Занятие 15. ОДУ первого порядка, его решение. Геометрическое решение ОДУ первого порядка методом изоклин. Интегрирование ОДУ с разделяющимися переменными и однородных ОДУ.

Функциональное уравнение
$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$
или
$$y' = f(x, y), \tag{2}$$
связывающее между собой независимую переменную, искомую функцию () и ее производную y' (x), называется дифференциальным уравнением 1-го порядка.

Решением (частным решением) уравнения (1) или (2) на интервале (a, b) называется любая функция $y = \phi(x)$, которая, будучи подставленой в это уравнение вместе со своей производной ϕ', обращает его в тождество относительно $x \in (a, b)$.

9.1. Показать, что при любом действительном значении параметра C выражение $y = x\,(C - \ln|x|)$ определяет решения дифференциального уравнения $(x-y)\,dx + x\,dy = 0$.

◁ Преобразуем заданное дифференциальное уравнение
$$(x - y)\,dx + x\,dy = 0 \Rightarrow x\,dy = (y - x)\,dx,$$
разделив полученное выражение на dx, получим:
$$x\frac{dy}{dx} = (y - x) \quad \text{,значит} \quad y' = \frac{(y - x)}{x}$$
Подставим в последнее равенство заданную функцию y и её производную $y' = (C - \ln|x|) - 1$, получим:
$(C - \ln|x|) - 1 = \dfrac{(x\,(C - \ln|x|) - x)}{x}$тождество верно $\Rightarrow$ заданная функция определяет решения дифференциального уравнения.▷

Метод изоклин

Решение уравнения $y' = f(x, y)$, проходящее через точку (x, y), должно иметь в этой точке производную y', равную $f(x, y)$,т.е. оно должно касаться прямой, наклоненной под углом $\alpha = \operatorname{arctg}(f(x, y))$ к оси Ox.

Геометрическое место точек плоскости (x, y), в которых наклон касательных к решениям уравнения $y' = f(x, y)$ один и тот же, называется *изоклиной.* Уравнение изоклины имеет вид $f(x, y) = k$, где k – постоянная.

- Чтобы приближенно построить решения уравнения $y' = f(x, y)$, можно начертить достаточное число изоклин, а затем провести решения,т.е. кривые, которые в точках пересечения с изоклинами $f(x, y) = k_1$, $f(x, y) = k_2, \cdots$ имеют касательные с угловыми коэффициентами $k_1, k_2, \cdots$ соответственно.

- Чтобы потроить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют кривые семейства
$$\phi(x, y, C_1, \cdots, C_n) = 0, \qquad (3)$$
надо продифференцировать равенство (3) n раз, считая y функцией от x, а затем из полученных уравнений и уравнения (3) исключить произвольные постоянные $C_1, \cdots, C_n$

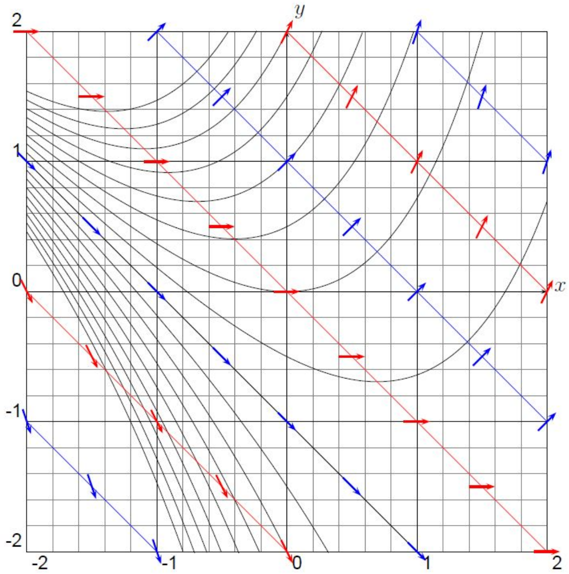
9.9. Составить дифференциальные уравнения семейств парабол $y = x^2 + 2ax$.

