

ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ И ДИАГНОСТИКА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

ВВЕДЕНИЕ

Четырехполюсник. Четырехполюсник — устройство, подключенное к остальным участкам цепи двумя парами выводов (рис. 5.1): первичных $1—1'$ и вторичных $2—2'$.

Если все внешние подцепы с парными выводами подключаются только к одноименным выводам ($1—1'$ и/или $2—2'$), то четырехполюсник называют проходным. В данной главе рассматриваются только проходные четырехполюсники. Если четырехполюсник не содержит зависимых или независимых источников энергии, то его называют пассивным, в противном случае — активным. Активные четырехполюсники принято подразделять на автономные, т.е. содержащие независимые источники ЭДС и тока, и неавтономные, содержащие только зависимые источники.

Уравнения неавтономных активных и пассивных проходных четырехполюсников. Под такими уравнениями понимаются аналитически записанные связи между четырьмя переменными: двумя токами и двумя напряжениями со стороны первичных и вторичных узлов. Наиболее часто используют уравнения типа A, Y, Z, H, G (табл. 5.1). Матричной форме записи уравнений типа \underline{Y} и \underline{Z} можно придать более компактный вид

$$\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{Y}}\underline{\mathbf{U}} \text{ и } \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{Z}}\underline{\mathbf{I}},$$

где $\underline{\mathbf{I}} = [\underline{I}_1, \underline{I}_2]^T$, $\underline{\mathbf{U}} = [\underline{U}_1, \underline{U}_2]^T$. Обратим внимание, что в уравнении типа A вместо тока \underline{I}_2 используется противоположный ему по направлению ток $\underline{I}'_2 = -\underline{I}_2$.

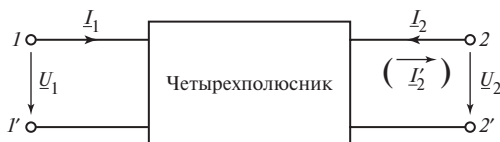


Рис. 5.1

Таблица 5.1

Тип уравнения	Вид уравнения	Матричная запись уравнения
A	$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}'_2$ $\underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}'_2$	$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$
Y	$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2$ $\underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2$	$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{Y}} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}$
Z	$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2$ $\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2$	$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{Z}} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$
H	$\underline{U}_1 = \underline{H}_{11}\underline{I}_1 + \underline{H}_{12}\underline{U}_2$ $\underline{I}_2 = \underline{H}_{21}\underline{I}_1 + \underline{H}_{22}\underline{U}_2$	$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{H}} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix}$
G	$\underline{I}_1 = \underline{G}_{11}\underline{U}_1 + \underline{G}_{12}\underline{I}_2$ $\underline{U}_2 = \underline{G}_{21}\underline{U}_1 + \underline{G}_{22}\underline{I}_2$	$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{G}} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}$

Первичные параметры неавтономных четырехполюсников. Коэффициенты уравнений четырехполюсника (см. табл. 5.1) A_{ij} , Y_{ij} , Z_{ij} , H_{ij} , G_{ij} , где $i, j = 1, 2$, называются его первичными параметрами. Связь между различными типами первичных параметров определяется соотношениями, представленными в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Тип уравнения	A	Y	Z	H	G
A	$\underline{A}_{11} \quad \underline{A}_{12}$ $\underline{A}_{21} \quad \underline{A}_{22}$	$-\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} \quad -\frac{1}{\underline{Y}_{21}}$ $-\frac{\underline{\Delta}_Y}{\underline{Y}_{21}} \quad -\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}}$	$\frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} \quad \frac{\underline{\Delta}_Z}{\underline{Z}_{21}}$ $\frac{1}{\underline{Z}_{21}} \quad \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}}$	$-\frac{\underline{\Delta}_H}{\underline{H}_{21}} \quad -\frac{\underline{H}_{11}}{\underline{H}_{21}}$ $-\frac{\underline{H}_{22}}{\underline{H}_{21}} \quad -\frac{1}{\underline{H}_{21}}$	$\frac{1}{\underline{G}_{21}} \quad \frac{\underline{G}_{22}}{\underline{G}_{21}}$ $\frac{\underline{G}_{11}}{\underline{G}_{21}} \quad \frac{\underline{\Delta}_{H'}}{\underline{G}_{21}}$
Y	$\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{12}} \quad -\frac{\underline{\Delta}_A}{\underline{A}_{12}}$ $-\frac{1}{\underline{A}_{12}} \quad \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{12}}$	$\underline{Y}_{11} \quad \underline{Y}_{12}$ $\underline{Y}_{21} \quad \underline{Y}_{22}$	$\frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{\Delta}_Z} \quad -\frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{\Delta}_Z}$ $-\frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{\Delta}_Z} \quad \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{\Delta}_Z}$	$\frac{1}{\underline{H}_{11}} \quad -\frac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{11}}$ $\frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11}} \quad \frac{\underline{\Delta}_H}{\underline{H}_{11}}$	$\frac{\underline{\Delta}_G}{\underline{G}_{22}} \quad \frac{\underline{G}_{12}}{\underline{G}_{22}}$ $-\frac{\underline{G}_{21}}{\underline{G}_{22}} \quad \frac{1}{\underline{G}_{22}}$

Тип уравнения	A	Y	Z	H	G
Z	$\frac{A_{11}}{A_{21}} \quad \frac{\underline{A}_A}{A_{21}}$ $\frac{1}{A_{21}} \quad \frac{A_{22}}{A_{21}}$	$\frac{Y_{22}}{\Delta_Y} \quad \frac{Y_{12}}{\Delta_Y}$ $\frac{Y_{21}}{\Delta_Y} \quad \frac{Y_{11}}{\Delta_Y}$	$\underline{Z}_{11} \quad \underline{Z}_{12}$ $\underline{Z}_{21} \quad \underline{Z}_{22}$	$\frac{\Delta_H}{H_{22}} \quad \frac{H_{12}}{H_{22}}$ $\frac{H_{21}}{H_{22}} \quad \frac{1}{H_{22}}$	$\frac{1}{G_{11}} \quad \frac{G_{12}}{G_{11}}$ $\frac{G_{21}}{G_{11}} \quad \frac{\Delta_G}{G_{11}}$
H	$\frac{A_{12}}{A_{22}} \quad \frac{\underline{A}_A}{A_{22}}$ $\frac{1}{A_{22}} \quad \frac{A_{21}}{A_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}} \quad \frac{Y_{12}}{Y_{11}}$ $\frac{Y_{21}}{Y_{11}} \quad \frac{\Delta_Y}{Y_{11}}$	$\frac{\Delta_Z}{Z_{22}} \quad \frac{Z_{12}}{Z_{22}}$ $\frac{Z_{21}}{Z_{22}} \quad \frac{1}{Z_{22}}$	$\underline{H}_{11} \quad \underline{H}_{12}$ $\underline{H}_{21} \quad \underline{H}_{22}$	$\frac{G_{22}}{\Delta_G} \quad \frac{G_{21}}{\Delta_G}$ $\frac{G_{21}}{\Delta_G} \quad \frac{G_{11}}{\Delta_G}$
G	$\frac{A_{21}}{A_{11}} \quad \frac{\underline{A}_A}{A_{11}}$ $\frac{1}{A_{11}} \quad \frac{A_{22}}{A_{11}}$	$\frac{\Delta_Y}{Y_{22}} \quad \frac{Y_{12}}{Y_{22}}$ $\frac{Y_{21}}{Y_{22}} \quad \frac{1}{Y_{22}}$	$\frac{1}{Z_{11}} \quad \frac{Z_{12}}{Z_{11}}$ $\frac{Z_{21}}{Z_{11}} \quad \frac{\Delta_Z}{Z_{11}}$	$\frac{H_{22}}{\Delta_H} \quad \frac{H_{12}}{\Delta_H}$ $\frac{H_{21}}{\Delta_H} \quad \frac{H_{11}}{\Delta_H}$	$\underline{G}_{11} \quad \underline{G}_{12}$ $\underline{G}_{21} \quad \underline{G}_{22}$

Примечание. $\Delta_Y = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$; $\Delta_Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$; $\Delta_A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$; $\Delta_H = H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21}$; $\Delta_G = G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21}$.

В частных случаях связь существует и между параметрами одного типа. Так, поскольку для пассивных четырехполосников выполняется принцип взаимности и число независимых коэффициентов в каждом из перечисленных типов уравнений сокращается до трех, то справедливы соотношения:

$$\underline{A}_A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1;$$

$$Y_{12} = Y_{21}; \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}; \underline{H}_{12} = \underline{H}_{21}; \underline{G}_{12} = \underline{G}_{21}.$$

Для симметричного четырехполосника при взаимной замене первичных и вторичных выводов не меняется режим работы внешней цепи. Дополнительно имеют место соотношения:

$$A_{11} = A_{22}; Y_{11} = Y_{22}; Z_{11} = Z_{22};$$

$$\Delta_H = H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21} = 1; \Delta_G = G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21} = 1.$$

Входные сопротивления четырехполюсника. Входные сопротивления четырехполюсника со стороны первичных выводов при нагрузке $\underline{Z}_{2н}$ (рис. 5.2, а)

$$\underline{Z}_{1вх} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}'_2}{\underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}'_2}.$$

Разделив дробь на \underline{I}'_2 и учитывая, что $\underline{Z}_{2н} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}'_2}$, получим

$$\underline{Z}_{1вх} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_{2н} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{2н} + \underline{A}_{22}}.$$

В случае, когда $\underline{Z}_{2н} = 0$, входное сопротивление называют сопротивлением короткого замыкания четырехполюсника (рис. 5.2, б),

$$\underline{Z}_{1к} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}} = \frac{1}{\underline{Y}_{11}} = \frac{\underline{\Delta}_Z}{\underline{Z}_{22}} = \underline{H}_{11} = \underline{G}_{22}\underline{\Delta}_G, \underline{\Delta}_Z = \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{12}\underline{Z}_{21},$$

а в случае $\underline{Z}_{2н} \rightarrow \infty$ (рис. 5.2, в) входное сопротивление называют сопротивлением холостого хода четырехполюсника,

$$\underline{Z}_{1х} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}} = \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{\Delta}_Y} = \underline{Z}_{11} = \frac{\underline{\Delta}_H}{\underline{H}_{22}} = \frac{1}{\underline{G}_{11}}, \underline{\Delta}_Y = \underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}.$$

Входное сопротивление четырехполюсника со стороны вторичных выводов при нагрузке $\underline{Z}_{1н}$ (рис. 5.3, а)

$$\underline{Z}_{2вх} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{B}_{11}\underline{U}_1 + \underline{B}_{12}\underline{I}'_1}{\underline{B}_{21}\underline{U}_1 + \underline{B}_{22}\underline{I}'_1} = \frac{\underline{B}_{11}\underline{Z}_{1н} + \underline{B}_{12}}{\underline{B}_{21}\underline{Z}_{1н} + \underline{B}_{22}},$$

где
$$\begin{bmatrix} \underline{B}_{11} & \underline{B}_{12} \\ \underline{B}_{21} & \underline{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underline{\Delta}_A} \begin{bmatrix} \underline{A}_{22} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{11} \end{bmatrix}.$$

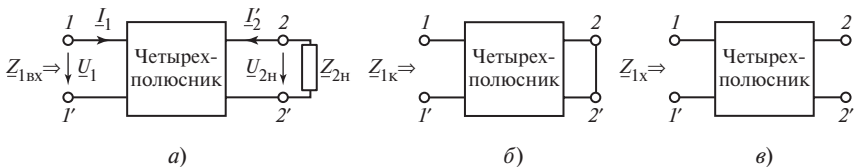


Рис. 5.2

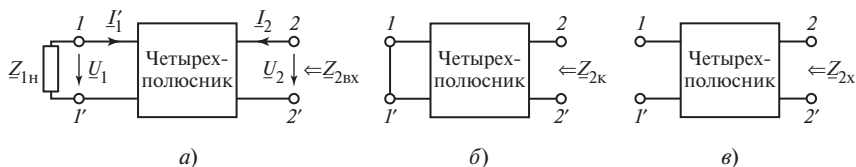


Рис. 5.3

В случае, когда $Z_{1н} = 0$ (рис. 5.3, б), входное сопротивление — это сопротивление короткого замыкания

$$Z_{2к} = \frac{B_{12}}{B_{22}} = \frac{A_{12}}{A_{11}} = Y_{22} = \frac{\Delta_Z}{Z_{11}} = \frac{H_{11}}{\Delta_H} = G_{22},$$

а в случае $Z_{1н} = \infty$ (рис. 5.3, в) входное сопротивление — это сопротивление холостого хода

$$Z_{2х} = \frac{B_{11}}{B_{21}} = \frac{A_{22}}{A_{21}} = \frac{Y_{11}}{\Delta_Y} = Z_{22} = \frac{1}{H_{22}} = \frac{\Delta_G}{G_{11}}.$$

Сопротивления холостого хода и короткого замыкания связаны соотношением

$$\frac{Z_{1к}}{Z_{1х}} = \frac{Z_{2к}}{Z_{2х}}.$$

Вторичные параметры четырехполюсника. Вторичными параметрами четырехполюсника называются его характеристические сопротивления Z_{c1} и Z_{c2} и постоянная передачи \underline{G} . Характеристическими называют входные сопротивления в режиме согласованной нагрузки, когда $Z_{1вх} = Z_{2н}$ и $Z_{2вх} = Z_{1н}$, т.е. $Z_{c1} = Z_{1вх} = Z_{2н}$ и $Z_{c2} = Z_{2вх} = Z_{1н}$. Для симметричного четырехполюсника сопротивление $Z_{c1} = Z_{c2}$ называют просто характеристическим сопротивлением и обозначают Z_c . Постоянной передачи \underline{G} называют безразмерную комплексную величину, характеризующую изменение напряжений и/или токов четырехполюсника в режиме согласованной нагрузки ($Z_{1вх} = Z_{2н}$):

$$\underline{G} = A + jB = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2'} = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2'}.$$

Здесь величину A называют постоянной ослабления, ее единицы: Нп — для натурального логарифма, дБ — для десятичного логарифма:

$$A = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2'} \quad \text{или} \quad A = 10 \lg \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2'},$$

а величину B , определяемую разностью фаз входных ψ_{u_1} и ψ_{i_1} и выходных ψ_{u_2} и ψ_{i_2} напряжений и токов:

$$B = \frac{1}{2}(\psi_{u_1} - \psi_{u_2}) + \frac{1}{2}(\psi_{i_1} - \psi_{i_2})$$

называют постоянной фазы.

