Вариант 1

Задача 1 (*1 балл*)**.** Вычислить линейный интеграл $\int\limits_L (x^2+y^2-2Rx)\,dx + R(x+y)\,dy$ вдоль дуги окружности $(x-R)^2+y^2=R^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(R;R)$.

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить $\oint x^3\,dy - y^3\,dx$ вдоль окружности $(x-R)^2+y^2=R^2$ в положительном направлении. Преобразовать интеграл в двойной и вычислить, убедившись в равенстве двух значений.

Задача 3 (*5 баллов*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).
Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z)=\{x^2;x;xz\}$; $M_0(1;1;2)$; V: $z=x^2+y^2$, $z=1$, $x=0$, $y=0$ ($x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$); Σ — часть поверхности $y=0$, вырезаемая поверхностями $z=x^2+y^2$, $z=1$, $x=0$ ($x\geq 0$); L: $z=x^2+y^2$, $z=1$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Найти все разложения заданной функции $f(z)=\dfrac{1}{z^2(z-1)}$ по степеням $z-1$ и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.
2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \dfrac{dz}{1+z^2} = \dfrac{\pi}{2} + \int\limits_\infty^z \dfrac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Найти все особые точки заданной функции $f(z)=\dfrac{e^z}{(z^2+\pi^2)^2}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\oint\limits_C \dfrac{dz}{(z^2+1)^2}$ $\quad C$: $|z+i|=1$

Вариант 2

Задача 1 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\int\limits_L yz\,dx + z\sqrt{9-y^2}\,dy + xyz\,dz$ вдоль дуги L винтовой линии $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = \dfrac{2t}{\pi}$ от точки A пересечения кривой с плоскостью xOy до точки B ее пересечения с плоскостью $z = 4$.

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить $\oint x^3\,dy - y^3\,dx$ вдоль эллипса $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ в положительном направлении. Преобразовать интеграл в двойной и вычислить, убедившись в равенстве двух значений.

Задача 3 (*5 баллов*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0;
в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).
Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{xy; 1; z\}$; $M_0(0;2;1)$; V: $x^2+y^2+z^2 = 4$, $z = 0$ $(z \geq 0)$; Σ — часть поверхности $x^2+y^2+z^2 = 4$, вырезаемая поверхностями $z = 0$ ($z > 0$, нормаль внешн.); L: $y^2+z^2 = 4$, $z = 0$ $(z \geq 0)$, $x = 0$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Найти все разложения заданной функции $f(z) = \left(\dfrac{\sin z}{z}\right)^3$ по степеням z и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.
2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \dfrac{dz}{1+z^2} = \dfrac{\pi}{2} + \int\limits_\infty^z \dfrac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Найти все особые точки заданной функции $f(z) = z^5 \sin\dfrac{1}{z^2}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\oint\limits_C \dfrac{(z+2)^2 e^z \sin\pi z\,dz}{z-2}$ $\quad C$: $|z-2| = 1$

Вариант 3

Задача 1 (*1 балл*). Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{(-1;4)}^{(1;1)} \frac{dx+dy}{(x+y-1)^2}$.

Задача 2 (*1 балл*). Применяя формулу Грина, вычислить $\displaystyle\oint\limits_C (x^2-2xy)\,dx+(y^2-2xy)\,dy$, где C — контур с положительным направлением обхода, составленный из отрезка прямой от точки $A(3;0)$ до точки $B(1;2)$, параболой $y=2x^2$ от точки $B(1;2)$ до точки $O(0;0)$ и отрезка оси OX от точки $O(0;0)$ до точки A. Проверить результат с помощью непосредственного вычисления криволинейного интеграла.

Задача 3 (*5 баллов*). В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z)=\{xz;yz;z^2\}$; $M_0(5;2;3)$; V: $x^2+y^2+z^2=9$, $z=2$ $(z\geq 2)$; Σ — часть поверхности $z=2$, вырезаемая поверхностями $x^2+y^2+z^2=9$ (в направлении уменьшения z); L: $y=z$, $y=2z$, $z=1$, $x=2$.

Задача 4 (*1 балл*). Найти все разложения заданной функции $f(z)=\dfrac{z}{z^2-5z+4}$ по степеням $z-2$ и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.
2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\displaystyle\operatorname{arctg} z=\int\limits_0^z \frac{dz}{1+z^2}=\frac{\pi}{2}+\int\limits_{\infty}^z \frac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*1 балл*). Найти все особые точки заданной функции $f(z)=\dfrac{1}{(1+z)^2}\cos\dfrac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*1 балл*). Вычислить интеграл $\displaystyle\oint\limits_C \frac{dz}{(z^2-1)^3}\quad C\colon |z-1|=1$

Вариант 4

Задача 1 (*1 балл*). Вычислить интеграл $\int\limits_{(0;0)}^{(0;4)} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy$ вдоль параболы $y = \dfrac{1}{2}x^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(2;2)$ и далее по прямой от точки A до точки $B(0;4)$.

Задача 2 (*1 балл*). Вычислить $\oint\limits_L x\,dy - y\,dx$ по контуру, образованному осью Ox и первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (направление обхода положительное). Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 3 (*5 баллов*). В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{2x; 2y; xz\}$; $M_0\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{3}; 1\right)$; V: $y = x^2$, $y = 4x^2$, $y = 1$, $z = y$, $z = 0$ $(x \geq 0)$; Σ — часть поверхности $y = x^2$, вырезаемая поверхностями $z = 0$, $y = z$, $y = 1$; L: $x = 0$, $z = 0$, $x^2 + z^2 = 1$, $y = 3$.

