Новикова Елизавета Сергеевна | Группа РЛ2-31 | Дата: 21.01.2021

Билет № 13

Сокращения: Г.У. – граничные условия
Н.У. – начальные условия
ур-я – уравнения
ф-я – функция
С.З. – собственное значение
С.Ф – собственная функция

1) Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения $U_{tt} = 16 U_{xx}$ на отрезке $0 < x < 0,5$, $0 < t < \infty$ с начальными и граничными условиями $U(x,0) = 0$, $U_t(x,0) = 28\pi \cos 7\pi x$, $U_x(0,t) = 0$, $U(0,5;t) = 0$

$U_{tt} = \underbrace{16}\, U_{xx} \quad 0 < x < \underbrace{0,5} \quad 0 < t < +\infty$

$U(x,0) = 0 \qquad U_t(x,0) = 28\pi \cos 7\pi x$

$U_x(0,t) = 0 \qquad U(0{,}5,t) = 0$

Будем решать методом разделения переменных:
Волновое уравнение имеет однородные Г.У.

$U(x,t) = X(x)\cdot T(t) \not\equiv 0$

$$XT'' = 16\, TX'' \Rightarrow \frac{T''}{T} = 16\frac{X''}{X} = -\lambda \;\Rightarrow\; \begin{cases} 16\frac{X''}{X} = -\lambda \\ X(0) = 0 \\ X'(0{,}5) = 0 \end{cases}$$

$T_x'(0) = 0 \xrightarrow{T\neq 0} X'(0) = 0$

$T_x'(0{,}5) = 0 \to X'(0{,}5) = 0$

I) $\begin{cases} X'' + \frac{\lambda}{16} X = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X(0{,}5) = 0 \end{cases}$

Решаем задачу Штурма – Лиувилля

1) $\lambda = 0$

$X'' = 0$

$X = c_1 x + c_2$

$X' = c_1$

$\begin{cases} 0 = c_1 \\ 0 = 0{,}5c_1 + c_2 \to c_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $X = 0$ – не С.Ф

$\lambda = 0$ – не С.З.

2) $\lambda = -w^2$

$X'' - \frac{w^2}{16} X = 0$

$X = c_1 e^{\frac{w}{4}x} + c_2 e^{-\frac{w}{4}x}$

$X' = c_1 \frac{w}{4} e^{\frac{w}{4}x} - c_2 \frac{w}{4} e^{-\frac{w}{4}x}$

$\begin{cases} 0 = c_1 e^{\frac{w 0{,}5}{4}} + c_2 e^{-\frac{w}{4}\cdot 0{,}5} \\ 0 = c_1 \cancel{\frac{w}{4}} - c_2 \cancel{\frac{w}{4}} \end{cases}$

Перепишем систему ур-й

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{w}{8}} & -e^{-\frac{w}{8}} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$$

Дисперсионное ур-е

$$\begin{vmatrix} e^{\frac{w}{8}} & -e^{-\frac{w}{8}} \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -e^{\frac{w}{8}} + e^{-\frac{w}{8}} = 0$$

$c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow X = 0$ – не С.Ф

$\lambda < 0$ – не. С.З.

3) $\lambda = w^2 > 0$

$X'' + \frac{w^2}{16} = 0$

$X = c_1 \cos\frac{w}{4}x + c_2 \sin\frac{w}{4}x$

$X' = c_1 \frac{w}{4} \sin\frac{w}{4}x + c_2\frac{w}{4}\cos\frac{w}{4}x$

$\begin{cases} 0 = c_1 \cos\frac{w}{8} + c_2 \sin\frac{w}{8} \\ 0 = -c_1 \cancel{\frac{w}{4}}\, 0 + c_2 \cancel{\frac{w}{4}} \underbrace{\cos 0}_{=1} \end{cases}$

$(w \neq 0) \Rightarrow c_2 = 0$

$\Rightarrow c_1 \cos\frac{w}{8} = 0$

$\frac{w}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n = \overline{0,\infty}$

