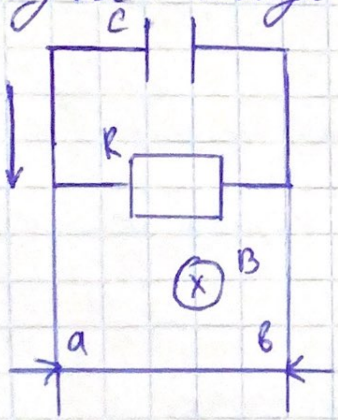
Галимова В.М
РЛ2-31
вариант 8

Домашнее задание

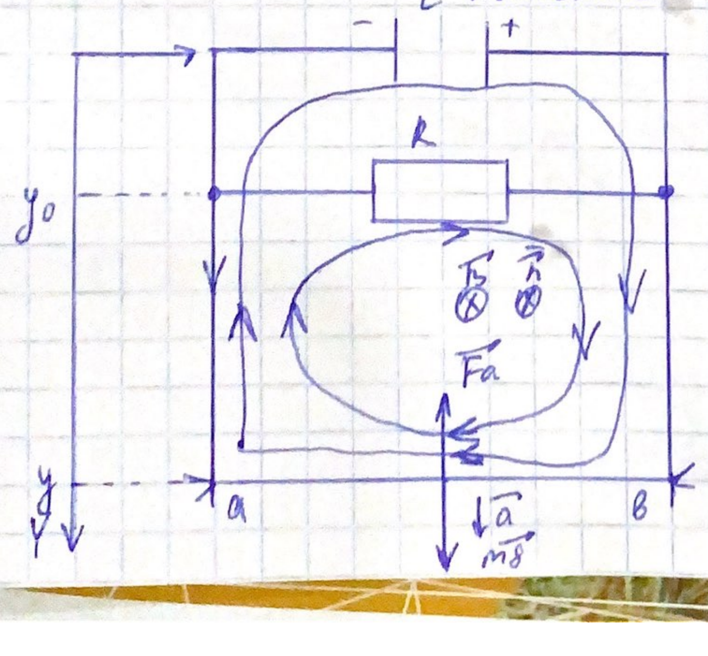
Тема 3. Электромагнитная индукция. Работа и энергия в электростатическом и магнитном полях.

Задача 3.1. По двум гладким медным шинам, установленным вертикально в однородном магнитном поле B, скользит под действием силы тяжести медная перемычка массы m, которая замыкает электрическую цепь, приведенную на рисунке. Расстояние между шинами l. Сопротивление шин, перемычки и скользящих контактов, а также самоиндукция контура пренебрежимо малы. Найти закон движения перемычки $V(t)$ при условии, что начальная скорость, ток через индуктивность и заряд на конденсаторе равны 0, $V(0)=V_0$



Дано:
C_0, R_0, l, m
$V(t)$ - ?

Решение



1) Рассмотрим два независимых контура akb и alb:
(потоки вектора $\vec{B}$ через эти контуры будут равны:
$\Phi_1 = (\vec{B}, \vec{n}) l (y - y_0)$; $\Phi_2 = (\vec{B}, \vec{n}) l (y)$

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -Bl\frac{dy}{dt} = -Bl\,\upsilon_y$$

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -Bl\frac{dy}{dt} = -Bl\,\upsilon_y, \text{ где}$$

υ_y - проекция скорости на ось Oy

2) Запишем ур-ие Кирхгофа:
для alb: $\mathcal{E}_1 = -\frac{q}{C}$;
для akb: $\mathcal{E}_2 = J_R R$;
$J = J_R + J_C$;

3) $J_C = -\frac{dq}{dt}$ (сила тока в конденсаторе)

4) И ур-ие движения Ньютона: $m\frac{d\upsilon_y}{dt} = mg + F_{Ay}$, где
F_{Ay} - проекция силы Ампера на ось Oy

5) $F_{Ay} = -JlB$

6) $\frac{q}{C} = Bl\upsilon_y$ - продиф-ем по времени: $\frac{1}{C}\cdot\frac{dq}{dt} = Bl\frac{d\upsilon_y}{dt}$;

$J_C\frac{1}{C} = Bl\frac{d\upsilon_y}{dt}$, затем еще раз продиф-ем по времени

$$\frac{dJ_C}{dt} = Bl C\frac{d^2\upsilon_y}{dt^2}$$

7) $J_R R = -Bl\upsilon_y$; продиф-ем по времени:

$$\frac{dJ_R}{dt} = -\frac{1}{R}Bl\frac{d\upsilon_y}{dt}$$

8) $J = J_R + J_C$; т.к. $\frac{dJ}{dt} = \frac{dJ_R}{dt} + \frac{dJ_C}{dt}$

9) $m\frac{d^2\upsilon_y}{dt^2} = lB\frac{dJ}{dt}$, $\frac{dJ}{dt} = \frac{m}{lB}\cdot\frac{d^2\upsilon_y}{dt^2}$

