Домашнее задание по курсу общей физики для студентов 3-го семестра

Галимова Валерия Маратовна

Группа: РЛ2-31; Вариант 6

Тема 1. Электростатика

Задача 1.1

Сферический диэлектрический конденсатор имеет радиусы внешней и внутренней обкладок R_0 и R соответственно. Заряд конденсатора равен q. Диэлектрическая проницаемость меняется между обкладками по закону $\varepsilon = f(r)$

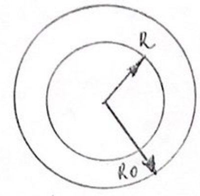


РИС 1.1

Построить графически распределение модулей векторов электрического поля E, поляризованности P и электрического смещения D между обкладками конденсатора. Определить поверхностную плотность связанных зарядов на внутренней σ_1' и внешней σ_2' поверхностях диэлектрика, распределение объемной плотности связанных зарядов $\rho'(r)$, максимальную напряженность электрического поля E и ёмкость конденсатора

Функция $\varepsilon = f(r)$ имеет вид: $\varepsilon = \frac{R_0^3 + R^3}{R^3 + r^3}$

Дано:

$\frac{R_0}{R} = \frac{3}{2}$;

$\varepsilon = \frac{R_0^3 + R^3}{R^3 + r^3}$;

q

$E(r), P(r), D(r)$

$\sigma_1', \sigma_2', \rho'(r)$

C, E_{max}

Решение

• $R_0 \cdot 2 = 3R \Rightarrow R_0 = \frac{3R}{2}$. Подставим $R_0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{\left(\frac{3}{2}R\right)^3 + R^3}{R^3 + r^3} = \frac{35R^3}{8(R^3+r^3)}$

Пусть заряд $q>0$ равномерно распределён по внутренней обкладке.

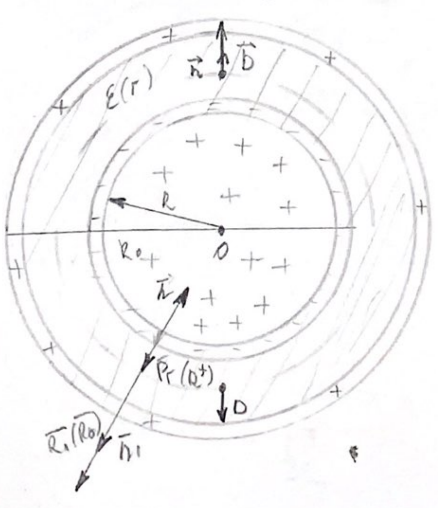
1) По теореме Гаусса для вектора D: $\oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = q$

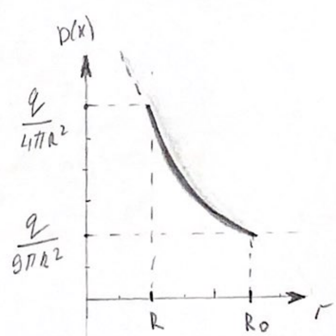
Задача обладает сферической симметрией, поэтому в качестве поверхности интегрирования выберем сферу с радиусом r: $(R<r<R_0)$

$(\vec{D}, d\vec{S}) = (\vec{D}, \vec{n})dS = D\cos(\vec{D}, \vec{n})dS$, т.к. $\vec{D} \uparrow\uparrow \vec{n} \Rightarrow D\cos 0^\circ dS = D\,dS$

Тогда по т. Гаусса: $\oint_S D(r)\,dS = q$;

$D(r)\oint_S dS = q \Rightarrow D(r)4\pi r^2 = q \Rightarrow D(r) = \frac{q}{4\pi r^2}$; $\boxed{D(R) = \frac{q}{4\pi R^2}}$, $D(R_0) = \frac{q}{9\pi R^2}$





2) Для изотропных и линейных диэлектриков:

$\bar{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \bar{E} \Rightarrow E(r) = \dfrac{D(r)}{\varepsilon\varepsilon_0} = \dfrac{q}{4\pi r^2\varepsilon_0}\cdot\dfrac{1}{\varepsilon} = \dfrac{q}{4\pi r^2\varepsilon_0}\cdot\dfrac{8(R^3+r^3)}{35R^3}$, $\boxed{E(r) = \dfrac{2q(R^3+r^3)}{35\pi r^2R^3\varepsilon_0}}$

$E'(r) = \dfrac{2q}{35\pi R^3\varepsilon_0}\cdot\dfrac{(3r^4 - 2r(R^3+r^3))}{r^4} = \dfrac{2q(r^4-2rR^3)}{35\pi R^3\varepsilon_0 r^4}$;

