Назарова П.С. РЛ2-31

Начало: 9:00
Конец:

Экзамен УМФ и ПФ

Билет № 12.

№1

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, \quad 0<x<1,\ 0<t<\infty \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=18\pi\cos 6\pi x \\ u_x(0,t)=0,\ u_x(1,t)=0 \end{cases}$$ – однородное уравнение

Решение будем искать в виде: $u(x,t)=X(x)T(t)\not\equiv 0$

$XT''=9TX''$ (1)

Разделим переменные. Для этого умножим (1) на $\left(\frac{1}{XT}\right)$

$\frac{T''}{T} = 9\frac{X''}{X} = -\lambda$ – задача делится на две

$TX'(0)=0 \Rightarrow X'(0)=0$

$TX'(1)=0 \Rightarrow X'(1)=0$

(I) $$\begin{cases} 9\frac{X''}{X} = -\lambda \ \ |\cdot X \\ X'(0)=0 \\ X'(1)=0 \end{cases}$$

$9X''+\lambda X=0 \ |:9$

$$\begin{cases} X''+\frac{\lambda}{9}X=0 \\ X'(0)=0 \\ X'(1)=0 \end{cases}$$ – Задача Штурма-Лиувилля

1) Пусть $\lambda=0$, тогда $X''=0$

$X=C_1x+C_2$

$X'=C_1$

$C_1=0$ при $x=0$ и $x=1$, C_2 – любое $\neq 0$. Примем $C_2=C$.

Следовательно, $X=C$ – собственная функция

$\lambda=0$ – собственное значение

$\|X_0\|^2=$

2) Пусть $\lambda=-\omega^2<0$, тогда $X''-\frac{\omega^2}{9}X=0$

$X=C_1e^{\frac{\omega}{3}x}+C_2e^{-\frac{\omega}{3}x}$

$X'=C_1\frac{\omega}{3}e^{\frac{\omega}{3}x}-C_2\frac{\omega}{3}e^{-\frac{\omega}{3}x}$

Назарова П.С. РЛ2-31
Билет №12

$$\begin{cases} 0 = c_1 \frac{\omega}{3} \cdot e^{\frac{\omega}{3}\cdot 0} - c_2 \frac{\omega}{3} \cdot e^{-\frac{\omega}{3}\cdot 0} \\ 0 = c_1 \frac{\omega}{3} e^{\frac{\omega}{3}\cdot 1} - c_2 \frac{\omega}{3} e^{-\frac{\omega}{3}\cdot 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = c_1 \cdot \cancel{\frac{\omega}{3}} - c_2 \cancel{\frac{\omega}{3}} \\ 0 = c_1 \cancel{\frac{\omega}{3}} e^{\frac{\omega}{3}} - c_2 \cancel{\frac{\omega}{3}} e^{-\frac{\omega}{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = c_1 - c_2 \\ 0 = c_1 e^{\frac{\omega}{3}} - c_2 e^{-\frac{\omega}{3}} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ e^{\frac{\omega}{3}} & -e^{-\frac{\omega}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ e^{\frac{\omega}{3}} & -e^{-\frac{\omega}{3}} \end{vmatrix} = -e^{\frac{\omega}{3}} + e^{-\frac{\omega}{3}} = 0$$

Нет таких ω, кроме $\omega = 0$ (не удовлетворяет рассматриваемому случаю)

Единственное решение - нулевое: $c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow X = 0.$

$\Downarrow$

$\lambda = -\omega^2 < 0$ - не собственные значения

$X = 0$ - не собственные функции

3) $\lambda = \omega^2 > 0$, тогда $X'' + \frac{\lambda}{9} X = 0$; $X'' + \frac{\omega^2}{9} X = 0$

$$X = c_1 \cos \frac{\omega}{3} x + c_2 \sin \frac{\omega}{3} x$$

$$X' = -c_1 \frac{\omega}{3} \sin \frac{\omega}{3} x + c_2 \frac{\omega}{3} \cos \frac{\omega}{3} x$$

