Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
Факультет «Радиоэлектроника и лазерная техника (РЛ)»
Кафедра «Технология приборостроения (РЛ6)»

Лабораторная работа №1

"Метод Гаусса решения СЛАУ. Оценка числа обусловленности матрицы."

по дисциплине "Численные методы"

Вариант №1

Выполнили студенты группы РЛ6-71

Филимонов С.В.

Преподаватель Чигирева О.Ю.

Москва, 2023

Исходные данные:

1. Хорошо обусловленная матрица:

$$(A,b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 31.2000 & -1.3200 & -7.6800 & 4.0900 & -83.3200 \\ 7.2300 & -126.0000 & 7.1400 & 3.0400 & 38.9000 \\ 9.4900 & 6.4000 & 6.0000 & 8.4500 & -56.7000 \\ 2.6800 & -3.2900 & 0.2800 & 13.4000 & -504.0900 \end{array}\right)$$

Вектор точного решения: $x=\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 30 \\ -40 \end{pmatrix}$

2. Плохо обусловленная матрица:

$$(A,b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 16.3820 & -2.0490 & -41.8290 & 16.3920 & 33.6130 \\ 307.6480 & -38.4660 & -840.3660 & 312.5280 & 710.3420 \\ 0.4560 & -0.0570 & -1.1770 & 0.4560 & 0.9490 \\ 23.2720 & -2.9090 & -66.3090 & 23.8720 & 57.6730 \end{array}\right)$$

Вектор точного решения: $x=\begin{pmatrix} 2 \\ 60 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Цель работы: изучение метода Гаусса численного решения квадратной СЛАУ с невырожденной матрицей; оценка числа обусловленности матрицы и исследование его влияния на погрешность приближенного решения.

Содержание работы:

1. Реализовать метод Гаусса решения СЛАУ (с выбором главного элемента по столбцу).

2. Провести решение двух заданных систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса, вычислить нормы невязок полученных приближенных решений, их абсолютные и относительные погрешности (при расчетах пользоваться 1-нормой и inf-нормой).

3. Для каждой из систем оценить порядок числа обусловленности ее матрицы и сделать вывод о его влиянии на точность полученного приближенного решения и отвечающую ему невязку.

Алгоритм метода Гаусса с выбором главного элемента по столбцу

Прямой ход (алгоритм):

Шаг 1: $a_{11} \neq 0$ – главный элемент 1-го шага;

исключим неизвестное x_1 из уравнений с номерами $i = \overline{2, n}$, для этого разделим 1-е уравнение на $a_{11} \neq 0$ и вычтем из i-го ($i = \overline{2, n}$) уравнения 1-е уравнение, умноженное на $a_{i1}(i = \overline{2, n})$;

Шаг 2: $a_{22}^{(1)} \neq 0$ – главный элемент 2-го шага;

исключим неизвестное x_2 из уравнений с номерами $i = \overline{3, n}$, для этого разделим 2-е уравнение на $a_{22}^{(1)} \neq 0$ и вычтем из i-го ($i = \overline{3, n}$) уравнения 2-е уравнение, умноженное на $a_{i2}^{(1)}(i = \overline{3, n})$;

Шаг (n-1): $a_{n-1,n-1}^{(n-2)} \neq 0$ – главный элемент $(n-1)$-го шага;

исключим неизвестное x_{n-1} из уравнений с номером $i = n$, для этого разделим $(n-1)$-е уравнение на $a_{n-1,n-1}^{(n-2)} \neq 0$ и вычтем из n-го уравнения $(n-1)$-е уравнение, умноженное на $a_{n,n-1}^{(n-2)}$;

Шаг (n): $a_{n,n}^{(n-1)} \neq 0$ – разделим n-е уравнение на $a_{n,n}^{(n-1)} \neq 0$;

Обратный ход (алгоритм):

из n-го уравнения находим неизвестное $x_n = y_n$, затем в $(n-1)$-е уравнение подставляем найденное значение x_n и вычисляем $x_{n-1} = y_{n-1} - c_{n-1,n}x_n$ и т.д.

Расчетные формулы обратного хода:

$$x_n = y_n \qquad\qquad x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij}\, x_j \qquad\qquad i = (n-1), (n-2), \cdots, 1$$

Метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу эквивалентен применению метода Гаусса к системе, в которой на каждом шаге исключения неизвестного осуществляется перестановка уравнений.

На k-ом шаге исключения найдем наибольший по модулю коэффициент при неизвестном x_k:

$$a_{mk}^{(k-1)} = \max_{k \le i \le n} \left\{ \left| a_{ik}^{(k-1)} \right| \right\}$$

и осуществим перестановку уравнений с номерами k и m.

