Занятие 22. Интегрирование нормальных систем ДУ (сведение к ДУ высшего порядка).

Если система k дифференциальных уравнений, связывающая независимую переменную x и k функций $y_1(x)$,$\cdots$,$y_k(x)$ разрешена относительно старших производных этих функций,то есть имеет вид

$$\begin{cases} y_1'^{(p_1)}(x) = f_1(x, y_1, \cdots, y_1^{(p_1-1)}, \cdots, y_k, \cdots, y_k^{(p_k-1)}), \\ y_2'^{(p_2)}(x) = f_2(x, y_1, \cdots, y_1^{(p_1-1)}, \cdots, y_k, \cdots, y_k^{(p_k-1)}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_k'^{(p_k)}(x) = f_k(x, y_1, \cdots, y_1^{(p_1-1)}, \cdots, y_k, \cdots, y_k^{(p_k-1)}), \\ \end{cases} \tag{1}$$

то она называется *канонической*, причем число $n = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$ называется *порядком системы.* Каноническая система (1) при $p_1 = p_2 = \cdots = p_k = 1$,т.е. система дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1, \cdots, y_n), \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1, \cdots, y_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1, \cdots, y_n), \end{cases} \tag{2}$$

называется *нормальной* системой *порядка n.*

Решением системы (2) на интервале $a < x < b$ называется совокупность функций $y_1\phi_1(x)$,$\cdots$,$y_n = \phi_n(x)$ непрерывно дифференцируемых на (a, b) и обращающих уравнения системы (2) в тождества относительно $x \in (a, b)$.

Интегралом нормальной системы (2) называется функция $\Phi(x, y_1, \cdots, y_n)$ определенная и непрерывная вместе с частными производными $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$,$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}$,$\cdots$,$\frac{\partial \Phi}{\partial y_n}$ в некоторой области D изменения переменных и принимающая при любых $x \in (a, b)$ постоянное значение при подстановке в неё произвольного решения системы.

Равенство

$$\Phi(x, y_1, \cdots, y_n) = C,$$

где $\Phi(x, y_1, \cdots, y_n)$ – интеграл нормальной системы, а C –произвольная постоянная, называется *первым интегралом* системы (2).

9.402. Записать дифференциальное уравнение $y''' - xyy' + (y')^3 = 0$ в виде системы.

Пусть $y = y_1$, $y' = y_2$, $y'' = y_3$.

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= xy_1y_2 - y_2^3. \end{cases}$$

9.409. Показать, что функция $\Psi(x, y, z) = x + y + z$ является первым интегралом системы

$$\begin{cases} y' = \dfrac{z}{y - z} \\ z' = \dfrac{y}{z - y}. \end{cases}$$

Производная первого интеграла должна быть равна нулю, проверим это:
$\Psi'(x) = 1 + y' + z' = 1 + \dfrac{z}{y - z} + \dfrac{y}{z - y} = \dfrac{y - z + z - y}{y - z} = 0.$

Метод интегрирования нормальных систем

Одним из методов решения систем ДУ является метод исключения неизвестных, который сводит систему уравнений к одному или нескольким дифференциальным уравнениям с одной неизвестной функцией в каждом.

Не всякую систему ДУ можно свести к одному уравнению.

Другим методом интегрирования систем ДУ является метод выделения интегрируемых комбинаций, т.е. получения из системы (2) такого уравнения, которое можно проинтегрировать и получить первый интеграл системы.

Если найдены n независимых первых интегралов, то их совокупность дает общий интеграл этой системы.

Найти общие решения систем:

9.412. $\begin{cases} \dot{x} &= 1/y \\ \dot{y} &= 1/x. \end{cases}$

Исключаем переменную y:

$$\ddot{x} = -\frac{1}{y^2} \cdot \dot{y} = -(\dot{x})^2 \cdot \frac{1}{x}.$$

Теперь сделаем замену $z(x) = \dot{x}$, $\ddot{x} = \dot{z} = z'_x \dot{x} = z'z$; получаем

$$zz' = \frac{-z^2}{x} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} z = 0 \\ z' = -z/x. \end{array} \right.$$

Из $z = 0$ следует $x = C$, но это невозможно, т.к. тогда $\dot{x} = 1/y = 0$.

$$z' = -z/x \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{z}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{C}{x},\ C \neq 0.$$

Интегрируя, получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{C}{x} \quad \Rightarrow \quad x\,dx = C\,dt \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{2} = Ct + D \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2Ct + 2D.$$

Т.к. $C \neq 0$, можем записать

$$\frac{1}{C}x^2 = 2t + \frac{2D}{C} \text{ или } \tilde{C}x^2 = 2t + \tilde{D},\ \tilde{C} \in R,\ \tilde{D} \in R.$$

$$y = \frac{1}{\dot{x}} = \frac{x}{C} \quad \Rightarrow \quad x = Cy \quad \Rightarrow \quad C^2y^2 = 2Ct + 2D \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2\tilde{C}t + \tilde{C}\tilde{D}.$$