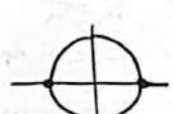
Подставляем условие:

$$\begin{cases} 0 = -c_1 \cancel{\frac{\omega}{3}} \cancel{\sin \frac{\omega}{3} \cdot 0}^{\,0} + c_2 \cancel{\frac{\omega}{3}} \cos \frac{\omega}{3} \cdot 0 \\ 0 = -c_1 \cancel{\frac{\omega}{3}} \sin \frac{\omega}{3} + c_2 \cancel{\frac{\omega}{3}} \cos \frac{\omega}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = c_2 \cancel{\frac{\omega}{3}} \\ 0 = -c_1 \cancel{\frac{\omega}{3}} \sin \frac{\omega}{3} + c_2 \cancel{\frac{\omega}{3}} \cos \frac{\omega}{3} \end{cases} \Leftrightarrow c_2 = 0 \Leftrightarrow 0 = -c_1 \sin \frac{\omega}{3}$$

$$c_1 \sin \frac{\omega}{3} = 0$$

$$c_1 \neq 0 \Rightarrow \sin \frac{\omega}{3} = 0$$



$$\frac{\omega}{3} = \pi n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\omega = 3\pi n \Rightarrow \lambda = \omega^2 = 9(\pi n)^2,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

собственные значения

$X_n = \cos \frac{3\pi n}{3} x = \cos \pi n x$ - собственные функции, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$\| X_n \|^2 = \frac{1}{2}$

Объединим 1-й и 3-й случаи: $X_n = \cos \pi n x$, $n = \overline{0, \infty}$, $\|X_0\|^2 = 1$, $\|X_n\|^2 = \frac{1}{2}$

$\lambda_n = (3\pi n)^2$, $n = \overline{0, \infty}$

Назарова П.С.
РЛ2-31
Билет №12

(II) $\frac{T''}{T} = -\lambda \mid \cdot T$

$T'' + \lambda T = 0$; λ найдена нами выше. Подставим её значение.

$T'' + (3\pi n)^2 T = 0$

$T_n = c_1 \cos 3\pi n t + c_2 \sin 3\pi n t$

(III) Объединим две задачи в общее решение:

$u_n = X_n(x) \cdot T_n(t)$

$u_n = \cos \pi n x \, (A_n \cos 3\pi n t + B_n \sin 3\pi n t)$

$u = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos \pi n x \, (A_n \cos 3\pi n t + B_n \sin 3\pi n t)$

(IV) Подставим начальные условия:

$u(x,0) = 0$

$u_t(x,0) = 18\pi \cos 6\pi x$

$u_t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos \pi n x \left(-3\pi n A_n \sin 3\pi n t + 3\pi n B_n \cos 3\pi n t\right)$

Подставляем:

• $0 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos \pi n x (A_n \cos 3\pi n t + B_n \sin 3\pi n t)$ – разложение нуля по собственным ф-циям задачи Штурма – Лиувилля

$0 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos \pi n x (A_n \overset{\nearrow 1}{\cancel{\cos 3\pi n \cdot 0}} + B_n \overset{\nearrow 0}{\cancel{\sin 3\pi n \cdot 0}})$

(2) $0 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos \pi n x \cdot A_n$ – разложение нуля по собственным ф-циям задачи Штурма – Лиувилля с коэффициентами A_n

• $18\pi \cos 6\pi x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos \pi n x \, (-3\pi n \cdot A_n \overset{\nearrow 0}{\cancel{\sin 3\pi n \cdot 0}} + 3\pi n \cdot B_n \overset{\nearrow 1}{\cancel{\cos 3\pi n \cdot 0}})$

(3) $18\pi \cos 6\pi x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos \pi n x \cdot 3\pi n \cdot B_n$ – разложение ф-ции $18\pi \cos 6\pi x$ по собственным ф-циям задачи Штурма – Лиувилля с коэффициентами $3\pi n B_n$

Из уравнения (2) видно, что $A_n = 0$

Рассмотрим уравнение (3): $18\pi \cos 6\pi x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos \pi n x \cdot 3\pi n \cdot B_n \ominus$

Воспользуемся свойством ортогональности с.ф. задачи Ш-Л.

