Экзаменационная работа

по предмету "Уравнения математической физики и преобразования Фурье"

Баранов Дамир

группа РЛ2-31

Билет №1

21.01.2021

1. Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения $u_{tt} = 9u_{xx}$ на отрезке $0 < x < 2$, $0 < t < \infty$ с начальными и граничными условиями $u(x,0) = 7\sin 4\pi x$, $u_t(x,0) = 15\pi \sin 5\pi x$, $u(0,t) = 0$, $u(2,t) = 0$

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} & 0 < x < 2,\ 0 < t < \infty \\ u(0,t) = 0 \\ u(2,t) = 0 \\ u(x,0) = 7\sin 4\pi x \\ u_t(x,0) = 15\pi \sin 5\pi x \end{cases}$$

$u(x,t) = X(x)T(t)$

$XT'' = 9TX''$

$\frac{X''}{X} = \frac{1}{9}\frac{T''}{T} = -\lambda$

I $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(2) = 0 \end{cases}$

1) $\underline{\lambda = 0}$ $\quad X'' = 0 \iff X = C_1 x + C_2$

ГУ: $\begin{cases} 0 = C_2 \\ 0 = 2C_1 \end{cases} \iff C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow X = 0$ нет решений не с.ф. $\lambda = 0$ не с.з.

2) $\underline{\lambda = -\omega^2 < 0}$ $\quad X'' - \omega^2 X = 0 \iff X = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$

ГУ: $\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ 0 = C_1 e^{2\omega} + C_2 e^{-2\omega} \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{2\omega} & e^{-2\omega} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Дисперсионное ур-е: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{2\omega} & e^{-2\omega} \end{vmatrix} = 0 \iff e^{-2\omega} - e^{2\omega} = 0$ $\nexists\omega$ удовл.

ур-ю $\Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow X = 0$ - не явл. с.ф., $\lambda = -\omega^2 < 0$ не явл. с.з.

3) $\lambda = \omega^2 > 0$ $\quad X'' + \omega^2 X = 0 \iff X = C_1 \cos\omega x + C_2 \sin\omega x$

ГУ: $\begin{cases} 0 = C_1 \\ 0 = C_2 \sin 2\omega \end{cases}$ $C_2 \neq 0 \Rightarrow \sin 2\omega = 0 \iff 2\omega = \pi n \iff \omega = \frac{\pi n}{2}$

Барашев Дамир РЛ2-31 Билет №1

1. (продолжение)

$d_n = \left(\frac{\pi n}{2}\right)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ – с.з. $\quad X_n = \sin \frac{\pi n x}{2}$ – с.ф. $\quad \|X_n\|^2 = 1 \quad n = \overline{1,\infty}$

(II) $T'' + 9\lambda T = 0$

$T_n(t) = A_n \cos \frac{3\pi n t}{2} + B_n \sin \frac{3\pi n t}{2}$

(III) $U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$

$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{3\pi n t}{2} + B_n \sin \frac{3\pi n t}{2}\right) \cdot \sin \frac{\pi n x}{2}$

$U(x,0) = 7 \sin 4\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n x}{2}$

домножим на $\sin \frac{\pi n x}{2}$

$7\int_0^2 \sin 4\pi x \sin \frac{\pi n x}{2}\, dx = A_n \|X_n\|^2$

$\int_0^2 \sin 4\pi x \sin \frac{\pi n x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left[\cos\left(4-\frac{n}{2}\right)\pi x - \cos\left(4+\frac{n}{2}\right)\pi x\right] dx =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(4-\frac{n}{2}\right)2\pi}{\left(4-\frac{n}{2}\right)\pi} - \frac{\sin\left(4+\frac{n}{2}\right)2\pi}{\left(4+\frac{n}{2}\right)\pi}\right] = \begin{cases} 1, & n = 8 \\ 0, & n \neq 8 \end{cases}$

$7 = A_8 \cdot 1 \Rightarrow A_8 = 7 \quad n = 8$

$U_t(x,0) = 15\pi \sin 5\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \frac{3\pi n}{2} \cdot \sin \frac{\pi n x}{2}$

