Задача 1

Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в шаре. (*3 балла*)

1. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<1,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=1} = 3\cos^2\vartheta + \sin\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<3,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=3} = 6\sin 2\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<2,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 2\sin^3\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<4,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=4} = 2\cos\vartheta + \sin^2\vartheta\,\cos 2\varphi. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<3,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=3} = \cos\vartheta + \sin 2\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<1,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=1} = \sin^2\vartheta(1+3\sin 2\varphi). \end{cases}$

7. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<3,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=3} = \sin 2\vartheta\,\sin\varphi + \cos 2\vartheta. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<1,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = 4\sin 2\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<1,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=1} = \cos^2\vartheta + 3\sin^2\vartheta\,\cos 2\varphi. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<1,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = 4\sin^3\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<3,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=3} = \sin^2\vartheta(1+\cos\vartheta\,\sin 2\varphi). \end{cases}$

12. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<4,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=4} = 2\cos^3\vartheta + 3\sin^2\vartheta\,\sin 2\varphi. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<3,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=3} = 2\cos\vartheta + 3\sin 2\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<2,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=2} = 3\cos^2\vartheta + \sin\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<2,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 2\cos\vartheta + 3\sin^2\vartheta\,\sin 2\varphi. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<2,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=2} = 2\sin^3\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<3,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=3} = \sin^2\vartheta(\cos\vartheta + \cos 2\varphi). \end{cases}$

18. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<4,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=4} = \sin 2\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<2,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 2\cos\vartheta\,\sin^2\vartheta\,\sin 2\varphi. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<4,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=4} = \sin^2\vartheta(1+\sin 2\varphi). \end{cases}$

21. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<4,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=4} = 2\cos\vartheta + \sin^2\vartheta\,\cos 2\varphi. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<4,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=4} = \sin^3\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<1,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=1} = \cos^3\vartheta + \sin 2\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<2,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = \sin^2\vartheta(2\cos\vartheta + 3\sin 2\varphi). \end{cases}$

25. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<2,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=2} = \sin\vartheta(\sin\vartheta + \cos\varphi). \end{cases}$

26. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<1,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=1} = 1 + \sin 2\vartheta\,\sin\varphi. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<4,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=4} = \sin^2\vartheta(3+\cos 2\varphi). \end{cases}$

28. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<2,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=2} = 4\sin^3\vartheta\,\cos\varphi. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<3,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u\big|_{r=3} = \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\,\cos 2\varphi. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \Delta u = 0,\ r<4,\ 0\leqslant\vartheta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi<2\pi; \\ u'_r\big|_{r=4} = 2\cos^3\vartheta + \sin^2\vartheta\,\sin 2\varphi. \end{cases}$

Задача 2

Найти функцию, удовлетворяющую внутри шара уравнению Гельмгольца и принимающую на границе шара заданное значение (*3 балла*)

1. $\Delta u + u = 0, \quad 0 \le r < \pi/2, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/2} = \cos\vartheta$
2. $\Delta u + u = 0, \quad 0 \le r < \pi, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi} = \cos\vartheta$
3. $\Delta u + u = 0, \quad 0 \le r < 3\pi/2, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=3\pi/2} = \cos\vartheta$
4. $\Delta u + u = 0, \quad 0 \le r < 2\pi, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2\pi} = \cos\vartheta$
5. $\Delta u + 4u = 0, \quad 0 \le r < \pi/4, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/4} = \cos\vartheta$
6. $\Delta u + 4u = 0, \quad 0 \le r < \pi/2, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/2} = \cos\vartheta$
7. $\Delta u + 4u = 0, \quad 0 \le r < 3\pi/2, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=3\pi/2} = \cos\vartheta$
8. $\Delta u + 4u = 0, \quad 0 \le r < \pi, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi} = \cos\vartheta$
9. $\Delta u + 9u = 0, \quad 0 \le r < \pi/6, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/6} = \cos\vartheta$
10. $\Delta u + 9u = 0, \quad 0 \le r < \pi/3, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/2} = \cos\vartheta$
11. $\Delta u + 9u = 0, \quad 0 \le r < \pi/2, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/2} = \cos\vartheta$
12. $\Delta u + 9u = 0, \quad 0 \le r < 2\pi/3, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=3\pi/3} = \cos\vartheta$
13. $\Delta u + 16u = 0, \quad 0 \le r < \pi/8, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/8} = \cos\vartheta$
14. $\Delta u + 16u = 0, \quad 0 \le r < \pi/4, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/4} = \cos\vartheta$
15. $\Delta u + 16u = 0, \quad 0 \le r < 3\pi/8, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=3\pi/8} = \cos\vartheta$
16. $\Delta u + 16u = 0, \quad 0 \le r < \pi/2, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/2} = \cos\vartheta$
17. $\Delta u + 25u = 0, \quad 0 \le r < \pi/10, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/10} = \cos\vartheta$
18. $\Delta u + 25u = 0, \quad 0 \le r < \pi/5, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/5} = \cos\vartheta$
19. $\Delta u + 25u = 0, \quad 0 \le r < 3\pi/10, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=3\pi/10} = \cos\vartheta$
20. $\Delta u + 25u = 0, \quad 0 \le r < 2\pi/5, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2\pi/5} = \cos\vartheta$

21. $\Delta u + 36u = 0, \quad 0 \le r < \pi/12, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/12} = \cos\vartheta$

22. $\Delta u + 36u = 0, \quad 0 \le r < \pi/6, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/6} = \cos\vartheta$

23. $\Delta u + 36u = 0, \quad 0 \le r < \pi/4, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/4} = \cos\vartheta$

24. $\Delta u + 36u = 0, \quad 0 \le r < \pi/2, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi/2} = \cos\vartheta$

25. $\Delta u + 49u = 0, \quad 0 \le r < \pi/7, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi72} = \cos\vartheta$

26. $\Delta u + 49u = 0, \quad 0 \le r < 2\pi/7, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=2\pi/7} = \cos\vartheta$

27. $\Delta u + 4u = 0, \quad 0 \le r < 3\pi/4, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=3\pi/4} = \cos\vartheta$

28. $\Delta u + u = 0, \quad 0 \le r < 3\pi, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=3\pi} = \cos\vartheta$

29. $\Delta u + 9u = 0, \quad 0 \le r < \pi, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi} = \cos\vartheta$

30. $\Delta u + 16u = 0, \quad 0 \le r < \pi, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\pi} = \cos\vartheta$