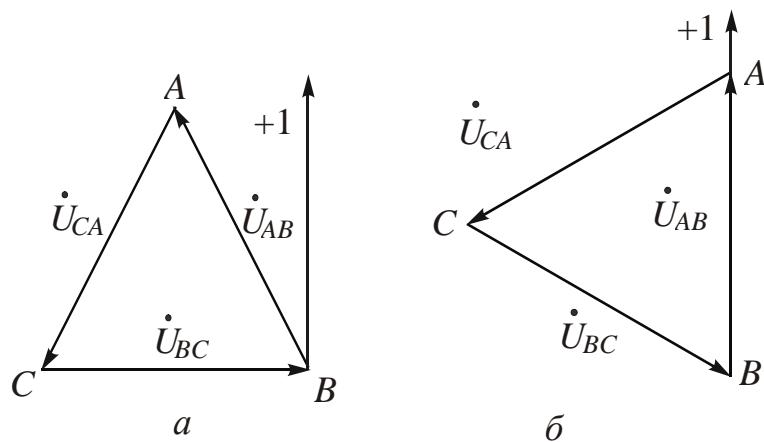


Рис. 4.9

Если фазы приемника соединены звездой, рационально использовать топографическую диаграмму, изображенную на [рис. 4.9, а](#), если треугольником – на [рис. 4.9, б](#).

### 4.3. Классификация и способы включения в трехфазную цепь приемников

Трехфазные цепи бывают четырехпроводные и трехпроводные. Фазы генератора и фазы приемника могут быть соединены по-разному.

Приемники, включаемые в трехфазную цепь, могут быть одофазными и трехфазными. Начала и концы фаз трехфазных приемников обозначают соответственно буквами  $a, x; b, y; c, z$ .

Трехфазные приемники могут быть симметричными и несимметричными. У симметричных приемников равны между собой комплексные сопротивления фаз:  $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c$ .

У несимметричного приемника нагрузка может быть равномерной, если сопротивления фаз равны между собой по величине (по модулю), или однородной, если  $\Phi_a = \Phi_b = \Phi_c$ .

### 4.4. Расчет трехфазных цепей

#### 4.4.1. Соединение фаз приемника треугольником

1. Приемник несимметричный.

В схеме замещения электрической цепи, представленной на [рис. 4.10](#), вычислить токи, если известны напряжения генератора и сопротивления фаз приемника.

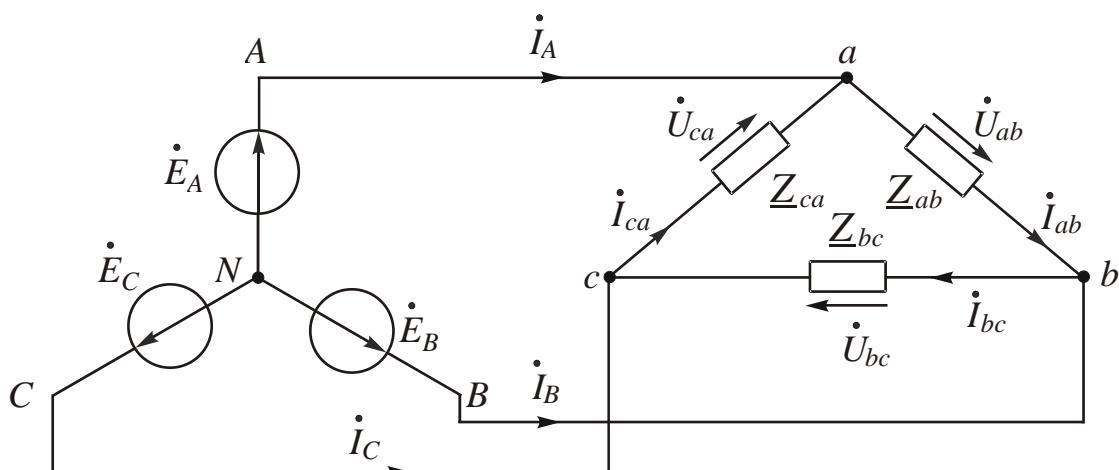


Рис. 4.10

В трехфазной цепи различают токи фазные ( $I_{ab}, I_{bc}, I_{ca}$ ) и линейные ( $I_A, I_B, I_C$ ). Фазные токи вычисляют на основании закона Ома по формулам

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}}; \quad \dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}}; \quad \dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}},$$

где  $\dot{U}_{ab}$ ,  $\dot{U}_{bc}$  и  $\dot{U}_{ca}$  – комплексы напряжений на фазах приемника, а  $\underline{Z}_{ab}$ ,  $\underline{Z}_{bc}$ ,  $\underline{Z}_{ca}$  – комплексные сопротивления фаз.

При соединении фаз приемника треугольником напряжения на его фазах равны линейным напряжениям генератора (рис. 4.10), поэтому  $\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{ab}}$ ;  $\dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}_{bc}}$ ;  $\dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{ca}}$ . Сопротивлением линейных проводов при этом пренебрегают.

Затем вычисляют линейные токи по уравнениям, составленным на основании первого закона Кирхгофа для узлов  $a$ ,  $b$ ,  $c$ :

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}.$$

Из этих уравнений следует, что геометрическая сумма векторов линейных токов равна нулю:  $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$ .

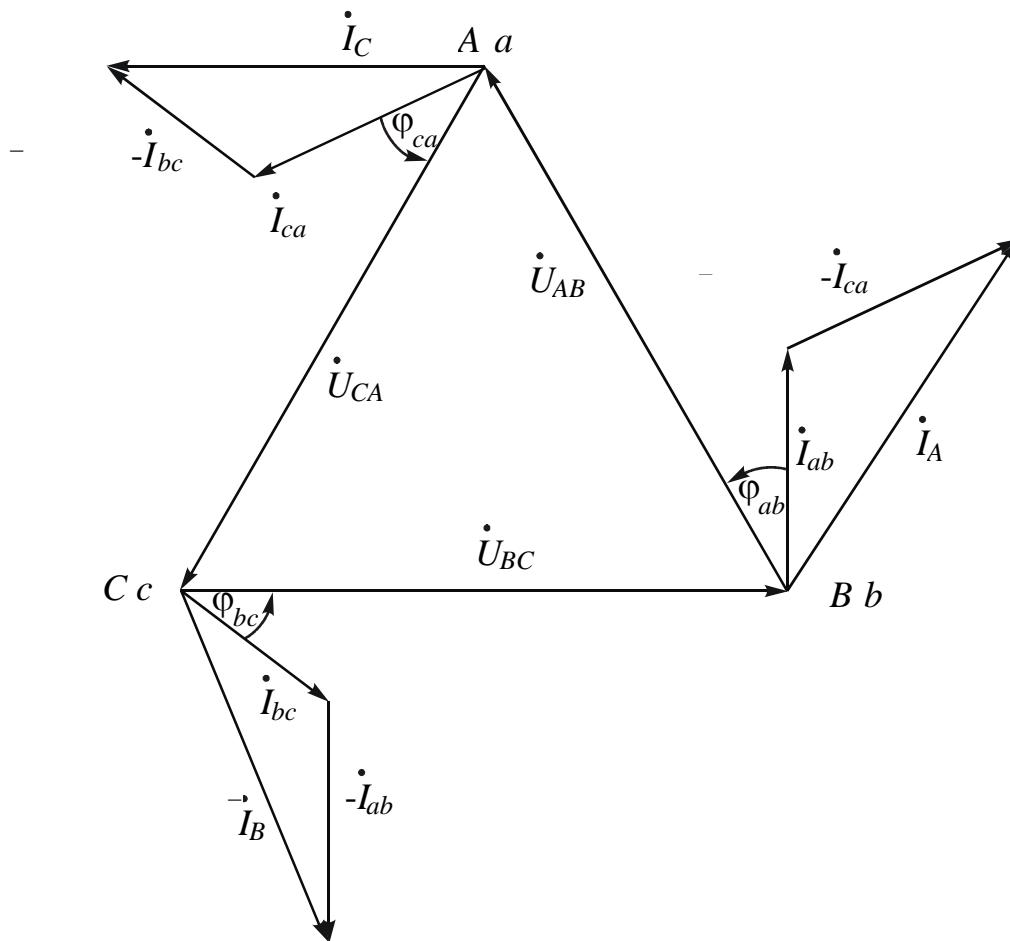


Рис. 4.11

Топографическая диаграмма и векторная диаграмма токов изображены на рис. 4.11. Вид векторной диаграммы токов зависит от характера нагрузки фаз приемника. Самой распространенной на практике является нагрузка ак-

тивно-индуктивная. В этом случае вектор тока отстает от соответствующего вектора напряжения на угол  $\varphi$ , больший  $0^\circ$ , но меньший  $90^\circ$ .

Построение начинают с топографической диаграммы напряжений генератора (см. [рис. 4.9, а, б](#)). Далее строят топографическую диаграмму напряжений приемника. Если сопротивлением линии пренебрегаем, то потенциалы точек  $A$  и  $a$ ,  $B$  и  $b$ ,  $C$  и  $c$  одинаковы. Поэтому топографическая диаграмма приемника совпадает с топографической диаграммой генератора. Затем проводят векторы фазных токов под соответствующими углами к векторам фазных напряжений. Векторы линейных токов строят как геометрическую разность векторов токов тех двух фаз приемника, которые соединяют с данным линейным проводом. Удобнее вектор линейного тока получить как сумму вектора фазного тока, являющегося уменьшаемым, и вектора, противоположного вычитаемому фазному току ([рис. 4.11](#)).

Возможен другой способ построения векторной диаграммы токов, представленный на [рис. 4.12](#).

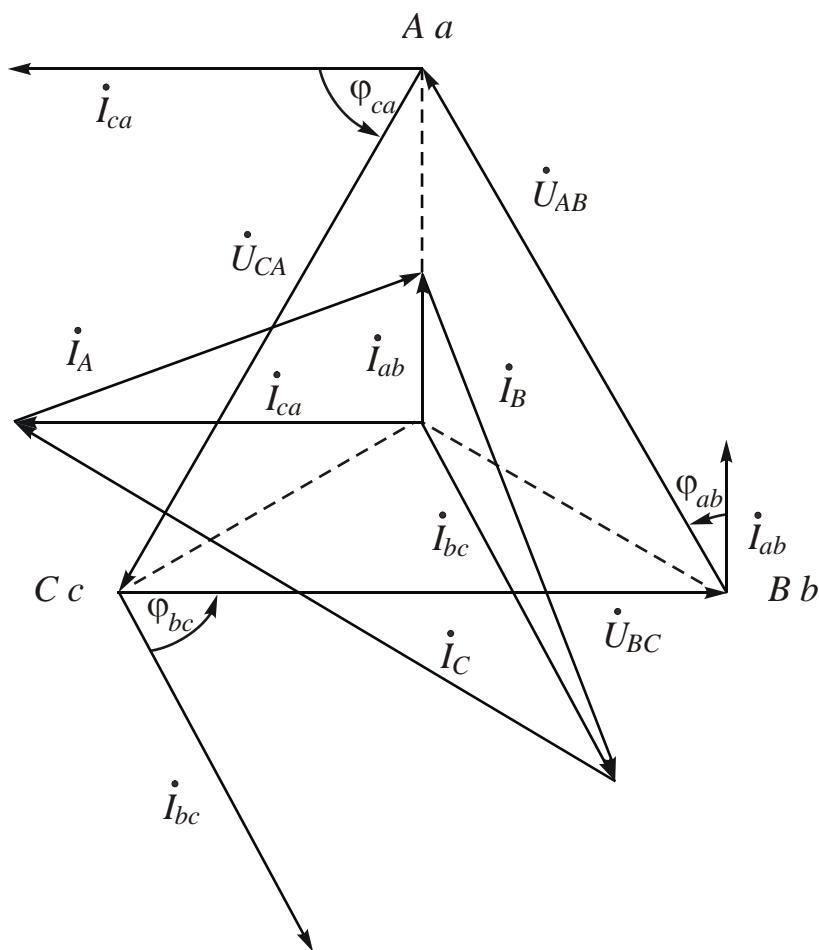


Рис. 4.12

Векторы фазных токов переносят в центр треугольника напряжений. Векторы линейных токов получают как геометрические разности соответст-

вующих фазных токов.

## 2. Приемник симметричный.

У симметричного приемника комплексные сопротивления фаз равны между собой:  $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca}$ , поэтому токи в фазах равны между собой по величине и сдвинуты относительно друг друга по фазе на  $120^\circ$  ( $\frac{2\pi}{3}$ ). Достаточно вычислить по закону Ома ток только одной фазы:

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{ab}}.$$

Токи двух других фаз вычисляют, используя значение тока  $\dot{I}_{ab}$ :

$$\dot{I}_{bc} = \dot{I}_{ab} e^{-j120^\circ}; \quad \dot{I}_{ca} = \dot{I}_{ab} e^{j120^\circ}.$$

Комплексы линейных токов определяют как разности комплексов соответствующих фазных токов.

Векторно-топографическая диаграмма при симметричной нагрузке изображена на [рис. 4.13](#). Из диаграммы видим, что линейные токи по величине равны между собой и сдвинуты относительно друг друга по фазе на угол  $120^\circ$ . Линейный ток по величине в  $\sqrt{3}$  раз превышает фазный:

$$I_{\text{л}} = \sqrt{3} I_{\phi}.$$

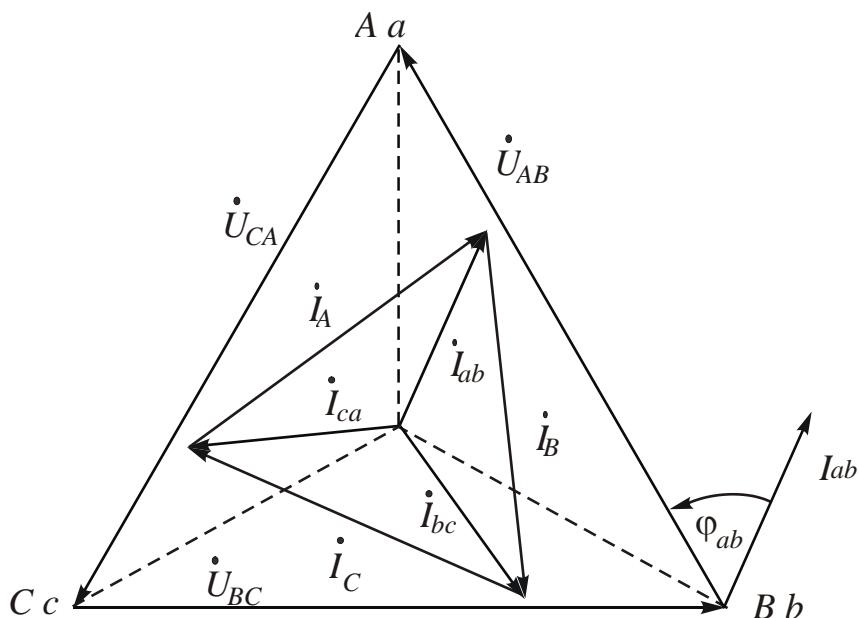


Рис. 4.13

Векторы линейных токов  $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$  отстают по фазе соответственно от

векторов фазных токов  $\dot{I}_{ab}$ ,  $\dot{I}_{bc}$  и  $\dot{I}_{ca}$  на угол  $30^\circ$ .

Вычислив фазный ток  $\dot{I}_{ab}$ , можно записать значения всех линейных токов следующим образом:

$$\dot{I}_A = \sqrt{3} \dot{I}_{ab} e^{-j30^\circ}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_A e^{-j120^\circ}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_A e^{j120^\circ}.$$

Если нужно вычислить только величины токов, расчет производят по формулам

$$I_\phi = \frac{U_{\phi\pi}}{Z_\phi} = \frac{U_{\text{лг}}}{Z_\phi}; \quad I_{\text{л}} = \sqrt{3} I_\phi.$$

#### 4.4.2. Соединение звездой четырехпроводной с нейтральным проводом, обладающим сопротивлением

1. Приемник несимметричный.

Схема замещения анализируемой цепи представлена на [рис. 4.14](#).

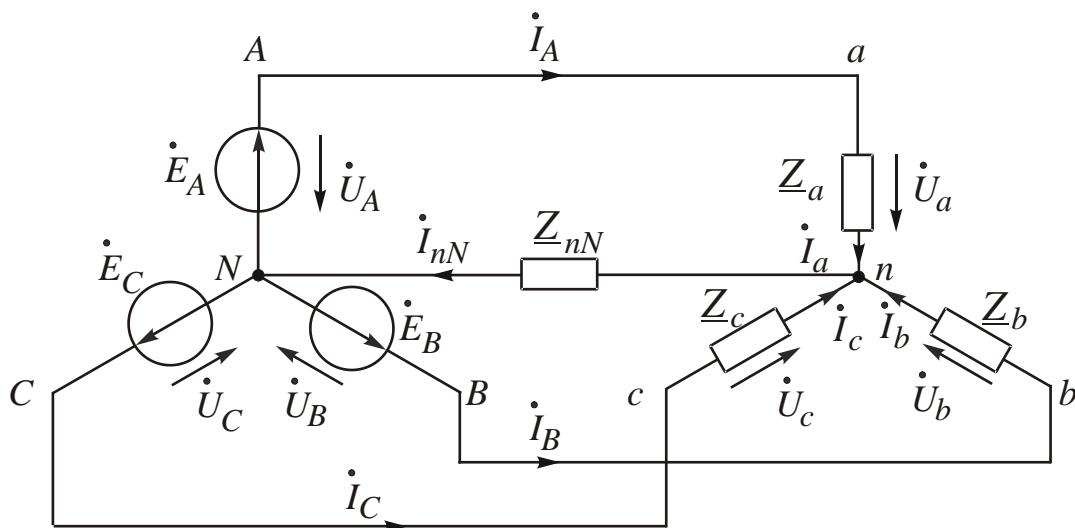


Рис. 4.14

По известным значениям напряжения генератора и сопротивлений фаз приемника нужно вычислить фазные и линейные токи, а также ток в нейтральном проводе, соединяющем нейтральные точки генератора и приемника.

Из схемы видим, что при соединении фаз звездой фазные и линейные токи соответственно равны между собой, например,  $I_A = I_a$ .

Трехфазные цепи являются разновидностью цепей синусоидального тока, поэтому для их расчета пригодны все методы, применяемые в однофазных цепях. Анализируемую схему можно рассматривать как схему с двумя узлами ( $N$  и  $n$ ) и рассчитать токи в ней методом напряжения между двумя

узлами.

Напряжение между нейтральными точками генератора и приемника можно вычислить по формуле

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\underline{Y}_a \dot{U}_A + \underline{Y}_b \dot{U}_B + \underline{Y}_c \dot{U}_C}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c + \underline{Y}_{nN}},$$

где  $\underline{Y}_a = \frac{1}{\underline{Z}_a}$ ,  $\underline{Y}_b = \frac{1}{\underline{Z}_b}$ ,  $\underline{Y}_c = \frac{1}{\underline{Z}_c}$  – комплексные проводимости фаз приемника;  $\underline{Y}_{nN} = \frac{1}{\underline{Z}_{nN}}$  – комплексная проводимость нейтрального провода.

Линейные и равные им соответственно фазные токи можно определить по закону Ома для активной ветви:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_a = \underline{Y}_a (\dot{U}_A - \dot{U}_{nN}); \quad \dot{I}_B = \dot{I}_b = \underline{Y}_b (\dot{U}_B - \dot{U}_{nN});$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_c = \underline{Y}_c (\dot{U}_C - \dot{U}_{nN}).$$

Выражения в скобках являются разностью потенциалов между началами ( $a, b, c$ ) и концами ( $n$ ) фаз приемников, т. е. фазными напряжениями приемника. Например,  $\dot{U}_a = -\dot{U}_{nN} + \dot{U}_A$ . Поэтому уравнения можно переписать в виде

$$\dot{I}_A = \dot{I}_a = \underline{Y}_a \cdot \dot{U}_a; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_b = \underline{Y}_b \cdot \dot{U}_b; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_c = \underline{Y}_c \cdot \dot{U}_c.$$

Ток в нейтральном проводе можно вычислить по закону Ома для пассивной ветви или по первому закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_{nN} = \underline{Y}_{nN} \cdot \dot{U}_{nN} = \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c.$$

Топографическую диаграмму строят в два этапа:

Этап 1. Построение топографической диаграммы напряжений генератора (см. [рис. 4.7](#)).

Этап 2. Построение топографической диаграммы напряжений приемника.

Напряжение – разность потенциалов между двумя точками. Если известна картина распределения потенциалов различных точек схемы на комплексной плоскости, то, соединив две соответствующие точки, можно получить вектор нужного напряжения. Если сопротивлением линии пренебрегают, то на схеме замещения начала фаз генератора и приемника коротко соединены между собой. Тогда потенциалы их будут одинаковы, точки  $A$  и  $a$ ,  $B$  и  $b$ ,  $C$  и  $c$  на комплексной плоскости совпадают. Между нейтральными точками генератора  $N$  и приемника  $n$  возникает напряжение  $\dot{U}_{nN}$ .

Точка  $n$  на комплексной плоскости смешена относительно точки  $N$ . По-



этому напряжение  $\dot{U}_{nN}$  называют напряжением смещения нейтрали. Точку  $n$  получим, построив вектор  $\dot{U}_{nN}$  (рис. 4.15). Соединив точки, соответствующие началам и концам фаз приемника, получим векторы фазных напряжений приемника  $\dot{U}_a$ ,  $\dot{U}_b$  и  $\dot{U}_c$ . Система фазных напряжений приемника несимметрична. Линейные напряжения не показаны, чтобы не усложнять рисунок.

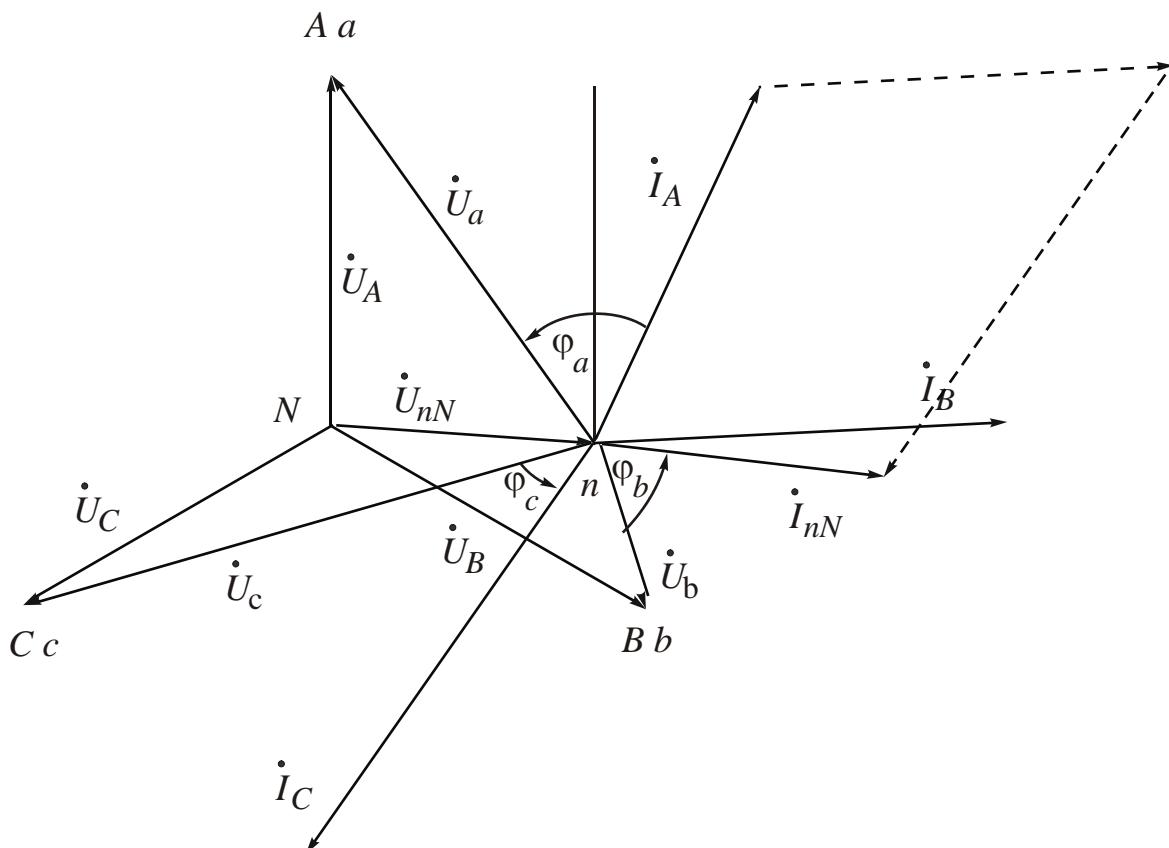


Рис. 4.15

Векторная диаграмма токов зависит от нагрузки. Построим векторную диаграмму для схемы замещения цепи, представленной на [рис. 4.16](#).

Векторы фазных токов строят из точки  $n$  в зависимости от нагрузки в фазах. В фазе  $a$  нагрузка активно-индуктивная, поэтому ток  $\dot{I}_A$  отстает от напряжения  $\dot{U}_a$  на угол  $\varphi_a$ . Напомним, что угол  $\varphi_a$  является аргументом комплексного сопротивления фазы.

Токи  $\dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$  опережают напряжения  $\dot{U}_b$  и  $\dot{U}_c$  соответственно на углы  $\varphi_b$  и  $\varphi_c$ .

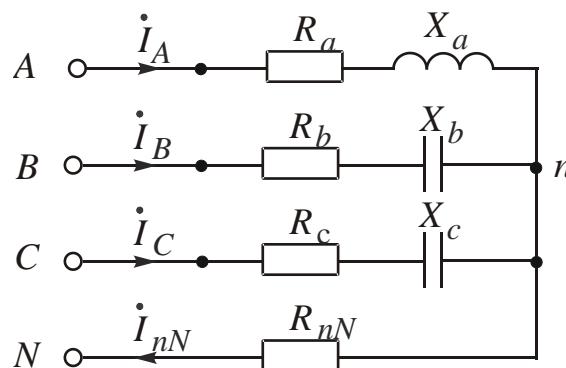


Рис. 4.16

Ток  $\dot{I}_{nN}$  равен геометрической сумме токов  $\dot{I}_A$ ,  $\dot{I}_B$ , и  $\dot{I}_C$ .

Векторная диаграмма токов позволяет проверить правильность произведенных расчетов. Напомним, что углы  $\psi_u$  и  $\psi_i$  отсчитывают от положительного направления действительной оси.

1. Приемник симметричный.

Если приемник симметричный ( $Z_a = Z_b = Z_c = Z$ ), формула напряжения между двумя узлами может быть записана в виде

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\underline{Y}(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C)}{3\underline{Y} + \underline{Y}_{nN}} = \frac{\underline{Y}(\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C)}{3\underline{Y} + \underline{Y}_{nN}} = 0.$$

Напряжение между нейтральными точками генератора и приёмника не возникает.

Напряжения генератора и приёмника соответственно равны. Линейные и фазные токи равны по величине и сдвинуты по фазе относительно друг друга на угол  $120^\circ$ .

$$\dot{I}_A = \dot{I}_a = \frac{\dot{U}_A}{Z_a}; \dot{I}_B = \dot{I}_A e^{-j120^\circ} = a^2 \dot{I}_A; \dot{I}_C = \dot{I}_A e^{j120^\circ} = a \dot{I}_A.$$

Ток в нейтральном проводе

$$\dot{I}_{nN} = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = \dot{I}_A(1 + a^2 + a) = 0.$$

Топографические диаграммы генератора и приемника совпадают.

#### 4.4.3. Соединение звездой четырехпроводной с нейтральным проводом без сопротивления

Схема замещения анализируемой цепи приведена на рис. 4.17.

По известным значениям напряжения генератора и сопротивлений фаз

приемника нужно вычислить фазные и линейные токи, а также ток в нейтральном проводе, соединяющем нейтральные точки генератора и приемника.

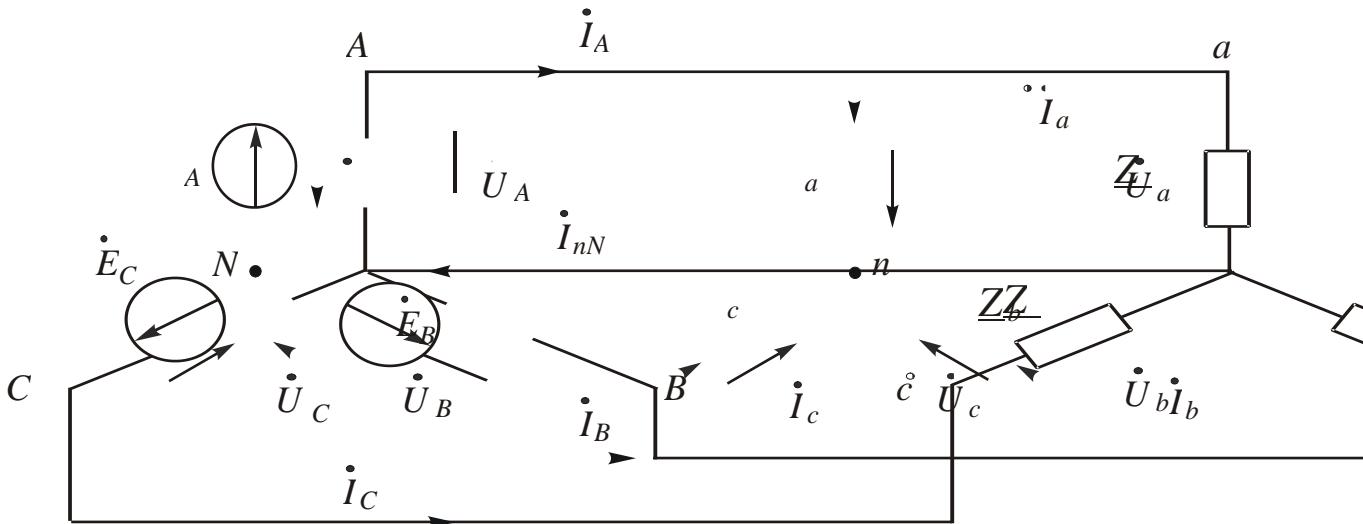


Рис. 4.17

## 2. Приемник несимметричный.

Из схемы видно, что при соединении фаз приемника звездой фазные и линейные токи соответственно равны между собой, например,  $\dot{I}_A = \dot{I}_a$ .

Нейтральный провод с нулевым сопротивлением соединяет нейтральные точки генератора и приемника, следовательно, их потенциалы равны между собой:  $\dot{V}_N = \dot{V}_n$ .

Если сопротивлением линии пренебрегают, то потенциалы начал фаз генератора и приемника одинаковы:  $\dot{V}_A = \dot{V}_a$ ;  $\dot{V}_B = \dot{V}_b$ ;  $\dot{V}_C = \dot{V}_c$ . Поэтому фазные напряжения генератора и приемника соответственно равны:  $\dot{U}_A = \dot{U}_a$ ;  $\dot{U}_B = \dot{U}_b$ ;  $\dot{U}_C = \dot{U}_c$ .

Линейные и фазные токи определяют по закону Ома:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_a = \frac{\dot{U}_A}{Z_a}; \dot{I}_B = \dot{I}_b = \frac{\dot{U}_B}{Z_b}; \dot{I}_C = \dot{I}_c = \frac{\dot{U}_C}{Z_c}.$$

Ток в нейтральном проводе  $\dot{I}_{nN} = \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c$  зависит не только от характера и величины сопротивлений фаз, но и от схемы их включения. При перемена местами нагрузок двух фаз ток нейтрального провода может измениться в несколько раз.

Топографические диаграммы напряжений генератора и приемника совпадают. Нейтральный провод обеспечивает симметрию фазных напряжений приемника при несимметричной нагрузке.

Векторы фазных токов ориентируют относительно векторов соответ-

вующих фазных напряжений приемника в зависимости от нагрузки фаз.

Вектор тока в нейтральном проводе  $\dot{I}_{nN}$  получают как геометрическую сумму векторов фазных токов.

Векторно-топографическая диаграмма схемы [рис. 4.18](#) представлена на [рис. 4.19](#).

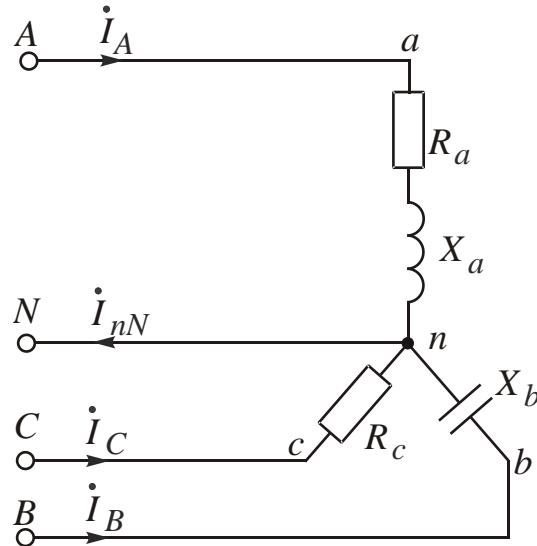


Рис. 4.18

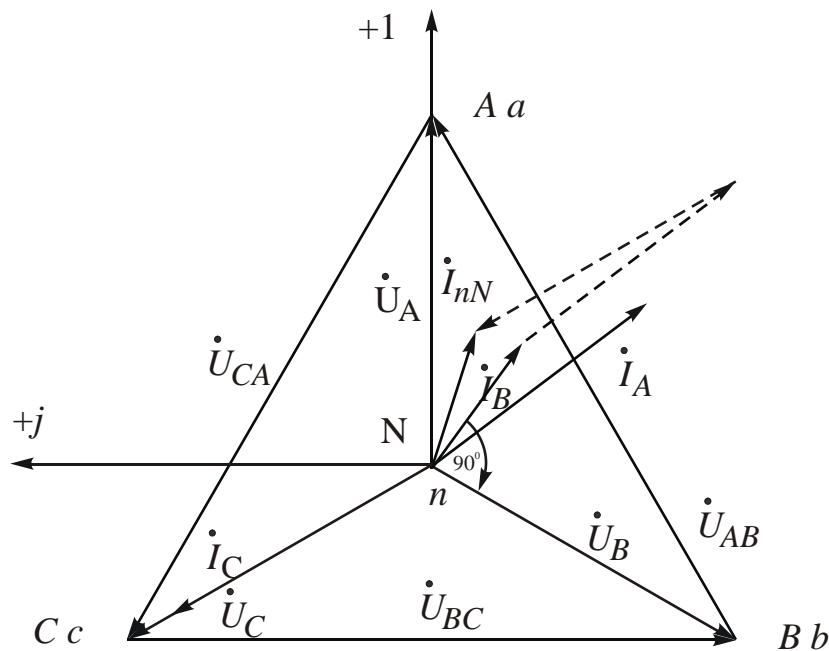


Рис. 4.19

Топографические диаграммы генератора и приемника совпадают.

Нагрузка фазы  $a$  имеет активно-индуктивный характер, поэтому вектор тока  $\dot{I}_A$  отстает от вектора напряжения  $\dot{U}_A$  на угол  $\varphi_a$ , определяемый соотношением сопротивлений фазы  $\varphi_a = \arctg \frac{X_a}{R_a}$ , т. е. являющийся аргументом комплексного сопротивления  $Z_a$ . Вектор тока  $\dot{I}_B$  опережает вектор напря-

жения  $\dot{U}_B$  на угол  $\varphi_b = 90^\circ$ . Вектор тока  $\dot{I}_C$  совпадает с вектором  $\dot{U}_C$  по направлению. Вектор тока в нейтральном проводе можно построить как геометрическую сумму линейных токов.

## 2. Приемник симметричный.

Если приемник симметричный, токи в фазах и линиях равны между собой по величине и сдвинуты относительно друг друга по фазе на  $120^\circ$ . Достаточно вычислить только один ток:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_a = \frac{\dot{U}_A}{Z_a}.$$

Тогда  $\dot{I}_B = \dot{I}_b = \dot{I}_a e^{-j120^\circ} = a^2 \dot{I}_A$ ;  $\dot{I}_C = \dot{I}_c = \dot{I}_A e^{j120^\circ} = a \dot{I}_A$ .

Ток в нейтральном проводе  $\dot{I}_{nN} = \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 0$ .

### 4.4.4. Соединение звездой трехпроводной

Схема замещения анализируемой цепи представлена на рис. 4.20.

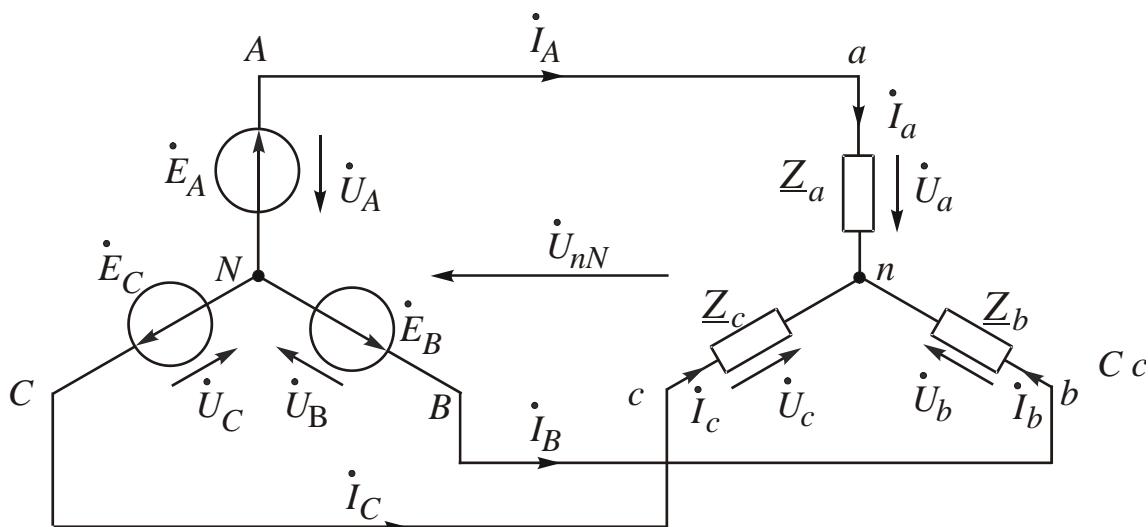


Рис. 4.20

## 1. Приемник несимметричный.

Трехфазные цепи являются разновидностью цепей синусоидального тока, поэтому для их расчета пригодны все методы, применяемые в однофазных цепях. Анализируемую схему можно рассматривать как схему с двумя узлами (N и n) и рассчитывать токи в ней методом напряжения между двумя узлами. Напряжение между нейтральными точками генератора и приемника можно вычислить по формуле

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\underline{Y}_a \dot{U}_A + \underline{Y}_b \dot{U}_B + \underline{Y}_c \dot{U}_C}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c},$$

где  $\underline{Y}_a = \frac{1}{Z_a}$ ,  $\underline{Y}_b = \frac{1}{Z_b}$ ,  $\underline{Y}_c = \frac{1}{Z_c}$  – комплексные проводимости фаз приемника.

Линейные и равные им соответственно фазные токи можно определить по закону Ома для активной ветви:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_a = \underline{Y}_a (\dot{U}_A - \dot{U}_{nN}); \quad \dot{I}_B = \dot{I}_b = \underline{Y}_b (\dot{U}_B - \dot{U}_{nN});$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_c = \underline{Y}_c (\dot{U}_C - \dot{U}_{nN}).$$

Выражения в скобках являются разностью потенциалов между началами ( $a, b, c$ ) и концами ( $n$ ) фаз приемников, т. е. фазными напряжениями приемника. Например,  $\dot{U}_a = -\dot{U}_{nN} + \dot{U}_A$ .

Поэтому уравнения можно переписать в следующем виде:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_a = \underline{Y}_a \dot{U}_a; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_b = \underline{Y}_b \dot{U}_b; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_c = \underline{Y}_c \dot{U}_c.$$

На основании первого закона Кирхгофа геометрическая сумма токов  $\dot{I}_a, \dot{I}_b$  и  $\dot{I}_c$  будет равна нулю.

Уравнение  $\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 0$  дает возможность проверить правильность решения.

Топографическую диаграмму строят в два этапа:

Этап 1. Построение топографической диаграммы напряжений генератора.

Этап 2. Построение топографической диаграммы напряжений приемника. Напряжение – разность потенциалов между двумя точками. Если известна картина распределения потенциалов различных точек схемы на комплексной плоскости, то, соединив две соответствующие точки, можно получить вектор нужного напряжения. Если сопротивлением линии пренебрегают, то на схеме замещения начала фаз генератора и приемника коротко соединяют между собой, тогда потенциалы их будут одинаковы. Точки  $A$  и  $a$ ,  $B$  и  $b$ ,  $C$  и  $c$  на комплексной плоскости совпадают. Между нейтральными точками генератора  $N$  и приемника  $n$  возникает напряжение  $\dot{U}_{nN}$ . Точка  $n$  на комплексной плоскости смешена относительно точки  $N$ . Поэтому напряжение  $\dot{U}_{nN}$  называют напряжением смещения нейтрали. Точку  $n$  получим, построив вектор  $\dot{U}_{nN}$ . Соединив точки, соответствующие началам и концам фаз приемника, получим векторы фазных напряжений приемника  $\dot{U}_a, \dot{U}_b$  и  $\dot{U}_c$ . Система фазных напряжений приемника несимметрична.

Векторная диаграмма токов зависит от нагрузки.



2. Приемник симметричный.

Если приемник симметричный ( $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \underline{Z}$ ,  $\underline{Y}_a = \underline{Y}_b = \underline{Y}_c = \underline{Y}$ ), формула напряжения между двумя узлами может быть записана в виде

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\underline{Y}(\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C)}{3\underline{Y}} = 0.$$

Напряжение между нейтральными точками генератора и приемника не возникает.

Напряжения генератора и приемника соответственно равны. Линейные и фазные токи равны по величине и сдвинуты по фазе относительно друг друга на угол  $120^\circ$ .

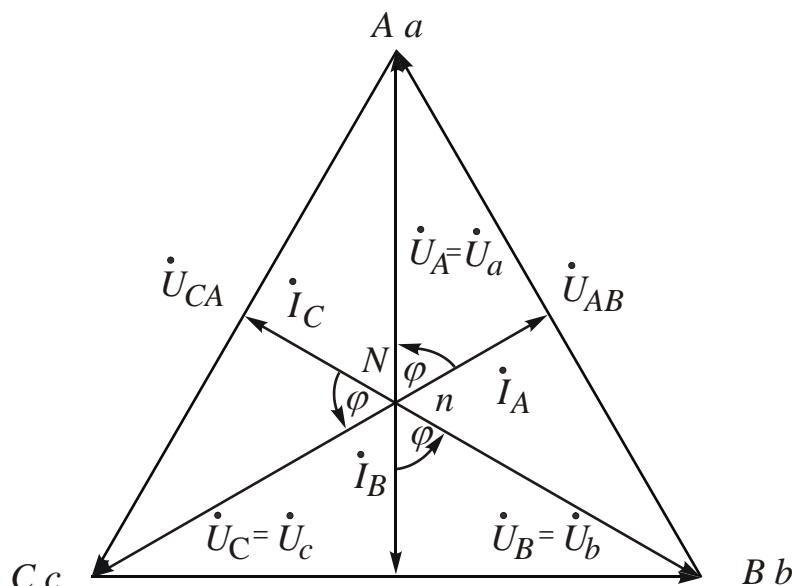


Рис. 4.21

$$\dot{I}_A = \dot{I}_a = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_a}; \dot{I}_B = \dot{I}_A e^{-j120^\circ}; \dot{I}_C = \dot{I}_A e^{j120^\circ}.$$

Векторно-топографическая диаграмма для случая активно-индуктивной нагрузки построена на [рис. 4.21](#).

Итак, напряжение между нейтральными точками не возникает при симметричной нагрузке, а также при наличии нейтрального провода с нулевым сопротивлением.

## 4.4.5. Общий случай расчета симметричных режимов

Рассмотрим конкретный пример для схемы, представленной на [рис. 4.22](#). Расчет существенно упрощается при переходе к однофазному эквиваленту.

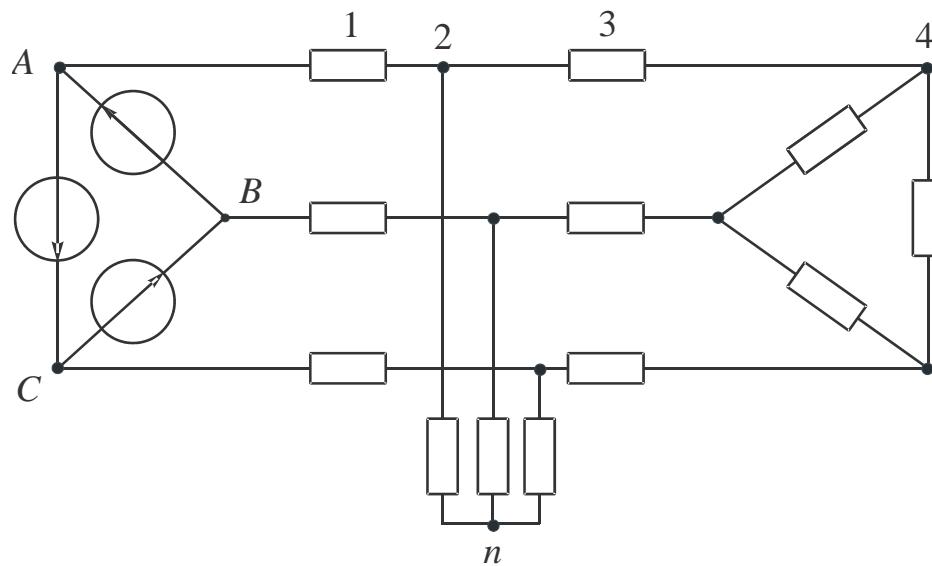


Рис. 4.22

Решение

1. Все треугольники заменим эквивалентными звездами.

При соединении фаз генератора треугольником фазные напряжения равны линейным. При соединении фаз генератора звездой фазное напряжение  $\dot{U}_A = \frac{\dot{U}_{AB}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ}$ .

При соединении фаз приемника звездой сопротивление фазы в 3 раза меньше сопротивления фазы эквивалентного треугольника:  $Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3}$ .

Схема замещения получившейся цепи представлена на [рис. 4.23](#).

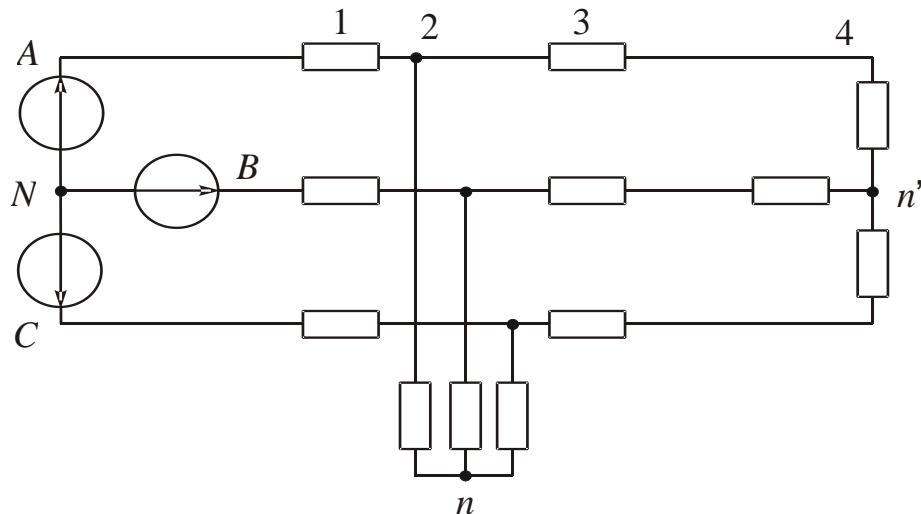


Рис. 4.23

2. Нейтральные точки  $N$ ,  $n$  и  $n'$  при симметричном приемнике имеют одинаковые потенциалы, поэтому их можно соединить между собой.

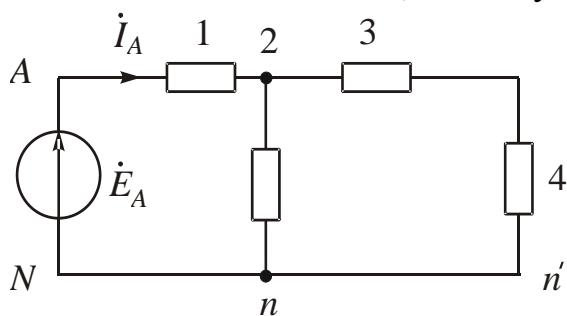


Рис. 4.24

Расчет токов выполняем для одной фазы, схема замещения которой представлена на [рис. 4.24](#).

Токи в фазах равны по величине и сдвинуты относительно друг друга по фазе на  $120^\circ$ :

$$I_B = a^2 I_A; I_C = a I_A.$$

## 4.5. Анализ аварийных режимов в трехфазных цепях

### 4.5.1. Соединение звездой четырехпроводной

1. Холостой ход одной из фаз.

Схема замещения трёхфазной цепи при обрыве в фазе  $a$  приемника изображена на [рис. 4.25](#). Точки  $a, b, c, n$  приемника коротко соединены соответственно с точками  $A, B, C, N$  генератора, поэтому потенциалы их одинаковы. Следовательно, напряжения на фазах приемника равны напряжениям на фазах генератора. Ток  $I_A = I_a = 0$ . Токи  $I_B$  и  $I_C$  не изменяются по сравнению с нормальным режимом работы. Их вычисляют по закону Ома:

$I_n = I_\phi = \frac{\dot{U}_\phi}{Z_\phi}$ . Ток нейтрального провода вычисляют по первому закону Кирхгофа ( $I_{nN} = I_B + I_C$ ) аналитически или графически.

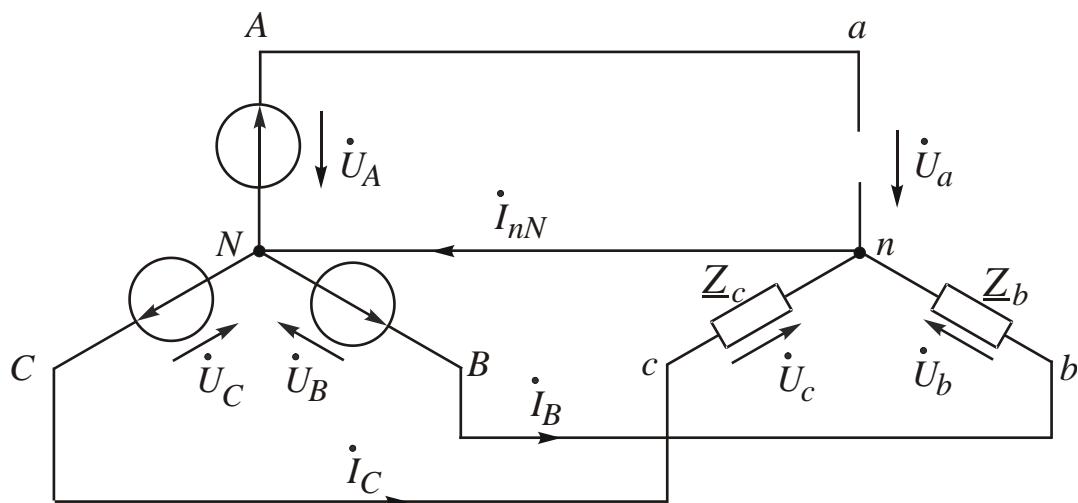


Рис. 4.25

## 2. Обрыв линейного провода

Схема замещения трёхфазной цепи при обрыве линейного провода  $Aa$  изображена на [рис. 4.26](#).

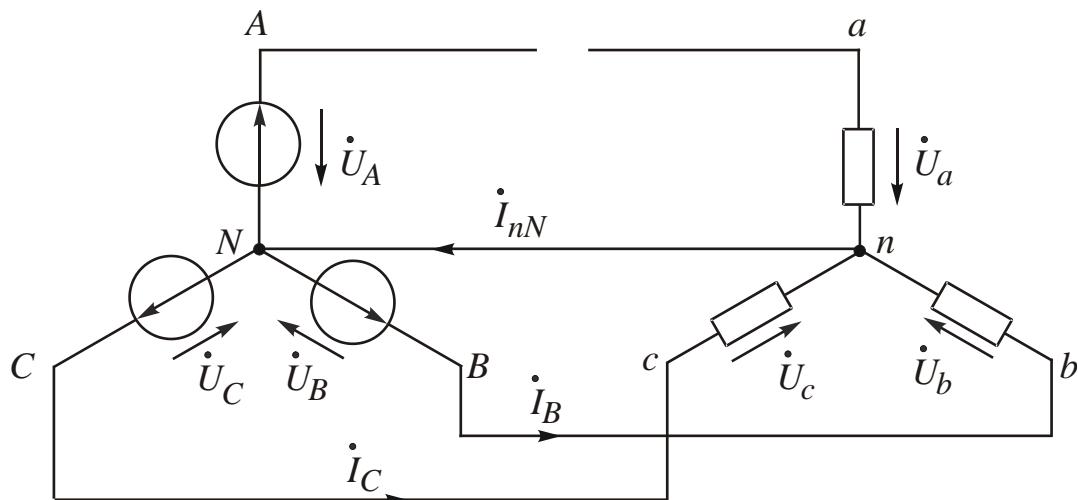


Рис. 4.26

Ток  $I_A = I_a = 0$ , поэтому напряжение на фазе  $a$  приемника  $U_a = Z_a I_a = 0$ . Точки  $b$ ,  $c$ ,  $n$  приемника соединены коротко соответственно с точками  $B$ ,  $C$ ,  $N$  генератора, т. е.  $\dot{U}_b = \dot{U}_B$ ;  $\dot{U}_c = \dot{U}_C$ .

Токи  $\dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$  не изменяются по сравнению с нормальным режимом работы. Ток нейтрального провода равен геометрической сумме токов  $\dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$ :  
 $\dot{I}_{nN} = \dot{I}_B + \dot{I}_C$ .

Топографическая диаграмма приведена на [рис. 4.27](#). Напряжение  $U_a = 0$ , поэтому точка  $a$  на диаграмме совпадает с точкой  $n$ .

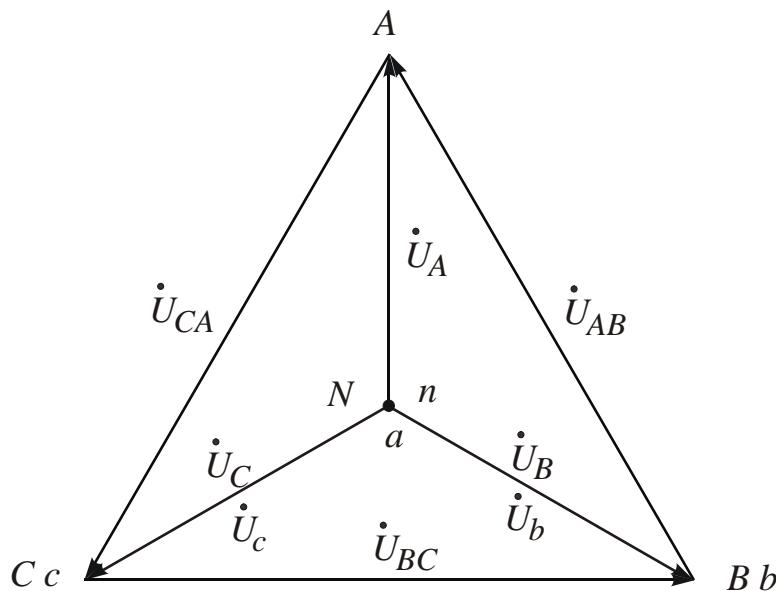


Рис. 4.27

### 3. Короткое замыкание фазы.

Режим короткого замыкания одной из фаз для случая, когда пренебрегают сопротивлением фаз генератора и проводов, является чисто теоретическим. Напряжение закороченной фазы становится равным нулю, напряжения на двух других фазах не изменяются.

На практике при возникновении такой аварийной ситуации срабатывает аппаратура защиты.

#### 4.5.2. Соединение звездой трехпроводной

##### 1. Холостой ход одной из фаз.

Схема замещения цепи при обрыве в фазе  $a$  приемника показана на [рис. 4.28](#).

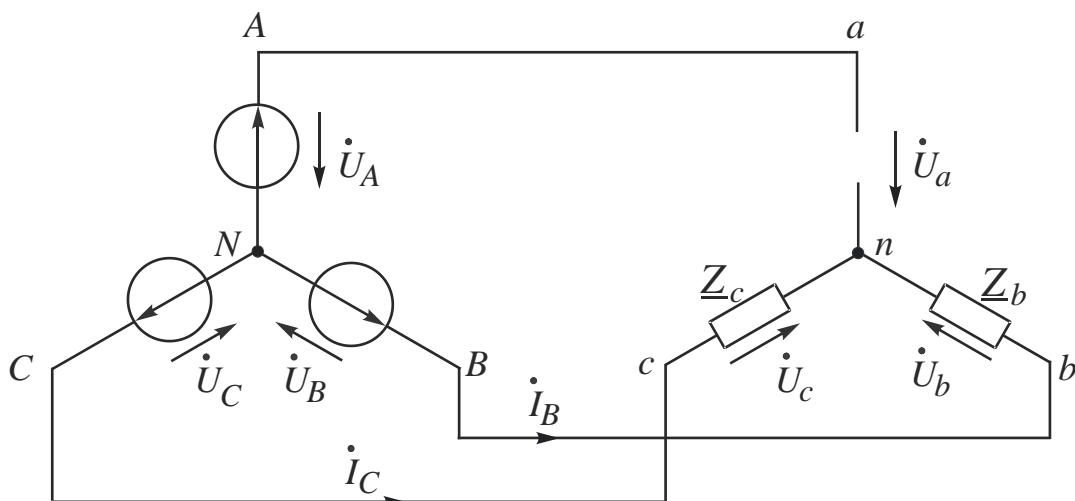


Рис. 4.28

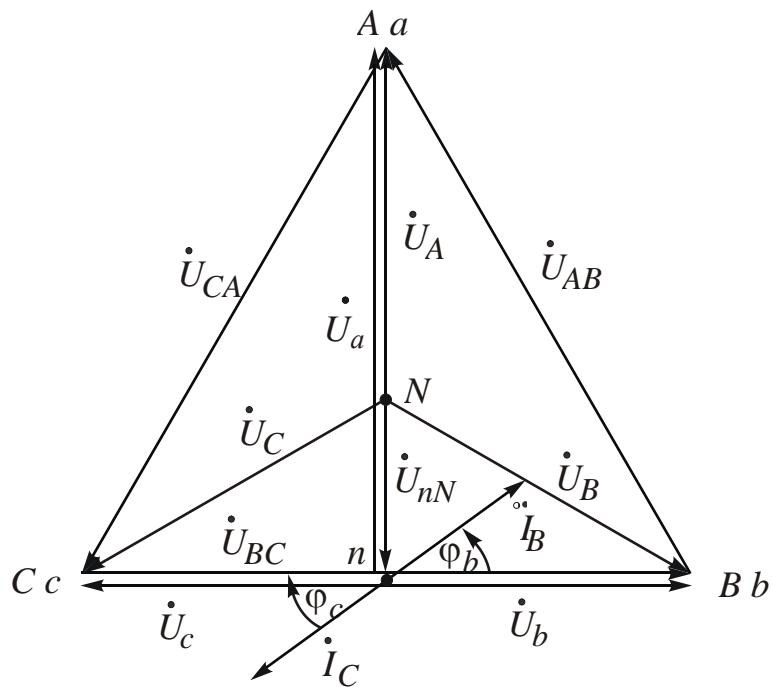


Рис. 4.29

Построение векторно-топографической диаграммы проводим в три этапа, начиная с топографической диаграммы напряжений генератора. Затем строим топографическую диаграмму напряжений приемника. Точки  $a$ ,  $b$ ,  $c$  приемника коротко соединены с точками  $A$ ,  $B$ ,  $C$  генератора, потенциалы их соответственно одинаковы, и эти точки на комплексной плоскости совпадают (рис. 4.29). Нейтральные точки генератора  $N$  и приемника  $n$  не соединены между собой. Так как сопротивление фазы  $a$  становится при обрыве бесконечно большим, приемник является несимметричным, поэтому возникает напряжение смещения нейтрали  $\dot{U}_{nN}$ . Соединение звездой при обрыве одной из фаз превращается в последовательное соединение двух других фаз. В схеме рис. 4.28 фазы  $b$  и  $c$  подключены под линейное напряжение  $U_{BC}$ . Если сопротивления фаз  $b$  и  $c$  одинаковы, напряжение  $U_b = U_c = \frac{U_{BC}}{2}$ , следовательно, точка  $n$  на диаграмме находится в середине вектора  $\dot{U}_{BC}$ . Соединив точки  $n$  и  $N$ , получим вектор напряжения смещения нейтрали  $\dot{U}_{nN}$ . Соединив точки, соответствующие началам и концам фаз приемника, получим векторы фазных напряжений  $\dot{U}_a$ ,  $\dot{U}_b$ ,  $\dot{U}_c$ .

Напряжение на фазе  $a$  возрастает по сравнению с симметричным режимом работы и становится равным  $U_a = \frac{\sqrt{3}}{2} U_A$ . Напряжения на фазах  $b$  и  $c$  находятся в противофазах. Направления векторов токов определяются характером нагрузки. Ток в фазе  $a$  равен нулю. Токи в фазах  $b$  и  $c$  одинаковы по величине. С учётом направлений на схеме рис. 4.28 их можно вычислить по

закону Ома:

$$\dot{I}_B = -\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{BC}}{Z_b + Z_c}.$$

На диаграмме [рис. 4.29](#) векторы токов  $\dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$  построены для случая активно-емкостной нагрузки.

Место нахождения точки  $n$  на топографической диаграмме определяет величину и направление векторов фазных напряжений приемника. При обрыве в фазе  $a$   $Z_a = \infty$ ,  $Y_a = 0$ , поэтому формула напряжения смещения нейтрали приобретает вид:

$$\dot{U}_{nN} = \frac{Y_b \dot{U}_B + Y_c \dot{U}_C}{Y_b + Y_c}.$$

Проще провести анализ с помощью векторно-топографических диаграмм, так как при холостом ходе одной из фаз цепь фактически превращается в последовательное соединение двух других фаз.

Положение точки  $n$  на топографической диаграмме зависит от нагрузки.

1.1. Нагрузка в фазах  $b$  и  $c$  одинакова:  $Z_b = Z_c$ .

Напряжения на фазах  $b$  и  $c$  не зависят от вида нагрузки в фазах и равны половине линейного напряжения.

1.2. Нагрузка в фазах  $b$  и  $c$  однородная ( $\varphi_b = \varphi_c$ ).

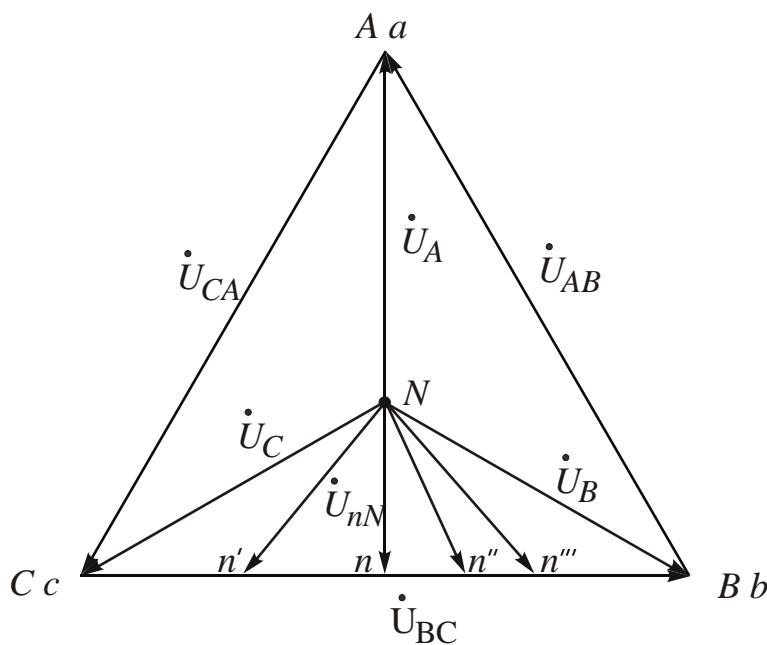


Рис. 4.30

Построение векторно-топографической диаграммы для последовательного соединения фаз  $b$  и  $c$  позволяет сделать вывод, что при любом роде нагрузки в этих фазах годографом вектора напряжения смещения нейтрали является вектор линейного напряжения  $\dot{U}_{BC}$  (рис. 4.30). Нейтральная точка  $n$  делит вектор  $\dot{U}_{BC}$  на отрезки, пропорциональные величинам сопротивлений в фазах  $b$  и  $c$ .

1.3. Нагрузка в фазах  $b$  и  $c$  приемника чисто реактивная и разнородная.

Проведенный анализ показал, что годографом вектора напряжения смещения нейтрали являются прямые, продолжающие вектор  $\dot{U}_{BC}$  влево и вправо (рис. 4.31). Точка  $n$  смещается в сторону фазы с меньшим по модулю сопротивлением.

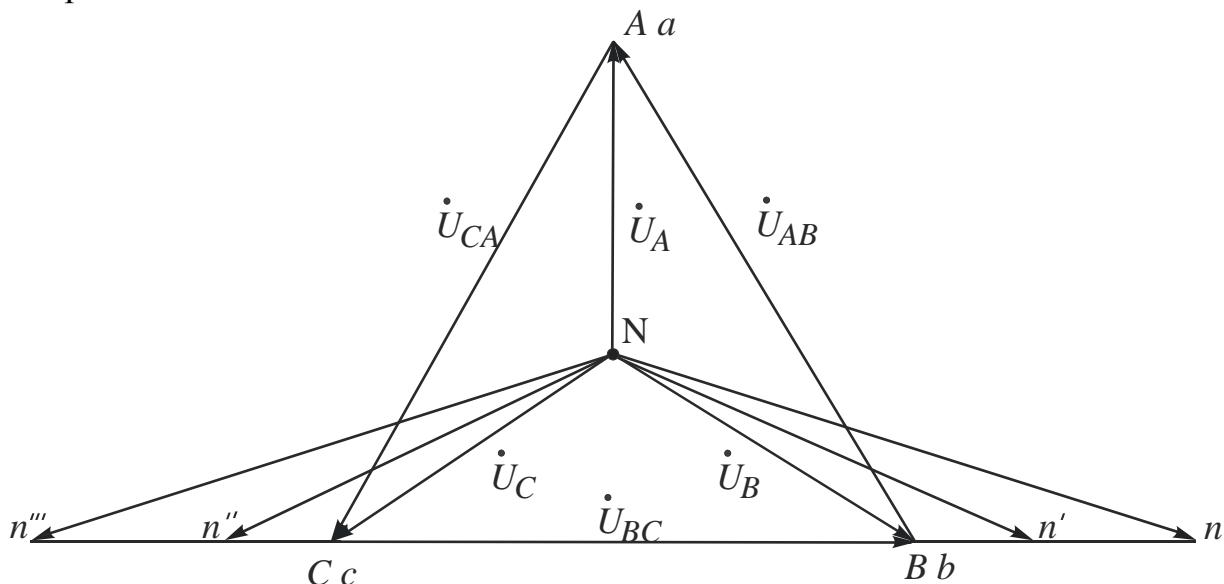


Рис. 4.31

На рис. 4.31 вектор  $\dot{U}_{nN}$  построен для приемника, схема замещения которого приведена на рис. 4.32 ( $X_L > X_C$ ).

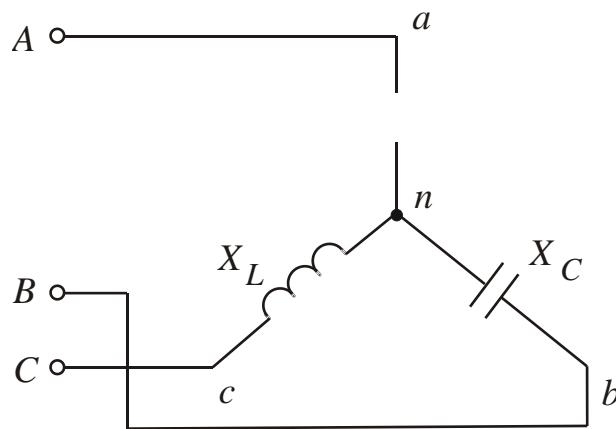


Рис. 4.32

1.4. Нагрузка одной из фаз чисто активная, другой – чисто реактивная. Годографом вектора напряжения смещения нейтрали является полуокружность радиусом  $\frac{U_{\pi}}{2}$  с центром в середине вектора  $U_{BC}$ . Для схем замещения, представленных на рис. 4.33, а и б, эта полуокружность расположена выше вектора напряжения  $\dot{U}_{BC}$ . Топографическая диаграмма изображена на рис. 4.34. В случае, когда  $R = X$ , нейтральная точка приемника  $n$  смещается вертикально вверх. Независимо от величин  $R$  и  $X$  отношение  $\frac{U_{\phi}}{U_{nN}} = 2,732$ , что следует из равенства  $U_{nN} = \frac{U_{\pi}}{2} - \frac{U_{\phi}}{2}$  (рис. 4.34).

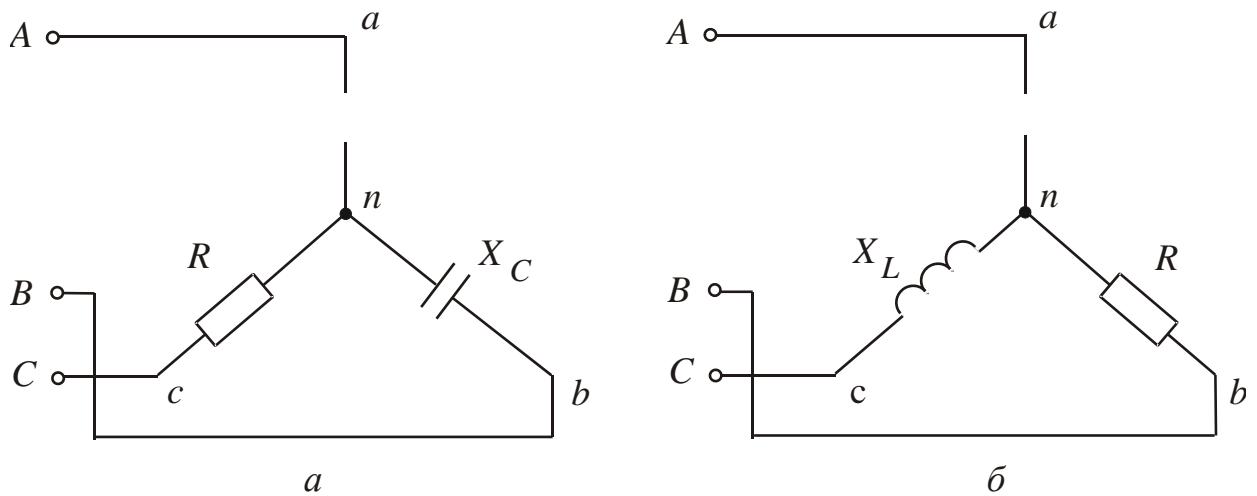


Рис. 4.33

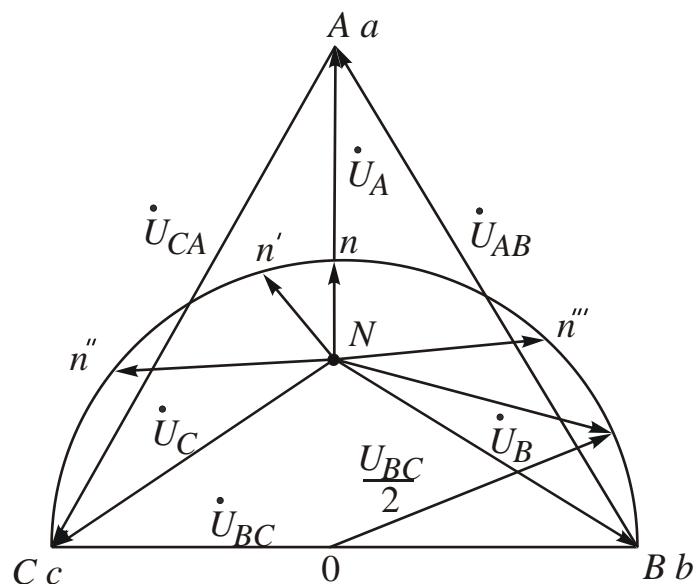


Рис. 4.34

Для схем замещения, представленных на [рис. 4.35, а и б](#), полуокружность расположена ниже вектора напряжения  $\dot{U}_{BC}$ .

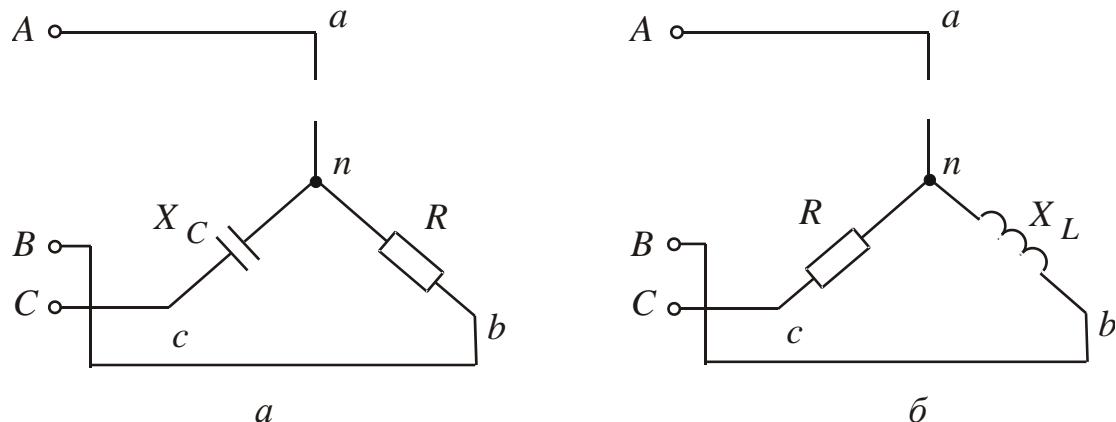


Рис. 4.35

Топографическая диаграмма изображена на [рис. 4.36](#).

