Глава 2, задача №11.

Дано:

$$F(p) = \frac{U_0}{(p+\alpha)(p+\beta)}$$ – изображение сигнала

Найти:

Оригинал сигнала f(t) -?

Решение:

Для удобства перевода изображения сигнала в оригинал разложим имеющуюся дробь на простейшие, воспользовавшись методом неопределённых коэффициентов:

$$F(p) = \frac{U_0}{(p+\alpha)(p+\beta)} = \frac{A}{p+\alpha} + \frac{B}{p+\beta}$$

$$A \cdot (p+\beta) + B \cdot (p+\alpha) = Ap + A\beta + Bp + B\alpha = U_0$$

Коэффициенты при p^1: $A + B = 0$

Коэффициенты при p^0: $A\beta + B\alpha = U_0$

Решаем систему с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A\beta + B\alpha = U_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ -B\beta + B\alpha = U_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{U_0}{\beta - \alpha} \\ B = \dfrac{U_0}{\alpha - \beta} \end{cases}$$

Таким образом, имеем следующее изображение:

$$F(p) = \frac{\frac{U_0}{\beta - \alpha}}{p+\alpha} + \frac{\frac{U_0}{\alpha - \beta}}{p+\beta}$$

Воспользуемся таблицей преобразований Лапласа:

$f(t)$	$F(p)$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$

Запишем оригинал сигнала:

$$f(t) = \frac{U_0}{\beta - \alpha} e^{-\alpha t} + \frac{U_0}{\alpha - \beta} e^{-\beta t}$$