Глава 1. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

1.1. Основные определения

Периодические сигналы описываются функцией :

$$\Phi(t) = \Phi(t + nt), \tag{1.1}$$

где $T = 2\pi/\omega$ – период колебаний; n – любое положительное или отрицательное целое число; ω – круговая частота.

Из (1.1) следует, что периодичность функции распространяется на интервал времени $-\infty \le t \le \infty$. Такая периодическая функция может быть представлена в виде суммы ряда других функций. Наиболее часто для этой цели используется ряд Фурье, составленный из тригонометрических функций и имеющий следующий вид в вещественной форме:

$$\Phi(\omega t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\right), \tag{1.2}$$

где $a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\Phi(\omega t)d\omega t$,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(\omega t)\cos(k\omega t)d\omega t,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(\omega t)\sin(k\omega t)d\omega t,$$

$\omega = 2\pi/T$ – круговая частота.

Функция $\Phi(\omega t)$, разлагаемая в ряд Фурье, должна быть ограниченной, кусочно-непрерывной и имеющей на протяжении периода конечное число экстремумов. Практически эти условия всегда выполняются.

Поскольку $u(\omega t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = C\cos(\omega t - \varphi)$, где $C = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}(b/a)$, то ряд (1.2) можно также представить в виде:

$$\Phi(\omega t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} C_k\cos(k\omega t - \varphi_k), \tag{1.3}$$

где $C_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ – амплитуда; $\varphi_k = \operatorname{arctg}(b_k/a_k)$ – фаза; $\overset{*}{C}_k = C_k e^{-j\varphi_k}$ – комплексная амплитуда.

Совокупность модулей C_k образует амплитудно-частотный спектр периодической функции $\Phi(\omega t)$, а фаз ω_k – фазочастотный. Амплитудный спектр является дискретным или линейчатым, в котором отдельные спектральные составляющие, определяемые значениям $\omega_k = k\omega$, следуют с интервалом, равным $\omega = 2\pi/T$.

1.2. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

Периодическая функция состоит из импульсов прямоугольной формы амплитудой AM, длительностью τ и периодом повторения T (рис. 1.1).

На участке $-\pi \le \omega t \le \pi$ данная функция

$$Z(\omega t) = AM \text{ при } |\omega t| \le \pi, \tag{1.4}$$

$$Z(\omega t) = 0 \text{ при } \alpha\pi < |\omega t| \le \pi,$$

где $\alpha = \tau/T < 1$.

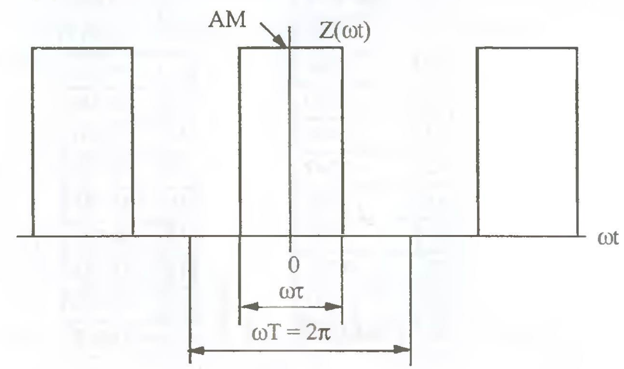

Рис. 1.1

$\alpha := 0.1 \quad N := 20 \quad AM := 1$

$$Z(x) := \begin{vmatrix} AM \ \text{if} \ |x| \le \alpha \cdot \pi \\ 0 \ \text{if} \ \alpha \cdot \pi < |x| \le \pi \end{vmatrix}$$

$k := 0..N$

$$A_k := \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} Z(x) \cdot \cos(k \cdot x)\, dx$$

$$A_0 := \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} Z(x)\, dx$$

$$AD_k := 20 \cdot \log\left(\frac{|A_k|}{A_1}\right)$$

A =

	0
0	0.1
1	0.197
2	0.187
3	0.172
4	0.151
5	0.127
6	0.109
7	0.074
8	0.047
9	0.022
10	$1.768 \cdot 10^{-8}$
11	-0.018
12	-0.031
13	-0.039
14	-0.043
15	-0.042
16	-0.038
17	-0.03
18	-0.021
19	-0.01
20	$-7.054 \cdot 10^{-8}$

AD =

	0
0	-5.877
1	0
2	-0.435
3	-1.182
4	-2.278
5	-3.779
6	-5.154
7	-8.54
8	-12.475
9	-19.084
10	-140.926
11	-20.83
12	-16.006
13	-13.946
14	-13.161
15	-13.322
16	-14.315
17	-16.241
18	-19.516
19	-25.573
20	-128.908

Рис. 1.2

Поскольку функция $Z(\omega t)$ четная, то синусные составляющие в разложении равны нулю. Программа на языке «Mathcad» по расчету постоянной составляющей A_0 и амплитуд гармоник A_k приведена на рис. 1.2. В программе: $x = \omega t$, N – число гармоник, $AD_k = 20\lg(A_k/A_1)$ – значение гармоники, выраженное в децибелах, относительно 1-й гармоники сигнала, Результаты расчета по программе при $\alpha = 0{,}1$ и $N = 20$ приведены на том же рис. 1.2. По программе можно рассчитать гармоники и при любых других значениях параметров N и $\alpha < 1$.

При прямоугольных импульсах спектральные составляющие можно вычислить также по формуле, взяв интеграл для коэффициента a_k в (1.2):

$$A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Phi(\omega t)\cos(k\omega t)\,d\omega t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha\pi} AM\cos(k\omega t)\,d\omega t =$$
$$= \frac{2AM}{\pi k}\sin(k\omega t)\Big|_0^{\alpha\pi} = \frac{2AM}{\pi k}\sin(\pi k\,\tau/T). \tag{1.5}$$

Согласно (1.5) при $k = n/\alpha$, где n – целое число, гармоники с круговой частотой

$$\omega_k = k\omega = k\frac{2\pi}{T} = \frac{n}{\alpha}\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi n}{\tau} \text{ или частотой } f_k = \frac{n}{\tau}$$

имеют значение амплитуды $A_k = 0$.

