Занятие 19. Линейные однородные ОДУ высших порядков с постоянными коэффициентами. ФСР.

Определитель Вронского.

Определителем Вронского (вронскианом) системы уравнений $y_1(x)$,$y_2(x), \cdots, y_n(x)$ называется определитель

$$W = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Если система функций $y_1(x)$,$y_2(x), \cdots, y_n(x)$ линейно зависима на интервале (a, b), то ее вронскиан равен нулю всюду на этом интервале.
Если хотя бы в одной точке $x_0 \in (a, b)$ имеем $W(x_0) \neq 0$, то система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$,$\cdots$,$y_n(x)$ линейно независима на (a, b).

Всякая система из n линейно независимых решений $y_1(x)$,$y_2(x), \cdots, y_n(x)$ называется *фундаментальной системой решений (ФСР)* этого уравнения.
Вронскиан ФСР отличен от нуля на всём интервале, где эти решения определены. Если известна ФСР, то общее решение этого уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 y_1(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

где $C_1, \cdots, C_n$ – произвольные постоянные.

Исследовать на линейную зависимость следующие системы функций:

9.286. $x,\ \ln x$.

$\triangleleft$

$$W = \begin{vmatrix} x & \ln x \\ 1 & 1/x \end{vmatrix} = 1 - \ln x;$$

система линейно независима на любом интервале. $\triangleright$

9.291. $\sin x,\ \cos x,\ \ \sin 2x$.

$\triangleleft$

$$W = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x & \sin 2x \\ \cos x & -\sin x & 2\cos 2x \\ -\sin x & -\cos x & -4\sin 2x \end{vmatrix} = -4\sin^2 x \sin 2x - 2\sin x \cos x \cos 2x - \cos^2 x \sin 2x -$$

$$-\sin^2 x \sin 2x + 2\sin x \cos x \cos 2x - 4\cos^2 x \sin 2x = -4\sin 2x - \sin 2x = -5\sin 2x;$$

система линейно независима на любом интервале. $\triangleright$

9.293. $e^x,\ e^{x+1}$.

$\triangleleft$

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{x+1} \\ e^x & e^{x+1} \end{vmatrix} = 0;$$

Система линейно зависима на любом интервале, т.к. $e^{x+1} = e \cdot e^x$. $\triangleright$

9.294. $x,\ 0,\ \ e^x.$

◁

$$W = \begin{vmatrix} x & 0 & e^x \\ 1 & 0 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} = 0;$$

Система линейно зависима на любом интервале, т.к. содержит нулевой элемент. ▷

Линейные ОДУ с постоянными коэффициентами.

Общий вид линейного дифференциального уравнения порядка n с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \tag{1}$$

где $a_i(i = 1, 2, \cdots, n)$–действительные постоянные.

Уравнение

$$\lambda^n + a_1(x)\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)\lambda + a_n(x) = 0, \tag{2}$$

полученное заменой производных $y^{(k)}$ $(k = 0, 2, \cdots, n)$ искомой функции стеменями λ^k, называется *характеристическим уравнением* для уравнения (2).

Каждому действительному корню λ уравнения (3) кратности r соответствует r линейно независимых решений уравнения (2):

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \cdots, x^{r-1}e^{\lambda x},$$

а каждой паре комплексных корней $\lambda = \alpha \pm i\beta$ кратности s соответствует s пар линейно независимых решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \cdots, x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \cdots, x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Таким образом, если характеристическое уравнение имеет k действительных корней λ_1, $\cdots$, λ_k кратностей $r_1, \cdots, r_k$ и l пар комплексно сопряженных корней $\alpha_1 \pm i\beta_1, \cdots, \alpha_l \pm i\beta_l$ кратностей $s_1, \cdots, s_l$, то общее решение уравнения (2) запишется в виде

$$y(x) = P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \cdots + P_k(x)e^{\lambda_k x} + (Q_1(x)\cos\beta_1 x + R_1(x)\sin\beta_1 x)e^{\alpha_1 x} + \cdots$$
$$\cdots + (Q_l(x)\cos\beta_l x + R_l(x)\sin\beta_l x)e^{\alpha_l x}.$$

Пример: Найти общее решение уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

Решение: Характеристическое уравнение $\lambda^2+3\lambda+2 = 0$, решая данное уравнение, получаем корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$.

Фундаментальная система решений: $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{-2x}$.

Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$$

Найти общие решения дифференциальных уравнений:

9.322. $y'' + 6y' + 13y = 0$.

$\triangleleft$ Составляем характеристическое уравнение и находим его корни:$\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -3 \pm 2i$.
Общее решение примет вид:
$y_O = C_1 e^{-3x} \sin 2x + C_2 e^{-3x} \cos 2x$. $\triangleright$

9.324. $3y'' - 2y' - 8y = 0$.

