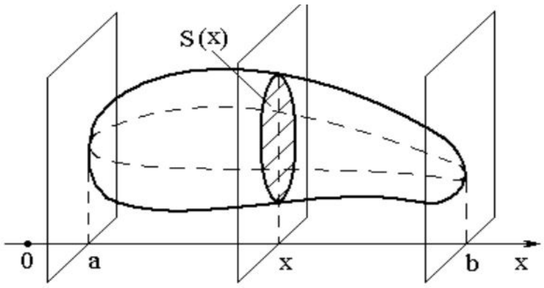
Занятие 11. Вычисление объёмов тел по известным площадям поперечных сечений и объёмов тел вращения. Приложения определённого интеграла в физике.

Вычисление объема тела по известным площадям поперечных сечений.



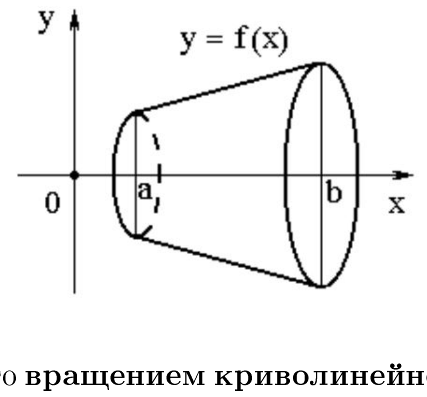
- Пусть в пространстве задано тело. Пусть построены его сечения плоскостями, перпендикулярными оси Ox и проходящими через точки $x \in [a;b]$.Площадь фигуры, образующейся в сечении зависит от точки x, определяющей плоскость сечения. Пусть эта зависимость известна и задана непрерывной на $[a;b]$ функцией $S(x)$. Тогда объем части тела, находящейся между плоскостями $x = a$ и $x = b$ вычисляется по формуле (1):

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{1}$$

Объем тела вращения.

- Объём тела, образованного **вращением криволинейной трапеции**, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox, **вокруг оси** Ox вычисляется по формуле (2)

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{2}$$

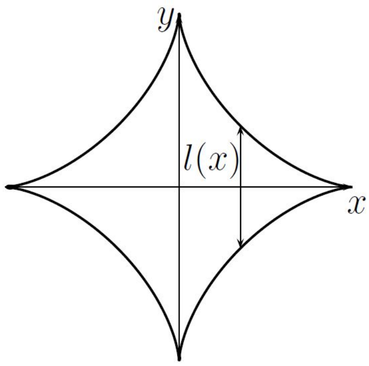


- Объём тела, образованного **вращением криволинейной трапеции**, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$, $0 < a < b$ и осью Ox, **вокруг оси** Oy вычисляется по формуле (3)

$$V_y = 2\pi \int_a^b x|f(x)|\,dx. \tag{3}$$

- Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $y_1 = f_1(x)$,$y_2 = f_2(x)$ $(f_2(x) \geq f_1(x))$ и прямыми $x = a$,$x = b(a < b)$, равен разности объемов, полученных от вращения вокруг оси Ox криволинейных трапеций, ограниченных линиями $y_2 = f_2(x)$,$x = a$,$x = b$ $(a \leq x \leq b)$, частью оси Ox и $y_1 = f_1(x)$,$x = a$,$x = b$ $(a \leq x \leq b)$, частью оси Ox.
  В этом случае объем вычисляется по формуле 4
$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2)dx \tag{4}$$
- Объём тела, образованного **вращением криволинейного сектора**, ограниченного кривой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, **вокруг полярной оси** вычисляется по формуле (5)
$$V = \frac{2}{3}\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin\varphi \, d\varphi. \tag{5}$$

6.533. Найти объём тела, основание которого – область плоскости Oxy, ограниченная астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, а сечение плоскостью, перпендикулярной оси Ox, есть квадрат.



Сечение плоскостью $x = x(t_0)$ – квадрат со стороной $l = 2y(t_0) \Rightarrow S = l^2$. Тело состоит из двух симметричных частей (справа и слева от оси Oy). Вычислим объем половины тела, используя формулу (1).

$$\frac{1}{2}V = \int\limits_0^a S(x)\,dx = \left| \begin{array}{c} S(t) = l^2 = 4y^2(t) \\ dx = -3a\cos^2(t)\sin(t)dt \\ \text{Границы интегрирования:} \\ \text{при } \ x = 0: \ \ t_1 = \pm\pi/2 \\ \text{при } \ x = a: \ \ t_2 = 0 \end{array} \right| =$$

