Емельянова А.А. РЛ2-31 Билет 7 стр1

№3

а) Функции $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ ортогональны на отрезке $[a, b]$, т.е. скалярное произведение $\int_a^b \varphi(x)\cdot\psi(x)\,dx = 0$

Рассмотрим систему функций на отрезке $[a, b]$ $\{\varphi_n(x)\}$, причем $\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx = \lambda_n > 0$, в пространстве функций, интегрируемых с квадратом $L_2[a, b]$

Если функции этой системы $\{\varphi_n(x)\}$ попарно ортогональны $\int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx = 0$ при $n \neq m$, то ее называют ортогональной системой функций.

В состав системы не входят ф-ции с $\lambda_n = 0$ и функции, тождественно равные нулю

Если $\lambda = 1$, то система нормальная

Ортогональная система с $\lambda = 1$ называется ортонормированной

Пусть система $\{\varphi_n(x)\}$ ортонормирована на $[a, b]$, функция $f(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$ $f(x) = \underline{c_0\varphi_0(x)} + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n + \ldots$

$n = \overline{0, \infty}$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$

чтобы найти c_n воспользуемся условием ортогональн. $\{\varphi_n(x)\}$

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b c_n\,\varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_m(x)\,dx = c_n\int_a^b \varphi_n(x)\cdot\varphi_n(x)\,dx$$

$\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx = \|\varphi_n\|^2$ норма в квадрате функции $\varphi_n(x)$

$$c_m = \frac{1}{\|\varphi_m\|^2}\int_a^b f(x)\,\varphi_m(x)\,dx = \frac{(f(x), \varphi_m(x))}{\|\varphi_m\|^2}$$

Ряд $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ с коэффициентами $c_n = \frac{(f, \varphi_m)}{\|\varphi_m\|^2} = \frac{1}{\lambda_m}\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$ называется обобщенным рядом Фурье, а коэф-ты — обобщенными коэф-ми Фурье

Емельянова А.А. РЛ2-31 стр 2

№3

в) $u_{xx} + 2u_{xy} + 10u_{yy} - 24u_x + 42u_y + 2x + 2y = 0$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} = -9 < 0 \Rightarrow$ ур-е эллиптического типа

$\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$ характеристическое уравнение

$D/4 = 1 - 10 = -9$ $\quad \lambda_1 = \frac{dy}{dx} \Rightarrow 1+3i = \frac{dy}{dx}$

$\lambda = 1 \pm 3i$ $\quad \Rightarrow^{т.к.}$ $\lambda_2 = \frac{dy}{dx}$

$dy = (1+3i)dx \Rightarrow \int dy = \int (1+3i)dx \Rightarrow y = (1+3i)x + c$

$c = y - x - 3ix$

Введем новые переменные

$\xi = \operatorname{Re} c = y - x$ $\qquad \xi_x = -1 \quad \xi_y = 1$

$\eta = \operatorname{Im} c = -3x$ $\qquad \eta_x = -3 \quad \eta_y = 0$

Якобиан перехода: $\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi(-1) - 3u_\eta$

$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi$

$u_{xx} = \frac{\partial(u_x)}{\partial x} = \frac{\partial(-u_\xi - 3u_\eta)}{\partial x} = u_{\xi\xi} + 3u_{\xi\eta} + 3u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta}$

$u_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_\xi}{\partial x} = -u_{\xi\xi} - 3u_{\xi\eta}$

$u_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = u_{\xi\xi}$

$x = -\frac{1}{3}\eta$

$y = \xi - \frac{1}{3}\eta$

$u_{\xi\xi} + 3u_{\xi\eta} + 3u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta} + 2(-u_{\xi\xi} - 3u_{\xi\eta}) + 10u_{\xi\xi} + 24(u_\xi + 3u_\eta) + 42(u_\xi) - \frac{2}{3}\eta + 2\xi - \frac{2}{3}\eta = 0$

$-u_{\xi\xi} + 9u_{\eta\eta} + 10u_{\xi\xi} + 66u_\xi + 72u_\eta - \frac{4}{3}\eta + 2\xi = 0$

$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = -\frac{22}{3}u_\xi - 8u_\eta + \frac{4}{27}\eta - \frac{2}{9}\xi$

Емельянова А.А. РЛ2-31

№1

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} & 0<x<1,\quad 0<t<\infty \\ u(x,0)=x(x-1) & u(0,t)=0 \\ u_t(x,0)=0 & u(1,t)=0 \end{cases}$$

Пусть $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)\not\equiv 0$, тогда $XT''=X''T \Rightarrow$

$$\frac{T''}{T}=\frac{X''}{X}=-\lambda$$

Решим задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=0 \\ X(1)=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} X(0)\cdot T(t)=0 \\ X(1)\cdot T(t)=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} X(0)=0 \\ X(1)=0 \end{matrix}$$

а) $\lambda=0$ $\begin{cases} X''=0 \\ X(0)=0 \\ X(1)=0 \end{cases}$ $\left.\begin{matrix} X=c_1x+c_2 \\ c_2=0 \\ c_1=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow X\equiv 0$ не с.ф. $\Rightarrow \lambda=0$ не с.з.

