Задача 1 (*1 балл*)

Определите тип дифференциального уравнения, приведите его к каноническому виду, запишите общее решение, найдите решение задачи Коши.

1. $u_{xx} - 2x\,u_{xy} + x^2\,u_{yy} - u_y = 0;\quad u(0,y) = y^2,\ u_x(0,y) = y.$

2. $u_{xx} + 2(\sin x)u_{xy} + (\sin^2 x)u_{yy} + (\cos x)u_y = 0;\quad u(0,y) = y^2,\ u_x(0,y) = y^3.$

3. $y^4\,u_{xx} + 2y^2\,u_{xy} + u_{yy} - \dfrac{2}{y}\,u_y = 0;\quad u(x,1) = \dfrac{x^3}{3},\ u_y(x,1) = 2x.$

4. $4y^2\,u_{xx} + 2(1-y^2)u_{xy} - u_{yy} - \dfrac{4y}{1+y^2}\,u_x + \dfrac{2y}{1+y^2}u_y = 0;\quad u(x,1) = x,\ u_y(x,1) = 0.$

5. $y^2\,u_{xx} - 2y\,u_{xy} + u_{yy} - u_x = 0;\quad u(x,1) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2,\ u_y(x,1) = 0.$

6. $u_{xx} - 2(\cos x)u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} + (\sin x)u_y = 0;\quad u(0,y) = 0,\ u_x(0,y) = y^2.$

7. $y^2\,u_{xx} - 2y\,u_{xy} + u_{yy} + u_x - \dfrac{2}{y}\,u_y = 0;\quad u(x,1) = x^2,\ u_y(x,1) = x.$

8. $u_{xx} - 2(\sin x)u_{xy} - (\cos^2 x)u_{yy} - u_x + (\sin x - \cos x - 1)u_y = 0;\quad u(0,y) = 3y,\ u_x(0,y) = 5.$

9. $u_{xx} + 2(\sin x)u_{xy} + (\sin^2 x)u_{yy} - u_x - (\sin x - \cos x)u_y = 0;\quad u(0,y) = y^2,\ u_x(0,y) = y.$

10. $u_{xx} + 2(\cos x)u_{xy} - (\sin^2 x)u_{yy} - (\sin x)u_y = 0;\quad u(0,y) = y^2,\ u_x(0,y) = 1.$

11. $u_{xx} + 2x^2\,u_{xy} + x^4\,u_{yy} + u_x + (x^2 + 2x)u_y = 0;\quad u(0,y) = y^2,\ u_x(0,y) = y.$

12. $4y^3\,u_{xx} - y\,u_{yy} + 2y^3\,u_x + (1 + y^2)u_y = 0;\quad u(x,1) = x^2,\ u_y(x,1) = 0.$

13. $9y^5\,u_{xx} - y\,u_{yy} + 18y^5\,u_x + (2 - 6y^3)u_y = 0;\quad u(x,1) = 0,\ u_y(x,1) = x.$

14. $u_{xx} - 2(\sin x)u_{xy} - (\cos^2 x)u_{yy} - 2u_x + (2\sin x + 2 - \cos x)u_y = 0;\quad u(0,y) = \dfrac{y^2}{2},\ u_x(0,y) = 1.$

15. $-x\,u_{xx} + 4x^3\,u_{yy} + (1 - 4x^2)u_x + 8x^3\,u_y = 0;\quad u(1,y) = y,\ u_x(1,y) = 3.$

16. $y^2\,u_{xx} - 2y\,u_{xy} + u_{yy} - \dfrac{1}{y}\,u_y = 0;\quad u(x,1) = x,\ u_y(x,1) = x^2.$

17. $u_{xx} - 2(\sin x)u_{xy} - (\cos^2 x)u_{yy} + 2u_x - (2 + \cos x + 2\sin x)u_y = 0;\quad u(0,y) = 2y,\ u_x(0,y) = 1.$

18. $u_{xx} + 2x^2\,u_{xy} + x^4\,u_{yy} + 2x\,u_y = 0;\quad u(0,y) = y,\ u_x(0,y) = y^2.$