Задача 4 (*1 балл*). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \dfrac{z}{\sqrt[3]{z^3 + 3z^2 + 3z}}$ по степеням $z + 1$ и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.
2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \dfrac{dz}{1+z^2} = \dfrac{\pi}{2} + \int\limits_\infty^z \dfrac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*1 балл*). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z}{(z^2 + \pi^2)^2}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*1 балл*). Вычислить интеграл $\oint\limits_C \dfrac{z^3\,dz}{(z+1)^3(z-2)}$ $\quad C$: $|z - 2| = 2$

Вариант 5

Задача 1 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\int\limits_L x\,dy - y\,dx$ вдоль первой арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ от точки $A(2\pi a; 0)$ до точки $O(0; 0)$ и далее вдоль прямой от точки O до точки $B(-\pi a; 2\pi a)$.

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить $\oint\limits_C (x + y)\,dx - (x - y)\,dy$ по контуру C, образованному дугой параболы $y = 3(x - 1)^2$ от точки $A(1; 0)$ до точки $B(3; 12)$, отрезком прямой от точки B до точки $O(0; 0)$ и отрезком оси Ox от точки O до точки A. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 3 (*5 баллов*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{3x^2; -2x^2y; 1 - 2x\}$; $M_0(1; 2; 0)$; V: $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $(z \geq 0)$; Σ — часть поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ $(z \geq 0)$, вырезаемая поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (нормаль внешняя); L: $x = y$, $x = -y$, $x = 1$, $z = 0$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Найти все разложения заданной функции $f(z) = \dfrac{z + 2}{(z^2 + 2z + 5)^2}$ по степеням $z + 1$ и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \dfrac{dz}{1 + z^2} = \dfrac{\pi}{2} + \int\limits_\infty^z \dfrac{d\,z}{1 + z^2}$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \dfrac{e^{1/z}}{1 - z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\oint\limits_C \dfrac{(z^2 + 1)}{z^3 + 1}\,dz \quad C\colon |z| = 2$

Вариант 6

Задача 1 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{(-1;-3)}^{(3;1)} \frac{dx-dy}{(x-y-1)^2}$.

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить $\displaystyle\oint\limits_L (x+y)\,dx-(x-y)\,dy$ вдоль окружности $x^2+(y-R)^2=R^2$, проходимой в положительном направлении. Преобразовать этот интеграл в двойной, вычислить и убедиться в равенстве двух интегралов.

Задача 3 (*5 баллов*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z)=\{x^2;x^2y;(x-2)z)\}$; $M_0\left(\frac{1}{2};0;3\right)$; V: $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=1$; Σ — часть поверхности $x^2+y^2=1$, вырезаемая поверхностями $z=0$, $z=1$; L: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$, $y=0$ $(y\geq 0)$, $z=-1$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Найти все разложения заданной функции $f(z)=\dfrac{z}{(z^2-1)^3}$ по степеням $z+1$ и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.
2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\displaystyle\operatorname{arctg} z=\int\limits_0^z \frac{dz}{1+z^2}=\frac{\pi}{2}+\int\limits_\infty^z \frac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Найти все особые точки заданной функции $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)^2}\sin\dfrac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\displaystyle\oint\limits_C \frac{(z^2+1)\,dz}{z^2(z+2)^2}\quad C\colon |z|=1$

Вариант 7

Задача 1 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\int\limits_{(1;1)}^{(5;5)} ye^{-x}\,dx + (10 - e^{-x})\,dy$ по формуле Ньютона — Лейбница, отыскав предварительно функцию по её полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла.

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить $\oint a^2x\,dy - b^2y\,dx$ вдоль эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ с положительным направлением обхода. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 3 (*5 баллов*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{xz; yz; z^2 - 1\}$; $M_0\left(-1; -1; \dfrac{1}{4}\right)$; V: $x+y+z=1$, $x-y+z=1$, $x=0$, $z=0$; Σ — часть поверхности $x+y+z=1$, вырезаемая поверхностями $x=0$, $y=0$, $z=0$; L: $y=x^2$, $x=1$, $y=0$, $z=2$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Найти все разложения заданной функции $f(z) = \dfrac{\sin z}{z - \pi/4}$ по степеням $z - \pi/4$ и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \dfrac{dz}{1+z^2} = \dfrac{\pi}{2} + \int\limits_{\infty}^{z} \dfrac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z^2 - \pi^2)^2}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\oint\limits_C z^2 e^{-1/z} dz \quad C\colon |z| = 1$

Вариант 8

Задача 1 (*1 балл*). Вычислить интеграл $\int\limits_{(-1;-1)}^{(0;1)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$ по двум путям: а) произвольной кривой, оставляющей начало координат слева; б) произвольной кривой, оставляющей начало координат справа.

Задача 2 (*1 балл*). Вычислить $\oint\limits_C e^x xy\,dx - e^y(x+y)\,dy$ вдоль квадрата с вершинами в точках $A(2;2)$, $B(-2;2)$, $C(-2;-2)$, $D(2;-2)$, проходимого в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 3 (*5 баллов*). В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{x^3; y^3; xz\}$; $M_0(1;2;5)$; V: $9 - z = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0)$; Σ — часть поверхности $9 - z = x^2 + y^2$, вырезаемая поверхностями $z = 0$; L: $z = 0$, $z = x$, $z = 2 - x$, $y = 2$.

