УМФ и ПФ

Экзамен

Старухин А.В РЛ2-31

Билет 16

1. $u_{tt} = 9u_{xx}$ $\quad 0<x<2$, $\quad 0<t<\infty$

$$u(x,0) = 7\sin 4\pi x$$

$$u_t(x,0)=0$$

$$u(0,t)=0$$

$$u(2,t)=0$$

$$XT''=9X''T$$

$$\frac{9X''}{X} = \frac{T''}{T} = -\lambda$$

(I) $9X''+\lambda X=0$

$$X''+\frac{\lambda}{9}X=0$$

(II) $T''+\lambda T=0$

(I) $\begin{cases} X''+\frac{\lambda}{9}X=0 \\ X(0)=0 \\ X(2)=0 \end{cases}$

1. $\lambda=0$ $\quad X''=0$

$X=C_1x+C_2$

$0=C_2$

$0=C_1\cdot 2 \Rightarrow C_1=0 \Rightarrow$

$X=0$ не с.ф $\lambda=0$ не с.з.

2. $\lambda = -\omega^2 < 0$

$$X = C_1 e^{\frac{\omega}{3}x} + C_2 e^{-\frac{\omega}{3}x}$$

$$0 = C_1 + C_2$$

$$0 = C_1 e^{\frac{2\omega}{3}} + C_2 e^{-\frac{2\omega}{3}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\frac{2\omega}{3}} & e^{-\frac{2\omega}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{-\frac{2\omega}{3}} - e^{\frac{2\omega}{3}} = 0 \Rightarrow$$

$$C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow$$

$X = 0$ не с.ф $\lambda < 0$ не с.з

3. $\lambda = \omega^2 > 0$

$$X = C_1 \cos\frac{\omega}{3}x + C_2 \sin\frac{\omega}{3}x$$

$$0 = C_1$$

$$0 = C_2 \sin\frac{2\omega}{3}$$

$$\frac{2\omega}{3} = \pi n, \quad n \in \overline{1, \infty}$$

$$\omega = \frac{3\pi n}{2}; \quad \lambda_n = \left(\frac{3\pi n}{2}\right)^2$$

$$X_n = \sin\frac{\pi n x}{2}$$

$$\|X_n\|^2 = 1$$

(II) $T'' + \lambda T = 0$

$$T'' + \left(\frac{3\pi n}{2}\right)^2 T = 0$$

$$T = C_1 \cos\frac{3\pi n}{2}t + C_2 \sin\frac{3\pi n}{2}t$$

(III) Общее решение:

$$u = X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n x}{2}\left[A_n \cos\frac{3\pi n}{2}t + B_n \sin\frac{3\pi n}{2}t\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n x}{2}\left[-\frac{3\pi n}{2}A_n\sin\frac{3\pi n}{2}t+\frac{3\pi n}{2}B_n\cos\frac{3\pi n}{2}t\right]$$

Учитывая ГУ:

$$7\sin 4\pi x=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n x}{2}\cdot A_n \Big|\sin\frac{\pi n x}{2}$$

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n x}{2}\cdot B_n\cdot\frac{3\pi n}{2} \Rightarrow B_n=0\ \forall n\in\overline{1,\infty}$$

$$7\underbrace{\int_0^2\sin 4\pi x\sin\frac{\pi n x}{2}\,dx}_{=I_1}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\underbrace{\int_0^2\left(\sin^2\frac{\pi n x}{2}\right)dx}_{=1}$$

$$I_1=\frac{7}{2}\int_0^2\left(\cos\pi x(4-n/2)-\cos\pi x(4+n/2)\right)dx=$$

$$=\frac{7}{2}\left[\frac{\sin\pi x(4-n/2)}{\pi(4-n/2)}-\frac{\sin\pi x(4+n/2)}{\pi(4-n/2)}\right]\Bigg|_0^2=$$

$$=\frac{7}{2}\left[\frac{2\sin\pi(8-n)}{2\pi(4-n/2)}-\underbrace{\frac{\sin\pi(8+n)}{\pi(4-n/2)}}_{=0}\right]=$$

$$=7,\begin{cases}1, & n=8\\ 0, & n\neq 8\end{cases}$$

$$7\begin{cases}1, & n=8\\ 0, & n\neq 8\end{cases}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n \Rightarrow A_8=7,\ A_n=0\ \forall n\neq 8.$$

