Занятие 21. Интегрирование ЛНДУ методом вариации произвольных постоянных.

Если известна фундаментальная система решений $y_1, y_2, \cdots, y_n$ однородного уравнения, то общее решение соответствующего неоднородного уравнения может быть найдено по формуле

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n,$$

где функции $C_i(x), i = \overline{1,n}$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \cdots + C_n'(x)y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \cdots + C_n'(x)y_n' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

(метод вариации произвольных постоянных)

Применяя метод вариации произвольных постоянных, решить уравнения:

3033. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$.

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$.
Общее решение однородного уравнения: $y_{O.O.} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.
Будем искать: $y_{Ч.Н.} = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$.
Составим систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x &= 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x &= \operatorname{ctg} x \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на $\sin x$, а второе на $\cos x$ и сложим уравнения:
Получим

$$C_2'(x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{\cos^2 x}{\sin x};$$

$$C_2(x) = \int \frac{\cos^2 x}{\sin x}\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin x}\,dx = \int \frac{dx}{\sin x} - \int \sin x\,dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \cos x + C;$$

Находим C_1, подставляя в любое из двух уравнений системы найденное C_2:

$$C_1'(x) = -C_2'(x)\frac{\sin x}{\cos x} = -\cos x \quad \Rightarrow \quad C_1(x) = -\sin x;$$

$$y_{Ч.Н.} = -\sin x\cos x + \left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \cos x\right)\sin x = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\sin x.$$

Ответ: $y_{O.Н.} = C_1\cos x + C_2\sin x + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\sin x$.

3035. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1$.
Общее решение однородного уравнения:$y_{O.O.} = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}$
Будем искать: $y_{Ч.Н.} = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)xe^{-x}$.
Составим систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)xe^{-x} &= 0 \\ -C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)(e^{-x} - xe^{-x}) &= \dfrac{e^{-x}}{x} \end{cases}$$

Сложив оба уравнения, получим

$$C_2'(x)e^{-x} = \frac{e^{-x}}{x} \quad \Rightarrow \quad C_2'(x) = \frac{1}{x}; \quad C_1'(x) = -1.$$

Таким образом, $C_1(x) = \ln|x| + C$, $C_2(x) = -x + C$.

$$y_{\text{ч.}H.} = -xe^{-x} + x\ln|x|e^{-x}.$$

Ответ: $y_{O.H.} = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + x\ln|x|e^{-x}$.

9.342. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x+1}$.
Характеристическое уравнение: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$.
Общее решение однородного уравнения: $y_{O.O.} = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$.
Будем искать: $y_{\text{ч.}H.} = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{-2x}$.
Составим систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{-2x} &= 0 \\ -C_1'(x)e^{-x} - 2C_2'(x)e^{-2x} &= \dfrac{1}{e^x+1}. \end{cases}$$

Сложив оба уравнения, получим

$$-C_2'(x)e^{-2x} = \frac{1}{e^x+1} \quad \Rightarrow \quad C_2'(x) = -\frac{e^{2x}}{e^x+1}; \quad C_1'(x) = -C_2'(x)e^{-x} = \frac{e^x}{e^x+1}.$$

$$C_1(x) = \int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = \ln(e^x+1) + C_1;$$

$$C_2(x) = -\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx = -\int \frac{e^x+1-1}{e^x+1}\,d(e^x) = -\int d(e^x) + \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} =$$
$$= -e^x + \ln(e^x+1) + C_2.$$

$$y_{\text{ч.}H.} = \ln(e^x+1)e^{-x} + \left(-e^x + \ln(e^x+1)\right)e^{-2x} = -e^{-x} + \left(e^{-x} + e^{-2x}\right)\ln(e^x+1).$$

Ответ: $y_{O.H.} = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \left(e^{-x} + e^{-2x}\right)\ln(e^x+1)$.

3066. $y''' + y' = \operatorname{tg} x \sec x$.
Характеристическое уравнение: $\lambda^3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm i$.
Общее решение однородного уравнения: $y_{O.O.} = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x$.
Будем искать: $y_{\text{ч.}H.} = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x$.
Составим систему:

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)\cos x + C_3'(x)\sin x &= 0 \\ -C_2'(x)\sin x + C_3'(x)\cos x &= 0 \\ -C_2'(x)\cos x - C_3'(x)\sin x &= \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} \end{cases}$$

Сложив первое и третье уравнения, получим

$$C_1'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad C_1(x) = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + C.$$

Сложив второе уравнение, умноженное на $\sin x$ и третье, умноженное на $\cos x$ получим

$$-C_2'(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad C_2(x) = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \ln|\cos x| + C.$$