Задача 4 (*1 балл*). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{\sqrt[3]{7 + 3z - 3z^2 + z^3}}{z-1}$ по степеням $z - 1$ и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int\limits_\infty^z \frac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*1 балл*). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{1}{1-z} \sin\frac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*1 балл*). Вычислить интеграл $\oint\limits_C \frac{z^3\,dz}{(z-1)^3(z+2)}$ $\quad C$: $|z-1| = 2$

Вариант 9

Задача 1 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\int\limits_{(0;1)}^{(4;0)}(y^2+2)\,dx+yx\,dy$ вдоль параболы $y^2=-\dfrac{1}{2}(x-2)$ от точки $A(0;1)$ до точки $B(2;0)$ и далее по верхней части окружности $(x-3)^2+y^2=1$ до точки $C(4;0)$.

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить $\oint\limits_C xy\,dx+(x+y)\,dy$ по контуру, образованному верхней частью астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ и отрезком оси Ox (направление обхода положительное). Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 3 (*5 баллов*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z)=\{yx;2y;-z\}$; $M_0(3;5;-1)$; V: $y^2=1-z$ $y=0$, $z=0$ $x=0$, $x=1$ $(y\geq 0)$; Σ — часть поверхности $y^2=1-z$, вырезаемая поверхностями $x=0$, $x=1$, $y=0$, $z=0$; L: $x=0$ $y=0$, $x=1$, $y=1$, $z=0$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Найти все разложения заданной функции $f(z)=\dfrac{z-1}{\sqrt[3]{z^3-3z^2+3z}}$ по степеням $z-1$ и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\operatorname{arctg} z=\int\limits_0^z\dfrac{dz}{1+z^2}=\dfrac{\pi}{2}+\int\limits_\infty^z\dfrac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Найти все особые точки заданной функции $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z^2)}\cos\dfrac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\oint\limits_C\dfrac{e^{iz}z\,dz}{z^2+1}\quad C\colon\ |z-i|=1$

Вариант 10

Задача 1 (*1 балл*). Вычислить интеграл $\int\limits_{(1;3)}^{(5;1)} \frac{dx+dy}{(\frac{x}{2}+y-2)^2}$ вдоль ломаной, отрезки которой параллельны координатным осям.

Задача 2 (*1 балл*). Вычислить $\oint\limits_L (x-y)\,dx + xy\,dy$ вдоль контура, образованного верхней частью астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ и нижней частью окружности $x^2+y^2=a^2$ (направление обхода положительное).

Задача 3 (*5 баллов*). В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0;
в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).
Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \left\{\frac{y^2}{2}; 1; \frac{zy^2}{2}\right\}$; $M_0(0;1;2)$; V: $y^2+x^2 = 1-z$, $z=0$, $x=y$, $x=-y$; Σ — часть поверхности $x^2+y^2=1-z$, вырезаемая поверхностями $z=0$ $(z \geq 0)$; L: $y = \frac{2}{x}$, $x=1$, $y=1$, $z=2$.

Задача 4 (*1 балл*). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{1}{z(z^2-4)}$ по степеням $z+2$ и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.
2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int\limits_\infty^z \frac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*1 балл*). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{(z^2+\pi^2)^3}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*1 балл*). Вычислить интеграл $\oint\limits_C \frac{e^{iz} z\,dz}{z^2+1}$ $\quad C$: $|z-i| = 1$

Вариант 11

Задача 1 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\int\limits_{(2;2)}^{(1;5)} \left(\frac{y^2-1}{y} - \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(\frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{y^2}\right) dy$.

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить $\oint\limits_L -x^2y\,dx + xy^2\,dy$, где L — окружность $(x-1)^2+y^2=1$, которая обходится против часовой стрелки. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 3 (*5 баллов*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).
Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{y; y^2; zy\}$; $M_0(5;3;1)$; V: $x+\frac{y}{2}+z=1$, $y=0$, $x=0$, $z=0$; Σ — часть поверхности $x+\frac{y}{2}+z=1$, вырезаемая поверхностями $x=0$, $y=0$, $z=0$; L: $\rho = 2\cos\varphi$, $z=1$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{1}{z(z^2-1)}$ по степеням $z+1$ и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.
2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int\limits_\infty^z \frac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{1}{1+z}\,\operatorname{sh}\frac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\oint\limits_C z\cos\frac{1}{z}\,dz \quad C\colon |z|=2$

Вариант 12

Задача 1 (*1 балл*). Вычислить интеграл $\int\limits_{(0;0)}^{(2;3)} \frac{xdx+ydy}{\sqrt{2+x^2+y^2}}$, отыскав функцию $U(x,y)$ по её полному дифференциалу и использовав формулу Ньютона — Лейбница.

Задача 2 (*1 балл*). Вычислить $\oint\limits_L (x^2+2y)dx - xydy$ вдоль эллипса $\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, проходимого в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 3 (*5 баллов*). В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z)=\{yx;y^3;z^3\}$; $M_0(7;1;-1)$; V: $x^2+y^2=4$, $z=2$, $z=4$; Σ — часть поверхности $z=4$, вырезаемая поверхностями $x^2+y^2=4$; L: $x^2+y^2=4$, $x=0$ $y=0$, $z=4$ ($x\geq 0$, $y\geq 0$).

