Вычисление длины дуги

- Если гладкая кривая задана уравнением $y = f(x)$, то длина её дуги, ограниченной прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx. \tag{1}$$

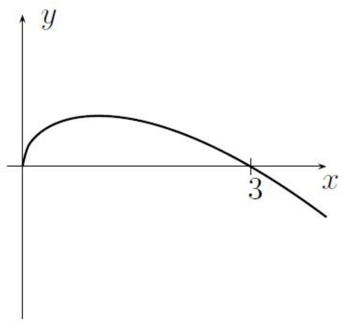
- Длина дуги гладкой кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, заданной параметрически,

$$l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt. \tag{2}$$

- Если задано полярное уравнение гладкой кривой $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то

$$l = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi. \tag{3}$$

6.494. Найти длину дуги кривой $y = \dfrac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}$ между точками её пересечения с осью Ox.



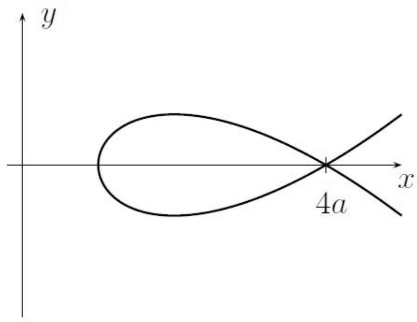
Вычислим первую производную функции $y(x)$, для вычисления длины дуги воспользуемся в формулой (1).

$y' = -\dfrac{1}{3}\sqrt{x} + \dfrac{1}{3}(3 - x)\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = -\dfrac{1}{2}\sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $(y')^2 = \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4x}$;

$$l = \int\limits_0^3 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int\limits_0^3 \sqrt{\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x}}\, dx = \int\limits_0^3 \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{\sqrt{4x}}\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{x}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \left|\frac{1}{3}x\sqrt{x} + \sqrt{x}\right|_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

6.506. Найти длину петли кривой $x = a(t^2 + 1)$, $y = \dfrac{a}{3}(t^3 - 3t)$ $a > 0$.



Найдём точку самопересечения кривой:

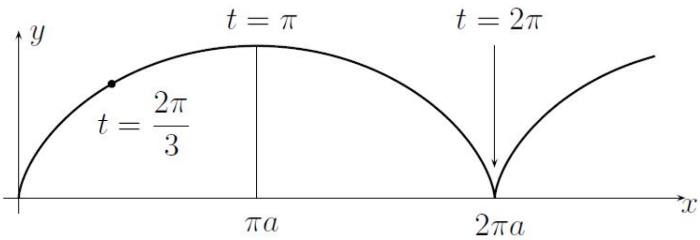
$$\begin{cases} a(t_1^2+1)=a(t_2^2+1) \\ a(t_1^3-3t_1)/3=a(t_2^3-3t_2)/3 \\ t_1\neq t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} t_1^2=t_2^2 \\ t_1^3-3t_1=\pm(t_1^3-3t_1)\Rightarrow t_1(t_1^2-3)=t_2(t_2^2-3), \end{array}$$

последнее равенство верно в случае, когда $t_1^3-3t_1=0\Rightarrow t_1=0$ или $t_1=\pm\sqrt{3}\Rightarrow t_2=\mp\sqrt{3}$
Видим, что кривая симметрична относительно оси Ох. Поэтому достаточно вычислить длину половины дуги и умножить её на два.

$$l=2\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=2\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4a^2t^2+a^2(t^2-1)^2}\,dt=2a\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4t^2+t^4-2t^2+1}\,dt=$$

$$=2a\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{(t^2+1)^2}\,dt==2a\int\limits_0^{\sqrt{3}}(t^2+1)\,dt=2a\left(\frac{3\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}\right)=4a\sqrt{3}.$$

6.507. На циклоиде $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ найти точку, которая делит длину первой арки циклоиды в отношении $1:3$, считая от начала координат ($a>0$).