19. $u_{xx} + 2x^2\,u_{xy} + x^4\,u_{yy} - u_x + (2x - x^2)u_y = 0;\quad u(0,y) = \sin y,\ u_x(0,y) = y.$

20. $y^2\,u_{xx} + 2y\,u_{xy} + u_{yy} + (1 - y)u_x - u_y = 0;\quad u(x,0) = x^2,\ u_y(x,0) = x.$

21. $-x\,u_{xx} + 9x^5\,u_{yy} + (2 - 6x^3)u_x + 18x^5\,u_y = 0;\quad u(1,y) = 0,\ u_x(1,y) = y.$

22. $y^2\,u_{xx} + 2y\,u_{xy} + u_{yy} + (1 + y)u_x + u_y = 0;\quad u(x,0) = -x,\ u_y(x,0) = \sin x.$

23. $u_{xx} - 2(\sin x)u_{xy} - (\cos^2 x)u_{yy} + u_x + (1 - \cos x - \sin x)u_y = 0;\quad u(0,y) = y,\ u_x(0,y) = 0.$

24. $y^2\,u_{xx} + 2y\,u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0;\quad u(x,0) = x^3,\ u_y(x,0) = -x.$

25. $(\sin^2 y)u_{xx} + 2(\cos y)u_{xy} - u_{yy} - (\sin y)u_x = 0;\quad u(x,0) = x^2,\ u_y(x,0) = 1.$

26. $u_{xx} - 2x\,u_{xy} + x^2\,u_{yy} - u_x + (x - 1)u_y = 0;\quad u(0,y) = y,\ u_x(0,y) = y^2.$

27. $(3 + \sin^2 y)u_{xx} - 2(\cos y)u_{xy} - u_{yy} + (\sin y)u_x = 0;\quad u(x,0) = x,\ u_y(x,0) = x^2.$

28. $9y^5\,u_{xx} - y\,u_{yy} + 6y^5\,u_x + (2 + 2y^3)u_y = 0;\quad u(x,1) = 2x,\ u_y(x,1) = 0.$

29. $(\cos^2 y)u_{xx} - 2(\sin y)u_{xy} - u_{yy} + (1 - \cos y + \sin y)u_x + u_y = 0;\quad u(x,0) = x^2,\ u_y(x,0) = 0.$

30. $-x\,u_{xx} + 4x^3\,u_{yy} + (1 + x^3)u_x + 2x^3\,u_y = 0;\quad u(1,y) = y^2,\ u_x(1,y) = 0.$

Задача 2 (*1 балл*)

Для задачи Штурма — Лиувилля с оператором L на отрезке $[a, b]$ и заданными граничными условиями найти собственные числа и собственные функции.

Задача 3 (*1 балл*)

Заданную функцию разложить в ряд по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля (см. предыдущую задачу).

