Билеты утверждены на заседании кафедры ФН-12 03.12.2020.

Московский Государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ 14.

по курсу УМФ и ПФ, 2-й курс, 3-й сем., РЛ2-31

1. (*10 баллов*) Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения $u_{tt} = 25u_{xx}$ на отрезке $0 < x < 1,5$, $0 < t < \infty$ с начальными и граничными условиями $u(x,0) = 13\sin 5\pi x$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$, $u_x(1,5,t) = 0$

2. (*10 баллов*) Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в кольце $1 \le r \le 4$, $0 \le \phi < 2\pi$ (где r, ϕ – полярные координаты), на границах которого искомая функция $u(r,\phi)$ удовлетворяет условиям:
$u(1,\phi) = 1 + \sin\phi$, $u(4,\phi) = 4\sin 2\phi$.

3. (*10 баллов*)

a. Уравнение специальных функций и свойства его решения.

b. Определить тип уравнения $5u_{xx} + 16u_{xy} + 16u_{yy} + 24u_x + 32u_y = 0$. Привести его к каноническому виду.

Билеты утверждены на заседании кафедры ФН-12 03.12.2020.

Огай В. А РЛ2-31
21.01.2021

Билет 14

№1. Решить смешанную задачу для волнового ур-ия

$$\begin{cases} U_{tt} = 25U_{xx} & 0<x<1{,}5 \quad 0<t<\infty \\ U_t(x,0) = 0 \\ U(x,0) = 13\sin 5\pi x \\ U(0,t) = 0 \quad U_x(1{,}5,t) = 0 \end{cases}$$

Ищем решение в виде

$U(x,t) = X(x)\,T(t) \not\equiv 0$

$XT'' = 25TX''$

разделяем переменные

$$\frac{T''}{T} = 25\frac{X''}{X} = -\lambda \Rightarrow \begin{cases} 25\frac{X''}{X} = -\lambda \\ X(0) = 0 \\ X'(1{,}5) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X'' + \frac{\lambda}{25}X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(1{,}5) = 0 \end{cases}$$

Решаем задачу Штурма-Лиувилля

1) $\lambda = 0 \quad X'' = 0$

• $X(0) = 0$

$X = C_1x + C_2$

$0 = C_1 \cdot 0 + C_2$

$C_2 = 0$

• $X(1{,}5) = 0$

$0 = C_1 \cdot 1{,}5 + 0$

$C_1 = 0$

$\lambda = 0$ - не с.з. $X = 0$ - не с.ф.

2) $\lambda = -\omega^2 < 0$

$$\begin{cases} X'' - \frac{\omega^2}{25}X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(1{,}5) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = C_1e^{\omega x} + C_2e^{-\omega x} \\ X' = C_1\omega e^{\frac{\omega x}{5}} - C_2\omega e^{-\frac{\omega x}{5}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1\omega e^{\frac{\omega \cdot 1{,}5}{5}} - C_2\omega e^{-\frac{1{,}5\omega}{5}} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\frac{1{,}5\omega}{5}} & e^{-\frac{1{,}5\omega}{5}} \end{vmatrix} = e^{-\frac{\omega \cdot 1{,}5}{5}} - e^{\frac{1{,}5\omega}{5}} = 0$$ - таких ω не сущ-ет $\Rightarrow \lambda = -\omega^2 < 0$ - не с.з

$X = 0$ - не с.ф

Огай В.А. РЛ2-31
Билет 14, 21.01.2021

3) $\lambda = \omega^2 > 0$

$$\begin{cases} X = C_1 \sin\frac{\omega x}{5} + C_2 \cos\frac{\omega x}{5} \\ X' = C_1 \frac{\omega}{5}\cos\frac{\omega x}{5} - C_2 \frac{\omega}{5}\sin\frac{\omega x}{5} \end{cases}$$

$X(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$0 = C_1 \frac{\omega}{5} \cdot \sin\frac{1{,}5\omega}{5} \Rightarrow C_1 \neq 0 \quad \omega > 0$

$\sin\frac{1{,}5\omega}{5} = 0$

$\frac{1{,}5\omega}{5} = \Pi n \Rightarrow \omega = \frac{5\Pi n}{1{,}5} \Rightarrow \lambda = \left(\frac{5\Pi n}{1{,}5}\right)^2$

