Гурьев П.М. РЛ2-31 Билет 4 Экзамен УМФ и ПФ

1) Решить первую смешанную задачу:

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{4} u_{xx} + 5\cos 2t \sin 2x \\ u(x,0)=0 & 0<x<\pi \\ u(0,t)=0 & 0<t<\infty \\ u(\pi,t)=0 \end{cases}$$

Замена: $u(x,t) = X(x)T(t)$; $\begin{matrix} T(t)X(0)=0 \\ T(t)X(\pi)=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} X(0)=0 \\ X(\pi)=0 \end{matrix}$

$XT' = \frac{1}{4}X''T = -\lambda$

$\frac{1}{4}\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda \Rightarrow$ I) $\begin{cases} X'' + 4\lambda X = 0 \\ X(0)=0 \\ X(\pi)=0 \end{cases}$

1) $\lambda=0$; $X''=0$; $X = C_1x + C_2$; $\begin{cases} 0 = C_1\cdot 0 + C_2 \\ 0 = C_1\cdot\pi + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow X \equiv 0$ – не СФ, $\lambda = 0$ – не СЗ

2) $\lambda = -\omega^2 < 0$; $X'' - 4\omega^2 x = 0$; $X = C_1 e^{2\omega x} + C_2 e^{-2\omega x}$; $\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ 0 = C_1 e^{2\pi\omega} + C_2 e^{-2\pi\omega} \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{2\pi\omega} & e^{-2\pi\omega} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{2\pi\omega} & e^{-2\pi\omega} \end{vmatrix} = 0$ (диспер. ур-е)

$e^{-2\pi\omega} - e^{2\pi\omega} = 0$ ни при каких ω данное р-во не выполняется $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ единственное решение при $C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow X \equiv 0$ – не СФ $\Rightarrow \lambda < 0$ – не СЗ

3) $\lambda = \omega^2 > 0$; $X'' + 4\omega^2 X = 0$; $X = C_1\cos 2\omega x + C_2 \sin 2\omega x$;

$\begin{cases} 0 = C_1 \\ 0 = C_2 \sin 2\pi\omega \end{cases} \Rightarrow C_2 \neq 0 \Rightarrow \sin 2\pi\omega = 0 \Rightarrow 2\pi\omega = \pi n,\ n = \overline{1,\infty} \Rightarrow \omega = \frac{n}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{n}{2}\right)^2$ – СЗ $\Rightarrow X_n = \sin nx$ – СФ ; $\|X_n\|^2 = \frac{\pi}{2}$; $\|X_n\|^2 = \int_0^\pi \sin^2 nx\, dx = \frac{\pi}{2}$

II) $\frac{T'}{T} = -\lambda$; $\frac{T'}{T} = -\left(\frac{n}{2}\right)^2$; $\frac{dT}{T} = -\left(\frac{n}{2}\right)^2 \Rightarrow T_n = C_1 e^{-\left(\frac{n}{2}\right)t}$

III) $u = \sum_{n=1}^{\infty}{}' X_n T_n$

$\sum_{n=1}^{\infty}{}' T_n' \cdot \sin nx = -\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}{}' T_n \cdot \sin nx \cdot n^2 + 5\cos 2t \sin 2x$

$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(T_n' + \frac{n^2}{4}T_n\right)\sin nx = 5\cos 2t \sin 2x \quad | \cdot \sin nx$

$\left(T_n' + \frac{n^2}{4}T_n\right)\|X_n\|^2 = 5\cos 2t \int_0^\pi \sin 2x \sin nx\, dx$

$\int_0^\pi \sin 2x \sin nx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos(2-n)x - \cos(2+n)x]\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2-n)x}{2-n} - \frac{\sin(2+n)x}{2+n}\right]_0^\pi =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi\sin(2-n)\pi}{(2-n)\pi} - \underbrace{\cancel{\frac{\sin(2+n)\pi}{2+n}}}_{\to 0,\ \forall n>0}\right] = \frac{\pi}{2}\begin{cases} 1, & n=2 \\ 0, & \forall n \neq 2 \end{cases}$

