Матан(((
Теория: http://mathmod.bmstu.ru/Docs/Eduwork/ma/MAall.pdf

Мальчики - нечетные, девочки - четные номера

1. Сформулируйте и докажите теорему о единственности предела сходящейся последовательности. [Л. 4]

Последовательность может иметь не более одного предела.

Доказательство. Пусть последовательность {xn} имеет два предела: lim(n→∞) xn = a и lim(n→∞) xn = b, причем a != b. Тогда для ε = |a − b| / 3 > 0 найдется номер N1 такой, что при всех n > N1 выполняется неравенство |a − xn| < ε; найдется также номер N2 такой, что при всех n > N2 выполняется неравенство |b−xn| < ε. Пусть n > max(N1, N2). Тогда |a−b| = |a−xn+xn−b| <= |a−xn|+|xn−b| < ε+ε = 2ε = ⅔ *|a − b| , т.е. |a − b| < ⅔* |a − b| — противоречие.

2. Сформулируйте и докажите теорему об ограниченности сходящейся последовательности. [Л. 4]

Теорема (об ограниченности сходящейся последовательности).
Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть {xn} сходится, и пусть a = lim(n→∞) xn. Тогда для положительного числа 1 существует номер N такой, что при n >= N выполняется неравенство |a − xn| < 1. Отсюда |xn| − |a| <= |a − xn| < 1, т.е. |xn| < |a| + 1. Следовательно, |xn| <= max(|x1|, . . . , |xN |, |a| + 1), n = 1, 2, . . . , и последовательность {xn} ограничена. Теорема доказана.

3. Сформулируйте и докажите теорему о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел. [Л. 5]

Для функции f(x), имеющей (конечный) предел при x → x0 существует проколотая окрестность этой точки, на которой данная функция ограничена.

Доказательство. Пусть a = limx→x0 f(x). Тогда для положительного числа 1 найдется δ > 0 такое, что при 0 < |x − x0| < δ выполняется неравенство |f(x) − a| < 1. Отсюда |f(x)| = |f(x) − a + a| <= |f(x) − a| + |a| < 1 + |a|, т.е. |f(x)| < 1 + |a|, и мы видим, что f(x) ограничена в проколотой δ-окрестности (x0 − δ, x0) ∪ (x0, x0 + δ) точки x0. Теорема доказана

4. Сформулируйте и докажите теорему о сохранении функцией знака своего предела. [Л. 5]
Теорема (о сохранении функцией знака своего предела).
Пусть предел limx→x0 f(x) положителен. Тогда функция f(x) положительна в некоторой проколотой окрестности точки x0.

Доказательство. Пусть limx→x0 f(x) = a, a > 0. Тогда для положительного числа a/2 найдется δ > 0 такое, что при 0 < |x−x0| < δ выполняется неравенство |f(x)−a| < a/2 . Это неравенство равносильно такому: $-a/2 < f(x) - a < a/2$; следовательно, $f(x) > a/2$, т.е. данная функция положительна при $x \in (x0 - \delta, x0) \cup (x0, x0 + \delta)$. Теорема доказана

5. Сформулируйте и докажите теорему о предельном переходе в неравенстве. [Л. 5]

Пусть функции f(x) и g(x) определены в проколотой окрестности U˚(x0) точки x0, причем для любого $x \in$ U˚(x0) выполняется неравенство f(x) >= g(x). Тогда, если эти функции имеют пределы a = limx→x0 f(x) и b = limx→x0 g(x), то a >= b.

Доказательство. Пусть вопреки утверждению теоремы a < b, и пусть ε = (b − a) /2 > 0. Тогда существует δ1 > 0 такое, что при 0 < |x−x0| < δ1 имеет место неравенство |f(x)−a| < ε, т.е. a−ε < f(x) < a+ε. Аналогично существует δ2 > 0 такое, что при 0 < |x−x0| < δ2 выполняется неравенство |g(x)−b| < ε, т.е. b−ε < g(x) < b+ε. Если δ = min(δ1, δ2), и 0 < |x − x0| < δ, то f(x) < a + ε = (a + b)/2 = b − ε < g(x), т.е. f(x) < g(x) для указанных значений x — противоречие. Теорема доказана.

Замечание. Если в условии теоремы неравенство f(x) >= g(x) заменить на строгое, т.е. если f(x) > g(x), то отсюда, вообще говоря, не следует, что a > b. Например, при |x| < 1, x != 0, имеем |x| > x^2 . В то же время lim(x→0) |x| = lim(x→0) x^2 = 0

6. Сформулируйте и докажите теорему о пределе промежуточной функции. [Л. 5]
Теорема (о пределе промежуточной функции).
Пусть для всех x из некоторой проколотой окрестности U˚(x0) точки x0 выполняется двойное неравенство f(x) <= g(x) <= h(x) , и пусть существуют пределы limx→x0 f(x) и limx→x0 h(x), равные одному и тому же числу a. Тогда и limx→x0 g(x) = a.

Доказательство. Для произвольного положительного числа ε существуют положительные числа δ1 и δ2 такие, что при 0 < |x − x0| < δ1 имеет место неравенство |f(x)−a| < ε, т.е. a−ε < f(x) < a+ε, а при 0 < |x−x0| < δ2 выполняется неравенство |h(x) − a| < ε, т.е. a − ε < h(x) < a + ε. Тогда при 0 < |x − x0| < δ, δ = min(δ1, δ2), выполняется неравенство a − ε < f(x) <= g(x) <= h(x) < a + ε, т.е. a − ε < g(x) < a + ε, и |g(x)−a| < ε. Таким образом, при 0 < |x−x0| < δ имеет место неравенство |g(x)−a| < ε. Это означает, что limx→x0 g(x) = a. Теорема доказана.

7. Сформулируйте и докажите теорему о пределе произведения функций. [Л. 6]

Пусть lim(x→x0) f(x) = a, lim(x→x0) g(x) = b, тогда lim(x→x0) f(x) * g(x) = a*b

Доказательство.
Утверждение теоремы можно вывести из доказанной теоремы об арифметических операциях над сходящимися последовательностями, используя определение предела функции по Гейне. Пусть U˚(x0) — проколотая окрестность точки x0, в которой определены функции f(x) и g(x). Рассмотрим произвольную последовательность {xn}, все элементы которой лежат в U˚(x0), и при этом lim(x→x0) xn = x0. По определению предела функции по Гейне имеем равенства lim(n→∞) f(xn) = a и lim(n→∞) g(xn) = b n = 1, 2, ... По теореме о пределе произведения из теории последовательностей lim(n→∞) f(xn)* g(xn) = lim(n→∞) f(xn)* lim(n→∞) g(xn) = a *b .

***Теорема (о пределе произведения сходящихся последовательностей).
Пусть $\lim(n\to\infty) x_n = a$, $\lim(n\to\infty) y_n = b$. Тогда $\lim(n\to\infty) x_n*y_n = ab$.

Доказательство. Т.к. последовательность $\{x_n\}$ сходится, то эта последовательность ограничена. Следовательно, существует (неотрицательное) число c такое, что $|x_n| <= c$ при всех $n = 1, 2, ...$ Пусть задано $\varepsilon > 0$. Поскольку $\lim(n\to\infty) x_n = a$, то для положительного числа $\varepsilon / (2(|b| + 1))$ существует номер N1 такой, что при всех $n > N1$ выполняется неравенство $|a - x_n| < \varepsilon/2(|b| + 1)$. Для положительного числа $\varepsilon/(2(c + 1))$ также найдется номер N2 такой, что при всех $n >= N2$ справедливо неравенство $|b - y_n| < \varepsilon/2(c + 1)$ — это следует из того, что $\lim(n\to\infty) y_n = b$. Отсюда при $n > \max(N1, N2)$ получаем $|ab - x_n*y_n| = |a*b - b*x_n + b*x_n - x_n*y_n| <= |b| \cdot |a - x_n| + |x_n| \cdot |b - y_n| < |b| \cdot \varepsilon/2(|b| + 1) + c \cdot \varepsilon/2(c + 1) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, т.е. $|a*b - x_n*y_n| < \varepsilon$, если $n > \max(N1, N2)$. По определению предела это означает, что $\lim_{n\to\infty} x_n*y_n = a*b$.