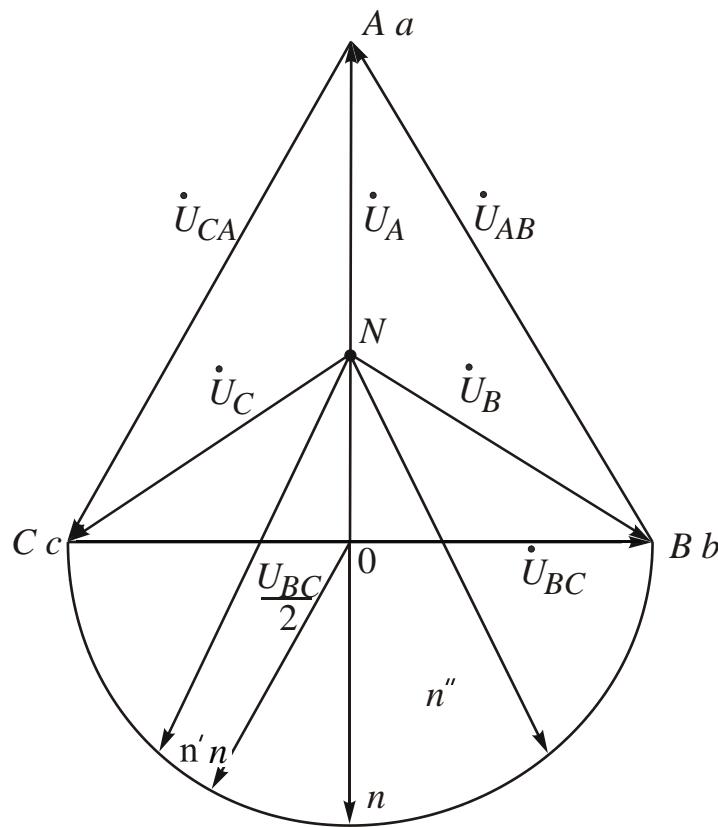


Рис. 4.36

При  $R = X$  точка  $n$  смещается вертикально вниз. Независимо от величин  $R$  и  $X$  отношение  $\frac{U_\phi}{U_{nN}} = 0,732$ , так как в этом случае  $U_{nN} = \frac{U_n}{2} + \frac{U_\phi}{2}$ .

1.5. Если приемник несимметричный и нагрузка в фазах  $b$  и  $c$  смешанного характера, причем род реактивной нагрузки различный, то прослеживаются следующие закономерности.

В случае, когда нагрузка в фазе  $b$  активно-индуктивная, а в фазе  $c$  – активно-емкостная, при любом соотношении параметров нейтральная точка  $n$  смещается ниже вектора напряжения  $\dot{U}_{BC}$ . В случае, когда нагрузка в фазе  $b$  активно-емкостная, а в фазе  $c$  – активно-индуктивная, при любом соотношении параметров точка  $n$  смещается выше вектора напряжения  $\dot{U}_{BC}$ .

## 2. Обрыв линейного провода.

Схема замещения цепи при обрыве линейного провода  $Aa$  приведена на [рис. 4.37](#).

Ток  $I_A = I_a = 0$ , поэтому напряжение на фазе  $a$  приемника  $U_a = Z_a I_a = 0$ . Потенциалы точек  $a$  и  $n$  одинаковы. Схема на [рис. 4.37](#) представляет собой последовательное соединение фаз  $b$  и  $c$ , подключенных под напряжением  $U_{BC}$ .

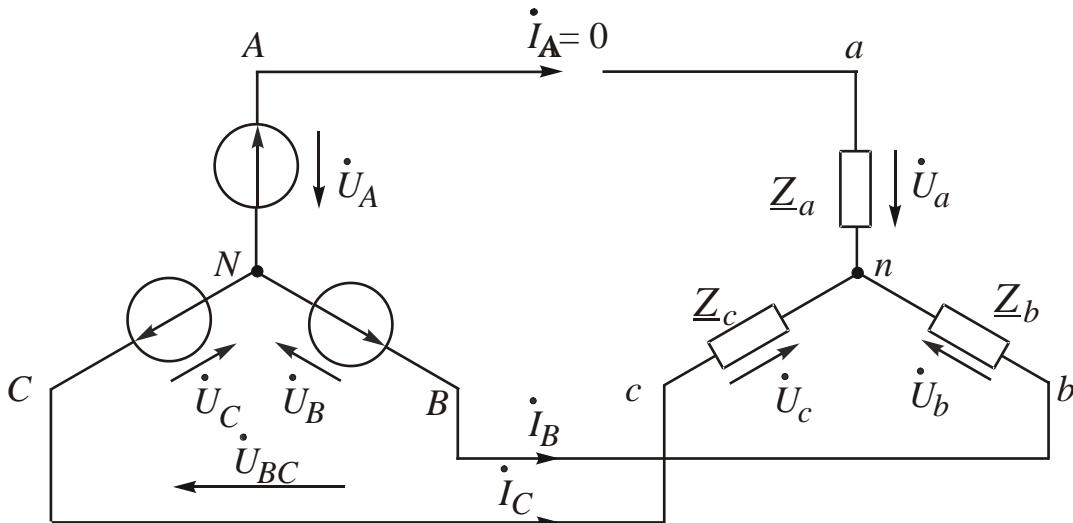


Рис. 4.37

Положение точки  $n$  на топографической диаграмме зависит от нагрузки так же, как и при обрыве в фазе. Расчет токов не отличается от рассмотренного при режиме холостого хода фазы.

При обрыве в фазе приемника напряжение на ней возрастает по сравнению с нормальным режимом работы, при обрыве в линии – становится равным нулю. Это дает возможность определить место аварии при отсутствии тока в фазе.

Векторно-топографическая диаграмма для случая, когда сопротивления фаз  $b$  и  $c$  одинаковы и имеют активно-емкостный характер, показана на [рис. 4.38](#).

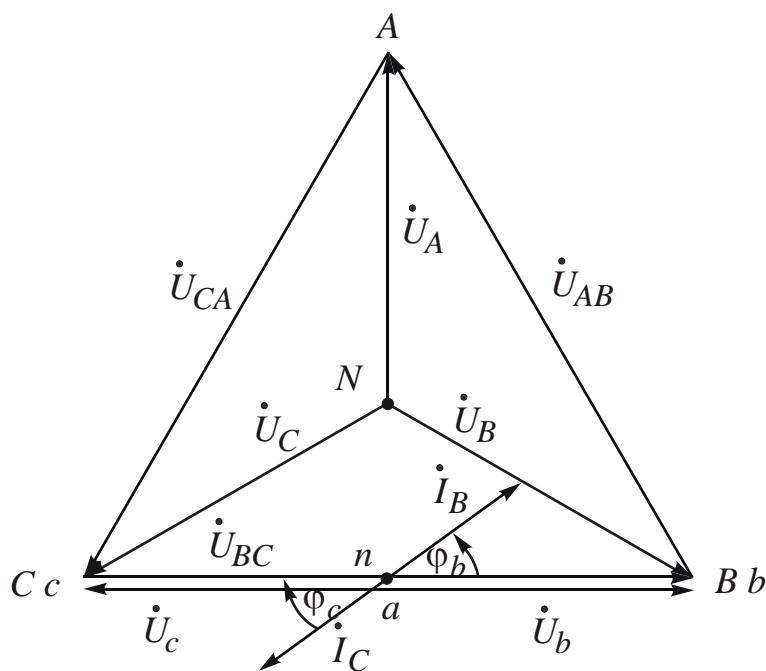


Рис. 4.38

3. Короткое замыкание одной из фаз.

Схема замещения цепи при коротком замыкании фазы  $a$  изображена на [рис. 4.39](#).

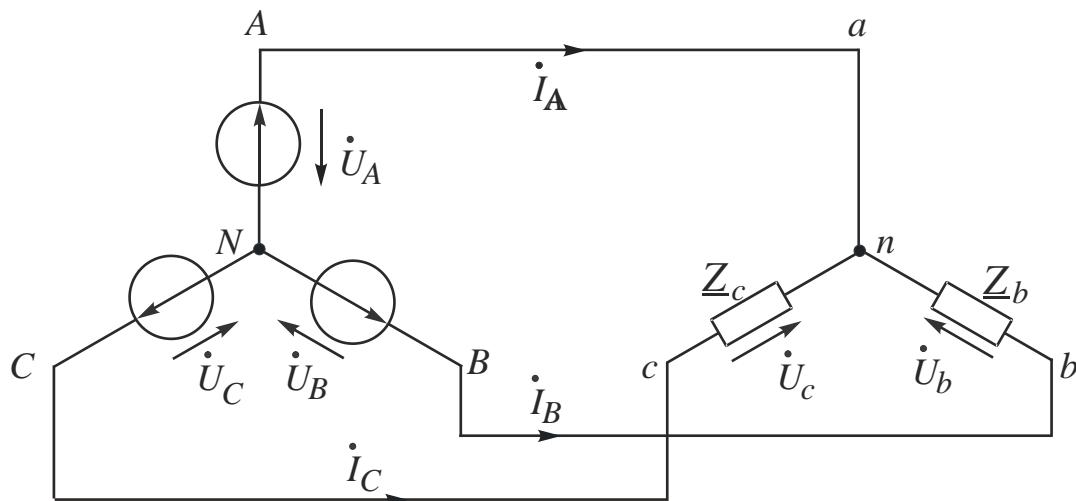


Рис. 4.39

Сопротивление фазы  $a$   $Z_a = 0$ , поэтому напряжение  $U_a = Z_a I_a = 0$ . Построение топографической диаграммы (рис. 4.40) проведем в два этапа. Начнем с построения топографической диаграммы напряжений генератора. Потенциалы точек  $a$  и  $A$ ,  $b$  и  $B$ ,  $c$  и  $C$  (см. рис. 4.39) одинаковы, поэтому эти точки на диаграмме совпадают. Приемник несимметричный, поэтому между нейтральными точками генератора и приемника возникает напряжение. Точка  $n$  на диаграмме смещается относительно точки  $N$ . Так как точки  $a$  и  $n$  кратко соединены между собой, потенциалы их одинаковы и точка  $n$  на диаграмме совпадает с точкой  $a$ . Чтобы построить векторы напряжений на фазах приемника  $b$  и  $c$ , нужно соединить точки, соответствующие началам и концам фаз. Напряжение  $\dot{U}_{nN} = \dot{U}_A$ .

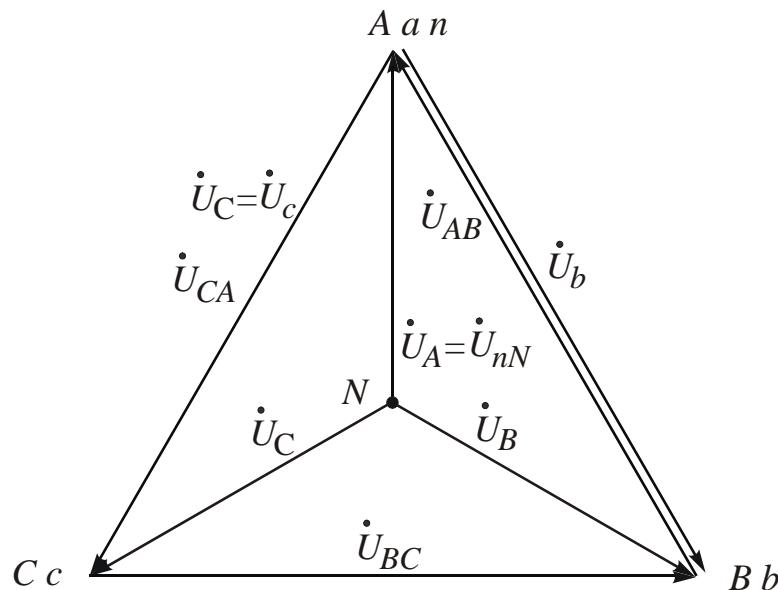


Рис. 4.40

Из диаграммы видим, что напряжения на фазах  $b$  и  $c$  возрастают и становятся равными по величине линейным.

Токи  $I_B$  и  $I_C$  вычисляем по закону Ома:

$$\dot{I}_B = \dot{I}_b = \frac{\dot{U}_b}{Z_b} = \frac{-\dot{U}_{AB}}{Z_b};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_c = \frac{\dot{U}_c}{Z_c} = \frac{\dot{U}_{CA}}{Z_c}.$$

Сопротивления в фазах  $b$  и  $c$  не изменяются по сравнению с нормальным режимом работы, поэтому эти токи по величине изменяются так же, как напряжения, т. е. увеличиваются в  $\sqrt{3}$  раз.

Ток  $\dot{I}_A$  вычисляют, пользуясь первым законом Кирхгофа:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0.$$

Отсюда  $\dot{I}_A = -(\dot{I}_B + \dot{I}_C)$ .

Направления векторов токов  $\dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$  зависят от нагрузки в этих фазах.

#### 4.5.3. Соединение треугольником

1. Режим холостого хода одной фазы.

Схема замещения трехфазной цепи при обрыве в фазе  $ab$  изображена на [рис. 4.41](#).

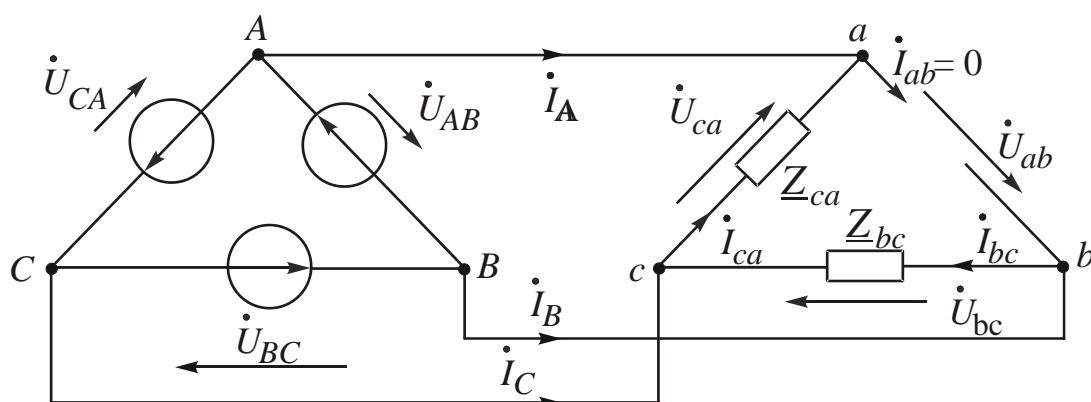


Рис. 4.41

Ток  $\dot{I}_{ab} = 0$ . Точки  $a$ ,  $b$  и  $c$  приемника коротко соединены с точками  $A$ ,  $B$  и  $C$  генератора, поэтому их потенциалы при обрыве фазы не изменяются. Следовательно, напряжения на фазах приемника тоже не меняются по сравнению с нормальным режимом работы. Сохраняют свои значения и токи двух других фаз:

$$\dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{bc}}{Z_{bc}}; \quad \dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{ca}}{Z_{ca}}.$$

Линейные токи  $I_A$  и  $I_B$ , как видно из [рис. 4.41](#), становятся равными по величине соответственно фазным токам  $I_{ca}$  и  $I_{bc}$ . С учетом указанных на схеме направлений токов можно записать:  $\dot{I}_A = -\dot{I}_{ca}$ ;  $\dot{I}_B = \dot{I}_{bc}$ . Ток  $\dot{I}_C$  вычисляют по первому закону Кирхгофа:  $\dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}$ .

На [рис. 4.42](#) приведены топографическая диаграмма напряжений и векторная диаграмма токов для приемника, у которого нагрузка фазы  $bc$  имеет активно-емкостный характер, фазы  $ca$  – активный.

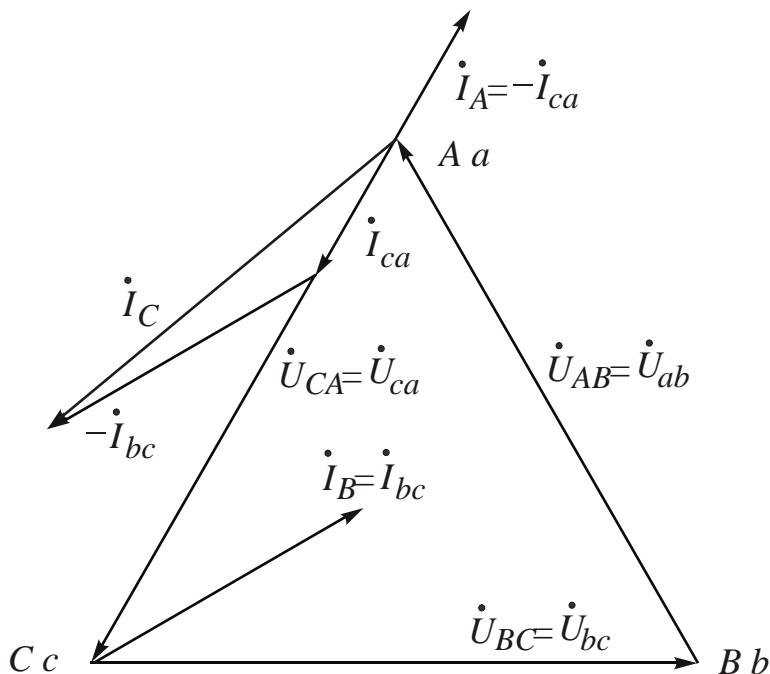


Рис. 4.42

## 2. Обрыв линейного провода.

Схема замещения трехфазной цепи при обрыве линейного провода  $Aa$  изображена на [рис. 4.43](#).

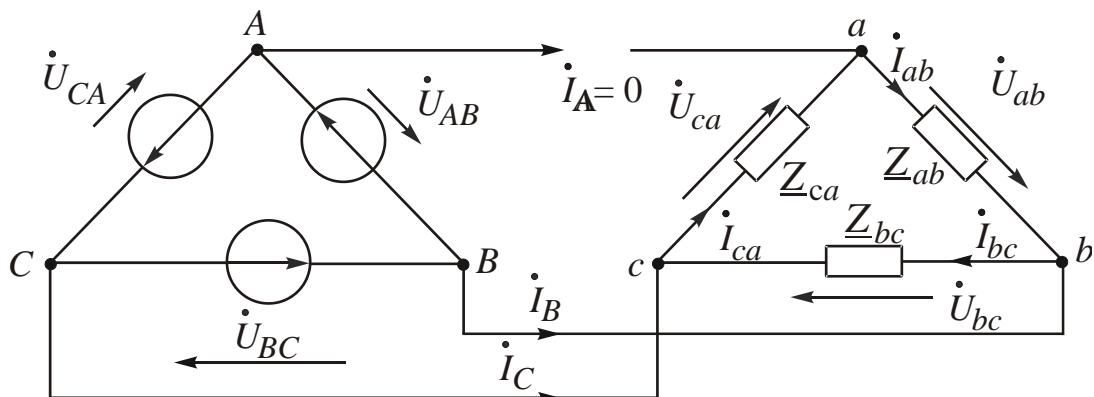


Рис. 4.43

Соединение фаз приемника треугольником при обрыве линейного провода превращается в смешанное. Фазы  $ab$  и  $ca$  соединены между собой по-

следовательно в ветви, концы которой подключены к точкам  $b$  и  $c$ . Фаза  $bc$  соединена с этой ветвью параллельно.

Токи  $\dot{I}_{ab}$  и  $\dot{I}_{ca}$  равны между собой. Их вычисляют по закону Ома:

$$\dot{I}_{ab} = \dot{I}_{ca} = -\frac{\dot{U}_{bc}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{ca}}.$$

Напряжения на фазах  $ab$  и  $ca$  распределяются пропорционально их сопротивлениям:  $\dot{U}_{ab} = \underline{Z}_{ab} \dot{I}_{ab}$ ;  $\dot{U}_{ca} = \underline{Z}_{ca} \dot{I}_{ca}$ .

Ток фазы  $bc$  не меняется по сравнению с нормальным режимом:

$$\dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}}.$$

Токи  $\dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$  равны между собой по величине. Они могут быть вычислены по первому закону Кирхгофа:  $\dot{I}_B = -\dot{I}_C = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}$ .

Линейные токи можно определить графически с помощью векторнотопографической диаграммы, построение которой проводят так же, как и для однофазной цепи со смешанным соединением приемников.

### 3. Короткое замыкание фазы.

Режим короткого замыкания одной из фаз для случая, когда пренебрегают сопротивлением фаз генератора и проводов, является чисто теоретическим.

Напряжение на закороченной фазе становится равным нулю, напряжения на двух других фазах не изменяются.

На практике при возникновении такой аварийной ситуации срабатывает аппаратура защиты.

Из анализа аварийных режимов трехфазной электрической цепи можно сделать вывод, что независимость работы каждой фазы приемника при соединении треугольником обеспечивается самой схемой, а при соединении звездой – наличием нейтрального провода, не обладающего сопротивлением.

При соединении звездой трехпроводной при нарушении симметрии нагрузки фазы приемника зависят от режима работы каждой фазы. Поэтому такое соединение применяют при симметричных приемниках (асинхронные двигатели).

## 4.6. Мощности трехфазных цепей

В трехфазных цепях различают те же мощности, что и в однофазных: мгновенную  $p$ , активную  $P$ , реактивную  $Q$  и полную  $S$ .



Мощности  $p$ ,  $P$  и  $Q$  находят как суммы мощностей трех фаз:  $p = \sum p_\phi$ ;  $P = \sum P_\phi$ ;  $Q = \sum Q_\phi$ .

Мощности каждой фазы вычисляют по известным формулам.

Потребляемой является активная мощность. Активную мощность фазы проще всего определить по формуле  $D_\phi = U_\phi I_\phi \cos \varphi_\phi$  или  $P_\phi = R_\phi I_\phi^2$ .

Реактивную мощность фазы ищут следующим образом:

$$Q_\phi = U_\phi I_\phi \sin \varphi_\phi, \text{ или } Q_\phi = X_\phi I_\phi^2.$$

Полную мощность трехфазной цепи вычисляют как гипotenузу суммарного треугольника мощностей:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{(\sum P_\phi)^2 + (\sum Q_\phi)^2}.$$

При симметричной нагрузке мощности фаз одинаковы, поэтому

$$P = 3P_\phi = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi_\phi; Q = 3Q_\phi = 3U_\phi I_\phi \sin \varphi_\phi.$$

При соединении звездой  $U_\phi = \frac{U_\text{л}}{\sqrt{3}}$  и  $I_\phi = I_\text{л}$ , а при соединении треугольником  $U_\phi = U_\text{л}$  и  $I_\phi = \frac{I_\text{л}}{\sqrt{3}}$ . Поэтому независимо от схемы соединения фаз приемника можно получить одинаковые формулы мощностей, вычисленных через линейные напряжения и токи:

$$P = \sqrt{3}U_\text{л}I_\text{л}\cos\varphi_\phi; Q = \sqrt{3}U_\text{л}I_\text{л}\sin\varphi_\phi; S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3}U_\text{л}I_\text{л}.$$

Для измерения активной мощности используют ваттметры. Число ваттметров и способ их включения зависят от способа соединения фаз приемника и от их параметров.

Ваттметр показывает активную мощность, которую вычисляют по формуле

$$P_W = U_W \cdot I_W \cos(\dot{U}_W \wedge \dot{I}_W) \text{ или } P_W = \operatorname{Re}(S_W) = \operatorname{Re}\left(\dot{U}_W \cdot \overset{*}{I}_W\right),$$

где  $U_W$  и  $I_W$  – действующие значения напряжения на ваттметре и тока в нем.

Угол сдвига фаз между ними соответствует одинаковым положительным направлениям  $\dot{U}_W$  и  $\dot{I}_W$  относительно зажимов, отмеченных звездочками.



Количество и способ включения ваттметров зависят от нагрузки и характеристики цепи.

### 1. Способ одного ваттметра.

Применяют при симметричной нагрузке. Ваттметр подключают таким образом, чтобы он измерял фазные напряжение и ток (рис. 4.44, а и б). Чтобы найти потребляемую трехфазным приемником мощность, показание ваттметра утраивают.

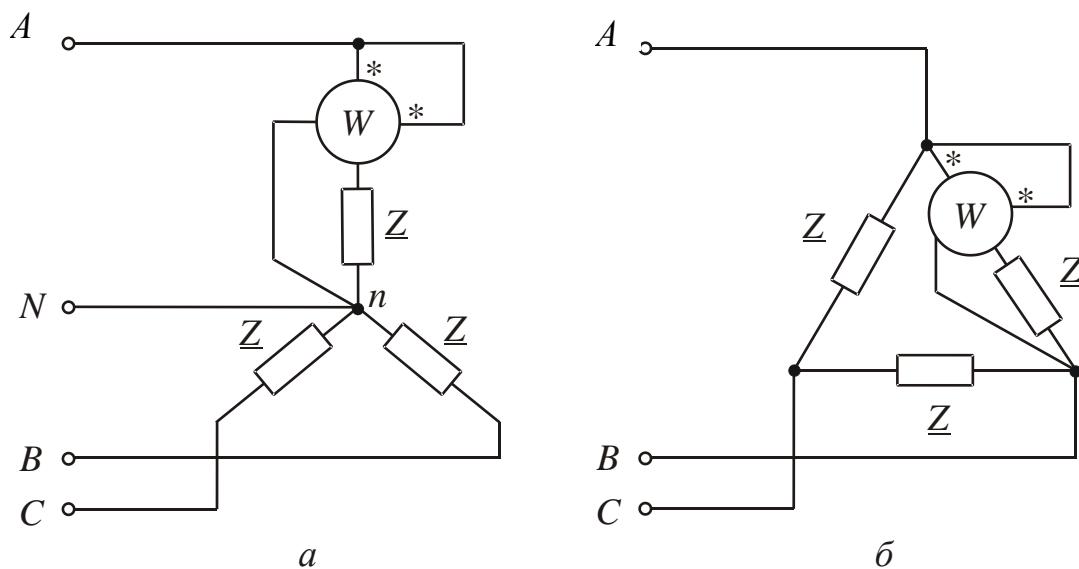


Рис. 4.44

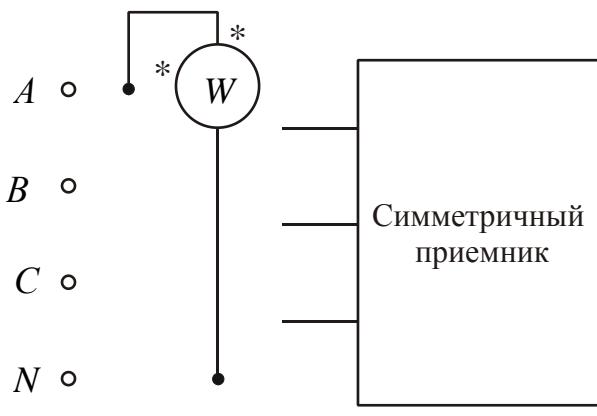


Рис. 4.45

Часто фаза приемника недоступна. В четырехпроводной цепи ваттметр можно подключить так, как показано на рис. 4.45, потому что линейные и фазные токи соответственно одинаковы.

В трехпроводной цепи можно создать искусственную нейтральную точку (рис. 4.46). Добавочное сопротивление  $R_a$  должно быть равно сопротивлению обмотки напряжения ваттметра (порядка нескольких кОм).

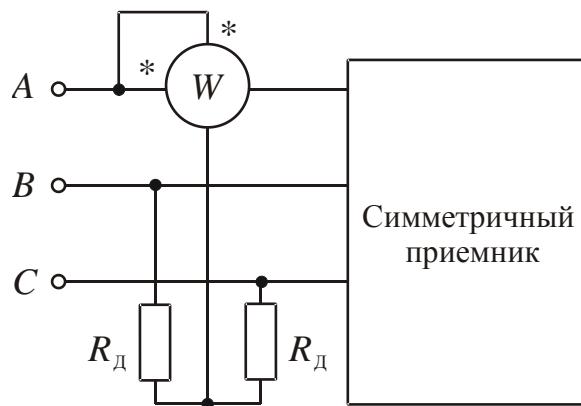


Рис. 4.46

## 2. Способ двух ваттметров.

Применяют в трехпроводной цепи при несимметричной нагрузке. Схема подключения ваттметров показана на [рис. 4.47](#). Сумма показаний ваттметров равна потребляемой цепью мощности. Проще это можно доказать для комплексной мощности. Активная мощность является действительной составляющей комплексной мощности.

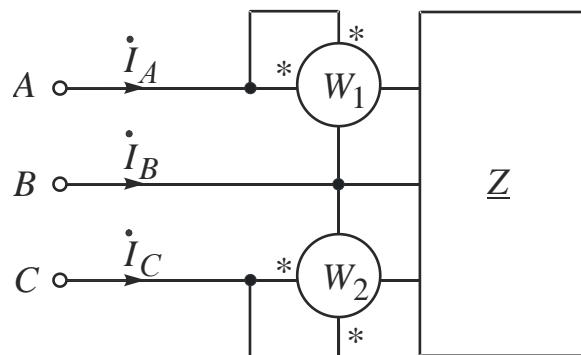


Рис. 4.47

## Комплексная мощность

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{S}_{W_1} + \underline{S}_{W_2} = \dot{U}_{AB}^* \cdot I_A + \dot{U}_{CB}^* \cdot I_C = (\dot{U}_A - \dot{U}_B)^* I_A + (\dot{U}_C - \dot{U}_B)^* I_C = \\ &= \dot{U}_A^* I_A + \dot{U}_B^* \left( -I_A - I_C \right) + \dot{U}_C^* I_C. \end{aligned}$$

По первому закону Кирхгофа  $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$ , следовательно,  
 $\dot{I}_A^* + \dot{I}_B^* + \dot{I}_C^* = 0$ .

$$\text{Отсюда } \dot{I}_B^* = -\dot{I}_A^* - \dot{I}_C^*.$$

$$\text{Тогда } \underline{S} = \underline{S}_{W_1} + \underline{S}_{W_2} = \dot{U}_A^* \cdot I_A + \dot{U}_B^* \cdot \dot{I}_B^* + \dot{U}_C^* \cdot I_C = \underline{S}_A + \underline{S}_B + \underline{S}_C.$$



Этот метод наиболее распространен на практике.

### 3. Способ трех ваттметров.

Применяют в четырехпроводной цепи при несимметричной нагрузке. Каждый ваттметр измеряет активную мощность одной фазы (см. [рис. 4.44, а и б](#)). Мощность системы определяют как сумму показаний ваттметров. Метод громоздкий и неудобный.

### 4. Измерение трехфазным ваттметром.

Представляет собой конструктивное сочетание трех однофазных ваттметров. Суммирование их показаний происходит автоматически.

### 5. Применение измерительных комплексов.

Представляется наиболее удобным. Измерительные комплексы снабжены амперметром, вольтметром и ваттметром. При переключении тумблера происходит подключение измерительных приборов на разные фазы.

## 4.7. Указатели последовательности чередования фаз (фазоуказатели)

Фазоуказателем называют трехфазный приемник, включенный по схеме звезда трехпроводная и имеющий в одной из фаз емкостную или индуктивную нагрузку, а в двух других фазах – равные ей по сопротивлению лампы накаливания или резисторы. При использовании ламп опыт получается более наглядным.

Сначала рассмотрим эти приемники при соединении звездой четырехпроводной ([рис. 4.48, а и б](#)).

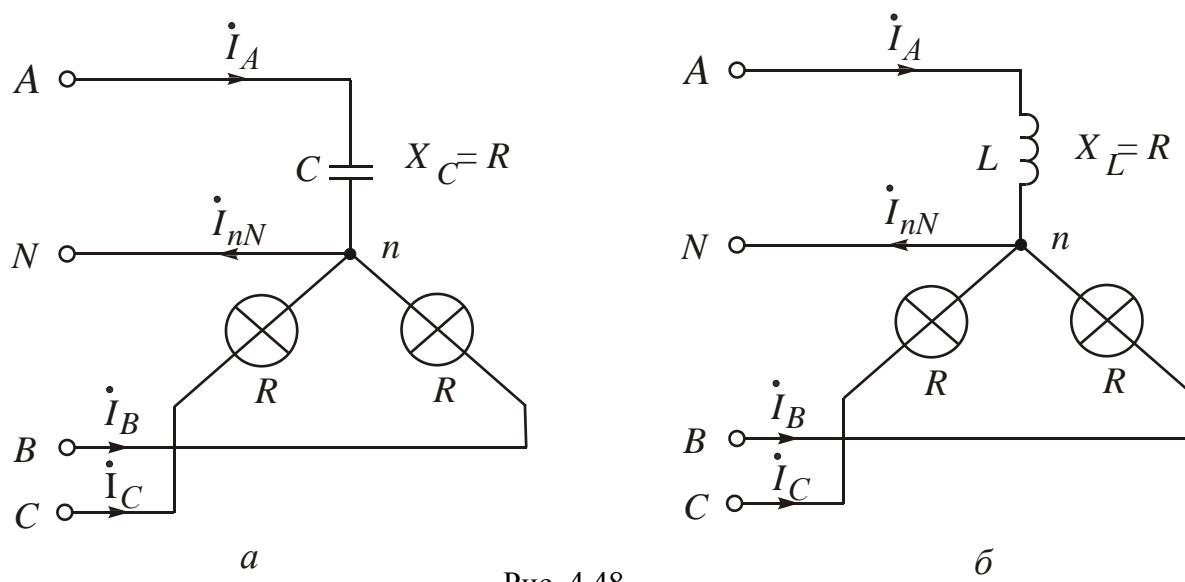


Рис. 4.48

Векторно-топографические диаграммы для этих приемников представлены соответственно на [рис. 4.49, а и б](#). Благодаря наличию нейтрального провода, сопротивлением которого можно пренебречь, топографические диа-

грамммы генератора и приемника совпадают. Векторные диаграммы токов определяются характером нагрузки.

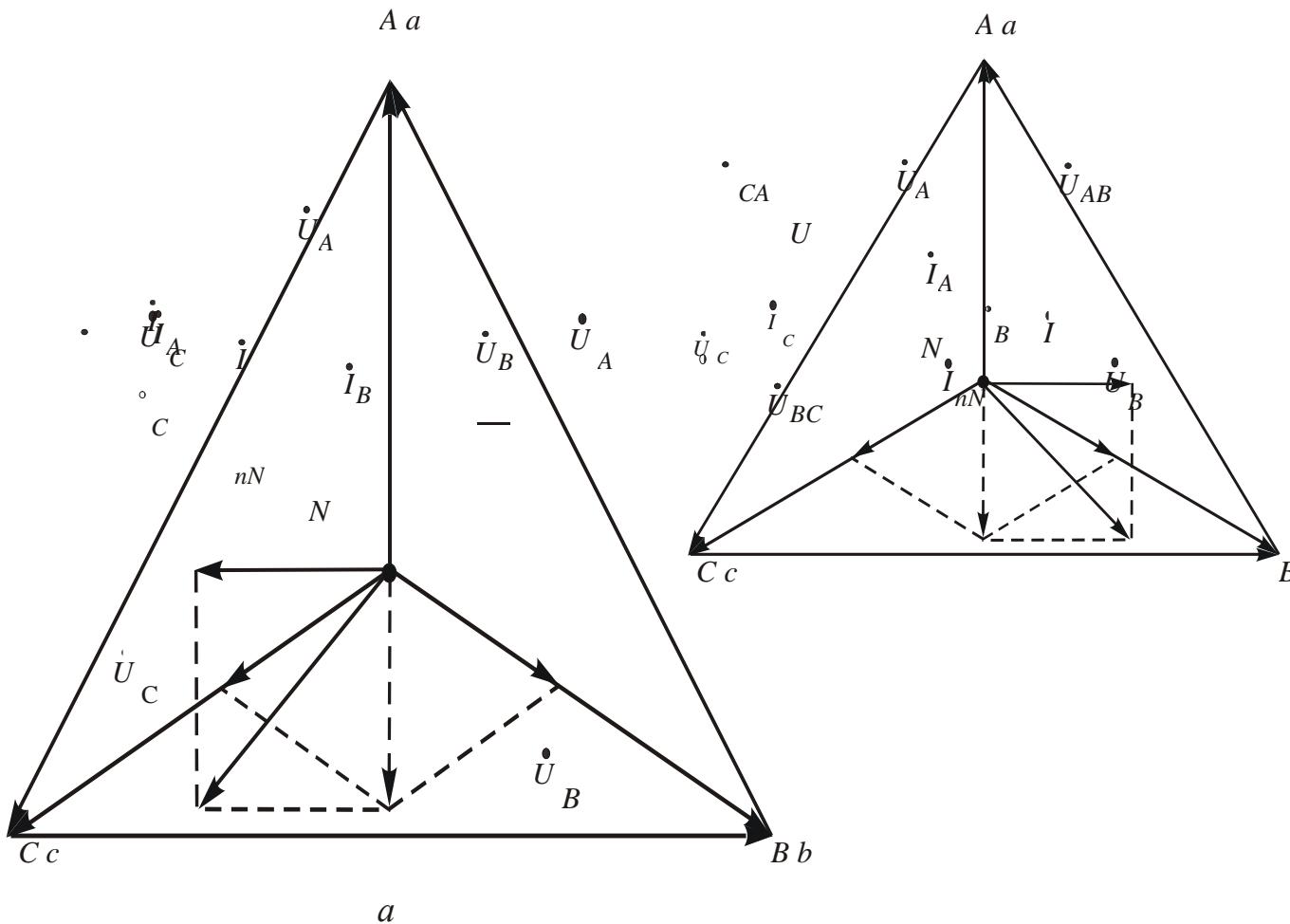


Рис. 4.49

Фазоуказатели получим, убрав нейтральный провод ([рис. 4.50, а и б](#)).

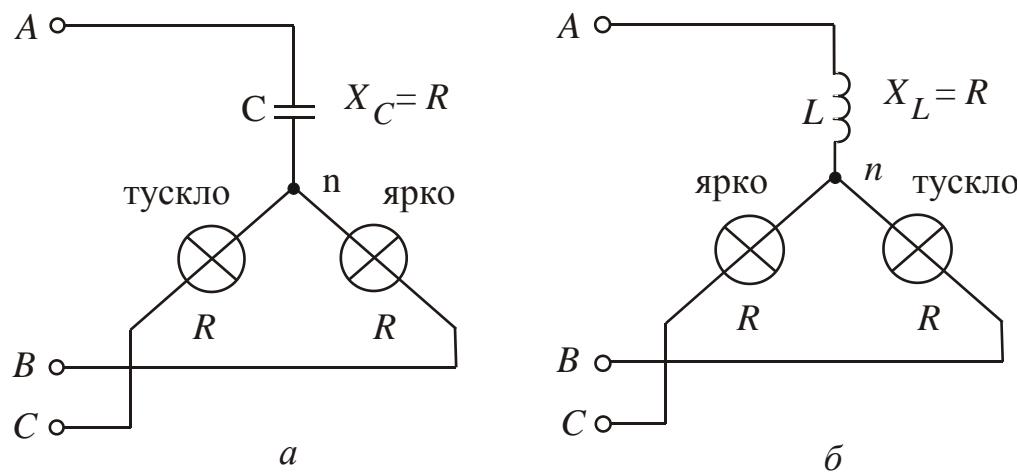


Рис. 4.50



Так как приемники несимметричные, возникает напряжение смещения нейтрали  $\dot{U}_{nN}$ . Анализ показывает, что при отсутствии нейтрального провода нейтральная точка приемника  $n$  смещается по направлению вектора тока  $\dot{I}_{nN}$  в четырехпроводной цепи.

Топографические диаграммы фазоуказателей (рис. 4.50, а и б) представлены соответственно на рис. 4.51, а и б. Напряжения на фазах приемника  $\dot{U}_b$  и  $\dot{U}_c$  изменяются по сравнению с фазными напряжениями генератора  $\dot{U}_B$  и  $\dot{U}_C$ , поэтому лампы будут гореть по-разному.

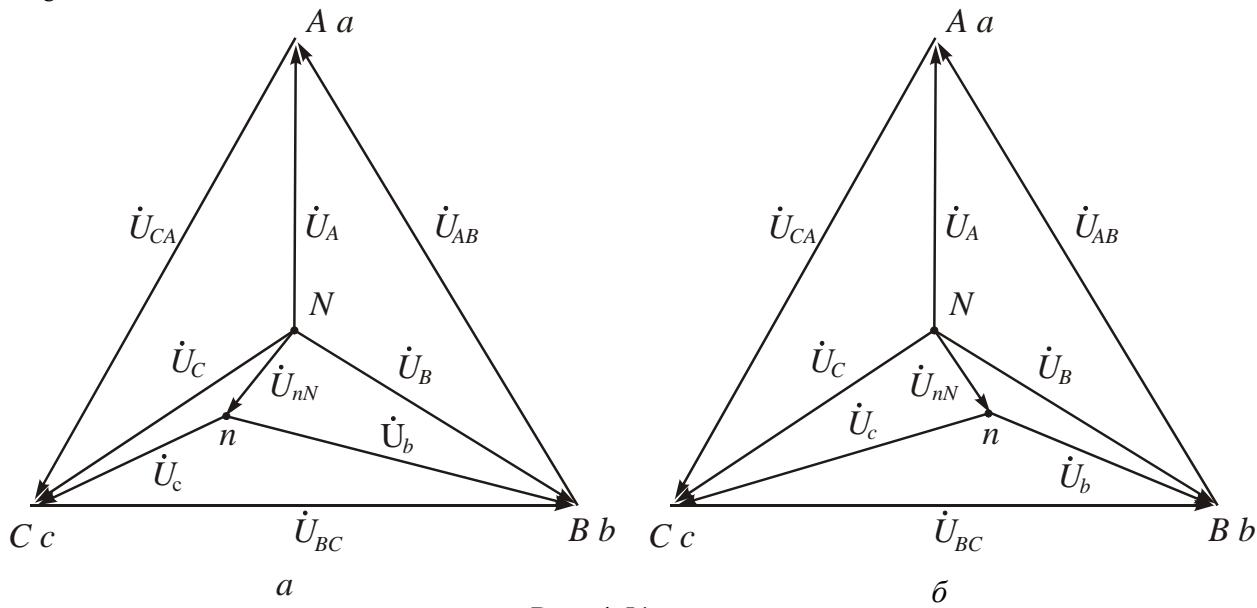


Рис. 4.51

У фазоуказателя на рис. 4.50, а ярко светит лампа, напряжение на которой отстает по фазе от напряжения на конденсаторе.

У фазоуказателя на рис. 4.50, б ярко светит лампа, напряжение на которой опережает по фазе напряжение на индуктивной катушке.

## 4.8. Расчет цепей с несимметричной системой ЭДС

### 4.8.1. Расчет при статической нагрузке

При статической нагрузке (отсутствии электродвигателей) расчет ничего принципиально нового не содержит.

Потребителю доступны для измерения линейные напряжения. Однако известные из предыдущей темы соотношения между линейными и фазными напряжениями генератора не выполняются.

Если фазы приемника соединены треугольником, алгоритм расчета тот же, что и при действии симметричной системы ЭДС.

При соединении фаз приемника звездой метод напряжения между двумя узлами не пригоден, если фазные напряжения генератора не заданы. При расчете нужно использовать законы Ома и Кирхгофа.

*Пример.* Вычислить токи в цепи с несимметричным приемником (рис. 4.52), если заданы линейные напряжения  $\dot{U}_{AB}$ ;  $\dot{U}_{BC} \neq a^2 \dot{U}_{AB}$ ;  $\dot{U}_{CA} \neq a \dot{U}_{AB}$  и сопротивления  $\underline{Z}_a \neq \underline{Z}_b \neq \underline{Z}_c$ .

По первому закону Кирхгофа

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0.$$

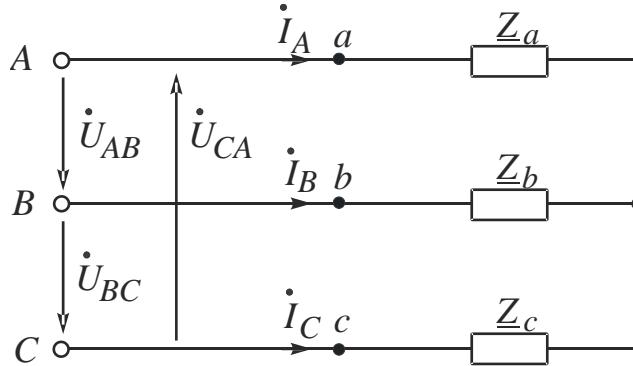


Рис. 4.52

По закону Ома

$$\dot{I}_A = \dot{I}_a = \underline{Y}_a \dot{U}_a; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_b = \underline{Y}_b \dot{U}_b; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_c = \underline{Y}_c \dot{U}_c.$$

Подставив эти выражения в уравнение по первому закону Кирхгофа, получим:

$$\underline{Y}_a \dot{U}_a + \underline{Y}_b \dot{U}_b + \underline{Y}_c \dot{U}_c = 0. \quad (4.1)$$

В этом уравнении три неизвестные величины.

Линейные напряжения равны геометрической разности фазных напряжений:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_{ab} = \dot{U}_a - \dot{U}_b;$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_{bc} = \dot{U}_b - \dot{U}_c;$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_{ca} = \dot{U}_c - \dot{U}_a.$$

Выразим из этих уравнений напряжения  $\dot{U}_b$  и  $\dot{U}_c$ :

$$\dot{U}_b = -\dot{U}_{AB} + \dot{U}_a; \quad \dot{U}_c = \dot{U}_{CA} + \dot{U}_a.$$

Подставив эти выражения в уравнение (4.1), получим:

## ГЛАВА 4. ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

### 4.8. Расчет цепей с несимметричной системой ЭДС

$$\underline{Y}_a \dot{U}_a + \underline{Y}_b (\dot{U}_a - \dot{U}_{AB}) + \underline{Y}_c (\dot{U}_{CA} + \dot{U}_a) = 0.$$

Отсюда

$$\dot{U}_a = \frac{\underline{Y}_b \dot{U}_{AB} - \underline{Y}_c \dot{U}_{CA}}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}.$$

Остальные формулы можно получить круговой заменой индексов:

$$\dot{U}_b = \frac{\underline{Y}_c \dot{U}_{BC} - \underline{Y}_a \dot{U}_{AB}}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c};$$

$$\dot{U}_c = \frac{\underline{Y}_a \dot{U}_{CA} - \underline{Y}_b \dot{U}_{BC}}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}.$$

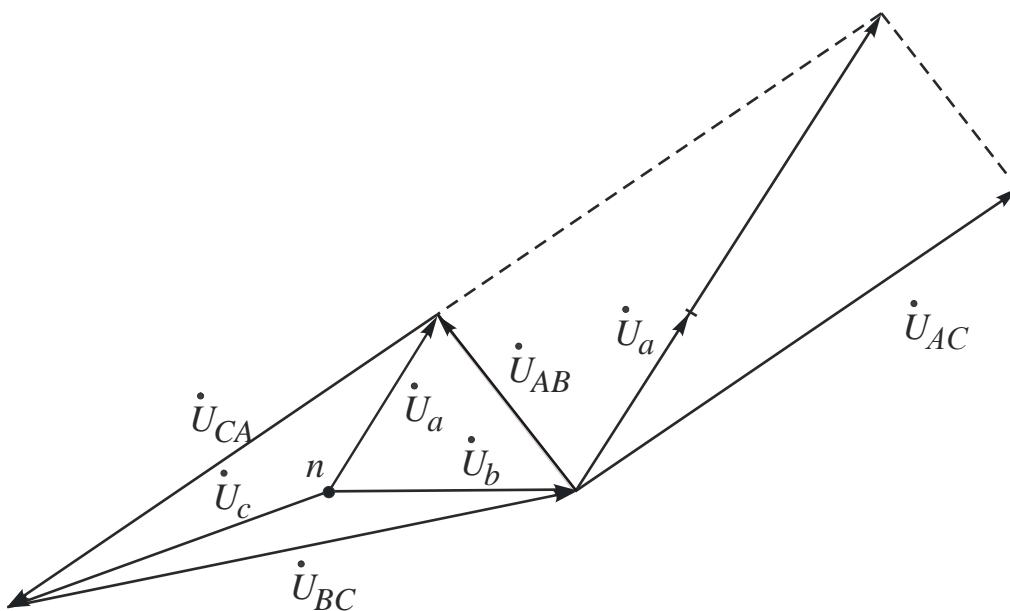


Рис. 4.53

Таким способом можно пользоваться и при симметричной системе ЭДС.

Если приемник симметричный,

$$\dot{U}_a = \frac{\underline{Y}(\dot{U}_{AB} - \dot{U}_{CA})}{3\underline{Y}} = \frac{1}{3}(\dot{U}_{AB} - \dot{U}_{CA}) = \frac{1}{3}(\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{AC}).$$

Следовательно, фазное напряжение симметричного приемника  $\dot{U}_a$  равно одной трети диагонали параллелограмма, построенного на векторах соответствующих линейных напряжений, а точка  $n$  будет находиться в цен-



трех тяжести треугольника линейных напряжений ([рис. 4.53](#)).

#### 4.8.2. Расчет цепей при динамической нагрузке

Для расчета цепей, содержащих трехфазные электродвигатели, используют метод симметричных составляющих.

##### 4.8.2.1. Основные понятия

Метод основан на представлении любой многофазной несимметричной системы в виде суммы симметричных систем величин, число которых равно числу фаз. Эти симметричные системы называют симметричными составляющими. Они отличаются друг от друга порядком чередования фаз. В симметричных системах величины равны по модулю.

Трехфазную несимметричную систему векторов можно разложить на три симметричные составляющие: прямой ([рис. 4.54, а](#)), обратной ([рис. 4.54, б](#)) и нулевой ([рис. 4.54, в](#)) последовательностей чередования фаз.

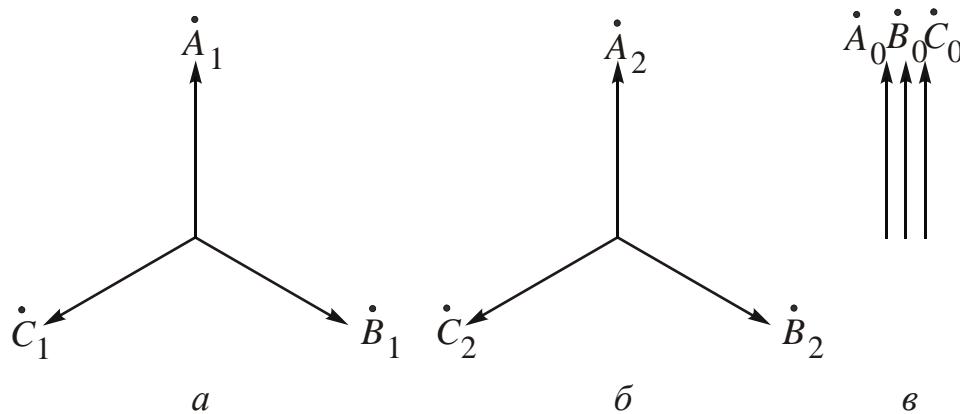


Рис. 4.54

При прямой последовательности чередования фаз  $\dot{B}_1 = a^2 \dot{A}_1$ ,  $\dot{C}_1 = a \dot{A}_1$ .

При обратной последовательности чередования фаз  $\dot{B}_2 = a \dot{A}_2$ ,  $\dot{C}_2 = a^2 \dot{A}_2$ .

При нулевой последовательности чередования фаз  $\dot{A}_0 = \dot{B}_0 = \dot{C}_0$ .

Результирующая несимметричная составляющая векторов определяется суммой соответствующих векторов симметричных составляющих:

$$\dot{A} = \dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_0;$$

$$\dot{B} = \dot{B}_1 + \dot{B}_2 + \dot{B}_0 = a^2 \dot{A}_1 + a \dot{A}_2 + \dot{A}_0;$$

## ГЛАВА 4. ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

### 4.8. Расчет цепей с несимметричной системой ЭДС

$$\dot{C} = \dot{C}_1 + \dot{C}_2 + \dot{C}_0 = a \dot{A}_1 + a^2 \dot{A}_2 + \dot{A}_0.$$

#### 4.8.2.2. Разложение несимметричной системы трех векторов на симметричные составляющие

Очевидно, что для разложения несимметричной системы трех векторов на симметричные составляющие достаточно найти векторы  $\dot{A}_1$ ,  $\dot{A}_2$  и  $\dot{A}_0$ .

Сложим векторы  $\dot{A}$ ,  $\dot{B}$  и  $\dot{C}$ :

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_0 \\ + \dot{B} &= a^2 \dot{A}_1 + a \dot{A}_2 + \dot{A}_0 \\ \dot{C} &= a \dot{A}_1 + a^2 \dot{A}_2 + \dot{A}_0\end{aligned}$$

---


$$\dot{A} + \dot{B} + \dot{C} = 3\dot{A}_0, \text{ так как } (1+a+a^2)=0.$$

Отсюда

$$\dot{A}_0 = \frac{1}{3}(\dot{A} + \dot{B} + \dot{C}).$$

Умножим  $\dot{B}$  на  $a$ ,  $\dot{C}$  – на  $a^2$ . Сложим  $\dot{A}$  и получившиеся выражения:

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_0 \\ + a\dot{B} &= a^3 \dot{A}_1 + a^2 \dot{A}_2 + a\dot{A}_0 \\ a^2\dot{C} &= a^3 \dot{A}_1 + a^4 \dot{A}_2 + a^2 \dot{A}_0\end{aligned}$$

---


$$\dot{A} + a\dot{B} + a^2\dot{C} = 3\dot{A}_1, \text{ так как } a^3 = \text{e}^{j360^\circ} = 1, a^4 = a \cdot a^3 = a.$$

Тогда

$$\dot{A}_1 = \frac{1}{3}(\dot{A} + a\dot{B} + a^2\dot{C}).$$

Умножим  $\dot{B}$  на  $a^2$ ,  $\dot{C}$  – на  $a$ . Сложим  $\dot{A}$  и получившиеся выражения:

$$\begin{aligned}\dot{A} &= \dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_0 \\ + a^2\dot{B} &= a^4 \dot{A}_1 + a^3 \dot{A}_2 + a^2 \dot{A}_0 \\ a\dot{C} &= a^2 \dot{A}_1 + a^3 \dot{A}_2 + a\dot{A}_0\end{aligned}$$


---


$$\dot{A} + a^2\dot{B} + a\dot{C} = 3\dot{A}_2.$$



Следовательно,  $\dot{A}_2 = \frac{1}{3}(\dot{A} + a^2 \dot{B} + a \dot{C})$ .

#### 4.8.2.3. Некоторые особенности трехфазных цепей в отношении симметричных составляющих

Трехфазная система ЭДС прямой последовательности чередования фаз представляет собой симметричную систему ЭДС, которая рассматривалась в [п. 4.1](#), [п. 4.2](#), [п. 4.3](#), [п. 4.4](#), [п. 4.5](#), [п. 4.6](#), [п. 4.7](#). Система ЭДС обратной последовательности чередования фаз аналогична, фазы  $B$  и  $C$  меняются местами по сравнению с прямой последовательностью чередования фаз.

Принципиальные особенности расчета цепей с несимметричной системой ЭДС связаны с нулевой последовательностью чередования фаз.

1. Линейные напряжения не содержат нулевой последовательности чередования фаз. Докажем это.

При соединении звездой линейное напряжение равно геометрической разности фазных:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{AB} &= \dot{U}_A - \dot{U}_B. \\ \dot{U}_A &= \dot{U}_{A_1} + \dot{U}_{A_2} + \dot{U}_{A_0} \\ &\quad - \\ \dot{U}_B &= a^2 \dot{U}_{A_1} + a \dot{U}_{A_2} + \dot{U}_{A_0} \\ \hline \dot{U}_A - \dot{U}_B &= (1 - a^2) \dot{U}_{A_1} + (1 - a) \dot{U}_{A_2}.\end{aligned}$$

При соединении фаз обмоток генератора треугольником образуется замкнутый контур ([рис. 4.55](#)).



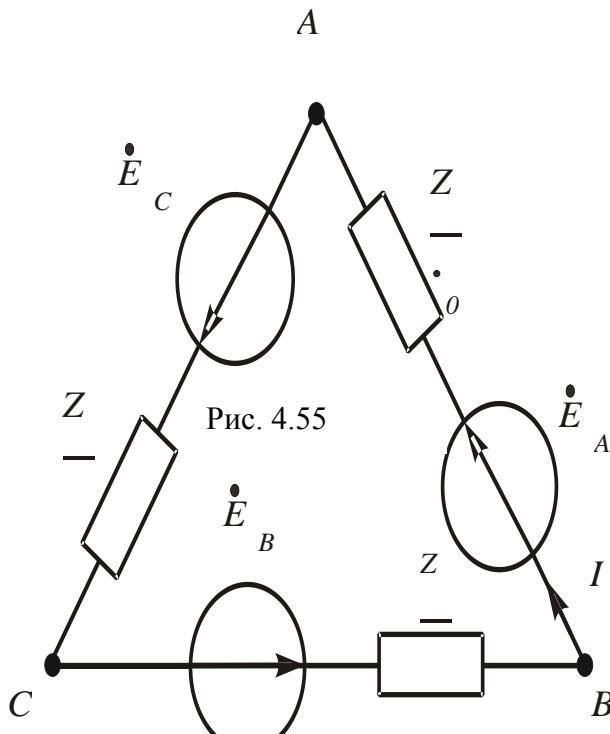


Рис. 4. 55

Результирующая ЭДС контура равна геометрической сумме ЭДС. Для прямой последовательности чередования фаз

$$\dot{E}_{A_1} + \dot{E}_{B_1} + \dot{E}_{C_1} = \dot{E}_{A_1} + a^2 \dot{E}_{A_1} + a \dot{E}_{A_1} = \dot{E}_{A_1} (1 + a^2 + a) = 0.$$

Для обратной последовательности чередования фаз

$$\dot{E}_{A_2} + \dot{E}_{B_2} + \dot{E}_{C_2} = \dot{E}_{A_2} + a \dot{E}_{A_2} + a^2 \dot{E}_{A_2} = \dot{E}_{A_2} (1 + a + a^2) = 0.$$

Для нулевой последовательности чередования фаз

$$\dot{E}_{A_0} + \dot{E}_{B_0} + \dot{E}_{C_0} = \dot{E}_{A_0} + \dot{E}_{A_0} + \dot{E}_{A_0} = 3\dot{E}_{A_0}.$$

За счет этой результирующей ЭДС в обмотках генератора возникает уравнительный ток  $I_0$ , греющий обмотки даже в режиме холостого хода:

$$I_0 = \frac{3\dot{E}_{A_0}}{3\underline{Z}} = \frac{\dot{E}_{A_0}}{\underline{Z}}.$$

Линейное напряжение

$$\dot{U}_{AB_0} = \dot{E}_{A_0} - \underline{Z} \dot{I}_0 = \dot{E}_{A_0} - \underline{Z} \frac{\dot{E}_{A_0}}{\underline{Z}} = 0.$$

При любом способе соединения  $\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0$ . Составляющие нулевой последовательности чередования фаз в сумме дать нуль не могут, так как они одинаковы. Поэтому в линейных напряжениях нет нулевой последовательности чередования фаз.

2. При соединении звездой четырехпроводной ток в нейтральном проводе образуют составляющие нулевой последовательности чередования фаз:

$$\begin{aligned}\dot{I}_A &= \dot{I}_{A_1} + \dot{I}_{A_2} + \dot{I}_{A_0} \\ + \dot{I}_B &= a^2 \dot{I}_{A_1} + a \dot{I}_{A_2} + \dot{I}_{A_0} \\ \dot{I}_C &= a \dot{I}_{A_1} + a^2 \dot{I}_{A_2} + \dot{I}_{A_0} \\ \hline \dot{I}_{nN} &= \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 3\dot{I}_{A_0}.\end{aligned}$$

3. При соединении фаз приемника звездой трехпроводной по первому закону Кирхгофа  $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$ . Токи нулевой последовательности чередования фаз в сумме нуль дать не могут, поэтому линейные токи их не содержат.

4. При соединении фаз приемника звездой трехпроводной и симметричном приемнике фазные напряжения не содержат составляющих нулевой последовательности чередования фаз.

5. При соединении фаз приемника звездой трехпроводной при симметричной нагрузке возникает напряжение смещения нейтрали за счет составляющих нулевой последовательности чередования фаз.

#### 4.8.2.4. Расчет трехфазной цепи с симметричным приемником при действии несимметричной системы ЭДС

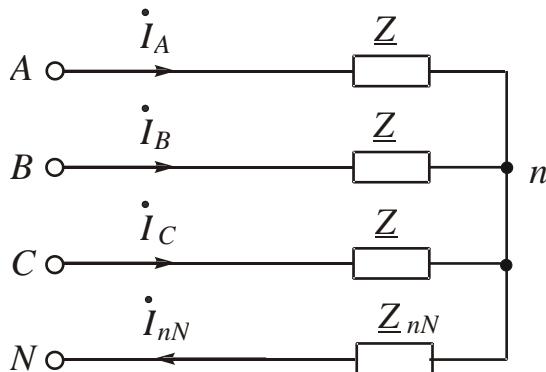


Рис. 4.56

## ГЛАВА 4. ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

### 4.8. Расчет цепей с несимметричной системой ЭДС

Трехфазные двигатели являются симметричными приемниками.

Расчет при действии несимметричной системы ЭДС проводят методом наложения.

При соединении фаз звездой четырехпроводной ([рис. 4.56](#)) схему делят на три подсхемы, в которых действуют симметричные составляющие ЭДС прямой, обратной и нулевой последовательностей чередования фаз.

При симметричном приемнике напряжение смещения нейтрали в первой

и второй подсхемах не возникает, напряжения на фазах приемника равны соответственно напряжениям на фазах генератора.

В первой подсхеме с прямой последовательностью чередования фаз токи по величине равны.

С учетом фазовых соотношений можно записать:

$$\dot{I}_{A_1} = \frac{\dot{U}_{A_1}}{\underline{Z}_a}; \quad \dot{I}_{B_1} = a^2 \dot{I}_{A_1}; \quad \dot{I}_{C_1} = a \dot{I}_{A_1};$$

$$\dot{I}_{nN_1} = \dot{I}_{A_1} + \dot{I}_{B_1} + \dot{I}_{C_1} = (1 + a^2 + a) \dot{I}_{A_1} = 0.$$

Сопротивление токам прямой последовательности чередования фаз

$$\underline{Z}_1 = \frac{\dot{U}_{A_1}}{\dot{I}_{A_1}} = \frac{\dot{U}_{B_1}}{\dot{I}_{B_1}} = \frac{\dot{U}_{C_1}}{\dot{I}_{C_1}}.$$

Фазное напряжение ([см. рис. 4.56](#))

$$\dot{U}_A = \underline{Z}_{nN} \dot{I}_{nN} + \underline{Z} \dot{I}_A.$$

Для первой подсхемы

$$\dot{U}_{A_1} = \underline{Z}_1 \dot{I}_A.$$

Этому выражению соответствует схема замещения, представленная на [рис. 4.57](#), от которой можно перейти к однофазному эквиваленту ([рис. 4.58](#)).



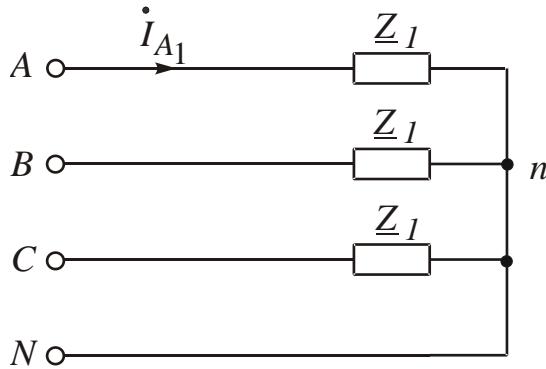


Рис. 4.57

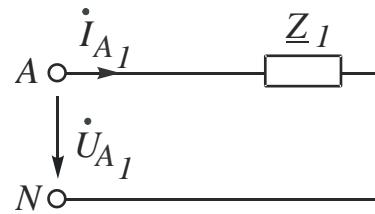


Рис. 4.58

В подсхеме с обратной последовательностью чередования фаз расчет токов производят по формулам:

$$\dot{I}_{A_2} = \frac{\dot{U}_{A_2}}{\underline{Z}_a}; \quad \dot{I}_{B_2} = a \dot{I}_{A_2}; \quad \dot{I}_{C_2} = a^2 \dot{I}_{A_2};$$

$$\dot{I}_{nN_2} = \dot{I}_{A_2} + \dot{I}_{B_2} + \dot{I}_{C_2} = (1 + a + a^2) \dot{I}_{A_2} = 0.$$

Сопротивление токам обратной последовательности чередования фаз

$$\underline{Z}_2 = \frac{\dot{U}_{A_2}}{\dot{I}_{A_2}} = \frac{\dot{U}_{B_2}}{\dot{I}_{B_2}} = \frac{\dot{U}_{C_2}}{\dot{I}_{C_2}}.$$

При статической нагрузке  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}$ . При динамической нагрузке обычно  $\underline{Z}_2 < \underline{Z}_1$ .

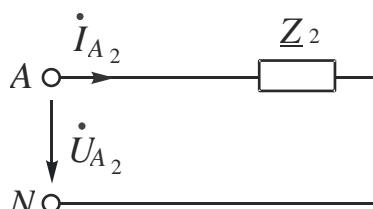


Рис. 4.59

Напряжение  $\dot{U}_{A_2} = \underline{Z}_2 \dot{I}_{A_2}$ . Этому выражению соответствует схема однофазного эквивалента, представленного на [рис. 4.59](#).

В третьей подсхеме действует система ЭДС нулевой последовательности чередования фаз. Ток в нейтральном проводе

$$\dot{I}_{nN_0} = \dot{I}_{A_0} + \dot{I}_{B_0} + \dot{I}_{C_0} = 3 \dot{I}_{A_0}.$$

## ГЛАВА 4. ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

### 4.8. Расчет цепей с несимметричной системой ЭДС

Если сопротивлением нейтрального провода не пренебрегают, то напряжение  $\dot{U}_{A_0} = \underline{Z}_{nN} \cdot 3\dot{I}_{A_0} + \underline{Z}\dot{I}_{A_0}$ . Отсюда ток  $\dot{I}_{A_0} = \frac{\dot{U}_{A_0}}{3\underline{Z}_{nN} + \underline{Z}}$ .

Сопротивление токам нулевой последовательности чередования фаз

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z} + 3\underline{Z}_{nN}.$$

Этим формулам соответствует схема однозадачного эквивалента, представленная на [рис. 4.60](#).

Токи в исходной схеме находят суммированием токов подсхем:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{A_1} + \dot{I}_{A_2} + \dot{I}_{A_0}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{B_1} + \dot{I}_{B_2} + \dot{I}_{B_0};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{C_1} + \dot{I}_{C_2} + \dot{I}_{C_0}.$$

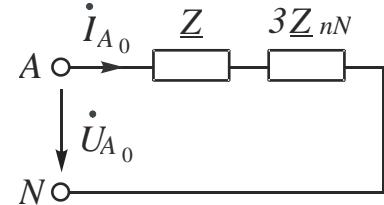


Рис. 4.60

*При соединении фаз звездой трехпроводной* токи нулевой последовательности чередования фаз отсутствуют, поэтому в расчете участвуют только подсхемы с прямой и обратной последовательностями чередования фаз.



# ГЛАВА 5

## ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПРИ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

### 5.1. Причины возникновения

1. Несовершенство промышленных генераторов электрической энергии.
2. Существование генераторов специальных, отличных от синусоиды, форм сигналов.
3. Наличие в цепях нелинейных элементов, искажающих форму синусоидальных кривых электрических величин.

### 5.2. Способы изображения несинусоидальных периодических функций

Графический способ ([рис. 5.1](#)).

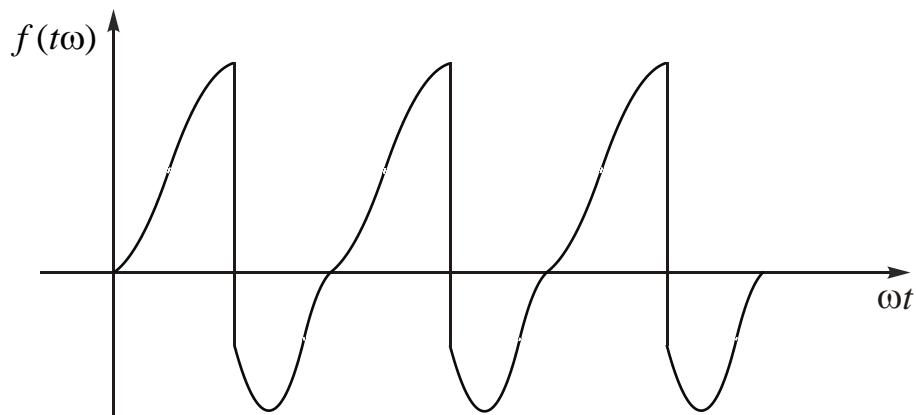


Рис. 5.1

2. Аналитический способ. Если периодическая функция удовлетворяет условию Дирихле (на всяком конечном интервале имеет конечное число разрывов первого рода и конечное число экстремумов), то ее можно разложить в ряд Фурье:

$$f(\omega t) = A_0 + A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + A_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \\ + \dots A_{km} \sin(k \omega t + \psi_k) + \dots,$$

где  $A_0$  – постоянная составляющая ряда; – гармоническая составляющая, меняющаяся с частотой  $k \omega$ .

Ряд Фурье можно записать следующим образом:



$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k).$$

Совокупность гармонических составляющих несинусоидальной периодической функции называют ее **дискретным частотным спектром**.

Первую гармонику ряда  $A_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$  называют основной, остальные – высшими.

В зависимости от допустимой точности расчетов частью высших гармоник пренебрегают. При разложении в ряд Фурье часть слагаемых может обращаться в нуль.

Так как гармоники изменяются с разной частотой, на графиках масштаб по оси абсцисс для каждого слагаемого ряда разный ([рис. 5.2](#)).

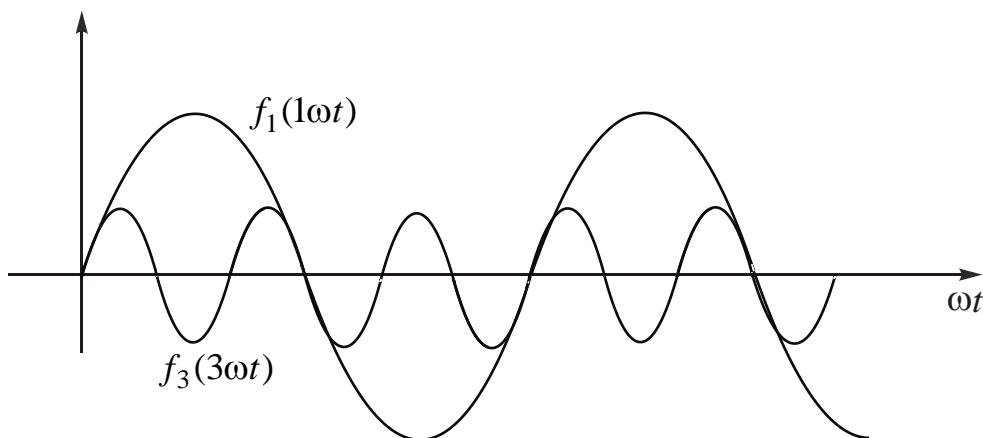


Рис. 5.2

Время, равное одному периоду для первой гармоники, соответствует трем периодам для третьей гармоники, пяти – для пятой и т. д.

Все электрические машины обычно выполняют с симметричными магнитными системами. При разложении в ряд Фурье функций, симметричных относительно оси абсцисс, постоянная составляющая и все четные гармоники обращаются в нуль.

### 5.3. Действующие значения несинусоидальных периодических токов и напряжений

Понятие действующего значения, как и в цепях синусоидального тока, основано на сравнении по тепловому действию с постоянным током.

Действующее значение тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

Несинусоидальную кривую тока разлагают в ряд Фурье:

$$i = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \psi_{i_1}) + I_{2m} \sin(2\omega t + \psi_{i_2}) + I_{3m} \sin(3\omega t + \psi_{i_3}) + \dots$$

После подстановки и соответствующих преобразований получим:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}$$

Действующее значение несинусоидального тока равно корню квадратному из суммы квадратов действующих значений токов всех слагаемых ряда.

Действующие значения напряжения и ЭДС определяют аналогично:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots}$$

$$E = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + \dots}$$

Реальные источники энергии не могут вырабатывать ЭДС и токи, меняющиеся строго по синусоидальному закону. На практике говорят о практических синусоидах токов и напряжений.

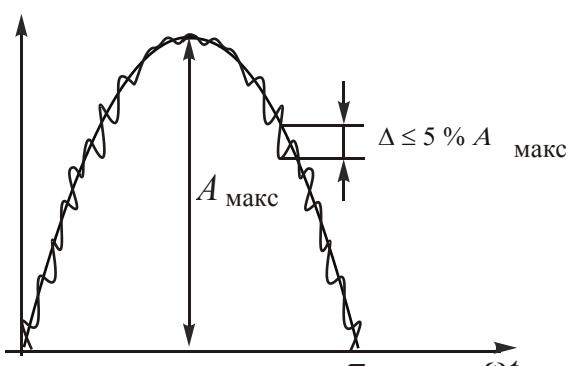


Рис. 5.3

**Практической синусоидой** называют такую кривую, у которой разность между соответствующими точками кривой и ее первой гармоники не превышает 5 % от максимального значения (рис. 5.3).

При расчете цепей несинусоидального тока, если позволяет требуемая точность, нередко несинусоидальные кривые заменяют эквивалентными им синусоидами.

Действующие значения несинусоидальной кривой и эквивалентной ей синусоиды одинаковы.

## 5.4. Коэффициенты, характеризующие периодические несинусоидальные функции

**1. Коэффициент амплитуды** определяют как отношение максимального значения к действующему:



$$k_a = \frac{\dot{A}_1}{\dot{A}}.$$

Для синусоиды  $k_a = \sqrt{2} = 1,41$ .

**2. Коэффициент искажения** – это отношение действующего значения основной гармоники к действующему значению всей кривой:

$$k_u = \frac{A_1}{A}.$$

Для синусоиды  $k_u = 1$ .

**3. Коэффициент формы** – это отношение действующего к среднему по модулю значению:

$$k_\phi = \frac{A}{A_{cp}}.$$

Для синусоиды  $k_\phi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$ .

Среднее по модулю значение зависит от углов  $\psi_k$  и определяется по формуле

$$\dot{A}_{\text{ср}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\omega t)| d(\omega t).$$

Если функция не содержит постоянной составляющей и четных гармоник и не изменяет знака в течение каждого полупериода, то для нахождения  $A_{cp}$  можно воспользоваться следующим выражением:

$$\dot{A}_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi} \left( \dot{A}_{1m} \cos \psi_1 + \frac{1}{3} \dot{A}_{3m} \cos \psi_3 + \frac{1}{5} \dot{A}_{5m} \cos \psi_5 + \dots \right).$$

## 5.5. Мощности в цепях несинусоидального тока

Активная мощность – это среднее значение мощности за период:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt.$$

Пусть  $u = U_0 + U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + U_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2) + \dots$ ;



$$i = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2 - \varphi_2) + \dots$$

После подстановки и соответствующих преобразований получим:

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots$$

Очевидно, что активную мощность получают суммированием активных мощностей всех подсхем:

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \dots P_k + \dots$$

Реактивную мощность вычисляют суммированием реактивных мощностей подсхем с синусоидальными токами:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots Q_k + \dots$$

Полную мощность определяют как произведение действующих значений напряжения и тока в схеме:  $S = UI$ .

Эти три мощности, в отличие от цепей синусоидального тока, обычно не образуют прямоугольный треугольник:

$$S^2 \geq P^2 + Q^2.$$

Величину  $T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$  называют мощностью искажения.