Из второго уравнения

$$C_3'(x) = C_2'(x)\frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad C_3(x) = x - \operatorname{tg} x + C.$$

Итак,

$$y_{\text{ч.}H.} = \frac{1}{\cos x} + \ln|\cos x|\cos x + (x - \operatorname{tg} x)\sin x = \frac{1}{\cos x} + \ln|\cos x|\cos x + x\sin x - \frac{\sin^2 x}{\cos x} =$$

$$= \frac{1}{\cos x} + \ln|\cos x|\cos x + x\sin x - \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} = \ln|\cos x|\cos x + x\sin x + \cos x;$$

Но $\cos x$ входит в общее решение однородного уравнения, поэтому возьмём

$$y_{\text{ч.}H.} = \ln|\cos x|\cos x + x\sin x.$$

Ответ: $y_{O.H.} = C_1(x) + C_2(x)\cos x + C_3(x)\sin x + \ln|\cos x|\cos x + x\sin x$.

9.344. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$.
Общее решение однородного уравнения: $y_{O.O.} = C_1 e^x + C_2 x e^x$.
Будем искать: $y_{\text{ч.}H.} = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x$.
Составим систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x &= 0 \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(e^x + xe^x) &= \dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}} \end{cases}$$

Сложив уравнения, получим:

$$C_2'(x)e^x = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}} \quad \Rightarrow \quad C_2'(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \quad \Rightarrow \quad C_2(x) = \arcsin\frac{x}{2} + C_2.$$

$$C_1'(x) = -xC_2'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} \quad \Rightarrow \quad C_1(x) = \frac{1}{2}\int \frac{d(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{4-x^2} + C_1.$$

$$y_{\text{ч.}H.} = e^x\sqrt{4-x^2} + xe^x\arcsin\frac{x}{2}.$$

Ответ: $y_{O.H.} = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^x\sqrt{4-x^2} + xe^x\arcsin\frac{x}{2}$. ▷

Уравнение Эйлера

Уравнение Эйлера

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \tag{1}$$

сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами заменой независимого переменного $x = e^t$ при $x > 0$(или $x = -e^t$ при $x < 0$).

9.381. $x^2y''' - 2y' = 0$.
Это уравнение Эйлера. Оно решается подстановкой $x = e^t$ (пусть $x > 0$, при $x < 0$ решение аналогично).
Имеем

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \dot{y}\Big/\frac{dx}{dt} = \dot{y}e^{-t}; \qquad \left(\frac{dt}{dx} = e^{-t}\right).$$

$$y''_{xx} = \frac{d}{dx}\left(\dot{y}e^{-t}\right) = \ddot{y}\cdot\frac{dt}{dx}e^{-t} + \dot{y}e^{-t}\cdot(-1)\cdot\frac{dt}{dx} = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y});$$

$$y'''_{xxx} = e^{-2t}\cdot(-2)\frac{dt}{dx}(\ddot{y} - \dot{y}) + e^{-2t}\left(\dddot{y}\cdot\frac{dt}{dx} - \ddot{y}\cdot\frac{dt}{dx}\right) = e^{-3t}(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}).$$

Теперь полученные выражения подставляем в исходное уравнение:

$$x^2\cdot e^{-3t}(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}) - 2\dot{y}e^{-t} = 0$$

$$e^{2t}\cdot e^{-3t}(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}) - 2\dot{y}e^{-t} = 0$$

$$\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y} - 2\dot{y} = 0$$

$$\dddot{y} - 3\ddot{y} = 0$$

$\lambda^3 - 3\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 3$. $y_{O.O.}(t) = C_1t + C_2 + C_3e^{3t}$.
Выполняем обратную замену $t = \ln x$.

Ответ: $y(x) = C_1\ln x + C_2 + C_3x^3$.

9.383. Решить краевую задачу: $y'' - y = 0$; $y(0) = 0$, $y(2\pi) = 1$.
Характеристическое уравнение и его корни: $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1$.
Общее решение: $y_{O.O.}(t) = C_1e^x + C_2e^{-x}$.
$y(0) = C_1 + C_2 = 0$, $y(2\pi) = C_1e^{2\pi} + C_2e^{-2\pi} = 1$; отсюда

$$C_1 = \frac{1}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} = \frac{1}{2\operatorname{sh}2\pi}, \quad C_2 = -\frac{1}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}} = \frac{-1}{2\operatorname{sh}2\pi}.$$

Ответ: $y(x) = \dfrac{e^x}{2\operatorname{sh}2\pi} - \dfrac{e^{-x}}{2\operatorname{sh}2\pi} = \dfrac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}2\pi}$.

Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Если известно частное решение y_1 линейного однородного уравнения n-го порядка, то порядок уравнения можно понизить, сохраняя линейность уравнения.
Для этого в уравнение надо подставить $y = y_1z(x)$ и затем понизить порядок заменой $z' = p$.

а) $x^2(1-\ln x)y''+xy'-y=\dfrac{(1-\ln x)^2}{x}$ частное решение $y_1=x$.
Найдем общее решение однородного уравнения:
Сделаем замену: $y=xz(x)$, $y'=z+xz'$, $y''=2z'+xz''$.

$$x^2(1-\ln x)(2z'+xz'')+x(z+xz')-xz=\frac{(1-\ln x)^2}{x}$$

$$x^2(1-\ln x)(2z'+xz'')+x^2z'=\frac{(1-\ln x)^2}{x}$$

$$x^2(1-\ln x)2z'+x^3(1-\ln x)z''+x^2z'=\frac{(1-\ln x)^2}{x}$$

$$x^3(1-\ln x)z''+x^2(3-2\ln x)z'=\frac{(1-\ln x)^2}{x}$$

Новая замена: $p=z'$, $p'=z''$.

$$x^3(1-\ln x)p'+x^2(3-2\ln x)p=\frac{(1-\ln x)^2}{x}$$

Найдём решение соответствующего однородного уравнения:

$$x(1-\ln x)p'+(3-2\ln x)p=0$$

$$\frac{dp}{p}=-\frac{(3-2\ln x)\,dx}{x(1-\ln x)}$$

$$\int\left(-\frac{3-2\ln x}{x(1-\ln x)}\right)dx=-\int\frac{1+2(1-\ln x)}{(1-\ln x)}\,d(\ln x)=\int\frac{d(1-\ln x)}{(1-\ln x)}-2\int d(\ln x)=$$
$$=\ln|1-\ln x|-2\ln x+C;$$

$$\ln|p_O|=\ln|1-\ln x|-2\ln x+C\quad\Rightarrow\quad p_O=\frac{C|1-\ln x|}{x^2}.$$

Заметим, что поделили на p, поэтому надо проверить решение $p=0$. Но оно содержится в полученной формуле.
Так как в точке $x=e$ всё равно нарушается условие существования и единственности решения, то можем спокойно написать, что

$$p_O=\frac{C(1-\ln x)}{x^2}.$$

Модуль уходит в константу C.
Теперь найдём решение неоднородного уравнения: $p=\frac{C(x)(1-\ln x)}{x^2}$,

$$p'=\frac{C'(x)(1-\ln x)}{x^2}+C(x)\cdot\frac{-1/x\cdot x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{C'(x)(1-\ln x)}{x^2}+C(x)\cdot\frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

$$x^3(1-\ln x)\left(\frac{C'(x)(1-\ln x)}{x^2}+C(x)\cdot\frac{-3+2\ln x}{x^3}\right)+x^2(3-2\ln x)\frac{C(x)(1-\ln x)}{x^2}=\frac{(1-\ln x)^2}{x}$$

$$xC'(x)=\frac{1}{x},\quad C(x)=-\frac{1}{x}+C_1,\quad p=\frac{\left(-\frac{1}{x}+C_1\right)(1-\ln x)}{x^2}=-\frac{1-\ln x}{x^3}+\frac{C_1(1-\ln x)}{x^2}.$$

Возвращаемся к исходным переменным:

$$z=-\int\frac{1-\ln x}{x^3}\,dx+\int\frac{C_1(1-\ln x)}{x^2}\,dx=-\int\frac{dx}{x^3}+\int\frac{\ln x}{x^3}\,dx+\int\frac{C_1}{x^2}\,dx-\int\frac{C_1\ln x}{x^2}\,dx.$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x \\ v = -1/x \end{matrix} \right| = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C;$$

$$\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x \\ v = -1/2x^2 \end{matrix} \right| = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C;$$

$$z = \frac{1}{2x^2} - \frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C_1\left(-\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right) + C_2 = \frac{1}{4x^2} - \frac{\ln x}{2x^2} + C_1\frac{\ln x}{x} + C_2;$$

