Филимонов Степан РЛ6-31

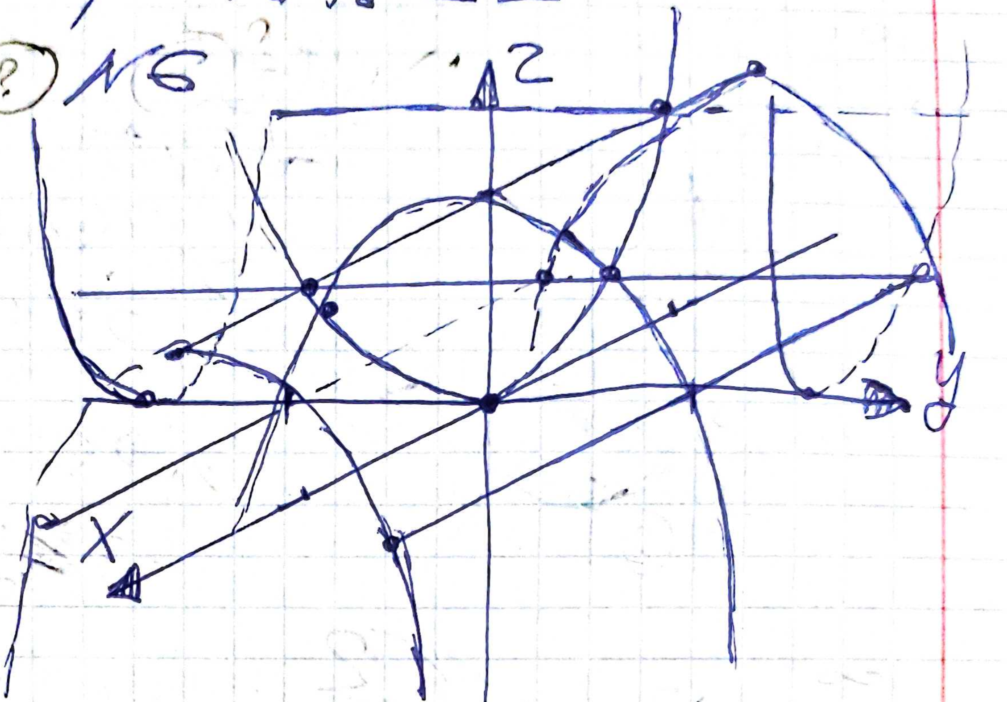
Вариант: 12

ДЗ1

(Ф/1) ? №6

$$z = x^2$$

$$z = 1 - y^2$$



$$\iint dx\,dy \int_{x^2}^{1-y^2} dz =$$

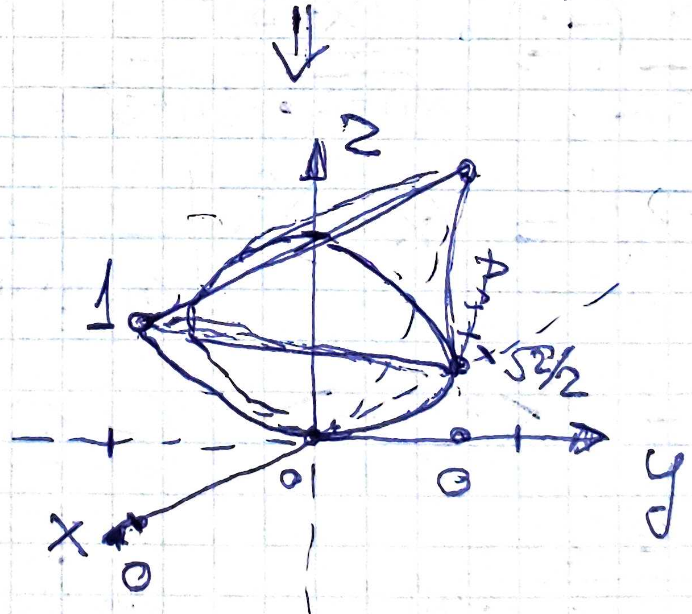
$$= \int_{0}^{\sqrt{2}/2} dx \int_{0}^{1} dy \int_{x^2}^{1-y^2} dz =$$