◁ Единственная произвольная постоянная a, дифференцируем исходное уравнение $y' = 2x+2a$, выражаем $a = \frac{y'}{2} - x$ и из исходного уравнения $a = \frac{y}{2x} - \frac{x}{2}$, приравнивая выражения для a, имеем:
$$\frac{y}{2x} - \frac{x}{2} = \frac{y'}{2} - x \text{ или } y - x^2 = xy' - 2x^2 \text{ или } y + x^2 = xy'. \ ▷$$

9.16. Методом изоклин построить приближенно семейство интегральных кривых уравнения
$$y' = x + y.$$
Напомним, что уравнение изоклины имеет вид $y' = k$, где k – некоторая постоянная. Строится достаточно густая сетка изоклин для различных значений k и на каждой изоклине изображаются небольшие отрезки (показаны стрелочками) с наклоном $\alpha = \operatorname{arctg}(k)$. Разберем построение на примере:

- при $k = 0$ имеем $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$, $\alpha = 0$.
  Чертим прямую $y = -x$ и наносим на неё под углом $\alpha = 0$ стрелочки.
- при $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ имеем $x + y = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = -x + \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$
  Чертим прямую $y = -x + \frac{1}{\sqrt{3}}$ и наносим на неё под углом $\alpha = \frac{\pi}{6}$ стрелочки. Аналогично для следующих значений k:
- при $k = 1$ имеем $x + y = 1 \Rightarrow y = -x + 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$
- при $k = \sqrt{3}$ имеем $x + y = \sqrt{3} \Rightarrow y = -x + \sqrt{3}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$
- при $k = -1$ имеем $x + y = -1 \Rightarrow y = -x - 1$, $\alpha = -\frac{\pi}{4}$
- при $k = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ имеем $x + y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = -x - \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\alpha = -\frac{\pi}{6}$
  при $k = -\sqrt{3}$ имеем $x + y = -\sqrt{3} \Rightarrow y = -x - \sqrt{3}$, $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

2. Начиная из некоторой точки (x_0, y_0), поводится линия, которая, будет пересекать каждую изоклину под углом, заданным полем направлений (стрелками). Полученная таким образом кривая и будет приближенным изображением (эскизом) интегральной кривой уравнения, проходящей через точку (x_0, y_0).



9.18. Методом изоклин построить приближенно семейство интегральных кривых уравнения $y' = -y/x$.

Строим изоклины:$-y/x = k \Rightarrow y = -kx$

$k = 0, \Rightarrow y = 0, \ \alpha = 0$

Чертим прямую $y = 0$ и наносим на неё под углом $\alpha = 0$ стрелочки.

$k = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \ y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x, \ \alpha = \dfrac{\pi}{6}$

Чертим прямую $y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ и наносим на неё под углом $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ стрелочки.

Аналогично для следующих значений k:

$k = 1$ имеем $y = -x, \ \alpha = \dfrac{\pi}{4}$

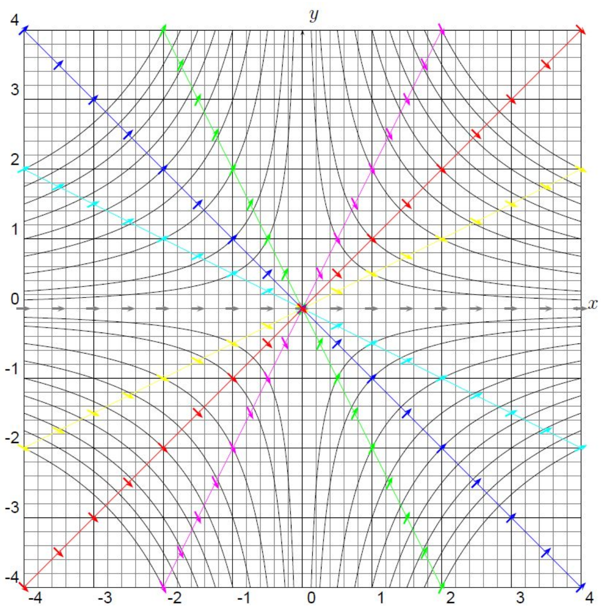
$k = \sqrt{3}$ имеем $y = -\sqrt{3}x, \ \alpha = \dfrac{\pi}{3}$

$k = -1$ имеем $y = x, \ \alpha = -\dfrac{\pi}{4}$

$k = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ имеем $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x, \ \alpha = -\dfrac{\pi}{6}$

$k = -\sqrt{3}$ имеем $y = \sqrt{3}x, \ \alpha = -\dfrac{\pi}{3}$

Можно строить сколь угодно много изоклин, выбирая разные значения k, не только табличные.



