Тюрин А.П. РЛ2-31 Билет 17

№1

Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения $u_{tt}=u_{xx}$ на отрезке $0<x<1$, $0<t<\infty$ с начальными и граничными условиями $u(x,0)=9\sin 5\pi x$, $u_t(x,0)=0$, $u(0,t)=0$, $u(1,t)=0$.

$$\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} \quad 0<x<1 \quad 0<t<\infty \\ u(x,0)=9\sin 5\pi x \quad u_t(x,0)=0 \\ u(0,t)=0 \quad u(1,t)=0 \end{cases}$$

Применим метод разделения переменных:

$$u(x,t)=X(x)T(t)\not\equiv 0$$

$$XT''=TX''$$

$$\frac{T''}{T}=\frac{X''}{X}=-\lambda \quad (\lambda=const)$$

I. $\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=0 \\ X(1)=0 \end{cases}$ Задача Штурма-Лиувилля

1) $\lambda=0$; $X''=0$; $X=C_1x+C_2$

Подставляем граничные условия $X(0)=0$ и $X(1)=0$ => $\begin{matrix} C_2=0 \\ C_1=0 \end{matrix}$

Значит, $X=0$ – не собственная ф-ция
$\lambda=0$ – не собств. значение

2) $\lambda=-\omega^2<0$

$$X''-\omega^2X=0$$

$$X=C_1e^{\omega x}+C_2e^{-\omega x}$$

$$\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ C_1e^{\omega}+C_2e^{-\omega}=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\omega} & e^{-\omega} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\omega} & e^{-\omega} \end{vmatrix}=0$; $e^{-\omega}-e^{\omega}=0$ нет ω, удовлетворяющих этому уравнению, значит система имеет только решения $C_1=C_2=0$ => $X=0$

$X=0$ – не с.ф

$\lambda<0$ – не с.з.

3) $\lambda = \omega^2 > 0$ Тюрин А. П. РЛ2-31

$X'' + \omega^2 X = 0$

$X = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$; подставляем $X(0)=0$ и $X(1)=0$:

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin\omega = 0, \text{ значит } C_2 \neq 0 \Rightarrow \sin\omega = 0 \end{cases}$$

$\omega = \pi n,\ n = \overline{1,\infty}$

с.з. $- \lambda_n = (\pi n)^2,\ n = \overline{1,\infty}$

$X_n = \sin \pi n x$ – с.ф., $n = \overline{1,\infty}$

$\|X_n\|^2 = \frac{1}{2}$

II. $\frac{T''}{T} = -\lambda$

$T'' + (\pi n)^2 T = 0$

$T_n = C_1 \cos \pi n t + C_2 \sin \pi n t$

III. $U_n = X_n T_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi n x (A_n \cos \pi n t + B_n \sin \pi n t)$

IV. Подставляем начальные условия

$U(x,0) = 9 \sin 5\pi x$ $\quad U_t(x,0) = 0$

Найдем производную:

$U_t = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi n x (-\pi n A_n \sin \pi n t + \pi n B_n \cos \pi n t)$

$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi n x \cdot \pi n \cdot B_n \Rightarrow B_n = 0,\ \forall n$

$9 \sin 5\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi n x \cdot A_n$

Воспользуемся свойством ортогональности собственных функций.
Домножим обе части на $\sin \pi n x$ и проинтегрируем

$9\int_0^1 \sin 5\pi x \cdot \sin \pi n x \, dx = A_n \cdot \|X_n\|^2$

$9\int_0^1 \sin 5\pi x \cdot \sin \pi n x \, dx = \frac{9}{2}\int_0^1 [\cos(5\pi - \pi n)x - \cos(5\pi + \pi n)x] dx =$

$= \frac{9}{2}\left[\frac{\sin(5\pi - \pi n)x}{5\pi - \pi n} - \frac{\sin(5\pi + \pi n)x}{5\pi + \pi n}\right]_0^1 = \frac{9}{2}\left[\frac{\sin(5\pi - \pi n)}{5\pi - \pi n} - \overbrace{\frac{\sin(5\pi + \pi n)}{5\pi + \pi n}}^{=0,\ \forall n}\right] =$

$= \frac{9}{2} \cdot \frac{\sin \pi(5-n)}{\pi(5-n)} = \frac{9}{2} \begin{cases} 1, & n = 5 \\ 0, & n \neq 5 \end{cases}$

Значит, $\frac{9}{2}\begin{cases}1, n=5\\0, n\neq 5\end{cases} = A_n\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow 9 = A_5$

Ответ: $U = \sin 5\pi x\cdot 9\cos 5\pi t$.

