Билеты утверждены на заседании кафедры ФН-12 03.12.2020.

Московский Государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

# ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ **6**.

по курсу УМФ и ПФ, 2-й курс, 3-й сем., РЛ2-31

**1.** (*10 баллов*) Решить первую смешанную задачу для уравнения $u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 10\cos 3t \sin 4x$ на отрезке $0 < x < \pi$, $0 < t < \infty$ с начальными и граничными условиями $u(x,0) = 0$, $u(0,t) = 0$, $u(\pi,t) = 0$

**2.** (*10 баллов*) Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца $\Delta u + u = 0$ в круге $0 \le r < 2$, $0 \le \phi < 2\pi$ (где $r$, $\phi$ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\phi)$ удовлетворяет условию:

$u(2,\phi) = 3\cos^3\varphi - \sin\varphi$.

**3.** (*10 баллов*)

a. Колебание струны под действием мгновенного сосредоточенного импульса.

b. Определить тип уравнения $9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 10u_x - 15u_y + x - 2y = 0$. Привести его к каноническому виду.

Билеты утверждены на заседании кафедры ФН-12 03.12.2020.

Евстратов Иван

РЛ2-31

Вар - 6

№1
$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{16} u_{xx} + 10\cos 3t \sin 4x \\ 0 < x < \pi \quad 0 < t < \infty \\ u(x,0) = 0 \quad u(0,t) = 0 \quad u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

$$u_t = \frac{1}{16} u_{xx}$$

$$u = X(x) \cdot T(t) \not\equiv 0$$

$$T'(x) = \frac{1}{16} X'' T$$ разделяем переменные

$$\frac{T'}{T} = \frac{1}{16} \frac{X''}{X} = -\lambda$$

$$\frac{1}{16} \frac{X''}{X} + \lambda = 0$$

$$X'' + 16\lambda X = 0$$

$$\begin{cases} X'' + 16\lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases}$$

1) $\lambda = 0 \quad X'' = 0 \Rightarrow X = C_1 x + C_2$

$X(0) = 0 \to C_2 = 0$

$X(\pi) = 0 \Rightarrow 0 = C_1\pi + 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$X = 0$ – не С.Ф

$\lambda = 0$ – не С.З

2) $\lambda < 0 \quad \lambda = -\omega^2 < 0$

$X'' - 16\omega^2 X = 0$

$X = C_1 e^{4\omega x} + C_2 e^{-4\omega x}$

$X(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$

$X(\pi) = 0 \to C_1 e^{4\pi\omega} + C_2 e^{-4\pi\omega} = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{4\pi\omega} & e^{-4\pi\omega} \end{pmatrix} = e^{-4\pi\omega} - e^{4\pi\omega} = 0$$

не существует $\omega$, удовлетворяющих условию $\Rightarrow$ $\lambda < 0$ - не СЗ

$x = 0$ - не СФ

3) $\lambda = \omega^2 > 0$

$$X'' + 16\omega^2 X = 0$$

$$X = C_1 \cos 4\omega x + C_2 \sin 4\omega x$$

$X(0) = 0 \qquad C_1 = 0$

$X(\pi) = 0 \qquad C_2 \sin 4\omega\pi = 0$

$C_2 \neq 0$

$$\sin 4\omega\pi = 0$$

$4\omega\pi = \pi n \qquad n = \overline{0, \infty}$

$$\omega = \frac{n}{4}$$

$$\lambda = \left(\frac{n}{4}\right)^2$$

$X = \sin \frac{n}{4} x \qquad \|X_n\|^2 = \frac{\pi}{2}$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n}{4} x$$

$$u_t = \frac{1}{16} u_{xx} + 10 \cos 3t \sin 4x$$

$$u_t = \sum_{n=0}^{\infty} T_n'(t) \sin \frac{n}{4} x$$

$$u_{xx} = -\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n}{4} x \cdot \left(\frac{n}{4}\right)^2$$

$$T_n'(t) \sin \frac{n}{4} x + \frac{1}{16}\left( T_n(t) \left(\frac{n}{4}\right)^2 \sin \frac{n}{4} x\right) = 10 \cos 3t \sin 4x$$

$$\sin \frac{n}{4} x \left( T_n'(t) + \frac{1}{16} T_n(t) \left(\frac{n}{4}\right)^2 \right) = 10 \cos 3t \sin 4x \Big| \cdot \sin \frac{n}{4} x$$

$$\|X_n\|^2 \left( T_n'(t) + \frac{1}{16} T_n(t) \left(\frac{n}{4}\right)^2 \right) = 10 \cos 3t \sin 4x \sin \frac{n}{4} x$$

$$10 \cos 3t \int_0^{\pi} \sin 4x \sin \frac{n}{4} x \, dx = \frac{10 \cos 3t}{2} \int_0^{\pi} \cos\left(4 - \frac{n}{4}\right) x - \cos\left(4 + \frac{n}{4}\right) x \, dx = 5 \cos 3t \left[ \frac{\sin\left(4 - \frac{n}{4}\right) x}{4 - \frac{n}{4}} - \frac{\sin\left(4 + \frac{n}{4}\right) x}{4 + \frac{n}{4}} \right]_0^{\pi}$$