Гуроев П.М РП2 31
билет 4.

$$(T_2'+T_2)\cdot\frac{\pi}{2} = 5\cos 2t\cdot\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} T_2'+T_2 = 5\cos 2t \\ T_n'+T_n = 0,\ \forall n\neq 2\end{cases}$$

$T_{он} = T_{оо} + T_{ч.н.}$

$T_{оо}:\ T_2'+T_2=0; \Rightarrow T_2 = C_1e^{-t};$

$T_{он} = C(t)e^{-t}$

$\Downarrow$

$$C'(t)e^{-t} - \cancel{C(t)e^{-t}} + \cancel{C(t)e^{-t}} = 5\cos 2t$$

$$C'(t)e^{-t} = 5\cos 2t \Rightarrow C'(t) = 5\cos 2t\, e^{t} \Rightarrow C(t) = \int 5e^t\cos 2t\,dt + \tilde{C}$$

$$\int 5e^t\cos 2t\,dt = 5\int e^t\cos 2t\,dt = 5\int e^t\,\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}\,dt = \frac{5}{2}\int e^t\left(e^{2it}+e^{-2it}\right)dt =$$

$$= \frac{5}{2}\int\left(e^{t(1+2i)}+e^{t(1-2i)}\right)dt = \frac{5}{2}\left(\frac{e^{t(1+2i)}}{1+2i}+\frac{e^{t(1-2i)}}{1-2i}\right) = \frac{5}{2}\left(\frac{(1-2i)e^{t(1+2i)}+(1+2i)e^{t(1-2i)}}{5}\right) =$$

$$= \frac{e^{t(1+2i)} - 2ie^{t(1+2i)} + e^{t(1-2i)} + 2ie^{t(1-2i)}}{2} =$$

$$= \frac{e^te^{2it} - 2ie^te^{2it} + e^t\cdot e^{-2it} + 2ie^t\cdot e^{-2it}}{2} =$$

$$= \frac{e^t\left(e^{2it}+e^{-2it}\right)}{2} - \frac{2i^2e^t\left(e^{2it}-e^{-2it}\right)}{2\cdot i} = e^t\left(\frac{e^{2it}+e^{-2it}}{2}\right) + 2e^t\left(\frac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i}\right) =$$

$$= e^t\cos 2t + 2e^t\sin 2t = e^t(\cos 2t + 2\sin 2t) \Rightarrow C(t) = e^t(\cos 2t + 2\sin 2t) + \tilde{C}$$

воспользуемся начальными условиями: $T(0)=0$

$$\begin{cases} T_{он} = \cos 2t + 2\sin 2t + \tilde{C}e^{-t} \\ T(0)=0 \end{cases} \Rightarrow 0 = 1+\tilde{C} \Rightarrow \tilde{C}=-1 \Rightarrow \underline{T_2 = -e^{-t}}$$

<u>Ответ:</u> $u = \sum_{n=1}^{\infty} X_nT_n = X_2T_2 = \underline{-\sin 2x\cdot e^{-t}}$

2) Решить краевую задачу для ур-я Лапласа в круге — Гурьев П. М. РЛ2-31 Билет 4.

$$\begin{cases} \Delta U = 0 & 0 \le r < 1 \;;\; 0 \le \varphi \le 2\pi \\ U(1,\varphi) = \cos^3\varphi - \cos^2\varphi + \sin\varphi. \end{cases}$$

Перейдем в полярные координаты:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0 \;;\quad U = R(r)\Phi(\varphi) \not\equiv 0$$

$$\frac{\Phi}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{R}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = 0 \;\Big|\cdot \frac{r^2}{R\Phi}$$

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = \frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda$$

I) $\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0 \\ \Phi(0) = \Phi(2\pi) \\ \Phi'(0) = \Phi'(2\pi) \end{cases}$