Домножим обе части (3) на $\cos \pi n x$:

$18\pi \int\limits_0^1 \cos 6\pi x \cos \pi n x \, dx = 3\pi n \cdot \|X_n\|^2 \cdot B_n$

→ Если $n=0$, то $18\pi \int\limits_0^1 \cos 6\pi x \, dx \neq 0$. Тогда $\ominus \, 0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos \pi n x (3\pi n \cdot B_n)$ – не подходит

→ Если $n \neq 0$, то $\|X_n\|^2 = \frac{1}{2}$, тогда $B_n = \frac{18\pi \cdot 2}{3\pi n} \int\limits_0^1 \cos 6\pi x \cos \pi n x \, dx \ominus$

Назарова П.С. РЛ2-31
Билет №12

$$= \frac{12}{n}\int_0^1 \cos 6\pi x \cos \pi n x \, dx = \frac{12}{n}\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\cos(6\pi+\pi n)x + \cos(6\pi-\pi n)x\right)dx =$$

$$= \frac{6}{n}\left[\int_0^1 \cos(6+n)\pi x\, dx + \int_0^1 \cos(6-n)\pi x\, dx\right] = \frac{6}{n}\left[\frac{\sin(6+n)\pi x}{6+n} + \frac{\sin(6-n)\pi x}{6-n}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{6}{n}\left[\underbrace{\frac{\sin(6+n)\cdot\pi}{(6+n)}}_{=0\ \forall n} + \frac{\pi\sin(6-n)\pi}{\pi(6-n)} - \cancel{\frac{\sin(6+n)\pi\cdot 0}{6+n}}^{\to 0} - \cancel{\frac{\sin(6-n)\cdot\pi\cdot 0}{6-n}}^{\to 0}\right] = \frac{6}{n}\cdot\frac{\pi\sin(6-n)\pi}{\pi(6-n)} = \frac{6}{n}\cdot\pi\begin{cases}1, & n=6\\ 0, & n\neq 6\end{cases}$$

Итак $B_n = 0,\ n \neq 6$

$B_6 = 1$

Подставив всё в исходный ряд:

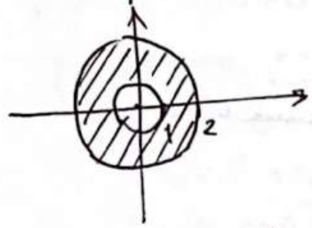
$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \cos\pi n x\,(A_n \cos 3\pi n t + B_n \sin 3\pi n t)$$

$$u = \cos 6\pi x \cdot \sin 18\pi t$$

Ответ: $u = \cos 6\pi x \sin 18\pi t$

Назарова П.С
РЛ2-31
Билет №12

№2 $\begin{cases} \Delta u = 0, \; 1 \le r \le 2, \; 0 \le \varphi \le 2\pi; \; r, \varphi \text{ - полярные координаты.} \\ u(1,\varphi) = \sin\varphi \\ u(2,\varphi) = \cos\varphi \end{cases}$



$\Phi(0) = \Phi(2\pi)$
$\Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$ – периодические условия

Оператор Лапласа в полярных координатах: $\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$

Разделим переменные:

Решение будем искать в виде $u = R(r)\cdot\Phi(\varphi)$

$\frac{\Phi}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{R}{r^2}\Phi'' = 0 \;\Big|\cdot\frac{r^2}{R\Phi}$

$-\frac{r}{R}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = \frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda = \text{const}.$

Задача делится на две:

(I) $\begin{cases} \frac{\Phi''}{\Phi} + \lambda = 0 \\ \Phi(0) = \Phi(2\pi) \\ \Phi'(0) = \Phi'(2\pi) \end{cases}$

$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0 \\ \Phi(0) = \Phi(2\pi) \\ \Phi'(0) = \Phi'(2\pi) \end{cases}$ – Задача Штурма – Лиувилля

