**Список вопросов и задач к экзамену по дисциплине “Уравнения математической физики и Преобразования Фурье”**

1. Сколько типов дифференциальных уравнений в частных производных вы знаете? Как определить к какому типу относится уравнение?

2. Что называется характеристическим уравнением для дифференциального уравнения 2-го порядка в частных производных.

3. Уравнения характеристик для дифференциального уравнения 2-го порядка в частных производных.

4. Запишите в каноническом виде уравнение гиперболического типа. Как выбираются новые переменные?

5. Запишите в каноническом виде уравнение эллиптического типа. Как выбираются новые переменные?

6. Запишите в каноническом виде уравнение параболического типа. Как выбираются новые переменные?

7. Обобщенный ряд Фурье.

8. Выяснить, к какому типу уравнений относится волновое уравнение. Привести его к каноническому виду.

9. Вывести формулу Д’Аламбера.

10. Записать формулу для колебания струны под действием мгновенного сосредоточенного импульса.

11. Каким требованиям должны удовлетворять дополнительные условия, для однозначного определения математической модели физического явления? Какие бывают дополнительные условия?

12. Запишите полную постановку начально-краевой задачи. Сделайте редукцию общей задачи.

13. Дайте определение задачи Штурма-Лиувилля.

14. Перечислите свойства собственных функций и собственных значений.

15. Опишите метод разделения переменных для начально-краевой задачи с однородным уравнением (общая схема).

16. Запишите задачу Коши, которая получается в результате решения начально-краевой задачи с неоднородным уравнением.

17. В каком виде надо искать решение для начально-краевой задачи с неоднородными граничными условиями. Почему?

18. На какие две задачи распадется начально-краевая задача с неоднородными граничными условиями.

19. Что называется дисперсионным уравнением?

20. Дайте определение цилиндрических функций.

21. Запишите уравнение Бесселя и его два линейно независимых решения.

22. Запишите функцию Бесселя.

23. Запишите функцию Неймана.

24. Какие функции образуют фундаментальную систему уравнения Бесселя.

25. Запишите рекурентные формулы для функции Бесселя.

26. Запишите чему равен $J_{1/2}(x)$.

27. Запишите чему равен $J_{-1/2}(x)$.

28. Запишите формулу для $J_{n+1/2}(x)$.

29. Асимптотическое поведение функции Бесселя при $x \to \infty$.

30. Асимптотическое поведение функции Неймана при $x \to \infty$.

31. Асимптотическое поведение функции Бесселя при $x \to 0$.

32. Асимптотическое поведение функции Неймана при $x \to 0$.

33. Запишите условие ортогональности функций Бесселя и квадрат нормы функций Бесселя.

34. Дайте определение классических ортогональных полиномов.

35. Условие ортогональности для классических ортогональных полиномов и квадрат нормы для классических ортогональных полиномов.

36. Запишите уравнение для классических ортогональных полиномов.

37. Запишите задачу Штурма–Лиувилля для классических ортогональных полиномов.

38. Перечислите основные свойства классических ортогональных полиномов.

39. Дайте определение полиномов Лежандра.

40. Запишите задачу Штурма–Лиувилля для полиномов Лежандра.

41. Условие ортогональности и квадрат нормы для классических ортогональных полиномов.

42. Запишите рекурентные формулы для полиномов Лежандра.

43. Перечислите основные свойства полиномов Лежандра.

44. Дайте определение присоединенным функциям Лежандра.

45. Запишите задачу Штурма–Лиувилля для присоединенных функций Лежандра.

46. Запишите условие ортогональности и квадрат нормы присоединенных функций Лежандра.

47. Дайте определение сферическим функциям и запишите их.

48. Запишите задачу Штурма–Лиувилля для сферических функций.

49. Условие ортогональности и квадрат нормы сферических функций.

50. Запишите интегральную формулу Фурье (двойной интеграл Фурье).

51. Запишите косинус-формулу Фурье и синус-формулу Фурье.

52. Запишите пару преобразований Фурье.

53. Запишите косинус-преобразование Фурье и синус-преобразование Фурье.

54. Перечислите свойства преобразований Фурье (в виде формул).

## Задачи

1. Определите тип дифференциального уравнения и запишите канонический вид квазилинейного дифференциального уравнения этого типа:

$$3u_{xx} - 5u_{xy} + 7u_{yy} + 17u_x + 9u_y = 0.$$

2. Решить начальную задачу на бесконечной прямой $-\infty < x < +\infty$, $t \in (0, +\infty)$

$$u_{tt} = 64u_{xx} + xt^2,$$

$u(x, 0) = \cos^2 x$, $u_t(x, 0) = xt$.

3. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 5$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (где $r$, $\varphi$ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ удовлетворяет следующим условиям

$u(5, \varphi) = 31 \cos \frac{8}{7}\varphi + 32 \sin 9\varphi$

4. Решить первую смешанную задачу для неоднородного уравнения теплопроводности

$u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 2e^{2t}\cos 7x, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t < \infty$

$u(x, 0) = 0, \qquad u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0$

5. Решить смешанную задачу для неоднородного волнового уравнения

$$\begin{cases} U_{tt} = 4U_{xx} + e^{-3t}\sin 6x, & \frac{\pi}{7} < x < \frac{\pi}{3} \\ U(x, 0) = 0, \quad U_t(x, 0) = 0 \\ U_x(\frac{\pi}{7}, t) = U(\frac{\pi}{3}, t) = 0 \end{cases}$$

6. Решить смешанную задачу для волнового уравнения

$U_{tt} = 16U_{xx}, \quad 0 < x < 7, \quad 0 < t < \infty$

$U_t(x, 0) = 4 \sin \frac{\pi}{4}x, \; U(x, 0) = 0,$

$\boxed{U_x(0, t) = 0, \; U_x(7, t) = 0}$

$4\sin = \sum A_n \sin$

7. Решить смешанную задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} U_t = U_{xx}, \quad 0 < x < 1, \qquad t > 0 \\ U_x(0, t) = 0, \quad U_x(1, t) = 0, \\ U(x, 0) = x^2 - 1 \end{cases}$$

8. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ в круге $0 \le r < 4$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (где $r$, $\varphi$ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ удовлетворяет условию:

   $u(4,\varphi) = \cos^3\varphi$.

9. Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круговом секторе $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \frac{7\pi}{2}$, на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ удовлетворяет условиям:

   $u(1,\varphi) = 30\sin 4\varphi, \qquad u_\varphi(r,0) = 0, \quad u_\varphi(r,\frac{7\pi}{4}) = 0$

## ВАРИАНТ №0

1. (*10 балла.*) Задача

2. (*10 балла.*) Задача

3. (*10 балла.*)

   (a) Привести к каноническому виду

   (b) Вопрос