УМФиПФ. Шушенко А.Ю., РЛ2-31, билет №18

№2. Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u=0$ в круговом секторе $0\le r\le 1$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$ (где r,φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ удовлетворяет условиям: $u(1,\varphi)=7\cos 10\varphi$, $u_\varphi(r,0)=0$, $u(r,\frac{\pi}{4})=0$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0\ ;\quad u=R(r)\Phi(\varphi)\neq 0$$

$$\frac{\Phi}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\frac{R}{r^2}\Phi''=0\ \Big|\cdot\frac{r^2}{R\Phi}$$

$$\Rightarrow\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\frac{\Phi''}{\Phi}=0$$

$$-\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)=\frac{\Phi''}{\Phi}=-\lambda.$$

I.

$$\begin{cases}\Phi''+\lambda\Phi=0\ ;\\ \Phi'(0)=0,\ \Phi(\frac{\pi}{4})=0\end{cases}$$

1) $\lambda=0$. $\Phi''=0\Rightarrow\Phi=C_1\varphi+C_2$; $\Phi'=C_1$ $\Rightarrow\begin{cases}0=C_1\\0=C_2\end{cases}\Rightarrow$ $\Phi=0$ – не с.ф. $\lambda=0$ – не с.з.

2) $\lambda=-w^2<0$

$\Phi''-w^2\Phi=0$

$$\begin{cases}\Phi=C_1e^{w\varphi}+C_2e^{-w\varphi}\\ \Phi'=C_1we^{w\varphi}-C_2we^{-w\varphi}\end{cases}\qquad\begin{cases}C_1e^{\frac{\pi}{4}w}+C_2e^{-\frac{\pi}{4}w}=0\\ C_1w-C_2w=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}e^{\frac{\pi}{4}w} & e^{-\frac{\pi}{4}w}\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}e^{\frac{\pi}{4}w} & e^{-\frac{\pi}{4}w}\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow -e^{\frac{\pi}{4}w}-e^{-\frac{\pi}{4}w}=0\Rightarrow$$ ни при каких w данное ур-ие не выполняется

$\Downarrow$

$\lambda<0$ – не с.з.

3). $\lambda=w^2>0$, $\Phi''+w^2\Phi=0$

$$\begin{cases}\Phi=C_1\cos w\varphi+C_2\sin w\varphi\\ \Phi'=-C_1w\sin w\varphi+C_2w\cos w\varphi\end{cases}\qquad\begin{cases}0=C_1\cos w\frac{\pi}{4}+C_2\sin w\frac{\pi}{4}\\ 0=C_2w\Rightarrow C_2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1\cos w\frac{\pi}{4}=0\Rightarrow\cos\frac{w\pi}{4}=0\Rightarrow\frac{\pi w}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n=\overline{0,\infty}$$

$\frac{\omega}{4} = \frac{1}{2} + n, \; n=\overline{0,\infty}$

Шуменко А.Ю., РЛ2-31, билет №18

$\omega = 2 + 4n, \; n = \overline{0,\infty}$

$\lambda_n = (2+4n)^2, \; n = \overline{0,\infty}$ — с.з.

$\Phi_n = \cos(2+4n)\varphi$ — с.ф.

$$\|\Phi_n\|^2 = \int_0^{\pi/4} \cos^2(2+4n)\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}[1 + \cos(4+8n)\varphi]\, d\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \cos(4+8n)\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\left.\frac{\sin(4+8n)\varphi}{4+8n}\right|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\overbrace{\sin(\pi+2\pi n)}^{=0 \, \forall n}}{4+8n} = \frac{\pi}{8}.$$

$u = R(r)\Phi(\varphi)$

$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \lambda = 0$

II $\quad r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - (2+4n)^2 R = 0, \quad e^t = r$

$R(r) = R(e^t) = y(t)$

$\Rightarrow y'' - (2+4n)^2 y = 0$

$y = C_1 e^{(2+4n)t} + C_2 e^{-(2+4n)t}$

$R(r) = C_1 r^{2+4n} + \frac{C_2}{r^{2+4n}}$. Наложим естественное Г.У. $r \to 0$

$\frac{1}{r^{2+4n}} \xrightarrow[r\to 0]{} \infty$, поэтому $C_2 = 0 \Rightarrow R(r) = \underset{=1}{C_1} r^{2+4n}$

III. Общее решение: $u = R(r)\Phi(\varphi)$

$u = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r)\Phi_n(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2+4n} A_n \cos(2+4n)\varphi$

