Статистическая радиотехника

Общие понятия 5
Основные законы теории вероятностей 6
Сумма и произведение событий 6
Статическая зависимость событий 6
Теорема сложения вероятностей 7
Теорема умножения вероятностей 7
Формула полной вероятности 8
Случайные величины и их характеристики 9
Общие понятия 9
Функция распределения вероятностей 9
Матожидание 10
Дисперсия 10
Моменты k – го порядка 10
Основные законы распределения вероятностей 11
Общие понятия 11
Биноминальный закон распределения 11
Распределение Пуассона 12
Равномерное распределение 12
Нормальное распределение 13
Распределение Релея 14
Обобщенное распределение Релея (Релея – Райса) 14
Случайные процессы и их параметры 15
Общие понятия 15
Анализ случайного процесса в фиксированные моменты времени 15
Анализ развития случайного процесса 16
Характеристическая функция 17
Моментные функции 17
Стационарные, нестационарные и эргодические случайные процессы 19
Общие понятия 19
Корреляционные функции и спектральные характеристики . 20
Автокорреляционная функция 20
Спектральные характеристики 22
Белый шум и его свойства 24
Общие понятия 24

Характеристики случайных сигналов, прошедших через линейные цепи 25
Общие понятия 25
Способы описания линейных систем 25
Связь между передаточной и импульсной функциями, интеграл Дюамеля 26
Нормализация СП 27
Нахождение корреляционной функции случайного процесса на выходе линейной системы 27
Нахождение ВКФ случайного процесса на входе и выходе линейной системы 28
Нахождение энергетической спектральной плотности случайного процесса на выходе линейной системы 28
Дифференцирование случайного процесса 29
Общие понятия 29
Интегрирование случайного процесса 30
Общие понятия 30
Характеристики случайных сигналов, прошедших через нелинейную цепь 31
Общие понятия 31
Квадратичный детектор 32
Квадратор сигнала 32
Ограничитель сигнала 33
Пороговое устройство 34
Определение плотности вероятности случайного процесса, являющегося результатом преобразования 34
Определение автокорреляционной функции результирующего случайного процесса 35
Определение АКФ результирующего СП способом полиноминальной аппроксимации 36
Автокорреляционная функция на выходе ограничителя сигнала 37
Узкополосные случайные процессы 39
Общие понятия 39
Задача: найти распределения W(A) и W (φ), если ε(t) – нормальный стационарный случайный процесс с нулевыми средними значениями и дисперсией $\sigma 2$ 40

Нелинейные инерционные преобразования случайного процесса 43
Общие понятия 43
Задача: определить характеристики случайного процесса $\eta(t)$ на выходе детектора огибающей сигнала 44
Оптимальные методы обнаружения и различения сигналов .. 46
Общие понятия 46
Понятие среднего риска. Стратегия Байеса 46
Обнаружение детерминированного сигнала при наличии аддитивного шума 49
Корреляционный приёмник 51
Общие понятия 51
Помехоустойчивость КП, отношение сигнал/шум на его выходе 52
Вероятность ложной тревоги и вероятность правильного обнаружения сигнала 53
Рабочие характеристики обнаружителя и характеристики обнаружения . 54
Согласованный линейный фильтр 55
Общие понятия 55
Построение СФ для одиночного видеоимпульса 58
Построение СФ для одиночного радиоимпульса 59
Построение СФ для последовательности видеоимпульсов 60
Обнаружение и различение сигналов при различных априорных сведениях 61
Квазиоптимальные фильтры 61
Обнаружение сигналов со случайной начальной фазой 62
Обнаружение сигналов со случайной начальной фазой и флуктуирующей амплитудой 64
Получение оценок параметров сигнала 66
Общие понятия 66
Среднее смещение и рассеяние результата измерения параметра 67
Оценка энергетического параметра сигнала – амплитуды 68
Оценка амплитуды сигнала с неизвестной начальной фазой 70
Получение оценок неэнергетических параметров сигнала 71
Определим характеристики получаемой оценки параметра 74
Проблемы одновременного измерения нескольких параметров сигнала. Соотношение неопределённости 76
Общие понятия 76

Основы теории информации 78
Общие понятия 78
Количественная оценка доставляемой информации 79
Основные свойства информации 79
Понятие энтропии 81
Общие понятия 81
Задача. Найдём количество информации передаваемой по двоичному, симметричному каналу связи. Условная энтропия 82
Передача информации 84
Общие понятия 84
Кодирование сообщений 87
Общие понятия 87
Минимальное число символов в коде для однозначного представления любого элементарного сообщения 88
Основная теорема о кодировании сообщений 89
Помехоустойчивое кодирование 90
Применение кодов, исправляющих ошибки. 91
Коды и их свойства 94
Виды кодов 94

Общие понятия

Статистическая радиотехника

Литература:

1. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника, 1982
2. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов, 1983
3. Якимов П.С., Селин Ф.И., Соленов В.И. Сигналы и их обработка в информационных системах, 1994

Теория вероятностей — область математики, в кот. изучаются, описываются и моделируются закономерности случайных явлений

Вероятность события $P = \frac{A}{N}$ — A — число регистраций события, N — число испытаний

События наз-ся несовместимыми, если никакие из них не могут произойти в одном и том же испытании

Случайная величина — результат изменения к.-либо параметра набл-го явления. Она может быть интерпретирована как результат мгновенного измерения

Случайный процесс — сов-сть изменений к.-либо параметра наблюдаемого явления

Реализация СП — сов-сть полученных оценок к-либо параметра наблюдаемого явления в конкретном опыте

СВ — случ. величина

СП — случ. процесс

АКФ — автокорреляционная ф-я

СФ — согласованный фильтр

КП — корреляционный приемник

Основные законы теории вероятностей

Сумма и произведение событий

Основные законы теории вер-ей

• Сумма двух событий A и B $A+B=C$ – соб., кот. состоит или в совершении соб. A, или в совершении соб. B, или в совершении обоих соб. A и B

Пр-р, событие C – вызов мастера для замены лампы, соб. A – выход из строя лампы 1, B – выход из строя лампы 2

• Произведение событий A и B $C=A\cdot B$

соб. в совершении обоих событий

Пр-р, C – отс-ие света в помещении (если произошли A и B)

Статическая зависимость событий

• Статистическая зависимость событий A и $B_1, B_2, \ldots B_j$

Соб. A наз-ся стат-ки завис. от соб. $B_1, B_2, \ldots B_j$, если вер-ть A зависит от того перечислились ли соб. $B_1, B_2, \ldots B_j$ в к.-либо комбинации; в этом случае исп-ют понятие условной вер-ти $P(A|B_1, B_2, \ldots B_j)$

Если совершение соб. $B_1, B_2, \ldots, B_j$ никак не влияет на вероятность возникн. соб. A, то вер-сть возник. этого соб. A наз-ют безусловной вер-ю и обознач. $P(A)$

Пр-р, зависит ли скор. доступа к сайту в интерн. от ориент-ии ноутбука в пр-ве? Если wi-fi, то да; если проводной инт., то нет

Теорема сложения вероятностей

• Теорема сложения вер-ей.

Вер-сть суммы 2-ух несовместимых событий равна сумме вер-ей этих событий

$P(C) = P(A) + P(B)$ - эта Т. распр. на случай суммир-я неск. соб.

Пр-р, мы обладаем прибором и акк-ами. Какова вер-ть того, что взятая наугад акк. бат. полностью разряжена ($\bar{C}$), если таких батарей 3, 5 заряжены полностью, а 2 частично

$1 - 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3$

Теорема умножения вероятностей

• Теорема умножения вер-ей

Примен. в отнош. соб. C и опр-ся как пр-ие вер. соб. A на усл. вер. соб. B при усл, что A произошло

Сл 1. Если A не завис. от B, то и B не завис. от A

Сл 2 тогда $P(C) = P(A) \cdot P(B)$ (без усл. вер-ей)

Вер-ть произв. двух независ. соб. = пр-ю вер. этих соб.

Пр-р,

$P_1 = 0{,}9$

$P_2 = 0{,}8$ - вер. безотк. работы

Вер-ти отказов $P(A) = 1 - P_1 = 0{,}1$

$P(B) = 1 - P_2 = 0{,}2$

C - отказали оба узла одновременно

$P(C) = P(A)P(B) = (1-P_1)(1-P_2) = 0{,}02$ ~~вер-ть~~

Вер-сть того, что устр-во не откажет

$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 0{,}98$

Пос. соед. узлов

$P_1 = 0{,}9$

$P_2 = 0{,}8$

C - соб., при кот. устр-во работает

$P(C) = P(A) \cdot P(B) = P_1 \cdot P_2 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72$

Тогда $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 0{,}28 = P_{отказа}$

Формула полной вероятности

· Формула полной вер-ти

Пусть соб. A может произойти как рез. наступления одного из происходящих в этой же системе соб. $H_1, H_2, \dots H_n$, кот. будем называть гипотезами

Будем считать, что вер-ти гипотез известны, также как и усл. вер. возник. A при реализации каждой из гипотез. Тогда вер-ть возник. A при всех возм. гипотезах опр-ся формулой

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i)$$

Случайные величины и их характеристики

Общие понятия

Случ. величины и их хар-ки

Перейдем от рассм-я случ. соб. к рассм-ю случ. величин, кот. предст. собой не колич., а качеств оценку событий

Функция распределения вероятностей

Ф-ей распр. вер-ей наз. ф-ю $F(x)$, опр-ю вер-ть того, что случ. вел. X примим. знач. $< x$, т.е. лежит в интервале $(-\infty, x)$

$$F(x) = P(X < x) \qquad x \in (-\infty; x)$$

Св-ва:

1. $F(-\infty) = 0$
2. $F(x)$ – неубывающая ф-ия
3. $F(\infty) = 1$

Пусть $\exists \quad W(x) = \dfrac{dF(x)}{d(x)}$

$W(x)$ – плотность вероятности

Свойства:

1. Неотрицательна
2. $\int_{-\infty}^{\infty} W(x)\,dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$

Ф-я плотн. вер-ти

размерность $W(x)$ обратна размерности x

Т.о., $P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} W(x)\,dx$

Можно и $P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_1) - F(x_2)$

Зная $W(x)$, мы можем сказать, какое значение случайной величины наивероятно, а также имеем представление о вариациях случ. величины

Экспериментально определить параметры случайного процесса достаточно сложно. Для решения многих задач достаточно знать осн. хар-ки этого процесса

Матожидание

1. Математическое ожидание

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x W(x) dx$$

Мат. ожидание имеет ту же размерность, что и x

Вероятностный смысл математического ожидания – приближенно равно (тем точнее, чем больше число испытаний) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Дисперсия

2. Дисперсия σ_x^2

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 W(x) dx \quad (2.1)$$

Дисперсия имеет размерность квадрата размерности случ. величины

$(2.1) \Rightarrow \sigma_x^2 = M[(X - m_x)^2] = M(X^2) - m_x^2$

σ_x – С.К.О., размерность, как и у СВ

Дисперсия суммы независимых СВ $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$

Замеч., если $Z = X - Y$, то $M(Z) = m_x - m_y$, но $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$

Дисперсия характеризует разброс случайной величины вокруг ее математического ожидания. Корень из дисперсии называется средним квадратичным отклонением. Оно используется для оценки масштаба возможного отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

Моменты k – го порядка

3. Моменты k-го порядка

Различают начальные и центральные моменты случ. вел.

Начальный момент k-го порядка наз-ся мат. ожидание k-ой степени СВ, а центр. мом. k-го пор. наз-ся М.О k-ой степени центрированной СВ.

Нач. мом. k-го пор.

$$M(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k W(x) dx$$

Центр. мом. k-го пор.

$$M(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k W(x) dx$$

М.О. – нач. момент 1-го пор.

Дисперсия – ц. м. 2-го пор.

Мом. 3 пор. наз. коэф-ом асимметрии распределения, мом. 4-го пор. – коэф-ом эксцесса

Основные законы распределения вероятностей

Общие понятия

Осн. з-ны распр-я вер-ей

З-ны распр. рассм-ся как для дискретных, так и для непрерывных СВ и исп-ся в соотв. с усл. решаемой задачи

Биноминальный закон распределения

~~Если в~~ Биноминальный з-н распределения вероятностей

Если вер. соб. A равна p, то вер. того, что при проведении n наблюдений опытов соб. A будет зарегистрир. k раз

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k} \quad (3.1)$$

Можно говорить, при всех возможных сочетаниях того произойдёт соб. A или нет

Назв. распр. вер-сти $P_n(k)$ можно рассм-ть как коэф-ты при k-ой степени разложения бинома $(pv+(1-p))^n$ по степеням переменной v

Мат. ожидание $M(k) = np$

Дисперсия $\sigma_k^2 = np(1-p)$

Вид распределения зависит от значения n

Распределение Пуассона

Распределение Пуассона

При большом n реализация (3.1) затруднена из-за математич. трудностей

Ну. асимпт. приближ. для (3.1), справедливое, когда при $n \to \infty$ $M(K) < \hat{\lambda}$:

$$P_n(K) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda) \quad (3.2) \text{ – распр. Пуассона}$$

Пр-р, регистрация $\bar{e}$ при возд. на материал светового излучения. Ср-число таких соб. в ед. вр. неизменно, что соотв. сделанному допущению, но даже при малой инт. излуч. в теч. T вр. набл. может набл. неск. десятков таких соб., а это делает пр-ски невозможным применение 3.1

Как и в предыдущем случае виды распределения сущ. зависят от пар-ма λ

Мат. ожидание λ

Дисперсия $\sigma_k^2 = \lambda$

Вид распр-я зависит от знач. пар-ма λ

Равномерное распределение

Равномерное распределение

Если при проведении n независ. испыт. случ. дискр. величина принимает значения x_i, $i = 1, 2, \dots, n$ с одинаковыми вероятностями

$p_i = 1/n$, то эта случ. вел. имеет равномер. распр.

Сл. вел. имеет равномер распр-ие на отр. $[a, b]$, если она непрерывна, принимает значения только на отр. $[a, b]$, а плотность её распр. пост. на отр. $[a, b]$ и $= 0$ вне отр.

$$W(x) = \frac{1}{b-a}, \ x \in [a, b], \quad W(x) = 0, \ x \notin [a, b]$$

Мат. ож. $M(x) = \frac{a+b}{2}$

Дисперсия $\sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

Нормальное распределение

Нормальное распределение

~~ЦПТ~~. Пл-сть вер. суммы независ. слаг. при неогранич. увелич. их числа приближ. к норм. з-ну распр. независимо от того, какие распр. имеют эти слагаемые. ЦПТ явл. мат-ки строгим док-ом этого.

В силу того, что в природе имеет место именно такая ситуация — одновременно наличествуют большое число случ. процессов — нормальный з-н распр. м/б часто применим для описания происходящих процессов. В этом случае пл-сть вер-ти имеет вид:

$$W(X)=C\exp\left(-\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.3)$$

m и σ - пар-ры распр., C - константа

Нормировка (3.3) для выполнения усл. $\int_{-\infty}^{\infty} W(x)\,dx=1$ приводит к значению $C=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ и стандартной форме записи распр-я $W(X)$:

$$W(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(X-m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.4)$$

Пар-р m имеет смысл ф-знач. (вот почему М.О. для $X=m$ для (3.4)), а пар-р σ имеет смысл с.к.о СВ, ~~[illegible]~~ ф-я пл-сти вер. нот. задана норм. законом. Такое описание аналитическое длинное, поэт. исп-ют термин „нормально распр-я СВ"

Ф-я, называемая интегралом вероятности, протабулирована

$$\Phi(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Z}\exp\left(-\frac{X^2}{2}\right)dx$$

Важные численные соотношения:

вер-сть попад. норм. распр. СВ
в инт. $[-\sigma,\sigma]$ 0,683
в инт. $[-3\sigma,3\sigma]$ 0,997

При больших знач. k хорошо аппрокс-ся норм. распр. как биномиальное распр, так и распр-ие Пуассона

Распределение Релея

Распределение Релея

$$W(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (35)$$

σ – пар-р распределения

Исп-ся для описания узкополосного СП

М.О. $M(x) = \sigma\sqrt{\pi/2}$

Дисперсия $\sigma_x^2 = (2 - \pi/2)\sigma^2$

Справедливо примерное рав-во $M(x) \approx 1{,}25\,\sigma_x$

Обобщенное распределение Релея (Релея – Райса)

Обобщенное распр-ие Релея (распр. Релея-Райса)

$$W(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + a^2}{2\sigma^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{ax}{\sigma^2}\right) \quad (36)$$

σ - пар-р распр., $I_0(\cdot)$ – ф-я Бесселя нулевого порядка

Исп-ся для описания суммы сигнала и узкополосного шума

В зав-ти от пар-ра приближ. к распр. Релея, либо к норм. з-му распр.

При $a = 0$ распр. соотв. распр. Релея

Случайные процессы и их параметры

Общие понятия

СП и их параметры

В радиоэлектронике, радиотехнике под СП понимают случайно изменяющуюся во времени электрическую величину: в радиоэлектронике — обычно напряжение. Этот процесс будем обозначать как $\xi(t)$

Анализ случайного процесса в фиксированные моменты времени

Анализ СП в фиксир. мом. вр.

1. Опред. N знач. отсчетов СП $x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_N(t_1)$

2. Выделим из получ. совокупности n_1 значений, величина кот. лежат в интервале $[\xi, \xi+\Delta\xi]$, причём $\Delta\xi$ мало

3. Определим знач. отсчета ф-ции, кот. назовём одномерной плотностью вер-сти СП ($\to W_1(\cdot)$), для выбранных $t_1, \xi, \Delta\xi$

$$W_1(\xi, t_1)\cdot\Delta\xi = \lim_{N\to\infty}\frac{n_1}{N}$$

Повторив операции 1-3 для различ. значений ξ, определим $W_1(\xi, t_1)$.

