

**Подготовка к РК-2 по дисциплине “Теория поля и ряды” семестр 3, модуль 2
(15–25 баллов) Билет РК-2 содержит 5 заданий.**

Вопросы:

1. Криволинейные интегралы на поверхности.
2. Кривые на поверхности.
3. Первая квадратичная форма.
4. Ориентация гладкой поверхности.
5. Определение и свойства поверхностных интегралов.
6. Взаимные базисы векторов.
7. Ковариантные и контравариантные компоненты векторов.
8. Связь между ковариантными и контравариантными компонентами векторов.
9. Ортогональные базисы.
10. Коэффициенты Ламэ.
11. Циркуляция вектора
12. Скалярное поле. Производная по направлению. Оператор ∇ .
13. Векторное поле. Поток векторного поля.
14. Дивергенция векторного поля. Теорема Остроградского.
15. Вихрь векторного поля. Теорема Стокса.
16. Теоремы примыкающие к теореме Остроградского.
17. Теоремы примыкающие к теореме Стокса.
18. Потенциальное поле. Скалярный потенциал.
19. Соленоидальное векторное поле. Векторный потенциал.
20. Лапласово векторное поле. Гармонические функции. Основная теорема векторного анализа.
21. Определение функции комплексной переменной.
22. Способы задания кривой в z и ее изображение в ω .
23. Основные трансцендентные функции
24. Бесконечно удаленная точка.
25. Непрерывность функции комплексной переменной.
26. Определение производной функции комплексной переменной.
27. Условие Коши-Римана (теорема с доказательством.)
28. Определение аналитической функции. Определения правильных и особых точек функции $f(z)$.

29. Необходимое и достаточное условие аналитичности функции $f(z)$.
30. Восстановление функции комплексной переменной $f(z)$ по ее аналитической (мнимой) части.
31. Вещественная и мнимая части аналитической функции как сопряженные гармонические функции.
32. Определение интеграла от функции комплексной переменной $f(z)$. Свойства интеграла от функции комплексной переменной.
33. Вычисление интеграла от функции комплексной переменной.
34. Теорема Коши для односвязной области.
35. Вывод интегральной формулы Коши ее следствие.
36. Равномерно сходящиеся ряды функции комплексной переменной. Свойства рядов сходящихся равномерно.
37. Ряд Тейлора. Теорема Тейлора.
38. Нули аналитической функции.
39. Ряд Лорана. Область сходимости ряда Лорана.
40. Разложение аналитической функции в ряд Лорана.
41. Понятие изолированной особой точки однозначной аналитической функции. Классификация.
42. Устранимая особая точка.
43. Полюс. Поведение аналитической функции в окрестности полюса.
44. Разложение в ряд Лорана аналитической функции в окрестности полюса.
45. Связь между нулями и полюсами аналитической функции.
46. Существенно особая точка. Разложение в ряд Лорана в окрестности существенно особой точки.
47. Поведение функции в окрестности существенно особой точки (Теорема Сохоцкого).
48. Типы бесконечно удаленной изолированной особой точки
49. Определение вычета аналитической функции.
50. Формула для вычисления вычета в полюсе первого порядка.
51. Формула для вычисления вычета в полюсе m порядка.
52. Основная теорема теории вычетов.
53. Вычет аналитической функции в бесконечно удаленной точке.
54. Теорема о сумме вычетов.
55. Обобщение формулы Коши на случай неограниченной области.

Задачи:

1. Дана функция $u(M) = e^{x-yz}$ и точки $M_1(1, 0, 3)$ и $M_2(2, -4, 5)$ вычислить: 1) производную этой функции в точке M_1 по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\text{grad}u(M_1)$

2. Найти векторные линии в векторном поле $\vec{A} = \{0, 5z, 7y\}$

3. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint_{\Sigma} (x + 3y + 2z) d\sigma$$

по поверхности Σ , где Σ – часть плоскости $2x + y + 2z = 2$, отсеченная координатными плоскостями.

4. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_{\Sigma} (y^2 + z^2) dydz - y^2 dx dz + 2yz^2 dx dy$$

по поверхности Σ , где Σ – часть поверхности конуса $x^2 + z^2 = y^2$ (нормальный вектор которой образует тупой угол с ортом \vec{j}), отсекаемая плоскостями $y = 0$, $y = 1$.

5. Найти поток векторного поля $\vec{A} = \{x + xy^2, y - yx^2, z\}$ через часть поверхности Σ : $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ($z \geq 0$), вырезаемую плоскостью $z = 0$ (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

6. Найти поток векторного поля $\vec{A} = \{2y - 5x, x - 1, 2\sqrt{xy} + 2z\}$ через замкнутую поверхность Σ : $2x + 2y - z = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (нормаль внешняя).

7. Найти поток векторного поля $\vec{A} = \{x + z, 0, y\}$ через замкнутую поверхность Σ : $z = 8 - x^2 - y^2$, $z = x^2 + y^2$ (нормаль внешняя).

8. Найти поток векторного поля $\vec{A} = \{y^2 + z^2, xy + y^2, xz + z\}$ через замкнутую поверхность Σ : $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$, $z = 0$ (нормаль внешняя).

9. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{A} = \{yz, -xz, xy\}$ вдоль контура Γ : $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 9$ (положительный обход), используя определение циркуляции.

10. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{A} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$ гармоническим.

11. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{A} = \{3x, y + z, x - z\}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $x + 3y + z = 3$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора этой плоскости, используя определение циркуляции.

12. Выяснить, является ли функция $U(x, y) = -xy - y$ действительной частью аналитической функции $f(z)$. Если да, найти аналитическую функцию.

13. Востановить аналитическую в окрестности точки $z_0 = 0$ функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 - x$ и значению $f(0) = 0$

14. Проверить будет ли аналитической функция $f(z) = x - 2xy + i(x^2 - y^2 + y)$. Если функция аналитична, то вычислить ее производную в точке $z_0 = -i$

15. Вычислить интеграл
$$\oint_{|z-3/2|=2} \frac{z^3 + \sin 2z}{\sin \frac{z}{2}(z - \pi)} dz$$

16. Вычислить интеграл
$$\oint_{|z|=3} \frac{2z^3 + 3z^2 - 2}{2z^5} dz$$

17. Вычислить интеграл $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z(z+1)}$

18. Вычислить интеграл с помощью теоремы о вычетах $\oint_{|z|=2} \frac{(z+1)dz}{z^2-2z-3}$.

19. Вычислить интеграл $\oint_{|z|=0.3} \frac{e^{3z}-1-\sin 3z}{z^2 \operatorname{sh} 3\pi z} dz$

20. Разложить функцию $f(z) = ze^{\frac{z}{z+3}}$ в ряд Лорана в окрестности ее особой точки.

21. Найти лорановские разложения функции $\frac{15z+450}{225z+15z^2-2z^3}$ по степеням z .

22. Функцию $z \sin \frac{\pi z}{z-a}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = a$