9.413. $\dfrac{dt}{xy} = \dfrac{dx}{ty} = \dfrac{dy}{tx}.$

Умножим на txy все части равенства:

$$t\,dt = x\,dx = y\,dy$$

$$t\,dt = x\,dx \quad\Rightarrow\quad t^2 - x^2 = C_1; \qquad t\,dt = y\,dy \quad\Rightarrow\quad t^2 - y^2 = C_2.$$

9.417 $\dfrac{dt}{xt} = \dfrac{dx}{x^2} = \dfrac{dy}{txy - 2t^2}$.

Умножив первое равенство на x^2t, получим

$$x\,dt = t\,dx \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} \dfrac{dt}{t} = \dfrac{dx}{x} \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Поэтому $x = C_1 t$, $C_1 \neq 0$.

Теперь определим y:

$$\frac{dt}{C_1t^2} = \frac{dy}{C_1t^2y - 2t^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{dt}{C_1} = \frac{dy}{C_1y - 2} \quad\Rightarrow\quad dt = \frac{dy}{y - 2/C_1}.$$

Отсюда $t = \ln\left|y - \dfrac{2}{C_1}\right| + \ln|C_2|$, $e^t = C_2\left(y - \dfrac{2}{C_1}\right)$ и $y = \dfrac{e^t}{C_2} + \dfrac{2}{C_1}$.

9.429 $\dot{x} = -y/t$, $\dot{y} = -x/t$.

$\triangleleft$ Это линейная система. Имеем $\dot{x}t = -y$. Дифференцируя и выражая y из второго уравнения, получаем уравнение Эйлера:

$$\ddot{x}t + \dot{x} = -\dot{y} = \frac{x}{t} \quad\Rightarrow\quad \ddot{x}t^2 + \dot{x}t - x = 0.$$

Делаем замену $t = e^u$: $\dot{x} = x'_u \cdot \dot{u} = x' \cdot \dfrac{1}{t}$, $\ddot{x} = \dfrac{x''\dot{u}t - x'}{t^2} = \dfrac{x'' - x'}{t^2}$;

$$\ddot{x}t^2 + \dot{x}t - x = x'' - x' + x' - x = x'' - x = 0.$$

Отсюда $x = C_1e^u + C_2e^{-u} = C_1t + \dfrac{C_2}{t}$.

Из первого уравнения системы $y = -t\dot{x} = -t\left(C_1 - \dfrac{C_2}{t^2}\right) = -C_1t + \dfrac{C_2}{t}$. $\triangleright$

Интегрирование нормальных систем ДУ с постоянными коэффициентами. Общее решение. ФСР.

Получить решения нормальной системы с постоянными коэффициентами можно методом исключения переменных. Для этого небходимо продиффренцировать одно из уравнений и подставить в него вторую компоненту. В результате получится линейное однородное ДУ с постоянными коэффициентами.

9.431. $\begin{cases} \dot{x} &= \quad y \\ \dot{y} &= -2x + 3y. \end{cases}$

Исключим функцию y из первого уравнения,продифференцируем первое уравнение $\ddot{x} = \dot{y}$

Выполняем подстановку

$\ddot{x} = -2x + 3\dot{x}$

$\ddot{x} + 2x - 3\dot{x} = 0$

Характеристичекое уравнение: $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$

Общее решение: $x = C_1e^{2t} + C_2e^t$.

$\dot{x} = y$, значит $y = 2C_1e^{2t} + C_2e^t$

9.433. Решить задачу Коши $\begin{cases} \dot{x} &= 3x - 2y \\ \dot{y} &= 4x + 7y. \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.
Исключим функцию y из первого уравнения,продифференцируем первое уравнение $\ddot{x} = 3\dot{x} - 2\dot{y}$
Выполняем подстановку
$\ddot{x} = 3\dot{x} - 2 - 8x - 14y$
Заметим, что из первого уравнения можно выразить $y = \frac{-\dot{x}+3x}{2}$
$\ddot{x} - 10\dot{x} + 29x = 0$
Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 5 \pm 2i$
Общее решение: $x = C_1 e^{5t} \cos 2t + C_2 e^{5t} \sin 2t$
$y = -\frac{1}{2}(2C_1 e^{5t} \cos 2t - 2C_1 e^{5t} \sin 2t + 2C_2 e^{5t} \sin 2t + 2C_2 e^{5t} \cos 2x)$
З.Коши: $1 = C_1, 0 = -C_1 - C_2$,откуда $C_1 = 1, C_2 = -1$.
Ответ: $x = e^{5t} \cos 2t - e^{5t} \sin 2t$,$y = 2e^{5t} \sin 2t$

9.435. Решить самостоятельно: $\begin{cases} \dot{x} &= x - 4y \\ \dot{y} &= x - 3y. \end{cases}$

Можно эти же задания решать с момощью матриц:

Нормальная линейная однородная система n-го порядка в матричной форме имеет вид:

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t), \tag{3}$$

где $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ldots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$

В частном случае, когда матрица $A(t)$ в правой части не зависит от t, для отыскания ФСР могут быть использованы методы линейной алгебры.

