Занятие 10. Несобственные интегралы. Исследование несобственных интегралов на сходимость.

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, +\infty)$.

- По определению *несобственным интегралом первого рода* назвается интеграл вида: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$
  Если этот предел существует, говорят, что интеграл *сходится*, в противном случае он *расходится*.
  Аналогично $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$
- По определению $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$, $c \in R$, причём считают, что этот интеграл сходится, если сходятся оба интеграла в правой части.

Из определения следует, что для вычисления несобственных интегралов применима формула Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}(F(b) - F(a)) = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a).$$

Если предел в правой части конечен, то интеграл сходится, иначе — расходится.

В следующих задачах необходимо вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

6.411.

$$\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \int\limits_e^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = \left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\right)\Bigg|_e^{+\infty} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{интеграл сходится.}$$

6.415.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} = \frac{1}{2}\left(\ln(x^2+4)\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \ln(x^2+4) - \ln 2 \Rightarrow \text{ расходится.}$$

Предположим, что нам дан произвольный несобственный интеграл. Задача состоит в том, чтобы выяснить, СХОДИТСЯ ЛИ (в принципе) данный интеграл или нет. Иногда бывает полезно сразу выяснить это вопрос, ответить на который помогают так называемые признаки *сходимости/ расходимости*:

1)*признак сравнения* : пусть при $a \leqslant x < +\infty$ $\;0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$.

Если $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится, то сходится и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, а если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то расходится и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Для сравнения обычно используют интегралы $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^q}$, которые сходятся при $q > 1$.

2) *признак эквивалентности* : если при $a \leqslant x < +\infty$ $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ — эквивалентные бесконечно малые при $x \to +\infty$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

3) *признак абсолютной сходимости* : если сходится $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, то сходится и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Исследовать на сходимость интегралы:

6.426. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1}\,dx.$

$$\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1} = \frac{\sqrt{x^3}\left(1+\sqrt{1/x+1/x^3}\right)}{x^3+3x+1} \sim \frac{\sqrt{x^3}}{x^3} = \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Поскольку $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}dx$ сходится, т.к. $q = 1.5 > 1 \Rightarrow$ исходный интеграл сходится по признаку эквивалентности.

6.428. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$

$$\frac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}} \geqslant \frac{2}{\sqrt[3]{x}}.$$

Поскольку $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}dx$ расходится, т.к. $q = 2/3 < 1 \Rightarrow$ исходный интеграл расходится по признаку сравнения.

6.430. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}\,dx.$

Применим признак абсолютной сходимости :

$$\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}\right| \leqslant \frac{1}{2+x\sqrt{x}} < \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

Поскольку $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ сходится, т.к. $q = 1.5 > 1 \Rightarrow$ исходный интеграл сходится абсолютно по признаку сравнения.

6.432. $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln\ln x}$.

$\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln\ln x} = \int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dlnx}{\ln\ln x} = \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dt}{\ln t} > \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dt}{t}$ – данный интеграл расходится $\Rightarrow$ исходный интеграл расходится по признаку сравнения.

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b)$ (или на $(a, b]$) и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$ (или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$). По определению *несобственный интеграл второго рода* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{c\to b-0} \int\limits_a^c f(x)\,dx$ (или $\lim\limits_{c\to a+0} \int\limits_c^b f(x)\,dx$).

Если этот предел существует, говорят, что интеграл *сходится*, в противном случае он *расходится.*

В случае, когда точка разрыва $c \in (a, b)$,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{d\to c-0} \int\limits_a^d f(x)\,dx + \lim_{e\to c+0} \int\limits_e^b f(x)\,dx.$$

Признаки сходимости для интегралов второго рода аналогичны признакам для интегралов первого рода. Для сравнения используются интегралы $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$ и $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-b)^q}$, которые сходятся при $q < 1$.

В следующих задачах вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

6.433. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+x^4}$.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+x^4} = \int\limits_0^1 \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx - \int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_0^1 - (\operatorname{arctg} x)|_0^1.$$

Интеграл расходится.

6.441. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2)}} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1/4-(x-1/2)^2)}} = \arcsin(2x-1)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$

Интеграл сходится.

Исследовать на сходимость интегралы:

6.443. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$

Точка разрыва 1.

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}} = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} \sim \frac{1}{\sqrt{4(1-x)}}$$

Поскольку $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4(1-x)}}$ сходится, поскольку имеет конечное значение $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4(1-x)}} = 1 \Rightarrow$ исходный интеграл сходится по предельному признаку сравнения.

6.449. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$

Точка разрыва 0.

Преобразуем интеграл интегрированием по частям :

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx\sqrt{x} & v = 2\sqrt{x} \end{vmatrix} = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_0^1 - 2\int\limits_0^1 \sqrt{x}\cdot\frac{dx}{x} = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_0^1 - 4\sqrt{x}\Big|_0^1 =$$

$$= 0 - 2\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\ln x - (4-0) = -2\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\ln x - 4;$$

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = \lim_{x\to 0}(-2\sqrt{x}) = 0$$

$\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = -4$ – интеграл сходится.

6.451. $\displaystyle\int\limits_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx.$

Точка разрыва 0.

Сделаем замену переменной в несобственном интеграле :

$$\int\limits_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx = \lim_{b\to -0}\int\limits_{-1}^b \frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx = \begin{vmatrix} x = 1/t \\ t = 1/x \end{vmatrix} = \lim_{b\to -0}\int\limits_{-1}^{1/b} t^3 e^t\cdot\frac{-dt}{t^2} = -\int\limits_{-1}^{-\infty} te^t\,dt = \int\limits_{-\infty}^{-1} te^t\,dt =$$

$$= \begin{vmatrix} u = t \\ v = e^t \end{vmatrix} = te^t\Big|_{-\infty}^{-1} - \int\limits_{-\infty}^{-1} e^t\,dt = te^t\Big|_{-\infty}^{-1} - e^t\Big|_{-\infty}^{-1} = -e^{-1} - \lim_{t\to-\infty} te^t - (e^{-1} - \lim_{t\to-\infty} e^t) =$$

$$= -2e^{-1} - \lim_{t\to-\infty}\frac{t}{e^{-t}} = -2e^{-1} - \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{-e^{-t}} = -2e^{-1}.$$

Текущее ДЗ: 6.412, 6.418, 6.420, 6.434, 6.436, 6.439, 6.429, 6.431, 6.442, 6.444, 6.446