Зная эту ф-цию, мы можем хар-ть СП в фиксир. мом. вр., но при этом не получим представл. о динамике развития СП — т.е. его развитии во времени

Анализ развития случайного процесса

Анализ развития СП

1. Определим N знач. отсчетов СП $x_1(t_1), x_2(t_1) \dots x_N(t_1)$ в мн. вр. t_1 и N знач. $x_1(t_2), x_2(t_2) \dots x_N(t_2)$ в мом. вр. $t_2 > t_1$

2. Анализируя N пар знач. отсчетов СП $\{x_1(t_1), x_2(t_2)\}$, $\{x_2(t_1), x_2(t_2)\}, \dots \{x_N(t_1), x_N(t_2)\}$ определим число n_2 пар, величина кот. в мом. вр. t_1 лежат в инт. $[y_1, y_1+\Delta y_1]$, а в мом. вр. t_2 той же реализации леж. в инт. $[y_2, y_2+\Delta y_2]$, причём $\Delta y_1, \Delta y_2$ малы

3. Опред знач. отсчета ф-ии $W_2(\cdot)$ кот. наз. двумер. плотностью вер-ти СП для выбранных $t_1, t_2, y_1, y_2, \Delta y_1, \Delta y_2$

$$W(y_1, y_2, t_1, t_2) \cdot \Delta y_1 \cdot \Delta y_2 = \lim_{N \to \infty} \frac{n_2}{N}$$

Как и ранее, повт. оп. 1–3, опред. ф-ию $W_2(y_1, y_2, t_1, t_2)$. Она даёт значит больше инф-ции о СП – позволяет судить о связи между вер-ми знач. СП в два мом. вр. Но она по-прежнему не даёт исчерп. описания СП. Для полного его описания в общ. случ. треб. опред. n мерную плот-сть вер-сти. Описание будет тем детальнее, чем больше n.

Характеристическая функция

Альтернативой явл. опис. СП с пом. характеристической ф-ии, предст. собой преобр. Фурье от ф-ии плотн. вер-ти

$$\Theta(u_1, u_2, \dots, u_n, t_1, t_2, \dots t_n) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} W_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, t_1, t_2, \dots t_n) \cdot$$
$$\cdot \exp(j(u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + \dots + u_n\xi_n))\, d\xi_1\, d\xi_2 \dots d\xi_n$$

Для одномерной пл-ти вер-ти

$$\Theta(u_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} W(\xi_1, t_1)\exp(ju_1\xi_1)\, d\xi_1.$$

По сути, характер. ф-ция предст. собой мат. ож. exp.

Т.к. ф-я пл. вер-ти и хар. ф-я связ. функц-ой завис., каждая из этих ф-ий содерж. одну и ту же ин-формацию о С.П.

Моментные функции

Во многих практич. случ. для описания СП целесообр. исп-ть более простые хар-ки – моментные и корреляционные ф-ции. Являясь ф-ии более низкого порядка, они позв. получ. больше инф-ии о СП $\xi(t)$, чем ф-ии более высокого порядка.

Моментные ф-ии явл. мат. ожиданиями произведений целых степеней однамер. случ. вида:

$$M_{i_1}(t) = \langle \xi^{i_1}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{i_1} W_1(\xi, t)\, d\xi$$ – момент i_1-го порядка

$$M_{i_1 i_2}(t_1, t_2) = \langle \xi^{i_1}(t_1)\, \xi^{i_2}(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} W_2(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2)$$

$d\xi_1 d\xi_2$ – ~~момент~~ двумерный мом. $i_1 + i_2$-го пор.

$$M_{i_1 i_2 i_3}(t_1, t_2, t_3) = \langle \xi^{i_1}(t_1)\, \xi^{i_2}(t_2)\, \xi^{i_3}(t_3) \rangle =$$

$$= \int\int\int_{-\infty}^{\infty} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \xi_3^{i_3} W_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t_1, t_2, t_3)\, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$ – трехмерный мом. $i_1 + i_2 + i_3$-го порядка

Знак скобки означ. нахожд. ф. знач. по ансамблю случ. реализаций. Указ. мом. наз. начальными моментами.

Аналогичным образом нах-ся <u>центральные мом.</u> — для ф-ий $y(t)$, из каждой из кот. вычтена соотв. ф-я ср. знач.
Центр. мом. обычно обознач. прописными **буквами**

Важные для исп. в инж. практике

$M_1(t)$ — ср. знач. СП (одномер. мом. 1-го пор.)

$m_2(t) = \langle [y(t) - M_1(t)]^2 \rangle$ — дисперсия (одномер. центр. мом. 2-го пор.

$M_{11}(t_1, t_2)$ — корреляц. ф-я СП (двумер. мом. 2-го пор.)

↑

хар-ет степень статистич. связи между знач. СП в 2 произвольных мом. вр.

Стационарные, нестационарные и эргодические случайные процессы

Общие понятия

Стационар, нестационар. и эргодические СП

Стац. наз. СП, плотности вер-ей кот. не изменяются при изменении положения на временной оси начала инт. наблюдения. Это весьма „жёсткое условие", поэтому его исп-ие уточняют, говоря о стационарности в узком смысле.

Нестац. СП хар-ны, н-р, для инт. переходных режимов работы технических ср-в

Критерий стац-сти СП — постоянство во времени его мат. ож. и зависимость корр-ой ф-ии только от разности знач. t_1, t_2. Треб. вып-ие этого усл-я, говорят о стац-сти пр-са в широком смысле.

СП, стац-ые в узком смысле, всегда стац-ны в широком смысле, но не наоборот. Есть единств. пр-с, кот. назыв. нормальным стац-ым, для кот. понятие стац-сти в узком и широком смысле полностью совпадают.

Для стац. СП $\xi(t)$ имеем

- ф-ю пл. вер. $W(\xi, t) \equiv W(\xi)$
- М.О. $m(t) = \langle \xi(t) \rangle = m$
- дисперсия $\sigma^2(t) = \langle [\xi(t) - m]^2 \rangle = \sigma^2$ (4.1)

Эргодическими наз. случ., стац. в узком смысле пр-сы, одна дост. продолж-ая реализация кот. может содерж. все сведения о св-ах этого пр-са.

Корреляционные функции и спектральные характеристики

Автокорреляционная функция

Корреляц. ф-ии и спектр. характ-ки СП

Формально кор-ые ф-ии опр-ся путём разложения в ряд Маклорена логарифма характ-ой ф-ии

Различают взаимные корр-ые ф-ии (ВКФ), определяющие степень статист. связей между разными СП и автокорр-ые ф-ии (АКФ), опред. эти связи для одного СП.

АКФ наз-ся ф-ия корреляции одного СП в 2 разных мом. вр.:

$$K_2(t_1, t_2) = \langle [\xi(t_1) - M_1(t_1)] \cdot [\xi(t_2) - M_1(t_2)] \rangle =$$
$$= \langle \xi(t_1)\xi(t_2) \rangle - \langle \xi(t_1) \rangle \langle \xi(t_2) \rangle$$

Считая, что СП стационарен (спр-вы ур. (4.))

$t_2 = t_1 + \tau$, $t_1 = t$, получим след. запись:

$$K(\tau) = \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle - m^2$$

Следует обратить внимание, что в данном случае корреллируются (сравн-ся) откл. случ. пр-са от его сред. знач. Возможно проведение кор-ии не отклонений, а собств. СП. В этом случае АКФ

$$\tilde{K}(\tau) = \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle$$

Свойства АКФ:

1. АКФ стац. пр-са явл. ф-ией четной

Предположив, что $t_2 = t_1 - \tau$, получаем

$$K(-\tau) = \langle \xi(t-\tau)\xi(t) \rangle - m^2 = K(\tau)$$

2. АКФ стац. пр-са имеет макс. при $\tau = 0$

Известно, что $\langle (y(t)-m)^2 \rangle = \sigma^2$

С др. стор., $\langle (y(t)-m)^2 \rangle = \langle y(t)^2 \rangle - \underbrace{2m\langle y(t) \rangle}_{2m^2} + m^2 =$

$= \langle y(t)^2 \rangle - m^2$

Тогда $\langle y(t)^2 \rangle = \sigma^2 + m^2$

Поэтому $K(0) = \langle y(t) \cdot y(t) \rangle - m^2 = (\sigma^2 + m^2) - m^2 = \sigma^2$

3. АКФ стац. пр-ва, как правило, убыв. до знач. 0 при $\tau \to \pm\infty$ в силу того, что знач. СП становятся статистически независимыми.

ВКФ (взаимн.) указ. св-ами не обладает

~~АФК~~ АКФ низкочаст. шума

АКФ белый шум

Широко исп-ся норм. корр-ция при опис. СП, представ. собой нормир. на величину дисперсий АКФ:

$$k(\tau) = \frac{K(\tau)}{\sigma^2} = \frac{K(\tau) - m^2}{\sigma^2}$$

Для колич. оценки степени корр-ции СП исп-ся понятия времени корр-ции τ_k.

τ_k позв. оценить величину инт. врем., на кот. имеет место связанность (корреляция) знач. СП. Опр-ся как $1/2$ основания прям-ка единич. высоты, площадь кот. равна площади под кривой $k(\tau)$:

$$\tau_k = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} k(\tau)\,d\tau$$

Спектральные характеристики

Спектральные хар-ки СП

Под спектр. плотностью СП $S(\omega)$ понимают рез-т преобраз. Фурье от АКФ этого пр-сса:

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau \qquad (5.1)$$

Справедливо и обрат. преобр:

$$K(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega \qquad (5.2)$$

(5.1), (5.2) – ф-лы Винера-Хинчина

Поскольку $K(0)=\sigma^2$, из (5.2) для $\tau=0$ получаем

$$\sigma^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, d\omega \qquad (5.3)$$

Если под $\xi(t)$ понимать ф-ию завис. напр. от времени, то дисперсия σ^2 числ. равна сред. мощн., выдел. на рез-ре сопр-ем 1Ом при приложении к нему напряж., меняющееся по з-ну $\xi(t)$

Произ-ие $S(\omega)d\omega$ пропор-но части мощности, выдел. на резисторе гармоник. компонентами сигнала $\xi(t)$ в полосе частот $[\omega, \omega+d\omega]$. Поэтому:

1. Всегда $S(\omega)\geq 0$
2. Размерность $S(\omega)$ опр-ся

$$\left[\frac{\text{ед. мощн.}}{\text{ед. частота}}\right]=[\text{ед. энергии}]$$

Поэтому $S(\omega)$ иногда назыв. энергетич. спектром

3. Ф-ия $S(\omega)$ хар-ет распр-ие пл-ти мощности СП $\xi(t)$ по частоте
4. Чем больше ширина $S(\omega)$, тем меньше время корреляции τ_k и „уже" АКФ

Энергетическая ширина спектра

Для ∀ СП $\xi(t)$ можно ввести понятие энергетич. ширины спектра Δf:

$$\Delta f = \frac{1}{S(f_0)} \int_0^\infty S(f)\,df$$

Интегрирование проводится в пред. суущ. знач. этих частот

Опр-ие эф-ой ширины энергетич. спектра СП

Обычно f_0 выбир. так, чтобы она соотв. максимуму спектр. пл-сти СП. Площадь прямоуг. с осн. Δf = площади под ф-ей $S(f)$

1. Произвед. $\tau_к \cdot \Delta f$ есть ≈ пост. вел.
2. Знание спектр. плот. $S(f)$ СП не позв. восстановить к-л его реализацию, т.к. она не содержит сведений о фазах отдельных сост. спектра.
3. Знание спектр. пл-сти $S(f)$ СП позв. оценивать его энергетич. хар-ки и, =>, оценивать степень воздействия этого СП на работу радиотех-ой аппар-ры

Белый шум и его свойства

Общие понятия

Белый шум и его св-ва

Понятие БШ вводится как обозначение модели СП, корр-ая ф-я кот. предст. собой δ-ф-ю, а спектр. пл-сть неизменна во всем диап. частот:

$$K(\tau) = \frac{N_0}{2}\,\delta(\tau) \qquad (5.3)$$

В радиотехнике этот пр-с обычно обознач. $n(t)$

Знач. $n(t)$ в любые 2, сколь угодно близкие мом. вр. некоррелированы. Термин „белый" подчерк. неизменность спектр. пл-сти $n(t)$.

Спектр. пл. БШ $S(f)$ опред. в обл. знач. физически реализуемых мин. частот как величина $N_0\,[В^2/Гц]$

$$S(f) = S(\omega) + S(-\omega) = 2S(\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$S(\omega) = \frac{N_0}{2} \text{ — необх.}$$

вводить для БШ

Из (5.3) имеем

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau = \frac{N_0}{2} = const$$

Опред. мощн. БШ:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2}\, d\omega = \infty$$

Такая ситуация физич. нереализуема, что еще раз подтв. мат. идеализацию введ. понятия „белый шум".

Характеристики случайных сигналов, прошедших через линейные цепи

Общие понятия

Хар-ки случ. сигналов, прошедших через линейные цепи..

Задача: определить пар-ры СП – сигнала, послед-но прошедшего через лин. и нелин. звенья

(Способы описания линейных систем)

Любое радиотехнич устр-во предст. собой комбина-цию линейных (усилители, фильтры) и нелин. (детектор, порог. устр-во) звеньев. Эти звенья также дел. на инер-ционные и безынерц. Начнем с анализа лин. сист, сущ. лин. преоб. вх. сиг. вых.

Способы описания линейных систем

Способы описания линейных систем		
Дифференциальное уравнение	Передаточная ф-я $K(j\omega)$	Импульсная переходная ф-я $G(t)$
Форм-ся в соотв. с физич. явл. реализуемыми в цепи	Отношение сигнала на выходе сист. к вх. гармонич. сигналу $K(j\omega) = \dot{U}_2 / \dot{U}_1$	Реакция системы на вх. сиг. в виде δ-ф-ии $G(t<0)=0$ $\lim_{t\to\infty} G(t)=0$
Типичное применение для опред. сост. системы		
Стац. режим Нестац. режим	Стац. режим	Стац. режим нестац. режим Только при нулевых н.у.

Связь между передаточной и импульсной функциями, интеграл Дюамеля

Ф-ции $K(j\omega)$ и $G(t)$ связ. преобр-ием Фурье

$$G(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$K(j\omega)=\int_{0}^{\infty}G(t)e^{-j\omega t}dt$$

Если на вход лин. сист. воздействует случ. сигнал $\xi_1(t)$ со спектр. плотностью $S(\omega)$, то выходной сигнал $\xi_2(t)$ опр-ся инт-лом Дюамеля

$$\xi_2(t)=\int_0^t G(t-\tau)\,\xi_1(\tau)\,d\tau=\int_0^t \xi_1(t-\tau)G(\tau)d\tau \qquad (6.1)$$

а спектр. плотность $\xi_2(t)$ опред-ся выраж.

$$S_{\xi_2}(\omega)=S_{\xi_1}(\omega)\cdot|K(j\omega)|^2$$

При решении (6.1) верх. предел можно заменить на ∞.

Чтобы оценить $\xi_2(t)$, необходимо найти плотность вер-сти $W(\xi_2,t)$

Особый случай: вх. пр-с $\xi_1(t)$ имеет норм. распр. При этом вых. пр-с также будет иметь норм. распр-ие

Нормализация СП

При прохожд. через лин. сист. СП, имеющего отличное от норм. распределения и ширину энергетич. спектра, значит, превышающую полосу пропускания лин. системы, наби-ся приближ. вых. СП к нормальному

Это явл. получило назв. процесса нормализации СП

В основе этого явл. — выполнение ЦПТ: сумма беск. большого числа СВ имеет норм. распр-ие независимо от законов распределений каждой из них.

Нахождение корреляционной функции случайного процесса на выходе линейной системы

Нахождение КФ СП на выходе лин. системы

Пусть известна импульс. передат. ф-ция $G(t)$ лин. сист.

$$K_{\xi_2}(t_1,t_2) = \langle \xi_2(t_1)\cdot \xi_2(t_2)\rangle = \left\langle \int_0^\infty \xi_1(t_1-u)G(u)\,du \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \int_0^\infty \xi_1(t_2-v)\,G(v)\,dv \right\rangle = \left\langle \int_0^\infty\int_0^\infty \xi_1(t_1-u)\,\xi_1(t_2-v)\,G(u)\,G(v)\,du\,dv \right\rangle =$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty \langle \xi_1(t_1-u)\cdot \xi_1(t_2-v)\rangle G(u)\,G(v)\,du\,dv$$

Если вх. СП стационарен, то стационарен и выходной СП

$$K_{\xi_2}(\tau) = \int_0^\infty\int_0^\infty K_{\xi_1}(\tau-v+u)\,G(u)\,G(v)\,du\,dv \quad (6.2)$$

Пусть на лин. сист. воздействует БШ, АКФ которого

$$K_{\xi_1}(\tau) = \frac{N_0}{2}\,\delta(\tau)$$

АКФ СП $\xi_2(t)$ на выходе лин. сист. опред. из (6.2):

$$K_{\xi_2}(\tau) = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{N_0}{2}\,\delta(\tau-v+u)\,G(u)\,G(v)\,du\,dv =$$

$$= \frac{N_0}{2}\int_0^\infty G(u)\,G(\tau+u)\,du$$

Это равенство следует из ауц. единич. знач. δ-ф-ии только в точке $v=\tau+u$

Нахождение ВКФ случайного процесса на входе и выходе линейной системы

$$K_{\xi_1,\xi_2}(t_1,t_2)=\langle \xi_1(t_1)\cdot\xi_2(t_2)\rangle=\left\langle \xi_1(t_1)\int_0^\infty \xi_1(t_2-u)\,G(u)\,du\right\rangle=$$

$$=\int_0^\infty \langle \xi_1(t_1)\,\xi_1(t_2-u)\rangle\,G(u)\,du=\int_0^\infty K_{\xi_1}(\tau-u)\,G(u)\,du$$

~~Пусть~~

Если на входе лин. сист. действует белый шум, то: $K_{\xi_1,\xi_2}(t_1,t_2)=\int_0^\infty \frac{N_0}{2}\delta(\tau-u)\,G(u)\,du=\frac{N_0}{2}G(\tau)$

Нахождение энергетической спектральной плотности случайного процесса на выходе линейной системы

Нахождение энерг. спектр. плотности СП на выходе лин. сист.