2

$$= 5\cos 3t\left[\frac{\pi \sin\left(4\pi - \frac{\pi n}{4}\right)}{4\pi - \frac{\pi n}{4}} - \frac{\sin\left(4\pi + \frac{\pi n}{4}\right)}{4 + \frac{\pi}{4}}\right] =$$

$$= 5\cos 3t\,\pi \begin{cases} 1, & n = 4 \\ 0, & n \neq 4 \end{cases}$$

$$\frac{\cancel{\pi}}{2}\left(T_n'(t) + \frac{1}{16} T(n)\left(\frac{n}{4}\right)^2\right) = \cancel{\pi}\, 5\cos 3t \quad , n = 4$$

$$T_4'(t) + \frac{1}{16} T_4(t) = 10\cos 3t$$

$$T = T_0 + T_r$$

$$T_0 = C \cdot e^{-\frac{1}{16}t} \qquad T_r = \cos t + \sin t$$

$$T_4 = C e^{-\frac{1}{16}t} + \cos t + \sin t$$

$$u(x,0) = 0$$

$$T_4(0) = Ce^0 + \cos 0 + \sin 0 = 0 \Rightarrow \quad C = -1$$

$$u(x,t) = \left(\cos(t) + \sin(t) - e^{-\frac{1}{16}t}\right) \sin\frac{n}{4}x \ \text{(при } n = 4)$$

$$u(x,t) = \left(\cos(t) + \sin(t) - e^{-\frac{1}{16}t}\right) \sin x$$

№2

$$\Delta u + u = 0 \qquad 0 \le r < 2 \qquad 0 \le \varphi < 2\pi$$

$$u(2,\varphi) = 3\cos^3\varphi - \sin\varphi$$

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + u = 0$$

$$u = R(r)\Phi(\varphi) \neq 0$$

$$\frac{\Phi}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \frac{R}{r^2}\Phi'' + R\Phi = 0 \qquad \text{Разделяем переменные}$$

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + r^2 + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0$$

$$-\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(\frac{r\,dR}{dr}\right) - r^2 = \frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda$$

I
$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0 \\ \Phi(0) = \Phi(2\pi) \\ \Phi'(0) = \Phi'(2\pi) \end{cases}$$

7

3

(1) $\lambda = 0 \quad \Phi'' = 0$

$\Phi = C_1\varphi + C_2$

$\Phi' = C_1$

$$\begin{cases} C_2 = C_1 2\pi + C_2 \\ C_1 = C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = 0 \\ \forall C_2 \neq 0 \end{matrix}$$

$\Phi = C$ – СФ $\quad \lambda = 0$ – С.З

(2) $\lambda = -\omega^2 < 0 \quad \Phi'' - \omega^2\Phi = 0$

$$\begin{cases} \Phi = C_1 e^{\omega\varphi} + C_2 e^{-\omega\varphi} \\ \Phi' = C_1\omega e^{\omega\varphi} - C_2\omega e^{-\omega\varphi} \end{cases}$$

$C_1 + C_2 = C_1 e^{2\pi\omega} + C_2 e^{-2\pi\omega}$

$C_1\omega - C_2\omega = \omega C_1 e^{2\pi\omega} + C_2\omega e^{-2\pi\omega}$

$$\begin{pmatrix} 1 - e^{2\pi\omega} & 1 - e^{-2\pi\omega} \\ 1 - e^{2\pi\omega} & -(1 - e^{-2\pi\omega}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 - e^{2\pi\omega} & 1 - e^{-2\pi\omega} \\ 1 - e^{2\pi\omega} & -(1 - e^{-2\pi\omega}) \end{vmatrix} = 0$$

$-2(1 - e^{2\pi\omega})(1 - e^{-2\pi\omega}) = 0$

$C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow \Phi = 0$ – не СФ $\quad \lambda < 0$ – не СЗ