1) $\lambda = 0$; $\Phi'' = 0$; $\begin{cases} \Phi = C_1\varphi + C_2 \\ \Phi' = C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = C_1 \cdot 2\pi + C_2 \\ C_1 = C_1 \end{cases}$

$C_1 = 0$, C_2 - любое, $C_2 \ne 0 \Rightarrow \Phi = C$ - СФ, $\|\Phi_0\|^2 = 2\pi$

$\lambda = 0$ - СЗ, $\|\Phi_0\|^2 = C^2\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$

2) $\lambda = -\omega^2 < 0$; $\Phi'' - \omega^2\Phi = 0$

$$\begin{cases} \Phi = C_1 e^{\omega\varphi} + C_2 e^{-\omega\varphi} \\ \Phi' = \omega C_1 e^{\omega\varphi} - \omega C_2 e^{-\omega\varphi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = C_1 e^{2\pi\omega} + C_2 e^{-2\pi\omega} \\ C_1\omega - C_2\omega = \omega C_1 e^{2\pi\omega} - \omega C_2 e^{-2\pi\omega} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 - e^{2\pi\omega} & 1 - e^{-2\pi\omega} \\ 1 - e^{2\pi\omega} & -1 + e^{-2\pi\omega} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 - e^{2\pi\omega} & 1 - e^{-2\pi\omega} \\ 1 - e^{2\pi\omega} & -1 + e^{-2\pi\omega} \end{vmatrix} = 0$$ (дисперс. ур-е)

$-2(1 - e^{2\pi\omega})(1 - e^{-2\pi\omega}) = 0$; ни при каких ω данное равенство не выполняется $\Rightarrow$ единств. решение при $C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \Phi \equiv 0$ - не СФ $\Rightarrow \lambda < 0$ - не СЗ

3) $\lambda = \omega^2 > 0$; $\Phi'' + \omega^2\Phi = 0$

$$\begin{cases} \Phi = C_1\cos\omega\varphi + C_2\sin\omega\varphi \\ \Phi' = -\omega C_1\sin\omega\varphi + \omega C_2\cos\omega\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = C_1\cos 2\pi\omega + C_2\sin 2\pi\omega \\ C_2\omega = -\omega C_1\sin 2\pi\omega + \omega C_2\cos 2\pi\omega \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \cos 2\pi\omega & -\sin 2\pi\omega \\ \sin 2\pi\omega & 1 - \cos 2\pi\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};\; \begin{vmatrix} 1 - \cos 2\pi\omega & -\sin 2\pi\omega \\ \sin 2\pi\omega & 1 - \cos 2\pi\omega \end{vmatrix} = 0$$

$(1 - \cos 2\pi\omega)^2 + \sin^2 2\pi\omega = 0$;

$1 - 2\cos 2\pi\omega + \cos^2 2\pi\omega + \sin^2 2\pi\omega = 0$; $\Rightarrow \cos 2\pi\omega = 1$; $2\pi\omega = 2\pi n$, $n = \overline{1,\infty}$

$\omega = n \Rightarrow \lambda_n = n^2$ - СЗ

подставим ω в $(*)$ $\Rightarrow \begin{cases} C_1 = C_1 \\ C_2 = C_2 \end{cases} \Rightarrow \Phi_n = \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}$ - СФ, $n = \overline{1,\infty}$; $\|\Phi_n\|^2 = \pi$

объединение решений:

$$\begin{cases} \Phi_0 = C, & \|\Phi_0\|^2 = 2\pi, & \lambda_0 = 0 \\ \Phi_n = \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}, & \|\Phi_n\|^2 = \pi, & \lambda_n = n^2, n = \overline{1,\infty} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi_n = \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases} \text{ - СФ} & \|\Phi_0\|^2 = 2\pi \\ \lambda_n = n^2, n = \overline{0,\infty} \text{ - СЗ} & \|\Phi_n\|^2 = \pi \end{cases}$$

Гурьев П.М РП2-31
билет 4.

II) $\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)=\lambda \mid \cdot R$; $r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)-n^2R=0$

$r^2R''+rR'-n^2R=0$ - ур-е Эйлера

Замена: $r=e^t$; $R(r)\to R(e^t)\to y(t)$.

