

Задача №4 (из главы №2)

Условие задачи

Дан двусторонний экспоненциальный видеоимпульс:

$$s(t) = U_0 \exp(-\alpha|t|)$$

Найдите его спектральную плотность. Определите длительность сигнала и ширину спектра. Оценив их, проверьте соотношение неопределенности.

Решение

1) Найдем спектральную плотность сигнала $s(t)$ с помощью формулы, которая осуществляет преобразование Фурье:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j\omega t) dt$$

Подставим данный нам двусторонний экспоненциальный видеоимпульс:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} U_0 \cdot \exp(-\alpha|t|) \cdot \exp(-j\omega t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} U_0 \cdot \exp(-t(\alpha + j\omega)) dt + \int_{-\infty}^0 U_0 \cdot \exp(t(\alpha - j\omega)) dt = \\ &= U_0 \frac{\exp(-t(\alpha + j\omega))}{-(\alpha + j\omega)} \Big|_0^{\infty} + U_0 \frac{\exp(t(\alpha - j\omega))}{\alpha - j\omega} \Big|_{-\infty}^0 = \\ &= 0 - U_0 \left(\frac{1}{-(\alpha + j\omega)} \right) + U_0 \left(\frac{1}{\alpha - j\omega} \right) - 0 = \\ &= U_0 \left(\frac{1}{\alpha + j\omega} + \frac{1}{\alpha - j\omega} \right) \end{aligned}$$

2) Найдем длительность сигнала из условия, что эффективную длительную подобных импульсов в радиотехнике обычно определяют из условия десятикратного уменьшения уровня сигнала:

$$\exp(-\alpha\tau_{\text{и}}) = 0,1$$

Тогда получим:

$$\tau_{\text{и}} = \frac{2,303}{\alpha} [c]$$

3) Найдем ширину спектра из следующих соображений:

$$\begin{cases} \frac{\omega_B \tau_{\text{и}}}{2} = \pi \\ f_B \tau_{\text{и}} = 1 \end{cases}$$

Получим:

$$f_B = \frac{\omega_B}{2\pi}$$

Можно положить, что на верхней граничной частоте модуль спектральной плотности уменьшается в 10 раз по отношению к максимальному значению. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_B}{\alpha}\right)^2}} = 0,1 \Leftrightarrow \omega_B = \sqrt{99}\alpha$$

В итоге получаем:

$$f_B = \frac{\omega_B}{2\pi} = 1,584\alpha \text{ [Гц]}$$

4) Проверим соотношение неопределенности:

$$f_B \tau_{\text{и}} \geq 1$$

$$1,584\alpha \cdot \frac{2,303}{\alpha} \geq 1$$

$$3,648 \geq 1$$

Отсюда следует, что данный нам двусторонний экспоненциальный видеоимпульс существует.

Также можно отметить, что значение произведения ширины спектра и длительности сигнала имеет порядок единицы, что является одним из требований к ширине полосы пропускания радиотехнического устройства.