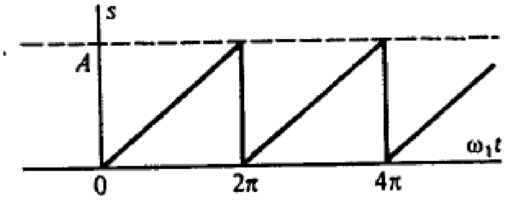
Задача №1, семинар 3.10.2022

Условие:

1. Покажите, что ряд Фурье пилообразного колебания



имеет вид

$$s(t) = (A/2) - (A/\pi)\left[\sin \omega_1 t + (\sin 2\omega_1 t)/2 + (\sin 3\omega_1 t)/3 + \ldots\right].$$

Решение:

Уравнение сигнала:

$$S(\omega_1, t) = \frac{\mathrm{At}\omega_1}{2\pi} = \frac{\mathrm{At}}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Чтобы доказать, что данный ряд Фурье пилообразного колебания имеет вид как в условии - подставим полученное уравнение сигнала в коэффициенты $\boldsymbol{a_0}$, $\boldsymbol{a_n}$, $\boldsymbol{b_n}$:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} \frac{\mathrm{At}\omega_1}{2\pi}\mathrm{dt} = \frac{2}{T}*\frac{A\omega_1}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} \mathrm{tdt} = \frac{2}{T}*\frac{A\omega_1}{2\pi}*\frac{2\pi}{\omega_1}*\frac{2\pi}{\omega_1}*\frac{1}{2} = 2\frac{\omega_1}{2\pi}*\frac{A\omega_1}{2\pi}*\frac{2\pi}{\omega_1}*\frac{2\pi}{\omega_1}*\frac{1}{2} = A;$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} \frac{\mathrm{At}\omega_1}{2\pi}\cos(n\omega_1 t)\mathrm{dt} = \left\{n\omega_1 t = x \Rightarrow t = \frac{x}{n\omega_1};\ n\omega_1\mathrm{dt} = \mathrm{dx} \Rightarrow \mathrm{dt} = \frac{\mathrm{dx}}{n\omega_1}\right\} =$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} \frac{\mathrm{At}\omega_1}{2\pi}\cos(n\omega_1 t)\mathrm{dt} = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} \frac{A\omega_1}{2\pi}\frac{x}{n\omega_1}\cos(x)\frac{\mathrm{dx}}{n\omega_1} = \frac{2}{T}*\frac{A\omega_1}{2\pi}*\frac{1}{n\omega_1}*\frac{1}{n\omega_1}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} x*\cos(x)\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{2}{T}*\frac{A\omega_1}{2\pi}*\frac{1}{n\omega_1}*\frac{1}{n\omega_1}(x*\sin(x)+\cos(x)) = \frac{2}{T}*\frac{A\omega_1}{2\pi}*\frac{1}{n\omega_1}*\frac{1}{n\omega_1}(n\omega_1 t*\sin(n\omega_1 t)+\cos(n\omega_1 t))\Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} =$$

$$= \frac{2}{T}*\frac{A\omega_1}{2\pi}*\frac{1}{n\omega_1}*\frac{1}{n\omega_1}(1-1) = 0;$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} \frac{\mathrm{At}\omega_1}{2\pi}\sin(n\omega_1 t)\mathrm{dt} = \left\{ n\omega_1 t = x \Rightarrow t = \frac{x}{n\omega_1};\ n\omega_1\mathrm{dt} = \mathrm{dx} \Rightarrow \mathrm{dt} = \frac{\mathrm{dx}}{n\omega_1} \right\} =$$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} \frac{\mathrm{At}\omega_1}{2\pi}\sin(n\omega_1 t)\mathrm{dt} = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} \frac{A\omega_1}{2\pi}\frac{x}{n\omega_1}\sin(x)\frac{\mathrm{dx}}{n\omega_1} = \frac{2}{T} * \frac{A\omega_1}{2\pi} * \frac{1}{n\omega_1} * \frac{1}{n\omega_1}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} x * \sin(x)\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{2}{T} * \frac{A\omega_1}{2\pi} * \frac{1}{n\omega_1} * \frac{1}{n\omega_1}(-n\omega_1 t * \cos(n\omega_1 t) + \sin(n\omega_1 t))\Big|_0^{\frac{2\pi}{\omega_1}} = \frac{2}{T} * \frac{A\omega_1}{2\pi} * \frac{1}{n\omega_1} * \frac{1}{n\omega_1}\left(-n\omega_1\frac{2\pi}{\omega_1}\right) =$$

$$= -\frac{2}{T} * \frac{A\omega_1}{2\pi} * \frac{1}{n\omega_1} * \frac{1}{n\omega_1} * n\omega_1 * \frac{2\pi}{\omega_1} = -\frac{A}{\pi n};$$

Найдя коэфф. подставляем их в формулу ряда Фурье для периодического сигнала:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \cos(n\omega_1 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n * \sin(n\omega_1 t) \Rightarrow s(t) = \frac{A}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{A}{\pi n} * \sin(n\omega_1 t) \Rightarrow s(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\omega_1 t)}{n} =$$

$$= \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi}\left[\frac{\sin(\omega_1 t)}{1} + \frac{\sin(2\omega_1 t)}{2} + \frac{\sin(3\omega_1 t)}{3} + \ldots\right].$$

Конечный вид ряда Фурье для данного сигнала полностью совпадает с тем, что нам дано в условии.