б) $\lambda=-\omega^2<0$

$$\begin{cases} X''-\omega^2X=0 \\ X(0)=0 \\ X(1)=0 \end{cases} \qquad X=c_1e^{\omega x}+c_2e^{-\omega x}$$

$$\begin{cases} 0=c_1+c_2 \\ 0=c_1e^{\omega}+c_2e^{-\omega} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\omega} & e^{-\omega} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\omega} & e^{-\omega} \end{vmatrix}=0$ дисперсионное уравнение

$e^{-\omega}-e^{\omega}=0$ не имеет корней при $\lambda=-\omega^2<0 \Rightarrow$

с-ма $\begin{cases} 0=c_1+c_2 \\ 0=c_1e^{\omega}+c_2e^{-\omega} \end{cases}$ не имеет ненулевых решений $\Rightarrow$

$X\equiv 0$ - не с.ф $\Rightarrow \lambda=-\omega^2<0$ не с.з.

в) $\lambda=\omega^2>0$

$$\begin{cases} X''+\omega^2X=0 \\ X(0)=0 \\ X(1)=0 \end{cases} \qquad X=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$$

$$\begin{cases} c_1=0 \\ c_2\sin\omega=0 \end{cases} \qquad \text{т.к. } \begin{cases} c_1=0 \\ c_2\neq 0 \end{cases}, \text{ то}$$

$\sin\omega=0$

$\omega=\pi n,\ n\in\mathbb{N}$

$X_n=\sin\pi nx$ с.ф. $\|X_n\|^2=\frac{1}{2}$

$\lambda_n=(\pi n)^2$, $n=\overline{1,\infty}$ с.з.

$$T''+(\pi n)^2 T=0$$

$$T_n = A_n \sin \pi n t + B_n \cos \pi n t, \quad n=\overline{1,\infty}$$

$$u = X(x)\,T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi n x)\left[A_n \sin\pi n t + B_n \cos \pi n t\right]$$

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi n x)\left[\pi n A_n \cos\pi n t - \pi n B_n \sin \pi n t\right]$$

подставим начальные условие

$$x(x-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi n x)\cdot B_n \qquad (*)$$

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi n x)\cdot \pi n \cdot A_n \Rightarrow A_n=0, \; n=\overline{1,\infty}$$

в ур-и (*) применим условие ортогональности для С.Ф. задачи Штурма-Лиувилля.

$$\int_0^1 x(x-1)\sin(\pi m x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \sin(\pi m x)\sin(\pi n x)\,B_n\,dx$$

при $n\neq m$ интеграл $=0$

при $n=m$

$$\int_0^1 x(x-1)\sin(n\pi x)\,dx = \int_0^1 B_n \sin^2(\pi n x)\,dx$$

$$\int_0^1 x(x-1)\sin(n\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi n}\left[\overset{\to 0}{\cancel{-\cos(n\pi x)\,x(x-1)\Big|_0^1}} + \int_0^1 \cos(\pi n x)\,d(x^2-x)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left[\int_0^1 (2x-1)\cos(\pi n x)\,dx\right] = \frac{1}{(\pi n)^2}\left[\overset{\to 0}{\cancel{\sin\pi n x\,(2x-1)\Big|_0^1}} - \int_0^1 2\sin(\pi n x)\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{(\pi n)^2}\cdot 2\cdot \frac{\cos(\pi n x)}{\pi n}\Big|_0^1 = \frac{2(\cos\pi n - 1)}{(\pi n)^3}$$

$$B_n = \frac{1}{\|X_n\|^2}\cdot\int_0^1 x(x-1)\sin(\pi n x)\,dx$$

$$B_n = 4\,\frac{\cos(\pi n)-1}{(\pi n)^3}$$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} 4\,\frac{\cos(\pi n)-1}{(\pi n)^3}\sin(\pi n x)\cos(\pi n t)$$

Емельянова А.А. РЛ2-31 стр5

№2

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0 & 0 \leq r < 3 \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \\ u(3,\varphi) = \cos^2\varphi - 3\sin\varphi \end{cases}$$

решение задачи рассмотрим в полярных координатах

пусть $u = R(r) \cdot \Phi(\varphi) \not\equiv 0$, тогда

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{du}{dr}\right] + \frac{\partial u}{r^2 \partial\varphi^2} + u = 0$$

$$\frac{\Phi}{r}\frac{d}{dr}\left[r\frac{dR}{dr}\right] + \frac{R}{r^2}\Phi'' + R\Phi = 0 \quad \Big| \cdot \frac{r^2}{R\Phi}$$

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dR}\left[r\frac{dR}{dr}\right] + r^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$$

1) $$\begin{cases} \Phi'' - \lambda\Phi = 0 \\ \Phi(0) = \Phi(2\pi) \\ \Phi'(0) = \Phi(2\pi) \end{cases}$$

а) $\lambda = 0$

$$\begin{cases} \Phi'' = 0 \\ \Phi(0) = \Phi(2\pi) \\ \Phi'(0) = \Phi'(2\pi) \end{cases} \quad \begin{cases} \Phi = c_1\varphi + c_2 \\ c_2 = 2\pi\varphi_1 + c_2 \\ c_1 = c_1 \end{cases} \quad \Phi' = c_2 \quad c_1 = 0, \quad c_2 \text{ - любое} \neq 0$$

$\Phi = e$ с.ф.