Из характеристического уравнения

$$\det(a - \lambda E) = 0 \tag{4}$$

находятся различные корни λ_1,λ_2,$\dots$,λ_n, и для всякого корня λ (с учетом его кратности) определяется соответствующее ему частное решение. Решить системы:

9.431. $\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -2x + 3y. \end{cases}$

Матрица системы: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Решаем уравнение вида (4), находим корни: $A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$; $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$.

Находим частные решения, соответствующие каждому корню:
1) $\lambda_1 = 1$.

$$(A - E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) $\lambda_2 = 2$.

$$(A - 2E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$. $\triangleright$

9.433. Решить задачу Коши $\begin{cases} \dot{x} &= 3x - 2y \\ \dot{y} &= 4x + 7y. \end{cases}$, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Матрица системы:
$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

Решаем уравнение вида (4), находим корни:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & 7-\lambda \end{pmatrix}; \quad \det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 10\lambda + 29 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 5 \pm 2i.$$

Корни получились комплексные: $\lambda_1 = 5 + 2i$:

$$(A-(5+2i)E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2i & -2 \\ 4 & 2-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow X^{\lambda_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix}.$$

$$ReX^{\lambda_1} = Re\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} e^{(5+2i)t}\right) = Re \begin{pmatrix} e^{5t}(\cos 2t + i\sin 2t) \\ (-1-i)e^{5t}(\cos 2t + i \sin 2t) \end{pmatrix} =$$

$$= e^{5t} Re \begin{pmatrix} \cos 2t + i \sin 2t \\ -\cos 2t - i\sin 2t - i\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} = e^{5t} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix};$$

Аналогично

$$ImX^{\lambda_1} = Im\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} e^{(5+2i)t}\right) = e^{5t} Im \begin{pmatrix} \cos 2t + i\sin 2t \\ -\cos 2t - i\sin 2t - i\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} =$$

$$= e^{5t} \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -\sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Общее решение: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{5t} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -\sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix}$.
$x(0) = 1 \Rightarrow C_1 = 1$. $\quad y(0) = 0 \Rightarrow -C_1 - C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -1$.
Ответ: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{5t} \begin{pmatrix} \cos 2t - \sin 2t \\ 2\sin 2t \end{pmatrix}$.

9.435. $\begin{cases} \dot{x} &= x - 4y \\ \dot{y} &= x - 3y. \end{cases}$

Матрица системы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ Находим корни:

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1.$$

Будем искать решение в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 t \\ a_2 + b_2 t \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Имеем

$$\dot{x} = -(a_1 + b_1 t)e^{-t} + b_1 e^{-t} = (b_1 - a_1 - b_1 t)e^{-t};$$
$$\dot{y} = -(a_2 + b_2 t)e^{-t} + b_2 e^{-t} = (b_2 - a_2 - b_2 t)e^{-t}.$$

Подставляем в исходное уравнение и сокращаем e^{-t}:

$$\begin{cases} b_1 - a_1 - b_1 t &= a_1 + b_1 t - 4(a_2 + b_2 t) \\ b_2 - a_2 - b_2 t &= a_1 + b_1 t - 3(a_2 + b_2 t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 - a_1 - b_1 t &= a_1 - 4a_2 + (b_1 - 4b_2)t \\ b_2 - a_2 - b_2 t &= a_1 - 3a_2 + (b_1 - 3b_2)t \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 - 2a_1 + 4a_2 &= (2b_1 - 4b_2)t \\ b_2 + 2a_2 - a_1 &= (b_1 - 2b_2)t \end{cases}$$

Решая СЛАУ

$$\begin{cases} b_1 - 2a_1 + 4a_2 &= 0 \\ 2b_1 - 4b_2 &= 0 \\ b_2 + 2a_2 - a_1 &= 0 \\ b_1 - 2b_2 &= 0, \end{cases}$$

получаем $a_1 = b_2 + 2a_2$, $b_1 = 2b_2$. Обозначая свободные переменные $b_2 = C_1$, $a_2 = C_2$, записываем ответ

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + 2C_2 + 2C_1 t \\ C_2 + C_1 t \end{pmatrix} e^{-t}. \triangleright$$