Связь первичных и вторичных параметров четырехполюсника. Для симметричного четырехполюсника имеем:

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{12} = \operatorname{ch} \underline{\Gamma}, \underline{A}_{12} = \underline{Z}_c \operatorname{sh} \underline{\Gamma}, \underline{A}_{21} = \operatorname{sh} \underline{\Gamma} / \underline{Z}_c,$$

при этом $\underline{\Gamma} = \ln(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}})$, $\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{A}_{12}/\underline{A}_{21}}$.

Связь вторичных параметров и входных сопротивлений четырехполюсника. Для симметричного четырехполюсника $\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_k \underline{Z}_x}$, $\operatorname{th} \underline{\Gamma} = \sqrt{\underline{Z}_k / \underline{Z}_x}$, при этом $\underline{Z}_k = \underline{Z}_c \operatorname{th} \underline{\Gamma}$, $\underline{Z}_x = \underline{Z}_c \operatorname{cth} \underline{\Gamma}$, где $\underline{Z}_k = \underline{Z}_{1k} = \underline{Z}_{2k}$, $\underline{Z}_x = \underline{Z}_{1x} = \underline{Z}_{2x}$.

Уравнения четырехполюсника в гиперболических функциях. Уравнения симметричного четырехполюсника, выраженные через его вторичные параметры, имеют вид:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{ch} \underline{\Gamma} & \underline{Z}_c \operatorname{sh} \underline{\Gamma} \\ \frac{\operatorname{sh} \underline{\Gamma}}{\underline{Z}_c} & \operatorname{ch} \underline{\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}.$$

Соединения четырехполюсников. Основными типами соединений четырехполюсников являются каскадное (рис. 5.4, а), параллельное (рис. 5.4, б) и последовательное (рис. 5.4, в) соединения. При замене

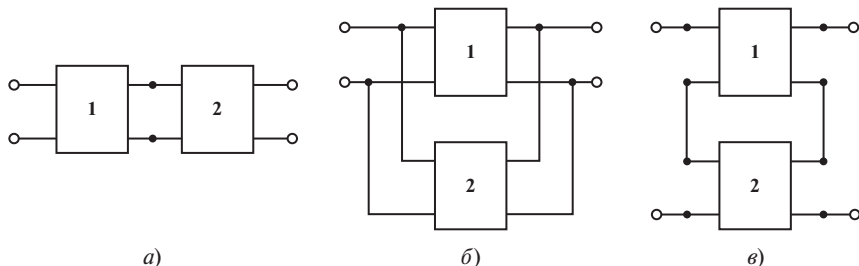


Рис. 5.4

каждого из этих соединений эквивалентным четырехполюсником его параметры могут быть определены как произведение A -параметров ($\underline{A} = \underline{A}_1 \underline{A}_2$) при каскадном, как сумма Y -параметров ($\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$) при параллельном и как сумма Z -параметров ($\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$) при последовательном соединении. Здесь $\underline{A}_i, \underline{Y}_i, \underline{Z}_i, i = 1, 2$, — матрицы соответствующих параметров 1-го и 2-го четырехполюсников.

Последовательность каскадных соединений называют цепной схемой (рис. 5.5).

Эквивалентные A -параметры цепи на схеме рис. 5.5, рассматриваемой как один четырехполюсник с граничными узлами $1-1'$ и $2-2'$ определяются как $\underline{A}_{\text{ц}} = \underline{A}_1 \underline{A}_2 \dots \underline{A}_n$. Если при этом все четырехполюсники $i = 1, 2, \dots, n$ имеют одинаковые A -параметры, т.е. $\underline{A}_1 = \underline{A}_2 = \dots = \underline{A}_n = \underline{A}$, то $\underline{A}_{\text{ц}} = \underline{A}^n$, а уравнение цепи в гиперболических функциях примет вид

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ch} \underline{\Gamma}_{\text{ц}} & \underline{Z}_{\text{ц}} \text{sh} \underline{\Gamma}_{\text{ц}} \\ \frac{\text{sh} \underline{\Gamma}_{\text{ц}}}{\underline{Z}_{\text{ц}}} & \text{ch} \underline{\Gamma}_{\text{ц}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2' \end{bmatrix}, \quad \underline{\Gamma}_{\text{ц}} = n \underline{\Gamma}, \quad \underline{Z}_{\text{ц}} = \underline{Z}_c,$$

где $\underline{\Gamma}$ и \underline{Z}_c — постоянная передачи и характеристическое сопротивление каждого из n одинаковых четырехполюсников.

Первичные и вторичные параметры Т-, П- и Х-образных четырехполюсников. В табл. 5.3 представлены A -, Y -, Z -параметры симметричных Т-, П-образных четырехполюсников с общей точкой, симметричных Х-образных (мостовых) четырехполюсников, а также Г-образных четырехполюсников. Выбор двойных и половинных сопротивлений для обозначения параметров схем Т- и П-образных четырехполюсников обеспечивает для этих четырехполюсников равенство суммарного продольного \underline{Z}_1 и суммарного поперечного \underline{Z}_2 сопротивления. Тогда как выбор параметров сопротивлений для Г-образного четырехполюсника объясняется тем, что он рассматривается как «половина» Т-образного четырехполюсника.

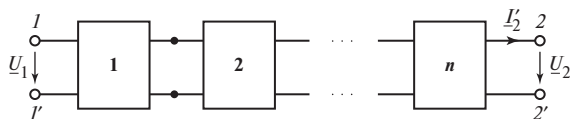
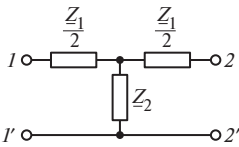
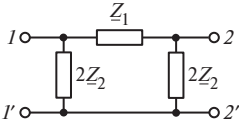
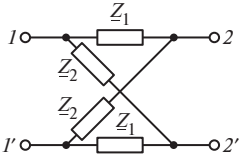
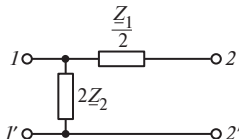


Рис. 5.5

Таблица 5.3

Схема	Коэффициент		
	A	Y	Z
	$A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} = A_{22}$ $A_{12} = Z_1 \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \right)$ $A_{21} = \frac{1}{Z_2}$	$Y_{11} = Y_{22} = \frac{2Z_1 + 4Z_2}{Z_1(Z_1 + 4Z_2)}$ $Y_{21} = Y_{12} = \frac{-4Z_2}{Z_1(Z_1 + 4Z_2)}$	$Z_{11} = Z_{22} = \frac{Z_1}{2} + Z_2$ $Z_{21} = Z_{12} = Z_2$
	$A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} = A_{22}$ $A_{12} = Z_1$ $A_{21} = \frac{1}{Z_2} \left(1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \right)$	$Y_{11} = Y_{22} = \frac{1}{2Z_2} + \frac{1}{Z_1}$ $Y_{21} = Y_{12} = \frac{1}{Z_1}$	$Z_{11} = Z_{22} = \frac{Z_2(2Z_1 + 4Z_2)}{Z_1 + 4Z_2}$ $Z_{21} = Z_{12} = \frac{4Z_2^2}{Z_1 + 4Z_2}$
	$A_{11} = \frac{Z_2 + Z_1}{Z_2 - Z_1} = A_{22}$ $A_{12} = \frac{2Z_1 Z_2}{Z_2 - Z_1}$ $A_{21} = \frac{2}{Z_2 - Z_1}$	$Y_{11} = Y_{22} = \frac{Z_2 + Z_1}{2Z_1 Z_2}$ $Y_{21} = Y_{12} = \frac{Z_2 - Z_1}{2Z_1 Z_2}$	$Z_{11} = Z_{22} = \frac{Z_2 + Z_1}{2}$ $Z_{21} = Z_{12} = \frac{Z_2 - Z_1}{2}$
	$A_{11} = 1, A_{12} = \frac{Z_1}{2}$ $A_{21} = \frac{1}{2Z_2}$ $A_{22} = 1 + \frac{Z_1}{4Z_2}$	$Y_{11} = \frac{Z_1 + 4Z_2}{2Z_1 Z_2}$ $Y_{21} = Y_{12} = -\frac{2}{Z_1}$ $Y_{22} = \frac{2}{Z_1}$	$Z_{11} = 2Z_2$ $Z_{21} = Z_{12} = 2Z_2$ $Z_{22} = 2Z_2 + \frac{Z_1}{2}$

В табл. 5.4 приведены формулы связи вторичных параметров, представленных в табл. 5.3, четырехполюсников с параметрами их схем. В формулах для Г-образного четырехполюсника через $Z_{\text{сн}}$ обозначено характеристическое сопротивление со стороны первичных зажимов, а через $Z_{\text{ст}}$ — характеристическое сопротивление со стороны вторичных зажимов.

Четырехполюсник			
Т-образный	П-образный	Х-образный	Г-образный
$\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1^2}{4}}$ $\operatorname{ch} \underline{\Gamma} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2 \underline{Z}_2}$ $\operatorname{sh} \frac{\underline{\Gamma}}{2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{4 \underline{Z}_2}}$	$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{4 \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + 4 \underline{Z}_2}}$ $\operatorname{ch} \underline{\Gamma} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2 \underline{Z}_2}$ $\operatorname{sh} \frac{\underline{\Gamma}}{2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{4 \underline{Z}_2}}$	$\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}$ $\operatorname{ch} \underline{\Gamma} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 - \underline{Z}_1}$ $\operatorname{sh} \frac{\underline{\Gamma}}{2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}}$	$\underline{Z}_{c\Pi} = \sqrt{\frac{4 \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + 4 \underline{Z}_2}}$ $\underline{Z}_{cT} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1^2}{4} + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2}$ $\operatorname{th} \underline{\Gamma} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + 4 \underline{Z}_2}}$

Активные четырехполюсники. Представленные в табл. 5.1 уравнения могут использоваться и для описания активных неавтономных четырехполюсников. При этом в общем случае все четыре первичных параметра таких четырехполюсников будут различны. Для описания активных автономных четырехполюсников оказывается удобным их представление в виде соединения пассивного четырехполюсника и источников ЭДС и тока (рис. 5.6, а, б), где $\underline{I}_{1к}$ и $\underline{I}_{2к}$ равны токам \underline{I}_1 и \underline{I}_2 при одновременном коротком замыкании первичных выводов (т.е. узлов 2 и 2'), а $\underline{E}_{1х}$ и $\underline{E}_{2х}$ равны напряжениям \underline{U}_1 и \underline{U}_2 при одновременно разомкнутых первичных и вторичных выводах. Тогда описание четырехполюсников (см. рис. 5.6, а, б) можно получить на основе описания пассивного четырехполюсника. Например, Y-уравнения активного четырехполюсника на рис. 5.6, а будут иметь вид:

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{12} \underline{U}_2 + \underline{J}_{1к};$$

$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_{21} \underline{U}_1 + \underline{Y}_{22} \underline{U}_2 + \underline{J}_{2к},$$

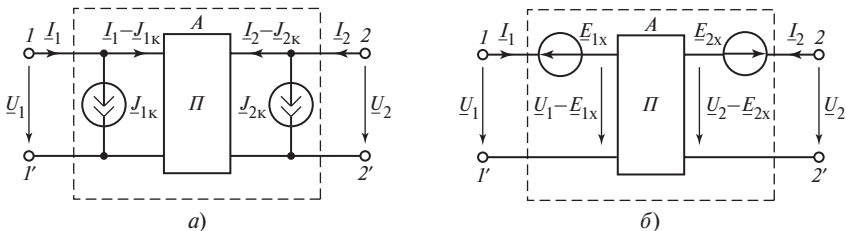


Рис. 5.6

где $\underline{Y}_{11}, \underline{Y}_{12}, \underline{Y}_{21}, \underline{Y}_{22}$ — Y -параметры пассивного четырехполюсника Π , а Z -уравнения активного четырехполюсника на рис. 5.6, б будут иметь вид:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 + \underline{E}_{1x};$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 + \underline{E}_{2x},$$

где $\underline{Z}_{11}, \underline{Z}_{12}, \underline{Z}_{21}, \underline{Z}_{22}$ — Z -параметры пассивного четырехполюсника Π .

Диагностика электрических цепей. Под диагностикой в теории электрических цепей понимается задача определения параметров цепей известной топологической структуры по известным реакциям на заданные (известные) воздействия. При решении задачи диагностики используются законы Ома и Кирхгофа, но известными величинами в уравнениях на основе этих законов являются некоторые из токов и напряжения цепи, а неизвестными — ее параметры: сопротивления и проводимости резисторов, емкости конденсаторов и т.д. Поэтому формальная запись уравнений этих законов иная, чем при их использовании для анализа цепей. Так, если в анализе цепей запись второго закона Кирхгофа имеет вид

$$\mathbf{B} \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & & & \\ & \underline{Z}_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \underline{Z}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \dots \\ \underline{I}_n \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{E}},$$

где \mathbf{B} — матрица контуров; $\underline{\mathbf{E}}$ — вектор-столбец контурных ЭДС; \underline{Z}_j и $\underline{I}_j, j = 1, 2, \dots, n$, — соответственно сопротивления и токи ветвей цепи, то в диагностике используется так называемая взаимная форма записи этого уравнения:

$$\mathbf{B} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 & & & \\ & \underline{I}_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \underline{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 \\ \underline{Z}_2 \\ \dots \\ \underline{Z}_n \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{E}}.$$

Для решения задачи диагностики необходимо составить систему подобных уравнений, используя данные измерений токов и напряжений в различных режимах. В простейшем случае для определения сопротивления \underline{Z} некоторого элемента с известными током \underline{I} и напря-

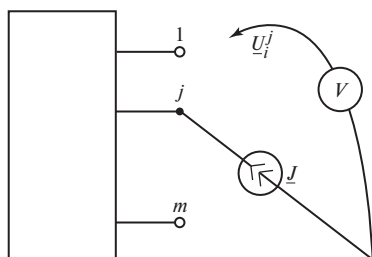


Рис. 5.7

жением \underline{U} достаточно воспользоваться законом Ома $\underline{Z} = \underline{U}/\underline{I}$. В более сложных случаях, когда токи или напряжения некоторых ветвей заранее неизвестны, требуется определенным образом скомбинировать уравнения с известными токами и напряжениями, для чего существует ряд формальных методов. Наиболее известным из них является метод

узловых сопротивлений, в котором для диагностики m -полюсника (рис. 5.7) проводится m измерений узловых напряжений $\underline{U}_i^j, i = 1, 2, \dots, m$, в каждом из m диагностических экспериментов ($j = 1, 2, \dots, m$). По данным этих экспериментов составляется уравнение

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \dots & \underline{Y}_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{Y}_{m1} & \dots & \underline{Y}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1^1 & \dots & \underline{U}_1^m \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{U}_m^1 & \dots & \underline{U}_m^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{J} & & \\ & \ddots & \\ & & \underline{J} \end{bmatrix},$$

решение которого имеет вид

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \dots & \underline{Y}_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{Y}_{m1} & \dots & \underline{Y}_{mm} \end{bmatrix} = \underline{J} \begin{bmatrix} \underline{U}_1^1 & \dots & \underline{U}_1^m \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{U}_m^1 & \dots & \underline{U}_m^m \end{bmatrix}^{-1}.$$

Если $\underline{J} = 1$ А, то узловые напряжения \underline{U}_i^j численно равны так называемым узловым сопротивлениям \underline{Z}_{ji} и последнему выражению можно придать более компактный вид

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{Z}^y)^{-1},$$

где \mathbf{Y} и \mathbf{Z}^y — матрицы соответственно узловых проводимостей и сопротивлений. Определив матрицу \mathbf{Y} , можно определить и проводимости всех ветвей многополюсника. Так, проводимость ветви, соединяющей узлы i и j многополюсника, равна \underline{Y}_{ji} , если $i, j \neq 0$. Проводимость ветви, соединяющей узел j и базисный узел $i = 0$, равна сумме элементов j -й строки или j -го столбца матрицы \mathbf{Y} .

