Занятие 17. ОДУ высших порядков. Интегрирование ОДУ, допускающих понижение порядка.

Определение: Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, содержащейся в нём.
Задачей Коши для дифференциального уравнения называется задача отыскания решения $y(x)$, удовлетворяющего заданным начальным условиям

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} (*).$$

Общим решением уравнения называется такая функция $r = \phi(x, C_1, \cdots, C_n)$, которая при любых допустимых значениях параметров $C_1, \cdots, C_n$ является решением этого дифференциального уравнения и для любой задачи Коши с условиями (*) найдутся постоянные $C_1, \cdots, C_n$, определяемые из системы уравнений:

$$y_0 = \phi(x_0, C_1, \cdots, C_n)$$

$$y_0' = \phi'(x_0, C_1, \cdots, C_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_0^{(n-1)} = \phi^{(n-1)}(x_0, C_1, \cdots, C_n).$$

Уравнение $\Phi(x, y, C_1, \cdots, C_n) = 0$, определяющее общее решение как неявную функцию, называется *общим решением* дифференциального уравнения.

9.202. Показать, что функция $y = x^2 \ln|x| + C_1x^2 + C_2x + C_3$ является общим решением уравнения $xy''' = 2$.

$\triangleleft$ Покажем сначала, что y является решением при всех C:

$$y' = 2x\ln|x| + x + 2C_1x + C_2; \quad y'' = 2\ln|x| + 2 + 1 + 2C_1; \quad y''' = 2/x \ \Rightarrow\ xy''' = 2.$$

Рассмотрим решение произвольной задачи Коши:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad y''(x_0) = y_0'' \ \ (x_0 \neq 0).$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^2\ln|x| + C_1x^2 + C_2x + C_3 & = & y_0 \\ 2x\ln|x| + (2C_1+1)x + C_2 & = & y_0' \\ 2\ln|x| + 2C_1 + 3 & = & y_0'' \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} C_1x^2 + C_2x + C_3 & = & y_0 - x^2\ln|x| \\ 2C_1x + C_2 & = & y_0' - 2x\ln|x| - x \\ 2C_1 & = & y_0'' - 2\ln|x| - 3 \end{array}\right.$$

Это СЛАУ относительно C_1, C_2, C_3 с матрицей

$$\begin{pmatrix} x^2 & x & 1 \\ 2x & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы системы $det = -2$, поэтому для любой задачи Коши найдутся C_1, C_2, C_3. Тогда из теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши следует, что y — общее решение. (не забываем, что $x_0 \neq 0$).

Уравнения, допускающие понижение порядка.

- Если в уравнение не входит искомая функция y, т.е. оно имеет вид $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \cdots, y^{(n)}) = 0$, то порядок уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию низшую из производных, входящих в уравнение,т.е. сделав замену $y^{(k)} = z(x)$.
- Если в уравнение не входит независимое переменное x, т.е. уравнение имеет вид $F(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$, то порядок уравнения можно понизить, взяв за новое независимое переменное y, а за неизвестную функцию $y' = p(y)$.

Решить дифференциальные уравнения:

9.214. $xy''' = 2x + 3$.
Дифференциальное уравнение *3-го порядка*, входит единственная производная, поэтому можно не вводить замену, а разрешить уравнение напрямую, путем последовательного интегрирования:
Проинтегрируем обе части:
$y''' = 2 + 3/x$;
Получим:
$y'' = 2x + 3\ln|x| + C_1$;
Повторим процедуру, вновь интегрируем. Наша задача - найти y.

$$y' = x^2 + 3\int \ln|x|\,dx + C_1x = \begin{vmatrix} \text{интегрируем} & \text{по частям} \\ u = \ln|x| & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} = x^2 + 3(x\ln|x| - \int \frac{x}{x}\,dx) + C_1x =$$

$$= x^2 + 3x\ln|x| + C_1x + C_2;$$

И ещё раз интегрируем:

$$y = \frac{x^3}{3} + 3\int x\ln|x|\,dx + C_1x^2 + C_2x = \begin{vmatrix} u = \ln|x| \\ dv = x\,dx \end{vmatrix} =$$

$$\frac{x^3}{3} + 3\left(\frac{x^2}{2}\ln|x| - 3\int \frac{x^2}{2x}\,dx\right) + C_1x^2 + C_2x = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\ln|x| + C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