Задача 4 (*1 балл*). Найти все разложения заданной функции $f(z)=\frac{\sin^2 z}{(z-\pi/8)^2}$ по степеням $z-\pi/8$ и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\operatorname{arctg} z=\int\limits_0^z \frac{dz}{1+z^2}=\frac{\pi}{2}+\int\limits_\infty^z \frac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*1 балл*). Найти все особые точки заданной функции $f(z)=\frac{1}{z(1+z^2)}\operatorname{ch}\frac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*1 балл*). Вычислить интеграл $\oint\limits_C \frac{e^{-iz}(1-z^2)\,dz}{1+z^2}$ $\quad C$: $|z+i|=1$

Вариант 13

Задача 1 (*1 балл*). Вычислить интеграл $\int\limits_{(-2;0)}^{(6;4)} (x^2+2y)\,dx - xy\,dy$ вдоль нижней полуокружности $x^2+y^2=4$ от точки $A(-2;0)$ до точки $B(2;0)$ и далее по прямой от точки B до точки $C(6;4)$.

Задача 2 (*1 балл*). С помощью формулы Грина вычислить разность между интегралами

$$\int\limits_{AmB} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy \quad \text{и} \quad \int\limits_{AnB} (x+y)^2\,dx - (x-y)^2\,dy,$$

где AmB — отрезок прямой между точками $A(0;0)$ и $B(1;1)$, AnB — дуга параболы $y=x^2$, соединяющая те же точки.

Задача 3 (*5 баллов*). В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{xz; z; z^2\}$; $M_0\left(0; -1; \frac{1}{3}\right)$; V: $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=3z$; Σ — часть поверхности $x^2+y^2+z^2=4$, вырезаемая поверхностями $x^2+y^2=3z$; L: $y^2+z^2=2$, $x=3$.

Задача 4 (*1 балл*). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \dfrac{z+4}{(z^3+6z^2+12z)^2}$ по степеням $z+2$ и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.
2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \dfrac{dz}{1+z^2} = \dfrac{\pi}{2} + \int\limits_\infty^z \dfrac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*1 балл*). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z^2-\pi^2)^3}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*1 балл*). Вычислить интеграл $\oint\limits_C \dfrac{(z^3+1)\,dz}{(z^2+1)^2}$ $\quad C$: $|z|=2$

Вариант 14

Задача 1 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\int\limits_{(a;0)}^{(-a;0)} x\,dx + (x+y)\,dy$ вдоль астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ от точки $A(a;0)$ до точки $B(0;a)$ и далее по прямой от точки B до точки $C(-a;0)$.

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить $\oint\limits_C \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx + y\big(xy + \ln(x + \sqrt{1+x^2+y^2})\big)\,dy$ вдоль окружности $x^2+y^2 = R^2$ (направление обхода положительное).

Задача 3 (*5 баллов*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0;
в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).
Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{z; yx^2z; x^2\}$; $M_0\Big(3;0;\dfrac{1}{3}\Big)$; V: $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=1$, $z=0$, $z=y^2$; Σ — часть поверхности $y=z$, вырезаемая поверхностями $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$; L: $y=\dfrac{1}{x}$, $x=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{1}{2}$, $z=3$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Найти все разложения заданной функции $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z^2+4)}$ по степеням z и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.
2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \dfrac{dz}{1+z^2} = \dfrac{\pi}{2} + \int\limits_\infty^z \dfrac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}\,e^{1/z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\oint\limits_C \dfrac{\operatorname{sh} z\,dz}{(z^2+\pi^2)^2}$ $\quad C$: $|z - \pi i| = \pi$

Вариант 15

Задача 1 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{(-1;-1)}^{(3;2)} \frac{dx-2dy}{(x-2y+2)^2}$.

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить $\displaystyle\oint\limits_C y^2dx - x^2dy$ вдоль контура, образованного прямыми $x+y=-1$, $x=0$, $y=0$, который обходится в положительном направлении. Результат проверить по формуле Грина.

Задача 3 (*5 баллов*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{1; y^2; xz\}$; $M_0\left(-1;1;\frac{1}{4}\right)$; V: $x^2+y^2=2z^2$, $z=1$, $z=\sqrt{2}$, $x=0$ $(x \geq 0)$; Σ — часть поверхности $x^2+y^2=2z^2$, вырезаемая поверхностями $z=1$, $z=\sqrt{2}$, $x=0$, $y=0$; L: $x^2+(z-1)^2=1$, $x=0$ $(x\geq 0)$, $y=-1$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Найти все разложения заданной функции $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(16-12z+6z^2-z^3)^2}}$ по степеням $z-2$ и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\displaystyle\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int\limits_\infty^z \frac{dz}{1+z^2}$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}\,\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\displaystyle\oint\limits_C \frac{e^z dz}{(z^2-1)^2}$ $\quad C\colon |z+1|=1$

Вариант 16

Задача 1 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\int\limits_L 3x^2y\,dx + y\,dy$ вдоль дуги кривой $y = (1-x)\sqrt{x}$ между точками O и A её пересечения с осью Ox и далее по нижней части окружности $(x-2)^2 + y^2 = 1$ до точки $B(3;0)$.

Задача 2 (*1 балл*)**.** Используя формулу Грина, вычислить $\oint\limits_C (e^x \sin y - y)\,dx + (e^x \cos y - 1)\,dy$ по контуру, состоящему из верхней полуокружности $(x-1)^2 + y^2 = 1$ и отрезков прямых от точки $O(0;0)$ до точки $A(1;-1)$ и далее до точки $B(2;0)$. Результат проверить, вычисляя интеграл непосредственно.