Электрические фильтры — частотно-избирательные устройства, имеющие полосу частот пропускания (в пределах граничных частот) и полосу задерживания (непропускания) для электрических сигналов (напряжения, тока) в диапазоне частот.

По назначению различают: низкочастотные фильтры (ФНЧ), высокочастотные фильтры (ФВЧ), полосно-пропускающие фильтры (ППФ) и полосно-заграждающие фильтры (ПЗФ). В области электро- и радиотехники для минимизации тепловых потерь применяют фильтры преимущественно на реактивных четырехполюсниках. В области цифровой техники широко используются RC-фильтры.

Фильтры типа k — это Т- и П-образные (или Х-образные (мостовые)) реактивные четырехполюсники, для которых выполняется условие $\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = k^2$, где \underline{Z}_1 — продольное и \underline{Z}_2 — поперечное реактивные сопротивления разного характера, а k — вещественная постоянная.

Граничные частоты f_1 и f_2 полосы пропускания ФНЧ и ФВЧ определяются из условия

$$-1 \leq -\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \leq 0. \tag{1}$$

Постоянная передачи $\underline{\Gamma} = A + jB$, в полосе пропускания

$$A = 0; B = \arccos \left(1 - \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} \right). \tag{2}$$

В полосе задерживания

$$A = \operatorname{arch} \left(-1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} \right); B = \pm \pi. \tag{3}$$

В табл. 5.5 приведены схемы замещения фильтров типа k и их основные параметры.

Таблица 5.5

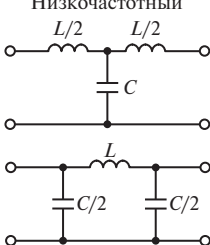
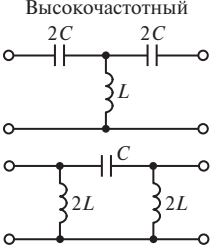
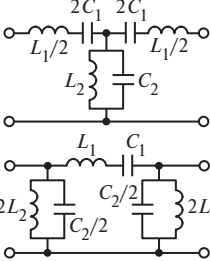
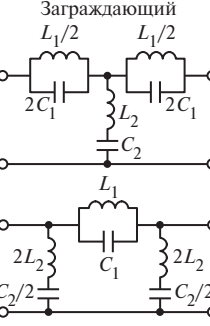
Схема и название	Полоса пропускания и параметры	Вторичные параметры
<p>Низкочастотный</p> 	$0 = f_1 \leq f \leq f_2 = \frac{1}{\pi \sqrt{LC}};$ $L = \frac{k}{\pi f_2};$ $C = \frac{1}{\pi f_2 k}, \text{ где } k = \sqrt{\frac{L}{C}}$	$\underline{Z}_T = k \sqrt{1 - f^2/f_2^2};$ $\underline{Z}_\Pi = \frac{k}{\sqrt{1 - f^2/f_2^2}}; \operatorname{ch} \frac{A}{2} = \frac{f}{f_2};$ $\cos B = 1 - \frac{2f^2}{f_2^2}; \sin \frac{B}{2} = \frac{f}{f_2}$

Схема и название	Полоса пропускания и параметры	Вторичные параметры
<p>Высокочастотный</p> 	$\frac{1}{4\pi\sqrt{LC}} = f_1 \leq f \leq f_2 = \infty;$ $L = \frac{k}{4\pi f_1};$ $C = \frac{1}{4\pi f_1 k}, \text{ где } k = \sqrt{\frac{L}{C}}$	$Z_T = k\sqrt{1 - f_1^2/f^2};$ $Z_{\Pi} = \frac{k}{\sqrt{1 - f_1^2/f^2}}; \text{ ch } \frac{A}{2} = \frac{f_1}{f};$ $\cos B = 1 - \frac{2f_1^2}{f^2}; \sin \frac{B}{2} = \frac{f_1}{f}$
<p>Полосовой (полосный)</p> 	$f_1 \leq f \leq f_2;$ $f_{1,2} = f_0(\sqrt{n^2 + 1} \mp n);$ $f_0 = \sqrt{f_1 f_2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}};$ $\frac{L_2}{L_1} = \frac{C_1}{C_2} = n^2; L_1 = \frac{k}{\pi(f_2 - f_1)};$ $C_1 = \frac{(f_2 - f_1)}{4\pi f_1 f_2 k}; L_2 = \frac{k(f_2 - f_1)}{4\pi f_1 f_2};$ $C_2 = \frac{1}{\pi(f_2 - f_1)k}, \text{ где } k = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}.$	$Z_T = k\sqrt{1 - \frac{(f/f_0 - f_0/f)^2}{4n^2}};$ $Z_{\Pi} = \frac{k}{\sqrt{1 - \frac{(f/f_0 - f_0/f)^2}{4n^2}}};$ $\text{ch } A = \frac{(f/f_0 - f_0/f)^2}{2n^2} - 1;$ $\cos B = 1 - \frac{(f/f_0 - f_0/f)^2}{2n^2}$
<p>Заграждающий</p> 	$0 \leq f \leq f_1, f_2 \leq f \leq \infty;$ $f_{1,2} = \frac{f_0}{4n}(\sqrt{16n^2 + 1} \mp 1);$ $f_0 = \sqrt{f_1 f_2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}};$ $\frac{L_2}{L_1} = \frac{C_1}{C_2} = n^2; L_1 = \frac{(f_2 - f_1)k}{\pi f_2 f_1};$ $C_1 = \frac{1}{(f_2 - f_1)4\pi k};$ $L_2 = \frac{k}{(f_2 - f_1)4\pi}; C_2 = \frac{f_2 - f_1}{\pi k f_2 f_1},$ $\text{где } k = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}}.$	$Z_T = k\sqrt{1 - \frac{1}{4n^2} \frac{1}{(f/f_0 - f_0/f)^2}};$ $Z_{\Pi} = \frac{k}{\sqrt{1 - \frac{1}{4n^2} \frac{1}{(f/f_0 - f_0/f)^2}}};$ $\text{ch } A = \frac{1}{2n^2} \frac{1}{(f/f_0 - f_0/f)^2} - 1;$ $\cos B = 1 - \frac{1}{2n^2} \frac{1}{(f/f_0 - f_0/f)^2}$

Недостаток фильтров типа k — существенная зависимость характеристического сопротивления Z_c от частоты (резистивного в полосе пропускания и реактивного в полосе задерживания), что затрудняет их применение в режиме, близком к согласованию, при работе на постоянную нагрузку фильтра.

Фильтры Баттеворта, Чебышева, Бесселя и др. имеют требуемые амплитудно-частотные (АЧХ) или фазочастотные (ФЧХ) характеристики передаточной функции $\underline{H}(\omega)$ при работе источника напряжения \underline{U}_r с внутренним сопротивлением R_B на входе фильтра при постоянном сопротивлении нагрузки R_H (рис. 5.8).

Проектирование фильтров включает в себя этапы синтеза, аппроксимации и реализации.

Синтез включает в себя определение:

- 1) числа элементов фильтра n ;
- 2) значений реактивных элементов по заданному модулю передаточной функции $|\underline{H}(\omega)|$ в полосе задерживания на заданной относительной частоте $\nu_2 = \omega_H/\omega_{ГР}$.

Аппроксимация — аналитическое приближение к заданному значению модуля передаточной функции $|\underline{H}(\omega)|$ при частоте $\nu_2 = \omega_H/\omega_{ГР}$.

На рис. 5.9 приведены кривые аппроксимации передаточной функции $|\underline{H}(\omega)|$ фильтра Баттеворта и фильтра Чебышева (n — число звеньев фильтра, α — неравномерность в полосе пропускания). Граничная частота для фильтра Баттеворта определена по уровню $|\underline{H}(\omega)| = 0,707$, а для фильтра Чебышева — по уровню $|\underline{H}(\omega)| \leq 1,0$. С увеличением числа звеньев фильтра n крутизна модуля $|\underline{H}(\omega)|$ в полосе задерживания увеличивается ($n_1 < n_2 < n_3$). Фильтры Чебышева при одинаковом числе звеньев имеют большую крутизну АЧХ, чем фильтры Баттеворта, однако в полосе пропускания их АЧХ неравномерна.

Реализация — выбор Т-, П- или мостовых схем замещения фильтра с физически реализуемыми элементами.

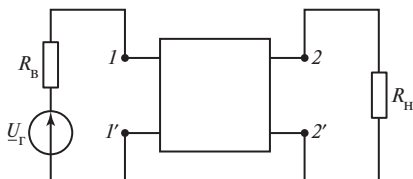


Рис. 5.8

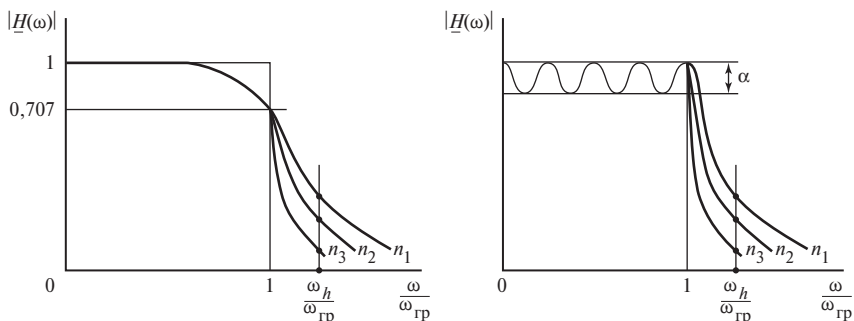
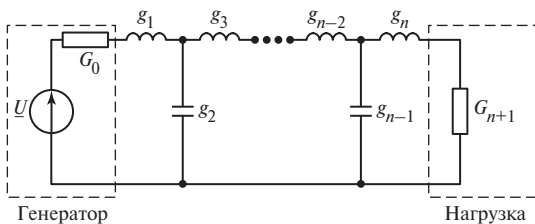


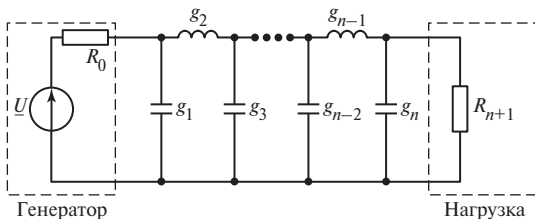
Рис. 5.9

В табл. 5.6. приведены схемы замещения низкочастотных фильтра Баттеворта с максимально плоской характеристикой и фильтра Чебышева с равноволновой характеристикой в полосе пропускания и описание их параметров.

Таблица 5.6



Здесь g_k — нормированные элементы Т-образной схемы замещения, n — количество элементов фильтра.



Здесь g_k — нормированные элементы П-образной схемы замещения.

Параметр фильтра-протопита нижних частот		
Фильтр Баттеворта		Фильтр Чебышева
АЧХ $ \underline{H}(\omega) $, дБ	$-10 \lg \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{гр}}} \right)^{2n} \right]$	$-10 \lg \left[1 + \delta T_n^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{гр}}} \right) \right], \delta = 10^{\frac{\alpha}{10}} - 1$
n — число звеньев	$\lg \frac{10^{\frac{h}{10}} - 1}{2 \lg \frac{\omega}{\omega_{\text{гр}}}}$	$\left(\text{ahrc} \left[\frac{10^{\frac{h}{10}} - 1}{10^{\frac{\alpha}{10}} - 1} \right]^{1/2} \right) / \left(\text{arch} \frac{\omega}{\omega_{\text{гр}}} \right)$
Значения элементов g_k	$2 \sin \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right],$ $k = 1, 2, 3, \dots, n$	$\frac{4a_{k-1}a_k}{b_{k-1}g_{k-1}}$ при $k = 2, 3, 4, \dots, n$, $a_k = \sin \frac{(2k-1)\pi}{2n}, b_k = \theta^2 + \sin^2 \left(\frac{k\pi}{n} \right),$ $g_0 = 1, g_1 = \frac{2a_1}{\theta}, \theta = \text{sh} \left(\frac{\beta}{2n} \right),$ $\beta = \ln [\text{cth}(\alpha/17,37)],$ $G_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{при нечетном } n, \\ \text{cth} \frac{\beta}{4} & \text{при четном } n \end{cases}$

Примечание. $T_n(\omega/\omega_{\text{гр}})$ — полином Чебышева первого рода порядка n ,



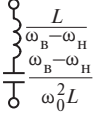


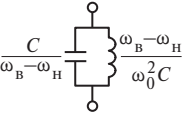
$$T_n(\omega/\omega_{\text{гр}}) = \begin{cases} \cos[n \cdot \arccos(\omega/\omega_{\text{гр}})], & 0 \leq \omega/\omega_{\text{гр}} \leq 1; \\ \text{ch}[n \cdot \text{arch}(\omega/\omega_{\text{гр}})], & \omega/\omega_{\text{гр}} \geq 1. \end{cases}$$

При n нецелом его округляют к большему целому; α — значение неравномерности АЧХ в полосе пропускания, дБ; $h = 20 \lg |\underline{H}(\omega)|$ — вносимое ослабление на частоте $\omega_h/\omega_{\text{гр}}$ в полосе задерживания, дБ.