$w_n = 4\pi + 8\pi n,\ n = \overline{0,\infty}$

$\Rightarrow \lambda_n = (4\pi + 8\pi n)^2$

$n = \overline{0,\infty}$

$\Rightarrow X_n = \underbrace{c_1}_{=1} \cos(\pi + 2\pi n)x$

$$\|X_n\|^2 = \int_0^{0,5} \cos^2(\pi + 2\pi n)x\, dx = \frac{\pi + \cancel{2\pi n} - \overbrace{\sin(2\pi n)}^{0}}{4(\pi + \cancel{2\pi n})} = \frac{1}{4}$$

II) $\frac{T''}{T} = -\lambda \Rightarrow T'' + (4\pi + 8\pi n)^2 T = 0 \to T(t)_n = \dot{c}_1 \cos(4\pi + 8\pi n)t + \dot{c}_2 \sin(4\pi + 8\pi n)t$

III) $V = X\cdot T$

Запишем общее решение

$$U_n = X_n T_n = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\pi + 2\pi n)x \cdot \left[A_n \cos(4\pi + 8\pi n)t + B_n \sin(4\pi + 8\pi n)t\right]$$

$$\frac{\partial U_n}{\partial t} = U_{t_n} = \sum_{n=0}^{\infty} (4\pi + 8\pi n)\cos(\pi + 2\pi n)x \cdot \left[-A_n \sin(4\pi + 8\pi n)t + B_n\cos(4\pi + 8\pi n)t\right]$$

Ковалова Е.С. | РЛ2-31 | Билет №13

(IV)

Н.У $t=0$ — обобщённый ряд Фурье по С.Ф

$$\begin{cases} u_n(x,0) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos(\pi+2\pi n)x \cdot A_n = 0 \rightarrow \boxed{A_n = 0, \forall n} \\ u_{t_n}(x,0) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (4\pi+8\pi n)\cos(\pi+2\pi n)x \cdot B_n = 28\pi \cos 7\pi x \end{cases}$$

Используя свойство ортогональности с.ф. домножим на $\left| \cdot \cos(\pi+2\pi m)x \right.$

$$\Rightarrow B_n(4\pi+8\pi n)\underbrace{\int_0^{0,5}\cos(\pi+2\pi n)\cos(\pi+2\pi n)\,dx}_{=\|X_n\|^2} = 28\pi\int_0^{0,5}\cos 7\pi x \cdot \cos(\pi+2\pi n)x\,dx$$

Вычислим интеграл: $\displaystyle\int_0^{0,5}\cos 7\pi x \cdot \cos(\pi+2\pi n)x\,dx = \left|\begin{array}{l}\cos(\pi+2\pi n) = \\ \cos\pi\cdot\cos 2\pi n - \sin\pi \sin 2\pi n = \\ = (-1)\cdot(1) = -1\end{array}\right.$

$$= -\int_0^{0,5}\cos 7\pi x\,dx = -\frac{1}{7\pi}\sin 7\pi x\Big|_0^{0,5} = -\frac{1}{7\pi}\underbrace{\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)}_{=(-1)} = \frac{1}{7\pi}$$

$(4\pi - \frac{\pi}{2})$

$$\Rightarrow B_n\cdot(4\pi+\cancel{8}^{2}\pi n)\cdot\frac{1}{4} = 2\cancel{8}^{4}\pi\cdot\frac{1}{7\pi}$$

$$B_n = \frac{4}{\pi(1+2n)}$$

Тогда решение будет иметь вид:

$$u_n = \sum_{n=0}^{\infty}\cos(\pi+2\pi n)x\cdot B_n\cdot\sin(4\pi+8\pi n)t$$

Ответ: $u_n = \frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+2n)\cos[\pi x(1+2n)]\cdot\sin[4\pi t(1+2n)]$

Новикова Е.С. | РЛ2-31 | Билет №13

2

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta U = 0$ в кольце $2 \le r < 3$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (где $r, \varphi$ - полярные координаты), на границе которого искомая функция $U(r,\varphi)$ удовлетворяет следующим условиям:

$U(2,\varphi) = 1$

$U(3,\varphi) = 4\cos\varphi$

Оператор Лапласа в полярных координатах:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left| \begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix} \right| = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

МРП:

$U = R(r)\cdot\Phi(\varphi) \ne 0$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = 0$$

$$\frac{\Phi}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{R}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0 \quad \Big| \cdot \frac{r^2}{R\Phi}$$

$$\frac{r}{R}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\cdot\frac{dR}{dr}\right) + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0$$

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -\frac{r}{R}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\cdot\frac{dR}{dr}\right) = -\lambda$$

I $\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0 \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) \end{cases}$

1) $\lambda = 0$

$\Phi'' = 0$

$\Phi = C_1\varphi + C_2$

$\Phi' = C_1$

$\begin{cases} C_2 = 2\pi C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = 0 \\ C_1 = C_1 \quad \forall C_2 \ne 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \Phi = C \ne 0$ - С.Ф.

$\lambda = 0$ - С.З.

$\|\Phi_0\|^2 = \int_0^{2\pi} c^2 d\varphi = 2\pi$

2) $\lambda = -w^2 < 0$

$\Phi = C_1 e^{w\varphi} + C_2 e^{-w\varphi}$

$\Phi' = C_1 w e^{w\varphi} - C_2 w e^{-w\varphi}$

$C_1 + C_2 = C_1 e^{2\pi w} + C_2 e^{-2\pi w}$

$C_1\cancel{w} - C_2\cancel{w} = C_1 e^{2\pi w}\cancel{w} + (-\cancel{w})\cdot C_2 e^{-2\pi w}$

$$\begin{pmatrix} 1 - e^{2\pi w} & 1 - e^{-2\pi w} \\ 1 - e^{2\pi w} & -(1 - e^{-2\pi w}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 - e^{2\pi w} & 1 - e^{-2\pi w} \\ 1 - e^{2\pi w} & -(1 - e^{-2\pi w}) \end{vmatrix} = 0$$

Дисперсионное ур-е

$-2(1 - e^{2\pi w})(1 - e^{-2\pi w}) = 0$ - ни при каких $w$

$\Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow \Phi = 0$ не С.Ф.

$\lambda < 0$ не С.З.

3) $\lambda = w^2 > 0$

$\Phi = C_1\cos w\varphi + C_2\sin w\varphi$

$\Phi' = -C_1 w\sin w\varphi + C_2 w\cos w\varphi$

$C_1 = C_1\cos 2\pi w + C_2\sin 2\pi w$

$\cancel{w}C_2 = -C_1\cancel{w}\sin 2\pi w + C_2\cancel{w}\cos 2\pi w$

$$(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - \cos 2\pi w & -\sin 2\pi w \\ \sin 2\pi w & 1 - \cos 2\pi w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \cos 2\pi w & -\sin 2\pi w \\ \sin 2\pi w & 1 - \cos 2\pi w \end{vmatrix} = 0$$

$(1 - \cos 2\pi w)^2 + \sin^2 2\pi w = 0$

$1 - 2\cos 2\pi w + \cos^2 2\pi + \sin^2 2\pi w = 0$

$\rightarrow 1 = \cos 2\pi w$

$2\pi w = 2\pi n, \ n = \overline{1,\infty}$

$\lambda_n = n^2, \ n = \overline{1,\infty}$

$\Phi$ - ?

Подставим в систему (1) $\begin{cases} C_1 = C_1 > 0 \\ C_2 = C_2 \end{cases}$

$\Phi_0 = C, \ \lambda_0 = 0 \quad \|\Phi_0\|^2 = 2\pi$

$\Phi_n = \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}, \ n = \overline{1,\infty} \quad \lambda_n = n^2$

$\Rightarrow \Phi_n = \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}, \ n = \overline{0,\infty}$

$\|\Phi_n\| = \pi, \ n = \overline{1,\infty} \quad \|\Phi_0\| = 2\pi$

(II) $r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)-n^2R=0$ - ур-е Эйлера

