Домашнее задание N 3.

Вариант: 10

N 1

$$f(x) = x\sqrt{4-x} = 2x\sqrt{1-\frac{x}{4}} =$$

$$= 2x\left(1+\left(-\frac{x}{4}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$2x\cdot\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{1!}\cdot\left(-\frac{x}{4}\right)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\cdot\left(-\frac{x}{4}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\cdot\left(-\frac{x}{4}\right)^3\right.$$

$$+\ldots+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\cdot\left(-\frac{x}{4}\right)^n$$

Раскрываем скобки.

$$2x-\frac{x^2}{1!\cdot 4}-\frac{x^2}{2!\cdot 2\cdot 4^2}-\frac{3x^4}{3!\cdot 4\cdot 4^3}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{n+1}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-n\right)}{n!\cdot 4^n}$$

N 2

$$y=(x-2)\cdot e^{3-x}$$

1) Область определения функции

$x\in R$, $x\in(-\infty;+\infty)$

Нули:

$x=0 \Rightarrow y=-2e^3$
$y=0 \Rightarrow x=2$
точек разрыва нет

2) Точки пересечения с осями координат.

O_x: $y=(x-2)\cdot e^{3-x}=0$, при $x=2$

O_y: $x=0$, тогда $y=-2e^3$

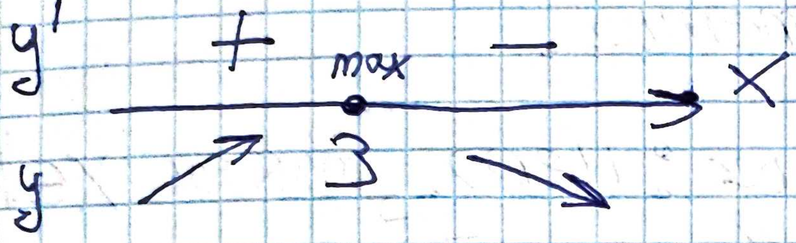
3) Функция общего вида, так как

$y(-x)=(-x-2)e^{3+x}=-(x+2)e^{3+x}\neq\pm y(x)$

4) Экстремум и монотонность

Находим первую производную.

$y'(x) = e^{3-x} - (x-2)e^{3-x} = (3-x)e^{3-x}$



Критическая точка $x=3$

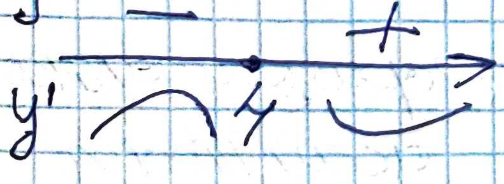
Функция возрастает на интервале $(-\infty;3)$ и убывает на $(3;+\infty)$.

Функция максимальна в точке $x=3, y=1$.

5) Выпуклость и точки перегиба функ.

Вычисляем производную ~~второго порядка~~.

$y''(x) = -e^{3-x} - (3-x)e^{3-x} = (x-4)\cdot e^{3-x}$



Критическая точка:

$x=4, y=\frac{2}{e}$

~~фун~~ Функция выпуклая вниз на промежутке $(-\infty; 4)$ и на промежутке $(4; +\infty)$ выпуклая вверх.

б) Ассимптоты.

Вертикальных: нет, так как $x \in \mathbb{R}$

Так как в нашей функции есть e^{3-x}, то стоит рассматривать отдельно при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x-2)e^{3-x}}{x} = +\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ нет наклонных ассимптот