Переход от фильтра-прототипа нижних частот (ФНЧ) к фильтру высоких частот (ФВЧ) и полосно-пропускающему фильтру (ППФ) или полосно-заграждающему фильтру (ПЗФ) проводится с помощью *частотных преобразований*, приведенных в табл. 5.7 ($\omega_{\text{н}}$ и $\omega_{\text{в}}$ — нижняя и верхняя граничные частоты полосы пропускания ППФ, ω_1 — нормированная частота ФНЧ).

Частотное преобразование от ФНЧ к ФВЧ переводит емкостные элементы в индуктивные, а индуктивные в емкостные. Частотное преобразование от ФНЧ к ППФ переводит реактивные элементы в последовательные и параллельные резонансные контуры ($\omega_{\text{н}}$ и $\omega_{\text{в}}$ — нижняя и верхняя граничные частоты полосы пропускания ППФ, ω_0 — центральная частота его полосы пропускания).

Таблица 5.7

ФНЧ	ФВЧ	ППФ, ПЗФ
$v_1 = 1$	$\omega_{\text{гр}}/\omega$	ω_B
$v_1 = 0$	$\omega = \infty$	$\omega_0 = \sqrt{\omega_H \omega_B}$
$v_1 = -1$	—	ω_H
v_1	—	$\frac{1}{\omega_B - \omega_H} \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega} \right)$
		
		

5.1. ПАССИВНЫЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

5.1(р). Найти коэффициенты матрицы **A** четырехполюсника (рис. к задаче 5.1(р)) при $\omega L = 20$ Ом и $1/\omega C = 10$ Ом: 1) из системы уравнений матрицы **A**; 2) из режимов холостого хода и короткого замыкания; 3) через входные сопротивления четырехполюсника.

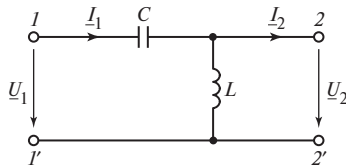


Рис. к задаче 5.1(р)

Решение. 1. Система двух уравнений типа **A** связывает входные и выходные напряжения и токи четырехполюсника:

$$\underline{U}_1 = \underline{A}_{11} \underline{U}_2 + \underline{A}_{12} \underline{I}_2,$$

$$\underline{I}_1 = \underline{A}_{21} \underline{U}_2 + \underline{A}_{22} \underline{I}_2.$$

Запишем уравнения по второму закону Кирхгофа для левого и правого контуров:

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1(-j10) + (\underline{I}_1 - \underline{I}_2)j20,$$

$$\underline{U}_2 = (\underline{I}_1 - \underline{I}_2)j20.$$

Из второго уравнения следует, что $\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2 j20}{j20}$.

Подставим \underline{I}_1 в первое уравнение:

$$\underline{U}_1 = 0,5\underline{U}_2 - j10\underline{I}_2,$$

$$\underline{I}_1 = -j0,05\underline{U}_2 + \underline{I}_2.$$

Следовательно, $\underline{A}_{11} = 0,5$; $\underline{A}_{12} = -j10$ Ом; $\underline{A}_{21} = -j0,05$ См; $\underline{A}_{22} = 1$.

2. Для цепи в режиме холостого хода ($\underline{I}_2 = 0$) имеем $\underline{U}_{1x} = \underline{A}_{11}\underline{U}_{2x}$, $\underline{I}_{1x} = \underline{A}_{21}\underline{U}_{2x}$ или

$$\underline{U}_{1x} = \underline{I}_{1x}(-j10 + j20) = j10\underline{I}_{1x},$$

$$\underline{I}_{1x} = \underline{U}_{2x}/j20, \underline{U}_{2x} = j20\underline{I}_{1x}.$$

Следовательно, $\underline{A}_{11} = \underline{U}_{1x}/\underline{U}_{2x} = 0,5$; $\underline{A}_{12} = \underline{I}_{1x}/\underline{U}_{2x} = 1/j20 = -j0,05$ См.

Для цепи в режиме короткого замыкания ($\underline{U}_2 = 0$) имеем

$$\underline{U}_{1к} = \underline{A}_{12}\underline{I}_{2к}; \underline{I}_{1к} = \underline{A}_{22}\underline{I}_{2к} \text{ или } \underline{U}_{1к} = -j10\underline{I}_{1к}; \underline{I}_{1к} = \underline{I}_{2к}.$$

Следовательно, $\underline{A}_{12} = -j10$ Ом; $\underline{A}_{22} = 1$.

3. Входные сопротивления четырехполюсника в режимах холостого хода и короткого замыкания:

для входа 1—1'

$$\underline{Z}_{1x} = (-j10 + j20) = j10 \text{ Ом}, \underline{Z}_{1к} = -j10 \text{ Ом};$$

для входа 2—2'

$$\underline{Z}_{2x} = j20 \text{ Ом}, \underline{Z}_{2к} = (-j10)(j20)/(-j10 + j20) = -j20 \text{ Ом}.$$

Коэффициенты матрицы **A**:

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1x}}{\underline{Z}_{2x} - \underline{Z}_{2к}}} = \sqrt{\frac{j10}{j20 + j20}} = \pm 0,5.$$

Замечание. Коэффициент \underline{A}_{11} неоднозначен по знаку (+, -), что связано с выбором направления выходного напряжения \underline{U}_2 . При этом знак «+» соответствует случаю $\underline{U}_2 = \underline{U}_{(2-2')}$, а знак «-» $\underline{U}_2 = \underline{U}_{(2'-2)}$.

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}_{2к} \underline{A}_{11} = (-20j)0,5 = -j10 \text{ Ом};$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{Z}_{1х}} = \frac{0,5}{j10} = -j0,05 \text{ См};$$

$$\underline{A}_{22} = \frac{\underline{A}_{11} \underline{Z}_{2х}}{\underline{Z}_{1х}} = \frac{0,5 \cdot j20}{j10} = 1.$$

5.2. Найти коэффициенты матрицы **A** для четырехполусника (рис. к задаче 5.2), реактивные сопротивления которого $\omega L = 50 \text{ Ом}$, $1/\omega C = 20 \text{ Ом}$.

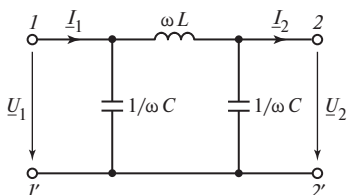


Рис. к задаче 5.2

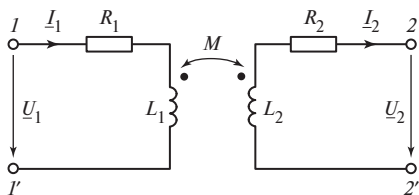


Рис. к задаче 5.3(р)

5.3(р). Найти коэффициенты матриц **A**, **Z**, **Y** для четырехполусника (рис. к задаче 5.3(р)) при $R_1 = R_2 = 0$, $\omega L_1 = 40 \text{ Ом}$, $\omega L_2 = 60 \text{ Ом}$ и $\omega M = 30 \text{ Ом}$.

Решение. При выбранном направлении тока включение обмоток катушек встречное.

1. Коэффициенты матрицы **A** определяются в режимах холостого хода и короткого замыкания:

$$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{U}_{1х}}{\underline{U}_{2х}}, \underline{U}_{2х} = \underline{I}_{1х}(j\omega M) = \frac{\underline{U}_{1х}(j\omega M)}{j\omega L_1} = \underline{U}_{1х} \frac{3}{4}, \underline{A}_{11} = \frac{4}{3} = 1,33;$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{I}_{1х}}{\underline{U}_{2х}} = \frac{\underline{I}_{1х}}{\underline{I}_{1х}(j\omega M)} = -j \frac{1}{30} = -3,3 \cdot 10^{-2} \text{ См};$$

$$\underline{A}_{12} = \frac{\underline{U}_{1к}}{\underline{I}_{2к}}, \underline{U}_{1к} = \underline{I}_{1к}(j\omega L_1) - \underline{I}_{2к}(j\omega M), \underline{I}_{2к}(j\omega L_2) - \underline{I}_{1к}(j\omega M) = 0,$$

откуда

$$\underline{I}_{1к} = \underline{I}_{2к}(j\omega L_2)/(j\omega M) = \underline{I}_{2к} \cdot 2,$$

$$\underline{U}_{1к} = \underline{I}_{2к}[(2 \cdot j\omega L_1) - (j\omega M)] = \underline{I}_{2к}(j50),$$

$$\underline{A}_{12} = j50 \text{ Ом}; \underline{A}_{22} = \underline{I}_{1к}/\underline{I}_{2к} = 2.$$

2. Коэффициенты матрицы сопротивлений \mathbf{Z} определяются из системы уравнений, связывающих напряжения на входах четырехполюсника с токами. Направление тока \underline{I}_2 в соответствии с обозначениями (см. Введение) для матрицы \mathbf{Z} определяет включение катушек как согласное:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{21}\underline{I}_2,$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2.$$

Коэффициенты матрицы сопротивлений \mathbf{Z} определяются из режимов холостого хода. Для случая $\underline{I}_2 = 0$

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{U}_{1x}}{\underline{I}_{1x}} = \frac{\underline{U}_{1x}}{\underline{U}_{1x}/(j\omega L_1)} = j\omega L_1 = j40 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{21} = \frac{\underline{U}_{2x}}{\underline{I}_{1x}} = \frac{\underline{I}_{1x}(j\omega M)}{\underline{I}_{1x}} = j\omega M = j30 \text{ Ом}.$$

Для случая $\underline{I}_1 = 0$

$$\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{U}_{1x}}{\underline{I}_{2x}} = \frac{\underline{I}_{2x}(j\omega M)}{\underline{I}_{2x}} = j\omega M = j30 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{22} = \frac{\underline{U}_{2x}}{\underline{I}_{2x}} = \frac{\underline{U}_{2x}}{\underline{U}_{2x}/(j\omega L_2)} = j\omega L_2 = j60 \text{ Ом}.$$

3. Коэффициенты матрицы проводимостей \mathbf{Y} определяются из системы уравнений, связывающих токи на входах четырехполюсника с напряжениями. Направление тока \underline{I}_2 в соответствии с обозначениями (см. Введение) для матрицы \mathbf{Y} определяет включение катушек как согласное:

$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{21}\underline{U}_2,$$

$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2.$$

Коэффициенты матрицы \underline{Y} определяются из режимов короткого замыкания. Для случая $\underline{U}_2 = 0$

$$\underline{Y}_{11} = \underline{I}_{1\kappa} / \underline{U}_{1\kappa}, \quad \underline{Y}_{21} = \underline{I}_{2\kappa} / \underline{U}_{1\kappa},$$

где

$$\underline{U}_{1\kappa} = \underline{I}_{1\kappa}(j\omega L_1) + \underline{I}_{2\kappa}(j\omega M),$$

$$\underline{I}_{2\kappa}(j\omega L_2) + \underline{I}_{1\kappa}(j\omega M) = 0,$$

$$\underline{U}_{1\kappa} = \underline{I}_{1\kappa} \left(j\omega L_1 - \frac{(j\omega M)^2}{j\omega L_2} \right),$$

следовательно,

$$\underline{Y}_{11} = \frac{1}{j40 - \frac{(j30)^2}{j60}} = -j4,0 \cdot 10^{-2} \text{ См}, \quad \underline{Y}_{21} = \frac{-0,5 \underline{I}_{1\kappa}}{\underline{U}_{1\kappa}} = j2,0 \cdot 10^{-2} \text{ См}.$$

Для случая $\underline{U}_1 = 0$

$$\underline{Y}_{12} = \underline{I}_{1\kappa} / \underline{U}_{2\kappa}, \quad \underline{Y}_{22} = \underline{I}_{2\kappa} / \underline{U}_{2\kappa},$$

где

$$\underline{U}_{2\kappa} = j60 \underline{I}_{2\kappa} + j30 \underline{I}_{1\kappa},$$

$$\underline{I}_{1\kappa}(j40 + \underline{I}_{2\kappa}(j30)) = 0,$$

следовательно,

$$\underline{Y}_{12} = \frac{1}{j50} = j2,0 \cdot 10^{-2} \text{ См},$$

$$\underline{Y}_{22} = \frac{\underline{I}_{2\kappa}}{(j60 + j30(-3/4)) \underline{I}_{2\kappa}} = \frac{1}{j37,5} = -j2,67 \cdot 10^{-2} \text{ См}.$$

5.4(р). Составить матрицу \underline{A} для четырехполюсника (совершенного трансформатора) при условии что коэффициент связи обмоток трансформатора $k_{\text{св}} = 1$, а индуктивности обмоток весьма велики при $L_1 \neq L_2$. Число витков первичной и вторичной обмоток w_1 и w_2 .

Решение. Коэффициент $k_{\text{св}} = X_M / \sqrt{X_{L_1} X_{L_2}} = 1$, поэтому сопротивление взаимной индукции X_M также велико. По второму закону Кирхгофа для левого и правого контуров четырехполюсника

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1(jX_{L_1}) - \underline{I}_2(jX_M), \quad (1)$$

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_1(jX_M) - \underline{I}_2(jX_{L_2}). \quad (2)$$

Подставив \underline{I}_1 из (2) в (1), получим

$$\underline{U}_1 = \frac{X_{L_1}}{X_M} \underline{U}_2 + \left(j \frac{X_{L_1} X_{L_2}}{X_M} - j X_M \right) \underline{I}_2.$$

С учетом $X_M / \sqrt{X_{L_1} X_{L_2}} = 1$ выполняется условие $X_M^2 = X_{L_1} X_{L_2}$, следовательно,

$$\underline{U}_1 = \sqrt{\frac{X_{L_1}}{X_{L_2}}} \underline{U}_2 + 0 \cdot \underline{I}_2, \quad (3)$$

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{j X_M} \underline{U}_2 + \sqrt{\frac{X_{L_2}}{X_{L_1}}} \underline{I}_2. \quad (4)$$

Так как $\sqrt{X_{L_1} / X_{L_2}} = w_1 / w_2$, то уравнения матрицы **A** имеют вид:

$$\underline{U}_1 = \frac{w_1}{w_2} \underline{U}_2 + 0 \cdot \underline{I}_2, \quad \underline{I}_1 = \frac{1}{j X_M} \underline{U}_2 + \frac{w_2}{w_1} \underline{I}_2.$$

Замечание. Учет условий задачи $X_{L_1}, X_{L_2}, X_M \gg 1$ соответствует модели совершенного трансформатора: $\underline{A}_{11} = w_1 / w_2$; $\underline{A}_{12} = 0$; $\underline{A}_{21} \approx 0$; $\underline{A}_{22} = w_2 / w_1$. Напряжения и токи на входах идеального трансформатора синфазны и определяются соотношением числа его обмоток.

5.5. Совершенный трансформатор задачи 5.4 нагружен на $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2$ (рис. к задаче 5.5).