$$y = \frac{1}{4x} - \frac{\ln x}{2x} + C_1 \ln x + C_2 x.$$

б). $y'' - y' + e^{2x}y = e^{3x}$, частное решение $y_1 = \cos e^x$.
Сделаем замену:
$y = \cos e^x z(x)$, $y' = -\sin e^x \cdot e^x z + \cos e^x z'$,
$y'' = -(\cos e^x \cdot e^{2x} + \sin e^x \cdot e^x)z - -\sin e^x \cdot e^x z' - \sin e^x \cdot e^x z' + \cos e^x z'' = -(\cos e^x \cdot e^{2x} + \sin e^x \cdot e^x)z - 2\sin e^x \cdot e^x z' + \cos e^x z''$.
Подставляем в исходное уравнение:

$$-(\cos e^x \cdot e^{2x} + \sin e^x \cdot e^x)z - 2\sin e^x \cdot e^x z' + \cos e^x z'' + \sin e^x \cdot e^x z - \cos e^x z' + e^{2x}\cos e^x z = e^{3x}$$

$$\cos e^x z'' - 2\sin e^x \cdot e^x z' - \cos e^x z' = e^{3x}$$

Новая замена: $p = z'$, $p' = z''$.

$$\cos e^x p' - (2\sin e^x \cdot e^x + \cos e^x)p = e^{3x}$$

Соответствующее однородное линейное уравнение:

$$\cos e^x p' - (2\sin e^x \cdot e^x + \cos e^x)p = 0$$

$$\cos e^x\,dp = (2\sin e^x \cdot e^x + \cos e^x)p\,dx$$

$$\frac{dp}{p} = (2\operatorname{tg} e^x \cdot e^x + 1)\,dx$$

$$\int \operatorname{tg} e^x \cdot e^x\,dx = \int \frac{\sin e^x}{\cos e^x}\,d(e^x) = \int \frac{-1}{\cos e^x}\,d(\cos e^x) = -\ln|\cos e^x| + c$$

$$\ln|p| = -2\ln|\cos e^x| + x + \ln c$$

$$p_O = \frac{Ce^x}{\cos^2 e^x}$$

Заметим, что поделили на p, поэтому надо проверить решение $p = 0$. Но оно содержится в полученной формуле.

$$p = \frac{C(x)e^x}{\cos^2 e^x}$$

$$p' = \frac{C'(x)e^x}{\cos^2 e^x} + C(x)e^x\frac{\cos e^x + 2\sin e^x}{\cos^3 e^x}$$

$$\cos e^x\left(\frac{C'(x)e^x}{\cos^2 e^x} + C(x)e^x\frac{\cos e^x + 2\sin e^x}{\cos^3 e^x}\right) - (2\sin e^x \cdot e^x + \cos e^x)\frac{C(x)e^x}{\cos^2 e^x} = e^{3x}$$

$$\frac{C'(x)e^x}{\cos e^x} = e^{3x} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = e^{2x}\cos e^x$$

$$C(x) = \int e^{2x}\cos e^x\,dx = \int e^x\cos e^x\,d(e^x) = \left| \begin{matrix} u = e^x \\ dv = \cos e^x\,d(e^x) \end{matrix} \right| = e^x\sin e^x - \int \sin e^x\,d(e^x) =$$

$$= e^x\sin e^x + \cos e^x + C_1;$$

$$p = \frac{(e^x \sin e^x + \cos e^x + C_1)e^x}{\cos^2 e^x}$$

$$z = \int \frac{(e^x \sin e^x + \cos e^x + C_1)e^x}{\cos^2 e^x}\,dx = \int \frac{e^x \sin e^x + \cos e^x + C_1}{\cos^2 e^x}\,d(e^x);$$

$$\int \frac{t \sin t}{\cos^2 t}\,dt = \left| \begin{array}{c} u = t \\ v = 1/\cos t \end{array} \right| = \frac{t}{\cos t} - \int \frac{dt}{\cos t} = \frac{t}{\cos t} - \ln\left|\frac{1}{\cos t} + \operatorname{tg} t\right| + C$$

$$z = \frac{e^x}{\cos e^x} - \ln\left|\frac{1}{\cos e^x} + \operatorname{tg} e^x\right| + \ln\left|\frac{1}{\cos e^x} + \operatorname{tg} e^x\right| + C_1 \operatorname{tg} e^x + C_2 = C_1 \operatorname{tg} e^x + C_2 + \frac{e^x}{\cos e^x}$$

$$y = C_1 \sin e^x + C_2 \cos e^x + e^x.$$

Текущее ДЗ: :3032, 3034, 3037, 9.343, 9.345, 9.385+ Проинтегрировать уравнение (y_1– частное решение):
а) $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4$,$y_1 = \frac{1}{x}$
б) $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2e^x$,$y_1 = x$.