Занятие 3. Движение микрочастиц в стационарных полях.

Ауд. Л-5: задачи №№ 6.81, 6.87, 6.102, 6.104 или Л-6: задачи №№ 5.125, 5.133, 5.154, 5.157.

6.81. Частица находится в основном состоянии в одномерной прямоугольной потенциальной яме ширины l с абсолютно непроницаемыми стенками ($0<x<l$). Найти вероятность пребывания частицы в области $l/3<x<2l/3$.

6.87. Частица массы m находится в трехмерной кубической потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками. Сторона куба равна a. Найти:

а) собственные значения энергии частицы;

б) разность энергий 3-го и 4-го уровней;

в) энергию 6-го уровня и соответствующее ему число состояний (кратность вырождения).

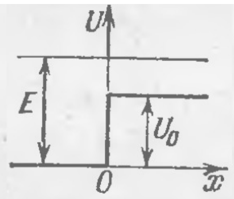

Рис. 6.6

6.102. Частицы с массой m и энергией E движутся слева на потенциальный барьер (рис. 6.6). Найти:

а) коэффициент отражения R этого барьера при $E>U_0$;

б) эффективную глубину проникновения частиц в область $x>0$ при $E<U_0$, т. е. расстояние от границы барьера до точки, где плотность вероятности нахождения частицы уменьшается в е раз.

6.104. Найти с помощью формулы (6.2е) вероятность D прохождения частицы с массой m и энергией E сквозь потенциальный барьер (рис. 6.9), где $U(x)=U_0(1-x^2/l^2)$.

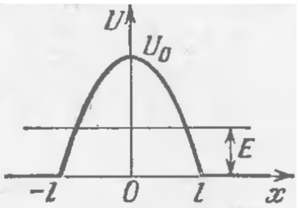

Рис. 6.9

● Коэффициент прозрачности потенциального барьера $U(x)$:

$$D \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m(U-E)}\,dx\right], \tag{6.2e}$$

где x_1 и x_2 — координаты точек, между которыми $U>E$.

Дома: Л-5: задачи №№ 6.86, 6.103а, Л-7; Л-17; Л-18 или Л-6: задачи №№ 5.132, 5.155.

6.86. Частица находится в двумерной прямоугольной потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками ($0<x<a$, $0<y<b$). Определить вероятность нахождения частицы с наименьшей энергией в области $0<x<a/3$.

6.103. Воспользовавшись формулой (6.2е), найти для электрона с энергией E вероятность D прохождения потенциального барьера, ширина которого l и высота U_0, если барьер имеет форму, показанную:

а) на рис. 6.7;

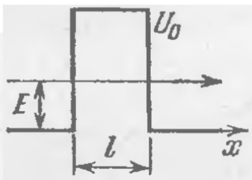

Рис. 6.7

Ответы

6.81. $P = 1/3 + \sqrt{3}/2\pi = 0{,}61.$

6.87. а) $E = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)\,\pi^2\hbar^2/2ma^2$, где n_1, n_2, n_3 — целые числа, не равные нулю; б) $\Delta E = \pi^2\hbar^2/ma^2$;

в) для 6-го уровня $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 14$ и $E = 7\pi^2\hbar^2/ma^2$; число состояний равно шести (оно равно числу перестановок тройки чисел 1, 2 и 3).

6.102. а) Запишем решения уравнения Шрёдингера слева и справа от границы барьера в следующем виде:

$$x < 0, \quad \psi_1(x) = a_1 e^{ik_1x} + b_1 e^{-ik_1x}, \text{ где } k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar,$$
$$x > 0, \quad \psi_2(x) = a_2 e^{ik_2x} + b_2 e^{-ik_2x}, \text{ где } k_2 = \sqrt{2m(E - U_0)}/\hbar.$$

Будем считать, что падающая волна характеризуется амплитудой a_1, а отраженная — амплитудой b_2. Так как в области $x > 0$ имеется только проходящая волна, то $b_2 = 0$. Коэффициент отражения R представляет собой отношение отраженного потока к падающему потоку, или, другими словами, отношение квадратов амплитуд соответствующих волн. Из условия непрерывности ψ и ее производной в точке $x = 0$ имеем $a_1 + b_1 = a_2$ и $a_1 - b_1 = (k_2/k_1)\,a_2$, откуда

$$R = (b_1/a_1)^2 = (k_1 - k_2)^2/(k_1 + k_2)^2.$$

б) В случае $E < U_0$ решение уравнения Шрёдингера справа от барьера имеет вид $\psi_2(x) = a_2 e^{\varkappa x} + b_2 e^{-\varkappa x}$, где $\varkappa = \sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar$. Из требования конечности $\psi(x)$ следует, что $a_2 = 0$. Плотность вероятности нахождения частицы под барьером $P_2(x) = \psi_2^2(x) \backsim e^{-2\varkappa x}$. Отсюда $x_{эфф} = 1/2\varkappa$.

6.104. $D \approx \exp\left[-(\pi l/\hbar)\sqrt{2m/U_0}\,(U_0 - E)\right].$

6.86. $P = 1/3 - \sqrt{3}/4\pi = 19{,}5\ \%.$

6.103 а) $D \approx \exp\left[-(2l/\hbar)\sqrt{2m(U_0 - E)}\right]$;
б) $D \approx \exp\left[-(8l\sqrt{2m}/3\hbar U_0)\,(U_0 - E)^{3/2}\right].$