10) $m\frac{d^2\upsilon_y}{dt} = -Bl\frac{dJ}{dt}$

11) Объединим пункты 8 и 10

$$m\frac{d^2\upsilon_y}{dt^2} = -B^2l^2\left(C\frac{d^2\upsilon_y}{dt^2} - \frac{1}{R}\frac{d\upsilon_y}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2\upsilon_y}{dt^2} = \frac{B^2l^2}{mR + B^2l^2CR}\cdot\frac{d\upsilon_y}{dt}$$

12) $\frac{B^2l^2}{mR + B^2l^2CR} = \alpha$, тогда

$\frac{d^2\upsilon_y}{dt^2} = \alpha\cdot\frac{d\upsilon_y}{dt}$; пусть $\frac{d\upsilon_y}{dt} = q$; $\frac{d^2\upsilon_y}{dt^2} = q'$

$q' = \alpha\cdot q$

$\ln(q) = \alpha t + C_1$; $q = e^{\alpha t + C_1}$, при нач. ус-ях: $q(0) = g$

$e^{C_1} = g \Rightarrow \frac{d\upsilon_y}{dt} = g\cdot e^{\alpha t}$

$\int d\upsilon_y = \int g\, e^{\alpha t}\, dt$

$\upsilon_y = g\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot e^{\alpha t} + C_2$; при начальных условиях $\upsilon_y = 0$;
$C_2 = -\frac{g}{\alpha}$

$$\upsilon_y = \frac{g}{\alpha}\cdot e^{\alpha t} + \left(-\frac{g}{\alpha}\right) = \frac{g}{\alpha}\left(e^{\alpha t} - 1\right)$$

Ответ: $\upsilon_y = \frac{g(mR + B^2l^2CR)}{B^2l^2}\cdot\left(e^{\frac{B^2l^2}{mR + B^2l^2CR}t} - 1\right)$

Задача 4.

Плоская гармоническая электромагнитная волна распространяется в вакууме в положительном направ. оси Ox. Вектор плотности потока электромагнитной энергии $\vec{S}$ имеет вид: $\vec{S}(x,t) = \vec{S}_m\cos^2(\omega t - kx)$. Считая волновое число k и амплитудное значение S_m вектора $\vec{S}$ известными и действительными величинами, что допустимо для однородной изотропной среды без эффектов поглощения, найти:

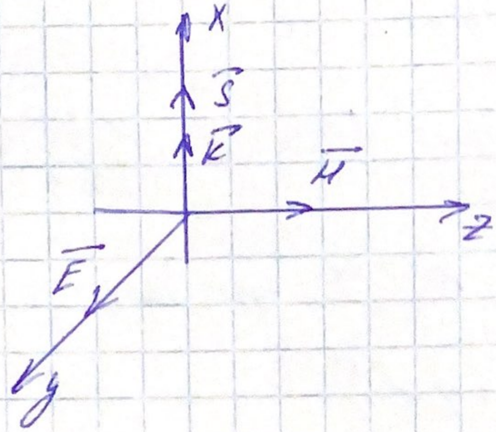
1) $\vec{E}$
2) $\vec{H}$
3) ω
4) $\langle\vec{S}\rangle$
5) $\langle S\rangle$
6) $\vec{j}_{см}$
7) $\langle|\vec{j}_{см}|\rangle$
8) $k_{сд}$

Дано: $S_m = 93{,}5\ \frac{Дж}{с\cdot м^2}$

$k = 0{,}48\ м^{-1}$

Решение

1) Т.к. по усл. волна распр. по оси Ox, а тройки векторов $\vec{k}$ $\vec{E}\vec{H}$ и $\vec{S}$ $\vec{E}\vec{H}$ являются правыми,
то вектора $\vec{k}$ и $\vec{S}$ сонаправлены Ox.