(3) $\lambda = \omega^2 > 0$

$\Phi'' + \omega^2\Phi = 0$

$\Phi = C_1\cos\omega\varphi + C_2\sin\omega\varphi$

$\Phi' = -C_1\omega\sin\omega\varphi + C_2\omega\cos\omega\varphi$

$$\begin{cases} C_1 = C_1\cos 2\pi\omega + C_2\sin 2\pi\omega \\ C_2\omega = -C_1\omega\sin 2\pi\omega + C_2\omega\cos 2\pi\omega \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \cos 2\pi\omega & -\sin 2\pi\omega \\ \sin 2\pi\omega & 1 - \cos 2\pi\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\cos 2\pi\omega & -\sin 2\pi\omega \\ \sin 2\pi\omega & 1-\cos 2\pi\omega \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\cos 2\pi\omega)^2 + \sin^2 2\pi\omega = 0$$

$$1 - 2\cos 2\pi\omega + \cos^2 2\pi\omega + \sin^2 2\pi\omega$$

$$\cos 2\pi\omega = 1$$

$$2\pi\omega = 2\pi n \qquad n = \overline{1,\infty}$$

$$\omega = n \qquad \lambda_n = n^2$$

$$\begin{cases} C_1 = C_1 \\ C_2 = C_1 \end{cases} \qquad \Phi_n = \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases} \qquad n = \overline{1,\infty}$$

$$\|\Phi_n\|^2 = \pi$$

$$\Phi_0 = C = 1 \qquad \lambda_0 = 0 \qquad \|\Phi_0\|^2 = 2\pi$$

$$\Phi_n = \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases} \qquad n = \overline{1,\infty} \qquad \|\Phi_n\|^2 = \pi$$

$$\Phi_n = \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases} \qquad n = \overline{0,\infty} \qquad \lambda_n = n^2$$

II

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + r^2 - n^2 = 0 \quad \Big|\cdot R$$

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + (r^2 - n^2)R = 0$$

Пусть $x = r \qquad R(r) = R(x) = y(x)$

$$x\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + (x^2 - n^2)y = 0$$ – уравнение Бесселя $n$-го порядка

$$\Downarrow$$

$$y = C_1 J_n(x) + C_2 N_n(x)$$

$$\Downarrow$$

$$R(r) = C_1 J_n(r) + C_2 N_n(r)$$

Добавим естественное граничное условие (естественная ограниченность в круге)

В круге функция должна быть ограничена при $r \to 0$

$J_n(r)$ – функция ограничена при $r \to 0$ (Бессель)

$N_n(r)$ – не ограничена при $r \to 0$ (Нейман)

5

$$A_3 = \frac{3}{4\, y_3'(2)}$$

$C_2 = 0$ (функция не равна 0, ее просто нет)

$R(r) = y_n(r) \quad (C_1 = 1)$

$$u = R\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r)\, \Phi_n(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(r)\left[A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right]$$

$$u_r = \sum_{n=0}^{\infty} y_n'(r)\left[A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right]$$

$$u_r = 3\cos^3\varphi - \sin\varphi = 3\left(\frac{3\cos\varphi + \cos 3\varphi}{4}\right) - \sin\varphi = \frac{9\cos\varphi}{4} + \frac{3\cos 3\varphi}{4} - \sin\varphi$$

$$u(2,\varphi) = \frac{9\cos\varphi}{4} + \frac{3\cos 3\varphi}{4} - \sin\varphi$$

$$\frac{9}{4}\cos\varphi + \frac{3\cos 3\varphi}{4} - \sin\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} y_n'(2)\left[A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right] \Big| \cdot \cos n\varphi$$

$$\frac{9}{4}\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\varphi \cos n\varphi \, d\varphi}_{I_1} + \frac{3}{4}\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos 3\varphi \cos n\varphi \, d\varphi}_{I_2} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\varphi \cos n\varphi \, d\varphi}_{I_3} = y_n'(2)\, A_n \|\Phi_n\|^2$$

$$I_1 = \frac{9}{4\cdot 2}\int_0^{2\pi} \cos\varphi(n+1) + \cos\varphi(1-n)\, d\varphi = \frac{9}{8}\left(\frac{\sin(n+1)\varphi}{n+1} + \varphi\frac{\sin(1-n)\varphi}{(1-n)\varphi}\right)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi\cdot\frac{9}{8}\begin{cases}1, & n=1\\ 0, & n\neq 1\end{cases} = \frac{9\pi}{4}\begin{cases}1, & n=1\\ 0, & n\neq 1\end{cases}$$

$$I_2 = \frac{3}{2\cdot 4}\int_0^{2\pi} (\cos\varphi(3+n) + \cos\varphi(3-n))\, d\varphi = \frac{3}{8}\left(\frac{\sin(3+n)\varphi}{3+n} + \varphi\frac{\sin(3-n)\varphi}{3-n}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4}\begin{cases}1, & n=3\\ 0, & n\neq 3\end{cases}$$

$$I_3 = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\sin\varphi(1+n) + \sin(1-n)\varphi)\, d\varphi = -\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(1+n)\varphi}{1+n} - \frac{\cos(1-n)\varphi}{1-n}\right)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$\frac{9\pi}{4} = y_1'(2) A_1 \pi \qquad \frac{3\pi}{4} = y_3'(2) A_3 \pi$$