Отношение активной мощности к полной называют коэффициентом мощности и иногда приравнивают косинусу некоторого условного угла  $\theta$ :

$$\chi = \frac{P}{S} = \cos \theta.$$

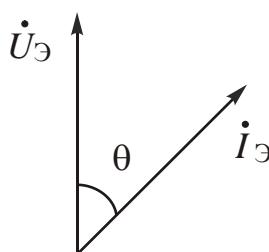


Рис. 5.4

Углу  $\theta$  можно дать графическую интерпретацию, пользуясь понятиями эквивалентных синусоид тока и напряжения, действующие значения которых равны действующим значениям несинусоидальных величин (рис. 5.4). Угол сдвига фаз между эквивалентными синусоидами тока и напряжения будет равен условному углу  $\theta$  в случае, если мощность, вычисляемая по формуле  $P = U_y I_y \cos \theta$ , будет равна мощности, потребляемой цепью несинусоидального тока.



## 5.6. Расчет однофазных цепей при несинусоидальных периодических воздействиях

1. Источник несинусоидальной ЭДС представим как ряд последовательно соединенных источников ЭДС (рис. 5.5, а), источник несинусоидального тока – как ряд параллельно соединенных источников тока с разной частотой (рис. 5.5, б).

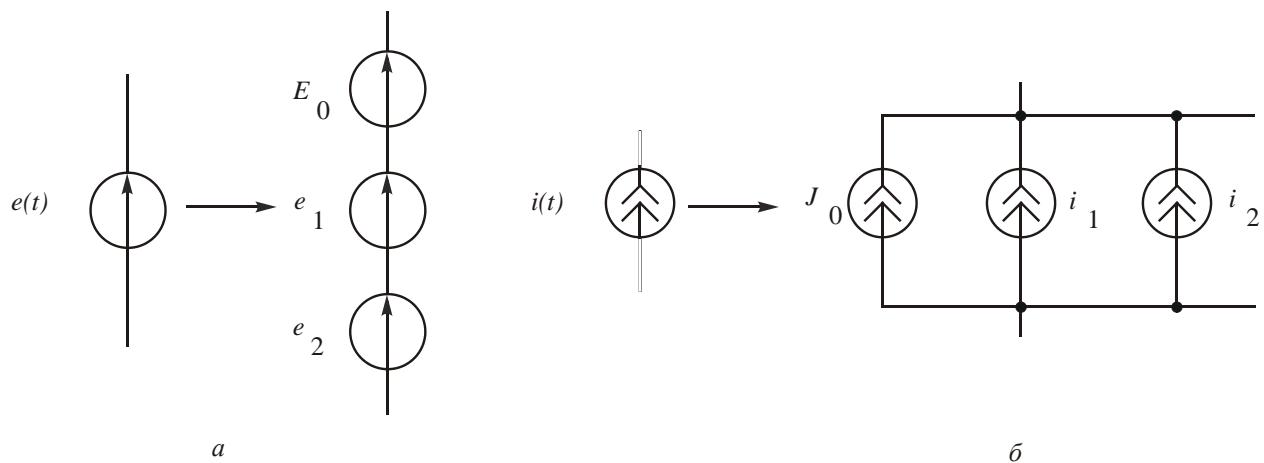


Рис. 5.5

2. При расчете применяют метод наложения. Рационально разбить схему на столько подсхем, сколько частот получается при разложении в ряд Фурье несинусоидальных ЭДС и токов. Подсхемы отличаются друг от друга не только источниками энергии, но и величинами реактивных сопротивлений, которые зависят от частоты:

$$X_{kL} = kL\omega \quad \text{и} \quad X_{kC} = \frac{1}{kC\omega}.$$

Индуктивная катушка сглаживает кривые тока. Конденсатор увеличивает пульсацию кривой.

3. Определим требуемые по условию величины в подсхемах.

4. Найдем нужные величины в исходной схеме.

Мгновенные значения токов и напряжений в схеме получают суммированием соответствующих мгновенных значений в подсхемах. Действующие значения токов, напряжений и ЭДС определяют через соответствующие действующие значения в подсхемах по формулам:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2 + \dots};$$

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_k^2 + \dots};$$

$$E = \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + \dots + E_k^2 + \dots}.$$

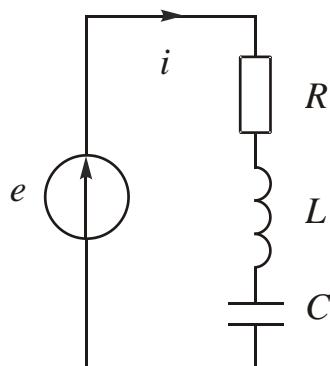
## Активная мощность

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_k + \dots$$

Приборы разных электроизмерительных систем реагируют на разные значения несинусоидальных периодических электрических величин.

Приборы электромагнитной и электродинамической систем показывают действующие значения, магнитоэлектрической системы – постоянную составляющую, магнитоэлектрической с выпрямителем – среднее по модулю значение.

*Пример.* Найти закон изменения тока в схеме [рис. 5.6](#), если известны  $R, L, C$ ; закон изменения несинусоидальной ЭДС



$$e = E_0 + E_{1m} \sin(\omega t + \psi_{1e}) + E_{3m} \sin(3\omega t + \psi_{3e}).$$

## РЕШЕНИЕ

1. Представим источник ЭДС как три последовательно соединенных источника ([рис. 5.7](#)). Делим схему на три подсхемы с частотами 0,  $\omega$  и  $3\omega$ .

2. В первой подсхеме с частотой 0, индуктивный элемент сопротивления постоянному току не оказывает ( $X_{L_0} = L \cdot 0 = 0$ ), поэтому на его месте изобразим закоротку. Сопротивление емкостного элемента постоянному току  $X_{C_0} = \frac{1}{C \cdot 0} = \infty$ , поэтому в схеме в этом месте будет разрыв ([рис. 5.8](#)).

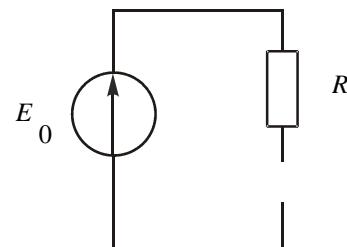
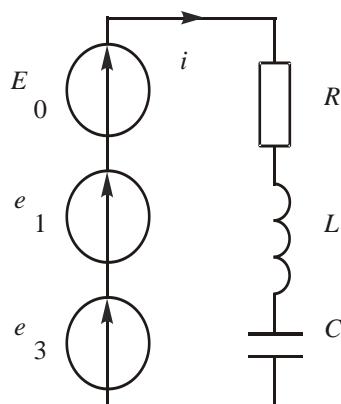


Рис. 5.7

Рис. 5.8

Ток  $I_0 = 0$ .

3. Во второй подсхеме ([рис. 5.9](#)) комплекс максимального значения тока



$$\dot{I}_{1m} = \frac{\dot{E}_{1m}}{R + jL\omega - j\frac{1}{C\omega}} = \frac{E_{1m} e^{j\psi_{1e}}}{Z_1 e^{j\varphi_1}} = I_{1m} e^{j(\psi_{1e} - \varphi_1)} = I_{1m} e^{j\psi_{1i}}.$$

Закон изменения тока  $i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_{1i})$ .

4. В третьей подсхеме (рис. 5.10) комплекс максимального значения тока

$$\dot{I}_{3m} = \frac{\dot{E}_{3m}}{R + j3L\omega - j\frac{1}{3C\omega}} = \frac{E_{3m} \cdot e^{\psi_{3e}}}{Z_3 e^{j\varphi_3}} = I_{3m} e^{j(\psi_{3e} - \varphi_3)} = I_{3m} e^{j\psi_{3i}}.$$

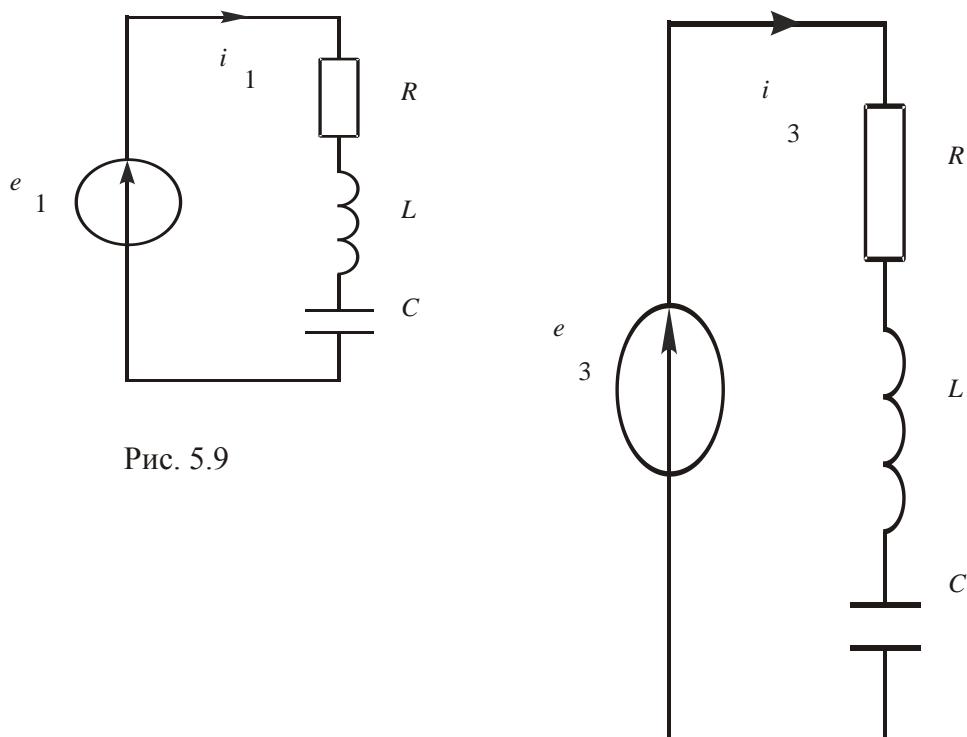


Рис. 5.9

Рис. 5.10

Закон изменения тока  $i_3 = I_{3m} \sin(3\omega t + \psi_{3i})$ .

5. Мгновенное значение тока в схеме представляем в виде ряда Фурье:

$$i = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_{1i}) + I_{3m} \sin(3\omega t + \psi_{3i}).$$

## 5.7. Высшие гармоники в трехфазных цепях

Трехфазную систему несинусоидальных ЭДС раскладывают в ряд Фурье.



Гармоники с номерами  $k = 3n + 1$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots (1, 4, 7, 10, \dots)$  образуют прямую последовательность чередования фаз, т. е. обычную симметричную систему ЭДС.

Гармоники с номерами  $k = 3n - 1$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots (2, 5, 8, 11, \dots)$  образуют обратную последовательность чередования фаз, аналогичную прямой, в которой фазы  $B$  и  $C$  поменялись местами.

Гармоники с номерами  $k = 3n$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots (3, 6, 9, 12, \dots)$  образуют нулевую последовательность чередования фаз, представляющую собой три одинаковых вектора.

При анализе трехфазных цепей несинусоидального тока используют метод наложения.

Расчет подсхем с прямой и обратной последовательностями чередования фаз принципиально не отличается от расчета цепей с симметричной системой ЭДС.

В подсхемах с нулевой последовательностью чередования фаз наблюдаются следующие особенности:

1. Линейные напряжения не содержат гармоник, кратных трем.
2. В трехпроводной цепи линейные токи не содержат гармоник, кратных трем.
3. В трехпроводной цепи фазные напряжения приемника не содержат гармоник, кратных трем.
4. При соединении фаз приемника трехпроводной звездой при симметричной нагрузке возникает напряжение смещения нейтрали за счет гармоник, кратных трем.
5. При соединении звездой четырехпроводной ток в нейтральном проводе образует гармоники, кратные трем.
6. При соединении фаз обмоток генератора треугольником в контуре возникает уравнительный ток за счет гармоник, кратных трем.

Рассмотрим несколько примеров.

*Пример 5.1.* Найти показания приборов электромагнитной системы в схеме [рис. 5.11](#), если ЭДС фазы  $A$   $e_A = E_{1m} \sin \omega t + E_{3m} \sin 3\omega t + E_{5m} \sin 5\omega t + E_{7m} \sin 7\omega t + E_{9m} \sin 9\omega t$ .



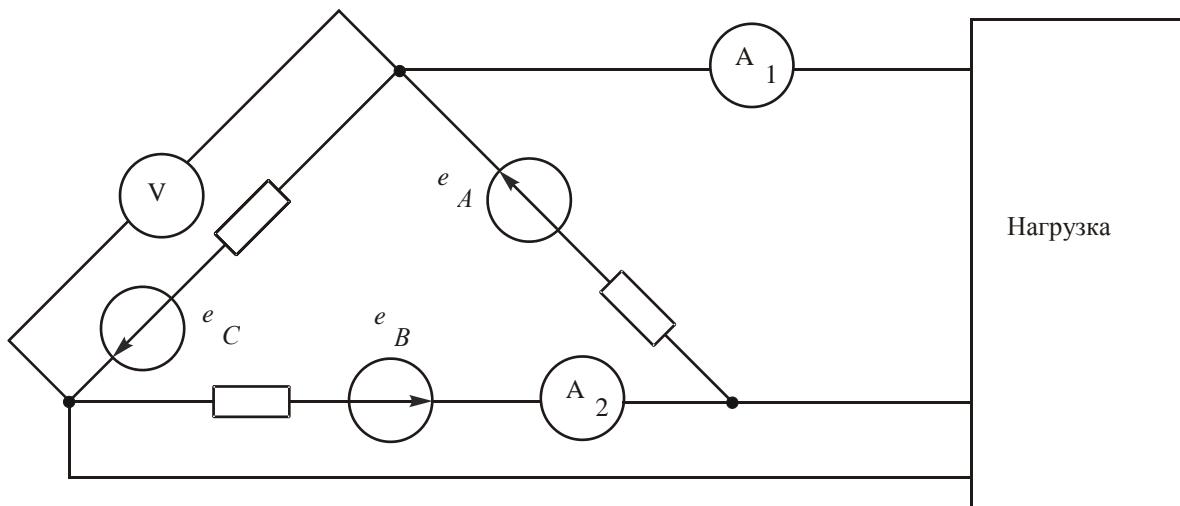


Рис. 5.11

*Решение*

1. Вольтметр подключен к фазе генератора. Но при соединении треугольником фазное напряжение равно линейному, которое не содержит гармоник, кратных трем. Поэтому

$$U_V = \sqrt{E_1^2 + E_5^2 + E_7^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{E_{1m}^2 + E_{5m}^2 + E_{7m}^2} .$$

2. Цепь является трехпроводной, поэтому линейные токи не содержат гармоник, кратных трем.

Первый амперметр показывает действующее значение тока

$$I_{A_1} = \sqrt{I_1^2 + I_5^2 + I_7^2} .$$

3. Второй амперметр показывает ток в контуре, образованном фазами генератора. Уравнительный ток образует гармоники, кратные трем:

$$I_{A_2} = \sqrt{I_3^2 + I_9^2} .$$

*Пример 5.2.* Найти показания приборов электромагнитной системы в схеме [рис. 5.12](#), если ЭДС фазы  $A$   $e_A = E_{1m} \sin \omega t + E_{3m} 3 \sin \omega t + E_{5m} \sin 5 \omega t + E_{7m} \sin 7 \omega t + E_{9m} \sin 9 \omega t$ .

*Решение*

1. Фазы обмотки генератора образуют «открытый» треугольник. Напряжение вольтметра  $V_1$  в каждой подсхеме равно

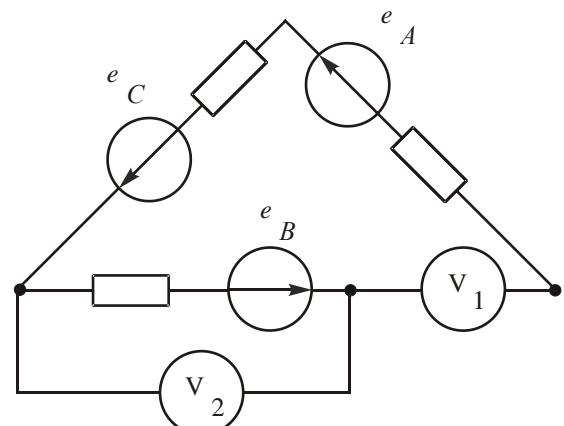


Рис. 5.12



геометрической сумме напряжений на фазах. В подсхемах с прямой последовательностью чередования фаз (с частотами  $\omega$  и  $7\omega$ ) и с обратной последовательностью чередования фаз (с частотой  $5\omega$ ) показания первого вольтметра равны нулю. В подсхемах с нулевой последовательностью чередования фаз (с частотами  $3\omega$  и  $9\omega$ ) показания первого вольтметра равны утроенному значению ЭДС.

Поэтому  $U_{V_1} = 3\sqrt{E_3^2 + E_9^2}$ .

2. Первый вольтметр разрывает цепь, поэтому уравнительного тока не будет. Показания второго вольтметра включают в себя все слагаемые ряда Фурье:

$$U_{V_2} = \sqrt{E_1^2 + E_3^2 + E_5^2 + E_7^2 + E_9^2}.$$

*Пример 5.3.* Найти показания приборов электромагнитной системы в схеме [рис. 5.13](#), если в обмотке генератора наводится ЭДС, разложенная в ряд Фурье:  $e_0 = 120\sin\omega t + 20\sin 3\omega t + 12\sin 5\omega t$  В.

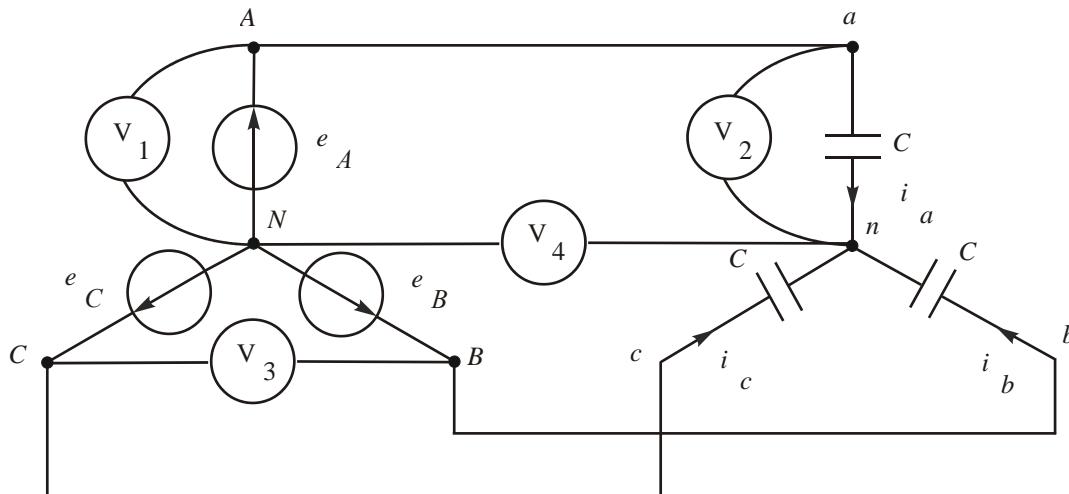


Рис. 5.13

#### Решение

1. Первый вольтметр показывает напряжение на фазе генератора, которое содержит все три гармоники:

2.

$$U_{V_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{U_{1m}^2 + U_{3m}^2 + U_{5m}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{120^2 + 20^2 + 12^2} = 86 \text{ В.}$$

3. Второй вольтметр показывает напряжение на фазе приемника. В трехпроводной цепи оно не содержит гармоник, кратных трем, поэтому

$$U_{V_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{U_{1m}^2 + U_{5m}^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{120^2 + 12^2} = 85 \text{ В.}$$

4. Третий вольтметр показывает линейное напряжение.

Линейные напряжения не содержат гармоник, кратных трем. Поэтому при расчете учитывают две подсхемы: с первой и пятой гармониками. Первая гармоника образует прямую последовательность чередования фаз, пятая – обратную. В обоих случаях линейное напряжение в  $\sqrt{3}$  раз больше фазного:  $U_{\text{л}1} = \sqrt{3}U_{\phi 1}$  и  $U_{\text{л}5} = \sqrt{3}U_{\phi 5}$ . Таким образом,

$$U_{V_3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sqrt{U_{1m}^2 + U_{5m}^2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sqrt{120^2 + 12^2} = 148 \text{ В.}$$

Четвертый вольтметр показывает напряжение смещения нейтрали, которое возникает за счет гармоник, кратных трем:

$$U_{V_4} = \frac{U_{3m}}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} = 14,1 \text{ в.}$$



# ГЛАВА 6

## ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ

### 6.1. Основные понятия. Законы коммутации

В повседневной жизни мы постоянно наблюдаем явления, которые показывают, что не во всех электрических цепях возможно мгновенное изменение режима работы. Например, телевизор или радиоприемник продолжают некоторое время работать после отключения от источника энергии.

В школьном курсе физики обычно демонстрируют следующий опыт. К источнику энергии подключают две параллельные ветви, в одной из которых находится лампочка накаливания, в другой – лампочка накаливания и индуктивная катушка. После замыкания ключа первая лампочка загорается мгновенно, вторая – постепенно.

Эти опыты свидетельствуют о том, что в цепях с реактивными элементами невозможно мгновенное изменение режима работы. Ранее мы изучали установившиеся режимы. Если в электрической цепи есть конденсаторы и индуктивные катушки, то при переходе от одного установившегося режима к другому наблюдается переходный процесс. Сам процесс изменения режима работы цепи (включение или выключение рубильника) в электротехнике называют коммутацией.

Последовательность событий такова: установившийся режим → коммутация → переходный процесс → новый установившийся режим.

Переходные процессы подчиняются двум законам коммутации.

**Первый закон коммутации:** ток в ветви с индуктивной катушкой не может измениться скачком.

Принято считать, что коммутация происходит мгновенно во время  $t = 0$ . Поэтому при рассмотрении переходных процессов различают два нулевых момента времени:  $t = 0 -$ , когда коммутация еще не произошла, и  $t = 0 +$  после коммутации.

Тогда первый закон коммутации можно сформулировать следующим образом: ток в индуктивной катушке до коммутации равен току в момент, наступивший сразу после коммутации, т. е.  $i_L(0-) = i_L(0+)$ .

**Второй закон коммутации:** напряжение на конденсаторе не может измениться скачком либо  $u_{\bar{C}}(0-) = u_{\bar{C}}(0+)$ .

Можно дать энергетическое обоснование законов коммутации. Энергию магнитного поля индуктивной катушки определяют по формуле  $W_M = \frac{Li_L^2}{2}$ . Мощность  $D_l = \frac{dW_l}{dt}$ .

Если ток  $i_L$  изменится скачком, то и  $W_M$  изменится скачком. Тогда мощность магнитного поля катушки будет равна бесконечности, что невозможно, так как не существуют реальные источники энергии с бесконечно большой мощностью.



Энергия электрического поля конденсатора  $W_Y = \frac{Cu_N^2}{2}$ , мощность  $D_Y = \frac{dW_Y}{dt}$ . Если напряжение  $u_N$  изменится скачком, то  $W_Y$  изменится скачком,  $D_Y = \infty$ , что невозможно.

Можно провести доказательства, исходя из противного, и на основании формул  $u_L = L \frac{di_L}{dt}$ ,  $i_N = C \frac{du_N}{dt}$ .

Изучение переходных процессов очень важно, так как они положены в основу принципа действия некоторых устройств и аппаратов. Быстродействие современных ЭВМ таково, что в них практически нет установившихся режимов.

Кроме того, во время переходного процесса могут возникать токи и напряжения большие, чем при установившемся режиме. Электрическая цепь, пригодная для номинального режима работы, может выйти из строя при подключении к источнику энергии.

## 6.2. Классический метод расчета переходных процессов

### 6.2.1. Суть метода

Составим систему уравнений электрического состояния в дифференциальной форме для схемы замещения, приведенной на [рис. 6.1](#).

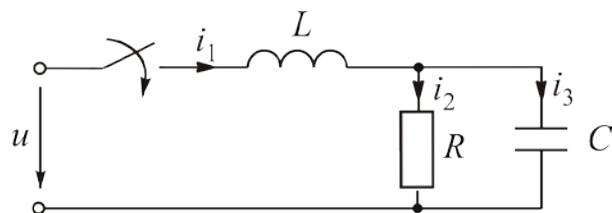


Рис. 6.1

Сначала выявим узлы, ветви, направим токи.

Система уравнений по законам Кирхгофа для мгновенных значений может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0; \\ L \frac{di_1}{dt} + Ri_2 = u; \\ Ri_2 - \frac{1}{C} \int i_3 dt = 0. \end{cases}$$

Как известно из математики, решение полученной системы линейных

дифференциальных неоднородных уравнений есть сумма двух слагаемых: частного решения неоднородных уравнений и общего решения однородных уравнений.

В качестве **частного решения** берут **принужденный режим**, вызываемый внешними источниками энергии. Составляющие токов и напряжений, найденные в результате частного решения неоднородных уравнений, называют **принужденными**:  $i_{\text{вн}}$ ,  $u_{\text{вн}}$ .

**Общее решение** однородного уравнения характеризует процессы, происходящие в цепи при отсутствии внешних источников энергии. В учебниках и в лекциях можно встретить утверждение, что эти процессы происходят за счет энергии, запасенной в магнитном поле катушки и электрическом поле конденсатора. Но это неверно, так как переходные процессы происходят и при отсутствии этих запасов энергии, например при подключении незаряженного конденсатора к источнику энергии.

Эти процессы происходят за счет **изменения** энергии магнитного поля катушки и электрического поля конденсатора.

Составляющие токов и напряжений, найденные в результате общего решения однородных уравнений, называют **свободными**:  $i_{\text{св}}$ ,  $u_{\text{св}}$ . Свободные составляющие стремятся к нулю.

Классический метод расчета переходных процессов заключается в отыскании закона изменения любого тока и напряжения как суммы принужденной и свободной составляющих:

$$i = i_{\text{вн}} + i_{\text{св}};$$

$$u = u_{\text{вн}} + u_{\text{св}}.$$

Когда свободные составляющие станут равны нулю, переходный процесс закончится. Отсюда следует, что **принужденный режим – это новый установившийся режим после переходного процесса**.

Далее рассмотрим классический метод расчета переходных процессов на ряде конкретных примеров.

### 6.2.2. Подключение реального конденсатора к источнику постоянного напряжения

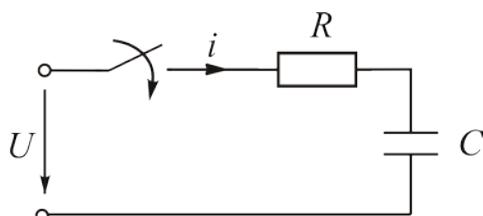


Рис. 6.2

Схема замещения рассматриваемой цепи приведена на [рис. 6.2](#).

Составим систему уравнений электрического состояния. Так как схема одноконтурная, то можно написать только одно уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$Ri + u_{\text{вн}} = U.$$

В этом уравнении во время переходного процесса происходит изменение двух величин: тока  $i$  и напряжения на емкостном элементе  $u_{\tilde{N}}$ . Напряжение  $u_{\tilde{N}}$  подчиняется второму закону коммутации, поэтому рационально выразить ток по закону Ома  $i = i_{\tilde{N}} = C \frac{du_{\tilde{N}}}{dt}$ .

Тогда уравнение примет вид

$$RC \frac{du_{\tilde{N}}}{dt} + u_{\tilde{N}} = U.$$

Решим это уравнение как сумму двух слагаемых:

$$u_{\tilde{N}} = u_{\tilde{N}_{i\delta}} + u_{\tilde{N}_{f\hat{a}}}.$$

Найдем  $u_{\tilde{N}_{i\delta}}$ .

Теоретически переходной процесс длится бесконечно долго, поэтому принужденный режим рассмотрим как новый установившийся режим при  $t = \infty$ . Конденсатор постоянный ток не пропускает ( $i_{i\delta} = 0$ ),  $Ri_{i\delta} = 0$ . Отсюда  $u_{\tilde{N}_{i\delta}} = U$ .

Вычислим  $u_{\tilde{N}_{f\hat{a}}}$ . Из математики известно, что свободные составляющие меняются по экспоненциальному закону:

$$u_{\tilde{N}_{f\hat{a}}} = \hat{A} \hat{a}^{pt}.$$

1. Определим показатель степени  $p$ , который является корнем характеристического уравнения. Запишем уравнение электрического состояния для свободной составляющей:

$$RC \frac{du_{\tilde{N}_{f\hat{a}}}}{dt} + u_{\tilde{N}_{f\hat{a}}} = 0.$$

Производной экспоненты является сама экспонента. Так как функция сложная, дифференцируем еще и показатель степени.

В итоге производная  $\frac{du_{\tilde{N}_{f\hat{a}}}}{dt} = \hat{A} \hat{a}^{pt}$ . После подстановки в уравнение электрического состояния получаем:

$$RCp \hat{A} \hat{a}^{pt} + \hat{A} \hat{a}^{pt} = 0.$$

Сократим на  $\hat{A} \hat{a}^{pt}$ :

$$RCp + 1 = 0.$$



Сравнив уравнение электрического состояния с характеристическим, делаем вывод: для получения характеристического уравнения в уравнении электрического состояния правую часть нужно приравнять к нулю, переменную величину заменить единицей, ее производную —  $p$ , вторую производную —  $p^2$  и т. д.

Решение характеристического уравнения позволяет определить  $p = -\frac{1}{RC}$ .

Величину  $\frac{1}{|p|} = RC$  обозначают  $\tau$  и называют постоянной времени.

Показатель  $p = -\frac{1}{\tau}$ . Так как  $[R] = \text{Ом}$ ,  $[C] = \text{Ф} = \frac{\text{n}}{\text{A}}$ , то  $[\tau] = \text{с}$ .

2. Определим постоянную интегрирования  $A$ .

Постоянные интегрирования определяют из начальных условий с использованием законов коммутации.

Уравнение, по которому проводим решение, справедливо для любого момента времени, следовательно, и для начального:

$$u_{\tilde{N}}(0+) = u_{\tilde{N}_{1\delta}}(0+) + u_{\tilde{N}_{\text{нн}}}(0+).$$

По второму закону коммутации  $u_{\tilde{N}}(0+) = u_{\tilde{N}}(0-)$ . До коммутации схема не была подключена к источнику энергии, поэтому  $u_{\tilde{N}}(0-) = 0$ .

Принужденная составляющая в данном примере является постоянной величиной, значит,  $u_{\tilde{N}_{1\delta}}(0+) = U$ .

Свободная составляющая  $u_{\tilde{N}_{\text{нн}}} = A e^{-\frac{1}{RC}t}$  при  $t = 0+$  равна  $A$ .

После подстановки получим:  $0 = U + A$ . Отсюда  $A = -U$ .

Тогда закон изменения напряжения  $u_{\tilde{N}} = U - U e^{-\frac{1}{RC}t}$ .

Закон изменения тока можно получить как из уравнения по второму закону Кирхгофа, так и из закона Ома.

Из уравнения по второму закону Кирхгофа

$$i = \frac{U - u_{\tilde{N}}}{R} = \frac{U - U + U e^{-\frac{1}{RC}t}}{R} = \frac{U}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$\text{либо } i = C \frac{du_{\tilde{N}}}{dt} = C \frac{U}{RC} e^{-\frac{1}{RC}t} = \frac{U}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

Проиллюстрируем полученные уравнения графиками.

График напряжения  $u_{\tilde{N}}$  (рис. 6.3) получаем суммированием графиков  $u_{\tilde{N}_{1\delta}}$  и  $u_{\tilde{N}_{\text{нн}}}$ . Составляющая  $u_{\tilde{N}_{1\delta}} = U = \text{const}$ . Свободная составляющая изменяется по экспоненциальному закону.



няется по закону экспоненты и стремится к нулю. В начальный момент  $u_C(0+) = -U$ .

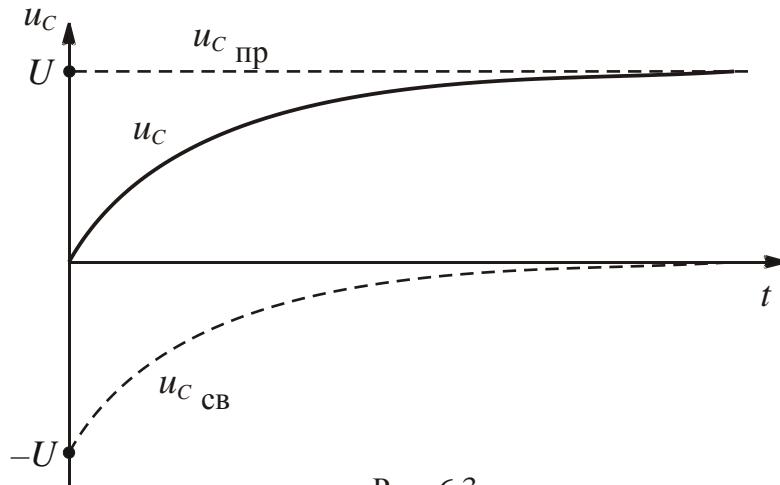


Рис. 6.3

График подтверждает, что напряжение на конденсаторе меняется плавно, что принужденный режим – это новый установившийся режим после переходного процесса.

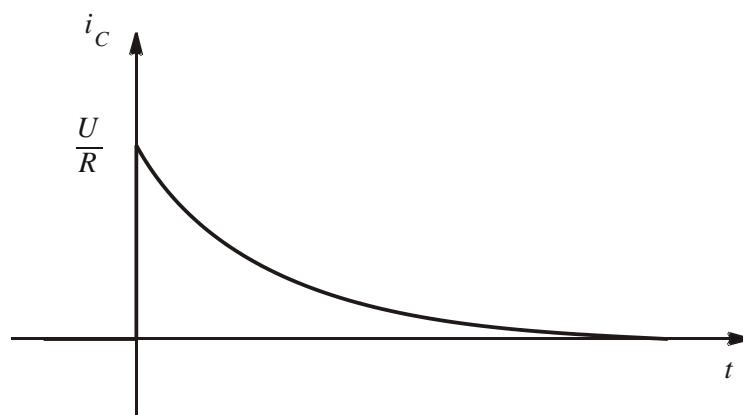


Рис. 6.4

График изменения тока представлен на [рис. 6.4](#).

При  $t = 0-$  тока не было, при  $t = 0+$  ток  $i_C(0+) = \frac{U}{R}$ , далее он стремится к нулю по закону экспоненты.

Графики будут меняться при изменении параметров схемы  $R$  и  $C$ . Величина напряжения от них не зависит. Величина тока обратно пропорциональна сопротивлению  $R$  и не зависит от емкости  $C$ . Длительность переходного процесса прямо пропорциональна значениям  $R$  и  $C$ .

Теоретически переходный процесс длится бесконечно долго. Практически переходный процесс заканчивается через  $(3-5)\tau$ .

Постоянная времени  $\tau$  – это время, в течение которого свободные составляющие уменьшаются в  $e$  раз ([рис. 6.5](#)).

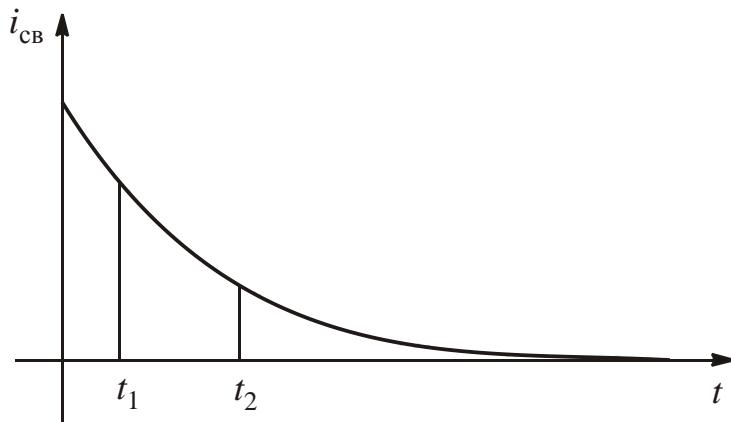


Рис. 6.5

Время  $t_2 - t_1 = \tau$ , если  $\frac{i_{t_1}}{i_{t_2}} = e \approx 2,7$ .

Постоянной времени можно дать геометрическую интерпретацию – это величина подкасательной к любой точке экспоненты ([рис. 6.6](#)), поэтому можно определить постоянную времени по известному графику изменения свободной составляющей и неизвестных параметрах схемы.

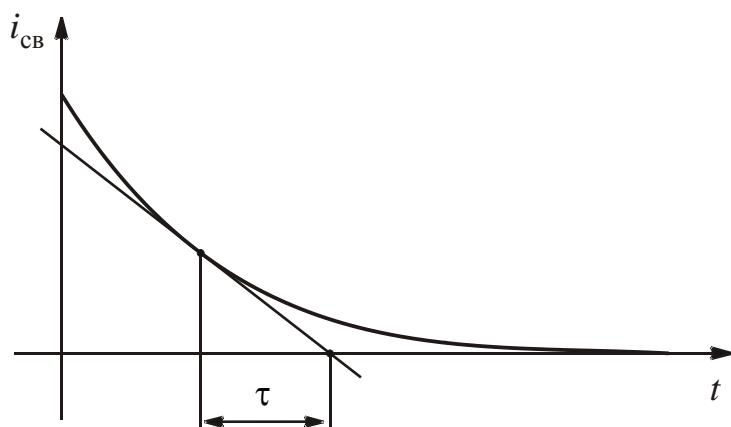


Рис. 6.6

Длительность переходного процесса, зависящая от параметров, может быть различной.

Если в схеме замещения  $R = 100$  Ом,  $C = 100$  мкФ, то при замыкании ключа конденсатор заряжается с постоянной времени  $\tau_{зак} = 0,01$  с. При размыкании ключа конденсатор будет разряжаться с  $\tau_{раз} \approx 28$  с, т. е. конденсатор будет сохранять напряжение на своих обкладках несколько суток и представлять собой опасность. Поэтому после окончания работы с конденсатором нужно использовать разрядное устройство.

### 6.2.3. Разряд конденсатора на резистор

Схема замещения рассматриваемой цепи представлена на [рис. 6.7](#).

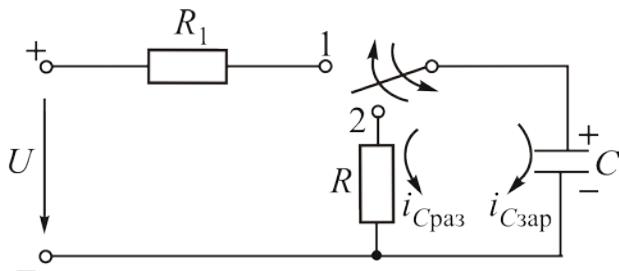


Рис. 6.7

В положении ключа 1 происходит уже рассмотренный процесс заряда конденсатора до напряжения источника  $U$  с постоянной времени  $\tau_{\text{зар}} = R_1 C$ .

Ток заряда конденсатора направлен от положительного зажима источника к отрицательному.

При положении ключа 2 конденсатор разряжается на резистор сопротивлением  $R$ . Ток  $i_{\text{раз}}$  направлен от положительно заряженной обкладки конденсатора.

Составим уравнение электрического состояния цепи разряда конденсатора:

$$R i_{\text{раз}} + u_{\text{раз}} = 0.$$

Подставив  $i_{\text{раз}} = C \frac{du_{\text{раз}}}{dt}$ , получим

$$RC \frac{du_{\text{раз}}}{dt} + u_{\text{раз}} = 0.$$

Это уравнение однородное, поэтому решение содержит только одно слагаемое  $u_{\text{раз}}$ . Принужденная составляющая  $u_{\text{разд}} = 0$ , что очевидно, так как конденсатор разряжается.

Свободная составляющая меняется по закону экспоненты:

$$u_{\text{раз}} = A e^{-pt}.$$

Характеристическое уравнение  $RCp + 1 = 0$ .

Отсюда

$$p = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau_{\text{дл}}},$$

Определим постоянную интегрирования  $A$  из начальных условий с использованием законов коммутации:

$$u_{\tilde{N}}(0+) = u_{\tilde{N}\text{ни}}(0+).$$

Напряжение  $u_{\tilde{N}}(0+) = u_{\tilde{N}}(0-) = U$ ;  $u_{\tilde{N}\text{ни}}(0+) = A$ .

Тогда  $U = A$ .

Напряжение на конденсаторе при его разряде меняется по закону

$$u_{\tilde{N}} = U e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

Ток разряда конденсатора  $i_{\tilde{N}} = -\frac{u_{\tilde{N}}}{R} = -\frac{U}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$ . Токи заряда и разряда конденсатора направлены противоположно.

Графики изменения  $u_{\tilde{N}}$  и  $i_{\tilde{N}}$  приведены на [рис. 6.8](#) и [рис. 6.9](#).

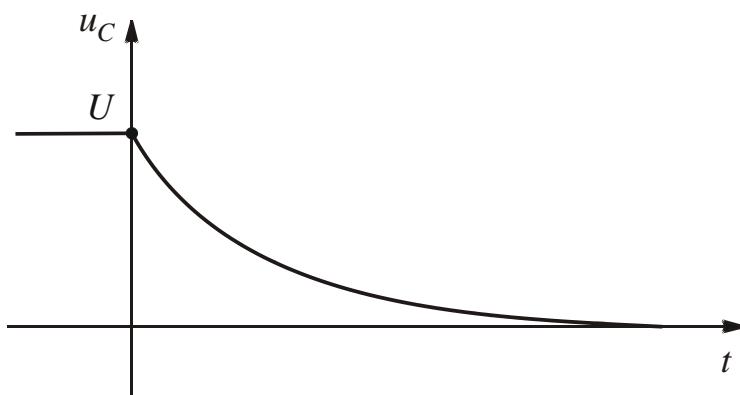


Рис. 6.8

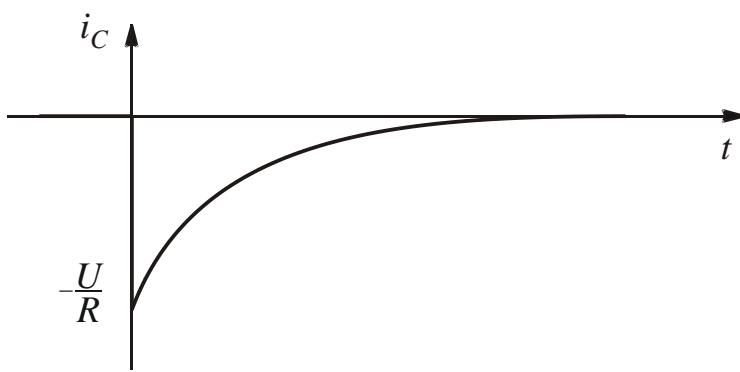


Рис. 6.9

При периодическом переключении рубильника из положения 1 в положение 2 и обратно графики изменения  $u_{\tilde{N}}$  и  $i_{\tilde{N}}$  будут иметь вид, представленный на [рис. 6.10](#).

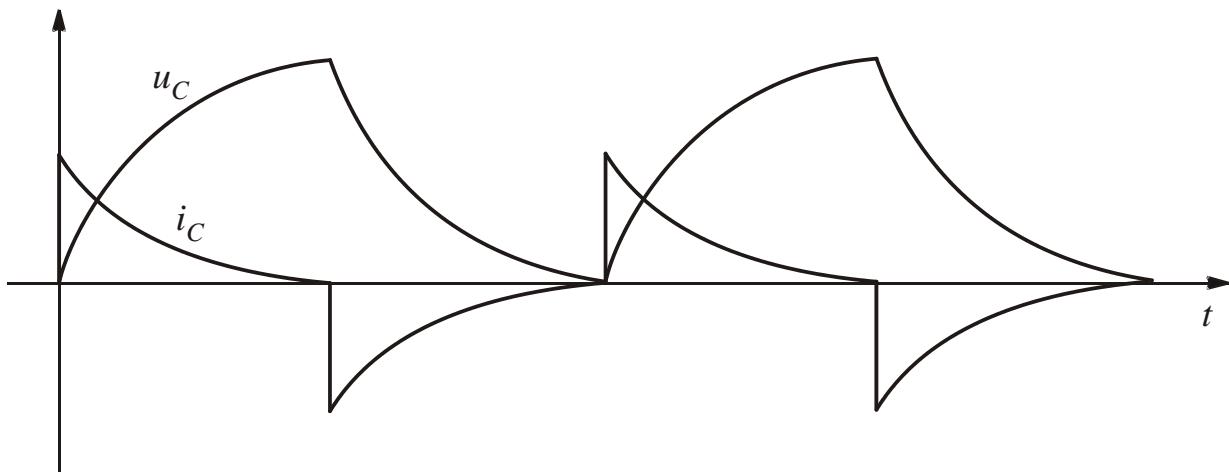


Рис. 6.10

Если путем подбора параметров добиться, чтобы  $\tau_{\text{зад}}$  стало много больше  $\tau_{\text{дл}}$ , то график изменения  $u_{\tilde{N}}$  будет иметь вид, представленный на [рис. 6.11](#).

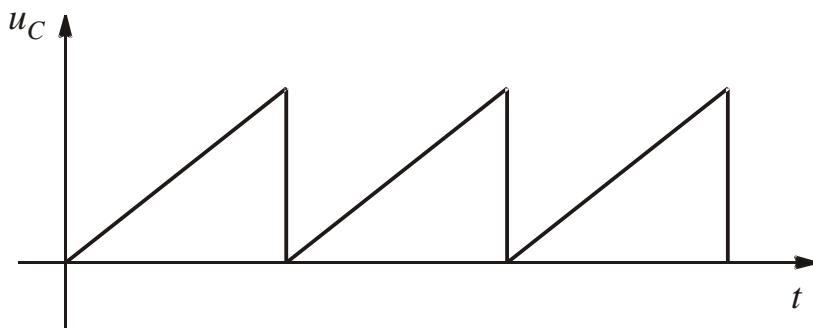


Рис. 6.11

В этом случае схема на [рис. 6.7](#) будет являться простейшим генератором пилообразного напряжения (релаксационным генератором), который используют в качестве генератора развертки в телевизорах и осциллографах.

В Московском политехническом музее демонстрируют телевизионный приемник с механической разверткой. Механизм механической развертки выставлен на обозрение отдельно. Он представляет собой отполированный до зеркального блеска винт с вертикальной осью, приводимый во вращение электродвигателем. Высота этого телевизора около полутора метров, круглый экран размером немногого превышает пятирублевую монету.

Именно использование релаксационного генератора, в основу принципа действия которого положены переходные процессы, сделало возможным повсеместное применение телевизионных приемников.

### 6.2.4. Подключение реальной катушки к источнику постоянного напряжения

Схема замещения анализируемой цепи приведена на [рис. 6.12](#).

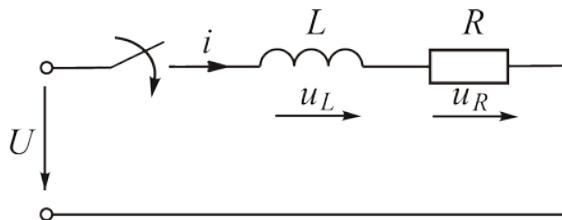


Рис. 6.12

Уравнение электрического состояния в дифференциальной форме:

$$u_L + u_R = U.$$

После подстановки  $u_L$  и  $u_R$ , выраженных по закону Ома, получим уравнение с одной переменной:

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = U.$$

Решение этого уравнения является суммой двух слагаемых:

$$i_L = i_{L\text{и}\delta} + i_{L\text{нн}}.$$

Найдем  $i_{L\text{и}\delta}$  в схеме при  $t = \infty$ . Индуктивный элемент не оказывает сопротивления постоянному току, вместо него будет закоротка. Тогда  $i_{L\text{и}\delta} = \frac{U}{R}$ .

Вычислим  $i_{L\text{нн}}$  по закону экспоненты:

$$i_{L\text{нн}} = A \delta^{pt}.$$

1. Составим характеристическое уравнение для определения  $p$ :  $Lp + R = 0$ .

$$\text{Отсюда } p = -\frac{R}{L}.$$

$$\text{Постоянная времени } \tau = \frac{1}{|p|} = \frac{L}{R}.$$

Так как  $[L] = \Gamma_\text{H} = \text{с} \cdot \text{Ом}$ , то  $[\tau] = \text{с}$ .

2. Определим постоянную интегрирования  $A$  из начальных условий с использованием законов коммутации.

В начальный момент времени



$$i_L(0+) = i_{L\text{пр}}(0+) + i_{L\text{св}}(0+).$$

По первому закону коммутации  $i_L(0+) = i_L(0-)$ . До коммутации схема не была подключена к источнику энергии, поэтому  $i_L(0-) = 0$ .

Принужденная составляющая  $i_{L\text{пр}} = \frac{U}{R}$  – постоянная величина. Свободная составляющая в начальный момент  $i_{L\text{св}}(0+) = A$ .

После подстановки получим:  $0 = \frac{U}{R} + A$ . Отсюда  $A = -\frac{U}{R}$ .

Тогда закон изменения тока  $i_L = \frac{U}{R} - \frac{U}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$ .

Закон изменения напряжения  $u_R = Ri_L = U - Ue^{-\frac{R}{L}t}$ .

Закон изменения напряжения  $u_L = L \frac{di_L}{dt} = L \frac{U}{R} \cdot \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} = U e^{-\frac{R}{L}t}$ .

В любой момент времени  $u_R + u_L = U - Ue^{-\frac{R}{L}t} + Ue^{-\frac{R}{L}t} = U$ .

Проиллюстрируем полученные законы изменения электрических величин графиками.

График тока  $i_L$  (рис. 6.13) получаем как сумму графиков  $i_{L\text{пр}}$  и  $i_{L\text{св}}$ . Составляющая тока  $i_{L\text{пр}} = \frac{U}{R} = \text{const}$ . Свободная составляющая меняется по закону экспоненты и стремится к нулю. В начальный момент  $i_{L\text{св}}(0+) = -\frac{U}{R}$ .

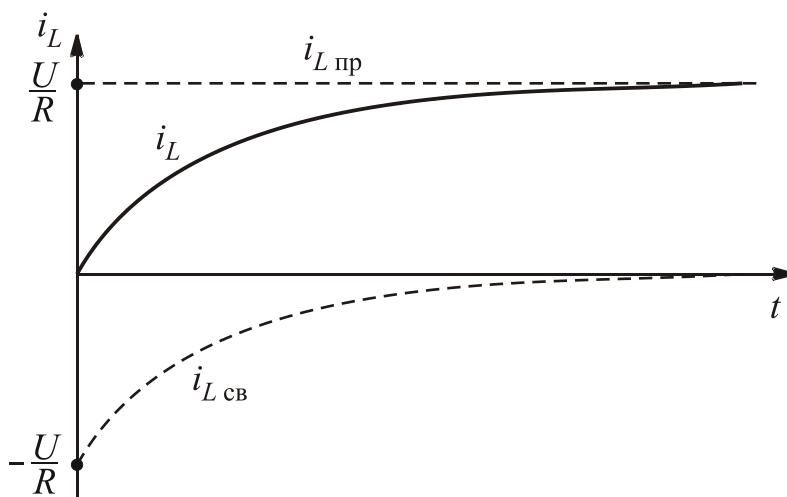


Рис. 6.13

Из графика видно, что ток в индуктивной катушке меняется плавно и стремится к принужденной составляющей.

Графики изменения напряжений  $u_R$  и  $u_L$  приведены на [рис. 6.14](#).

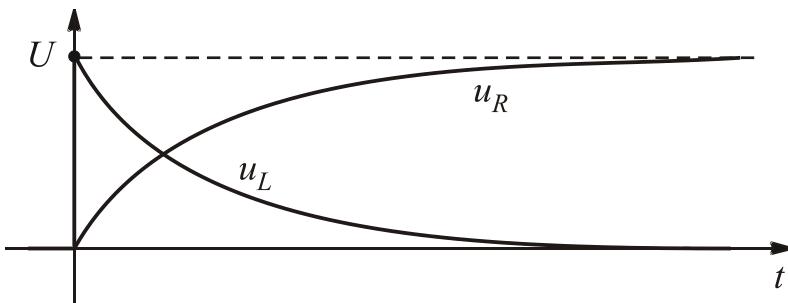


Рис. 6.14

График  $u_R$  аналогичен графику тока  $i_L$ , так как  $u_R = R i_L$ .

Напряжение  $u_L$  в начальный момент возрастает скачком до величины входного напряжения, а затем по экспоненциальному закону уменьшается до нуля.

Рационально самостоятельно проанализировать, как будут изменяться графики при перемене значений  $R$  и  $L$ .

### 6.2.5. Короткое замыкание индуктивной катушки

Схема замещения анализируемой цепи изображена на [рис. 6.15](#).

До замыкания ключа в индуктивной катушке был ток от источника энергии. После коммутации входной ток будет замыкаться по закоротке. Ток в индуктивной катушке не может исчезнуть мгновенно. Он будет замыкаться

по пути наименьшего сопротивления, т. е. по закоротке.

Уравнение электрического состояния контура с током  $i_L$ :

$$L \frac{di_L}{dt} + R i_L = 0.$$

Уравнение однородное, поэтому принужденная составляющая тока  $i_{L\delta} = 0$ .

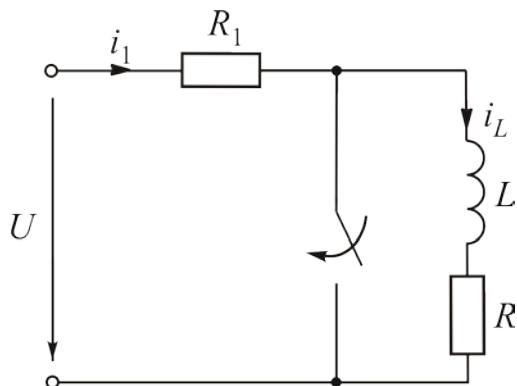


Рис. 6.15

Свободная составляющая тока  $i_{L\text{н}} = A \dot{a}^{pt}$ .

Характеристическое уравнение  $Lp + R = 0$ . Отсюда  $p = -\frac{R}{L}$ .

Найдем постоянную интегрирования  $A$ . Уравнение для начальных условий:



$$i_L(0+) = i_{L\text{нн}}(0+).$$

Согласно первому закону коммутации

$$i_L(0+) = i_L(0-).$$

В схеме при  $t = 0-$  сопротивление индуктивного элемента равно нулю, поэтому

$$i_L(0-) = \frac{U}{R_1 + R}.$$

В начальный момент времени свободная составляющая  $i_{L\text{нн}}(0+) = A$ .

После подстановки получим

$$\frac{U}{R_1 + R} = A.$$

Тогда закон изменения тока  $i_L = \frac{U}{R_1 + R} e^{-\frac{R}{L}t}$ . График изменения тока показан на [рис. 6.16](#).

Рассмотрим изменение тока  $i_1$ . До коммутации ток  $i_1(0-) = i_L(0-) = \frac{U}{R_1 + R}$ . После коммутации ток  $i_1(0+)$  замыкается по закоротке и равен

$i_1(0+) = \frac{U}{R_1}$ . Таким он и останется, если режим работы не изменится. График тока  $i_1$  представлен на [рис. 6.17](#).

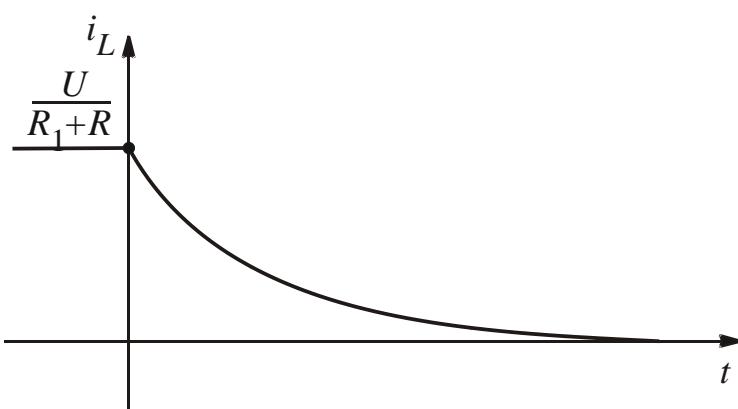


Рис. 6.16

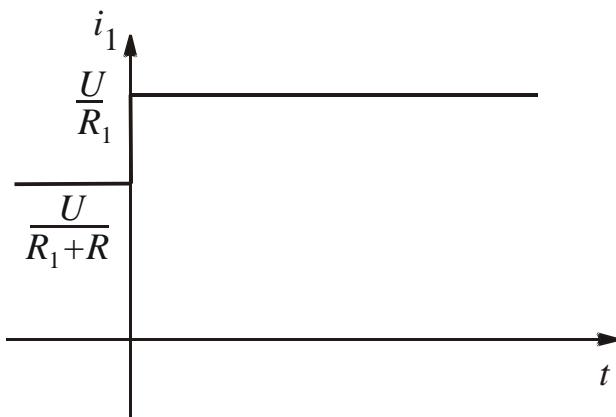


Рис. 6.17

Ток в ветви без индуктивной катушки может изменяться скачком.

### 6.2.6. Подключение реальной индуктивной катушки к источнику синусоидального напряжения

Схема замещения рассматриваемой цепи изображена на [рис. 6.18](#). Входное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ .

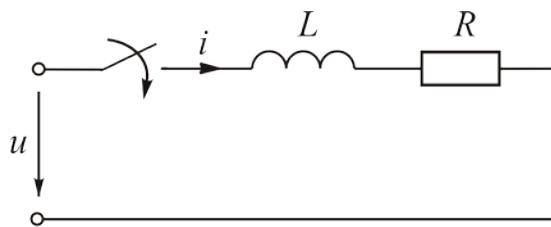


Рис. 6.18

Уравнение электрического состояния в дифференциальной форме:

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = u .$$

Закон изменения тока  $i_L$  ищем как сумму двух слагаемых:

$$i_L = i_{L\text{т}\delta} + i_{L\text{н}\delta} .$$

Найдем ток  $i_{L\text{т}\delta}$ , который меняется по синусоидальному закону:

$$i_{L\text{т}\delta} = I_{Lm\text{т}\delta} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi) = I_{Lm\text{т}\delta} \sin(\omega t + \psi_{i\text{т}\delta}) .$$

Проведем расчет для комплексов максимальных значений:

$$\dot{I}_{Lm\text{т}\delta} = \frac{\dot{U}_m}{R + jL\omega} = \frac{U_m e^{j\psi_u}}{Z e^{j\varphi}} = I_{Lm\text{т}\delta} e^{j(\psi_u - \varphi)} = I_{Lm\text{т}\delta} e^{j\psi_{i\text{т}\delta}} .$$

Вычислим  $i_{L\text{н}\hat{\alpha}}$  по закону экспоненты:  $i_{L\text{н}\hat{\alpha}} = Ae^{pt}$ .

Характеристическое уравнение  $Lp + R = 0$  дает решение:

$$p = -\frac{R}{L}.$$

Определим постоянную интегрирования  $A$ .

В начальный момент времени  $i_L(0+) = i_{L\text{i}\delta}(0+) + i_{L\text{н}\hat{\alpha}}(0+)$ .

По первому закону коммутации  $i_L(0+) = i_L(0-)$ . До коммутации схема не была подключена к источнику энергии, поэтому  $i_L(0-) = 0$ . Принужденная составляющая в начальный момент  $i_{L\text{i}\delta}(0+) = I_{Lm\text{i}\delta} \sin \psi_{i\delta}$ . Это конкретное значение тока. Свободная составляющая в начальный момент  $i_{L\text{н}\hat{\alpha}}(0+) = A$ .

После подстановки получим

$$0 = I_{Lm\text{i}\delta} \sin \psi_{i\delta} + A.$$

Отсюда  $A = -I_{Lm\text{i}\delta} \sin \psi_{i\delta}$ , т. е.  $i_{L\text{i}\delta}(0+)$  и  $i_{L\text{н}\hat{\alpha}}(0+)$  равны и противоположны. Тогда закон изменения тока

$$i_L = I_{Lm\text{i}\delta} \sin(\omega t + \psi_{i\delta}) - I_{Lm\text{i}\delta} \sin \psi_{i\delta} e^{-\frac{Rt}{L}}.$$

График тока  $i_L$  (рис. 6.19) получаем как сумму графиков  $i_{L\text{i}\delta}$  и  $i_{L\text{н}\hat{\alpha}}$ . Составляющая тока  $i_{L\text{i}\delta}$  меняется по синусоидальному закону. На рис. 6.19 начальная фаза  $\psi_{i\delta} > 0$ , поэтому синусоида смещена влево. Свободная составляющая меняется по закону экспоненты и стремится к нулю. В начальный момент  $i_{L\text{н}\hat{\alpha}}(0+) = -i_{L\text{i}\delta}(0+)$ .

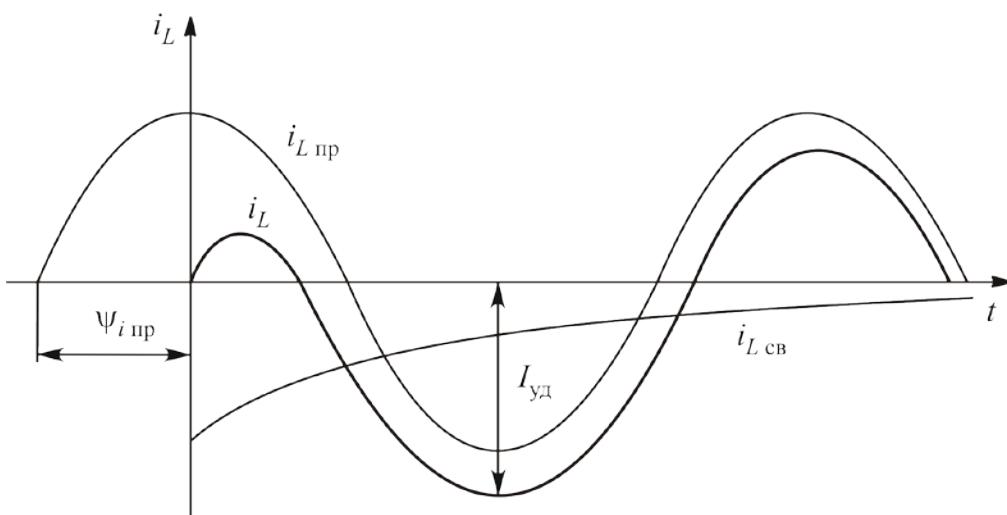


Рис. 6.19

График подтверждает плавное изменение тока в индуктивной катушке. Если  $\psi_{i\bar{i}\delta} = 0$ , свободная составляющая не возникнет и переходного процесса не будет.

В те промежутки времени, когда  $i_{L\bar{i}\delta}$  и  $i_{L\bar{n}\delta}$  имеют одинаковые знаки, ток  $i_L$  имеет значения, большие задаваемых источником. Говорят об ударном токе  $I_{\delta\ddot{a}}$ , который может достигать значения  $2I_{Lm\bar{i}\delta}$ .

### 6.2.7. Учет первого закона коммутации на практике

В [подпараграфе 6.2.4](#) и [подпараграфе 6.2.6](#) рассмотрены процессы, происходящие при подключении реальной индуктивной катушки к источнику напряжения.

Рассмотрим, что произойдет, если ключ разомкнуть. Ток  $i_L$  не может измениться скачком. В момент, наступивший сразу после коммутации, ток останется тем же, что и до коммутации. На месте разрыва возникает перенапряжение, так как сопротивление воздушного промежутка велико. Это приводит к пробою, появляется искрение (электрическая дуга), портящее оборудование.

Ситуация ухудшается, если к зажимам индуктивной катушки подключен вольтметр ([рис. 6.20](#)).

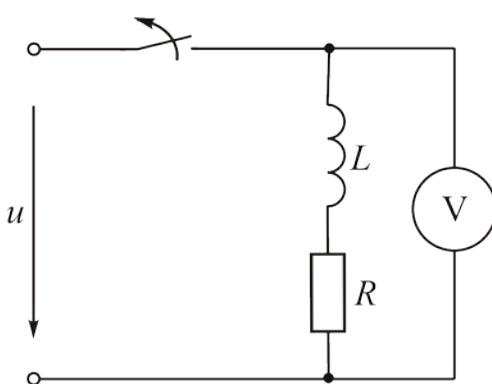


Рис. 6.20

Сопротивление вольтметра велико, ток в нем при нормальной работе мал. При размыкании ключа большой ток индуктивной катушки, который не может измениться скачком, будет замыкаться через вольтметр, сопротивление которого все же меньше, чем у воздушного промежутка.

На вольтметре возникает перенапряжение, прибор может выйти из строя. Такое же напряжение будет и на индуктивной катушке, что может привести к пробою ее изоляции.

Поэтому нельзя отключать незашунтированную катушку с током. Сначала нужно убрать напряжение либо параллельно подключить ветвь для замыкания тока катушки.

### 6.2.8. Подключение цепи с последовательным соединением реальной индуктивной катушки и конденсатора к источнику постоянного напряжения

Схема замещения анализируемой цепи представлена на [рис. 6.21](#).

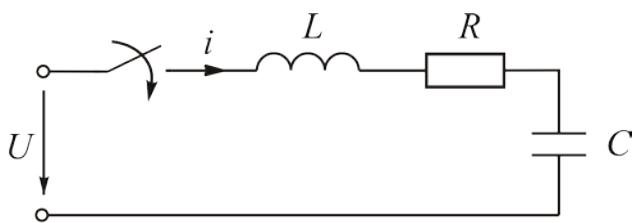


Рис. 6.21

Уравнение электрического состояния в дифференциальной форме:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_{\tilde{N}} = U .$$

В уравнение входят две изменяющиеся величины. Более рационально сначала искать закон изменения напряжения  $u_C$ .

Подставив в уравнение состояния

$$i = i_{\tilde{N}} = C \frac{du_{\tilde{N}}}{dt} \text{ и } \frac{di}{dt} = \frac{di_{\tilde{N}}}{dt} = C \frac{d^2u_{\tilde{N}}}{dt^2},$$

получим:

$$LC \frac{d^2u_{\tilde{N}}}{dt^2} + RC \frac{du_{\tilde{N}}}{dt} + u_{\tilde{N}} = U .$$

После деления на  $LC$  уравнение примет вид

$$\frac{d^2u_{\tilde{N}}}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_{\tilde{N}}}{dt} + \frac{1}{LC} u_{\tilde{N}} = \frac{U}{LC} .$$

Ищем закон изменения напряжения  $u_{\tilde{N}}$  как сумму двух слагаемых:

$$u_{\tilde{N}} = u_{\tilde{N}_{i\delta}} + u_{\tilde{N}_{n\hat{\alpha}}} .$$

Найдем принужденную составляющую  $u_{\tilde{N}_{i\delta}}$ . После окончания переходного процесса ( $t = \infty$ ) конденсатор постоянный ток не пропускает ( $i_{i\delta} = 0$ ), поэтому  $u_{\tilde{N}_{i\delta}} = U$ .

Определим свободную составляющую  $u_{\tilde{N}_{n\hat{\alpha}}}$ . Закон ее изменения зависит от вида корней характеристического уравнения.

Составим характеристическое уравнение на основе уравнения электрического состояния:  $p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} = 0$ .



$$\text{Его корни } p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

В зависимости от параметров схемы возможны три вида корней характеристического уравнения.

**Вариант 1.** Если  $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$ , корни будут действительными и разными.

Такой случай переходного процесса называют апериодическим.

При этом закон изменения свободной составляющей представляет собой сумму двух экспонент:

$$u_{\tilde{N}} = \hat{A}_1 e^{p_1 t} + \hat{A}_2 e^{p_2 t}.$$

Постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$  вычислим из начальных условий с использованием законов коммутации.

При  $t = 0+$  напряжение  $u_{\tilde{N}}(0+) = u_{\tilde{N}_{\text{вх}}}(0+) + u_{\tilde{N}_{\text{вн}}}(0+)$ .

По второму закону коммутации  $u_{\tilde{N}}(0+) = u_{\tilde{N}}(0-)$ . До коммутации схема не была подключена к источнику энергии, поэтому  $u_{\tilde{N}}(0-) = 0$ .

Принужденная составляющая является в данном примере постоянной величиной, следовательно,  $u_{\tilde{N}_{\text{вх}}}(0+) = U$ .

Свободная составляющая в начальный момент

$$u_{\tilde{N}_{\text{вн}}}(0+) = \hat{A}_1 + \hat{A}_2.$$

Подставив эти значения, получим уравнение с двумя неизвестными:

$$0 = U + \hat{A}_1 + \hat{A}_2.$$

Необходимо второе уравнение. Дифференцируем уравнение, по которому идет решение:

$$\frac{du_{\tilde{N}}}{dt} = \frac{du_{\tilde{N}_{\text{вх}}}}{dt} + \frac{du_{\tilde{N}_{\text{вн}}}}{dt}.$$

Из уравнения по закону Ома  $i = i_{\tilde{N}} = C \frac{du_{\tilde{N}}}{dt}$  найдем  $\frac{du_{\tilde{N}}}{dt} = \frac{i_{\tilde{N}}}{C}$ .

Так как  $u_{\tilde{N}_{\text{вх}}} = U = \text{const}$ , производная  $\frac{du_{\tilde{N}_{\text{вх}}}}{dt} = 0$ . Производная свободной составляющей  $\frac{du_{\tilde{N}_{\text{вн}}}}{dt} = p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}$ .

Уравнение в начальный момент времени имеет вид



$$\frac{i_{\tilde{N}}(0+)}{C} = p_1 A_1 + p_2 A_2.$$

Анализируемая цепь является одноконтурной, поэтому  $i_{\tilde{N}}(0+) = i_L(0+) = i_L(0-)$ . До коммутации цепь не была подключена к источнику энергии, поэтому  $i_L(0-) = 0$ .

Таким образом получаем систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} 0 = U + A_1 + A_2; \\ 0 = \dot{\delta}_1 \dot{A}_1 + \dot{\delta}_2 \dot{A}_2. \end{cases}$$

Выразим  $\dot{A}_2$  из первого уравнения:  $\dot{A}_2 = -U - A_1$ . После подстановки во второе уравнение получим:

$$0 = p_1 A_1 + p_2 (-U - A_1).$$

Отсюда  $0 = p_1 A_1 - p_2 U - p_2 A_1$ .

Тогда  $A_1 = \frac{p_2 U}{p_1 - p_2}$ ;  $A_2 = -U - A_1 = -U - \frac{p_2 U}{p_1 - p_2} = -\frac{p_1 U}{p_1 - p_2}$ .

Закон изменения напряжения на конденсаторе при его заряде от источника постоянного напряжения имеет вид

$$u_{\tilde{N}} = U + \frac{U}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}).$$

Закон изменения тока найдем по закону Ома:

$$i = C \frac{du_{\tilde{N}}}{dt} = \frac{CU}{p_1 - p_2} (p_2 p_1 e^{p_1 t} - p_1 p_2 e^{p_2 t}).$$

Произведение корней равно свободному члену характеристического уравнения:  $p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{LC}$ .

После подстановки и сокращения получим:

$$i = \frac{U}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Проиллюстрируем процессы графиками, приведенными на [рис. 6.22](#).



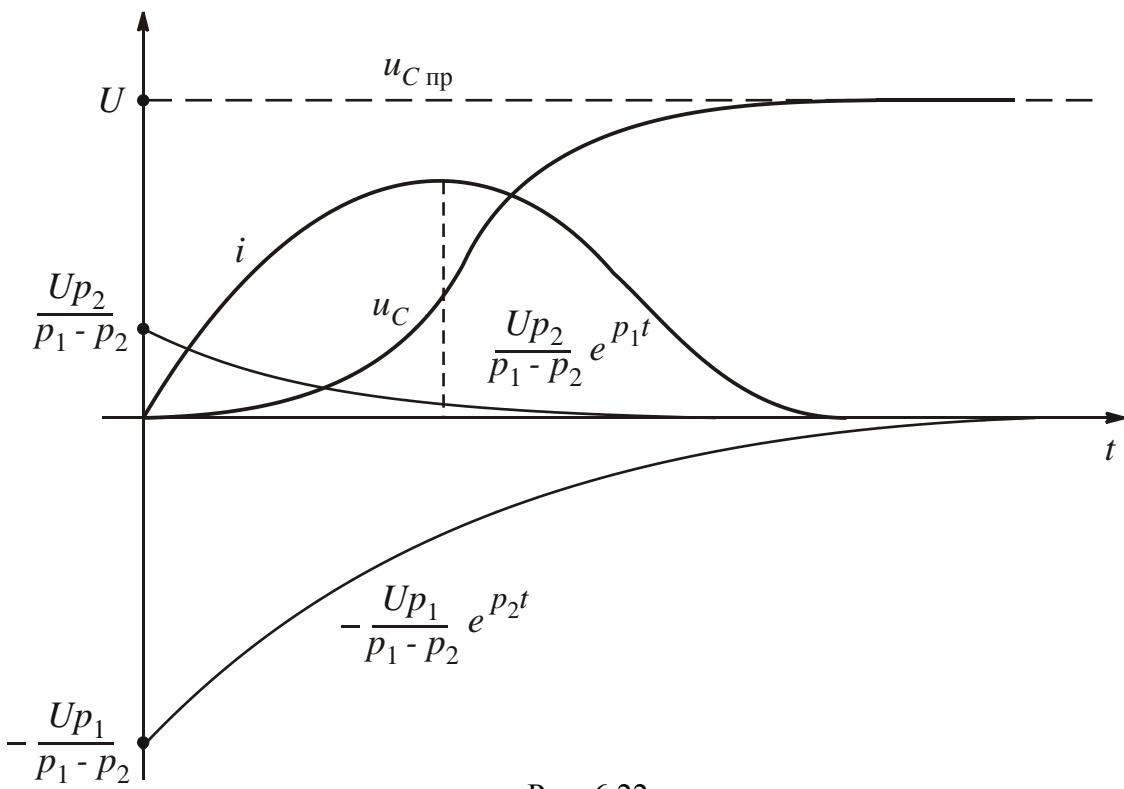


Рис. 6.22

Ток в начале переходного процесса и после его окончания равен нулю.

График напряжения  $u_C$  складывается из трех: постоянного напряжения  $u_{\text{н}\tilde{\tau}\delta} = U$  и двух экспоненциальных функций. Если  $p_2 < p_1$ , то  $\tau_2 > \tau_1$ , т. е. значения экспоненты  $-\frac{Up_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t}$  убывают медленнее, чем у экспоненты  $\frac{Up_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t}$ .

Так как ток  $i_C = C \frac{du_C}{dt}$  в начальный момент равен нулю, то

$\frac{du_C}{dt}(0+) = 0$  и касательная к графику  $u_C$  при  $t = 0 +$  является горизонтальной прямой. При максимальном значении тока кривая  $u_C$  имеет точку перегиба.

**Вариант 2.** Если  $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$ , корни будут действительными и равными:

$$p_1 = p_2 = p = -\frac{R}{2L}.$$

Такой случай переходного процесса называют критическим или предельным апериодическим.

При этом свободная составляющая напряжения меняется по закону

$$u_{C\tilde{N}\tilde{A}} = (A_1 + A_2 t)e^{pt}.$$

Вычислим постоянные интегрирования  $A_1$  и  $A_2$ .

