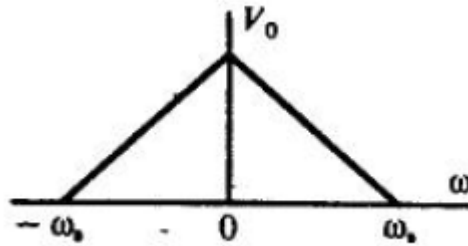


Глава 5 Задача №4

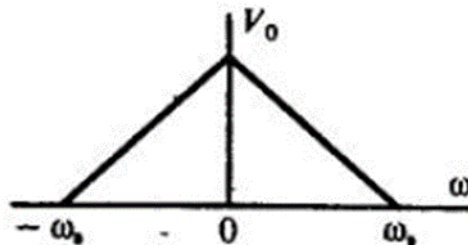
Сигнал с ограниченным спектром $v(t)$ имеет график спектральной формы треугольной формы:



Определите коэффициенты ряда Котельникова для этого сигнала, полагая, что отсчёты взяты через интервалы времени $\frac{\pi}{\omega_B}$.

Дано:

$V(\omega)$:



$$t_0 = \frac{\pi}{\omega_B}$$

Найти:

$$v_k - ?$$

Решение:

Ряд Котельникова имеет следующий вид:

$$v(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} v_k \frac{\sin(\omega_B(t - \frac{k\pi}{\omega_B}))}{\omega_B(t - \frac{k\pi}{\omega_B})}, \text{ где}$$

v_k — коэффициенты ряда, которые нам и нужно найти.

Значение каждого коэффициента находится как мгновенное значение сигнала $v(t)$ в k -ой отсчётной точке $t_k = \frac{k\pi}{\omega_B}$. Таким образом, нам необходимо найти $v(t)$.

Запишем функцию $V(\omega)$, воспользовавшись данным графиком:

$$V(\omega) = \begin{cases} V_0 \left(1 - \frac{|\omega|}{\omega_B}\right), & |\omega| \leq \omega_B \\ 0, & |\omega| > \omega_B \end{cases}$$

Тогда, используя обратное преобразование Фурье, найдём $v(t)$:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} V_0 \left(1 - \frac{|\omega|}{\omega_B}\right) e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{V_0}{2\pi} \left(\int_{-\omega_B}^{\omega_B} e^{j\omega t} d\omega - \frac{1}{\omega_B} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} |\omega| e^{j\omega t} d\omega \right) = \frac{V_0}{2\pi} \left(\frac{e^{j\omega_B t} - e^{-j\omega_B t}}{jt} - \frac{1}{\omega_B} ([1] - [2]) \right)$$

Вычислим отдельно [1] и [2], дабы не загромождать вычисления:

$$[1] = \int_0^{\omega_B} \omega e^{j\omega t} d\omega = \left| \begin{array}{l} \text{возьмём по частям} \\ u = \omega \Rightarrow du = d\omega \quad dv = e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow v = \frac{e^{j\omega t}}{jt} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\omega_B e^{j\omega_B t}}{jt} - \int_0^{\omega_B} \frac{e^{j\omega t}}{jt} d\omega = \frac{\omega_B e^{j\omega_B t}}{jt} + \frac{e^{j\omega_B t}}{t^2} - \frac{1}{t^2}.$$

$$[2] = \int_{-\omega_B}^0 \omega e^{j\omega t} d\omega = \left| \begin{array}{l} \text{возьмём по частям} \\ u = \omega \Rightarrow du = d\omega \quad dv = e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow v = \frac{e^{j\omega t}}{jt} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\omega_B e^{-j\omega_B t}}{jt} - \int_{-\omega_B}^0 \frac{e^{j\omega t}}{jt} d\omega = \frac{\omega_B e^{-j\omega_B t}}{jt} + \frac{1}{t^2} - \frac{e^{-j\omega_B t}}{t^2}.$$

Вернёмся к вычислению $v(t)$:

$$v(t) = \frac{V_0}{2\pi} \left(\frac{e^{j\omega_B t} - e^{-j\omega_B t}}{jt} - \frac{1}{\omega_B} \left(\frac{\omega_B e^{j\omega_B t}}{jt} + \frac{e^{j\omega_B t}}{t^2} - \frac{1}{t^2} - \frac{\omega_B e^{-j\omega_B t}}{jt} - \frac{1}{t^2} + \frac{e^{-j\omega_B t}}{t^2} \right) \right) =$$

$$= \frac{V_0}{2\pi} \left(\frac{e^{j\omega_B t} - e^{-j\omega_B t}}{jt} - \frac{1}{\omega_B} \left(\frac{\omega_B (e^{j\omega_B t} - e^{-j\omega_B t})}{jt} + \frac{e^{j\omega_B t} + e^{-j\omega_B t}}{t^2} - \frac{2}{t^2} \right) \right) =$$

$$= \frac{V_0}{2\pi} \left(\frac{e^{j\omega_B t} - e^{-j\omega_B t}}{jt} - \frac{e^{j\omega_B t} - e^{-j\omega_B t}}{jt} + \frac{e^{j\omega_B t} + e^{-j\omega_B t}}{\omega_B t^2} - \frac{2}{\omega_B t^2} \right) =$$

$$= \frac{V_0}{2\pi} \left(\frac{e^{j\omega_B t} + e^{-j\omega_B t}}{\omega_B t^2} - \frac{2}{\omega_B t^2} \right).$$

Запишем выражение для нахождения коэффициентов ряда Котельникова, подставив $t = \frac{k\pi}{\omega_B}$:

$$v_k = \frac{V_0 \omega_b}{2\pi} \left(\frac{e^{jk\pi} + e^{-jk\pi}}{k^2 \pi^2} - \frac{2}{k^2 \pi^2} \right)$$

Проверим, сколько коэффициентов нам необходимо для описания $v(t)$. Для этого примем $V_0 = 1$, $\omega_b = 10$ кГц и рассчитаем значения v_k для $k = 1, 2, \dots, 100$. Можем заметить, что все чётные элементы будут равны нулю, а нечётными элементами, в свою очередь, можно будет начать пренебрегать, начиная, примерно, с 100 элемента, вследствие малости коэффициентов. Стоит отметить, что при увеличении V_0 и ω_b номер коэффициента, с которого можно будет начать пренебрегать ими, будет увеличиваться.

91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	⋮
-0.0779	0	-0.0746	0	-0.0715	0	-0.0686	0	-0.0658	0	⋮