домножим на $\sin \frac{\pi n x}{2}$

$15\pi \int_0^2 \sin 5\pi x \cdot \sin \frac{\pi n x}{2}\, dx = B_n \cdot \frac{3\pi n}{2} \|X_n\|^2$

$\int_0^2 \sin 5\pi x \cdot \sin \frac{\pi n x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left[\cos\left(5-\frac{n}{2}\right)\pi x - \cos\left(5+\frac{n}{2}\right)\pi x\right] dx =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(5-\frac{n}{2}\right)\pi x}{\left(5-\frac{n}{2}\right)\pi} - \frac{\sin\left(5+\frac{n}{2}\right)\pi x}{\left(5+\frac{n}{2}\right)\pi}\right]\Bigg|_0^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(5-\frac{n}{2}\right)\cdot 2\pi}{\left(5-\frac{n}{2}\right)\pi} - \frac{\sin\left(5+\frac{n}{2}\right)\cdot 2\pi}{\left(5+\frac{n}{2}\right)\pi}\right] =$

$= \begin{cases} 1, & n = 10 \\ 0, & n \neq 10 \end{cases}$

$15\pi = B_{10} \cdot \frac{3\pi \cdot 10}{2} \cdot 1 \Rightarrow B_{10} = 1 \quad n = 10$

$\boxed{U(x,t) = 7 \cos 12\pi t \cdot \sin 4\pi x + \sin 15\pi t \cdot \sin 5\pi x}$

$\left(U(x,t) = A_8 \cos \frac{3\pi \cdot 8 t}{2} \sin \frac{\pi \cdot 8 x}{2} + B_{10} \sin \frac{3\pi \cdot 10 t}{2} \sin \frac{\pi \cdot 10 x}{2}\right)$

Баранов Дамир РЛ2-31 Билет №1

2. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа Δu в круге $0 \le r < 2$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (где r, φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ удовлетворяет условию:

$$u(2,\varphi) = 2\cos^3\varphi - \sin^3\varphi + \sin\varphi$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & 0 \le r < 2, \; 0 \le \varphi < 2\pi \\ u(2,\varphi) = 2\cos^3\varphi - \sin^3\varphi + \sin\varphi \end{cases}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$u = R(r)\Phi(\varphi)$$

$$\frac{\Phi}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{R}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad \Big| \cdot \frac{r^2}{R\Phi}$$

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0$$

$$-\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = \frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda$$

$$\text{I} \begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0 \\ \Phi(0) = \Phi(2\pi) \\ \Phi'(0) = \Phi'(2\pi) \end{cases}$$

1) $\lambda = 0 \Rightarrow \Phi'' = 0 \Leftrightarrow \Phi = C_1\varphi + C_2$

ГУ: $\begin{cases} C_2 = C_1 \cdot 2\pi + C_2 \\ C_1 = C_1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 0 \;\; \forall C_2 \ne 0 \Rightarrow \Phi = C$ – с.ф., $\lambda = 0$ – с.з.

2) $\lambda = -\omega^2 < 0 \Rightarrow \Phi'' - \omega^2\Phi = 0 \Leftrightarrow \Phi = C_1 e^{\omega\varphi} + C_2 e^{-\omega\varphi}$

$$\Phi' = C_1\omega e^{\omega\varphi} - C_2\omega e^{-\omega\varphi}$$

ГУ: $\begin{cases} C_1 + C_2 = C_1 e^{2\pi\omega} + C_2 e^{-2\pi\omega} \\ C_1\omega - C_2\omega = C_1\omega e^{2\pi\omega} - C_2\omega e^{-2\pi\omega} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - e^{2\pi\omega} & 1 - e^{-2\pi\omega} \\ 1 - e^{2\pi\omega} & -(1 - e^{-2\pi\omega}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = 0$; Запишем дисперсионное уравнение:

$\begin{vmatrix} 1 - e^{2\pi\omega} & 1 - e^{-2\pi\omega} \\ 1 - e^{2\pi\omega} & -(1 - e^{-2\pi\omega}) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2(1 - e^{2\pi\omega})(1 - e^{-2\pi\omega}) = 0$ $\nexists\omega$ удовл. ур-ю $\Rightarrow C_1 = C_2 = 0$ $\Phi = 0$ не явл. с.ф., $\lambda = -\omega^2 < 0$ не явл. с.з.