Задача 3 (*5 баллов*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0;
в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).
Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{zy; x^2z; yzx^2\}$; $M_0(-1;2;5)$; $V\colon\ 5 - z = x^2 + y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ $(x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0)$; Σ — часть поверхности $x + y + z = 1$, вырезаемая поверхностями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; $L\colon\ 5 - z = x^2$, $x = 0$, $y = 10$, $z = 0$ $(x \geq 0,\ z \geq 0)$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Найти все разложения заданной функции $f(z) = \dfrac{\cos^2 z}{(z+\pi/8)^2}$ по степеням $z + \pi/8$ и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.
2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \dfrac{dz}{1+z^2} = \dfrac{\pi}{2} + \int\limits_\infty^z \dfrac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \dfrac{z^2+4}{(z^2+3z+2)^2}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\oint\limits_C \dfrac{\sin^2 z\,dz}{(z^2-\pi^2/4)^2}$ $\quad C\colon\ |z+\pi/2| = 1$

Вариант 17

Задача 1 (*1 балл*). Вычислить интеграл $\int\limits_L (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy$ вдоль четверти эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ от точки $A(a;0)$ до точки $B(0;b)$ и далее вдоль прямой до точки $C(-2a;0)$.

Задача 2 (*1 балл*). Вычислить $\oint\limits_L x^2\,dx + xy\,dy$ вдоль контура, образованного прямыми $x-y=1$, $2y-x=1$, $x+y=-1$ и проходимого в положительном направлении. Результат проверить с помощью формулы Грина.

Задача 3 (*5 баллов*). В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z)=\{xy;y^2;yz^2\}$; $M_0(-1;-2;2)$; V: $x^2+y^2=2z$, $x^2+y^2=4$, $x=y$, $z=0$, $y=0$; Σ — часть поверхности $z=2$, вырезаемая поверхностями $x^2+y^2=4$, $y=0$ $(y\geq 0)$; L: $y=-1$, $y=2x-1$, $y=-2x+3$, $z=0$.

Задача 4 (*1 балл*). Найти все разложения заданной функции $f(z)=\frac{z}{(z^2-4)^2}$ по степеням $z-2$ и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\operatorname{arctg} z=\int\limits_0^z \dfrac{dz}{1+z^2}=\dfrac{\pi}{2}+\int\limits_\infty^z \dfrac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*1 балл*). Найти все особые точки заданной функции $f(z)=\frac{1}{1-z^2}\,e^{1/z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*1 балл*). Вычислить интеграл $\oint\limits_C \frac{e^{iz}dz}{z^2+1}$ $\quad C$: $|z|=2$

Вариант 18

Задача 1 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\int\limits_{(2;1)}^{(4;3)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}+y\right)dx+\left(x+\frac{1}{y^2}-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)dy.$

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить $\oint\limits_C x\,dx+(x+y)\,dy$ вдоль окружности $x^2+y^2=2x$ (направление обхода положительное). Результат проверить с помощью формулы Грина.

Задача 3 (*5 баллов*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z)=\{2z;xyz;xy\}$; $M_0(5;0;3)$; V: $y^2+4z^2=1$, $z=0$, $y=\frac{1}{2}$, $x=1$, $x=2$ $(z\geq 0,\ y\geq\frac{1}{2})$; Σ — часть поверхности $x=2$, вырезаемая поверхностями $y^2+4z^2=1$, $z=0$, $y=\frac{1}{2}$; L: $x^2+z^2=9$, $z=\sqrt{3}x$, $z=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=3$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Найти все разложения заданной функции $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z^2-4)}$ по степеням z и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.
2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\operatorname{arctg} z=\int\limits_0^z\frac{dz}{1+z^2}=\frac{\pi}{2}+\int\limits_\infty^z\frac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Найти все особые точки заданной функции $f(z)=\frac{z}{1-z}\sin\frac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\oint\limits_C\frac{\operatorname{tg} z\,dz}{(z-\pi/4)^3}\quad C\colon |z-\pi/4|=0{,}5$

Вариант 19

Задача 1 (*1 балл*). Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{(3;2)}^{(5;4)} \frac{x\,dx - y\,dy}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

Задача 2 (*1 балл*). Используя формулу Грина, вычислить $\displaystyle\oint\limits_L x^2y\,dx + xy^2\,dy$ вдоль контура L: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, проходимого в положительном направлении. Результат проверить путем непосредственного вычисления интеграла.

Задача 3 (*5 баллов*). В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \left\{\frac{x^2z}{2}; yz; x^2\right\}$; $M_0(-3;3;-1)$; V: $x^2 + 2y^2 = 1$, $z = x + 1$, $z = 0$; Σ — часть поверхности $x^2 + 2y^2 = 1$, вырезаемая поверхностями $z = 0$, $z = x + 1$, $y = 0$ $(y \geq 0)$; L: $x = 1$, $z = x + 1$, $z = 0$, $y = 0$.

Задача 4 (*1 балл*). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+z}{1-z}$ по степеням z и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.
2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\operatorname{arctg} z = \displaystyle\int\limits_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int\limits_\infty^z \frac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*1 балл*). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \dfrac{(z+1)^2}{(z^2-3z+2)^2}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*1 балл*). Вычислить интеграл $\displaystyle\oint\limits_C \frac{\operatorname{ch} z\,dz}{(z^2+\pi^2)^2}$ $\quad C$: $|z - \pi i| = \pi$

Вариант 20

Задача 1 (*1 балл*). Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{(-1;-1)}^{(1;1)} \frac{dx - dy}{(x-y-1)^2}$.

Задача 2 (*1 балл*). Вычислить $\displaystyle\oint (x - y^2)\,dx + 2xy\,dy$ вдоль окружности $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$, проходимой в положительном направлении. Проверить результат с помощью двойного интеграла.

