Билет 1.

1. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint\limits_{\Sigma} (7x + y + 2z)\, d\sigma$$

по поверхности Σ, где Σ – часть плоскости $3x - 2y + 2z = 6$, отсеченная координатными плоскостями. (*5 баллов*)

2. Найти поток векторного поля $\vec{A} = \left\{x + xy^2, y - yx^2, z - 3\right\}$ через часть поверхности Σ: $x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0)$, вырезаемую плоскостью $z = 1$ (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями). (*5 баллов*)

3. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{A} = \{4x, 2, -xy\}$ вдоль контура Γ: $z = 2(x^2 + y^2) + 1$, $z = 7$ (положительный обход), использовав определение циркуляции. (*5 баллов*)

4. Разложить функцию $f(z) = \cos \dfrac{\pi z}{z+1}$ в ряд Лорана в окрестности ее особой точки. (*5 баллов*)

5. Выяснить, является ли функция $U(x, y) = e^{-x} \sin y$ – действительной частью аналитической функции $f(z)$. Если да, найти аналитическую функцию. (*5 баллов*)

Билет 2.

1. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dxdz - zdxdy$$

по поверхности Σ, где Σ – часть поверхности конуса $z^2 = x^2 + y^2$ (нормальный вектор которой образует острый угол с ортом $\vec{k}$), отсекаемая плоскостями $z = 0$, $z = 3$. (*5 баллов*)

2. Найти поток векторного поля $\vec{A} = \{3x, 0, 2z\}$ через часть плоскости $x + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz). (*5 баллов*)

3. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{A} = \{2z - x, x - y, 3x + z\}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $x + y + 2z = 2$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора этой плоскости, использовав определение циркуляции. (*5 баллов*)

4. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^2 - 6z + 5}$ (*5 баллов*)

5. Проверить будет ли аналитической функция $f(z) = x^2 - y^2 - x - 2 + i\,(2xy - y)$. Если функция аналитична, то вычислить ее производную в точке $z_0 = 1 - \dfrac{3}{6} i$ (*5 баллов*)

Билет 3.

1. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint\limits_{\Sigma} (2x+3y+z)\,d\sigma$$

по поверхности Σ, где Σ – часть плоскости $2x+3y+z=6$, отсеченная координатными плоскостями. *(5 баллов)*

2. Найти поток векторного поля $\vec{A}=\left\{e^{2y}+x, x-2y, y^2+3z\right\}$ через замкнутую поверхность Σ: $x-y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ (нормаль внешняя). *(5 баллов)*

3. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{A}=\{4x, 2, -xy\}$ вдоль контура Γ: $z=2(x^2+y^2)+1$, $z=7$ (положительный обход) с помощью формулы Стокса. *(5 баллов)*

4. Найти лорановские разложения функции $\dfrac{13z+338}{169z+13z^2-2z^3}$ по степеням z. *(5 баллов)*

5. Востановить аналитическую в окрестности точки $z_0=0$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $v(x,y)=x^2-y^2-x$ и значению $f(0)=0$ *(5 баллов)*

Билет 4.

1. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz-z^2dxdz+zdxdy$$

по поверхности Σ, где Σ – часть поверхности параболоида $z=3-x^2-y^2$ (нормальный вектор которой образует острый угол с ортом $\vec{k}$), отсекаемая плоскостью $z=0$. *(5 баллов)*

2. Найти поток векторного поля $\vec{A}=\{8x, -2y, x\}$ через замкнутую поверхность Σ: $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, $z=x^2+y^2$, $z=0$ (нормаль внешняя). *(5 баллов)*

3. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{A}=\{2z-x, x-y, 3x+z\}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $x+y+2z=2$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора этой плоскости с помощью формулы Стокса. *(5 баллов)*

4. Функцию $z\cos\dfrac{z}{z-5}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=5$ *(5 баллов)*

5. Выяснить, является ли функция $U(x,y)=2xy+2y$ – действительной частью аналитической функции $f(z)$. Если да, найти аналитическую функцию. *(5 баллов)*