Задание 1

① Найти базис и размерность линейной оболочки системы векторов $a_1=(1,-2,1)^T$, $a_2=(-2,-1,4)^T$, $a_3=(-3,-4,9)^T$, $a_4=(0,-5,6)^T$ пространства R^3.

$a_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ $a_2=\begin{pmatrix}-2\\-1\\4\end{pmatrix}$ $a_3=\begin{pmatrix}-3\\-4\\9\end{pmatrix}$ $a_4=\begin{pmatrix}0\\-5\\6\end{pmatrix}$

Базис: (a_3, a_4)

$\begin{vmatrix}1 & -2 & -3 & 0\\ -2 & -1 & -4 & -5\\ 1 & 4 & 9 & 6\end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix}-2 & -3 & 0\\ -1 & -4 & -5\\ 4 & 9 & 6\end{vmatrix}=0$

$\begin{vmatrix}-3 & 0\\ -4 & -5\end{vmatrix}=15$

$\operatorname{rang} A = \cancel{15}$, ~~число должно быть >0~~

② Найти ортогональный базис линейной оболочки систевекторов $a_1=(1,1,1,1)^T$, $a_2=(1,1,1,0)^T$, $a_3=(1,1,0,0)^T$ евклидовое пространства R^4.

$a_1=(1,1,1,1)^T$
$a_2=(1,1,1,0)^T$
$a_3=(1,1,0,0)^T$

$B=(b_1, b_2, b_3)$ – ?

1) $b_1=\bar{a}_1$

2) $b_2'=a_2-\frac{(\bar{a}_2, \bar{b}_1)}{(\bar{b}_1, \bar{b}_1)}\bar{b}_1=a_2-\frac{(\bar{a}_2,\bar{a}_1)}{(\bar{a}_1,\bar{a}_1)}a_1=a_2-\frac{3}{4}a_1=$

$=(1\ 1\ 1\ 0)-\frac{3}{4}(1\ 1\ 1\ 1)=\frac{1}{4}(1\ 1\ 1\ -3)$

3) $b_3'=a_3-\frac{(a_3,b_2)}{(b_2,b_2)}b_2-\frac{(a_3,a_1)}{(a_1,a_1)}a_1=\frac{1}{3}(1\ 1\ -2\ 0)$

Нормируем: $\|a\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$ $\Rightarrow$ $a=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ $\|a\|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

1) $b_1=\frac{b_1}{\|b_1\|}=\frac{1}{2}b_1'=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}(1\ 1\ 1\ 1)^T$

2) $b_2=\frac{b_2}{\|b_2\|}=\frac{2}{\sqrt{3}}b_2=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(a_2-\frac{3}{4}a_1\right)=\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^T$

3) $b_3=\frac{b_3}{\|b_3\|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}b_3=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}a_2-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}a_2=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\ \frac{1}{\sqrt{6}}\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\ 0\right)^T$

3) ~~Дана опред~~ Вектор $c \in R^2$ имеет координаты $(1,-1)^T$. Найти его координаты в базисе $e_1' = (2,1)^T$, $e_2' = (1,1)^T$

$C = (1,-1)^T$ в базисе $e_1 = (1,0)^T$ $e_2 = (0;1)^T$ найти координаты в базисе $e_1' = (2,1)^T$ $e_2' = (1,1)^T$

$$\begin{aligned} e_1' &= 2e_1 + e_2 \\ e_2 &= e_1 + e_2 \end{aligned} \Rightarrow \text{Матрица перехода } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

1) $T_{A\text{-}B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\frac{1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)}{((-1)\cdot 1) + 2\cdot(-1)} = \frac{2}{3}$$

2) $T^{-1}_{A\text{-}B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$C_B = T^{-1}_{AB} \cdot C_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

4) Принадлежит ли вектор $c = (-9,11,7,7)^T \in R^4$ линейной оболочке векторов $a = (3,2,1,1)^T$ и $b = (-7,1,1,1)^T$? Если, да то разложить по векторам a и b

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$ доводим до $\sim \begin{pmatrix} 1 & -7/3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\operatorname{rang} A = 2$

2) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -7 & -9 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -7/3 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\operatorname{rang} A = 2$ ранги должны совпасть

Разложение?

3) $\begin{cases} 3\pi_1 - 7\pi_2 = -9 \\ 2\pi_1 + \pi_2 = 11 \\ \pi_1 + \pi_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 4 \\ \pi_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow C = 4a + 3b$

Задание 2

① В базисе e_1, e_2 пространства R^2 квадратичная форма Q записывается как $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$. Найти выражение $Q(y_1, y_2)$ этой квадратичной формы записи. $e_1' = e_1 + e_2$, $e_2' = 2e_1 - e_2$

$Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$

$Q(y_1, y_2) = ?$

$e_1' = e_1 + e_2$

$e_2' = 2e - e_2$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow T^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A' = (T^T) \cdot (A) \cdot (T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q(y_1, y_2) = 8y_1^2 + 5y_2 + 14y_1y_2$$

② Найти матрицу перехода от базиса $a_1 = (1, 2)^T$, $a_2 = (3, 5)^T$ к базису $b_1 = (-1, 2)^T$, $b_2 = (2, -1)^T$ пространства R^2.

