Линейные уравнения первого порядка.

Уравнение

$$y' + a(x)y = b(x)$$

называется линейным.

Чтобы его решить, надо сначала решить уравнение $y' + a(x)y = 0$ (это делается путем разделения переменных) и в общем решении последнего заменить произвольную постоянную C на неизвестную функцию $C(x)$. Затем выражение, полученное для y, подставить в исходное уравнение и найти $C(x)$.

Замечание: некоторые уравнения становятся линейными, если поменять местами искомую функцию и независимое переменное, то есть рассматривать зависимость $x(y)$, а не $y(x)$.

Решить дифференциальные уравнения:

9.67. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

$\triangleleft$ Решаем однородное уравнение: $y' + 2xy = 0$ или $\dfrac{dy}{y} = -2x\,dx$ – уравнение с разделяющимися переменными (Заметим, что здесь выпадает случай $y = 0$, учтём его потом.)

$$\int \frac{dy}{y} = \int -2x\,dx$$

После интегривания получаем:

$$\ln|y| = -x^2 + \ln C.$$

Общее решение однородного уравнения (с учётом $y = 0$):

$$y_O = Ce^{-x^2}.$$

Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = C(x)e^{-x^2}$.

Тогда

$$y' = C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2},$$

Подставляем y' и y в исходное уравнение

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2},$$

откуда $C'(x) = x$, $C(x) = \dfrac{x^2}{2} + \tilde{C}$.

Итак, $y = \left(\dfrac{x^2}{2} + \tilde{C}\right)e^{-x^2}$. $\triangleright$

9.72. $y' + \dfrac{y}{x} = 2\ln x + 1$.

$\triangleleft$ Решаем однородное уравнение: $y' + \dfrac{y}{x} = 0$ или $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{dx}{x}$, $\ln|y| = -\ln|x| + \ln C$; $y_O = \dfrac{C}{x}$.

Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = \frac{C(x)}{x}, \quad y' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2}.$$

Подставляем y' и y в исходное уравнение, находим $C(x)$:

$$\frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = 2\ln x + 1.$$

$$C'(x) = 2x\ln x + x.$$

$$C(x) = \int 2x\ln x\,dx + \int x\,dx = \begin{vmatrix} u = \ln x \\ v = x^2 \end{vmatrix} = x^2\ln x - \int x\,dx + \int x\,dx = x^2\ln x + \tilde{C}.$$

Ответ: $y = \left(x^2\ln x + \tilde{C}\right)/x = x\ln x + \dfrac{\tilde{C}}{x}$. $\triangleright$

9.74. $y' = \dfrac{y}{x+y^3}$.

$\triangleleft$ Уравнение станет линейным, если рассмотреть его относительно обратной функции $x(y)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + y^2 \text{ или } y = 0, \text{ т.к. делим на } dy \text{ и } y.$$

Решаем однородное уравнение: $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}$

$$\Rightarrow \ln|x| = \ln|y| + \ln|C|, \quad x = Cy$$

Решение неоднородного уравнения ищем в виде $x = C(y)y$.

$$\frac{dx}{dy} = C'(y)y + C(y); \quad C'(y)y + C(y) = C(y) + y^2 \quad \Rightarrow \quad C'(y) = y,\ C(y) = \frac{y^2}{2} + \tilde{C}.$$

Ответ: $x(y) = y^3/2 + \tilde{C}y$ или $y = 0$. $\triangleright$

9.83. Найти частное решение уравнения $y' + y\operatorname{tg} x = 1/\cos x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$.

$\triangleleft$ Решаем однородное уравнение: $y' + y\operatorname{tg} x = 0$ или $\dfrac{dy}{y} = -\operatorname{tg} x\,dx$.

$$-\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \ln|\cos x| + \ln C;$$

$$\ln|y| = \ln|\cos x| + \ln C \quad \Rightarrow \quad y_O = C\cos x.$$

Решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = C(x)\cos x$.

$$y' = C'(x)\cos x - C(x)\sin x$$

Подставляем в исходную функцию:

$$C'(x)\cos x - C(x)\sin x + C(x)\sin x = \frac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$C(x) = \operatorname{tg} x + \tilde{C}$.
Общее решение $y = \tilde{C}\cos x + \sin x$, $y(0) = \tilde{C}\cos x = 0$, $\tilde{C} = 0$.

