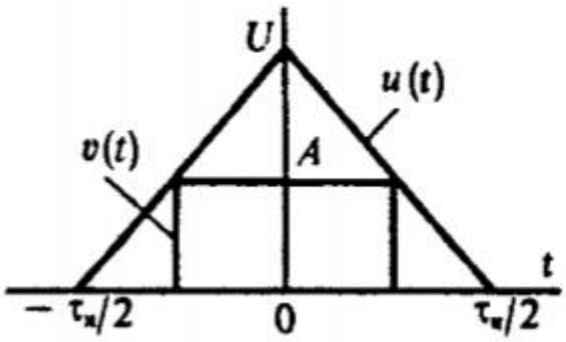
Дано

Сигнал u(t) - представляет собой симметричный треугольный импульс, сигнал v(t) - вписанный в него импульс прямоугольной формы:



Задание

Какова должна быть амплитуда прямоугольного импульса, чтобы расстояние между этими двумя сигналами было минимальным?

$$u(t) = \begin{cases} 2 \cdot \dfrac{U}{\tau_u} \cdot \left(t + \dfrac{\tau_u}{2}\right) & -\dfrac{\tau_u}{2} \le t \le 0 \\ -2 \cdot \dfrac{U}{\tau_u} \cdot \left(t - \dfrac{\tau_u}{2}\right) & 0 \le t \le \dfrac{\tau_u}{2} \end{cases}$$

$$\frac{A}{U} = \frac{2 \cdot \left(\dfrac{\tau_u}{2} - t_0\right)}{\tau_u} \Rightarrow A = \frac{2 \cdot U \cdot \left(\dfrac{\tau_u}{2} - t_0\right)}{\tau_u} \Rightarrow$$

$$\frac{A \cdot \tau_u}{2 \cdot U} = \frac{\tau_u}{2} - t_0 \Rightarrow t_0 = \frac{\tau_u}{2} - \frac{A \cdot \tau_u}{2 \cdot U} \Rightarrow t_0 = \frac{\tau_u \cdot (U - A)}{2 \cdot U}$$

$$v(t) = \begin{cases} A & -t_0 \le t \le 0 \\ A & 0 \le t \le t_0 \end{cases}$$

$\rho(u, v) = ||u - v||$ – определение метрики через разность нормы двух сигналов.

Квадрат расстояния между сигналами:

$$\rho^2(u, v) = \int_0^T (u(t) - v(t))^2 \mathrm{dt}$$

$$\rho^2(u,v) = \int_{-\frac{\tau_u}{2}}^{-t_0} \left(2 \cdot \frac{U}{\tau_u} \cdot \left(t + \frac{\tau_u}{2}\right)\right)^2 \mathrm{dt} + \int_{-t_0}^{0} \left(2 \cdot \frac{U}{\tau_u} \cdot \left(t + \frac{\tau_u}{2}\right) - A\right)^2 \mathrm{dt} +$$

$$+ \int_{0}^{t_0} \left(2 \cdot \frac{U}{\tau_u} \cdot \left(t - \frac{\tau_u}{2}\right) - A\right)^2 \mathrm{dt} + \int_{t_0}^{\frac{\tau_u}{2}} \left(2 \cdot \frac{U}{\tau_u} \cdot \left(t - \frac{\tau_u}{2}\right)\right)^2 \mathrm{dt}$$

Пусть $I = \int_{-\frac{\tau_u}{2}}^{-t_0} \left(2 \cdot \frac{U}{\tau_u} \cdot \left(t + \frac{\tau_u}{2}\right)\right)^2 \mathrm{dt}$

$$\mathrm{II} = \int_{-t_0}^{0} \left(2 \cdot \frac{U}{\tau_u} \cdot \left(t + \frac{\tau_u}{2}\right) - A\right)^2 \mathrm{dt}$$

$$\mathrm{III} = \int_{0}^{t_0} \left(2 \cdot \frac{U}{\tau_u} \cdot \left(t - \frac{\tau_u}{2}\right) - A\right)^2 \mathrm{dt}$$

$$\mathrm{IV} = \int_{t_0}^{\frac{\tau_u}{2}} \left(2 \cdot \frac{U}{\tau_u} \cdot \left(t - \frac{\tau_u}{2}\right)\right)^2 \mathrm{dt}$$