$e^t\frac{d}{de^t}\left(e^t\frac{dy(t)}{de^t}\right)-n^2y(t)=0 \Rightarrow y''-n^2y=0$

1) при $n\neq0$: $y(t)=C_1e^{nt}+C_2e^{-nt}$

2) при $n=0$: $y(t)=C_1t+C_2$

В старых переменных:

$n\neq0$: $\begin{cases} R(r)=C_1r^n+C_2r^{-n} \\ R(r)=C_1\ln r+C_2 \end{cases}$
$n=0$:

Наложим естественные ГУ: Ф-ции должны быть ограничены в круге при $r\to0$

- $\frac{1}{r^n}$ при $r\to0$ $=\infty \Rightarrow C_2=0$ при $n\neq0$

- $\ln r$ при $r\to0$ $=\infty$ или не существует $\Rightarrow C_1=0$ при $n=0$

$\Downarrow$

Решение ур-я Эйлера: $\begin{cases} R(r)=C_1r^n, & n\neq0 \\ R(r)=C_2, & n=0 \end{cases}$

Объединим эти решения:

$R(r)=r^n$, $n=\overline{0,\infty}$

III) $U=R(r)\Phi(\varphi)$

$U=\sum\limits_{n=0}^{\infty}r^n\{A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\}=A_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n\{A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\}$

$U(1,\varphi)=\cos^3\varphi-\cos^2\varphi+\sin\varphi=\cos\varphi\left(\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)-\left(\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)+\sin\varphi=$

$=\frac{\cos\varphi}{2}+\frac{1}{2}\cos\varphi\cos2\varphi-\frac{1}{2}-\frac{\cos2\varphi}{2}+\sin\varphi=\frac{\cos\varphi}{2}+\frac{1}{4}(\cos(\varphi-2\varphi)+\cos(\varphi+2\varphi))-\frac{1}{2}-$

$-\frac{\cos2\varphi}{2}+\sin\varphi=\frac{\cos\varphi}{2}+\frac{\cos\varphi}{4}+\frac{\cos3\varphi}{4}-\frac{1}{2}-\frac{\cos2\varphi}{2}+\sin\varphi=$

$=\frac{3}{4}\cos\varphi+\frac{\cos3\varphi}{4}-\frac{1}{2}-\frac{\cos2\varphi}{2}+\sin\varphi$

$\frac{3}{4}\cos\varphi+\frac{\cos3\varphi}{4}-\frac{1}{2}-\frac{\cos2\varphi}{2}+\sin\varphi=A_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\{A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\}$.

Домножим на $\cos0\varphi$ для поиска A_0:

$\frac{3}{4}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi}_{1}+\frac{1}{4}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos3\varphi\,d\varphi}_{2}-\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi}d\varphi}_{3}-\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos2\varphi\,d\varphi}_{4}+\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi}_{5}=A_0\underbrace{\int_0^{2\pi}d\varphi}_{6}+A_n\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos n\varphi\,d\varphi}_{7}+$
$+B_n\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin n\varphi\,d\varphi}_{8}$

① $\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi=\sin\varphi\Big|_0^{2\pi}=\sin2\pi-\sin0=0$

②: $\int_0^{2\pi}\cos3\varphi\,d\varphi=\frac{\sin3\varphi}{3}\Big|_0^{2\pi}=0$

③ $-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi=-\frac{1}{2}\,2\pi=-\pi$

Гурьев П.М РЛ2-31
билет 4.