Найти входное сопротивление совершенного трансформатора, если число витков обмоток $w_1 = 200$, $w_2 = 400$.

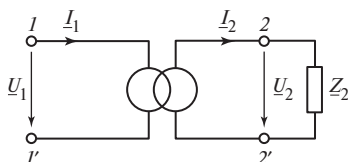


Рис. к задаче 5.5

5.6(p). Для резистивного симметричного четырехполюсника (рис. к задаче 5.6(p)) известны опытные данные при замкнутом положении ключа K : $I_1 = 3,2$ мА, $I_2 = 1,6$ мА, $U_1 = 48$ В.

Найти токи при разомкнутом ключе, если сопротивление нагрузки $R_H = 5$ кОм.

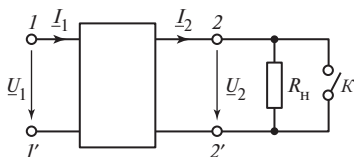


Рис. к задаче 5.6(р)

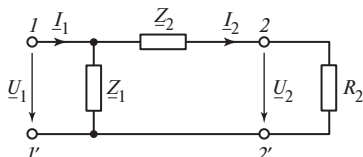


Рис. к задаче 5.7(р)

Решение. 1. При замкнутом ключе $U_2 = 0$, $\underline{U}_1 = \underline{A}_{12}I_2$, $I_1 = \underline{A}_{22}I_2$, $\underline{A}_{12} = 48/1,6 = 30$ кОм, $\underline{A}_{22} = 3,2/1,6 = 2$.

Из условия симметричности четырехполюсника $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = 2$. Из условия взаимности $\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1$ найдем $\underline{A}_{21} = (\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - 1)/\underline{A}_{12} = 10^{-4}$ См = 10^{-1} мСм.

2. При разомкнутом ключе $\underline{U}_2 = R_{\text{н}}I_2$ и

$$\underline{U}_1 = (\underline{A}_{11}R_{\text{н}} + \underline{A}_{12})I_2,$$

$$\underline{I}_1 = (\underline{A}_{21}R_{\text{н}} + \underline{A}_{22})I_2.$$

Следовательно, $I_2 = 48/(2 \cdot 5 + 30) = 1,2$ мА, $I_1 = (10^{-1} \cdot 5 + 2)1,2 = 3$ мА.

5.7(р). Несимметричный четырехполюсник $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = 10 - j20$ Ом (рис. к задаче 5.7(р)) нагружен на $R_2 = 10$ Ом.

Найти напряжение и ток на входе четырехполюсника I — I' , если $\underline{U}_2 = 100$ В.

Решение. 1. Коэффициенты матрицы **A**:

$$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{U}_{1\text{x}}}{\underline{U}_{2\text{x}}} = 1, \underline{A}_{21} = \frac{\underline{I}_{1\text{x}}}{\underline{U}_{2\text{x}}} = \frac{\underline{U}_{1\text{x}}/\underline{Z}_1}{\underline{U}_{2\text{x}}} = \frac{1}{10 - j20} = (0,02 + j0,04) \text{ См},$$

$$\underline{A}_{12} = \frac{\underline{U}_{1\text{к}}}{\underline{I}_{2\text{к}}} = \frac{\underline{U}_{1\text{к}}}{\underline{U}_{1\text{к}}/\underline{Z}_2} = \underline{Z}_2 = 10 - j20 \text{ Ом}, \underline{A}_{22} = \frac{\underline{I}_{1\text{к}}}{\underline{I}_{2\text{к}}} = \frac{\underline{I}_{1\text{к}}}{0,5\underline{I}_{1\text{к}}} = 2.$$

2. Напряжение \underline{U}_1 и ток \underline{I}_1 :

$$\underline{U}_1 = (\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12}/R_2)\underline{U}_2 =$$

$$= (1 + (10 - j20)/10)100 = (200 - j200) = 200\sqrt{2}\angle -45^\circ \text{ В},$$

$$\underline{I}_1 = (\underline{A}_{21}R_2 + \underline{A}_{22})\underline{I}_2 =$$

$$= ((0,02 + j0,04)10 + 2)10 = (22 + j4) = 22,4\angle 10,3^\circ \text{ А}.$$

5.8. Четырехполосник задачи 5.7 подключен при обратном питании и коротком замыкании на входе $1—1'$ (рис. к задаче 5.8). Напряжение $\underline{U}_2 = 100$ В.

Найти ток \underline{I}_2 .

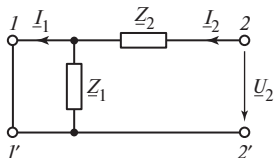


Рис. к задаче 5.8

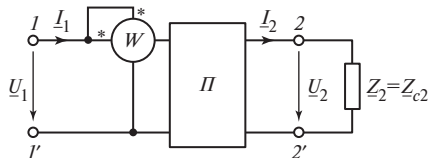


Рис. к задаче 5.9(р)

5.9(р). Четырехполосник задачи 5.7 нагружен на входе $2—2'$ на согласованную нагрузку $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{c2}$ (рис. к задаче 5.9(р)). Показание ваттметра на входе $1—1'$ $P_W = 60$ Вт.

Найти напряжение и ток на входе $1—1'$.

Решение. Для несимметричного четырехполосника существует два согласованных сопротивления: характеристическое сопротивление по входу $1—1'$ \underline{Z}_{c1} и характеристическое сопротивление по входу $2—2'$ \underline{Z}_{c2} . В режиме согласованной нагрузки $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{c2}$ входное сопротивление $\underline{Z}_{1\text{вх}} = \underline{Z}_{c1}$. И наоборот, в режиме согласованной нагрузки $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{c1}$ входное сопротивление $\underline{Z}_{2\text{вх}} = \underline{Z}_{c2}$.

Известна связь характеристических сопротивлений с коэффициентами матрицы **A**:

$$\underline{Z}_{c1} = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}}; \underline{Z}_{c2} = \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{21}A_{11}}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{1\text{вх}} &= \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}} = \sqrt{\frac{1(10 - j20)}{(0,02 + j0,04)2}} = \sqrt{\frac{(10 - j20)^2}{2}} = \\ &= (7,07 - j14,14) = 15,8 \angle -63,4^\circ \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Показание ваттметра $P_W = U_1 I_1 \cos \varphi_1$, где $\varphi_1 = 63,4^\circ$. Пусть

$$\underline{U}_1 = U_1 \angle 0^\circ, \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{1\text{вх}}} = I_1 \angle 63,4^\circ \text{ А, } 60 = U_1 \frac{U_1}{Z_{1\text{вх}}} \cos 63,4^\circ, \text{ где}$$

$Z_{1\text{вх}}$ — модуль комплекса $\underline{Z}_{1\text{вх}}$.

Следовательно, напряжение и ток на входе $I—I'$

$$U_1 = \sqrt{60 \frac{15,8}{0,448}} = 46 \text{ В}, I_1 = \frac{U_1}{Z_{1\text{ВХ}}} = \frac{46}{15,8} = 2,91 \text{ А}.$$

5.10*(р). Составить матрицы \mathbf{A} , \mathbf{Z} , \mathbf{Y} для симметричного четырехполосника (рис. к задаче 5.10*(р)) при условии $Z_1 = j10 \text{ Ом}$, $Z_2 = -j10 \text{ Ом}$.

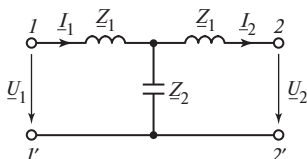


Рис. к задаче 5.10*(р)

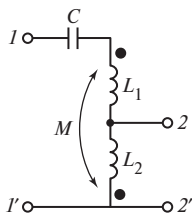


Рис. к задаче 5.11

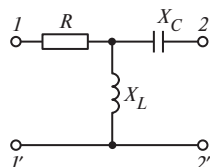


Рис. к задаче 5.12

Решение. Цепь четырехполосника «особая», так как $Z_x = 0$ (резонанс напряжений) и $Z_k \rightarrow \infty$ (резонанс токов). Режим холостого хода предусматривает возможность подключения к входам $I—I'$ и $2—2'$ источника тока $\underline{I} = I_{1x}$ или $\underline{I} = I_{2x}$.

Холостой ход на входе $2—2'$

$$I_{1x}(-j10) = U_{2x}, I_{1x} = U_{2x}/(-j10) \text{ или } A_{21} = 1/(-j10) = j0,1 \text{ См}.$$

Холостой ход на входе $I—I'$:

$$(-I_{2x})(-j10) = U_{1x} \text{ или } A_{12} = j10 \text{ Ом}.$$

Знак « \leftarrow » перед I_{2x} соответствует смене направления тока при подключении источника тока к вторичным выводам $\underline{I} = I_{2x}$.

Режим короткого замыкания предусматривает возможность подключения источников напряжения $\underline{E} = U_{1k}$ или $\underline{E} = U_{2k}$. Так как $I_{1x} = 0$, а $I_{2x} \neq 0$, то $A_{11} = 0$. Из условия симметричности четырехполосника следует, что $A_{22} = 0$.

5.11. Найти комплексные сопротивления Т- и П-образных схем замещения, эквивалентных четырехполоснику (рис. к задаче 5.11), сопротивления которого $1/\omega C = 35 \text{ Ом}$, $\omega L_1 = 20 \text{ Ом}$, $\omega L_2 = 60 \text{ Ом}$, $\omega M = 10 \text{ Ом}$.

5.12. Два одинаковых четырехполосника (рис. к задаче 5.12) соединены а) каскадно, б) последовательно, в) параллельно. Дано: $R = 100 \text{ Ом}$, $X_L = 200 \text{ Ом}$, $X_C = 100 \text{ Ом}$.

Найти коэффициенты матриц \mathbf{A} , \mathbf{Z} , \mathbf{Y} соединения четырехполосников.

5.13(р). Найти коэффициенты матрицы **A**, рассматривая каскадное соединение элементов четырехполюсника задачи 5.10 (рис. 1 к задаче 5.13(р)).

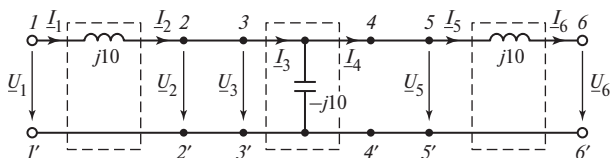


Рис. 1 к задаче 5.13(р)

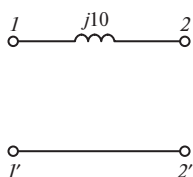


Рис. 2 к задаче 5.13(р)

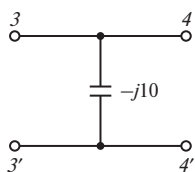


Рис. 3 к задаче 5.13(р)

Решение. 1. Первое и третье звено (рис. 2 к задаче 5.13(р)):

$$\underline{A}_{11}^{(1)} = 1; \underline{A}_{12}^{(1)} = j10 \text{ Ом};$$

$$\underline{A}_{21}^{(1)} = 0; \underline{A}_{22}^{(1)} = 1.$$

2. Второе звено (рис. 3 к задаче 5.13(р)):

$$\underline{A}_{11}^{(2)} = 1; \underline{A}_{12}^{(2)} = 0;$$

$$\underline{A}_{21}^{(2)} = \frac{1}{-j10} \text{ См}; \underline{A}_{22}^{(2)} = 1.$$

3. Матрица **A** каскадного соединения:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \underline{A}^{(1)} \cdot \underline{A}^{(2)} \cdot \underline{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & j10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ j0,1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & j10 \\ j0,1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & j10 \\ j0,1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5.14(p). Четырехполусник (рис. к задаче 5.14(p)) представляет собой схему замещения биполярного транзистора (с общим эмиттером) для переменного «малого» сигнала: \underline{Z} — входное сопротивление; $\beta i_{\text{б}}$ — источник тока, управляемый током базы $i_{\text{б}} = I_1$, где β — коэффициент усиления транзистора; \underline{Y} — выходная проводимость.

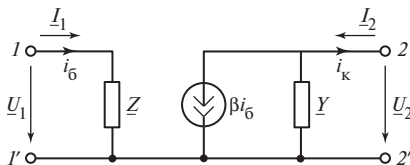


Рис. к задаче 5.14(p)

Найти матрицы $\underline{\mathbf{H}}$, $\underline{\mathbf{A}}$, $\underline{\mathbf{Z}}$, $\underline{\mathbf{Y}}$ активного четырехполусника.

Решение. Для матрицы $\underline{\mathbf{H}}$:

$$\begin{vmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 \end{vmatrix},$$

где

$$\underline{H}_{11} = \left. \frac{\underline{U}_{1\text{к}}}{\underline{I}_{1\text{к}}} \right|_{\underline{U}_2=0} = \underline{Z}; \quad \underline{H}_{12} = \left. \frac{\underline{U}_{1\text{к}}}{\underline{I}_{2\text{к}}} \right|_{\underline{I}_1=0} = 0;$$

$$\underline{H}_{21} = \left. \frac{\underline{I}_{2\text{к}}}{\underline{I}_{1\text{к}}} \right|_{\underline{U}_2=0} = \beta; \quad \underline{H}_{22} = \left. \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{I}_1=0} = \underline{Y}.$$

$$\underline{\Delta}_H = \underline{H}_{11}\underline{H}_{22} - \underline{H}_{12}\underline{H}_{21} = \underline{Z}\underline{Y}.$$

Для матрицы $\underline{\mathbf{A}}$:

$$\underline{A}_{11} = -\frac{\underline{\Delta}_H}{\underline{H}_{21}} = -\frac{\underline{Z}\underline{Y}}{\beta}; \quad \underline{A}_{12} = \frac{\underline{H}_{11}}{\underline{H}_{21}} = \frac{\underline{Z}}{\beta}; \quad \underline{A}_{21} = -\frac{\underline{H}_{22}}{\underline{H}_{21}} = -\frac{\underline{Y}}{\beta}; \quad \underline{A}_{22} = \frac{1}{\underline{H}_{21}} = \frac{1}{\beta}.$$

Проверка условия на взаимность:

$$\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = -\frac{\underline{Z}\underline{Y}}{\beta} \frac{1}{\beta} - \frac{\underline{Z}}{\beta} \left(-\frac{\underline{Y}}{\beta} \right) = 0.$$

Так как условие равенства единице не выполняется, следовательно, активный четырехполюсник является невзаимным.