Затем выполним исключение неизвестного x_k согласно описанному выше алгоритму.

Результаты расчетов:

Хорошо обусловленная матрица:

$$(A,b)=\left(\begin{array}{cccc|c}31.2000 & -1.3200 & -7.6800 & 4.0900 & -83.3200\\ 7.2300 & -126.0000 & 7.1400 & 3.0400 & 38.9000\\ 9.4900 & 6.4000 & 6.0000 & 8.4500 & -56.7000\\ 2.6800 & -3.2900 & 0.2800 & 13.4000 & -504.0900\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -0.0423 & -0.2461 & 0.1310 & -2.6705\\ 0 & -125.6941 & 8.9196 & 2.0922 & 58.2078\\ 0 & 6.8015 & 8.3360 & 7.2059 & -31.3568\\ 0 & -3.1766 & 0.9396 & 13.0486 & -496.9330\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -0.0423 & -0.2461 & 0.1310 & -2.6705\\ 0 & 1 & -0.0709 & -0.0166 & -0.4630\\ 0 & 0 & 8.8186 & 7.3191 & -28.2071\\ 0 & 0 & 0.7142 & 12.9958 & -498.4040\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -0.0423 & -0.2461 & 0.1310 & -2.6705\\ 0 & 1 & -0.0709 & -0.0166 & -0.4630\\ 0 & 0 & 1 & 0.8299 & -3.1985\\ 0 & 0 & 0 & 12.4029 & -496.1194\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -0.0423 & -0.2461 & 0.1310 & -2.6705\\ 0 & 1 & -0.0709 & -0.0166 & -0.4630\\ 0 & 0 & 1 & 0.8299 & -3.1985\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -40.0000\end{array}\right)\Rightarrow$$

Вектор точного и полученного решений, невязка:

$$x=\begin{pmatrix}10\\1\\30\\-40\end{pmatrix},\ x^*=\begin{pmatrix}9.9999\\0.9999\\29.9999\\-39.9999\end{pmatrix},\ r=b-Ax^*=10^{-12}\cdot\begin{pmatrix}0\\-0.7816\\-0.1421\\-0.5684\end{pmatrix}$$

1-норма невязки: $norm(r,1)=\ 0.1492$

inf-норма невязки: $norm(r,inf)=\ 0.0782$

Погрешности полученных приближенных решений:

Абсолютная (1-норма): $\Delta(x^*)=\|x-x^*\|_1=0.2265$

Абсолютная (inf-норма): $\Delta(x^*)=\|x-x^*\|_{inf}=0.1066$

Относительная (1-норма): $\delta(x^*)=\frac{\|x-x^*\|_1}{\|x\|_1}=0.0028$

Относительная (inf-норма): $\delta(x^*)=\frac{\|x-x^*\|_{inf}}{\|x\|_{inf}}=0.0027$

Порядок числа обусловленности матрицы: $\|A^{-1}\|\cdot\|A\|=0.2265$

Плохо обусловленная матрица:

$$(A,b)=\left(\begin{array}{cccc|c} 16.3820 & -2.0490 & -41.8290 & 16.3920 & 33.6130 \\ 307.6480 & -38.4660 & -840.3660 & 312.5280 & 710.3420 \\ 0.4560 & -0.0570 & -1.1770 & 0.4560 & 0.9490 \\ 23.2720 & -2.9090 & -66.3090 & 23.8720 & 57.6730 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0.1250 & -2.7315 & 1.0158 & 2.3089 \\ 0 & -0.0007 & 2.9197 & -0.2498 & -4.2121 \\ 0 & 1.4822e-05 & 0.0686 & -0.0007 & -0.1038 \\ 0 & 0.0007 & -2.7396 & 0.2308 & 3.9392 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0.1250 & -2.7315 & 1.0158 & 2.3089 \\ 0 & 1 & -3621.6641 & 305.1797 & 5207.5630 \\ 0 & 0 & 0.1222 & -0.0117 & -0.1810 \\ 0 & 0 & 0.3212 & -0.0308 & -0.4756 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0.1250 & -2.7315 & 1.0158 & 2.3089 \\ 0 & 1 & -3621.6641 & 305.1797 & 5207.5630 \\ 0 & 0 & 1 & -0.0961 & -1.4807 \\ 0 & 0 & 0 & 1.6052e-06 & 8.0263e-06 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0.1250 & -2.7315 & 1.0158 & 2.3089 \\ 0 & 1 & -3621.6641 & 305.1797 & 5207.5630 \\ 0 & 0 & 1 & -0.0961 & -1.4807 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4.9999 \end{array}\right)\Rightarrow$$

