

Задача Штурма - Лувилля

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$$

Это задача нахождения оператора $L = -\frac{d^2}{dx^2}$, при котором ур-е $L\varphi = \lambda\varphi$ имеет нулевые решения

Пример решения: Может отличаться

1 $\lambda = 0$ $X = C_1 x + C_2$

$$\begin{cases} X'' = 0 \\ X' = C_1 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_2 \neq 0 = 1$$

$X_0 = 1$ - собственная функция
 $\lambda = 0$ - собственное значение

2 $\lambda = -\omega^2 < 0$ $X = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$

$$\begin{cases} X'' - \omega^2 X = 0 \\ X' = \omega C_1 e^{\omega x} - \omega C_2 e^{-\omega x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \omega C_1 - \omega C_2 \\ 0 = \omega C_1 e^{\omega l} - \omega C_2 e^{-\omega l} \end{cases}$$

Однородная система линейных ур-й
 Всегда имеет нулевое р-е. Чтобы получить не нулевое достаточно чтобы $\Delta = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ e^{\omega l} & -e^{-\omega l} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

$X = 0$ - не собств. фун

$$-e^{\omega l} - e^{-\omega l} = 0 \text{ не выполняется}$$

$\lambda < 0$ - не собств значение

3 $\lambda = \omega^2 > 0$ $X = C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x)$

$$\begin{cases} X'' + \omega^2 X = 0 \\ X' = \omega C_1 \cos \omega x - \omega C_2 \sin \omega x \end{cases}$$

$$0 = \omega C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$0 = -\omega C_2 \sin \omega x, C_2 \neq 0 \Rightarrow \sin \omega x = 0$$

$$\omega l = \pi n, n = 1, 2, \dots$$

$$\omega = \frac{\pi n}{l}$$

$$X_n = \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

собств фун

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, n = 1, 2, \dots$$

собств значение

$$X(0) = X(l) = 0$$

1 $\lambda = 0$ $X = C_1 x + C_2$

$$\begin{cases} 0 = C_2 \\ 0 = C_1 l \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow X = 0 \text{ не собств. фун.}$$

3 $\lambda = \omega^2 > 0$

$$X = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ \sin \omega x = 0 \end{cases}$$

$$X(0) = X'(l) = 0$$

$$X'(0) = X(l) = 0$$

3 $\lambda = \omega^2 > 0$

$$X = C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x$$

$$X' = C_1 \omega \cos(\omega x) - \omega C_2 \sin \omega x$$

подставляем 0 и вычисляем
 либо $C_1 = 0$, либо $C_2 = 0$
 и дальше как в примере

Контроль результатов

$$\|X_k\|^2 = \int_0^l X_n^2 dx = \frac{l}{2}$$

2 \forall всех ортогонально