Ответ: $y = \sin x$. $\triangleright$

Уравнение Бернулли

Чтобы решить уравнение Бернулли, то есть уравнение вида

$$y' + a(x)y = b(x)y^n, \quad (n \neq 1),$$

надо обе его части разделить на y^n и сделать замену $y^{(1-n)} = z$.
После замены получается линейное уравнение, которое можно решить изложенным выше способом.

Решить дифференциальные уравнения:
9.86. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$.
◁ Разделим обе части уравнения на y^{n-1}, здесь $n = 0.5$, поэтому делим на $2\sqrt{y}$: Делим на $\sqrt{y}$, значит возможна потеря решения $y = 0$.

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} + 2x\sqrt{y} = xe^{-x^2}.$$

Введем новую неизвестную функцию $z(x) = \sqrt{y}$:

$$z' + 2xz = xe^{-x^2}.$$

Это уравнение из задачи **9.67**!!! Знаем, что решая его, получим $z = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2}$.
Тогда

$$y = z^2 = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)^2 e^{-2x^2}. \triangleright$$

9.88. $y' = y(y^3 \cos x + \operatorname{tg} x)$.

◁ $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$
$y' - y \operatorname{tg} x = y^4 \cos x$
Делим на y^4 (возможна потеря решения $y = 0$, поставим его в исходное уравнение, выполняется тождество). $\frac{y'}{y^4} - \frac{\operatorname{tg} x}{y^3} = \cos x$ $(*)$
Сделаем замену $z = y^{1-n} = y^{-3}$.
Тогда $y = z^{-1/3}$, $y' = -\frac{1}{3}z^{-4/3}z'$, подставим в $(*)$

$$z' + 3z \operatorname{tg} x = -3\cos x \qquad (**) - \text{ линейное уравнение.}$$

Решаем однородное уравнение: $z' + 3z \operatorname{tg} x = 0$, $\frac{dz}{z} = -3 \operatorname{tg} x \, dx$, $\ln|z| = 3\ln|\cos x| + \ln C$;

$$z_O = C\cos^3 x.$$

Решение неоднородного ищем в виде: $z = C(x)\cos^3 x$.
$z' = C'(x)\cos^3 x - 3C(x)\cos^2 x \sin x$.
Подставляем в $(**)$ z и z':

$$C'(x)\cos^3 x - 3C(x)\cos^2 x \sin x = -3\cos x - 3C(x)\cos^3 x \operatorname{tg} x$$

$$C'(x) = -\frac{3}{\cos^2 x}, \quad C(x) = -3\operatorname{tg} x + C, \quad z = (-3\operatorname{tg} x + C)\cos^3 x.$$

Ответ: $y = \dfrac{1}{\cos x\sqrt[3]{-3\operatorname{tg} x + C}}$ и $y = 0$. $\triangleright$

9.92. $xy' + y = 2x^2 y \ln y \cdot y'$.

$\triangleleft$ Уравнение следует рассмотреть относительно обратной функции $x(y)$:

$$y = (2xy\ln y - 1)\, x\frac{dy}{dx}$$

$$y\, dx = (2xy\ln y - 1)\, x\, dy$$

Потери решения $y = 0$ не происходиит, так как область определения не включает это значение.

$$x'(y) = 2x^2\ln y - \frac{x}{y}$$

Сделаем замену $z(y) = x^{1-n} = x^{-1}$, $x' = -z'/z^2$.
Тогда

$$-\frac{z'}{z^2} = \frac{2\ln y}{z^2} - \frac{1}{yz}$$

$$z' = -2\ln y + \frac{z}{y} \qquad (*)$$

Решаем однородное уравнение: $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{z}{y}$, $\dfrac{dz}{z} = \dfrac{dy}{y}$, $z = Cy$.
Неоднородное уравнение ищем в виде: $z = C(y)y$, $z' = C'(y)y + C(y)$.
Подставляем z и z' в $(*)$

$$C'(y)y + C(y) = -2\ln y + C(y)$$

$$C'(y) = -\frac{2\ln y}{y}, \quad C(y) = -2\int \ln y\, d(\ln y) = -\ln^2 y + C$$

$$z = -y\ln^2 y + Cy$$

Итак,

$$x = \frac{1}{-y\ln^2 y + Cy}\triangleright$$

Текущее ДЗ: 9.68, 9.69, 9.75, 9.80, 9.84, 9.87, 9.93, 9.94.