④ $\int_0^{2\pi}\cos 2\varphi d\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi} = 0$

⑤ $\int_0^{2\pi}\sin\varphi d\varphi = -\cos\varphi\Big|_0^{2\pi} = -(1-1)=0$

⑥ $\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$

⑦ $\int_0^{2\pi}\cos n\varphi d\varphi = 0$

⑧ $\int_0^{2\pi}\sin n\varphi d\varphi = 0$

$\Downarrow$

$-\pi = A_0\cdot 2\pi \Rightarrow A_0 = -\frac{1}{2}$

Домножим на $\cos n\varphi$ для поиска A_n:

$$\frac{3}{4}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\varphi\cos n\varphi d\varphi}_{①} + \frac{1}{4}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos 3\varphi\cos n\varphi\, d\varphi}_{②} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos n\varphi d\varphi}_{③} + \underbrace{\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos n\varphi}_{④} \overbrace{-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2\varphi\cos n\varphi d\varphi}^{⑤} = A_n \|\Phi_n\|^2 + (*)$$

Г①: $\int_0^{2\pi}\cos\varphi\cos n\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\cos(\varphi-n\varphi)+\cos(\varphi+n\varphi)]d\varphi = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(1-n)\varphi}{1-n}+\frac{\sin(1+n)\varphi}{1+n}\right]_0^{2\pi} =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{2\pi\sin(1-n)2\pi}{(1-n)2\pi} + \cancel{\frac{\sin(1+n)2\pi}{1+n}}^{\to 0,\forall n>0}\right] = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\begin{cases}1, & n=1\\ 0, & \forall n\neq 1\end{cases} = \pi\begin{cases}1, & n=1\\ 0, & \forall n\neq 1\end{cases}$

② $\int_0^{2\pi}\cos 3\varphi\cos n\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\cos(3-n)\varphi+\cos(3+n)\varphi]d\varphi = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(3-n)\varphi}{3-n}+\frac{\sin(3+n)\varphi}{3+n}\right]_0^{2\pi} =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{2\pi\sin(3-n)2\pi}{(3-n)2\pi} + \cancel{\frac{\sin(3+n)2\pi}{(3+n)}}^{\to 0,\forall n>0}\right] = \pi\begin{cases}1, & n=3\\ 0, & \forall n\neq 3\end{cases}$

③ $\cancel{-\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi}\cos n\varphi d\varphi = \frac{\sin n\varphi}{n}\Big|_0^{2\pi} = \frac{\sin 2\pi n}{n} = 2\pi\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & \forall n\neq 0\end{cases}$

④ $\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos n\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\sin(1+n)\varphi+\sin(1-n)\varphi]d\varphi = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(1+n)\varphi}{1+n}+\frac{\cos(1-n)\varphi}{1-n}\right]_0^{2\pi} =$

$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\overbrace{\cos(1+n)2\pi}^{=1}}{1+n} + \frac{\overbrace{\cos(1-n)2\pi}^{=1}}{1-n} - \frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-n}\right] = 0$; ⑤: $\int_0^{2\pi}\cos 2\varphi\cos n\varphi = \pi\begin{cases}1, & n=2\\ 0, & \forall n\neq 2\end{cases}$

(*) (при коэфф B_n) $\int_0^{2\pi}\cos n\varphi\sin n\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin(2n)\varphi + \sin 0\varphi\, d\varphi = -\frac{1}{4n}\cos 2n\Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{4n}(1-1) = 0$

$\frac{3}{4}\pi\begin{cases}1, & n=1\\ 0, & \forall n\neq 1\end{cases} + \frac{1}{4}\pi\begin{cases}1, & n=3\\ 0, & \forall n\neq 3\end{cases} - \frac{1}{2}\cdot 2\pi\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & \forall n\neq 0\end{cases} - \frac{\pi}{2}\begin{cases}1, & n=2\\ 0, & \forall n\neq 2\end{cases} = A_n\|\Phi_n\|^2$

$$\begin{cases}A_1\cdot\pi = \frac{3}{4}\pi\\ A_3\cdot\pi = \frac{1}{4}\pi\\ A_0\cdot 2\pi = -\pi\\ A_2\cdot\pi = -\frac{\pi}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A_1 = \frac{3}{4}, \quad A_2 = -\frac{1}{2}\\ A_3 = \frac{1}{4}\\ A_0 = -\frac{1}{2}, \quad A_n = 0, \forall n\neq 1,3,0\end{cases}$$