Замечание: рассматриваемая часть основания(лежит правее Oy) состоит из двух симметричных относительно оси Ох элементов. Выбираем границы $t_1 = \pi/2$ и $t_2 = 0$, при этом умножаем интеграл на 2, поскольку 2 одинаковых элемента, но, важно понимать, что в таком случае вы должны разделить площадь сечения на 2, в результате интеграл остается прежним!

$$= \int\limits_{\pi/2}^{0} 4y^2(t)(-3a\cos^2(t)\sin(t))dt = -12\int\limits_{\pi/2}^{0} a^3\sin^7 t\cos^2 t\,dt =$$

$$= 12a^3\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin^7 t\cos^2 t\,dt = -12a^3\int\limits_{0}^{\pi/2}(1-\cos^2 t)^3\cos^2 t\,d(\cos t) =$$

$$-12a^3\int\limits_{0}^{\pi/2}(\cos^2 t - 3\cos^4 t + 3\cos^6 t - cos^8 t)\,d(\cos t) =$$

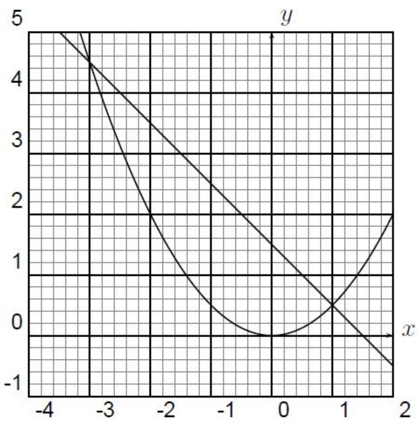
$$= -12a^3\left(\frac{1}{3}\cos^3 t - \frac{3}{5}\cos^5 t + \frac{3}{7}\cos^7 t - \frac{1}{9}\cos^9 t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = -12a^3\left(-\frac{1}{3}+\frac{3}{5}-\frac{3}{7}+\frac{1}{9}\right) =$$

$$= \frac{64}{105}a^3;$$

Следовательно, объем всей фигуры

$$V = \frac{128}{105}a^3.$$

6.535. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $2y = x^2$ и $2x + 2y - 3 = 0$.



Найдём точки пересечения кривых:

$$\begin{array}{l} 2y = x^2 \\ 2x + 2y - 3 = 0 \end{array} \Rightarrow \quad x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ или } x = 1.$$

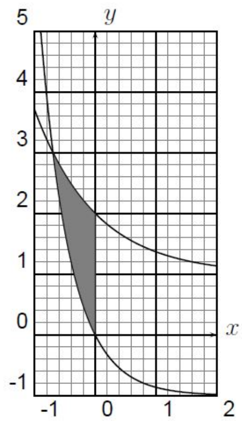
Для вычисления объема, воспользуемся формулой (4), где $y_2 = \dfrac{3}{2} - x, y_1 = x^2/2$.

$$V = \pi\int\limits_{-3}^{1}(\left(\frac{3}{2}-x\right)^2 - \left(x^2/2\right)^2)dx = \pi\int\limits_{-3}^{1}\left(\frac{3}{2}-x\right)^2 dx - \pi\int\limits_{-3}^{1}\left(x^2/2\right)^2 dx =$$

$$= \pi\int\limits_{-3}^{1}\left(\frac{9}{4} - 3x + x^2\right)dx - \frac{\pi}{4}\int\limits_{-3}^{1}x^4\,dx = \pi\left(\frac{9}{4}x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{20}x^5\right)\Bigg|_{-3}^{1} =$$

$$= \pi\left(\frac{31}{30} + \frac{171}{10}\right) = \frac{272}{15}\pi.$$

6.536. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-2x} - 1$, $y = e^{-x} + 1$ и $x = 0$.



Найдём точку пересечения кривых:

$$\begin{cases} y = e^{-2x} - 1 \\ y = e^{-x} + 1 \end{cases} \Rightarrow \quad e^{-2x} - e^{-x} - 2 = 0 \Rightarrow \ e^{-x} = 2 \text{ или } e^{-x} = -1.$$

Решение $e^{-x} = -1$ исключаем, поскольку $e^x > 0$ для любых x.
Точка пересечения $x = -\ln 2$.
Воспользуемся формулой (4), где $y_2 = e^{-2x} - 1$,$y_1 = e^{-x} + 1$.

