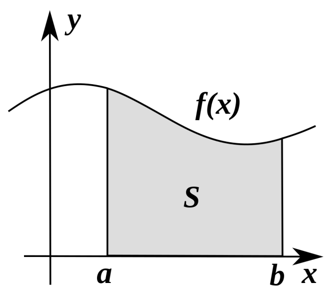
С точки зрения геометрии определенный интеграл – это **ПЛОЩАДЬ**.
То есть, определенному интегралу (если он существует) геометрически соответствует площадь некоторой фигуры.
Для нахождения площади плоской фигуры необходимо будет вычислить определенный интеграл.
Вспомним формулу Ньютона-Лейбница (1):

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{1}$$

где F – первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.
Основные соотношения

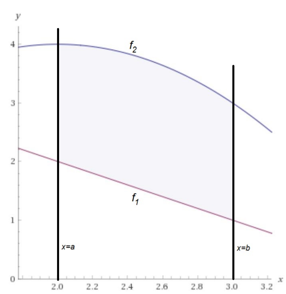
Площадь плоской фигуры, ограниченной графиком непрерывной функции $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$, двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox, или площадь *криволинейной трапеции*, ограниченной дугой графика функции $y = f(x), a \leq x \leq b$ вычисляется по формуле (2)

$$S = \int_a^b f(x)dx \tag{2}$$



Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x), f_1(x) \leq f_2(x)$, и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ определяется по формуле (3)

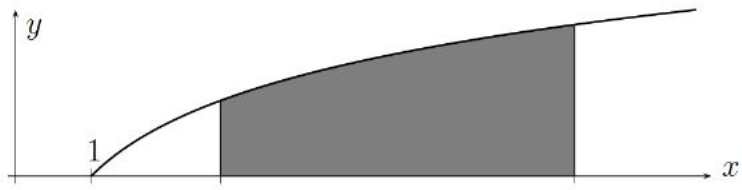
$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx \tag{3}$$



- Первый и важнейший шаг решения – построение чертежа. Отображаем в удобной для построения системе координат все данные задачи.
  Здесь самое главное – правильно построить графики функций. В противном случае решение может оказаться неверным.

- Второй шаг требует вычисления определенного интеграла по формулам (2),(3), используя формулу Ньютона-Лейбница (1).

№ 6.453 Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = lnx$ и прямыми $x = e$,$x = e^2$,$y = 0$.
1) Строим график

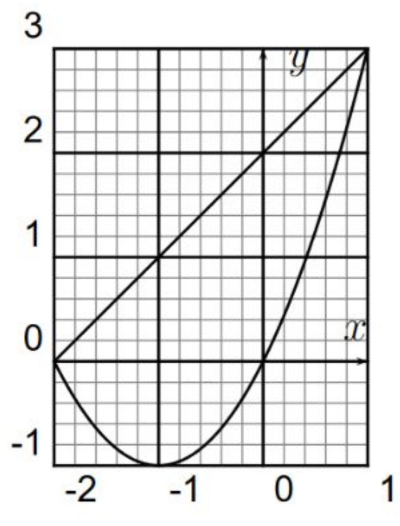


2) Вычисляем площадь, используя формулу (2):

$$\triangleleft\ S = \int\limits_e^{e^2} \ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} \text{используем метод} & \text{интегрирования по частям} \\ u = lnx & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{array} \right| = x\ln x\Big|_e^{e^2} - \int\limits_e^{e^2} dx =$$

$$= 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2. \triangleright$$

№ 6.456 Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x$ и прямой $y = x + 2$.
1) Строим график



$\triangleleft$ Найдем точки пересечения кривых: $\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x =$

-2 или $x = 1$.$\triangleright$

2) Вычисляем площадь, используя формулу (2):

$$S = \int_{-2}^{1} (x + 2 - x^2 - 2x)dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)dx = (-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x)\Big|_{-2}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 2 + 4 = \frac{9}{2}$$

№ 6.467 Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = lnx$, касательной к ней в точке $x = e$ и осью Ox.
1) Строим график

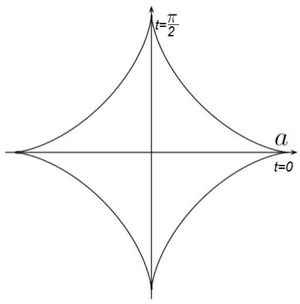
$\triangleleft$ Напомним, уравнение касательной к графику функции имеет вид:
$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow$
Имеем $y(e) = \frac{1}{x}\Big|_{x=e} = \frac{1}{e} \Rightarrow$ в точке $x_0 = e$ $\ y = \frac{x}{e}$$\triangleright$

