Решить краевую задачу Лапласа в круге

$$\begin{cases} \Delta U = 0 & 0 < r < 1 \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ U(1,\varphi) = \cos^3\varphi - \cos^2\varphi + \sin\varphi \end{cases}$$

(0) Переход в полярные координаты:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0 \quad ; U = R(r)\Phi(\varphi) \neq 0$$

$$\frac{\Phi}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{R}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0 \quad \Big| \cdot \frac{r^2}{R\cdot\Phi}$$

$$\frac{r}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0 \ ; \Rightarrow -\frac{r}{R}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = \frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda$$

(I) $\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0 \\ \Phi(0) = \Phi(2\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_n = n^2, n = \overline{0,\infty} \quad \|\Phi_0\|^2 = 2\pi$

$\Phi_n = \begin{cases} \cos\varphi n \\ \sin\varphi n \end{cases}, n = \overline{0,\infty} \quad \|\Phi_n\|^2 = \pi, n = \overline{1,\infty}$

(II)* $r\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \lambda R = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow R_n(r) = r^n, n = \overline{0,\infty}$

(III) Общее решение: $U(r,\varphi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} R_n(r)\cdot\Phi(\varphi)$

$$U(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n\left[A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\right]$$

(IV)* Граничные условия:

- Раскрываем
- Подставляем
- Условие ортогональности собственных функций.

(V) Решение:

* Если задача в кольце, то

(II) $r\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \lambda R = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow R_n(r) = C_{1n}r^n + \frac{1}{r^n}C_{2n}$

(III) Общее решение: $U(r,\varphi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} R_n(r)\cdot\Phi(\varphi)$

$$U(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n\left[A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r^n}\left[C_n\cos n\varphi + D_n\sin n\varphi\right]$$

*

Краевая задача для ур-я Гельмгольца в круге.

$$\begin{cases} \Delta U + U = 0 & 0 \le r < 3, \; 0 \le \varphi < 2\pi \\ U(3,\varphi) = \cos^3\varphi + \sin^2\varphi - \cos\varphi \end{cases}$$

(0) $\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + U = 0$

$$\frac{\Phi}{r}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{R}{r^2}\Phi'' + R\Phi = 0 \;\Big|\cdot \frac{r^2}{R\Phi}$$

$$\left[\frac{r}{R}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + 4r^2\right] = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$$

(I) $\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0 \\ \Phi(\varphi) = \Phi(2\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_n = n^2, \; n = \overline{0,\infty}$ $\quad \|\Phi_0\|^2 = 2\pi$

$\Phi_n = \begin{cases} \cos\varphi n, \\ \sin\varphi n, \end{cases} n = \overline{0,\infty}$ $\quad \|\Phi_n\|^2 = \pi, \; n = \overline{1,\infty}$

(II) $\frac{r}{R}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + r^2 - n^2 = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow R_n(r) = J_n(r)$

(III) Общее решение: $U(r,\varphi) = R_n(r)\cdot\Phi_n(\varphi)$

$$U(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(r)\left[A_n\cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right]$$

(IV) Граничные условия:

- Подставляем
- Условие ортог. собст функц.
- Вывести коэф A и B

(V) Решение.

Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения

$$\begin{cases} U_{tt} = 9U_{xx} & 0<x<2 \quad 0<t<\infty \\ U(0,t)=0, U(2,t)=0, & U(x,0)=7\sin 4\pi x, U_t(x,0)=15\pi\sin 5\pi x \end{cases}$$

0) $U(x,t) = X(x)\cdot T(t) \neq 0$: $X(0)\cdot T(t)=0 \Rightarrow X(0)=0$

$X(2)\cdot T(t)=0 \Rightarrow X(2)=0$

$XT'' = 9X''T \Big| \cdot \frac{1}{XT}$

$\frac{T''}{T} = \frac{9X''}{X} = -\lambda \Rightarrow$

I) $X'' + \frac{\lambda}{9}X = 0$ задача Ш-Л

$\Downarrow$

находим λ и

II) $T'' + \lambda T = 0$

$T_n = C_{1n}\cos\sqrt{\lambda}t + C_{2n}\sin\sqrt{\lambda}t$

III) Общее решение: $U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T(t)\cdot X(x)$

$U_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T'(t)\cdot X(x)$

IV) Граничные условия: 1) 2)

— Учитываем условие ортогональности собственных функций

— Интеграл

V) Ответ:

Решить первую смешанную задачу для неоднор ур-я

$$\begin{cases} U_t = \frac{1}{4} U_{xx} + \underbrace{5\cos 2t \cdot \sin 2x}_{\text{хвост}}, & 0<x<\pi \quad 0<t<\infty \\ U(x,0) = 0, \quad U(0,t) = 0, \quad U(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

0) ~~Замена~~ $U(x,t) = X(x)\cdot T(t) \Rightarrow \begin{matrix} T(t)\cdot X(0) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \\ T(t)\cdot X(\pi) = 0 \Rightarrow X(\pi) = 0 \end{matrix}$

$XT' = \frac{1}{4} X'' T \;\Big|\cdot \frac{1}{XT}$

I) $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$ Задача Ш-Л

$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{4X} = -\lambda \Rightarrow$

II) $T' + \lambda T = 0$

$T_n = C_1 \cdot e^{-\sqrt{\lambda} t}$

III) Общее решение: $U(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} X(x) T(t)$

IV) Хвост: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} T'(t)\cdot X(x) = \frac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty} T(t)\cdot X''(x) +$ хвост

равняем по sin или cos

$$\sum_{n=1}^{\infty} T'(t)\cdot X(x) + T(t)\cdot X(x) = \text{хвост}$$

$$\begin{cases} T_2' + T_2 = 5\cos 2t \\ T_n' + T_n = 0 \end{cases} \Rightarrow T_2 = C_1 e^{-t}$$

$T_{on} = C_1(t) e^{-t}$

Берем $\frac{d}{dt}$ по T_{on}, надо найти C_1

V) Ответ.