9.215. $x^2y'' = (y')^2$.
Дифференциальное уравнение *2-го порядка.*
В уравнение не входит искомая функция y, значит согласно пункту 1, выполняем замену $y' = z(x)$.
После замены $z(x) = y'(x)$, $z'(x) = y''(x)$ уравнение примет вид $x^2z' = z^2$.
Это уравнение с рзделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow -\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} - C_1, \quad z = \frac{x}{1 + C_1x}.$$

Внимание! Здесь поделили на z, поэтому надо проверить $z = 0$, т.е. $y = C$ — является решением.
Возвращаемся к исходным переменным, находим y:

$$y = \int \frac{x}{1 + C_1x}\,dx = \frac{1}{C_1}\int \frac{C_1x}{1 + C_1x}\,dx = \frac{1}{C_1}\int \frac{1 + C_1x - 1}{1 + C_1x}\,dx = \frac{1}{C_1}\int \left(1 - \frac{1}{1 + C_1x}\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{C_1}\int dx - \frac{1}{C_1^2}\int \frac{d(1 + C_1x)}{1 + C_1x} = \frac{x}{C_1} - \frac{1}{C_1^2}\ln|1 + C_1x| + C_2.$$

Ответ: $y = C$ или $y = \dfrac{x}{C_1} - \dfrac{1}{C_1^2}\ln|1 + C_1x| + C_2$.

9.216. $y'' - 2yy' = 0$.
Дифференциальное уравнение *2-го порядка.*
В уравнение не входит независимое переменное x, значит согласно пункту 2, выполняем замену переменных $y' = p(y)$.

$$y' = p(y), \quad y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'_y \cdot y'_x = p'p.$$

Получаем

$$p'p - 2yp = 0,$$
$$p(p' - 2y) = 0,$$

откуда

$$p = 0 \Rightarrow y' = 0, y = C \quad \text{или} \quad p' = 2y, \ \text{ т.е. } \ p = y^2 + C_1.$$

Возвращаемся к исходным переменным, решаем уравнение $y' = y^2 + C_1$.
Получим $\dfrac{dy}{y^2 + C_1} = dx$ и общее решение в виде общего интеграла:

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{\sqrt{C_1}} = x + C_2, & C_1 > 0; \\ -\dfrac{1}{y} = x + C_2, & C_1 = 0; \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-C_1}} \ln\left|\dfrac{y - \sqrt{-C_1}}{y + \sqrt{-C_1}}\right| = x + C_2, & C_1 < 0; \\ \text{или } y = C. & \end{array}\right.$$

9.229. $y''' = (y'')^2$. Дифференциальное уравнение *3-го порядка.*
Сделаем замену $z(x) = y''$.
Тогда приходим к уравнению с разделяющимися переменными:

$$z' = z^2 \ \Rightarrow \ \frac{dz}{z^2} = dx \ \Rightarrow \ -\frac{1}{z} = x + C \ \Rightarrow \ z = -\frac{1}{x + C_1}.$$

Делили на z, поэтому дополнительно учтём $z = 0$.
В исходных переменных имеем:$y'' = -\frac{1}{x+C_1}, y'' = 0$.
Путем последовательного интегрирования находим общее решение:
$y' = -\ln|x + C_1| + C_2$ или $y' = C$ и общее решение (см. 9.214)
$y = -(x+C_1)\ln|x+C_1| + x + C_1 + C_2x = -(x+C_1)\ln|x+C_1| + C_1 + C_2x$ или $y = C_1x + C_2$.

9.239. $y'' = \dfrac{y - xy'}{x^2}$.
Чтобы сделать понижение порядка, надо догадаться, что правая часть есть производная по x от $-y/x$.
Тогда получается

$$\frac{d(y')}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{y}{x}\right) \quad \text{или} \quad y' = -\frac{y}{x} + C_1. \tag{1}$$

Это линейное неоднородное уравнение.
Решаем однородное уравнение: $y' = -\dfrac{y}{x}$– уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

Его решение: $y = \dfrac{C}{x}$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде: $y = \dfrac{C(x)}{x}$,$y' = \dfrac{C'(x)x - C(x)}{x^2}$; подставляя в (1), получим

$$\frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} = -\frac{C(x)}{x^2} + C_1$$

$$C'(x) = C_1 x$$

$$C(x) = \tilde{C}_1 x^2 + \tilde{C}_2.$$

Итак, $y = \tilde{C}_1 x + \dfrac{\tilde{C}}{x}$.