$$= \int_{0}^{\sqrt{2}/2} dx \int_{0}^{1} dy \left(1 - y^2 - x^2\right) =$$

$$= \int_{0}^{\sqrt{2}/2} dx \left[y - \frac{y^3}{3} - x^2 y \right]_0^1 =$$

$$= \int_{0}^{\sqrt{2}/2} dx \left(\frac{2}{3} - x^2 \right) =$$

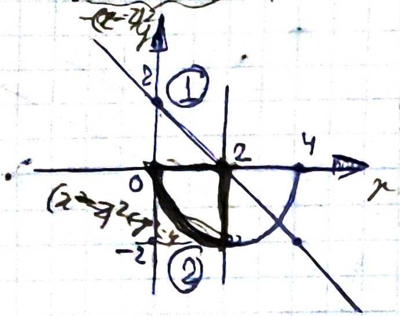
$$= \left[\frac{2x}{3} - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$



Какая область получается в проекции?

исп. $(\varnothing/1)$ $\pm$ №5 $x=2$? сч.

$$\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{2-x} f(x,y)\,dx = \int_{-2}^{0} dy \int_0^{-\sqrt{y^2-4}+2} f(x,y)\,dx + \int_0^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)\,dx$$



1) $\begin{cases} 0 \le x \le 2-y \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 0 \le x \le -\sqrt{y^2-4}+2 \\ 0 \ge y \ge -2 \end{cases}$

№2 : (+) (1/1)

$$\sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(x-3)^{2n}}{\sqrt{n+2}\cdot\sqrt[3]{n+3}}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = (x-3)^2 \cdot \left|\frac{1}{(n+2)^{\frac{1}{2n}}\cdot(n+3)^{\frac{1}{3n}}}\right| = (x-3)^2 \cdot 1$$

$(x-3)^2 < 1 \Rightarrow \boxed{2 < x < 4}$

$x = 2$

$\sum \frac{(-1)^{3n}}{\sqrt{n+2}\cdot\sqrt[3]{n+3}}$ ряд знакочередующ. (и монотонно)

$|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n+2}\cdot\sqrt[3]{n+3}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ сход

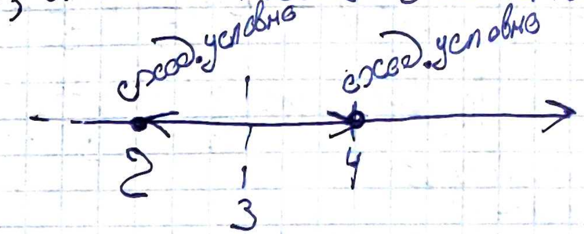
сравним $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt[3]{n+3}}$ с $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{n^5}}$, т.к второй ряд расходится, то и сравниваемый с ним тоже, а исходный сходится условно

$x = 4$

$\sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}\cdot\sqrt[3]{n+3}}$ ряд знакочередуется (и монотонно)

$|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n+2}\cdot\sqrt[3]{n+3}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ сход

сравним $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt[3]{n+3}}$ с $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{n^5}}$, т.к. второй ряд расходится, то и сравниваемый с ним тоже, а исходный сходится условно



$r = 1$

№3 (?) $(\varnothing/1)$ исп. (1/1)

$f(x) = \sin^2 x$ по степ. $x - \frac{\pi}{4}$, $a = \frac{\pi}{4}$

$x - \frac{\pi}{4} = t \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{4}$

$$f\left(t+\frac{\pi}{4}\right) = \sin^2\left(t+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\cos\left(2t \oplus \frac{\pi}{2}\right)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(2t\oplus\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cancel{1-\cos 2t\cdot\cos\frac{\pi}{2}} - \right.$$

$t \in \mathbb{R}$

$$\ominus \sin 2t \cdot \sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} - \sin t\cdot\cos t \ominus$$

$\sin 2t = 2\sin t\cos t$

$$\sin t = 2t - \frac{8t^3}{3!} + \frac{2^5 t^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$t \in \mathbb{R}$

$$\cancel{\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n\cdot t^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot t^{2n}}{(2n)!}}$$