Вар.	L	**Гр. условия**	$[a, b]$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	$-d^2/dx^2+I$	$u(a)=u(b)=0$	$[0, \frac{\pi}{3}]$	$\sin 6x$	x^2-1	$\cos 2x$
2	$-d^2/dx^2+2I$	$u'(a)=u'(b)=0$	$[0, \pi]$	$\cos 2x$	x^2-1	$\sin 6x$
3	$-d^2/dx^2+3I$	$u'(a)=u(b)=0$	$[0, \pi/6]$	$\cos 15x$	x^2-1	$\sin 5x$
4	$-d^2/dx^2+4I$	$u(a)=u'(b)=0$	$[0, \pi/4]$	$\sin 14x$	x^2-1	$\cos 4x$
5	$-d^2/dx^2+I$	$u(a)=u(b)=0$	$[0, 2\pi/3]$	$\sin 3x$	x^2-1	$\cos 3x$
6	$-d^2/dx^2+2I$	$u'(a)=u'(b)=0$	$[0, 7\pi/6]$	$\cos 6x$	x^2-1	$\sin x$
7	$-d^2/dx^2+3I$	$u'(a)=u(b)=0$	$[0, \pi/4]$	$\cos 10x$	x^2-1	$\sin 10x$
8	$-d^2/dx^2+4I$	$u(a)=u'(b)=0$	$[0, \pi/2]$	$\sin 7x$	x^2-1	$\cos 3x$
9	$-d^2/dx^2+I$	$u(a)=u(b)=0$	$[0, 3\pi/4]$	$\sin 4x$	x^2-1	$\cos 5x$
10	$-d^2/dx^2+2I$	$u'(a)=u'(b)=0$	$[0, 5\pi/4]$	$\cos 4x$	x^2-1	$\sin 2x$
11	$-d^2/dx^2+3I$	$u'(a)=u(b)=0$	$[0, \pi/2]$	$\cos 5x$	x^2-1	$\sin 5x$
12	$-d^2/dx^2+4I$	$u(a)=u'(b)=0$	$[0, 3\pi/2]$	$\sin 3x$	x^2-1	$\cos x$
13	$-d^2/dx^2+I$	$u(a)=u(b)=0$	$[0, 5\pi/6]$	$\sin 6x$	x^2-1	$\cos 6x$
14	$-d^2/dx^2+2I$	$u'(a)=u'(b)=0$	$[0, 4\pi/3]$	$\cos 3x$	x^2-1	$\sin 3x$
15	$-d^2/dx^2+3I$	$u'(a)=u(b)=0$	$[0, 3\pi/2]$	$\cos x$	x^2-1	$\sin 7x$
16	$-d^2/dx^2+4I$	$u(a)=u'(b)=0$	$[0, \pi/6]$	$\sin 21x$	x^2-1	$\cos 8x$
17	$-d^2/dx^2+I$	$u(a)=u(b)=0$	$[0, \pi/3]$	$\sin 9x$	x^2-1	$\cos 3x$
18	$-d^2/dx^2+2I$	$u'(a)=u'(b)=0$	$[0, \pi]$	$\cos 4x$	x^2-1	$\sin 4x$
19	$-d^2/dx^2+3I$	$u'(a)=u(b)=0$	$[0, \pi/6]$	$\cos 21x$	x^2-1	$\sin 7x$
20	$-d^2/dx^2+4I$	$u(a)=u'(b)=0$	$[0, \pi/6]$	$\sin 15x$	x^2-1	$\cos 5x$
21	$-d^2/dx^2+I$	$u(a)=u(b)=0$	$[0, 2\pi/3]$	$\sin 6x$	x^2-1	$\cos 2x$
22	$-d^2/dx^2+2I$	$u'(a)=u'(b)=0$	$[0, \pi/3]$	$\cos 12x$	x^2-1	$\sin 12x$
23	$-d^2/dx^2+3I$	$u'(a)=u(b)=0$	$[0, \pi/4]$	$\cos 14x$	x^2-1	$\sin 7x$
24	$-d^2/dx^2+4I$	$u(a)=u'(b)=0$	$[0, \pi/4]$	$\sin 10x$	x^2-1	$\cos 5x$
25	$-d^2/dx^2+5I$	$u(a)=u(b)=0$	$[0, \pi]$	$\sin 3x$	x^2-1	$\cos 3x$
26	$-d^2/dx^2+6I$	$u'(a)=u'(b)=0$	$[0, 5\pi/3]$	$\cos 3x$	x^2-1	$\sin 3x$
27	$-d^2/dx^2+7I$	$u'(a)=u(b)=0$	$[0, \pi/2]$	$\cos 7x$	x^2-1	$\sin x$
28	$-d^2/dx^2+8I$	$u(a)=u'(b)=0$	$[0, \pi/2]$	$\sin 5x$	x^2-1	$\cos 10x$
29	$-d^2/dx^2+I$	$u(a)=u(b)=0$	$[0, 5\pi/3]$	$\sin 3x$	x^2-1	$\cos 6x$
30	$-d^2/dx^2+2I$	$u'(a)=u'(b)=0$	$[0, 7\pi/4]$	$\cos 4x$	x^2-1	$\sin 4x$