В соотв. с (5.1) имеем:

$$S_{\xi_2}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi_2}(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau$$

Тогда, используя (6.2), получим

$$S_{\xi_2}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\infty\int_0^\infty K_{\xi_1}(\tau-v+u)\,G(u)\,G(v)\,e^{-j\omega\tau}\,du\,dv\,d\tau=$$

$$=\{z=\tau-v+u\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\infty\int_0^\infty K_{\xi_2}(z)\,G(u)\,G(v)\,e^{-j\omega z}e^{j\omega u}e^{-j\omega v}\,du\,dv\,dz=$$

$$=\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi_2}(z)\,e^{-j\omega z}\,dz}_{\text{Преобр. Фурье от вход. СП}}\cdot\underbrace{\int_0^\infty G(u)\,e^{j\omega u}\,du}_{K(j\omega)\ \text{лин. сист.}}\cdot\underbrace{\int_0^\infty G(v)\,e^{-j\omega v}\,dv}_{K(-j\omega)\ \text{лин. сист.}}=$$

$$=S_{\xi_1}(\omega)\,|K(j\omega)|^2$$

Если на входе лин. сист. с передат. ф-ией $K(j\omega)$ действует БШ, то на её выходе наб-ся СП с энерг-ой спектр. плотностью

$$S_{\xi_2}(\omega)=\frac{N_0}{2}\,|K(j\omega)|^2$$

Дифференцирование случайного процесса

Общие понятия

Дифференцирование СП

Эту зад. рассм-м на примере

Зад. Опр-ть хар-ки СП - напряжения на индуктив-ности $u_L(t)$ - при протекании через нее флуктуирующего тока $i_L(t)$

$$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

мин. уч. → константа

Представив $i_L(t)$ СФ $\xi(t)$: $\eta(t) = \frac{d\xi(t)}{dt}$ - приходим к необ-сти поиска М.О. и К.Ф. СФ $\eta(t)$

1. Мат. ож. ф-ции $\eta(t)$:

$$M\{\eta(t)\} = \langle\eta(t)\rangle = \left\langle \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\xi(t+\Delta t)-\xi(t)}{\Delta t}\right\rangle =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\langle\xi(t+\Delta t)-\xi(t)\rangle}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\langle\xi(t+\Delta t)\rangle-\langle\xi(t)\rangle}{\Delta t} = \frac{dM\{\xi(t)\}}{dt}$$

- М.О. производной С.Ф. равно производной от ее М.О.

2. КФ для ф-ции $\eta(t)$:

$$K(\eta, t_1, t_2) = \langle\eta(t_1)\,\eta(t_2)\rangle = \left\langle\frac{d\xi(t_1)}{dt_1}\cdot\frac{d\xi(t_2)}{dt_2}\right\rangle =$$

$$= \left\langle\frac{\partial^2\xi(t_1)\,\xi(t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2}\right\rangle = \frac{\partial^2 K(\xi, t_1, t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2}$$

Для стац. ф-ий справедливо отношение:

$$K(\eta,\tau) = -\frac{\partial^2 K(\xi,\tau)}{\partial\tau^2}$$

Вывод: дифф-ние стационарного СП всегда приводит к формированию ~~СП~~ стационар. в шир. смысле СП с нулевым ср. значением

3. Энерг. спектр пл-сть СП:

$$S_\eta(\omega) = S_\xi(\omega)\,|K(j\omega)|^2 = S_\xi(\omega)\cdot\omega^2$$

$$(K(j\omega) = j\omega)$$

Интегрирование случайного процесса

Общие понятия

Интегрирование СП

Зад. Опр-ть хар-ки СП – напр. на ёмкости $U_c(t)$ в интегр. RC-звене – при протекании флуктуирующего тока $i_c(t)$

$$U_c(t) = U_0 + \frac{1}{C}\int_0^t i_c(t)\,dt$$

U_0) $t=0$ – н.у.

Представим $i_c(t)$ СП $\xi(t)$: $\eta(t) = \int_0^t \xi(t)\,dt$

1. М.О. СП

$$M\{\eta(t)\} = \langle \eta(t) \rangle = \left\langle \int_0^t \xi(t)\,dt \right\rangle = at$$ – СП на выходе интегратора не стационарен

2. К.Ф. СП $\eta(t)$

$$K(\eta, t_1, t_2) = \langle \eta(t_1)\eta(t_2) \rangle = \left\langle \int_0^{t_1} \xi(\tau_1)\,d\tau_1 \int_0^{t_2} \xi(\tau_2)\,d\tau_2 \right\rangle =$$

$$= \left\langle \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \xi(\tau_1)\xi(\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2 \right\rangle = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \langle \xi(\tau_1)\xi(\tau_2) \rangle\,d\tau_1\,d\tau_2 =$$

$$= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K(\xi, \tau_1, \tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2$$

3. Энерг. спектр. пл-сть СП:

$$S_\eta(\omega) = S_\xi(\omega)\,|K(j\omega)|^2 = S_\xi(\omega)\cdot\frac{1}{\omega^2}$$, т.к. для интегрирующего звена $K(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

Характеристики случайных сигналов, прошедших через нелинейную цепь

Общие понятия

Хар-ки случ. сигналов, прошедших через нелинейные цепи

Зад.: опр-ть пар-ры СП-сигнала, прош. через нелинейное звено

$\eta(t) = \psi(\xi(t))$, $\psi(\cdot)$ - нелин. ф-я

Опр-ие плот. вер-ти результ. СП

Будем считать, что ф-я, связывающая $\xi(t)$ и $\eta(t)$, кот. назовем обратной и обозначим как $\Psi(\cdot)$, - однозначная ф-я. При этом $\xi(t) = \Psi(\eta(t))$.

Вер-ть того, что знач. СП $\eta(t)$ попадает в инт. $[\eta, \eta+d\eta]$ равна вер-сти попадания СП $\xi(t)$ в инт. $[\xi, \xi+d\xi]$

Поэтому $W(\eta)\,d\eta = W(\xi)\,d\xi$

Отсюда $W(\eta) = W(\xi)\dfrac{d\xi}{d\eta} = W(\Psi(\eta))\left|\dfrac{d\Psi(\eta)}{d\eta}\right|$ (7.1)

Если обрат. ф-я двузначная и представима ф-ми $\Psi_1(\cdot)$ и $\Psi_2(\cdot)$.

$\xi_1 = \Psi_1(\eta)$ при $\xi_1 \in [0, \infty)$ $\quad \xi_2 = \Psi_2(\eta)$ при $\xi_2 \in (-\infty, 0)$

то $W(\eta)\,d\eta = W(\xi_1)\,d\xi_1 + W(\xi_2)\,d\xi_2$,

откуда

$$W(\eta) = W(\Psi_1(\eta))\frac{d\Psi_1(\eta)}{d\eta} + W(\Psi_2(\eta))\frac{d\Psi_2(\eta)}{d\eta}$$

и в рез-те $W(\eta) = W(\xi_1)\dfrac{d\xi_1}{d\eta} + W(\xi_2)\dfrac{d\xi_2}{d\eta}$ (7.2)

Квадратичный детектор

$$W(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\psi(\eta)=0 \quad \xi\in(-\infty;0)$$

$$\psi(\eta)=a\xi^2 \quad \xi\in[0;+\infty)$$

Обрат. ф-я: $\psi(\xi)=\sqrt{\frac{\eta}{a}}$

Для всех неотриц. ξ применим (7.1)

$$W(\eta)=W(\psi(\eta))\left|\frac{d\psi(\eta)}{d\eta}\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{\eta}{a2\sigma^2}\right)\frac{1}{2\sqrt{a\eta}}$$

Все значения $\xi<0$ дают $\eta=0$, поэтому

$$P(0)=\int_{-\infty}^{0}W(\xi)\,d\xi$$

Квадратор сигнала

Квадратор сигнала

$$W(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\psi(\eta)=a\xi^2 \quad \xi\in(-\infty;+\infty)$$

Обр. ф-ции: $\psi_1(\xi)=\sqrt{\frac{\eta}{a}}$,

$\psi_2(\xi)=-\sqrt{\frac{\eta}{a}}$

Применим (7.2):

$$W(\eta) = W(\psi_1(\eta)) \left| \frac{d\psi_1(\eta)}{d\eta} \right| + W(\psi_2(\eta)) \left| \frac{d\psi_2(\eta)}{d\eta} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\eta}{a2\sigma^2}\right) \frac{1}{2\sqrt{a\eta}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\eta}{a2\sigma^2}\right) \frac{1}{2\sqrt{a\eta}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi a\eta}\,\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{\eta}{a2\sigma^2}\right)$$

Ограничитель сигнала

Ограничитель сигнала

$$W(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$k = \frac{a_{tr} + b_{tr}}{\alpha + \beta}$$

$$\eta = \begin{cases} -a_{tr}, & \xi < -\alpha \\ k\xi, & -\alpha \le \xi \le \beta \\ b_{tr}, & \xi > \beta \end{cases}$$

Применим (7.1) на 3-ёх инт.:

$-\alpha \le \xi \le \beta$: $\xi = \frac{\eta}{k}$ → $W(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma^2 k^2}\right) \frac{1}{k}$

коэф. передачи

$\xi < -\alpha$: $\eta = -a_{tr}$ → $W(\eta) = \lambda \cdot P(\eta = -a_{tr}) \cdot \delta(\eta + \alpha)$

$\xi > \beta$: $\eta = b_{tr}$ → $W(\eta) = \lambda \cdot P(\eta = b_{tr})\, \delta(\eta - \beta)$

Пороговое устройство

Пороговое устр-во

$$W(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\eta=\begin{cases}-a_{tr}, & \xi<0\\ b_{tr}, & \xi\geq 0\end{cases}$$

Применим (7.1) для 2-ого инт.:

$\xi<0: \eta=-a_{tr} \longrightarrow W(\eta)=P(\eta=-a_{tr})\cdot\delta(\eta+\alpha)$

$\xi>0: \eta=b_{tr} \longrightarrow W(\eta)=P(\eta=b_{tr})\cdot\delta(\eta-\beta)$

Определение плотности вероятности случайного процесса, являющегося результатом преобразования

Определение плотности вероятности СП, являющегося результатом преобразования

Пусть $\eta_1(t)=\xi_1(t)$, а $\eta_2(t)=\psi(\xi_1(t),\xi_2(t))$, причём плот. вер. $W(\xi_1,\xi_2)$ известна. Опред. плот. вер. вход. СП $\eta_2(t)$

$$W(\eta_2)=\int_{-\infty}^{\infty}W(\eta_1,\eta_2)\,d\eta_1$$

Обрат. ф-ии рассм-го преобр.: $\xi_1=\eta_1$, $\xi_2=\psi(\eta_1,\eta_2)$

Тогда $W(\eta_1,\eta_2)=W(\xi_1,\xi_2)\cdot|D|$ (7.3), где

$|D|$ - якобиан, кот. для рассм. задачи имеет вид

$$|D|=\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi(\eta_1,\eta_2)}{\partial\eta_1} & \frac{\partial\psi(\eta_1,\eta_2)}{\partial\eta_2}\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{\partial\psi(\eta_1,\eta_2)}{\partial\eta_2}$$

Сл-но
$$W(\eta_2)=\int_{-\infty}^{\infty} W(\eta_1, \psi(\eta_1,\eta_2))\frac{\partial\psi(\eta_1,\eta_2)}{\partial\eta_2}d\eta_1 \quad (7.4)$$

Исп-я (7.4), можно найти плот. вер. суммы, разности, произв., отношения 2-ух СВ

Сложение:

Пусть $\eta_1=\xi_1$, $\eta_2=\xi_1\pm\xi_2$, тогда $\xi_1=\eta_1$; $\xi_2=\eta_2\mp\xi_1$.

Тогда в соотв. с (7.4) получ. знач.:
$$W(\eta_2)=\int_{-\infty}^{\infty} W(\xi_1,\eta_2\mp\xi_1)\,d\xi_1$$

Если $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ статистически независимы, то
$$W(\eta_2)=\int_{-\infty}^{\infty} W(\xi_1)\cdot W(\eta_2\mp\xi_1)\,d\xi_1$$

Плот. вер-ти суммы НСВ опред-ся как свертка плот. вер. слагаемых

Определение автокорреляционной функции результирующего случайного процесса

Определение АКФ результир-го СП

$$K_\eta(t_1,t_2)=\langle\eta(t_1)\cdot\eta(t_2)\rangle=\langle\psi(\xi(t_1))\cdot\psi(\xi(t_2))\rangle=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi(t_1))\cdot\psi(\xi(t_2))\cdot W(\xi_1,\xi_2,t_1,t_2)\,d\xi_1\,d\xi_2$$

Нахождение АКФ рез-го СП на выходе нелин. уст-ва требует знания двумер. плот. вер-ти входного СП.

Для реал. устр-в з обыч. опред. экп-но, затем, чтобы получить аналит. выраж. хар-к вых. СП, исп-ют разл. способы аппроксимации полученных отсчётов $\xi(\cdot)$:

- полиномиальную апр-цию,
- кусочно-линейную
- апр-цию с пом трансцендентных ф-ий

Определение АКФ результирующего СП способом полиноминальной аппроксимации

Ф-ю $f(x)$ можно разл. в р. Маклорена:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \qquad a_k = \frac{f^{(k)}(x)|_{x=0}}{k!}$$

Пусть $\eta(t) = \psi(\xi(t)) = a_0 + a_1 \xi(t) + a_2 \xi^2(t) + \dots + a_n \xi^n(t)$

Ср. знач. СП на выходе нелин. звена

$$\langle \eta(t) \rangle = a_0 + a_1 \langle \xi(t) \rangle + a_2 \langle \xi^2(t) \rangle + \dots + a_n \langle \xi^n(t) \rangle =$$
$$= a_0 + a_1 M_1(\cdot) + a_2 M_2(\cdot) + \dots + a_n M_n(\cdot)$$

АКФ этого СП

$$K_\eta(t_1, t_2) = \langle \eta(t_1) \eta(t_2) \rangle = \langle [a_0 + a_1 \xi(t_1) + \dots + a_n \xi^n(t_1)] \cdot$$
$$\cdot [a_0 + a_1 \xi(t_2) + \dots + a_n \xi^n(t_2)] \rangle$$

Выполнив операции перемножения и пост-но вычисляя ср. значения, получим искомую АКФ как лин. комб. одномерных (порядков от 1 до n) и двумер. мом. (порядков от 2 до $2n$) входного СП.

Автокорреляционная функция на выходе ограничителя сигнала

АКФ на выходе ограничителя сигнала

1. Найдем ф. знач. СП $\eta(t)$:

$$\langle \eta(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\cdot W(\xi)\,d\xi = \int_{-\infty}^{-\alpha} -a_{tr}\, W(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \int_{-\alpha}^{\beta} k\xi\, W(\xi)\,d\xi + \int_{\beta}^{\infty} b_{tr}\, W(\xi)\,d\xi$$

Поскольку $W(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right)$

$$\langle \xi(t)\rangle = -a_{tr}\int_{-\infty}^{-\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right)d\xi +$$

$$+ k\int_{-\alpha}^{\beta}\xi\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right)d\xi + b_{tr}\int_{\beta}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right)d\xi$$

Введя обозначение $v = \xi/\sigma$ и исп-я инт. вер. для 1 инт. получим

$$-a_{tr}\int_{-\infty}^{-\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right)d\xi = -a_{tr}\int_{-\infty}^{-\alpha/\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)dv =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)$$

Аналогично вычисл. 3 инт.:

$$\cancel{b_{tr} = \int}\; b\int_{\beta}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right)d\xi = b_{tr}\int_{\beta/\sigma}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)dv =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\beta}{\sigma}\right)$$

Вычисл. 2 инт. в выр. дает след. рез.:

$$\frac{k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\alpha}^{\beta}\frac{\xi\sigma}{\sigma\sigma}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right)d\xi = \frac{-k\sigma}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right)\Big|_{-\alpha}^{\beta} =$$

$$= \frac{-k\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left(\exp\left(-\frac{\beta^2}{2\sigma^2}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\right)\right)$$

2. АКФ на выходе СП $\eta(t)$:

$$K_\eta(t_1, t_2) = \langle \eta(t_1)\,\eta(t_2)\rangle = \iint_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi(t_1))\,\psi(\xi(t_2))\cdot W(\xi_1, \xi_2, t_1, t_2)\,d\xi_1 d\xi_2 = \iint_{-\infty}^{-\alpha}(-a_{tr})(-a_{tr})\,W(\cdot)\,d\xi_1 d\xi_2 +$$

$$+ \iint_{-\infty}^{-\alpha}\int_{-\alpha}^{\beta}(-a_{tr})\,k\xi(t_2)\,W(\cdot)\,d\xi_1 d\xi_2 + \iint_{-\infty}^{-\alpha}\int_{\beta}^{\infty}(-a_{tr})\,b_{tr}\,W(\cdot)\,d\xi_1 d\xi_2 +$$

$$+ \int_{-\alpha}^{\beta}\int_{-\infty}^{\alpha}\cdots + \int_{-\alpha}^{\beta}\int_{-\alpha}^{\beta}\cdots + \int_{-\alpha}^{\beta}\int_{\beta}^{\infty}\cdots + \int_{\beta}^{\infty}\int_{-\infty}^{-\alpha}\cdots + \int_{\beta}^{\infty}\int_{-\alpha}^{\beta}\cdots + \int_{\beta}^{\infty}\int_{\beta}^{\infty}\cdots$$

3. Опред. спек. плот. мощн. СП

Найдя АКФ стац СП на выходе нелин сист, можно, исп-я преобр. Винера-Хинчина, опред. искомую спектр. плот. мощности СП

Однако, непосред. выч. инт. типа (7.1) при выполн (5.1) оказ. сложным. Поэт. предв-но его преобраз. так, чтобы разделить перем. инт. в двойном инт.

