

К комплексной мощности применима теорема Теллегена в комплексной форме:

$$\sum_{k=1}^n \underline{U}_k \underline{I}_k^* = \sum_{k=1}^n \underline{S}_k = 0. \quad (3.30)$$

Уравнение (3.30) отражает баланс комплексных мощностей: сумма комплексных мощностей всех n ветвей цепи равна нулю. Равенство (3.30) можно записать и в другой форме: сумма комплексных мощностей, отдаваемых независимыми источниками, равна сумме комплексных мощностей, потребляемых остальными ветвями электрической цепи:

$$\sum_{k=1}^n \underline{S}_{k\text{ист}} = \sum_{k=1}^n \underline{S}_{k\text{пот}}. \quad (3.31)$$

Из условия баланса комплексных мощностей следуют условия баланса активных и реактивных мощностей:

$$\sum_{k=1}^n P_{k\text{ист}} = \sum_{k=1}^n P_{k\text{пот}}, \quad (3.32)$$

$$\sum_{k=1}^n Q_{k\text{ист}} = \sum_{k=1}^n Q_{k\text{пот}}. \quad (3.33)$$

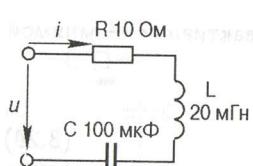
Задача 3.5. Проверить баланс активных и реактивных мощностей в цепи, приведенной на рис. 3.10, если значение тока в ней

$$i(t) = 2 \cos(10^3 t - \pi/6), \text{ А.}$$

Пример решения. Чтобы рассчитать мощность источника напряжения, необходимо определить мгновенное или комплексное значение входного напряжения или найти действующее значение напряжения на входе цепи и угол сдвига между входным напряжением и входным током.

Комплексное входное сопротивление цепи, Ом,

$$\begin{aligned} Z_{cx} &= R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = 10 + j \left(10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-2} - \frac{1}{10^3 \cdot 10^{-4}} \right) = \\ &= 10 + j10 = 10\sqrt{2}e^{j\pi/4}. \end{aligned}$$



Фаза (аргумент) комплексного входного сопротивления цепи $\varphi_{bx} = \pi/4$ показывает угол сдвига между входным током и входным напряжением.

Действующее значение напряжения на входе цепи $U = Z_{cx} I = 10\sqrt{2}\sqrt{2} = 20$ В.

Активная мощность источника $P_{\text{ист}} = UI \times \cos \varphi_{bx} = 20\sqrt{2} \cos(\pi/4) = 20\sqrt{2}\sqrt{2}/2 = 20$ Вт.

Рис. 3.10

Реактивная мощность источника $Q_{\text{ист}} = UI \sin \varphi_{bx} = 20\sqrt{2} \times \sin(\pi/4) = 20\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 20$ ВАр.

Активная мощность, рассеиваемая в цепи, $P_{\text{потр}} = I^2 R = (\sqrt{2})^2 \cdot 10 = 20$ Вт.

Реактивная мощность в цепи $Q_{\text{потр}} = I^2(\omega L - 1/\omega C) = (\sqrt{2})^2(20 - 10) = 20$ ВАр.

$\left. \begin{array}{l} P_{\text{ист}} = P_{\text{потр}} \\ Q_{\text{ист}} = Q_{\text{потр}} \end{array} \right\}$ баланс мощностей выполняется.

Комплексная мощность цепи $S = P + jQ = 20 + j20$, ВА.

Полная мощность цепи $S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 20\sqrt{2}$, ВА.

3.2. Частотные характеристики

3.2.1. Комплексная передаточная функция

Важнейшей характеристикой линейной электрической цепи является ее комплексная передаточная функция $H(j\omega)$. Представим электрическую цепь в виде четырехполюсника (рис. 3.11). Комплексная передаточная функция цепи определяется как отношение комплексной амплитуды реакции цепи к комплексной амплитуде входного воздействия.

В зависимости от типов входного воздействия и реакции цепи различают следующие виды $H(j\omega)$.

1. Комплексная передаточная функция по напряжению

$$H_u(j\omega) = \underline{U}_{m2}/\underline{U}_{m1} = \underline{U}_2/\underline{U}_1, \quad (3.34)$$

где $\underline{U}_{m1}, \underline{U}_{m2}, \underline{U}_1, \underline{U}_2$ — комплексные амплитуды и комплексные действующие значения напряжения воздействия на входе и напряжения реакции на выходе.

2. Комплексная передаточная функция по току

$$H_i(j\omega) = \underline{I}_{m2}/\underline{I}_{m1} = \underline{I}_2/\underline{I}_1, \quad (3.35)$$

где $\underline{I}_{m1}, \underline{I}_{m2}, \underline{I}_1, \underline{I}_2$ — комплексные амплитуды и действующие значения тока воздействия и тока реакции.

3. Комплексное передаточное сопротивление

$$H_Z(j\omega) = \underline{U}_{m2}/\underline{I}_{m1} = \underline{U}_2/\underline{I}_1. \quad (3.36)$$

4. Комплексная передаточная проводимость

$$H_Y(j\omega) = \underline{I}_{m2}/\underline{U}_{m1} = \underline{I}_2/\underline{U}_1. \quad (3.37)$$

Из данных определений следует, что $H_u(j\omega)$ и $H_i(j\omega)$ являются безразмерными величинами, а $H_Z(j\omega)$ и $H_Y(j\omega)$ имеют соответственно размерности сопротивления и проводимости.

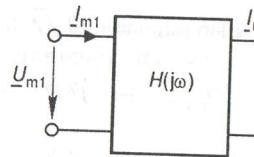


Рис. 3.11

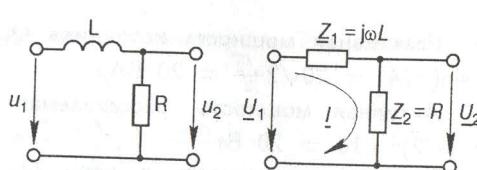


Рис. 3.12

Рис. 3.13

Комплексные передаточные функции цепи являются функцией частоты ω сигнала воздействия и зависят только от параметров цепи.