$\lambda = 0$ с.з.

б) $\lambda = -\omega^2 < 0$

$$\begin{cases} \Phi(0) = \Phi(2\pi) \\ \Phi'(0) = \Phi'(2\pi) \\ \Phi'' - \omega^2\Phi = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\Phi = c_1 e^{\omega\varphi} + c_2 e^{-\omega\varphi} \\ &\Phi' = \omega c_1 e^{\omega\varphi} - c_2\omega e^{-\omega\varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = c_1 e^{2\pi\omega} + c_2 e^{-2\pi\omega} \\ \omega c_1 - c_2\omega = \omega c_1 e^{2\pi\omega} - c_2\omega e^{-2\pi\omega} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 - e^{2\pi\omega} & 1 - e^{-2\pi\omega} \\ 1 - e^{2\pi\omega} & -(1 - e^{-2\pi\omega}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 - e^{2\pi\omega} & 1 - e^{-2\pi\omega} \\ 1 - e^{2\pi\omega} & -(1 - e^{-2\pi\omega}) \end{vmatrix} = 0 \qquad -2(1 - e^{-2\pi\omega})(1 - e^{2\pi\omega}) = 0$$

не имеет корней при $\lambda = -\omega^2 < 0$

$\Phi(\varphi) \equiv 0$ не с.ф   Емельянова А.А.   РЛ2-31

$\lambda = -\omega^2 < 0$ не с.з.

в) $\lambda = \omega^2 > 0$

$$\begin{cases} \Phi'' + \omega^2 \Phi = 0 \\ \Phi(0) = \Phi(2\pi) \\ \Phi'(0) = \Phi'(2\pi) \end{cases}$$

$$\Phi = c_1 \sin \omega\varphi + c_2 \cos \omega\varphi$$

$$\Phi' = c_1 \omega \cos\omega\varphi - c_2 \omega \sin\omega\varphi$$

$$\begin{cases} c_2 = c_1 \sin 2\pi\varphi + c_2 \cos 2\pi\varphi \\ c_1 \omega = c_1 \omega \cos 2\pi\omega - c_2 \omega \sin 2\pi\omega \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \sin 2\pi\omega & \cos 2\pi\omega - 1 \\ \cos 2\pi\omega - 1 & -\sin 2\pi\omega \end{vmatrix} = 0$$

$$-\sin^2 2\pi\omega - (\cos 2\pi\omega - 1)^2 = 0$$

$$-2 + 2\cos 2\pi\omega - 1 = 0$$

$$\cos 2\pi\omega = 1$$

$$2\pi\omega = 2\pi n, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

$$\omega = n$$

$\lambda_n = n^2$ с.з.

$$\Phi_n = \begin{cases} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{cases} \text{ с.ф.} \qquad \|\Phi_n\|^2 = \pi, \; n \neq 0 \qquad \|\Phi_0\|^2 = 2\pi$$

② $$r\frac{d}{dR}\left[r\frac{dR}{dr}\right] + n^2 R = n^2$$

$$r\frac{d}{dR}\left[r\frac{dR}{dr}\right] + [r^2 - n^2]R = 0$$ уравнение Бесселя целого порядка n

$$R(r) = c_1 J_n(r) + c_2 N_n(r)$$

добавим естественные ГУ в круге

$J_n(r)$ ограничен при $r \to 0$

$N_n(r)$ не ограничен при $r \to 0$ } $c_2 = 0$

Положим $c_1 = 1$

$$R_n(r) = J_n(r)$$

③ $$u = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(r)\left[A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right]$$

подставим ~~Г.У.~~ Г.У.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Y}_n(3)\left[A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right] = \cos^2\varphi - 3\sin\varphi$$

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)$$

применим условие ортогональности С.Ф. задачи Штурма-Лиувилля.

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos n\varphi \, d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos n\varphi \cdot \cos 2\varphi \, d\varphi - 3\int_0^{2\pi} \sin\varphi \cos n\varphi \, d\varphi = \mathcal{Y}_n(3) A_n \|\varphi_n\|^2$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin n\varphi \, d\varphi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin n\varphi \cdot \cos 2\varphi \, d\varphi - 3\int_0^{2\pi} \sin\varphi \sin n\varphi \, d\varphi = \mathcal{Y}_n(3) B_n \|\varphi_n\|^2$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos n\varphi \, d\varphi = -\frac{1}{2}\frac{\sin n\varphi}{n}\Big|_0^{2\pi} = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ \pi, & n = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin n\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\cos n\varphi\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos n\varphi \cdot \cos 2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left[\cos(n-2)\varphi + \cos(n+2)\varphi\right] d\varphi = \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(n-2)\varphi}{n-2} + \frac{\sin(n+2)\varphi}{n+2}\right]_0^{2\pi}$$