При  $t = 0+$  напряжение  $u_C(0+) = u_{C\tilde{N}\tilde{A}}(0+) + u_{C\tilde{N}\tilde{D}}(0+)$ . При этом  $u_C(0+) = u_C(0-) = 0$ ,  $u_{C\tilde{N}\tilde{D}}(0+) = U$ ,  $u_{C\tilde{N}\tilde{A}}(0+) = A_1$ .

Подставив эти значения, получим уравнение

$$0 = U + A_1.$$

Отсюда  $A_1 = -U$ .

Чтобы найти  $A_2$ , нужно второе уравнение, которое получаем дифференцированием первого:

$$\frac{du_{\tilde{N}}}{dt} = \frac{du_{\tilde{N}\tilde{D}}}{dt} + \frac{du_{\tilde{N}\tilde{A}}}{dt}.$$

Производная  $\frac{du_{\tilde{N}}}{dt} = \frac{i_{\tilde{N}}}{C}$ ,  $\frac{du_{\tilde{N}\tilde{D}}}{dt} = 0$ ,  $\frac{du_{\tilde{N}\tilde{A}}}{dt} = pA_1e^{pt} + A_2e^{pt} + A_2tpe^{pt}$ .

Уравнение в начальный момент времени имеет вид

$$\frac{i_{\tilde{N}}(0+)}{C} = pA_1 + A_2.$$

Так как  $i_C(0+) = i_L(0+) = i_L(0-) = 0$ , получаем уравнение

$$0 = pA_1 + A_2.$$

Подставив  $A_1 = -U$ , получим  $A_2 = pU$ .

Закон изменения напряжения на конденсаторе в критическом случае его заряда от источника постоянного напряжения имеет вид

$$u_{\tilde{N}} = U + (-U + pUt)e^{pt}$$

либо

$$u_{\tilde{N}} = U[1 - (1 - pt)]e^{pt}.$$

Закон изменения тока можно получить по формуле  $i_{\tilde{N}} = C \frac{du_{\tilde{N}}}{dt}$ .

Графики изменения  $u_{\tilde{N}}$  и  $i_{\tilde{N}}$  аналогичны приведенным на [рис. 6.22](#).

**Вариант 3.** Если  $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$ , корни будут комплексными сопряженными.

Такой случай переходного процесса называют колебательным.

Введем обозначения:



$\frac{R}{2L} = \beta$  – коэффициент затухания;

$$\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \omega_0 \text{ – угловая частота собственных колебаний контура.}$$

Тогда  $p_{1,2} = -\beta \pm j\omega_0$ .

Свободную составляющую удобно записать как синусоиду, затухающую по экспоненте:

$$u_{\tilde{N}} = A e^{-\beta t} \sin(\omega_0 t + \lambda).$$

Нужно вычислить  $A$  и  $\lambda$ .

При  $t = 0+$  напряжение  $u_{\tilde{N}}(0+) = u_{\tilde{N}\text{тд}}(0+) + u_{\tilde{N}\text{нн}}(0+)$ . По второму закону коммутации  $u_{\tilde{N}}(0+) = u_{\tilde{N}}(0-) = 0$ . Принужденная составляющая  $u_{\tilde{N}\text{тд}}(0+) = U$ . Свободная составляющая в начальный момент  $u_{\tilde{N}\text{нн}}(0+) = A \sin \lambda$ .

Подставив эти значения, запишем уравнение с двумя неизвестными:

$$0 = U + A \sin \lambda.$$

Второе уравнение получаем дифференцированием первого:

$$\frac{du_{\tilde{N}}}{dt} = \frac{du_{\tilde{N}\text{тд}}}{dt} + \frac{du_{\tilde{N}\text{нн}}}{dt}.$$

Производная  $\frac{du_{\tilde{N}}}{dt} = \frac{i_{\tilde{N}}}{C}$ ,  $\frac{du_{\tilde{N}\text{тд}}}{dt} = 0$ ,  $\frac{du_{\tilde{N}\text{нн}}}{dt} = -A\beta e^{-\beta t} \sin(\omega_0 t + \lambda) + A e^{-\beta t} \omega_0 \cos(\omega_0 t + \lambda)$ .

Уравнение в начальный момент имеет вид

$$\frac{i_{\tilde{N}}(0+)}{C} = -A\beta \sin \lambda + A\omega_0 \cos \lambda.$$

Так как  $i_{\tilde{N}}(0+) = i_L(0+) = i_L(0-) = 0$ , получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = U + A \sin \lambda; \\ 0 = -A\beta \sin \lambda + A\omega_0 \cos \lambda. \end{cases}$$

Отсюда  $A = -\frac{U}{\sin \lambda}$ .



Разделив второе уравнение на  $A \cos \lambda$ , получим:

$$0 = -\beta \operatorname{tg} \lambda + \omega_0.$$

Отсюда  $\operatorname{tg} \lambda = \frac{\omega_0}{\beta}$ . Тогда  $\lambda = \operatorname{Arctg} \frac{\omega_0}{\beta}$ . Далее можно вычислить  $A$ .

Очевидно, что  $\omega_0$  и  $\beta$  являются катетами прямоугольного треугольника с углом  $\lambda$  при вершине ([рис. 6.23](#)).

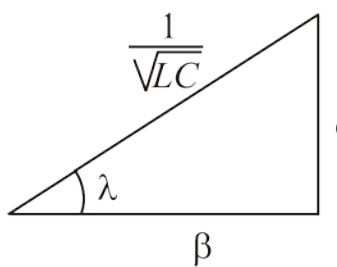


Рис. 6.23

Квадрат гипотенузы этого треугольника по теореме Пифагора равен  $(\beta^2 + \omega_0^2) = p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{LC}$ , отсюда гипотенуза равна  $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Тогда  $\sin \lambda = \omega_0 \sqrt{LC}$ ,

$$A = -\frac{U}{\omega_0 \sqrt{LC}}.$$

Закон изменения напряжения на конденсаторе в колебательном случае его заряда от источника постоянного напряжения имеет вид

$$u_{\tilde{N}} = U - \frac{U}{\omega_0 \sqrt{LC}} \cdot e^{-\beta t} \sin(\omega_0 t + \lambda).$$

Закон изменения тока можно найти по закону Ома [[1](#)]:

$$i_{\tilde{N}} = C \frac{du_{\tilde{N}}}{dt} = \frac{U}{\omega_0 L} e^{-\beta t} \sin \omega_0 t.$$

Графики изменения напряжения  $u_{\tilde{N}}$  и тока  $i_{\tilde{N}}$  приведены на [рис. 6.24](#).

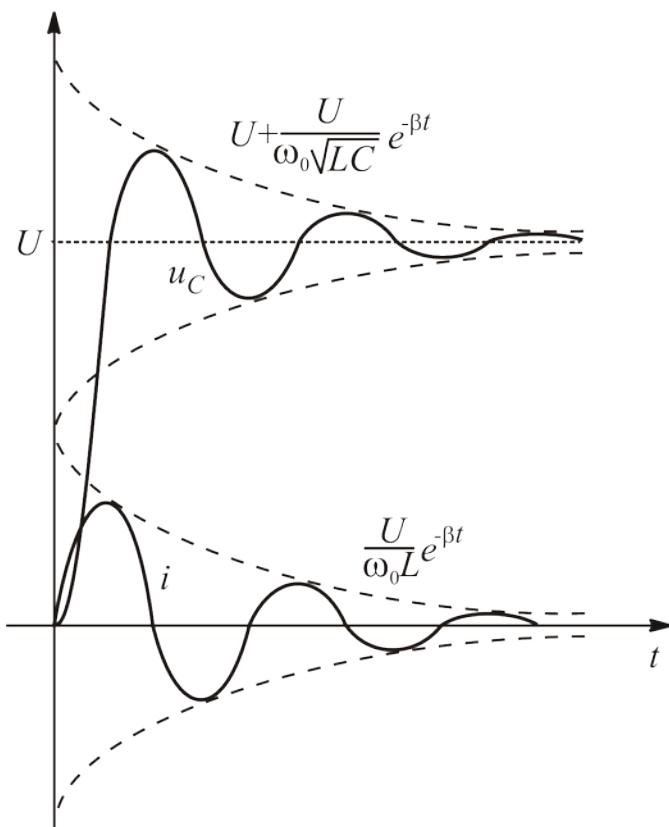


Рис. 6.24

В начальный момент  $\frac{du_{\tilde{N}}}{dt}(0+) = 0$ , поэтому касательная к графику  $u_{\tilde{N}}$  при  $t = 0+$  является горизонтальной прямой.

Экстремальным значениям тока соответствуют точки перегиба графика напряжения  $u_{\tilde{N}}$ .

Кривая тока совершает затухающие по экспоненте колебания относительно нулевого значения, кривая напряжения – относительно величины входного напряжения  $U$ . Величина  $u_{\tilde{N}}$  не может превзойти значение  $2U$ .

### 6.2.9. Подключение цепи с последовательным соединением реальной индуктивной катушки и конденсатора к источнику синусоидального напряжения

Алгоритм расчета не отличается от алгоритма расчета аналогичной цепи постоянного тока.

Уравнение электрического состояния  $L \frac{di}{dt} + Ri + u_{\tilde{N}} = u$ ,

где  $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ .

Принципиально отличается расчет принужденной составляющей напряжения  $u_{\tilde{N}_{\text{тд}}}$ , которая меняется по синусоидальному закону

$$u_{\tilde{N}_{\text{тд}}} = U_{m\tilde{N}_{\text{тд}}} \sin(\omega t + \psi_{u\tilde{N}_{\text{тд}}}).$$

Сначала рационально вычислить комплекс максимального значения напряжения

$$\dot{U}_{mC\bar{\delta}} = -j \frac{1}{C\omega} \cdot \dot{I}_{m\bar{\delta}}.$$

Ток найдем по закону Ома:

$$\dot{I}_{m\bar{\delta}} = \frac{\dot{U}_m}{R + jL\omega - j\frac{1}{C\omega}} = \frac{\dot{U}_m}{Z} = \frac{U_m e^{j\psi_u}}{Z e^{j\varphi}} = I_{m\bar{\delta}} e^{j(\psi_u - \varphi)} = I_{m\bar{\delta}} e^{j\psi_{i\bar{\delta}}}.$$

### 6.2.10. Расчет переходного процесса в разветвленной цепи

Схема замещения анализируемой цепи представлена на [рис. 6.25](#).

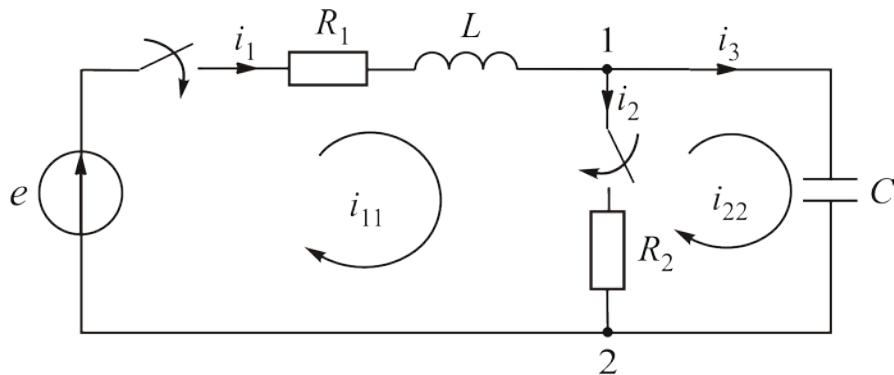


Рис. 6.25

Составим систему уравнений электрического состояния в дифференциальной форме. Это уравнения по законам Кирхгофа для мгновенных значений схемы после коммутации.

Выявим узлы (1, 2), ветви, направим токи. Число уравнений равно числу ветвей без источника тока. По первому закону Кирхгофа можно составить одно уравнение. Два уравнения дописываем по второму закону Кирхгофа. Получаем систему уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0; \\ L \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + R_2 i_2 = e; \\ R_2 i_2 - \frac{1}{C} \int i_3 dt = 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Неизвестные токи найдем как сумму двух слагаемых:

$$i_1 = i_{1\text{н}\hat{\alpha}} + i_{1\text{н}\hat{\alpha}};$$

$$i_2 = i_{2\text{н}\hat{\alpha}} + i_{2\text{н}\hat{\alpha}};$$

$$i_3 = i_{3\text{н}\hat{\alpha}} + i_{3\text{н}\hat{\alpha}}.$$

Принужденные составляющие вычислим в схеме при  $t = \infty$ .

Вычислим свободные составляющие.

Запись законов изменения свободных составляющих зависит от вида корней характеристического уравнения. Можно предложить несколько способов его составления.

1. Путем последовательных подстановок систему (6.1) превращаем в одно уравнение с одной переменной величиной [2]. Для получения характеристического уравнения правую часть нужно приравнять нулю, переменную величину заменить единицей, ее производную –  $p$ , вторую производную –  $p^2$ , интеграл –  $\frac{1}{p}$  и т. д.

2. Записываем систему уравнений (6.1) для свободных составляющих:

$$\begin{cases} i_{1\text{н}\hat{\alpha}} - i_{2\text{н}\hat{\alpha}} - i_{3\text{н}\hat{\alpha}} = 0; \\ L \frac{di_{1\text{н}\hat{\alpha}}}{dt} + R_1 i_{1\text{н}\hat{\alpha}} + R_2 i_{2\text{н}\hat{\alpha}} = 0; \\ R_2 i_{2\text{н}\hat{\alpha}} - \frac{1}{N\delta} \int i_{3\text{н}\hat{\alpha}} dt = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Решение системы для любого из токов  $i_{j\text{н}\hat{\alpha}}$  в общем случае представляет собой сумму экспоненциальных функций, каждая группа которых с одинаковыми показателями должна удовлетворять этим уравнениям. Поэтому дальше будем рассуждения относительно одного из корней  $p$ . Запишем свободные составляющие токов в схеме на [рис. 6.25](#) следующим образом:

$$i_{1\text{н}\hat{\alpha}} = A e^{pt}, \quad i_{2\text{н}\hat{\alpha}} = B e^{pt}, \quad i_{3\text{н}\hat{\alpha}} = C e^{pt}.$$

Тогда производная  $\frac{di_{1\text{н}\hat{\alpha}}}{dt} = pAe^{pt} = pi_{1\text{н}\hat{\alpha}}$ , интеграл  $\int i_{3\text{н}\hat{\alpha}} dt = \frac{1}{p} C e^{pt} = \frac{i_{3\text{н}\hat{\alpha}}}{\delta}$ .

Подставив эти выражения в систему (6.2), получим:

$$\begin{cases} i_{1\text{н}\hat{\alpha}} - i_{2\text{н}\hat{\alpha}} - i_{3\text{н}\hat{\alpha}} = 0; \\ Lp i_{1\text{н}\hat{\alpha}} + R_1 i_{1\text{н}\hat{\alpha}} + R_2 i_{2\text{н}\hat{\alpha}} = 0; \\ R_2 i_{2\text{н}\hat{\alpha}} - \frac{i_{3\text{н}\hat{\alpha}}}{N\delta} = 0. \end{cases} \quad (6.3)$$



## ГЛАВА 6. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ

### 6.2. Классический метод расчета переходных процессов

Система (6.3) не содержит производных и интегралов. Переход от системы линейных дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений называют алгебраизацией системы дифференциальных уравнений.

Свободные составляющие токов можно определить как отношение соответствующих определителей:

$$i_{1\text{нн}} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad i_{2\text{нн}} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad i_{3\text{нн}} = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ Lp + R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -\frac{1}{Cp} \end{vmatrix}$  – главный определитель системы,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -\frac{1}{Cp} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ Lp + R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{Cp} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} +1 & -1 & 0 \\ Lp + R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Так как в определителях  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  один из столбцов равен нулю, то эти определители тоже равны нулю.

Тогда  $i_{1\text{нн}} = \frac{0}{\Delta}, i_{2\text{нн}} = \frac{0}{\Delta}, i_{3\text{нн}} = \frac{0}{\Delta}$ .

Чтобы свободные составляющие токов не были равны нулю, главный определитель  $\Delta$  должен быть равен нулю. Это и есть *характеристическое уравнение*

Раскроем главный определитель:  $-\frac{R_2}{Cp} - (Lp + R_1)\left(\frac{1}{Cp} + R_2\right) = 0$ .

Перемножив выражения в скобках, получим:

$$\frac{R_2}{Cp} + \frac{Lp + R_1}{Cp} + LpR_2 + R_1R_2 = 0.$$

Приведя к общему знаменателю и отбросив его, получим *характеристическое уравнение*

$$LNR_2p^2 + (L + CR_1R_2)p + R_1 + R_2 = 0.$$



## ГЛАВА 6. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ

### 6.2. Классический метод расчета переходных процессов

3. Составим систему дифференциальных уравнений для свободных составляющих контурных токов  $i_{11\text{н}\hat{a}}$  и  $i_{22\text{н}\hat{a}}$ :

$$\begin{cases} L \frac{di_{11\text{н}\hat{a}}}{dt} + R_1 i_{11\text{н}\hat{a}} + R_2 i_{11\text{н}\hat{a}} - R_2 i_{22\text{н}\hat{a}} = 0; \\ -R_2 i_{11\text{н}\hat{a}} + R_2 i_{22\text{н}\hat{a}} + \frac{1}{N} \int i_{22\text{н}\hat{a}} dt = 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

После алгебраизации системы (6.4) получим систему (6.5):

$$\begin{cases} (Lp + R_1 + R_2)i_{11\text{н}\hat{a}} - R_2 i_{22\text{н}\hat{a}} = 0; \\ -R_2 i_{11\text{н}\hat{a}} + (R_2 + \frac{1}{Np})i_{22\text{н}\hat{a}} = 0. \end{cases} \quad (6.5)$$

**Свободные составляющие токов  $i_{11\text{н}\hat{a}}$  и  $i_{22\text{н}\hat{a}}$  можно определить как отношение соответствующих определителей:**

$$i_{11\text{н}\hat{a}} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad i_{22\text{н}\hat{a}} = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Так как в определителях  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  один из столбцов равен нулю, то эти определители тоже равны нулю.

Тогда  $i_{11\text{н}\hat{a}} = \frac{0}{\Delta}$ ,  $i_{22\text{н}\hat{a}} = \frac{0}{\Delta}$ .

Чтобы свободные составляющие токов не были равны нулю, главный определитель  $\Delta$  должен быть равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Lp + R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + \frac{1}{Cp} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, получим уравнение

$$Lp^2 + RR_1R_2 + R_2^2 + \frac{Lp}{Cp} + \frac{R_1 + R_2}{Cp} - R_2^2 = 0.$$

Приведя к общему знаменателю и отбросив его, получим **характеристическое уравнение**

$$LCR_2 p^2 + (L + CR_1 R_2)p + R_1 + R_2 = 0.$$



4. Составив систему дифференциальных уравнений по методу узловых потенциалов для свободных составляющих и проведя ее алгебраизацию, получим характеристическое уравнение, как и в предыдущих пунктах, т. е. из условия, что главный определитель  $\Delta = 0$ .

5. Запишем комплексное сопротивление схемы относительно одной из ветвей. При этом источники ЭДС нужно закоротить, источники тока – разорвать.

Комплексное сопротивление схемы на [рис. 6.25](#) относительно ветви с источником ЭДС

$$\underline{Z} = jL\omega + R_1 + \frac{R_2 \left( -j \frac{1}{C\omega} \right)}{R_2 - j \frac{1}{C\omega}}.$$

Заменив в этом уравнении  $-j$  на  $\frac{1}{j}$ , получим:

$$\underline{Z} = jL\omega + R_1 + \frac{R_2 \frac{1}{jC\omega}}{R_2 + \frac{1}{jC\omega}}.$$

Заменив  $j\omega$  на  $p$ , получим сопротивление  $Z(p)$ .

### *Характеристическое уравнение*

$$Z(p) = 0.$$

Для рассматриваемого примера

$$Lp + R_1 + \frac{\frac{R_2}{Cp}}{\frac{R_2}{Cp} + \frac{1}{Cp}} = 0.$$

Приведя к общему знаменателю и отбросив его, получим:

$$LpR_2 + R_1R_2 + \frac{Lp}{Cp} + \frac{R_1}{Cp} + \frac{R_2}{Cp} = 0.$$

Еще раз приведя к общему знаменателю и отбросив его, получим **характеристическое уравнение**



$$LCR_2 p^2 + (L + CR_1 R_2) p + R_1 + R_2 = 0.$$

Если в схеме после удаления источников энергии появятся коротко-замкнутые ветви или имеют место резонансные режимы, то часть корней может обращаться в нуль. Поэтому необходимо следовать рекомендации: комплексное сопротивление записывать относительно той ветви, где находится искомая величина.

6. Для схемы с двумя узлами проще всего составить характеристическое уравнение, записав суммарную комплексную проводимость ветвей, соединяющих эти узлы. При этом источники ЭДС закорачиваются, источники тока разрываются.

Для рассматриваемого примера комплексная проводимость

$$\underline{Y} = \frac{1}{jL\omega + R_1} + \frac{1}{R_2} + jC\omega.$$

Заменив  $j\omega$  на  $p$ , получим  $Y(p)$ . *Характеристическое уравнение*  $Y(p) = 0$ :

$$\frac{1}{Lp + R_1} + \frac{1}{R_2} + Cp = 0.$$

Приведя к общему знаменателю и отбросив его, получим *характеристическое уравнение*

$$LCR_2 p^2 + (L + CR_1 R_2) p + R_1 + R_2 = 0.$$

7. В схеме с одним реактивным элементом проще всего заменить разветленную цепь эквивалентной ей одноконтурной. Для этого источники ЭДС закорачиваем, источники тока разрываем, разрываем ветвь с реактивным элементом и заменяем все резисторы одним с эквивалентным сопротивлением. Схема превращается в последовательное соединение ([рис. 6.26, а](#) и [б](#)).

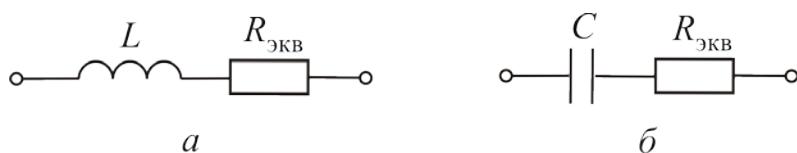


Рис. 6.26

Для схемы [рис. 6.26, а](#) корень  $p = -\frac{R_{\text{экв}}}{L}$ , для схемы [рис. 6.26, б](#) –  $p = -\frac{1}{R_{\text{экв}}C}$ .

После нахождения корней характеристического уравнения в зависимо-

сти от их вида записываем закон изменения свободных составляющих. Входящие в них постоянные интегрирования ищем из начальных условий. Начальные условия бывают независимыми (ННУ) и зависимыми (ЗНУ).

Независимые начальные условия – величины, подчиняющиеся законам коммутации, т. е. токи в индуктивных катушках и напряжения на конденсаторах. Их вычисляют в установившемся режиме до коммутации при  $t = 0 -$ .

Зависимые начальные условия можно найти в два этапа.

*Этап 1.* Решение системы уравнений (6.1) с учетом ННУ.

При наличии в схеме двух реактивных элементов система решения не даст.

*Этап 2.* Дополнительные уравнения получают дифференцированием системы уравнений (6.1):

$$\begin{cases} \frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt} - \frac{di_3}{dt} = 0; \\ L \frac{d^2 i_1}{dt^2} + R_1 \frac{di_1}{dt} + R_2 \frac{di_2}{dt} = \frac{de}{dt}; \\ R_2 \frac{di_2}{dt} - \frac{i_3}{C} = 0. \end{cases} \quad (6.6)$$

Если в схеме больше двух реактивных элементов, нужно дифференцировать систему уравнений (6.6).

Преподавателями курса ТОЭ разработаны приемы, позволяющие упростить нахождение постоянных интегрирования.

**Рассмотрим алгоритм нахождения ЗНУ для схемы с одним реактивным элементом.**

1. В схеме при  $t = 0 -$  находим ННУ:  $i_L(0-)$  и  $u_C(0-)$ .
2. В схеме при  $t = 0 +$  вычисляем ЗНУ. Схему составляем с учетом ННУ, которые могут быть нулевыми и ненулевыми.

Если  $i_L(0+) = i_L(0-) = 0$ , то вместо индуктивного элемента можно изобразить разрыв цепи ([рис. 6.27, а](#)). Если  $u_C(0+) = u_C(0-) = 0$ , то емкостный элемент можно заменить закороткой ([рис. 6.27, б](#)).

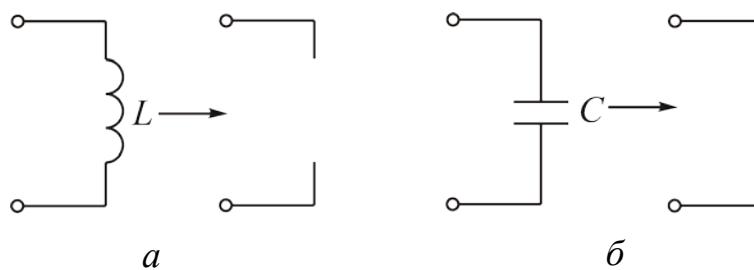


Рис. 6.27

Если  $i_L(0+) = i_L(0-) \neq 0$ , то индуктивный элемент заменяем источником

тока с током  $i_L(0-)$ , направления которых совпадают (рис. 6.28, а). Если  $u_C(0+) = u_C(0-) \neq 0$ , то емкостный элемент заменяют источником ЭДС с ЭДС, равной  $u_C(0-)$ . Направления их противоположны (рис. 6.28, б).

Условно-положительные направления  $u_C$  и  $i_C$  совпадают.

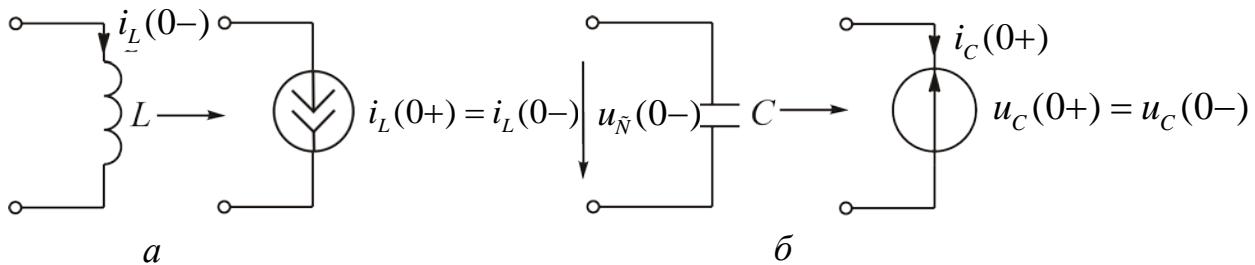


Рис. 6.28

Рассмотрим алгоритм нахождения ЗНУ в схеме с двумя реактивными элементами.

1. В схеме при  $t=0-$  находим ННУ:  $i_L(0-)$  и  $u_C(0-)$ .
2. В схеме при  $t=0+$ , составленной с учетом ННУ (см. выше), нужно найти искомую величину, а также  $u_L(0+)$  и  $i_C(0+)$ .
3. В схеме при  $t=0+$ , составленной для производных электрических величин, нужно найти значение производной искомой величины. Для расчетов можно применять все методы, известные для определения электрических величин.

Рассмотрим этот алгоритм на конкретном примере.

*Пример 6.1.* Вычислить  $i(0+)$  и  $\frac{di}{dt}(0+)$  в схеме рис. 6.29, если  $E = 120$  В,  $R = 40$  Ом,  $L = 0,1$  Гн,  $C = 10$  мкФ.

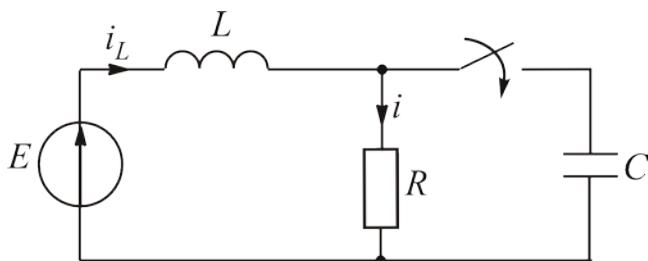


Рис. 6.29

#### Решение

1. Найдем ННУ в схеме при  $t=0-$ . Конденсатор не был подключен к источнику энергии, поэтому  $u_C(0-) = 0$ . Так как в схеме действует источник постоянной ЭДС, то вместо индуктивного элемента – заморотка, ток  $i_L(0-) = \frac{E}{R} = 3$  А.

2. Составим схему при  $t=0+$  с учетом ННУ (рис. 6.30). Индуктивный элемент учтем источником тока с током  $i_L(0+) = i_L(0-)$ . Вместо емкостного элемента – заморотка. Ток источника тока будет замыкаться по заморотке, поэтому  $i(0+) = 0$ ,  $i_C(0+) = i_L(0+) = 3$  А. Напряжение  $u_L(0+)$  найдем как разность потенциалов между концом и началом стрелки:  $u_L(0+) = E = 120$  В.

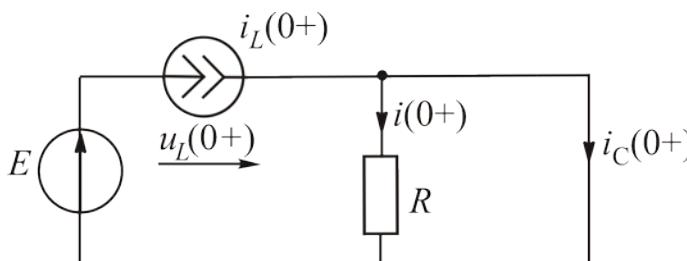


Рис. 6.30

3. Схема для производных электрических величин при  $t = 0+$  представлена на [рис. 6.31](#). Вместо ЭДС  $E$  – производная  $\frac{dE}{dt} = 0$ , поэтому вместо источника ЭДС будет закоротка. Вместо тока источника тока  $i_L(0+)$  –

его производная  $\frac{di_L}{dt}(0+) = \frac{u_L(0+)}{L}$ . Вместо напряжения  $u_C(0+)$  – его производная  $\frac{du_C}{dt}(0+) = \frac{i_C(0+)}{C}$ . Ток  $i_C(0+) \neq 0$ , поэтому в схеме для производных вместо емкостного элемента будет не закоротка, а источник ЭДС, направление которой противоположно току  $i_C(0+)$ .

$$\text{По закону Ома производная тока } \frac{di}{dt}(0+) = \frac{i_C(0+)}{R} = \frac{\frac{du_C}{dt}(0+)}{R} = \frac{\frac{i_C(0+)}{C}}{R} = \frac{3 \cdot 10^6}{10 \cdot 40} = 7500 \text{ А/с}.$$

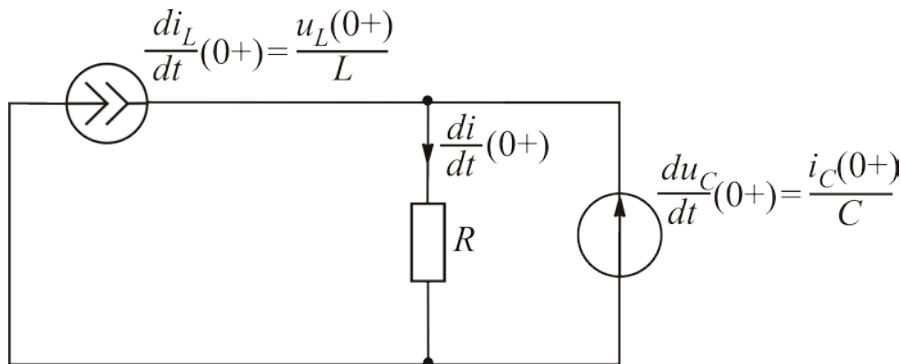


Рис. 6.31

В заключение следует отметить, что для примерного качественного построения графика какой-либо электрической величины не обязательно искать закон ее изменения. Достаточно установить ее значения в схемах при  $t = 0-$ ;  $t = 0+$  и  $t = \infty$ , т. е. после окончания переходного процесса.

### 6.3. Операторный метод расчета переходных процессов

Метод основан на использовании понятия об изображении функции времени для упрощения математических расчетов. С этим приемом мы уже встречались: замена чисел их логарифмами, изображение гармонических функций вращающимися векторами, которым можно сопоставить комплексные числа.

Функции вещественной переменной  $f(t)$ , называемой оригиналом, со-

## ГЛАВА 6. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ

### 6.3. Операторный метод расчета переходных процессов

поставляют другую функцию  $F(p)$  комплексного переменного  $p = \beta \pm j\omega$ , называемую изображением. Это сопоставление производят по формуле, представляющей собой прямое преобразование Лапласа над функцией  $f(t)$ :

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot f(t) dt.$$

Оригиналу  $f(t)$  соответствует операторное изображение  $F(p)$ :

$$F(p) = f(t).$$

Возможность расчета переходных процессов с помощью преобразования Лапласа впервые в 1862 г. показал М. Е. Ващенко-Захарченко. Независимо от него англичанин О. Хевисайд в конце XIX века впервые применил операторный метод для расчета реального переходного процесса, не приводя математического обоснования метода.

Оригиналы и соответствующие им изображения представлены в [табл. 6.1](#).

Таблица 6.1

Оригинал	Изображение
$A = \text{const}$	$\frac{A}{p}$
$e^{\pm\alpha t}$	$\frac{1}{p \mp \alpha}$
$\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p) - f(0)$
$\frac{df(t)}{dt} / f(0) = 0$	$pF(p)$
$\int f(t) dt$	$\frac{F(p)}{p} + \frac{\text{const}}{p}$
$\int f(t) dt / f(0) = 0$	$\frac{F(p)}{p}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$



Рассмотрим несколько примеров.

Пример 6.2. Записать операторное изображение напряжения на резистивном элементе.

Мгновенное значение напряжения  $u_R = Ri$ .

Операторное изображение напряжение  $U_R(p) = RI(p)$ , т. е.

$$Ri = RI(p).$$

Пример 6.3. Записать операторное изображение напряжения на индуктивном элементе  $u_L = L \frac{di}{dt}$ .

В соответствии с [табл. 6.1](#) операторное изображение напряжения

$$U_L(p) = LpI(p) - Li(0).$$

Пример 6.4. Записать операторное изображение напряжения на емкостном элементе.

Мгновенное значение без указания пределов интегрирования  $u_C = \frac{1}{C} \int idt$ . Более полная запись имеет вид

$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t idt.$$

Тогда операторное изображение напряжения

$$U_C(\delta) = \frac{I(p)}{Cp} + \frac{u_C(0)}{p}.$$

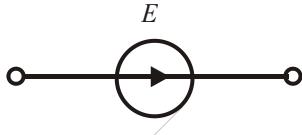
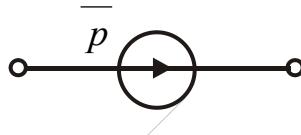
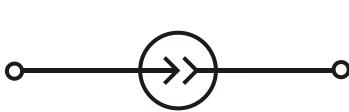
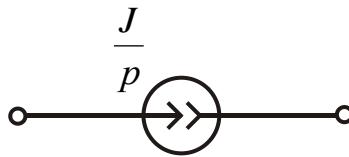
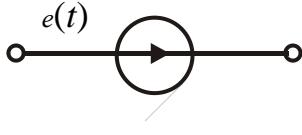
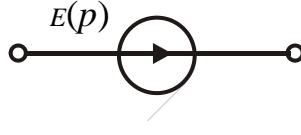
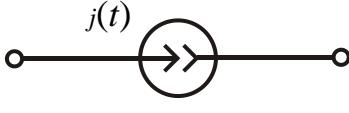
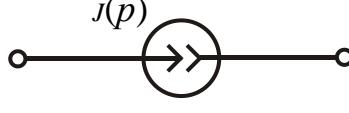
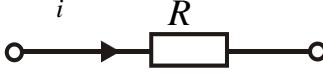
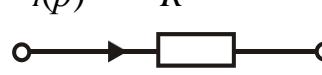
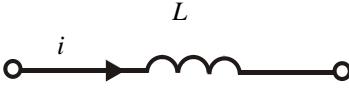
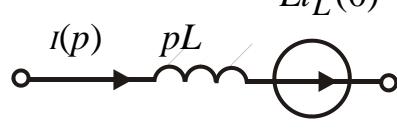
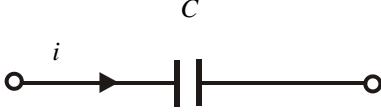
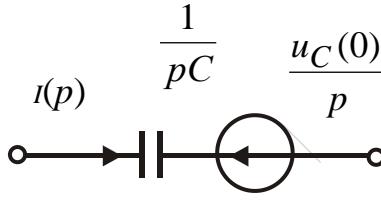
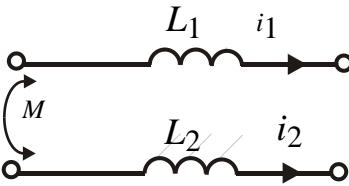
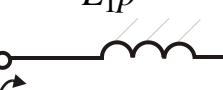
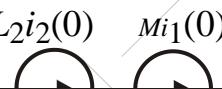
При расчетах удобно использовать операторные схемы замещения, приведенные в [табл. 6.2](#).



## ГЛАВА 6. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ

### 6.3. Операторный метод расчета переходных процессов

Таблица 6.2

Идеальный элемент схемы замещения	Операторная схема замещения элемента
	$\frac{E}{p}$ 
	$\frac{J}{p}$ 
	$E(p)$ 
	$J(p)$ 
	$I(p)$ 
	$I(p)$ 
	$I(p)$ 
	$L_1 i_1(0)$ $M i_2(0)$ $L_1 p$  $M p$  $L_2 p$  $L_2 i_2(0)$  $M i_1(0)$ 



Источники ЭДС  $Li_L(0)$ ,  $Mi(0)$  и  $\frac{u_c(0)}{p}$  учитывают ненулевые независимые начальные условия. Их называют внутренними. Внутренняя ЭДС  $Li_L(0)$  обусловлена запасом энергии в магнитном поле катушки из-за наличия в ней тока  $i_L(0)$  непосредственно перед коммутацией. Внутренняя ЭДС  $\frac{u_c(0)}{p}$  обусловлена запасом энергии в электрическом поле конденсатора вследствие наличия на нем напряжения  $u_c(0)$  непосредственно до коммутации.

Рассмотрим законы Ома и Кирхгофа в операторной форме.

На [рис. 6.32](#) изображена схема замещения активной ветви.

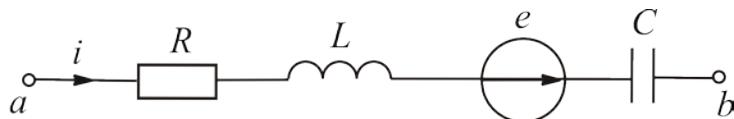


Рис. 6.32

Запишем мгновенное значение напряжения  $u_{ab}$  как разность потенциалов между точками b и a:

$$u_{ab} = \frac{1}{C} \int idt - e + L \frac{di}{dt} + Ri.$$

Это линейное дифференциальное уравнение.

Операторная схема замещения рассматриваемой ветви приведена на [рис. 6.33](#).

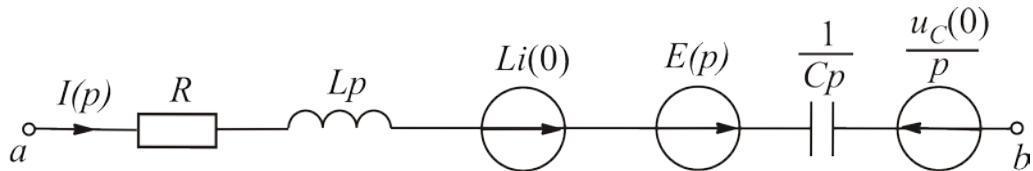


Рис. 6.33

Операторное изображение напряжения имеет вид

$$U_{ab}(p) = \frac{u_c(0)}{p} + \frac{1}{Cp} I(p) - E(p) - Li(0) + Lp I(p) + RI(p).$$

Это уравнение является алгебраическим, решение которого много проще, чем дифференциального. Следовательно, применение операционного исчисления позволяет заменить дифференциальные уравнения алгебраическими.

Выразим из полученного уравнения операторное изображение тока:

$$I(p) = \frac{U_{ab}(p) + E(p) + Li(0) - \frac{u_{\tilde{N}}(0)}{p}}{R + Lp + \frac{1}{C\delta}},$$

где  $R + Lp + \frac{1}{C\delta} = Z(p)$  – операторное сопротивление.

При нулевых ННУ формула для определения операторного изображения тока будет иметь следующий вид:

$$I(p) = \frac{U_{ab}(p) + E(p)}{Z(p)}.$$

Законы Кирхгофа для операторных изображений электрических величин формулируют так же, как и для самих величин.

Первый закон Кирхгофа для узла имеет вид

$$\sum_{j=1}^m I_j(p) = 0,$$

где  $m$  – число ветвей, сходящихся в узле.

Уравнение по второму закону Кирхгофа для контура можно записать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^n Z_k(p) I_k(p) = \sum_{i=1}^l E_i(p),$$

где  $n$  – число некороткозамкнутых ветвей, входящих в контур;

$l$  – число ЭДС в данном контуре.

Пример 6.5. Составить уравнение по второму закону Кирхгофа в операторной форме для контура, представленного на [рис. 6.34](#).

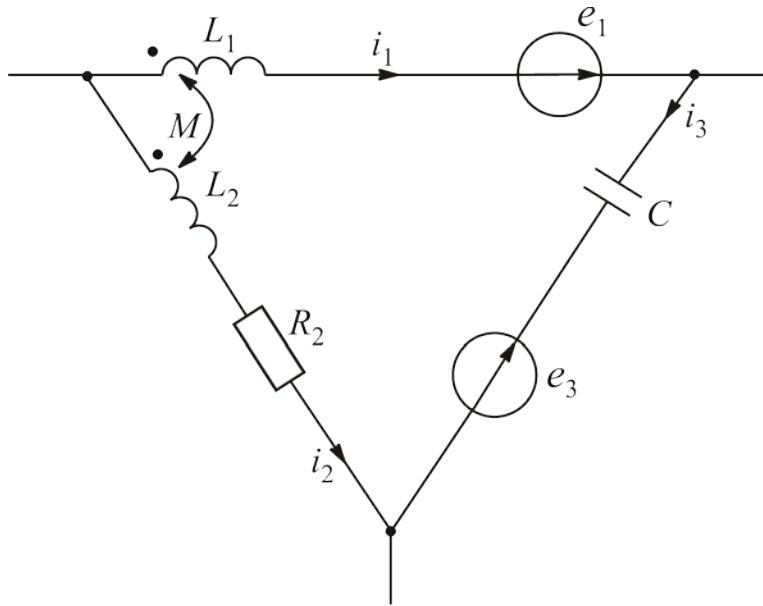


Рис. 6.34

Операторная схема замещения этого контура изображена на [рис. 6.35](#).

Уравнение по второму закону Кирхгофа для операторной схемы замещения имеет следующий вид:

$$L_1 p I_1(p) + M \delta I_2(p) + \frac{1}{C p} I_3(p) - R_2 I_2(p) - L_2 p I_2(p) - M p I_1(p) =$$

$$= L_1 i_1(0) + M i_2(0) + E_1(p) - \frac{u_{C(0)}}{p} - E_3(p) - M i_1(0) - L_2 i_2(0).$$

Расчет переходных процессов операторным методом проводим по следующему алгоритму:

1. В схеме при  $t = 0$  – ищем ННУ:  $i_L(0-)$  и  $u_C(0-)$ .
2. Составляем операторную схему замещения.
3. Ищем операторное изображение искомой величины наиболее рациональным методом. Изображение искомой величины получаем в виде отношения двух полиномов  $F_1(p)$  и  $F_2(p)$ , причем степень  $F_1(p)$  должна быть ниже степени  $F_2(p)$ .

Рис. 6.35

4. Переходим от операторного изображения к функции времени, пользуясь формулами соответствия либо теоремой разложения, имеющей следующий вид:

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t},$$

где  $p_k$  – конкретные значения корней уравнения  $F_2(p) = 0$ .

Число слагаемых экспоненциальных функций  $m$  равно числу корней.

Если есть корень  $p = 0$ , более рационально использовать теорему разложения в следующем виде:

$$\frac{F_1(p)}{p \cdot F_3(p)} = f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k \cdot F_3'(p_k)} e^{p_k t},$$

где  $p_k$  – корни, не равные нулю.

В случае кратных корней ( $p_1 = p_2 = p$ ) теорему разложения используют в виде

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(m_k - 1)!} \left[ \frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \frac{\frac{F_1(p)e^{pt}}{F_2(p)}}{(p - p_k)^{m_k}} \right]_{p=p_k},$$

где  $m_k$  – кратность.

Сначала  $F_2(p)$  нужно разделить на  $(p - p_k)^{m_k}$  и после этого дифференцировать.

Если одновременно есть нулевой корень и простые корни, то для них используют ранее рассмотренные формулы.

Приведем случай, когда корни комплексные сопряженные.

При использовании теоремы разложения в общем случае оригинал получаем как сумму экспонент. При комплексных сопряженных корнях имеет место колебательный процесс. Закон изменения искомой величины более наглядно можно записать как затухающую по экспоненте синусоиду:

$$f(t) = A e^{-\beta t} \sin(\omega_0 t + \lambda); \quad p_{1,2} = -\beta \pm j\omega_0.$$

Для перехода от показательной формы записи комплексных чисел к алгебраической используем формулу

$$Ce^{j\varphi} = C \cdot \cos \varphi + jC \cdot \sin \varphi.$$

Функция  $\cos \varphi$  – четная,  $\sin \varphi$  – нечетная.

Так как корни комплексные сопряженные, то мнимые составляющие взаимно уничтожаются, остается удвоенное значение действительной составляющей одного из корней.

Рассмотрим вышеизложенное на конкретных примерах.

Пример 6.6. Найти закон изменения тока  $i_1$  в схеме [рис. 6.36](#), если



$E = 150 \text{ В}$ ,  $R = R_1 = R_2 = 50 \text{ Ом}$ ,  $C = 100 \mu\text{Ф}$ .

Решение

1. Найдем ННУ  $u_C(0-)$  в схеме при  $t = 0-$ , представленной на [рис. 6.37](#).

Ключ разомкнут. Конденсатор постоянный ток не пропускает, поэтому вместо емкостного элемента – разрыв.

Очевидно, что  $u_C(0-) = R_2 i_1(0-)$ .

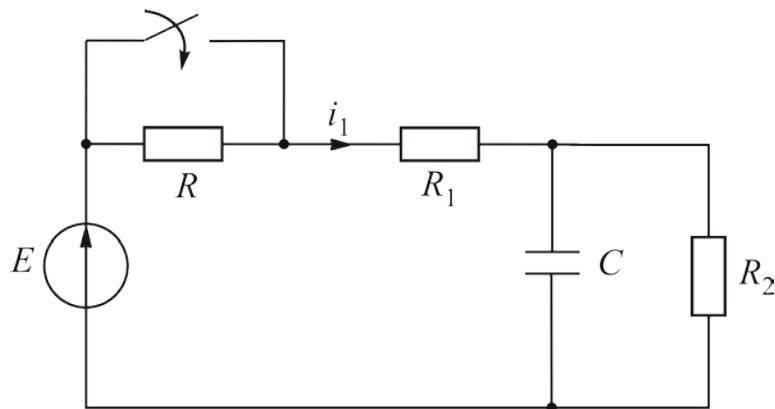


Рис. 6.36

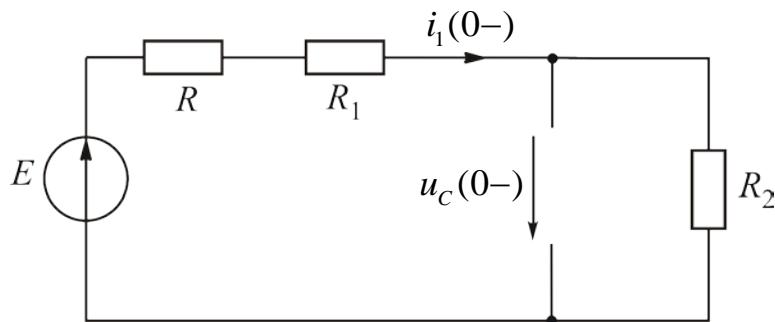


Рис. 6.37

Ток  $i_1(0-)$  находим по закону Ома:  $i_1(0-) = \frac{E}{R + R_1 + R_2} = \frac{150}{150} = 1 \text{ А}$ . Тогда  $u_C(0-) = 50 \cdot 1 = 50 \text{ В}$ .

Операторная схема замещения изображена на [рис. 6.38](#). Переходный процесс происходит после коммутации.

Изображение тока  $I_1(p)$  наиболее рационально вычислить методом напряжения между двумя узлами.

Операторное изображение напряжения

$$U_{ab}(p) = \frac{\frac{1}{R_1} \frac{E}{p} + Cp \frac{u_C(0)}{p}}{\frac{1}{R_1} + Cp + \frac{1}{R_2}} = \frac{(E + Cpu_C(0)R_1)R_2}{p(R_2 + CpR_1R_2 + R_1)} =$$

$$= \frac{150 + 0,25p}{p(2 + 50 \cdot 10^{-4} p)}.$$

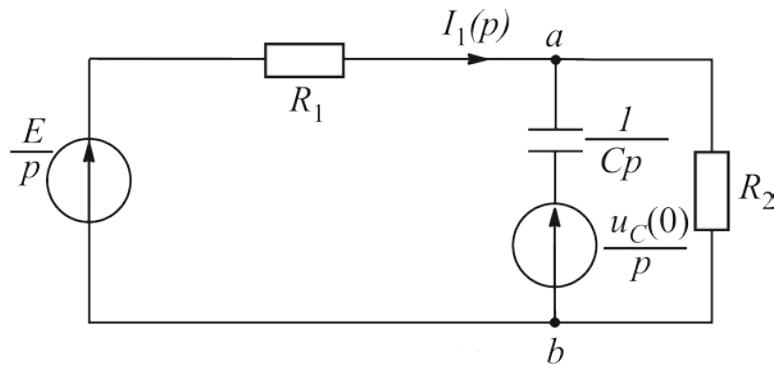


Рис. 6.38

Запишем  $U_{ab}(p)$  для ветви с искомой величиной  $I_1(p)$ :

$$U_{ab}(p) = \frac{E}{p} - R_1 I_1(p).$$

Отсюда

$$I_1(p) = \frac{\frac{E}{p} - U_{ab}(p)}{R_1} = \frac{\frac{150}{p} - \frac{150 + 0,25p}{p(2 + 50 \cdot 10^{-4} p)}}{50} =$$

$$= \frac{300 + 0,75p - 150 - 0,25p}{50p(2 + 50 \cdot 10^{-4} p)} = \frac{150 + 0,5p}{p(100 + 0,25p)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

4. Перейдем от изображения к функции времени с помощью теоремы разложения

$$i_1 = \sum_{k=1}^m \frac{F_1(p_k)}{F'_2(p_k)} e^{p_k t}.$$

В рассматриваемом примере  $F_2(p) = p(100 + 0,25p) = 0$ .

Решение уравнения дает следующие значения корней:  $p_1 = 0$ ;  $p_2 = -400 \text{ c}^{-1}$ .

## ГЛАВА 6. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ

### 6.3. Операторный метод расчета переходных процессов

Производная знаменателя  $F_2'(p) = 0,5p + 100$ .

Найдем значения  $F_1(p_k)$  и  $F_2'(p_k)$ :

$$F_1(p_1) = 150; \quad F_2'(p_1) = 100; \quad F_1(p_2) = 150 + 0,5(-400) = -50;$$

$$F_2'(p_2) = 0,5(-400) + 100 = -100.$$

$$\text{Тогда } i_1 = \frac{150}{100} + \frac{50}{100} e^{-400t} = 1,5 + 0,5e^{-400t} \text{ А.}$$

Очевидно, что нулевой корень свидетельствует о наличии принужденной составляющей.

Так как  $p_1 = 0$ , можно использовать теорему разложения в более простом виде:

$$i_1 = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^m \frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Полином  $F_3(p) = 0,25p + 100$ . Отсюда  $p = -400c^{-1}$ . Производная  $F_3'(p) = 0,25$ . Найдем значения полиномов при  $p = -400$ :

$$F_1(-400) = -50; \quad F_3'(-400) = 0,25.$$

$$\text{Тогда } i_1 = \frac{150}{100} + \frac{-50}{-400 \cdot 0,25} e^{-400t} = 1,5 + 0,5e^{-400t} \text{ А.}$$

Пример 6.7. В результате расчетов получено следующее операторное изображение искомого напряжения:

$$U_{ab}(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{1,25 \cdot 10^6}{(p + 5000)^2}. \quad \text{Корни равные: } p_1 = p_2 = p = -5000c^{-1}.$$

Кратность  $m_k = 2$ ;  $(m_k - 1) = (2 - 1) = 1$ .

$$\frac{F_2(p)}{(p - p_k)^{m_k}} = \frac{(p + 5000)^2}{(p + 5000)^2} = 1.$$

Тогда

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \left[ \frac{dF_1(p)e^{pt}}{dp \cdot 1} \right]_{p=p_1} = \left[ \frac{d(1,25 \cdot 10^6 \cdot e^{pt})}{dp} \right]_{p=-5000} =$$



$$= \left[ 1,25 \cdot 10^6 t e^{pt} \right]_{p=-5000} = 1,25 \cdot 10^6 t e^{-5000t} B.$$

Пример 6.8. С помощью теоремы разложения получено выражение ис-  
комой величины:

$$\begin{aligned} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} &= \frac{0,25 \cdot 10^6}{4000j} e^{(-1000+2000j)t} + \frac{0,25 \cdot 10^6}{-4000j} e^{(-1000-2000j)t} = \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{0,25 \cdot 10^6}{4000j} e^{(-1000+2000j)t} \right] = 2 \operatorname{Re} \left[ 62,5 e^{-1000t} \frac{e^{2000jt}}{j} \right] = \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[ 62,5 e^{-1000t} \frac{e^{2000jt}}{e^{j90^\circ}} \right] = 2 \operatorname{Re} \left[ 62,5 e^{-1000t} \cdot e^{j(2000t-90^\circ)} \right] = \\ &= 2 \cdot 62,5 e^{-1000t} \cdot \cos(2000t - 90^\circ) = 125 e^{-1000t} \sin 2000t. \text{ Угол } \lambda = 0. \end{aligned}$$

#### 6.4. Применение метода переменных состояния для расчета переходных процессов

Расчет производят на ЭВМ. В качестве переменных состояния выбирают величины, подчиняющиеся законам коммутации, т. е. токи в индуктивных катушках и напряжения на конденсаторах.

Метод основан на решении двух групп уравнений, которые записывают в матричной форме.

Первая группа – это дифференциальные уравнения цепи относительно переменных состояния. Их записывают в канонической форме, т. е. представляют решенными относительно первых производных переменных состояния по времени. Такая запись удобна для решения на ЭВМ:

$$\left[ \begin{array}{c} \dot{\sigma} \\ \dot{x} \end{array} \right] = [A][x] + [B][e],$$

где  $[x]$  – матрица переменных состояния;

$\dot{x}$  – матрица производных по времени от переменных состояния;

$[A]$  – матрица состояния;

$[e]$  – матрица внешних воздействий, которыми являются ЭДС источников ЭДС и токи источников тока.

Матрица состояния  $[A]$  всегда квадратная, размером  $n \times n$ , где  $n$  – чис-



## ГЛАВА 6. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ

### 6.4. Применение метода переменных состояния для расчета переходных процессов

ло переменных состояния. Если  $n = 2$ , матрица состояния  $[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ .

Пользуясь матрицей состояния, можно получить характеристическое уравнение

$$p^2 + bp + c = 0.$$

В этом уравнении  $b = -(\dot{A}_{11} + \dot{A}_{22})$ ,  $\tilde{n} = \dot{A}_{11}\dot{A}_{22} - \dot{A}_{12}\dot{A}_{21}$ .

Вторая группа состоит из алгебраических уравнений. Они связывают матрицу выходных величин  $[y]$  с матрицами переменных состояния  $[x]$  и внешних воздействий  $[e]$ :

$$[y] = [\tilde{N}][X] + [D][e].$$

*Пример 6.9.* Составить уравнения по методу переменных состояния для схемы [рис. 6.39](#), если искомой величиной является закон изменения напряжения на резистивном элементе  $u_R$ .

Ток в схеме один, т. е.  
 $i = i_L = i_C$ .

Уравнение по второму закону Кирхгофа в дифференциальной форме для этой схемы имеет следующий вид:

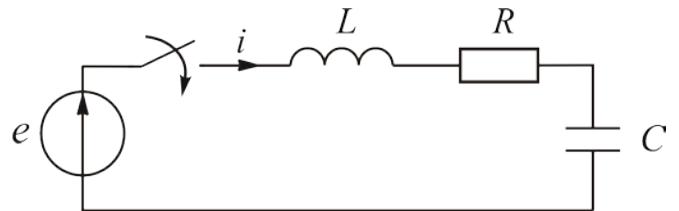


Рис. 6.39

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L + u_C = e.$$

Отсюда  $\frac{di_L}{dt} = -\frac{R}{L}i_L - \frac{1}{L}u_C + \frac{1}{L}e$ .

По закону Ома ток  $i_C = i_L = C \frac{du_C}{dt}$ .

Отсюда  $\frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C}i_L$ .

Первая группа уравнений в матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ j \end{bmatrix}.$$



## ГЛАВА 6. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ

### 6.4. Применение метода переменных состояния для расчета переходных процессов

Во вторую группу входит только одно уравнение  $u_R = Ri_L$ . Запись в матричной форме имеет следующий вид:

$$[u_R] = [R \quad 0] \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + [0 \quad 0] \begin{bmatrix} e \\ j \end{bmatrix}.$$

Для более сложных схем разработаны различные способы составления уравнений по методу переменных состояния.

Рассмотрим способ, использующий принцип наложения. Этот способ можно применять, если в схеме нет контуров, все ветви которых содержат конденсаторы, и нет узлов с ветвями, каждая из которых содержит индуктивную катушку.

*Пример 6.10.* Составим систему уравнений для нахождения законов изменения тока  $i_1$  и напряжения  $u_2$  методом переменных состояния в схеме, представленной на [рис. 6.40](#).

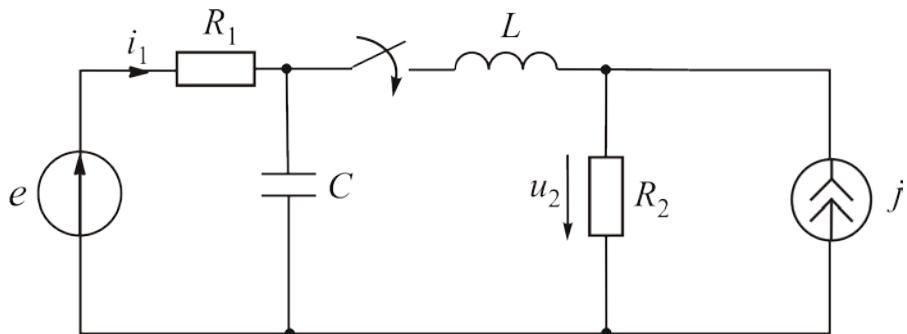


Рис. 6.40

Схему изображают после коммутации, заменяя индуктивные катушки источниками тока, конденсаторы – источниками ЭДС ([рис. 6.41](#)). Токи источников токов направлены так же, как токи в индуктивных катушках до коммутации  $[i_L(0-)]$ , ЭДС – противоположно напряжениям  $u_{\tilde{N}}(0-)$ . Ток  $i_{\tilde{N}}$  совпадает по направлению с  $u_{\tilde{N}}$ .

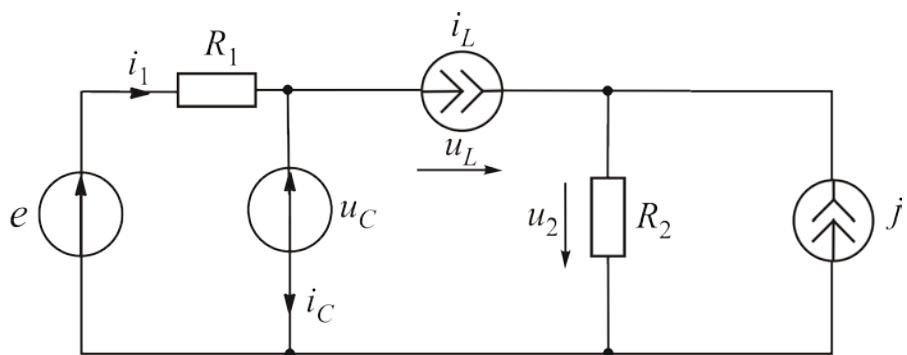


Рис. 6.41

## ГЛАВА 6. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ

### 6.4. Применение метода переменных состояния для расчета переходных процессов

По закону Ома  $u_L = L \frac{di_L}{dt}$ ;  $i_{\tilde{N}} = \tilde{N} \frac{du_{\tilde{N}}}{dt}$ .

Отсюда  $\frac{di_L}{dt} = \frac{u_L}{L}$ ;  $\frac{du_{\tilde{N}}}{dt} = \frac{i_{\tilde{N}}}{\tilde{N}}$ .

В матричной форме  $\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ u_{\tilde{N}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & \tilde{N} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_L \\ i_{\tilde{N}} \end{bmatrix}$ .

Разбиваем схему на четыре подсхемы. Тогда можно записать:

$$\begin{cases} u_L = H_{LL}i_L + H_{LC}u_C + H_{Le}e + H_{Lj}j, \\ i_C = H_{CL}i_L + H_{CC}u_C + H_{Ce}e + H_{Cj}j. \end{cases}$$

В матричной форме:

$$\begin{bmatrix} u_L \\ i_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{LL} & H_{LC} \\ H_{CL} & H_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{Le} & H_{Lj} \\ H_{Ce} & H_{Cj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ j \end{bmatrix}.$$

Отсюда уравнения электрического состояния:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}}_{[A]}^{-1} \begin{bmatrix} H_{LL} & H_{LC} \\ H_{CL} & H_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}}_{[B]}^{-1} \begin{bmatrix} H_{Le} & H_{Lj} \\ H_{Ce} & H_{Cj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ j \end{bmatrix}.$$

Вторую группу уравнений можно записать соответственно:

$$[y] = \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} H_{1L} & H_{1C} \\ H_{2L} & H_{2C} \end{bmatrix}}_{[C]} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} H_{1e} & H_{1j} \\ H_{2e} & H_{2j} \end{bmatrix}}_{[D]} \begin{bmatrix} e \\ j \end{bmatrix}.$$

Элементы матриц представляют собой входные или взаимные проводимости или сопротивления, коэффициенты передачи тока или напряжения.

Рассмотрим каждую из подсхем.

В подсхеме оставляем только один источник энергии, остальные источники ЭДС закорачиваем, ис-

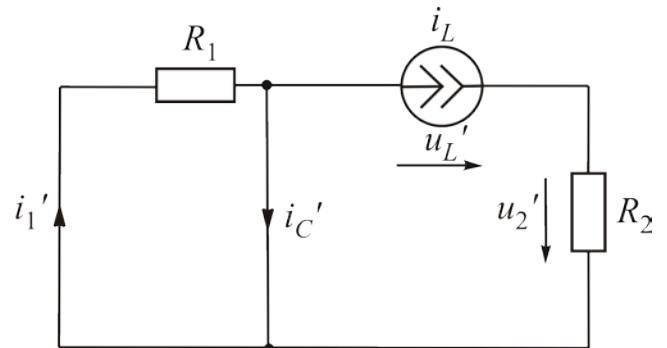


Рис. 6.42



## ГЛАВА 6. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ

### 6.4. Применение метода переменных состояния для расчета переходных процессов

точники тока – разрываем.

Подсхема 1 (рис. 6.42).

Так как в подсхеме действует только источник тока  $i_L$ , то  $u_L' = H_{LL}i_L$ ,  $i_C' = H_{CL}i_L$ ,  $i_1' = H_{1L}i_L$ ,  $u_2' = H_{2L}i_L$ .

Отсюда

$$H_{LL} = \frac{u_L'}{i_L}, H_{\tilde{N}L} = \frac{i_{\tilde{N}}'}{i_L}, H_{1L} = \frac{i_1'}{i_L}.$$

$$H_{2L} = \frac{u_2'}{i_L}.$$

Ток источника тока будет замыкаться по закоротке, поэтому ток  $i_1' = 0$ , а ток  $i_C' = -i_L$ . Напряжение на резисторе  $u_2'$  создано током  $i_L$ , поэтому  $u_2' = R_2 i_L$ . Напряжение  $u_L' = -R_2 i_L$ . Тогда  $H_{LL} = -R_2$ ;  $H_{CL} = -1$ ;  $H_{1L} = 0$ ;  $H_{2L} = R_2$

Подсхема 2 (рис. 6.43).

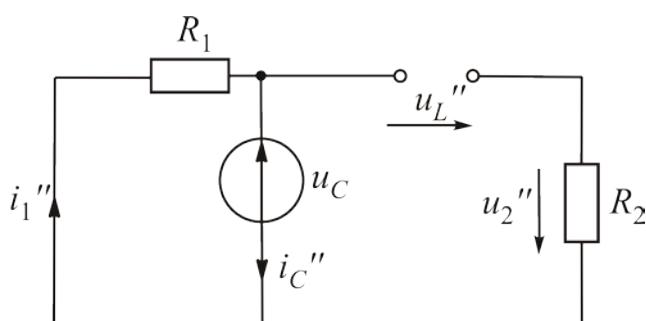


Рис. 6.43

В подсхеме действует только источник ЭДС  $u_{\tilde{N}}$ , поэтому  $u_L'' = H_{LC}u_C$ ;  $i_C'' = H_{CC}u_C$ ;  $i_1'' = H_{1C}u_C$ ;  $u_2'' = H_{2C}u_C$ .

Отсюда

$$H_{LC} = \frac{u_L''}{u_C}; H_{CC} = \frac{i_C''}{u_C}; H_{1C} = \frac{i_1''}{u_C};$$

$$H_{2C} = \frac{u_2''}{u_C}.$$

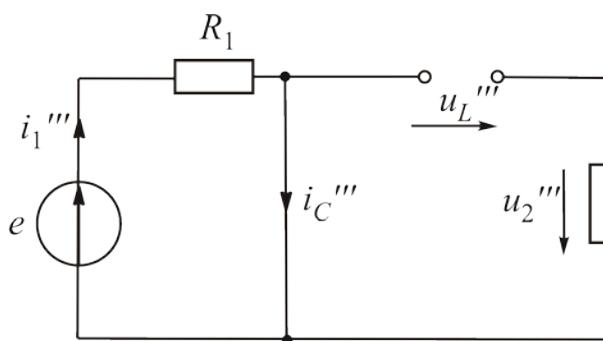


Рис. 6.44

Подсхема одноконтурная,

ток  $i_C''' = i_1''' = -\frac{e}{R_1}$ . Напряжение

$u_2''' = 0$ , напряжение  $u_L''' = e$ .

Тогда  $H_{LC} = 1$ ;  $H_{CC} = -\frac{1}{R_1}$ ;  $H_{1C} = -\frac{1}{R_1}$ ;  $H_{2C} = 0$ .

Подсхема 3 (рис. 6.44).



## ГЛАВА 6. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ

### 6.4. Применение метода переменных состояния для расчета переходных процессов

Составляющие искомых величин от действия ЭДС  $e$ :

$$u_L''' = H_{Le} \dot{a}; \quad i_C''' = H_{Ce} \dot{a};$$

$$i_1''' = H_{1e} \dot{a}; \quad u_2''' = H_{2e} \dot{a}.$$

Отсюда  $H_{Le} = \frac{u_L'''}{\dot{a}}; \quad H_{Ce} = \frac{i_C'''}{\dot{a}}; \quad H_{1e} = \frac{i_1'''}{\dot{a}}; \quad H_{2e} = \frac{u_2'''}{\dot{a}}.$

Ток  $i_1''' = i_C''' = \frac{e}{R_1}$ . Напряжение  $u_2''' = 0$ . Напряжение  $u_L''' = 0$ .

Тогда  $H_{Le} = 0; \quad H_{Ne} = \frac{1}{R_1}; \quad H_{1e} = \frac{1}{R_1}; \quad H_{2e} = 0$ .

Подсхема 4 (рис. 6.45).

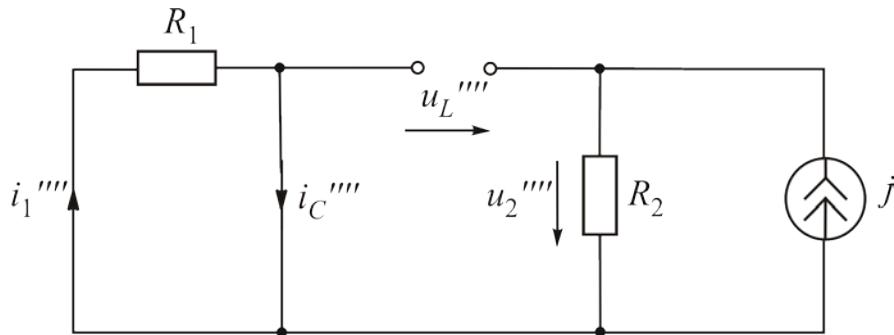


Рис. 6.45

В подсхеме действует только источник тока  $j$ , поэтому

$$u_L''' = H_{Lj} j; \quad i_C''' = H_{Cj} j; \quad i_1''' = H_{1j} j; \quad u_2''' = H_{2j} j.$$

Отсюда  $H_{Lj} = \frac{u_L'''}{j}; \quad H_{Cj} = \frac{i_C'''}{j}; \quad H_{1j} = \frac{i_1'''}{j}; \quad H_{2j} = \frac{u_2'''}{j}.$

Ток  $i_1''' = i_C''' = 0$ . Напряжение  $u_2''' = R_2 j$ , напряжение  $u_L''' = -R_2 j$ .

Тогда  $H_{Lj} = -R_2; \quad H_{Cj} = 0; \quad H_{1j} = 0; \quad H_{2j} = R_2$ .

Для получения законов изменения искомых величин в ЭВМ нужно задать матрицы  $[\dot{A}], [B], [C], [D], [e]$  и  $[\delta(0)]$ . Величины, подчиняющиеся законам коммутации, ищем в схеме при  $t = 0-$  (рис. 6.46).



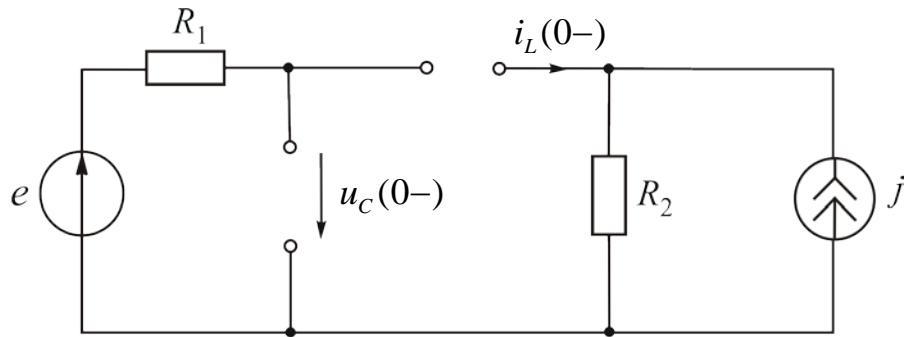


Рис. 6.46

Индуктивный элемент сопротивления постоянному току не оказывает, поэтому вместо него в схеме закоротка, конденсатор постоянный ток не пропускает. Ключ разомкнут.

Ток  $i_L(0-) = 0$ , напряжение  $u_C(0-) = \dot{a}$ .

Составим матрицы из найденных коэффициентов:

$$[A] = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & \tilde{N} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -R_2 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{R_1} \end{bmatrix};$$

$$[B] = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -R_2 \\ \frac{1}{R_1} & 0 \end{bmatrix};$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R_1} \\ R_2 & 0 \end{bmatrix}; \quad [D] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}.$$

Законы изменения искомых величин можно получить в виде таблиц и графиков.

## 6.5. Расчет переходных процессов с помощью интеграла Дюамеля

Этот метод применяют в цепях с одним источником напряжения, меняющегося по сложному закону.

При расчетах используют понятия входных и взаимных проводимостей.

Входной проводимостью  $k$ -й ветви называют отношение тока  $k$ -й ветви к ЭДС  $k$ -й ветви при отсутствии источников энергии в остальных ветвях:

$$G_{kk} = \frac{I_k}{E_k}, \text{ если } E_i = 0 \text{ при } i \neq k.$$

Взаимной проводимостью между  $k$ -й и  $j$ -й ветвями называют отношение тока  $k$ -й ветви к ЭДС  $j$ -й ветви при отсутствии источников энергии в других ветвях:

$$G_{kj} = \frac{I_k}{E_j}, \text{ если } E_i = 0 \text{ при } i \neq j.$$

На основании принципа взаимности выполняется равенство  $G_{kj} = G_{jk}$ , которое может упростить вычисление взаимной проводимости.

Пусть в схеме действует один источник постоянной ЭДС. Тогда ток любой ветви схемы можно записать на основании закона Ома следующим образом:

$$I = GU,$$

где  $G$  – входная или взаимная проводимость.

Закон Ома выполняется и для переходного процесса. Но при действии источника постоянного напряжения токи в ветвях будут переменными, следовательно, проводимости тоже будут величинами переменными, изменяющимися во времени. Поэтому их обозначают строчными буквами и называют переходными проводимостями. По закону Ома ток любой ветви во время переходного процесса нужно записать следующим образом:

$$i = gU.$$

Переходные проводимости, как и обычные, измеряют в сименсах. Они могут быть входными и взаимными. Пусть источник напряжения находится в ветви № 1. Тогда ток  $i_1 = g_{11}U$ , ток  $i_3 = g_{31}U$ ,

где  $g_{11}$  – входная проводимость,

$g_{31}$  – взаимная проводимость.

Переходную проводимость можно определить расчетным или опытным путями.

При расчетном определении  $g_{kk}$  и  $g_{kj}$  нужно найти закон изменения соответствующего тока при подключении цепи к источнику с напряжением  $U = 1$  В.

При опытном определении  $g_{kk}$  и  $g_{kj}$  находят осциллографированием тока в соответствующей ветви при единичном входном напряжении.

На переходные процессы распространяется теорема взаимности, т. е.  $g_{kj} = g_{jk}$ .

Напряжение, возникающее между двумя любыми точками в схеме, при переходном процессе тоже является функцией времени и пропорционально входному напряжению:



$$u_{ab} = hU,$$

где буквой  $h$  обозначена переходная функция по напряжению, которая является безразмерной величиной. Она представляет собой закон изменения напряжения  $u_{ab}$  при  $U = 1$  В.

Рассмотрим введенные понятия на конкретном примере.

*Пример 6.11.* Определить входную переходную проводимость  $g_{11}$ , взаимную переходную проводимость  $g_{31}$  и переходную функцию по напряжению  $h_{u_c}$  в схеме [рис. 6.47](#), если  $R_1 = 1$  Ом,  $R_2 = 2$  Ом,  $C = 50$  мкФ.