Кривая задана параметрически, поэтому для нахождения длины акри нам потребуется формула (2).
Первые производные : $x'_t=a(1-\cos t)$, $y'_t=a\sin t$.
Длина участка циклоиды от начала координат до точки $t=\tau$, $\tau\in[0,2\pi]$,

$$L(\tau)=\int\limits_0^{\tau}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt=\int\limits_0^{\tau}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=a\int\limits_0^{\tau}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=$$

$$=a\sqrt{2}\int\limits_0^{\tau}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2a\int\limits_0^{\tau}\left|\sin\frac{t}{2}\right|\,dt=(\text{т.к. }\tau\in[0,2\pi])=2a\int\limits_0^{\tau}\sin\frac{t}{2}\,dt=4a\int\limits_0^{\tau}\sin\frac{t}{2}\,d\left(\frac{t}{2}\right)=$$

$$=4a\left(-\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{\tau}=4a\left(1-\cos\frac{\tau}{2}\right).$$

Таким образом, длина одной арки циклоиды $L(2\pi) = 8a$.
Найдём такое τ^*, при котором будет выполнено заданное соотношение 1:3. То есть, разделим длину арки на 4 равные части и получим длины каждой из этих частей:

$$L(\tau^*) = \frac{1}{4}L(2\pi) = 2a$$

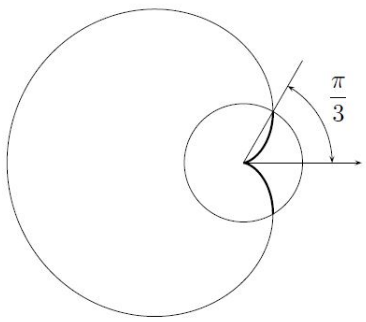
Таким образом:

$$4a\left(1 - \cos\frac{\tau^*}{2}\right) = 2a \;\Rightarrow\; \cos\frac{\tau^*}{2} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \tau^* = \frac{2\pi}{3}.$$

Искомая точка имеет координаты

$$x(\tau^*) = a\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) = a\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad y(\tau^*) = a\left(1 - \cos\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3a}{2}. \triangleright$$

6.509. Найти длину дуги кардиоиды $r = 2(1-\cos\varphi)$, находящейся внутри окружности $r = 1$ $(a > 0)$.



Найдём точки пересечения кардиоиды и окружности:
$2(1 - \cos\varphi) = 1,\ \varphi \in [0, 2\pi] \;\Rightarrow\; \cos\varphi = \dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \varphi = \pm\dfrac{\pi}{3}$.
Заметим, что дуга состоит из двух одинаковых элементов, симметричных относительно полярной оси. Вычислим половину дуги:

$$\frac{L}{2} = \int\limits_0^{\pi/3} \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi/3} \sqrt{4(1-\cos\varphi)^2 + 4\sin^2\varphi}\,d\varphi = 2\int\limits_0^{\pi/3} \sqrt{2 - 2\cos\varphi}\,d\varphi =$$
$$= 4\int\limits_0^{\pi/3} \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}\,d\varphi = 4\int\limits_0^{\pi/3} \sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi = 4\int\limits_0^{\pi/3} \left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|\,d\varphi = 8\int\limits_0^{\pi/3} \sin\frac{\varphi}{2}\,d\left(\frac{\varphi}{2}\right) =$$
$$= 8\left(-\cos\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/3} = 8\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \Rightarrow L = 8\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

Площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой

- Площадь поверхности, образованной вращением дуги кривой вокруг произвольной оси, выражается формулой

$$S = 2\pi\int\limits_A^B R\,dl, \tag{4}$$

где R — расстояние от точки на кривой до оси вращения, dl — дифференциал дуги, A и B — пределы интегрирования, соответствующие концам дуги.

- Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой, заданной функцией $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, вычисляется по формуле

$$S_x = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{5}$$

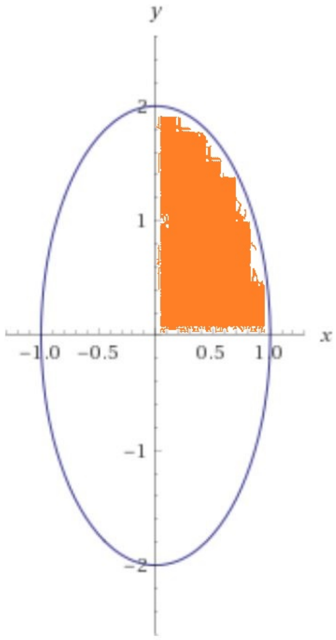
- Если дуга задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, то

$$S_x = 2\pi \int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt. \tag{6}$$

- Если дуга задана в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то

$$S_x = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} r \sin\varphi \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi. \tag{7}$$

6.519 (а). Найти площадь поверхности эллипсоида, образованного вращением эллипса $4x^2 + y^2 = 4$ вокруг оси Ox.