Анализ показ, что стац. широкопол СП после нелин. неинерц. преобр. ост. стац. и широкополосным

Узкополосные случайные процессы

Общие понятия

Узкополосные ~~сигнал~~ случайные процессы

Под узкополосными СП понимают такой пр-с, для кот. выполняется условие:

$\Delta\omega \ll \omega_0$, где ω_0 – средняя частота спектра

Встреч. в устр-ах с относ. малой полосой пропускания: УВЧ, УПЧ (усил. промежут. частоты)

Эти СП можно рассматривать как гармонические колебания со случайной амплитудой и фазовой модуляцией:

$$\xi(t) = A(t)\cos(\omega_0 t - \varphi(t)) \quad (8.1)$$

, $A(t)$, $\varphi(t)$ – медл. меняющиеся ф-ции по сравнению с ф-цией $\cos(\omega_0 t)$

Из (8.1) следует, что $\xi(t)$ м.б. представлена в виде квадратурной формы записи

$$\xi(t) = A_c(t)\cos(\omega_0 t) + A_s(t)\sin(\omega_0 t) \quad (8.2)$$

$A_c(t) = A(t)\cos(\varphi(t))$, $A_s(t) = A(t)\sin(\varphi(t))$ – квадратурные компоненты

$$A(t) = \sqrt{A_c^2(t) + A_s^2(t)}$$

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg}\left(\frac{A_s(t)}{A_c(t)}\right) \quad (8.3)$$

Интерпретация такого представления:

$\xi(t)$ – вектор, вращающийся со средней угловой скоростью ω_0 и медленно изменяющий свою длину по закону $A(t)$.

Заметим, что ауд. и др. формы представления $\xi(t)$, кот. реализуются при наличии спец. требований к принимаемой модели сигнала

Для описания СП (8.1) необходимо знать плотности вероятности огибающей $W(A)$ и фазы $W(\varphi)$ (лек. 4)

Задача: найти распределения W(A) и W (φ), если ε(t) – нормальный стационарный случайный процесс с нулевыми средними значениями и дисперсией σ^2

Предположим, что $\xi(t)$ – норм-ый стац-ый СП с нулевым ср. значением и дисперсией σ^2

Задача: Найти распред-ие $W(A)$ и $W(\varphi)$, если $\xi(t)$ – —//—

Решение:

Из (8.2) интуитивно ясно, что для рассм-ого СП $A_c(t)$ и $A_s(t)$ также есть норм-ые СП с нулевыми сред. знач. и дисп. σ^2, т.е.

$$W(A_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{A_c^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$W(A_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{A_s^2}{2\sigma^2}\right)$$

Строгое д-во смотри [Тихонов]

Эти СП статистически независимы, поэтому плотность вер-сти $W(A_c, A_s)$ находится как произв-ие $W(A_c)$ и $W(A_s)$, приводящее к ур-ию

$$W(A_c, A_s) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A_c^2 + A_s^2}{2\sigma^2}\right)$$

Поскольку функц-ая связь пары ф-ий $A_c(t)$ и $A_s(t)$ с парой ф-ий $A(t)$ и $\varphi(t)$ известна, в соотв. с рез-ми 7 имеем:

$$W(A, \varphi) = W(A_c, A_s) \cdot |D|$$

Якобиан преобр-ия имеет вид:

$$|D| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -A\sin\varphi \\ \sin\varphi & A\cos\varphi \end{vmatrix} = A$$

В рез-те получаем:

$$W(A) = \int_0^{2\pi} W(A,\varphi)\,d\varphi \qquad (8.4)$$

$$W(\varphi) = \int_0^{\infty} W(A,\varphi)\,dA \qquad (8.5)$$

Интерес предст-ет случай, когда СП $A_c(t)$ и $A_s(t)$ явл. норм. статистически независимыми СП с дисп. σ^2, но имеют ненул. ср. знач. m_c и m_s соотв-но. Для него:

$$W(A_c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(A_c - m_c)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$W(A_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(A_s - m_s)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Совместное распр-ие получаем через произв-ие плотностей вер-сти:

$$W(A_c, A_s) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A_c^2 + A_s^2 + m_c^2 + m_s^2 - 2(m_c A_c + m_s A_s)}{2\sigma^2}\right)$$

Представим, что $A_c^2 + A_s^2 = A^2$

$m_c^2 + m_s^2 = A_0^2$

Учтем также, что

$$2(m_c A_c + m_s A_s) = 2AA_0\left(\frac{m_c}{A_0}\frac{A_c}{A} + \frac{m_s}{A_0}\frac{A_s}{A}\right) =$$

$$= 2AA_0(\cos\theta_0 \cos\varphi + \sin\theta_0 \sin\varphi) = 2AA_0\cos(\varphi - \theta_0)$$

Получим

$$W(A,\varphi) = W(A_c, A_s)|D| = \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2 + A_0^2 - 2AA_0\cos(\varphi - \theta_0)}{2\sigma^2}\right)$$

Отсюда с учётом (8.4) следует, что

$$W(A) = \int_0^{2\pi} W(A,\varphi)\, d\varphi = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2+A_0^2}{2\sigma^2}\right) \cdot$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \exp\left(\frac{AA_0 \cos^0(\varphi-\theta_0)}{\sigma^2}\right) d\varphi$$

В рез-те получаем

$$W(A) = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2+A_0^2}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{AA_0}{\sigma^2}\right) \quad (8.6),$$

где $I_0\left(\frac{AA_0}{\sigma^2}\right)$ - модифицир-ая ф-я Бесселя 1-го пор-ка от арг-та $\frac{AA_0}{\sigma^2}$

~~Увеличение~~ Выр. (8.6) соотв. обобщ. з-ну Релея (см. лек 3). При $A_0 = 0$ з-н совп. с з-ом Релея, а при больших A_0 (8.6) приближ. к распр-ю Гаусса

Увеличение A_0 можно рассм-ть как рез-т увеличения амплитуды детерминир-го полезного сигнала, аддитивно склад-го со СП, что опр-ся увелич. значения М.О. СП и уменьш. величины относит. дисп.

$$W(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2+a^2}{2\sigma^2}\right) \cdot I_0\left(\frac{ax}{\sigma^2}\right)$$

Нелинейные инерционные преобразования случайного процесса

Общие понятия

Нелинейные инерционные преобр-я СП

Нахождение хар-к СП на выходе нелин. инерц. преоб-я требует решения стохастического нелин. диф-ого ур-я.

Метод реш. такого ур-я завис. как от величины воздействующих возмущений так и от соотношения времени корреляции СП τ_c и пост. времени системы τ_s

При малых возмущ. независимо от соотнош. τ_c и τ_s применим метод линеаризации, сущность кот. заключается в том, что в диф. ур-ии пренебрег. нелин. членами, имеющими 2-ой и более высокие порядки: вклад этих членов оказ-ся пренебрежимо малым. В рез-те получают лин. диф. ур-ие, кот. решается известными способами. При больших возмущениях выбор метода решения зависит от соотнош. τ_c и τ_s. Если $\tau_s \gg \tau_c$, то прим. аппарат марковских процессов и решают ур-я Фоккера-Планка. Если $\tau_c \gg t_s$, то применяют квазистатич. метод — пренебрегают производной СП $\xi(t)$, что дает нелин. инерц-ые преобр-я сводить к нелин-ым безинерц-ым преобразованиям

Задача: определить характеристики случайного процесса $\eta(t)$ на выходе детектора огибающей сигнала

Задача. Опр-ть хар-ки СП $\eta(t)$ на выходе детектора огибающей сигнала

Решение:

сигнал на входе детектора огибающей представим как узкополосный СП вида (8.1), для кот. известна величина времени корреляции τ_c СП $A(t)$

Ток диода $i_V = g(u_V)$ опр-ся его ВАХ $g(*)$. Очевидно, что в $\forall$ мом. вр. должно выр-ся

равенство $i_V = i_C + i_R = g(u_V)$

Напр. на диоде: $u_V(t) = \xi(t) - \eta(t)$

Исп-я (8.1), получим:

$$\underbrace{C\frac{d\eta(t)}{dt}}_{\text{ток через } C} + \underbrace{\frac{\eta(t)}{R}}_{\text{ток через } R} = g(A(t)\cos(\omega_0 t - \varphi(t)) - \eta(t) \quad (8.7)$$

$\tau = RC$: $\tau \gg T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ – усл-ие выделения огибающей сигнала

$\tau \ll \tau_c$ – усл-ие отслеживания изменений огибающей сигнала

Для решения (8.7) следует исп-ть квазистатический метод, получив ур-ие

$$\int_t^{t+T_0} \frac{d\eta(t)}{dt}dt + \int_t^{t+T_0} \frac{\eta(t)}{RC}dt = \frac{1}{C}\int_t^{t+T_0} g(A(t)\cos(\omega_0 t - \varphi(t)) - \eta(t))dt$$

до-я $\eta(t)$ так же как и $A(t)$ медленно изм-ся по сравнению с $\cos(\omega_0 t)$ на интервале $[t, t+T_0]$ На этом инт-ле их можно считать константами, приняв $\eta(t) = \eta$, $A(t) = A$

При интегр-ии след. учесть только изм-е множи-теля $\cos(\omega_0 t - \varphi(t))$

$$\frac{d\eta(t)}{dt} + \frac{\eta(t)}{RC} = \frac{1}{2\pi C}\int_0^{2\pi} g(A(t)\cos(\psi) - \eta(t))\,d\psi$$

Ден. это ДУ в общем виде получить затруд-но. Ограничившись рассм-нием стац. соот. и пренебрег. 1-ым членом в ур. получ:

$$\eta(t) = \frac{R}{2\pi}\cdot\int_0^{2\pi} g(A(t)\cos(\psi) - \eta(t))\,d\psi$$

В рез-те теоретического анализа можно опр-ть структуру системы регистрации сигналов. Оценить св-ва реальной системы в сравнении с оптимальной и при необ-сти изм. её парам-ры

Оптимальные методы обнаружения и различения сигналов

Общие понятия

Оптимальные методы обнаружения и различения сигналов

Получение сигнала на входе системы приводит к решению одной из след. задач:

а) обнар-я сигнала в усл-ях наличия шумов и помех

б) различение нескольких сигналов

в) оценка параметров сигналов — амплитуды, длительности, момента регистрации и т.п.

г) фильтрация сигнала, т.е. ум-е влияния шума

Как правило имеются некоторые априорные сведения как о полезном сигнале, так и о шуме. Чем больше таких сведений учитывается системой, тем лучше решается задача.

Понятие среднего риска. Стратегия Байеса

Понятие среднего риска. Стратегия Байеса

Задача: при отсутствии шумов на входе системы оценить 2 сигнала — S_1 и S_2, оцениваемые амплитуды A_1 и A_2 каждого из кот. фluктуируют

Решение:

Будем считать, что нам известны пл-сти вер-сти $W_1(a)$ и $W_2(a)$ параметра a — зарег-ого зн-я амплитуды сигнала

Решение о наличии S_1 или S_2 мы будем прин. на основании зн-я этого пар-ра — ам. рис.

Если $W_1(a)$ и $W_2(a)$ в пределах нек. инт. $[a_L; a_R]$ не пересек, то получаем мн-во тривиальных решений для порога a_0

Если $W_1(a)$ и $W_2(a)$ пересек, то в завис. от вел. a_0 мы будем чаще (или реже) принимать неправ. решение — н-р, решение о регистр. сигнала S_2 в то время как ~~наблюдаемая~~ передавался сиг. S_1. Эту ситуацию будем хар-ть вер-ю ошибки 1-го рода

$$Q_1 = \int_{a_0}^{\infty} W_1(a)\,da$$

Возможна и обр-я сит-ция: м.б. принято решение, что набл. сиг. S_1, в то время как набл. сиг. S_2. Её будем хар-ть вер-ю ошибки 2-го рода

$$Q_2 = \int_{-\infty}^{a_0} W_2(a)\,da$$

Условные вер-ти правильных решений

$$D_1 = 1 - Q_1$$

$$D_2 = 1 - Q_2$$

Учтём, что каждый из сигналов может передаваться с опред. вер-ю, кот. обозначим P_1 и P_2, а каждое принятое решение имеет свою "цену"

	передан S_1	передан S_2
Принято реш. о рег. S_1	прав. реш.	ошибка
Принято реш. о рег. S_2	ошибка	прав. реш.

Очевидно, что нужно выбирать порог a_0 так, чтобы его реализация в системе позволила как можно больше приобрести и как можно меньше потерять

Для формализации рез-ов при различных исходах введей матрицу потерь $\|C\|$, элементы глав. диаг. кот. будут предст-ть нулевые (или отриц.) потери при прав. реш., а все ост. — потери при ошибочных решениях

Сред. риск, цена ошибки

$$R(a) = P_1(C_{11}P_1 + C_{12}Q_1) + P_2(C_{22}P_2 + C_{21}Q_2) \quad (9.1)$$

Найдём мин. ф-ции $R(a)$

$$\frac{dR(a)}{da} = P_1(C_{11}W_1(a) - C_{12}W_1(a)) + P_2(C_{21}W_2(a) - C_{22}W_2(a)) = 0$$

Рез-т: $$\frac{W_2(a_0)}{W_1(a_0)} = \frac{P_1(C_{12} - C_{11})}{P_2(C_{21} - C_{22})} \quad (9.2)$$

Отнош. $\frac{W_2(a_0)}{W_1(a_0)} = \lambda_0$ — коэф. правдоподобия, прав. часть (9.2) наз. пороговое значение

Стратегия мин. сред. риска назыв. стратег. Байеса, а $R(a_0)$ наз. байесовским риском

Во многих случаях $W_1(a)$ и $W_2(a)$ представимы эксп-ми ф-ями и для упрощения анализа отношения правдоподобия часто исп. логарифм этого отн.

$$\Lambda = \ln(L) = \ln(W_1(a_0)) - \ln(W_2(a_0))$$

Отметим, что предыдущ. зад. решалась в усл. отс. шума.

Обнаружение детерминированного сигнала при наличии аддитивного шума

В больш-ве практ. случаев необх. на основании получ. отсчетов СП $u(t)$, кот. рег-ют системой, принять решение о наличии или отсутств. инф-ого сигнала $S(t)$ — т.е. вып-ть ~~предыду~~ процедуру его обнаружения.

Будем считать, что $u(t)$ предст. собой аддитивную смесь ~~из~~ сигнала и помехи

$$u(t) = S(t) + \eta(t) \quad (9.3)$$

Для оценивания эффективности процедуры обнаружения её анализ проведём в общем виде. Будем считать, что необх. опр-ть нек. неслуч. пар-р λ по зарег-ным отсчётам СП

Условную вер-ть λ назыв. ф-ей правдоподобия показ-ет, насколько одно возм-ое значение пар-ра λ „более правдоподобно", чем другое при зарег. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$

$$W(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n / \lambda)$$

Для нашей задачи определим мн-во зн-ий λ как совокупн. 2-ух взаимоиск. гипотез. Гипотеза H_1 о наличии сиг. $S(t)$ и гипотезы H_0 о его отсутствии.

Регистрация $u(t)$ в мом. вр. $t_1, t_2, \dots t_n$ при отст-вии инф-ого сигнала даёт сов-сть некоррелированных отсчетов $u_1, u_2, \dots u_n$.

Поэтому в соотв. с теоремой об умнож. вер-остей получаем:

$$W(u_1, u_2, \dots u_n / H_0) = \prod_{i=1}^{n} W(u_i / H_0) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sigma^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} u_i^2\right) \quad (9.4)$$

При наличии инф-ого сигнала $\eta(t) = u(t) - S(t)$ и $W(u_i - S_i / H_1)$: $W(u_i / H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(u_i - S_i)^2\right)$?

$$W(u_1, u_2, \dots u_n | H_1) = \prod_{i=1}^{n} W(u_i | H_1) =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sigma^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (u_i - s_i)^2\right) \quad (9.5)$$

Отнош. ф-ий правдоподобия (в соотв. с (9.2))

$$L(H) = \frac{W(u_1, u_2, \dots, u_n | H_1)}{W(u_1, u_2, \dots, u_n | H_0)} \quad (9.6)$$

Подставив в (9.6) (9.4) и (9.5) и проведя опр., получим

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \sum u^2 - \left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum u^2 - \sum 2us + \sum s^2\right)\right)$$

$$L(H) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i s_i}{\sigma^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i^2}{2\sigma^2}\right) \quad (9.7)$$

Интерпр-я такова

Если $L(H) \geq l_0$, то опр-ва гипотеза H_1 – инф. сиг. обнаружен

Если $L(H) < l_0$, то оправ-ва гип. H_0 – инф. сиг. нет.