Как всякую комплексную величину $H(j\omega)$, можно представить в показательной, тригонометрической и алгебраической форме:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}; \quad (3.38)$$

$$H(j\omega) = H(\omega) \cos \varphi(\omega) + jH(\omega) \sin \varphi(\omega); \quad (3.39)$$

$$H(j\omega) = \operatorname{Re}(H(j\omega)) + j\operatorname{Im}(H(j\omega)); \quad (3.40)$$

Наряду с передаточными функциями (3.34)–(3.37) при анализе цепей находят применение комплексные функции, определяющиеся отношением комплексной реакции к комплексному воздействию на входе электрической цепи (см. рис. 3.11):

$$Z_{bx}(j\omega) = \underline{U}_1/I_1; \quad Y_{bx}(j\omega) = I_1/\underline{U}_1.$$

Эти функции носят название комплексных входных функций цепи.

Задача 3.6. Записать комплексную передаточную функцию цепи (рис. 3.12) по напряжению.

Эквивалентная символическая схема цепи приведена на рис. 3.13.

Комплексная передаточная функция цепи по напряжению: $H(j\omega) = \underline{U}_{m2}/\underline{U}_{m1} = \underline{U}_2/\underline{U}_1$.

В данной цепи протекает один ток I . Следовательно,

$$H(j\omega) = \frac{I Z_2}{I(Z_1 + Z_2)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R}{R + j\omega L}.$$

Для любой цепи, эквивалентная символическая схема которой может быть сведена к виду (рис. 3.13), комплексная передаточная функция цепи по напряжению может быть записана через отношение комплексных сопротивлений:

$$H(j\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (3.41)$$

3.2.2. Частотные характеристики цепей

Представим комплексную передаточную функцию в показательной форме:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}.$$

Модуль комплексной передаточной функции $H(\omega) = |H(j\omega)|$ называется амплитудно-частотной характеристикой цепи (АЧХ), аргумент комплексной передаточной функции $\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$ — фазо-частотной характеристикой цепи (ФЧХ).

Таким образом, амплитуда сигнала на выходе цепи определяется АЧХ (модулем комплексной передаточной функции), а фаза — ФЧХ (аргументом комплексной передаточной функции):

$$\begin{aligned} U_2(\omega) &= H_u(\omega)U_1(\omega); \\ \varphi_{u2}(\omega) &= \varphi_H(\omega) + \varphi_{u1}(\omega). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Если обозначить вещественную и мнимую части комплексной передаточной функции цепи:

$$H_1(\omega) = \operatorname{Re}(H(j\omega)) = H(\omega) \cos \varphi(\omega);$$

$$H_2(\omega) = \operatorname{Im}(H(j\omega)) = H(\omega) \sin \varphi(\omega),$$

то АЧХ и ФЧХ будут связаны с вещественной и мнимой частями комплексной передаточной функции $H_1(\omega)$ и $H_2(\omega)$ соотношениями:

$$H(\omega) = \sqrt{H_1^2(\omega) + H_2^2(\omega)}; \quad (3.43)$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{H_2(\omega)}{H_1(\omega)}. \quad (3.44)$$

Задача 3.7. Определить и построить графики АЧХ и ФЧХ по напряжению цепи (рис. 3.14).

Пример решения. АЧХ является модулем, а ФЧХ — аргументом комплексной передаточной функции, которая может быть определена по формуле (3.41):

$$H(j\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R + 1/j\omega C}{2R + 1/j\omega C} = \frac{1 + j\omega CR}{1 + j2\omega CR},$$

АЧХ цепи

$$H(\omega) = \frac{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}{\sqrt{1 + (2\omega CR)^2}},$$

ФЧХ цепи

$$\varphi_H(\omega) = \arctg(\omega CR) - \arctg(2\omega CR).$$

При $\omega = 0$ $H(\omega) = 1$ и $\varphi_H(\omega) = 0$, при $\omega \rightarrow \infty$ $H(\omega) = 0,5$ и $\varphi_H(\omega) = 0$.

График АЧХ для цепей первого порядка в общем случае (без задания численных значений элементов цепи) может быть построен по двум точкам. График АЧХ рассматриваемой цепи приведен на рис. 3.15.

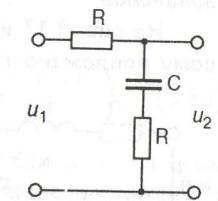


Рис. 3.14

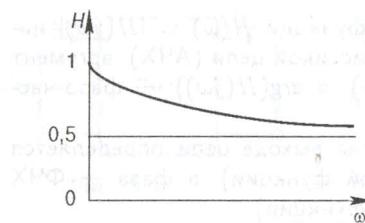


Рис. 3.15

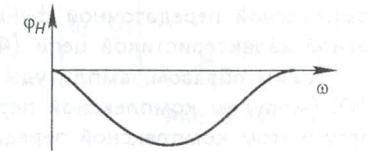


Рис. 3.16

Для построения графика ФЧХ необходимо определить, в области положительных или отрицательных значений будет располагатьсяся функция $\varphi_H(\omega)$. Для цепей первого порядка кривая $\varphi_H(\omega)$ не может пересекать ось ординат (ω). Так как $\arctg(\omega CR) < \arctg(2\omega CR)$, то кривая $\varphi_H(\omega)$ будет располагаться в области отрицательных значений. График ФЧХ рассматриваемой цепи приведен на рис. 3.16.

Если необходимо для цепи построить графики АЧХ в общем случае, то для цепей первого порядка достаточно на основе анализа схемы получить значения АЧХ при $\omega = 0$, $\omega \rightarrow \infty$ и по двум точкам построить график. ФЧХ для некоторых цепей также легко построить по двум точкам, а в случае отсутствия такой возможности достаточно проанализировать характер цепи на промежуточных частотах.