Ответ:

$$u=X_n(x)T_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n x}{2}\left[A_n\cos\frac{3\pi n}{2}t+B_n\sin\frac{3\pi n}{2}t\right]=$$

$$=7\sin 4\pi x\cos 12\pi t$$

УМФ и ПФ

Стариусин Н.В. РЛ 2-31 21 янв 2021

9:00

Экзамен

Билет. 16

2 * $\Delta u = 0$ $0 \le r \le 1$ $0 \le \varphi \le \frac{2\pi}{3}$

$u(1,\varphi) = 5\sin 3\varphi$

$u(r,0) = 0$

$u\left(r, \frac{2\pi}{3}\right) = 0$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

$$u = R(r)\,\Phi(\varphi) \neq 0$$

$$\frac{\Phi}{r}\,\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dR}{dr}\right) + \frac{R}{r^2}\,\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = 0 \;\Big|\, \frac{r^2}{R\Phi}$$

$$-\frac{r}{R}\,\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dR}{dr}\right) = \frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda$$

(I) $\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0 \\ \Phi(0) = 0 \\ \Phi\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0 \end{cases}$

1. $\lambda = 0$ $\Phi'' = 0$ $\Phi = c_1\varphi + c_2$

$0 = c_2$; $0 = \frac{2\pi}{3}\cdot c_1 \Rightarrow c_1 = 0$

$c_1 = 0 = c_2 \Rightarrow \Phi = 0$ не с.ф ; $\lambda = 0$ не с.з.

2. $\lambda = -\omega^2 < 0$ $\Phi'' - \omega^2\Phi = 0$

$\Phi = c_1 e^{\omega\varphi} + c_2 e^{-\omega\varphi}$

$$0 = c_1 + c_2$$
$$0 = c_1 e^{\frac{2\pi}{3}w} + c_2 e^{-\frac{2\pi}{3}w}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\frac{2\pi}{3}w} & e^{-\frac{2\pi}{3}w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\frac{2\pi}{3}w} & e^{-\frac{2\pi}{3}w} \end{vmatrix} = 0 \; ; \; e^{-\frac{2\pi}{3}w} - e^{\frac{2\pi}{3}w} = 0$$
$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ не с.ф ; $\lambda < 0$ не с.з.

3. $\lambda = w^2 > 0 \quad \varphi'' + w^2\varphi = 0$
$$\varphi = c_1 \cos w\varphi + c_2 \sin w\varphi$$
$$0 = c_1$$
$$0 = c_2 \sin \frac{2\pi}{3} w \; ; \; \frac{2\pi}{3} w = \pi n, \; n \in \overline{1,\infty}$$
$$w = \frac{3n}{2} \quad n \in \overline{1,\infty}$$
$$\lambda_n = \left(\frac{3n}{2}\right)^2 ; \; \varphi_n = \sin \frac{3n}{2}\varphi \; ; \; \|\varphi_n\|^2 = \pi/3$$

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \left(\frac{3n}{2}\right)^2 = 0$$
$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \left(\frac{3n}{2}\right)^2 R = 0$$
$$n = \overline{0,\infty} \quad r = e^t \quad R(r) \to y(t)$$
$$y'' - \left(\frac{3n}{2}\right)^2 y = 0$$
$$y = c_1 e^{\frac{3n}{2}t} + c_2 e^{-\frac{3n}{2}t}$$
$$R(r) = c_1 r^{\frac{3n}{2}} + \frac{c_2}{r^{\frac{3n}{2}}}$$
$$\Rightarrow c_2 = 0$$
С учетом естественных Г.У: $r \to 0$

$$R(r) = r^{\frac{3n}{2}}$$

(III) $u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\frac{3n}{2}} \sin \frac{3n}{2}\varphi$ Общее решение:

(IV) С учетом ГУ:

$$5\sin 3\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{3n}{2}\varphi \quad \Big| \sin\frac{3n}{2}\varphi$$

$$5\int_0^{2\pi/3} \underbrace{\sin 3\varphi \sin\frac{3n}{2}\varphi\, d\varphi}_{=I_1} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \pi/3 \text{ — норма}$$

$$I_1 = \frac{5}{2}\int_0^{2\pi/3} \cos\varphi\left(3-\frac{3n}{2}\right) - \cos\varphi\left(3+\frac{3n}{2}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{5}{2}\left[\frac{\sin\left(3-\frac{3n}{2}\right)\varphi}{3-\frac{3n}{2}} - \underbrace{\frac{\sin\left(3+\frac{3n}{2}\right)\varphi}{3+\frac{3n}{2}}}_{=0}\right]\Bigg|_0^{\frac{2\pi}{3}} =$$