Представим вектора напряженности элект. поля $\vec{E}$ и магнитного поля $\vec{H}$ плоской гармонической электромаг. волной в комплексной форме

$$E(r,t)=E_m e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\varphi_0)} \quad (1) \qquad \vec{H}(r,t)=H_m e^{i(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\varphi_0)} \quad (2),$$

где E_m и H_m амплитуды колебаний

Представим скалярное произведение волнового вектора $\vec{k}$ и радиус-вектора $\vec{r}$ точки наблюдения в коорд. форме учитывая, что эти вектора направлены вдоль оси Ox

$$\vec{k}\vec{r}=k_x x+k_y y+k_z z = k_x x$$

Подставим полученное в (1)

$$\vec{E}(x,t)=\vec{E}_m e^{i(\omega t-kx+\varphi_0)} \quad (1) \qquad \vec{H}(x,t)=H_m e^{i(\omega t-kx+\varphi_0)} \quad (2)$$

Из ур. Максвелла в дифф. форме получим

$$\operatorname{rot} E=-\frac{\partial B}{\partial t}=-\mu_0\frac{\partial H}{\partial t} \quad (3)$$

$$E_y=|\vec{E}|=E,\ E_x=0,\ E_z=0,\ H_z=|\vec{H}|=H,\ H_y=H_x=0$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & E & 0\end{vmatrix}=\frac{\partial E(x,t)}{\partial x}\vec{k}-$$

$$-\frac{\partial E(x,t)}{\partial z}\vec{i}=\frac{\partial}{\partial x}\left(E_m e^{i(\omega t-kx+\varphi_0)}\right)\vec{i}=-kE_m e^{i(\omega t-kx+\varphi_0)}\vec{k}$$

стр4.

$$\frac{\partial \vec H}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial t}\vec i + \frac{\partial H_y}{\partial t}\vec j + \frac{\partial H_z}{\partial t}\vec i = \frac{\partial H}{\partial t}\vec i$$

Подставим всё:

$$-k E_m e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)}\vec k = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}\vec k$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{k E_m}{\mu_0} e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)}$$

$$H = \int \frac{k E_m}{\mu_0} e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)} dt = \frac{k E_m}{\mu_0 \omega} e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)}$$

и $H_m = \frac{kE_m}{\mu_0 \omega}$

т.к. $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \Rightarrow \omega = kc$ Между волновым числом и круговой частотой ω пропорциональность

$$H_m = \frac{E_m}{\mu_0 c}$$

Из условия: $\vec S(x,t) = S_m \cos^2(\omega t - kx)$, $\vec S = [\vec E \vec H]$ + (ω) и (8) $\Rightarrow \vec S = E_m \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \cdot H_m \cos(\omega t - kx + \varphi_0) = \frac{E_m^2}{\mu_0 c}\cos^2(kct - kx + \varphi_0)$

$$S_m \cos^2(kct - kx) = \frac{E_m^2}{\mu_0 c}\cos^2(kct - kx + \varphi_0)$$

Считаем, что $\varphi_0 = 0$, чтобы сократить на $\cos^2$, то

$$S_m = \frac{E_m^2}{\mu_0 c}, \quad E_m = \sqrt{\mu_0 c S_m}$$

$$E = \sqrt{\mu_0 c S_m}\cos(kct - kx)$$

вектор $\vec E(y,t)$ направлен вдоль оси O_z, $\Rightarrow$

$$\vec E(x,t) = \sqrt{\mu_0 c S_m}\cos(kct - kx)\vec i$$

Подставим известные величины:

$$\vec E(x,t) = 19{,}44\sqrt{S_m}\cos(3\cdot 10^8 kt - kx)\vec i$$

Найдем $\vec H(y,t)$

$$\vec H(x,t) = H_m \cos(kct - ky) = \frac{E_m}{\mu_0 c}\cos(kct - kx) = \frac{1}{\mu_0 c}\sqrt{\mu_0 c S_m}\cos(kct - kx) = \sqrt{\frac{S_m}{\mu_0 c}}\cos(kct - kx)$$

$\vec{H}(y,t)$ направлен вдоль Ox, то: $\vec{H}(y,t) = \sqrt{\frac{S_m}{\mu_0 c}} \cos(kct - kx)\vec{k}$

$\vec{H}(y,t) = 0{,}0517\sqrt{S_m} \cos(3 \cdot 10^8 kt - kx)\vec{k}$

Найдем объемную плотность $w(z,t)$

$w = w_E + w_H = \frac{\varepsilon_0 E^2(x,t)}{2} + \frac{\mu_0 H^2(x,t)}{2}$

$w(x,t) = \frac{\varepsilon_0}{2}\mu_0 c S_m \cos^2(kct - kx) + \frac{\mu_0}{2}\frac{S_m}{\mu_0 c}\cos^2(kct - kx) =$

$= \frac{S_m}{c}\cos^2(kct - kx)$

$w(x,t) = S_m \cdot 0{,}33 \cdot 10^{-8} \cdot \cos^2(3 \cdot 10^8 kct - kx)$

Найдем среднее за период колебаний вектора Пойнтинга $\langle \vec{S} \rangle$ плоской гармонической электромагнитной волны