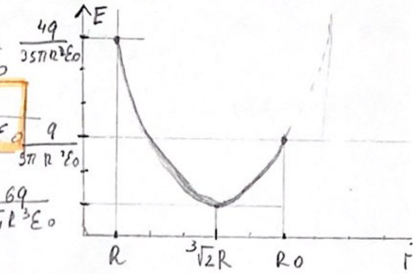
В

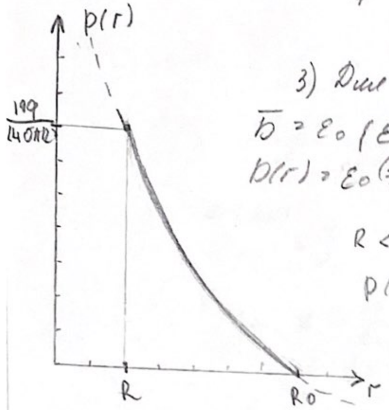
$E' = 0 \Rightarrow r^4 - 2rR^3 = 0$ | $E(\sqrt[3]{2}R) = \dfrac{2q(R^3+2R^3)}{35\pi\sqrt[3]{4}\cdot R^5\cdot\varepsilon_0} = \dfrac{6q}{35\sqrt[3]{4}R^2\varepsilon_0}$

$r^3 = 2R^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{2}R$

$E(R) = \dfrac{2q\cdot 2R^3}{35\pi R^5\varepsilon_0} = \dfrac{4q}{35\pi R^2\varepsilon_0}$

$E(R_0) = E(\tfrac{3}{2}R) = \dfrac{2q\cdot\frac{35}{8}\cdot R^3}{35\pi\cdot\frac{9}{4}R^5\varepsilon_0} = \dfrac{q}{9\pi R^2\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E_{max} = E(R) = \dfrac{4q}{35\pi R^2\varepsilon_0}}$





3) Для изотропных и линейных диэлектриков

$\bar{P} = \varepsilon_0(\varepsilon-1)\bar{E}$

$P(r) = \varepsilon_0\dfrac{(35R^3-8R^3-8r^3)}{8(R^3+r^3)}\cdot\dfrac{2q(R^3+r^3)}{35\pi r^2R^3\varepsilon_0} = \dfrac{q(27R^3-8r^3)}{140\pi R^2}$. $\boxed{P(r) = \dfrac{q(27R^3-8r^3)}{140\pi r^2R^3}}$

$R < r < R_0$; т.к. $\bar{P} \parallel \bar{r} \Rightarrow P_\theta = 0, P_\varphi = 0; P_r = P(r)$

$P(R) = \dfrac{q\cdot 19R^3}{140\pi R^5} = \dfrac{19q}{140\pi R^2}$

$P(R_0) = P(\tfrac{3}{2}R) = \dfrac{q(27R^3 - 8\cdot\frac{27}{8}R^3)}{140\pi\cdot\frac{9}{4}R^5} = 0$

4) Под действием электр. поля диэлектрик поляризуется, и в результате на внутренней и внешней поверхностях появляются связанные заряды

$\sigma'(M) = P_n(M) = P\cos(\bar{P}, \bar{n})$

$\sigma'_1 = P_1(R^+)\cdot\cos\pi = -\dfrac{19q}{140\pi R^2}$

$\sigma'_2 = P_1(R_0^-)\cos 0 = 0$

$\boxed{\sigma'_1 = -\dfrac{19q}{140\pi R^2}, \quad \sigma'_2 = 0}$

5) По теореме Гаусса для вектора $\bar{P}$ в ДФ: $\operatorname{div}\bar{P} = -\rho'$

$\operatorname{div}\bar{P} = \dfrac{1}{h_1h_2h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}(h_2h_3P_x) + \dfrac{\partial}{\partial y}(h_1h_3P_y) + \dfrac{\partial}{\partial z}(h_1h_2P_z)\right]$, где $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r\sin\theta$, $x = r, y = \theta, z = \varphi$

$\operatorname{div}\bar{P} = \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\left[\dfrac{\partial(r^2\sin\theta P_r)}{\partial r} + \dfrac{\partial(r\sin\theta P_\theta)}{\partial\theta} + \dfrac{\partial(rP_\varphi)}{\partial\varphi}\right]$, т.к. $P_\theta = P_\varphi = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{div}\bar{P} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{q(27R^3-8r^3)r^2}{140\pi r^2R^3}\right) = \dfrac{q}{r^2}\dfrac{(-24r^2)}{140\pi R^3} = -\dfrac{6q}{35\pi R^3}$; $\rho' = -\operatorname{div}\bar{P} \Rightarrow \boxed{\rho' = \dfrac{6q}{35\pi R^3}}$

6) Выполним проверку. Когда суммарный связанный заряд представляет собой сумму суммарного связанного заряда, распределённого по объёму, и заряда, распределённого на поверхности диэлектрика

$q' = \int_V \rho' dV + \int_S \sigma' dS = \int_R^{R_0}\dfrac{6q}{35\pi R^3}\cdot 4\pi r^2 dr + \int_S\left(-\dfrac{19q}{140\pi R^2}\right)dS = \dfrac{8q}{35R^3}\left((\tfrac{3}{2}R)^3 - R^3\right) - \dfrac{19q}{140\pi R^2}\int_S dS =$