Замена $r=e^t$ $R(r)=y(t) \to y''-n^2y=0$

$n=0: y''=0,\ y=\dot c_1 t+\dot c_2 \Rightarrow R_0(r)=\dot c_1\ln r+\dot c_2$

$n\neq 0: y=c_1e^t+c_2e^{-t} \Rightarrow R_n(r)=c_1r^n+\frac{c_2}{r^n}$

г.у. для ур-я в кольце такие, что полученные ф-ии ограничены

(III) Общее решение: $u=\sum_{n=0}^{\infty}R_n(r)\Phi_n(\varphi)=\cancel{R_0(r)\Phi_0(\varphi)}+\sum_{n=0}^{\infty}R_n(r)\Phi_n(\varphi)=$

$=\cancel{A_0\ln r+}B_0+\sum_{n=0}^{\infty}r^n(A_n\cos n\varphi+C_n\sin n\varphi)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r^n}[B_n\cos n\varphi+D_n\sin n\varphi]$

$\cancel{\frac{du}{dr}=\frac{A_0}{r}+\sum_{n=1}^{\infty}nr^{n-1}[A_n\cos n\varphi+C_n\sin n\varphi]+\sum_{n=1}^{\infty}(-n)\frac{1}{r^{n+1}}[B_n\cos n\varphi+D_n\sin n\varphi]}$

Г.У.

$$\begin{cases} u(2,\varphi)=\cancel{A_0\ln 2+}B_0+\sum_{n=0}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+C_n\sin n\varphi)\cdot 2^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}[B_n\cos n\varphi+D_n\sin n\varphi]=1 \\ u(3,\varphi)=\cancel{A_0\ln 3+B_0}+\sum_{n=0}^{\infty}3^n(A_n\cos n\varphi+C_n\sin n\varphi)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}[B_n\cos n\varphi+D_n\sin n\varphi]=4\cos\varphi \end{cases}$$

Перегруппируем относительно sin и cos:

$$\begin{cases} 1=\sum_{n=0}^{\infty}(2^nA_n+\frac{1}{2^n}B_n)\cos n\varphi+\sum_{n=0}^{\infty}(2^nC_n+\frac{1}{2^n}D_n)\sin n\varphi+\cancel{A_0\ln 2+B_0} \quad (*) \\ 4\cos\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}(3^nA_n+\frac{1}{3^n}B_n)\cos n\varphi+\sum_{n=0}^{\infty}(3^nC_n+\frac{1}{3^n}D_n)\sin n\varphi \quad (**) \end{cases}$$

Используя свойство ортогональности собственных ф-й домножим

$*|\cdot\sin n\varphi$

$$\underbrace{\int_0^{2\pi}\overset{=\cos 0^\circ\varphi}{1}\cdot\sin n\varphi\,d\varphi}_{I_1}=\left(2^nC_n+\frac{1}{2^n}D_n\right)\|\Phi_n\|^2$$

$$I_1=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\sin(n-0^\circ)\varphi+\sin(n+0^\circ)\varphi]\,d\varphi=-\frac{1}{2}\left[\cos n\varphi+\cos n\varphi\right]\Big|_0^{2\pi}=-(\overset{=1}{\cos 2\pi n}-\overset{=1}{\cos 0^\circ})=0$$

$\Rightarrow \underline{2^nC_n+\frac{1}{2^n}D_n=0,\ n=\overline{0,\infty}}$ (1)

$*|\cdot\cos n\varphi$

$$\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos 0^\circ\varphi\cos n\varphi\,d\varphi}_{I_2}=(2^nA_n+\frac{1}{2^n}B_n)\cdot\|\Phi_n\|^2$$

$$I_2=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(n-0)\varphi+\cos(n+0)\varphi\,d\varphi=\sin n\varphi\Big|_0^{2\pi}=\sin 2\pi n-\sin n0^\circ=0$$

$\Rightarrow \underline{2^nA_n+\frac{1}{2^n}B_n=0\ ,n=\overline{0,\infty}}$ (2)

$**|\cdot\sin n\varphi$

$$\underbrace{4\int_0^{2\pi}\cos\varphi\cdot\sin n\varphi\,d\varphi}_{I_3}=(3^nC_n+\frac{1}{3^n}D_n)\|\Phi_n\|^2$$

$$I_3=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin(n-1)\varphi+\sin(n+1)\varphi\,d\varphi=-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(n-1)\varphi}{n-1}+\frac{\cos(n+1)\varphi}{n+1}\right]\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(n-1)2\pi}{n-1}+\frac{\cos(n+1)2\pi}{n+1}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right]=\left|\begin{matrix}\cos(n\pm1)2\pi=\cos 2\pi n\cos 2\pi\mp \\ \mp\sin 2\pi n\overset{0}{\sin}2\pi=1\end{matrix}\right|$$