Для матрицы \underline{Z} :

$$\underline{Z}_{11} = -\frac{\Delta_H}{\underline{H}_{22}} = \frac{\underline{Z}Y}{\beta}; \underline{Z}_{12} = \frac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{22}} = 0; \underline{Z}_{21} = -\frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{22}} = -\frac{\beta}{\underline{Y}}; \underline{Z}_{22} = \frac{1}{\underline{H}_{22}} = \frac{1}{\underline{Y}}.$$

Для матрицы \underline{Y} :

$$\underline{Y}_{11} = \frac{1}{\underline{H}_{11}} = \frac{1}{\underline{Z}}; \underline{Y}_{12} = -\frac{\underline{H}_{12}}{\underline{H}_{11}} = 0; \underline{Y}_{21} = \frac{\underline{H}_{21}}{\underline{H}_{11}} = \frac{\beta}{\underline{Y}}; \underline{Y}_{22} = \frac{\Delta_H}{\underline{H}_{11}} = \underline{Y}.$$

5.15. Известны комплексные сопротивления элементов несимметричного четырехполюсника (рис. к задаче 5.15).

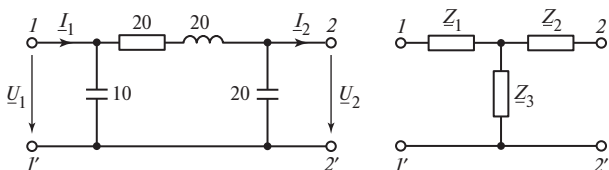


Рис. к задаче 5.15

Определить матрицу \underline{A} и найти сопротивления Т-образной схемы замещения четырехполюсника.

Замечание. Так как комплексное сопротивление \underline{Z}_3 Т-образной схемы замещения имеет отрицательное значение активного сопротивления, то Т-образная схема физически нереализуема.

5.2. ВТОРИЧНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ И ИХ СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ

5.16(р). Определить вторичные параметры четырехполюсника-фильтра \underline{Z}_c и $\underline{\Gamma} = A + jB$, сопротивления которого заданы в омах (рис.1 к задаче 5.16(р)).

Решение. Определим характеристическое сопротивление \underline{Z}_c через входные сопротивления симметричного четырехполюсника:

$$\underline{Z}_x = \frac{(-j20)(j50 - j20)}{-j20 + j50 - j20} = -j60 \text{ Ом}, \quad \underline{Z}_k = \frac{(-j20)(j50)}{-j20 + j50} = -j33,3 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_x \underline{Z}_k} = \sqrt{-1491,84} = \mp j44,8 \text{ Ом}.$$

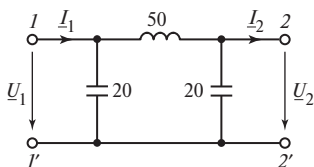


Рис. 1 к задаче 5.16(р)

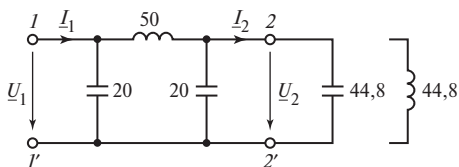


Рис. 2 к задаче 5.16(р)

Постоянная передачи $\underline{\Gamma} = A + jB$ определяется в режиме согласованной нагрузки ($\underline{Z}_H = \underline{Z}_c$) (рис. 2 к задаче 5.16(р)).

При $\underline{Z}_H = -j44,8$ Ом

$$\underline{\Gamma} = \ln \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{Z}_H = \underline{Z}_c} ;$$

$$\underline{U}_2 = \left[\frac{\underline{U}_1}{j50 + \frac{(-j20)(-j44,8)}{-j64,8}} \right] \left[\frac{(-j20)(-j44,8)}{-j64,8} \right] = -0,381 \underline{U}_1 ;$$

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{1}{-0,381} = 2,62 \angle \pi ,$$

следовательно, $\underline{\Gamma} = \ln(2,62 e^{j\pi}) = \ln 2,62 + j\pi = 0,963 + j\pi$.

При $\underline{Z}_H = j44,8$ Ом

$$\underline{U}_2 = \left[\frac{\underline{U}_1}{j50 + \frac{(-j20)(j44,8)}{j24,8}} \right] \left[\frac{(-j20)(j44,8)}{j24,8} \right] = -26,2 \underline{U}_1 ;$$

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{1}{-26,2} = 0,0385 \angle \pi ,$$

$$\underline{\Gamma} = \ln(0,0385 e^{j\pi}) = -3,26 + j\pi .$$

Замечание. Нагруженный на согласованное сопротивление четырехполюсник вносит ослабление ($\underline{Z}_H = \underline{Z}_c = -j44,8$ Ом) или усиление ($\underline{Z}_H = \underline{Z}_c = j44,8$ Ом) сигнала входного напряжения. Так как назначение фильтра ослаблять напряжение в полосе задерживания, из двух значений \underline{Z}_c выбираем $\underline{Z}_c = -j44,8$ Ом.

5.17. Найти характеристическое сопротивление \underline{Z}_c и постоянную передачи аттенюатора цепи резистивного четырехполюсника (рис. к задаче 5.17).

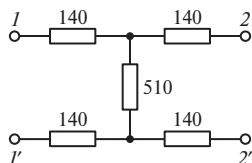


Рис. к задаче 5.17

5.18(р). Найти вторичные параметры \underline{Z}_c и $\underline{\Gamma}$ для симметричного четырехполюсника (рис. 1 к задаче 5.18(р)) при условии $\underline{Z}_1 = j10$ Ом, $\underline{Z}_2 = -j10$ Ом.

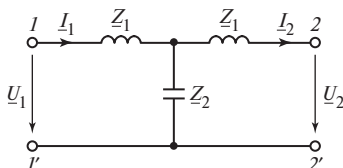


Рис. 1 к задаче 5.18(р)

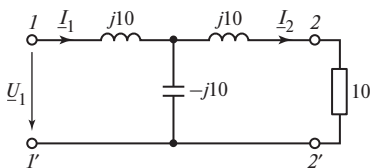


Рис. 2 к задаче 5.18(р)

Решение. Вторичные параметры четырехполюсника определяются в режиме согласованной нагрузки $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_c$. Согласно определению при $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_c$ входное сопротивление $\underline{Z}_{1\text{вх}} = \underline{Z}_c$:

$$\underline{Z}_{1\text{вх}} = \underline{Z}_c = j10 + \frac{(j10 + \underline{Z}_c)(-j10)}{(j10 + \underline{Z}_c - j10)}$$

или

$$\underline{Z}_c^2 = j10\underline{Z}_c + 100 - j10\underline{Z}_c = 100, \underline{Z}_c = 10 \text{ Ом.}$$

Постоянная передачи $\underline{\Gamma}$ определена для нагруженного (согласованного) четырехполюсника (рис. 2 к задаче 5.18(р)):

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c} = \frac{\underline{U}_1}{10},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{I}_1(-j10)}{(-j10 + j10 + 10)} = -j\underline{I}_1,$$

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_2 \cdot 10 = -j\underline{I}_1 \cdot 10 = \left(-j \frac{\underline{U}_1}{10}\right) 10 = -j\underline{U}_1.$$

Постоянная передачи

$$\underline{\Gamma} = A + jB = \ln \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \ln(j) = \ln\left(1 e^{j\frac{\pi}{2}}\right) = 0 + j\frac{\pi}{2}, A = 0, B = \frac{\pi}{2}.$$

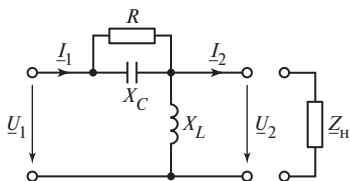


Рис. к задаче 5.19*(р)

5.19*(р). Для четырехполюсника (рис. к задаче 5.19*(р)) известны параметры: $X_C = 20 \text{ Ом}$, $X_L = 80 \text{ Ом}$, $R = 40 \text{ Ом}$.

Найти сопротивление нагрузки Z_H , при которой входное сопротивление четырехполюсника $Z_{вх} = R = 40 \text{ Ом}$.

Решение. Коэффициенты матрицы **A**:

$$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{U}_{1x}}{\underline{U}_{2x}} = \frac{\left(jX_L + \frac{(-jX_C)R}{R - jX_C} \right)}{jX_L} = 1 + \frac{(-j20)40}{(40 - j20)j80} = 0,8 - j0,1;$$

$$\underline{A}_{12} = \left. \frac{\underline{U}_{1x}}{\underline{I}_{2x}} \right|_{\underline{U}_2=0} = \frac{(-jX_C)R}{R - jX_C} = \frac{(-j20)40}{40 - j20} = 8 - j16 \text{ Ом},$$

$$\underline{A}_{21} = \left. \frac{\underline{I}_{1x}}{\underline{U}_{2x}} \right|_{\underline{I}_2=0} = \frac{1}{jX_L} = \frac{1}{j80} = -j0,0125 \text{ См},$$

$$\underline{A}_{22} = \left. \frac{\underline{I}_{1x}}{\underline{I}_{2x}} \right|_{\underline{U}_2=0} = 1.$$

Входное сопротивление $I—I'$ нагруженного четырехполюсника

$$\underline{Z}_{1\text{вх}} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_H + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_H + \underline{A}_{22}}$$

или при $\underline{Z}_{1\text{вх}} = 40 \text{ Ом}$

$$40 = \frac{(0,8 - j0,1)\underline{Z}_H + (8 - j16)}{-j0,0125\underline{Z}_H + 1},$$

$$\underline{Z}_H(0,8 + j0,4) = 32 + j16,$$

$$\underline{Z}_H = \underline{Z}_{\text{вх}} = 40 \text{ Ом}.$$

Замечание. Равенство $\underline{Z}_{\text{вх}} = R$ несимметричного четырехполюсника достигается при условии $\underline{Z}_C \underline{Z}_L = R^2$, выполняемом для обратных двухполюсников RC и RL .

5.20. Известны коэффициенты матрицы **A** симметричного четырехполюсника (рис. к задаче 5.20): $\underline{A}_{11} = 1,18 \angle -45^\circ$, $\underline{A}_{12} = 7,1 \angle 10^\circ$ Ом, $\underline{A}_{21} = 0,235 \angle -45^\circ$ См.

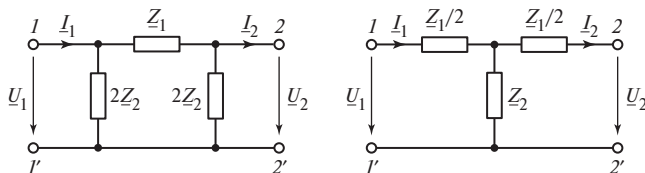


Рис. к задаче 5.20

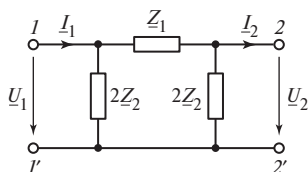


Рис. к задаче 5.21

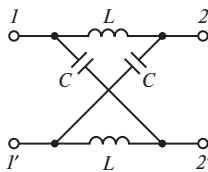


Рис. к задаче 5.22*

Найти сопротивления П-образной и Т-образной схемы замещения четырехполюсника; определить характеристическое сопротивление \underline{Z}_c .

Замечание. При составлении Т- и П-образных схем по заданным коэффициентам матриц **A**, **Z**, **Y**, и **H** возможны отрицательные значения активных сопротивлений, что указывает на невозможность физической реализации указанных схем замещения с помощью пассивных элементов электрической цепи.

5.21. Для П-образного четырехполюсника (рис. к задаче 5.21) даны сопротивления $\underline{Z}_1 = j50$ Ом, $\underline{Z}_2 = -j10$ Ом.

Найти напряжение на сопротивлении нагрузки, равном характеристическому сопротивлению четырехполюсника. Напряжение на входе 1—1' равно 100 В.

5.22*. Найти зависимости характеристического сопротивления \underline{Z}_c и постоянной передачи $\underline{\Gamma} = A + jB$ от частоты для симметричного четырехполюсника (рис. к задаче 5.22*).

5.3. ФИЛЬТРЫ

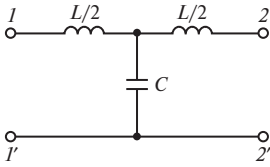


Рис. к задаче 5.23(р)

5.23(р). Параметры Т-образного низкочастотного фильтра типа k известны (рис. 1 к задаче 5.23(р)): $L = 9,6$ Гн, $C = 26,6$ мкФ.

Определить граничные частоты, зависимость характеристического сопротивления фильтра \underline{Z}_c постоянной передачи $\underline{\Gamma} = A + jB$ от частоты.

Построить зависимости отношения U_1/U_2 от частоты для согласованной нагрузки и для случая постоянной нагрузки, равной $k/\sqrt{2}$.

Решение. 1. Параметр k :

$$k = \sqrt{Z_1 Z_2} = \sqrt{(j\omega L) \left(-j \frac{1}{\omega C} \right)} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{4,8}{26,6 \cdot 10^{-6}}} = 600 \text{ Ом.}$$

2. Для низкочастотного фильтра первая граничная частота $f_1 = 0$, вторая граничная частота

$$f_2 = \frac{1}{\pi \sqrt{LC}} = \frac{1}{\pi \sqrt{9,6 \cdot 26,6 \cdot 10^{-6}}} = 20 \text{ Гц, } \omega_2 = 2\pi f_2.$$

3. Характеристическое сопротивление симметричного Т-образного четырехполюсника:

$$\underline{Z}_{cT} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \frac{f^2}{f_2^2}} = \sqrt{\frac{9,6}{26,6 \cdot 10^{-6}}} \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_2} \right)^2} = 600 \sqrt{1 - \left(\frac{f}{20} \right)^2} \text{ Ом.}$$

4. Постоянная передачи $\underline{\Gamma} = A + jB$. Определяем A и B :

в полосе пропускания ($0 \leq f \leq 20$ Гц) постоянная ослабления $A = 0$, постоянная фазы

$$B = \arccos \left[1 - 2 \left(\frac{f}{f_2} \right)^2 \right] = \arccos \left[1 - \frac{f^2}{200} \right],$$

в полосе задерживания ($f \geq 20$ Гц) постоянная ослабления

$$A = \operatorname{arch} \left[2 \left(\frac{f}{f_2} \right)^2 - 1 \right] = \operatorname{arch} \left[\frac{f^2}{200} - 1 \right],$$

постоянная фазы $B = \pi$.

5. Отношение напряжений U_1/U_2 при согласованной нагрузке $Z_H = Z_c$:

в полосе пропускания ($0 \leq f \leq 20$ Гц) $U_1/U_2 = 1$, так как $A = 0$;

в полосе задерживания ($f \geq 20$ Гц)

$$\ln \frac{U_1}{U_2} = \operatorname{arch} \left[\frac{f^2}{200} - 1 \right],$$

$$\left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{f=0} = 1, \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{f=10 \text{ Гц}} = 1, \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{f=20 \text{ Гц}} = 1, \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{f=30 \text{ Гц}} = 6,82.$$

6. Определим отношение напряжений U_1/U_2 при постоянной нагрузке $R_H = k/\sqrt{2} = 425$ Ом.