Логарифм-я (9.7): $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i s_i}{\sigma^2} \geq \ln(l_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i^2}{2\sigma^2}$ (9.8)

Полученное выраж. опис. алгоритм работы оптимального обнаружителя сигнала при дискр. обр-ке ~~В случае~~ аддитивной смеси сиг. и шума

В случае непрерывной обр-ки $u(t)$ учтем, что

$$\Delta t = \frac{1}{2F_{max}} \qquad \Delta t \sum_{i=1}^{n} f_i^2 = \int_0^T f^2(t)\,dt$$

F_{max} – полоса пропускания обнар-ля

T – величина инт. наблюдения

$f(t)$ – интегрируемая ф-я

Получаем

$$\Lambda = \frac{2F_{max}}{\sigma^2} \int_0^T u(t) \cdot s(t)\,dt \geq \ln(l_0) + \frac{2F_{max}}{2\sigma^2} \int_0^T s^2(t)\,dt$$

Учитывая, что для белого шума $\frac{\sigma^2}{F_{max}} = N_0$, где N_0 – спектр. пл-сть, а инт-л от $s^2(t)$ опред-ет энергию в инф. сиг., получаем выражение, опис. алгоритм работы оптим-ого обнар-ля ~~сиг~~ сигнала при непрерыв. обр-ия аддит. смеси этого сиг. и шума

$$\Lambda = \frac{2}{N_0} \int_0^T u(t) \cdot s(t)\,dt \geq \ln(l_0) + \frac{E}{N_0}$$

Корреляционный приёмник

Общие понятия

Корреляционный приемник.

Инт-ал $\int u(t)\cdot s(t)\,dt$ можно рассм-ть как операцию вычисл. ф-ции взаимной корреляции принятого сигнала $u(t)$ и полезного $s(t)$. При такой трактовке оптим-ый обнар-ль реализуется как корр-ый приемник и пороговое устр-во.

Этот же интеграл можно рассм-ть как рез-т выполнения свертки $u(t)$ и импульсной переходной ф-ции некоторого линейного фильтра.

При этом следует, что инф. о полезном сигнале зак-ся в передаточной ф-ции фильтра. Такой фильтр наз-ся согл-ым фильтром.

Помехоустойчивость КП, отношение сигнал/шум на его выходе

Оценим помехоуст-ость корр-ого приемника

Сигнал на выходе коррелятора:

$$q = \frac{2}{N_0}\int_0^T u(t)\,s(t)\,dt$$

Найдем $W(q|H_0)$, когда $u(t) = n(t) \neq 0$

Поскольку $n(t)$ – большой шум, имеющ. норм. распр., а опер-я интегр-я – лин. опер-я, то q также будет иметь норм. распр-е

$$\langle q\rangle = \left\langle \frac{2}{N_0}\int_0^T n(t)\cdot s(t)\,dt\right\rangle = \frac{2}{N_0}\int_0^T \langle n(t)\rangle\cdot s(t)\,dt =$$

$$= \frac{2}{N_0}\int_0^T 0\cdot s(t)\,dt = 0$$

$$\langle q^2\rangle = \frac{4}{N_0^2}\left\langle \int_0^T \langle n(t_1)\rangle\cdot s(t_1)\,dt_1 * \int_0^T \langle n(t_2)\rangle\cdot s(t_2)\,dt_2\right\rangle =$$

$$= \frac{4}{N_0^2}\int_0^T \langle n(t_1)\,n(t_2)\rangle\cdot s(t_1)\cdot s(t_2)\,dt_1\,dt_2 =$$

$$= \frac{4}{N_0^2}\,\frac{N_0}{2}\int_0^T\int_0^T \delta(t_2-t_1)\,s(t_1)\,s(t_2)\,dt_1\,dt_2 = \frac{2}{N_0}\int_0^T s(t_1)\,s(t_1)\,dt_1 =$$

$= \frac{2E}{N_0}$ – отношение сигнал-шум по мощности на выходе приемника

Зная вид распр-я и его пар-ры:

$$W(q|H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{2E}{N_0}}}\exp\left(-\frac{q^2}{2\cdot\frac{2E}{N_0}}\right)$$

Найдем $W(q|H_1)$, когда $u(t) = n(t) + s(t)$. В этом случае сигнал на выходе

$$\langle q\rangle = \frac{2}{N_0}\int_0^T s^2(t)\,dt + \frac{2}{N_0}\cdot\int_0^T \langle n(t)\rangle\, s(t)\,dt =$$

$$= \frac{2E}{N_0} + 0 = \frac{2E}{N_0}$$

$$\langle q^2\rangle = \left\langle\left(\frac{2}{N_0}\int_0^T (s(t)+n(t))\cdot s(t)\,dt - \frac{2E}{N_0}\right)^2\right\rangle = \frac{2E}{N_0}$$

Поэтому

$$W(q|H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{2E}{N_0}}}\exp\left(-\frac{\left(q-\frac{2E}{N_0}\right)^2}{2\,\frac{2E}{N_0}}\right)$$

Вероятность ложной тревоги и вероятность правильного обнаружения сигнала

Зная усл. пл-ти вер-ти $W(q|H_0)$ и $W(q|H_1)$ можем найти вер-сть ложной тревоги F – вер-сть принятия решения о наличии инф. сиг. в принятом сигнале в том случае, когда инф. сиг. не передавался

Положив в (9.9), что $\ln(l_0) = q_{tr}$ получим

$$F = \int_{q_{tr}+\frac{2E}{N_0}}^{\infty} W(q|H_0)\,dq = \int_{q_{tr}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{2E}{N_0}}} \exp\left(-\frac{q^2}{2\left(\frac{2E}{N_0}\right)}\right) =$$

$$= \left\{ t = \frac{q}{\sqrt{2E/N_0}};\ dq = dt\sqrt{\frac{2E}{N_0}},\ t_{tr} = \frac{q_{tr}+\frac{2E}{N_0}}{\sqrt{\frac{2E}{N_0}}} \right\} = \qquad (10.1)$$

$$= \int_{t_{tr}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = 1 - \Phi\left(\frac{q_{tr}+\frac{2E}{N_0}}{\sqrt{\frac{2E}{N_0}}}\right)$$

Вер-сть правильного обнар-я сиг. D – вер-сть принятия решения о наличии в принятом сигнале инф-ого сигнала, когда он действительно был передан

Исп-ем равенство $D = 1 - \beta$, где β – вер-сть того, что сигнал обнаружен не будет

$$\beta = \int_{-\infty}^{q_{tr}+\frac{2E}{N_0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{2E}{N_0}}} \exp\left(-\frac{\left(q-\frac{2E}{N_0}\right)^2}{2\cdot(2E/N_0)}\right) dq =$$

$$= \left\{ t = \frac{q-\sqrt{\frac{2E}{N_0}}}{\sqrt{\frac{2E}{N_0}}},\ dq = dt\sqrt{2E/N_0},\ t_{tr} = \frac{q_{tr}-2E/N_0}{\sqrt{\frac{2E}{N_0}}} \right\} =$$

$$\int_{-\infty}^{t_{tr}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \Phi\left(\frac{q_{tr}-2E/N_0}{\sqrt{\frac{2E}{N_0}}}\right)$$

Окончательно получаем

$$D = 1 - \Phi\left(\frac{q_{tr}-\frac{2E}{N_0}}{\sqrt{\frac{2E}{N_0}}}\right) \qquad (10.2)$$

Рабочие характеристики обнаружителя и характеристики обнаружения

На основании (10.1) и (10.2) строятся так наз-мые „рабочие" хар-ки обнар-ия $D = f(F)$ при известных знач. отнош. мощн. сиг. к мощн. шума $\frac{2E}{N_0} = d$

Раб. хар-ки обнар-ия

На ряду с раб. хар-ми часто исп-ют хар-ки обнаружения $D = f\left(\frac{2E}{N_0}\right)$

По ним для заданного уровня ложной тревоги можно опред-ть достижимую величину вер-сти прав. обн-я D при известном отношении сиг-нал-шум

Если между принятым и опорным сигналом имеется рассог-ие во времени, кот. определим величиной τ, то отнош. сиг.-шум на вых. корр-ого приемника окажется меньше макс. возм. зн-я $2E/N_0$

Для хорошей работы коррел. приемника необх. обеспечить временную синхр-цию между ~~принятым~~ принимаемым и опорным сигналом

Согласованный линейный фильтр

Общие понятия

Лек 11 Согласованный линейный фильтр

Основываясь на (9.8) опред-м передат. ф-ю $K(j\omega)$ лин. фильтра, кот. обеспечит формир. на выходе сиг. с макс. отнош. сигнал-шум.

Пусть, как и ранее, $u(t) = s(t) + n(t)$

$n(t)$ – нормальный СП с извест. спектр. плотностью

Мощность помехи на выходе фильтра:

$$P_n = \sigma_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 S_n(\omega)\, d\omega$$

Мощность сигнала на выходе фильтра

$$P_s = u_s^2(t) = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_s(j\omega) K(j\omega) \exp(j\omega t_0)\, d\omega\right]^2 \quad (11.1)$$

Для опред-я условия достиж. макс. отнош. сиг.-помеха по мощности на выходе проектир. фильтра воспольз-ся в отношении (11.1) неравенством Коши-Буняковского:

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} A(j\omega) B(j\omega)\, d\omega\right]^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |A(j\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} |B(j\omega)|^2 d\omega$$

Равенство достигается, если $A(j\omega) = a B^*(j\omega)$, где a – нек. коэф-т.

Положим для (11.1), что

$$A(j\omega) = K(j\omega)\sqrt{S_n(\omega)}$$

$$B(j\omega) = S_s(j\omega)\exp(j\omega t_0)\frac{1}{\sqrt{S_n(\omega)}}.$$

При этом получим выраж. для отнош. сиг.-помехи по мощности

$$\rho = \frac{P_s}{P_n} \le \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 S_n(\omega)d\omega \int_{-\infty}^{\infty} |S_s(j\omega)|^2 \frac{1}{S_n(\omega)} \cdot d\omega}{(2\pi)^2} \frac{2\pi}{1} \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 S_n(\omega)d\omega}$$

Величина ρ имеет макс. знач.:

$$\rho = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_s(j\omega)|^2}{S_n(\omega)} d\omega$$

когда

$$K(j\omega) = \frac{a S_s^*(j\omega)\exp(-j\omega t_0)}{S_n(\omega)}$$

Отсюда следует, что только оптимальный фильтр, передат. ф. $K(j\omega)$ кот. комплексно сопр. со спектром сиг, обеспечит на выходе макс. отношение сиг./шум

Никакой другой фильтр этого обеспечить не может.

Фильтр, оптимальный помехе типа БШ, наз-ют согласованным фильтром (СФ):

$$\rho = \frac{1}{2\pi}\frac{2}{N_0}\int_{-\infty}^{\infty} |S_s(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\frac{2\cdot 2\pi E}{N_0 \cdot 1} = \frac{2E}{N_0}$$

Амп.-част. хар-ка СФ пропорц-на амп.-частотному спектру сигнала, что обеспечивает наилучшее выделение уг. спектра сигнала с м/б энергетикой.

Огибающая сиг на выходе СФ искажается. Однако СФ решает другую зад. — обеспеч. наилучшее выделение сиг. на фоне шума

СФ дает на выходе такое же отношение сиг.-шум, как и корреляц-ый приёмник.

Для работы КП требуется наличие опорного сигнала. Кроме того, требуется обеспечение временной синхр-ции приёма информ-го сиг.

В случае применения СФ инф-я о сигнале заключена в перех. ф. СФ, синхронизация приёма инф. сиг. не требуется

Передат ф. СФ:

$$|K(j\omega)| = a|S_s(\omega)|, \quad \varphi(\omega) = -\varphi_s(\omega) - \omega t_0$$

АЧХ СФ пропорц-на ампл-част. спектру сиг. 1ое слагаемое в выраж. для ФЧХ СФ соотв. фазовому спектру сигнала. Благодаря этому в нек. мом. вр. фазы всех гармонических состав. сиг. оказуться одинак-ми.

Этому соотв. макс. напр. на выходе СФ

2ое слагаемое свидетельствует о задержке t_0 формирования этого максимума И. СФ физически реализуем, если t_0 больше, чем t_s – длит. сиг. $s(t)$

При отсутствии шума напряжение на выходе СФ с точностью до пост. совпадает с АКФ сигнала:

$$u_F(t) = a\int_0^t s(\tau)\, s(t-\tau)\, d\tau$$

Построение СФ для одиночного видеоимпульса

Построение СФ для одиночного видеоимпульса

Спектр $S_s(j\omega)$ сигнала $s(t)$:

$$S_s(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\exp(-j\omega t)dt =$$

$$= A\int_0^{\tau_s} \exp(-j\omega t)dt = \frac{A}{-j\omega}\exp(-j\omega t)\Big|_0^{\tau_s} = \frac{A}{-j\omega}(\exp(-j\omega\tau_s)-1) \qquad (11.2)$$

Очевидно, что $S_s^*(j\omega) = \frac{A}{j\omega}(\exp(j\omega\tau_s)-1)$

Отсюда передат. ф. $K(j\omega)$ для СФ

$$K(j\omega) = a\frac{A}{j\omega}(\exp(-j\omega\tau_s)-1)\exp(-j\omega\tau_s) = a\frac{A}{j\omega}(1-\exp(-j\omega\tau_s))$$

Реализация такой $K(j\omega)$ возможна в СФ, содержащем интегратор, сумматор и звено задержки

Построение СФ для одиночного радиоимпульса

Построение СФ для одиночного радиоимпульса

Передат. ф. такого СФ:

$$K(j\omega)=a\frac{A}{j(\omega-\omega_0)}\left(1-\exp(-j(\omega-\omega_0)\tau_s)\right)$$

поэтому структура СФ не меняется

Построение СФ для последовательности видеоимпульсов

Построение СФ для посл-сти видеоимп.

Спектр $S_s(j\omega)$ сиг. $s(t)$ – посл-сти из M одинак. видеоимп., имеющих период следования T, представ. собой сумму спектров каждого импульса посл-сти, отличающихся временным положением

Для m-го имп. спектр $S_m(j\omega) = S_1(j\omega)$, где $S_1(j\omega)$ опред. из (11.2)

$$S_s(j\omega) = S_1(j\omega) \sum_{m=1}^{M} \exp(-j\omega(m-1)T)$$

$$S_s^*(j\omega) = S_1^*(j\omega) \sum_{m=1}^{M} \exp(j\omega(m-1)T)$$

$$K(j\omega) = a S^*(j\omega) \exp(-j\omega\tau_s) \sum_{m=1}^{M} \exp(j\omega(m-1)T)$$

Заметим, что в мом вр. t_0 отнош. сиг.-шум увеличивается в M раз по сравнению с обнаружением ОИ. Это справедливо в силу того, что шумовой пр-с эргодичен и суммируемые шумовые реализации некоррелируемы.

Обнаружение и различение сигналов при различных априорных сведениях

Квазиоптимальные фильтры

Квазиоптимальные фильтры

Обеспечивается частичное согласование параметров фильтра — полосы пропускания — с параметрами сигнала.

Для одиночного радиоимпульса при выполнении соотношения:

$$\Delta\omega = 2\pi\frac{1{,}37}{\tau_s}$$ обеспечивается отношение сигнал/шум: $\rho = 0{,}82\frac{2E}{N_0}$ — 82% от max при исп-нии фильтра, для кот. в этой полосе частот $|K(j\omega)| = const$

В общем случае проигрыш γ в отнош. сиг./шум на выходе квазиоптимального фильтра опр-ся соотношением

$$\gamma = \frac{\rho}{\rho_{max}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_s(j\omega)\tilde{K}(j\omega)\exp(j\omega t_0)d\omega\right]}{\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{K}(j\omega)|^2\frac{N_0}{2}d\omega}}{2E/N_0}$$

Для бесконеч. послед-ти видео или радиоимпульсов спектр явл-ся линейчатым, поэтому исп-ние квазиоптим-го фильтра формально приводит к бесконечно большому проигрышу. Применение вместо СФ квазиоптим. фильтра не имеет оснований.