№2

Найти решение уравнения Лапласа $\Delta U=0$ в круговом секторе $0\le r\le 1$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$ (r,φ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $U(r,\varphi)$ удовлетворяет условиям: $U(1,\varphi)=22\cos 12\varphi$, $U_\varphi(r,0)=0$, $U_\varphi(r,\frac{\pi}{3})=0$.

$$\begin{cases}\Delta U=0 \quad 0\le r\le 1 \quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}\\ U(1,\varphi)=22\cos 12\varphi\\ U_\varphi(r,0)=0 \quad U_\varphi(r,\frac{\pi}{3})=0\end{cases}$$

Перепишем выражение $\Delta U=0$ в полярных координатах:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}=0$$

Используем метод разделения переменных:

$$U(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)\not\equiv 0$$

$$\frac{\Phi}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\frac{R}{r^2}\Phi''=0 \quad \Big|\cdot\frac{r^2}{R\Phi}$$

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\frac{\Phi''}{\Phi}=0$$

$$-\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)=\frac{\Phi''}{\Phi}=-\lambda \quad (\lambda=const)$$

I. Задача Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases}\Phi''+\lambda\Phi=0\\ \Phi'(0)=0\\ \Phi'(\frac{\pi}{3})=0\end{cases}$$

1) $\lambda=0$; $\Phi''=0 \Rightarrow \Phi=C_1\varphi+C_2$

$\Phi'=C_1$

$$\begin{cases}\Phi'(0)=0\\ \Phi'(\frac{\pi}{3})=0\end{cases} \Rightarrow C_1=0, \forall C_2\neq 0$$

Значит, $\Phi=C_2$ - с.ф. $\lambda=0$ - с.з.

2) $\lambda = -\omega^2 < 0$; $\Phi'' - \omega^2\Phi = 0 \Rightarrow \Phi = C_1 e^{\omega\varphi} + C_2 e^{-\omega\varphi}$

$\Phi' = \omega C_1 e^{\omega\varphi} - \omega C_2 e^{-\omega\varphi}$

$$\begin{cases} \omega C_1 - \omega C_2 = 0 \\ \omega C_1 e^{\frac{\pi}{3}\omega} - \omega C_2 e^{-\frac{\pi}{3}\omega} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ e^{\frac{\pi}{3}\omega} & -e^{-\frac{\pi}{3}\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Дисперсионное уравнение $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ e^{\frac{\pi}{3}\omega} & -e^{-\frac{\pi}{3}\omega} \end{vmatrix} = 0$

$-e^{-\frac{\pi}{3}\omega} + e^{\frac{\pi}{3}\omega} = 0$ ни при каких ω данное ур-е не выполняется $\Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow \Phi = 0$ – не с.ф.

$\lambda < 0$ – не с.з.

3) $\lambda = \omega^2 > 0$; $\Phi'' + \omega^2\Phi = 0 \Rightarrow \Phi = C_1 \cos\omega\varphi + C_2 \sin\omega\varphi$

$\Phi' = -\omega C_1 \sin\omega\varphi + \omega C_2 \cos\omega\varphi$

$$\begin{cases} \omega C_2 = 0 \\ -\omega C_1 \sin\frac{\pi}{3}\omega = 0 \Rightarrow C_1 \neq 0 \Rightarrow \sin\frac{\pi}{3}\omega = 0 \end{cases}$$

$\frac{\pi}{3}\omega = \pi n$, $n = \overline{1,\infty}$

$\omega = 3n$, $n = \overline{1,\infty}$

$\lambda_n = (3n)^2$, $n = \overline{0,\infty}$ – с.з.

