

Свойства неопределенных интегралов.

$$(\int f(x) dx)' = f(x)$$

$$\int f'(x) dx = f(x) + C$$

$$\int k f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \int (f(x) \pm g(x)) dx &= \\ &= \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \end{aligned}$$

Таблица неопределенных интегралов

$$1) \int dx = x + C$$

$$2) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$$

$$3) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$4) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$$

$$5) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$10) \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + C$$

$$11) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C, a \neq 0$$

$$12) \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$13) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, a \neq 0$$

$$14) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$$

$$6) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$7) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$8) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$9) \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + C$$

$$18) \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$

$$15) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$$

$$16) \int 1 dx = x + C$$

$$17) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

МЕТОД ДОД ИНТЕГР ПО ЧАСТЯМ

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Пример:

$$\int x^2 \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \quad du = 2x \\ dv = \sin x \quad v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x =$$

$$= -x^2 \cos x + \underbrace{2 \int x \cos x}_{x \sin x + \cos x} = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

Если есть $\ln x$ то $u = \ln x$

Если есть e^{ax} то $u = e^{ax}$

ТРИГОНОМ И ГИПЕРБОЛИЧ

Если m и n Вид: $\int \sin^m x \cdot \cos x$

Если m и n четные не отрыв.

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

Если $m+n = -2k$, $k \in \mathbb{N}$, то $\operatorname{tg} x = t$ и $\operatorname{ctg} x = t$

Для интегралов вида $\int \operatorname{tg}^m x dx$ и $\int \operatorname{ctg}^n x dx$, где $m = 2, 4, \dots$

$$\operatorname{tg}^2 = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

Для произведений синусов и косинусов

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

Если m и n Если $\sin x / \cos x$ то $t = \operatorname{tg} x$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 2 \arctg t$$

$$dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$$

если $\sin x / \cos x$
 $t = \operatorname{tg} x$

Основные формулы

Площадь

$$1) S = \int_a^b f(x) dx$$

$$2) S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

$$3) S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt$$

$$4) S = \frac{1}{2} \int_a^B r^2 d\varphi$$

Объём

$$1) V = \int_a^b S(x) dx$$

$$2) V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$$3) V_y = 2\pi \int_a^b x |f(x)| dx, 0 < a < b$$

$$4) V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$$

$$5) V = \frac{2}{3} \pi \int_a^B r^3 \sin \varphi d\varphi$$

Длина дуги:

$$1) l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$2) l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

$$3) l = \int_a^B \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$$

Площадь поверхности.

$$1) S = 2\pi \int_A^B R dl$$

$$2) S_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$3) S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

$$4) S_x = 2\pi \int_a^B r \cdot \sin \varphi \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$$

$$5) S_y = 2\pi \int_c^d F(y) \sqrt{1 + (F'(y))^2} dy$$

$$x = F(y)$$