1) Пусть $\lambda = 0$, тогда $\Phi'' = 0$

$\Phi = c_1\varphi + c_2$
$\Phi' = c_1$

$\begin{cases} \Phi = c_2 \\ \Phi = c_1\cdot 2\pi + c_2 \end{cases} \Rightarrow c_2 = c_1\cdot 2\pi + c_2$

$c_1 = 0, \; c_2$ – любое $\neq 0$

Примем $c_2 = c$, тогда $\boxed{\begin{matrix}\Phi = c \text{ – собственная функция} \\ \lambda = 0 \text{ – собственное значение}\end{matrix}}$

2) Пусть $\lambda = -\omega^2 < 0$, тогда $\Phi'' - \omega^2\Phi = 0$

$\Phi = c_1 e^{\omega\varphi} + c_2 e^{-\omega\varphi}$
$\Phi' = c_1\omega e^{\omega\varphi} - c_2\omega e^{-\omega\varphi}$

$\begin{cases} \Phi(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 \\ \Phi(2\pi) = c_1 e^{2\pi\omega} + c_2 e^{-2\pi\omega} \end{cases}$ $\begin{cases} \Phi'(0) = c_1\omega e^0 - c_2\omega e^0 \\ \Phi'(2\pi) = c_1\omega e^{\omega 2\pi} - c_2\omega e^{-2\pi\omega} \end{cases}$

$\begin{cases} c_1 + c_2 = c_1 e^{2\pi\omega} + c_2 e^{-2\pi\omega} \\ \cancel{\omega}c_1 - \cancel{\omega}c_2 = \cancel{\omega}c_1 e^{2\pi\omega} - \cancel{\omega}c_2 e^{-2\pi\omega} \end{cases}$

Кодарова П.С.
РЛ2-31
Билет №12

$$\begin{pmatrix} 1-e^{2\pi\omega} & 1-e^{-2\pi\omega} \\ 1-e^{2\pi\omega} & -(1-e^{-2\pi\omega}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-e^{2\pi\omega} & 1-e^{-2\pi\omega} \\ 1-e^{2\pi\omega} & -(1-e^{-2\pi\omega}) \end{vmatrix} = 2(1-e^{2\pi\omega})(1-e^{-2\pi\omega}) = 0$$

нет таких ω, кроме $\omega = 0$

$\Downarrow$

существует только тривиальное решение $C_1 = C_2 = 0$

$\Downarrow$

$\Phi = 0$ – не с. ф.

$\lambda = -\omega^2 < 0$ – не с. з.

3) $\lambda = \omega^2 > 0$

$$\begin{cases} \Phi'' + \omega^2\Phi = 0 \\ \Phi(0) = \Phi(2\pi) \\ \Phi'(0) = \Phi'(2\pi) \end{cases}$$

$\Phi = c_1 \cos\omega\varphi + c_2 \sin\omega\varphi$

$\Phi' = -c_1 \omega \sin\omega\varphi + \omega c_2 \cos\omega\varphi$

$$\begin{cases} c_1 = c_1 \cos 2\pi\omega + c_2 \sin 2\pi\omega \\ c_2\cancel{\omega} = -c_1\cancel{\omega} \sin 2\pi\omega + c_2\cancel{\omega} \cos 2\pi\omega \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\cos 2\pi\omega & -\sin 2\pi\omega \\ \sin 2\pi\omega & 1-\cos 2\pi\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\cos 2\pi\omega & -\sin 2\pi\omega \\ \sin 2\pi\omega & 1-\cos 2\pi\omega \end{vmatrix} = -(1-\cos 2\pi\omega)^2 - \sin^2 2\pi\omega = 0$$

$1 - 2\cos 2\pi\omega + \underbrace{\cos^2 2\pi\omega + \sin^2 2\pi\omega}_{=1} = 0$

$2 - 2\cos 2\pi\omega = 0$

$\cos 2\pi\omega = 1$

$2\pi\omega = 2\pi n,\ n = \overline{1,\infty}$

$\omega = n,\ n = \overline{1,\infty}$

$\lambda_n = \omega^2 = n^2$

$c_1 = c_1$

$c_2 = c_2$

$\Phi_n = \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases},\ n = \overline{1,\infty}$