3.2.3. Колебательные контуры и их параметры

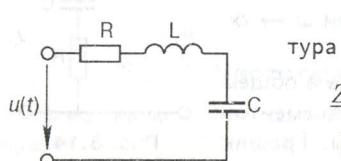
Простейший колебательный контур содержит индуктивный и емкостный элементы, соединенные последовательно (последовательный контур) или параллельно (параллельный контур). В последовательном контуре возникает резонанс напряжений, а в параллельном — резонанс токов.

Резонансом называют такое состояние пассивной электрической цепи, состоящей из разнохарактерных реактивных элементов, при котором фазовый сдвиг между входным током и входным напряжением равен нулю. При этом входное реактивное сопротивление и/или входная реактивность цепи равны нулю.

Частоту, на которой наблюдается явление резонанса, называют *резонансной*.

На рис. 3.17 изображена схема последовательного контура, к которому приложено гармоническое напряжение с частотой ω .

Комплексное входное сопротивление контура на данной частоте



$$\underline{Z} = R + jX = R + j(\omega L - 1/\omega C). \quad (3.45)$$

При резонансе $X = 0$ или $\omega_0 L - 1/\omega_0 C = 0$, отсюда получаем уравнение резонансной ча-

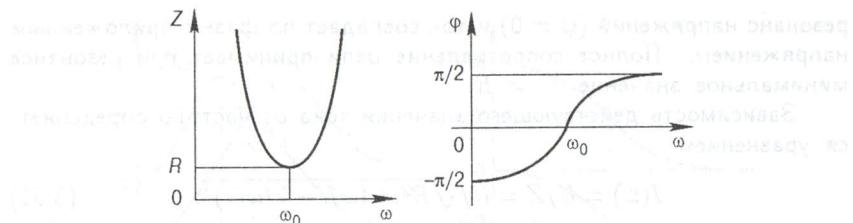


Рис. 3.18

ты ω_0 :

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}. \quad (3.46)$$

На резонансной частоте сопротивление контура носит чисто резистивный характер, т.е. $Z = R$, ток совпадает по фазе с приложенным напряжением и достигает максимального значения $I_0 = U/R$. Сопротивления индуктивности и емкости на резонансной частоте ω_0 равны друг другу:

$$\omega_0 L = 1/\omega_0 C = \sqrt{L/C} = \rho. \quad (3.47)$$

Величина ρ называется *характеристическим сопротивлением* контура.

Резонансные свойства контура характеризуются его *добротностью*, которая в общем случае определяется как

$$Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{\rho}{R}. \quad (3.48)$$

Отношение действующих значений напряжений на реактивных элементах (L и C) к действующему значению приложенного напряжения при резонансе

$$\frac{U_{L_0}}{U} = \frac{U_{C_0}}{U} = \frac{I_0 \omega_0 L}{U} = \frac{I_0}{\omega_0 C U} = \frac{\rho}{R} = Q. \quad (3.49)$$

Таким образом, добротность Q показывает, во сколько раз напряжение на реактивных элементах превышают приложенное напряжение на резонансной частоте.

На рис. 3.18 изображены зависимости $Z(\omega)$, $\varphi(\omega)$, определяемые формулами:

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}; \quad \varphi(\omega) = \arctg \left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \right). \quad (3.50)$$

Из представленных характеристик следует, что при $\omega < \omega_0$ цепь имеет емкостный характер ($\varphi < 0$) и ток опережает по фазе приложенное напряжение, при $\omega > \omega_0$ характер цепи индуктивный ($\varphi > 0$) и ток отстает по фазе от приложенного напряжения; при $\omega = \omega_0$ наступает

резонанс напряжений ($\varphi = 0$) и ток совпадает по фазе с приложенным напряжением. Полное сопротивление цепи принимает при резонансе минимальное значение $Z = R$.

Зависимость действующего значения тока от частоты определяется уравнением

$$I(\omega) = U/Z = U/\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}. \quad (3.51)$$

Анализ зависимости $I(\omega)$ показывает, что ток достигает максимума при резонансе $\omega = \omega_0$ и равен

$$I_0 = U/R. \quad (3.52)$$

Комплексные передаточные функции по напряжению для элементов C и L равны:

$$H_C(j\omega) = \frac{U_C}{U} = \frac{1}{j\omega C[R + j(\omega L - 1/\omega C)]}; \quad (3.53)$$

$$H_L(j\omega) = \frac{U_L}{U} = \frac{j\omega L}{R + j(\omega L - 1/\omega C)}. \quad (3.54)$$

Из уравнений (3.53) и (3.54) можно получить АЧХ и ФЧХ последовательного контура:

$$H_C(\omega) = |H_C(j\omega)| = \frac{1}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}};$$

$$H_L(\omega) = |H_L(j\omega)| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (3.55)$$

$$\varphi_C(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg \left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \right);$$

$$\varphi_L(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg \left(\frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \right). \quad (3.56)$$

Зависимости $I(\omega)$, $H_L(\omega)$, $H_C(\omega)$ называются резонансными характеристиками.

На рис. 3.19 приведены графики АЧХ и ФЧХ последовательного контура, определяемые формулами (3.55), (3.56).

Максимальные значения $H_C(\omega)$ и $H_L(\omega)$ достигаются на частотах ω_C и ω_L , которые могут быть определены из уравнений:

$$\omega_C = \omega_0 \sqrt{\frac{2Q^2 - 1}{2Q^2}}; \quad \omega_L = \omega_0 \sqrt{\frac{2Q^2 + 1}{2Q^2}}. \quad (3.57)$$

При этом АЧХ $H_C(\omega)$ и $H_L(\omega)$ примут максимальные значения, равные

$$H_{Cm} = H_{Lm} = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}} = \frac{2}{d\sqrt{4 - d^2}}. \quad (3.58)$$

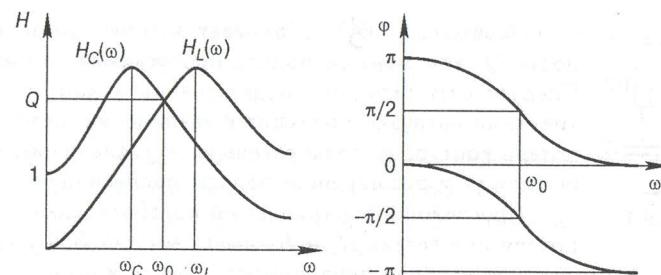


Рис. 3.19

Анализ полученных зависимостей показывает, что с увеличением добротности Q (уменьшением затухания d) частоты ω_C и ω_L сближаются с резонансной частотой ω_0 . При этом H_{Cm} и H_{Lm} возрастают.