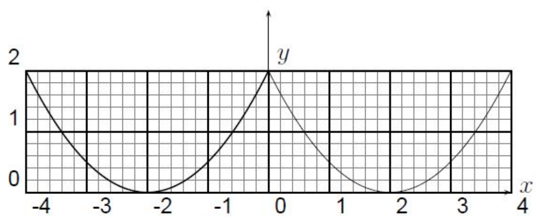
$$V = \pi \int\limits_{-\ln 2}^{0} \left(e^{-x} + 1\right)^2 \, dx - \pi \int\limits_{-\ln 2}^{0} \left(e^{-2x} - 1\right)^2 \, dx =$$

$$= \pi \int\limits_{-\ln 2}^{0} \left(e^{-2x} + 2e^{-x} + 1 - e^{-4x} + 2e^{-2x} - 1\right) \, dx =$$

$$= \pi \int\limits_{-\ln 2}^{0} \left(3e^{-2x} + 2e^{-x} - e^{-4x}\right) \, dx = \pi \left(-\frac{3}{2}e^{-2x} - 2e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-4x}\right)\Bigg|_{-\ln 2}^{0} =$$

$$= \pi \left(-\frac{3}{2} - 2 + \frac{1}{4} + 6 + 4 - 4\right) = \frac{11}{4}\pi.$$

6.538. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{x^2}{2} + 2x + 2$ и $y = 2$.



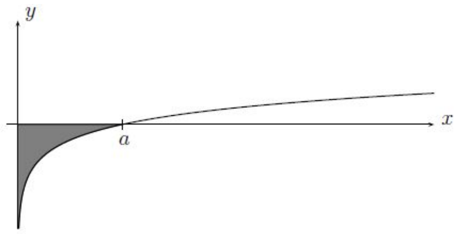
Найдём точки пересечения кривых: $\begin{cases} y = x^2/2 + 2x + 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = -4 \text{ или } x = 0.$

Искомый объём может быть получен как **разность объёмов**: **цилиндра** радиуса 4 высоты 2 (V_1) **и** тела, полученного вращением **криволинейной трапеции**, образованной кривой $y = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 2$ (симметричной исходной кривой относительно оси Oy) и прямыми $x = 0$, $x = 4$ (V_2) **вокруг оси** Oy: $V = V_1 - V_2$.
$V_1 = \pi r^2 h = 32\pi$, для вычисления V_2 воспользуемся формулой (3).

$$V_2 = 2\pi \int\limits_0^4 x\left(\frac{x^2}{2} - 2x + 2\right)\,dx = 2\pi\left(\frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x^2\right)\Bigg|_0^4 = \frac{32}{3}\pi$$

Тогда $V = 32\pi - \dfrac{32}{3}\pi = \dfrac{64}{3}\pi$

6.540. Найти объёмы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной кривой $x = at^2$, $y = a\ln t$ $(a > 0)$ и осями координат, вокруг а) оси Ox; б) оси Oy.



Согласно формуле (2)

$$\text{а)}V_x = \pi\int\limits_0^a y^2\,dx = \pi\int\limits_0^1 y^2(t)x'(t)\,dt = \pi a^3\int\limits_0^1 \ln^2 t\cdot 2t\,dt = \left|\begin{matrix}\text{интегрируем} & \text{по частям}\\ u = \ln^2 t & du = 2\ln t/tdt\\ dv = 2tdt & v = t^2\end{matrix}\right| =$$

$$= \pi a^3\left(t^2\ln^2 t\big|_0^1 - \int\limits_0^1 t^2\cdot 2\ln t\cdot\frac{dt}{t}\right) = \left|\begin{matrix}u = \ln t\\ v = t^2\end{matrix}\right| = \pi a^3\left(t^2\ln^2 t\big|_0^1 - t^2\ln t\big|_0^1 + \int\limits_0^1 t^2\cdot\frac{dt}{t}\right) =$$

$$= \pi a^3\left(t^2\ln^2 t\big|_0^1 - t^2\ln t\big|_0^1 + \frac{t^2}{2}\Bigg|_0^1\right) = \pi a^3\left(\frac{1}{2} - \lim_{t\to 0}(t^2\ln^2 t) - \lim_{t\to 0}(t^2\ln t)\right);$$

$$\lim_{t\to 0}(t^2\ln t) = \lim_{t\to 0}\frac{\ln t}{1/t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{1/t}{-2/t^3} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{-2} = 0;$$

$$\lim_{t\to 0}(t^2\ln^2 t) = \lim_{t\to 0}\frac{\ln^2 t}{1/t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{(2\ln t)/t}{-2/t^3} = -\lim_{t\to 0}(t^2\ln t) = 0; \Rightarrow V_x = \frac{\pi a^3}{2}.$$