Задача 3 (*5 баллов*). В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{x^2y^2z; z; 1\}$; $M_0\left(\frac{1}{2}; 1; 3\right)$; V: $y = 0$, $z = 0$, $y + z = 1$, $x + z = 1$, $z - x = 1$; Σ — часть поверхности $x + z = 1$, вырезаемая поверхностями $z = 0$, $y = 0$, $y + z = 1$; L: $x + z = 1$, $-x + z = 1$, $z = 0$, $y = 0$.

Задача 4 (*1 балл*). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \dfrac{1}{1 + z + z^2}$ по степеням z и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.
2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\displaystyle\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int\limits_\infty^z \frac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*1 балл*). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}\sin\dfrac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*1 балл*). Вычислить интеграл $\displaystyle\oint\limits_C \frac{\operatorname{ch}\pi z\,dz}{(z^2+1)^3}$ $\quad C$: $|z - i| = 1$

Вариант 21

Задача 1 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\int\limits_{(-1;0)}^{(1;2)} \frac{3x^2dx}{\sqrt{y-x^3}} - \frac{dy}{\sqrt{y-x^3}}$.

Задача 2 (*1 балл*)**.** Доказать, что интеграл $\int\limits_L (x^4+4xy^3)\,dx + (6x^2y^2-5y^4)\,dy$ не зависит от пути интегрирования. Найти значение интеграла, интегрируя сначала по ломаной AOB от точки $A\big(-a;\sqrt{2}b\big)$ до точки $B\big(a;\sqrt{2}b\big)$ через начало координат O, а затем по прямой, соединяющей точки A и B.

Задача 3 (*5 баллов*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{x^2; -y^2; -z^2\}$; $M_0(1;1;1)$; V: $x^2+y^2=z$, $z=1$; Σ — часть поверхности $x+y+z=1$, вырезаемая поверхностями $x=0$, $y=0$, $z=0$; L: $x^2+y^2=1$, $z=1$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Найти все разложения заданной функции $f(z) = \operatorname{arctg} z$ по степеням z и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. 2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int\limits_\infty^z \frac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{1}{z(1+z)}\cos\frac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\oint\limits_C \frac{\sin z\,dz}{(z^2-\pi^2/4)^2}$ $\quad C$: $|z-\pi/2| = 1$

Вариант 22

Задача 1 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\int\limits_{(-1;-1)}^{(1;1)} \dfrac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}$ по двум путям:

а) произвольной кривой, оставляющей начало координат слева; б) произвольной кривой, оставляющей начало координат справа.

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить $\oint\limits_C 2y\,dx + xy\,dy$ вдоль контура, образованного прямыми $x+y=3$, $x=1$, $y=1$ и проходимого в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 3 (*5 баллов*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z)=\{xy;y;yz\}$; $M_0(0;1;0)$; $V\colon$ $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $z=1$; Σ — часть поверхности $x^2+y^2=z$, вырезаемая поверхностями $z=4$; $L\colon$ $y=x^2$, $y=4$, $z=0$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Найти все разложения заданной функции $f(z)=\dfrac{1}{z+1}\cos^2\dfrac{1}{z+1}$ по степеням $z+1$ и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.
2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\operatorname{arctg} z=\int\limits_0^z \dfrac{dz}{1+z^2}=\dfrac{\pi}{2}+\int\limits_\infty^z \dfrac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Найти все особые точки заданной функции $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z^2-\pi^2)^2}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\oint\limits_C \dfrac{\ln(1+z)\,dz}{(z^2-1)^3}$ $\quad C\colon\ |z-1|=1$

Вариант 23

Задача 1 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\int\limits_{(0;0)}^{(1;\frac{\pi}{2})} y\cos(xy)\,dx + x\cos(xy)\,dy$, отыскав с помощью криволинейного интеграла функцию по её полному дифференциалу.

Задача 2 (*1 балл*)**.** Используя формулу Грина, вычислить

$$\oint \frac{3x - y^3\sqrt{1+x^2+4y^3}\,dx + (18y^2 + x^3\sqrt{1+x^2+4y^3})\,dy}{3\sqrt{1+x^2+4y^3}}$$

вдоль окружности $x^2+y^2=1$ (направление обхода положительное).

Задача 3 (*5 баллов*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{xyz; xy; xz\}$; $M_0(1;-1;2)$; V: $x+z=1$, $y=0$, $y=2$, $x=0$, $z=0$; Σ — часть поверхности $x^2+y^2-z^2=0$, вырезаемая поверхностями $z=2$; L: $\frac{x^2}{4}=z$, $y=0$, $z=4$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)^3}$ по степеням $z+1$ и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int\limits_\infty^z \frac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{z}{1-z^2}\operatorname{ch}\frac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\oint\limits_C \frac{\ln z\,dz}{(z^2+1)^2}$ $\quad C$: $|z-i| = 0{,}5$

Вариант 24

Задача 1 (*1 балл*). Вычислить интеграл $\int\limits_L (y+x)\,dx + (y-x)\,dy$ вдоль верхней части эллипса $\dfrac{(x-4)^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ от точки $A(6;0)$ до точки $B(2;0)$ и далее по прямой до точки $C(0;2)$.

Задача 2 (*1 балл*). Вычислить $\oint \dfrac{y}{x}\,dx + x^2\,dy$ вдоль контура, образованного кривой $y = \ln x$, осью Ox и прямой $x = e$ (направление обхода положительное). Проверить результат с помощью двойного интеграла.