3) $\lambda = \omega^2 > 0 \Rightarrow \Phi'' + \omega^2\Phi = 0 \Leftrightarrow \Phi = C_1\cos\omega\varphi + C_2\sin\omega\varphi$

$$\Phi' = -C_1\omega\sin\omega\varphi + C_2\omega\cos\omega\varphi$$

Барашев Дашир РЛ2-31 Билет №1

2. (продолжение)

ГУ: $\begin{cases} C_1 = C_1\cos 2\pi\omega + C_2\sin 2\pi\omega \\ C_2\omega = -C_1\omega\sin 2\pi\omega + C_2\omega\cos 2\pi\omega \end{cases}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\cos 2\pi\omega & -\sin 2\pi\omega \\ \sin 2\pi\omega & 1-\cos 2\pi\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Дисперсионное ур-е

$\begin{vmatrix} 1-\cos 2\pi\omega & -\sin 2\pi\omega \\ \sin 2\pi\omega & 1-\cos 2\pi\omega \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\cos 2\pi\omega)^2 + \sin^2 2\pi\omega = 0$

$1 - 2\cos 2\pi\omega + \cos^2 2\pi\omega + \sin^2 2\pi\omega = 0 \Leftrightarrow$

$\cos 2\pi\omega = 1 \Leftrightarrow$

$2\pi\omega = 2\pi n, \quad n = 1, 2, \ldots \Leftrightarrow$

$\omega_n = n, \quad n = 1, 2, \ldots$

$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, \ldots$

$\begin{cases} C_1 = C_1 \\ C_2 = C_2 \end{cases}$

$\Phi = \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases} \quad n = 1, 2, \ldots$

$\|\Phi_n\|^2 = \pi$

$\begin{cases} \Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi \\ \Phi_0(\varphi) = 1 \end{cases}$ $\quad \lambda_n = n^2, \; n = \overline{0,\infty} \quad \|\Phi_0\|^2 = 2\pi, \; n = 0 \quad \|\Phi_n\|^2 = \pi, \; n = \overline{1,\infty}$

II) $\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = \lambda \quad | \cdot R \qquad \lambda = n^2$

$r^2R'' + rR' - n^2R = 0$

Пусть $r = e^t \qquad R(r) = y(t)$

$e^t\frac{d}{de^t}\left(e^t\frac{dR}{de^t}\right) - n^2R = 0$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dR}{dt}\right) - n^2R = 0$

$y'' - n^2y = 0$

1) $n \neq 0 \Rightarrow y = C_1e^{nt} + C_2e^{-nt}$ $\quad \lambda_n = n^2, \; n = \overline{0,\infty} \qquad (r = e^t)$

2) $n = 0 \Rightarrow y = C_1t + C_2$

$n \neq 0: \; R(r) = C_1r^n + C_2\frac{1}{r^n}$

$n = 0: \; R(r) = C_1\ln r + C_2$

Баранов Дамир РЛ2-31 Билет №1

2. (продолжение)

Ищем решение, ограниченное при $r \to 0$, т.к. решаем задачу в круге

$$\begin{cases} R_0(r) = C_1 \ln r + C_2 \\ R_n(r) = C_1 r^n + C_2 \frac{1}{r^n} \end{cases} \quad \nexists \ln r \text{ при } r \to 0 \quad r^{-n} \xrightarrow[n \to 0]{} \infty \quad \Rightarrow R_n(r) = r^n, \ n \in \mathbb{N}$$

$$U(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$$

$$U(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

$$U(2,\varphi) = 2\cos^3\varphi - \sin^3\varphi + \sin\varphi = \frac{1}{2}(\cos 3\varphi - 3\cos\varphi) - \frac{1}{4}(3\sin\varphi - \sin 3\varphi) +$$

$$+ \sin\varphi = \frac{1}{2}\cos 3\varphi - \frac{3}{2}\cos\varphi + \frac{1}{4}\sin\varphi - \frac{1}{4}\sin 3\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