Уравнения с разделяющимися переменными и однородной правой частью

Уравнения с разделяющимися переменными могут быть записаны в виде

$$y' = f(x)g(y) \tag{4}$$

а также в виде

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0. \tag{5}$$

Для решения такого уравнения надо обе его части умножить и разделить на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входило только x, в другую – только y, и затем проинтегрировать обе части.

При делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестные x и y, могут быть потеряны решения,обращающее это выражение в нуль.

Решить дифференциальные уравнения:

9.22. $y' = x/y$.

$\triangleleft$ Имеем уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}, \quad y\,dy = x\,dx,$$

Интегрируем обе части

$$\int y\,dy = \int x\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C,$$

$y^2 = x^2 + C$. $\triangleright$

9.27. $y'\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2$.

$\triangleleft$

$$\frac{dy}{dx}\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2 - -\text{уравнение с разделяющимися переменными}$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Интегрируем обе части

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\operatorname{arctg} y = \arcsin x + C$. $\triangleright$

9.30. $(1+y^2)x\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$.

$\triangleleft$ Имеем уравнение с разделяющимися переменными

$$(1+y^2)x\,dx = -(1+x^2)\,dy$$

$$\frac{x\,dx}{1+x^2} = -\frac{dy}{1+y^2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = -\frac{dy}{1+y^2}$$

$\dfrac{1}{2}\ln|1+x^2| = -\operatorname{arctg} y + C.$ ▷

9.37. $y' = \cos(x+y)$.

◁ В этом уравнении необходимо сделать замену $u(x) = x + y(x)$.
Тогда $u' = 1 + y'$ и $u' - 1 = \cos u$

$$\frac{du}{dx} = \cos u + 1$$

$$\frac{du}{\cos u + 1} = dx$$

(Заметим, что $\cos u = -1$ не даст решения)

$$\int \frac{du}{\cos u + 1} = \left| \begin{aligned} t =& \operatorname{tg}\frac{u}{2} \\ u =& 2\operatorname{arctg} t \end{aligned} \right| = \int \frac{\dfrac{2\,dt}{1+t^2}}{\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 1} = \int \frac{2\,dt}{1 - t^2 + 1 + t^2} = \int dt = t + C = \operatorname{tg}\frac{u}{2} + C$$

$$\operatorname{tg}\frac{u}{2} = x + C$$

Выполняем обратную замену:
$\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2} = x + C.$ ▷

9.39. $y' = (4x + y + 1)^2$.

◁ Замена: $u(x) = 4x + y + 1$, $u' = 4 + y'$.

$$u' - 4 = u^2; \quad \frac{du}{dx} = u^2 + 4; \quad \frac{du}{u^2+4} = dx; \quad \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{u}{2} = x + C;$$

Выполняем обратную замену:
$\operatorname{arctg}\dfrac{4x+y+1}{2} = 2x + C.$ ▷

9.44. Найти частное решение уравнения $(xy^2+x)\,dy + (x^2y - y)\,dx = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$.

◁

$$x(y^2+1)\,dy = y(1-x^2)\,dx \Big| : xy$$

$$(y + 1/y)\,dy = (1/x - x)\,dx$$

Интегрируем обе части уравнения

$$\int (y + 1/y)\,dy = \int (1/x - x)\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} + \ln|y| = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C;$$

Подставляем начальные условия:

$$\frac{1}{2} + 0 = 0 - \frac{1}{2} + C, \text{ откуда } C = 1, \text{ подставляем константу в решение}$$

$\dfrac{y^2}{2} + \ln|y| = \ln|x| - \dfrac{x^2}{2} + 1.$ ▷

Однородные дифференциальные уравнения.

Однородные уравнения могут быть записаны в виде $y' = f(\frac{x}{y})$, а также в виде $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – однородные функции одной и той же степени.