8. Сформулируйте и докажите теорему о пределе сложной функции. [Л. 6]

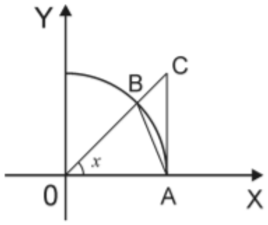
Теорема (о пределе сложной функции).
Пусть функция f(x) определена в проколотой окрестности точки x_0 и принимает значения в проколотой окрестности $V^\circ(y_0)$ точки y_0, причём $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$. Тогда, если функция g(y) определена на $V^\circ(y_0)$, и $\lim_{y\to y_0} g(y) = a$, то и $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = a$.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Т.к. $\lim_{y\to y_0} g(y) = a$, то для ε найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $0 < |y - y_0| < \delta$ выполняется неравенство $|g(y) - a| < \varepsilon$. Для положительного числа δ в силу равенства $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ существует число $\eta = \eta(\delta) > 0$ такое, что при 1 всех x, $0 < |x-x_0| < \eta$, имеет место неравенство $|f(x)-y_0| < \delta$; при этом в силу того, что $f(x) \in V^\circ(y)$, и, следовательно, $f(x) != y_0$, выполняется также неравенство $|f(x) - y_0| > 0$. Таким образом, по заданному $\varepsilon > 0$ мы нашли $\eta > 0$ такое, что при всех x, $0 < |x-x_0| < \eta$, выполняется неравенство $0 < |f(x) - y_0| < \delta$; в таком случае для всех указанных x выполняется неравенство $|g(f(x)) - a| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = a$. Теорема доказана.

Замечание. Теорема остаётся в силе, если какие-либо из чисел x_0, y_0 или a заменить символами $-\infty$, $+\infty$ или ∞. Можно также рассмотреть аналоги доказанной теоремы, в которых фигурируют односторонние пределы. Ограничение $f(x) 6= y_0$ можно отбросить, если функция g(y) определена при $y = y_0$, и $g(y_0) = a$.

9. Докажите, что $\lim (x\to 0) \sin x/x = 1$. [Л. 6]

Т.к. функция $\lim(x\to 0) \sin x/x$ является чётной, то достаточно доказать равенство $\lim(x\to 0+) \sin x/x = 1$. Пусть $0 < x < \pi\ 2$. Рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат, пересекающую ось абсцисс в точке A, и пусть угол AOB равен x



(радиан).

Пусть, далее, CA — перпендикуляр к этой оси, C — точка пересечения с этим перпендикуляром продолжения отрезка OB за точку B. Тогда площадь треугольника OAB меньше площади сектора OAB, а площадь этого сектора меньше площади OAC,

$$\frac{1}{2}R^2\sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x \text{ , и}$$

т.е. $$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 .$$. Чтобы можно было применить теорему о пределе промежуточной функции, достаточно доказать, что cos x → 1 при x → 0+. Т.к. 0 < sin x < x при 0 < x < π/2 (это следует из доказанного; на деле неравенство верно при всех x > 0), то sin x → 0 при x → 0+. Отсюда следует, что sin^2(x/2) → 0 при x → 0+, а поскольку cos x = 1 − 2*sin^2 (x/2) , то cos x → 1 при x → 0+. Поэтому из (1) вытекает требуемое.

10. Сформулируйте и докажите теорему о связи функции, ее предела и бесконечно малой. [Л. 7]

Теорема (о связи функции, ее предела и бесконечно малой).

Равенство a = limx→x0 f(x) имеет место тогда и только тогда, когда f(x) = a + ϕ(x), где функция ϕ(x) бесконечно мала при x → x0.

Доказательство:

Необходимость. Пусть a = limx→x0 f(x). Требуется доказать, что f(x) = a + ϕ(x), где ϕ(x) − бесконечно малая функция при x → x0. Обозначим ϕ(x) = f(x) − a. Тогда из определения предела функции получаем, что для любого ε > 0 существует число δ = δ(ε) > 0 такое, что при всех x, 0 < |x − x0| < δ, выполняется неравенство |f(x) − a| = |ϕ(x)| < ε. Это означает, что limx→x0 ϕ(x) = 0, т.е. ϕ(x) бесконечно мала при x → x0. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть f(x) = a + ϕ(x), где функция ϕ(x) бесконечно мала при x → x0. Тогда для любого ε > 0 существует число δ = δ(ε) > 0 такое, что при всех x, 0 < |x − x0| < δ выполняется неравенство |ϕ(x)| < ε, а т.к. ϕ(x) = f(x) − a, то также и неравенство |f(x) − a| < ε. Отсюда следует, что limx→x0 f(x) = a. Достаточность доказана. Теорема доказана.

11. Сформулируйте и докажите теорему о произведении бесконечно малой функции на ограниченную. [Л. 7]

Пусть в проколотой окрестности $U^{\circ}(x0)$ точки x0 заданы функции f(x) и ϕ(x), причем f(x) ограничена на $U^{\circ}(x0)$, а ϕ(x) бесконечно мала при x → x0. Тогда произведение f(x)·ϕ(x) есть бесконечно малая функция при x → x0.

Доказательство. Т.к. f(x) ограничена на множестве $U^{\circ}(x0)$, то существует число c такое, что |f(x)| <=c при всех x ∈ $U^{\circ}(x0)$. Далее, пусть задано ε > 0. Для положительного числа ε/(c + 1) (т.к. c > 0, то c + 1 != 0) существует δ > 0 такое, что при всех x, 0 < |x − x0| < δ , выполняется неравенство |ϕ(x)| < ε/(c + 1) . Для указанных x имеем |f(x) · ϕ(x)| <= c · ε/(c + 1)< ε. Поэтому lim(x→x0) f(x) · ϕ(x) = 0, и функция f(x) · ϕ(x) бесконечно мала при x → x0.

12. Сформулируйте и докажите теорему о связи между бесконечно большой и бесконечно малой. [Л. 7]

Теорема (о связи между бесконечно большой и бесконечно малой).
Пусть функция ϕ(x) отлична от нуля в некоторой проколотой окрестности точки x0. Эта функция бесконечно мала при x → x0 тогда и только тогда, когда функция f(x) = 1 ϕ(x) является бесконечно большой (при x → x0).

Доказательство.

Необходимость. Пусть ϕ(x) бесконечно мала при x → x0, и пусть задано (сколь угодно большое) положительное число E. Возьмём столь малое ε > 0, что ε < 1 E ; тогда 1 ε > E. Т.к. ϕ(x) бесконечно мала при x → x0, то существует δ = δ(ε) > 0 такое, что при всех x, 0 < |x − x0| < δ, выполняется неравенство |ϕ(x)| < ε. По условию теоремы ϕ(x) отлична от нуля в проколотой окрестности точки x0; отсюда |f(x)| = | 1/ϕ(x)| > 1/ε > E, т.е. |f(x)| > E. Поэтому |f(x)| → +∞ при x → x0, и f(x) является бесконечно большой при указанном предельном переходе. Необходимость доказана.

Достаточность доказывается аналогично. Теорема доказана

13. Сформулируйте и докажите теорему о замене бесконечно малой на эквивалентную под знаком предела. [Л. 8]

Пусть f(x) и g(x) — бесконечно малые при x → x0 функции, отличные от нуля в некоторой проколотой окрестности точки x0, и пусть f(x) ~ ϕ(x) при x → x0. Тогда, если существует предел lim(x→x0) ϕ(x)/g(x) = A, то существует и предел lim(x→x0) f(x)/g(x) также равный A

Доказательство. Имеем: lim(x→x0) f(x)/g(x) = lim(x→x0) ϕ(x)/g(x) · f(x)/ϕ(x) = lim(x→x0) ϕ(x)/g(x) = A , т.к. lim(x→x0) f(x)/ϕ(x) = 1

14. Сформулируйте и докажите теорему о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых. [Л. 8]

Теорема (о необходимом и достаточном условии эквивалентности бесконечно малых).

Бесконечно малые ϕ(x) и ψ(x) эквивалентны (при x → x0) тогда и только тогда, когда их разность имеет более высокий порядок малости при x → x0 по сравнению с каждой из них.