1) домножим на $\cos n\varphi$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 3\varphi \cos n\varphi \, d\varphi - \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \cos\varphi \cos n\varphi \, d\varphi + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin\varphi \cos n\varphi \, d\varphi - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin 3\varphi \cos n\varphi \, d\varphi =$$

$$= 2^n \cdot A_n \|\Phi_n\|^2$$

$$\int_0^{2\pi} \cos 3\varphi \cos n\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos(3+n)\varphi + \cos(3-n)\varphi] \, d\varphi = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(3+n)\varphi}{3+n} + \frac{\sin(3-n)\varphi}{3-n}\right]\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(3+n)2\pi}{3+n} + \frac{2\pi \sin(3-n)\cdot 2\pi}{2\pi(3-n)}\right] = \pi \cdot \begin{cases} 1, & n=3 \\ 0, & n \neq 3 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi \cos n\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos(1+n)\varphi + \cos(1-n)\varphi] \, d\varphi = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(1+n)2\pi}{1+n} + \frac{2\pi \sin(1-n)2\pi}{(1-n)2\pi}\right] =$$

$$= \pi \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\varphi \cos n\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\sin(1+n)\varphi + \sin(1-n)\varphi] \, d\varphi = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(1+n)2\pi}{1+n} + \frac{\cos(1-n)2\pi}{1-n} - \frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-n}\right] =$$

$$= \left| \begin{matrix} \cos(1+n)2\pi = 1 \\ \cos(1-n)2\pi = 1 \end{matrix} \right| = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin 3\varphi \cos n\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\sin(3+n)\varphi + \sin(3-n)\varphi] \, d\varphi = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(3+n)2\pi}{3+n} + \frac{\cos(3-n)2\pi}{3-n} - \frac{1}{3+n} - \frac{1}{3-n}\right] =$$

$$= \left| \begin{matrix} \cos(3+n)2\pi = 1 \\ \cos(3-n)2\pi = 1 \end{matrix} \right| = 0$$

$$\frac{1}{2}\pi \begin{cases} 1, & n=3 \\ 0, & n \neq 3 \end{cases} - \frac{3}{2}\pi \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases} = 2^n A_n \|\Phi_n\|^2$$

$$\frac{\pi}{2} = 8 A_3 \cdot \pi \Rightarrow A_3 = \frac{1}{16} \quad n=3 \quad ; \quad -\frac{3}{2}\pi = 2A_1 \cdot \pi \Rightarrow A_1 = \frac{-3}{4}, \ n=1;$$

2) домножим на $\sin n\varphi$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos 3\varphi \sin n\varphi \, d\varphi - \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \cos\varphi \sin n\varphi \, d\varphi + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin\varphi \sin n\varphi \, d\varphi - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin 3\varphi \sin n\varphi \, d\varphi =$$

Барашев Дамир РЛ2-31 Билет №1

2. (продолжение)

$$= 2^n B_n \|\varphi_n\|^2$$

$$\int_0^{2\pi} \cos 3\varphi \sin n\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\sin(3+n)\varphi + \sin(3-n)\varphi]\, d\varphi = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(3+n)2\pi}{3+n} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos(3-n)2\pi}{3-n} - \frac{1}{3+n} - \frac{1}{3-n}\right] = \left| \begin{matrix} \cos(3+n)2\pi = 1 \\ \cos(3-n)2\pi = 1 \end{matrix} \right| = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi \sin n\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\sin(1+n)\varphi + \sin(1-n)\varphi]\, d\varphi = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(1+n)2\pi}{1+n} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos(1-n)2\pi}{1-n} - \frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-n}\right] = \left| \begin{matrix} \cos(1+n)2\pi = 1 \\ \cos(1-n)2\pi = 1 \end{matrix} \right| = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\varphi \sin n\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos(1-n)\varphi - \cos(1+n)\varphi]\, d\varphi = \frac{1}{2}\left[\frac{2\pi \sin(1-n)2\pi}{2\pi \cdot (1-n)} - \frac{\sin(1+n)2\pi}{1+n}\right] =$$

$$= \pi \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin 3\varphi \sin n\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos(3-n)\varphi - \cos(3+n)\varphi]\, d\varphi = \frac{1}{2}\left[\frac{2\pi \sin(3-n)2\pi}{2\pi(3-n)} - \frac{\sin(3+n)2\pi}{3+n}\right] =$$