$=0$

$\Rightarrow \underline{0 = (3^n C_n - \frac{1}{3^n} D_n)}, \ n = \overline{0, \infty} \quad (3)$

$** \ | \cos n\varphi$

$$4 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\varphi \cos n\varphi \, d\varphi}_{J_n} = \left(3^n A_n - \frac{1}{3^n} B_n\right) \cdot \|\varphi_n\|^2$$

$$J_n = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\cos(n-1)\varphi + \cos(n+1)\varphi\right) d\varphi = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(n-1)\varphi}{n-1} + \frac{\sin(n+1)\varphi}{n+1} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{2\pi}{2\pi} \frac{\sin(n-1)2\pi}{n-1} + \frac{\sin(n+1)2\pi}{n+1} - 0 - 0 \right] = \Big| \sin(2\pi n + 2\pi) = \sin 2\pi n \cos 2\pi - \cos 2\pi n \sin 2\pi = 0$$

$=$ | используя ~~на~~ 1ый замечательный предел | $= \pi \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow 4\pi \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases} = \left(3^n A_n - \frac{1}{3^n} B_n\right) \|\varphi_n\|^2$$

$$\underline{4 = 3A_1 + \frac{1}{3} B_1, \ n = 1} \quad (4)$$

$$0 = \left(3^n A_n + \frac{1}{3^n} B_n\right) \|\varphi_n\|^2, \text{ при } \forall n \neq 1 \quad (5)$$

(1) и (3)

$\Rightarrow C_n = -\frac{1}{2^{2n}} D_n \rightarrow 0 = 3^n \cdot \left(-\frac{1}{2^{2n}}\right) \cdot D_n + \frac{1}{3^n} D_n = D_n \left(\frac{1}{3^n} - \frac{3^n}{2^{2n}}\right)$

$\Rightarrow C_n = 0, \ D_n = 0, \ \forall n$

(5)(2) и (4)

$\Rightarrow A_n = -\frac{1}{4^n} B_n \overset{n=1}{\Rightarrow} 4 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) B_1 + \frac{1}{3} B_1 = B_1 \cdot \left(\frac{1}{3}^{\backslash 4} - \frac{3}{4}^{\backslash 3}\right) = -\frac{5}{12} B_1$

$$\Rightarrow \underline{B_1 = -\frac{4 \cdot 12}{5} = -9{,}6}$$

$$\Rightarrow \underline{A_1 = \frac{9{,}6}{4} = 2{,}4}$$

$\Rightarrow U_1 = \overset{=2,4}{A_1} \cos\varphi \cdot r + \overset{=-9,6}{B_1} \cos\varphi \cdot \frac{1}{r} = 2{,}4 \cos\varphi \cdot r \left(1 - \frac{4}{r^2}\right)$ — соответствует Г.У.

Ответ: $U_1 = 2{,}4 r \underline{\cos\varphi} \left(1 - \frac{4}{r^2}\right)$

3

б) $u_{xx}+4u_{xy}+5u_{yy}-2u_x-2u_y=0$

$a_{11}=1 \quad a_{12}=2 \quad a_{22}=5$

$\delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 4-5=-1\ (<0) \Rightarrow$ эллиптический тип

$\lambda^2-4\lambda+5=0$

$D=16-4\cdot 5=-4 \qquad \sqrt{D}=2i$

$\lambda_{1,2}=\frac{4\pm 2i}{2}=2\pm i$

ур-е характеристик: Выберем корень со знаком $\ominus$: $\lambda=2-i$

$\frac{dy}{dx}=2-i$, $dy=2dx-idx$, $y=2x-ix+C$, $C=(y-2x)+ix$

$\Rightarrow \xi=y-2x$ Возьмем $\eta=x$ - ввод новых переменных: $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$