Так как $\underline{U}_1 = (\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12}/R_H)\underline{U}_2$, то отношение модулей

$$\frac{U_1}{U_2} = |\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12}/425| = \sqrt{\underline{A}_{11}^2 + (|\underline{A}_{12}|/425)^2}.$$

Коэффициенты:

$$\underline{A}_{11} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} = 1 - 2\frac{f^2}{f_2^2} = 1 - \frac{f^2}{200},$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}_1 \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \right) = j\omega L \left(1 - \frac{f^2}{f_2^2} \right) = j2\pi fL \left(1 - \frac{f^2}{400} \right) = j60,3f \left(1 - \frac{f^2}{400} \right),$$

тогда

$$\frac{U_1}{U_2} = \sqrt{\left(1 - \frac{f^2}{200} \right)^2 + 0,02f^2 \left(1 - \frac{f^2}{400} \right)^2},$$

$$\left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{f=0} = 1, \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{f=10 \text{ Гц}} = 1,15, \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{f=20 \text{ Гц}} = 1, \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{f=30 \text{ Гц}} = 3,72.$$

7. Зависимость $U_1/U_2(f)$ (рис. 2 к задаче 5.23(р)).

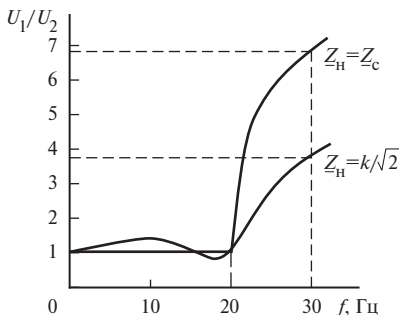


Рис. 2 к задаче 5.23(р)

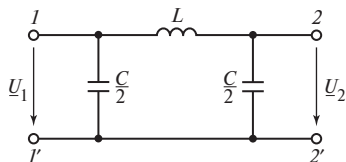


Рис. к задаче 5.24

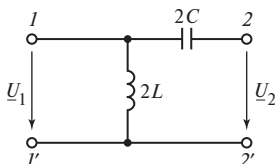


Рис. к задаче 5.27

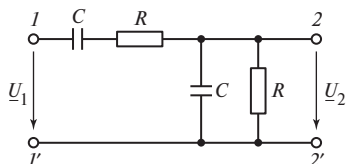


Рис. 1 к задаче 5.28*(р)

Замечание. При постоянной нагрузке фильтра $R_H = k/\sqrt{2}$ его фильтрующие свойства хуже, чем при согласованной нагрузке.

5.24. Для Π -образного низкочастотного фильтра типа k (рис. к задаче 5.24) определить граничные частоты и характеристическое сопротивление Z_c на частотах 10 и 100 кГц при заданных параметрах: $L = 17,5$ мГн, $C = 2,2$ нФ.

Найти отношение напряжений U_1/U_2 при частоте 100 и 50 кГц.

5.25. Высокочастотный Π -образный фильтр типа k имеет $L = 20$ мГн, $C = 2$ мкФ.

Определить постоянную передачи при частоте 200 Гц, ток в согласованной нагрузке при напряжении на входе фильтра 100 В.

5.26. Высокочастотный Т-образный фильтр типа k имеет $L = 0,34$ мГн, $C = 4$ нФ.

Определить, на какой частоте сопротивление согласованной нагрузки активное и равно 300 Ом.

5.27. Найти полосу пропускания и постоянную ослабления A Г-образного высокочастотного фильтра (рис. к задаче 5.27), имеющего $2L = 40$ мГн, $2C = 63,3$ мкФ.

Методическое указание. Г-образный фильтр может рассматриваться как половина Т- и Π -образных фильтров, имеющая одинаковую с ними полосу пропускания и половину постоянной ослабления.

5.28*(p). RC-фильтр (мост Вина) (рис. 1 к задаче 5.28*(p)) используется в качестве звена обратной связи в схемах усиления.

Найти передаточную функцию $H(\omega)$ в режиме холостого хода.

Определить полосу пропускания при условии $U_2/U_1 \geq 1/\sqrt{2}$.

Решение. По методу узловых напряжений находим

$$\underline{U}_2 \left[j\omega C + \frac{1}{R} + \frac{1}{\left(R - j\frac{1}{\omega C} \right)} \right] = \underline{U}_1 \left(\frac{1}{R - j\frac{1}{\omega C}} \right),$$

$$\underline{U}_1 = \left[\left(R - j\frac{1}{\omega C} \right) \left(j\omega C + \frac{1}{R} \right) + 1 \right] \underline{U}_2$$

или

$$\underline{U}_1 = \left[j(\omega CR - \frac{1}{\omega CR}) + 3 \right] \underline{U}_2.$$

Постоянная времени $\tau = RC$, квазирезонансная частота $\omega_0 = 1/\tau$, передаточная функция

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = 1 / \left[3 + j \left(\omega\tau - \frac{1}{\omega\tau} \right) \right].$$

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) — модуль комплекса $\underline{H}(\omega) = U_1/U_2$ (рис. 2 к задаче 5.28*(p)):

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(\omega\tau - \frac{1}{\omega\tau} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}.$$

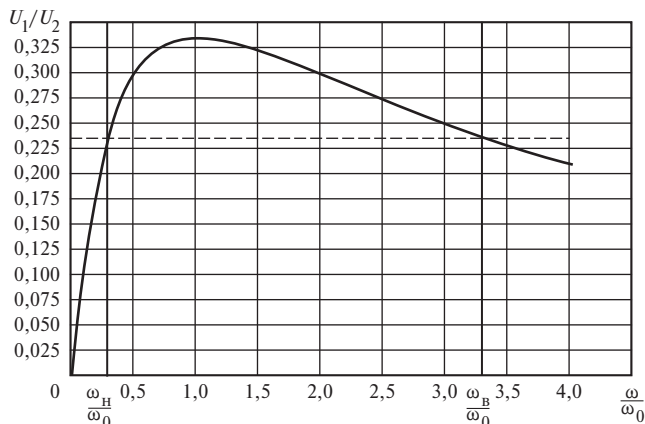


Рис. 2 к задаче 5.28*(p)

При $\omega = \omega_0$ значение $H(\omega) = 1/3$ достигает максимума.

Полоса пропускания определена по уровню $1/\sqrt{2}$ от максимального значения:

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(\frac{\omega_{H,B}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{H,B}}\right)^2}}, \quad 18 = 9 + \left(\frac{\omega_{H,B}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{H,B}}\right)^2, \quad 3 = \frac{|\omega_{H,B}^2 - \omega_0^2|}{\omega_0 \omega_{H,B}}$$

или

$$3\omega_0\omega_B = \omega_B^2 - \omega_0^2, \quad 3\omega_0\omega_H = \omega_0^2 - \omega_H^2 \Rightarrow \omega_B = 3,3\omega_0, \quad \omega_H = 0,3\omega_0.$$

Полоса пропускания $\omega_B - \omega_H = 3\omega_0 = 3/\tau = 3/(RC)$.

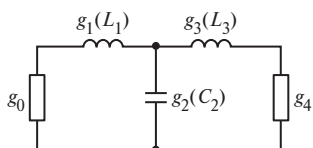


Рис. к задаче 5.29*(р)

5.29*(р). Найти параметры трехэлементного фильтра Баттеворта нижних частот (рис. к задаче 5.29*(р)), если сопротивления генератора и нагрузки равны 75 Ом, а граничная частота равна 10 кГц.

Решение. Для трехэлементного фильтра $n = 3$, (элементы g_0 и g_4 — нормированные проводимости генератора и нагрузки).

Согласно данным табл. 5.6 для Т-образной схемы замещения фильтра с максимально плоской характеристикой (фильтра Баттеворта)

$$g_0 = g_4 = 1, \quad g_1 = 2 \sin\left(\frac{(2-1)\pi}{6}\right) = 1,$$

$$g_2 = 2 \sin\left(\frac{(4-1)\pi}{6}\right) = 2, \quad g_3 = 2 \sin\left(\frac{(6-1)\pi}{6}\right) = 1.$$

Схема замещения содержит пять нормированных элементов электрической цепи.

Переход к ненормированным величинам для $\omega_{гр} = 2\pi \cdot 10^4$ 1/с дает значения элементов фильтра:

$$g_0 = g_4 = 1/R_0 = 1/75 = 0,0133 \text{ См},$$

$$L_1 = L_3 = \frac{1}{\omega_{гр} g_0 g_1} = \frac{75}{2\pi \cdot 10^4 \cdot 1} = 1,19 \cdot 10^{-3} \text{ Гн},$$

$$C_2 = \frac{g_0 g_2}{\omega_{гр}} = \frac{2}{75 \cdot 2\pi \cdot 10^4} = 4,24 \cdot 10^{-7} \text{ Ф} = 42,4 \text{ мкФ}.$$

5.30*(р). Найти параметры элементов фильтра Чебышева (рис. к задаче 5.30*(р)), имеющего неравномерность в полосе пропускания $\alpha = 0,1$ дБ, ослабление на частоте, превышающей в 5 раз граничную частоту $\omega = 5\omega_{гр}$, более 20 дБ, если $f_{гр} = 10$ кГц, а сопротивление нагрузки равно 75 Ом.

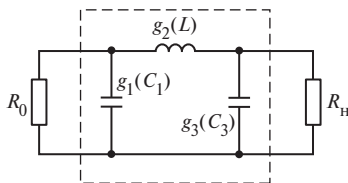


Рис. к задаче 5.30*(р)

Решение. Определяем число элементов

$$n = \frac{\text{arch}\left[\left(10\frac{90}{10} - 1\right) / \left(10\frac{0,1}{10} - 1\right)\right]^{1/2}}{\text{arch}5} = \frac{\text{arch}\sqrt{90/0,2}}{2,29} = 2,97,$$

выбираем целое значение $n = 3$ для П-образного фильтра.

Определяем нормированные g -параметры фильтра (табл. 5.6):

$$g_0 = g_4 = 1, \alpha_1 = \sin \frac{\pi}{6} = 0,5,$$

$$\beta = \ln(\text{cth}(0,1/17,37)) = \ln(\text{cth}(5,76 \cdot 10^{-3})) = 5,16,$$

$$\theta = \text{sh}(5,16/6) = 0,97,$$

$$b_1 = \theta^2 + \sin^2 \frac{\pi}{3} = 0,97^2 + 0,75 = 1,69,$$

$$a_2 = \sin \frac{3\pi}{6} = 1, b_2 = \theta^2 + \sin^2 \frac{2\pi}{3} = 1,69,$$

$$a_3 = \sin \frac{5\pi}{6} = -0,5, b_3 = 0,941.$$

Следовательно, нормированные элементы фильтра

$$g_0 = g_4 = 1, g_1 = 2a_1/\theta = 1/0,97 = 1,03,$$

$$g_2 = \frac{4a_1a_2}{b_1g_1} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot 1}{1,69 \cdot 1,03} = 1,15, g_3 = g_1 = 1,03.$$

Определяем ненормированные значения элементов фильтра Чебышева:

$$R_0 = R_n = 75 \text{ Ом},$$

$$C_1 = C_3 = \frac{1}{\omega_{\text{гр}} g_1 R_0} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^4 \cdot 1,03 \cdot 75} = 2,06 \cdot 10^{-7} \text{ Ф} = 20,6 \text{ мкФ},$$

$$L_2 = \frac{g_2 R_0}{\omega_{\text{гр}}} = \frac{1,15 \cdot 75}{10^4} = 8,63 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} = 8,63 \text{ мГн}.$$

5.4. ДИАГНОСТИКА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

5.31(р). По данным измерений токов и напряжений четырехполюсника (рис. к задаче 5.31(р)) в двух режимах:

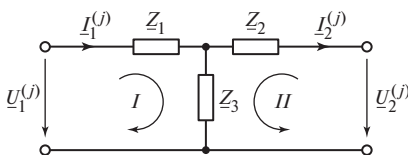


Рис. к задаче 5.31(р)

при $j = 1$

$$\underline{I}_1^{(1)} = 1 \text{ А}, \underline{I}_2^{(1)} = 1 \text{ А}, \underline{U}_1^{(1)} = 2 \text{ В}, \underline{U}_2^{(1)} = 3 \text{ В},$$

при $j = 2$ (режим холостого хода)

$$\underline{I}_1^{(2)} = 1 \text{ А}, \underline{I}_2^{(2)} = 0, \underline{U}_1^{(2)} = (1 + j) \text{ В}.$$

Требуется определить сопротивления $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$.

Решение. Для первого режима ($j = 1$) составляем систему уравнений по второму закону Кирхгофа для контуров I и II

$$\underline{I}_1^{(1)} \underline{Z}_1 + (\underline{I}_1^{(1)} + \underline{I}_2^{(1)}) \underline{Z}_3 = \underline{U}_1^{(1)},$$

$$\underline{I}_2^{(1)} \underline{Z}_2 + (\underline{I}_1^{(1)} + \underline{I}_2^{(1)}) \underline{Z}_3 = \underline{U}_2^{(1)}$$

или в численных значениях

$$1 \cdot \underline{Z}_1 + 2 \cdot \underline{Z}_3 = 2, \quad (1)$$

$$1 \cdot \underline{Z}_2 + 2 \cdot \underline{Z}_3 = 3. \quad (2)$$

Дополняем ее уравнением, составленным для контура I по данным второго режима ($j = 2$)

$$\underline{I}_1^{(2)} \underline{Z}_1 + (\underline{I}_1^{(2)} + \underline{I}_2^{(2)}) \underline{Z}_3 = \underline{U}_1^{(2)} \text{ или } 1 \cdot \underline{Z}_1 + 1 \cdot \underline{Z}_3 = 1 + j1. \quad (3)$$

Вычитая из уравнения (1) уравнение (3), находим $\underline{Z}_3 = 1 - j$ Ом.

Подставляя найденные значения \underline{Z}_3 в уравнения (2), (3), получаем $\underline{Z}_1 = j2$ Ом, $\underline{Z}_2 = 1 + j2$ Ом.

5.32(р). В результате проведения диагностических экспериментов (рис. 1 и 2 к задаче 5.32(р)) определены узловые напряжения цепи в первом ($j = 1$) $\underline{U}_1^{(1)} = 0,5$ В, $\underline{U}_2^{(1)} = -j0,5$ В и втором ($j = 2$) $\underline{U}_1^{(2)} = -j0,5$ В, $\underline{U}_2^{(2)} = 0,5 - j1$ В режимах.