Доказательство.
Необходимость. Пусть ϕ(x) ~ ψ(x) при x → x0. Требуется доказать, что разность ϕ(x) − ψ(x) имеет более высокий порядок малости при x → x0 по сравнению с каждой их функций ϕ(x) и ψ(x). По определению эквивалентных бесконечно малых имеем limx→x0 ϕ(x)/ψ(x) = 1; по теореме о связи функции, её предела и бесконечно малой выполняется равенство ϕ(x)/ψ(x) = 1+ε(x), ε(x) → 0 при x → x0. Отсюда(ϕ(x) − ψ(x))/ψ(x) = ε(x). Т.к. ε(x) – бесконечно малая при x → x0, то ϕ(x) − ψ(x) = o (ψ(x)) , x → x0. Аналогично можно показать, что ϕ(x) − ψ(x) = o (ϕ(x)) при x → x0. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть ϕ(x) − ψ(x) = o ψ(x) , x → x0. Тогда (ϕ(x) − ψ(x))/ ψ(x) = o(1), и ϕ(x) ψ(x) = 1 + o(1), x → x0. Через o(1) обозначают бесконечно малую величину, характер стремления которой к нулю неизвестен или не представляет интереса. Из последнего равенства следует, что ϕ(x) ~ ψ(x) при x → x0. К такому же выводу можно прийти, рассматривая равенство ϕ(x)−ψ(x) = o ϕ(x) , x → x0. Достаточность доказана. Теорема доказана

15. Сформулируйте и докажите теорему о сумме конечного числа бесконечно малых разных порядков. [Л. 8]

Пусть ϕ1(x), . . . , ϕn(x), ψ(x) — бесконечно малые при x → x0 функции, и пусть ki — порядок малости функций ϕi(x) относительно ψ(x), i = 1, . . . , n, причём числа k1, . . . , kn попарно различны. Тогда сумма ϕ1(x) + . . . + ϕn(x) эквивалентна при x → x0 слагаемому минимального порядка относительно ψ(x).

Доказательство проведём по индукции. При n = 1 нечего доказывать. Пусть при некотором n > 1 утверждение теоремы справедливо, и пусть даны бесконечно малые ϕ1(x), . . . , ϕn(x), ϕn+1(x), ψ(x), удовлетворяющие условиям теоремы. Пусть (для определённости) kn+1 — минимальное среди чисел k1, . . . , kn, kn+1, а kn — минимальное среди чисел k1, . . . , kn. Тогда по предположению индукции ϕ1(x) + . . . + ϕn(x) ~ ϕn(x), x → x0. Далее,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_n(x)+\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_{n+1}(x)}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_n(x)}{\varphi_{n+1}(x)}+1\right)=$$
$$=1+\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n+1}(x)}=1+\lim_{x\to x_0}(\psi(x))^{k_n-k_{n+1}}.$$

Последний предел равен нулю, т.к. ψ(x)^(kn−kn+1) → 0 при kn > kn+1. Таким образом, ϕ1(x) + . . . + ϕn(x) + ϕn+1(x) ~ ϕn+1(x) при x → x0, и по индукции теорема доказана.
Аналогичная теорема справедлива и для бесконечно больших функций: сумма бесконечно больших различных порядков эквивалентна слагаемому наивысшего порядка

16. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций. [Л. 9]

Теорема (о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций). Пусть функции f(x) и g(x) определены в некоторой окрестности точки x0 и непрерывны в этой точке. Тогда в точке x0 непрерывны функции f(x) + g(x), f(x) · g(x) и f(x)/g(x); последнее — при условии, что g(x) отлична от нуля в указанной окрестности точки x0.

Доказательство вытекает из свойств пределов и определения непрерывной функции. Например, для частного рассматриваемых функций имеем на основании теоремы о пределе частного: limx→x0 f(x)/g(x) =(limx→x0 f(x))/(limx→x0 g(x))= f(x0) /g(x0) . Отсюда непосредственно вытекает непрерывность функции f(x)/g(x) в точке x0. Остальные утверждения теоремы проверяются аналогично. Теорема доказана.

17. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности сложной функции. [Л. 9]

Пусть функция f(x) определена в окрестности точки x0 и принимает значения в окрестности V (y0) точки y0 = f(x0), и пусть на V (y0) определена функция g(y). Тогда, если f(x) непрерывна в точке x0, а g(y) непрерывна в точке y0, то сложная функция g (f(x)) непрерывна в точке x0.

Доказательство проведём с помощью теоремы о пределе сложной функции (с учётом сделанного там замечания) *(см. №8)*. В силу непрерывности функции f(x) в точке x0 имеем lim(x→x0) f(x) = f(x0) = y0, а при y → y0 имеем g(y) → g(y0). Поэтому lim(x→x0) g (f(x)) = g(y0) = g(f(x0)) , т.е. g(f(x)) непрерывна при x = x0. При этом требование f(x) != y0 в проколотой окрестности точки x0 здесь можно отбросить, т.к. g(y) определена при y = y0, и g(y0) = lim (y→y0) g(y). Теорема доказана

18. Сформулируйте и докажите теорему о сохранении знака непрерывной функции в окрестности точки. [Л. 9]

Теорема (о сохранении знака непрерывной функции).
Пусть функция f(x) непрерывна в точке x0, и f(x0) 6= 0. Тогда в некоторой окрестности точки x0 функция f(x) имеет знак числа f(x0).

Доказательство. Пусть для определённости f(x0) > 0. Тогда, т.к. limx→x0 f(x) = f(x0), по теореме о сохранении функцией знака своего предела неравенство f(x) > 0 будет выполняться также и в некоторой окрестности точки x0. Теорема доказ

19. Сформулируйте теорему о непрерывности элементарных функций. Докажите непрерывность функции y = sin x. [Л. 9]

Любая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

Рассмотрим функцию f(x) = sin x.
Пусть задано ε > 0 и δ = ε. По ходу доказательства теоремы о первом замечательном пределе *(см. №9)* было доказано неравенство для любого x |sin x| <= |x| Имеем для любого x 0<|x-x0|<δ выполнено |sin x − sin x0| = |2*sin (x − x0)/2 · cos (x + x0)/2 | <= 2 |sin (x − x0)/ 2| <= 2 · |x − x0|/2 = |x − x0|<δ=ε, т.е. |sin x − sin x0| <= |x − x0| и непрерывность функции f(x) = sin x доказана в произвольной точке x0.

20. Сформулируйте свойства функций, непрерывных на отрезке. [Л. 10]

Теорема (Больцано-Коши). Если функция определена и непрерывна на некотором отрезке и на его концах принимает значения разных знаков, то эта функция обращается в нуль хотя бы в одной точке данного отрезка.

Теорема (о промежуточном значении или 2-ая теорема Больцано-Коши). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, и если $f(a) = A$, $f(b) = B$, то эта функция принимает все значения, лежащие на отрезке с концами в точках A и

Теорема (Вейерштрасса об ограниченности непрерывной на отрезке функции). Непрерывная на отрезке функция ограничена и достигает на этом отрезке наибольшего и наименьшего значения.

Теорема (о непрерывности обратной функции). Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна и возрастает на отрезке $[a, b]$. Тогда на отрезке $f(a), f(b)$ определена обратная функция $f^{-1}(y)$, которая непрерывна и возрастает на этом отрезке.

21. Сформулируйте определение точки разрыва функции и дайте классификацию точек разрыва. [Л. 9]

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 или в проколотой окрестности этой точки. Если данная функция не является непрерывной в точке x_0, то 3 x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$.

Если x_0 — точка разрыва функции $f(x)$, и существуют конечные пределы $\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0 - 0)$ и $\lim_{x\to x_0+} = f(x_0 + 0)$, то x_0 называется точкой разрыва первого рода
Если x_0 — точка разрыва первого рода, и если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, то такой разрыв называют устранимым.

Функция $f(x)$ имеет точку разрыва второго рода при $X=X_0$, если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

22. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты. [Л. 10]

Теорема (о необходимых и достаточных условиях наличия наклонной асимптоты).
Пусть функция $f(x)$ определена при $x > x_0$. Прямая $y = Ax + B$ тогда и только является правой асимптотой графика данной функции, когда $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = A$ и $\lim_{x\to+\infty} f(x) - Ax = B$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть $y = Ax + B$ — правая наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$. Тогда по определению $f(x) = Ax+B+o(1)$, $x \to +\infty$. Отсюда $\frac{f(x)}{x} = A + \frac{B}{x} + \frac{o(1)}{x} \to A$, $f(x) - Ax = B + o(1) \to B$, если $x \to +\infty$. Необходимость доказана.

Достаточность. Если $f(x) - Ax \to B$ при $x \to +\infty$, то $f(x) - Ax = B + o(1)$, $x \to +\infty$. Поэтому прямая $y = Ax + B$ есть (правая) наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$. Предел $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = A$ здесь не понадобился. Достаточность доказана. Теорема доказана

23. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции в точке. [Л. 11]

Функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке $x0$ тогда и только тогда, когда существует производная $f'(x0)$ в этой точке.