$\Phi_n = \cos 3n\varphi$ – с.ф. $(C_1 = 1,\ n = \overline{0,\infty})$

$$\|\Phi_n\|^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 6n\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{3} + \frac{\sin 6n\varphi}{6n}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{3} + \underbrace{\cancel{\frac{\sin 2\pi n}{6n}}}_{0,\ \forall n}\right] = \frac{\pi}{6}.$$

$\|\Phi_n\|^2 = \frac{\pi}{6}$. $\|\Phi_0\|^2 = \frac{\pi}{3}$

II. $r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - (3n)^2 R = 0$

Сделаем замену: $e^t = r$ $R(r) = R(e^t) = Y(t)$

$Y'' - (3n)^2 Y = 0$

$Y = C_1 e^{3nt} + C_2 e^{-3nt}$

$R(r) = C_1 r^{3n} + \frac{C_2}{r^{3n}}$.

Надо наложить естественные граничные условия, т.е. все функции должны быть ограниченные.

При $r \to 0$, $\frac{1}{r^{3n}} \to \infty \Rightarrow C_2 = 0$, $C_1 = 1$

Значит, $R_n = r^{3n}$

III. Составим общее решение: $U = R(r)\Phi(\varphi)$

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} R_n \Phi_n = \sum_{n=0}^{\infty} r^{3n} \cdot A_n \cdot \cos 3n\varphi.$$

IV. Подставляем граничные условия

$U(1,\varphi) = 22\cos 12\varphi$

$$22\cos 12\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos 3n\varphi \quad \Big| \cdot \cos 3n\varphi \quad \left(\begin{array}{l}\text{ортогональность}\\ \text{собственных}\\ \text{функций}\end{array}\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} 22\cos 12\varphi \cdot \cos 3n\varphi \, d\varphi = A_n \cdot \|\Phi_n\|^2$$

$$22\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 12\varphi \cdot \cos 3n\varphi \, d\varphi = 11\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[\cos(12+3n)\varphi + \cos(12-3n)\varphi\right] d\varphi =$$

$$= 11\left[\frac{\sin(12+3n)\varphi}{12+3n} + \frac{\sin(12-3n)\varphi}{12-3n}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 11\cdot\left[\underbrace{\cancel{\frac{\sin(4\pi+\pi n)}{12+3n}}}_{=0,\forall n} + \frac{\sin(4\pi-\pi n)}{12-3n}\right] =$$

$$= 11\cdot\frac{\pi \sin(4-n)\pi}{3(4-n)\cdot\pi} = 11\cdot\frac{\pi}{3}\begin{cases}1, & n=4\\ 0, & n\neq 4\end{cases}$$

Итак, $\cancel{11\cdot\frac{\pi}{3} = A_n}$ $11\cdot\frac{\pi}{3}\begin{cases}1, & n=4\\ 0, & n\neq 4\end{cases} = A_n \cdot \|\Phi_n\|^2$

$$11\cdot\frac{\pi}{3} = A_4\cdot\frac{\pi}{6} \Rightarrow A_4 = 22, \quad n=4.$$

Ответ: $U = r^{12}\cdot 22\cos 12\varphi.$

Тюрин А. П.
РЛ2-31

№ 3

а) Доказать рекуррентную формулу для функций Бесселя
$J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x)$.