$X_n = \sin\frac{\Pi n x}{1{,}5}$

$\|X_n\|^2 = \frac{3}{4}$

(II) $\frac{T''}{T} = -\lambda \Rightarrow T'' + \left(\frac{5\Pi n}{1{,}5}\right)^2 T = 0$

$T_n = C_1 \cos\frac{5\Pi n}{1{,}5} t + C_2 \sin\frac{5\Pi n}{1{,}5} t$

(III) Общее решение

$U = X \cdot T$

$U_n = X_n \cdot T_n = \sin\frac{5\Pi n}{1{,}5} x \left(A_n \cos\frac{5\Pi n}{1{,}5} + B_n \sin\frac{5\Pi n}{1{,}5}\right)$

$U = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\frac{5\Pi n}{1{,}5} x \left(A_n \cos\frac{5\Pi n}{1{,}5} + B_n \sin\frac{5\Pi n}{1{,}5}\right)$

(IV) Г.У.

$$\begin{cases} U_t(x,0) = 0 \\ U(x,0) = 13\sin 5\Pi x \end{cases}$$

• $U(x,0) = 13\sin 5\Pi x$

$13\sin 5\Pi x = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\frac{5\Pi n}{1{,}5} x \cdot A_n \quad \Big| \cdot \sin\frac{5\Pi n}{1{,}5} x$

$\int_0^{1{,}5} 13 \sin\frac{\Pi x}{1{,}5} \cdot \sin\frac{5\Pi n}{1{,}5} x = \|X_n\|^2 \cdot A_n$

$\int_0^{1{,}5} 13 \sin\frac{\Pi x}{1{,}5} \cdot \sin\frac{5\Pi n}{1{,}5} x = \frac{3}{4} A_n$

$I = \int_0^{1{,}5} 13 \sin 5\Pi x \cdot \sin \frac{}{6} x = \frac{1}{2} \cdot 13 \int_0^{1{,}5} \left(\cos\left(5\Pi - \frac{\Pi + 2\Pi n}{6}\right)x - \cos\left(5\Pi + \frac{\Pi + 2\Pi n}{6}\right)x\right) dx =$

$= \frac{13}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{29-2n}{6}\right)\Pi x}{\frac{29-2n}{6}} - \frac{\sin\left(\frac{31+2n}{6}\right)\Pi x}{\frac{31+2n}{6}}\right]_0^{1{,}5} = \frac{13}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{29-2n}{6}\right)1{,}5\Pi}{\frac{29-2n}{6}} - \right.$

$\left. - \frac{\sin\left(\frac{31+2n}{6}\right)1{,}5\Pi}{\frac{31+2n}{6}}\right. = \begin{cases} A_n = 0, & n \neq 14{,}5 \\ A_{14{,}5} = 14{,}25, & n = 14{,}5 \end{cases}$

Осей В.Д. РЛ2-31
Билет 14, 21.01.2021

$$13\int_0^{1,5}\sin\frac{\Pi n x}{1,5}\sin 5\Pi x\,dx = \frac{13}{2}\int_0^{1,5}\Big[\cos\Big(\frac{\Pi n}{1,5}-5\Pi\Big)x -$$

$$-\cos\Big(\frac{5\Pi}{1,5}+5\Pi\Big)x\Big] = \frac{13}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{2\Pi n}{3}-5\Pi\right)}{\frac{2\Pi n}{3}-5\Pi} - \frac{\sin\left(\frac{2\Pi n}{3}+5\Pi\right)}{\frac{2\Pi n}{3}+5\Pi}\right]_0^{1,5} =$$

$$= \frac{13}{2}\left[\frac{\sin\left(\Pi n-\frac{15\Pi}{2}\right)}{\frac{2\Pi n}{3}-3\Pi} - \frac{\sin\left(\Pi n-\frac{15}{2}\Pi\right)}{\frac{2\Pi n}{3}-5\Pi}\right] = 1\begin{cases}\frac{13}{2}, & n=7\\ 0, & n\neq 7\end{cases}$$