Доказательство.
Необходимость. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x0$. Требуется доказать существование $f'(x0)$. По определению дифференцируемости $f(x0 + \Delta x) - f(x0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta x \to 0$. После деления на Δx получаем: $(f(x0 + \Delta x) - f(x0))/\Delta x = A + o(1) \to A$ при $\Delta x \to 0$. Таким образом, производная $f'(x0)$ существует (и равна A). Необходимость доказана.
Достаточность. Пусть существует $f'(x0)$. Тогда $(f(x0 + \Delta x) - f(x0))/\Delta x = f'(x0) + o(1)$, $\Delta x \to 0$. После умножения на Δx получаем: $f(x0 + \Delta x) - f(x0) = f'(x0) \cdot \Delta x + o(1) \cdot \Delta x$, $\Delta x \to 0$. Очевидно, $o(1) \cdot \Delta x = o(\Delta x)$, поэтому функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x0$. Достаточность доказана. Теорема доказана

24. Сформулируйте и докажите теорему о связи дифференцируемости и непрерывности функции. [Л. 11]

Теорема (о непрерывности дифференцируемой функции.) Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке. **Доказательство.** . Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x0$. Тогда $f(x0 + \Delta x) - f(x0) = f\ 0\ (x0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta x \to 0$. Отсюда $\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f(x0) = \lim_{\Delta x\to 0} f(x0 + \Delta x) - f(x0) = \lim_{\Delta x\to 0} f\ 0\ (x0)\Delta x + o(\Delta x) = 0$, т.е. $\Delta f(x0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Это означает, что функция $f(x)$ непрерывна при $x = x0$. Теорема доказана. Достаточным условием дифференцируемости непрерывность не является. Мы видели, что функция $f(x) = |x|$ не имеет производной при $x = 0$. Однако, $f(x)$ непрерывна в этой точке (как и во всякой другой). Это следует, например, из равенства $|x| = \sqrt{x\ 2}$ и теоремы о непрерывности сложной функции. Можно доказать и непосредственно: если $\varepsilon > 0$, то, взяв $\delta = \varepsilon$, получим, что при $|x-x0| < \delta$ выполняются соотношения $|x|-|x0|\ 6\ |x-x0| < \delta = \varepsilon$, т.е. $|x| - |x0| < \varepsilon$

25. Сформулируйте и докажите теорему о производной произведения двух дифференцируемых функций. [Л. 11]

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке $x0$. Тогда в этой точке дифференцируемы также функции $f(x) \cdot g(x)$. $(f(x) \cdot g(x))'=f'(x)*g(x)+f(x)*g(x)'$

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
(f(x)\cdot g(x))' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)+f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x+\Delta x)+f(x)\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right) = \\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\,.
\end{aligned}
$$

Здесь мы воспользовались непрерывностью функции $g(x)$, которая является следствием дифференцируемости: $g(x+\Delta x)\to g(x)$ при $\Delta x\to 0$.

26. Сформулируйте и докажите теорему о производной частного двух дифференцируемых функций. [Л. 11]

Теорема (о производной суммы, произведения и частного.)
Пусть функции f(x) и g(x) дифференцируемы в точке x0. Тогда в этой точке дифференцируемы также функции f(x) ± g(x), f(x) · g(x), f(x) g(x) (последняя — при условии g(x) 6= 0), причём f(x) ± g(x) 0 = f 0 (x) ± g 0 (x) f(x)g(x) 0 = f 0 (x)g(x) + f(x)g 0 (x) f(x) g(x) 0 = f 0 (x)g(x) − f(x)g 0 (x) g(x) 2 .

Доказательство. Имеем: f(x) ± g(x) 0 = lim ∆x→0 1 ∆x f(x + ∆x) ± g(x + ∆x) − f(x) ± g(x) = = lim ∆x→0 f(x + ∆x) − f(x) ∆x ± g(x + ∆x) − g(x) ∆x = f 0 (x) ± g 0 (x). Производная произведения может быть вычислена так: f(x) · g(x) 0 = lim ∆x→0 f(x + ∆x)g(x + ∆x) − f(x)g(x) ∆x = = lim ∆x→0 f(x + ∆x)g(x + ∆x) − f(x)g(x + ∆x) + f(x)g(x + ∆x) − f(x)g(x) ∆x = = lim ∆x→0 f(x + ∆x) − f(x) ∆x · g(x + ∆x) + f(x) · g(x + ∆x) − g(x) ∆x = = f 0 (x)g(x) + f(x)g 0 (x). Здесь мы воспользовались непрерывностью функции g(x), которая является следствием дифференцируемости: g(x + ∆x) → g(x) при В случае производной частного рассуждаем аналогично lim ∆x→0 1 ∆x f(x + ∆x) g(x + ∆x) − f(x) g(x) = = lim ∆x→0 f(x + ∆x) − f(x) ∆x · g(x) − f(x) · g(x + ∆x) − g(x) ∆x g(x) · g(x + ∆x) = = f 0 (x)g(x) − f(x)g 0 (x) g(x) 2 . Теорема доказана

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \\
&\qquad = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x)-f(x)\cdot\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)} = \\
&\qquad = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}\,.
\end{aligned}
$$

Пусть f(x) = C, где C — константа. Тогда f 0 (x) = lim ∆x→0 f(x + ∆x) − f(x) ∆x = lim ∆x→0 C − C ∆x = 0, т.е. C 0 = 0. Поскольку постоянный множитель можно вынести за знак предела, то (Cf(x))0 = Cf0 (x).

27. Сформулируйте и докажите теорему о производной сложной функции. [Л. 11]

Пусть функции f(x) и g(y) определены в окрестностях соответственно точек x0 и y0 и дифференцируемы в этих точках, y0 = f(x0). Тогда сложная функция g(f(x)) дифференцируема в точке x0, и $\left(g(f(x))\right)'\Big|_{x=x_0} = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$

Доказательство. Функция f(x) дифференцируема и, следовательно, непрерывна в точке x0. Пусть функция g(y) определена для тех y, для которых |y − y0| < ε. Тогда существует δ > 0 такое, что при |x − x0| < δ выполняется неравенство |f(x) − f(x0)| = |f(x) − y0| < ε, и для таких x имеет смысл сложная функция g(f(x)). Таким образом, сложная функция g(f(x)) определена в окрестности точки x0, и можно говорить о её производной в этой точке. Запишем определение дифференцируемости функции g(y) в точке y0: g(y0 + ∆y) − g(y0) = g'(y0)∆y + o(∆y), ∆y → 0.

Пусть $\alpha(\Delta y) = \dfrac{o(\Delta y)}{\Delta y}$, если $\Delta y \neq 0$, и $\alpha(\Delta y) = 0$, если $\Delta y = 0$. Очевидно, $\alpha(\Delta y) \to 0$, если $\Delta y \to 0$. Определение дифференцируемости можно переписать так:

$$g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = g'(y_0)\Delta y + \alpha(\Delta y) \cdot \Delta y, \quad \Delta y \to 0.$$

При достаточно малом Δx подставим сюда $y_0 = f(x_0)$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Тогда

$$g\big(f(x_0 + \Delta x)\big) - g\big(f(x_0)\big) = g'(y_0)\big(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\big) + \alpha(\Delta y)\big(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\big).$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\left(g(f(x))\right)'\Big|_{x=x_0} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g\big(f(x_0 + \Delta x)\big) - g\big(f(x_0)\big)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(g'(y_0) \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right) + \\ &+ \lim_{\Delta x \to 0} \big(\alpha(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\big) \cdot \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (1)\end{aligned}$$

Заметим, что $\alpha(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) \to 0$, т.к. $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ — дифференцируемая в точке x_0 функция $f(x)$ непрерывна в этой точке. Кроме того, $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0)$ при $\Delta x \to 0$. Поэтому последний предел в (1) равен нулю, и мы получаем требуемое равенство:

$$\left(g(f(x))\right)'\Big|_{x=x_0} = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Старые чертежи постройки египетских пирамид

28. Сформулируйте и докажите теорему о производной обратной функции. [Л. 11]

Теорема (о производной обратной функции.) Пусть функция f(x) осуществляет взаимно однозначное отображение окрестности U(x0) точки x0 на окрестность V (y0) точки y0 = f(x0), причём обратная функция f −1 (y) непрерывна в точке y0. Тогда, если существует f 0 (x0) 6= 0, то существует также и (f −1) 0 (y0), причём (f −1) 0 (y0) = 1 f 0 (x0) .

Доказательство.