2) Вычисляем площадь: заметим, что в данном случае логично разбить рассматриваемый отрезок 1) $[0; 1]$,2) $[1; e]$.
Для вычисления интеграла на первом участке воспользуемся формулой (2), поскольку в данном случае фигура ограничена осью Ox и касательной. На втором участке – формулой (3), в данном случае фигура ограничена графиками двух функций.
$S = \int_0^1 \frac{xdx}{e} + \int_1^e (\frac{x}{e} - lnx)dx = \int_0^e \frac{xdx}{e} - \int_1^e lnxdx = \begin{vmatrix} u = lnx & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{vmatrix} =$
$= \frac{e^2}{2e} - (xlnx\Big|_1^e - \int_1^e dx) = \frac{e}{2} - (e - (e - 1)) = \frac{e}{2} - 1$

Вычисление площади фигуры, ограниченной параметрически заданной кривой
Если фигура ограничена параметрически заданной кривой $x = x(t)$,$y = y(t)$, прямыми $x = a, x = b$ и осью Ox, то её площадь вычисляется как

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} y(t)d(x(t)). \qquad (4)$$

№ 6.478 Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = acos^3 t, y = asin^3(t)$.
1) Строим график



2) Заметим, что данная фигура состоит из 4-х одинаковых элементов, поэтому достаточно вычислить площадь одного из них, а затем умножить на 4:
$\frac{1}{4}S = \int_0^a ydx = \triangleright$
Пересчитаем границы интегрирования:
при $x = 0$: $0 = acos^3 t \Rightarrow t_1 = \pm\pi/2$
при $x = a$: $a = acos^3 t \Rightarrow t_2 = 0$

Площадь фигуры считается слева направо! Поэтому нижнему пределу интегрирования соответствует значение $t_1 = \frac{\pi}{2}$, а верхнему пределу – значение $t_2 = 0$.

$$\triangleright \frac{1}{4}S = \int_{\pi/2}^{0} asin^3 t \cdot 3acos^2 t(-sint)dt = 3a^2 \int_0^{\pi/2} sin^4 tcos^2 tdt = 3a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} sin^2 2t \cdot \frac{1 - cos2t}{2} dt =$$
$$= \frac{3a^2}{8} \int_0^{\pi/2} sin^2 2tdt - \frac{3a^2}{8} \int_0^{\pi/2} sin^2 2tcos2tdt = \frac{3a^2}{16} \int_0^{\pi/2} (1 - cos4t)dt -$$
$$- \frac{3a^2}{16} \int_0^{\pi/2} sin^2 2td(sin2t) = \frac{3a^2}{16} t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{3a^2}{64} sin4t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{3a^2}{48} sin^3 2t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3a^2\pi}{32} \Rightarrow S = \frac{3a^2\pi}{8}$$

№ 6.479 Найти площадь петли кривой $x = \frac{1}{3}t(3 - t^2), y = t^2$.

Нас будет интересовать общий вид кривой и точки ее самопересечения. Обе функции определены на всей числовой оси. Точка самопересечения характерна тем, что в ней совпадают значения абсциссы (и ординаты) при разных значениях параметра.
Найдем точку самопересечения петли:

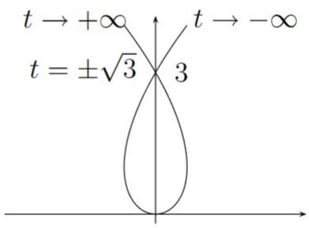
$$\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \\ t_1 \neq t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}t_1(3 - t_1^2) = \frac{1}{3}t_2(3 - t_2^2) \\ t_1^2 = t_2^2 \end{cases} \Rightarrow (t_1 - t_2)(3 - t_1^2) = 0 \Rightarrow t_1^2 = t_2^2 = 3.$$

Значения t_1 и t_2 должны быть различны $\Rightarrow t_1 = \pm\sqrt{3}, t_2 = \mp\sqrt{3}$. Необходимо понять как выполняется обход по петле, например, в случае криволинейной трапеции мы всегда «идем» слева направо. В случае самопересекающейся кривой, заданной параметрически, изменение параметра от t_1 до t_2 должно соответствовать обходу контура **по часовой стрелке**) – правило!!!

Для построения графика удобно построить таблицу:

t	-2	-$\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	2
x	2/3	0	-2/3	0	2/3	0	-2/3
y	4	3	1	0	1	3	4

Заметим, что обход по часовой стрелке осуществляется от $t = +\infty$ до $t = -\infty$.



То есть по точкам движемся следующим образом:
$(-2/3; 4) \to \left(0; \sqrt{3}\right) \to (2/3; 1) \to (0; 0) \to (-2/3; 1) \to (0; 3) \to (2/3; 4).$
Получается, движение осуществляется от $t_1 = \sqrt{3}$ до $t_2 = -\sqrt{3}$.