- Чтобы решить однородное уравнение, можно сделать замену $y = ux$, после чего получается уравнение с разделяющимися переменными.
  Пример. Решить уравнение $xdy = (x+y)dx$.
  Имеем однородное уравнение. Полагаем $y = u(x)\cdot x$. Тогда $dy = xdu + udx$. Подставляя в уравнение, получим
  $$x(xdu + udx) = (x+ux)dx; \;\; xdu = dx$$
  Получили уравнение с разделяющимися переменными
  $$du = \frac{dx}{x}, u = ln\,|x| + C.$$
  Возвращаемся к исходным переменным, получим $y = x(ln\,|x| + C)$.
  Кроме того, имеется решение $x = 0$, которое было потеряно при делении на x.

- Уравнение вида $y' = f(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c})$ приводятся к однородному с помощью переноса начала координат в точку пересечения прямых $ax+by+c = 0$ и $a_1x+b_1y+c_1 = 0$. Если эти прямые не пересекаются, то $a_1x+b_1y = k(ax+by)$, следовательно уравнение имеет вид $y' = F(ax+by)$ и приводятся к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z = ax + by$ или $(z = ax + by + c)$.

Решить уравнения:

9.46. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$.

$\triangleleft$ Выполним замену $y = x\cdot u(x)$, тогда $y' = u(x) + x\cdot u'(x)$.
Приравниваем исходное y' с тем, который получили после замены переменной:
$$u(x) + x\cdot u'(x) = u(x) + \frac{1}{u(x)},$$
$xu' = \frac{1}{u}$ – уравнение с разделяющимися переменными, $x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}$, $u\,du = \frac{dx}{x}$.
Интегрируем и получаем: $\frac{u^2}{2} = \ln|x| + C$; $\quad \frac{y^2}{2x^2} = \ln|x| + C$;
Возвращаемся к исходным переменным:
$$y^2 = 2x^2\ln|x| + 2Cx^2. \triangleright$$

9.55. $xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}$.

$\triangleleft$ Уравнение однородное, выполним замену: $y = ux$; $y' = u'x + u$.
Приравняем уравнения для производных:
$$x(u'x + u) - ux = \sqrt{x^2 - x^2u^2}$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными:

$$u'x^2 = |x|\sqrt{1-u^2}.$$

По-хорошему здесь надо рассматривать два случая: $x > 0$ и $x < 0$.

$$u'x = \pm\sqrt{1-u^2}. \text{ (Плюс для } x > 0, \text{ минус для } x < 0.)$$

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pm\frac{dx}{x} \quad \text{(отдельно рассмотрим случай } u = \pm 1)$$

$$\arcsin u = \pm \ln|x| + C$$

$$u = \sin(\pm \ln|x| + C)$$

В исходных переменных:

$$\frac{y}{x} = \sin(\pm\ln|x| + C) \;\Rightarrow\; y = x\sin(\pm\ln|x| + C).$$

Теперь рассмотрим случай $u = \pm 1$, поскольку при этих значениях могут быть потеряны решения (обнуляют знаменатель), т.е. $y = \pm x$, подтавляем решение в исходное уравнение, получаем:

$$x \cdot (\pm 1) - (\pm x) = 0 \;\Rightarrow\; \text{равенство удовлетворяется.}$$

Ответ: $y = \pm x$, $y = x\sin(\pm\ln|x| + C)$. $\triangleright$

9.64. Найти частное решение уравнения $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$.

$\triangleleft$ Исходное уравнение однородное, выполняем замену $y = x \cdot u(x)$; $y' = u(x) + x \cdot u'(x)$. Подставляем производную в исходное уравнение и приходим к уравнению с разделяющимися переменными:

$$xu + x^2u' = xu\ln u; \quad xu' = (\ln u - 1)u; \quad \frac{du}{(\ln u - 1)u} = \frac{dx}{x}; \quad \frac{d(\ln u - 1)}{(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}$$

Интегрируя, получаем:

$$\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln C; \quad \ln u - 1 = Cx; \quad u = e^{Cx+1}$$

В исходных переменных решение примет вид: $y = xe^{Cx+1}$.
Используя начальное условие, $y(1) = 1$ найдем константу C:

$$y(1) = e^{C+1} = 1 \quad \Rightarrow \quad C = -1; \quad y = xe^{1-x}. \triangleright$$

Текущее ДЗ: 9.3, 9.6, 9.12, 9.20,9.22, 9.26, 9.28, 9.34, 9.36, 9.40, 9.45, 9.47, 9.51, 9.53, 9.66.