Глава 1, задача 11. Проведите такой же анализ для ортонормированной системы тригонометрических функций [см. формулы (1.30)]. Сравните результаты. Можно ли здесь провести аналогию с известной теоремой Пифагора?

$$\begin{aligned}
&u_0 = 1/\sqrt{T},\\
&u_1 = \sqrt{2/T}\sin 2\pi t/T,\\
&u_2 = \sqrt{2/T}\cos 2\pi t/T,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&u_{2m-1} = \sqrt{2/T}\sin 2\pi m t/T,\\
&u_{2m} = \sqrt{2/T}\cos 2\pi m t/T,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Решение:

Чтобы доказать, что взаимное расстояние между любыми двумя функциями из данной системы будет одинаковым, необходимо рассмотреть 3 случая:

1) Одна функция имеет чётный номер, вторая – нечётный

$$\rho^2(u_{2m}, u_{2k-1}) = \int_0^T (u_{2m} - u_{2k-1})^2\, dt = \int_0^T \left(\sqrt{\frac{2}{T}}\cos\frac{2\pi mt}{T} - \sqrt{\frac{2}{T}}\sin\frac{2\pi kt}{T}\right)^2 dt =$$

$$= \left|\begin{matrix}\text{расскрываем квадрат разности}\\ \text{и разбиваем на 3 интеграла}\end{matrix}\right| = \frac{2}{T}\int_0^T (\cos\frac{2\pi mt}{T})^2 dt - \frac{4}{T}\int_0^T \cos\frac{2\pi mt}{T}\, \sin\frac{2\pi kt}{T} dt +$$

$$+\frac{2}{T}\int_0^T (\sin\frac{2\pi kt}{T})^2 dt = \left|\begin{matrix}\text{в силу ортогональности функций}\\ \text{средний интеграл равен нулю}\end{matrix}\right| = \frac{2}{T2}\int_0^T (1+\cos\frac{4\pi mt}{T})\, dt +$$

$$+\frac{2}{T2}\int_0^T (1-\cos\frac{4\pi kt}{T})\, dt = \frac{1}{T}\left(t + \frac{\sin\frac{4\pi mt}{T}}{\frac{4\pi m}{T}}\right)\Big|_0^T + \frac{1}{T}\left(t - \frac{\sin\frac{4\pi kt}{T}}{\frac{4\pi k}{T}}\right)\Big|_0^T =$$

$$\left|\begin{matrix}\text{синус при } t=0\\ \text{и } t=T \text{ равен } 0\end{matrix}\right| = \frac{1}{T}T + \frac{1}{T}T = 1 + 1 = 2 \Rightarrow \rho(u_{2m}, u_{2k-1}) = \sqrt{2}$$

2) Обе функции имеют чётный номер

$$\rho^2(u_{2m}, u_{2k}) = \int_0^T (u_{2m} - u_{2k})^2\, dt = \int_0^T \left(\sqrt{\frac{2}{T}}\cos\frac{2\pi mt}{T} - \sqrt{\frac{2}{T}}cos\frac{2\pi kt}{T}\right)^2 dt =$$

$$= \left|\begin{matrix}\text{расскрываем квадрат разности}\\ \text{и разбиваем на 3 интеграла}\end{matrix}\right| = \frac{2}{T}\int_0^T (\cos\frac{2\pi mt}{T})^2 dt - \frac{4}{T}\int_0^T \cos\frac{2\pi mt}{T}\, \cos\frac{2\pi kt}{T} dt +$$

$$+\frac{2}{T}\int_0^T (\cos\frac{2\pi kt}{T})^2 dt = \left|\begin{matrix}\text{в силу ортогональности функций}\\ \text{средний интеграл равен нулю}\end{matrix}\right| = \frac{2}{T2}\int_0^T (1+\cos\frac{4\pi mt}{T})\, dt +$$

$$+\frac{2}{T2}\int_0^T (1+\cos\frac{4\pi kt}{T})\, dt = \frac{1}{T}\left(t + \frac{\sin\frac{4\pi mt}{T}}{\frac{4\pi m}{T}}\right)\Big|_0^T + \frac{1}{T}\left(t + \frac{\sin\frac{4\pi kt}{T}}{\frac{4\pi k}{T}}\right)\Big|_0^T =$$

$$\left|\begin{matrix}\text{синус при } t=0\\ \text{и } t=T \text{ равен } 0\end{matrix}\right| = \frac{1}{T}T + \frac{1}{T}T = 1 + 1 = 2 \Rightarrow \rho(u_{2m}, u_{2k}) = \sqrt{2}$$

3) Обе функции имеют нечётный номер

$$\rho^2(u_{2m-1}, u_{2k-1}) = \int_0^T (u_{2m-1} - u_{2k-1})^2\, dt = \int_0^T \left(\sqrt{\frac{2}{T}} sin\frac{2\pi mt}{T} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\frac{2\pi kt}{T}\right)^2 dt = = \left|\begin{matrix}\text{расскрываем квадрат разности} \\ \text{и разбиваем на 3 интеграла}\end{matrix}\right| = \frac{2}{T}\int_0^T (\sin\frac{2\pi mt}{T})^2 dt -$$

$$- \frac{4}{T}\int_0^T \sin\frac{2\pi mt}{T}\ \sin\frac{2\pi kt}{T} dt + \frac{2}{T}\int_0^T (\sin\frac{2\pi kt}{T})^2 dt = \left|\begin{matrix}\text{в силу ортогональности функций} \\ \text{средний интеграл равен нулю}\end{matrix}\right| =$$

$$\frac{2}{T2}\int_0^T (1 - \cos\frac{4\pi mt}{T})\, dt + \frac{2}{T2}\int_0^T (1 - \cos\frac{4\pi kt}{T})\, dt = \frac{1}{T}\left(t - \frac{\sin\frac{4\pi mt}{T}}{\frac{4\pi m}{T}}\right)\Big|_0^T +$$

$$+ \frac{1}{T}\left(t - \frac{\sin\frac{4\pi kt}{T}}{\frac{4\pi k}{T}}\right)\Big|_0^T = \left|\begin{matrix}\text{синус при } t = 0 \\ \text{и } t = T \text{ равен } 0\end{matrix}\right| = \frac{1}{T}T + \frac{1}{T}T = 1 + 1 = 2 \Rightarrow$$

$$\rho(u_{2m-1}, u_{2k-1}) = \sqrt{2}$$

Таким образом, взаимное расстояние между любыми двумя функциями из данной системы равно $\sqrt{2}$. При этом мы можем провести аналогию с теоремой Пифагора: интеграл от квадрата одной функции даёт нам 1(один катет), интеграл от квадрата другой функции также даёт 1(второй катет) и итоговое расстояние равно $\sqrt{2}$ (гипотенуза), $1^2 + 1^2 = \sqrt{2}^2$.