Уравнение эллипса имеет вид:

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, \quad y = \pm 2\sqrt{1 - x^2}.$$

Воспользуемся формулой (5). Эллипс симметричен относительно оси Oy. Расcторим половину эллиса, лежащую правее оси Oy. Данный фрагмент симметричен относительно оси Ox, поэтому достатоточно рассмотреть лишь окрашенную часть.

$$f(x) = 2\sqrt{1-x^2}, \quad f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$S_x = 2\cdot 2\pi \int\limits_0^1 2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx = 8\pi\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\frac{4x^2}{1-x^2}}\,dx =$$

$$= 8\pi\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\sqrt{\frac{1-x^2+4x^2}{1-x^2}}\,dx = 8\pi\int\limits_0^1 \sqrt{1+3x^2}\,dx;$$

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1+3x^2}\,dx = \begin{vmatrix} u=\sqrt{1+3x^2} \\ dv = dx \end{vmatrix} = x\sqrt{1+3x^2}\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 x\frac{6x}{2\sqrt{1+3x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{1+3x^2}\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{1+3x^2-1}{\sqrt{1+3x^2}}\,dx = x\sqrt{1+3x^2}\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \left(\sqrt{1+3x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+3x^2}}\right)dx =$$

$$= 2 - \int\limits_0^1 \sqrt{1+3x^2}\,dx + \frac{1}{\sqrt{3}}\int\limits_0^1 \frac{d\left(\sqrt{3}x\right)}{\sqrt{1+3x^2}} = 2 - \int\limits_0^1 \sqrt{1+3x^2}\,dx + \frac{1}{\sqrt{3}}\ln(\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2+1})\Big|_0^1 =$$

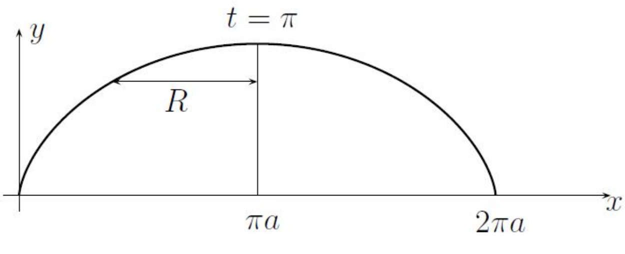
$$= 2 - \int\limits_0^1 \sqrt{1+3x^2}\,dx + \frac{1}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3});$$

Получили уравнение,где в качестве неизвестного слагаемого выступает интеграл, интегральное слагаемое переносим направо и решаем уравнение

$$2\int\limits_0^1 \sqrt{1+3x^2}\,dx = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3});$$

$$S_x = 8\pi\int\limits_0^1 \sqrt{1+3x^2}\,dx = 8\pi + \frac{4\pi}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3}).$$

6.527. Найти площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, вокруг её оси симметрии.



Кривая задана параметрически, используем формулу (6).
Вычислим производные:

$$x'_t = a(1-\cos t),\ y'_t = a\sin t.$$

Замечание: ось симметрии – прямая, перпендикулярная оси Ox при $t=\pi$. Вращая часть арки, определенную при $t\in[0;\pi]$, получаем объемную фигуру. Вторую часть арки, определенную при $t\in[\pi;2\pi]$ не стоит включать в рассмотрение, поскольку вращение данного элемента вокруг оси симметрии приводит к точно такой же объемной фигуре, что и первый элемент, информация будет излишней, результат ошибочным.

$$S = 2\pi\int\limits_0^\pi (\pi a - x(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt = 2\pi\int\limits_0^\pi (\pi a - a(t-\sin t))\sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt =$$

$$= 2\pi a^2\int\limits_0^\pi (\pi - t + \sin t)\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt = 2\pi a^2\int\limits_0^\pi(\pi - t+\sin t)\sqrt{2-2\cos t}\,dt =$$

$$= 2\pi a^2\int\limits_0^\pi(\pi-t+\sin t)\sqrt{4\cdot\frac{1-\cos t}{2}}\,dt = 4\pi a^2\int\limits_0^\pi(\pi-t+\sin t)\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}\,dt =$$