$\|\Phi_n\|^2 = \pi$

Объединим 1-й и 3-й случаи:

$$\left.\begin{cases} \Phi = c_1 \overset{=1}{}\,,\ \lambda_0 = 0 \Rightarrow \|\Phi_0\|^2 = 2\pi \\ \Phi_n = \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases},\ n = \overline{1,\infty} \end{cases}\right\} \Rightarrow \Phi_n = \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases},\ n = \overline{0,\infty} \text{ – с. ф.}$$

$\lambda_n = n^2,\ n = \overline{0,\infty}$ – с. з.

(II) $r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right) - \lambda R = 0$. λ найдена нами в предыдущем пункте. Подставим:

Назарова П.С. РЛ2-31,
Билет №12

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - n^2 R = 0$$

$r^2R'' + rR' - n^2R = 0$ – уравнение Эйлера.

Сделаем замену: $r = e^t,\ R(r) \to y(t)$. Тогда:

$$y'' - n^2 y = 0$$

$$y = c_1 e^{nt} + c_2 e^{-nt}$$

$$n^2 = \lambda_n,\ n = \overline{0,\infty}$$

1) Если $n \neq 0$: $y = c_1 e^{nt} + c_2 e^{-nt}$ $\Rightarrow$ $R(r) = c_1 r^n + c_2 \dfrac{1}{r^n}$ $\quad c_2 = 0 \Rightarrow R(r) = c_1 r^n$

2) Если $n = 0$: $y'' = 0,\ y = c_1 t + c_2$ $\quad R(r) = c_1 \ln r + c_2 \quad R(r) = c_2$

$$R(r) = c_1 r^n + \frac{c_2}{r^n}$$

Естественное граничное условие: всё ограничено в кольце.

(III) Общее решение:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r)\Phi_n(\varphi) = R_0(r)\underbrace{\Phi_0(\varphi)}_{=1} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r)\Phi_n(\varphi) = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n\left[A_n \cos n\varphi + C_n \sin n\varphi\right] + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r^n}\left[B_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi\right]$$

(IV) Граничные условия:

$$u(1,\varphi) = \sin\varphi$$

$$u(2,\varphi) = \cos\varphi$$

$$\begin{cases} \sin\varphi = A_0 \ln 1 + B_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1^n\left[A_n \cos n\varphi + C_n \sin n\varphi\right] + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1^n}\left[B_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi\right] \\ \cos\varphi = A_0 \ln 2 + B_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n\left[A_n \cos n\varphi + C_n \sin n\varphi\right] + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\left[B_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi\right] \end{cases}$$

Воспользуемся свойством ортогональности и домножим все на $\cos 0\varphi$:

1) $\int\limits_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = -\cos\varphi\Big|_0^{2\pi} = -[1-1] = 0$

2) $\int\limits_0^{2\pi}$

Кадырова П. С. РЛ2-31
Билет №12

(№3) а) Метод разделения переменных для уравнения с неоднородными Г.У.:

$$\begin{cases} \rho P_t[u] = Lu \ \text{в} \ Q \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u \Big|_S = \mu(P;t)\Big|_{P\in S}, \ |\alpha| + |\beta| \neq 0 \\ \frac{\partial^k u}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = 0, \ k = \overline{0, m-1} \end{cases}$$

Необходимо сделать Г.У. однородными, чтобы задача решалась. Для этого сместим центр отсчёта.