Доказательство. Пусть $y_0 + \Delta y \in V(y_0)$, и пусть $f^{-1}(y_0 + \Delta y) = x_0 + \Delta x$. Далее, $f^{-1}(y_0) = x_0$, и

$$\begin{aligned} &f^{-1}(y_0+\Delta y) - f^{-1}(y_0) = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x\,, \\ &f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f(f^{-1}(y_0+\Delta y)) - y_0 = y_0 + \Delta y - y_0 = \Delta y\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Если $\Delta y \neq 0$ то и $\Delta x \neq 0$ — это вытекает из того, что отображение $f\colon U(x_0) \to V(y_0)$ взаимно однозначно. Заметим ещё, что из непрерывности функции $f^{-1}(y)$ в точке y_0 и из (2) следует, что если $\Delta y \to 0$, то и $\Delta x \to 0$. Теперь можно вычислить производную обратной функции:

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f^{-1}(y_0+\Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\left(\dfrac{\Delta y}{f^{-1}(y_0+\Delta y) - f^{-1}(y_0)}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left(\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right)} = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

Теорема доказана.

29. Сформулируйте и докажите свойство инвариантности формы записи дифференциала первого порядка. [Л. 12]

Равенство df(x) = f’(x) dx остается справедливым и тогда, когда x независимая переменная, и тогда, когда x=x(t)

Доказательство. Пусть x=x(t). Тогда производная сложной функции (f(x(t)))’= f’(x(t))*x’(t) => df(x(t)) = f’(x(t))*x’(t)dt=f’(x(t))dx(t) Если в последнем равенстве не упоминать зависимость от t: df(x) = f’(x) dx

30. Сформулируйте и докажите теорему Ферма. [Л. 13]

Пусть функция f(x) определена на промежутке I и в некоторой внутренней точке x0 этого промежутка принимает наибольшее (или наименьшее) значение на этом промежутке. Тогда, если существует производная f’(x0), то эта производная равна нулю.

нулю.

Доказательство. Для определённости будем считать, что в точке x_0 функция $f(x$ принимает наибольшее значение. Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0\,,$$

т.к. здесь числитель неположителен, а знаменатель положителен. Далее,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0\,,$$

т.к. числитель по-прежнему неположителен, а знаменатель отрицателен. Таким образом $f'(x_0) \leqslant 0$ и $f'(x_0) \geqslant 0$. Следовательно, $f'(x_0) = 0$. Случай, когда в точке x_0 функция $f(x$ имеет минимальное значение рассматривается аналогично. Теорема доказана.

31. Сформулируйте и докажите теорему Ролля. [Л. 13]

Теорема. Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b), и пусть f(a) = f(b). Тогда на интервале (a, b) найдётся точка c такая, что f (c) = 0.
Доказательство. Поскольку функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M в точке c1 и наименьшего значения m в точке c2(Теорема Веерштрасса, *см. 20*). Если m = M, то, поскольку, m<= f(x) <= M, функция f(x) постоянна на [a, b] и её производная равна нулю во всех точках интервала (a, b); в качестве точки c, в которой f'(c) = 0, можно взять любую точку этого интервала. Если же m < M, то в силу условия f(a) = f(b) хотя бы одна из точек c1 или c2 является внутренней точкой отрезка [a, b], и тогда по теореме Ферма в этой внутренней точке производная функции f(x) равна нулю.

32. Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа. [Л. 13]
Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда на этом интервале существует точка c такая, что f(b) − f(a) = f' (c) · (b − a).

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)\,.$$

Эта функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), поскольку этими свойствами обладает $f(x)$. Далее $F(a) = f(a)$ и $F(b) = f(a)$ — это проверяется непосредственно. Мы видим, что для $F(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля. Поэтому существует точка $c \in (a, b)$, для которой

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0\,.$$

Отсюда вытекает требуемое равенство. Теорема доказана.

33. Сформулируйте и докажите теорему Коши. [Л. 13]
Теорема. Пусть функции f(x) и g(x) непрерывны на отрезке [a, b] и дифференцируемы на интервале (a, b), причём g 0 (x) отлична от нуля в каждой точке этого интервала. Тогда на (a, b) найдется точка c такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство. Сначала заметим, что g(b) − g(a) != 0. В самом деле, если бы выполнялось равенство g(b) = g(a), то на интервале (a, b) по теореме Ролля нашлась бы точка ξ, в которой g'(ξ) = 0. По условию теоремы такой точки нет. Поэтому g(b)−g(a) != 0. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,(g(x) - g(a))$
Легко видеть, что для f(x) на отрезке [a, b] выполнены все условия теоремы Ролля. Поэтому существует точка c ∈ (a, b) такая, что $F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,g'(c) = 0$ Из этого равенства вытекает требуемое.

34. Сформулируйте и докажите теорему Лопиталя – Бернулли для предела отношения двух бесконечно малых функций. [Л. 13]

Пусть в проколотой окрестности U˚(x0) точки x0 определены и дифференцируемы функции f(x) и g(x), причем limx→x0 f(x) = limx→x0 g(x) = 0 , и g’(x) != 0 для любого x ∈ U˚(x0). Тогда если существует (конечный или бесконечный) предел limx→x0 f’(x)/g’(x) = K , то и limx→x0 f(x)/g(x) = K ,

Доказательство. Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0, положив $f(x_0) = g(x_0) = 0$. В результате получим функции, непрерывные в окрестности $U(x_0) = \mathring{U}(x_0) \cup \{x_0\}$ точки x_0. Для этих новых функций оставим прежние обозначения. Заметим, что если $x \neq x_0$, то $g(x) \neq 0$. Если бы было $g(x) = 0$, то, как и при доказательстве теоремы Коши, к отрезку с концами в точках x_0 и x можно было применить теорему Ролля, и тогда нашлась бы точка ξ , в которой $g'(\xi) = 0$. По условию теоремы это невозможно. Поэтому для любого $x \neq x_0$ имеем $g(x) \neq 0$. Пусть $x \neq x_0$, и пусть для определенности $x > x_0$. Для пары функции $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[x_0, x]$ выполнены все условия теоремы Коши. Поэтому

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = K\,,$$

т.к., очевидно, $c \to x_0$, если $x \to x_0$. Здесь $c \in (x_0, x)$ — точка, существование которой обеспечивается теоремой Коши. Таким образом, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$, и теорема доказана.

35. Сравните рост показательной, степенной и логарифмической функций на бесконечности. [Л. 13]

Пусть a > 1, α > 0, и пусть требуется вычислить предел lim x→+∞ = (a^x)/(x^α) . Мы имеем здесь дело с неопределенностью вида ∞/∞ . Преобразуем сначала выражение под знаком предела: $\dfrac{a^x}{x^\alpha} = \left(\dfrac{(a^{1/\alpha})^x}{x}\right)^\alpha = \left(\dfrac{b^x}{x}\right)^\alpha$. Где b = a^(1/α) > 1. Найдем lim x→+∞ b^x/x . Для раскрытия этой неопределенности вида ∞/∞ применим правило Лопиталя

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{b^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(b^x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} b^x \ln b = +\infty\,.$$

Показательная функция (с основанием большим единицы) растёт быстрее степенной (с любым показателем степени). x^α=o(a^x)

Пусть a > 1, s > 0. Рассмотрим предел lim x→+∞loga(x)/(x^s) . По правилу Лопиталя
lim x→+∞ loga(x)/(x^s) = lim x→+∞ (1/lna)/(s*x^(s-1))=lim x→+∞ 1/(s*x^(s-1)*lna*x)=0
Вывод: степенная функция на +бесконечности растет быстрее логарифмической
loga(x)=o(x^s)

36. Выведите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. [Л. 14]

Теорема (*формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*). Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и имеет в этой окрестности производные всех порядков до $(n+1)$-го включительно. Тогда для любого $x \in U(x_0)$ справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!} \cdot (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)\,!} \cdot (x - x_0)^{n+1},$$

где θ — некоторое число из интервала $(0, 1)$.

Доказательство. Пусть $x \in U(x_0)$, и пусть для определенности $x > x_0$. Рассмотрим на отрезке $[x_0, x]$ две функции $\varphi(t) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k\,!} \cdot (x - t)^k$ и $\psi(t) = (x - t)^{n+1}$. Для этих функций имеем $\varphi(x) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k\,!} \cdot (x - x)^k = f(x) - f(x) = 0$, $\varphi(x_0) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!} \cdot (x - x_0)^k$, $\psi(x) = (x - x)^{n+1} = 0$, $\psi(x_0) = (x - x_0)^{n+1}$.

