Список вопросов по дисциплине “Уравнения математической физики и Преобразования Фурье” семестр 3, модуль 2

1. Сколько типов дифференциальных уравнений в частных производных вы знаете? Как определить к какому типу относится уравнение?
2. Что называется характеристическим уравнением для дифференциального уравнения 2-го порядка в частных производных.
3. Уравнения характеристик для дифференциального уравнения 2-го порядка в частных производных.
4. Запишите в каноническом виде уравнение гиперболического типа. Как выбираются новые переменные?
5. Запишите в каноническом виде уравнение эллиптического типа. Как выбираются новые переменные?
6. Запишите в каноническом виде уравнение параболического типа. Как выбираются новые переменные?
7. Обобщенный ряд Фурье.
8. Выяснить, к какому типу уравнений относится волновое уравнение. Привести его к каноническому виду.
9. Вывести формулу Д’Аламбера.
10. Записать формулу для колебания струны под действием мгновенного сосредоточенного импульса.
11. Каким требованиям должны удовлетворять дополнительные условия, для однозначного определения математической модели физического явления? Какие бывают дополнительные условия?
12. Запишите полную постановку начально-краевой задачи. Сделайте редукцию общей задачи.
13. Дайте определение задачи Штурма-Лиувилля.
14. Перечислите свойства собственных функций и собственных значений.
15. Опишите метод разделения переменных для начально-краевой задачи с однородным уравнением (общая схема).

16. Запишите задачу Коши, которая получается в результате решения начально-краевой задачи с неоднородным уравнением.

17. В каком виде надо искать решение для начально-краевой задачи с неоднородными граничными условиями. Почему?

18. На какие две задачи распадется начально-краевая задача с неоднородными граничными условиями.

19. Что называется дисперсионным уравнением?

20. Дайте определение цилиндрических функций.

21. Запишите уравнение Бесселя и его два линейно независимых решения.

22. Запишите функцию Бесселя.

23. Запишите функцию Неймана.

24. Какие функции образуют фундаментальную систему уравнения Бесселя.

25. Запишите рекурентные формулы для функции Бесселя.

26. Запишите чему равен $J_{1/2}(x)$.

27. Запишите чему равен $J_{-1/2}(x)$.

28. Запишите формулу для $J_{n+1/2}(x)$.

29. Асимптотическое поведение функции Бесселя при $x \to \infty$.

30. Асимптотическое поведение функции Неймана при $x \to \infty$.

31. Асимптотическое поведение функции Бесселя при $x \to 0$.

32. Асимптотическое поведение функции Неймана при $x \to 0$.

33. Запишите условие ортогональности функций Бесселя и квадрат нормы функций Бесселя.

34. Дайте определение классических ортогональных полиномов.

35. Условие ортогональности для классических ортогональных полиномов и квадрат нормы для классических ортогональных полиномов.

36. Запишите уравнение для классических ортогональных полиномов.

37. Запишите задачу Штурма–Лиувилля для классических ортогональных полиномов.

38. Перечислите основные свойства классических ортогональных полиномов.

ВАРИАНТ №0

1. (*4 баллов.*) Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \le r < 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (где r, φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ удовлетворяет следующим условиям

   $u(1,\varphi) = 31\cos 8\varphi + 32\sin 9\varphi$ 3

2. (*4 баллов.*) Решить первую смешанную задачу для неоднородного уравнения теплопроводности

   $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 2\cos t \sin 4x, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t < \infty$ 1

   $u(x,0) = 0, \qquad u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0$

   ЛИБО

   Решить смешанную задачу для неоднородного волнового уравнения

   $$\begin{cases} U_{tt} = a^2 U_{xx} + Ae^{-t}\cos\frac{\pi}{2l}x \\ U(x,0) = 0, \quad U_t(x,0) = 0 \\ U_x(0,t) = U(l,t) = 0 \end{cases}$$

3. (*4 баллов.*) Решить смешанную задачу для волнового уравнения

   $U_{tt} = 16U_{xx}, \quad 0 < x < 7, \quad 0 < t < \infty$ 2

   $U_t(x,0) = 4\pi\cos\pi x,\ U(x,0) = 0,$

   $U_x(0,t) = 0,\ U_x(7,t) = 0$

   ЛИБО

   ? Решить смешанную задачу для уравнения теплопроводности

   $$\begin{cases} U_t = U_{xx}, \quad 0 < x < 1, \qquad t > 0 \\ U_x(0,t) = 0, \quad U_x(1,t) = 0, \\ U(x,0) = x^2 - 1 \end{cases}$$

4. (*4 балла.*) Теоретический вопрос.