Найдем инетгралы :

$$I = \frac{4 \cdot \left(\frac{\tau_u}{2} - \frac{\tau_u \cdot (U - A)}{2 \cdot U}\right)^3 \cdot U^2}{3 \cdot \tau_u^2}$$

$$\mathrm{II} = \tau_u \cdot \frac{(U - A)^3}{6 \cdot U} - \frac{\tau_u}{6 \cdot U} \cdot \left(\frac{2 \cdot U}{\tau_u} \cdot \left(\frac{\tau_u}{2} - \frac{\tau_u \cdot (U - A)}{2 \cdot U}\right) - A\right)^3$$

$$\mathrm{III} = \frac{\tau_u}{6 \cdot U} \cdot \left(\frac{2 \cdot U}{\tau_u} \cdot \left(\frac{\tau_u \cdot (U - A)}{2 \cdot U} - \frac{\tau_u}{2}\right) - A\right)^3 - \tau_u \cdot \frac{(-U - A)^3}{6 \cdot U}$$

$$\mathrm{IV} = -\tau_u \cdot \frac{(-U - A)^3}{6 \cdot U} - \frac{4 \cdot \left(\frac{\tau_u \cdot (U - A)}{2 \cdot U} - \frac{\tau_u}{2}\right)^3 \cdot U^2}{3 \cdot \tau_u^2}$$

$$\rho^2(u,v) = \frac{4 \cdot \left(\frac{\tau_u}{2} - \frac{\tau_u \cdot (U - A)}{2 \cdot U}\right)^3 \cdot U^2}{3 \cdot \tau_u^2} +$$

$$+\tau_u \cdot \frac{(U-A)^3}{6\cdot U} - \frac{\tau_u}{6\cdot U}\cdot\left(\frac{2\cdot U}{\tau_u}\cdot\left(\frac{\tau_u}{2} - \frac{\tau_u\cdot(U-A)}{2\cdot U}\right) - A\right)^3 +$$

$$+\frac{\tau_u}{6\cdot U}\cdot\left(\frac{2\cdot U}{\tau_u}\cdot\left(\frac{\tau_u\cdot(U-A)}{2\cdot U} - \frac{\tau_u}{2}\right) - A\right)^3 - \tau_u\cdot\frac{(-U-A)^3}{6\cdot U} -$$

$$-\frac{4\cdot\left(\frac{\tau_u\cdot(U-A)}{2\cdot U} - \frac{\tau_u}{2}\right)^3\cdot U^2}{3\cdot\tau_u^2}$$

После упрощения получаем выражение:

$$\rho^2(u,v) = \frac{\tau_u\cdot(-6\cdot A^3 - (A-U)^3 + (A+U)^3)}{6\cdot U}$$

Для поиска максимальной амплитуды А необходимо это выражение продифференцировать и приравнять к нулю (при условии, что точки экстремума квадрата функции такие же, как у функции под корнем)

$$\frac{d}{\mathrm{dA}}\left(\tau_u\cdot\frac{(-6\cdot A^3 - (A-U)^3 + (A+U)^3)}{6\cdot U}\right) = \tau_u\cdot\frac{-3\cdot(A-U)^2 + 3(U+A)^2 - 18\cdot A^2}{6\cdot U}$$

$$\tau_u\cdot\frac{-3\cdot(A-U)^2 + 3(U+A)^2 - 18\cdot A^2}{6\cdot U} = 0$$

Получаем два корня:

$$A_1 = \frac{-U\cdot\left(-2\cdot\tau_u + 2\sqrt{\tau_u^2}\right)}{6\cdot\tau_u}$$

$$A_2 = \frac{-U\cdot\left(-2\cdot\tau_u - 2\sqrt{\tau_u^2}\right)}{6\cdot\tau_u}$$