Задача 3 (*5 баллов*). В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{xz; yz; z^2\}$; $M_0(3;2;-1)$; $V\colon\ x^2+y^2+z^2 = 4$, $z = 0$ $(z \ge 0)$; Σ — часть поверхности $z + x = 1$, вырезаемая поверхностями $z = 0$, $y = 1$, $z = y$; $L\colon\ z + y = 1$, $x = 0$, $z - y = 1$, $z = 0$.

Задача 4 (*1 балл*). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \left(\dfrac{\cos z}{z}\right)^3$ по степеням z и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.
2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \dfrac{dz}{1+z^2} = \dfrac{\pi}{2} + \int\limits_\infty^z \dfrac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*1 балл*). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \dfrac{1}{1+z}\,\operatorname{ch}\dfrac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*1 балл*). Вычислить интеграл $\oint\limits_C \dfrac{e^z \ln(z+1)\,dz}{(z-1)^2}$ $\quad C\colon\ |z-1| = 1$

Вариант 25

Задача 1 (*1 балл*). Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{(1;2)}^{(4;5)} \frac{x\,dx - y\,dy}{\sqrt{y^2 - x^2}}$.

Задача 2 (*1 балл*). Вычислить $\displaystyle\oint\limits_L y^2\,dx + xy\,dy$ вдоль окружности $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, проходимой в положительном направлении.

Задача 3 (*5 баллов*). В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{x; y; -xyz^2\}$; $M_0(1;-1;1)$; V: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $z = 1$; Σ — часть поверхности $y + z = 1$, вырезаемая поверхностями $x = 0$, $z = 0$, $y = x$; L: $x^2 + z^2 = 1$, $y = 1$.

Задача 4 (*1 балл*). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \frac{\cos z}{(z+\pi/4)^2}$ по степеням $z + \pi/4$ и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\displaystyle\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{2} + \int\limits_\infty^z \frac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*1 балл*). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \frac{z}{1-z^2}\operatorname{ch}\frac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*1 балл*). Вычислить интеграл $\displaystyle\oint\limits_C \frac{\ln(z+1)\,dz}{(z^2-1)^2}$ $\quad C$: $|z-1| = 1$

Вариант 26

Задача 1 (*1 балл*)**.** Вычислить $\int\limits_L xy\,dy + y\,dx$ вдоль параболы $y = x^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(1;1)$ и далее по окружности $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ до точки $B(2;2)$.

Задача 2 (*1 балл*)**.** Вычислить $\oint\limits_L y^2\,dx + x\,dy$ по контуру, образованному кривой $y = \sqrt{x-1}$, прямой $y = 2$ и отрезками осей Ox и Oy (направление обхода положительное). Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 3 (*5 баллов*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0;
в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).
Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{3y^2; -3x^2; -xz\}$; $M_0(2;1;0)$; $V\colon\ x+z=1,\ y=0,\ z=0,\ y=x$; Σ — часть поверхности $x^2+y^2=z$, вырезаемая поверхностями $z=1$; $L\colon\ z=x^2,\ y=1,\ z=4$.

Задача 4 (*1 балл*)**.** Найти все разложения заданной функции $f(z) = \dfrac{1}{1-z+z^2}$ по степеням z и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.
2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \dfrac{dz}{1+z^2} = \dfrac{\pi}{2} + \int\limits_\infty^z \dfrac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*1 балл*)**.** Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \dfrac{z}{1+z^2}\cos\dfrac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*1 балл*)**.** Вычислить интеграл $\oint\limits_C \dfrac{dz}{(z^4-16)^2}\quad C\colon\ |z-2i| = 2$

Вариант 27

Задача 1 (*2 балла*)**.** Вычислить интеграл $\int\limits_{(-4;3)}^{(4;0)} (x^3 - 3y)\,dx + (y^2 - 3x)\,dy$ по формуле Ньютона — Лейбница, предварительно отыскав функцию $U(x, y)$ с помощью криволинейного интеграла.

Задача 2 (*2 балла*)**.** Вычислить $\oint\limits_L (x^2 + y)\,dx - (y^2 + x)\,dy$ вдоль контура, образованного верхней частью окружности $x^2 + y^2 = 1$ и отрезкам прямых, соединяющих концы $A(-1; 0)$ и $C(1; 0)$ полуокружности с точкой $B(0; -1)$ (направление обхода положительное). Результат проверить по формуле Грина.

Задача 3 (*6 баллов*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0;
в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).
Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{2x^2y; xy^2; -4xyz\}$; $M_0(-1; -1; 2)$; V: $x^2 + y^2 = -z + 5$, $z = 0$; Σ — часть поверхности $x + y = 1$, вырезаемая поверхностями $z = 0$, $y = 0$, $z = x$; L: $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Задача 4 (*2 балла*)**.** Найти все разложения заданной функции $f(z) = (z-1)^2 \sin^2\dfrac{1}{z-1}$ по степеням $z - 1$ и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.
2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \dfrac{dz}{1+z^2} = \dfrac{\pi}{2} + \int\limits_\infty^z \dfrac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*2 балла*)**.** Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}\,\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*2 балла*)**.** Вычислить интеграл $\oint\limits_C \dfrac{e^{-z}dz}{z(z-1)^3}$ $\quad C$: $|z - 1| = 2$

Вариант 28

Задача 1 (*2 балла*). Вычислить интеграл $\int\limits_L (x+y)\,dx + (y-x)\,dy$ вдоль окружности $x^2+y^2=4$ от точки $A(0;2)$ до точки $B(2;0)$ и далее по прямой до точки $C(4;2)$.