$U_t(x,0)=0$

$$U=\sin\frac{\Pi n x}{1,5}\left(A_n\left(-\frac{5\Pi n t}{1,5}\right)\cdot\sin\frac{5\Pi n t}{1,5}+B_n\frac{5\Pi n t}{1,5}\cdot\cos\frac{5\Pi n t}{1,5}\right)$$

$$0=\sin\frac{\Pi n x}{1,5}\cdot B_n\frac{\Pi n x}{1,5}\ \Big|\cdot\sin\frac{5\Pi n x}{1,5}$$

$$0=\|X_n\|^2\cdot B_n\frac{\Pi n x}{1,5}\Rightarrow B_n=0$$

$$U=\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{5\Pi n x}{1,5}\left(A_n\cos\frac{5\Pi n t}{1,5}+B_n\sin\frac{5\Pi n t}{1,5}\right)$$

$$U=\sin\frac{7\Pi x}{1,5}\left(\frac{13}{2}\cos\frac{35\Pi t}{1,5}\right)$$

Ответ

№2 Решить задачу Дирихле для ур-ия Лапласа в кольце

Огай В.А. РЛ2-31
Билет 14. 21.01.2021

$\Delta u = 0$ $\quad 1 \le r \le 4, \; 0 \le \varphi < 2\pi$

$u(1,\varphi) = 1 + \sin\varphi$

$u(4,\varphi) = 4\sin 2\varphi$

Решаем задачу в виде:

$u = R(r)\,\Phi(\varphi) \not\equiv 0$

Разделим переменные:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r\,\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$\frac{\Phi}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{R}{r^2}\Phi'' = 0 \quad \Big| \cdot \frac{r^2}{R\Phi}$$

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = \frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda$$

(I) Решаем задачу Штурма-Лиувилля:

$\Phi'' + \lambda\Phi = 0$

$\Phi(0) = \Phi(\varphi + 2\pi)$

1) $\lambda = 0$

$\Phi'' = 0$

$\Phi = C_1\varphi + C_2 \Rightarrow \begin{cases} C_2 = C_1 2\pi + C_2 \\ C_1 = C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ \forall C_2 \neq 0 \end{cases}$

$\Phi' = C_1$

$\Phi = C$ - С.Ф., $\lambda = 0$ - С.З.

2) $\lambda = -\omega^2 < 0$

$\Phi'' - \omega^2\Phi = 0$

$\begin{cases} \Phi = C_1 e^{\omega\varphi} + C_2 e^{-\omega\varphi} \\ \Phi' = C_1 \omega e^{\omega\varphi} - C_2 \omega e^{-\omega\varphi} \end{cases}$

$\begin{cases} C_1 + C_2 = C_1 e^{2\pi\omega} - C_2 e^{-2\pi\omega} \\ C_1\omega - C_2\omega = C_1 \omega e^{2\pi\omega} - C_2 \omega e^{-2\pi\omega} \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 - e^{2\pi\omega} & 1 - e^{-2\pi\omega} \\ 1 - e^{2\pi\omega} & -(1-e)^{-2\pi\omega} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Составим дисперсионное ур-ие:

$$\begin{vmatrix} 1 - e^{2\pi\omega} & 1 - e^{-2\pi\omega} \\ 1 - e^{2\pi\omega} & -(1-e)^{-2\pi\omega} \end{vmatrix} = -2(1 - e^{2\pi\omega})(1 - e^{-2\pi\omega}) = 0$$ - таких ω не сущ-ет $\Rightarrow$

$\Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow \Phi = 0$ - не С.Ф.

$\lambda = -\omega^2 < 0$ - не С.З.

3) $\lambda = \omega^2 > 0$

$\Phi'' + \omega^2\Phi = 0$

Огай В. И. РЛ2-31
Билет 14, 22.01.2021

$$\begin{cases} \Phi = C_1 \cos\omega\varphi + C_2 \sin\omega\varphi \\ \Phi' = -C_1 \omega \sin\omega\varphi + C_2 \omega \cos\omega\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = C\cos 2\pi\omega + C_2 \sin 2\pi\omega \\ C_2\omega = -C_1 \omega \sin 2\pi\omega + C_2 \omega\cos 2\pi\omega \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\cos 2\pi\omega & -\sin 2\pi\omega \\ \sin 2\pi\omega & 1-\cos 2\pi\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\cos 2\pi\omega & -\sin 2\pi\omega \\ \sin 2\pi\omega & 1-\cos 2\pi\omega \end{vmatrix} = 0$$

