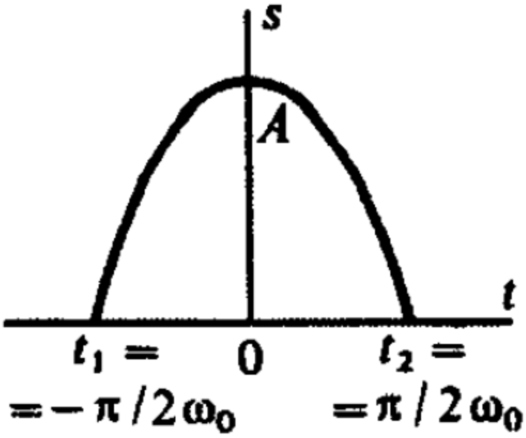
Задача 7 (книга “Радиотехнические цепи и сигналы” – С.И. Баскаков – 2000, страница 70).

Формулировка:

Убедитесь, что спектральная плотность одиночного косинусоидального импульса

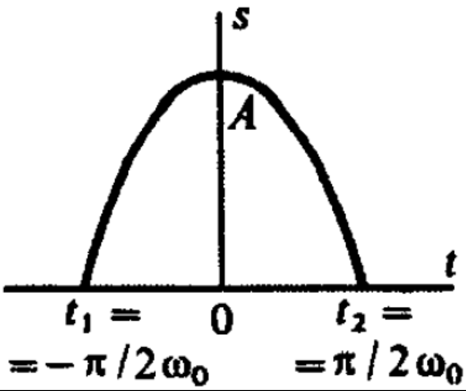


$$s(t) = \begin{cases} 0, t < t_1, \\ A\cos(\omega_0 t), t_1 \le t \le t_2, \\ 0, t > t_2 \end{cases}$$

выражается формулой

$$S(\omega) = A\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi(\omega_0 + \omega)}{2\omega_0}\right)}{\omega_0 + \omega} + \frac{\sin\left(\frac{\pi(\omega_0 - \omega)}{2\omega_0}\right)}{\omega_0 - \omega}\right].$$

Выполнение:

<table>
<tr>
<td>Дано:
$s(t) = \begin{cases} 0, t < t_1, \\ A\cos(\omega_0 t), t_1 \le t \le t_2, \\ 0, t > t_2. \end{cases}$</td>
<td rowspan="2">Решение:

</td>
</tr>
<tr>
<td>Найти:
$S(\omega) - ?$</td>
</tr>
</table>

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) * e^{-j\omega t} dt = \int_{-\pi/_{2\omega_0}}^{\pi/_{2\omega_0}} A\cos(\omega_0 t) * e^{-j\omega t} dt$$

$$= A * \int_{-\pi/_{2\omega_0}}^{\pi/_{2\omega_0}} \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} * e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{A}{2}\left(\int_{-\pi/_{2\omega_0}}^{\pi/_{2\omega_0}} e^{j(\omega_0-\omega)t} dt + \int_{-\pi/_{2\omega_0}}^{\pi/_{2\omega_0}} e^{-j(\omega_0+\omega)t} dt\right)$$

$$= \frac{A}{2}\left(\frac{e^{j(\omega_0-\omega)t}}{j(\omega_0-\omega)} + \frac{e^{-j(\omega_0+\omega)t}}{-j(\omega_0+\omega)}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2\omega_0}}^{\frac{\pi}{2\omega_0}}$$

$$= \frac{A}{2}\left(\frac{e^{j(\omega_0-\omega)\frac{\pi}{2\omega_0}} - e^{-j(\omega_0-\omega)\frac{\pi}{2\omega_0}}}{j(\omega_0-\omega)} + \frac{e^{-j(\omega_0+\omega)\frac{\pi}{2\omega_0}} - e^{j(\omega_0+\omega)\frac{\pi}{2\omega_0}}}{-j(\omega_0+\omega)}\right)$$

$$= \frac{A}{2}\left(\frac{\cos\left(\frac{(\omega_0-\omega)\pi}{2\omega_0}\right) + j\sin\left(\frac{(\omega_0-\omega)\pi}{2\omega_0}\right) - \cos\left(\frac{(\omega_0-\omega)\pi}{2\omega_0}\right) + j\sin\left(\frac{(\omega_0-\omega)\pi}{2\omega_0}\right)}{j(\omega_0-\omega)}\right.$$

$$\left. + \frac{\cos\left(\frac{(\omega_0+\omega)\pi}{2\omega_0}\right) - j\sin\left(\frac{(\omega_0+\omega)\pi}{2\omega_0}\right) - \cos\left(\frac{(\omega_0+\omega)\pi}{2\omega_0}\right) - j\sin\left(\frac{(\omega_0+\omega)\pi}{2\omega_0}\right)}{-j(\omega_0+\omega)}\right)$$

$$= \frac{A}{2}\left(2\frac{j\sin\left(\frac{(\omega_0-\omega)\pi}{2\omega_0}\right)}{j(\omega_0-\omega)} + 2\frac{-j\sin\left(\frac{(\omega_0-\omega)\pi}{2\omega_0}\right)}{-j(\omega_0+\omega)}\right)$$

$$= A\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi(\omega_0+\omega)}{2\omega_0}\right)}{\omega_0+\omega} + \frac{\sin\left(\frac{\pi(\omega_0-\omega)}{2\omega_0}\right)}{\omega_0-\omega}\right].$$

Ответ: спектральная плотность одиночного косинусоидального импульса выражается формулой

$$S(\omega) = A\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi(\omega_0+\omega)}{2\omega_0}\right)}{\omega_0+\omega} + \frac{\sin\left(\frac{\pi(\omega_0-\omega)}{2\omega_0}\right)}{\omega_0-\omega}\right].$$