Обнаружение сигналов со случайной начальной фазой

Обнаружение сигнала со случ. нач. фазой

Пусть, как и ранее, $u(t) = s(t) + n(t)$, причем инф-ый сигнал таков, что $s(t)$: $s(t, \varphi) = A\cos(\omega_0 t - \varphi)$, где φ – случ. в. с равномерным распред-ем

$$W(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \qquad (12.1)$$

Отношение функционалов правдоподобия приводит к записи

$$L(u, \varphi) = \exp\left(-E/N_0 + \frac{2}{N_0}\int_0^T u(t)s(t, \varphi)\,dt\right) \qquad (12.2)$$

Нач. фаза не несет инф-ии о инф-ом сигнале, поэтому (12.1) можно усреднить по всем возможным значениям φ:

$$\bar{L}(u, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L(u, \varphi)W(\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left(-E/N_0 + \frac{2}{N_0}\int_0^T u(t)s(t, \varphi)\,dt\right)d\varphi \qquad (12.3)$$

Применив к (12.1) ф-лу косинуса разности

$$s(t, \varphi) = A\cos(\omega_0 t - \varphi) = A\cos(\omega_0 t)\cos(\varphi) + A\sin(\omega_0 t)\sin(\varphi)$$

получим

$$\frac{2}{N_0}\int_0^T u(t)s(t, \varphi)\,dt = \frac{2}{N_0}\int_0^T u(t)A\cos(\omega_0 t)\cos(\varphi)\,dt +$$

$$+ \frac{2}{N_0}\int_0^T u(t)\sin(\omega_0 t)\sin(\varphi)\,dt \qquad (12.4)$$

Для упрощения записи (12.4) введем переменные z_1 и z_2:

$$z_1 = \int_0^T u(t)A\cos(\omega_0 t)\,dt, \quad z_2 = \int_0^T u(t)A\sin(\omega_0 t)\,dt$$

Введение переменной $z = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ позволяет легко определить значения

$\sin\theta = \frac{z_2}{z}$ и $\cos\theta = \frac{z_1}{z}$, где θ – некоторый угол

В рез-те (12.4) принимает след. вид.

$$\frac{2}{N_0}\int_0^T u(t)s(t, \varphi)\,dt = \frac{2}{N_0}z_1\cos\varphi + \frac{2}{N_0}\cdot z_2\sin\varphi =$$

$$= \frac{2z}{N_0}\left(\frac{z_1}{z}\cos\varphi + \frac{z_2}{z}\sin\varphi\right) = \frac{2z}{N_0}\cos(\theta-\varphi)$$

Тогда (12.2) можем запис. след образом

$$L(u,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left(-\frac{E}{N_0} + \frac{2z}{N_0}\cos(\theta-\varphi)\right)d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(-E/N_0)\cdot$$

$$\cdot\exp\left(\frac{2z}{N_0}\cos(\theta-\varphi)\right)d\varphi = \exp(-E/N_0)\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\exp\left(\frac{2z}{N_0}\cos(\theta-\varphi)\right)d\varphi =$$

$= \exp(-E/N_0)\cdot I_0\left(\frac{2z}{N_0}\right)$, где $I_0\left(\frac{2z}{N_0}\right)$ – модифицированная ф-я Бесселя нулевого порядка (12.5)

Если оптим. алгоритм важно, то $\frac{2z}{N_0} \gg 1$ и $\ln\left(I_0\left(\frac{2z}{N_0}\right)\right) \approx \frac{2z}{N_0}$. То, оптимальный обнар-ль должен вычислять знач. z (или z^2) и сравнивать ~~его~~ с порогом (z_{tr}) или с порогом z^2_{tr}, если вычислялось z^2. Такой обнаружитель наз-ют корреляц-ным приемником с двумя квадратурными каналами

Отношение $\frac{2z}{N_0}$ совпадает с огибающей напр-я. Поэтому оптимальный обн-ль можно построить на основе СФ. Фаза сигнала в рассм-м случае не несет полезной инф-ии. Ист. инф-ии о наличии сиг. явл-ся знач. амплитуды

СФ для обнаружения сиг. с неизв. нач. фазой

Обнаружение сигналов со случайной начальной фазой и флуктуирующей амплитудой

Обнаруж. сиг. со случ. нач. фазой и флуктуирующей амплитудой

Будем считать, что инф-ый сиг. в рег-ом сиг. представим след. моделью:

$s(t): s(t, \xi, \varphi) = \xi \cos(\omega_0 t - \varphi)$, где ξ и φ – независ. СВ

В силу независимости ξ, φ, их совмест. распр-е $W(\xi, \varphi)$ имеет вид $W(\xi, \varphi) = W(\xi) \cdot W(\varphi)$, причем $W(\varphi)$ – равномерное распр-е: $W(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$, $0 \le \varphi < 2\pi$

$W(\xi)$ – распр. Релея: $W(\xi) = \frac{\xi}{\sigma_\xi^2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_\xi^2}\right)$.

Предположение о релеевском распр-нии амплитуды соотв-ет реальному случаю обнаруж-я радиосигнала, прошедшего трассу распр-я

Отношение функционалов правдоподобия будет иметь вид

$$L(u, \xi, \varphi) = \exp\left(-\frac{E}{N_0} + \frac{2}{N_0}\int_0^T u(t)\, s(t, \xi, \varphi)\, dt\right)$$

сравнить с 12.2

Энергия сигнала, обознач. как E, есть величина случайная (в отл. от 12.2)

Усреднив $L(u, \xi, \varphi)$ по всем случ. значениям амплитуд и фаз, получим

$$\bar{L}(u, \xi, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} L(u, \xi, \varphi)\, W(\xi)\, W(\varphi)\, d\xi\, d\varphi = \frac{N_0}{\bar{E} + N_0} \exp\left(\frac{2Z^2}{\bar{E} + N_0}\right)$$

где $\bar{E}$ – ср. энергия инф. сиг., Z – его огибающая

Фмку-ая схема обнаружителя будет такой же, как и при использ-нии корр-го приемника или СФ, приведенные ранее. Отличие будет заключаться только в величине порогового значения.

При флуктуациях амплитуды инф-го сигнала имеет место существенное снижение ~~среднего зна~~ значения помехоустойчивости обнар-ля из-за сниж. ср. знач. энергии инф. сиг.

Получение оценок параметров сигнала

Общие понятия

Получение оценок параметров сигнала.

Пусть регистрируемый сигнал имеет вид $u(t)=s(t,\lambda)+n(t)$, где λ – п-р сигнала, кот. нужно оценить (дл-ть, ампл. и т.д.), причем он не изм-ся на всем инт набл. T: $\lambda=const \quad 0\le t\le T$

Из-за наличия шума можно уст-ть лишь приб-мок. знач этого пар-ра. Это знач. наз-ют оценкой и часто обознач $\hat{\lambda}$.

Можно считать, что $\hat{\lambda}=f(u(t))$, где $f(\cdot)$ – нек-ый функционал, уст-щий однозначное соотв-е между $\hat{\lambda}$ и принятой реализацией $u(t)$.

Качество оценки можно хар-ть ф-ей $W(\hat{\lambda}|\lambda)$, кот. предст. собой з-н распределения ошибок измерения.

Желательно, чтобы $W(\hat{\lambda}|\lambda)$ была унимодальной (имеющая один максимум) максимум должен лежать в окрестности истинного значения λ, а дисперсия распределения должна быть максимально минимальной.

Мат ож. и дисперсия получаемой оценки

$$M(\hat{\lambda}|\lambda)=\int_{\hat{\lambda}}(\hat{\lambda}-\lambda)W(\hat{\lambda}|\lambda)\,d\hat{\lambda} \qquad (13.1)$$

$$\sigma^2(\hat{\lambda}|\lambda)=\int_{\hat{\lambda}}(\hat{\lambda}-\lambda)^2W(\hat{\lambda}|\lambda)\,d\hat{\lambda} \qquad (13.2)$$

Наилучшая оценка будет хар-ся нулевым знач. м.о. и минимальной величиной дисперсии.

Среднее смещение и рассеяние результата измерения параметра

Среднее смещение и рассеяние рез-та измерения пар-ра:

$$\langle M(\hat{\lambda}|\lambda)\rangle = \int_{\lambda} M(\hat{\lambda}|\lambda)\, W(\lambda)\, d\lambda \qquad (13.3)$$

$$\langle \sigma^2(\hat{\lambda}|\lambda)\rangle = \int_{\lambda} \sigma^2(\hat{\lambda}|\lambda)\, W(\lambda)\, d\lambda \qquad (13.4)$$

Ср. смещение (13.3) хар-ет величину систематич. погрешности рез-та измерения, а рассеяние (13.4) — величину случ. погрешности рез-та

Оценка, имеющая $\langle M(\hat{\lambda}|\lambda)\rangle = 0$ наз-ся несмещенной.

Оценка, имеющая минимум $\langle \sigma^2(\hat{\lambda}|\lambda)\rangle$ из всех возможных др. оценок, наз-ся эффективной

Критерии оптимальности полученной оценки $\hat{\lambda}$

Критерии оптим-сти получ-й оценки $\hat{\lambda}$

1. Критерий минимума с.к. погрешности оценки

Основан на минимизации по $\hat{\lambda}$ выраж.

$$\int_{\lambda} (\hat{\lambda} - \lambda)\, W(\lambda)\, d\lambda \to \min$$

Приравняв 0 произв-ю $\frac{d\langle \sigma^2(\hat{\lambda}|\lambda)\rangle}{d\hat{\lambda}}$ при соблюдении

$\frac{d^2\langle \sigma^2(\hat{\lambda}|\lambda)\rangle}{d\hat{\lambda}^2} > 0$ получаем, что в качестве оценки $\hat{\lambda}$ следует принять ср. знач. апостериорного распр-я

$\hat{\lambda} = \int_{\lambda} \lambda W_{ps}(\lambda)\, d\lambda$. Получаемая оценка будет совпадать с центром тяжести этого распр-я.

2. Критерий максимума апостериорной вер-сти

При больших отнош. сиг./шум апостериорная пл-сть вер-сти имеет максимум в окр-сти истинного знач. пар-ра.

3. Критерий максимума ф-ии правдоподобия

Во многих практ. случаях априорная пл-сть вер-сти неизв-на и её полагают равномерно распр-ой на нек. инт. $[\lambda_1, \lambda_2]$.

В такой ситуации критерий макс. апостер. вер-сти приходит в кр. макс. правдо-бия.

При больших отнош. сиг./шум все 3 критерия оказ-ся асимптотически экв-ны, т.е. дают одинак. рез-ты и позв-т получить несмещ. эфф-ую оценку.

Оценка энергетического параметра сигнала – амплитуды

Оценка энергетического пар-ра сигнала – амплитуды

Будем считать, что $u(t) = \lambda s(t) + n(t)$, где $s(t)$ – инф. сиг., для кот. $\max(s(t)) = 1$, $\min(s(t)) = 0$; $n(t)$ – белый нормальный шум.

Восп-ся критерием максимума ф-ии правдоподобия

$$L(\lambda) = \exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T (u(t) - \lambda s(t))^2 dt\right)$$

Выписав $\Lambda(\lambda) = \ln(L(\lambda))$, найдём максимум этой ф-ии, приравняв 0 произв-ую

$$\frac{d}{d\lambda}\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T (u(t) - \lambda s(t))^2 dt\right) = 0$$

В этом случае должно обеспеч-ся равенство

$$\int_0^T (u(t) - \lambda s(t)) s(t) = 0,$$

после раскрытия скобок в подинт-ом выражении приводящее к записи

$$\hat{\lambda} = \frac{\int_0^T u(t)s(t)\,dt}{\int_0^T s^2(t)\,dt} \qquad (13.5)$$

Помня, что $\int_0^T s^2(t)\,dt = E_s$, синтезируем оптимальный измеритель амплитуды $s(t)$

Определим статич-е хар-ки получ-й оценки $\hat{\lambda}$, считая $\lambda \equiv \lambda_0$

$$M(\hat{\lambda}) = \frac{1}{E_s} M\left(\int_0^T (\lambda_0 s(t) + n(t))\, s(t)\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{E_s}\left(\lambda_0 \int_0^T s^2(t)\,dt + \int_0^T M(n(t))\, s(t)\,dt\right) = \frac{1}{E_s}\left(\lambda_0 E_s + \int_0^T 0 \cdot s(t)\,dt\right) =$$

$$= \lambda_0$$

Получаемая на выходе измерителя оценка будет несмещенной

~~Получаемая на выходе измерителя~~

$$\sigma_\lambda^2 = M\left((\hat{\lambda} - \lambda)^2\right) = \frac{1}{E_s^2} M\left(\left[\int_0^T n(t)\, s(t)\,dt\right]^2\right) =$$

$$= \frac{1}{E_s^2} M\left(\int_0^T\int_0^T n(t_1)\cdot n(t_2)\cdot s(t_1)\cdot s(t_2)\,dt_1\,dt_2\right) =$$

$$= \frac{1}{E_s^2} \int_0^T\int_0^T M(n(t_1)\cdot n(t_2))\, s(t_1)\, s(t_2)\,dt_1\,dt_2 =$$

$$= \left\{ M(n(t_1)n(t_2)) = \frac{N_0}{2}\delta(t_2-t_1) \right\} = \frac{1}{E_s^2}\frac{N_0}{2}\int_0^T s(t_1)\cdot s(t_1)\,dt_1 = \frac{N_0}{2E_s}$$

Единичное значение δ-ф-ии в единств. точке $t_1 = t_2$ позволяет перейти к интегр-ю только по 1-й переменной.

С учетом того, что $E = E_s \cdot \lambda_0^2$, для определения „качества" оценки энергетического ~~спектра~~ пар-ра часто пользуются величиной отн-ой дисперсии:

$$\frac{\sigma_\lambda^2}{\lambda_0^2} = \frac{N_0}{2E_s\lambda_0^2} = \frac{N_0}{2E}$$

Оценка амплитуды сигнала с неизвестной начальной фазой

Оценка амплитуды сигнала с неизв. нач. фазой

Будем считать, что $u(t) = \lambda s(t,\varphi) + n(t)$, $s(t)$ - инф. сиг, для кот. $W(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

Для получ. оценки $\hat{\lambda}$ исп-ем крит-ий макс. ф-ии правд-я.

Выделим огибающую сиг. (см. ~~(12.4)~~ (12.4)):

$$L(\lambda) = \exp\left(-\frac{\lambda^2 E_s}{N_0}\right)\cdot I_0\left(\frac{2\lambda}{N_0}z\right) \qquad (13.6)$$

Найдём максимум функционала (13.6), учитывая, что $I_0'(x) = I_1(x)$:

$$\frac{dL(\lambda)}{d\lambda} = 0 \rightarrow -\exp\left(-\frac{\hat{\lambda}^2 E_s}{N_0}\right)\cdot\left(\frac{2\hat{\lambda}E_s}{N_0}\right)\cdot I_0\left(\frac{2\hat{\lambda}}{N_0}z\right) +$$

$$+\exp\left(-\frac{\hat{\lambda}^2 E_s}{N_0}\right)\cdot I_1\left(\frac{2\hat{\lambda}}{N_0}z\right)\cdot\left(\frac{2z}{N_0}\right) = 0 \qquad (13.7)$$

Упростим (13.7), поделив левую и правую части на отличные от 0 константы:

$$-\hat{\lambda}E_s\cdot I_0\left(\frac{2\hat{\lambda}}{N_0}z\right) + I_1\left(\frac{2\hat{\lambda}}{N_0}z\right)\cdot z = 0$$

Отсюда получим:

$$\hat{\lambda} = \frac{z}{E_s}\left[I_1\left(\frac{2\hat{\lambda}}{N_0}z\right)/I_0\left(\frac{2\hat{\lambda}}{N_0}z\right)\right].$$

При $\frac{2\hat{\lambda}^n z}{N_0} \gg 1$ отнош. $\frac{I_1(\cdot)}{I_0(\cdot)} \approx 1$, откуда $\hat{\lambda} \approx \frac{z}{E_s}$

Оценка $\hat{\lambda}$ получается несмещ-ой, а при большом отнош. сиг./шум $\sigma^2_{\hat{\lambda}} = \frac{N_0}{2E_s}$, т.е. в этом случае отсутствие сведений о фазе колебаний не сказывается на погрешности получаемой оценки $\hat{\lambda}$.

Получение оценок неэнергетических параметров сигнала

Получение оценок неэнергетических пар-ов сигнала

~~Рассм-м~~ Это время прихода, дл-сть сиг., фаза

Рассм-м применение критерия максимума ф-ции правдо-бия.

$$L(\lambda) = \exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T (u(t)-s(t,\lambda))^2 dt\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T u^2(t)dt\right)\cdot\exp\left(\frac{2}{N_0}\int_0^T u(t)\cdot s(t,\lambda)dt\right)\cdot\exp\left(-\frac{1}{N_0}\int_0^T s^2(t,\lambda)dt\right) =$$

$$= const\cdot\exp\left(\frac{2}{N_0}\int_0^T u(t)\cdot s(t,\lambda)dt\right)\cdot const \qquad (14.1)$$

~~Оп~~ Оптим. изм-ль должен осущ-ть поиск макс. знач. (14.1). Получ-е знач-е $\hat{\lambda}$, для кот. $L(\hat{\lambda}) \to max$, и будет

искомой оценкой пар-ра

В силу дискретности измерений не удается обеспечить высокую точность оценки

$$q(\lambda) = \frac{2}{N_0}\int_0^T (s(t,\lambda) + n(t))\cdot s(t,\lambda_0)\,dt =$$

$$= \frac{2}{N_0}\int_0^T s(t,\lambda)\, s(t,\lambda_0)\,dt + \frac{2}{N_0}\int_0^T n(t)\cdot s(t,\lambda_0)\cdot dt = q_s(\lambda) + q_n(\lambda)$$

$q_s(\lambda)$ можно считать „сигнальной" компонентой, а $q_n(\lambda)$ – „шумовой"

Введя обозначение $\varepsilon = \sqrt{\frac{N_0}{2E}}$, получим другую форму записи:

$$q(\lambda) = \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\left(S(\lambda-\lambda_0) + \varepsilon N(\lambda)\right), \quad (14.2), \text{ где}$$

$$S(\lambda-\lambda_0) = \frac{\int_0^T s(t,\lambda)\cdot s(t,\lambda_0)\,dt}{\int_0^T s^2(t,\lambda)\cdot dt}$$ – нормир-ая АКФ,

аналогичная сигналу на выходе опт-ого обнар-ля

Эта АКФ принимает макс. знач., равное единице, когда $\lambda=\lambda_0$ и симметрично отн-но прямой $\lambda=\lambda_0$

Преобразованная шумовая реализация, зависящая от

пар-ра λ опорного сигнала

$$N(\lambda)=\frac{\int_0^T n(t)\cdot s(t,\lambda)\,dt}{\sqrt{\frac{N_0}{2}\int_0^T s^2(t,\lambda)\,dt}}$$

имеет нулевое м.о.:

$$M(N(\lambda))=\langle N(\lambda)\rangle=\frac{\int_0^T M(n(t))\,s(t,\lambda)\,dt}{\sqrt{\frac{N_0}{2}\int_0^T s^2(t,\lambda)\,dt}}=\frac{\int_0^T 0\cdot s(t,\lambda)\,dt}{\sqrt{-//-}}=0$$

Ф-я корреляции СП $N(\lambda)$ совпадает по форме с КФ инф. сигнала:

$$\langle N(\lambda_1),N(\lambda_2)\rangle=\left\langle\frac{\int_0^T n(t_1)\,s(t_1,\lambda_1)\,dt}{\sqrt{-//-}},\frac{\int_0^T n(t_2)\cdot s(t_2,\lambda_2)\,dt}{\sqrt{-//-}}\right\rangle=$$

$$=\frac{\int_0^T\int_0^T\langle n(t_1),n(t_2)\rangle\,s(t_1,\lambda_1)\cdot s(t_2,\lambda_2)\,dt_1\,dt_2}{\frac{N_0}{2}\int_0^T s^2(t,\lambda)\,dt}=$$

$$=\frac{\frac{N_0}{2}\int_0^T\int_0^T\delta(t_1-t_2)\,s(t_1,\lambda_1)\,s(t_2,\lambda_2)\,dt_1\,dt_2}{\frac{N_0}{2}\int_0^T s^2(t,\lambda)\,dt}=S(\lambda_1-\lambda_2)$$

Обратите внимание: считаем, что пар-р λ_1, кот. был таковым в мом. вр. t_1, примет знач. λ_2 в мом. вр. t_2 – ведь мгновенно он изм-ся не может

Сл-но, СП $N(\lambda)$ – стационарен, т.к. его КФ зависит лишь от разности значений λ_1 и λ_2

Определим характеристики получаемой оценки параметра

Определим хар-ки получаемой оценки пар-ра

Будем считать, что отнош. сиг./шум велико, т. е. $\sqrt{\frac{2E}{N_0}} \gg 1$. В этом случае $q(\lambda) \cong q_s(\lambda)$ и

$$q(\lambda) \xrightarrow{\lambda \to \lambda_0} \max(q(\lambda)) \qquad (14.3)$$

При меньшем отношении сиг./шум $q(\lambda) = q_s(\lambda) + q_n(\lambda)$ и условие (14.3) не вып-ся

Обозначим как λ_{max} знач. пар-ра, при кот. ф-ия $q(\lambda)$ достигнет макс-ма.