$$= \pi \begin{cases} 1, & n = 3 \\ 0, & n \neq 3 \end{cases}$$

$$\frac{1}{4}\pi \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases} - \frac{1}{4}\pi \begin{cases} 1, & n = 3 \\ 0, & n \neq 3 \end{cases} = 2^n B_n \|\varphi_n\|^2$$

$$\frac{1}{4}\pi = 2 B_1 \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad B_1 = \frac{1}{8} \quad n = 1$$

$$-\frac{1}{4}\pi = 8 B_3 \pi \quad \Rightarrow \quad B_3 = -\frac{1}{32} \quad n = 3$$

$$\boxed{u(r,\varphi) = r\left(-\frac{3}{4}\cos\varphi + \frac{1}{8}\sin\varphi\right) + r^3\left(\frac{1}{16}\cos 3\varphi - \frac{1}{32}\sin 3\varphi\right)}$$

Баранов Дамир РЛ2-31 Билет №1

3. (а) Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

Уравнение 2-го порядка линейно относительно старших производных

$$a_{11}U_{xx} + 2a_{12}U_{xy} + a_{22}U_{yy} + F(x,y,U,U_x,U_y) = 0 \quad (*)$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= a_{11}(x,y) \\ a_{12} &= a_{21} = a_{12}(x,y) \\ a_{22} &= a_{22}(x,y) \end{aligned}\right\}$$

Для введения классификации, введем новые независимые переменные

$\xi = \xi(x,y)$ $\qquad$ $J(\xi;\eta) \neq 0$

$\eta = \eta(x,y)$ $\qquad$ $\xi, \eta \in C^2[D]$

Введем новые переменные таким образом, чтобы это уравнение приняло наиболее простую форму.

$$U(x,y) = U(x(\xi,\eta)) = U(\xi;\eta)$$

$$U_x = U_\xi \frac{\partial\xi}{\partial x} + U_\eta \frac{\partial\eta}{\partial x} \quad ; \quad U_y = U_\xi \frac{\partial\xi}{\partial y} + U_\eta \frac{\partial\eta}{\partial y} \; ;$$

$$\left.\begin{aligned} U_{xx} &= U_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + 2\xi_x\eta_x U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + U_\xi \xi_{xx} + U_\eta \eta_{xx} \\ U_{yy} &= U_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + 2\xi_y\eta_y U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}(\eta_y)^2 + U_\xi \xi_{yy} + U_\eta \eta_{yy} \\ U_{xy} &= U_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + U_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + U_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + U_\xi \xi_{xy} + U_\eta\eta_{xy} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Подставим в ур-е $(*)$:

$$\bar{a}_{11}U_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}U_{\eta\xi} + \bar{a}_{22}U_{\eta\eta} + \bar{F} = 0 \; ,$$

где:

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x \cdot \eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\cdot\eta_y^2$$

Введем классификацию в произвольной точке $M(x_0,y_0)$

$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{12} > 0$ - гиперболический тип

$\Delta < 0$ - эллиптический тип

$\Delta = 0$ - параболический тип

Баранов Дамир РЛ2-31 Билет №1

3.(б) Определить тип уравнения $u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y-x^2y=0$. Привести его к каноническому виду.

$$u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y-x^2y=0$$

$a_{11}=1 \quad a_{12}=2 \quad a_{22}=1$

$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 4-1\cdot 1 = 3>0$ — гиперболический тип

Ур-е характеристик:

$\lambda^2-4\lambda+1=0$;

$$\lambda_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{3}}{1}=2\pm\sqrt{3}$$