Степень отклонения частоты воздействия от резонансной частоты принято оценивать абсолютной, относительной и обобщенной расстройками. Расстройки определяются следующим образом:

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 \text{ или } \Delta f = f - f_0; \quad (3.59)$$

абсолютная

$$\delta = \Delta\omega/\omega_0 = \Delta f/f_0; \quad (3.60)$$

относительная

$$\xi = \frac{X}{R} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right). \quad (3.61)$$

Важной характеристикой колебательного контура является полоса пропускания. В общем случае абсолютной полосой пропускания называют диапазон частот, в пределах которого резонансная характеристика уменьшается в $\sqrt{2}$ раз по сравнению с ее максимальным значением.

Абсолютная полоса пропускания

$$\Delta f_p = f_2 - f_1, \quad (3.62)$$

где f_1 и f_2 — нижняя и верхняя граничные частоты полосы пропускания,

$$f_{1,2} = \frac{\omega_{1,2}}{2\pi} = \frac{f_0}{2Q} (\sqrt{1 + 4Q^2} \mp 1). \quad (3.63)$$

Из вышесказанного следует, что на границе полосы пропускания $\xi_{1,2} = \pm 1$ и $\varphi = \pm 45^\circ$.

Абсолютную и относительную полосу пропускания Δf_p можно выразить через добротность Q :

$$\Delta f_p = f_2 - f_1 = f_0/Q.$$

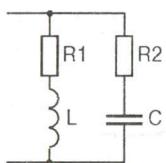


Рис. 3.20

Формула (3.64) показывает, что чем выше добротность Q , тем меньше полоса пропускания, и наоборот. Следует отметить, что подключение к контуру сопротивления нагрузки приводит к увеличению резистивных потерь контура и, следовательно, к уменьшению его добротности и расширению полосы пропускания.

Простейший параллельный колебательный контур с потерями в ветвях R_1 и R_2 имеет вид, изображенный на рис. 3.20. Комплексная входная проводимость такого контура

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = G_1 + G_2 - j(B_1 + B_2) = G - jB, \quad (3.64)$$

где $\underline{Y}_1 = G_1 - jB_1$; $\underline{Y}_2 = G_2 - jB_2$ — комплексные проводимости ветвей с индуктивностью и емкостью соответственно. Проводимости G_1 , G_2 , B_1 , B_2 можно найти из формул:

$$G_1 = \frac{R_1}{Z_1^2}; \quad G_2 = \frac{R_2}{Z_2^2}; \quad B_1 = \frac{\omega L}{Z_1^2}; \quad B_2 = -\frac{1/\omega C}{Z_1^2}, \quad (3.65)$$

где $Z_1 = \sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}$; $Z_2 = \sqrt{R_2^2 + (1/\omega C)^2}$.

Из условий резонанса токов $B = 0$. Отсюда следует, что

$$B_1 + B_2 = \frac{\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} - \frac{1/\omega C}{R_2^2 + (1/\omega C)^2} = 0. \quad (3.66)$$

Решив (3.66) относительно ω , получим уравнение резонансной частоты:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}. \quad (3.67)$$

Из уравнения (3.67) следует, что резонанс в параллельном контуре возможен лишь в случае, когда подкоренное выражение положительно ($R_1 < \rho$ и $R_2 < \rho$ или $R_1 > \rho$ и $R_2 > \rho$).

Реактивные составляющие токов в ветвях при резонансе равны друг другу:

$$I_{p1} = UB_1 = I_{p2} = U|B_2|. \quad (3.68)$$

При этом ток в неразветвленной части цепи определяется из уравнения

$$I_0 = UG_{03} = U/R_{03}, \quad (3.69)$$

где G_{03} и R_{03} называют эквивалентными резонансными проводимостью и сопротивлением параллельного контура соответственно:

$$G_{03} = (R_1 + R_2)/(\rho^2 + R_1 R_2); \quad (3.70)$$

$$R_{03} = (\rho^2 + R_1 R_2)/(R_1 + R_2). \quad (3.71)$$

Наибольший теоретический и практический интерес представляет резонанс токов в контурах без потерь и с малыми потерями.

Для контура без потерь ($R_1 = R_2 = 0$) уравнение резонансной частоты (3.67) примет вид

$$\omega_p = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad (3.72)$$

т.е. совпадает с выражением (3.46) для последовательного контура. Эквивалентное сопротивление контура без потерь $R_{03} = \infty$, входной ток равен нулю, а добротность обращается в бесконечность. Комплексы действующих значений токов в ветвях

$$I_1 = \frac{U}{j\omega_0 L} = \frac{U}{\rho} e^{-j\pi/2}; \quad I_2 = U\omega_0 C = \frac{U}{\rho} e^{j\pi/2}, \quad (3.73)$$

т.е. ток в индуктивности отстает от приложенного напряжения на $\pi/2$, а в емкости опережает на $\pi/2$.