Определить сопротивления всех ветвей цепи и значения параметров R_1, L_1, C_2, R_3 ветвей цепи при $\omega = 100 \text{ с}^{-1}$.

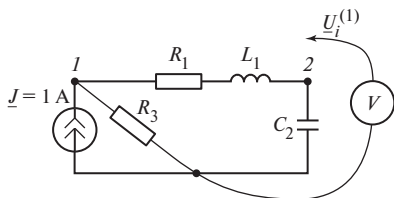


Рис. 1 к задаче 5.32(р)

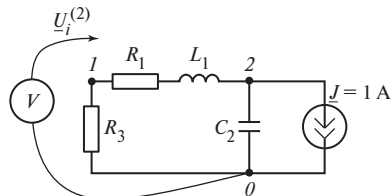


Рис. 2 к задаче 5.32(р)

Решение. Составляем матрицу узловых сопротивлений

$$\underline{Z}^y = \frac{1}{\underline{I}} \underline{U}^y = \frac{1}{\underline{I}} \begin{bmatrix} \underline{U}_1^{(1)} & \underline{U}_1^{(2)} \\ \underline{U}_2^{(1)} & \underline{U}_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & -j0,5 \\ -j0,5 & 0,5 - j1 \end{bmatrix} \text{ Ом.}$$

По ней находим матрицу узловых проводимостей цепи

$$\underline{Y}^y = (\underline{Z}^y)^{-1} = \frac{\underline{I}}{\det \underline{U}^y} \begin{bmatrix} \underline{U}_2^{(2)} & -\underline{U}_1^{(2)} \\ -\underline{U}_2^{(1)} & \underline{U}_1^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{0,5 - 0,5j} \begin{bmatrix} 0,5 - j & 0,5j \\ 0,5j & 0,5 \end{bmatrix} \text{ См.}$$

Здесь $\det \mathbf{U}^Y = \underline{U}_1^{(1)} \underline{U}_2^{(2)} - \underline{U}_2^{(1)} \underline{U}_1^{(2)} = 0,5 - j0,5 \text{ В}^2$. Недиагональный элемент матрицы \mathbf{Y} равен проводимости первой ветви, взятой с обратным знаком. Следовательно, для сопротивления этой ветви получаем

$$R_1 + j\omega L_1 = -\frac{\det \mathbf{U}^Y}{\underline{I}} \left(-\frac{1}{\underline{U}_1^{(2)}} \right) = -\frac{0,5 - 0,5j}{0,5j} = 1 + j1 \text{ Ом.}$$

Сумма элементов первой строки (первого столбца) матрицы \mathbf{Y} равна проводимости ветви 3, следовательно, сопротивление ветви 3

$$R_3 = \frac{\det \mathbf{U}^Y}{\underline{I}} \left(\frac{1}{\underline{U}_2^{(2)} - \underline{U}_1^{(2)}} \right) = -\frac{0,5 - 0,5j}{0,5 - 0,5j} = 1 \text{ Ом.}$$

Сумма элементов второй строки (второго столбца) матрицы \mathbf{Y} равна проводимости ветви 2, следовательно, для сопротивления этой ветви получаем

$$\frac{1}{j\omega C_2} = \frac{\det \mathbf{U}^Y}{\underline{I}} \left(\frac{1}{\underline{U}_1^{(1)} - \underline{U}_2^{(1)}} \right) = \frac{0,5 - j0,5}{0,5 + j0,5} = -j1 \text{ Ом.}$$

Окончательно имеем:

$$R_1 = 1 \text{ Ом}, L_1 = 10^{-2} \text{ Гн}, R_3 = 1 \text{ Ом}, C_2 = 10^{-2} \text{ Ф.}$$

5.33. Для фильтра обратной последовательности в двух диагностических экспериментах (рис. 1 и 2 к задаче 5.33) измерены узловые напряжения $\underline{U}_1^{(1)}, \underline{U}_2^{(1)}, \underline{U}_3^{(1)}, \underline{U}_1^{(2)}, \underline{U}_2^{(2)}, \underline{U}_4^{(2)}$.

Записать в общем виде выражения для определения по этим напряжениям сопротивлений всех ветвей цепи.

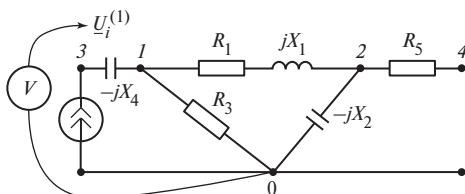


Рис. 1 к задаче 5.33 ($j = 1$)

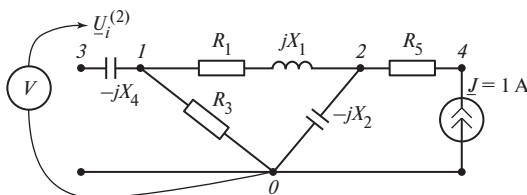


Рис. 2 к задаче 5.33 ($j = 2$)

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ГЛ. 5

- 5.1. $\underline{A}_{11} = \pm 0,5$; $\underline{A}_{12} = -j10 \text{ Ом}$; $\underline{A}_{21} = -j0,05 \text{ См}$; $\underline{A}_{22} = 1$.
- 5.2. $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = -1,5$; $\underline{A}_{12} = j50 \text{ Ом}$; $\underline{A}_{21} = -j0,025 \text{ См}$.
- 5.3. $\underline{A}_{11} = 1,33$; $\underline{A}_{12} = j50 \text{ Ом}$; $\underline{A}_{21} = -j0,033 \text{ См}$; $\underline{A}_{22} = 2$; $\underline{Z}_{11} = j40 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_{12} = j30 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_{21} = j30 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_{22} = j60 \text{ Ом}$; $\underline{Y}_{11} = -j0,04 \text{ См}$; $\underline{Y}_{12} = j0,02 \text{ См}$; $\underline{Y}_{21} = j0,02 \text{ См}$; $\underline{Y}_{22} = -j0,0267 \text{ См}$.
- 5.4. $\underline{A}_{11} = w_1/w_2$; $\underline{A}_{12} = 0$; $\underline{A}_{21} = 1/jX_M$; $\underline{A}_{22} = w_2/w_1$.
- 5.5. $\underline{Z}_{\text{BX}1} = 0,25 \underline{Z}_2$.
- 5.6. $I_1 = 3 \text{ мА}$, $I_2 = 1,2 \text{ мА}$.
- 5.7. $\underline{U}_1 = 220\sqrt{2} \angle -45^\circ = 311 \angle -45^\circ \text{ В}$; $\underline{I}_1 = 22,4 \angle 10,3^\circ \text{ А}$.
- 5.8. $\underline{I}_{2\text{к}} = (2 + j4) = 4,47 \angle 63,4^\circ \text{ А}$.
- 5.9. $\underline{U}_1 = 46 \angle 0 \text{ В}$; $\underline{I}_1 = 2,91 \angle 63,45^\circ \text{ А}$.
- 5.10. $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = 0$; $\underline{A}_{12} = j10 \text{ Ом}$; $\underline{A}_{21} = 1/(-j10) = j0,1 \text{ См}$.
- 5.11. $\underline{Z}_{1\text{T}} = -j25 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_{2\text{T}} = j10 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_{3\text{T}} = j50 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_{1\Pi} = -j100 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_{2\Pi} = j40 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_{3\Pi} = -j20 \text{ Ом}$.
- 5.12. а) $\underline{A}_{11} = 0,25 - j1,25$; $\underline{A}_{12} = 25 - j175 \text{ Ом}$; $\underline{A}_{21} = -(25 + j175)10^{-4} \text{ См}$; $\underline{A}_{22} = -0,25 - j0,25$;
 б) $\underline{Z}_{11} = (200 + j400) \text{ Ом}$; $\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_{21} = j400 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_{22} = j200 \text{ Ом}$;
 в) $\underline{Y}_{11} = (4 + j8)10^{-3} \text{ См}$; $\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21} = (-8 - j16)10^{-3} \text{ См}$;
 $\underline{Y}_{22} = (16 + j12)10^{-3} \text{ См}$.
- 5.13. $\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & j10 \\ j0,1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$5.14. \underline{H}_{11} = \underline{Z}; \underline{H}_{12} = 0; \underline{H}_{21} = \underline{Z}; \underline{H}_{22} = \underline{Y}; \underline{A}_{11} = -\underline{ZY}/\beta; \underline{A}_{12} = \underline{Z}/\beta; \underline{A}_{21} = -\underline{Y}/\beta; \\ \underline{A}_{22} = 1/\beta; \underline{Z}_{11} = \underline{Z}; \underline{Z}_{12} = 0; \underline{Z}_{21} = -\beta/\underline{Y}; \underline{Z}_{22} = 1/\underline{Y}; \underline{Y}_{11} = 1/\underline{Z}; \underline{Y}_{12} = 0; \\ \underline{Y}_{21} = \beta/\underline{Y}; \underline{Y}_{22} = \underline{Y}$$

$$5.15. \underline{A}_{11} = j1; \underline{A}_{12} = (20 + j20) \text{ Ом}; \underline{A}_{21} = (-0,1 + j0,05) \text{ См}; \underline{A}_{22} = (1 + j2); \\ \underline{Z}_1 = (12 - j4) \text{ Ом}; \underline{Z}_2 = (24 - j8) \text{ Ом}; \underline{Z}_3 = (-8 - j4) \text{ Ом}.$$

$$5.16. \underline{Z}_c = -j44,8 \text{ Ом}; \underline{\Gamma} = A + jB = 0,963 + j, \text{ где } A = 0,963 \text{ Нп и } B = \pi \text{ рад}.$$

$$5.17. \underline{Z}_c = 603 \text{ Ом}; \underline{\Gamma} = A = 1 \text{ Нп}.$$

$$5.18. \underline{Z}_c = 10 \text{ Ом}; \underline{\Gamma} = 0 + j\frac{\pi}{2}; A = 0; B = \frac{\pi}{2} \text{ рад}.$$

$$5.19. \underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_{\text{н}} = R = 40 \text{ Ом}.$$

$$5.20. 1) \underline{Z}_1 = (7 + j1,23) \text{ Ом}; 2) \underline{Z}_2 = (8,32j) \text{ Ом}; \underline{Z}_c = 5,07 \angle 31,4^\circ \text{ Ом};$$

$$2) \underline{Z}_1/2 = (-2 - j3) \text{ Ом}; \underline{Z}_2 = 3 + j3 \text{ Ом};$$

$$3) \underline{Z}_c = 2,06 \angle -43,5^\circ \text{ Ом}.$$

$$5.21. \underline{Z}_c = \mp j44,7 \text{ Ом, при } \underline{Z}_c = -j44,7 \text{ Ом } \underline{U}_2 = 38,3 \text{ В; при } \underline{Z}_c = j44,7 \text{ Ом} \\ \underline{U}_2 = 261 \text{ В}.$$

$$5.22. \underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{L}}{C}} - \text{const}, A = 0, B = \arccos \frac{(1 - \omega^2 LC)}{(1 + \omega^2 LC)}.$$

5.23. Режим согласованной нагрузки:

$$\frac{U_1}{U_2} = 1 \text{ при } 0 \leq f < 20 \text{ Гц};$$

$$\ln \frac{U_1}{U_2} = \text{arch} \left(\frac{f^2}{200} - 1 \right) \text{ при } f > 20 \text{ Гц}.$$

Режим постоянной нагрузки:

$$\underline{Z}_c = k \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_{\text{гр}}} \right)^2} = 600 \sqrt{1 - \left(\frac{f}{20} \right)^2}; f_1 = 0; f_2 = 20 \text{ Гц}.$$

5.24. Граничные частоты $f_1 = 0$ и $f_2 = 51,3 \text{ кГц}$.

$$\text{Характеристическое сопротивление: } \underline{Z}_c \Big|_{f=10 \text{ кГц}} = 2880 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_c \Big|_{f=100 \text{ кГц}} = -j2750 \text{ Ом}.$$

Отношение напряжений:

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \Big|_{f=10 \text{ кГц}} = 1 \angle 22,5^\circ; \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \Big|_{f=100 \text{ кГц}} = 13,1 \angle \pi.$$

$$5.25. \underline{\Gamma} = 2,64 + j\pi, \text{ где } A = 2,64 \text{ Нп}; B = \pi \text{ рад}; I_2 = 84,7 \text{ мА}.$$

5.26. $f = 140$ кГц.

5.27. Граничные частоты полосы пропускания: $f_1 = 10$ кГц, $f_2 = \infty$; постоянная ослабления $A = \text{arch}(f_1/f)$.

5.28. Передаточная функция $\underline{H}(\omega) = 1/[3 + j(\omega - 1/(\omega\tau))]$, где $\tau = RC$; полоса пропускания $\omega_{\text{в}} - \omega_{\text{н}} = 3/\tau$.

5.29. $g_0 = g_4 = 0,0133$ См; $L_1 = L_3 = 1,19$ мГн; $C_2 = 0,424$ мкФ.

5.30. $R_0 = R_{\text{н}} = 75$ Ом; $C_1 = C_3 = 0,206$ мкФ; $L_2 = 1,37$ мГн.

5.31. $\underline{Z}_1 = j2$ Ом; $\underline{Z}_2 = 1 + j2$ Ом; $\underline{Z}_3 = 1 - j$ Ом.

5.32. $R_1 = 1$ Ом; $L_1 = 10^{-2}$ Гн; $R_3 = 1$ Ом; $C_2 = 10^{-2}$ Ф.

5.33. $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 = \frac{\underline{U}_1^{(1)}\underline{U}_2^{(2)} - \underline{U}_2^{(1)}\underline{U}_1^{(2)}}{\underline{I}\underline{U}_1^{(2)}};$

$$\underline{Z}_2 = -jX_2 = \frac{\underline{U}_1^{(1)}\underline{U}_2^{(2)} - \underline{U}_2^{(1)}\underline{U}_1^{(2)}}{\underline{I}(\underline{U}_2^{(2)} - \underline{U}_1^{(2)})};$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 = \frac{\underline{U}_1^{(1)}\underline{U}_2^{(2)} - \underline{U}_2^{(1)}\underline{U}_1^{(2)}}{\underline{I}(\underline{U}_2^{(2)} - \underline{U}_1^{(2)})};$$

$$\underline{Z}_4 = -jX_4 = \frac{\underline{U}_3^{(1)} - \underline{U}_1^{(1)}}{\underline{I}}; \underline{Z}_5 = R_5 = \frac{\underline{U}_4^{(2)} - \underline{U}_2^{(2)}}{\underline{I}}.$$