Задача 2 (*2 балла*). Вычислить $\oint\limits_C (2x-y)\,dx + (x-1)\,dy$ вдоль контура, образованного прямыми $y=2x$, $y=\dfrac{2}{x}$, $x=2$ (направление обхода положительное). Результат проверить по формуле Грина.

Задача 3 (*6 баллов*). В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z) = \{y^2; x^2; xy^2z\}$; $M_0(-2;1;-1)$; V: $x^2+y^2+z^2=1$, $z=0$ $(z>0)$, $x=0$, $y=0$; Σ — часть поверхности $x+z=1$, вырезаемая поверхностями $y=1$, $z=0$, $z=y$; L: $x^2+y^2=1$, $z=x$.

Задача 4 (*2 балла*). Найти все разложения заданной функции $f(z) = \dfrac{z+2}{(z^3+3z^2+3z)^2}$ по степеням $z+1$ и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \dfrac{dz}{1+z^2} = \dfrac{\pi}{2} + \int\limits_\infty^z \dfrac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*2 балла*). Найти все особые точки заданной функции $f(z) = z^3 \cos\dfrac{1}{z^2}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*2 балла*). Вычислить интеграл $\oint\limits_C \dfrac{\operatorname{th}(\pi z/4)}{(z^2+1)^2}\,dz \quad C\colon |z-i| = 0{,}5$

Вариант 29

Задача 1 (*2 балла*)**.** Вычислить интеграл $\int\limits_{(1;1)}^{(8;4)} \left(\sqrt{y} - \dfrac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}\right) dx + \left(\dfrac{x}{2\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dy$ по формуле Ньютона — Лейбница, отыскав предварительно функцию $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу с помощью криволинейного интеграла.

Задача 2 (*2 балла*)**.** Вычислить $\oint\limits_C 2x\,dy - (x - y)\,dx$ вдоль контура, образованного кривыми $y = x + 1$, $y = e^{-x}$, $x = 1$ и проходимого в положительном направлении. Результат проверить по формуле Грина.

Задача 3 (*6 баллов*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0;
в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).
Исходные данные: $\vec{F}(x, y, z) = \{xy; -y^2; xz\}$; $M_0(0; 1; -1)$; $V\colon\ x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $z = 1$; Σ — часть поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, вырезаемая поверхностями $z = \sqrt{2}$ $(z \geq \sqrt{2})$; $L\colon\ x + y = 1$, $y = 0$, $x = 0$, $z = 1$.

Задача 4 (*2 балла*)**.** Найти все разложения заданной функции $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z - 3\pi/4)^3}$ по степеням $z - 3\pi/4$ и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.
2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\operatorname{arctg} z = \int\limits_0^z \dfrac{dz}{1 + z^2} = \dfrac{\pi}{2} + \int\limits_\infty^z \dfrac{d\,z}{1 + z^2}$.

Задача 5 (*2 балла*)**.** Найти все особые точки заданной функции $f(z) = \dfrac{1}{(1 - z)^2}\,\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*2 балла*)**.** Вычислить интеграл $\oint\limits_C \dfrac{\cos z\,dz}{z^2(z - \pi)^2} \quad C\colon\ |z - \pi| = 4$

Вариант 30

Задача 1 (*2 балла*)**.** Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{(-1;1)}^{(2;-1)} \frac{dx+dy}{(x+y+2)^2}$.

Задача 2 (*2 балла*)**.** Вычислить $\oint (x+y)\,dx-(x-y)\,dy$ вдоль периметра квадрата с вершинами $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(-1;0)$, $D(0;-1)$, проходимого в положительном направлении. Проверить результат с помощью формулы Грина.

Задача 3 (*6 баллов*)**.** В $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$. Найти: а) векторные линии поля; б) дивергенцию векторного поля и ее значение в точке M_0; в) поток векторного поля через границу S трехмерной области V конечного объема, заданной пересечением поверхностей; г) поток векторного поля через поверхность Σ; д) ротор векторного поля в произвольной точке; е) циркуляцию векторного поля по замкнутой линии L, образованной пересечением поверхностей (вычислить криволинейный интеграл непосредственно и проверить результаты по формуле Стокса).

Исходные данные: $\vec{F}(x,y,z)=\{y;-x;yz\}$; $M_0(-1;3;0)$; V: $x^2+y^2+z^2=2$ $(y\geq 0)$; Σ — часть поверхности $x^2+y^2+z^2=2$, вырезаемая поверхностями $z=0$, $z=y$; L: $x^2+y^2=1$, $z=y$.

Задача 4 (*2 балла*)**.** Найти все разложения заданной функции $f(z)=\frac{z}{(z^2-2z)^3}$ по степеням $z-1$ и указать области этих разложений. **Замечания**. 1. Для многозначной функции $\sqrt[3]{z}$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения.

2. Для многозначной функции $\operatorname{arctg} z$ рассматривается та ее ветвь, которая на положительной части действительной оси принимает действительные значения. При этом имеет место представление $\displaystyle\operatorname{arctg} z=\int\limits_0^z \frac{dz}{1+z^2}=\frac{\pi}{2}+\int\limits_{\infty}^{z}\frac{d\,z}{1+z^2}$.

Задача 5 (*2 балла*)**.** Найти все особые точки заданной функции $f(z)=\frac{z}{1+z}\,e^{-1/z}$, определить их характер и найти вычеты в них. Установить характер бесконечно удаленной точки и найти вычет в ней.

Задача 6 (*2 балла*)**.** Вычислить интеграл $\displaystyle\oint\limits_C \frac{e^{iz}\cos z\,dz}{(z-\pi)^3}$ $\quad C$: $|z-\pi|=\pi$