1) $b_1 = x_1 a_1 + x_2 a_2$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 = -1 \\ 2x_1 + 5x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_2 = -4 \\ x_1 = 11 \end{array} \right.$$

2) $b_2 = y_1 a_1 + y_2 a_2$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} y_1 + 3y_2 = 2 \\ 2y_1 + 5y_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_2 = 5 \\ y_1 = -13 \end{array} \right.$$

$$U = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -13 \\ -4 & +5 \end{pmatrix}$$

③ ~~В базисе e_1, e_2 пространства R^2 квадратичная форма~~

8) Найти матрицу перехода от базиса $a_1\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}$ $a_2\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$ к базису $b_1\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ $b_2\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ пространства R^2

$$\left(\begin{array}{cc|cc}7&6&5&2\\3&2&3&2\end{array}\right)\sim\ldots\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&2&2\\0&1&\frac{3}{2}&-2\end{array}\right)\quad T_{A\to B}=\begin{pmatrix}2&2\\\frac{3}{2}&-2\end{pmatrix}$$

Задание 3

1) Найти матрицу линейного оператора $A: R^2\to R^2$ в стандартном базисе e_1, e_2 если A переводить векторы $a_1=(3,11)^T$, $a_2=(1,4)^T$ в векторы $b_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $b_2=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ соответсвенно

$$A=\begin{pmatrix}3&1\\11&4\end{pmatrix}\qquad X=B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&-1\\11&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11&3\\4&-1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\qquad A^{-1}=\left(\begin{array}{cc|cc}3&1&1&1\\11&4&0&1\end{array}\right)\sim\ldots\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&4&-1\\0&1&11&3\end{array}\right)$$

2) Линейный оператор A, действующий на некотором двумерном пространстве в базисе e_1, e_2 имеет матрицу $\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$. Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $e_1'=e_1-e_2$, $e_2'=2e_1+e_2$

$e_1' = 1\ -1$
$e_2' = 2\ 1$

$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ $A'-?$

$U=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}$ матрица перехода из e в e'

$$A'=U^{-1}A\cdot U=\begin{pmatrix}1&-2/3\\1&-1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\1&4\end{pmatrix}$$

$$U^{-1}=\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\-1&1&0&1\end{array}\right)\sim\ldots\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&-2/3\\0&1&1&-1/3\end{array}\right)$$

3) Найти собственные числа и собственные векторы лин. опер. $A: R^2\to R^2$, заданного $\begin{pmatrix}5&2\\-6&-3\end{pmatrix}=A$

$$\begin{pmatrix}5-\lambda&2\\-6&-3-\lambda\end{pmatrix}=(5-\lambda)(-3-\lambda)+12\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\lambda_1=-1\\\lambda_2=3\end{array}\right.$$

1) $\lambda_1=-1$

$$\begin{pmatrix}6&2\\-6&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{cases}3x+y=0\\y=y\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}y\\y\end{pmatrix}\quad x^{(1)}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$

2) $\lambda_2=3$

$$\begin{pmatrix}2&2\\-6&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&2\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0\quad 2x+2y=0\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x^{(2)}=(-1\ 1)$$

Задание 4

1. Методом ортогональных преобразований привести квадратичную форму $3x^2+6y^2-4xy$ к каноническому виду. Указать соответствующее преобразование. Определить, является ли эта форма положительно определённой, отриц.опред или неопр.

$A(x,y)=3x^2+6y^2-4xy$

$A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 6\end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix}3-\lambda & -2\\ -2 & 6-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\lambda_1=7\\ \lambda_2=2\end{array}\right.$

1) $\lambda_1=2$

$\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ $\quad x_1-2x_2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=2x_2\\ x_2=x_2\end{array}\right.$ $\quad X^{(1)}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

2) $\lambda_2=7$

$\begin{pmatrix}-4 & -2\\ -2 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow -4x_1-2x_2=0 \Rightarrow \begin{array}{l}x_1=2x_2\\ x_2=x_2\end{array}$ $\quad X^{(2)}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$|X^{(1)}|=\sqrt{5} \Rightarrow e_1=\begin{pmatrix}2/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{5}\end{pmatrix}$

$|X^{(2)}|=\sqrt{5} \Rightarrow e_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\ -4/\sqrt{5}\end{pmatrix}$ $\quad \Rightarrow T_{A-E}=\begin{pmatrix}2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5}\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=T_{A\to E}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{2}{\sqrt{5}}x'+\frac{1}{\sqrt{5}}y'\\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y'\end{cases}$

$A(x,y)=2(x')^2+7(y')^2=0 \Rightarrow \frac{x'^2}{7}+\frac{y'^2}{2}=0$ – прямая

$\begin{vmatrix}7 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=\begin{array}{l}14>0\\ 7>0\end{array}$ у $\Rightarrow$ положит опр.

2. Привести квадратичную форму $A(x_1,x_2,x_3)=$ ~~x_1x_2~~ $4x_1x_3+x_3^2+2x_2x_3$ к сумме квадратов методом Лагранжа. Опр. форму.

$x_3^2+4x_1x_3+2x_2x_3=(x_3+x_2+2x_1)^2-4(x_1-\frac{1}{2}x_2)^2=(x_3+x_2+2x_1)^2-(2x_1+x_2)^2$

$\begin{cases}y_1=2x_1+x_2+x_3\\ y_2=2x_1+x_2\end{cases}$ $\quad A(y_1,y_2)=y_1^2-y_2^2$ – канонический вид квадратичного ур-е системы.

$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ – знакопеременная т.к $\Delta=0$.

3 С помощью критерия Сильвестра определить является ли квадратичная форма $2x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+x_3^2-4x_3x_4+5x_4^2$ полож.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Найдем определитель

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1>0$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1>0$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}\sim\ldots\sim\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1>0$$

Квадратичная форма положительная.