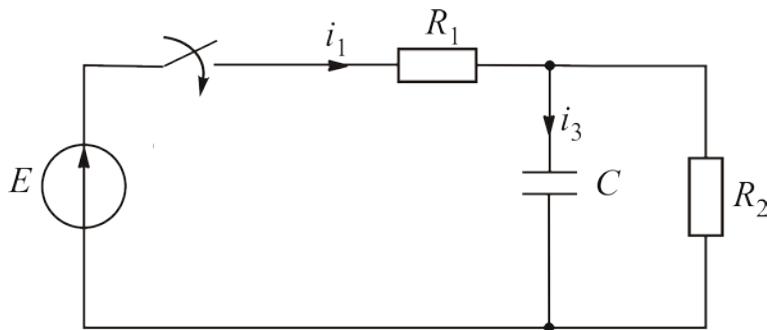


Рис. 6.47

### Решение

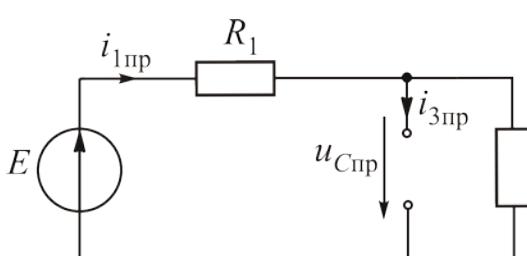
Чтобы определить требуемые в условии величины, нужно найти законы изменения соответственно токов  $i_1$ ,  $i_3$  и напряжения  $u_C$  при подключении цепи к источнику ЭДС с  $E = 1$  В.

Определим законы изменения нужных величин классическим методом (возможно применение и других известных методов).

1. Определим искомые величины как суммы принужденных и свободных составляющих:

$$\begin{aligned} i_1 &= i_{1\text{пр}} + i_{1\text{св}}; \\ i_3 &= i_{3\text{пр}} + i_{3\text{св}}; \\ u_C &= u_{C\text{пр}} + u_{C\text{св}}. \end{aligned}$$

2. Вычислим принужденные составляющие в схеме при  $t = \infty$  ([рис. 6.48](#)). Ключ замкнут, вместо конденсатора – разрыв цепи. Схема – одноконтурная, ток  $i_{3\text{пр}} = 0$ , ток



$$i_{1\text{пр}} = \frac{A}{R_1 + R_2} = \frac{1}{3} = 0,33 \text{ А. Напряжение}$$

$$u_{C\text{пр}} = R_2 i_{1\text{пр}} = 2 \cdot 0,33 = 0,66 \text{ В.}$$

Свободные составляющие меняются по закону экспоненты:



$$i_1 = Ae^{pt}; \quad i_3 = Be^{pt}; \quad u_C = Ce^{pt}.$$

Найдем корень характеристического уравнения  $p$ . Проще всего схему превратить в одноконтурную, закоротив источник ЭДС, разорвав ветвь с конденсатором и заменив все резисторы одним с эквивалентным сопротивлением  $R_Y = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2}{3}$  Ом. Постоянная времени  $\tau = R_Y N = \frac{2}{3} \cdot 50 \cdot 10^{-6} = \frac{100}{3 \cdot 10^6}$

с. Показатель степени  $\delta = -\frac{1}{\tau} = -\frac{3 \cdot 10^6}{100} = -3 \cdot 10^4 \text{ н}^{-1}$ .

Вычислим постоянные интегрирования  $A, B, C$  из начальных условий:

$$i_1(0+) = i_{1\text{и}\delta}(0+) + i_{1\text{н}\delta}(0+); \quad i_3(0+) = i_{3\text{и}\delta}(0+) + i_{3\text{н}\delta}(0+);$$

$$u_C(0+) = u_{C\text{и}\delta}(0+) + u_{C\text{н}\delta}(0+).$$

*Этап 1.* Вычислим ННУ  $u_C(0-)$  в схеме при  $t = 0-$ . До коммутации схема не была подключена к источнику энергии, поэтому  $u_C(0-) = 0$ .

*Этап 2.* В схеме при  $t = 0+$ , изображенной с учетом ННУ (рис. 6.49), определим ЗНУ. Ключ замкнут,  $u_C(0+) = u_C(0-) = 0$ , поэтому вместо конденсатора – закоротка.

Ток источника замыкается по закоротке, поэтому

$$i_1(0+) = i_3(0+) = \frac{E}{R_1} = 1 \text{ А.}$$

Принужденные составляющие – постоянные величины, следовательно,  $i_{1\text{и}\delta}(0+) = 0,33 \text{ А}, i_{3\text{и}\delta}(0+) = 0, u_{C\text{и}\delta}(0+) = 0,66 \text{ В}$ .

Свободные составляющие в начальный момент:  $i_{1\text{н}\delta}(0+) = \hat{A}; i_{3\text{н}\delta}(0+) = \hat{B}; u_{C\text{н}\delta}(0+) = \tilde{N}$ .

После подстановки получаем уравнения:

$$1 = 0,33 + A; \quad 1 = 0 + B; \quad 0 = 0,66 + C.$$

Отсюда  $A = 0,67; B = 1; C = -0,66$ .

Входная переходная проводимость

$$g_{11} = 0,33 + 0,67e^{-3 \cdot 10^4 t} \text{ См.}$$

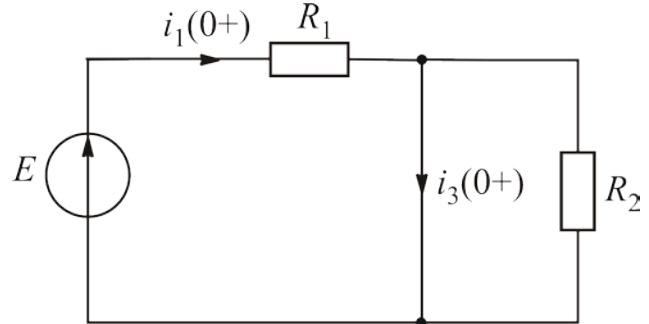


Рис. 6.49

Взаимная переходная проводимость

$$g_{31} = 1e^{-3 \cdot 10^4 t} \text{ См.}$$

Переходная функция по напряжению

$$h_{u_C} = 0,67 - 0,67 e^{-3 \cdot 10^4 t}.$$

Пусть на вход схемы подано напряжение сложной формы (см. [рис. 6.50](#)). Нужно найти закон изменения тока.

Непрерывно меняющееся напряжение заменим ступенчатой функцией с прямоугольными скачками  $\Delta u$ .

Тогда процесс изменения напряжения можно представить как подключение при  $t = 0$  постоянного напряжения  $u(0)$ , а затем как подключение элементарных постоянных напряжений  $\Delta u$ , смешенных относительно друг друга на интервалы времени  $\Delta\tau$  и имеющих разные знаки (напряжение может возрастать или убывать).

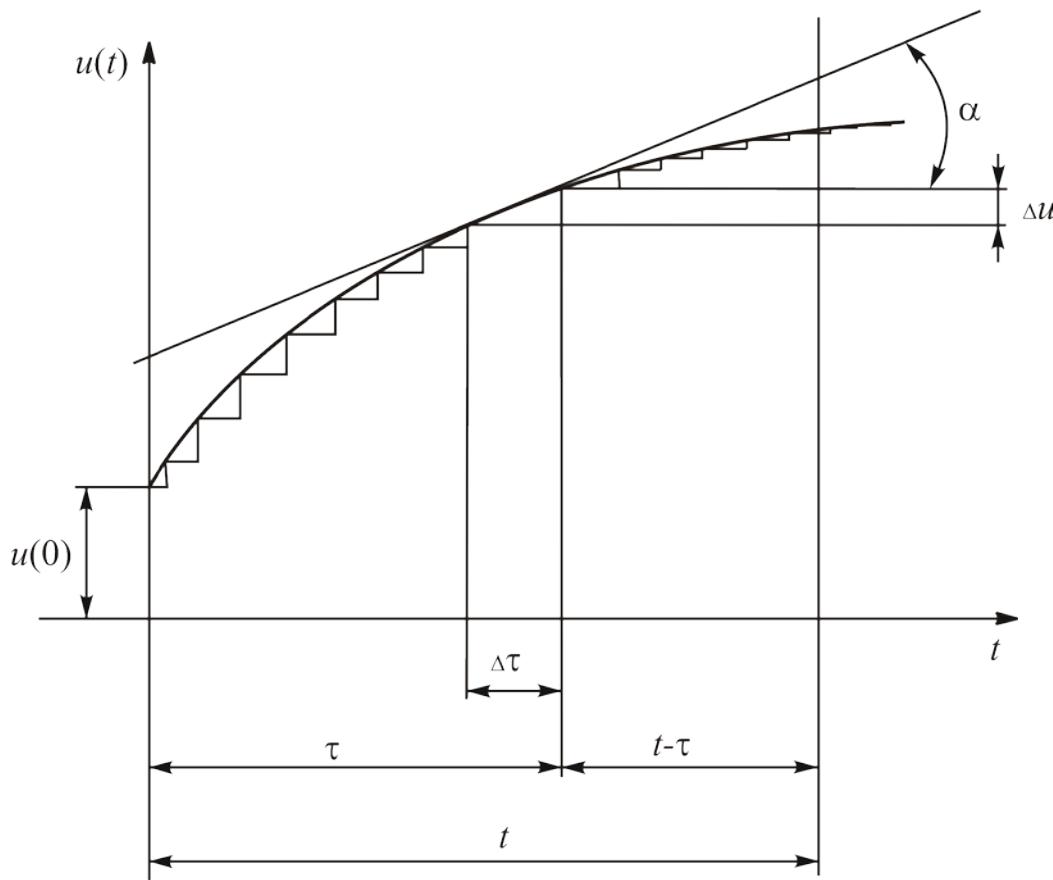


Рис. 6.50

Для решения рационально использовать метод наложения. Рассмотрим процесс в какой-то момент времени  $t$ . Момент элементарного скачка напряжения обозначим  $\tau$ .

Чтобы объединить два времени ( $\tau$  и  $t$ ), будем рассматривать процесс, исходя не из начального момента  $t = 0$ , а из момента рассмотрения процесса  $t$ . В этом случае момент элементарного скачка напряжения  $(t - \tau)$ .

Предварительно нужно вычислить переходную проводимость  $g(t)$ .

Составляющая тока от постоянного напряжения  $u(0) - g(t) \cdot u(0)$ . Следует обратить внимание:  $g(t)$ , а не  $g(0)$ , так как отсчет времени идет от  $t$  по оси времени налево.

Составляющая тока от элементарного скачка напряжения  $\Delta u$ , произошедшего в момент времени  $\tau$ , если отсчет вести от  $t = 0$ , и в момент времени  $(t - \tau)$ , если отсчет времени идет от времени рассмотрения процесса  $t$  налево:

$$g(t - \tau) \Delta u.$$

Проведем касательную к точке, в которой произошел элементарный скачок напряжения  $\Delta u$  (см. [рис. 6.50](#)). Угол наклона касательной обозначим. Можно считать, что  $\Delta u$  и  $\Delta t$  являются катетами прямоугольного треугольника.

Тогда  $\Delta u \approx \Delta t \cdot \operatorname{tg} \alpha = \Delta t \cdot u'(\tau)$ . Отсюда  $g(t - \tau) \cdot \Delta u = u'(\tau) g(t - \tau) \Delta t$ .

Элементарные скачки напряжения происходят на интервале от  $t = 0$  до  $t$ , для которого определяем закон изменения тока. Поэтому, суммируя составляющие тока от всех скачков, переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$  и учитывая составляющую тока от начального значения напряжения  $u(0)$ , получаем

$$i(t) = g(t) \cdot u(0) + \int_0^t u'(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Эту формулу называют **интегралом Дюамеля**.

**Пример 6.12.** Определить закон изменения тока  $i(t)$ , если двухполюсник подключен к источнику, вырабатывающему напряжение сложной формы, представленное на [рис. 6.51](#).

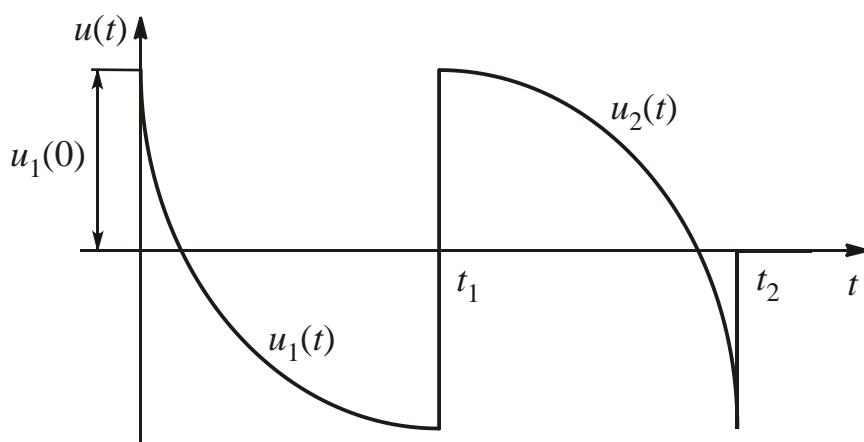


Рис. 6.51

Сначала нужно определить переходную проводимость  $g(t)$ , затем вы-

явить интервалы времени, для которых законы изменения тока одинаковы.

В рассматриваемом примере таких интервалов три:

$0 \leq t \leq t_1$ , не включая скачок при  $t_1$ ;

$t_1 \leq t \leq t_2$ , не включая скачок при  $t_2$ ;

$t_2 \leq t < \infty$ .

Следует помнить, что процесс начался при  $t = 0$ , поэтому для любого интервала закон изменения тока включает значение  $g(t) \cdot u_1(0)$ .

Закон изменения тока для первого интервала:

$$i(t) = g(t) \cdot u_1(0) + \int_0^t u'_1(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Закон изменения тока для второго интервала:

$$\begin{aligned} i(t) = g(t) \cdot u_1(t) + \int_0^{t_1} u'_1(\tau) g(t - \tau) d\tau + g(t - t_1) \cdot [u_2(t_1) - u_1(t_1)] + \\ + \int_{t_1}^t u'_2(\tau) g(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Закон изменения тока для третьего интервала:

$$\begin{aligned} i(t) = g(t) \cdot u_1(0) + \int_0^{t_1} u'_1(\tau) g(t - \tau) d\tau + g(t - t_1) \cdot [u_2(t_1) - u_1(t_1)] + \\ + \int_{t_1}^{t_2} u'_2(\tau) g(t - \tau) d\tau + g(t - t_2) \cdot [0 - u_2(t_2)]. \end{aligned}$$

Порядок расчета методом интеграла Дюамеля:

1. Определяем переходную проводимость  $g(t)$ , если нужно найти закон изменения тока, или переходную функцию по напряжению  $h(t)$ , если нужно найти закон изменения напряжения.

2. Вычисляем  $g(t - \tau)$  или  $h(t - \tau)$ , для чего в формулах  $t$  заменяем на  $(t - \tau)$ .

3. Определяем  $u'(\tau)$ . Для этого нужно найти  $\frac{du(t)}{dt}$  и в полученном выражении заменить  $t$  на  $\tau$ .

4. Подставляем найденные значения в интеграл Дюамеля и производим вычисления до приведения подобных.



# ГЛАВА 7

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

### 7.1. Основные понятия и определения

Нелинейные электрические цепи содержат нелинейные элементы, параметры которых зависят от тока либо напряжения.

В схемах замещения цепей постоянного тока приемными элементами являются идеальные резисторы, сопротивления которых меняются при изменении тока и напряжения.

Вольт-амперные характеристики линейных элементов – прямые линии, нелинейных – кривые.

Примером нелинейного элемента (НЭ) является электрическая лампочка накаливания, сопротивление которой находится в сильной зависимости от величины тока в ней.

Все НЭ делят на две большие группы: неуправляемые и управляемые.

К неуправляемым НЭ относятся лампа накаливания, бареттер, диод, газотрон.

Управляемыми НЭ являются трех- и более электродные лампы, транзисторы, тиристоры.

Вольт-амперная характеристика (ВАХ) НЭ может быть симметричной ([рис. 7.1](#)) и несимметричной ([рис. 7.2](#)).

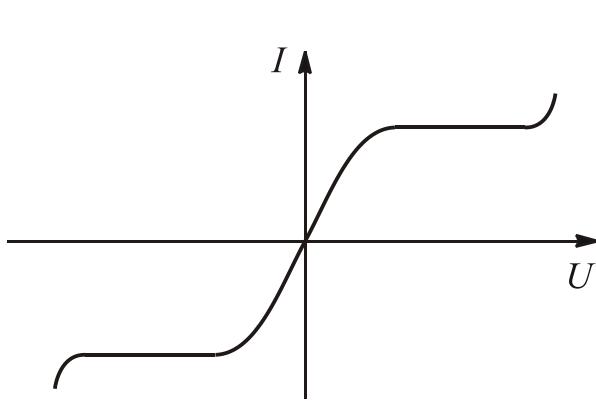


Рис. 7.1

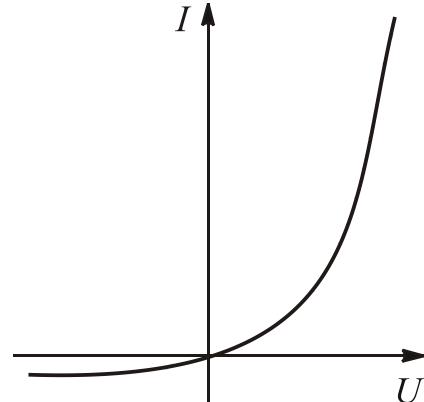


Рис. 7.2

У НЭ с симметричной ВАХ сопротивление не зависит от направления тока и напряжения. У НЭ с несимметричной ВАХ сопротивление зависит от направления тока и напряжения.

Вид ВАХ определяет область применения НЭ. Элемент с ВАХ, приведенной на [рис. 7.1](#), можно использовать для стабилизации тока. Такой ВАХ обладает бареттером. На [рис. 7.2](#) представлена ВАХ диода, который отличает односторонняя проводимость.

Переменное сопротивление НЭ можно задать посредством ВАХ либо зависимостями статического и дифференциального сопротивлений от тока или напряжения.

Статическое сопротивление  $R_{\text{ст}}$  характеризует НЭ в неизменном режиме. Оно равно отношению напряжения на НЭ к току через него:

$$R_{\text{ст}} = \frac{U}{I}.$$

Статическое сопротивление можно определить тангенсом угла  $\alpha$  между соответствующей осью координат и прямой, соединяющей рабочую точку с нулевой ([рис. 7.3, а и б](#)). При изображении ВАХ НЭ значения тока и напряжения могут быть отложены на разных координатных осях.

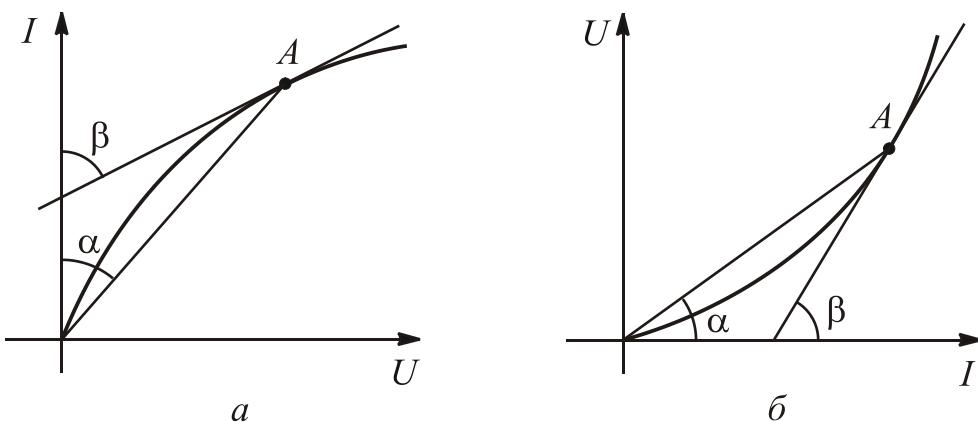


Рис. 7.3

Дифференциальное (динамическое) сопротивление  $R_{\text{д}}$  равно отношению бесконечно малого приращения напряжения на НЭ к соответствующему бесконечно малому приращению тока:

$$R_{\text{д}} = \frac{dU}{dI}.$$

Дифференциальное сопротивление можно определить тангенсом угла  $\beta$  наклона касательной к ВАХ в рабочей точке ([см. рис. 7.3, а и б](#)).

Дифференциальное сопротивление может быть отрицательным, если на участке ВАХ при увеличении тока напряжение уменьшается либо при уменьшении тока напряжение увеличивается.

Расчет нелинейных цепей очень сложен. Но если рабочая точка перемещается на небольшом участке, который можно считать практически линейным, то нелинейный резистор, схема замещения которого изображена на [рис. 7.4](#), можно заменить линейной эквивалентной схемой, состоящей из источника энергии и резистора сопротивлением  $R_{\text{д}}$ .



Рис. 7.4

*Пример 7.1.* Составить линейную схему замещения НЭ, ВАХ которого представлена на [рис. 7.5](#), для рабочей точки A.

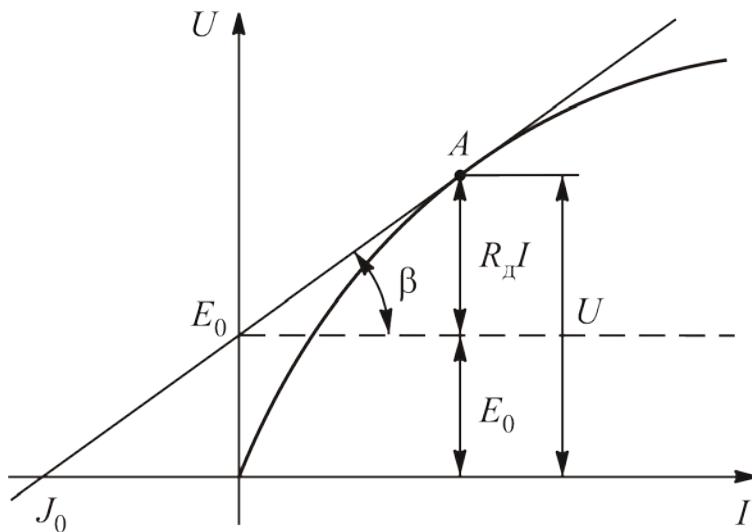


Рис. 7.5

Проведем касательную к рабочей точке и запишем ее уравнение. Как видно из [рис. 7.5](#),  $U = R_{\text{д}}I + E_0$ .

Этому уравнению соответствует линейная схема замещения, изображенная на [рис. 7.6](#).

Можно составить схему замещения с источником тока. Для этого уравнение касательной разделим почленно на  $R_{\text{д}}$ :

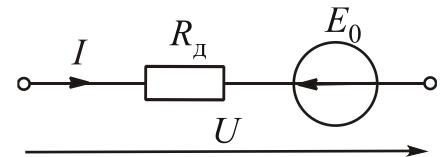


Рис. 7.6

$$\frac{U}{R_{\text{д}}} = I + \frac{E_0}{R_{\text{д}}},$$

где  $\frac{E_0}{R_{\text{д}}} = J_0$  (см. [рис. 7.5](#)),

$$\frac{U}{R_{\text{д}}} = I_{\text{д}}.$$

Тогда получим уравнение

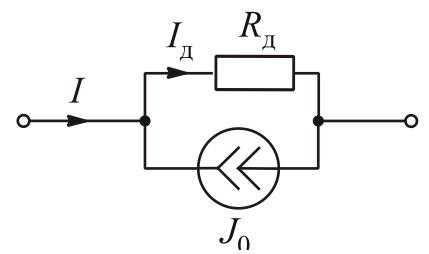


Рис. 7.7

$$I_{\text{д}} = J_0 + I,$$

которому соответствует линейная схема замещения, приведенная на [рис. 7.7](#).

*Пример 7.2.* Составить линейную схему замещения НЭ, ВАХ которого представлена на [рис. 7.8](#), для рабочей точки A.

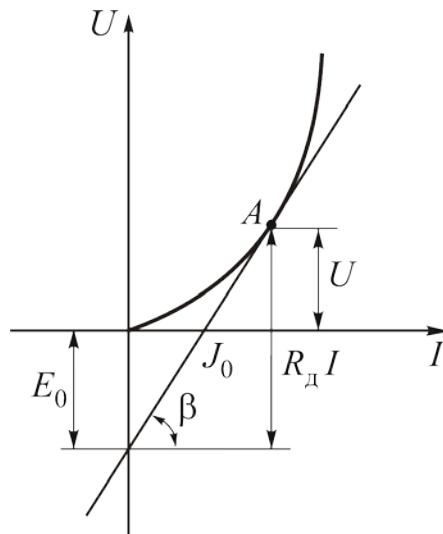


Рис. 7.8

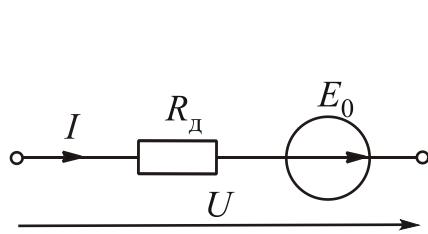


Рис. 7.9

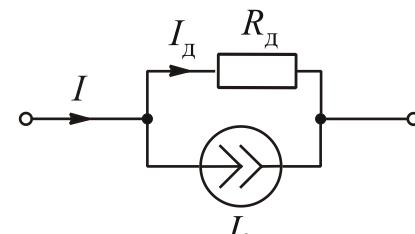


Рис. 7.10

Проведем касательную к рабочей точке и запишем ее уравнение. Как видно из [рис. 7.8](#),  $U = R_{\text{д}} I - E_0$ .

Этому уравнению соответствует линейная схема замещения, изображенная на [рис. 7.9](#). Эквивалентная линейная схема замещения с источником тока приведена на [рис. 7.10](#).

## 7.2. Расчет простейших нелинейных цепей постоянного тока графическими методами

Расчет заключается в отыскании рабочей точки.

### 7.2.1. Расчет нелинейной цепи с последовательным соединением элементов

Схема замещения рассматриваемой цепи приведена на [рис. 7.11](#). Определить ток в цепи и напряжения на НЭ  $U_1$  и  $U_2$ , если задано входное напряжение  $U$  и ВАХ каждого элемента ([рис. 7.12, а и б](#)).

Задачу можно решить двумя способами.

1. Отыскание рабочей точки на результирующей ВАХ.

Ток в цепи один. Входное напряжение

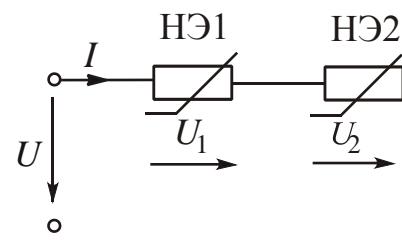


Рис. 7.11

на основании второго закона Кирхгофа складывается из напряжений на отдельных НЭ. В рассматриваемой цепи

$$U = U_1 + U_2.$$

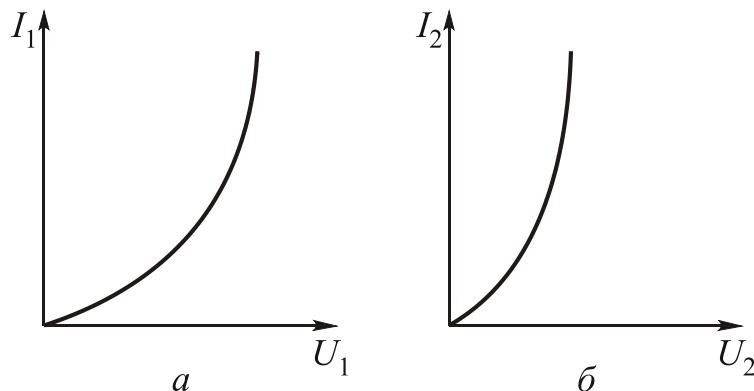


Рис. 7.12

Поэтому для построения результирующей ВАХ нужно при одном значении тока суммировать напряжения на нелинейных элементах. Чем больше точек будет получено, тем точнее результирующая ВАХ.

По заданному значению входного напряжения находим рабочую точку  $A$  на результирующей ВАХ (рис. 7.13) и соответствующее ей значение тока. По полученному значению тока находим напряжения на отдельных элементах  $U_1$  и  $U_2$ .

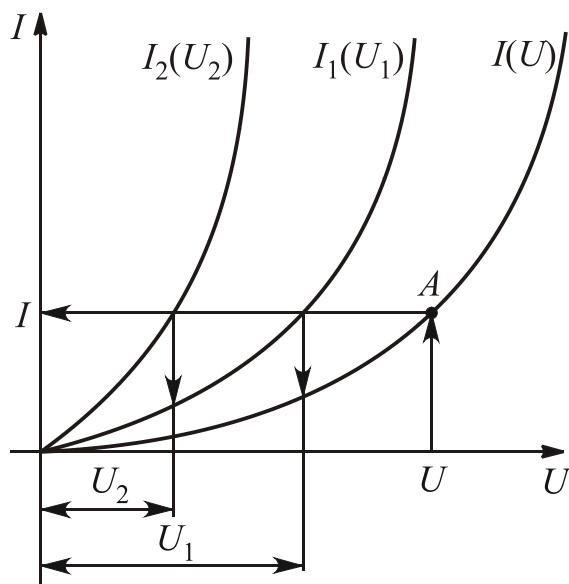


Рис. 7.13

2. Отыскание рабочей точки на пересечении ВАХ одного элемента с зеркальным отображением ВАХ другого элемента.

Решение этим методом поясняет рис. 7.14. Ток в цепи один, поэтому  $I_1 = I_2 = I$ . Строим график  $I(U_1)$ . В рабочей точке на основании второго закона Кирхгофа напряжение  $U_1 = U - U_2$ . Построим график  $I(U - U_2)$ , кото-

рый является зеркальным отображением графика  $I(U_2)$ , смещенного вправо на величину входного напряжения  $U$ . Очевидно, что графики пересекаются в рабочей точке  $A$ .

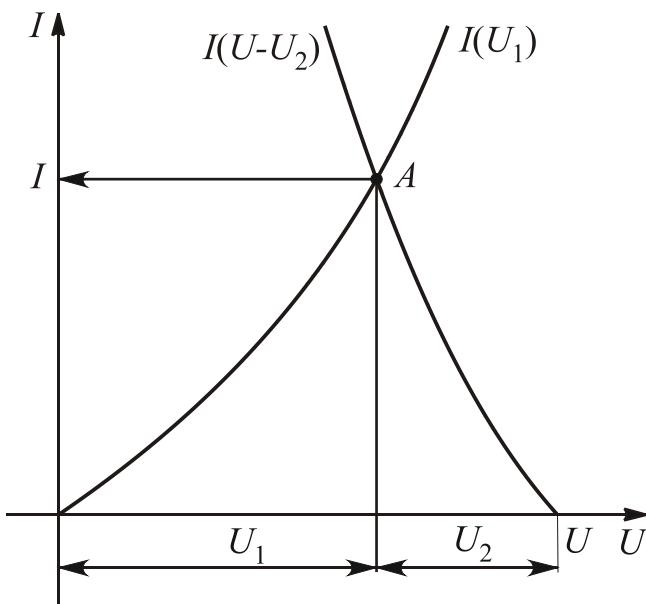


Рис. 7.14

Находим соответствующие ей значения тока  $I$  и напряжений  $U_1$  и  $U_2$ .

Этот метод рационально использовать для цепи с двумя элементами, один из которых – линейный. Так как его ВАХ является прямой линией, то для построения графика  $I(U - U_{\text{эл}})$  нужны только две точки, одна из которых с координатами  $(U, 0)$ .

### 7.2.2. Расчет нелинейной цепи с параллельным соединением элементов

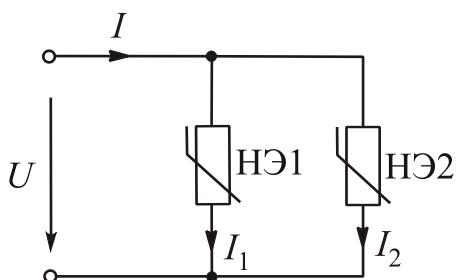


Рис. 7.15

Схема замещения рассматриваемой цепи приведена на [рис. 7.15](#). Определить входной ток  $I$  и токи  $I_1$  и  $I_2$ , если заданы входное напряжение и ВАХ каждого нелинейного элемента ([рис. 7.16, а и б](#)).

Так как при параллельном соединении напряжения на элементах одинаковы и равны входному  $U$ , то на ВАХ отдельных элементов

находим токи  $I_1$  и  $I_2$ . Входной ток на основании первого закона Кирхгофа равен сумме токов в пассивных ветвях:

$$I = I_1 + I_2.$$

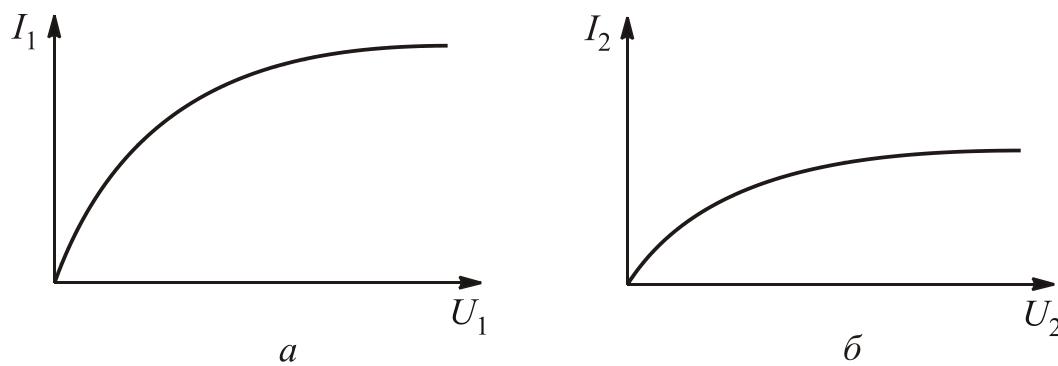


Рис. 7.16

Если в анализируемой цепи нужно найти токи  $I_1$  и  $I_2$ , а также входное напряжение при заданном входном токе, то рабочую точку можно найти на результирующей ВАХ.

Для ее построения нужно при ряде одинаковых значений напряжения складывать токи  $I_1$  и  $I_2$  (рис. 7.17). По заданному значению тока  $I$  находим рабочую точку  $A$  и соответствующее ей значение входного напряжения  $U$ . По полученному значению напряжения  $U$  находим токи  $I_1$  и  $I_2$ .

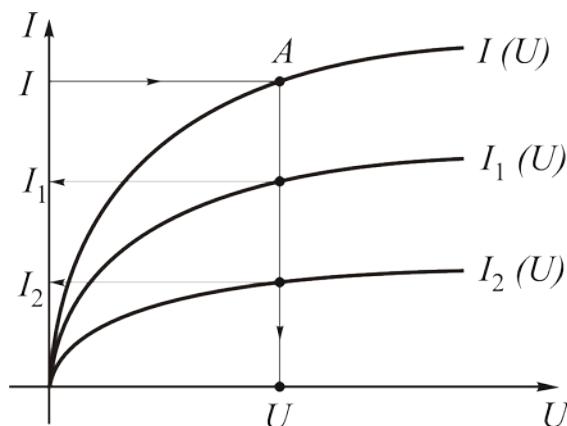


Рис. 7.17

Если один из двух параллельно соединенных элементов является линейным, то рабочую точку рационально отыскать на пересечении ВАХ нелинейного элемента с зеркальным отображением ВАХ линейного элемента.

### 7.2.3. Расчет нелинейной цепи со смешанным соединением элементов

1. Решение методом эквивалентных преобразований.

Схема замещения рассматриваемой цепи приведена на [рис. 7.18](#).

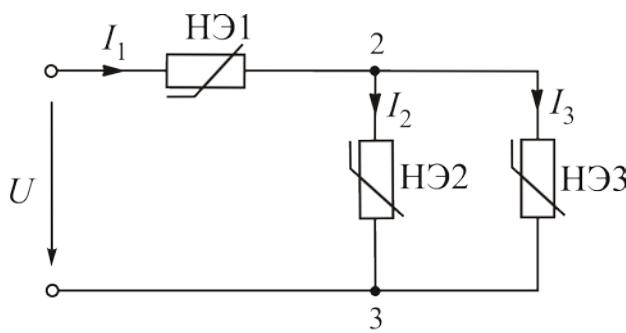


Рис. 7.18

Определить все токи, если задано входное напряжение и ВАХ отдельных элементов:  $I_1(U_1)$ ,  $I_2(U_{23})$ ,  $I_3(U_{23})$ . Решение заключается в постепенном построении результирующих ВАХ. Очевидно, что сначала нужно построить результирующую ВАХ для параллельного участка (для ряда значений напряжения  $U_{23}$  суммировать токи  $I_2$  и  $I_3$ ). После этого схема превратится в последовательное соединение НЭ1 и эквивалентного элемента с ВАХ  $I_1(U_{23})$ , так как  $I_2 + I_3 = I_1$ .

Затем нужно построить результирующую ВАХ всей схемы. Для этого при ряде значений тока  $I_1$  нужно суммировать напряжения  $U_1$  и  $U_{23}$ .

По заданному значению входного напряжения  $U$  найдем рабочую точку и соответствующее ей значение входного тока  $I_1$ . Далее по графику  $I_1(U_1)$  найдем напряжение  $U_1$  и определим напряжение  $U_{23} = U - U_1$ . По графикам  $I_2(U_{23})$  и  $I_3(U_{23})$  найдем токи  $I_2$  и  $I_3$ .

## 2. Решение с использованием метода эквивалентного генератора.

Этот метод можно использовать для схемы с одним нелинейным элементом, ток в котором и надо найти ([рис. 7.19, а](#)). Делим схему на две части: НЭ и всю остальную часть схемы, которая является активным двухполюсником ([рис. 7.19, б](#)).

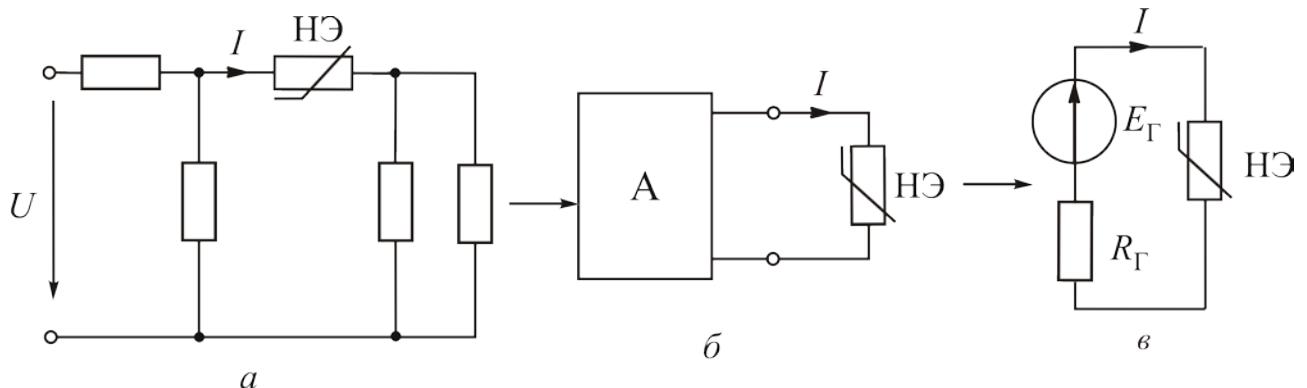


Рис. 7.19

Активный двухполюсник заменим эквивалентным ему генератором ([рис. 7.19, в](#)). Активный двухполюсник является линейной цепью, расчет которой намного проще, чем нелинейной. ЭДС генератора  $\dot{A}_a$  равна напряжению холостого хода на зажимах активного двухполюсника. Сопротивление  $R_a$  – это эквивалентное сопротивление пассивного двухполюсника тельно входных зажимов. Пассивный двухполюсник получаем из активного, закорачивая источники ЭДС и разрывая источники тока. Полученная схема ([рис. 7.19, в](#)) представляет собой последовательное соединение нелинейного и линейного элементов.

Рабочую точку рационально найти на пересечении ВАХ НЭ и зеркального изображения ВАХ линейного элемента (рис. 7.20). График  $I(\dot{A}_{\bar{a}} - U_{R_{\bar{a}}})$  является прямой линией, зеркально отображающей график  $I(U_{R_{\bar{a}}})$ , смещенный вправо на величину  $\dot{A}_{\bar{a}}$ . Для его построения нужны две точки. Одна из них с координатами  $(\dot{A}_{\bar{a}}, 0)$ . Для построения второй точки можно задаться произвольным значением тока  $I_j$ .

Соответствующее ему напряжение  $U_{R_j} = R_{\bar{a}}I_j$  отложим от значения  $\dot{A}_{\bar{a}}$  влево. Отыскав рабочую точку  $A$ , найдем соответствующее ей значение тока  $I$ .

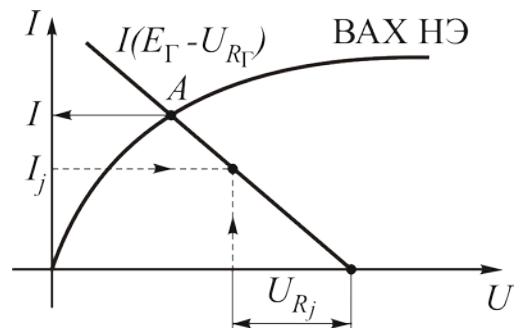


Рис. 7.20

### 7.3. Расчет нелинейных цепей методом итерации

Точность расчетов графическими методами мала и существенно зависит от субъективных факторов.

Сущность метода итерации (последовательных приближений) заключается в аналитическом решении системы алгебраических нелинейных уравнений. Статическое сопротивление нелинейного элемента должно быть задано в функции от тока или напряжения.

Пусть в схеме один нелинейный элемент (НЭ), ток в котором и надо найти. Остальную часть схемы (активный двухполюсник) заменим эквивалентным ему генератором (рис. 7.21).

Графическая иллюстрация решения методом итерации приведена на рис. 7.22.

Напряжение на нелинейном элементе  $U = E_{\bar{a}} - R_{\bar{a}}I$ . Ток зависит от статического сопротивления НЭ, которое, в свою очередь, зависит от напряжения, поэтому это уравнение является нелинейным:  $U = F(U)$ .

Пусть напряжение в нулевом приближении  $U_0 = E_{\bar{a}}$ . На ВАХ НЭ находим соответствующую рабочую точку  $b$ . Так как ток в схеме один, то току  $I_0$  на графике  $I(E_{\bar{a}} - R_{\bar{a}}I)$  соответствует точка  $c$ . Напряжение на НЭ  $U = E_{\bar{a}} - R_{\bar{a}}I$ , поэтому переходим из точки  $c$  в точку  $d$ . Повторяя этот процесс, получаем рабочую точку  $A$ .



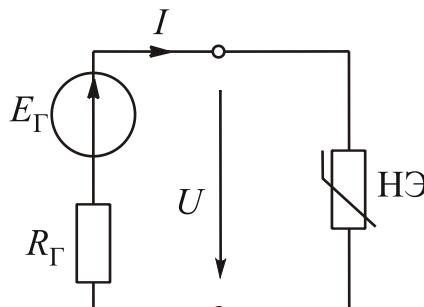


Рис. 7.21

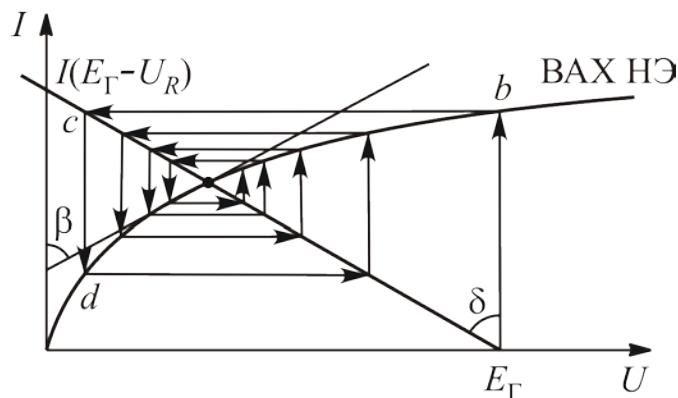


Рис. 7.22

Итерационный процесс не всегда будет сходящимся. Сходимость процесса зависит прежде всего от вида ВАХ и величины сопротивления  $R_{\text{a}}$ . Из математики известно, что условие сходимости требует, чтобы в окрестности искомого корня (рабочая точка  $A$ ) абсолютное значение производной  $|F'(U)|$  было меньше 1. Чем оно меньше, тем быстрее процесс будет сходиться.

В рассматриваемой схеме  $F(U) = \dot{A}_{\text{a}} - R_{\text{a}}I$ . Тогда  $\frac{dF(U)}{dU} = -R_{\text{a}} \frac{dI}{dU}$ .

Дифференциальное сопротивление НЭ  $R_{\text{a}} = \frac{dU}{dI}$ , поэтому

$$\frac{dF(U)}{dU} = -\frac{R_{\text{a}}}{R_{\text{a}}}.$$

Чтобы итерационный процесс сходился, должно выполняться условие:

$\left| -\frac{R_{\text{a}}}{R_{\text{a}}} \right| < 1$ . Сопротивлениям можно сопоставить тангенсы соответствующих

углов ([параграф 7.1](#)), тогда можно записать  $\left| \frac{\tan \delta}{\tan \beta} \right| < 1$  либо  $\tan \delta < \tan \beta$ .

Отсюда угол  $\delta$  должен быть меньше угла  $\beta$ . В этом легко убедиться, переместив рабочую точку  $A$  по ВАХ НЭ. При этом величины углов  $\delta$  и  $\beta$  будут меняться. Если угол  $\delta$  намного меньше угла  $\beta$ , процесс сходится быстро. Если угол  $\delta$  больше угла  $\beta$ , процесс будет расходящимся.

*Пример 7.3.* Найти ток в схеме [рис. 7.21](#), если  $\dot{A}_{\text{a}} = 10$  В,  $R_G = 5$  Ом, ВАХ НЭ задана уравнением  $U = 3I - I^2$ .

Ток в схеме по закону Ома

$$I_{k+1} = \frac{\dot{A}_{\text{a}}}{R_{\text{a}} + R_{\text{но}}(I_k)},$$

где  $k$  – номер приближения.

Примем  $I_0 = 1$  А. Сопротивление  $R_{\text{нл}}(I) = \frac{U}{I} = \frac{3I - I^2}{I} = 3 - I$ . В нулевом приближении  $R_{\text{нл}}(I) = 3 - 1 = 2$  Ом.

Тогда  $I_1 = \frac{10}{5+2} = 1,428$  А.

Дальнейший расчет лучше свести в [табл. 7.1](#).

Таблица 7.1

$k$	$I_k$ , А	$R_{\text{нл}}(I_k)$ , Ом	$I_{k+1}$ , А
0	1	2	1,428
1	1,428	1,572	1,522
2	1,522	1,478	1,544
3	1,544	1,456	1,548
4	1,548	1,452	1,549
5	1,549	1,451	1,550
6	1,550	1,450	1,550

Следовательно, ток  $I = 1,55$  А. Достоинствами метода являются неограниченная точность и возможность расчета на ЭВМ.

Метод можно применять только для цепей с НЭ, ВАХ которых меняются монотонно.

#### 7.4. Расчет нелинейных цепей методом Ньютона – Рафсона

Итерационный процесс может быть организован различными методами. Наиболее эффективным считается метод Ньютона – Рафсона. Рассмотрим его применительно к решению одного уравнения. Пусть нелинейное уравнение  $f(x) = 0$  имеет единственный корень  $x = x_{k+1}$ . В окрестности этого корня функция  $f(x_{k+1}) = 0$  разлагается в ряд Тейлора:

$$f(x_{k+1}) = f(x_k + \Delta x_k) \approx f(x_k) + \Delta x_k \cdot f'(x_k) = 0,$$

где  $f(x_k)$  – значение функции в точке  $x_k$ , а  $f'(x_k)$  – производная функции  $f(x_k)$  в этой же точке.

Отсюда следует:

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k \approx x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad (7.1)$$

где  $\Delta x_k = h = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$  – поправка к предыдущему решению.

Полученное соотношение – алгоритм итерационного метода Ньютона –



Рафсона, который реализуем следующим образом:

1. Задаем начальное приближенное значение искомого решения  $x_0(k = 0)$ .

2. Определяем поправку  $h_0$ . Для ее вычисления по выражению функции находим производную.

3. Вычисляем уточненное значение корня  $\tilde{o}_1 = \tilde{o}_0 + h_0$ .

4. Повторяем процесс на следующем шаге и уточняем предыдущее решение до необходимой точности.

Геометрическая интерпретация метода приведена на [рис. 7.23](#). Касательные, проведенные в точках  $x_k(k = 0, 1, 2\dots)$ , определяют значение поправки на соответствующем шаге, так как

$$f'(x_k) = \operatorname{tg} \alpha_k = \frac{f(x_k)}{h_k} \text{ или } h_k = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{f(x_k)}{\operatorname{tg} \alpha_k}.$$

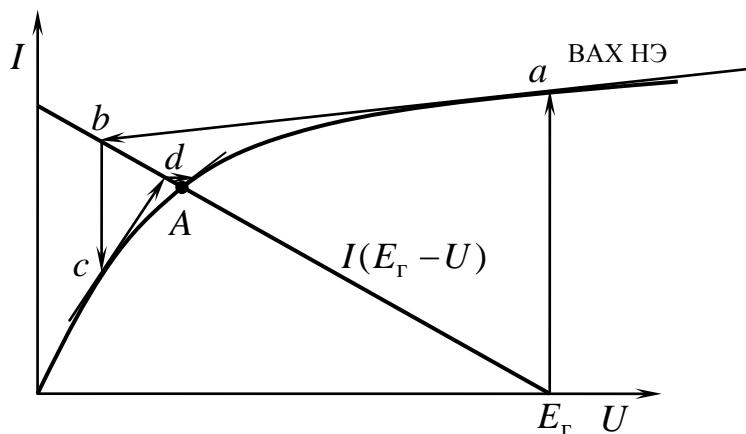


Рис. 7.23

Метод сходится, если начальное приближение достаточно близко к решению. Однако если производная  $f'(x_k) = 0$ , решение невозможно.

Исследования показывают, что сходимость метода Ньютона – Рафсона зависит от значения функции  $f(x)$ , ее наклона  $f'(x)$  и от кривизны функции  $f''(x)$ .

Если для всех  $x$  выполняется неравенство

$$|f(x)f''(x)| < |f'(x)|^2,$$

то процесс сходится. При определенных значениях угла наклона ( $f'(x)$ ) и кривизны ( $f''(x)$ ) процесс может зацикливаться или расходиться, несмотря на то, что начальное значение лежит относительно близко от искомого решения. Добиться сходимости можно, задав новое нулевое приближение и повторив расчеты. Иногда приходится переходить к уравнениям с новыми переменными.

Эффективен прием улучшения сходимости итерационного процесса, при котором уточненное значение принимается равным

$$x_{k+1}^y = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}.$$

Подстановка уточненного значения  $x_{k+1}^y$  в уравнение (7.1) приводит к алгоритму

$$x_{k+1}^y = x_k - 0,5 \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (7.2)$$

Сходимость итерационного процесса по (7.2) более медленная, чем по (7.1), но более вероятная.

Вычислим ток в рассмотренном примере методом Ньютона – Рафсона.

Для схемы на [рис. 7.21](#) уравнение по второму закону Кирхгофа

$$R_{\tilde{a}}I + U = E_{\tilde{a}}.$$

Отсюда

$$f(I) = R_{\tilde{a}}I + U - E_{\tilde{a}} = 0.$$

Так как  $U = 3I - I^2$ , получим уравнение

$$f(I) = R_{\tilde{a}}I + 3I - I^2 - E_{\tilde{a}} = 8I - I^2 - 10 = 0.$$

Производная

$$f'(I) = 8 - 2I.$$

Примем ток в нулевом приближении  $I_0 = 1$  А.

Уточненное решение после первого шага:

$$I_1 = I_0 - \frac{f(I_0)}{f'(I_0)} = 1 - \frac{8 \cdot 1 - 1 - 10}{6} = 1,5 \text{ А.}$$

Уточненное решение после второго шага:

$$I_2 = I_1 - \frac{f(I_1)}{f'(I_1)} = 1,5 - \frac{8 \cdot 1,5 - 1,5^2 - 10}{5} = 1,550 \text{ А.}$$

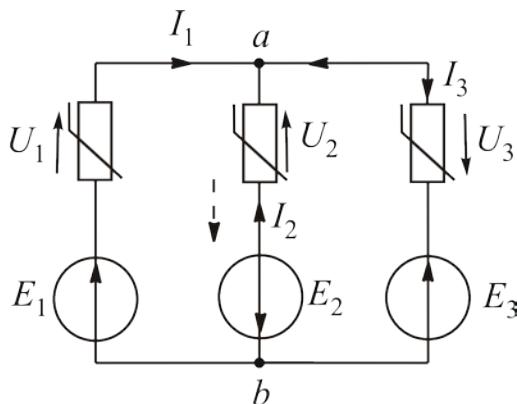


Как видим, правильное решение получаем гораздо быстрее, чем в случае простой итерации.

## 7.5. Расчет нелинейных цепей методом напряжения между двумя узлами

Цепи с двумя узлами часто встречаются на практике. Рассмотрим метод на конкретном примере.

*Пример 7.5.* Схема замещения рассматриваемой цепи приведена на [рис. 7.24](#). Вычислить все токи, если заданы ЭДС  $\dot{A}_1$ ,  $\dot{A}_2$ ,  $\dot{A}_3$  и ВАХ нелинейных элементов  $I_1(U_1)$ ,  $I_2(U_2)$ ,  $I_3(U_3)$  ([рис. 7.25, а, б и в](#)).



*Решение*

1. Запишем уравнение на основании первого закона Кирхгофа:  $I_1 + I_2 - I_3 = 0$ . Для решения более удобна запись в виде  $I_1 + I_2 = I_3$ . Это уравнение является условием для нахождения рабочей точки.

Рис. 7.24

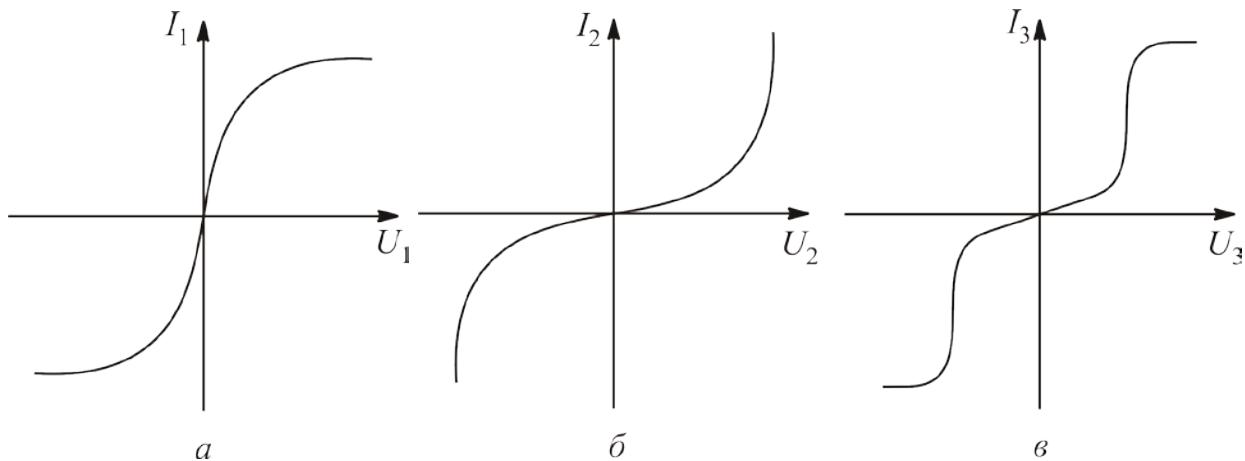


Рис. 7.25

2. Приведем токи к зависимости от одного аргумента. В условии токи ветвей заданы в функции от разных переменных:  $I_1(U_1)$ ,  $I_2(U_2)$ ,  $I_3(U_3)$ . Общим для всех ветвей является напряжение между двумя узлами  $U_{ab}$ . Запишем выражения напряжения  $U_{ab}$  для всех трех ветвей схемы:

$$U_{ab} = E_1 - U_1;$$

$$U_{ab} = -E_2 - U_2;$$

$$U_{ab} = E_3 + U_3.$$

3. Построим графики токов  $I_1(U_{ab})$ ,  $I_2(U_{ab})$ ,  $I_3(U_{ab})$  на основании полученных уравнений. График  $I_1(U_{ab})$  является зеркальным отображением графика  $I_1(U_1)$ , смещенным по оси абсцисс вправо на величину ЭДС  $\dot{A}_1$  (рис. 7.26). График  $I_2(U_{ab})$  является зеркальным отображением графика  $I_2(U_2)$ , смещенным по оси абсцисс влево на величину ЭДС  $\dot{A}_2$ . График  $I_3(U_{ab})$  представляет собой график  $I_3(U_3)$ , смещенный вправо по оси абсцисс на величину ЭДС  $\dot{A}_3$ .

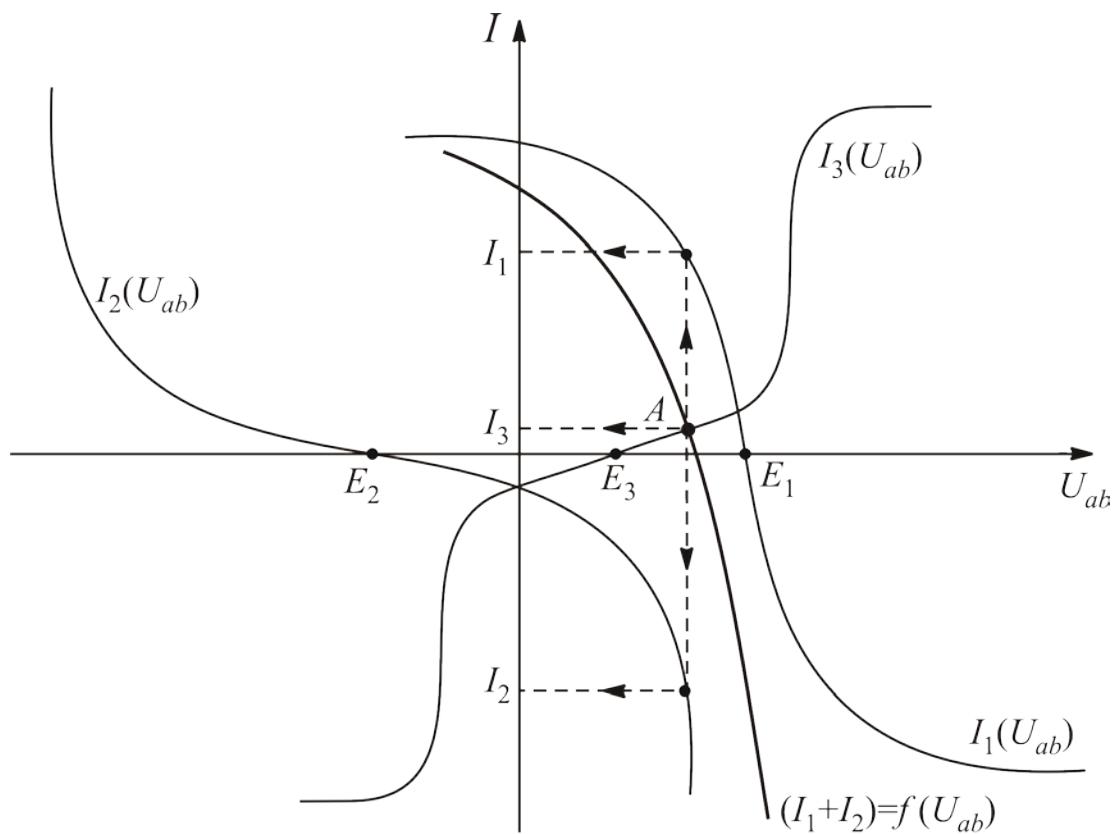


Рис. 7.26

4. Найдем рабочую точку на пересечении графиков  $(I_1 + I_2) = f(U_{ab})$  и  $I_3 = f(U_{ab})$ . Для получения графика  $(I_1 + I_2) = f(U_{ab})$  при ряде значений напряжения  $U_{ab}$  суммируем токи  $I_1$  и  $I_2$ .

5. Определим токи в ветвях и напряжение  $U_{ab}$ . Для этого через рабочую точку  $A$  проведем вертикаль. На ее пересечении с осью абсцисс получим значение напряжения  $U_{ab}$ , на пересечении с графиками токов – токи  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ .

Ток  $I_2$  получился с отрицательным знаком, что свидетельствует о неправильно выбранном направлении тока. Покажем верное направление тока  $I_2$  на [рис. 7.24](#) пунктирной стрелкой.

## 7.6. Замена нескольких параллельных ветвей, пассивных и активных, одной или эквивалентной

Рассматриваемая часть схемы представлена на [рис. 7.27, а](#). ВАХ нелинейных элементов  $I_1(U_1)$ ,  $I_2(U_2)$ ,  $I_3(U_3)$  приведены на [рис. 7.24, а, б и в](#).

Эквивалентная схема представлена на [рис. 7.27, б](#).

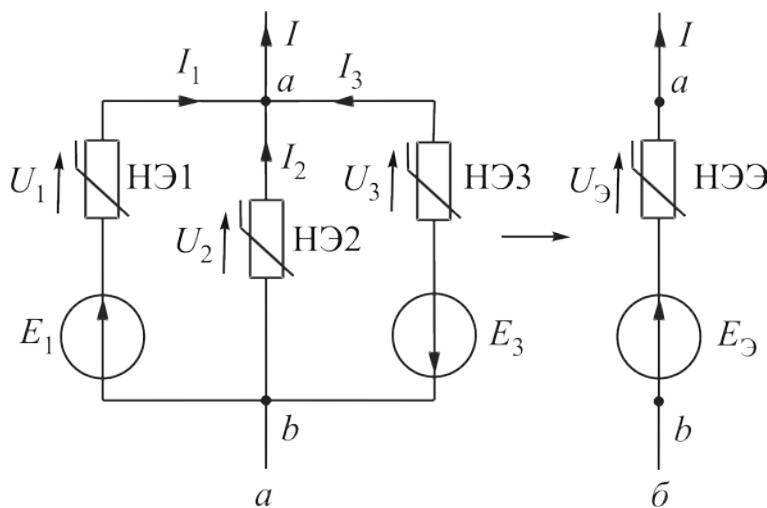


Рис. 7.27

Условие эквивалентной замены: равенство токов  $I$  и напряжений  $U_{ab}$  в схемах на [рис. 7.27, а и б](#). Решение задачи заключается в отыскании  $E_\Theta$  и графика  $I(U_\Theta)$ .

На основании первого закона Кирхгофа ток  $I = I_1 + I_2 + I_3$ . Суммировать токи можно в функции от одного общего аргумента, которым является напряжение  $U_{ab}$ .

Запишем выражения напряжения  $U_{ab}$  для трех ветвей схемы на [рис. 7.27, а](#) и для схемы на [рис. 7.27, б](#):

$$U_{ab} = E_1 - U_1;$$

$$U_{ab} = -U_2;$$

$$U_{ab} = -E_3 - U_3;$$

$$U_{ab} = -E_Y - U_Y$$

## ГЛАВА 7. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

### 7.6. Замена нескольких параллельных ветвей, пассивных и активных, одной или эквивалентной

Построим графики  $I_1(U_{ab})$ ,  $I_2(U_{ab})$ ,  $I_3(U_{ab})$  (рис. 7.28). Все три графика являются зеркальными отображениями соответственно графиков  $I_1(U_1)$ ,  $I_2(U_2)$ ,  $I_3(U_3)$ .

График  $I_2(U_{ab})$  проходит через начало координат, график  $I_1(U_{ab})$  смещен по оси абсцисс вправо на величину ЭДС  $\dot{A}_1$ , график  $I_3(U_{ab})$  смещен по оси абсцисс влево на величину ЭДС  $\dot{A}_3$ .

Чтобы построить график  $I(U_{ab})$ , нужно для ряда значений напряжения  $U_{ab}$  суммировать токи  $I_1$ ,  $I_2$  и  $I_3$  с учетом знаков.

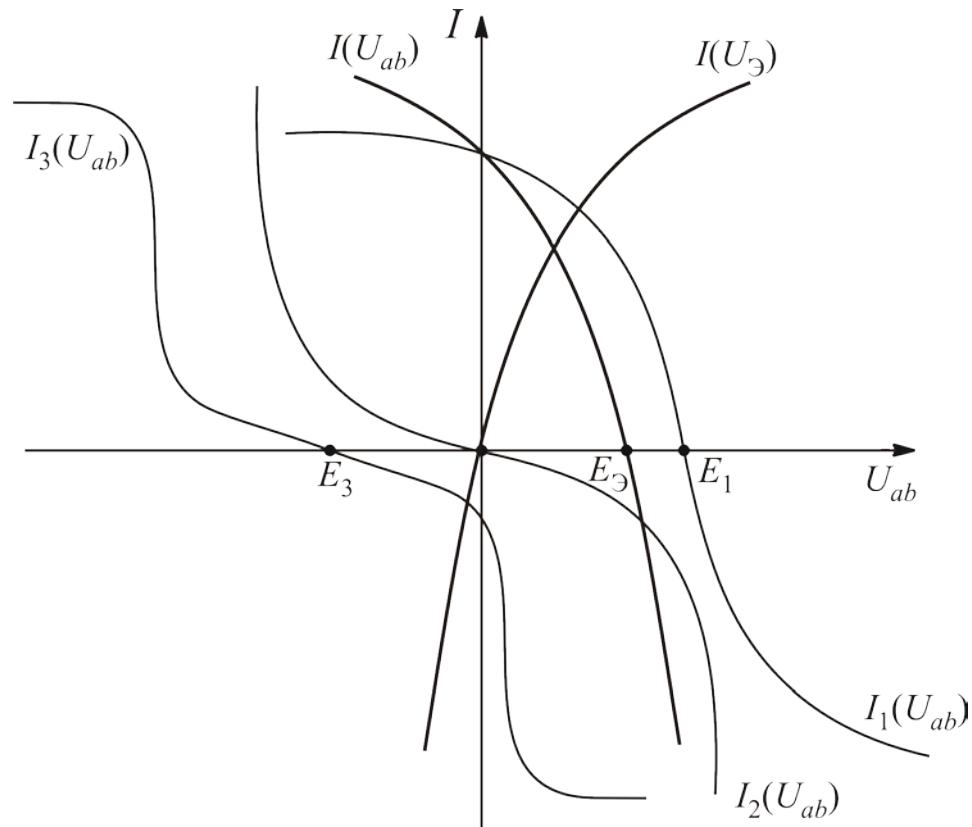


Рис. 7.28

Напряжение  $U_{ab} = E_3$  при токе  $I = 0$ , т. е. в точке пересечения графиком  $I(U_{ab})$  оси абсцисс. Для получения ВАХ, эквивалентного НЭ  $I(U_3)$ , нужно график  $I(U_{ab})$  переместить до пересечения с началом координат и зеркально отобразить.

Можно путем подбора параллельно соединенных ветвей получить эквивалентный НЭ с вольт-амперной характеристикой, имеющей требуемый для решения какой-либо задачи вид.

## ГЛАВА 7. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

### 7.6. Замена нескольких параллельных ветвей, пассивных и активных, одной или эквивалентной

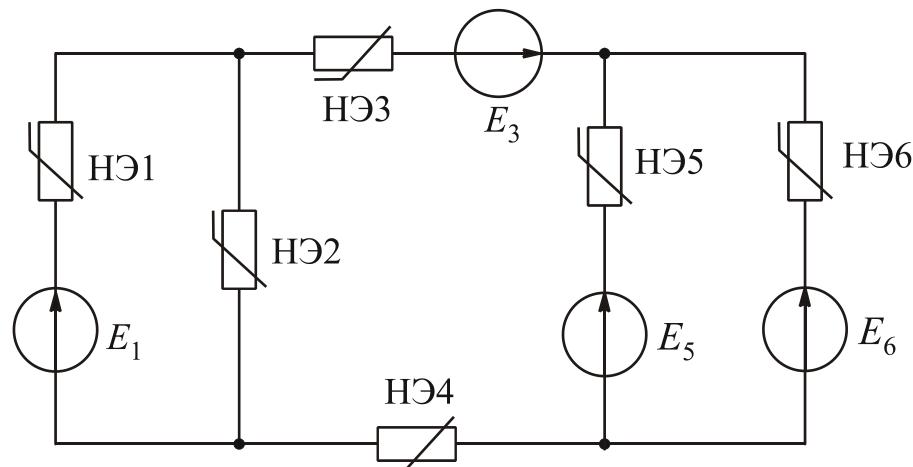


Рис. 7.29

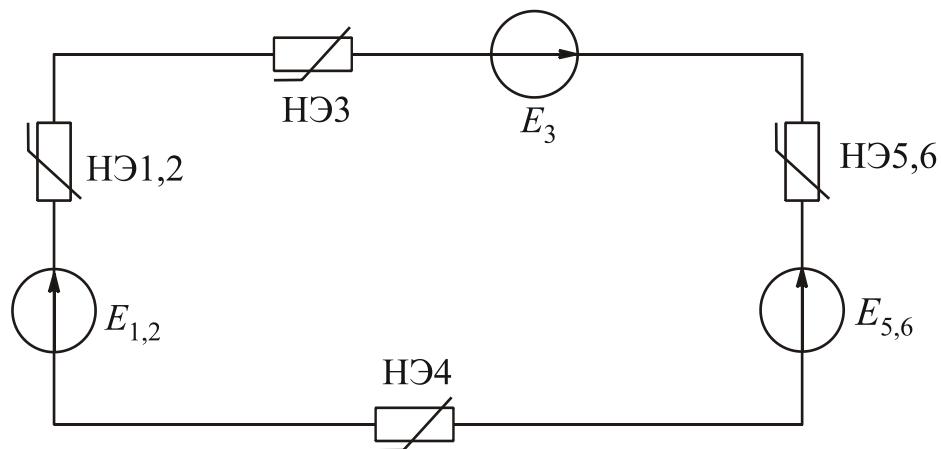


Рис. 7.30

Рассмотренный прием позволяет упростить решение задачи.

Схема замещения нелинейной цепи, представленной на [рис. 7.29](#), является сложной для решения. Если две пары параллельных ветвей заменить им эквивалентными, схема становится одноконтурной ([рис. 7.30](#)). Расчет такой цепи гораздо проще. После определения тока в схеме [рис. 7.30](#) нужно вернуться к схеме [рис. 7.29](#) для определения остальных токов.

# ГЛАВА 8

## МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

### 8.1. Основные величины, характеризующие магнитные цепи

**Магнитная цепь** – это совокупность тел для замыкания магнитного потока.

Все вещества по магнитным свойствам делят на три группы:

1. Диамагнитные, у которых относительная магнитная проницаемость  $\mu < 1$ .
2. Парамагнитные, у которых  $\mu > 1$ .
3. Ферромагнитные, у которых  $\mu \gg 1$ .

Относительная магнитная проницаемость показывает, во сколько раз абсолютная магнитная проницаемость вещества  $\mu_a$  больше магнитной проницаемости вакуума  $\mu_0$ , т. е.  $\mu = \frac{\mu_a}{\mu_0}$ . Величина  $\mu_0$  не изменяется

$(\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ А} \cdot \text{м}^{-1})$ , ее называют магнитной постоянной. Магнитную проницаемость воздуха принимают равной магнитной постоянной, поэтому воздушные магнитные цепи являются линейными.

Для создания магнитных цепей используют преимущественно ферромагнитные материалы. Основными ферромагнитными материалами являются, прежде всего, электротехнические стали Э11, Э21, Э32, Э44 и т. д. Первая цифра обозначает процентное содержание кремния, вторая – гарантированный уровень потерь. Относительная магнитная проницаемость электротехнических сталей порядка 1800–1900.

Более качественными являются сплавы пермалой и перминвар, содержащие до 78,5 % никеля. У них относительная магнитная проницаемость  $\mu = 200000 - 800000$ .

В радиотехнике широко применяют ферриты.

Магнитные цепи из ферромагнитных материалов являются нелинейными, так как у них относительная магнитная проницаемость – величина переменная.

Вокруг каждого проводника с током возникает магнитное поле. Интенсивность магнитного поля в каждой его точке определяют вектором магнитной индукции  $\vec{B}$ . Единицей измерения магнитной индукции является тесла (Тл).

Магнитная индукция магнитного поля Земли составляет  $10^{-4}$  Тл. В электрических реле  $B = (0,2-0,3)$  Тл, в трансформаторах  $B = 1,4$  Тл, предельное значение магнитной индукции в машинах постоянного тока составляет 1,71 Тл. В ускорителях  $B = (2-3)$  Тл, в МГД-генераторах  $B = 5$  Тл достигают за счет явления сверхпроводимости.

Магнитное поле характеризуют также вектором напряженности маг-



магнитного поля  $\bar{H}$ .  $[I] = \frac{\text{А}}{\text{м}}$ .

Величины  $B$  и  $H$  связаны зависимостью

$$\bar{A} = \mu_a \bar{I} = \mu_0 \mu \bar{I}.$$

Направления векторов  $\bar{B}$  и  $\bar{H}$  совпадают, поэтому можно записать:

$$\hat{A} = \mu_0 \mu \hat{I}.$$

Характер зависимости  $B(H)$  был впервые установлен в 1871 г. русским физиком А. Г. Столетовым.

В общем случае эта зависимость сложна. Ее устанавливают экспериментально и представляют графически в виде кривой намагничивания, называемой циклом (петлей) **магнитного гистерезиса** ([рис. 8.1](#)). Для каждого значения  $H_{\max}$  получается свой цикл гистерезиса.

Явление гистерезиса – это отставание изменения магнитной индукции  $B$  от изменения напряженности магнитного поля  $H$ . Как видно из [рис. 8.1](#), когда  $H = 0$ ,  $B$  имеет остаточное значение.

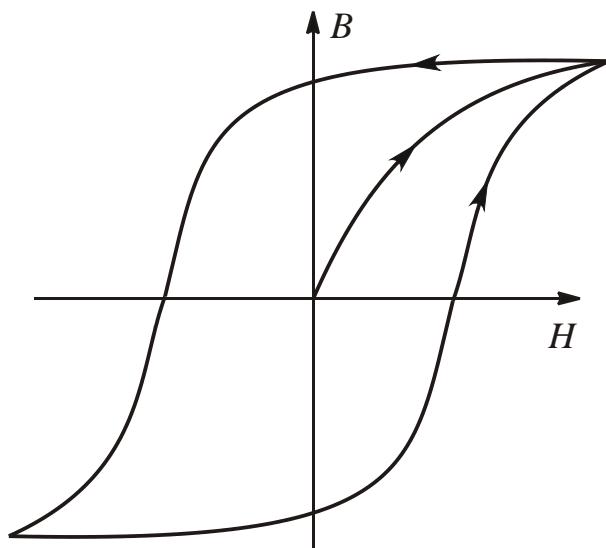


Рис. 8.1

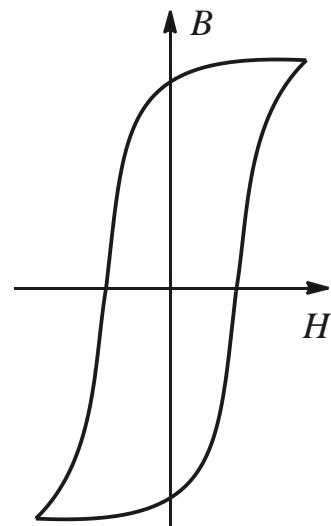


Рис. 8.2

Материалы с широким циклом магнитного гистерезиса ([рис. 8.1](#)) называют магнитотвердыми, с узким ([рис. 8.2](#)) – магнитомягкими.

