ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Свойства функций

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	$\sin(2\pi n+\alpha)=\sin\alpha$, $T_0=2\pi$
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(2\pi n+\alpha)=\cos\alpha$, $T_0=2\pi$
$tg(-\alpha)=-tg\alpha$	$tg(\pi n+\alpha)=tg\alpha$, $T_0=\pi$
$ctg(-\alpha)=-ctg\alpha$	$ctg(\pi n+\alpha)=ctg\alpha$, $T_0=\pi$

Основные тождества

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\qquad$ $tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$

$tg\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{ctg\alpha}$ $\qquad$ $ctg\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{1}{tg\alpha}$

$1+tg^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha$ $\qquad$ $\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}$

$1+ctg^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=\operatorname{cosec}^2\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{cosec}\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}$

Сумма углов

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

$tg(\alpha\pm\beta)=\dfrac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha\, tg\beta}$

$ctg(\alpha\pm\beta)=\dfrac{ctg\alpha\, ctg\beta\mp1}{ctg\alpha\pm ctg\beta}$

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

X	$\pi+\alpha$	$\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3}{2}\pi+\alpha$	$\frac{3}{2}\pi-\alpha$
sinx	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
cosx	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
tgx	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$
ctgx	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$
f (x)	сохраняется				меняется			

$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ $\qquad$ $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$\sin\alpha=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$ $\qquad$ $\cos\alpha=\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$

$\sin\alpha=\dfrac{tg\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}$ $\qquad$ $\cos\alpha=\dfrac{ctg\alpha}{\pm\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$

Сумма функций

$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha\mp\beta}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}$

$tg\alpha\pm tg\beta=\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

$ctg\alpha\pm ctg\beta=\dfrac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$

$tg\alpha+ctg\beta=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$

$ctg\alpha-tg\beta=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$

$\cos\alpha\pm\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}\pm\alpha)=\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}\mp\alpha)$

$A\sin\alpha+B\cos\alpha=R\sin(\alpha+\varphi)$,

где $R=\sqrt{A^2+B^2}$, $\cos\varphi=\dfrac{A}{R}$, $\sin\varphi=\dfrac{B}{R}$

$f(\alpha)\longrightarrow$ через $tg\frac{\alpha}{2}$ или $tg\alpha$

$\sin\alpha=\dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$ $\qquad$ $\cos\alpha=\dfrac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$ $\qquad$ $\sin2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$ $\qquad$ $\cos2\alpha=\dfrac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$tg\alpha=\dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$ $\qquad$ $ctg\alpha=\dfrac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}$ $\qquad$ $tg2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$ $\qquad$ $ctg2\alpha=\dfrac{1-tg^2\alpha}{2tg\alpha}$

$2\alpha\longrightarrow\alpha$

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$tg2\alpha=\dfrac{2}{ctg\alpha-tg\alpha}$

$ctg2\alpha=\dfrac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}=\dfrac{ctg\alpha-tg\alpha}{2}$

$\frac{\alpha}{2}\longrightarrow\alpha$

$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ $\qquad$ $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

$tg\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

$ctg\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$

$3\alpha\longrightarrow\alpha$

$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

$tg3\alpha=\dfrac{3tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}$

$ctg3\alpha=\dfrac{ctg^3\alpha-3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha-1}$

Произведение функций

$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$

$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

$tg\alpha\, tg\beta=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{ctg\alpha+ctg\beta}$

$ctg\alpha\, ctg\beta=\dfrac{ctg\alpha+ctg\beta}{tg\alpha+tg\beta}$

$\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$

$\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$

$1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

$1+\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$

$1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$

$1+\sin\alpha=2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)$

Степень

$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha)$ $\qquad$ $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$

$\sin^3\alpha=\frac{1}{4}(3\sin\alpha-\sin3\alpha)$ $\qquad$ $\cos^3\alpha=\frac{1}{4}(3\cos\alpha+\cos3\alpha)$

$\sin^4\alpha=\frac{1}{8}(\cos4\alpha-4\cos2\alpha+3)$ $\qquad$ $\cos^4\alpha=\frac{1}{8}(\cos4\alpha+4\cos2\alpha+3)$