Введём функцию: $u(t,M) = \underbrace{U(t,M)}_{\text{новая ф-ция}} + \underbrace{V(t,M)}_{\text{вспомогательная ф-ция}}$

вспомогательная ф-ция $\downarrow$ выбирается следующим образом: $\alpha \frac{\partial V}{\partial n} + \beta V\Big|_S = \mu(P;t)$

$$\rho P_t[u] = LU + \underbrace{LV - \rho P_t[V]}_{= f(M;t)}$$

$$\alpha \frac{\partial U}{\partial n} + \beta U\Big|_S + \underbrace{\alpha \frac{\partial V}{\partial n} + \beta V\Big|_S}_{\mu(P;t)} = \mu(P;t) \Rightarrow \alpha \frac{\partial U}{\partial n} + \beta U\Big|_S = 0$$

$$\frac{\partial^k U}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = -\frac{\partial^k V}{\partial t^k}\Big|_{t=0}$$

$$u = U + V$$

$$\begin{cases} \rho P_t[U] = LU + f \\ \alpha \frac{\partial U}{\partial n} + \beta U\Big|_S = 0 \\ \frac{\partial^k U}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = -\frac{\partial^k V}{\partial t^k}\Big|_{t=0} \end{cases} \qquad U = U_1 + U_2$$

Таким образом, исходная задача разделяется на две:

(I)
$$\begin{cases} \rho P_t[U_1] = LU_1 \\ \alpha \frac{\partial U_1}{\partial n} + \beta U_1\Big|_S = 0 \\ \frac{\partial^k U_1}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = -\frac{\partial^k V}{\partial t^k}\Big|_{t=0} \end{cases}$$

(II)
$$\begin{cases} \rho P_t[U_2] = LU_2 \\ \alpha \frac{\partial U_2}{\partial n} + \beta U_2\Big|_S = 0 \\ \frac{\partial^k U_2}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

б) $u_{xx} + 2u_{xy} + 1u_{yy} + 3u_x - 5u_y = 0$.

Определим тип уравнения. $a_{11} = 1$; $a_{12} = \frac{2}{2}$; $a_{22} = 1$

Найдём определитель: $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = (1)^2 - 1 \cdot 1 = 0$

$\Delta = 0 \Rightarrow$ параболический тип

Составим канонический вид:
Составим характеристическое уравнение: $a_{11}\lambda^2 - 2a_{12}\lambda + a_{22} = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

Козарева П.С. РЛ2-31
Билет №12

$$(\lambda-1)^2=0$$
$$\lambda_{1,2}=1$$

Составим дифференциальное уравнение (уравнение характеристик): $\frac{dy}{dx}=1$

$$dy=dx$$
$$y=x+C$$
$$c=\boxed{y-x=\xi}$$

Выберем переменную η у условия линейной независимости.
Якобиан не должен равняться нулю.

$$J(\xi\eta)\begin{vmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y}\\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0$$

Пусть $\boxed{\eta=y}$

$$\begin{cases}\xi=y-x\\ \eta=y\end{cases}$$ - характеристики

Тогда $\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0+1=1\neq 0$

$\xi_x=-1 \quad \eta_x=0$

$\xi_y=1 \quad \eta_y=1$

Найдём частные производные 1-го и 2-го порядков.

- $u_x=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial\eta}=\underline{-u_\xi}$
- $u_y=\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial\eta}=\underline{u_\xi+u_\eta}$
- $u_{xx}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}(-u_\xi)+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta}(-u_\xi)=\underline{u_{\xi\xi}}$
- $u_{yy}=\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\xi}(u_\xi+u_\eta)+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\eta}(u_\xi+u_\eta)=u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}+u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}=\underline{u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}}$
- $u_{xy}=\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\xi}(-u_\xi)+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\eta}(-u_\xi)=\underline{-u_{\xi\xi}-u_{\xi\eta}}$

Подставляем найденные производные в исходное уравнение:

$$u_{\xi\xi}+2(u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta})+u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}+3u_\xi-5(u_\xi+u_\eta)=\cancel{u_{\xi\xi}}-\cancel{2u_{\xi\xi}}-\cancel{2u_{\xi\eta}}+\cancel{u_{\xi\xi}}+$$
$$+\cancel{2u_{\xi\eta}}+u_{\eta\eta}-3u_\xi-5u_\xi-5u_\eta=u_{\eta\eta}-8u_\xi-5u_\eta=0$$

$\underline{u_{\eta\eta}=8u_\xi+5u_\eta}$ – канонический вид уравнения параболического типа

Ответ: параболический; $u_{\eta\eta}=8u_\xi+5u_\eta$