При расчетах, если позволяет требуемая точность, пользуются основной кривой намагничивания.

Основная кривая намагничивания – это геометрическое место вершин симметричных циклов магнитного гистерезиса ([рис. 8.3](#)). Она практически совпадает с кривой первоначального намагничивания.



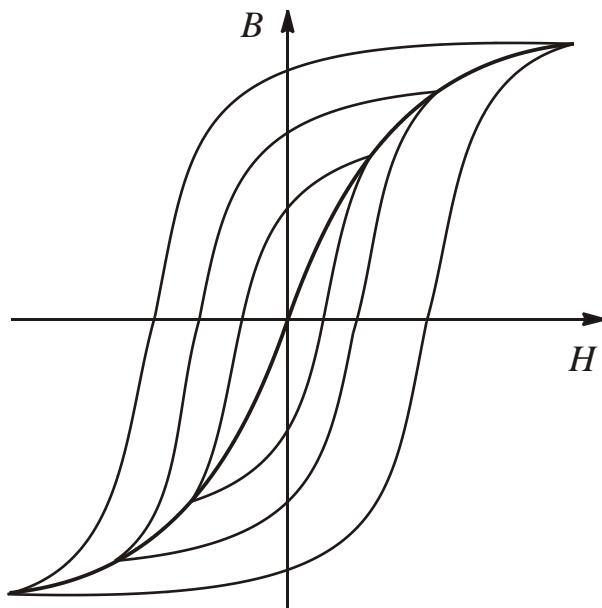


Рис. 8.3

**Магнитный поток** – поток магнитной индукции через площадь  $S$ :

$$\Phi = B \cdot S.$$

Магнитный поток измеряют в веберах (Вб).

Магнитное напряжение между двумя точками магнитного поля  $U_M = \bar{H} \cdot \bar{l}$  (рис. 8.4). При расчетах выбирают  $\bar{l}$  по направлению  $\bar{H}$ . Тогда можно записать:  $U_i = H \cdot l$ .  $[U_i] = \text{А}$ .

**Магнитодвижущая сила**  $F = WI$ ,  
где  $W$  – число витков катушки;  $I$  – ток в ней.

Очевидно, что единицей измерения магнитодвижущей силы является ампер (А).

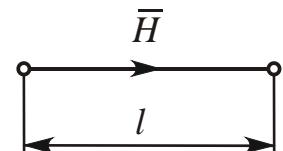


Рис. 8.4

## 8.2. Основные законы магнитных цепей

**1. Принцип непрерывности магнитного потока.** Линии магнитной индукции непрерывны и замкнуты. Поэтому магнитный поток через замкнутую поверхность  $\Phi = \oint B \cdot dS = 0$ . Отсюда следует, что в неразветвленных цепях магнитный поток на всех участках одинаков, а в разветвленных цепях алгебраическая сумма магнитных потоков в точке разветвления равна нулю:

$$\sum \hat{\Phi} = 0.$$

**2. Закон полного тока.** Линейный интеграл напряженности магнитного поля вдоль замкнутого контура равен алгебраической сумме токов, пронизывающих этот контур:



$$\oint I \, d\bar{l} = \Sigma I.$$

Правило знаков: со знаком плюс записывают токи, связанные с выбранным направлением обхода контура интегрирования правилом правоходового винта (правой руки).

Контур интегрирования выбирают совпадающим с магнитной силовой линией, тогда обозначения векторов можно убрать. Закон полного тока для [рис. 8.5](#) имеет следующий вид:

$$\oint I \, dl = I_1 - I_2.$$

Если внутри контура интегрирования находятся не линейные проводники, а индуктивные катушки, то в правой части уравнения по закону полного тока нужно записать алгебраическую сумму магнитодвижущих сил:

$$\oint I \, dl = \Sigma F = \Sigma WI.$$

Напряженность магнитного поля принимают для средней силовой линии.

Воспользуемся законом полного тока для анализа неразветвленной неоднородной магнитной цепи. Эта цепь представляет собой индуктивную катушку с сердечником из ферромагнитного материала, который усиливает магнитный поток и придает ему требуемую форму ([рис. 8.6](#)).

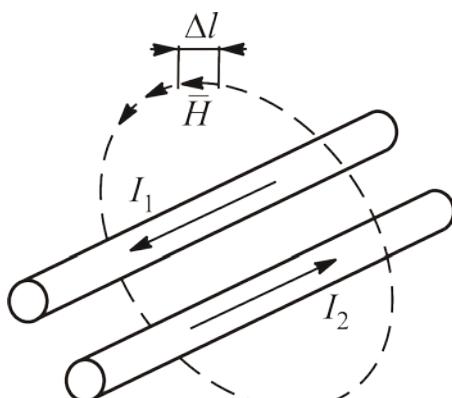


Рис. 8.5

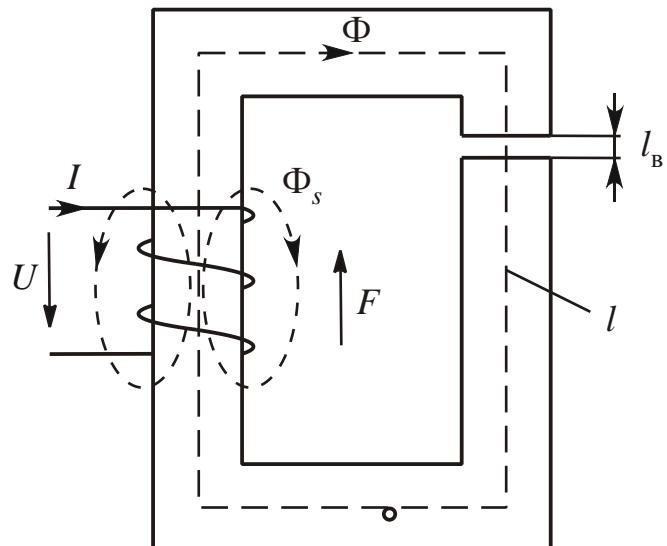


Рис. 8.6

Сердечник изготавливают разборным, чтобы на стержень можно было надеть катушку. В местах стыков возникают зазоры, которые на [рис. 8.6](#) учтены одним с суммарной длиной  $l_a$ . Даже небольшой воздушный зазор довольно резко уменьшает магнитный поток. Иногда воздушные зазоры делают

специально, чтобы сердечник не намагничивался до состояния насыщения.

Основная часть магнитного потока  $\Phi$  замыкается по сердечнику. Магнитный поток рассеяния  $\hat{\Phi}_s$  замыкается по воздуху (см. [рис. 8.6](#)). Строгий расчет магнитной цепи может быть выполнен только с привлечением методов теории электромагнитного поля.

Для приближенного решения делают следующие допущения:

- 1) пренебрегают магнитным потоком рассеяния ( $\hat{\Phi}_s = 0$ );
- 2) площадь  $S_{\hat{a}}$ , которую пронизывает поток  $\Phi$  в зазоре, считают равной площади поперечного сечения  $S$  сердечника магнитопровода, т. е. пренебрегают выпучиванием магнитных линий в зазоре;

- 3) при расчете пользуются основной кривой намагничивания.

Если сечение магнитопровода одинаково, то представленную на [рис. 8.6](#) магнитную цепь делим на два участка: сердечник и воздушный зазор. По закону полного тока

$$Hl + H_{\hat{a}}l_{\hat{a}} = F.$$

Так как  $H = \frac{B}{\mu \cdot \mu_0}$  и  $H_{\hat{a}} = \frac{B_{\hat{a}}}{\mu_0}$ , а  $B = B_{\hat{a}} = \frac{\hat{\Phi}}{S}$ , то  $H = \frac{\hat{\Phi}}{\mu \cdot \mu_0 S}$  и  $H_{\hat{a}} = \frac{\hat{\Phi}}{\mu_0 S}$ .

Подставив эти формулы в закон полного тока, получим:

$$\hat{\Phi} \left( \frac{l}{\mu \cdot \mu_0 S} + \frac{l_{\hat{a}}}{\mu_0 S} \right) = F.$$

По аналогии с электрическим сопротивлением  $R = \frac{l}{\gamma S}$ , где  $\gamma$  – удельная проводимость, вводят понятие магнитного сопротивления сердечника  $R_i = \frac{l}{\mu \cdot \mu_0 S}$  и зазора  $R_{i\hat{a}} = \frac{l_{\hat{a}}}{\mu_0 S}$ .

Тогда уравнение по закону полного тока примет вид

$$\hat{\Phi}(R_i + R_{i\hat{a}}) = F.$$

Отсюда

$$\hat{\Phi} = \frac{F}{R_i + R_{i\hat{a}}}.$$

Эта формула похожа по структуре на формулу, выражающую закон Ома для полной электрической цепи. Уравнение по закону полного тока похоже на уравнение по второму закону Кирхгофа для электрической цепи,



уравнение  $\sum \hat{O} = 0$  – на уравнение по первому закону Кирхгофа.

На основании этого говорят о формальной аналогии между магнитными и электрическими цепями. По своему физическому содержанию процессы, происходящие в этих цепях, существенно отличаются.

По аналогии с электрической цепью в магнитной цепи можно выделить узлы и ветви, составить ее схему замещения.

Схема замещения магнитной цепи [рис. 8.6](#) и ее аналоговая электрическая схема приведены на [рис. 8.7, а и б](#).

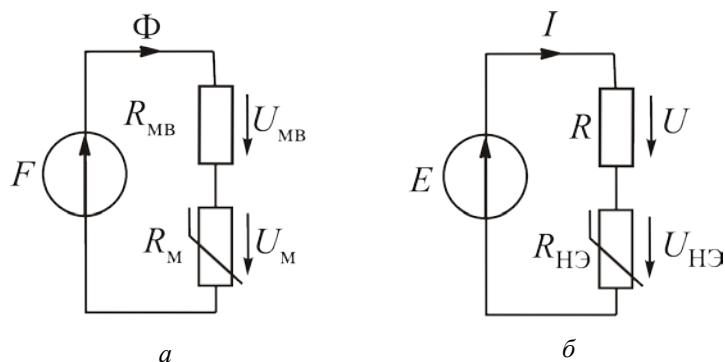


Рис. 8.7

Схема замещения содержит два последовательно соединенных элемента: линейный, сопротивление  $R_i$ , которого равно магнитному сопротивлению воздушного зазора, и нелинейный, сопротивление  $R_i$ , которого равно магнитному сопротивлению сердечника.

Расчет магнитных цепей аналогичен расчету нелинейных электрических цепей с сосредоточенными параметрами, причем МДС  $F$  соответствует ЭДС  $E$ , поток  $\Phi$  – току  $I$ , магнитное сопротивление  $R_i$  – электрическому сопротивлению  $R$ , магнитное напряжение  $U_i$  – электрическому напряжению  $U$ .

По аналогии с электрическими цепями основные законы магнитных цепей нередко называют законами Кирхгофа для магнитных цепей и формулируют следующим образом:

1) алгебраическая сумма магнитных потоков в узле равна нулю:

$$\sum \hat{O} = 0;$$

2) алгебраическая сумма магнитных напряжений в контуре равна алгебраической сумме действующих в этом контуре МДС:

$$\sum U_i = \sum F; \quad \sum Hl = \sum WI \text{ или } \sum R_i \Phi = \sum F.$$

Магнитное напряжение направлено по потоку. Для определения направления МДС можно использовать правило правой руки: если сердечник мысленно охватить правой рукой, расположив четыре пальца по направлению тока в катушке, то отогнутый большой палец укажет направление МДС.

### 8.3. Расчет неразветвленных магнитных цепей

При расчете магнитных цепей различают два типа задач: прямую и обратную.

#### 8.3.1. Прямая задача

В прямой задаче по заданному магнитному потоку нужно определить магнитодвижущую силу катушки, необходимую для его создания. Заданы геометрические размеры магнитопровода и кривая намагничивания ферромагнетика.

Порядок решения следующий:

1. Нанесем среднюю силовую линию и определим направление МДС.
2. Разобьем магнитную цепь на участки, отличающиеся друг от друга площадью поперечного сечения и материалом. Длины участков  $l_k$  берем по средней силовой линии.

Магнитную цепь, представленную на [рис. 8.8](#), разбиваем на три участка: два из ферромагнитного материала, отличающиеся площадью поперечного сечения, и воздушный зазор. При расчете необходимо, чтобы  $[l] = \text{м}$ , а  $[S] = \text{м}^2$ .

3. Для каждого участка найдем значения магнитной индукции, исходя из постоянства потока вдоль всей цепи. Так как

$$S_1 = S_{\hat{a}}, \text{ то } B_1 = B_{\hat{a}} = \frac{\hat{O}}{S_1}.$$

$$\text{На втором участке } B_2 = \frac{\hat{O}}{S_2}.$$

4. По основной кривой намагничивания, зная индукции  $\hat{A}_1$  и  $\hat{A}_2$ , определим напряженности поля на ферромагнитных участках  $\hat{I}_1$  и  $\hat{I}_2$ .

Напряженность поля в воздушном зазоре вычислим по формуле

$$\hat{I}_{\hat{a}} = \frac{B_{\hat{a}}}{\mu_0} = 0,8 \cdot 10^6 B_{\hat{a}}.$$

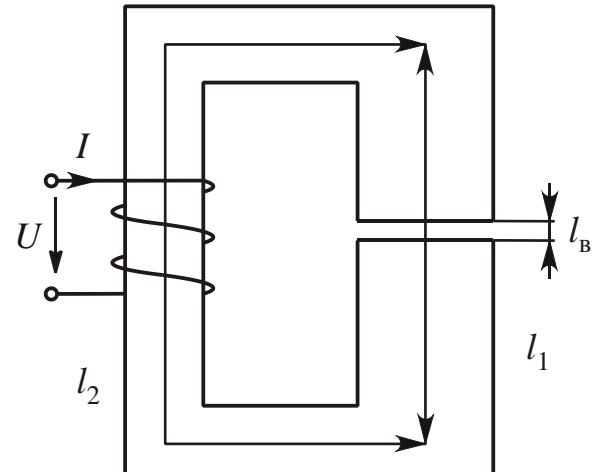


Рис. 8.8

При этом  $[\hat{I}_{\hat{a}}] = \frac{A}{l_a}$ .

5. По закону полного тока вычислим МДС:

$$F = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_{\hat{a}} l_{\hat{a}}.$$

### 8.3.2. Обратная задача

По заданной МДС находим созданный ею магнитный поток. Для решения обратной задачи используем формальную аналогию между магнитными и электрическими цепями. Схема замещения неразветвленной неоднородной магнитной цепи аналогична схеме замещения нелинейной электрической цепи с одним источником энергии и последовательным соединением элементов. При расчете электрических нелинейных цепей используем вольт-амперные характеристики (ВАХ). Аналогом ВАХ в магнитной цепи является вебер-амперная характеристика, т. е. зависимость  $\Phi(U_M)$ . Для построения вебер-амперной характеристики выбираем ряд значений  $\Phi_k$  и вычисляют для них магнитное напряжение  $U_{M_k}$  как в прямой задаче.

Произвольными значениями  $\Phi_k$  задаваться нельзя из-за явления магнитного насыщения. Поэтому нужно выбирать ряд значений  $B_k$  из основной кривой намагничивания, а по ним вычислять  $\Phi_k = B_k \cdot S$  либо по  $B_{\max}$  вычислить  $\Phi_{\max} = B_{\max} \cdot S$ , остальные значения магнитного потока выбрать от 0 до  $\Phi_{\max}$ .

Решение обратной задачи возможно двумя способами.

1. Отыскание рабочей точки на результирующей вебер-амперной характеристике по заданному значению МДС.

В неразветвленной магнитной цепи поток один, а МДС  $F$  равна сумме магнитных напряжений отдельных участков, поэтому для построения результирующей вебер-амперной характеристики складывают значения магнитных напряжений при одном потоке. Можно построить вебер-амперные характеристики для каждого участка цепи, а затем их сложить. Но такое решение является нерациональным. Лучше сразу строить результирующую характеристику, вычислив  $\sum U_{M_k}$  для выбранного ряда значений  $\Phi_k$ .

Практически следует задаться рядом значений магнитной индукции, охватывая весь интервал, на участке с меньшим сечением, чтобы на других участках значения индукции не превысили допустимых из-за явления магнитного насыщения величин.

Меньшим сечением в магнитной цепи на [рис. 8.8](#) обладает участок 2. Значения индукции  $\hat{A}_{l_e} = \hat{A}_{\hat{a}_e}$  можно определить по формуле  $\hat{A}_{l_e} = \hat{A}_{\hat{a}_e} =$

$$= \frac{\hat{O}_e}{S_1} = \frac{B_{2_e} \cdot S_2}{S_1}.$$

Для каждого из значений магнитного потока нужно решить прямую задачу и вычислить  $\sum U_{i_e} = \sum I_e l_e$ . Результаты вычислений лучше свести в таблицу.

По полученным данным строим зависимость  $\hat{O} = f(\sum U_i)$  ([рис. 8.9](#)).

По значению  $F = \sum U_i$  определяем рабочую точку  $A$  и значение магнитного потока  $\Phi$ .

2. Отыскание рабочей точки на пересечении вебер-амперной характеристики сердечника с зеркальным изображением вебер-амперной характеристики воздушного зазора. Этот способ рационально использовать при одинаковой площади поперечного сечения магнитопровода.

Вебер-амперную характеристику сердечника  $\hat{O} = f(U_i)$  можно получить из основной кривой намагничивания, умножив  $B$  и  $H$  соответственно на постоянные сомножители  $S$  и  $l$ .

Вид зависимости  $\hat{O}(U_i)$  будет аналогичен основной кривой намагничивания ([рис. 8.10](#)).

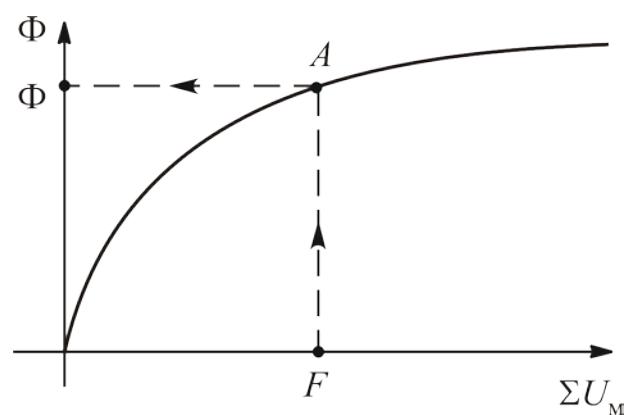


Рис. 8.9

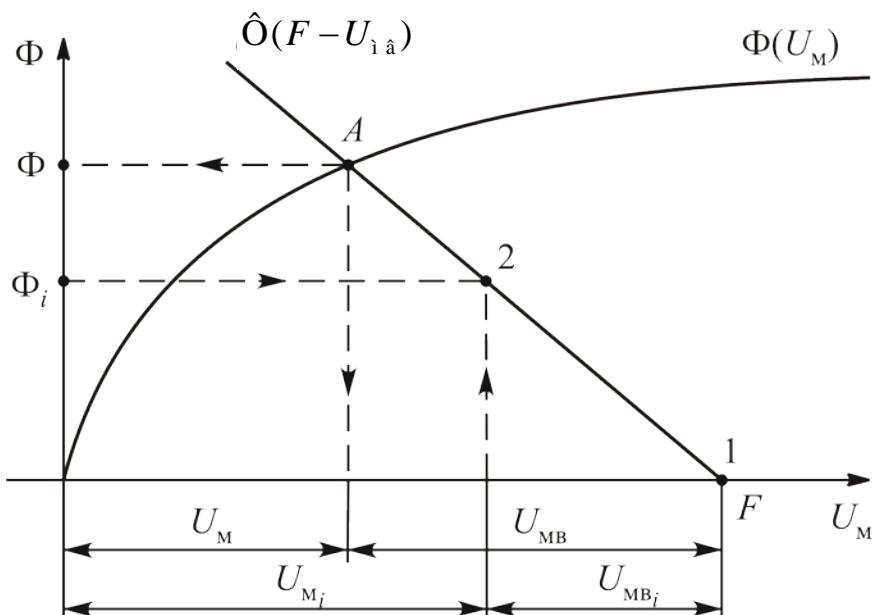


Рис. 8.10

Магнитное напряжение сердечника в рабочем режиме можно определить по закону полного тока:  $U_i = F - U_{i_a}$ . Очевидно, что графики  $\hat{O} = f(U_i)$  и  $\hat{O} = f(F - U_{i_a})$  пересекутся в рабочей точке.

Вычитая из величины МДС  $F$  абсциссы зависимости  $\hat{O} = f(U_{i_a})$ , получим абсциссы графика  $\hat{O} = f(F - U_{i_a})$ , т. е. график  $\hat{O} = f(F - U_{i_a})$  представляет собой зеркальное изображение зависимости  $\hat{O} = f(U_{i_a})$ , сдвинутое вправо от начала координат на величину МДС  $F$ . Вебер-амперная характеристика воздушного зазора – прямая линия. Для ее построения достаточно двух

точек. Точку 1 получаем для значения  $\Phi = 0$ . При этом  $U_{i\hat{a}} = 0$ , а  $F - U_{i\hat{a}} = F$ . Чтобы получить точку 2, задаемся каким-либо значением  $\hat{O}_i$ , не выходящим за пределы, обусловленные явлением магнитного насыщения.

Величина магнитной индукции в зазоре  $B_{\hat{a}_i} = B_i = \frac{\Phi_i}{S}$ , напряженность магнитного поля зазора  $H_{\hat{a}_i} = 0,8 \cdot 10^6 B_{\hat{a}_i}$ , магнитное напряжение  $U_{i\hat{a}_i} = H_{\hat{a}_i} l_{\hat{a}}$ . Величину  $U_{i\hat{a}_i}$  откладываем влево от точки 1.

По этим двум точкам строим график  $\hat{O} = f(F - U_{i\hat{a}})$  и находим рабочую точку  $A$ . Опустив перпендикуляры на оси потока и магнитного напряжения, получим значения  $\Phi$ ,  $U_i$  и  $U_{i\hat{a}}$ .

## 8.4. Расчет разветвленных магнитных цепей

### 8.4.1. Симметричные цепи

Разветвленные симметричные магнитные цепи часто встречаются на практике. Пример такой цепи приведен на [рис. 8.11](#).

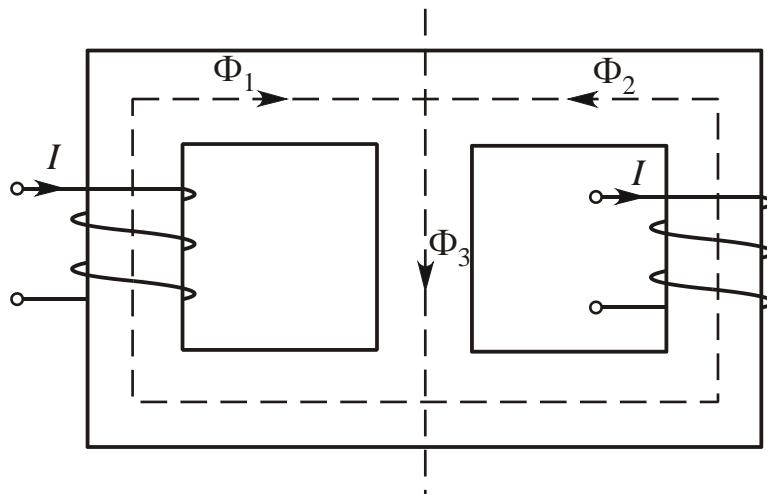


Рис. 8.11

Магнитную цепь делят по оси симметрии на две одинаковые неразветвленные цепи, расчет которых уже рассмотрен. Магнитные потоки в них одинаковы и соответствуют половине потока среднего стержня сердечника:  $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 0,5\hat{O}_3$ .

### 8.4.2. Несимметричные цепи

Пример разветвленной несимметричной магнитной цепи приведен на [рис. 8.12](#). Наносим средние силовые линии, по которым вычисляем линейные размеры, определяем направления МДС и указываем направления магнитных потоков.

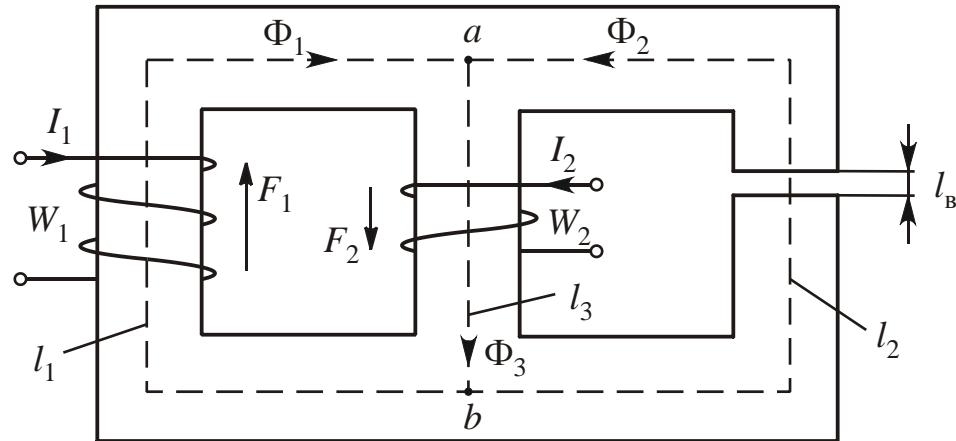


Рис. 8.12

Делим цепь на участки, отличающиеся площадью поперечного сечения и материалом. При расчетах удобно пользоваться схемой замещения магнитной цепи и аналоговой ей электрической схемой (рис. 8.13, а, б).

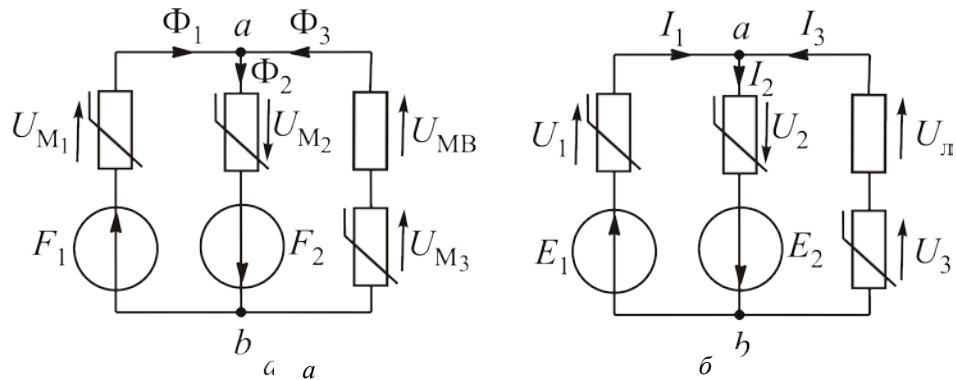


Рис. 8.13

При расчете разветвленных магнитных цепей различают три типа задач: прямую, обратную и смешанную.

#### 8.4.2.1. Прямая задача

В прямой задаче известны геометрические размеры  $l_1, l_2, l_3, l_{\hat{a}}$ ,  $S_1, S_2, S_3$ , основная кривая намагничивания сердечника  $B(H)$ , магнитные потоки  $\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2, \hat{\Phi}_3$ . Нужно вычислить создавшие их МДС  $F_1$  и  $F_2$ .

Составим систему уравнений по законам Кирхгофа для магнитных цепей:

$$\begin{cases} \hat{\Phi}_1 - \hat{\Phi}_2 + \hat{\Phi}_3 = 0; \\ I_1 l_1 + H_2 l_2 = F_1 + F_2; \\ H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_{\hat{a}} l_{\hat{a}} = F_2. \end{cases}$$

По заданным значениям потоков вычисляем магнитные индукции

$B_i = \frac{\Phi_i}{S_i}$ . Для участков из ферромагнитных материалов по основной кривой намагничивания находим  $H_j$ . Напряженность поля в воздушном зазоре  $H_{\hat{a}} = 0,8 \cdot 10^6 B_{\hat{a}}$ . Подставив значения  $H$  и  $l$  в уравнения по второму закону Кирхгофа, найдем  $F_1$  и  $F_2$ .

#### 8.4.2.2. Обратная задача

В обратной задаче по известным геометрическим размерам, зависимости  $B(H)$ , значениям МДС нужно вычислить созданные ими магнитные потоки. Эту задачу решают графоаналитически по аналогии с нелинейными электрическими цепями.

*Решение*

1. Для решения задачи необходимы вебер-амперные характеристики  $\hat{O}_1(U_{i_1})$ ,  $\hat{O}_2(U_{i_2})$ ,  $\hat{O}_3(U_{i_3} + U_{i_{\hat{a}}})$ , способ получения которых подробно рассмотрен в [параграфе 3.3](#). В неразветвленных магнитных цепях рабочая точка расположена в первой четверти координатной плоскости. В разветвленных магнитных цепях рабочая точка может оказаться в любой четверти координатной плоскости. Поэтому веберамперные характеристики нужно рассматривать и в третьей четверти, где они расположены симметрично первой.

2. Рационально сделать расчет методом напряжения между двумя узлами.

Условием для нахождения рабочей точки является уравнение по первому закону Кирхгофа:

$$\hat{O}_1 - \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 0.$$

Для упрощения решения задачи уравнение представим в виде

$$\hat{O}_1 + \hat{O}_3 = \hat{O}_2.$$

3. Оперировать функциями можно, если они заданы в зависимости от одного общего аргумента. Таким аргументом является магнитное напряжение между двумя узлами  $U_{i_{ab}}$ . Рассчитав изменение магнитного потенциала между точками  $b$  и  $a$  для всех трех ветвей (см. [рис. 8.13](#)), получим следующие уравнения:

$$U_{i_{ab}} = F_1 - U_{i_1}; U_{i_{ab}} = -F_2 + U_{i_2}; U_{i_{ab}} = -U_{i_3} - U_{i_{\hat{a}}}.$$

4. На основании этих уравнений, пользуясь зависимостями  $\hat{O}_1(U_{i_1})$ ,  $\hat{O}_2(U_{i_2})$ ,  $\hat{O}_3(U_{i_3} + U_{i_{\hat{a}}})$ , строим графики  $\hat{O}_1(U_{i_{ab}})$ ,  $\hat{O}_2(U_{i_{ab}})$  и  $\hat{O}_3(U_{i_{ab}})$  ([рис. 8.14](#)).



График  $\hat{O}_1(U_{i_{ab}})$  строим, зеркально отобразив зависимость  $\hat{O}_1(U_{i_1})$  и сместив ее вправо от начала координат на величину МДС  $F_1$  (кривая 1). График  $\hat{O}_2(U_{i_{ab}})$  строим, сместив график  $\hat{O}_2(U_{i_2})$  влево от начала координат на величину МДС  $F_2$  (кривая 2). График  $\hat{O}_3(U_{i_{ab}})$  получаем зеркальным отображением графика  $\hat{O}_3(U_{i_3} + U_{i_{\bar{a}}})$  (кривая 3).

5. Складывая ординаты кривых 1 и 3 при одинаковых значениях  $U_{i_{ab}}$ , получаем кривую 4, являющуюся зависимостью  $(\hat{O}_1 + \hat{O}_3) = f(U_{i_{ab}})$ . Пересечение кривых 2 и 4 дает рабочую точку  $A$ .

Опустив из точки  $A$  перпендикуляр на ось абсцисс, получим значение  $U_{i_{ab}}$ . При пересечении перпендикуляра с графиками 1, 2 и 3 получим значения магнитных потоков.

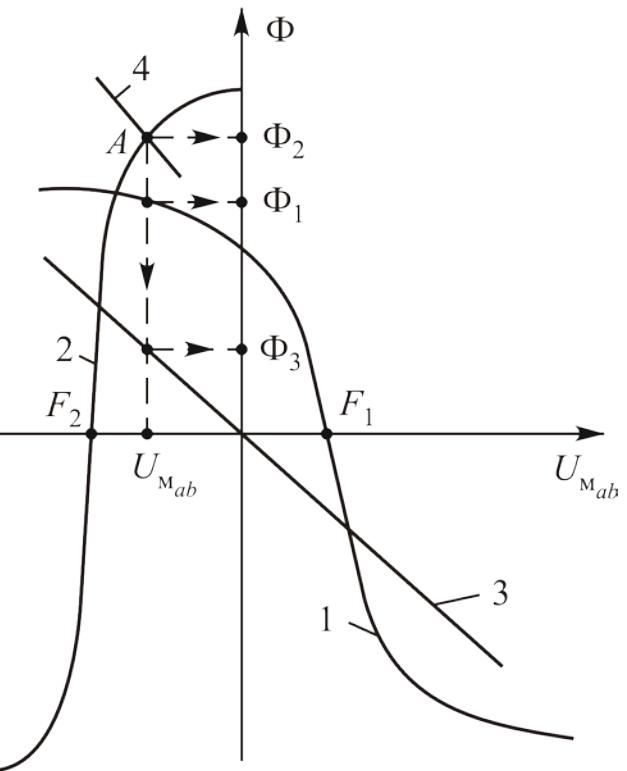


Рис. 8.14

#### 8.4.2.3. Смешанная задача

В смешанной задаче по части значений МДС и потоков нужно вычислить остальные значения МДС и потоков. Задание хотя бы одного из потоков или соотношения между потоками упрощает решение по сравнению с обратной задачей.

Пусть для магнитной цепи на [рис. 8.12](#) нужно вычислить МДС  $F_2$  и потоки  $\hat{O}_1$ ,  $\hat{O}_3$ , если заданы значения МДС  $F_1$  и магнитного потока  $\hat{O}_2$ .

*Решение*

1. Выявим вебер-амперные характеристики  $\hat{O}_1(U_{i_1})$ ,  $\hat{O}_2(U_{i_2})$ ,  $\hat{O}_3(U_{i_3} + U_{i_{\bar{a}}})$ .

2. Запишем уравнение по первому закону Кирхгофа:

$$\hat{O}_1 + \hat{O}_3 = \hat{O}_2,$$

где  $\hat{O}_2$  – известная величина.

Уравнения, связывающие магнитное напряжение между двумя узлами  $U_{i_{ab}}$  с магнитными напряжениями на элементах схемы замещения те же, что и в [подпараграфе 8.4.2.2](#):



$$U_{i_{ab}} = F_1 - U_{i_1}; \quad U_{i_{ab}} = -F_2 + U_{i_2}; \quad U_{i_{ab}} = -U_{i_3} - U_{i_{\hat{a}}}.$$

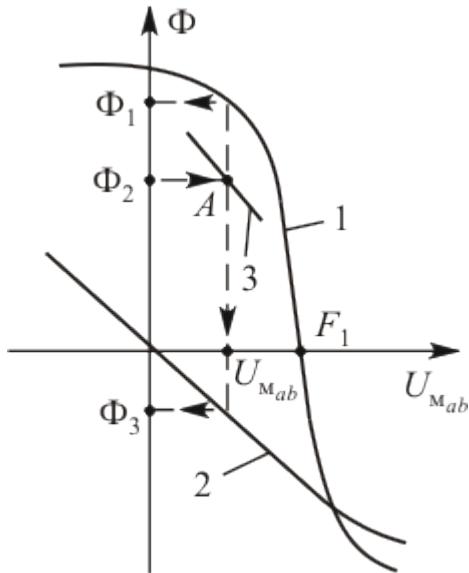


Рис. 8.15

3. На основании этих уравнений, пользуясь зависимостями  $\hat{O}_1(U_{i_1})$  и  $\hat{O}_3(U_{i_3} + U_{i_{\hat{a}}})$ , строим графики  $\hat{O}_1(U_{i_{ab}})$  и  $\hat{O}_3(U_{i_{ab}})$  (соответственно кривые 1 и 2 на рис. 8.15).

4. Складывая ординаты кривых 1 и 2, получаем кривую 3, являющуюся зависимостью  $(\hat{O}_1 + \hat{O}_3) = f(U_{i_{ab}})$ . Точка A, где сумма  $(\hat{O}_1 + \hat{O}_3)$  равна известному значению  $\hat{O}_2$ , является рабочей. Опустив из точки A перпендикуляр на ось абсцисс, получим значение  $U_{i_{ab}}$ . При пересечении перпендикуляра с кривыми 1 и 2 получим значения потоков  $\hat{O}_1$  и  $\hat{O}_3$ . Знак минус показывает, что действительное направление магнитного потока  $\hat{O}_3$  противоположно выбранному.

Значение МДС  $F_2$  найдем из уравнения  $U_{i_{ab}} = -F_2 + U_{i_2}$ :

$$F_2 = U_{i_2} - U_{i_{ab}}.$$

При заданном значении  $\hat{O}_2$  магнитная индукция  $\hat{A}_2 = \frac{\hat{O}_2}{S_2}$ . По основной кривой намагничивания получим  $H_2$ . Магнитное напряжение  $U_{i_2} = I_2 l_2$ .

## 8.5. Расчет магнитной цепи постоянного магнита

В настоящее время постоянные магниты имеют ограниченное применение (в магнето, запальнях машинах).

Рассмотрим магнитопровод, имеющий вид кольца без зазора (рис. 8.16).

По закону полного тока  $Hl = 0$ . Отсюда  $H = 0$ . После намагничивания  $B$  равна остаточной магнитной индукции (рис. 8.17). Постоянные магниты изготавливают из магнитотвердых материалов. Наматывают обмотку, намагничивают до насыщения, после чего обмотку снимают.

Если магнитопровод имеет зазор (рис. 8.18), то уравнение по закону полного тока имеет вид

$$Hl + H_{\hat{a}}l_{\hat{a}} = 0.$$

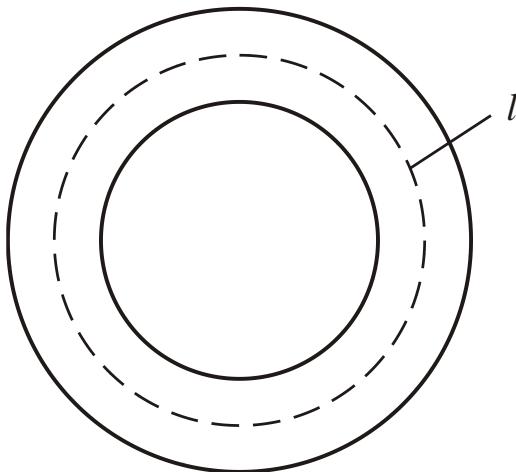


Рис. 8.16

$$\text{Отсюда } H = -\frac{l_{\hat{a}}}{l} H_{\hat{a}}.$$

Очевидно, что  $\hat{A} = \hat{A}_{\hat{a}}$ . Напряженность магнитного поля в зазоре  $\hat{I}_{\hat{a}} = \frac{\hat{A}}{\mu_0}$ . Тогда  $\hat{I} = -\frac{l_{\hat{a}}}{l} \cdot \frac{B}{\mu_0} = -N_B \frac{B}{\mu_0}$ , где  $N_B = \frac{l_{\hat{a}}}{l}$  – размагничивающий коэффициент по индукции.

Напряженность магнитного поля сердечника  $\hat{I} \neq 0$ . В воздушном промежутке  $\hat{I}_{\hat{a}}$  и  $\hat{A}_{\hat{a}}$  совпадают по направлению, в ферромагнитном сердечнике  $H$  и  $B$  – противоположны.

Магнитное состояние магнитопровода определяет одна из точек кривой размагничивания (вторая четверть).

Зависимость  $\hat{O}(U_i)$  можно получить из цикла магнитного гистерезиса  $B(H)$ :  $\hat{O} = \hat{A} \cdot S$ ,  $U_i = \hat{I} \cdot l$ .

Величины  $S$  и  $l$  являются постоянными, поэтому зависимости  $\hat{O}(U_i)$  и  $B(H)$  выглядят аналогично ([рис. 8.19](#)).

Площадь поперечного сечения магнитопровода одинакова, поэтому рабочую точку рационально найти на пересечении вебер-амперной характеристики магнитопровода и зеркального изображения вебер-амперной характеристики воздушного зазора. Из уравнения по закону полного тока следует, что  $U_i = -U_{i\hat{a}}$ . График зависимости  $\hat{O}(-U_{i\hat{a}})$  – прямая линия, проходящая через начало координат. Для ее построения достаточно найти координаты одной точки 1. Задавшись значением магнитного потока  $\hat{O}_i$ , не выходящим за пре-

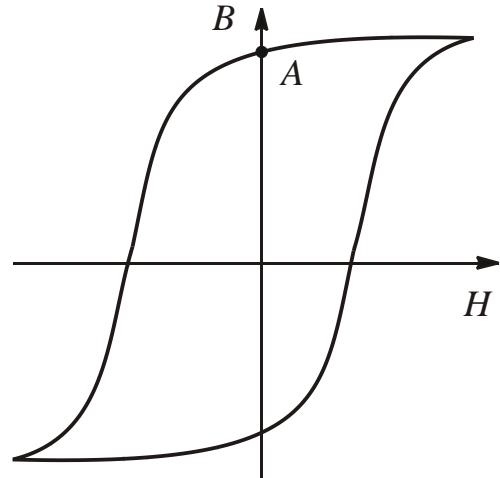


Рис. 8.17

дели насыщения, вычислим  $B_{\hat{a}_i} = \frac{\hat{O}_i}{S}$ ,  $H_{B_i} = 0,8 \cdot 10^6 B_{B_i}$  и  $U_{i \hat{a}_i} = H_{\hat{a}_i} \cdot l_{\hat{a}}$ .

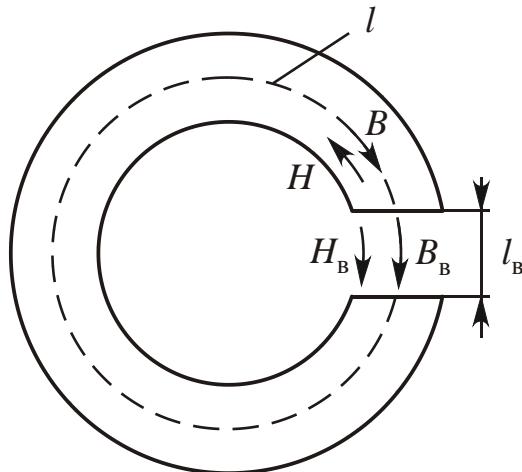


Рис. 8.18

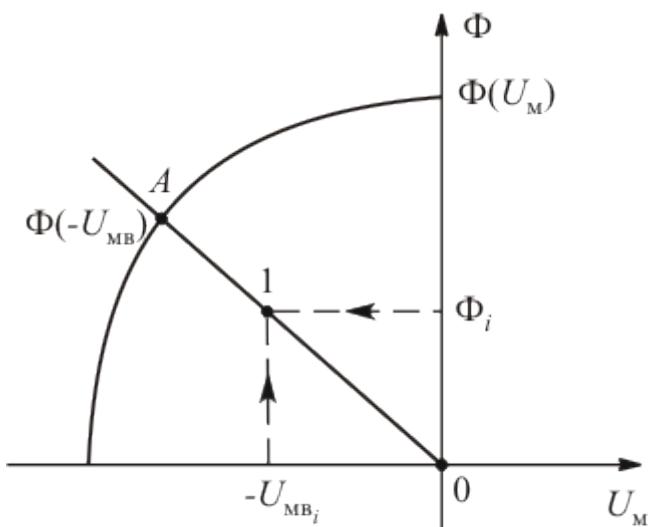


Рис. 8.19

Рабочая точка  $A$  находится на пересечении графиков  $\hat{O}(U_i)$  и  $\hat{O}(-U_{i \hat{a}})$ .

## ГЛАВА 9

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

В электротехнических устройствах в основном используют индуктивные катушки с ферромагнитным сердечником.

### 9.1. Магнитный поток и ЭДС катушки с ферромагнитным сердечником

При наличии в индуктивной катушке переменного тока созданный им магнитный поток будет тоже переменным, поэтому в катушке наводится ЭДС самоиндукции. Основная часть магнитного потока  $\hat{\Phi}_1$  замыкается по сердечнику. Этот поток наводит ЭДС  $e_1 = -W \frac{d\hat{\Phi}_1}{dt}$ . Это явление характеризуют индуктивностью  $L_1$ .

Ферромагнитные цепи являются нелинейными. Величина индуктивности  $L_1$  меняется в зависимости от величины тока в катушке ([рис. 9.1](#)). Поэтому формулу  $e_1 = -L_1 \frac{di}{dt}$  использовать нельзя.

Если магнитный поток меняется по синусоидальному закону  $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}_m \sin \omega t$ , то созданная им ЭДС

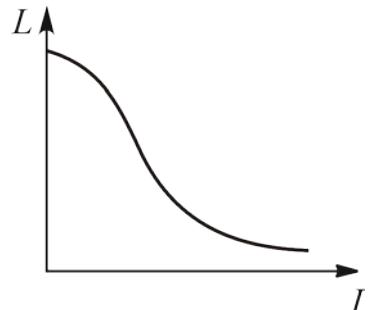


Рис. 9.1

$$e = -W \frac{d\Phi}{dt} = -W\Phi_m \omega \cos \omega t = -W\Phi_m \omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}).$$

Полученное выражение показывает, что при синусоидальном магнитном потоке ЭДС меняется тоже по синусоидальному закону и отстает от создавшего ее потока на  $90^\circ$ .

Эти выводы можно проиллюстрировать графиками: синусоидами ([рис. 9.2, а](#)) и векторной диаграммой ([рис. 9.2, б](#)).

Максимальное значение ЭДС  $\dot{E}_m = W\hat{\Phi}_m \omega$ . Так как угловая частота  $\omega = 2\pi f$ , можно записать:

$$E_m = W\Phi_m 2\pi f.$$

Разделив обе части равенства на  $\sqrt{2}$ , получим действующее значение ЭДС:

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} Wf\Phi_m = 4,44 Wf\Phi_m.$$



Эту формулу называют формулой трансформаторной ЭДС.

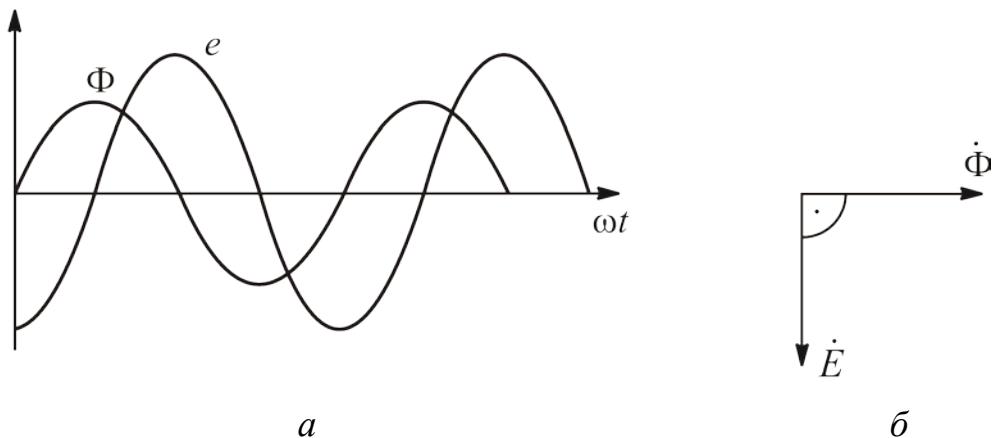


Рис. 9.2

Явление электромагнитной индукции – одно из важнейших явлений, наблюдающихся в магнитном поле.

В 1819 г. датчанин Ганс Эрстед открыл магнитные действия электрического тока. До этого было установлено, что электрическая энергия превращается в тепловую и химическую, а тепловая и химическая – в электрическую. Еще раньше было известно, что тепловая энергия превращается в механическую, а механическая – в тепловую.

Узнав об открытии Г. Эрстеда и учитывая, что преобразования энергии являются обратимыми, англичанин Майкл Фарадей в 1821 г. записал в дневнике: «Превратить магнетизм в электричество». Через 10 лет упорного труда в 1831 г. он открыл явление электромагнитной индукции – основу принципа действия электрических машин и измерительных приборов.

М. Фарадей был гениальным экспериментатором. За 24 года в каждом номере журнала Академии наук было напечатано 3362 параграфа материалов «Из лаборатории Фарадея».

## 9.2. Потери в катушке с ферромагнитным сердечником

Одна из особенностей катушки с ферромагнитным сердечником состоит в том, что кроме активной мощности, потребляемой на нагрев самой катушки, активная мощность расходуется в сердечнике.

Мощность, потребляемую в проводах катушки, называют потерями мощности в меди  $D_i$ , потому что в большинстве случаев обмотки изготавливают из медной проволоки. Мощность, расходуемую на нагрев сердечника, называют потерями мощности в стали  $P_{ct}$ . Можно записать:  $P = P_m + P_{ct}$ .

Потери в стали складываются из потерь на гистерезис  $P_g$  и потерь от вихревых токов  $P_{bt}$ :

$$P_{ct} = P_g + P_{bt}.$$

Потери на гистерезис – это потери на перемагничивание. Их характеризует площадь цикла магнитного гистерезиса.

Потери на гистерезис вычисляют по формуле

$$P_{\text{г}} = \sigma_{\text{г}} f B_m^n G,$$

где  $\sigma_{\text{г}}$  – коэффициент, зависящий от материала сердечника;

$G$  – вес сердечника.

Показатель степени  $n = 1,6$  при  $\hat{A}_o < 1$  Тл,  $n = 2$  при  $\hat{A}_o > 1$  Тл.

Под действием переменного магнитного потока в сердечнике наводятся ЭДС, которые создают токи, замыкающиеся в теле сердечника. Их называют вихревыми токами. Они нагревают сердечник, а также вызывают магнитный поток, направленный против основного магнитного потока.

Для уменьшения потерь от вихревых токов сердечник изготавливают из тонких пластин, изолированных друг от друга.

Потери от вихревых токов вычисляют по формуле

$$P_{\text{вт}} = \sigma_{\text{вт}} f^2 B_m^2 G,$$

где  $\sigma_{\text{вт}} = \frac{\pi^2}{6\rho} a^2$ ;

$\rho$  – удельное сопротивление;

$a$  – толщина пластины сердечника.

При уменьшении толщины пластины увеличиваются потери на перемагничивание, поэтому выбирают следующие оптимальные размеры  $a$ :

при частоте  $f = 50$  Гц  $a = (0,35–0,5)$  мм;

при частоте  $f = 400$  Гц  $a = (0,1–0,35)$  мм.

### 9.3. Ток катушки с ферромагнитным сердечником

Чтобы построить график изменения тока  $i(t)$ , необходимо воспользоваться графиком изменения магнитного потока  $\Phi(t)$  и магнитной характеристикой катушки  $\Phi(i)$ .

Магнитную характеристику можно получить на основе зависимости  $B(H)$ , умножив магнитную индукцию на площадь поперечного сечения сердечника  $S$ , а напряженность магнитного поля  $H$  – на длину средней силовой линии сердечника. Произведение  $B \cdot S = \hat{O}$ , произведение  $Hl = U_i$  пропорционально току. Так как  $S$  и  $l$  являются постоянными величинами, то магнитная характеристика имеет тот же вид, что и цикл магнитного гистерезиса.

**1. Пренебрегаем потерями на гистерезис ( $D_{\text{г}} = 0$ ).**

В этом случае магнитная характеристика имеет тот же вид, что и основная кривая намагничивания. Построение графика  $i(t)$  иллюстрирует [рис. 9.3](#).



Рис. 9.3

Полученный график тока позволяет сделать следующие выводы:

1. При синусоидальном напряжении и синусоидальном магнитном потоке ток несинусоидальный.
2. Кривая тока симметрична относительно прямой, проходящей через максимальное значение тока.
3. Когда магнитный поток  $\Phi = 0$ , ток  $i = 0$ .
4. Когда магнитный поток  $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}_m$ , ток  $i = I_{\max}$ .
5. При разложении кривой тока в ряд Фурье в нем ярко выражены нечетные гармоники:

$$i = i_1 + i_3 + i_5 + \dots$$

## 2. Учитываем потери на гистерезис ( $D_a \neq 0$ ).

Построение графика  $i(t)$  иллюстрирует [рис. 9.4](#).



Рис. 9.4

Полученный график тока позволяет сделать следующие выводы:

1. При синусоидальном напряжении и синусоидальном магнитном потоке кривая тока резко несинусоидальная.
2. Кривая тока несимметрична относительно прямой, проходящей через максимальное значение тока.
3. Когда магнитный поток  $\Phi = 0$ , ток  $i \neq 0$ . Когда ток  $i = 0$ , магнитный поток  $\Phi \neq 0$ . Ток опережает магнитный поток на угол магнитных потерь  $\delta$ .
4. Когда магнитный поток  $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}_\delta$ , ток  $i = I_{\max}$ .
5. При разложении кривой тока в ряд Фурье ярко выражены нечетные гармоники:

$$i = i_1 + i_3 + i_5 + \dots$$

#### 9.4. Схема замещения и векторная диаграмма катушки с ферромагнитным сердечником

При расчетах, не требующих особо высокой точности, несинусоидальный режим заменяют синусоидальным. Кривую тока заменяют либо эквивалентной ей синусоидой с тем же действующим значением тока, либо первой гармоникой, пренебрегая высшими, полученными при разложении кривой тока в ряд Фурье. При этом происходит замена нелинейного элемента условно-нелинейным: ВАХ для мгновенных значений будет линейной, для действующих – нелинейной.

Синусоидальную величину можно заменить вращающимся вектором, а ему сопоставить комплексное число. Ставятся возможными расчеты символическим методом, построение векторных диаграмм.

В схеме замещения идеальными элементами (рис. 9.5) учитывают явления, происходящие в реальной катушке.

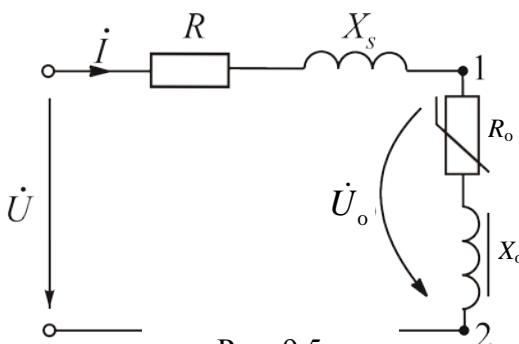


Рис. 9.5

Рис. 4.5

занные с сердечником, являются нелинейными.

При некоторых расчетах удобно использовать эквивалентную схему замещения с параллельным единением элементов (рис. 9.6).

Переход от одной схемы замещения к другой делают по формулам:

Резистор сопротивлением  $R$  учитывает нагрев проводов катушки, сопротивлением  $R_i$  – нагрев сердечника.

Индуктивный элемент сопротивлением  $X_s$  учитывает ЭДС  $E_s$ , наведенную магнитным потоком рассеяния,  $X_i$  – ЭДС  $E_i$ , наведенную основным магнитным потоком.

Элементы схемы замещения, связанные с сердечником, являются нелинейными.

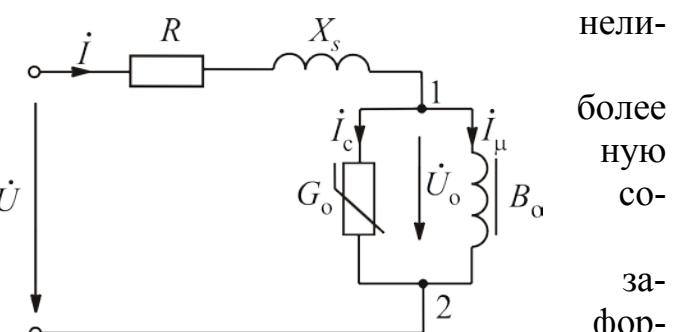


Рис. 4.6

$$R_i = \frac{G_i}{Y_i^2}; \quad X_i = \frac{B_i}{Y_i^2}; \quad G_i = \frac{R_i}{Z_i^2}; \quad B_i = \frac{X_i}{Z_i^2},$$

где  $Y_i$  – полная проводимость участка между точками 1 и 2,  $Z_i$  – полное сопротивление этого участка.

Напряжение, подаваемое на катушку, уравновешивает ЭДС  $\dot{E}_i$  и  $\dot{E}_s$  и падение напряжения на резисторе сопротивлением  $R$ :

$$\dot{U} = -\dot{E}_i - \dot{E}_s + R\dot{I}.$$

ЭДС можно учесть соответствующими напряжениями:

$$\dot{E}_{\hat{1}} = -\dot{U}_{\hat{1}} \text{ и } \dot{E}_s = -\dot{U}_s = -jX_s \dot{I}.$$

Тогда уравнение электрического состояния примет вид

$$\dot{U} = \dot{U}_{\hat{1}} + R\dot{I} + jX_s \dot{I}.$$

В схеме замещения с параллельным соединением элементов ток раскладывается на две составляющие: реактивную намагничивающую  $I_{\mu}$  и активную  $I_{\text{a}}$ , учитывающую потери в стали.

Построение векторной диаграммы начинают с вектора основного магнитного потока  $\hat{\Phi}_{\text{o}}$  (рис. 9.7). Наведенная им ЭДС  $\dot{E}_{\text{o}}$  отстает от  $\hat{\Phi}_{\text{o}}$  на угол  $90^{\circ}$ . Напряжение  $\dot{U}_{\hat{1}} = -\dot{E}_{\hat{1}}$ . Ток опережает основной магнитный поток на угол магнитных потерь  $\delta$ . Магнитный поток рассеяния  $\hat{\Phi}_s$  совпадает по фазе с током. Наведенная им ЭДС  $\dot{E}_s$  отстает от  $\hat{\Phi}_s$  на угол  $90^{\circ}$ .

Входное напряжение складывается из трех:  $\dot{U}_{\hat{1}}, R\dot{I}$  и  $jX_s \dot{I}$ . Вектор напряжения  $R\dot{I}$  строим из конца вектора  $\dot{U}_{\hat{1}}$  параллельно вектору тока  $\dot{I}$ . Вектор напряжения  $jX_s \dot{I}$  опережает вектор тока на  $90^{\circ}$ .

Векторная диаграмма токов для схемы с параллельным соединением элементов представлена на рис. 9.8.

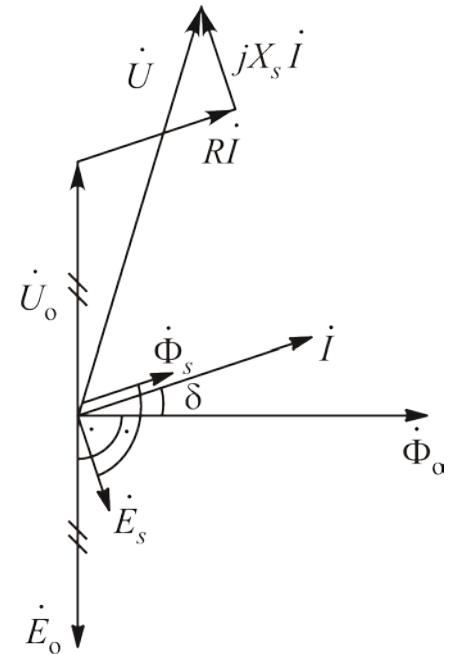


Рис. 9.7

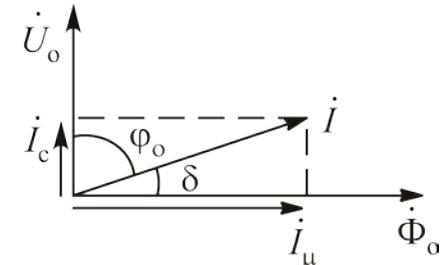


Рис. 9.8

## 9.5. Расчет параметров схемы замещения катушки с ферромагнитным сердечником

Катушку рассматриваем как условно-нелинейный элемент, заменяя несинусоидальный режим для мгновенных значений синусоидальным. В этом случае применимы все методы расчетов для линейных цепей.

### 9.5.1. Расчет параметров схемы замещения по результатам опытов

Для расчета используем показания таких приборов, как амперметр,

вольтметр, ваттметр, фазометр, законы Кирхгофа, векторные диаграммы и основные формулы электротехники.

### 9.5.2. Расчет параметров схемы замещения по кривым удельных потерь

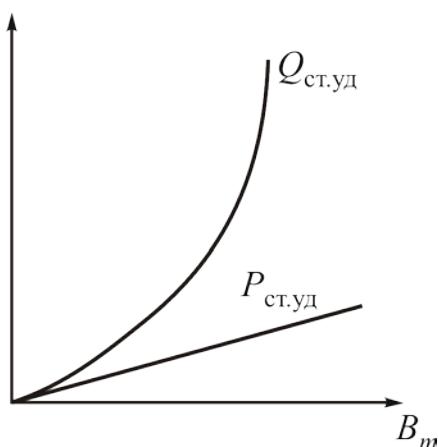


Рис. 9.9

В качестве характеристик стали принимают кривые удельных потерь, которые приведены в справочной литературе (см. [рис. 9.9](#)).

Под удельными потерями понимают отношения активной и реактивной мощностей сердечника к единице массы стального магнитопровода:

$$P_{\text{ст.уд}} = \frac{P_{\text{ст}}}{G}; \quad G_{\text{ст.уд}} = \frac{Q_{\text{ст}}}{G}.$$

Активная мощность сердечника  $P_{\text{ст}} = U_o I \cos \phi_o$ . Как видно из [рис. 9.8](#),  $P_{\text{ст}} = U_o I \sin \delta = U_o I_c = U_o G_o U_o = G_o U_o^2 = \frac{I_c^2}{G_o}$ .

Реактивная мощность сердечника  $Q_{\text{ст}} = U_o I \sin \phi_o = U_o I \cos \delta = U_o I_\mu = B_o U_o^2 = \frac{I_\mu^2}{B_o}$ .

Рассмотрим решение на конкретном примере.

*Пример 9.1.* Вычислить проводимости  $B_o$  и  $G_o$ , если известны геометрические размеры сердечника, число витков катушки, входное напряжение, кривые удельных потерь и активное сопротивление  $R$ .

#### Решение

Зная геометрические размеры и материал сердечника, можно определить вес сердечника  $G$ .

Реактивным сопротивлением пренебрегаем, т. е. принимаем  $X_s = 0$ . Так как  $U_R \ll U_i$ , принимаем  $U_i \approx U$ .

Из формулы трансформаторной ЭДС  $E_i = U_i = 4,44 fW\hat{O}_o$  вычислим  $\hat{A}_o \approx \frac{U}{4,44 fWS}$ , так как  $\hat{O}_o = \hat{A}_o \cdot S$ .

По кривым удельных потерь найдем  $D_{\text{нб.б}}$  и  $Q_{\text{нб.б}}$ .

Тогда  $D_{\text{нб}} = D_{\text{нб.б}} \cdot G$ ;  $Q_{\text{нб}} = Q_{\text{нб.б}} \cdot G$ .

Искомые проводимости определим по формулам:



$$G_{\hat{1}} = \frac{P_{\text{нл}}}{U_{\hat{1}}^2}; \quad B_{\hat{1}} = \frac{Q_{\text{нл}}}{U_{\hat{1}}^2}.$$

Расчеты можно уточнить, пользуясь методом итерации. Если сопротивление  $X_s = 0$ , то входное напряжение определим по формуле

$$\dot{U} = R\dot{I} + \dot{U}_{\hat{1}}.$$

Ток  $\dot{I} = \dot{I}_{\text{н}} + \dot{I}_{\mu}$ . Токи  $I_{\text{н}}$  и  $I_{\mu}$  можно вычислить по формулам:

$$I_{\text{н}} = \frac{P_{\text{нл}}}{U_{\hat{1}}}; \quad I_{\mu} = \frac{Q_{\text{нл}}}{U_{\hat{1}}}.$$

Будем считать, что векторы  $\dot{U}_{\hat{1}}$  и  $\dot{I}_{\text{н}}$  лежат на действительной оси (см. [рис. 9.8](#)). Тогда формулу входного напряжения можно записать следующим образом:

$$\dot{U} = R(I_{\text{н}} - jI_{\mu}) + U_{\hat{1}}.$$

Задаваясь другим значением  $B_m$ , расчет повторяют до тех пор, пока заданное напряжение станет отличаться от вычисленного по формуле не более, чем требует указанная точность.

После этого можно вычислить проводимости  $G_{\hat{1}}$  и  $B_{\hat{1}}$ .

## 9.6. Расчет нелинейных цепей методом кусочно-линейной аппроксимации

### 9.6.1. Расчет цепи с однополупериодным выпрямителем

Схема замещения анализируемой цепи представлена на [рис. 9.10](#). Нагрузкой является резистор с известным сопротивлением  $R_{\text{н}}$ . Входное напряжение

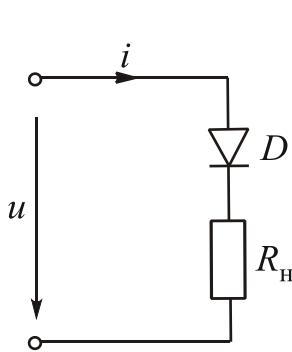


Рис. 9.10

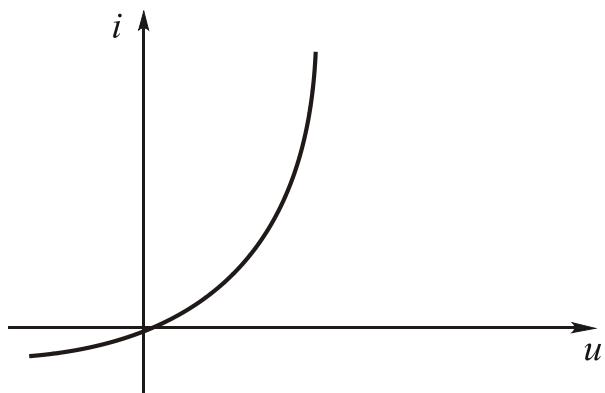


Рис. 9.11



жение меняется по закону  $u = U_m \sin \omega t$ . Вольт-амперная характеристика диода изображена на [рис. 9.11](#).

Требуется определить законы изменения тока  $i$  и напряжения на нагрузке  $u_R$ , действующее значение тока  $I$ , потребляемую нагрузкой мощность  $P_H$ , полную мощность  $S$  и коэффициент мощности  $\cos \Theta$ .

Прежде всего нужно выбрать тип аппроксимации вольт-амперной характеристики (ВАХ) диода. В зависимости от вида ВАХ и требуемой точности расчетов различают три способа кусочно-линейной аппроксимации.

Аппроксимированные ВАХ представлены на [рис. 9.12, а, б и в](#). Соответствующие им линейные схемы замещения нелинейного диода изображены на [рис. 9.13, а, б и в](#).

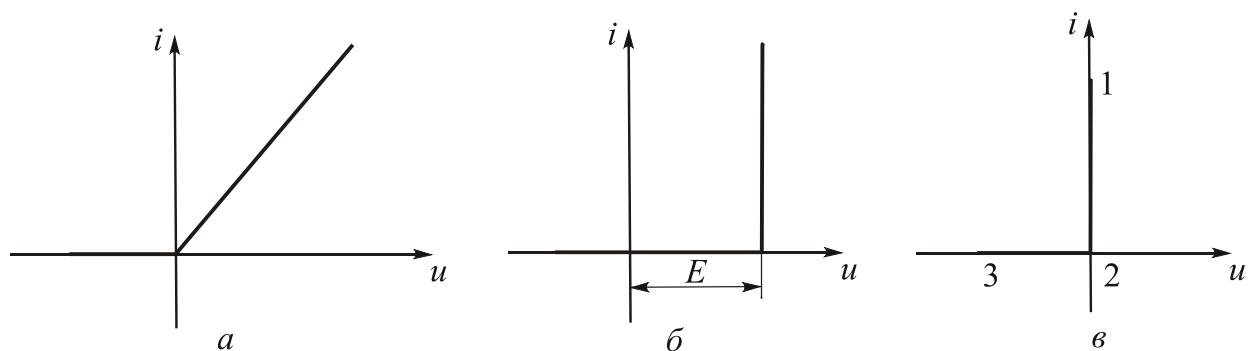


Рис. 9.12

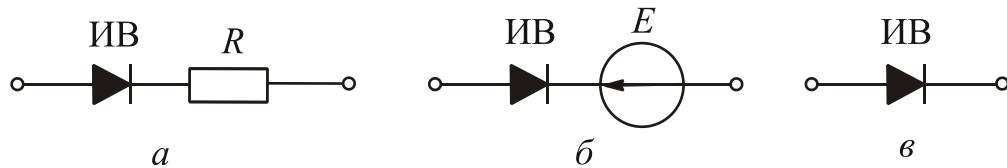


Рис. 9.13

Идеальный вентиль (ИВ) при прямой полярности имеет сопротивление, равное нулю, при обратной – бесконечности.

Выберем самый простой способ кусочно-линейной аппроксимации, соответствующий идеальному вентилю.

ВАХ состоит из двух отрезков прямых, расчеты для которых делают отдельно.

Участок ВАХ 1–2 (см. [рис. 9.12, в](#)) соответствует прямой полярности, т. е. положительной полуволне входного напряжения ([рис. 9.14](#)).

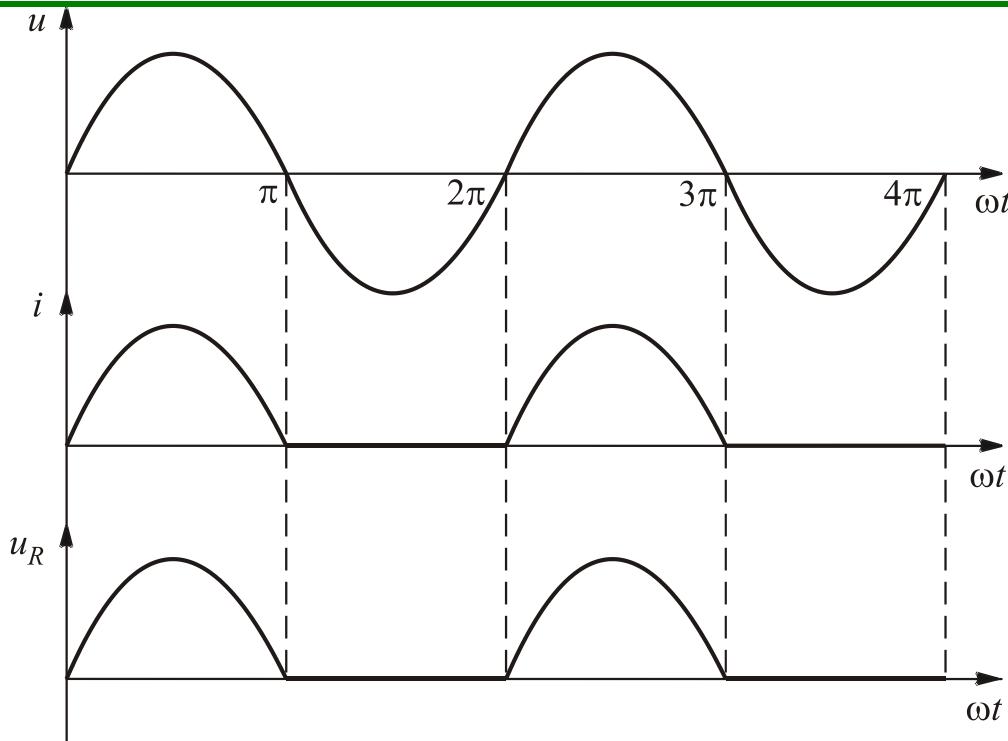


Рис. 9.14

При этом текущий угол  $\omega t$  меняется от 0 до  $\pi$ , сопротивление ИВ равно нулю, ток

$$i = \frac{u}{R_i}, \quad u_R = u.$$

Участок 2–3 (рис. 9.12, в) соответствует обратной полярности, т. е. отрицательной полуволне входного напряжения (рис. 9.14). Текущий угол  $\omega t$  меняется от  $\pi$  до  $2\pi$ , сопротивление ИВ равно бесконечности, ток  $i = 0$ , напряжение  $u_R = 0$ .

Далее процессы повторяются.

Действующее значение тока

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i^2 d(\omega t)} = \frac{I_m}{2}.$$

Потребляемая мощность  $P_i = U_R \cdot I = R_i \frac{I_m}{2} \cdot \frac{I_m}{2} = \frac{U_m \cdot I_m}{4}$ . Полная мощность  $S = U \cdot I = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{2} = \frac{U_m \cdot I_m}{2\sqrt{2}}$ . Коэффициент мощности  $\cos\Theta = \frac{P}{S} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$ .

### 9.6.2. Расчет катушки с ферромагнитным сердечником

Метод кусочно-линейной аппроксимации можно применять в случае, если материал сердечника имеет почти прямоугольную кривую намагничивания. Такой формой кривой намагничивания обладают некоторые высококачественные магнитомягкие материалы.

Пусть катушка с ферромагнитным сердечником подключена к источнику напряжения, которое меняется по закону  $u = U_m \sin \omega t$ . Задана зависимость  $B(H)$ . Нужно определить законы изменения потокосцепления  $\psi$ , напряжений  $u_R$  и  $u_L$ .

Выберем самый простой вид кусочно-линейной аппроксимации кривой намагничивания ([рис. 9.15](#)). Магнитная характеристика аналогична кривой намагничивания, так как получается путем умножения  $B$  и  $H$  на постоянные величины ([рис. 9.16](#)).

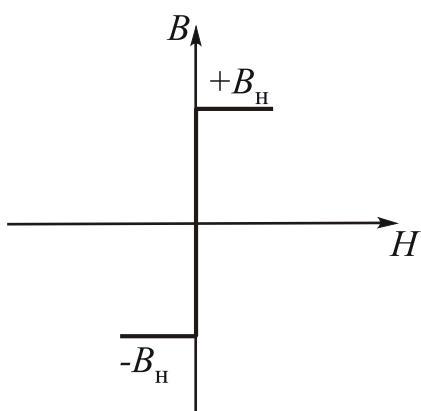


Рис. 9.15

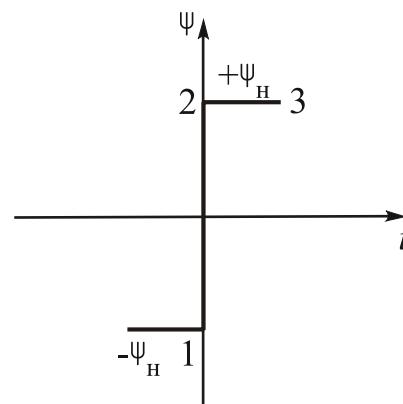


Рис. 9.16

Уравнение электрического состояния катушки с ферромагнитным сердечником в самом общем виде можно записать следующим образом:

$$Ri + \frac{d\psi}{dt} = U_m \sin \omega t,$$

где  $Ri$  – напряжение на резистивном элементе  $u_R$ ,

$\frac{d\psi}{dt}$  – напряжение на индуктивном элементе  $u_L$ .

