

**Подготовка к экзамену по дисциплине “Теория поля и ряды” семестр 3
(18–30 баллов)**

Вопросы:

1. Числовые ряды: основные понятия.
2. Основные теоремы числовых рядов.
3. Ряды с положительными членами. Признаки сравнения.
4. Признак Коши.
5. Признак Даламбера.
6. Интегральный признак Коши-Маклорена.
7. Абсолютная сходимость и условная сходимость произвольных рядов.
8. Переместительное свойство сходящихся рядов.
9. Сочетательное свойство сходящихся рядов.
10. Знакопеременные ряды.
11. Функциональные ряды: общие понятия.
12. Равномерная сходимость функциональных рядов.
13. Свойства равномерно сходящихся рядов.
14. Степенной ряд и область его сходимости.
15. Непрерывность суммы степенного ряда.
16. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
17. Разложение функции в степенной ряд.
18. Определение ряда Фурье.
19. Ортогональные системы функций.
20. Разложение функций в ряд Фурье.
21. Разложение непериодических функций в ряд Фурье.
22. Разложение функции в ряд Фурье в произвольном промежутке.
23. Разложение в ряд Фурье только по синусам и только по косинусам.
24. Неравенство Бесселя. Формула Парсеваля.
25. Определение двойного интеграла.
26. Условия существования двойного интеграла.
27. Сведение двойного интеграла к повторному в случае прямоугольной области.
28. Сведение двойного интеграла к повторному в случае криволинейной области.
29. Основные свойства двойного интеграла.
30. Преобразование плоских областей.

31. Выражение площади в криволинейных координатах
32. Замена переменных в двойных интегралах
33. Определение тройного интеграла и условия его существования
34. Свойства интегрируемых функций и тройных интегралов.
35. Вычисление тройного интеграла: произвольная область.
36. Вычисление тройного интеграла: прямоугольный параллелепипед.
37. Замена переменных в тройных интегралах
38. Определение криволинейного интеграла первого рода.
39. Сведение криволинейного интеграла первого рода к обыкновенному определенному интегралу.
40. Определение криволинейных интегралов второго рода.
41. Вычисление криволинейного интеграла второго рода.
42. Формула Грина.
43. Вычисление площадей с помощью криволинейных интегралов.
44. Условие независимости криволинейного интеграла от пути.
45. Вычисление криволинейного интеграла через первообразную.
46. Признак точного дифференциала и нахождение первообразной в случае прямоугольной области.
47. Интегралы по замкнутому контуру.
48. Трехмерный случай для криволинейного интеграла второго рода.
49. Криволинейные координаты на поверхности.
50. Кривые на поверхности.
51. Первая квадратичная форма.
52. Ориентация гладкой поверхности.
53. Определение и свойства поверхностных интегралов.
54. Взаимные базисы векторов.
55. Ковариантные и контравариантные компоненты векторов.
56. Связь между ковариантными и контравариантными компонентами векторов.
57. Ортогональные базисы.
58. Коэффициенты Ламэ.
59. Циркуляция вектора
60. Скалярное поле. Производная по направлению. Оператор ∇ .
61. Векторное поле. Поток векторного поля.

62. Дивергенция векторного поля. Теорема Остроградского.
63. Вихрь векторного поля. Теорема Стокса.
64. Теоремы примыкающие к теореме Остроградского.
65. Теоремы примыкающие к теореме Стокса.
66. Потенциальное поле. Скалярный потенциал.
67. Соленоидальное векторное поле. Векторный потенциал.
68. Лапласово векторное поле. Гармонические функции. Основная теорема векторного анализа.
69. Определение функции комплексной переменной.
70. Основные трансцендентные функции
71. Бесконечно удаленная точка.
72. Непрерывность функции комплексной переменной.
73. Определение производной функции комплексной переменной.
74. Условие Коши-Римана (теорема с доказательством.)
75. Определение аналитической функции. Определения правильных и особых точек функции $f(z)$.
76. Необходимое и достаточное условие аналитичности функции $f(z)$.
77. Восстановление функции комплексной переменной $f(z)$ по ее аналитической (мнимой) части.
78. Вещественная и мнимая части аналитической функции как сопряженные гармонические функции.
79. Определение интеграла от функции комплексной переменной $f(z)$. Свойства интеграла от функции комплексной переменной.
80. Вычисление интеграла от функции комплексной переменной.
81. Теорема Коши для односвязной области.
82. Вывод интегральной формулы Коши ее следствие.
83. Равномерно сходящиеся ряды функции комплексной переменной. Свойства рядов сходящихся равномерно.
84. Ряд Тейлора. Теорема Тейлора.
85. Нули аналитической функции.
86. Ряд Лорана. Область сходимости ряда Лорана.
87. Разложение аналитической функции в ряд Лорана.
88. Понятие изолированной особой точки однозначной аналитической функции. Классификация.
89. Устранимая особая точка.