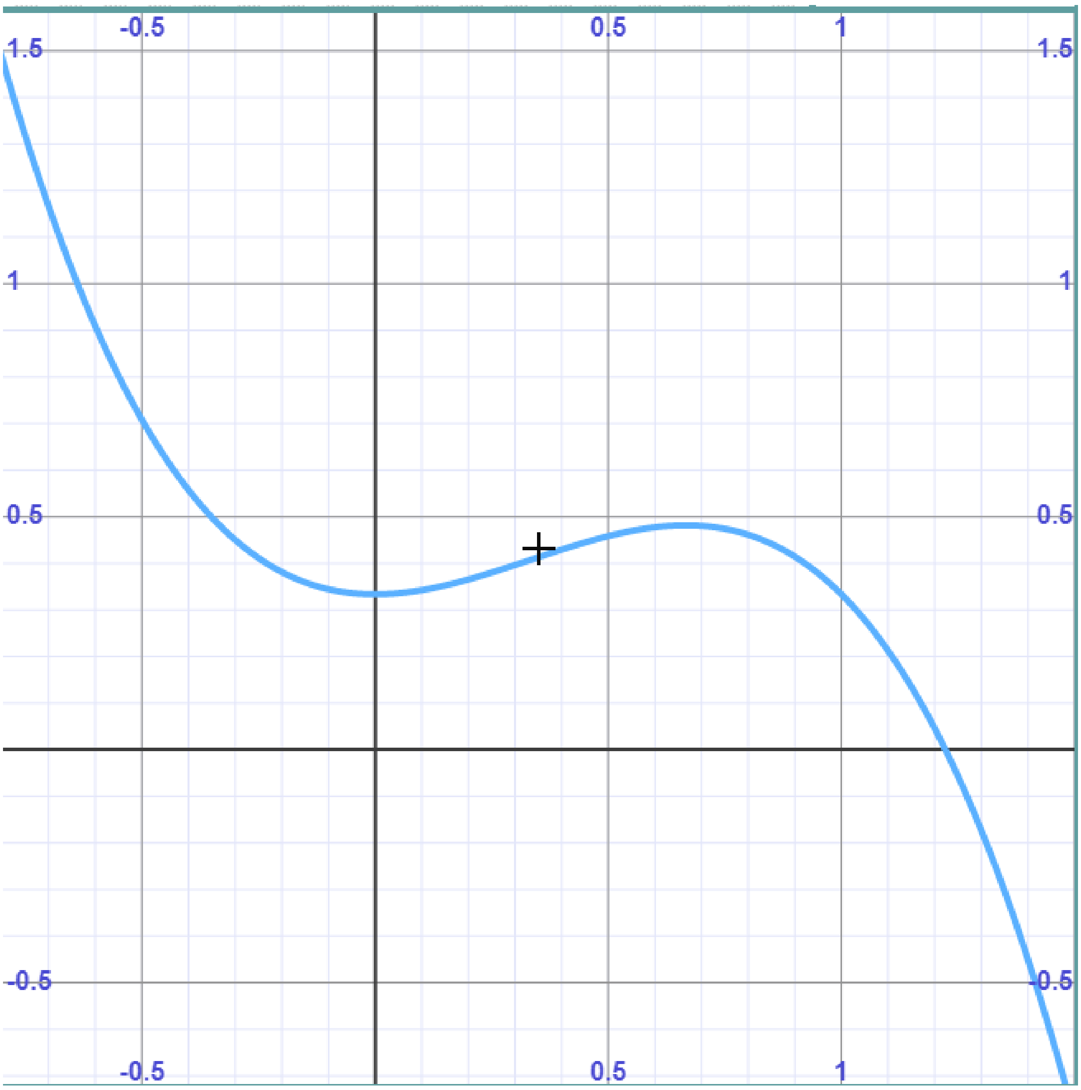


Рис.1 – график зависимости функции квадрата расстояния от амплитуды $\rho(A)$.

Можно заметить по графику зависимости представленному выше, что минимум функции соответствует выражению амплитуды

$$A = \frac{-U\cdot\left(-2\cdot\tau_и+\sqrt{\tau_и^2}\right)}{6\cdot\tau_и}$$

Таким образом для того, чтобы между сигналами расстояние было минимальным амплитуда прямоугольного сигнала должна быть равна

$$A = \frac{-U\cdot\left(-2\cdot\tau_u+2\sqrt{\tau_u^2}\right)}{6\cdot\tau_u}$$