Спектры, рассчитанные по программе (см. рис. 1.2), являются линейчатыми: спектральные составляющие в них следуют с интервалом $\omega = 2\pi/T$ или $F = 1/T$. Такой спектр для прямоугольных импульсов (см. рис. 1.1) при $\alpha = 0{,}1$, рассчитанный по программе (см. рис. 1.2), построен на рис. 1.3.

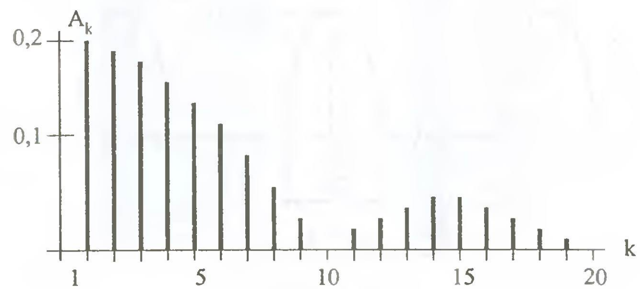

Рис. 1.3

Задание на выполнение лабораторной работы.

1. Рассчитать по программе (см. рис. 1.2) линейчатый спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов при $\alpha = 0{,}05$; $0{,}2$; $0{,}5$ или других значениях α.
2. По результатам расчета построить линейчатые спектры по типу рис. 1.3.
3. Рассчитать спектр при $\alpha = 0{,}5$ по формуле (1.5) и сравнить полученный результат с результатами расчета по программе.

1.3. Периодическая последовательность косинусоидальных импульсов

Периодическая функция состоит из импульсов косинусоидальной формы (рис. 1.4).

На участке $-\pi \le \omega t \le \pi$ данная функция

$$\Phi(\omega t) = AM\frac{\cos(\omega t) - \cos\Theta}{1-\cos\Theta} \text{ при } |\omega t| \le \Theta, \qquad (1.6)$$

$$\Phi(\omega t) = 0 \text{ при } \Theta < |\omega t| \le \pi.$$

Величина Θ называется нижним углом отсечки.

Поскольку функция $\Phi(\omega t)$ четная, то синусные составляющие в разложении равны нулю. Программа на языке «Mathcad» по расчету постоянной составляющей A_0 и амплитуд гармоник A_k приведена на рис. 1.5. В программе: $x = \omega t$, N – число гармоник, $AD_k = 20\lg(A_k/A_1)$ – значение гармоники, выраженное в децибелах, относительно 1-й гар-

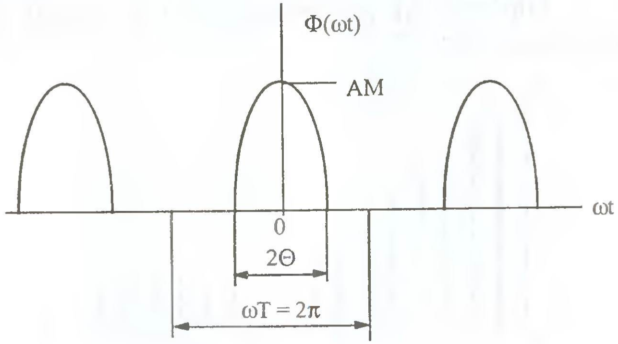

Рис. 1.4

$$UG := 60 \quad U := UG\cdot\frac{\pi}{180} \quad AM := 1 \quad N := 20$$

$$\Phi(x) := \begin{vmatrix} AM\cdot\left[\dfrac{(\cos(x) - \cos(U))}{1-\cos(U)}\right] \text{ if } |x| \le U \\ 0 \text{ if } U < |x| \le \pi \end{vmatrix}$$

$$k := 0..\,N$$

$$A_k := \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\Phi(x)\cdot\cos(k\cdot x)\,dx$$

$$A_0 := \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi}\Phi(x)\,dx$$

$$AD_k := 20\cdot\log\left(\frac{|A_k|}{A_1}\right)$$

A =

	0
0	0.218
1	0.391
2	0.276
3	0.138
4	0.028
5	-0.028
6	-0.032
7	$-9.845\cdot10^{-3}$
8	$9.844\cdot10^{-3}$
9	0.014
10	$5.012\cdot10^{-3}$
11	$-5.011\cdot10^{-3}$
12	$-7.711\cdot10^{-3}$
13	$-3.029\cdot10^{-3}$
14	$3.028\cdot10^{-3}$
15	$4.923\cdot10^{-3}$

AD =

	0
0	-5.075
1	0
2	-3.036
3	-9.057
4	-23.036
5	-23.036
6	-21.876
7	-31.979
8	-31.98
9	-29.057
10	-37.844
11	-37.845
12	-34.102
13	-42.218
14	-42.22
15	-38

Рис. 1.5

моники сигнала, U = Θ – нижний угол отсечки при размерности в радианах и UG – в градусах.

Результаты расчета по программе при Θ = UG = 60° и N = 10 приведены на том же рис. 1.5. По программе можно рассчитать гармоники и при любых других значениях параметров N и Θ = UG.

Задание на выполнение лабораторной работы.

1. Рассчитать по программе (см. рис. 1.5) линейчатый спектр периодической последовательности косинусодальных импульсов (см. рис. 1.4) при Θ = UG = 30° , 90°, 120° или других значениях Θ = UG .

2. По результатам расчета построить линейчатые спектры по типу рис. 1.3.