(т.к. $0\leqslant t\leqslant\pi$, то $\sin t/2\geqslant 0$)

$$= 4\pi a^2\int\limits_0^\pi(\pi-t+\sin t)\sin\frac{t}{2}\,dt = 4\pi a^2\int\limits_0^\pi(\pi-t)\sin\frac{t}{2}\,dt + 4\pi a^2\int\limits_0^\pi \sin t\sin\frac{t}{2}\,dt;$$

$$\int\limits_0^\pi(\pi-t)\sin\frac{t}{2}\,dt = \left|\begin{matrix} u=\pi-t,\ v=-2\cos\frac{t}{2} \\ dv=\sin\frac{t}{2}\,dt\end{matrix}\right| = -2\,(\pi-t)\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)(-1)\,dt =$$

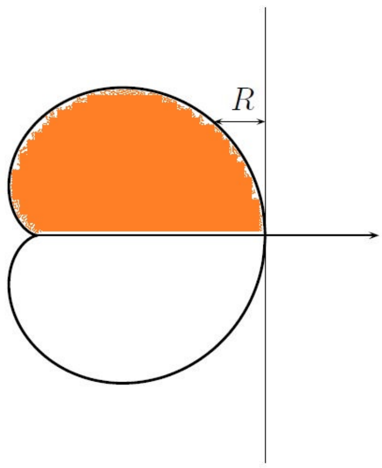
$$= 2\pi - \int\limits_0^\pi 2\cos\frac{t}{2}\,dt = 2\pi - 4\sin\frac{t}{2}\Big|_0^\pi = 2\pi-4.$$

$$\int\limits_0^\pi \sin t\sin\frac{t}{2}\,dt = 2\int\limits_0^\pi\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,dt = 2\int\limits_0^\pi \sin^2\frac{t}{2}\cdot 2\,d\left(\sin\frac{t}{2}\right) = \frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\Big|_0^\pi = \frac{4}{3}.$$

Получаем:

$$S = 4\pi a^2(2\pi - 4 + 4/3) = 4\pi a^2(2\pi - 8/3) = a^2\left(8\pi^2 - \frac{32}{3}\pi\right).$$

6.530. Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $r = a(1+\cos\varphi)$ вокруг касательной в её вершине $(2a, 0)$.



Кривая задана в полярной СК, следовтельно используем формулу (7).
$r' = -a\sin\varphi$; $R(\varphi) = 2a - a(1+\cos\varphi)\cos\varphi$.

$$S = 2\cdot 2\pi\int\limits_0^\pi R(\varphi)\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi = 4\pi\int\limits_0^\pi (2a - a(1+\cos\varphi)\cos\varphi)\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi =$$

$$= 4\pi a\int\limits_0^\pi (2-\cos\varphi-\cos^2\varphi)\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= 4\pi a^2\int\limits_0^\pi (2-\cos\varphi-\cos^2\varphi)\sqrt{2+2\cos\varphi}\,d\varphi = 4\pi a^2\int\limits_0^\pi (2-\cos\varphi-\cos^2\varphi)\sqrt{4\cdot\frac{1+\cos\varphi}{2}}\,d\varphi =$$

$$= 8\pi a^2\int\limits_0^\pi (2-\cos\varphi-\cos^2\varphi)\sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi = 8\pi a^2\int\limits_0^\pi (2-\cos\varphi-\cos^2\varphi)\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= 8\pi a^2\int\limits_0^\pi (1-\cos\varphi+\sin^2\varphi)\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi;$$

$$\triangleright\int\limits_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = 2;$$

$$\triangleright\int\limits_0^\pi \cos\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = \int\limits_0^\pi\left(\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = \int\limits_0^\pi\left(1-2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi - 2\int\limits_0^\pi \sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi - 4\int\limits_0^\pi \sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi - \frac{4}{3}\sin^3\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = 2-\frac{4}{3} = \frac{2}{3};$$

$$\triangleright\int\limits_0^\pi \sin^2\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = \int\limits_0^\pi 4\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos^3\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = \int\limits_0^\pi 8\sin^2\frac{\varphi}{2}\left(1-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\,d\left(\sin\frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$= 8\left(\frac{1}{3}\sin^3\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{5}\sin^5\frac{\varphi}{2}\right)\Big|_0^\pi = \frac{8}{3}-\frac{8}{5};$$

$$S = 8\pi a^2\left(2-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}-\frac{8}{5}\right) = 8\pi a^2\cdot\frac{12}{5} = \frac{96}{5}\pi a^2.$$

Текущее ДЗ: 6.499, 6.504, 6.511, 6.519 (б), 6.523 (а), 6.526, 6.529, 6.531.
+ Подготовка к Рубежному Контролю.