90. Полюс. Поведение аналитической функции в окрестности полюса.
91. Разложение в ряд Лорана аналитической функции в окрестности полюса.
92. Связь между нулями и полюсами аналитической функции.
93. Существенно особая точка. Разложение в ряд Лорана в окрестности существенно особой точки.
94. Поведение функции в окрестности существенно особой точки (Теорема Сохоцкого).
95. Типы бесконечно удаленной изолированной особой точки
96. Определение вычета аналитической функции.
97. Формула для вычисления вычета в полюсе первого порядка.
98. Формула для вычисления вычета в полюсе m порядка.
99. Основная теорема теории вычетов.
100. Вычет аналитической функции в бесконечно удаленной точке.
101. Теорема о сумме вычетов.
102. Обобщение формулы Коши на случай неограниченной области.
103. Вычисление длины кривой и углов между кривыми на поверхности с помощью первой квадратичной формы.
104. Вычисление площади поверхности с помощью первой квадратичной формы.

Задачи:

1. (10 баллов)

а. Признак Коши.

б. Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n (x-1)^n$, исследовать ряд на сходимость в концах его интервала сходимости.

2. Дана функция $u(M) = \frac{x}{y} - \frac{y}{z} - \frac{x}{z}$ и точки $M_1(2, 2, 2)$ и $M_2(-3, 4, 1)$ вычислить: 1) производную этой функции в точке M_1 по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $\text{grad}u(M_1)$

3. Найти векторные линии в векторном поле $\vec{A} = \{4x, 0, z\}$

4. (10 баллов) Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint_{\Sigma} (5x - y + 5z) d\sigma$$

по поверхности Σ , где Σ – часть плоскости $3x + 2y + z = 6$, отсеченная координатными плоскостями.

5. (10 баллов) Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_{\Sigma} x^2 dydz + z^2 dx dz + y dx dy$$

по поверхности Σ , где Σ – часть поверхности параболоида $x^2 + y^2 = 4 - z$ (нормальный вектор которой образует острый угол с ортом \vec{k}), отсекаемая плоскостью $z = 0$.

6. (10 баллов) Найти поток векторного поля $\vec{A} = \{x + y, y - x, z\}$ через часть поверхности Σ : $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ($z \geq 0$), вырезаемую плоскостью $z = 0$ (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

7. (10 баллов) Найти поток векторного поля $\vec{A} = \{x, 9y, 8z\}$ через часть плоскости $x + 2y + 3z = 1$, расположенной в первом октанте (нормаль образует острый угол с осью Oz).

8. (10 баллов) Найти поток векторного поля $\vec{A} = \{yz - 2x, \sin x + y, x - 2z\}$ через замкнутую поверхность Σ : $x + 2y - 3z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (нормаль внешняя).

9. (10 баллов) Найти поток векторного поля $\vec{A} = \{3x - y - z, 3y, 2z\}$ через замкнутую поверхность Σ : $z = x^2 + y^2$, $z = 2y$ (нормаль внешняя).

10. (10 баллов) Найти поток векторного поля $\vec{A} = \left\{ y^2 x, x^2 y, \frac{z^3}{3} \right\}$ через замкнутую поверхность Σ : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z = 0$ ($z \geq 0$) (нормаль внешняя).

11. (10 баллов) Найти циркуляцию векторного поля $\vec{A} = \{x + y, -x, 6\}$ вдоль контура Γ : $x^2 + y^2 = 1$, $z = 2$ (положительный обход), используя определение циркуляции.

12. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{A} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + yx\vec{k}$ гармоническим.

13. (10 баллов) Найти циркуляцию векторного поля $\vec{A} = \{3x - 1, y - x + z, 4z\}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $2x - y - 2z = -2$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора этой плоскости, используя определение циркуляции.

14. Выяснить, является ли функция $U(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - 2y$ действительной частью аналитической функции $f(z)$. Если да, найти аналитическую функцию.

15. Востановить аналитическую в окрестности точки $z_0 = 0$ функцию $f(z)$ по известной мнимой части $v(x, y) = 2xy - 2y$ и значению $f(0) = 1$

16. Проверить будет ли аналитической функция $f(z) = -2xy + i(x^2 - y^2)$. Если функция аналитична, то вычислить ее производную в точке $z_0 = -1 + i$

17. (10 баллов) Вычислить интеграл $\oint_{|z-\pi|=2} \frac{\cos^2 z}{z \sin z} dz$

18. (10 баллов) Вычислить интеграл $\oint_{|z|=1/3} \frac{e^z - \sin z}{z^2} dz$

19. (10 баллов) Вычислить интеграл $\int_{|z|=3} \frac{dz}{z^2 - 7z + 6}$

20. (10 баллов) Вычислить интеграл с помощью теоремы о вычетах $\oint_{|z|=3} \frac{e^{5z} dz}{(z - i)^3}$.

21. (10 баллов) Вычислить интеграл $\oint_{|z|=4} \frac{\operatorname{sh} iz - \sin iz}{z^3 \operatorname{sh} \frac{z}{3}} dz$

22. Разложить функцию $f(z) = \sin \frac{z+2}{z+1}$ в ряд Лорана в окрестности ее особой точки.

23. Найти лорановские разложения функции $\frac{13z + 338}{169z + 13z^2 - 2z^3}$ по степеням z .

24. Функцию $z \cos \frac{z}{z-5}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 5$