При решении пункта б) возможно два варианта решения:

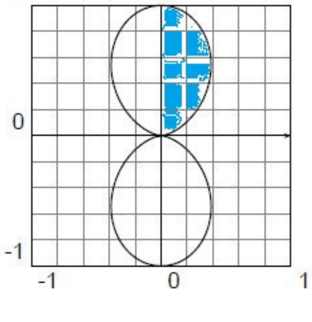
1) Согласно формуле (2)

$$\text{б) } V_y = \pi\int\limits_{-\infty}^0 x^2\,dy = \pi\int\limits_0^1 x^2(t)y'(t)\,dt = \pi a^3\int\limits_0^1 t^3\,dt = \pi a^3\,\frac{t^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi a^3}{4}.$$

2) Согласно формуле (3)

$$V_y = 2\pi\int\limits_0^a x|y(x)|dx = 4a^3\pi\int\limits_0^1 t^3\ln tdt = \frac{\pi a^3}{4}.$$

6.543. Найти объём тела, образованного вращением кривой $r = a\sin^2\varphi$ вокруг полярной оси.



Полярная система координат задаётся лучом, который называют нулевым лучом, или полярной осью (соответствует углу $0°$).

Заметим, что срез состоит из двух одинаковых элементов, расположенных выше и ниже полярной оси. Кроме того, срез симметричен относительно прямой, перпендикулярной полярной оси. Рассмотрим элемент, расоложенный от 0 до $\pi/2$. Заметим, что вращая его вокруг полярной оси мы получим половину объема.

$$\frac{1}{2}V = \frac{2}{3}\pi\int\limits_0^{\pi/2} r^3\sin\varphi\,d\varphi = \frac{2}{3}\pi a^3\int\limits_0^{\pi/2}\sin^7\varphi\,d\varphi = -\frac{2}{3}\pi a^3\int\limits_0^{\pi/2}\sin^6\varphi\,d(\cos\varphi) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^3\int\limits_0^{\pi/2}(\cos^2\varphi-1)^3\,d(\cos\varphi) = \frac{2}{3}\pi a^3\int\limits_0^{\pi/2}(\cos^6\varphi-3\cos^4\varphi+3\cos^2\varphi-1)\,d(\cos\varphi) =$$

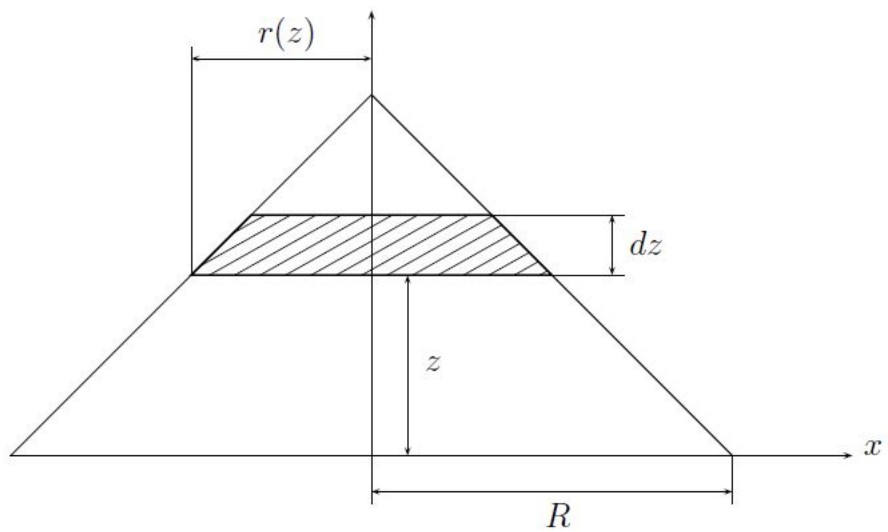
$$= \frac{2}{3}\pi a^3\left(\frac{1}{7}\cos^7\varphi-\frac{3}{5}\cos^5\varphi+\cos^3\varphi-\cos\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{3}\pi a^3\left(\frac{1}{7}-\frac{3}{5}+1-1\right) =$$

$$= \frac{32\pi a^3}{105}; \Rightarrow V = \frac{64}{105}\pi a^3.$$

Приложения определённого интеграла в физике.