$t \in \mathbb{R}$

$$\stackrel{\bigcirc}{=} \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2t^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot 2^{2n+1} ? =$$

$$= \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n+1} \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!} ? = \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

№ 4 $(\sqrt{}/l)$

$$\int_{-\frac{3}{4}}^{0} \frac{1}{x^2} \cdot \ln(1+x^4)\,dx \qquad \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^n t^{n+1}}{n+1}$$

$$\ln(1+x^4) = x^4 - \frac{x^8}{2} + \frac{x^{12}}{3} - \ldots + \frac{(-1)^n (x^4)^{n+1}}{(n+1)}$$

Определим точность:

пока $\left|\frac{(-1)^n \cdot \left(\left(-\frac{3}{4}\right)^4\right)^{n+1}}{n+1}\right| < 0{,}001 \quad n{+}{+}$

$n = 2$: $0{,}0105588 > 0{,}001$ — по теореме Лейбница

$n = 3$: $0{,}00250565 > 0{,}001$ — берем $n = 3$, тогда

$n = 4$: $0{,}000634242 < 0{,}001$

$$\int_{-\frac{3}{4}}^{0} \left(x^2 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^{10}}{3} - \frac{x^{14}}{4}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{14} + \frac{x^{10}}{33} - \frac{x^{15}}{60}\right]_{-\frac{3}{4}}^{0} =$$

$$= 0 + 0{,}132148 = 0{,}132148$$

~~Итого в ряде получае [illegible] знакоотрицательные~~

~~и [illegible] учета [illegible] Лейбница не работает~~

N 1

1) ⊕ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n} = \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} =$

$= \frac{e^{-1}}{e} = \frac{1}{e^2} < 1$ Ряд ~~ра~~сходится по радик. признаку Коши

2) ⊕ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2n}}}\cdot\frac{2}{3} \Rightarrow$

$n^{\frac{1}{2n}},\ \frac{1}{2n}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\ n^{0} = 1 \Rightarrow \frac{2}{3} < 1$

Ряд сходится по радик. признаку Коши

3) ⊕ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot\ln\frac{n^3+3}{n^3} \Rightarrow n\cdot\underbrace{\ln\left(1+\frac{3}{n^3}\right)} \sim n\cdot\frac{3}{n^3} \Rightarrow$

$\frac{3}{n^3}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2} \Rightarrow \int\limits_{1}^{\infty}\frac{3}{t^2}dt \Rightarrow \left[-\frac{3}{t}\right]_{1}^{+\infty} = 3 \Rightarrow$ сход

Ряд сходится по интегральному признаку

$n! \sim \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^{n}$

4) ⊕ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot n!}{n^n} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \frac{4\cdot\cancel{n}\cdot(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}}{\cancel{n}\cdot e} = \frac{4}{e} > 1$, $(2\pi n)^{\frac{1}{2n}} \to 1$

Ряд расходится по радикальному признаку Коши

5) $\sum^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\cdot\underbrace{\sin\frac{2}{\sqrt{n}}}$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^n}{\sqrt{n}\cdot\sqrt[3]{n}}$ ряд знакочеред

(±)

$\sin\frac{2}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{n}}$

$\frac{2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

по какому кр-ку ?

$\frac{2}{\sqrt{n}\cdot\sqrt[3]{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ряд сходится

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| - \sum\frac{2}{\sqrt{n}\cdot\sqrt[3]{n}}$ ~~равно 0~~ $0 \Rightarrow \int_1^{\infty}\frac{2}{\sqrt[6]{t^5}}dt \Rightarrow$

$\Rightarrow$ расход $\Rightarrow$ ряд расход $\Rightarrow$ исходный ряд сходится условно

6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{3n^2+1}{5n^2+9\ln n}$ ряд знакочеред (?)

$\cancel{\sum_{n=1}^{\infty}}|a_n| = \frac{3n^2+1}{5n^2+9\ln n} \underset{n\to\infty}{\approx} \frac{6n^2}{10n^2+9} = \frac{6}{10+\frac{9}{n^2}} = \frac{6}{10} \neq 1$

$\frac{9}{n^2}\to 0$

ряд отличен от 0, расходится