Тогда $\begin{vmatrix} \xi_x=-2 & \eta_x=1 \\ \xi_y=1 & \eta_y=0 \end{vmatrix}$

$u_x=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=u_\xi\cdot(-2)+u_\eta\cdot 1=-2u_\xi+u_\eta$

$u_y=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=u_\xi\cdot 1+u_\eta\cdot 0=u_\xi$

$u_{xx}=\frac{\partial(-2u_\xi+u_\eta)}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial(-2u_\xi+u_\eta)}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=(-2u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta})\cdot(-2)+(-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta})=4u_{\xi\xi}-4u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}$

$u_{yy}=\frac{\partial(u_\xi)}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial(u_\xi)}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=u_{\xi\xi}\cdot 1+0=u_{\xi\xi}$

$u_{xy}=\frac{\partial(-2u_\xi+u_\eta)}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial(-2u_\xi+u_\eta)}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=-2u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}+0=-2u_{\xi\xi}+u_{\eta\xi}$

Подставляем полученное в наше уравнение

$4u_{\xi\xi}\cancel{-4u_{\xi\eta}}+u_{\eta\eta}\cancel{+4u_{\xi\eta}}-8u_{\xi\xi}+5u_{\xi\xi}+4u_\xi-2u_\eta-2u_\xi=0$

$\underline{u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}}+2u_\xi-2u_\eta=0$ - канонический вид

$\Delta U$ - оператор Лапласа

Новикова Е.С. | РЛ2-31 | Билет № 13

а) Простейшие задачи Штурма-Лиувилля:

Рассм. задачу Ш-Л для $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$ - для простоты

1) Одномерный случай

$$\begin{cases} Lu + \lambda \rho y \equiv \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy}{dx}\right) - qy + \lambda \rho y = 0, \quad 0 < x < l \\ P_1(y) = \alpha_1 \frac{dy}{dx} - \beta_1 y|_{x=0} = 0 \\ P_2(y) \equiv \alpha_2 \frac{dy}{dx} + \beta_2 y|_{x=l} = 0, \quad y \equiv 0 \end{cases}$$

Фундаментальная система решений $\{y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda)\}$

Общее решение $y(x) = c_1 y_1(x,\lambda) + c_2 y_2(x,\lambda)$

$$\begin{cases} c_1\{\alpha_1 y_1'(0,\lambda) - \beta_1 y_1(0,\lambda)\} + c_2\{\alpha_1 y_2'(0,\lambda) - \beta_1 y_2(0,\lambda)\} = 0 \\ c_2\{\alpha_2 y_1'(l,\lambda) + \beta_2 y(l,\lambda)\} + c_2\{\alpha_2 y_2'(l,\lambda) + \beta_2 y_2(l,\lambda)\} = 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$ $\neq 0$ решение

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 y_1'(0,\lambda) - \beta_1 y_1(0,\lambda) & \alpha_1 y_2'(0,\lambda) - \beta_1 y_2(0,\lambda) \\ \alpha_2 y_2'(l,y) - \beta_2 y_2(l,\lambda) & \alpha_2 y_2'(l,\lambda) - \beta_2 y_2(l,\lambda) \end{vmatrix} = 0 \text{ - общее решение}$$

Ур-е для определения С.З. - Дисперсионное ур-е

$\{\lambda_n\}$ - корни ур-я

Каждому $\lambda_n$ соответствует $\neq 0$ решение, которое можно представить в виде

$$y = c_1 y_1(x,\lambda) + c_2 y_2(x,y)$$

Частные случаи:

1) $y(0) = y(l) = 0$ $(\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \beta_1 = \beta_2 = 1)$

$y_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}\,x$; $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $n = \overline{1,\infty}$, $\|y_n\|^2 = \frac{l}{2}$

2) $y(0) = y'(l) = 0$ ~~$(\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = 0, \beta$~~ $(\alpha_1 = \beta_2 = 0, \beta_1 = \alpha_2 = 1)$

$y_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}\,x$, $\lambda_n = \left[\frac{\pi}{l}(n + \tfrac{1}{2})\right]^2$, $\|y_n\|^2 = \frac{l}{2}$, $n = \overline{0,\infty}$

...

10)