Общий вид уравнений

$\sin x=a$ $\quad x=(-1)^n\arcsin a+\pi n$, $n\in Z$

$\cos x=a$ $\quad x=\pm\arccos a+2\pi n$, $n\in Z$

$tg x=a$ $\quad x=arctg\, a+\pi n$, $n\in Z$

$ctg x=a$ $\quad x=arcctg\, a+\pi n$, $n\in Z$

Особый случай

$\sin x=1$ $\quad x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$

$\sin x=-1$ $\quad x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$

$\sin x=0$ $\quad x=\pi n$, $n\in Z$

$\cos x=1$ $\quad x=2\pi n$, $n\in Z$

$\cos x=-1$ $\quad x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$

$\cos x=0$ $\quad x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$

$tg x=0$ $\quad x=\pi n$, $n\in Z$

$ctg x=0$ $\quad x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$

Осевые углы

a	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{\sqrt3}{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt3}$	$\sqrt3$
$\arcsin a$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$		
$\arccos a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0		
$arctg\, a$	0				$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$arcctg\, a$	$\frac{\pi}{2}$				$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$

ПОМНИ:

знаменатель $\neq 0$

$\dfrac{1}{\sqrt2}=\dfrac{\sqrt2}{2}$

$\dfrac{1}{\sqrt3}=\dfrac{\sqrt3}{3}$

$\sin x\approx tg x\approx x$, если $x_{рад}\longrightarrow0$

Свойства

$\arcsin(-a)=-\arcsin a$ $\qquad$ $\arccos(-a)=\pi-\arccos a$

$arctg(-a)=-arctg\, a$ $\qquad$ $arcctg(-a)=\pi-arcctg\, a$

$\sin x=\frac{1}{2}$, $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$

$\cos x=\frac{\sqrt2}{2}$, $x=\pm\arccos\frac{\sqrt2}{2}+2\pi n=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$

$tg x=\sqrt3$, $x=arctg\sqrt3+\pi n=\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$

$\sin x=-\frac{\sqrt3}{2}$, $x=(-1)^n\arcsin(-\frac{\sqrt3}{2})+\pi n=(-1)^n(-\arcsin\frac{\sqrt3}{2})+\pi n=(-1)^n(-\frac{\pi}{3})+\pi n=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$

$\cos x=-\frac{\sqrt2}{2}$, $x=\pm\arccos(-\frac{\sqrt2}{2})+2\pi n=\pm(\pi-\arccos\frac{\sqrt2}{2})+2\pi n=\pm(\pi-\frac{\pi}{4})+2\pi n=\pm\frac{3}{4}\pi+2\pi n$, $n\in Z$

$\boxed{(-1)^n(-1)=(-1)^{n+1}}$

Производные

$\sin' x=\cos x$ $\qquad$ $\cos' x=-\sin x$

$tg' x=\dfrac{1}{\cos^2x}$ $\qquad$ $ctg' x=-\dfrac{1}{\sin^2x}$

Первообразные

$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x+c$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x+c$
$f(x)=\dfrac{1}{\cos^2x}$	$F(x)=tg x+c$
$f(x)=\dfrac{1}{\sin^2x}$	$F(x)=-ctg x+c$
$f(x)=tg x$	$F(x)=-\ln\lvert\cos x\rvert+c$
$f(x)=ctg x$	$F(x)=\ln\lvert\sin x\rvert+c$

Задачи Штурма-Лиувилля в простейшем случае

1. I рода слева – I рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевыми условиями I-го рода:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(l) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x) + \lambda \mathbf{X}(x) = 0$ имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0;$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0;$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0;$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, l = \pi n$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = -c_1$, $\Rightarrow$ $X(x) = 2c_1 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda}\, x$. Поэтому из второго краевого условия $X(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 x$. Поэтому из второго краевого условия $X(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

задачи (1.1).

3. I рода слева – II рода справа.

Решить задачу Штурма-Лиувилля с краевым условием I-го рода на левом конце отрезка $[0, l]$ и II-го рода – на правом:

$$\begin{cases} \mathbf{X}''(x) + \lambda\mathbf{X}(x) = 0, \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}'(l) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Общее решение уравнения $\mathbf{X}''(x) + \lambda\mathbf{X}(x) = 0$ имеет вид

$$X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) \qquad \text{при } \lambda > 0;$$
$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} \qquad \text{при } \lambda < 0;$$
$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0;$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$ $\Rightarrow$ $X'(x) = c_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\, l = \pi k - \frac{\pi}{2}$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

  $$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

  $$X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

- При $\lambda < 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_1 = -c_2$, $\Rightarrow$ $X(x) = 2c_1 \operatorname{sh}\sqrt{-\lambda}\, x$ $\Rightarrow$ $X'(x) = 2c_1\sqrt{-\lambda}\operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}\, x)$. Поэтому из второго краевого условия $X'(l) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет отрицательных собственных чисел.
- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $X(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $X(x) = c_1 x$. Второе краевое условие $X'(l) = 0$ означает тогда, что $c_1 = 0$, поэтому задача Штурма–Лиувилля (3.1) не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right), \quad n \in \mathbb{N} \tag{3.2}$$

задачи (3.1).