IV. Граничное условие: $u(1,\varphi) = 7\cos 10\varphi$.

$7\cos 10\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(2+4n)\varphi \quad \Big|\cdot \cos(2+4n)\varphi$

$$7\underbrace{\int_0^{\pi/4} \cos 10\varphi \cdot \cos(2+4n)\varphi\, d\varphi}_{I} = A_n \cdot \|\Phi_n\|^2 = \frac{\pi}{8}, \; \forall n$$

$$I: \int_0^{\pi/4} \cos 10\varphi\cdot\cos(2+4n)\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}[\cos(10+2+4n)\varphi + \cos(10-2-4n)\varphi]\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(12+4n)\varphi}{12+4n} + \frac{\sin(8-4n)\varphi}{8-4n}\right]\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(12+4n)\cdot\frac{\pi}{4}}{12+4n} + \frac{\sin(8-4n)\frac{\pi}{4}}{8-4n}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(3\pi+\pi n)}{12+4n} + \frac{\sin(2\pi - \pi n)}{8-4n}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\pi}{4}\sin(2\pi - \pi n)}{\frac{\pi}{4}(8-4n)} =$$

$*\sin(3\pi+\pi n) = -\sin \pi n = 0 \; \forall n$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{\pi}{4}\sin(2\pi-\pi n)}{2\pi - \pi n} = \begin{cases} \frac{\pi}{8}, & n = 2 \\ 0, & n \neq 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow A_2 = \frac{7\cdot\pi/8}{\pi/8} = 7$

V. Окончательное решение. $u = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2+4n} A_n \cos(2+4n)\varphi$

$u = r^{2+4n} A_2 \cos 10\varphi \Rightarrow u = 7\cos 10\varphi$

Шумейко А.Ю., РЛ2-31, билет №18

№1. Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения $u_{tt}=4u_{xx}$ на отрезке $0<x<2$, $0<t<\infty$ с начальными и граничными условиями $u(x,0)=11\sin 6\pi x$, $u_t(x,0)=0$, $u(0,t)=0$, $u(2,t)=0$

$$\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx}, \ 0<x<2, \ 0<t<\infty \\ u_t(x,0)=0, \ u(x,0)=11\sin 6\pi x \\ u(0,t)=0, \ u(2,t)=0 \end{cases}$$

$u(x,t)=X(x)T(t)\not\equiv 0$

$$XT''=4TX'' \Rightarrow \frac{T''}{T}=\frac{4X''}{X}=-\lambda \Rightarrow \begin{cases} \frac{4X''}{X}=-\lambda \\ X(0)=0 \\ X(2)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

метод разделения переменных

I

$$\Rightarrow \begin{cases} X''+\frac{\lambda}{4}X=0 \\ X(0)=0 \\ X(2)=0 \end{cases}$$ Решим задачу Штурма-Лиувилля:

1) $\lambda=0$ $X''=0 \Rightarrow X=C_1x+C_2$

$X(0)=0 \Rightarrow 0=C_2$

$X(2)=0 \Rightarrow 0=2C_1+C_2 \Rightarrow 0=2C_1 \Rightarrow C_1=0$

$\Rightarrow \lambda=0$ - не с.з., $X=0$ - не с.ф.

2) $\lambda=-\omega^2<0$

$$\begin{cases} X''-\frac{\omega^2}{4}X=0 \\ X(0)=0 \\ X(2)=0 \end{cases}$$

$X=C_1e^{\frac{\omega}{2}x}+C_2e^{-\frac{\omega}{2}x}$

$X(0)=0 \Rightarrow 0=C_1+C_2$

$X(2)=0 \Rightarrow 0=C_1e^{\omega}+C_2e^{-\omega}$

$$\begin{cases} 0=C_1+C_2 \\ 0=C_1e^{\omega}+C_2e^{-\omega} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\omega} & e^{-\omega} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\omega} & e^{-\omega} \end{vmatrix}=e^{-\omega}-e^{\omega}=0$ - дисперсионное уравнение

$\Rightarrow \lambda<0$ - не с.з., $X=0$ - не с.ф.

3) $\lambda=\omega^2>0$

$$\begin{cases} X''+\frac{\omega^2}{4}X=0 \\ X(0)=0 \\ X(2)=0 \end{cases} \Rightarrow X=C_1\cos\frac{\omega}{2}x+C_2\sin\frac{\omega}{2}x$$

Шумейко Д.Ю., РЛ2-31, билет №18

$X(0)=0 \Rightarrow 0=C_1$

$X(2)=0 \Rightarrow 0=C_2 \sin\omega,\ C_2\neq 0$

$\sin\omega=0$

$\omega=\pi n,\ n=\overline{1,\infty}$

$\Rightarrow \lambda=(\pi n)^2$ – с.з.