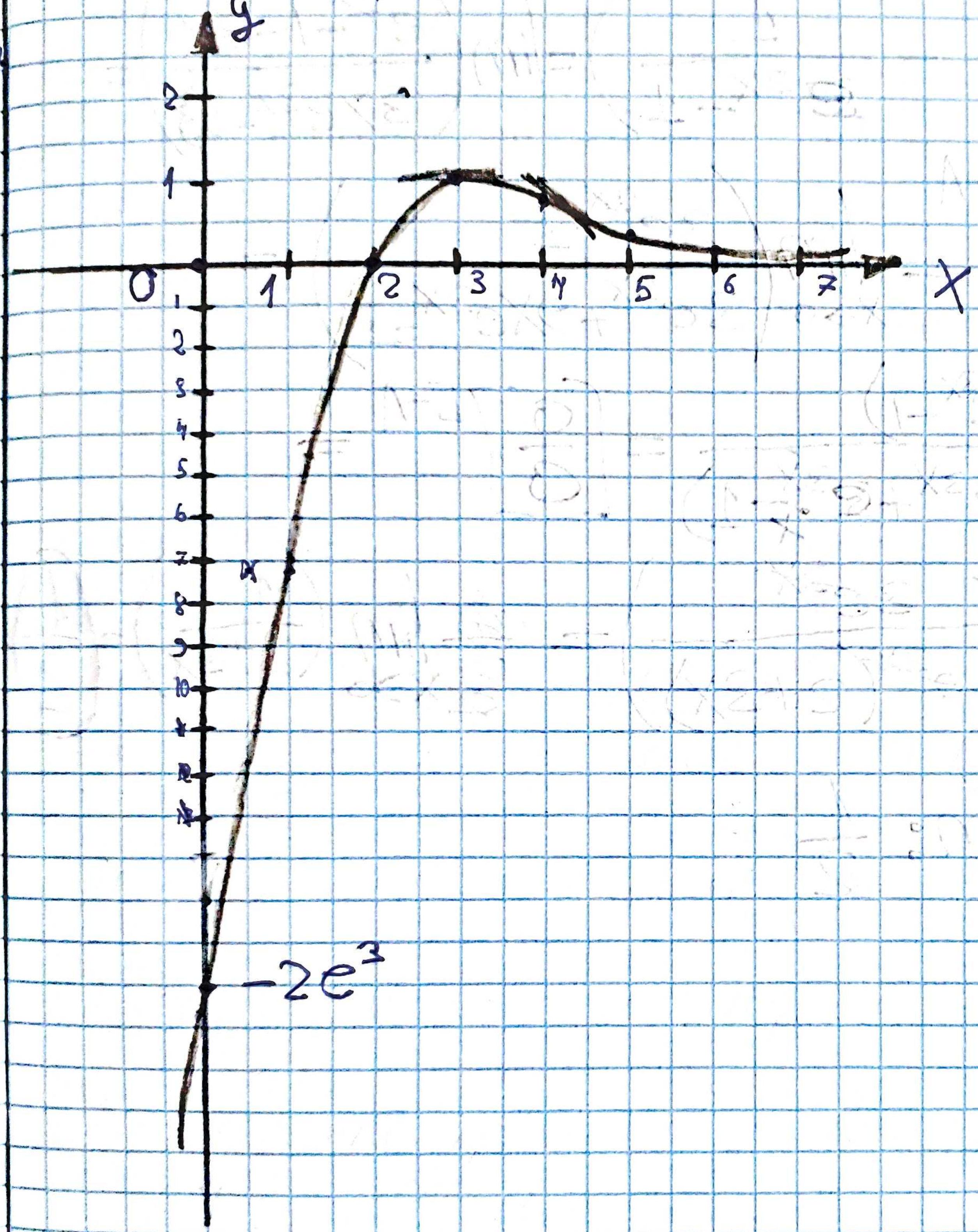
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-2) \cdot e^{3-x}}{x} = 0 \Rightarrow k = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left((x-2) \cdot e^{3-x} - 0 \cdot x\right) = \lim_{x \to \infty} (x-2) \cdot e^{3-x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 0$$

Итак $y = 0 \cdot x + 0 = 0$ — горизонтальная ассимптота

7) ~~Gm~~ График.



№3

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3x}-\frac{1}{e^{3x}-1}\right)=\lim\left(\frac{e^{3x}-1-3x}{3x(e^{3x}-1)}\right)=$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]^{\text{Б-Л}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3e^{3x}-3}{3e^{3x}+9xe^{3x}-3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{3}(e^{3x}-1)}{\cancel{3}(e^{3x}+3e^{3x}\cdot x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]^{\text{Б-Л}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cancel{3e^{3x}}}{\cancel{3e^{3x}}(2+3x)}\right)=\cancel{\tfrac{1}{2}}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2+3x}\right)=\frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$