При $\omega < \omega_0$ входное сопротивление контура носит индуктивный, а при $\omega > \omega_0$ емкостный характер, причем вследствие отсутствия потерь при переходе через $\omega = \omega_0$ ФЧХ контура изменяется скачком от $-\pi/2$ до $\pi/2$, а входное сопротивление контура претерпевает разрыв ($Z = \infty$). Частотная зависимость входного тока определяется уравнением

$$I(\omega) = U|B(\omega)|. \quad (3.74)$$

Контур, для которого выполняются условия $R_1 \ll \rho$; $R_2 \ll \rho$, называется контуром с малыми потерями. Резонансная частота для этого случая будет приближенно совпадать с частотой ω_0 . Для контура с малыми потерями можно принять, что $\rho^2 \gg R_1 R_2$, тогда

$$R_{03} \approx \rho^2/(R_1 + R_2) = \rho^2/R = Q^2 R = Q\rho = L/RC, \quad (3.75)$$

где $R = R_1 + R_2$. Ток в неразветвленной части цепи на резонансной частоте

$$I_0 = U/R_{03} = U/(Q^2 R), \quad (3.76)$$

а комплексные значения токов в ветвях

$$I_1 \approx \frac{U}{\rho} e^{-j\varphi_1}; \quad I_2 \approx \frac{U}{\rho} e^{j\varphi_2}, \quad (3.77)$$

где

$$\varphi_1 = \arctg(\rho/R_1); \quad \varphi_2 = \arctg(\rho/R_2),$$

т.е. действующие значения токов в ветвях

$$I_1 = I_2 = U/\rho = U/(QR). \quad (3.78)$$

Из уравнений (3.76) и (3.78) следует, что отношение токов в ветвях к току в неразветвленной части цепи на резонансной частоте равно добротности контура:

$$I_1/I_0 = I_2/I_0 = Q, \quad (3.79)$$

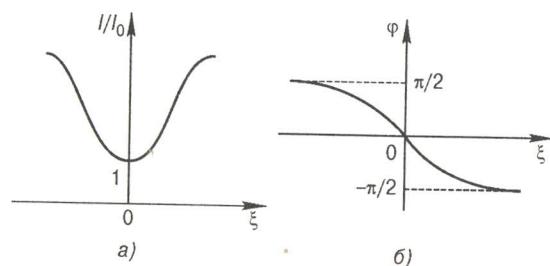


Рис. 3.21

т.е. токи в реактивных элементах L и C при резонансе в Q раз больше тока на входе контура.

Комплексное эквивалентное сопротивление контура с малыми потерями можно определить уравнением

$$Z_3(j\omega) = \frac{(R_1 + j\omega L)(R_2 + 1/j\omega C)}{R_1 + R_2 + j[\omega L - 1/(\omega C)]}. \quad (3.80)$$

В режиме малых расстроек в цепи с учетом $R_1 \ll \omega L$ и $R_2 \ll 1/\omega C$ получаем

$$\underline{Z}_3 \approx \frac{L/C}{R + jX} = \frac{\rho^2}{R(1 + j\xi)} = \frac{R_{03}}{1 + j\xi}, \quad (3.81)$$

Выделяя в (3.81) активную R_3 и реактивную X_3 составляющие, получаем уравнения частотных характеристик:

$$R_3 = \frac{R_{03}}{1 + \xi^2}; \quad X_3 = -\frac{R_{03}\xi}{1 + \xi^2}; \quad Z_3 = \frac{R_{03}}{\sqrt{1 + \xi^2}}. \quad (3.82)$$

Фазочастотная характеристика цепи определяется уравнением (рис. 3.21, б)

$$\varphi = \operatorname{arctg}(X_3/R_3) = -\operatorname{arctg}\xi. \quad (3.83)$$

Зависимость комплексного входного тока от частоты определяется из уравнения

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{U}}{R_{03}}(1 + j\xi) = I_0(1 + j\xi), \quad (3.84)$$

т.е. при резонансе ($\xi = 0$) ток принимает минимальное значение, определяемое формулой (3.76) (рис. 3.21, а).

Частотная зависимость токов $I_1(\omega)$ и $I_2(\omega)$ в ветвях определяется согласно закону Ома:

$$I_1(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}}; \quad I_2(\omega) = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + (1/\omega C)^2}},$$

т.е. ток I_1 с увеличением частоты ω уменьшается, а I_2 растет.

Комплексная передаточная функция по току в ветвях L и C параллельного колебательного контура определяется в соответствии с (3.35):

$$H_L(j\omega) = \frac{I_1}{I} = \frac{R_2 + 1/(\omega C)}{R + j[\omega L - 1/(\omega C)]}; \quad (3.85)$$

$$H_C(j\omega) = \frac{I_2}{I} = \frac{R_1 + j\omega L}{R + j[\omega L - 1/(\omega C)]}. \quad (3.86)$$

Отсюда получаем АЧХ и ФЧХ комплексной передаточной функции по току для контура с малыми потерями:

$$H_L(\omega) = \frac{\sqrt{R_2^2 + 1/(\omega C)^2}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \approx \frac{1}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}; \quad (3.87)$$

$$H_C(\omega) = \frac{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \approx \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}; \quad (3.88)$$

$$\varphi_L(\omega) = -\pi/2 - \operatorname{arctg}[(\omega L - 1/\omega C)/R]; \quad (3.89)$$

$$\varphi_C(\omega) = \pi/2 - \operatorname{arctg}[(\omega L - 1/\omega C)/R]. \quad (3.90)$$

В контуре с малыми потерями при резонансе АЧХ принимают значения:

$$H_L(\omega_0) = H_C(\omega_0) = (1/\omega_0 C)/R = \omega_0 L/R = \rho/R = Q. \quad (3.91)$$

3.3. Спектральное представление колебаний

3.3.1. Спектр и спектральная плотность сигнала

В основе расчетов электрических цепей при периодических несинусоидальных или непериодических воздействиях лежат спектральные представления токов и напряжений.

Для представления периодических негармонических сигналов

$$s(t) = s(t \pm nT),$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$, а T — период сигнала, широко используется ряд Фурье. В этом случае ряд Фурье имеет следующий вид:

$$s(t) = C(0) + \sum_{k=1}^{\infty} [C_C(k) \cos k\omega_1 t + C_s(k) \sin k\omega_1 t],$$

где $C(0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt$ — постоянная составляющая;

$$C_C(k) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos k\omega_1 t dt; \quad C_s(k) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin k\omega_1 t dt;$$

$\omega_1 = 2\pi/T$ — основная частота, частота первой гармоники.