$$= \frac{5}{2}\left[\frac{\frac{2}{3}\pi\sin\pi(2-n)\varphi}{\pi\frac{2}{3}\left(3-\frac{3n}{2}\right)} - \frac{\sin(2+n)\varphi}{3+\frac{3n}{2}}\right] =$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}\begin{cases}1, & n=2\\ 0, & n\neq 2\end{cases}$$

$$\frac{5}{\cancel{2}}\cdot\cancel{\frac{2\pi}{3}}\begin{cases}1, & n=2\\ 0, & n\neq 2\end{cases} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cdot\cancel{\frac{\pi}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_2 = 5 \quad ; A_n = 0 \ \forall n \neq 2$$

Ответ:

$$u = \cancel{X_n(x)}\ \Phi_n(\varphi) R_n(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\frac{3n}{2}} \sin\frac{3n}{2}\varphi =$$

$$= 5r^3 \sin 3\varphi$$

3.а. Степенной ряд для ф-ии Бесселя:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0 \qquad \nu\geqslant 0$$

$x=0$ особая точка.

Решение этого уравнения можно искать в виде обобщенного степенного ряда:

$$\boxed{y(x)=\sum_{m=0}^{\infty}(a_m)x^{\nu+m}} \quad a_0\neq 0;\ \nu=const$$

Подставим $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$

$$x^2\sum_{m=0}^{\infty}(\nu+m)(\nu+m+1)a_mx^{\nu+m-2}+x\sum_{m=0}^{\infty}(\nu+m)a_mx^{\nu+m+1}+$$

$$+(x^2-\nu^2)\sum_{m=0}^{\infty}a_mx^{\nu+m}=0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_m[(\nu+m)(\nu+m-1)+(\nu+m)+(x^2+\nu^2)]x^{\nu+m}=0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}a_m[(6+m)^2+(x^2-y^2)x^{6+m}=0 \qquad \nu\geqslant 0$$

$$a_0[(6^2-\nu^2)]x^6+a_0x^{6+2}+a_1[(6+1)^2-\nu^2]x^{6+1}+a_1x^{6+3}+$$

$$+a_2[(6+2)^2-y^2]x^{6+2}+a_2x^{6+4}+\ldots\neq 0$$

Приведем подобные:

$$a_0[6^2-\nu^2]x^6+a_1[(6+1)^2-y^2]x^{6+1}+[a_0+a_2[((6+2)^2+$$

$$+\nu^2]]x^{6+2}+\ldots=0\Rightarrow$$

$$a_0[6^2-\nu^2]=0\Rightarrow a_0\neq 0 \text{ значит } 6=\pm\nu$$

$$\Rightarrow a_1[(6+1)^2-\nu^2]=0 \quad 6=\pm\nu$$

$$a_1[(\pm\nu+1)^2-\nu^2]=0$$

$$a_1[\pm 2\nu+1]=0\Rightarrow\nu=\pm\frac{1}{2};\ \text{т.к. } \nu\geqslant 0 \text{ то } \nu=-1/2$$

не удовл.

Следовательно, $\nu = \frac{1}{2}$, тогда $a_1\left(\left(\frac{1}{2}+1\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = 0$

$\to a_m\left((6+m)^2 - \nu^2\right) + a_{m-2} = 0$; $a_{m-2}\ a_m \neq 0$

$(6+m)^2 - \nu^2 \neq 0$ при $6 = \pm\nu$

$(m+\nu)^2 - \nu^2 = 0$

$m^2 + 2m\nu = 0$

$-\nu = m/2$

$(m-\nu)^2 - \nu^2 = 0$

$m^2 - 2m\nu = 0$

$\nu = \frac{m}{2}$; $m \geq 0$

$\Downarrow$

$$(6+m)^2 - \nu^2 \neq 0$$

$$a_m = -\frac{a_{m-1}}{(6+m+\nu)(6+m-\nu)}$$

$\begin{cases} a_0 \neq 0 \\ a_1 = 0 \end{cases}$

$6 = \nu$; $m = 2K$; $K = 1, 2, 3 \ldots$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2 - 1(\nu+1)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^2 \cdot 2(\nu+2)} = \frac{(-1)^2 a_0}{(2^2)^2 \cdot 1 \cdot 2(\nu+1)(\nu+2)}$$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} K!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)}; \quad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2k} X^{6+2k}$$

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(y+1)}$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} 2^\nu K!(y+1)(y+2)(\nu+2)\cdots(\nu+k)} X^{2k+\nu}$$

$k! = \Gamma(k+1)$, используя свойство

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) = \Gamma(\nu+k+1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$ – Функция Бесселя порядка ν.

$$y_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$$ Порядок ν

$y_\nu(x)$ и $y_{-\nu}(x)$ – ЛНЗ при условии ν – целое.