$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}(t)\,dt$

$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T}\vec{S}_m \cos^2(kct - kx)\,dt = \frac{\vec{S}_m}{T}\int_0^T \cos^2(kct - kx)\,dt =$

$= \Big| \langle \cos^2(kct - kx) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(kct - kx)\,dt = \frac{1}{2T}\int_0^T (1 + \cos(2kct - 2kx))\,dt = \frac{1}{2} \Big| =$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{kc}$

$= \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}_m \cos^2(kct - kx)\,dt = \frac{\vec{S}_m}{2}$

$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\vec{S}_m}{2} = \frac{S_m}{2}\vec{j} = 0{,}5 S_m \vec{i}$

Найдем ср. значение $\langle S \rangle$ плотности потока энергии, переносимой рассматриваемой волной.

$\langle S \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T S(t)\,dt$

$\langle S \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T S_m \cos^2(kct - kx)\,dt = \frac{S_m}{2}$

$\langle S \rangle = 0{,}5 S_m$

Найдем вектор плотности тока смещения $\vec{j}_{см}$

$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, $\vec{D} = \varepsilon_0 E$, то

$\vec{D} = \varepsilon_0 \sqrt{\mu_0 c S_m} \cos(kct - kx)\vec{i}$

$\vec{j}_{см} = -k\sqrt{\varepsilon_0 c S_m} \sin(kct - kx)\vec{i}$

$\vec{j}_{см} = -0{,}0517 \cdot k \cdot \sqrt{S_m} \cdot \sin(3 \cdot 10^8 kt - kx)\vec{i}$

найдем $\langle |\vec{j}_{см}| \rangle$

$\langle |\vec{j}_{см}| \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T |k\sqrt{\varepsilon_0 c S_m} \sin(kct - kx)|\,dt =$

$= \frac{kc}{2\pi} k\sqrt{\varepsilon_0 c S_m}\int_0^{\frac{2\pi}{kc}} |\sin(kct - kx)|\,dt = \frac{kc}{2\pi} k\sqrt{\varepsilon_0 S_m c}\int_0^{\frac{\pi}{kc}} \sin(kct - kx)\,dt$

$= \frac{2k}{\pi}\sqrt{\varepsilon_0 c S_m}$

$\langle |\vec{j}_{см}| \rangle = \frac{2k}{\pi}\sqrt{\varepsilon_0 c S_m}$

$\langle |\vec{j}_{см}| \rangle = 0{,}0329 \cdot k\sqrt{S_m}$

Найдем $\vec{k}_{уд}$

$\vec{k}_{уд} = \frac{\vec{S}}{c^2}$ $\quad k_{уд}(x,t) = \frac{w(x,t)}{c}$

$k_{уд}(x,t) = \frac{S_m}{c^2}\cos^2(kct - kx)$

$k_{уд}(x,t) = 0{,}11 S_m \cdot 10^{-16} \cos^2(3 \cdot 10^8 kt - kx)$

Запишем волновое ур-е

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}\right) \\ \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2}\right) \\ v = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu} \end{cases}$$