Решение будет более интересным, если принять, что в начальный момент времени ( $t = 0$ ) сердечник был намагнчен до насыщения, причем потокосцепление  $\psi = -\psi_i$ . Этому состоянию соответствует точка 1 на магнитной характеристике (см. [рис. 9.16](#)).

С увеличением напряжения сердечник начинает перемагничиваться.

При изменении текущего угла  $\omega t$  от 0 до  $\omega t_1$  ([рис. 9.17](#)), когда потокосцепление  $\psi$  станет равным  $\psi_i$ , рабочая точка на магнитной характеристике перемещается в интервале 1–2. Этому интервалу соответствует значе-

ние тока  $i = 0$ . Напряжение  $u_R = 0$ . Уравнение электрического состояния примет вид

$$u_L = \frac{d\psi}{dt} = U_m \sin \omega t.$$

Отсюда получаем закон изменения потокосцепления:

$$\psi = -\frac{U_m}{\omega} \cos \omega t + A.$$

Вычислим постоянную интегрирования  $A$ . Так как при  $t = 0$  потокосцепление  $\psi = -\psi_i$ , запишем:

$$-\psi_i = -\frac{U_m \cos 0^\circ}{\omega} + A.$$

Тогда  $-\psi_i = -\frac{U_m}{\omega} + A$ , потому что  $\cos 0^\circ = 1$ .

$$\text{Отсюда } A = \frac{U_m}{\omega} - \psi_i.$$

Закон изменения потокосцепления в более полном виде:

$$\psi = -\frac{U_m}{\omega} \cos \omega t + \frac{U_m}{\omega} - \psi_i = \frac{U_m}{\omega} (1 - \cos \omega t) - \psi_i.$$



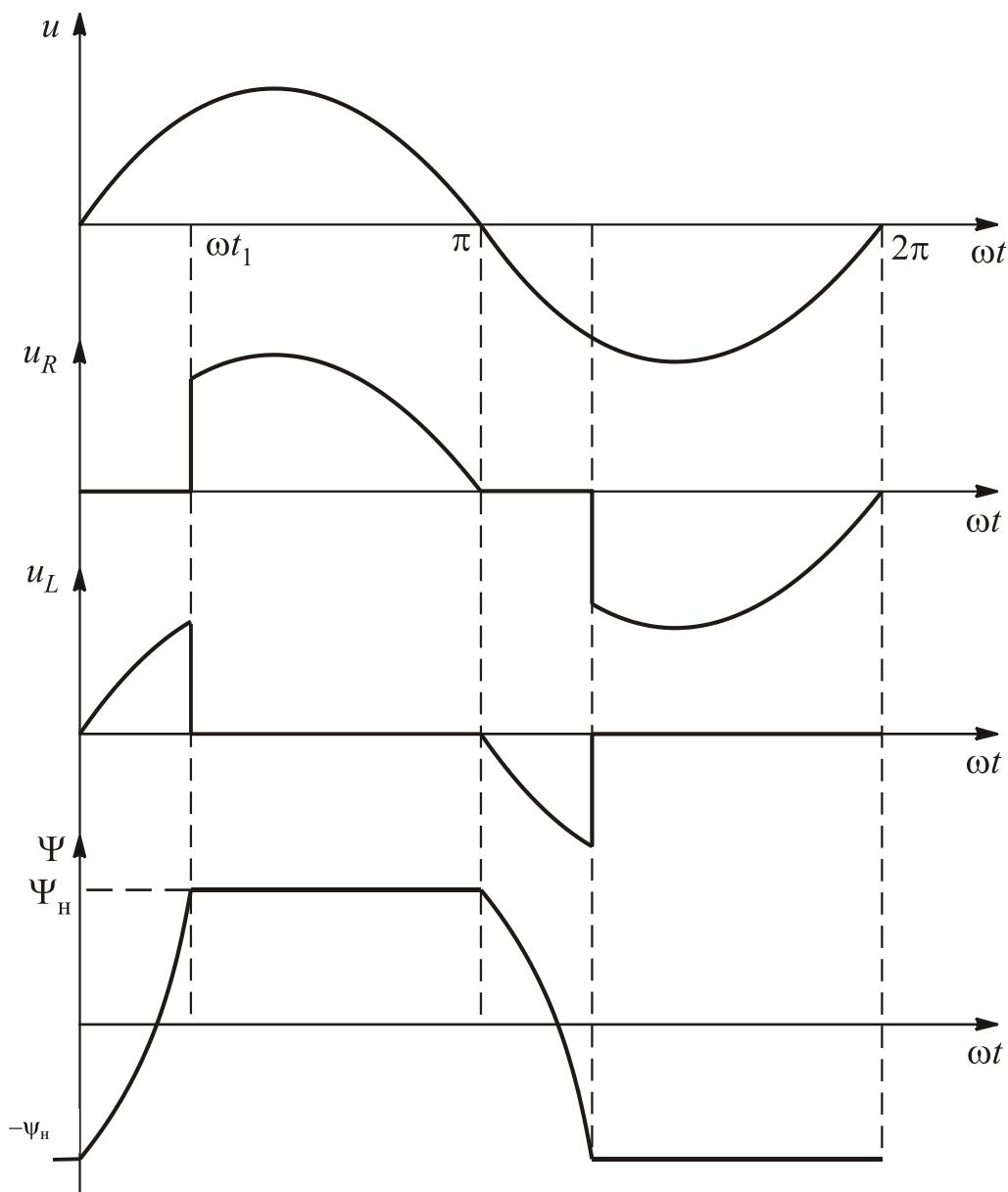


Рис. 9.17

Выясним, до какого значения текущего угла  $\omega t_1$  будет происходить перемагничивание сердечника.

При  $\omega t = \omega t_1$  потокосцепление  $\psi = \psi_i$ .

$$\text{Тогда } \psi_i = -\frac{U_m}{\omega} \cos \omega t_1 + \frac{U_m}{\omega} - \psi_i; 2\psi_i = \frac{U_m}{\omega} (1 - \cos \omega t_1).$$

$$\text{Отсюда } \cos \omega t_1 = 1 - \frac{2\psi_i \omega}{U_m}; \quad \omega t_1 = \arccos \left( 1 - \frac{2\psi_i \omega}{U_m} \right).$$

Графики  $u$ ,  $u_R$ ,  $u_L$ ,  $\psi$  представлены на [рис. 9.17](#).

Если сердечник полностью перемагнился при  $\omega t_1 < \pi$ , то на интервале значений текущего угла от  $\omega t_1$  до  $\pi$  потокосцепление  $\psi = \psi_i = \text{const}$ .

Тогда  $u_L = \frac{d\psi}{dt} = 0$ ,  $u_R = Ri = U_m \sin \omega t$ .

Рабочая точка на магнитной характеристике находится на интервале 2–3.

При отрицательной полуволне входного напряжения сердечник вновь перемагничивается, потокосцепление меняется от  $\psi_i$  до  $-\psi_i$ . После перемагничивания до  $\omega t = 2\pi$  потокосцепление  $\psi = -\psi_i = \text{const}$  (см. [рис. 9.17](#)). Расчеты аналогичны приведенным для положительной полуволны входного напряжения. Далее процессы повторяются.

## 9.7. Явление феррорезонанса

Явление феррорезонанса возникает в цепях с нелинейными индуктивными катушками и конденсаторами, когда они компенсируют действие друг друга. Цепь имеет чисто активный характер.

Для достижения резонанса в линейных цепях нужно изменить параметры или частоту. Феррорезонанс возникает за счет изменения индуктивности при изменении величины тока и напряжения.

При анализе феррорезонансных явлений делаем допущения:

1. Считаем индуктивную катушку условно-нелинейным элементом, заменяя кривую тока ее первой гармоникой, полученной при разложении в ряд Фурье.
2. Пренебрегаем потерями на гистерезис, т. е. при анализе используем основную кривую намагничивания.

### 9.7.1. Феррорезонанс напряжений

Феррорезонансное напряжение наблюдается в цепи с последовательным соединением нелинейной индуктивной катушки и конденсатора.

1. Пренебрегаем активным сопротивлением ( $R = 0$ ).

Упрощенная схема замещения анализируемой цепи представлена на [рис. 9.18](#).

Векторная диаграмма изображена на [рис. 9.19](#).

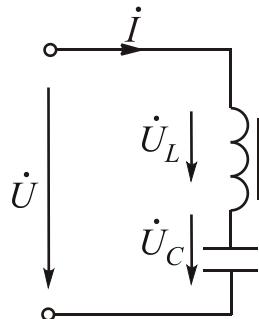


Рис. 9.18

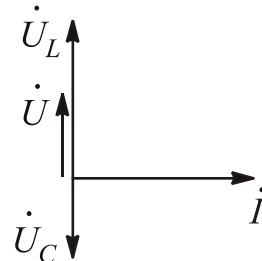


Рис. 9.19

Входное напряжение  $\dot{U} = \dot{U}_L + \dot{U}_C$ . Так как векторы напряжений  $\dot{U}_L$  и

$\dot{U}_C$  противоположны, можно записать:  $U = |U_L - U_C|$ .

Результирующая вольт-амперная характеристика изображена на [рис. 9.20](#).

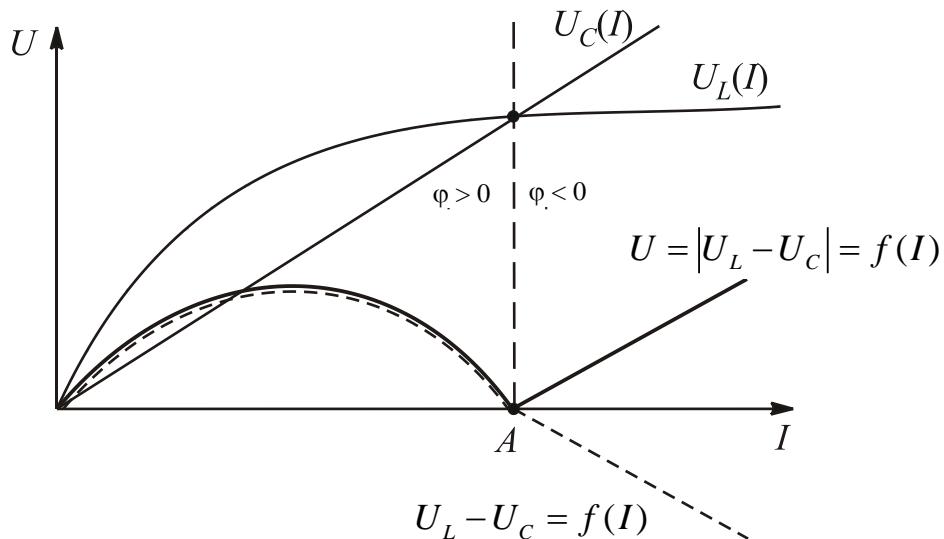


Рис. 9.20

Если вольт-амперные характеристики индуктивной катушки и конденсатора пересекаются, в цепи наблюдается феррорезонанс напряжений. Точка  $A$  соответствует режиму феррорезонанса. В этой точке  $U_L = U_C$ , угол  $\varphi = 0$ .

На интервале от 0 до т.  $A$  напряжение  $U_L > U_C$ , угол  $\varphi > 0$ , цепь имеет индуктивный характер.

Правее точки  $A$  напряжение  $U_L < U_C$ , угол  $\varphi < 0$ , цепь имеет емкостный характер. Говорят, что при резонансе происходит «опрокидывание» фазы.

2. Учитываем активное сопротивление цепи.

Схема замещения представлена на [рис. 9.21](#), соответствующая ей векторная диаграмма – на [рис. 9.22](#).

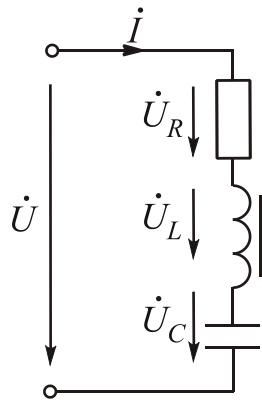


Рис. 9.21

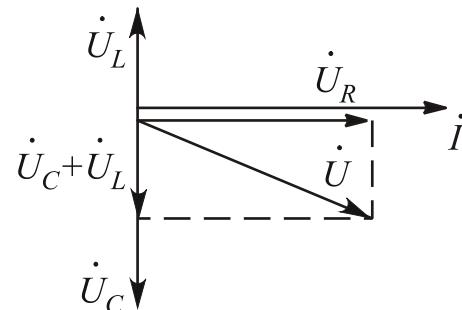


Рис. 9.22

Как видно из векторной диаграммы, входное напряжение  $U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$ . Эта формула позволяет построить результирующую

вольт-амперную характеристику с учетом активного сопротивления цепи (рис. 9.23).

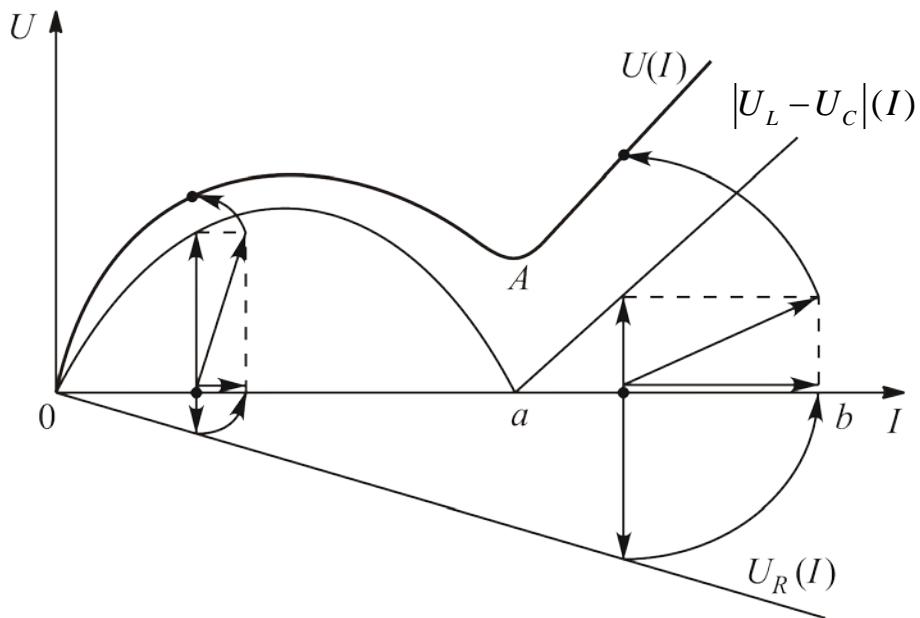


Рис. 9.23

При феррорезонансе напряжений (т. *A*) напряжение  $U_L = U_C$ , входное напряжение  $U = U_R$ , т. е. цепь имеет чисто активный характер. Первые гармоники тока и напряжения совпадают по фазе.

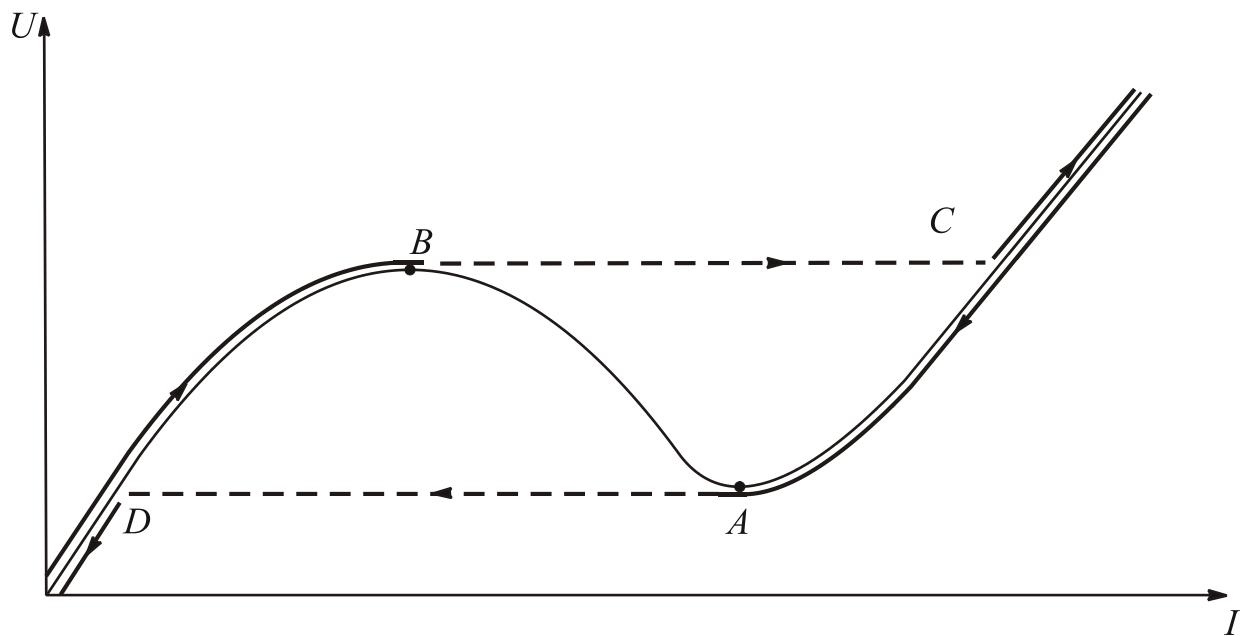


Рис. 9.24

На участке  $0a$   $U_L > U_C$ , цепь имеет активно-индуктивный характер, на участке  $ab$   $U_C > U_L$ , поэтому цепь имеет активно-емкостный характер.

Пусть цепь с последовательным соединением нелинейной индуктивной катушки и конденсатора подключена к источнику напряжения, действующее

значение которого с помощью автотрансформатора будем плавно увеличивать, начиная с нуля. Рабочая точка при этом будет перемещаться по вольт-амперной характеристике ([рис. 9.24](#)).

После достижения точки  $B$  ток увеличится скачком, так как одному значению напряжения соответствуют два значения тока. При уменьшении напряжения скачок тока будет наблюдаться в точке  $A$ . Это явление носит название триггерного эффекта.

Участок вольт-амперной характеристики между точками  $A$  и  $B$  является участком неустойчивой работы. При питании от источника напряжения его нельзя выявить экспериментально. Вольт-амперную характеристику цепи с последовательным соединением нелинейной индуктивной катушки и конденсатора можно полностью экспериментально выявить при питании от источника тока, так как одному значению тока соответствует только одно значение напряжения.

#### 4.7.2. Феррорезонанс токов

Феррорезонанс токов наблюдается в цепи с параллельным соединением нелинейной индуктивной катушки и конденсатора. Упрощенная схема замещения цепи, если пренебречь активным сопротивлением, представлена на [рис. 9.25](#). Соответствующая ей векторная диаграмма изображена на [рис. 9.26](#).

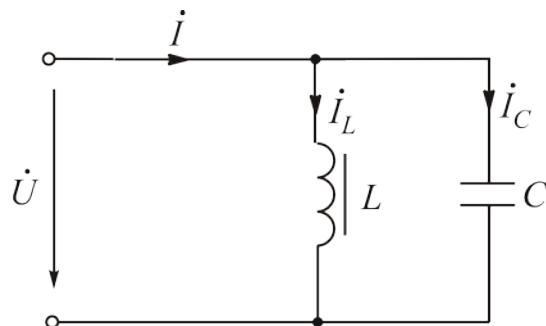


Рис. 9.25

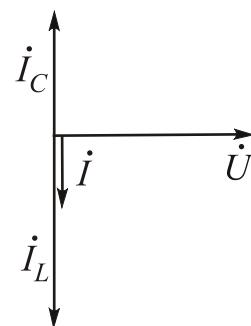


Рис. 9.26

По первому закону Кирхгофа входной ток  $\dot{I} = \dot{I}_L + \dot{I}_C$ . Из векторной диаграммы видно, что  $I = |\dot{I}_L - \dot{I}_C|$ .

Результирующая вольт-амперная характеристика изображена на [рис. 9.27](#). В точке  $A$  наблюдается феррорезонанс токов ( $I_L = I_C$ ). Цепь имеет чисто активный характер, угол  $\varphi = 0$ . От  $0$  до т.  $A$  цепь имеет емкостный характер, так как ток  $I_C > I_L$ . Угол  $\varphi < 0$ . Выше точки  $A$  цепь имеет индуктивный характер, так как ток  $I_L > I_C$ . Угол  $\varphi > 0$ .

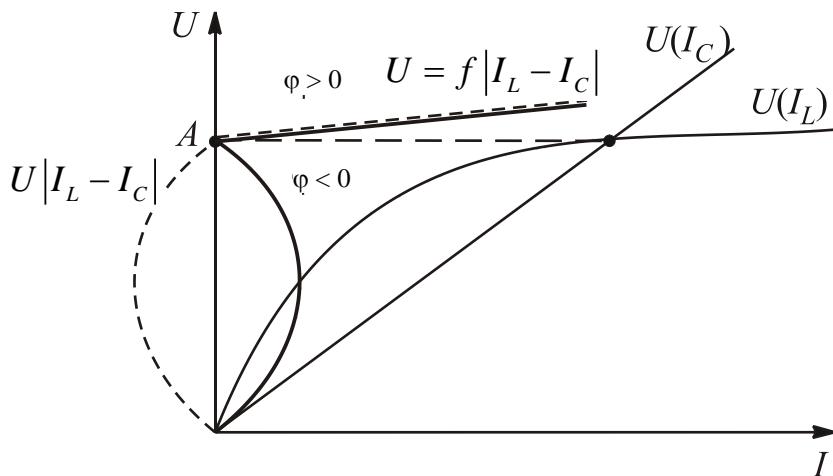


Рис. 9.27

Вольт-амперная характеристика для случая, когда активное сопротивление цепи учтено, представлена на [рис. 9.28](#). Ее построение аналогично изображенному на [рис. 9.23](#), но проводить его нужно для токов, а не для напряжений.

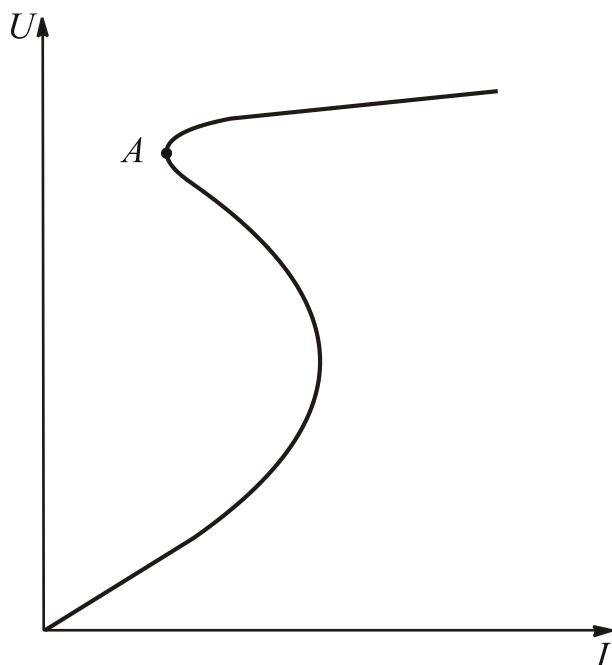


Рис. 9.28

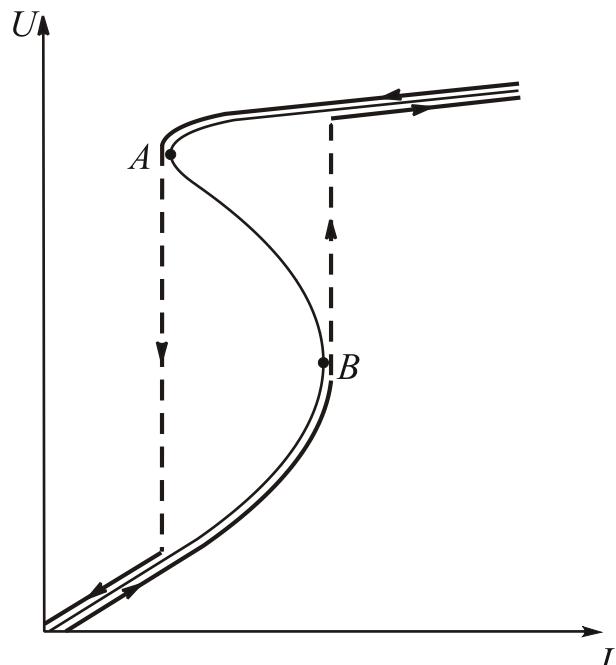


Рис. 9.29

При питании от источника напряжения вольт-амперная характеристика будет выявлена полностью, так как одному значению напряжения соответствует одно значение тока.

При питании от источника тока будут наблюдаться скачки напряжения ([рис. 9.29](#)). Участок AB является участком неустойчивой работы.

## 9.8. Феррорезонансные стабилизаторы напряжения

Стабилизатор – это устройство, у которого действующее значение выходного напряжения остается почти постоянным по величине при изменении

действующего значения входного напряжения.

Величина, характеризующая качество стабилизатора, – коэффициент стабилизации  $K$ . Он равен отношению относительного изменения входного напряжения к относительному изменению выходного напряжения:

$$\hat{E} = \frac{\Delta U_1}{U_1} : \frac{\Delta U_2}{U_2}.$$

Коэффициент стабилизации должен быть больше единицы. Чем  $K > 1$ , тем лучше стабилизатор.

### 9.8.1. Стабилизатор, в котором наблюдается явление феррорезонанса напряжений

Схема простейшего стабилизатора в режиме холостого хода представлена на [рис. 9.30](#).

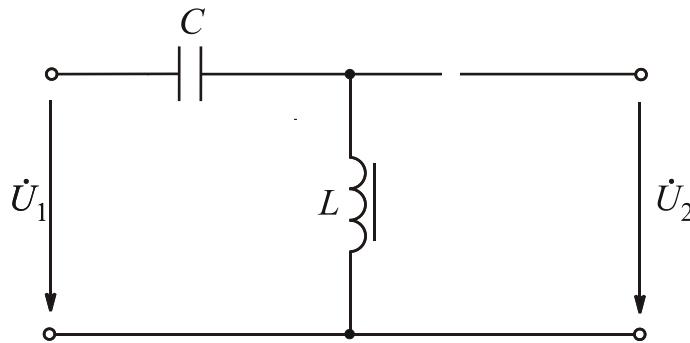


Рис. 9.30

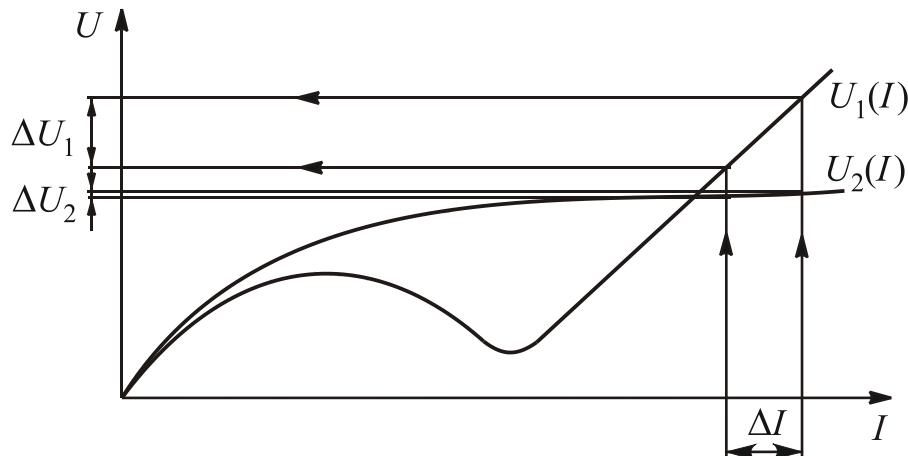


Рис. 9.31

Стабилизация напряжения будет происходить в зоне насыщения катушки при значениях тока, больших, чем на участке неустойчивой работы. Принцип стабилизации объясняет [рис. 9.31](#), на котором приведены входная и выходная вольт-амперные характеристики.

В режиме холостого хода ток в схеме один. Изменение входного напряжения  $\Delta U_1$  значительно больше изменения выходного напряжения  $\Delta U_2$ .

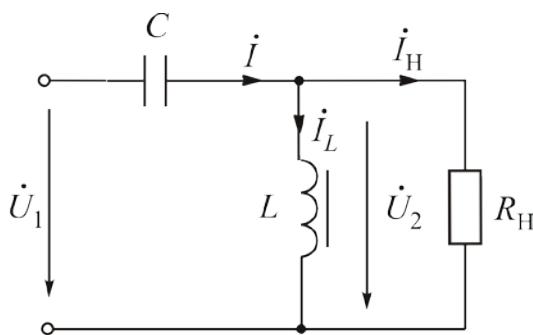


Рис. 9.32

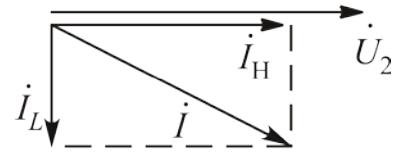


Рис. 9.33

При подключении нагрузки коэффициент стабилизации уменьшается. Приемник образует ветвь, параллельную индуктивной катушке ([рис. 9.32](#)).

Векторная диаграмма, представленная на [рис. 9.33](#), поясняет построение результирующей вольт-амперной характеристики  $U_2(I)$  ([рис. 9.34](#)).

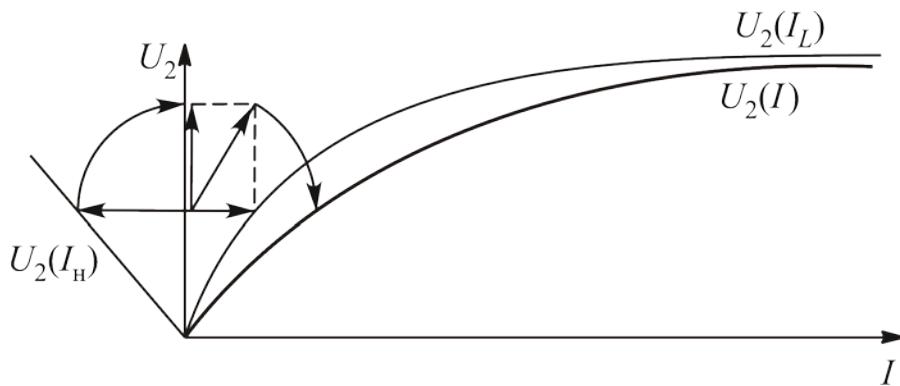


Рис. 9.34

Очевидно, что зона насыщения смещается в сторону больших значений токов.

### 9.8.2. Стабилизатор напряжения, в котором наблюдается феррорезонанс токов

Схема замещения рассматриваемой цепи в режиме холостого хода представлена на [рис. 9.35](#).

Принцип стабилизации поясняет [рис. 9.36](#), на котором изображены входная и выходная вольт-амперные характеристики стабилизатора.

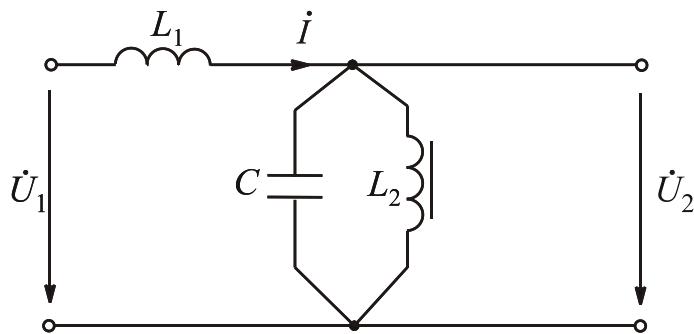


Рис. 9.35

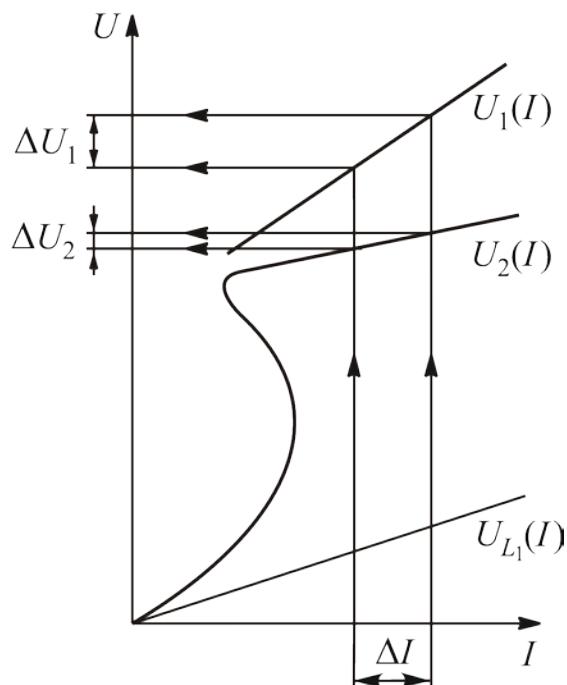


Рис. 9.36

Выходная вольт-амперная характеристика  $U_2(I)$  аналогична представленной на [рис. 9.28](#). Входное напряжение  $U_1$  складывается из выходного и напряжения на линейной индуктивной катушке:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + \dot{U}_{L_1}.$$

### 9.8.3. Стабилизатор с обратной связью

Использование индуктивных катушек с взаимной индуктивностью улучшает качество стабилизации. Схема замещения стабилизатора представлена на [рис. 9.37](#).

Принцип стабилизации поясняет [рис. 9.38](#), на котором представлены входная и выходная вольт-амперные характеристики.

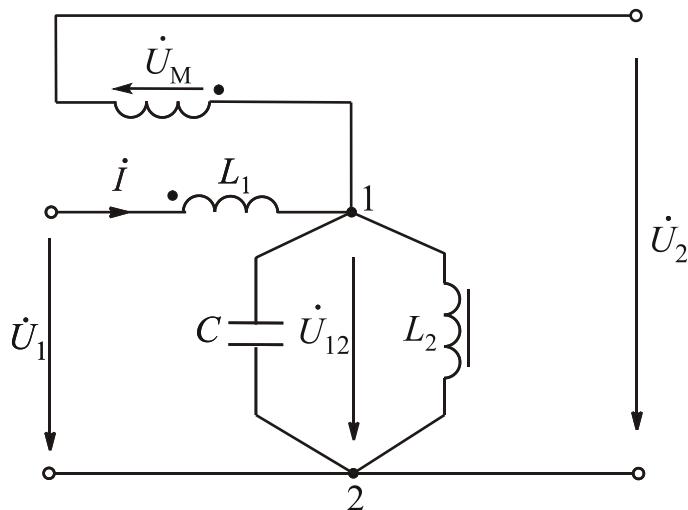


Рис. 9.37

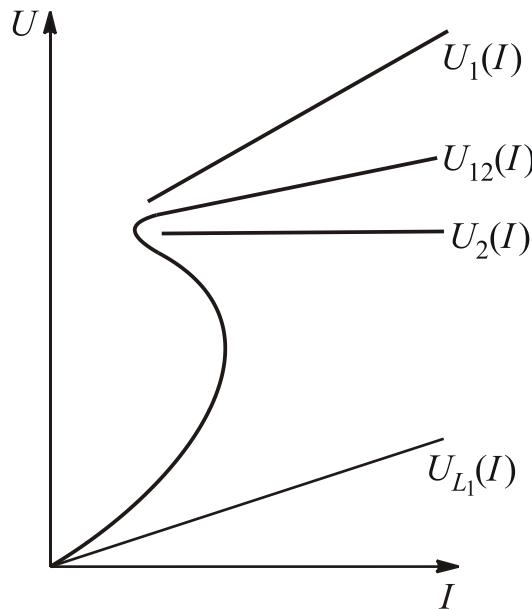


Рис. 9.38

Зависимость  $U_{12}(I)$  аналогична представленной на [рис. 9.28](#). Входное напряжение  $\dot{U}_1 = \dot{U}_{12} + \dot{U}_{L_1}$ . Выходное напряжение  $\dot{U}_2 = \dot{U}_{12} - \dot{U}_M$ . Очевидно, что в такой схеме можно добиться очень высокой степени стабилизации.

# ГЛАВА 10

## ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ ПРИ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

### 10.1. Четырехполюсники и их основные уравнения

Исследование режима работы сложной электрической цепи часто сводится к установлению связей между токами, напряжениями и мощностями различных ее участков. Режим работы остальной цепи при этом значения не имеет.

Рассматриваемую часть цепи можно определить обобщенными параметрами на соответствующих зажимах.

Часть цепи, которую характеризуют обобщенными параметрами, необходимыми и достаточными для составления уравнений связи между токами и потенциалами на ее зажимах, называют многополюсником. Число полюсов многополюсника равно числу зажимов на границе данной части цепи.

Четырехполюсники могут быть пассивными и активными. Рассмотрим пассивный четырехполюсник, представленный на [рис. 10.1](#).

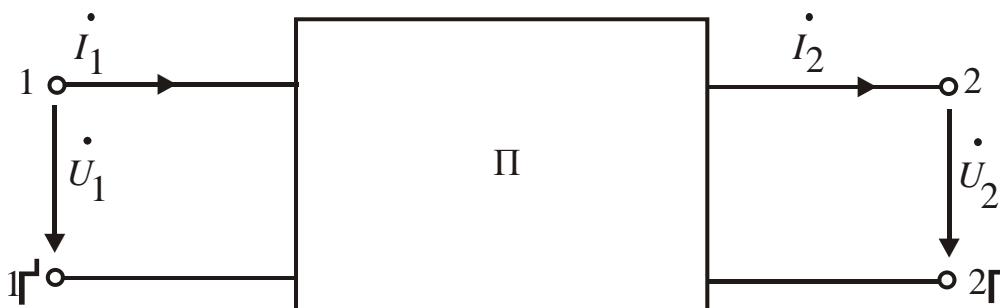


Рис. 10.1

Разработаны шесть форм уравнений связи четырехполюсников.

Уравнения в  $Z$ -форме связывают входное и выходное напряжения с входным и выходным токами:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \underline{Z}_{11}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{12}\dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 = \underline{Z}_{21}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{22}\dot{I}_2. \end{cases}$$

Коэффициентами в этих уравнениях являются сопротивления  $\underline{Z}$ . Их можно определить из режимов холостого хода. В режиме холостого хода зажимов 2–2' (см. [рис. 10.1](#)) ток  $I_2 = 0$ .

Из уравнений связи получаем:

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\dot{U}_{1x}}{I_{1x}}; \quad \underline{Z}_{21} = \frac{\dot{U}_{2x}}{I_{1x}}.$$

В режиме холостого хода зажимов 1–1' ток  $I_1 = 0$ . Тогда сопротивления

$$\underline{Z}_{12} = \frac{\dot{U}_{1x}}{I_{2x}}; \quad \underline{Z}_{22} = \frac{\dot{U}_{2x}}{I_{2x}}.$$

Более компактной является запись уравнений связи в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Если токи выразить через напряжения, получим уравнения связи в  $Y$ -форме:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \underline{Y}_{11}\dot{U}_1 - \underline{Y}_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 = -\underline{Y}_{21}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{22}\dot{U}_2. \end{cases}$$

Запись в матричной форме имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & -\underline{Y}_{12} \\ -\underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}.$$

Коэффициентами в этих уравнениях являются проводимости  $\underline{Y}$ . Их можно определить из режимов короткого замыкания. В режиме короткого замыкания зажимов 2–2' напряжение  $U_2 = 0$ . Из уравнений связи получаем:

$$\underline{Y}_{11} = \frac{\dot{I}_{1e}}{\dot{U}_{1e}}; \quad \underline{Y}_{21} = \frac{\dot{I}_{2e}}{\dot{U}_{1e}}$$

В режиме короткого замыкания зажимов 1–1' напряжение  $U_1 = 0$ . Тогда можно найти остальные проводимости:

$$\underline{Y}_{12} = \frac{\dot{I}_{1e}}{\dot{U}_{2e}}; \quad \underline{Y}_{22} = \frac{\dot{I}_{2e}}{\dot{U}_{2e}}.$$

Если отношение напряжения на входе к току на выходе не зависит от того, какие зажимы являются входными, а какие – выходными, четырехпо-



люсник является обратимым, у него  $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$ .

При каскадном соединении четырехполюсников (длинные линии) целесообразно записать уравнения в такой форме, чтобы  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}_1$  были выражены через  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}_2$ . Их называют уравнениями в *A*-форме и получают из уравнений в *Y*-форме:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \underline{A}\dot{U}_2 + \underline{B}\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 = \underline{C}\dot{U}_2 + \underline{D}\dot{I}_2, \end{cases}$$

где  $\underline{A} = \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}}$  – безразмерная величина;

$\underline{B} = \frac{1}{\underline{Y}_{21}}$  – сопротивление;

$\underline{C} = \frac{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{21}}$  – проводимость;

$\underline{D} = \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}}$  – безразмерная величина.

При анализе четырехполюсников используют соотношение

$$\underline{AD} - \underline{AC} = \frac{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{21} \cdot \underline{Y}_{21}} = \frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{21}}.$$

Для цепей, где выполняется принцип взаимности,  $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$ .

Тогда  $\underline{AD} - \underline{AC} = 1$ .

Комплексные коэффициенты  $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$  зависят от конфигурации схемы, параметров элементов и от частоты.

Запись уравнений связи в матричной форме имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}.$$

Аналогично можно получить систему уравнений связи относительно выходных величин:

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = \underline{D}\dot{U}_1 + \underline{B}\dot{I}_1; \\ \dot{I}_2 = \underline{C}\dot{U}_1 + \underline{A}\dot{I}_1. \end{cases}$$

Четырехполюсник называют симметричным, если при перемене местами источника питания и приемника токи источника питания и приемника не изменятся. При взаимной замене первичных и вторичных зажимов урав-



нения связи должны оставаться неизменными, т. е.  $\underline{A} = \underline{D}$ .

Все четырехполюсники, не удовлетворяющие этому условию, называют несимметричными.

В цепях с полупроводниковыми приборами для описания биполярных транзисторов используют  $H$ - и  $G$ -формы записи уравнений связи. Коэффициенты  $H$  и  $G$  называют гибридными.

Уравнения связи в  $H$ -форме записывают следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \underline{H}_{11}\dot{I}_1 + \underline{I}_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 = \underline{H}_{21}\dot{I}_1 + \underline{H}_{22}\dot{U}_2, \end{cases}$$

где  $\underline{H}_{11} = \frac{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22}}$ ;

$$\underline{I}_{22} = \frac{1}{\underline{Z}_{22}};$$

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{22}};$$

$$\underline{I}_{21} = -\frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22}}.$$

$H$ -параметры можно определить из опытов холостого хода и короткого замыкания.

В режиме короткого замыкания вторичных зажимов напряжение  $U_2 = 0$ . Из уравнений связи получим:

$$\underline{I}_{11} = \frac{\dot{U}_{1\hat{e}}}{\dot{I}_{1\hat{e}}} \text{ – сопротивление;}$$

$$\underline{I}_{21} = \frac{\dot{I}_{2\hat{e}}}{\dot{I}_{1\hat{e}}} \text{ – передаточная функция по току.}$$

В режиме холостого хода первичных зажимов ток  $I_1 = 0$ . Тогда из уравнений связи получим:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\dot{U}_{1x}}{U_{2x}} \text{ – передаточная функция по напряжению;}$$



$$\underline{\dot{I}}_{22} = \frac{\dot{I}_{2x}}{\dot{U}_{2x}} - \text{проводимость.}$$

Запись в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}.$$

Уравнения связи в  $G$ -форме имеют вид

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \underline{G}_{11} \dot{U}_1 + \underline{G}_{12} \dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 = \underline{G}_{21} \dot{U}_1 + \underline{G}_{22} \dot{I}_2. \end{cases}$$

## 10.2. Определение коэффициентов уравнений связи четырехполюсника

Комплексные коэффициенты пассивного четырехполюсника определяют опытным или расчетным путями. В последнем случае должна быть известна схема соединения пассивного четырехполюсника и ее параметры.

Для опытного определения проводят опыты холостого хода и короткого замыкания. При этом нужно измерять не только модули комплексных величин, но и их аргументы.

Рассмотрим нахождение коэффициентов в  $A$ -форме уравнений связи.

В режиме холостого хода вторичных зажимов ток  $I_2 = 0$ .

Уравнения связи принимают вид

$$\begin{cases} \dot{U}_{1\delta} = \underline{A} \dot{U}_2; \\ \dot{I}_{1\delta} = \underline{C} \dot{U}_2. \end{cases}$$

$$\text{Отсюда сопротивление } Z_{1\delta} = \frac{\dot{U}_{1\delta}}{\dot{I}_{1\delta}} = \frac{\underline{A}}{\underline{N}}.$$

В режиме короткого замыкания вторичных зажимов напряжение  $U_2 = 0$ .

Уравнения связи получаются упрощенными:

$$\begin{cases} \dot{U}_{1\hat{e}} = \underline{B} \dot{I}_2; \\ \dot{I}_{1\hat{e}} = \underline{D} \dot{I}_2. \end{cases}$$



$$\text{Сопротивление } \underline{Z}_{1\hat{\epsilon}} = \frac{\dot{U}_{1\hat{\epsilon}}}{\dot{I}_{1\hat{\epsilon}}} = \underline{\frac{B}{D}}.$$

В режиме холостого хода первичных зажимов ток  $I_1 = 0$ .

Уравнения связи запишем следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{U}_{2\tilde{\delta}} = \underline{D}\dot{U}_1; \\ \dot{I}_{2\tilde{\delta}} = \underline{\tilde{N}}\dot{U}_1. \end{cases}$$

$$\text{Сопротивление } \underline{Z}_{2\tilde{\delta}} = \frac{\dot{U}_{2\tilde{\delta}}}{\dot{I}_{2\tilde{\delta}}} = \underline{\frac{D}{C}}.$$

В режиме короткого замыкания первичных зажимов напряжение  $U_1 = 0$ .

Уравнения связи имеют вид

$$\begin{cases} \dot{U}_{2\hat{\epsilon}} = \underline{B}\dot{I}_1; \\ \dot{I}_{2\hat{\epsilon}} = \underline{A}\dot{I}_1. \end{cases}$$

$$\text{Сопротивление } \underline{Z}_{2K} = \frac{\dot{U}_{2K}}{\dot{I}_{2K}} = \underline{\frac{B}{A}}.$$

Четвертым можно взять уравнение  $\underline{AD} - \underline{BC} = 1$ .

Совместное решение четырех уравнений с четырьмя неизвестными дает формулы коэффициентов четырехполюсника в  $A$ -форме:

$$\underline{A} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1\tilde{\delta}} \cdot \underline{Z}_{1\hat{\epsilon}}}{\underline{Z}_{2\hat{\epsilon}} (\underline{Z}_{1\tilde{\delta}} - \underline{Z}_{1\hat{\epsilon}})}}; \quad \underline{B} = \underline{A}\underline{Z}_{2\hat{\epsilon}}; \quad \underline{C} = \frac{\underline{A}}{\underline{Z}_{1\tilde{\delta}}}; \quad \underline{D} = \frac{\underline{A}\underline{Z}_{2\tilde{\delta}}}{\underline{Z}_{1\tilde{\delta}}}.$$

### 10.3. Схемы замещения пассивного четырехполюсника

Функции пассивного четырехполюсника как передаточного звена между источником питания и нагрузкой могут выполнять простейшие электрические схемы замещения: трехлучевая звезда (Т-схема) или эквивалентный ей треугольник (П-схема), представленные на [рис. 10.2, а и б](#).



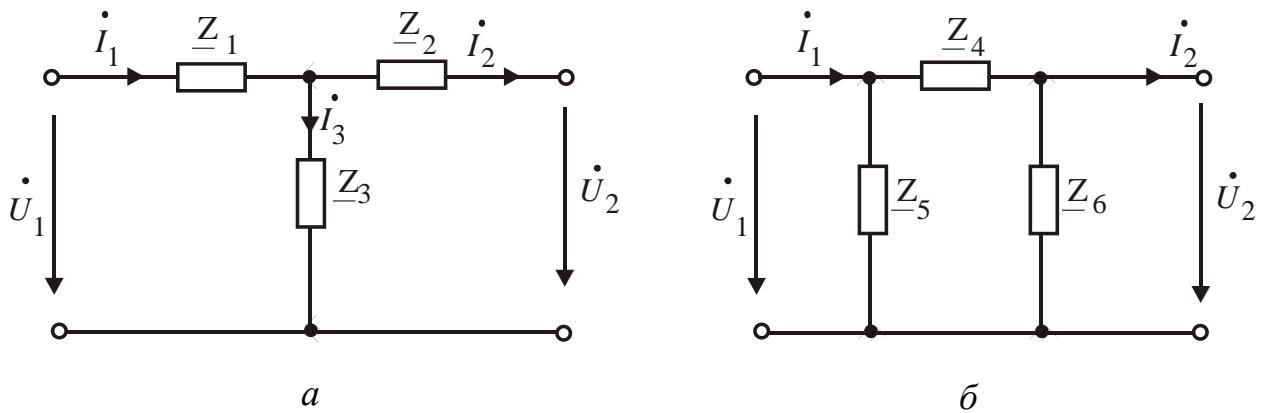


Рис. 10.2

Величины сопротивлений должны быть такими, чтобы схемы замещения обладали теми же коэффициентами, что и заменяемый четырехполюсник.

Найдем сопротивления Т-схемы, эквивалентной четырехполюснику, уравнения связи которого записаны в *A*-форме.

По первому закону Кирхгофа ток

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = \dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_2 + \underline{Z}_2 \dot{I}_2}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{\underline{Z}_3} \dot{U}_2 + \left( 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} \right) \dot{I}_2.$$

По второму закону Кирхгофа напряжение

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 + \underline{Z}_2 \dot{I}_2 + \underline{Z}_1 \dot{I}_1 = \dot{U}_2 + \underline{Z}_2 \dot{I}_2 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3} \dot{U}_2 + \underline{Z}_1 \left( 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} \right) \dot{I}_2 = \\ &= \left( 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3} \right) \dot{U}_2 + \left( \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} \right) \dot{I}_2. \end{aligned}$$

Сравним полученные уравнения с уравнениями связи четырехполюсника:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \underline{A} \dot{U}_2 + \underline{B} \dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 = \underline{C} \dot{U}_2 + \underline{D} \dot{I}_2. \end{cases}$$

Очевидно, что  $\underline{A} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}$ ;  $\underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}$ ;  $\underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_3}$ ;  $\underline{D} = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}$ .

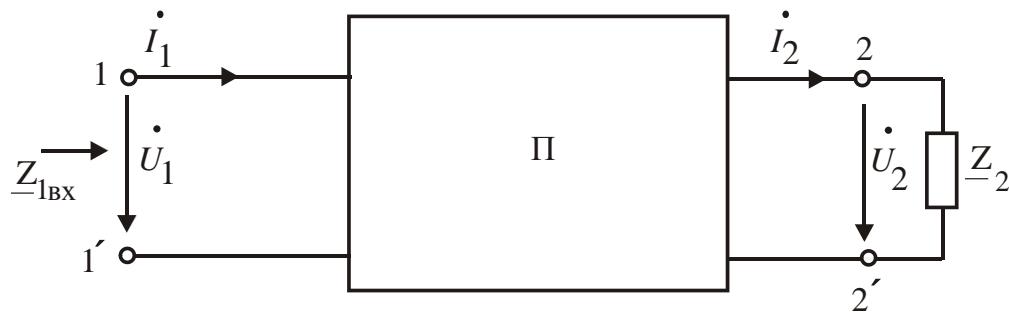
Из совместного решения этих уравнений получим:

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{A} - 1}{\underline{C}}; \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{D} - 1}{\underline{C}}; \quad \underline{Z}_3 = \frac{1}{\underline{C}}.$$

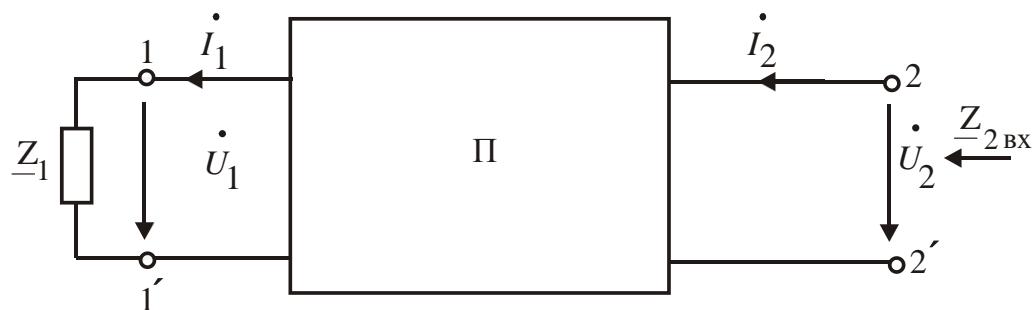
Аналогично либо путем преобразования звезды в эквивалентный треугольник можно получить значения сопротивлений  $\underline{Z}_4$ ,  $\underline{Z}_5$  и  $\underline{Z}_6$  П-схемы.

#### 10.4. Режим четырехполюсника под нагрузкой

Четырехполюсники, к зажимам которых подсоединенна нагрузка, изображены на [рис. 10.3, а и б](#).



а



б

Рис. 10.3

Входное сопротивление четырехполюсника со стороны зажимов 1–1', когда к зажимам 2–2' подсоединенна нагрузка ([рис. 10.3, а](#)),

$$\underline{Z}_{1\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}.$$

Подставив  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}_1$  из уравнений связи в  $A$ -форме, получим

$$\underline{Z}_{1\text{вх}} = \frac{\underline{A}\dot{U}_2 + \underline{\hat{A}}\dot{I}_2}{\underline{C}\dot{U}_2 + \underline{D}\dot{I}_2}.$$

Напряжение  $\dot{U}_2 = \underline{Z}_2 \dot{I}_2$ , тогда



$$\underline{Z}_{1\hat{\alpha}} = \frac{\underline{A}\underline{Z}_2 \dot{I}_2 + \underline{A}\dot{I}_2}{\underline{C}\underline{Z}_2 \dot{I}_2 + \underline{D}\dot{I}_2} = \frac{\underline{A}\underline{Z}_2 + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_2 + \underline{D}}.$$

Входное сопротивление четырехполюсника со стороны зажимов 2–2', когда к зажимам 1–1' подсоединенна нагрузка ([рис. 10.3, б](#)),

$$\underline{Z}_{2\hat{\alpha}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}.$$

Подставив  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}_2$  из уравнений связи в  $A$ -форме, получим

$$\underline{Z}_{2\hat{\alpha}} = \frac{\underline{D}\dot{U}_1 + \underline{B}\dot{I}_1}{\underline{C}\dot{U}_1 + \underline{A}\dot{I}_1}.$$

Напряжение  $\dot{U}_1 = \underline{Z}_1 \dot{I}_1$ , поэтому

$$\underline{Z}_{2\hat{\alpha}} = \frac{\underline{D}\underline{Z}_1 \dot{I}_1 + \underline{A}\dot{I}_1}{\underline{C}\underline{Z}_1 \dot{I}_1 + \underline{A}\dot{I}_1} = \frac{\underline{D}\underline{Z}_1 + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_1 + \underline{A}}.$$

На практике применяют и другие выражения входных сопротивлений. Умножив и разделив выражение  $\underline{Z}_{1\hat{\alpha}}$  на  $\underline{A}$  и  $\underline{C}$ , получим

$$\underline{Z}_{1\hat{\alpha}} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}} \cdot \frac{\underline{C}}{\underline{A}} \cdot \frac{\underline{A}\underline{Z}_2 + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_2 + \underline{D}}.$$

Умножив и разделив выражение  $\underline{Z}_{2\hat{\alpha}}$  на  $\underline{D}$  и  $\underline{C}$ , получим

$$\underline{Z}_{2\hat{\alpha}} = \frac{\underline{D}}{\underline{C}} \cdot \frac{\underline{C}}{\underline{D}} \cdot \frac{\underline{D}\underline{Z}_1 + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_1 + \underline{A}}.$$

Подставив в эти формулы выведенные ранее соотношения

$$\underline{Z}_{1\hat{\delta}} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}, \quad \underline{Z}_{1\hat{e}} = \frac{\underline{B}}{\underline{D}}, \quad \underline{Z}_{2\hat{\delta}} = \frac{\underline{D}}{\underline{C}}, \quad \underline{Z}_{2\hat{e}} = \frac{\underline{B}}{\underline{A}},$$

запишем выражения входных сопротивлений в следующем виде:

$$\underline{Z}_{1\hat{\alpha}} = \underline{Z}_{1\hat{\delta}} \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2\hat{e}}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{2\hat{\delta}}}; \quad \underline{Z}_{2\hat{\alpha}} = \underline{Z}_{2\hat{\delta}} \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{1\hat{e}}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{1\hat{\delta}}}.$$



## 10.5. Характеристические параметры четырехполюсника

Пусть  $\underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_2$  подобраны таким образом, что  $\underline{Z}_{1\hat{\alpha}} = \underline{Z}_1$  и  $\underline{Z}_{2\hat{\alpha}} = \underline{Z}_2$  (рис. 10.3). Такую нагрузку называют согласованной, а режим – согласованным.

Согласованный режим – это режим передачи максимальной мощности. При этом режиме не возникают отраженные волны. Поэтому к согласованному режиму стремятся в цепях слабого тока (радио, телефон, телеграф, телемеханика), так как отраженный сигнал, накладываясь на основные, мешает правильной работе аппаратуры. Для достижения согласованного режима между генератором и приемником включают соответствующие четырехполюсники.

**Входные сопротивления в согласованном режиме** называют характеристическими и обозначают  $\underline{Z}_{1\bar{n}}$  и  $\underline{Z}_{2\bar{n}}$ :

$$\underline{Z}_{1\bar{n}} = \frac{\underline{A}\underline{Z}_{2c} + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_{2c} + \underline{D}}; \quad \underline{Z}_{2\bar{n}} = \frac{\underline{D}\underline{Z}_{1c} + \underline{B}}{\underline{C}\underline{Z}_{1c} + \underline{A}}.$$

Из совместного решения этих уравнений получим:

$$\underline{Z}_{1\bar{n}} = \sqrt{\frac{\underline{A} \cdot \underline{B}}{\underline{C} \cdot \underline{D}}} = \sqrt{\underline{Z}_{1x} \cdot \underline{Z}_{1e}};$$

$$\underline{Z}_{2\bar{n}} = \sqrt{\frac{\underline{D} \cdot \underline{B}}{\underline{C} \cdot \underline{A}}} = \sqrt{\underline{Z}_{2x} \cdot \underline{Z}_{2e}}.$$

У симметричного четырехполюсника  $\underline{A} = \underline{D}$ , поэтому  $\underline{Z}_{1\bar{n}} = \underline{Z}_{2c} = \underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}}.$

Следующим характеристическим параметром является **постоянная передачи четырехполюсника**  $\underline{g}$ . Ее определяют при согласованном режиме следующим образом:

$$\underline{g} = \frac{1}{2} \ln \frac{\dot{U}_1 \dot{I}_1}{\dot{U}_2 \dot{I}_2}.$$

Постоянная передачи четырехполюсника является комплексной величиной:

$$\underline{g} = a + jb,$$

где  $a$  – коэффициент затухания;

$b$  – коэффициент фазы.



## Коэффициент затухания

$$a = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = \frac{1}{2} \ln \frac{S_1}{S_2}$$

характеризует изменение абсолютного значения напряжения (или тока) на выходе по сравнению с его значением на входе. Единица измерения – непер (Нп). Коэффициент затухания  $a = 1$  Нп, если в режиме согласованной нагрузки симметричного четырехполюсника отношение  $\frac{U_1}{U_2} = e \approx 2,718$ . В настоящее время принята другая единица измерения, называемая белом (Б). Чаще пользуются в десять раз меньшей единицей – децибелом (дБ):  $1 \text{ дБ} = 0,115 \text{ Нп}$ .

## Коэффициент фазы

$$b = \frac{1}{2} \left[ (\psi_{u_1} - \psi_{u_2}) + (\psi_{i_1} - \psi_{i_2}) \right]$$

в общем случае не является углом сдвига фаз между напряжениями и токами на входе и выходе.

Подставив в выражение постоянной передачи четырехполюсника  $\dot{U}_1 = \underline{Z}_{1c} \dot{I}_1$  и  $\dot{U}_2 = \underline{Z}_{2c} \dot{I}_2$ , получим

$$\underline{g} = \frac{1}{2} \ln \frac{\underline{Z}_{1c} \dot{I}_1^2}{\underline{Z}_{2c} \dot{I}_2^2} = \ln \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} . \quad (10.1)$$

Уравнение связи четырехполюсника в  $A$ -форме

$$\dot{I}_1 = \underline{C} \dot{U}_2 + \underline{D} \dot{I}_2 = \underline{C} \underline{Z}_{2c} \dot{I}_2 + \underline{D} \dot{I}_2 = (\underline{C} \underline{Z}_2 + \underline{D}) \dot{I}_2 . \quad (10.2)$$

Подставив уравнение (10.2) в уравнение (10.1), получим

$$\underline{g} = \ln(\underline{C} \underline{Z}_2 + \underline{D}) \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2n}}} .$$

После подстановки формул характеристических сопротивлений

$$\underline{Z}_{1c} = \sqrt{\frac{\underline{AB}}{\underline{CD}}} \text{ и } \underline{Z}_{2c} = \sqrt{\frac{\underline{DB}}{\underline{CA}}}$$

получим  $\underline{g} = \ln \left( \sqrt{\underline{AD}} + \sqrt{\underline{BC}} \right)$ .



Это выражение можно записать в виде

$$e^{\underline{g}} = \sqrt{\underline{AD}} + \sqrt{\underline{BC}}.$$

Величина  $e^{-\underline{g}}$  является обратной  $e^{\underline{g}}$ :

$$e^{-\underline{g}} = \frac{1}{\sqrt{\underline{AD}} + \sqrt{\underline{BC}}} = \frac{\sqrt{\underline{AD}} - \sqrt{\underline{BC}}}{\underline{AD} - \underline{BC}} = \sqrt{\underline{AD}} - \sqrt{\underline{BC}},$$

так как  $\underline{AD} - \underline{BC} = 1$ .

Тогда гиперболические функции

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \underline{g} &= \frac{e^{\underline{g}} + e^{-\underline{g}}}{2} = \sqrt{\underline{AD}}; \\ \operatorname{sh} \underline{g} &= \frac{e^{\underline{g}} - e^{-\underline{g}}}{2} = \sqrt{\underline{BC}}. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Вычислим следующие значения:

$$\sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} = \sqrt{\frac{\underline{A}}{\underline{D}}}; \quad \sqrt{\underline{Z}_{1c} \cdot \underline{Z}_{2c}} = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}}. \tag{10.4}$$

Умножив уравнения (10.3) на уравнения (10.4), получим:

$$\sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} \cdot \operatorname{ch} \underline{g} = \underline{A}; \quad \sqrt{\underline{Z}_{1c} \cdot \underline{Z}_{2c}} \cdot \operatorname{sh} \underline{g} = \underline{B}.$$

Разделив уравнения (10.3) на уравнения (10.4), получим:

$$\sqrt{\frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{1c}}} \cdot \operatorname{ch} \underline{g} = \underline{D}; \quad \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{1c} \cdot \underline{Z}_{2c}}} \cdot \operatorname{sh} \underline{g} = \underline{C}.$$

Подставив коэффициенты в уравнения связи четырехполюсника, получим уравнения в гиперболических функциях:



$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} \operatorname{ch} \underline{g} \dot{U}_2 + \sqrt{\underline{Z}_{1c} \cdot \underline{Z}_{2c}} \operatorname{sh} \underline{g} \dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 = \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{1c} \cdot \underline{Z}_{2c}}} \operatorname{sh} \underline{g} \dot{U}_2 + \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{1c}}} \operatorname{ch} \underline{g} \dot{I}_2. \end{cases}$$

У симметричного четырехполюсника  $\underline{A} = \underline{D}$ ,  $\underline{Z}_{1c} = \underline{Z}_{2c} = \underline{Z}_c$ .

Тогда  $\operatorname{ch} \underline{g} = \underline{A}$ .

Уравнения в гиперболических функциях принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \operatorname{ch} \underline{g} \dot{U}_2 + \underline{Z}_c \operatorname{sh} \underline{g} \dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{g} \dot{U}_2 + \operatorname{ch} \underline{g} \dot{I}_2. \end{cases}$$

На основе теории четырехполюсника проводят анализ линий передачи электроэнергии, различных фильтров, электронных устройств.

# ГЛАВА 11

## ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 11.1. Основные понятия

Ранее в курсе ТОЭ рассматривали цепи с сосредоточенными параметрами. В них можно выделить элементы, в которых запасается энергия магнитного поля, электрического поля, происходят необратимые преобразования электромагнитной энергии в другие виды энергии. Эти явления учитывают элементы резистивный, индуктивный, емкостный.

Под цепями с распределенными параметрами понимают такие цепи, в которых энергии электрического и магнитного полей, а также необратимые преобразования энергии (потери в виде тепла) распределены равномерно или неравномерно вдоль цепи (ее длины).

К цепям с распределенными параметрами относят ЛЭП, линии телефонной связи, антенны приемно-передающих устройств. Обмотки электрических машин и трансформаторов тоже можно считать цепями с распределенными параметрами.

Рассмотрим двухпроводную однородную линию электропередачи. Однородной называют линию, параметры которой равномерно распределены вдоль ее длины. Это идеализированная линия, так как не учитывают изменение параметров от влияния провиса проводов и неравномерности поверхности земли.

В цепях с распределенными параметрами напряжения и токи будут различны на каждом участке и могут меняться в пределах одного участка.

На [рис. 11.1](#) изображен элементарный участок линии, у которого  $dx$  – длина элементарного участка;  $i$  и  $u$  – ток и напряжение в начале участка;

$i + \frac{di}{dx} dx$  – ток в конце участка;

$u + \frac{du}{dx} dx$  – напряжение в конце участка.

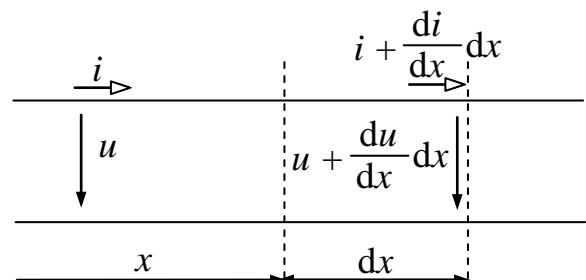


Рис. 11.1

Такой элементарный участок обладает параметрами:  $C_0 dx, L_0 dx, R_0 dx, G_0 dx$ .  $C_0, L_0, R_0, G_0$  – первичные параметры однородной линии, т. е. параметры линии на единицу длины. Их считают обычно известными и постоянными:  $[R_0] = \hat{I} \Omega / \text{м}$ ;  $[G_0] = \tilde{N} \text{С} / \text{м}$ ,  $[L_0] = \tilde{A} \text{Гн} / \text{м}$ ,  $[\tilde{N}_0] = \hat{O} / \text{м}$ .

Элементарный участок с учетом первичных параметров представлен на [рис. 11.2](#).

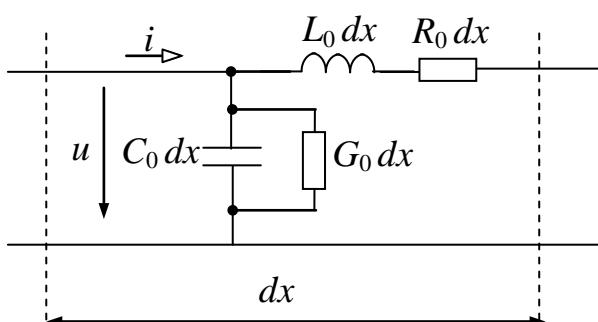


Рис. 11.2

Каждый участок линии длиной  $dx$  можно представить в виде Г-образного четырехполюсника, саму линию – в виде совокупности П- или Т-образных четырехполюсников, включенных последовательно.

Линию в целом можно рассматривать как симметричный четырехполюсник относительно входных и выходных зажимов.

## 11.2. Уравнения однородной линии

Напряжение и ток линии зависят не только от времени, но и от пространственной координаты  $x$  (от точки линии):  $u(x, t)$ ;  $i(x, t)$ .

Координату  $x$  можно отсчитывать от начала линии, конца или любой точки, принятой за начало отсчета. Начало линии – точка подключения линии к генератору, конец линии – точка подключения нагрузки к линии.

Будем вести отсчет координаты  $x$  от начала линии и считать, что вся нагрузка сосредоточена в конце линии, линия не имеет ответвлений.

Исследовать линию – это значит найти зависимости  $u(x, t)$  и  $i(x, t)$  в любой точке линии в любой момент времени.

Определим изменение напряжения на участке  $dx$ , которое равно сумме падений напряжений на элементах этого участка:

$$u - \left( u + \frac{du}{dx} dx \right) = -\frac{du}{dx} dx.$$

Из [рис. 11.2](#) видно, что

$$-\frac{du}{dx} dx = (R_0 dx) \cdot i + (L_0 dx) \frac{di}{dt}.$$

Тогда

$$-\frac{du}{dx} = R_0 i + L_0 \frac{di}{dt}.$$

Изменение тока в пределах этого участка равно сумме токов утечки в элементах этого участка:

$$-\frac{di}{dx} dx = (G_0 dx) u + (C_0 dx) \frac{du}{dt}.$$



Отсюда

$$-\frac{di}{dx} = G_0 u + C_0 \frac{du}{dt}.$$

Получим систему уравнений, которую называют телеграфными уравнениями однородной линии.

$$\begin{cases} -\frac{du}{dx} = R_0 i + L_0 \frac{di}{dt}; \\ -\frac{di}{dx} = G_0 u + C_0 \frac{du}{dt}. \end{cases} \quad (11.1)$$

Систему записывают с использованием частных производных, так как напряжения и токи зависят от двух координат:  $t$  и  $x$ .

Если за начало отсчета принять конец линии и координату до рассматриваемой точки линии обозначить  $x'$ , то получим систему уравнений, аналогичную системе (11.1), но в левой части знаки изменятся на противоположные:

$$\begin{cases} \frac{du}{dx'} = R_0 i + L_0 \frac{di}{dt}; \\ \frac{di}{dx'} = G_0 u + C_0 \frac{du}{dt}. \end{cases} \quad (11.2)$$

Решение системы (11.1) или (11.2) относительно напряжений и токов можно получить однозначно при известных начальных и граничных условиях.

Начальные условия – это значения токов и напряжений в начале или конце линии для момента времени  $t = 0$ .

Граничные условия устанавливают связь между напряжением и током в начале или конце линии в зависимости от режима работы линии.

### 11.3. Синусоидальные напряжения и токи в линии

Если линия подключена к источнику синусоидального напряжения с частотой  $f$ , то напряжение и ток установившегося режима изменяются по синусоидальному закону с той же частотой.

В системе уравнений (11.1) перейдем от мгновенных значений к комплексным. Комплексные значения зависят от  $x$  и не зависят от  $t$ , так как комплекс сопоставляют вектору в момент времени  $t = 0$ :  $\dot{I} = \dot{I}(x)$ ;  $\dot{U} = \dot{U}(x)$ .

Поэтому получаем систему уравнений не в частных производных, а в обыкновенных (полных):



$$\begin{cases} -\frac{d\dot{U}}{dx} = R_0 \dot{I} + j\omega L_0 \dot{I} = (R_0 + j\omega L_0) \dot{I} = \underline{Z}_0 \dot{I}; \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} = G_0 \dot{U} + j\omega C_0 \dot{U} = (G_0 + j\omega C_0) \cdot \dot{U} = \underline{Y}_0 \dot{U}, \end{cases}$$

где  $\underline{Z}_0$  – комплексное продольное сопротивление на единицу длины линии;

$\underline{Y}_0$  – комплексная поперечная проводимость на единицу длины линии.

Более краткая запись:

$$\begin{cases} -\frac{d\dot{U}}{dx} = \underline{Z}_0 \dot{I}; \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} = \underline{Y}_0 \dot{U}. \end{cases} \quad (11.3)$$

Из системы уравнений (11.3), исключая либо ток, либо напряжение, можно получить соответственно дифференциальное уравнение для напряжения или тока.

Продифференцировав первое уравнение и подставив в него значение  $\frac{d\dot{I}}{dx}$  из второго, получим:

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 \dot{U}.$$

Обозначим  $\sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \underline{\gamma}$  – коэффициент распространения.

Тогда уравнение примет вид

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} - \underline{\gamma}^2 \dot{U} = 0. \quad (11.4)$$

Как известно из математики, решение этого уравнения есть сумма двух экспоненциальных функций:

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \dot{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}, \quad (11.5)$$

где  $\dot{U}$  – комплекс действующего значения напряжения для любой точки линии;  
 $\dot{A}_1$  и  $\dot{A}_2$  – постоянные интегрирования;

$\underline{\gamma}$  и  $-\underline{\gamma}$  – корни характеристического уравнения, получаемого из (11.4):

$$p^2 - \underline{\gamma}^2 = 0. \text{ Отсюда } p = \pm \underline{\gamma}.$$

Аналогично можно получить решение для тока:

$$\frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 \dot{I}.$$

Но такое решение нецелесообразно, так как нужно искать еще две постоянные интегрирования.

Более рационально найти ток из первого уравнения системы (11.3):

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\frac{1}{\underline{Z}_0} \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \frac{d}{dx} \left( \dot{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \dot{A}_2 e^{\underline{\gamma}x} \right) = \\ &= \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_0} \left( \dot{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \dot{A}_2 e^{\underline{\gamma}x} \right) = \sqrt{\frac{\underline{Y}_0}{\underline{Z}_0}} \left( \dot{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \dot{A}_2 e^{\underline{\gamma}x} \right). \end{aligned} \quad (11.6)$$

Комплексное выражение  $\sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}}$  зависит от первичных параметров и имеет размерность сопротивления.

Его называют характеристическим или волновым сопротивлением линии и обозначают  $\underline{Z}_{\text{h}}$ :

$$\underline{Z}_{\text{h}} = Z_c e^{j\theta} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}.$$

Тогда комплекс действующего значения тока для любой точки линии можно записать следующим образом:

$$\dot{I} = \frac{\dot{A}_1}{Z_c} e^{-\underline{\gamma}x} - \frac{\dot{A}_2}{Z_c} e^{\underline{\gamma}x}.$$

Для выяснения физического смысла слагаемых напряжения в уравнении (11.5) перейдем к мгновенному значению напряжения  $u(x, t)$ . При этом учтем, что постоянные интегрирования и коэффициент распространения являются комплексными числами:

$$\dot{A}_1 = A_1 e^{j\psi_1}; \quad \dot{A}_2 = A_2 e^{j\psi_2};$$



$$\underline{\gamma} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \alpha + j\beta,$$

где  $\alpha$  – коэффициент затухания, характеризующий степень убывания амплитуды;

$\beta$  – коэффициент фазы, характеризующий изменение фазы.

Мгновенное значение напряжения  $u(x, t) = A_{1m} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1) + A_{2m} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2)$ .