их определитель Вронского

$$W = [y_\nu; y_{-\nu}] = \frac{C_\nu}{x}, \text{ где } C_\nu = \frac{-2\sin \pi\nu}{\pi}$$

Эти два решения образуют ФСР данного ДУ.

$$\text{ФСР } [y_\nu(x) \text{ и } y_{-\nu}(x)]$$

$x=0$

нуль порядка ν Полюс ν порядка.

3 b) $2u_{xx}-5u_{xy}+3u_{yy}-u_x+u_y+2x=0$

$2\lambda^2+5\lambda+3=0$ Гипербола

$D: 25-2\cdot3\cdot4=1$ ~~Парабола~~ (тип)

$\lambda_{1,2}=\frac{-5\pm1}{4}=-1;-3/2$ $a_{11}\lambda^2-2\lambda a_{12}+a_{22}=0$ Характеристич. ур-е.

$\lambda_1=\frac{dy}{dx}=-1$, $\lambda_2=\frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2}$ Ур-е характеристики

$dy=-dx$ $dy=-\frac{3}{2}dx$

$y=-x+c_1$ $y=-\frac{3}{2}x+c_2$

$c_1=\xi=y+x$ $c_2=\eta=y+\frac{3}{2}x$

$\eta-\xi=\frac{1}{2}x;$

$2x=4(\eta-\xi)$

$\xi_x=1$ $\eta_x=\frac{3}{2}$

$\xi_y=1$ $\eta_y=1$

$\xi_{xx}=0$ $\eta_{xx}=0$

$\xi_{xy}=0$ $\eta_{xy}=0$

$\xi_{yy}=0$ $\eta_{yy}=0$

$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=\frac{3}{2}u_\eta+u_\xi$

$u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y=u_\xi+u_\eta$

$u_{xx}=u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx}=$

$=\cancel{4}\,u_{\xi\xi}+3u_{\xi\eta}+\frac{9}{4}u_{\eta\eta}$

$u_{xy}=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+$

$+u_\eta\eta_{xy}=u_{\xi\xi}+\frac{5}{2}u_{\xi\eta}+\frac{3}{2}u_{\eta\eta}$

$u_{yy} = u_{\varepsilon\varepsilon} + 2u_{\varepsilon\eta} + u_{\eta\eta}$

Подставляем:

$2(u_{\varepsilon\varepsilon} + 3u_{\varepsilon\eta} + \frac{9}{4}u_{\eta\eta}) - 5(u_{\varepsilon\varepsilon} + \frac{5}{2}u_{\varepsilon\eta} + \frac{3}{2}u_{\eta\eta}) +$

$+ 3(u_{\varepsilon\varepsilon} + 2u_{\varepsilon\eta} + u_{\eta\eta}) \cancel{= 0} - \frac{3}{2}u_\eta - u_\varepsilon + u_\varepsilon + u_\eta + \cancel{2u = 0}$

$+ u(\eta - \varepsilon) = 0$

$2\cancel{u_{\varepsilon\varepsilon}} + \cancel{2}6u_{\varepsilon\eta} + \frac{9}{2}\cancel{u_{\eta\eta}} - 5\cancel{u_{\varepsilon\varepsilon}} + \frac{25}{2}u_{\varepsilon\eta} - \frac{15}{2}\cancel{u_{\eta\eta}} +$

$+ 3\cancel{u_{\varepsilon\varepsilon}} + 6u_{\varepsilon\eta} + 3\cancel{u_{\eta\eta}} - \frac{3}{2}u_\eta - \cancel{u_\varepsilon} + \cancel{u_\varepsilon} + u_\eta +$

$+ u(\eta - \varepsilon) = 0$

$\frac{49}{2}u_{\varepsilon\eta} = \frac{1}{2}u_\eta - u(\eta - \varepsilon)$

$\frac{49}{2}u_{\varepsilon\eta} = \frac{1}{2}u_\eta + u(\varepsilon - \eta)$ Канонический вид.

$u_{\varepsilon\eta} = F(\varepsilon, \eta, u, u_\varepsilon, u_\eta)$

$$u_{\varepsilon\eta} = \frac{1}{49}u_\eta + \frac{8}{49}(\varepsilon - \eta)$$