$\triangleleft$ Составляем характеристическое уравнение и находим его корни: $3\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -\frac{4}{3}$.
Общее решение примет вид:
$y_O = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4/3x}$. $\triangleright$

9.327. $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$.

$\triangleleft$ Характеристическое уравнение: $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = 0$.
Подбираем корень $\lambda_1 = 1$.
Делением в столбик получаем $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13)$.
Отсюда $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 2 \pm 3i$.

Ответ: $y_O = C_1 e^x + C_2 e^{2x} \cos 3x + C_3 e^{2x} \sin 3x$. $\triangleright$

9.333. $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$.

$\triangleleft$ Составляем характеристическое уравнение и находим его корни: $\lambda^5 + 8\lambda^3 + 16\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = 2i,\ \lambda_{4,5} = -2i$.

Записываем общее решение:
$y_O = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 x \cos 2x + C_4 \sin 2x + C_5 x \sin 2x$. $\triangleright$

9.336. $y^{(6)} + 2y^{(5)} + y^{(4)} = 0$.

$\triangleleft$ $\lambda^6 + 2\lambda^5 + \lambda^4 = \lambda^4(\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2,3,4} = 0,\ \lambda_{5,6} = -1$.

Ответ: $y_O = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 e^{-x} + C_6 x e^{-x}$. $\triangleright$

Решить задачу Коши:

9.337. $y'' - 5y' + 4y = 0,\ y(0) = y'(0) = 1$.

$\triangleleft$Составляем характеристическое уравнение и находим его корни: $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4$.
Общее решение примет вид: $y_O = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$.
Для решения задачи Коши необходимо подставить значения $y(0)$ и $y'(0)$.
$y'_O = C_1 e^x + 4C_2 e^{4x}$;
из начальных условий

$$\begin{cases} C_1 + & C_2 & = 1 \\ C_1 + & 4C_2 & = 1 \end{cases} \Rightarrow\ C_1 = 1,\ C_2 = 0.$$

Ответ: $y = e^x$. $\triangleright$

9.339. $y''' - y' = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1$.

$\triangleleft$ $\lambda^3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = -1$.
$y_O = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}$.
$y'_O = C_2 e^x - C_3 e^{-x}$; $y''_O = C_2 e^x + C_3 e^{-x}$.

Из начальных условий

$$\begin{cases} C_1 + \ C_2 + \ C_3 = 3 \\ \qquad C_2 - \ C_3 = -1 \\ \qquad C_2 + \ C_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \ C_1 = 2, \ C_2 = 0, \ C_3 = 1.$$

Ответ: $y = 2 + e^{-x}$. $\triangleright$

Восстановление ОДУ по ФСР.

Для восстановления ОДУ по ФСР составляется вронскиан системы $y_1, y_2, \cdots, y_n$. Раскрывая определитель и приравнивая его нулю, получим дифференциальное уравнение.

Зная ФСР, составить уравнение:

9.296. 1, e^{-x}.

$\triangleleft$ $y = C_1 + C_2 e^{-x}$, следовательно,

$$\begin{vmatrix} y & 1 & e^{-x} \\ y' & 0 & -e^{-x} \\ y'' & 0 & e^{-x} \end{vmatrix} = -1 \cdot (y'e^{-x} + y''e^{-x}) = -(y' + y'')e^{-x} = 0.$$

Ответ: $y'' + y' = 0$. $\triangleright$

9.298. $x^3, \ x^4$.

$\triangleleft$ $y = C_1 x^3 + C_2 x^4$, следовательно,

$$\begin{vmatrix} y & x^3 & x^4 \\ y' & 3x^2 & 4x^3 \\ y'' & 6x & 12x^2 \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ y(36x^4 - 24x^4) - y'(12x^5 - 6x^5) + y''(4x^6 - 3x^6) = 0$$

$$12y - 6xy' + x^2 y'' = 0$$

Ответ: $y'' - \dfrac{6}{x} y' + \dfrac{12}{x^2} y = 0$. $\triangleright$

9.300. 1, $\sin x, \ \cos x$.

$\triangleleft$ $y = C_1 + C_2 \sin x + {}_3 \cos x$, следовательно,

$$\begin{vmatrix} y & 1 & \sin x & \cos x \\ y' & 0 & \cos x & -\sin x \\ y'' & 0 & -\sin x & -\cos x \\ y''' & 0 & -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ 1 \cdot \begin{vmatrix} y' & \cos x & -\sin x \\ y'' & -\sin x & -\cos x \\ y''' & -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = 0;$$

раскрывая определитель, получаем уравнение $y''' + y' = 0$. $\triangleright$

Текущее ДЗ: : 9.288, 9.289, 9.295, 9.325, 9.326, 9.328, 9.330, 9.332, 9.334, 9.338, 9.299, 9.301.