Таким образом, периодический сигнал в форме ряда Фурье представляет собой сумму постоянной составляющей $C(0)$ и гармоник с частотами, кратными частоте ω_1 . Используя формулу Эйлера

$$e^{jk\omega_1 t} = \cos k\omega_1 t + j \sin k\omega_1 t, \quad (3.92)$$

можно записать ряд Фурье в комплексной форме:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(jk) \exp(jk\omega_1 t), \quad (3.93)$$

где

$$C(jk) = \frac{1}{T} [C_C(k) - jC_S(k)] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \exp(-jk\omega_1 t) dt. \quad (3.94)$$

В комплексной форме ряда Фурье присутствуют положительные и отрицательные частоты. Составляющие $C(jk)$ и $C(-jk)$ имеют одинаковые модули, а их фазы противоположны по знаку:

$$C(jk) = |C(jk)| e^{j\varphi(k)}, \quad C(-jk) = |C(jk)| e^{-j\varphi(k)}. \quad (3.95)$$

Отсюда находим

$$C(jk) e^{jk\omega_1 t} + C(-jk) e^{-jk\omega_1 t} = 2C(k) \cos[k\omega_1 t + \varphi(k)].$$

Тогда можно получить

$$s(t) = C(0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |C(jk)| \cos[k\omega_1 t + \varphi(k)], \quad (3.96)$$

где $|C(jk)| = \frac{1}{2} \sqrt{C_C^2(k) + C_S^2(k)}$ — амплитуда гармоники;

$$\varphi(k) = -\arctg \frac{C_S(k)}{C_C(k)}$$

— фаза гармоники.

Это третья форма ряда Фурье в виде суммы реальных гармоник. Таким образом, отрицательные частоты являются математической абстракцией, определяемой комплексным представлением реального сигнала.

Любая спектральная составляющая характеризуется амплитудой и фазой.

Спектром амплитуд называется зависимость амплитуд гармоник от частоты. Зависимость начальных фаз гармоник от частоты называется спектром фаз. Спектр амплитуд и спектр фаз, представленные в графическом виде, называются спектральными диаграммами.

Активная мощность периодического негармонического сигнала рав-

на сумме мощностей всех составляющих его обобщенного спектра:

$$P_C = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} P_k C^2(k). \quad (3.97)$$

Формула (3.97) называется равенством Парсеваля.

Для ряда Фурье в комплексной форме получим

$$P_C = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C(jk)|^2.$$

При ограничении спектра по частоте мощность сигнала уменьшается, т.е. равенство Парсеваля позволяет судить о точности фильтрации сигнала.

Спектральный анализ периодических сигналов с помощью ряда Фурье может быть обобщен на случай непериодических сигналов.

Будем рассматривать абсолютно интегрируемые сигналы, такие, что $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$, т.е. сигналы с ограниченной энергией.

Если дополнить финитный сигнал, т.е. сигнал, ограниченный по длительности, таким же, но следующим через интервал $\pm nT$ (T — период), то получим рассмотренный выше периодический сигнал.

Очевидно, исходный финитный сигнал отличается от периодического сигнала лишь тем, что у него период стремится к бесконечности. Тогда получим

$$s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} s_{\text{пер}}(t).$$

Если $T \rightarrow \infty$, то спектральные составляющие располагаются так плотно, что спектр становится сплошным; при этом расстояния между спектральными составляющими $2\pi/T \rightarrow d\omega$, а $k\omega_1 \rightarrow \omega$. В результате получим спектральную плотность сигнала

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (3.98)$$

которая называется прямым преобразованием Фурье. Обратное преобразование Фурье имеет вид

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.99)$$

Таким образом, непериодический сигнал и его спектральная плотность связаны взаимнооднозначным прямым и обратным преобразованиями Фурье.

Из сравнения прямого преобразования Фурье с рядом Фурье видно, что и там, и там сигнал представляется в виде суммы гармоник, но в отличие от ряда Фурье здесь сумма бесконечно малых гармоник

$\frac{1}{2\pi}|S(j\omega)|d\omega$. Если рассмотреть какую-либо k -ю гармонику, то ее амплитуда $U_m(k\omega_1) = |S(jk\omega_1)|\frac{\omega_1}{2\pi}$, т.е. спектральная плотность имеет смысл плотности амплитуды спектра и измеряется в амплитудах на герц. Таким образом, спектральная плотность показывает распределение амплитуд по частоте. Другой важный вывод: спектральная плотность непериодического сигнала и огибающая спектра периодического сигнала, полученного из непериодического путем его повторения через период T , совпадают по форме и отличаются только масштабом. Это позволяет вычислять спектр периодического сигнала, рассчитывая его огибающую с помощью прямого преобразования Фурье, что гораздо легче, чем вычисление коэффициентов ряда Фурье.

Так как интегрирование — линейная операция, то преобразования Фурье обладают свойствами линейности (это линейный функциональный оператор). Введем обозначение: $F(\cdot)$ — прямое преобразование Фурье; $F^{-1}(\cdot)$ — обратное преобразование Фурье.

Если $s(t) = \sum_i k_i s_i(t)$, то

$$S(j\omega) = \sum_i k_i S_i(j\omega), \quad (3.100)$$

где $S_i(j\omega) = F(s_i(t))$. Справедливо и обратное утверждение.

Основные теоремы преобразования Фурье.

Теорема о сдвиге. Если дан смещенный во времени сигнал $s(t-t_0)$ (запаздывание на t_0), то преобразование Фурье этого сигнала

$$F[s(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0} S(j\omega), \quad (3.101)$$

где $S(j\omega) = F[s(t)]$.

Таким образом, смещенный сигнал имеет спектральную плотность, отличающуюся лишь спектральной плотностью фаз.

Теорема о свертке. Если заданы два сигнала $s_1(t)$, $s_2(t)$ и известны их спектральные плотности $S_1(j\omega)$, $S_2(j\omega)$, то преобразование Фурье произведения сигналов

$$F[s_1(t)s_2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(j\nu) S_2(j(\omega - \nu)) d\nu.$$

Кроме того,

$$F\left[\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t-\tau) d\tau\right] = S_1(j\omega) S_2(j\omega).$$

Интегралы в этих выражениях называются свертками.