$(1-\cos 2\pi\omega)^2 + \sin^2 2\pi\omega = 0$

$1 - 2\cos 2\pi\omega + \cos^2 2\pi\omega + \sin^2 2\pi\omega = 0$

$1 - 2\cos 2\pi\omega + 1 = 0$

$\cos 2\pi\omega = 1$

$2\pi\omega = 2\pi n, \ n = 1, 2 \dots$

$\omega = n, \ \lambda = n^2$

$\Phi_n = \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}$ $\lambda_n = n^2, \ n = \overline{0,\infty}$
$\|\Phi_n\|^2 = \pi, \ \|\Phi_0\|^2 = 2\pi$

II $\frac{r d}{d r}\left(r \frac{dR}{dr}\right) - n^2 R = 0$ – ур-ие Эйлера

Замена: $r = e^t$ $R(r) = y(t) \Rightarrow y'' - n^2 y = 0$

1) при $n=0$: $y'' = 0$ $y = C_1 t + C_2$

2) при $n \neq 0$: $y = C_1 e^{nt} + C_2 e^{-nt}$

$R_0(r) = C_1^0 \ln r + C_2^0$

$R_n(r) = C_1 r^n + \frac{C_2}{r^n}$

ГУ естественные такие, что эти ф-ии в кольце ограничены, ничего не уходит в 0

III Общее решение:

$U = \sum_0^\infty R_n(r)\Phi_n(\varphi) = R_0(r)\Phi_0(\varphi) + \sum_{n=1}^\infty R_n(r)\Phi_n(\varphi)$

$U = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{n=1}^\infty r^n [A_n \cos n\varphi + C_n \sin n\varphi] + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{r^n}[B_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi]$

$$\begin{cases} U(1,\varphi) = A_0 \overset{=0}{\ln 1} + B_0 + \sum_{n=1}^\infty 1^n [A_n \cdot \cos n\varphi + C_n \cdot \sin n\varphi] + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{1^n}[B_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi] = 1 + \sin\varphi \\ U(4,\varphi) = A_0 \ln 4 + B_0 + \sum_{n=1}^\infty 4^n [A_n \cdot \cos n\varphi + C_n \sin n\varphi] + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{4^n}[B_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi] = 4\sin 2\varphi \end{cases}$$

Умножаем оба ур-ия на $\cos n\varphi$:

1) $\int_0^{2\pi} \cos n\varphi \, d\varphi + \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cdot \cos n\varphi \, d\varphi = \sum_1^\infty (A_n + B_n)\overset{=\pi}{\|\Phi_n\|^2}$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos n\varphi \, d\varphi = \frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Огай В.А. РЛ2-31
Билет 14. 21.01.2021

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cdot \cos n\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\sin(1-n)\varphi + \sin(1+n)\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{-1}{2}\left[\frac{+\cos(1-n)\varphi}{1-n} + \frac{\cos(1+n)\varphi}{1+n} \right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{2}$$

№3 а) Ур-ие специальных ф-ий и св-ва его решения
в) Определить тип ур-ия. Привести к канон. виду.

Огай В. А. РЛ2-31
Билет 14, 21.01.2021

а) Уравнение специальных функций и свойства его решения.

Специальные функции одной переменной явл-ся решением обыкновенного ДУ.

$LU(x)=0,\ x\in(a,b)$, где
$LU=\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dU}{dx}\right)-q(x)U$ $\Rightarrow$ $\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dU}{dx}\right)-q(x)U=0$ (1), где:

$k(x)$ удовлетворяет условием:
$k(x)>0$, при $x\in(a,b)$
$k(x)=(x-a)\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ $[a,b]$ и $\varphi(a)\neq 0$
$k(x)$ – имеет $x=a$ – ноль первого порядка
$x=a$ – особая точка ур-я (1)

Очевидно, что $\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dU}{dx}\right)-q(x)U=0$ – уравнение 2-го порядка, имеет $U_1(x)$ и $U_2(x)$ независимые решения.