$X=\sin\frac{\pi n}{2}x$ – с.ф., $n=\overline{1,\infty}$

$$\|X\|^2=\int_0^2 \sin^2\frac{\pi n x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2(1-\cos\pi n x)\,dx=\frac{1}{2}\cdot x\Big|_0^2-\frac{1}{2}\frac{\sin\pi n x}{\pi n}\Big|_0^2=$$ ($=0,\ \forall x$)

$=1$

II. $\frac{T''}{T}=-\lambda$ Задача Ш-Л

$\Rightarrow T''+(\pi n)^2T=0$

$T_n=C_1\cos\pi n t+C_2\sin\pi n t.$

III. $U=X\cdot T$ Общее решение

$U_n=X_n\cdot T_n=\sin\frac{\pi n}{2}x\left(A_n\cos\pi n t+B_n\sin\pi n t\right)$

$U=\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{2}x\,(A_n\cos\pi n t+B_n\sin\pi n t)$

IV. Г.У.: $U_t(x,0)=0;$

$U(x,0)=11\sin 6\pi x$

• $U(x,0)=11\sin 6\pi x$

$11\sin 6\pi x=\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{2}x\cdot A_n \quad \Big|\cdot\sin\frac{\pi n x}{2}$

$11\int_0^2\sin 6\pi x\cdot\sin\frac{\pi n x}{2}\,dx=\underbrace{\|X\|^2}_{=1}\cdot A_n$

$$A_n=11\int_0^2\sin 6\pi x\cdot\sin\frac{\pi n x}{2}\,dx=\left|\begin{array}{l}\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))\\ \alpha=6\pi x;\ \beta=\frac{\pi n x}{2}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{11}{2}\int_0^2\cos\left(6\pi x-\frac{\pi n x}{2}\right)-\cos\left(6\pi x+\frac{\pi n x}{2}\right)dx=\frac{11}{2}\int_0^2\cos\left(6\pi-\frac{\pi n}{2}\right)x-\cos\left(6\pi+\frac{\pi n}{2}\right)x\,dx$$

$$=\frac{11}{2}\left[\frac{\sin\left(6\pi-\frac{\pi n}{2}\right)x}{6\pi-\frac{\pi n}{2}}-\frac{\sin\left(6\pi+\frac{\pi n}{2}\right)x}{6\pi+\frac{\pi n}{2}}\right]\Bigg|_0^2=\frac{11}{2}\left[\frac{2\sin(12\pi-\pi n)}{2\left(6\pi-\frac{\pi n}{2}\right)}-\frac{\sin(12\pi+\pi n)}{6\pi+\frac{\pi n}{2}}\right]$$

$*\ \sin(12\pi+\pi n)=\sin\pi n=0,\ \forall n$

$$=\frac{11}{2}\cdot 2\overbrace{\left(\frac{\sin(12\pi-\pi n)}{12\pi-\pi n}\right)}^{1}=\begin{cases}11, & n=12\\ 0, & n\neq 12\end{cases}$$

$A_{12}=11$

$A_n=0,\ n\neq 12$

$\bullet\ u_t(x,0)=0$; Шуленко А.Ю., РЛ2-31, билет №18

$$u_t=\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{\pi n x}{2}\left(-A_n\pi n\sin\pi n t+B_n\pi n\cos\pi n t\right)$$

$$0=\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{\pi n x}{2}\cdot B_n\cdot\pi n \quad \Big|\cdot\sin\frac{\pi n x}{2}$$

$$0=\|x\|^2\cdot B_n\cdot\pi n \Rightarrow B_n=0,\ \forall n$$

$$\Rightarrow u=\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{2}x\left(A_n\cos\pi n t+B_n\sin\pi n t\right)$$

$$u=\sin\frac{12}{2}\pi x\cdot A_{12}\cos 12\pi t$$

$$\Rightarrow u=\sin 6\pi x\cdot 11\cos 12\pi t$$

$$u=11\sin 6\pi x\underbrace{\cos 12\pi t}_{=1}$$

№3. а) Доказать рекуррентную формулу для функции Бесселя

$$J'_\nu(x)=-J_{\nu+1}(x)+\frac{\nu}{x}J_\nu(x)$$

в) Определить тип уравнения $3u_{xx}-10u_{xy}+3u_{yy}-2u_x+4u_y+2y=0$, привести его к каноническому виду

в): $a_{11}=3$; $a_{12}=-5$; $a_{22}=3$.