Если считать координату  $x$  фиксированной, то первое слагаемое изменяется по синусоидальному закону с постоянной амплитудой напряжения.

Если считать фиксированным время, то напряжение меняется по синусоиде, затухающей по экспоненте.

Убывание амплитуды волны вдоль линии обусловлено потерями в линии, а изменение фазы – конечной скоростью распространения электромагнитных колебаний.

Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$ , входящие в  $\underline{\gamma}$ , характеризуют распространение волны вдоль линии, поэтому  $\underline{\gamma}$  назвали коэффициентом распространения.

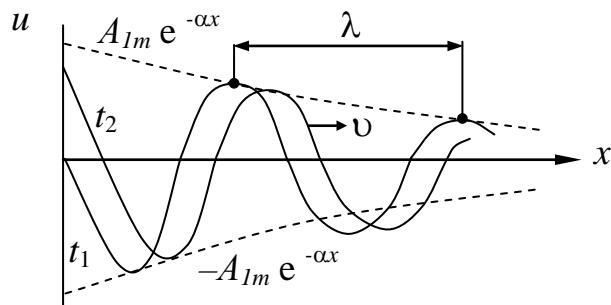


Рис. 11.3

На [рис. 11.3](#) приведены волны напряжения для двух моментов времени  $t_1$  и  $t_2$  ( $t_2 > t_1$ ).

Волна перемещается от начала линии к концу с постоянной скоростью  $v$ .

Любое колебательное движение характеризуют фазовой скоростью и длиной волны.

*Фазовая скорость* – это скорость изменения фазы колебания, которая с течением времени и ростом координаты  $x$  остается неизменной:

$$(\omega t - \beta x + \psi_1) = \text{const.}$$

Исследуем это выражение на экстремум:

$$\frac{d}{dt}(\omega t - \beta x + \psi_1) = \omega \frac{dt}{dt} - \beta \frac{dx}{dt} + \frac{d\psi_1}{dt} = 0.$$

В полученном выражении  $\frac{dt}{dt} = 1$ ,  $\frac{dx}{dt} = v$ ,  $\frac{d\psi_1}{dt} = 0$ .



Тогда  $v = \frac{\omega}{\beta}$ .

Если в воздушной линии пренебречь потерями, то максимальная фазовая скорость примерно равна скорости света:

$$v \approx c = 3 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

Длина волны  $\lambda$  – это кратчайшее расстояние между двумя точками, взятое в направлении распространения волны, фаза колебания которых отличается на  $2\pi$  (см. [рис. 11.3](#)).

Следовательно, для первого слагаемого напряжения с учетом, что фазу откладываем в направлении волны влево, можно записать:

$$\omega t - \beta(x + \lambda) + \psi_1 = \omega t - \beta x + \psi_1 - 2\pi.$$

Отсюда  $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ .

Фазовая скорость

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = \lambda f = \frac{\lambda}{T}.$$

Отсюда следует, что за время, равное одному периоду, волна пробегает расстояние, равное длине волны.

Первая составляющая напряжения имеет максимальную амплитуду в начале линии и минимальную в конце. Эта составляющая напряжения движется от начала линии к концу со скоростью  $v$ . Этую волну называют бегущей (прямой или падающей составляющей).

Так как второе слагаемое имеет амплитуду  $A_{2m} e^{\alpha x}$  (со знаком плюс), то она достигает максимального значения в конце линии. Этую волну называют обратной или отраженной.

В фазе колебания второе слагаемое  $\beta x$  – со знаком плюс, поэтому фазовая скорость  $v = -\frac{\omega}{\beta}$ .

Это означает, что вторая составляющая напряжения перемещается с той же скоростью, что и первая, но от конца линии к началу ([рис. 11.4](#)).

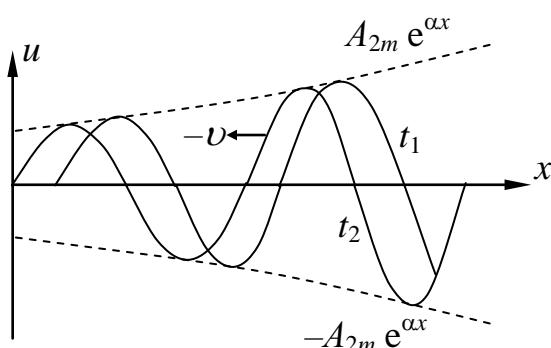


Рис. 11.4

Напряжение  $u(x, t)$  имеет положительное направление от верхнего (первого) провода к нижнему (второму) и состоит из суммы двух составляющих с такими же положительными направлениями:

$$u(x, t) = u_{\text{пр}}(x, t) + u_{\text{обр}}(x, t).$$

Аналогично можно получить мгновенное значение тока:

$$i(x, t) = \frac{A_{1m}}{Z_c} = e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1 - \theta) -$$

$$-\frac{A_{2m}}{Z_c} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2 - \theta) = i_{\text{рд}}(x, t) - i_{\text{рвд}}(x, t).$$

Результирующий ток и его прямая составляющая совпадают по направлению и направлены от начала к концу линии, обратная составляющая направлена от конца к началу линии.

Коэффициентом пропорциональности между  $U_m$  и  $I_m$ ,  $U$  и  $I$  прямой и обратной волны является характеристическое (волновое) сопротивление каждой волны.

В комплексной форме можно записать:

$$\frac{\dot{U}_{\text{рд.}}}{I_{\text{рд.}}} = Z_c; \quad \frac{\dot{U}_{\text{рвд.}}}{I_{\text{рвд.}}} = Z_c.$$

Напряжение и ток сдвинуты относительно друг друга по фазе на угол  $\theta$ .

Мощности в цепях с распределенными параметрами для каждой волны определяют так же, как в цепях с сосредоточенными параметрами.

Например, комплексная мощность прямой волны

$$\underline{S}_{\text{рд.}} = \dot{U}_{\text{рд.}} \overset{*}{I}_{\text{рд.}} = \underline{D}_{\text{рд.}} + j\underline{Q}_{\text{рд.}} = U_{\text{рд.}} I_{\text{рд.}} \cos \theta + j U_{\text{рд.}} I_{\text{рд.}} \sin \theta.$$

Активная мощность прямой волны

$$\underline{D}_{\text{рд.}} = R_c I_{\text{рд.}}^2 = \frac{U_{\text{рд.}}^2}{R_c}.$$

Представление напряжений и токов в виде прямой и обратной составляющих есть математический прием, который облегчает анализ таких цепей. Реально в цепях с распределенными параметрами существуют результирующие напряжения и токи.



## 11.4. Вторичные параметры однородной линии

Однородную линию можно характеризовать с помощью двух параметров: коэффициента распространения

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + jL_0\omega)(G_0 + jC_0\omega)} = \alpha + j\beta$$

и волнового (характеристического) сопротивления

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{(R_0 + jL_0\omega)}{(G_0 + jC_0\omega)}} = Z_c e^{j\theta}.$$

Они зависят от первичных параметров  $R_0, L_0, G_0, C_0$  и частоты. Определим зависимость этих параметров от частоты.

Коэффициент распространения

$$\alpha + j\beta = \sqrt{(R_0 + jL_0\omega)(G_0 + jC_0\omega)} = \sqrt{R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0} + j\omega(G_0 L_0 + R_0 C_0).$$

Выделим вещественную и мнимую части. Для этого возведем обе части равенства в квадрат:

$$\alpha^2 + j2\alpha\beta - \beta^2 = R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0 + j\omega(G_0 L_0 + R_0 C_0).$$

Для действительных составляющих получим уравнение

$$\alpha^2 - \beta^2 = R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0,$$

для мнимых

$$2\alpha\beta = \omega(G_0 L_0 + R_0 C_0).$$

Совместное решение этих уравнений относительно  $\alpha$  и  $\beta$  дает:

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0 + \sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)} \right]};$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \omega^2 L_0 C_0 - R_0 G_0 + \sqrt{(R_0^2 + \omega^2 L_0^2)(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)} \right]}.$$

Построим зависимости коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  от частоты, считая, что первичные параметры от частоты не зависят.

Когда  $\omega = 0$ , коэффициент затухания  $\alpha(0) = \sqrt{R_0 G_0}$ .



Когда  $\omega = \infty$ , коэффициент затухания  $\alpha(\infty) = \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + \frac{G_0}{2} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ .

Первое слагаемое обуславливает затухание амплитуды волны из-за продольного активного сопротивления линии.

Второе слагаемое обуславливает затухание волны за счет поперечной активной проводимости.

Для уменьшения затухания  $R_0$  и  $G_0$  необходимо уменьшить.

Графики зависимостей  $\alpha(\omega)$  и  $\beta(\omega)$  представлены на [рис. 11.5](#).

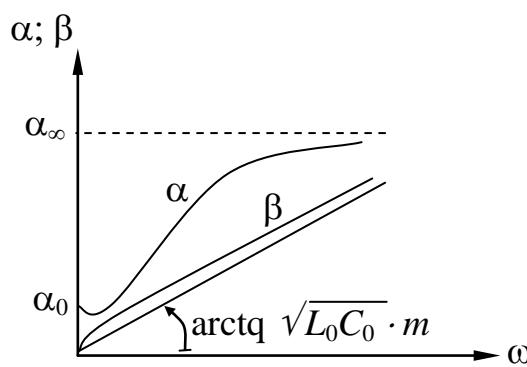


Рис. 11.5

При частоте  $\omega = 0$  коэффициент затухания  $\beta = 0$ .

При увеличении частоты  $\omega$  коэффициент  $\beta$  меняется нелинейно ( $\beta$  нелинейно зависит от частоты). При  $\omega \rightarrow \infty$  график  $\beta(\omega)$  стремится к прямой, направленной к оси абсцисс под углом  $\arctg m \sqrt{L_0 C_0}$  ( $m$  – масштабный коэффициент).

Фазовая скорость  $v = \frac{\omega}{\beta}$ . При

$\omega \rightarrow \infty$  коэффициент затухания  $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$ . Тогда  $v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ , т. е. при

$\omega \rightarrow \infty$  фазовая скорость от частоты не зависит.

Фазовая скорость зависит от материала. Графики зависимости  $v(f)$  приведены на [рис. 11.6](#).

Зависимости  $\alpha(\omega)$ ,  $\beta(\omega)$ ,  $v(\omega)$  имеют большое практическое значение.

В линиях передачи информации сигнал несинусоидальной формы и при передаче сигнала его гармонические составляющие перемещаются вдоль линии с разной скоростью и затухают по-разному, т. е. на выходе линии получают искаженный сигнал. Поэтому в линиях передачи информации необходимо принимать меры для устранения искажения сигнала.

Характеристическое сопротивление

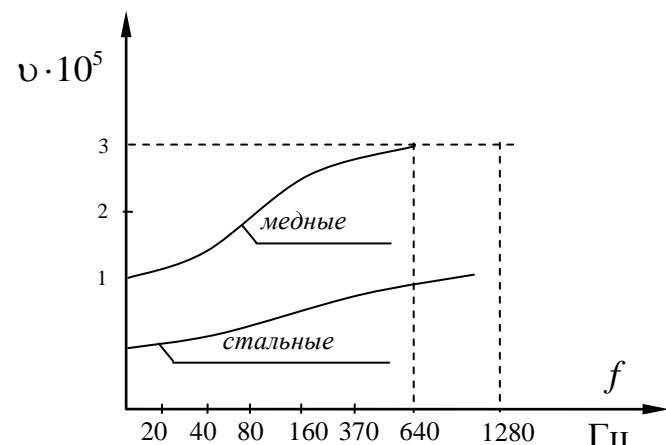


Рис. 11.6

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{(R_0 + jL_0\omega)}{(G_0 + jC_0\omega)}} = Z_c e^{j\theta}.$$

При  $\omega = 0$  сопротивление  $Z_c(0) = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}$ , т. е. имеет активный характер.

При  $\omega = \infty$  сопротивление  $Z_c(\infty) = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ , т. е. также имеет активный характер.

В остальном интервале частот  $Z_c$  имеет емкостный характер, так как знаменатель больше числителя.

На [рис. 11.7](#) представлены кривые зависимости полного волнового сопротивления и угла  $\theta$  от частоты.

Волновое сопротивление возрастает при уменьшении диаметра проводов и увеличении расстояния между проводами.

Для воздушной линии электропередачи  $Z_c = (300-600)$  Ом, для кабеля  $Z_c = (50-200)$  Ом.

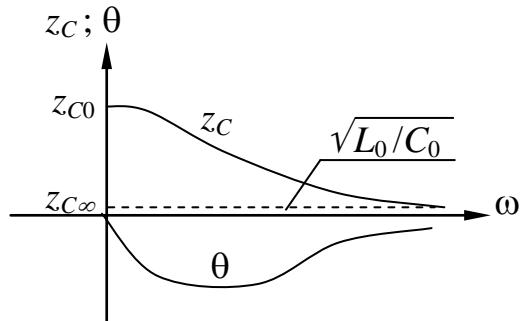


Рис. 11.7

## 11.5. Зависимость режима работы линии от нагрузки

Пусть в начале линии длиной  $l$  ([рис. 11.8](#)) включен генератор, напряжение на зажимах которого  $\dot{U}_1$ , а в конце линии – приемник с сопротивлением  $Z_h = Z_i e^{j\phi_i}$ .

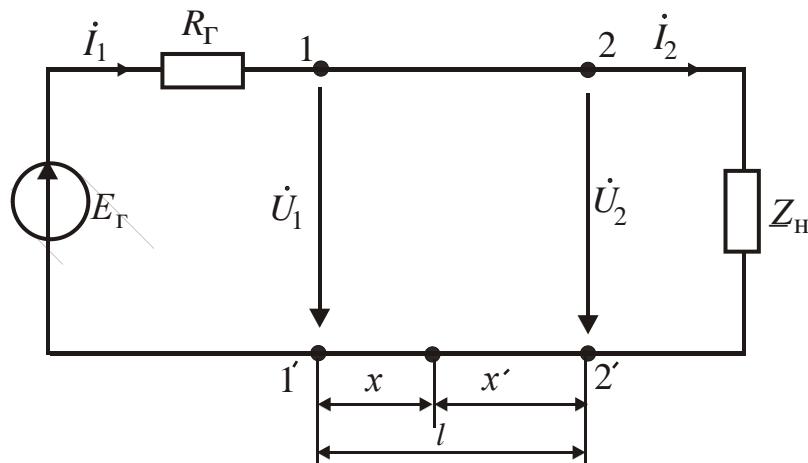


Рис. 11.8

Нужно определить напряжение  $\dot{U}_1$ , необходимое для создания на нагрузке заданного напряжения  $\dot{U}_2$ . Одновременно вычислим ток генератора  $\dot{I}_1$



и распределение тока и напряжения вдоль линии.

По закону Ома ток

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_i}.$$

Напряжение и ток на расстоянии  $x$  от начала линии:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{A}_1 e^{-\gamma x} + \dot{A}_2 e^{-\gamma x}; \\ \dot{I} = \frac{\dot{A}_1}{\underline{Z}_c} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{A}_2}{\underline{Z}_c} e^{-\gamma x}. \end{cases}$$

Заменим в этих уравнениях  $x$  на  $(l - x')$ , т. е. перенесем начало отсчета координаты  $x$  из начала линии в конец:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{A}_1 e^{-\gamma(l-x')} + \dot{A}_2 e^{\gamma(l-x')}; \\ \dot{I} = \frac{\dot{A}_1}{\underline{Z}_c} e^{-\gamma(l-x')} - \frac{\dot{A}_2}{\underline{Z}_c} e^{-\gamma(l-x')}. \end{cases}$$

Обозначим  $\dot{A}_1 e^{-\gamma l} = \dot{B}_1$ ,

$\dot{A}_2 e^{\gamma l} = \dot{B}_2$ ,

где  $\dot{B}_1$  и  $\dot{B}_2$  – новые постоянные интегрирования.

Тогда вместо  $x'$  можно писать  $x$  без штриха, так как отсчет координаты  $x$  от начала или конца линии определяют по заданному режиму. Получим уравнения

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{B}_1 e^{\gamma x} + \dot{B}_2 e^{-\gamma x}; \\ \dot{I} = \frac{\dot{B}_1}{\underline{Z}_c} e^{\gamma x} - \frac{\dot{B}_2}{\underline{Z}_c} e^{-\gamma x}. \end{cases}$$

Для конца линии ( $x = 0$ ,  $\dot{U} = \dot{U}_2$ ,  $\dot{I} = \dot{I}_2$ )

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = \dot{B}_1 + \dot{B}_2; \\ \dot{I}_2 = \frac{\dot{B}_1}{\underline{Z}_c} - \frac{\dot{B}_2}{\underline{Z}_c}; \end{cases}$$

$$\dot{I}_2 \underline{Z}_c = \dot{B}_1 - \dot{B}_2.$$

Отсюда

$$\dot{B}_1 = \frac{\dot{U}_2 + \underline{Z}_c \dot{I}_2}{2}; \quad \dot{B}_2 = \frac{\dot{U}_2 - \underline{Z}_c \dot{I}_2}{2}.$$

Следовательно, напряжение в линии

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \frac{\dot{U}_2 + \underline{Z}_c \dot{I}_2}{2} \cdot e^{\gamma x} + \frac{\dot{U}_2 - \underline{Z}_c \dot{I}_2}{2} \cdot e^{-\gamma x} = \\ &= \dot{U}_2 \left( \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} \right) + \underline{Z}_c \dot{I}_2 \left( \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \right) = \dot{U}_2 \tilde{h} \gamma x + \underline{Z}_c \dot{I}_2 \text{sh} \gamma x. \end{aligned}$$

Аналогичное уравнение можно получить и для тока:

$$\dot{I} = \dot{I}_2 \text{ch} \gamma x + \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} \text{sh} \gamma x.$$

Полученные уравнения позволяют определить напряжение и ток в любой точке линии при заданном режиме в конце линии.

Приняв  $x = l$ , получим уравнения линии в гиперболической форме, выражающие напряжение и ток в начале линии через напряжение и ток в конце линии:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \tilde{h} \gamma l + \underline{Z}_c \dot{I}_2 \text{sh} \gamma l; \\ \dot{I}_1 = \dot{I}_2 \text{ch} \gamma l + \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} \text{sh} \gamma l. \end{cases}$$

Если отсчет координат  $x$  будем проводить от начала линии, при заданных  $\dot{U}_1$  и  $\dot{I}_1$  и  $x = 0$  получим уравнения:



$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{A}_1 + \dot{A}_2; \\ \dot{I}_1 = \frac{\dot{A}_1}{\underline{Z}_c} - \frac{\dot{A}_2}{\underline{Z}_c}. \end{cases}$$

Из второго уравнения

$$\underline{Z}_c \dot{I}_1 = \dot{A}_1 - \dot{A}_2.$$

$$\text{Отсюда } \dot{A}_1 = \frac{\dot{U}_1 + \underline{Z}_c \dot{I}_1}{2}; \quad \dot{A}_2 = \frac{\dot{U}_1 - \underline{Z}_c \dot{I}_1}{2}.$$

Подставив постоянные интегрирования, получим уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \frac{\dot{U}_1 + \underline{Z}_c \dot{I}_1}{2} e^{-\gamma x} + \frac{\dot{U}_1 - \underline{Z}_c \dot{I}_1}{2} e^{\gamma x} = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \underline{Z}_c \dot{I}_1 \operatorname{sh} \gamma x; \\ \dot{I} &= \frac{\dot{U}_1 + \underline{Z}_c \dot{I}_1}{2 \underline{Z}_c} e^{-\gamma x} - \frac{\dot{U}_1 - \underline{Z}_c \dot{I}_1}{2 \underline{Z}_c} e^{\gamma x} = \dot{I}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \gamma x. \end{aligned}$$

Сведем их в систему

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \underline{Z}_c \dot{I}_1 \operatorname{sh} \gamma x; \\ \dot{I} = \dot{I}_1 \operatorname{ch} \gamma x - \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \gamma x. \end{cases}$$

Эта система позволяет определить напряжение и ток в любой точке линии, если задан режим работы на входе линии.

Если линия электропередачи работает на постоянном токе, т. е.  $\omega = 0$ , то между проводами линии и внутри проводов существуют постоянные магнитное и электрическое поля. ЭДС самоиндукции отсутствует, токи утечки между проводами отсутствуют.

Напряжение и токи совпадают по фазе. Характеристические параметры являются действительными числами.

Коэффициент распространения  $\gamma = \alpha + j\beta$ . Коэффициент фазы  $\beta = 0$ , поэтому  $\gamma = \alpha = \sqrt{R_0 G_0}$ .

Волновое сопротивление  $\underline{Z}_c = Z_c = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}} = R_c$ .

Расчеты проводят для действующих значений электрических величин.

При заданном режиме в конце линии система уравнений, позволяющая рассчитать напряжение и ток в любой точке, примет вид



$$\begin{cases} U = U_2 \operatorname{ch} \alpha x + R_c I_2 \operatorname{sh} \alpha x; \\ I = I_2 \operatorname{ch} \alpha x + \frac{U_2}{R_c} \operatorname{sh} \alpha x. \end{cases}$$

## 11.6. Согласованная и несогласованная нагрузка

В однородной линии обратная волна существует в случае, если нагрузка линии не согласована с ее характеристическим сопротивлением:  $\underline{Z}_l \neq \underline{Z}_c$ .

Отношение комплекса напряжения (тока) обратной волны в конце линии к комплексу напряжения (тока) прямой волны в конце линии называют коэффициентом отражения.

Так как  $\dot{U}_{\text{от}}(0) = B_2$ ;  $\dot{U}_{\text{пр}}(0) = B_1$ , то  $n = \frac{\dot{U}_{\text{от}}(0)}{\dot{U}_{\text{пр}}(0)} = \frac{\dot{B}_2}{\dot{B}_1} = \frac{\dot{U}_2 - \underline{Z}_c \dot{I}_2}{\dot{U}_2 + \underline{Z}_c \dot{I}_2} = \frac{\underline{Z}_l - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_l + \underline{Z}_c}$ . Коэффициент отражения линии зависит от соотношения сопротивления нагрузки и характеристического сопротивления. Наибольшие значения коэффициент отражения принимает в режимах холостого хода и короткого замыкания в конце линии.

В режиме холостого хода  $\underline{Z}_l = \infty$ ,  $n = 1$ , в режиме короткого замыкания  $n = -1$ , что означает полное отражение.

Чем больше по модулю коэффициент отражения, тем более неравномерно вдоль линии распределены действующие значения напряжения и тока. При несогласованной нагрузке часть энергии в виде отраженной составляющей возвращается источнику.

При передаче сигналов и информации, как правило, подбирают согласованный режим. В этом случае  $n = 0$ , отраженная волна отсутствует. В согласованном режиме  $\underline{Z}_l = \underline{Z}_c$ . По закону Ома  $\dot{U}_2 = \underline{Z}_c \dot{I}_2$ .

Тогда  $\dot{B}_2 = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \underline{Z}_c \dot{I}_2) = 0$ ;  $\dot{U}_{\text{от}} = \dot{B}_2 e^{-\gamma x} = 0$ ;  $\dot{I}_{\text{от}} = \frac{\dot{B}_2}{\underline{Z}_c} e^{-\gamma x} = 0$ .

Уравнения линии принимают вид

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_{\text{пр}} = \dot{B}_1 e^{\gamma x} = \frac{\dot{U}_2 + \underline{Z}_c \dot{I}_2}{2} e^{\gamma x} = \dot{U}_2 e^{\gamma x}; \\ \dot{I} = \dot{I}_{\text{пр}} = \frac{\dot{B}_1}{\underline{Z}_c} e^{\gamma x} = \frac{\dot{U}_2 + \underline{Z}_c \dot{I}_2}{2 \underline{Z}_c} e^{\gamma x} = \dot{I}_2 e^{\gamma x}. \end{cases}$$

Действующие значения напряжения и тока вдоль линии при согласованной нагрузке изменяются по экспоненте ([рис. 11.9](#)).

Вся энергия, поступающая в нагрузку, полностью ею потребляется. При несогласованной нагрузке отраженная волна возвращается в начало линии.



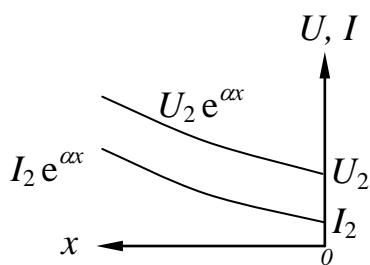


Рис. 11.9

нии. Если сопротивление генератора не равно  $Z_c$ , то происходит повторное отражение и вновь отраженный сигнал поступает в нагрузку, для которой он является ложным. В линиях телефонной связи это приводит к неразборчивости речи, а в телевизионных приемниках – к нечеткости и многоконтурности изображения.

## 11.7. Линии без потерь

В линиях, соединяющих приемно-передающую аппаратуру с антеннами, потери много меньше мощности, потребляемой нагрузкой. Этими потерями пренебрегают и такую линию считают линией без потерь, принимают  $R_0 = 0$  и  $G_0 = 0$ .

У линии без потерь волновое сопротивление чисто активное и не зависит от частоты:

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + jC_0\omega}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_c.$$

Угол  $\theta = 0$ . Это означает что напряжение и ток прямой и обратной волн совпадают по фазе.

Коэффициент распространения

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{(R_0 + jl_0\omega)(G_0 + jC_0\omega)} = j\omega\sqrt{L_0C_0}.$$

Отсюда следует, что коэффициент затухания  $\alpha = 0$ . Линия без потерь – линия без затухания.

Коэффициент фазы  $\beta = \omega\sqrt{L_0C_0}$  прямо пропорционален частоте.

Так как  $\underline{\gamma} = j\beta$ , то и коэффициент распространения прямо пропорционален частоте.

Фазовая скорость  $v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0C_0}}$ . Фазовая скорость в линии без потерь

не зависит от частоты. Однородная линия без потерь – это линия без искажений.

Уравнения однородной линии с гиперболическими функциями от комплексного аргумента заменяют для линии без потерь уравнениями с круговыми функциями от вещественного аргумента.

Так как

$$\operatorname{ch} \underline{\gamma} x = \operatorname{ch} j\beta x = \cos \beta x;$$

$\underline{\sh \gamma x} = \underline{\sh j\beta x} = j \sin \beta x$ ;  $\underline{Z}_{\text{н}} = Z_{\text{c}}$ , уравнения примут вид

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos \beta x + j Z_{\text{н}} \dot{I}_2 \sin \beta x; \\ \dot{I} = \dot{I}_2 \cos \beta x + j \frac{\dot{U}_2}{Z_{\text{c}}} \sin \beta x. \end{cases}$$

В случае несогласованной нагрузки есть прямая и обратная составляющие напряжения и тока. Амплитуда каждой составляющей вдоль линии остается постоянной ( $\alpha = 0$ ). Результирующие действующие значения напряжения и тока вдоль линии распределены неравномерно.

### 11.8. Согласованная нагрузка линии без потерь

При согласованной активной нагрузке

$$\underline{Z}_{\text{н}} = \underline{Z}_{\text{н}} = Z_{\text{c}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}; \quad \dot{U}_2 = Z_{\text{c}} \dot{I}_2,$$

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos \beta x + j \dot{U}_2 \sin \beta x = \dot{U}_2 e^{j\beta x}; \\ \dot{I} = \dot{I}_2 \cos \beta x + j \dot{I}_2 \sin \beta x = \dot{I}_2 e^{j\beta x}. \end{cases}$$

Примем, что начальная фаза напряжения в конце линии равна нулю. Тогда мгновенные значения напряжения и тока следующие:

$$u(x, t) = U_{2m} \sin(\omega t + \beta x);$$

$$i(x, t) = I_{2m} \sin(\omega t + \beta x).$$

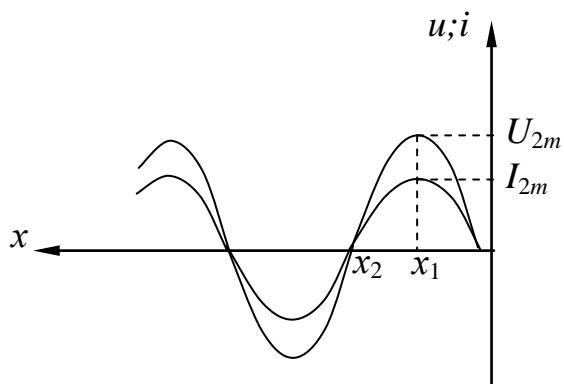


Рис. 11.10

Напряжение и ток вдоль линии изменяются по синусоидальному закону с постоянной амплитудой и совпадают по фазе ([рис. 11.10](#)).

Отраженной волны нет. Действующие значения напряжения и тока не зависят от координаты  $x$  ([рис. 11.11](#)). Мощность волны, движущейся от генератора к приемнику, полностью поглощается нагрузкой.

$$P = UI = Z_c I^2 = \frac{U^2}{Z_c}.$$

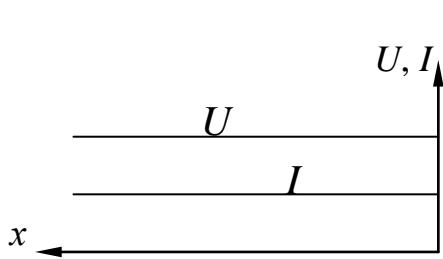


Рис. 11.11

Волновое сопротивление  $Z_c =$

$$= \frac{U}{I} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \text{ После возведения в квадрат полу-} \\ \text{ним } \frac{U^2}{I^2} = \frac{L_0}{C_0}. \text{ Отсюда } L_0 I^2 = C_0 U^2. \text{ Энергия}$$

$$\text{магнитного поля катушки } \frac{L_0 I^2}{2}, \text{ энергия} \\ \text{электрического поля конденсатора } \frac{C_0 U^2}{2}. \text{ Очевидно, что } \frac{L_0 I^2}{2} = \frac{C_0 U^2}{2}.$$

Следовательно, энергия распределяется поровну между электрическим и магнитным полями между проводами линий.

## 11.9. Входное сопротивление линии

Входное сопротивление линии – это входное сопротивление двухполюсника, который необходимо подключить к зажимам генератора вместо линии, чтобы режим работы генератора остался без изменения.

При известных напряжении и токе генератора система уравнений линии:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \underline{Z}_c \dot{I}_2 \operatorname{sh} \underline{\gamma} l = \dot{U}_2 \left( \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_i} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l \right); \\ \dot{I}_1 = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l = \dot{U}_2 \left( \frac{1}{\underline{Z}_i} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l + \frac{1}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l \right). \end{array} \right.$$

Входное сопротивление равно отношению входного напряжения к входному току:

$$\underline{Z}_{\hat{a}\hat{o}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_i} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l}{\frac{1}{\underline{Z}_i} \operatorname{ch} \underline{\gamma} l + \frac{1}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \underline{\gamma} l}.$$

Разделив на  $\operatorname{ch} \underline{\gamma} l$ , получим:

$$\underline{Z}_{\hat{a}\hat{o}} = \underline{Z}_{\hat{n}} \frac{\underline{Z}_i + \underline{Z}_c \operatorname{th} \underline{\gamma} l}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_i \operatorname{th} \underline{\gamma} l}. \quad (11.7)$$

Отсюда видно, что входное сопротивление линии зависит от ее параметров, длины, частоты, сопротивления нагрузки в конце линии.

Выясним зависимость входного сопротивления линии от ее длины и частоты.

Для этого обозначим  $\frac{\underline{Z}_i}{\underline{Z}_c} = \operatorname{th} \underline{M}$ , где  $\underline{M}$  – комплексное число;

$$\underline{M} = m_1 + j m_2.$$

Разделив выражение входного сопротивления на  $\underline{Z}_c$ , получим

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_i \frac{\operatorname{th} \underline{M} + \operatorname{th} \gamma l}{1 + \operatorname{th} \underline{M} \cdot \operatorname{th} \gamma l} = \underline{Z}_c \operatorname{th}(\gamma l + \underline{M}) = \underline{Z}_c \operatorname{th}[(\alpha l + m_1)(\beta l + m_2)]. \quad (11.8)$$

$$\text{Но } Z_{\text{вх}} = Z_{\text{вх}} e^{j\varphi_{\text{вх}}} = R_{\text{вх}} + j x_{\text{вх}} = Z_{\text{вх}} \cos \varphi_{\text{вх}} + j Z_{\text{вх}} \sin \varphi_{\text{вх}}.$$

Отсюда следует, что увеличение длины линии  $l$  изменяет как полное сопротивление  $Z_{\text{вх}}$ , так и аргумент  $\varphi_{\text{вх}}$  входного сопротивления линии.

Выражение (11.8) удобно использовать для анализа зависимости входного сопротивления от длины линии  $l$  или от частоты  $f$ .

При заданных параметрах линии и сопротивления нагрузки проще пользоваться выражением (11.7).

Если задан коэффициент отражения  $n$ , то  $\underline{Z}_{\text{вх}}$  можно выразить через него:

$$\underline{n} = \frac{\dot{U}_2 - \underline{Z}_c \dot{I}_2}{\dot{U}_2 + \underline{Z}_c \dot{I}_2} = \frac{\underline{Z}_i - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_c} = \frac{1 - \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_i}}{1 + \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_i}}.$$

Отсюда

$$\frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_i} = \frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}}. \quad (11.9)$$

Гиперболический тангенс

$$\operatorname{th} \gamma l = \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}.$$

Умножив на  $e^{-\gamma l}$ , получим:

$$\operatorname{th} \gamma l = \frac{1 - e^{-2\gamma l}}{1 + e^{-2\gamma l}}.$$



Отсюда  $1 - e^{-2\gamma l} = (1 + e^{-2\gamma l}) \operatorname{th} \underline{\gamma} l$ ;

$$e^{-2\gamma l} = \frac{l - \operatorname{th} \underline{\gamma} l}{1 + \operatorname{th} \underline{\gamma} l}. \quad (11.10)$$

Подставив выражение (11.9) в (11.7) и с учетом (11.10), получим:

$$\underline{Z}_{\hat{a}\tilde{o}} = \underline{Z}_{\hat{n}} \frac{1 + \underline{n} e^{-2\underline{\gamma} l}}{1 - \underline{n} e^{-2\underline{\gamma} l}}.$$

При коротком замыкании ( $\underline{Z}_H = 0$ ) из выражения (11.7)

$$\underline{Z}_{\hat{a}\tilde{o}} = \underline{Z}_{\hat{e}\zeta} = \underline{Z}_c \operatorname{th} \underline{\gamma} l. \quad (11.11)$$

При холостом ходе ( $\underline{Z}_H = \infty$ )

$$\underline{Z}_{\hat{a}\tilde{o}} = \underline{Z}_{\tilde{o}\tilde{o}} = \underline{Z}_c \operatorname{cth} \underline{\gamma} l. \quad (11.12)$$

Если известны  $\underline{Z}_{k3}$  и  $\underline{Z}_{xx}$ , входное сопротивление линии можно выразить через эти параметры. Подставив (11.11) и (11.12) в (11.7), получим:

$$\underline{Z}_{bx} = \underline{Z}_{xx} \frac{\underline{Z}_H + \underline{Z}_{k3}}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_{xx}}.$$

Сопротивления  $\underline{Z}_{xx}$  и  $\underline{Z}_{k3}$  легко определить опытным путем. Их используют для вычисления вторичных параметров линии.

Волновое сопротивление получим, умножив выражение (11.11) на выражение (11.12):

$$\underline{Z}_{\hat{n}} = \sqrt{\underline{Z}_{\hat{e}\zeta} \cdot \underline{Z}_{\tilde{o}\tilde{o}}}.$$

Разделив выражение (11.11) на (11.12), получим:

$$\operatorname{th} \underline{\gamma} l = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{\hat{e}\zeta}}{\underline{Z}_{\tilde{o}\tilde{o}}}}.$$

Отсюда можно вычислить коэффициент распространения.



Входное сопротивление линии без потерь при согласованном режиме

$$\underline{Z}_{\hat{\alpha}\delta} = Z_{\tilde{n}} \frac{Z_i + jZ_c \operatorname{tg} \beta l}{Z_c + jZ_i \operatorname{tg} \beta l} = Z_c \frac{1 + \underline{n} e^{-j2\beta l}}{1 - \underline{n} e^{-j2\beta l}}.$$

Так как коэффициент отражения  $n = 0$ , то  $\underline{Z}_{\hat{\alpha}\delta} = Z_{\tilde{n}}$ , т. е. является чисто активным для любой длины линии.



# **ГЛАВА 12**

## **ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ**

## **ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ**

### **12.1. Общие сведения**

Теория электромагнитного поля изучает физические явления и процессы, происходящие в электромагнитном поле, и инженерные методы расчета этих процессов. Эти явления и процессы лежат в основе действия большого числа различных электромагнитных и электронных приборов и устройств, широко применяемых на практике. К ним могут быть отнесены: электрические машины и аппараты, электроэнергетические установки для передачи электрической энергии, электромагнитные и электронные элементы автоматики, средства передачи информации, устройства электрометаллургии, а также оборудование, предназначенное для исследования электромагнитных полей биологических объектов, искусственного интеллекта и многие др.

Изучение теории электромагнитного поля не только расширяет физические представления о поле, дает возможность проектировать различные практические устройства, но и способствует формированию у студентов современного мировоззрения.

Теория электромагнитного поля – базисная для целого ряда других дисциплин – радиотехники, радиолокации, электрических машин и др.

Особенность электромагнитного поля заключается в том, что органы чувств человека не в состоянии его воспринимать непосредственно. Однако оно обладает общими свойствами с веществом – массой, импульсом, моментом импульса, энергией. Особое свойство электромагнитного поля – оказание силового воздействия на зарженные частицы, находящиеся в электромагнитном поле.

Энергия электромагнитного поля распространяется в виде электромагнитных волн с конечной скоростью, и она может превращаться в другие виды энергии.

Исторически сложилось так, что электрические и магнитные поля рассматривали отдельно, об их взаимосвязи первоначально не подозревали. Теперь мы знаем, что существует единое электромагнитное поле, которое в зависимости от условий проявляется то как электрическое, то как магнитное.

Электрические и магнитные поля – различные проявления единого электромагнитного поля.

Все электромагнитные процессы есть процессы преобразования и распространения электромагнитного поля. В теории цепей исследование процессов преобразования энергии осуществляют при помощи уравнений в интегральной форме и интегральных понятий: тока  $I$ , напряжения  $U$ , мощности  $P$ , магнитного потока  $\Phi$ , которые характеризуют, как правило, целые участки или области электромагнитного поля. Теория электромагнитного поля позво-



ляет рассматривать процессы в электромагнитном поле в каждой точке пространства.

С помощью теории электромагнитного поля определяют параметры элементов электрических цепей (емкости, индуктивности, взаимные индуктивности, параметры электрических машин и многочисленных электромагнитных механизмов для цепей автоматики, телемеханики, электрической связи и т. д.); объясняют процессы распространения электромагнитных волн, электрические и магнитные поверхностные эффекты, эффекты близости и экранирования.

Знание теории электромагнитного поля и овладение её методами для решения практических задач – необходимое звено в системе подготовки инженера-электрика, инженера-электромеханика.

## 12.2. Основные векторные величины, характеризующие электромагнитное поле

Электромагнитное поле обладает характерными для него электрическими и магнитными свойствами, доступными наблюдению. Силовое воздействие поля на электрические заряды и токи положено в основу определения основных векторных величин, которыми характеризуют поле: напряженности электрического поля  $\vec{E}$  и индукции магнитного поля  $\vec{B}$ .

**Вектор напряженности электрического поля** –  $\vec{E}$ . Напряженность электрического поля равна пределу отношения силы, действующей со стороны поля на внесенный в него точечный заряд, к величине заряда, когда последний стремится к нулю:

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q}.$$

Точечным зарядом называют такое заряженное тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстоянием до исследуемой точки, в которую помещено это тело (точки наблюдения), причем величина точечного заряда не искажает картины поля. Электростатическое поле одиночного заряда показано на [рис. 12.1, а](#).

Если заряд неподвижен и равен 1, то в этом случае напряженность равна силе:  $\vec{E} = \vec{F}$ , так как по модулю  $F = qE$ . Направление вектора  $\vec{E}$  совпадает с направлением силы, действующей на неподвижный положительный точечный заряд. Электрическое поле зарядов можно представить графически с помощью силовых линий поля – это не реальные, а условные линии, касательные к которым в каждой точке поля совпадают с вектором  $\vec{E}$ , а поскольку вектор  $\vec{E}$  имеет вполне определенное направление, то через каждую точку поля можно провести только одну силовую линию.



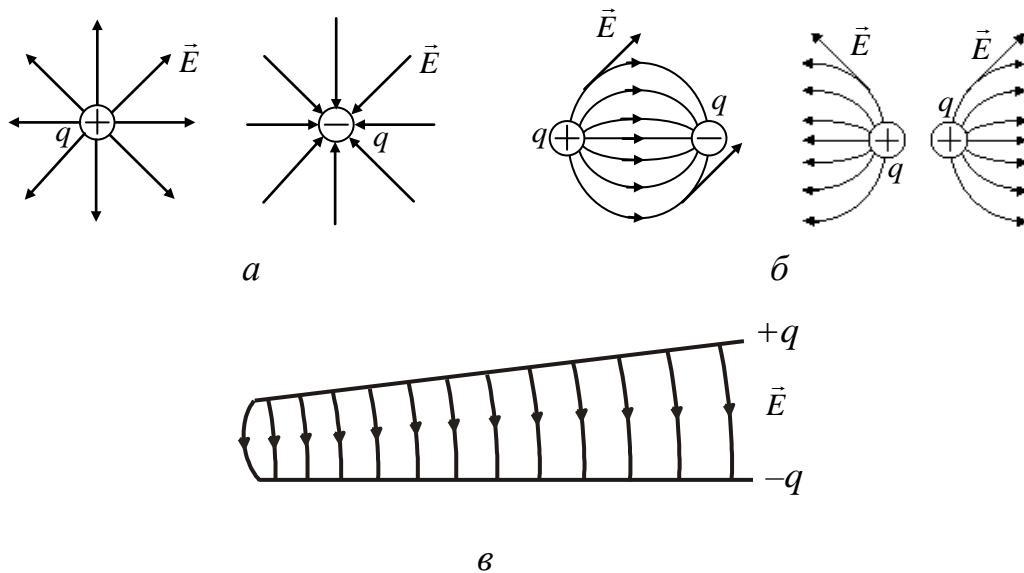


Рис. 12.1

Если поле создается несколькими зарядами ( $q_1, q_2, q_3, \dots$ ), то его напряженность равна геометрической сумме напряженностей от каждого из зарядов в отдельности:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots$$

Это значит, что при расчете электрического поля применим метод наложения.

Напряженность  $\vec{E}$  – силовая характеристика электрического поля. Силовые линии имеют начало (на положительных зарядах) и конец (на отрицательных зарядах). На [рис. 12.1, б](#) представлены картины электромагнитного поля разноименных и одноименных зарядов. На [рис. 12.1, в](#) представлено поле двух разноименно заряженных пластин.

$$[E] = \frac{[F]}{[q]} = \frac{H}{\text{Кл}} = \frac{\text{А}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{м}} = \frac{\text{В}\cdot\text{А}\cdot\text{с}}{\text{м}\cdot\text{А}\cdot\text{с}} = \frac{\text{В}}{\text{м}}$$

**Уравнение силовой линии поля.** Из определения силовой линии следует, что  $d\vec{l}$  совпадает с направлением вектора  $\vec{E}$  или его составляющие по осям координат  $dx, dy, dz$  пропорциональны проекциям  $E_x, E_y, E_z$  вектора  $\vec{E}$  на соответствующие оси ([рис. 12.2](#) – правоходовая система координат).

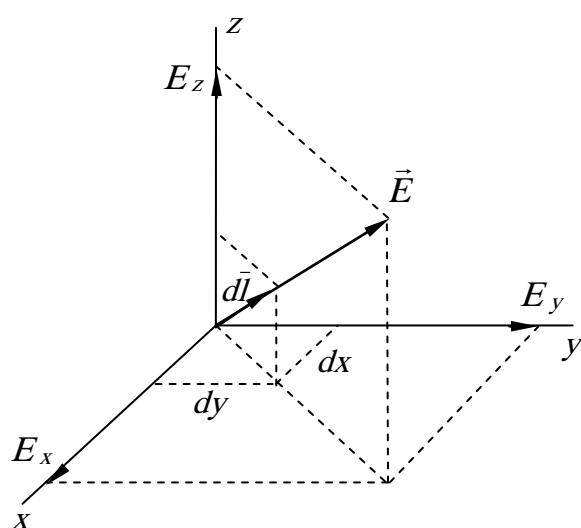


Рис. 12.2

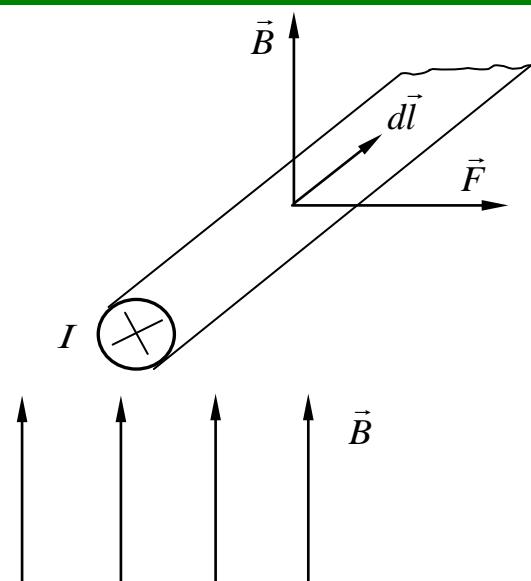


Рис. 12.3

Это следует из подобия соответствующих треугольников  $\frac{E_x}{E_y} = \frac{dx}{dy}$  и  $\frac{E_y}{E_z} = \frac{dy}{dz}$  или  $\frac{E_x}{E_z} = \frac{E_y}{dy} = \frac{E_z}{dz}$ . Это и есть уравнение силовой линии в декартовой системе координат.

**Вектор магнитной индукции  $\vec{B}$ .** Его определяют из силового воздействия магнитного поля на движущийся заряд или проводник с током (рис. 12.3). Опытным путем установлено, что  $\Delta\vec{F} = q[\vec{r}_0 \vec{B}]$  либо  $\Delta\vec{F} = I[\vec{dl} \vec{B}]$ . В однородном поле  $\vec{B} = \text{const}$ . Если проводник с током расположен перпендикулярно к линиям поля, то

$$\Delta F = I \Delta l B \sin 90^\circ = I \Delta l B.$$

Размерность

$$[B] = \frac{[F]}{[I \cdot l]} = \frac{\text{Н}}{\text{Ам}} = \frac{\text{Дж/м}}{\text{А} \cdot \text{м}} = \frac{\text{ВАс}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} = \text{Тл.}$$

Магнитная индукция (как и вектор  $\vec{E}$ ) – силовая характеристика магнитного поля, численно равная силе, действующей на единицу длины проводника, ток в котором равен 1 А.

Магнитные силовые линии поля всегда замкнуты (рис. 12.4) в отличие от силовых линий электрического поля, которые начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах.

**Вектор электрического смещения  $\vec{D}$ , вектор напряженности маг-**

нитного поля  $\vec{H}$ . Для вакуума справедливы соотношения:

$$\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E} \text{ и } \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H},$$

где  $\epsilon_0 = 8,856 \cdot 10^{-12} \text{ О}^{-1}\text{м}^{-1}$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ А}^{-1}\text{м}^{-1}$  – электрическая и магнитная постоянные.

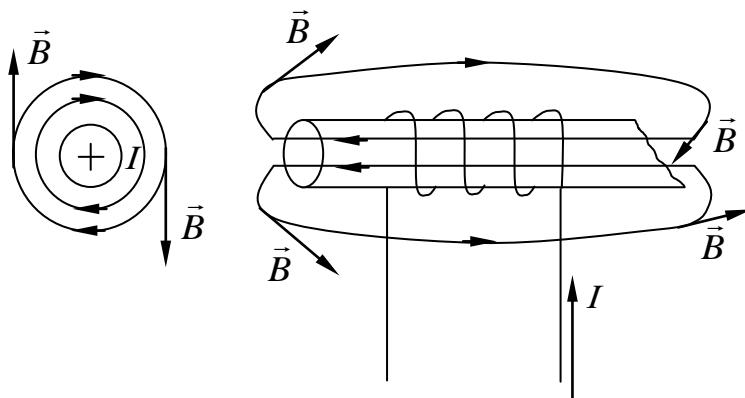


Рис. 12.4

Векторы  $\vec{D}_0$  и  $\vec{H}$  эквивалентны векторам  $\vec{E}$  и  $\vec{B}_0$  для вакуума и также служат силовыми характеристиками электрического и магнитного полей.

Если в электромагнитном поле  $\vec{E} \neq 0$ , а  $\vec{H} = 0$ , то говорят об электрическом поле; если же  $\vec{E} = 0$ , а  $\vec{H} \neq 0$ , то поле называют магнитным. В общем случае электромагнитное поле является наложением электрического и магнитного полей.

### 12.3. Две теории электричества

До того как Максвелл записал свои великие уравнения, существовали две теории электричества: теория силовых линий Фарадея и теория, разработанная великими французами Кулоном, Ампером, Био, Саваром, Араго и Лапласом. Исходная точка французов – представление о так называемом дальнодействии, мгновенном действии одного тела на другое на расстоянии без помощи какой-либо промежуточной среды.

Ярый защитник теории дальнодействия Шарль Огюстен Кулон в начале своей научной деятельности создал крутильные весы, на которых он изучал силу взаимодействия двух электрических зарядов.

Результат был поразителен: сила взаимодействия зарядов в пустоте, точно так же, как и ньютоновская сила тяготения, зависела лишь от величины зарядов и расстояний между ними. Пустота, находившаяся между зарядами, по мнению Кулона, никаким образом не входила в формулу, что вполне справедливо, так как там «ничего не было». И никакого механизма передачи от первого заряда к некоторому участку пространства, затем к другому, третьему

и так до второго заряда, – механизма, который неизбежно потребовал бы некоторого времени для передачи усилий, представить себе было невозможно.

Поэтому Кулон был твердо убежден, что промежуточная среда во взаимодействии участия не принимает, взаимодействие происходит на расстоянии без ее участия и, следовательно, мгновенно. Это утвердило французских физиков в справедливости концепции мгновенного дальнодействия.

Теории великих французов были прекрасно математически обработаны и, в общем, выстраивались в довольно изящную и цельную теорию.

Воззрения Фарадея в корне расходились с такими представлениями. Он не был силен в математике. По словам Эйнштейна, это был «ум, который никогда не погрязал в формулах».

Фарадей считал, что материя не может действовать там, где ее нет. Следовательно, область действия зарядов должна быть заполнена материей. Среду, через которую передается воздействие, Фарадей назвал полем. Поле, считал он, пронизано магнитными и электрическими силовыми линиями.

Увидеть силовые линии, по Фарадею, очень просто. Например, чтобы увидеть магнитные силовые линии, достаточно насыпать железные опилки на бумагу и поднести снизу магнит. Электрические силовые линии можно «увидеть», если продолговатые кристаллики какого-то диэлектрика (например, хинина) взболтать в вязкой жидкости (например, в касторовом масле).

Силовые линии одновременно определяют направление и величину силы, действующей на заряд.

«Фарадей, – писал Максвелл, – своим мысленным оком видел силовые линии, пронизывающие все пространство. Там, где математики видели центры напряжения сил дальнодействия, Фарадей видел промежуточный агент. По профессии он не был математиком. В его описаниях мы не находим тех дифференциальных и интегральных уравнений, которые многим кажутся подлинной сущностью точной науки. Откройте труды Пуассона или Ампера, вышедшие до Фарадея, или Вебера и Неймана, которые работали после него, и вы увидите, что каждая страница пестрит формулами, ни одну из которых Фарадей не понял бы».

Но внешняя простота фарадеевского труда была обманчивой. Например, известный немецкий физик Гельмгольц вспоминал, как он «часами высиживал, застряв на описании силовых линий, их числа и напряжения».

«Когда я стал углубляться в изучение работ Фарадея, – писал Максвелл, – я заметил, что метод его понимания тоже математичен, хотя и не представлен в условной форме математических символов. Я также нашел, что метод может быть выражен в обычной математической форме и таким образом может быть сопоставлен с методами признанных математиков».

## 12.4. Рождение великих уравнений Максвелла

Итак, Максвелл присоединился к фарадеевской концепции поля. Он видел, что Фарадей постепенно отходит от силовых линий как геометриче-

ских символов к вполне реальным силовым линиям, обладающим, например, упругостью, стремящимся пойти по кратчайшему пути, отталкивающимся друг от друга.

Максвеллу нравилось, что Фарадей признавал рациональное зерно, имеющееся в работах чуждых ему по духу и манере исследователей, например, Ампера. Так, он целиком принимал идею кругового магнитного поля, окружающего провод с электрическим током. Максвелл записал этот тезис в форме уравнения

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j},$$

где  $\vec{H}$  – вектор напряженности магнитного поля;

$\vec{j}$  – вектор плотности электрического тока;

$c$  – некоторая постоянная.

Обозначение rot – сокращение от слова rotor – вихрь (Максвелл использовал слово curl – завиток); операция rot, грубо говоря, показывает в данном случае, что вектор напряженности магнитного поля вращается вокруг вектора тока плотностью  $\vec{j}$ .

Другой, сразу же завоевавшей признание Максвелла идеей стало представление Фарадея о природе электромагнитной индукции, т. е. возникновении электричества в контуре, число магнитных силовых линий в котором изменяется то ли вследствие относительного движения контура и магнита, то ли вследствие изменения магнитного поля. Эта зависимость также вполне укладывалась во внешне формальные математические операции. После многолетних трудов Максвелл записал:

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

где  $\vec{E}$  – вектор электрического поля;

$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  – изменение магнитного поля во времени;

$c$  – некоторая неизвестная постоянная величина на момент написания уравнения.

Формула настолько физически прозрачна, что ей тоже можно, при известном упрощении, придать ясный смысл.

Операция означает вращение вектора  $\vec{E}$ , охват им некоторого источника, которым в данном случае является изменение магнитного поля  $\vec{B}$ . В контуре, охватывающем источник изменяющегося магнитного поля, наведется электродвижущая сила, а в пространстве возникнет новое электрическое поле. Минус перед правой частью тоже вполне физически обоснован – законом, открытым русским физиком Э. Х. Ленцем: направление тока, возникающего



в замкнутом контуре в результате электромагнитной индукции, таково, что ток препятствует изменению магнитного потока.

Но необходимо учесть еще одно важное свойство векторов электрической и магнитной индукций  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , представляющих собой математическое обозначение электрических и магнитных силовых линий. В то время как электрические силовые линии начинаются на зарядах, являющихся источниками поля, магнитные силовые линии располагаются кольцеобразно. А у кольца, как известно, «нет ни начала, ни конца», следовательно, силовые линии магнитного поля не могут где-то начинаться, где-то кончаться – они замкнуты сами на себя. В математике для обозначения ситуации с источниками поля можно применить операцию «дивергенция» (Максвелл использовал слово «конвергенция»).

Дивергенция – мера источника. Например, свеча – источник света – обладает положительной дивергенцией. Ночной мрак, где свет рассеивается, поглощается, обладает отрицательной дивергенцией. Для абсолютно прозрачного стекла, где свет не создается и не поглощается, дивергенция равна нулю.

Поэтому Максвелл дописал к двум имеющимся уравнениям еще два:

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \text{ где } \rho \text{ – плотность электрических зарядов;}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0.$$

Физический смысл уравнений понятен.

Силовые линии электрического поля кончаются на зарядах, плотность которых  $\rho$ .

Силовые линии магнитного поля не кончаются нигде – они замкнуты сами на себя.

Входящие в эти уравнения векторы электрической и магнитной индукции ( $\vec{D}$  и  $\vec{B}$ ) и векторы напряженностей электрического и магнитного полей ( $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ ) связаны соотношениями:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \text{ и } \vec{B} = \mu \vec{H},$$

где  $\epsilon$  – диэлектрическая постоянная среды,

$\mu$  – магнитная проницаемость среды.

Эти четыре уравнения и составляют «великие уравнения Максвелла», а система взглядов, которая легла в основу уравнений, получила название «максвелловой теории электромагнитного поля».

Уравнения были просты, но чем больше Максвелл и его последователи над ними работали, тем больший внутренний смысл находили в четырех строчках. Генрих Герц, знаменитый немецкий физик, роль которого в истории – доказать полную справедливость представлений Максвелла, писал о неисчерпаемости теории: «нельзя изучить эту удивительную теорию, не ис-



пытывая по временам такого чувства, будто математические формулы живут собственной жизнью, обладают собственным разумом; кажется, что эти формулы умнее нас, умнее даже самого автора, как будто они дают нам больше, чем в свое время было в них заложено».

Теория Максвелла – триумф идей Фарадея. Максвелл, по выражению Миликена, «облек плебейски обнаженные представления Фарадея в аристократические одежды математики».

Замечание Герца о самостоятельной жизни уравнений Максвелла и о том, «что они умнее самого автора», стали подтверждаться сразу же после того, как Максвелл начал изучать свою систему уравнений.

Все величины в уравнении были ясны, кроме  $c$ . Применив уравнения к одному конкретному случаю, Максвелл определил, что  $c = 300000$  км/с. Совпадение было слишком разительным, чтобы не принять его во внимание.

Согласно первому уравнению любой ток вызовет возникновение магнитного поля в окружающих областях пространства. Постоянный ток, например, вызовет возникновение вокруг него постоянного магнитного поля. Такое поле, однако, не сможет вызвать электрического поля в «следующих» областях, поскольку электрическое поле, согласно второму уравнению, возникает лишь при изменяющемся магнитном поле.

Но картина иная, если первоначальный ток – переменный. Вокруг переменного тока создается переменное магнитное поле, способное уже создать в «следующем» элементе пространства электрическое поле; то, в свою очередь, за счет «тока смещения» создает новое магнитное поле, а оно точно так же создаст еще дальше поле электрическое. И так будет продолжаться до бесконечности.

Другими словами, электромагнитное поле, как с поразительной ясностью понял Максвелл, распространяется в виде волны, причем волны незатухающей – энергия магнитного поля в пустоте полностью переходит в энергию поля электрического, и наоборот.

Но ведь в виде точно таких «поперечных» волн распространяется и свет. И Максвелл сделал два далеко идущих вывода.

Электромагнитное поле распространяется в пространстве в виде поперечных волн, а также, что «свет есть электромагнитное возмущение». Электромагнитные волны распространяются в пространстве со скоростью света. Признание конечной, хотя и очень большой, скорости распространения электричества и магнетизма камня на камне не оставило от теории «мгновенного дальнодействия».

Предсказание Максвелла намного опередило свое время. Но он не мог знать, что Фарадей еще в 1832 г. оставил в архивах королевского общества запечатанный конверт с завещанием и просьбой открыть последний через 100 лет после его смерти. И вот в присутствии многих ученых Англии в 1936 г. конверт был вскрыт и слова, которые были написаны на пожелтевшем листе, потрясли всех: выяснилось, что Фарадей ясно представлял волновую природу распространения электромагнитных колебаний в пространстве с некоторой



скоростью. «Я полагаю, что распространение магнитных сил от полюса похоже на колебания взволнованной водной поверхности. По аналогии я считаю возможным применить теорию колебаний к распространению электрической индукции», – писал Фарадей на основании далеко идущих аналогий между электромагнитной индукцией, светом и звуком.

Фарадей – гениальный английский физик-экспериментатор. Сын кузнеца, он не обладал блестящими знаниями, но его великолепные эксперименты и проницательный ум позволили ему сделать много таких изобретений, каждое из которых могло обессмертить его имя.

Фарадейставил множество опытов. О его работоспособности говорит хотя бы тот факт, что дневник, куда он заносил свои опыты, обрывается на 16041-м опыте, за 44 года – каждый день по опыту.

## 12.5. Основные уравнения

В общем случае изменяющихся во времени зарядов, изменяющихся во времени токов, движущихся заряженных или намагниченных тел или движущихся контуров с токами в окружающем их пространстве существует переменное электромагнитное поле.

Ограничимся рассмотрением электромагнитного поля (ЭМП) в неподвижных однородных и изотропных средах. Для исследования такого поля необходимо обратиться к полной системе уравнений ЭМП:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{\delta} = \gamma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \text{div} \vec{D} = \rho; \quad \text{div} \vec{B} = 0; \quad \text{div} \vec{\delta} = 0,$$

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_a \vec{H}; \quad \vec{\delta} = \gamma \vec{E}.$$

Эта система уравнений охватывает все электромагнитные процессы.

Физический смысл основных уравнений ЭМП заключается в том, что магнитное поле всегда вихревое и возбуждается как движущимися зарядами, так и изменяющимся во времени электрическим полем. Электрическое поле может быть вихревым, когда оно возбуждается изменяющимся магнитным полем и безвихревым, когда оно возбуждается постоянными зарядами. Электрические и магнитные поля связаны между собой непрерывным преобразованием и представляют собой различные проявления единого электромагнитного поля, которое находится в движении.

## 12.6. Поверхностный эффект (ПЭ)

Проникая извне в проводящую среду, ЭМВ очень быстро затухает. Наружные слои экранируют глубинные слои от проникновения поля. Это явление называют поверхностным эффектом или скин-эффектом.



Кроме того, из теории переменных токов известно, что ток в цилиндрическом проводнике, распределяется по сечению проводника неравномерно, причем плотность тока в центральных частях сечения имеет меньшее значение, чем на поверхности проводника и вблизи от нее. С возрастанием частоты степень неравномерности увеличивается. Наличие поверхностного эффекта приводит к тому, что значительная часть провода оказывается слабо использованной для протекания тока, а при резко выраженном ПЭ и вообще не использованной. При этом уменьшается эффективное сечение провода и его активное сопротивление возрастает.

Как известно, ток тождествен магнитному потоку. Поэтому при ПЭ уменьшается магнитный поток внутри провода, а это ведет к уменьшению индуктивности провода.

Наличие ПЭ приводит к увеличению активного и уменьшению индуктивного сопротивлений проводов. Первое – результат не полного использования током сечения проводов. Второе связано с ослаблением магнитного поля в теле проводов и уменьшением внутренней индуктивности ( $L_{\text{внутр}}$ ) контуров.

## 12.7. Поверхностный эффект в массивных проводах из ферромагнитного материала

Все полученные ранее соотношения предполагают, что магнитная проницаемость среды постоянна. Для проводов из ферромагнитного материала это условие не выполняется. Магнитная проницаемость ферромагнитных веществ зависит от напряженности магнитного поля. Поэтому величина  $\mu$  в каждой точке среды изменяется в течение периода изменения напряженности поля. Величина  $H_m$  убывает по мере удаления от поверхности провода вглубь его. Поэтому, если амплитуда напряженности поля  $H_m$  на поверхности имеет достаточно большое значение, то  $\mu$  сначала растет по мере удаления от поверхности вглубь провода, а затем, достигнув максимума, убывает (рис. 12.5, а). Возрастание  $\mu$  приводит к более резкому проявлению поверхностного эффекта.



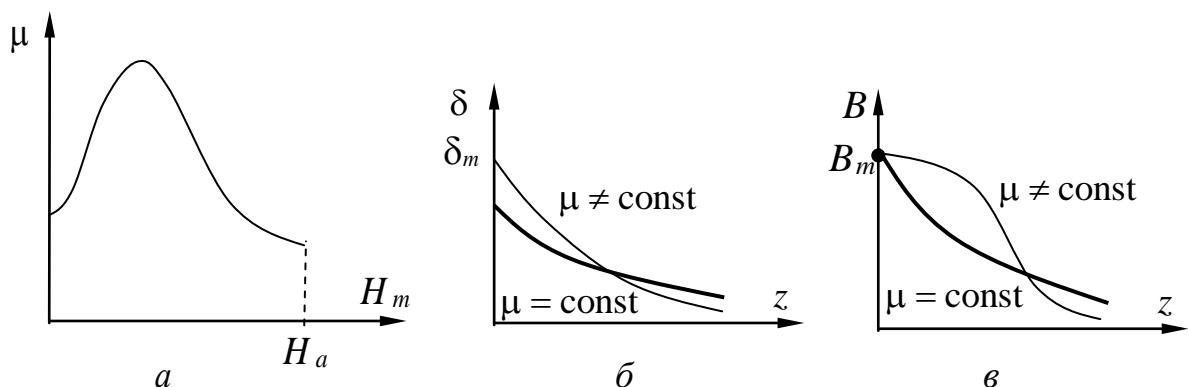


Рис. 12.5

Амплитуда плотности тока  $\delta_m$  зависит от координаты  $z$  иначе, чем при  $\mu = \text{const}$ . Эта зависимость представлена на [рис. 12.5, б](#). При этом  $z$  есть расстояние от поверхности ферромагнитной среды, отсчитываемое вглубь нее. Кривые построены при одинаковых значениях тока в обоих случаях. Амплитуда магнитной индукции при  $\mu \neq \text{const}$  вначале медленно убывает за счет явления насыщения, а затем резко падает до нуля ([рис. 12.5, в](#)).

Непостоянство  $\mu$  и связанное с ним быстрое затухание волны ведет к увеличению активного сопротивления провода. Активное сопротивление провода также растет за счет потерь от гистерезиса. В этом случае активное сопротивление провода определяют по выражению, полученному Л. Р. Нейманом:

$$r = 1,4 \frac{l}{u} \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2\gamma}} = \frac{l}{u} \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{\gamma}},$$

$$x_{\text{ак.одд}} = 0,6 r,$$

где  $\mu_a$  – значение абсолютной магнитной проницаемости на поверхности провода, определяемое по основной кривой намагничивания по действующему значению напряженности магнитного поля на поверхности провода,  $u$  – периметр сечения провода.

Величина действующего значения напряженности на поверхности провода по закону полного тока:  $H_{\text{дейст}} = \frac{I}{u}$ .

## 12.8. Эффект близости

Если в непосредственной близости друг от друга расположены несколько проводников с переменным током, то каждый из проводников находится не только в собственном переменном магнитном поле, но и в магнитном поле дру-

гих проводников. Это приводит к тому, что распределение переменного тока в каждом проводнике будет отличным от случая, если бы этот проводник был единственным. Этот эффект называют эффектом близости. Он приводит к дополнительному увеличению активного сопротивления проводников.

## 12.9. Графическое изображение электростатического поля

Электростатическое поле можно характеризовать совокупностью силовых и эквипотенциальных линий ([рис. 12.6](#)). Силовая линия – это мысленно проведенная в поле линия, начинающаяся на положительно заряженном теле и заканчивающаяся на отрицательно заряженном теле. Силовую линию проводят таким образом, что касательные к ней в любой точке совпадают с вектором напряженности поля  $\vec{E}$  в этой точке. Так как в каждой точке поля вектор  $\vec{E}$  имеет определенное направление, то через каждую точку поля можно провести только одну силовую линию.

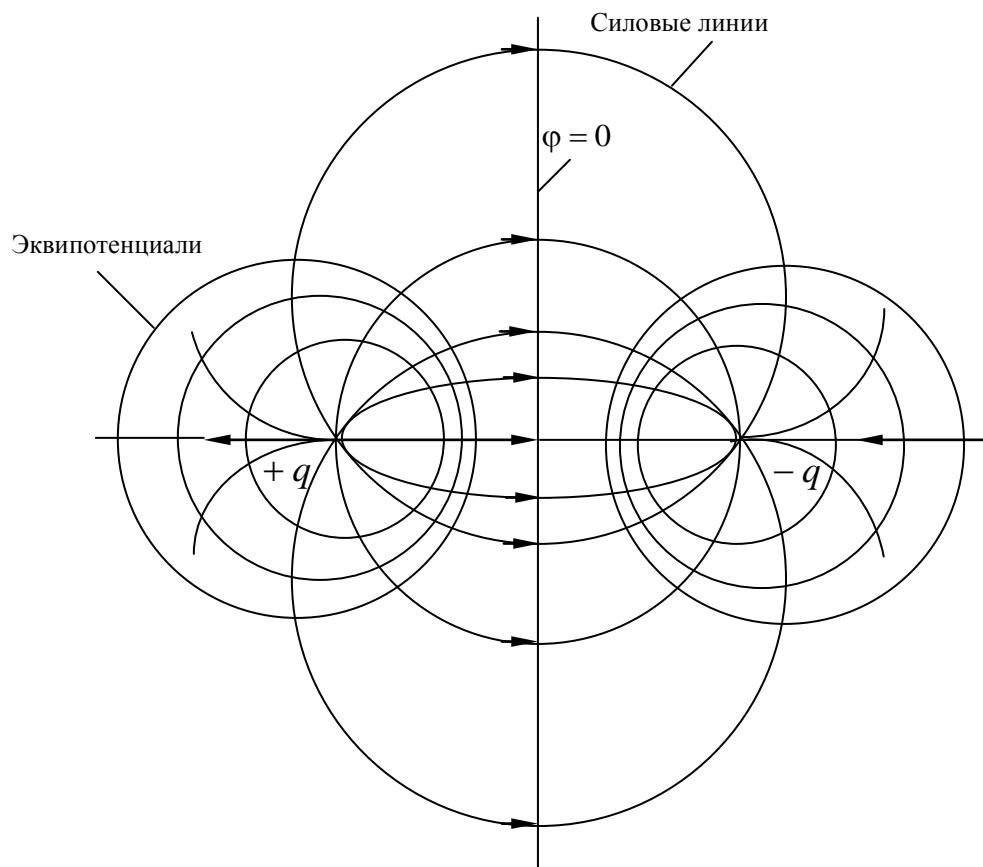


Рис. 12.6

В электростатическом поле можно провести эквипотенциальные поверхности, т. е. поверхности, потенциалы всех точек которых равны  $\phi(x, y, z) = \text{const}$  (уравнение эквипотенциальной поверхности). Если такую поверхность рассечь плоскостью, то след от сечения даст эквипотенциаль-

ную линию. При перемещении по эквипотенциальной линии в любом направлении потенциал остается неизменным.

Эквипотенциали и силовые линии (см. [рис. 12.6](#)) пересекаются под прямым углом. Силовые линии не могут быть замкнутыми сами на себя, так как нельзя совместить положительный и отрицательный заряды. Эквипотенциали же - замкнутые на себе линии. Там, где напряженность электростатического поля больше, эквипотенциальные линии расположены гуще.

Если рассмотреть проводник в электростатическом поле, то неподвижные свободные заряды одного и того же знака расположены по поверхности проводника ввиду сил отталкивания. Таким образом, объемная плотность заряда в толще проводника равна нулю, т. е.  $\rho = 0$ . Внутри проводника электростатическое поле существовать не может:  $\vec{E} = 0$ . В противном случае возник бы ток проводимости, т. е. движение свободных зарядов под действием сил поля. Ток проводимости существовал бы до тех пор, пока не произошло бы такое перераспределение зарядов, при котором величина напряженности электрического поля во всех точках внутри проводника упала бы до нуля.

## 12.10. Электростатическое экранирование

Представим себе полость  $A$ , окруженную со всех сторон проводником ([рис. 12.7](#)). Как бы ни был заряжен проводник и в каком бы внешнем электростатическом поле он ни находился, электростатическое поле в полости  $A$  существовать не может, так как поверхность проводника всегда эквипотенциальна. Линии вектора  $\vec{E}$  не могут начинаться и заканчиваться на такой поверхности, так как это соответствовало бы наличию ротора у электростатического поля, т. е.  $\text{rot} \vec{E} \neq 0$ , но так как электростатическое поле безвихревое, то всегда  $\text{rot} \vec{E} = 0$ .

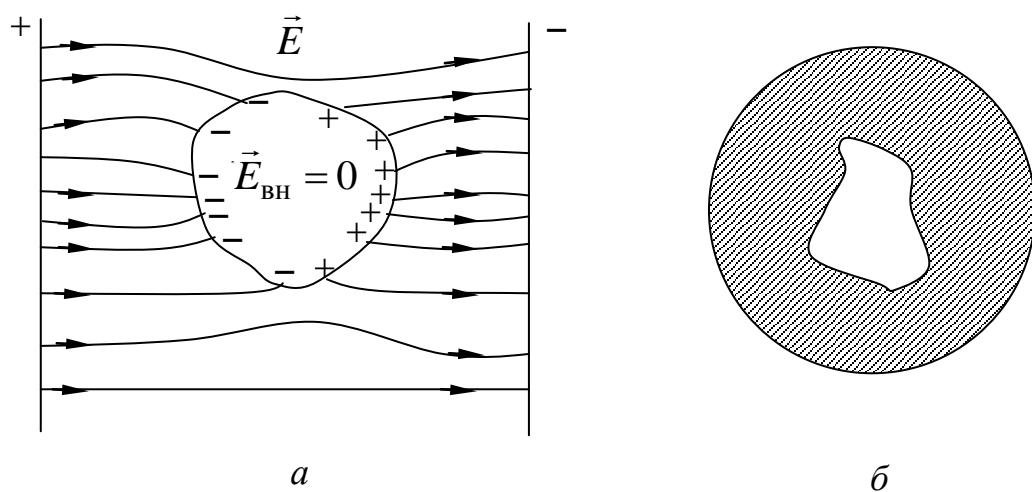


Рис. 12.7

Не могут существовать и линии поля, входящие с поверхности проводника и заканчивающиеся где-то в полости  $A$ , так как внутри проводника  $\rho = 0$ , а значит  $q = 0$ , т. е. там нет зарядов, следовательно, и нет дивергенции вектора  $\vec{E}$ .

Поэтому возможно электростатическое экранирование приборов в электростатических полях. Практически достаточно окружить защищаемый объем металлической сеткой.



## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Дисциплина «Теоретические основы электротехники» дает студенту знания по качественным и количественным соотношениям для электромагнитных явлений и процессов и намечает основные пути для решения задач, которые ставят специальные электротехнические дисциплины.

Качественные и количественные стороны исследуемых электромагнитных явлений и процессов находятся в неразрывной связи. Поэтому изучение теоретических основ электротехники в высшей школе основывается на знаниях, полученных из курсов физики и математики, которые расширяются и развиваются в направлении разработки методов анализа, расчета и экспериментального исследования явлений и процессов, наблюдающихся в электрических цепях и в электромагнитных полях.

В учебном пособии рассмотрены переходные процессы, нелинейные электрические и магнитные цепи при постоянных и синусоидальных воздействиях, а также пассивные четырехполюсники.

В заключение отметим перспективы развития дисциплины и методики ее преподавания. Использование вычислительной техники помогает применять новые методы расчетов электрических цепей, например методы расширенных узловых уравнений, переменных состояния и т. д.

Применение компьютера в процессе обучения позволяет создавать методические пособия на электронных носителях. В них возможно использование навигации, оперативно предоставляющей требуемые материалы, обращение за помощью в случае необходимости. Такие пособия удобно использовать при дистанционном образовании.

Данное учебное пособие можно рекомендовать для всех существующих форм обучения.



## **БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Основы теории цепей / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – М.: Энергоатомиздат, 1989.
2. Теоретические основы электротехники: учебник для вузов: в 3 т. / К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин, В. Л. Чечурин. – М. : Питер, 2003.
3. Шебес, М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – М. : Высш. шк., 1990.