$= \dfrac{19qR^3}{35R^3} - \dfrac{19q\cdot 4\pi R^2}{140\pi R^2} = \dfrac{19q}{35} - \dfrac{19q}{35} = 0 \Rightarrow E, D, P, \sigma_1', \sigma_2', \rho'$ нашли верно

7) $C = \dfrac{q}{U}$; $U = \varphi(R) - \varphi(R_0) = \int_R^{R_0} E_r(r)dr$

$U = \int_R^{R_0}\dfrac{2q(R^3+r^3)}{35\pi r^2R^3\varepsilon_0}dr = \dfrac{2q}{35\pi R^3\varepsilon_0}\left(\int_R^{R_0}\dfrac{R^3dr}{r^2} + \int_R^{R_0} r\,dr\right) = \dfrac{2q}{35\pi R^3\varepsilon_0}\left(R^3\cdot\left(-\dfrac{1}{r}\right)\Big|_R^{R_0} + \dfrac{r^2}{2}\Big|_R^{R_0}\right) =$

$= \dfrac{2q}{35\pi R^3\varepsilon_0}\left(\dfrac{R^3}{3R} + \dfrac{5R^2}{8}\right) = \dfrac{23q}{420\pi R\varepsilon_0}$ $\boxed{U = \dfrac{23q}{420\pi R\varepsilon_0}}$

$C = \dfrac{q}{U} \Rightarrow \boxed{C = \dfrac{420\pi R\varepsilon_0}{23}}$

8) Проверим, удовлетворяет условию $\frac{CU^2}{2}=\int\limits_V w\,dV$, где $w=\frac{(\bar{E},\bar{D})}{2}$ - объемная плотность электрического поля

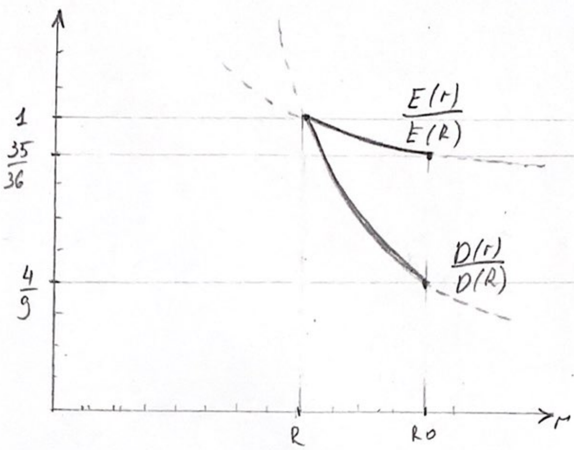
$$\frac{CU^2}{2}=\frac{1}{2}\,\frac{\cancel{420\pi R\varepsilon_0}}{\cancel{23}}\cdot\frac{23^2q^2}{420^2\pi^2R^2\varepsilon_0^2}=\frac{23q^2}{840\pi R\varepsilon_0}$$

$$\int\limits_V w\,dV=\int\limits_R^{R_0}\frac{E\cdot D}{2}\cdot 4\pi r^2\,dr=\int\limits_R^{R_0}\frac{q(R^3+r^3)}{35\pi r^2R^3\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{\cancel{4\pi r^2}}\cdot\cancel{4\pi r^2}\,dr=\frac{q^2}{35\pi R^3\varepsilon_0}\left(\int\limits_R^{R_0}\frac{R^3}{r^2}dr+\int\limits_R^{R_0}r\,dr\right)=$$

$$=\frac{q^2}{35\pi R^3\varepsilon_0}\left(-\frac{R^3}{r}\Big|_R^{R_0}+\frac{r^2}{2}\Big|_R^{R_0}\right)=\frac{q^2}{35\pi R^3\varepsilon_0}\left(\frac{R^2}{3}+\frac{5R^2}{8}\right)=\frac{23q^2}{840\cdot\pi R\varepsilon_0}=\frac{CU^2}{2}$$ $\Rightarrow$ U и C верно найдены

9) Построим $\frac{D(r)}{D(R)}$ и $\frac{E(r)}{E(R)}$

$$\frac{D(r)}{D(R)}=\frac{\cancel{q}}{\cancel{4\pi}r^2}\cdot\frac{\cancel{4\pi}R^2}{\cancel{q}}=\left(\frac{R}{r}\right)^2$$



$\frac{D(R)}{D(R)}=1$; $\frac{D(R_0)}{D(R)}=\frac{4}{9}$

$\frac{E(R)}{E(R)}=1$; $\frac{E(R_0)}{E(R)}=\frac{R^3+\frac{27}{8}R^3}{2\cdot\frac{9}{4}R^3}=\frac{35}{36}$