Домножим на $\sin n\varphi$ для поиска B_n:

$$\frac{3}{4}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin n\varphi\,d\varphi+\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos 3\varphi\sin n\varphi-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin n\varphi\,d\varphi-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2\varphi\sin n\varphi+\int_0^{2\pi}\sin\varphi\sin n\varphi=$$
$$=B_n\Pi\varphi_n\Pi^2 \ (*)$$

① $\int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin n\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\sin(n+1)\varphi+\sin(n-1)\varphi]d\varphi=-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(n+1)\varphi}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\varphi}{n-1}\right]_0^{2\pi}=$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(n+1)2\pi}{n+1}+\frac{\cos(n-1)2\pi}{n-1}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right]=0$

② $\int_0^{2\pi}\cos 3\varphi\sin n\varphi=0$ (аналогично ①)

③ $\int_0^{2\pi}\sin n\varphi\,d\varphi=-\frac{\cos n\varphi}{n}\Big|_0^{2\pi}=-\frac{1}{n}(1-1)=0$

④ $\int_0^{2\pi}\cos 2\varphi\sin n\varphi\,d\varphi=0$ (аналогично ①)

⑤ $\int_0^{2\pi}\sin\varphi\sin n\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\cos(1-n)\varphi-\cos(1+n)\varphi]d\varphi=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(1-n)\varphi}{1-n}-\frac{\sin(1+n)\varphi}{1+n}\right]_0^{2\pi}=$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{2\pi\sin(1-n)2\pi}{(1-n)2\pi}-\frac{\sin(1+n)2\pi}{1+n}\right]=\pi\begin{cases}1, & n=1\\ 0, & \forall n\neq 1\end{cases}$

(*) $\int_0^{2\pi}\sin n\varphi\cos n\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\sin(2n)\varphi+\sin 0\varphi]d\varphi=-\frac{1}{2\cdot 2n}\cos 2n\varphi\Big|_0^{2\pi}=0$ (как для A_n)

$\pi\begin{cases}1, & n=1\\ 0, & \forall n\neq 1\end{cases}=B_n\cdot\Pi\varphi_n\Pi^2 \Rightarrow \pi=B_1\cdot\pi \Rightarrow B_1=1,\ B_n=0,\ \forall n\neq 1$

Ответ: $U=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\{A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\}$

$U=-\frac{1}{2}+r\cdot\frac{3}{4}\cos\varphi+\sin\varphi-\frac{1}{2}r^2\cos 2\varphi+\frac{1}{4}r^3\cos 3\varphi.$

Гурьев П.М РПТ-31
билет 4.

3 $\boxed{b}$: определить тип уравнения
Привести его к каноническому виду.

$2u_{xx}+3u_{xy}+u_{yy}+7u_x+4u_y=0$

1) $a_{11}=2,\quad a_{12}=a_{21}=\frac{3}{2},\quad a_{22}=1$

$\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=\frac{9}{4}-2=\frac{9}{4}-\frac{8}{4}=\frac{1}{4}>0 \Rightarrow$ гиперболический тип

2) Характеристическое ур-е: $a_{11}\lambda^2-2a_{12}\lambda+a_{22}=0$

$2\lambda^2-3\lambda+1=0$; где $\lambda=\frac{dy}{dx}$

$D=9-4\cdot 2=1$

$\begin{cases}\lambda_1=\frac{3+1}{4}=1\\ \lambda_2=\frac{3-1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow$ уравнения характеристик:

$\frac{dy}{dx}=\lambda_1(x,y)$ $\qquad$ $\frac{dy}{dx}=\lambda_2(x,y)$

$\frac{dy}{dx}=1$ $\qquad$ $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}$

$dy=dx$ $\qquad$ $dy=\frac{1}{2}dx$

$y=x+C_1$ $\qquad$ $y=\frac{1}{2}x+C_2$

$C_1=y-x$ $\qquad$ $C_2=y-\frac{1}{2}x$

выберем новые переменные:

$\begin{cases}\xi=C_1=y-x\\ \eta=C_2=y-\frac{1}{2}x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\xi_x=-1 & \xi_y=1\\ \eta_x=-\frac{1}{2} & \eta_y=1\end{cases}$

3) Частные производные:

$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial\eta}=-u_\xi-\frac{1}{2}u_\eta$

$u_y=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial\eta}=u_\xi+u_\eta$

$u_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial u_x}{\partial\eta}=-1(-u_{\xi\xi}-\frac{1}{2}u_{\eta\xi})-\frac{1}{2}(-u_{\xi\eta}-\frac{1}{2}u_{\eta\eta})=$

$=u_{\xi\xi}+\frac{1}{2}u_{\xi\eta}+\frac{1}{2}u_{\xi\eta}+\frac{1}{4}u_{\eta\eta}=u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}+\frac{1}{4}u_{\eta\eta}$

$u_{yy}=\frac{\partial u_y}{\partial y}=\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial u_y}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial u_y}{\partial\eta}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}$

$u_{xy}=\frac{\partial u_y}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial u_y}{\partial\eta}=\cancel{-1(u_{\xi\xi}+u_{\eta\xi}}=-1(u_{\xi\xi}+u_{\eta\xi})-\frac{1}{2}(u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta})=$

$=-u_{\xi\xi}-u_{\xi\eta}-\frac{1}{2}u_{\xi\eta}-\frac{1}{2}u_{\eta\eta}=-u_{\xi\xi}-\frac{3}{2}u_{\xi\eta}-\frac{1}{2}u_{\eta\eta}$

4) Подстановка в исходное ур-е.

$$2\left(U_{\xi\xi}+U_{\xi\eta}+\frac{1}{4}U_{\eta\eta}\right)+3\left(-U_{\xi\xi}-\frac{3}{2}U_{\xi\eta}-\frac{1}{2}U_{\eta\eta}\right)+U_{\xi\xi}+2U_{\xi\eta}+U_{\eta\eta}+7\left(-U_\xi-\frac{1}{2}U_\eta\right)+$$
$$+4(U_\xi+U_\eta)=0$$

$$2U_{\xi\xi}+2U_{\xi\eta}+\frac{1}{2}U_{\eta\eta}-3U_{\xi\xi}-\frac{1}{2}U_{\xi\eta}-\frac{3}{2}U_{\eta\eta}+U_{\xi\xi}+2U_{\xi\eta}+U_{\eta\eta}-7U_\xi-\frac{7}{2}U_\eta+4U_\xi+4U_\eta=0.$$

$\frac{7}{2}U_{\xi\eta}-3U_\xi+\frac{1}{2}U_\eta=0$; $\quad \frac{7}{2}U_{\xi\eta}=3U_\xi-\frac{1}{2}U_\eta$

$$U_{\xi\eta}=\frac{2}{7}\left(3U_\xi-\frac{1}{2}U_\eta\right)$$

$$U_{\xi\eta}=\frac{6}{7}U_\xi-\frac{1}{7}U_\eta$$ – каноническая форма исходного ур-я

3 $\boxed{а}$ Приведение ур-я с двумя независимыми переменными параболического типа к каноническому виду.

Пусть ур-е: $a_{11}U_{xx}+2a_{12}U_{xy}+a_{22}U_{yy}+F(x,y,U,U_x,U_y)=0$

параболического типа, т.е. $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{12}=0 \Rightarrow \lambda_1(x,y)=\lambda_2(x,y)=\lambda$

Тогда: $\frac{dy}{dx}=\lambda(x,y) \Rightarrow$ замена переменных $\Rightarrow \xi(x,y)=C$, $C=y-\lambda x$

вторая переменная выбирается произвольным образом с условием, что они обе должны быть линейно независимы, т.е. $J(\xi,\eta)\neq0$, где $J(\xi,\eta)=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}\neq0$

Тогда канонич. ур-е параболического типа имеет вид:

$U_{\eta\eta}=F(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta)$