$\Rightarrow D=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=25-9=16>0 \Rightarrow$ гиперболический тип

$3\lambda^2+10\lambda+3=0$ – характеристическое уравнение

$\lambda=\frac{dy}{dx}$ $\quad D=100-4\cdot 9= \quad =100-36=64=8^2$

~~$\lambda_1=\frac{-5+\sqrt{-11}}{6}$, $\lambda_2=\frac{-5-\sqrt{-11}}{6}$~~

~~$\lambda_1=\frac{-5+i\sqrt{11}}{6}$, $\lambda_2=\frac{-5-i\sqrt{11}}{6}$~~

~~$\lambda_{1,2}=\frac{-5\pm i\sqrt{11}}{6}$ – комплексно сопряженные~~

~~$\lambda=\frac{-5-i\sqrt{11}}{6}$; $\frac{dy}{dx}=-\frac{5}{6}-\frac{i\sqrt{11}}{6}$, $z=x+iy$~~

~~$y=-\frac{5}{6}x-\frac{i\sqrt{11}}{6}x+C \Rightarrow C=y+\frac{5}{6}x+\frac{i\sqrt{11}}{6}x$~~

~~$\operatorname{Re}C=y+\frac{5}{6}x=\xi$ $\quad \operatorname{Im}C=\frac{\sqrt{11}}{6}x=\eta$~~

~~$\xi_x=\frac{5}{6}$ $\quad \xi_y=1$~~

~~$\eta_x=\frac{\sqrt{11}}{6}$; $\eta_y=0$~~

Шулешко Д.Ю., РЛ2-31,
билет №18

$\lambda_1 = \frac{-10+8}{6} = -\frac{1}{3}$ $\lambda_2 = \frac{-10-8}{6} = -3.$

$\lambda_1 = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = \lambda_1 dx \Rightarrow y = \lambda_1 x + C_1 \quad \Rightarrow C_1 = y - \lambda_1 x = \xi$

$\lambda_2 = \frac{dy}{dx} \quad dy = \lambda_2 dx \Rightarrow y = \lambda_2 x + C_2 \Rightarrow C_2 = y - \lambda_2 x = \eta$

$\xi = y + \frac{1}{3}x \quad \xi_x = \frac{1}{3} \quad \xi_y = 1 \qquad J = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\eta = y + 3x \quad \eta_x = 3 \quad \eta_y = 1$

$u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta} = u_\xi + u_\eta.$

$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{3}u_\xi + 3u_\eta.$

$u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{3}u_\xi + 3u_\eta\right) = \frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{3}u_\xi + 3u_\eta\right) + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{3}u_\xi + 3u_\eta\right) =$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}u_{\xi\xi} + 3u_{\xi\eta}\right) + \frac{1}{3}u_{\xi\eta} + 3u_{\eta\eta} = \frac{1}{9}u_{\xi\xi} + \frac{4}{3}u_{\xi\eta} + 3u_{\eta\eta}.$

$u_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(u_\xi + u_\eta) = \frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial \xi}(u_\xi + u_\eta) + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \eta}(u_\xi + u_\eta) =$

$= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$

$u_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}(u_y) = \frac{\partial}{\partial x}(u_\xi + u_\eta) = \frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial(u_\xi + u_\eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial \eta}(u_\xi + u_\eta) =$

$= \frac{1}{3}(u_{\xi\xi} + u_{\xi\eta}) + u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} = \frac{1}{3}u_{\xi\xi} + \frac{4}{3}u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$

подставим:

$\cancel{\frac{1}{3}u_{\xi\xi}} + 4u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta} \cancel{-\frac{10}{3}u_{\xi\xi}} - \frac{40}{3}u_{\xi\eta} - 10u_{\eta\eta} \cancel{+3u_{\xi\xi}} + 6u_{\xi\eta} + 3u_{\eta\eta} -$

$-\frac{2}{3}u_\xi - 6u_\eta + 4u_\xi + 4u_\eta + 2y = 0$

для $u_{\xi\xi}$: $\frac{1}{3}u_{\xi\xi} - \frac{10}{3}u_{\xi\xi} + 3u_{\xi\xi} = 0$

для $u_{\eta\eta}$: $9u_{\eta\eta} - 10u_{\eta\eta} + 3u_{\eta\eta} = 2u_{\eta\eta}$ - должно было сократиться

для $u_{\xi\eta}$: $4u_{\xi\eta} - \frac{40}{3}u_{\xi\eta} + 6u_{\xi\eta} = \frac{12-40+18}{3}u_{\xi\eta} =$

$= -\frac{10}{3}u_{\xi\eta}$

Уравнение должно быть в виде: $u_{\xi\eta} = F(\xi, \eta, v, v_\xi, v_\eta)$

Шушенко А.Д., РЛ2-31,
билет №18.

В итоге:

$$-\frac{10}{3}u_{\xi\eta} + \underbrace{2u_{\eta\eta}}_{\text{должно было сократиться}} - \frac{10}{3}u_{\xi} - 2u_{\eta} + 2y = 0$$

$$u_{\xi\eta} = \left(\frac{10}{3}u_{\xi} + 2u_{\eta} - 2y\right)\cdot\frac{(-3)}{10}$$ – кан. вид.