Доказательство:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$, где $\Gamma(z)$ – гамма-функция

$$J_\nu'(x) - J_{\nu-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k (2k+\nu)}{2\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu+1} - \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu-1+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} \right] =$$

$$= \left| \Gamma(z+1) = \cancel{z!} = z\Gamma(z) \; ; \; \Gamma(k+\nu+1) = (k+\nu)\Gamma(k+\nu) \right| =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k (2k+\nu)}{2(k+\nu)\Gamma(k+\nu)\Gamma(k+1)} - \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu)\Gamma(k+1)} \right] \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k (2k+\nu)}{2\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} - \frac{(-1)^k (k+\nu)}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \right] \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} \cdot \left[\frac{2k+\nu}{2} - (k+\nu) \right] = \left| \frac{\cancel{2k}+\nu-\cancel{2k}-2\nu}{2} = -\frac{\nu}{2} \right| =$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \frac{\nu}{2}}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} = -\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot \frac{\nu}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{x}}{\Gamma(k+\nu+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}_{= J_\nu(x)} =$$

$$= -\frac{\nu}{x} J_\nu(x).$$

b) $2u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0$

$a_{11} = 2 \qquad a_{12} = 3 \qquad a_{22} = 4$

$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 9 - 8 = 1 > 0 \Rightarrow$ гиперболический тип.

Запишем характеристическое уравнение

$2\lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0$

$D = 36 - 32 = 4$

$\lambda_1 = \frac{6-2}{4} = 1$

$\lambda_2 = \frac{8}{4} = 2$

Тюрин А.П.   РЛ2-31

Уравнения характеристик:

$$\frac{dy}{dx}=\lambda_1 \qquad\qquad \frac{dy}{dx}=\lambda_2$$

$$dy=dx \qquad\qquad dy=2dx$$

$$y=x+C_1 \qquad\qquad y=2x+C_2$$

$$C_1=y-x=\xi \qquad\qquad C_2=y-2x=\eta$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=-1 \qquad \frac{\partial\xi}{\partial y}=1$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=-2 \qquad \frac{\partial\eta}{\partial y}=1$$

- $u_x=u_\xi\,\xi_x+u_\eta\,\eta_x=-u_\xi-2u_\eta$
- $u_y=u_\xi\,\xi_y+u_\eta\,\eta_y=u_\xi+u_\eta$
- $u_{xx}=u_{\xi\xi}\,\xi_x^2+2\xi_x\eta_x u_{\xi\eta}+\eta_x^2 u_{\eta\eta}+\cancel{u_\xi\,\overset{0}{\xi_{xx}}}+\cancel{u_\eta\,\overset{0}{\eta_{xx}}}=$

$=u_{\xi\xi}+4u_{\xi\eta}+4u_{\eta\eta}$

- $u_{yy}=u_{\xi\xi}\,\xi_y^2+2\xi_y\eta_y\,u_{\xi\eta}+\eta_y^2 u_{\eta\eta}+\cancel{u_\xi\,\overset{0}{\xi_{yy}}}+\cancel{u_\eta\,\overset{0}{\eta_{yy}}}=$

$=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}$

- $u_{xy}=u_{\xi\xi}\,\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\overset{-1}{\xi_x}\eta_y+\overset{-2}{\xi_y}\eta_x)+u_{\eta\eta}\,\eta_x\eta_y+\cancel{u_\xi\,\overset{0}{\xi_{xy}}}+\cancel{u_\eta\,\overset{0}{\eta_{xy}}}=$

$=-u_{\xi\xi}-3u_{\xi\eta}-2u_{\eta\eta}.$

Подставляем в исходное уравнение:

$2(u_{\xi\xi}+4u_{\xi\eta}+4u_{\eta\eta})-6(u_{\xi\xi}+3u_{\xi\eta}+2u_{\eta\eta})+4(u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta})\cancel{-u_\xi}-2u_\eta+$

$\cancel{u_\xi}+u_\eta=\underline{2u_{\xi\xi}}+8u_{\xi\eta}+\cancel{8u_{\eta\eta}}-\underline{6u_{\xi\xi}}-18u_{\xi\eta}\cancel{-12u_{\eta\eta}}+\underline{4u_{\xi\xi}}+8u_{\xi\eta}+\cancel{4u_{\eta\eta}}-u_\eta=$

$=-2u_{\xi\eta}\cancel{+24u_{\eta\eta}}-u_\eta.$

$$-2u_{\xi\eta}-u_\eta=0$$

$$u_{\xi\eta}=-\frac{u_\eta}{2}.$$