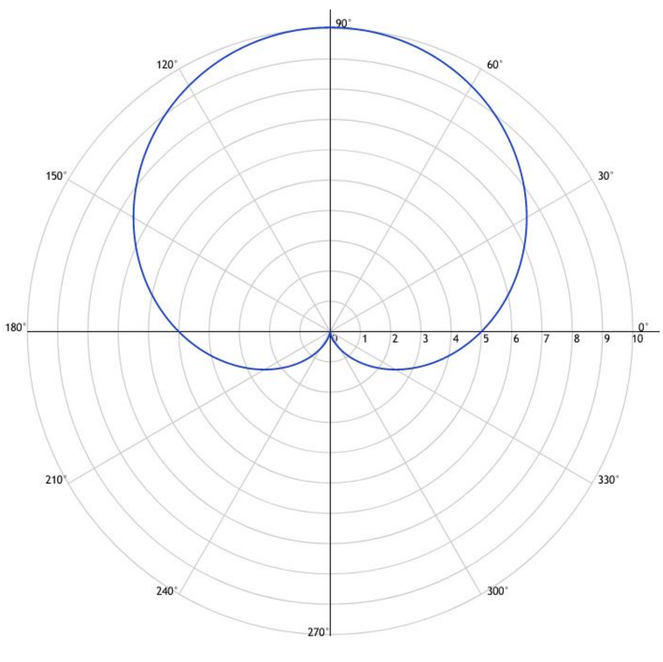
Используя формулу (5) и подставляя полученные границы вычисляем площадь:
$S = \int_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} t^2 \cdot \frac{1}{3}[(3 - t^2) - 2t^2]dt = \int_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} t^2(1 - t^2)dt = 2(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3})\Big|_0^{\sqrt{3}} =$
$= 2(\frac{9\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{3}) = \frac{8\sqrt{3}}{5}$

Вычисление площади фигуры, ограниченной кривой в полярных координатах

Площадь фигуры, ограниченной кривой в полярных координатах, заданной уравнением $r = r(\phi)$ и лучами $\phi = \alpha, \phi = \beta$ равна

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\phi \tag{5}$$

№ 6.483 Найти площадь фигуры, ограниченной $r = a(1 + sin\phi)$.

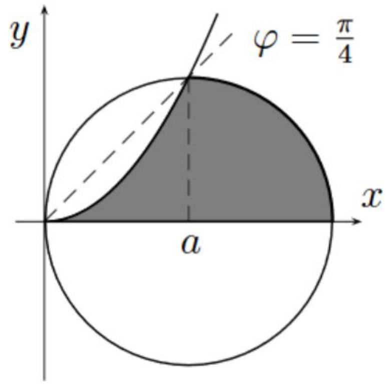


$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2(1+\sin\varphi)^2\,d\varphi = a^2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1 + 2\sin\varphi + \sin^2\varphi\right)\,d\varphi =$$

$$= a^2 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 + 2\sin\varphi + \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi = a^2 \left(\frac{3}{2}\varphi - 2\cos\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= a^2 \left(\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} - 2 + 2 - 0 + 0\right) = \frac{3\pi a^2}{2}. \ \triangleright$$

6.486 Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $r_1 = a\,\mathrm{tg}\,\varphi\sec\varphi$, $r_2 = 2a\cos\varphi$ и полярной осью.



Напомним, что связь декартовых и полярных координат следующая:

$$x = rcos\varphi, y = rsin\varphi, r^2 = x^2 + y^2$$

$\triangleleft$ Перейдём к полярным координатам:

$r = a\,\mathrm{tg}\,\varphi\sec\varphi \ \Rightarrow\ r^2 = \dfrac{ar\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ r^2\cos^2\varphi = ar\sin\varphi \ \Rightarrow\ x^2 = ay$ — парабола.

$r = 2a\cos\varphi \ \Rightarrow\ r^2 = 2ar\cos\varphi \ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ x^2 + y^2 = 2ax \ \Rightarrow\ (x-a)^2 + y^2 = a^2$ — окружность.

Точка пересечения параболы и окружности – $(a; a)$.
Пусть S_1 – площадь, соответствующая окружности $[0, \dfrac{\pi}{4}]$. А S_2 – площадь, соответсвующая параболе на отрезке $[0, \dfrac{\pi}{4}]$. Тогда искомая площадь будет определяться как $S = S_1 - S_2$.

$$S = S_1 - S_2 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} 4a^2\cos^2\varphi\,d\varphi - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\right)^2 d\varphi = 2a^2\int\limits_0^{\pi/4}\cos^2\varphi\,d\varphi - \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/4}\mathrm{tg}^2\,\varphi\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} =$$

$$= a^2\int\limits_0^{\pi/4}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi - \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/4}\mathrm{tg}^2\,\varphi d(\mathrm{tg}\,\varphi) = a^2\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/4} - \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\mathrm{tg}^3\,\varphi}{3}\Bigg|_0^{\pi/4} =$$

$$= a^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) - \frac{a^2}{6} = a^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\right). \triangleright$$

Текущее ДЗ: 6.457,6.464, 6.468, 6.482, 6.484, 6.491, 6.492.
Можете приступать к выполнению 1-го номера из индивидуального задания по вариантам.