Лемма:
$U_1(x)$ и $U_2(x)$ – два ЛНЗ решения ур-я $\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dU}{dx}\right)-q(x)U=0$, коэффициент
$k(x)$ → $k(x)>0$, при $x\in(a,b)$
→ $k(x)=(x-a)\varphi(x)$

Тогда, если $U_1(x)$ – ограниченное решение, имеющее конечный предел в $x=a$, то $U_2(x)$ при $x\to a$ – явл-ся ограниченной

$y''+\omega^2y=0$
$y=C_1e^{i\omega x}+C_2e^{-i\omega x}$, причем, если $U_1(a)\neq a$, то $U_2(x)$ имеет в точке $x=a$, логарифмическую особенность, а если $U_1(x)$ имеет в $x=a$ нуль D-го коэффициента, то $U_2(x)$ имеет в $x=a$ полюс D-го порядка.

в) $5U_{xx}+16U_{xy}+16U_{yy}+24U_x+32U_y=0$

$a_{12}=4\quad a_{11}=5\quad a_{22}=16$

$\Delta=16-80=-64<0$ – эллиптический тип

$5\lambda^2-16\lambda+16=0$

$D=256-320=-64,\ \lambda_{1,2}=\frac{16\pm 8i}{10}=\frac{8\pm 4i}{5}$

$\lambda=\frac{8}{5}-\frac{4}{5}i$

$\frac{dy}{dx}=\frac{8}{5}-\frac{4}{5}i$

$dy=\left(\frac{8}{5}-\frac{4}{5}i\right)dx$

$y=\frac{8}{5}x-\frac{4}{5}ix+C\Rightarrow C=\left(y-\frac{8}{5}x\right)+i\left(\frac{4}{5}x\right)$

7

$Re \quad C_1 = y - \frac{8}{5}x = \xi$

$Im \quad C_2 = \frac{4}{5}x = \eta$

$\xi_x = -\frac{8}{5} \qquad \eta_x = \frac{4}{5}$

$\xi_y = 1 \qquad \eta_y = 0$

$$\begin{vmatrix} -\frac{8}{5} & \frac{4}{5} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

$U_x = \xi_x U_\xi + \eta_x U_\eta = -\frac{8}{5}U_\xi + \frac{4}{5}U_\eta$

$U_{xx} = -\frac{8}{5}\left(-\frac{8}{5}U_{\xi\xi} + \frac{4}{5}U_{\xi\eta}\right) + \frac{4}{5}\left(-\frac{8}{5}U_{\xi\eta} + \frac{4}{5}U_{\eta\eta}\right) = \frac{64}{25}U_{\xi\xi} - \frac{32}{25}U_{\xi\eta} - \frac{32}{25}U_{\xi\eta} + \frac{16}{25}U_{\eta\eta} =$

$= \frac{64}{25}U_{\xi\xi} - \frac{64}{25}U_{\xi\eta} + \frac{16}{25}U_{\eta\eta}$

$U_y = U_\xi$

$U_{yy} = U_{\xi\xi}$

$U_{xy} = -\frac{8}{5}U_{\xi\xi} + \frac{4}{5}U_{\xi\eta}$

Подставляем в исходное ур-ие:

$5\left(\frac{64}{25}U_{\xi\xi} - \frac{64}{25}U_{\xi\eta} + \frac{16}{25}U_{\eta\eta}\right) + 16\left(-\frac{8}{5}U_{\xi\xi} + \frac{4}{5}U_{\xi\eta}\right) + 16U_{\xi\xi} + 24\left(-\frac{8}{5}U_\xi + \frac{4}{5}U_\eta\right) + 32U_\xi = 0$

$\frac{64}{5}U_{\xi\xi} - \cancel{\frac{64}{5}U_{\xi\eta}} + \frac{16}{5}U_{\eta\eta} - \frac{128}{5}U_{\xi\xi} + \cancel{\frac{64}{5}U_{\xi\eta}} + 16U_{\xi\xi} - \frac{192}{5}U_\xi + \frac{96}{5}U_\eta + 32U_\xi = 0$

$\frac{16}{5}U_{\xi\xi} + \frac{16}{5}U_{\eta\eta} - \frac{32}{5}U_\xi + \frac{96}{5}U_\eta = 0$

$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} - 2U_\xi + 3U_\eta = 0$

$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = 2U_\xi - 3U_\eta$

ур-ие эллиптического типа: $U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} = F_2(\alpha, \beta, U, U_\alpha, U_\beta)$

Ответ: $U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = 2U_\xi - 3U_\eta$