Представим λ_{max} в виде ряда по степеням малого пар-ра ε:

$$\lambda_{max} = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_{10} + \varepsilon^2\lambda_{20} + \dots, \text{ где}$$

ε – малый пар-р

$\lambda_{10}, \lambda_{20} \dots$ – поправки к найденному нулевому приближению λ_0

Выпишем разложение (14.2) в р. Тейлора в окр. т. λ_0 и учтём, что в т. максимума должно вып-ся усл.

$$\frac{dq(\lambda)}{d\lambda}\Big|_{\lambda_{max}} = 0$$

Ограничившись рассм-ием первых 2-ух членов ряда, получим:

$$\left[\frac{dS(\lambda)}{d\lambda} + \varepsilon\frac{dN(\lambda)}{d\lambda}\right]_{\lambda_{max}} + \left[\frac{d^2S(\lambda)}{d\lambda^2} + \varepsilon\frac{d^2N(\lambda)}{d\lambda^2}\right]_{\lambda_{max}}\cdot\varepsilon\lambda_{10} = 0$$

Пренебрегая членами ур-я, сод-ими ε^2, получаем:

$$\lambda_{10} = -\left[\frac{dN(\lambda)}{d\lambda} \Big/ \frac{d^2S(\lambda)}{d\lambda^2}\right]_{\lambda_{max}}$$

Ошибка оценки

$\Delta\lambda = \lambda_{max} - \lambda_0 = \varepsilon\lambda_{10}$, причем $\langle\Delta\lambda\rangle = \varepsilon\langle\lambda_{10}\rangle =$

$$= -\varepsilon\left[\frac{d\langle N(\lambda)\rangle}{d\lambda} \Big/ \right]_{\lambda_{max}} = 0$$

т.е. при больших отн-ях сиг./шум оценка пар-ра λ, получаемая по макс-му ф-ии правдо-я — несмещённая оценка

Дисперсия оценки $\sigma_\lambda^2 = \langle\Delta\lambda^2\rangle = \langle\varepsilon^2\lambda_{10}^2\rangle =$

$$= -\frac{1}{\frac{2E}{N_0}\cdot\frac{d^2S(\lambda)}{d\lambda^2}\Big|_{\lambda_0}} = -\frac{1}{\frac{d^2q_s(\lambda)}{d\lambda^2}\Big|_{\lambda_0}} \qquad (14.$$

т.е. дисперсия обратно пропорц-на не только отнош. сиг./шум, но и обратно пропорц-на кривизне АКФ сигнала на выходе опт-ого измерителя.

Вот почему ошибка измерения неэнерг-ого пар-ра сигнала зависит от его формы.

Проблемы одновременного измерения нескольких параметров сигнала. Соотношение неопределённости.

Общие понятия

Проблемы одновременного измерения неск-их пар-ов сигнала. Соотн. неопределённости

При решении прак-их задач знание физич. смысла ~~не~~ измер-го незнач-ого пар-ра позволяет упростить анализ статистич. хар-к получаемой оценки этого пар-ра.

Так, решая задачу оценки временного положения радиоимпульса необх-ую для проведения измерения расст-я до локируемого объекта в имп-ой радиолок-ой системе, основываясь на (14.4) получим

$$\sigma_\tau^2 = \frac{1}{\frac{2E}{N_0}\beta^2},$$ где β^2 опр-ся шириной спектра $F(j\omega)$ огибающей радиоимпульса

В общем случае:

$$\beta^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega} \qquad (14.5)$$

Заметим, что строгое решение (14.5) для радиоимпульса с прямоуг. огибающей связано с рядом математич. трудностей; Однако, предположив, что формально беск-ый спектр такого радиоимпульса длит-ю τ_p отличен от 0 в полосе частот $\Delta\omega$, получим, что

$$\beta^2 \approx \Delta\omega / \pi\tau_p = 2\frac{\Delta f}{\tau_p},$$ откуда

$$\sigma_\tau^2 = \frac{\tau_p}{\frac{2E}{N_0} 2\Delta f}$$

Т.о., при фиксир-ой энергии инф-ого импульса погрешность измерения его положения во времени ум-ся по мере ум-я длит-сти импульса

Используя (14.4), получим величину дисперсии оценки изменения частоты радиоимпульса, возникающий, н-р, из-за эффекта Доплера

$$\sigma^2_\omega = \frac{1}{\frac{2E}{N_0} a^2},$$

где пар-р α^2 опр-ся соотн. вида:

$$\alpha^2 = (2\pi)^2 \frac{\int_{-T/2}^{T/2} t^2 f^2(t)\,dt}{\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)\,dt}$$

Считая огибающую радиоимпульса прямоуг. и имеющую ~~длит-ть~~ длит-сть τ_p, получим след. величину дисперсии оценки изм-я частоты несущей:

$$\sigma_f^2 = \frac{3}{\frac{2E}{N_0}(\pi\tau_p)^2}$$

Т.о., при неизм. энергии сиг. погрешность изм-я изменения частоты ум-ся при ув-нии дл-сти импульса.

При одновр-ом измерении 2-ух пар-ов импульса — времени задержки и частоты — справедливо соотношение:

$$\sigma_\tau \sigma_\omega = \frac{1}{\frac{2E}{N_0}\alpha\beta} \qquad (14.6)$$

Можно показать, что

$$\alpha\beta \geq \pi \qquad (14.7)$$

откуда следует, что

$$\sigma_\tau \sigma_\omega \leq \frac{1}{\frac{2E}{N_0}\pi}$$

Выражение (14.7) получило название соотношения неопр-ей.

Заметим, что $\alpha\beta=\pi$ для гауссова радиоимпульса, т.е. такой импульс с точки зрения измерения его пар-ов τ_p и f яв-ся наихудшим сигналом

Макс-ое значение произв-я будет наб-ся для широкополосных сигналов с большой длит-ю.

Полученные рез-ты позв-ют оцен-ть выбор сигнала при решении таких задач, как непрерывное измерение РЛС расстояния до объекта и скорости его перемещения.

Основы теории информации

Общие понятия

Основы теории информации

Теория инф-ции — раздел теории вероятностей, в кот. изучаются закономерности, связ. с получ., хранением, передачей и обработкой инф-ции.

На основании положений этой теории можно:

- сравнивать эфф-сть систем передачи различ. назначения;
- опред-ть макс. возможную ск-сть бездошибочной передачи инф-ции
- опр-ть мин. число символов, необх. для передачи сообщ.

Понятие кол-во инф-ии вводится след. образом. Интуитивно понятно, что чем меньше вер-сть соб. рег-ции какого-либо рез-та передачи инф-го сообщения, тем оно более ценно, т.е. такое передаваемое сообщ. несёт большее кол-во инф.

Будем ... передача к.-л. символа x_i, $i=1,\dots m$, в сообщении есть независимое событие, вер-сть кот. обозначим как $p(x_i)$. Тогда вер-сть того, что будет зарегистрирован один из возможных символов y_j, $j=1,2,\dots n$, опр-ся выражением

$$p(y_j) = \sum_{i=1}^{m} p(x_i)\, p(y_j | x_i)$$

В общем случае $m \neq n$ — н/р, один из символов y может соотв. случаю, когда система выдаёт извещение о факте получ. сообщ., но не может отнести его к одному из ожидаемых (н-р, был передан π, вместо кирилл. р)

$p(x_i)$ хар-ет априорное незнание о передаваемом символе;

$p(y_j|x_i)$ хар-ет апостериорное незнание о передаваемом символе.

Количественная оценка доставляемой информации

Колич-ая оценка доставляемой инф-ии отн-но сообщ. x_i:

$$I(x_i; y_j) = \log \frac{p(x_i|y_j)}{p(x_i)} \quad (15.1)$$

Лог-ая ф-я позв. аналит-ски реализ-ть св-во аддитивности инф-ии.

Основания логарифма, как пр., выбир. в соотв. с использованным основанием ист. счисления, кот. можно считать базой алфавита.

Основные свойства информации

Осн. св-ва инф-ии:

1. Взаимная инф-я, опред-ся (15.1), явл. мерой статистич. связи между сообщ. x_i и y_j. Кол-во инф., кот. несёт y_j о x_i, равно инф., кот. несёт x_i о y_j. Если сообщ. статистич. независимы, то кол-во взаим. инф. $=0$

2. Максимум инф-ии будет реализован при $p(y_j|x_i)=1$, т.е. когда событие y_j достоверно и однозначно опр-ет событие x_i. Это макс-ое значение ост. величину $I(x_i) = -\log(p(x_i))$, кот. наз-ся собств-ой инф-ей сообщ. x_i.

Эта величина всегда пол-на, в то время как вз-инф. может принимать как положит, так и отриц. значения.

3. Введение в рассм-е 3-го соб. z_k, происходящего до наблюдения соб. y_j, кот. связано с соб. x_i, приводит к понятию условной взаим. инф-ии:

$$I(x_i; y_j | z_k) = \log \frac{p(x_i | y_j z_k)}{p(x_i | z_k)} = \log \frac{p(x_i; y_j | z_k)}{p(x_i | z_k)\, p(y_j | z_k)} \quad (15.2)$$

Ист. инф-ии	Операнды		Раз-ая инф-я
событие x_i	Априорная вер-сть $p(x_i)$	Апостериор. вер. $p(x_i \mid y_j)$	$I(x_i; y_j)$
событие x_i событие z_k	условная вер-сть $p(x_i \mid z_k)$	Апостериор. вер. $p(x_i \mid y_j z_k)$	$I(x_i; y_j \mid z_k)$

Выр. (15.2) мож. б. обобщено на случай, когда известна неск. соб. предворяющих соб. x_i.

4. Взаим. инф. обладает св-вом аддитивности.

Считая, что совместно наблюдаются соб. y_j и z_k, определим ~~соот~~ доставляемую этими соб. инф-ю в отношении соб. x_i:

$$I(x_i; y_j z_k) = \log \frac{p(x_i | y_j z_k)}{p(x_i)} \quad (15.3)$$

Умножив числит и знаменат. (15.3) на $p(x_i | y_j)$, получим

$$I(x_i; y_j z_k) = \log \frac{p(x_i | y_j) \cdot p(x_i | y_j z_k)}{p(x_i) \cdot p(x_i | y_j)} =$$

$$= \log \frac{p(x_i | y_j)}{p(x_i)} + \log \frac{p(x_i | y_j z_k)}{p(x_i | y_j)} = I(x_i; y_j) + I(x_i; y_j | z_k)$$

Т.е. инф-я, дост-ая совмест. появлением соб. y_j и z_k отн-но соб. x_i, равна сумме инф-ии, дост-ой соб. y_j отн-но соб. x_i, и инф-ии, дост-ой соб. z_k отн-но соб. x_i (при условии, что соб y_j известно)

Следствие: инф-я, дост-ая 2-мя независ. ист. в отношении соб. x_i, складывается.

Следствие: вз. инф-я слож. соб. м.б. выражена через инф-ю более простых соб.

5. Условную собств. инф-ю можно интерпретировать как макс-е кол-во инф-ии, кот. способно доставить само событие — н-р, x_i, при известном другом событии — н-р, z_k.

6. Собств. инф-я сложного события $x_i y_j$ равна сумме кол-ва инф-ии, необх-го для определения соб. x_i, и кол-ва инф, требуемого для опр-я соб. y_j, из кот. следует вычесть кол-во взаим. инф-ии между соб. x_i и y_j.

Понятие энтропии

Общие понятия

Понятие энтропии

Энтропия – колич-ая мера неопр-сти о сообщ. до его рег-ции. Энтр. можно интерпр. как кол-во инфо-ии, кот. в среднем д.б. получено для опознания любого сообщ. из мн-ва возмож. сообщений X.

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)\, I(x_i) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i) \log(p(x_i)) \quad (15.4)$$

Если x_i рассм-ть как элементар. символы алфавита, то можно доказать, что кол-во инфо-ции, в среднем дост-ое одним символом алфавита, будет макс-ным и = логарифму числа символов алфавита, когда все символы ~~в~~ алфавита явл-ся равновероятными.

В общем случае

$$H(X) \le \log(n) \quad (15.5)$$

Для двоичного алфавита, предст-го сообщ. ~~x_1~~ $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ с вероят-ми передачи $p(x_1) = p$ и $p(x_2) = 1-p$ соотв-но на осн. (15.4) имеем

$$H(X) \qquad H(X) = -p\log(p) - (1-p)\log(1-p)$$

Задача. Найдём количество информации передаваемой по двоичному, симметричному каналу связи. Условная энтропия

Задача. Найдем ср. кол-во инфо-ии передаваемой по двоичному (передается только 2 симв), симметрич. (вер. ошибки передачи P_E для кажд. символа одинакова) каналу связи. На вых. канала связи будет формир-ся множество Y сооб., кот. для рассм-го примера сост. из y_1 и y_2, причём:

$$p(y_1) = p(x_1)\,p(\cancel{x_1|y_1}\ y_1|x_1) + p(x_2)\,p(y_1|x_2) = p(1-P_E) + (1-p)P_E = p - 2pP_E + P_E$$

$$p(y_2) = p(x_1)\,p(y_2|x_1) + p(x_2)\,p(y_2|x_2) = pP_E + (1-p)(1-P_E) = 1-(p-2pP_E+P_E)$$

В соотв. с (15.4) опред. велич. энтропии:

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^{2} p(y_j)\log(p(y_j)) =$$

$$= -(p-2pP_E+P_E)\log(p-2pP_E+P_E) - (1-(p-2pP_E+P_E))\log(1-(p-2pP_E+P_E))$$

При $p = 1/2$ получаем, что

$$H(Y) = -\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right) = \log(2)$$

Применив при анализе основание 2 у логарифма получим единичное значение $H(Y)$

Ср. взаим. инфо-я м.б. определена через значение энтропии неск.-ми способами.

Н-р,

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X), \quad (15.6),$$

где $H(Y|X)$ – условная энтропия множ-ва сооб. Y при данном мн-ве сооб. X

Учтя, что

$$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\sum_{j=1}^{m} p(y_j|x_i)\log p(y_j|x_i)$$

видим, что для рассм-го канала связи условная энтропия не зависит от априорной вер-сти передачи сим

вона p, а зависит только от вер-ти ошибки передачи символа P_E:

$$H(Y|X) = -(1-P_E)\log(1-P_E) - P_E\log(P_E)$$

Из (15.6) следует, что

$$I(X;Y) = 1 + (1-P_E)\log(1-P_E) + P_E\log(P_E)$$

Очевиден тривиальный вывод: н/б кол-во инфо. удаётся передать при $P_E=0$, при $P_E=0{,}5$ никакую инфо-то передать не удастся, а при $P_E=1$ канал превращается в канал с полным инвертированием передаваемых сообщ.

Отметим, что энтропия непрерыв. сообщ. $=\infty$ и её расч-ие практического смысла не имеет.

Передача информации

Общие понятия

Передача информации

Информация – сведения, являющиеся объектом хранения, передачи и преобразования.

В 1927г. Хартли предложил и обосновал колич-ую меру инф-ции, кот. явилась точкой теории инф-ции:

$$I = \log(N) \qquad (16.1)$$

где I – кол-во инф-ции; N – общее число сообщений, кот. м.б. составлено из n элем., кажд. из кот. имеет m возможных состояний:

$$N = m^n$$

Ф-лу (16.1) можно представить в виде

$$I = n \log(m) \qquad (16.2)$$

Р/б удобен выбор осн. лог-ма, равного двум. При этом за единицу кол-ва инф-ции принято считать инф-ю сообщ., содерж-го один элемент ($n=1$), кот. может принимать 2 равновероятных состояния ($m=2$). Действ-но,

$$I = 1 \cdot \log_2(2) = 1 \text{ бит}$$

В случае одинак. вер-ти всех сообщений вер. кажд. сообщ

$$P = \frac{1}{N}.$$

Тогда кол-во инф-ции представимо через вер-ти поступления сообщений

$$I = \log_2(N) = \log_2\left(\frac{1}{P}\right) = -\log_2(P)$$

Ср-ая инф-я на один элемент сообщения и есть его энтропия H.