6.560. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы насыпать кучу песка конической формы с радиусом основания R и высотой H. Плотность песка γ.

$$r(z) = \frac{H-z}{H}\cdot R$$



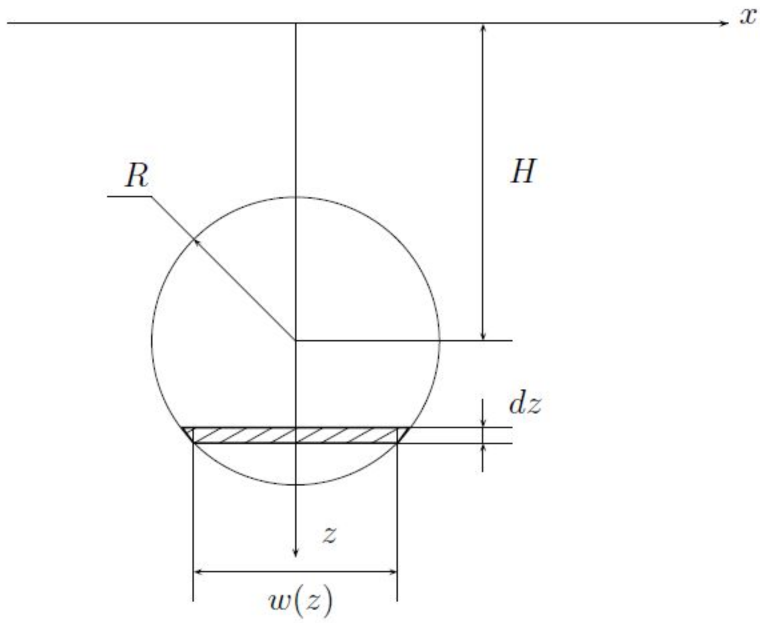
◁ Рассмотрим кучу как состоящую из бесконечно большого количества бесконечно тонких горизонтальных слоёв толщины dz и т.д. Работа, необходимая для поднятия слоя, находящегося на высоте z,

$$dA = dm\cdot g\cdot z = \gamma gz\,dV = \gamma\pi r^2(z)gz\,dz = \gamma\pi\frac{(H-z)^2}{H^2}R^2gz\,dz = \gamma\pi R^2g\left(z-\frac{2z^2}{H}+\frac{z^3}{H^2}\right)dz.$$

Работа, необходимая для поднятия всей кучи,

$$A = \int\limits_0^H\gamma\pi R^2g\left(z-\frac{2z^2}{H}+\frac{z^3}{H^2}\right)dz = \gamma\pi R^2g\left(\frac{z^2}{2}-\frac{2z^3}{3H}+\frac{z^4}{4H^2}\right)\Bigg|_0^H = \frac{1}{12}g\gamma\pi R^2H^2. \triangleright$$

6.573. Конец трубы, погруженной в жидкость плотности γ, закрыт круглой заслонкой. Определить силу давления на заслонку, если её радиус R, а центр тяжести находится на глубине H. (Сила Паскаля: $F = \gamma g H S$.)



$\triangleleft$ $$\left(\frac{w(z)}{2}\right)^2 + (z-H)^2 = R^2$$

$$\left(\frac{w(z)}{2}\right)^2 = R^2 - (z-H)^2$$

$$w(z) = 2\sqrt{R^2 - (z-H)^2}$$

$$dF = \gamma g z dS = \gamma g z w(z)\, dz = \gamma g z \cdot 2\sqrt{R^2-(z-H)^2}\, dz$$

$$F = 2\gamma g \int\limits_{H-R}^{H+R} z\sqrt{R^2-(z-H)^2}\, dz = \begin{vmatrix} R\sin t = z - H \\ t = \arcsin(\frac{z-H}{R}) \end{vmatrix} = 2\gamma g \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (H + R\sin t) R\sqrt{1-\sin^2 t} R\cos t\, dt$$

Здесь обратим внимание на то, что $\cos t \geqslant 0$

$$= 2\gamma g R^2 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (H + R\sin t)\cos^2 t\, dt = 2\gamma g R^2 H \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, dt + 2\gamma g R^3 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t \cos^2 t\, dt =$$

Второй интерал равен нулю (от нечётной функции)

$$= 2\gamma g R^2 H \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = \gamma g R^2 H \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} dt + \gamma g R^2 H \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2t\, dt =$$

$$= \gamma g R^2 H\, t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \gamma g R^2 H\, \frac{\sin 2t}{2}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi\gamma g R^2 H. \triangleright$$

Текущее ДЗ: 6.534, 6.537, 6.542, 6.544, 5.581+
Построить график в полярной СК: $\rho = sin(2\varphi), \rho = 5sin(3\varphi), \rho = 3sin(4\varphi), \rho = cos(2\varphi), \rho = 5cos(3\varphi), \rho = 3cos(4\varphi)$.