Вектор точного и полученного решений, невязка:

$$x=\begin{pmatrix} 2 \\ 60 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix},\ \ x^*=\begin{pmatrix} 1.9999 \\ 59.9999 \\ -1 \\ 4.9999 \end{pmatrix},\ \ r=b-Ax^*=10^{-12}\cdot\begin{pmatrix} -0.0071 \\ 0.4547 \\ -0.0001 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1-норма невязки: $norm(r,1)=\ 0.4620$

inf-норма невязки: $norm(r,inf)=\ 0.4547$

Погрешности полученных приближенных решений:

Абсолютная (1-норма): $\Delta(x^*)=\|x-x^*\|_1=0.3596$

Абсолютная (inf-норма): $\Delta(x^*)=\|x-x^*\|_{inf}=0.3174$

Относительная (1-норма): $\delta(x^*)=\frac{\|x-x^*\|_1}{\|x\|_1}=0.0053$

Относительная (inf-норма): $\delta(x^*)=\frac{\|x-x^*\|_{inf}}{\|x\|_{inf}}=0.0053$

Порядок числа обусловленности матрицы: $\|A^{-1}\|\cdot\|A\|=7.2790e+10$

Вывод:

Исследовав два вида матриц для СЛАУ (хорошо обусловленную и плохо обусловленную) мы подтвердили данную обусловленность матрицы, проведя расчет порядка числа обусловленности.

Чем меньше порядок числа обусловленности матрицы, тем меньше невязка и выше точность (значения абсолютной и относительной точности хорошо обусловленной матрицы меньше, чем эти же значения плохо обусловленной матрицы).

Применимость метода Гаусса можно оценить, вычислив порядок числа обусловленности до разработки алгоритма и выполнения вычислений, и, в случае большого порядка числа обусловленности (много больше единицы) следует выбрать другой метод для увеличения точности вычислений.

Текст программы:

```
void Matrix::rationingRow(size_t r, double elem) {
         for (size_t j = 0; j < cols; ++j)
        matrix[(j + (r * cols))] /= elem;
}

void Matrix::rationingCol(size_t c, double elem) {
         for (size_t i = 0; i < rows; ++i)
        matrix[(c + (i * cols))] /= elem;
}

void Matrix::minusRowRow(size_t from_i, size_t i) {
    for (size_t j = 0; j < cols; ++j) {
                  matrix[(j + (from_i * cols))] -= matrix[(j + (i * cols))];
    }
}

Matrix Matrix::getExtendedMatrixOfTheSystem(Matrix B) const {
         Matrix AB(rows, (cols + B.cols));
    for (size_t i = 0; i < AB.rows; ++i)
                  for (size_t j = 0, ja = 0; j < cols; ++j, ++ja)
            AB(i, j) = matrix[(ja + (i * cols))];
    for (size_t i = 0; i < AB.rows; ++i)
                  for (size_t j = cols, jb = 0; j < AB.cols; ++j, ++jb)
            AB(i, j) = B(i, jb);
    return AB;
}

Matrix SLEmethodGauss(const Matrix& A, const Matrix& B) {
    if (A.det() == 0)  // Проверка существует ли единственное решение
        throw SingularMatrix();
         if ((A.rows != B.rows) || (B.cols > 1) || (A.isNull()) || (B.isNull())) // проверка корректно ли вычисл.
        throw DimensionMismatch(A, B);

    Matrix AB = A.getExtendedMatrixOfTheSystem(B);  // Расширенная матрица системы

    const size_t row = AB.getRows();
    const size_t col = AB.getCols();
    for (size_t i = 0; i < row; ++i) {  // Выбор главного элемента по столбцу
        for (size_t j = i; j < row; ++j)
            AB.rationingRow(j, AB(j, i));  // Деление строки, на элемент
        for (size_t j = (i + 1); j < row; ++j)
            AB.minusRowRow(j, i);  // Вычитание строки
    }

    Matrix x(row, 1);  // Вычисление ответа путем обратного хода
    for (size_t i = (row - 1), k = (col - 2); ((i < row) && (col)); --i, --k) {
        x(i, 0) = AB(i, (col - 1));
        for (size_t j = (i - 1); j < row; --j)
            AB(j, (col - 1)) -= (AB(j, k) * x(i, 0));
    }
    return x;
}
```