Велич. H ~~хар-ет~~ предст. собой меру беспоряд-ти сост. ист. сообщ-ий и хар-ет ср. степень неопр-ти сост. этого источника

Несмотря на то, различ... сист. перед. инф. (по тем каналам, каналам космич. связи или тропосферной) ни по техник. исполнению, ни по параметрам не похожи, в принципах построения и назнач. отд. ус-в самих разных систем много общего.

Для экономного исп-я линии связи, ум-я влияния различ. помех и искажений передаваемая инф-я преобр-ся кодир. ус-вом. Это преоб-е сост. из ряда оп., учит-х статистику поступающей инф-ии для устранения избыточности (статист-ое кодирование), и обеспеч-х введение доп-ых эл-ов для уменьш. влияния помех и искажений (помехоустойчивое кодирование).

В 1949 г. Шеннон уст-л завис-сть между шириной полосы сигнала и мощностью передатчика: при увелич. полоса в принципе можно возместить недостаток его мощности.

Он доказал, что прот-ая спос-сть канала для данной полосы B канала опр-ся ф-ой

$$C = B\log_2\left(1 + \frac{P_s}{P_n}\right), \text{ где}$$

P_s – мощность сигнала

P_n – мощность шума

Если шум явл. аддитивным с равномер. спектром (т.е. „белым") и имеет гауссово распр-е, то мощность шума

$$P_N = N_0 \cdot B$$

Проп-ая спос-ть канала макс-на, когда $B \to \infty$. При ск-ти передачи H, оцениваемую числом двоич. разрядов, передаваемых в одну секунду, инф-ю можно передавать со сколь угодно малой ошибкой при условии

$$H < C$$

Численно дост-ть передачи инф-ции хар-ся к-том ошибок

$$K_{err} = \frac{N_{err}}{N}$$

N_{err} – кол-во неверно принятых сообщ.

N – общее кол-во переданных сообщ

При увелич. N к-т ошибок $\to$ к вероятн. вер-ти ошиб. P_{err}

В рез-те действия помех в каналах связи при передаче сообщ. возник. ошибки. Если ошибки, возник. в передаваемом сообщ., происходят независимо одна от другой, их

Невозможно обеспеч-ть длительную пер. сообщ., если поток инф. ист. превыш. проп.-ую сп-сть канала.

Если на вх. кан. подач. ист. сообщ. с энтропией на символ, равной проп-ой сп-сти канала связи, то считается, что ист. согласован с каналом. Если энтропия меньше проп-ой сп-ти канала, то канал исп-ся не полностью.

Согласование в статистич. смысле достигается с пом-ю статистич. кодирования: 2 пол-ти сообщ-й представи, н-р, 2 послед-но передаваемых сигнала о состоянии контролируемого объекта.

Кодирование сообщений

Общие понятия

Кодирование сообщений

Правило, в соотв. с кот. кажд. элементар. сообщ. ставится в соответствие некот. уст-ая комбинация симвoлов наз-ся правилом кодирования.

Число различ. симв., из кот. сост. кодовые комбинации наз-ся основанием кода.

Коммуник. коды должны удовл. след. усл.:

1. При кодировании не должно происх. потерь инф-ии
2. Передача сообщ. должна происх. за мин-ое время.

Код, обеспечивающий однознач. соотв. между перед. сообщ. и код-ой комбинацией наз-ся обратимым кодом.

Код, число символов кот., приход-ся на одно элементарное сообщение оказ-ся минимальным наз-ся экономным кодом.

При исп-нии равномерного кода, у кот. длина всех кодовых комбинаций с числом символов n неизменна, должно вып-ся условие:

$L^n > N$, где L – основание кода, опр-ое передаваемыми символами

N – число сообщ.

Равномерный код явл-ся обратимым, но не явл-ся экономным. В экономном коде длина кодовой комбинации должна зависеть от априорной вер-ти передаваемого сообщ.

Чем больше априорная вер-ть $p(x_i)$ перед-го сообщ. x_i, тем меньше д.б. длина кодовой комбинации

Такой нер-ный код будет обратимым, если вып-ся усл-ие

$$\sum_{k=1}^{N} L^{-n_k} < 1,$$ n – число символов k-й кодовой комбинации

Минимальное число символов в коде для однозначного представления любого элементарного сообщения

Какое мин-ое число симв. д. исп-ся в коде для однознач. преде-я любого элемент-го сообщения? Всего сообщений N.

Пусть каждое элемен-ое сообщение x_i из мн-ва X преде-ся комбинацией n_i символов кодового алфавита, содерж-го L различ. символов.

Ср. число символов, приходящееся на одно сообщ.

$$\langle n \rangle = \sum_{i=1}^{N} n_i p(x_i)$$

Ответом на постави. вопрос будет опр-е нижней границы $\langle n \rangle$.

Ср-ее кол-во инф-ии, необх-ое для ~~на~~ опознания к.-л. сообщения опр-ся энтропией мн-ва элементар. сообщ. Тогда в соотв. с (15.5) при вып-ии усл-я, что все симв. кодового алфавита независимы и их исп-е равновероятно, получаем, что энтропия кодового алфавита $= \log L$. Каждый символ в среднем будет нести $\log(L)$ инф-ии. Для вып-я условия однозначности преде-я сообщений необх, чтобы (16.1)

$$\langle n \rangle \log(L) \geq H(X),$$ где $H(X)$ – энтропия мн-ва всех элементар. сообщ. $x_1, x_2, \ldots x_N$

Вып-е усл-я передг. целых чисел символов в кажд. сообщ. приводит к след. неравенству

$$\frac{H(X)}{\log(L)} \leq \langle n \rangle < \frac{H(X)}{\log(L)} + 1 \quad (16.2)$$

Разбиение исх. ансамбль сообщ. X на блоки, каждый из кот. содерж. ν статистически независ. символов, приведёт к тому, что энтропия из этих блоков X_ν возрастает в ν раз по отношению к $H(X)$

$$H(X_\nu) = \nu H(X)$$

поскольку число возможных блоков из ν символов составит N^ν и

$$\langle n \rangle = \langle n_\nu \rangle / \nu$$

Тогда, в соотв. с (16.2)

$$\frac{\nu H(X)}{\log(L)} \le \langle n_\nu \rangle < \frac{\nu H(X)}{\log(L)} + 1,$$

откуда в отношении $\langle n \rangle$ получим

$$\frac{H(X)}{\log(L)} \le \langle n \rangle < \frac{H(X)}{\log(L)} + \frac{1}{\nu}$$

Верхняя гр. $\langle n \rangle$ уменьш. по отнош. к (16.2), что свидетельств об улучшении качества кодирования

Основная теорема о кодировании сообщений

<u>Основная теорема о кодировании сообщений:</u>

Минимальное среднее число кодовых символов, приходящихся на один символ сообщения можно сделать сколь угодно близким к величине отношения инф-ии, содерж-ся в одном символе сообщения и энтропии алфавита кода, применяя кодирование достаточно длинных блоков сообщений.

Помехоустойчивое кодирование

Помехоустойчивое кодирование

Для того, чтобы хар-ть отличие кодовых комбинаций, исп-ся т.н. расст-е Хеммминга D

~~Предст.~~ Пусть имеются 2 код-ые комбинации — A_i и A_j — с одинак. числом символов n

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{n} |a_{ik} - a_{jk}|$$

Наименьш. расст-е Хеммминга наз-ют кодовым расстоянием и обознач. символом d.

Для двоичных кодов расст-е Хеммминга опр-ся как число позиций, в кот. одна кодовая комбинация отличается от другой

Осн. идея построения кодов, обеспечивающих обнаружение ошибок заклю-ся в том, что из общего числа N_A возможного числа комбинаций кода для кодирования сообщ. исп-ся лишь некоторая их часть. Они наз-ся разрешёнными код-ми комб-ми. Их число — величина N. Остальные код-ые комбинации наз-ся запрещенными, их число $N_A - N$

Будем считать, что код-ые ~~ее~~ комб-ии сообщения могут с равной вероятностью после прохожд канала связи перейти в любую код. комб.. Число таких переходов $N \cdot N_A$. Доля обнаруженных ошибок

$$\eta_e = \frac{N(N_A - N)}{N \cdot N_A} = 1 - \frac{N}{N_a}$$

Предположив, что $N = 2^k$, $N_a = 2^n$, $n = k + c$, где k — число инф-ых символов, c — число проверочных символов, n — длина кодовой комбинации, получим, что

$\eta_e = 1 - \frac{1}{2^c}$, т.е. увеличение числа проверочных символов приводит к увеличению доли обнаруженных ошибок.

Применение кодов, исправляющих ошибки.

Применение кодов, исправляющих ошибки.

Разобьем запрещ-ые комб. кодов на N подмножеств $M_1, M_2, \ldots, M_N$, кажд. из кот. отнесём к одной из разрешенных код. комб.

Если принятая код. комб. попадает в подмн-во M_k, будем считать, что передавалась инф-я A_k.

Доля исправл. ошибок (из числа обнаруж. ~~ошибок~~ !) составит.

$$n_e = \frac{N_a - N}{N(N_a - N)} = \frac{1}{N}$$

Пример:

Пусть длина бинар. код. комб. ост. $n=3$ символа. Тогда общее число возм. комб. кода N_a $2^n = 8$. Будем считать, что с пом. этого кода перед. $N=3$ инф. сообщ. Доля обнаруж-х ошибок есть $n_e = 1 - \frac{3}{8}$, а доля исправленных ошибок (от числа обн-ых) составит $n_e = \frac{1}{3}$

Качество кода зависит от способа разбиения запрещ. код. комб. на подмн-ва. Если передача всех кодов равновероятна, то его качество можно хар-ть средней вероятностью ошибки

$$\langle P \rangle = \sum_{q=1}^{n} P_q \lambda_q$$, где q - число искаженных символов в пределах одной код-й комб-ии, иначе кратность;

P_q - вер-сть ~~исправления~~ появления ошибки кратности q;

λ_q - число возможных ошибок кр. q.

Если коды перед-ся с различными вер-ми p_k, то

$$\langle p \rangle = \sum_{k=1}^{n} \left(p_k \sum_{q=1}^{n} p_q \lambda_q \right)$$

В этом случае величина риска R опр-ся выражением

$$R = \sum_{k=1}^{n} \left(p_k \Pi_k \sum_{q=1}^{n} p_q \lambda_q \right), \text{ где}$$

p_k - значение ф-ии потерь, связанное с принятием k-го решения

Т.о., если цена ошибок различ. код. комб. различна, то качество кода можно оценивать по величине R.

Для правильного построения кода необх-мо знать статистику помех. Считая, что ошибки в канале связи независимы, приходим к выводу, что вер-сть ошибочных комб. убывает с увелич-ем кратности ошибок (однокр-ые более вер-ны, чем 2-кратные и т.д.). Поэт. в таком канале связи нужно исправлять ошибки меньшей кратности, как более вероятные.

Пр-р

Пусть по каналу связи перед-ся инф-ные сообщ. A_1, A_2, A_3: $A_1:(001)$; $A_2:(011)$; $A_3:(110)$, причём каждая передаваемая кодовая комб-я сост. из 3-ёх симв.

i	E_i	$A_1:(001)$	$A_2:(011)$	$A_3:(110)$	Ситуация	частота возникновения
1	(000)	(001)+	(011)+	(110)+	ошибок нет	очень часто
2	(001)	(000)+	(010)	(111)+	ошибки однократные $e=1$	часто
3	(010)	(011).	(001)	(100)+		
4	(100)	(101)+	(111)	(010)		
5	(011)	(010)	(010)	(010)	ошибки двукратные $e=2$	иногда
6	(110)	(010)	(010)	(010)		

7	(101)	(010)	(010)	(010)		
8	(111)	(010)	(010)	(010)	ошибки трёх-кратные $e=3$	очень редко

E_i - в-р ошибки, содерж-й единицы на тех позициях, кот. в код. комб. окажутся искажёнными.

Декодирующее ус-во, обеспеч-ее исправление ошибок можно представить в виде графа, обеспеч-го принятие решений B_1, B_2, B_3 о регистрации код-й комбинации. Решение принимает-ся только после того, как все симв. код. комб. будут приняты

Способность кода к обнаружению и испр-ию ошибок полностью опр-ся величиной код-го расст-я. В рассм-ом случае $(D_{ij})_{min}=1$, поэтому такой код не может обеспечить обнаружение всех однократных ошибок.

Обнаружение всех ошибок с кратностью e вкл-ительно: $(D_{ij})_{min} \geq 1+e$

Исправление всех ошибок с кр. e вкл-ю: $(D_{ij})_{min} \geq 2e+1$

Обнаружение всех ошибок с кр-ю l вкл-ю и исправл. всех ош. с кр-ю e вкл-ю:

$$(D_{ij})_{min} \geq 1+e+l$$

Коды и их свойства

Виды кодов

Коды и их свойства

Неизбыточные коды. Полностью исп-ся все комб-ии. К ним также относят коды с частичным исп-ем комб, у кот. мин. код-ое расст-е $d_{min} = 1$

$$N = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

Простые равномерные коды. В рав-ых кодах все код комб. содерж. одинак. число эл-ов. Различие между комб. закл. в сочетании их эл-ов.

Двоично-десятичные коды. Кажд. десят-ая цифра предс-ся группой цифр, сост. из 4-ех двухпозиционных симв-ов, $N = 2^4 = 16$

Прим-е ~~измер~~ дискр-ых телеизм-ых систем, когда измеряемый пар-р должен восп-ся на цифр-ых индикаторов

Отраженные коды. Отлич-ая особенность — ~~соседние~~ соседние код комб. различаются цифрой только в одном разряде. В этих кодах нет одновременного изм-я цифр в неск-их разрядах. Код Грея — один из наб изв.

Неравномерные коды Шеннона-Фано. В общ., закод-ых двоич. рав-ми кодом, ~~зна~~ кол-во двоич. симв на одно сообщ. строго постоянно. Имеет смысл исп-ть такой нер. код, в кот. часто встреч-шиеся сообщ присв-ся более короткие код. комб, а редко встреч. симв. — более длинные.

Учёт статистич. закон-ей сообщ. позв. построить более экономный код

Избыточные коды и принципы исп-я избыточности

Наб важн. треб. к сист. перед инф. — обеспечение высокой достоверности принимаемых сообщ.

Вер-ть ложного сообщ., к. пр., не должна превышать $P = 10^{-6} \ldots 10^{-9}$, в то время как вер-ть ошибоч. приема единич. элем. в совреем. дискрет. каналах редко бывает меньше $10^{-3} - 10^{-4}$

При построении избыточ. кода для пр. инф-ии исп-ся лишь часть код. комб. (т.н. разреш-ые комб.), отлич-ся друг от друга более чем в одном разряде.

Доля обнар-ых ошиб. комб. ост. величину

$$1-\frac{2^k}{2^n}$$

Методы исправления ошибок

Суш. 2 осн. метода. 1-ый основан на исп-нии кодов-спутников, кот. выраж-ся как рез-т наличия ошибки в одном из разрядов принятого кодового слова. В случае приёма комб., совпадающей с одним из кодов-спутников, искаж. комб-я расшифровывается как раб-ая комб-я, в кот. входит данный код-спутник. Такой метод требует больших аппаратных затрат.

2-й метод — исп-ие проверочных соотношений. Сопоставляются принимаемые проверочные разряды код. комб. и проверочные разряды, вычисленные на основании принятых инфор-ых разрядов.

Код с проверкой на чётность

Независимо от длины инф-ой части кодовой комб., код содержит всего один проверочный символ, кот. выбирается таким, чтобы его сумма по модулю 2 со всеми инф-ми символами $=0$.

В правильно принятой код. комб. содерж-ся чётное число единиц.

Признак искажения код. комб. — нечётность содерж-ся в ней единиц.

Код с простым повторением

Код строится путём повт. исх. комб. Декод-ие

произв-ся путём сравн. 1-ой (инфо-ой) и 2-й (проверочной) частей кода. Код эффективен при действии пакета ошибок.

Корр-ый код. Разновид-ть кода с повторением. В нём вводятся доп. симв. для кажд. разряда инфо-ой части — если в разряде инфо-ой части стоит 0, то в корр-ом коде этот разряд запис-ся симв-лом 01, если 1 — симв. 10. Так, комб. 1010 будет предст-на в виде 10011001 10. Признак искажения кода —

Рекомендации по выбору кодов

Код

Код	ошибки			
	независимые		пакеты	
	обнаруживающие	исправл-ые	обнар-ые	испр-ые
с 1-ой проверкой на четность	+			
с простым повторением	+			
корреляционный	+		+	
инверсный	+		+	
Хэмминга	+	+	+	
Голея	+	+		
Рида-Миллера	+	+		
Макдональда	+	+		
Варшамова	+	+		
Майн ки-ти проверок на чётн		+		
Итеративный	+	+	+	+
Хеммнга	+	+	+	+
БЧХ	+	+	+	+
Мажоритарный	+	+	+	+
Фэйра			+	
Абрамсона			+	+
Миллера-Абрамсона			+	+
Рида-Соломона	+	+	+	+
Комбинаторный	+	+	+	+
Плотникова	+	+		+
с постоянным весом	+			
Бергера	+			
Непрерывный	+		+	+
Свертывание	+		+	+