Теорема о масштабе (подобии). Если известен сигнал и его спектральная плотность, то преобразование Фурье

$$F[s(kt)] = \frac{1}{k} S\left(j\frac{\omega}{k}\right),$$

где k — коэффициент.

Теорема о модуляции. Если известен сигнал $s(t)$ и его спектральная плотность $S(j\omega)$, то преобразование Фурье

$$F[s(t)e^{j\omega_0 t}] = S[j(\omega - \omega_0)].$$

Таким образом, при умножении сигнала на $e^{j\omega_0 t}$ его спектр сдвигается по оси частот на ω_0 .

Теорема Парсеваля. Если заданы два сигнала с известными спектральными плотностями, то их скалярное произведение

$$(s_1, s_2) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(j\omega) S_2(-j\omega) d\omega.$$

Частный случай $s_1(t) = s_2(t)$ приводит к равенству (иногда называемому равенством Релея)

$$E_C = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) S(-j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega.$$

Физический смысл этого равенства такой же, как и для периодического сигнала.

3.3.2. Спектральное представление элементарных сигналов

Элементарные сигналы (функции) часто используются для описания более сложных, например, цифровых сигналов. Это позволяет производить с ними различные операции по правилам непрерывных сигналов, что существенно облегчает анализ.

Единичная функция. Аналитическое описание единичной функции, которая еще называется функцией Хевисайда, или функцией включения, имеет следующий вид (рис. 3.22):

$$1(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 0,5, & t = 0; \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Таким образом, единичная функция — это скачок от 0 до 1 в момент $t = 0$ (для определенности считают $\sigma(0) = 0,5$).

Прямое определение спектральной плотности единичной функции невозможно, поскольку она не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости. Однако можно найти ее спектральную плотность, воспользовавшись предельным переходом и линейностью преобразования Фурье:

$$F[\sigma(t)] = F[\lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha t}]|_{t>0; \alpha>0} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} F[e^{-\alpha t}] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{1}{j\omega}. \quad (3.102)$$

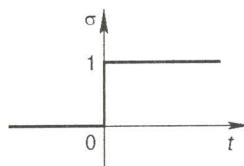


Рис. 3.22

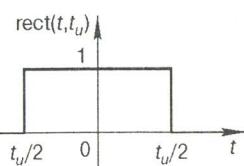


Рис. 3.23

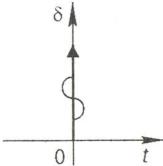


Рис. 3.24

Прямоугольный импульс. Аналитическая запись прямоугольного импульса задается следующим выражением (рис. 3.23):

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau_i}\right) = \begin{cases} 1, & -\tau_i/2 \leq t \leq \tau_i/2; \\ 0, & \text{при других } t, \end{cases} \quad (3.103)$$

где τ_i — длительность импульса.

Спектральная плотность прямоугольного импульса находится непосредственно из прямого преобразования Фурье:

$$F\left[\text{rect}\left(\frac{t}{\tau_i}\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{\tau_i}\right) e^{-j\omega t} dt = \tau_i \frac{\sin \omega \tau_i / 2}{\omega \tau_i / 2}. \quad (3.104)$$

При описании сигналов иногда используют так называемый единичный импульс $r(t)$, имеющий единичную амплитуду и бесконечно малую длительность. Единичный импульс связан с прямоугольным импульсом следующим соотношением:

$$r(t) = \lim_{\tau_i \rightarrow 0} \text{rect}(t/\tau_i).$$

Дельта-функция. Аналитическая запись δ -функции, которая также называется функцией Дирака, имеет следующий вид (рис. 3.23):

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \infty, & t = 0; \\ 0, & t > 0. \end{cases}$$

Дельта-функция связана с единичной функцией очевидным соотношением

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}[\sigma(t)], \quad (3.105)$$

т.е. выражает скорость изменения $\sigma(t)$. Поэтому их размерность отличается множителем $1/c$ (если $\sigma(t)$ безразмерна, то $\delta(t)$ имеет размерность $[1/c]$).

δ -функция обладает двумя важными свойствами:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1; \quad \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \delta(t - \tau) dt = s(\tau). \quad (3.106)$$

Последнее свойство называется «фильтрующим свойством» δ -функции. Из этого свойства непосредственно следует спектральная плотность

δ -функции:

$$F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1. \quad (3.107)$$

Для описания сигналов иногда используют связь между δ -функцией и единичным импульсом:

$$\delta(t) = r(t)/d\tau_i. \quad (3.108)$$

Используя выражение (3.107) и свойство линейности преобразования Фурье, легко найти спектральную плотность постоянного во времени сигнала, т.е. когда $s(t) = 1$ при $-\infty \leq t \leq \infty$:

$$F^{-1}[\delta(\omega)] = \frac{1}{2\pi}; \quad F[1] = 2\pi\delta(\omega). \quad (3.109)$$

Поскольку единичную функцию можно представить суммой $[1 + \text{sign}(t)]/2$, где $\text{sign}(t)$ — функция знака, т.е. функция, определяемая следующим соотношением:

$$\text{sign}(t) = \frac{|t|}{t} = \begin{cases} -1, & t < 0; \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t > 0, \end{cases}$$

спектральную плотность единичной функции иногда представляют в следующем виде:

$$F[\sigma(t)] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \Big|_{\omega \neq 0}. \quad (3.110)$$

Таким образом, особенность спектральной плотности единичной функции подчеркивается отдельным слагаемым.

Задача 3.8. Построить амплитудный спектр периодического сигнала (рис. 3.25).

Пример решения. Из теоремы сдвига (3.101) следует, что амплитудный спектр сигнала не изменяется при сдвиге сигнала по оси времени. Кроме того, спектральная плотность непериодического сигнала и огибающая спектра периодического сигнала, полученного из непериодического путем его повторения через интервал времени, равный периоду T , совпадают по форме и отличаются только масштабом. Следовательно, для получения амплитудного спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов можно воспользоваться формулой расчета спектральной плотности прямоугольного импульса (3.104):

$$U_m(k\omega_1) = |S(jk\omega_1)| \frac{U}{T} = U \frac{\tau_i}{T} \left| \frac{\sin k\omega_1 \tau_i / 2}{k\omega_1 \tau_i / 2} \right| = \frac{U}{Q} \left| \frac{\sin k\pi/Q}{k\pi/Q} \right|, \quad (3.111)$$

где $Q = T/\tau_i$ — скважность импульсов.