$$A_1 = \frac{9}{4 y_1'(2)} \qquad A_3 = \frac{3}{4 y_3'(2)}$$

$$\frac{9}{4}\cos\varphi + \frac{3}{4}\cos 3\varphi - \sin\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(2)[A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi] \mid \sin n\varphi$$

$$\underbrace{\frac{9}{4}\int_0^{2\pi} \cos\varphi \cdot \sin n\varphi \, d\varphi}_{I_1} + \underbrace{\frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \cos 3\varphi \sin n\varphi}_{I_2} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\varphi \cdot \sin n\varphi \, d\varphi}_{I_3} = y_n'(2) B_n \|\Phi_n\|^2$$

$$I_1 = \frac{9}{4}\int_0^{2\pi} \sin n\varphi \cos\varphi \, d\varphi = \frac{9}{8}\left(\int_0^{2\pi} (\sin\varphi(n+1) + \sin\varphi(n-1)) d\varphi = \frac{9}{8}\left(-\frac{\cos(n+1)\cdot\varphi}{n+1} - \frac{\cos(n-1)\varphi}{n-1}\right)\right|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{9}{8}\left(-\frac{\cos(2\pi n + 2\pi)}{n+1} - \frac{\cos(2\pi n - 2\pi)}{n-1} + \frac{\cos 0}{n+1} + \frac{\cos 0}{n-1}\right) = 0$$

$$I_2 = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \sin n\varphi \cos 3\varphi \, d\varphi = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} (\sin\varphi(n+3) + \sin\varphi(n-3)) d\varphi = \frac{3}{8}\left(-\frac{\cos(n+3)\varphi}{n+3} - \frac{\cos(n+3)\varphi}{n+3}\right)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$I_3 = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin\varphi \cdot \sin n\varphi \, d\varphi = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos\varphi(1-n) - \cos((1+n)\varphi) d\varphi = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(1-n)\varphi}{1-n} - \frac{\sin(1+n)\varphi}{1+n}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{2}\pi \begin{cases} 1, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2}\pi = y_1'(2) B_1 \pi$$

$$B_1 = -\frac{1}{2 y_1'(2)}$$

$$u = y_1'(r) A_1 \cos\varphi + y_3'(r) A_3 \cos 3\varphi + y_1'(r) B_1 \sin\varphi$$

$$u = \frac{9}{4}\frac{y_1'(r)}{y_1'(2)}\cos\varphi + \frac{3}{4}\frac{y_3'(r)}{y_3'(2)}\cos 3\varphi - \frac{1}{2}\frac{y_1'(r)}{y_1'(2)}\sin\varphi$$

№3

$9u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + 10u_x - 15u_y + x - 2y = 0$

$a_{11} = 9 \quad a_{12} = a_{21} = -3 \quad a_{22} = 1$

$\Delta = 9 - 9 = 0$ – параболический тип

$9\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 0$

$D = 36 - 36 = 0$

$\lambda = \frac{-6 \pm 0}{18} = -\frac{1}{3}$

$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{3}$

$y = -\frac{x}{3} + C$

$C = y + \frac{x}{3} = \xi \qquad \eta = x$

$\mathcal{J}(\xi, \eta) \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

$\xi_x = \frac{1}{3} \quad \xi_y = 1 \quad \eta_x = 1 \quad \eta_y = 0$

$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{3}u_\xi + u_\eta$

$u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial \eta} = u_\xi$

$u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{1}{9}u_{\xi\xi} + \frac{1}{3}u_{\eta\xi} + \frac{1}{3}u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} =$

$= \frac{1}{9}u_{\xi\xi} + \frac{2}{3}u_{\eta\xi} + u_{\eta\eta}$

$u_{yy} = u_{\xi\xi}$

$u_{xy} = \frac{\partial}{\partial x}(u_y) = \frac{\partial}{\partial y}(u_x) = \frac{1}{3}u_{\xi\xi} + u_{\eta\xi}$

$\cancel{u_{\xi\xi}} + \cancel{6u_{\eta\xi}} + 9u_{\eta\eta} - \cancel{2u_{\xi\xi}} - \cancel{6u_{\eta\xi}} + \cancel{u_{\xi\xi}} +$

$+ \frac{10}{3}u_\xi + 10u_\eta - 15u_\xi + \eta - 2\xi + \frac{2\eta}{3} = 0$

$\cancel{u_{\xi\xi}} + \cancel{u_{\eta\xi}} + 9u_{\eta\eta} - \frac{35}{3}u_\xi + 10u_\eta + \frac{5\eta}{3} - 2\xi = 0$

8