Вычислим производные:

$$\varphi'(t) = \Big(f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k\,!} \cdot (x - t)^k\Big)' =$$

$$= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\Big(f^{(k+1)}(t)\cdot(x-t)^k - k\,f^{(k)}(t)(x-t)^{k-1}\Big) =$$

$$= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}\cdot(x-t)^{k-1}.$$

В последней сумме введем новый индекс суммирования $l = k-1$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}\cdot(x-t)^{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(t)}{l!}(x-t)^l = f'(t) + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(t)}{l!}\cdot(x-t)^l.$$

Следовательно,

$$\varphi'(t) = -f'(t) - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\cdot(x-t)^n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + f'(t) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n-1} \frac{f^{(l+1)}(t)}{l!}(x-t)^l = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\cdot(x-t)^n,$$

т.е. $\varphi'(t) = -\dfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\cdot(x-t)^n$.

Далее, $\psi'(t) = -(n+1)(x-t)^n$, и непосредственно видно, что производная $\psi'(t)$ на интервале (x_0, x) отлична от нуля. К паре функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ на отрезке $[x_0, x]$ применим теорему Коши. Имеем:

$$\frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{\psi(x_0) - \psi(x)} = \frac{\varphi'(x_0 + \theta(x-x_0))}{\psi'(x_0 + \theta(x-x_0))},$$

где $\theta \in (0,1)$. Учитывая результаты проведенных вычислений, получаем отсюда:

$$\frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k}{(x-x_0)^{n+1}} = -\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{n!}\cdot(x - x_0 - \theta(x-x_0))^n \times$$

$$\times \frac{1}{-(n+1)(x - x_0 - \theta(x-x_0))^n} = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!},$$

т.е.

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}.$$

Из последнего равенства следует утверждение теоремы при $x > x_0$. При $x < x_0$ рассуждения аналогичны; если $x = x_0$, то утверждение теоремы очевидно. Теорема доказана.

37. Выведите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. [Л. 14]

Теорема (*формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.*) Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков до n-го включительно. Тогда справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n),\ x \to x_0.$$

Доказательство. Равенство, которое требуется доказать, означает, что

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Мы имеем здесь дело с неопределенностью $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть её, применим $n-1$ раз правило Лопиталя

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!}\cdot(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)\,!}\cdot(x-x_0)^{k-1}}{n(x-x_0)^{n-1}}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)\,!}\cdot(x-x_0)^{k-2}}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}=\ldots=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n\,!(x-x_0)}=$$

$$=\frac{1}{n\,!}\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-f^{(n)}(x_0)\right)=0,$$

т.к. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}=f^{(n)}(x_0)$. Теорема доказана.

38. Выведите формулу Маклорена для функции y = e^x с остаточным членом в форме Лагранжа. [Л. 14]

Если $x_0=0$, то формула Тейлора называется формулой Маклорена. Из доказанных теорем вытекают такие формулы Маклорена с остаточным членом соответственно в форме Лагранжа и Пеано:

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k\,!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)\,!}\cdot x^{n+1},\quad 0<\theta<1,\quad \text{и}$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k\,!}+o(x^n),\quad x\to 0.$$

39. Выведите формулу Маклорена для функции y = sin x с остаточным членом в форме Лагранжа. [Л. 14]

Если f(x) = sin x, то

$$f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ f^{(k)}(0)=\sin k\cdot\frac{\pi}{2}=\begin{cases}(-1)^n,\ \text{если } k=2n+1,\\ 0,\ \text{если } k=2n,\end{cases}\quad n=0,1,2,\ldots.$$

Если при составлении формулы Маклорена учесть слагаемые, содержащие производные до $2n$-го порядка включительно, то остаточный член в форме Лагранжа будет иметь вид

$$\frac{\sin\left(\theta x+(2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)\,!}\cdot x^{2n+1}=(-1)^n\cdot\frac{\cos\theta x}{(2n+1)\,!}\cdot x^{2n+1}.$$

Поэтому

— лангранж

$$\sin x=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)\,!}+(-1)^n\frac{\cos\theta x}{(2n+1)\,!}\cdot x^{2n+1},\quad 0<\theta<1,\quad \text{и}$$

, Пеано

$$\sin x=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)\,!}+o(x^{2n}),\quad x\to 0.$$

Красным написаны названия формулы остаточного члена Лагранжа (с ошибкой =)) и Пеано. В конспектах есть вывод этих формул. Лучше смотреть туда

40. Выведите формулу Маклорена для функции y = cos x с остаточным членом в форме Лагранжа. [Л. 14]

Пусть $f(x) = \cos x$. Тогда

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ f^{(k)}(0) = \cos k\frac{\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^n\,, & \text{если } k = 2n\,,\\ 0\,, & \text{если } k = 2n+1\,,\end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

При составлении формулы Маклорена учтем производные $f^{(k)}(0)$ до $k = 2n+1$ включительно; при этом остаточный член в форме Лагранжа имеет вид

$$\frac{\cos(\theta x + (n+1)\,\pi)}{(2n+2)\,!}\cdot x^{2n+2} = (-1)^{n+1}\cdot\frac{\cos\theta x}{(2n+2)\,!}\cdot x^{2n+2}\,,$$

и мы получаем такие формулы

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)\,!} + (-1)^{n+1}\frac{\cos\theta x}{(2n+2)\,!}\cdot x^{2n+2}, \quad 0 < \theta < 1\,, \quad \text{и}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)\,!} + o(x^{2n+1})\,, \quad x \to 0\,.$$

41. Выведите формулу Маклорена для функции y = ln(1 + x) с остаточным членом в форме Лагранжа. [Л. 14]

Для логарифмической функции f(x) = ln(1 + x) имеем f(0) = ln 1 = 0;

Для логарифмической функции $f(x) = \ln(1+x)$ имеем $f(0) = \ln 1 = 0$;

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)\,!}{(1+x)^k}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Поэтому

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad 0 < \theta < 1.$$

В этой формуле $x > -1$, т.к. логарифм $\ln(1+x)$ не определен при $1 + x \leqslant 0$. Формула Маклорена с остаточным членом в форме Пеано имеет вид:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n)\,, \quad x \to 0.$$

42. Выведите формулу Маклорена для функции y = (1 + x)^α с остаточным членом в форме Лагранжа. [Л. 14]

Рассмотрим функцию $f(x) = (1+x)^\alpha$. Здесь производная порядка k вычисляется по формуле $f^{(k)}(x) = \alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$; при $x = 0$ имеем $f^{(k)}(0) = \alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)$. Поэтому

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k\,!}\cdot x^k + \frac{\alpha\,(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)\,!}\times$$
$$\times\,(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1\,.$$

43. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие неубывания дифференцируемой функции. [Л. 15]

Теорема. Пусть функция f(x) дифференцируема на промежутке (а, в). y=f(x) не убывает на (а, в), тогда и только тогда, когда f’(x)>=0 для любых x из промежутка

Доказательство.

Необходимость. Пусть y=f(x) не убывает на (а, в). Для любых x1,x2 x1<x2 => f(x1)<=f(x2). Пусть x0 принадлежит промежутку, Δx - приращение x, так что x+Δx принадлежит промежутку. При Δx>0 и при Δx<0: (f(x0+Δx)-f(x0))/Δx>=0 *(числитель и знаменатель будут иметь одинаковые знаки)* тогда по свойствам пределов
lim(Δx>0) (f(x0+Δx)-f(x0))/Δx=f'(x)>=0

Достаточность.
Пусть f'(x)>=0 для любого x из промежутка (а, в). Для любых x1<x2 из промежутка выполнены на отрезке [x1,x2] все условия теоремы Лагранжа *(см. 32)* f(x1)-f(x2) =f'(C)(x1-x2) <=0 (f'(c)>=0, x1-x2<0), C принадлежит (x1,x2). f(x1)<=f(x2)

Замечание: Если f(x) возрастает, то производная может быть равна нулю (Например y=x^3)

44. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие невозрастания дифференцируемой функции. [Л. 15]

Аналогично как 43, только f'(x)<=0

45. Сформулируйте и докажите достаточное условие возрастания дифференцируемой функции. [Л. 15]

Теорема. Пусть функция f(x) непрерывна и дифференцируема на промежутке (а,в). Если производная f'(x)>0 для любого x из промежутка, то функция f(x) возрастает на этом промежутке.

Доказательство.