9.247. Найти частное решение уравнения $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(2) = 0$, $y'(2) = 4$.

Дифференциальное уравнение *2-го порядка.*

В уравнение не входит искомая функция y, значит согласно пункту 1, выполняем замену $y' = z(x)$.

$\lhd$ Замена: $z(x) = y'(x)$, $z'(x) = y''(x)$;

$$z' = \frac{z}{x} + \frac{x^2}{z}$$

$$z' - \frac{z}{x} = z^{-1}x^2 \text{ — уравнение Бернулли.}$$

Новая замена: $p = z^{(1-n)}, n = -1$, поэтому $p = z^2$, $p' = 2zz'$.

Умножим обе части уравнения на $2z$ (заметим — $z = 0$ не является решением).

$$2zz' = \frac{2z^2}{x} + 2x^2$$

$$p' = \frac{2p}{x} + 2x^2 \text{ — линейное уравнение.}$$

Решаем однородное уравнение: $p' = \dfrac{2p}{x}$, его решение: $p = Cx^2$.

Решение неоднородного уравнения ищем в виде: $p = C(x)x^2$.

$$p = C(x)x^2, \quad p' = C'(x)x^2 + 2C(x)x.$$

Подставляя в линейное уравнение, получим:

$$C'(x)x^2 + 2C(x)x = 2C(x)x + 2x^2, \quad C'(x) = 2$$

Знак здесь определяется знаком производной в условии задачи Коши. Итак, $C(x) = 2x + C_1$, $p = 2x^3 + C_1x^2$, $y' = \pm\sqrt{2x^3 + C_1x^2} = \pm x\sqrt{2x + C_1}$; из условия $y'(2) = 4$

$$\pm 2\sqrt{4 + C_1} = 4$$

$$\sqrt{4 + C_1} = 2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0,\ y' = x\sqrt{2x}.$$

$$y = \int x\sqrt{2x}\,dx = \sqrt{2}\int x^{3/2}\,dx = \frac{2\sqrt{2}}{5}x^{5/2} + C_2.$$

$$y(2) = \frac{2\sqrt{2}}{5}4\sqrt{2} + C_2 = 0;\;\; C_2 = -\frac{16}{5}.$$

Ответ: $y = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}x^{5/2} - \dfrac{16}{5}$.

9.251. Найти частное решение уравнения $\dfrac{y''}{y'} = \dfrac{2yy'}{1+y^2}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
Дифференциальное уравнение *2-го порядка*.
В уравнение не входит независимое переменное x, значит согласно пункту 2, выполняем замену переменных $y' = p(y)$.
Замена: $y' = p(y)$, $y'' = p'p$. Подставляем в исходное уравнение:

$$\frac{p'p}{p} = \frac{2yp}{1+y^2} \;\Rightarrow\; \frac{dp}{dy} = \frac{2yp}{1+y^2} \;\Rightarrow\; \frac{dp}{p} = \frac{2y\,dy}{1+y^2} \;\Rightarrow\; \ln|p| = \ln|1+y^2| + \ln C_1$$

В результате получаем $p = C_1(1+y^2)$.
Делили на p; заметим, что $p = 0$ не является решением.

$$y' = C_1(1+y^2) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{C_1(1+y^2)} = dx \;\Rightarrow\; \frac{1}{C_1}\operatorname{arctg} y = x + C_2.$$

Делили на C_1; заметим, что $y' = 0$ не даст решения.
Из условия $y'(0) = 1$ получаем

$$C_1(1+0) = 1 \;\Rightarrow\; C_1(1+0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1;$$

из другого условия

$$1 \cdot \operatorname{arctg} 0 = 0 + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = 0.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} y = x$ или $y = \operatorname{tg} x$.

Текущее ДЗ: 9.203, 9.208, 9.213, 9.220, 9.223, 9.237, 9.238, 9.248, 9.249, 9.271*.