Из полученной формулы следует, что амплитуды гармоник, частот которых кратна скважности, будут равны нулю.

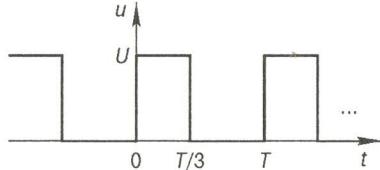


Рис. 3.25

Для заданной периодической последовательности $Q = 3$, следовательно,

$$U_m(k\omega_1) = \frac{U}{3} \left| \frac{\sin k\pi/3}{k\pi/3} \right|$$

и амплитуды гармоник, частоты которых равны $3\omega_1, 6\omega_1, 9\omega_1$ и т.д., будут равны нулю.

Формула (3.111) позволяет вычислить амплитудный спектр комплексного ряда Фурье, т.е. включает гармоники с положительными и отрицательными частотами. Чтобы вычислить амплитудный спектр одностороннего ряда Фурье (включает реальные гармоники с положительными частотами), амплитуды гармонических составляющих необходимо умножить на 2. Тогда получим: $U_0 = U/3$, $U_m(\omega_1) = 0,551U$, $U_m(2\omega_1) = 0,276U$, $U_m(4\omega_1) = 0,138U$, $U_m(5\omega_1) = 0,11U$ и т.д.

Амплитудный спектр заданного периодического сигнала приведен на рис. 3.26.

3.4. Тестовые задания по режиму гармонических колебаний и частотным характеристикам электрических цепей

Т3 № 1 Гармонический ток через индуктивность при нулевой начальной фазе приложенного напряжения имеет фазу в градусах равную _____. (HT 1)

Т3 № 2 Напряжение на входе схемы, если $i(t) = I_m \cos \omega_1 t$, будет равно: (HT 2)

a) $u = (R + \omega_1 L) I_m \cos \left(\omega_1 t - \arctg \frac{\omega_1 L}{R} \right);$

б) $u = (R + \omega_1 L) I_m \cos \left(\omega_1 t + \arctg \frac{\omega_1 L}{R} \right);$

в) $u = \sqrt{R^2 + (\omega_1 L)^2} I_m \cos \left(\omega_1 t - \arctg \frac{\omega_1 L}{R} \right);$

г) $u = \sqrt{R^2 + (\omega_1 L)^2} I_m \cos \left(\omega_1 t + \arctg \frac{\omega_1 L}{R} \right).$

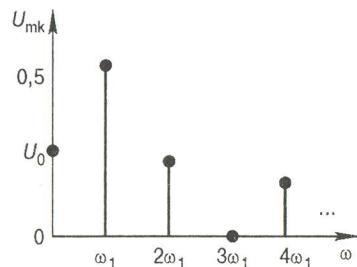
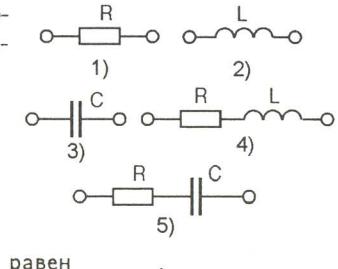


Рис. 3.26

Т3 № 3 Соответствие схемы и записей тока в ней, если приложенное напряжение $u(t) = U_m \cos(\omega_1 t)$:

- а) $i = I_m \cos(\omega_1 t + \varphi)$, $\varphi > 0$;
- б) $i = I_m \cos(\omega_1 t - \varphi)$, $\varphi > 0$;
- в) $i = I_m \cos(\omega_1 t)$;
- г) $i = I_m \cos(\omega_1 t + \pi/2)$;
- д) $i = I_m \cos(\omega_1 t - \pi/2)$.



Т3 № 4 (HT 1)

Т3 № 5 (HT 1)

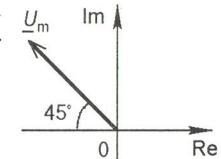
Т3 № 6 (HT 1)

Для тока $I_m = 20\sqrt{2}e^{j\pi/6}$ ток I равен _____.

Мгновенное значение гармонического тока, А, если $I_m = 2$ А, равно: а) $2 \cos(\omega t)$; б) 2 А; в) $2\sqrt{2} \cos(\omega t)$; г) $2/\sqrt{2} \cos(\omega t)$.

Мгновенное значение напряжения, изображенного на комплексной плоскости, может быть записано как:

- а) $u(t) = U_m \cos(\omega t - 45^\circ)$;
- б) $u(t) = U_m \cos(\omega t - 225^\circ)$;
- в) $u(t) = U_m \cos(\omega t + 45^\circ)$;
- г) $u(t) = U_m \cos(\omega t + 135^\circ)$.

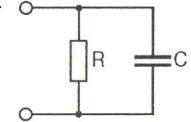


Т3 № 7 (HT 2) Амплитудное значение гармонического тока в амперах, если $I_m = 3 + j4$ А, равно _____.

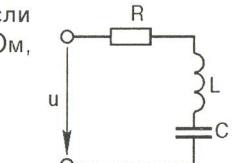
Т3 № 8 (HT 1) Комплексная проводимость схемы может быть записана как:

- а) $(1 + j\omega CR)/R$;
- б) $1/R - j/\omega$;
- в) $1/R + j\omega C$;
- г) $1/(R + j\omega C)$;
- д) $R + 1/j\omega C$.

Т3 № 9 (HT 1) Полное сопротивление схемы в омах, если $R = 30$ Ом, $\omega L = 20$ Ом, $1/\omega C = 60$ Ом, равно _____.



Т3 № 10 (HT 1) Модуль комплексного сопротивления цепи равен _____.



Т3 № 11 (HT 1) Аргумент комплексного сопротивления цепи равен _____.