Пусть f(x) дифференцируема на промежутке (а, в) и для x1<x2 из этого промежутка на отрезке [x1,x2] выполнены все условия теоремы Лагранжа. f(x1)-f(x2) =f'(C)(x1-x2) <=0, C принадлежит (x1, x2). f'(x)>0 => f'(C)>0 => f(x1)-f(x2)<0 => f(x1)<f(x2) => f(x) возрастает

46. Сформулируйте и докажите достаточное условие убывания дифференцируемой функции. [Л. 15]

Аналогично как 45, только f'(x)<0 => f'(C)<0 => f(x1)-f(x2)>0

47. Сформулируйте и докажите первое достаточное условие экстремума (по первой производной). [Л. 15]
Теорема. Пусть функция f(x) непрерывна в окрестности (x0 − δ, x0 + δ), δ > 0, точки x0 и дифференцируема.

1) если f'(x) меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x0, то в этой точке функция f(x) имеет строгий локальный минимум
2) если f'(x) меняет знак с плюса на минус при переходе через x0, то функция f(x) имеет в этой точке строгий локальный максимум.

3) если же f’(x) сохраняет знак в проколотой окрестности точки x0, то экстремума в этой точке нет

Доказательство

1) Если f’(x) < 0 при всех x ∈ (x0 − δ, x0), то на полуинтервале (x0 − δ, x0] функция f(x) убывает, и для любого x ∈ (x0 − δ, x0) имеем по теореме о достаточных условиях убывания функции неравенство f(x) > f(x0) и функция убывает. На полуинтервале [x0, x0 + δ) функция f(x) возрастает, и f(x0) < f(x) для всех x ∈ (x0, x0 + δ). Мы видим, что x0 и в самом деле есть точка строгого локального минимума.

2) Аналогично доказывается и второе утверждение теоремы.

3) В случае последнего утверждения функция f(x) либо возрастает, либо убывает на интервале (x0 − δ, x0 + δ) в зависимости от знака производной f’ (x); экстремума в точке x0 в обоих случаях нет.

48. Сформулируйте и докажите второе достаточное условие экстремума (по второй производной). [Л. 15]

---

3) Теор. (второе достаточное условие экстремума). Пусть $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$.

1) Если $f''(x_0)>0$, то т. x_0 — точка строгого локального минимума ф-и $f(x)$

2) Если $f''(x_0)<0$, то т. x_0 — точка строгого локального максимума ф-и $f(x)$.

Д-во:

1) Запишем определение правой второй производной ф-и $f(x)$:

$$f''_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+} \frac{f'(x)-\overbrace{f'(x_0)}^{=0}}{\underbrace{x-x_0}_{>0}} > 0 \Rightarrow \text{по}$$

Теор. о сохранении ф-ей знака своего предела $f'(x)>0$ при $x\in(x_0;x_0+\delta)$.

Аналогично,

$$f''_-(x_0) = \lim_{x\to x_0-} \frac{f'(x)-\overbrace{f'(x_0)}^{=0}}{\underbrace{x-x_0}_{<0}} > 0 \Rightarrow \text{по}$$

Теор. о сохранении ф-ей знака своего предела $f'(x)<0$ при $x\in(x_0-\delta;x_0)$.

Значит, при переходе через т. x_0 $f'(x)$ меняет знак с «−» на «+» ⇒ т. x_0 явл. точкой строгого локального минимума (по первому дост. условию)

2) Д-ся аналогично. ∎

49. Сформулируйте и докажите достаточное условие выпуклости функции. [Л. 16]

Теорема. Пусть функция f(x) дважды дифференцируема на интервале (a, b),

1) в каждой точке x ∈ (a, b) выполняется неравенство f’’(x) > 0. Тогда функция f(x) выпукла вниз на указанном интервале.

2) Если же во всех точках интервала (a, b) вторая производная $f''(x)<0$, то функция $f(x)$ выпукла вверх на этом интервале.

Доказательство *(это доказательство с лекций, в книге там другое)*
Запишем формулу Тейлора 1-ого порядка с центром в точке $x0$ из промежутка (a, b) и с остаточным членом в форме Лагранжа
$f(x)=f(x0)+f'(x0)(x-x0)+½ f''(c)(x-x0)^2$ Пусть $x!=x0$, тогда $f(x)$ ордината точки графика с абсциссой x. $f(x0)+f'(x0)(x-x0)$ - Ордината касательной с абсциссой в точке x

1) если $f''(c)>0$ для любого x из промежутка $=>½ f''(c)(x-x0)^2>0 => f(x)>f(x0)+f'(x0)(x-x0) =>$ $f(x)$ выпуклая вниз
2) если $f''(c)<0$ для любого x из промежутка $=>½ f''(c)(x-x0)^2<0 => f(x)<f(x0)+f'(x0)(x-x0) =>$ $f(x)$ выпуклая вверх

50. Сформулируйте и докажите необходимое условие точки перегиба. [Л. 16]

Теорема (необходимые условия наличия точки перегиба). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности точки $x0$, причем вторая производная непрерывна в указанной точке. Тогда если $x0$ — точка перегиба графика функции $y = f(x)$, то $f''(x0) = 0$.

Доказательство. Пусть $f''(x0) != 0$, и пусть для определенности $f''(x0) > 0$. Тогда в силу непрерывности $f'(x)$ в точке $x0$ существует окрестность $(x0 − δ, x0 + δ)$, $δ > 0$, этой точки такая, что $f''(x) > 0$ во всех точках этой окрестности. Тогда на обоих интервалах $(x0 − δ, x0)$ и $(x0, x0 + δ)$ функция $f(x)$ выпукла вниз, что противоречит наличию перегиба в точке $x0$. Поэтому на деле $f''(x0) = 0$, и теорема доказана.

51. Сформулируйте и докажите достаточное условие точки перегиба. [Л. 16]

Теорема (первое достаточное условие наличия точки перегиба). Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $(x0 −δ, x0 +δ)$, $δ > 0$, точки $x0$ и непрерывна в указанной точке. Тогда если в соответствующей проколотой окрестности $(x0 −δ) ∪ (x0 +δ)$ функция $f(x)$ имеет вторую производную, которая меняет знак при переходе через точку $x0$, то точка $x0$ есть точка перегиба функции $y = f(x)$.

Доказательство. Пусть для определенности вторая производная $f''(x)$ положительна при $x ∈ (x0 −δ, x0)$ и отрицательна при $x ∈ (x0, x0 +δ)$. Тогда на $(x0 −δ, x0)$ функция $f(x)$ выпукла вниз, а на $(x0, x0 + δ)$ выпукла вверх, т.е. при переходе через точку $x0$ направление выпуклости меняется на противоположное. Отсюда следует, что $x0$ — точка перегиба функции $f(x)$.

Теорема (второе достаточное условие наличия точки перегиба). Пусть функция $f(x)$ трижды дифференцируема в точке $x0$, причем $f''(x0) = 0$, $f'''(x0) != 0$. Тогда $x0$ есть точка перегиба функции $f(x)$.

Доказательство. Пусть для определенности $f'''(x0) > 0$. Тогда $f'''(x0) = \lim (x→x0−) (f''(x) − f''(x0))/(x − x0) = \lim (x→x0−) f''(x)/(x − x0)$. Выражение $f''(x) /(x − x0)$ в некоторой левосторонней проколотой окрестности $(x0 − δ1, x0)$, $δ1 > 0$, должно иметь знак своего предела $f'''(x0)$, т.е. $f''(x)/(x − x0) > 0$ (по теореме о сохранения знака своего пердела), а тогда (т.к. $x − x0 < 0$) выполняется неравенство $f''(x) < 0$. Аналогично $f'''(x0) = \lim (x→x0+) (f''(x) − f''(x0)) /(x − x0) = \lim (x→x0+) f''(x)/ (x − x0)$, и $f''(x)/ (x − x0) > 0$ при $x ∈ (x0, x0 + δ2)$, $δ2 > 0$, т.е. $f 00(x) > 0$ при указанных x. Дторая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку $x0$. По предыдущей еореме $x0$ есть точка перегиба функции $f(x)$.

Определения
предела последовательности [Л. 4];
Число a называется пределом последовательности {Xn}, если для любого положительного ε существует номер N = N(ε) такой, что для всех номеров n >= N выполняется неравенство | a−Xn | < ε. При этом пишут lim (n→∞) Xn = a.

предела функции (определения по Коши и по Гейне) [Л. 5];
По Гейне: Пусть функция f(x) определена в проколотой окрестности U˚точки X0 . Число a называется пределом функции f(x) при X → X0, если для любой последовательности { Xn } точек из U˚для которой lim(n→∞) Xn = X0 , выполняется равенство lim(n→∞) f(Xn) = a.