Составим ДУ, решения кт будет явл. характеристиками

$$\begin{cases}\frac{dy}{dx}=\lambda_1\\ \frac{dy}{dx}=\lambda_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{dy}{dx}=2+\sqrt3\\ \frac{dy}{dx}=2-\sqrt3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}dy=(2+\sqrt3)dx\\ dy=(2-\sqrt3)dx\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=(2+\sqrt3)x+C_1\\ y=(2-\sqrt3)x+C_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}C_1=\xi=y-(2+\sqrt3)x\\ C_2=\eta=y-(2-\sqrt3)x\end{cases} (*) \quad \xi_x=-(2+\sqrt3) \quad \xi_y=1 \quad \eta_x=-(2-\sqrt3) \quad \eta_y=1$$

$$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=u_\xi(-(2+\sqrt3))+u_\eta(-(2-\sqrt3))$$

$$u_y=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=u_\xi+u_\eta$$

$$u_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}u_x=\frac{\partial}{\partial x}(u_\xi(-(2+\sqrt3))+u_\eta(-(2-\sqrt3)))=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi}(u_\xi(-(2+\sqrt3))+u_\eta(-(2-\sqrt3)))+$$
$$+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta}u_x=(2+\sqrt3)^2u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}(2-\sqrt3)^2$$

$$u_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}u_y=\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\xi}u_y+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\eta}u_y=\frac{\partial}{\partial\xi}(u_\xi+u_\eta)+\frac{\partial}{\partial\eta}(u_\xi+u_\eta)=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}$$

$$u_{xy}=\frac{\partial}{\partial x}u_y=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi}u_y+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta}u_y=-(2+\sqrt3)\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}(u_\xi+u_\eta)-(2-\sqrt3)\frac{\partial}{\partial\eta}(u_\xi+u_\eta)=$$
$$=-(2+\sqrt3)(u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta})-(2-\sqrt3)(u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta})=-2u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}-\sqrt3u_{\xi\xi}-\cancel{\sqrt3u_{\xi\eta}}-$$
$$-2u_{\xi\eta}-2u_{\eta\eta}+\cancel{\sqrt3u_{\xi\eta}}+\sqrt3u_{\eta\eta}=-(2+\sqrt3)u_{\xi\xi}-4u_{\xi\eta}-(2-\sqrt3)u_{\eta\eta}$$

Подставим в изначальное ур-е:

$$\underbrace{\cancel{(2+\sqrt3)^2u_{\xi\xi}}}_{7+4\sqrt3}+u_{\xi\eta}-\cancel{4(2+\sqrt3)u_{\xi\xi}}-16u_{\xi\eta}-4(2-\sqrt3)u_{\eta\eta}+\cancel{u_{\xi\xi}}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}+$$
$$+u_\xi(-(2+\sqrt3))+u_\eta(-(2-\sqrt3))+u_\xi+u_\eta+u_{\xi\eta}+\underbrace{\cancel{u_{\eta\eta}(2-\sqrt3)^2}}_{(7-4\sqrt3)}-x^2y=0$$

$$-12u_{\xi\eta}+u_\xi(-(1+\sqrt3))+u_\eta(-(1-\sqrt3))-x^2y=0$$

Баранов Дамир ФЛ2-31 Билет №1

3.(б) (продолжение)

x, y выразим из (*):

$$\begin{cases} \xi = y - (2+\sqrt{3})x \\ \eta = y - (2-\sqrt{3})x \end{cases} \Rightarrow \xi - \eta = -(2+\sqrt{3})x + (2-\sqrt{3})x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\eta - \xi}{2\sqrt{3}} \Rightarrow x^2 = \frac{(\eta-\xi)^2}{12}$$

$$y = \xi + (2-\sqrt{3})x = \xi + (2-\sqrt{3}) \cdot \frac{\eta-\xi}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}\xi}{2\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\eta - \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\xi =$$

$$= \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\eta + \frac{2\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\xi = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\eta + \frac{3\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}\xi$$

Отсюда,

$$-12u_{\xi\eta} + u_\xi(-(1+\sqrt{3})) + u_\eta(-(1-\sqrt{3})) - \frac{(\eta-\xi)^2}{12}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\eta + \frac{3\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}\xi\right) = 0$$

$$u_{\xi\eta} = u_\xi\left(\frac{-(1+\sqrt{3})}{12}\right) + u_\eta\left(\frac{-(1-\sqrt{3})}{12}\right) - \frac{(\eta-\xi)^2}{144}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\eta + \frac{3\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}\xi\right) -$$

каноническая форма ~~ур-я гипер~~ ур-я

(каноническая форма ур-я гипербол. типа: $u_{\xi\eta} = F_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$)