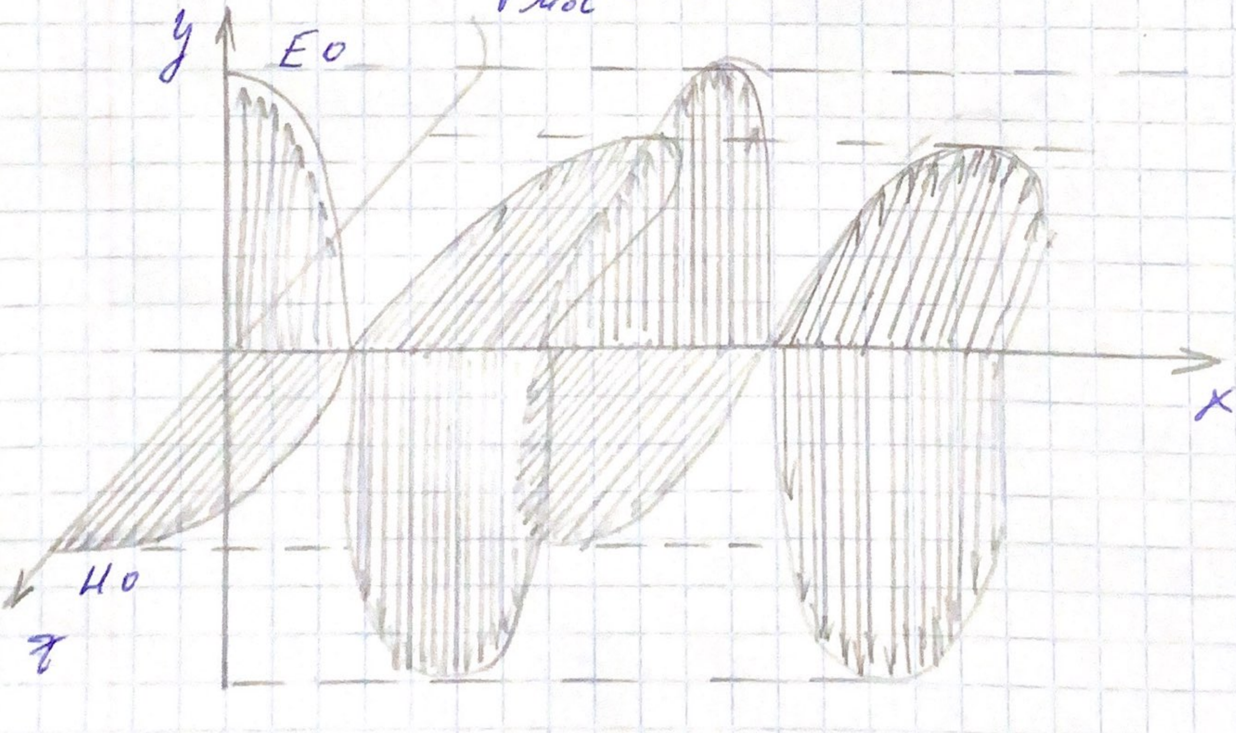
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} E(x,t) = \sqrt{\mu_0 c S_m}\cos(kct - kx)\,\vec{i} \\ H(x,t) = \sqrt{\dfrac{S_m}{\mu_0 c}}\cos(kct - kx)\,\vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -k^2 c^2 \sqrt{\mu_0 c S_m}\cos(kct - kx)\,\vec{i} \\ \dfrac{\partial^2 E}{\partial y^2} = -k^2 \sqrt{\mu_0 S_m c}\cos(kct - kx)\,\vec{i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 H}{\partial t^2} = -k^2 c^2 \sqrt{\dfrac{S_m}{\mu_0 c}}\cos(kct - kx)\,\vec{k} \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2} = -k^2 \sqrt{\dfrac{S_m}{\mu_0 c}}\cos(kct - kx)\,\vec{H} \end{cases}$$

Для мгновенной фотографии $t=0$

$$\vec{E}(x,t) = \sqrt{\mu_0 c S_m}\cos(kx)\,j$$
$$\vec{H}(x,t) = \sqrt{\dfrac{S_m}{\mu_0 c}}(kx)\,k$$



Подставим данные Sm и k

$\vec{E}(x,t) \approx 13{,}44\sqrt{93{,}5}\cos(3\cdot 10^8\cdot 0{,}48t - 0{,}48x)\vec{i} \approx$

$\approx 188\cos(1{,}44\cdot 10^8 t - 0{,}48x)\vec{i}$

$\vec{H}(y,t) \approx 0{,}0517\sqrt{93{,}5}\cos(3\cdot 10^8\cdot 0{,}48t - 0{,}48x)\vec{k} \approx$

$\approx 0{,}5\cos(1{,}44\cdot 10^8 t - 0{,}48x)\vec{k}$

$w(x,t) = 93{,}5\cdot 0{,}33\cdot 10^{-8}\cos^2(3\cdot 10^8\cdot 0{,}48\cdot t - 0{,}48x) \approx$

$\approx 3\cdot 10^{-7}\cos^2(1{,}44\cdot 10^8 t - 0{,}48x)$

$\langle\vec{S}\rangle = 0{,}5\cdot 93{,}5\,\vec{i} = 46{,}75\,\vec{i}$

$\langle S\rangle = 0{,}5\cdot 93{,}5 = 46{,}75$

$\langle j_{см}\rangle = 0{,}0323\cdot 0{,}48\sqrt{93{,}5} = 0{,}15$

$\vec{j}_{см} = +0{,}0517\cdot 0{,}48\cdot\sqrt{93{,}5}\,\sin(3\cdot 10^8\cdot 0{,}48t - 0{,}48x)\vec{j} =$

$= 0{,}24\sin(1{,}44\cdot 10^8 t - 0{,}48)\vec{j}$

$k_{эф} = 0{,}11\cdot\sqrt{93{,}5}\cdot 10^{-16}\cos^2(3\cdot 10^8\cdot 0{,}48t - 0{,}48x) =$

$= 1\cdot 10^{-16}\cos^2(1{,}44\cdot 10^8 t - 0{,}48x)$