По Коши: Число A называется пределом функции функции f(x) в точке X0 при X → X0 , если для любого ε>0 найдется такое δ>0, что при всех x | x − x0 | < δ, выполняется неравенство | f(x) − A | < ε

окрестности и ε-окрестности точки x ∈ R [Л. 2];

Окрестностью U(x) точки x называют любой интервал, содержащий эту точку;

ε-окрестностью точки x (при ε>0) называют интервал (x − ε, x + ε).

окрестностей +∞, −∞ и ∞ [Л. 2];

Окрестностями точек −∞ и +∞ называют соответственно интервалы вида (−∞, a) и (a, +∞), Бесконечность ∞ «без знака» называют объединение двух бесконечных интервалов (−∞, −a) ∪ (a, +∞), где a — произвольное действительное число.

сходящейся, ограниченной, возрастающей, убывающей, невозрастающей, неубывающей, монотонной, фундаментальной последовательностей [Л. 3, 4];

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся. Поскольку неравенство| a − Xn | < ε эквивалентно неравенству a − ε < Xn < a + ε, то все элементы сходящейся последовательности за исключением конечного их числа при любом ε > 0 лежат в ε-окрестности точки a.

Последовательность {Xn} называется ограниченной снизу, если существует число C1 такое, что Xn >= C1 при всех n = 1, 2, ...

Последовательность {Xn} называется ограниченной сверху, если существует число C2 такое, что Xn <= C2 при всех n = 1, 2, ...

Последовательность {Xn}, ограниченная как сверху, так и снизу, называется ограниченной, то есть C1 <= Xn <= C2 при всех n = 1, 2, ...

Последовательность $\{X_n\}$ называется монотонно возрастающей(убывающей), если для любого n принадлежащего N $X_n< X(n+1)$ (N $X_n> X(n+1)$). (нестрогая со знаком =)

Последовательность $\{X_n\}$ называется монотонной, если она убывающая или возрастающая.

Последовательность $\{X_n\}$ называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при любых $m >= N$ и $n >= N$ выполняется неравенство $| X_m - X_n | < \varepsilon$.

бесконечно малой и бесконечно большой функций [Л. 7];

Функция $\varphi(x)$ называется бесконечно малой при $X \to X0$, если $\lim(X\to X0)\ \varphi(x) = 0$ ($+\infty$)

бесконечно малых функций: одного порядка, несравнимых, эквивалентных [Л. 8]; порядка малости [Л. 8];

Если существует конечный отличный от нуля предел $\lim(X\to X0)\ (\varphi(x))/(\psi(x)) = C$, то говорят, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются при $X \to X0$ бесконечно малыми одного порядка и пишут $\varphi(x) = O(\psi(x))$ (O большое(o малое – более высокий порядок малости)). Если C=1, то они эквиваленты и пишут $\varphi(x) \sim \psi(x)$.

Если при $X \to X0$ не существует ни конечного, ни бесконечного предела отношения $(\varphi(x))/(\psi(x))$, то говорят, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не сравнимы при $X \to X0$.

порядка роста [Л. 8];

Если в (1) число C равно нулю, то говорят, что g(x) есть бесконечно большая более высокого порядка роста по сравнению с f(x) (а f(x) есть бесконечно большая более низкого порядка роста по сравнению с g(x)) и пишут $f(x) = o(g(x))$, $x \to x0$.

приращения функции [Л. 9];

Приращением функции называют разность $\Delta f(x0) = f(x) - f(x0)$

непрерывной функции в точке (эквивалентные определения) [Л. 9];

Пусть $X \subset R$, и пусть на X задана числовая функция $f(x)$. Эта функция называется непрерывной в точке $x0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x, $| x - x0 | < \delta$, выполняется неравенство $| f(x) - f(x0) | < \varepsilon$. Если существует предел и он равен значению в этой точке

непрерывной функции на интервале, на отрезке [Л. 9];

Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в интервале (a,b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $y=f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a,b]$, если она является непрерывной в интервале (a,b), а также в точках a слева и в точке b справа.

точек разрыва: устранимого, I-го рода, II-го рода [Л. 9]; наклонной асимптоты [Л. 10];

Если $\lim(X \to X0+) f(x) = \lim(X \to X0-) f(x)$, то точка $X0$ точка устранимого разрыва.

Если $X0$ — точка разрыва функции $f(x)$, и существуют конечные пределы $\lim(X \to X0-) f(x)$ не равен $\lim(X \to X0+) = f(X)$, то $x0$ называется точкой разрыва первого рода.

Функция $f(x)$ имеет точку разрыва второго рода при $X=X0$, если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

производной функции в точке [Л. 11];

Если существует конечный предел $\lim(\Delta x \to \infty) (f(x0 + \Delta x) - f(x0))/\Delta x$, то он называется производной функции $f(x)$ в точке $x0$ и обозначается $f'(x0)$.

односторонней (левой или правой) производной функции [Л. 11];

Если функция $f(x)$ определена в правосторонней окрестности точки $x0$, т.е. на полуинтервале $[x0, x0 + \eta)$, $\eta > 0$, то в точке $x0$ можно рассмотреть предел $\lim (\Delta x \to 0+) (f(x0 + \Delta x) - f(x0))/ \Delta x$, который в случае его существования называется правой производной функции $f(x)$ в точке $x0$ и обозначается $f'+(x0)$. Аналогично можно рассмотреть левую производную $f' -(x0)$ для 2 функции, определенной на левосторонней окрестности $(x0 - \eta, x0]$, $\eta > 0$, точки $x0$.

дифференцируемой функции [Л. 11];

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x0$. Эта функция называется дифференцируемой в точке $x0$, если её приращение может быть представлено в виде $f(x0 + \Delta x) - f(x0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta x \to 0$, где A — некоторое число, не зависящее от Δx

дифференциала первого порядка [Л. 12];

Дифференциалом первого порядка dy функции y=f(x) называется выражение, которое задается следующей формулой: dy=f'(x)dx

производной n-го порядка [Л. 12];
Производная n-го порядка f (n) (x) в точке x по определению есть (f (n−1)(x))'

дифференциала n-го порядка [Л. 12];

Дифференциал n-го порядка по определению есть d(n)f(x) = d (d (n−1) f(x)) дифференциал от дифференциала (n пишется как степень)

возрастающей, невозрастающей, убывающей, неубывающей, монотонной, строго монотонной функций [Л. 15];
Функция f(x), определенная на промежутке I, называется неубывающей на этом промежутке, если для любых точек x1 и x2 этого промежутка из неравенства x2 > x1 следует неравенство f(x2) >= f(x1). Если последнее неравенство заменить на f(x2) =< f(x1), f(x2) > f(x1) или f(x2) < f(x1), то получим определения соответственно невозрастающей, возрастающей и убывающей функций. Все такие функции называются монотонными, а две последние — строго монотонными.

строгого и нестрогого локальных минимума, максимума, экстремума [Л. 15];
Говорят, что функция f(x) имеет локальный максимум в точке x0, если существует окрестность U(x0) этой точки такая, что для любого x ∈ U(x0) выполняется неравенство f(x) <= f(x0). Если последнее неравенство заменить на f(x) >= f(x0), то мы получим определение локального минимума. А если потребовать, чтобы для всех x != x0 выполнялось строгое неравенство f(x) < f(x0) или f(x) > f(x0), то получится определение соответственно строгого локального максимума и строгого локального минимума. Во всех этих четырех случаях точка x0 называется точкой локального экстремума; в двух последних случаях говорят о точке строгого локального экстремума

стационарной и критической точек [Л. 15];
Точки, в которых f'(x)=0, =бесконечности или не существует, называют критическими точками. Точки, в которых f'(x)=0 называют стационарными

выпуклости (вверх или вниз) графика функции на промежутке [Л. 16];
1) Функция f(x) является выпуклой вверх (вниз) на интервале (а, в), если для любой касательной к графику этой функции каждая точка касательной, отличная от точки касания, лежит выше (ниже) точки графика функции с той же абсциссой.
2) Функция f(x) является выпуклой вверх (вниз) на интервале (а, в), если любая хорда, проведенная из точек x1,x2 принадлежащие (а,в), лежит выше (ниже) точки графика функции с той же абсциссой.

точки перегиба графика функции [Л. 16].
Точка x0 ∈ (a, b) называется точкой перегиба функции f(x), если эта функция непрерывна в точке x0 и если существует δ > 0 такое, что направления выпуклости функции f(x) на интервалах (x0 − δ, x0) и (x0, x0 + δ) различны (т.е. при переходе через

точку перегиба направление выпуклости функции меняется на противоположное). Точка (x0, f(x0)) называется при этом точкой перегиба графика функции y = f(x).