Занятие 20. ЛНДУ с правой частью в виде квазиполинома.

Для линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами и с правой частью, состоящей из сумм и произведений функкций $b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$,$e^{\alpha x}$,$\cos(\beta x)$,$\sin(\beta x)$, частное решение можно искать методом неопределенных коэффициентов.

Для уравнений с правой частью $P_m(x)e^{\gamma x}$, где $P_m(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$,частное решение имеет вид

$$y_1 = x^sQ_m(x)e^{\gamma x}, \tag{1}$$

где $Q_m(x)$ – многочлен той же степени m.
Число $s = 0$, если γ – не корень характеристического уравнения, а если γ – корень, то s равно кратности этого корня.

Чтобы найти коэффициенты многочлена Q_m, надо решение (1) подставить в дифференциальное уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях уравнения.

Для уравнения с правой частью

$$e^{\alpha x}(P(x)\cos(\beta x) + Q(x)\sin(\beta x)) \tag{2}$$

можно искать частное решение в виде

$$y_1 = x^se^{\alpha x}(R_m(x)\cos(\beta x) + T_m(x)\sin(\beta x)) \tag{3}$$

где $s = 0$, если $\alpha + \beta i$ не корень характеристического уравнения, и s равно кратности корня $\alpha+\beta i$ в противном случае, а R_m и T_m – многочлены степени m, равной наибольшей из степеней многочленов P и Q. Чтобы найти коэффициенты R_m и T_m надо подставить решение(2) в уравнение и приравнять коэффициенты при подобных членах.

Если правая часть уравнения равна сумме нескольких функций вида $P(x)e^{\gamma x}$ и вида (2), то частное решение с правой частью $f_1 + \cdots + f_p$ равно сумме частных решений уравнений с той же левой частью и правыми частями $f_1, \cdots, f_p$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения во всех случаях равно сумме частного решения этого уравнения и общего однородного уравнения с той же левой частью.

Рассмотрим пример:

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x} + e^{3x}\cos 2x \tag{4}$$

Характеристическое уравнение: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$, корни уравнения : $\lambda_{1,2} = 3$ кратности 2 и $\lambda_3 = 0$ кратности 1.
Запишем общее решение однородного уравнения:

$$y_o = (C_1 + C_2x)e^{3x} + C_3$$

Правая часть (4) состоит из двух слагаемых вида (2):$f_1 = xe^{3x}$ и $f_2 = e^{3x}\cos 2x$.
Для первого $\gamma = \alpha+\beta i = 3$, а для второго $\alpha+\beta i = 3+2i$. Поскольку эти числа различны, то надо искать отдельно частные решения уравнений

$$y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x} \tag{5}$$

$$y''' - 6y'' + 9y' = e^{3x}\cos 2x \tag{6}$$

Число $\gamma = 3$ является корнем кратности $s = 2$, поэтому частное решение уравнения (2) примет согласно (1) вид

$$y_1 = x^2(Ax + B)e^{3x}$$

Подставив $y = y_1$ в (4) и приравняв коэффициенты при соответствующих степенях (метод неопределенных коэффициентов) x, получим $A = \frac{1}{18}$, $B = -\frac{1}{18}$.
Далее, число $\alpha + \beta i = 3 + 2i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение уравнения (6) согласно (3) примет вид

$$y_2 = e^{3x}(C\cos(2x) + D\sin 2x)$$

Подставив y_2 в (6), воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов, найдем $C = -\frac{3}{52}$,$D = -\frac{1}{26}$

2994. Указать вид частных решений для данных неоднородных уравнений.
а) $y'' - 4y = x^2e^{2x}$;
Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 4\lambda = 0$
Корни: $\lambda_1 = 2$ кратности 1,$\lambda_2 = -2$ кратности 1.
Справа стоит единственная функция $f_1 = x^2e^{2x}$, частное решение ищем в виде (1): $\gamma = 2$, $m = 2$.
$\gamma = 2$ является корнем характеристического уравнения, значит $s = 1$.
Частное решение согласно (1) примет вид: $y_{\text{ЧН}} = xe^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$.

в) $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x}$; Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$
Корни: $\lambda_1, 2 = 2$ кратности 2.
Правая часть состоит из суммы двух функций f_1 и f_2, поэтому частное решение примет вид $y_{\text{ч.н}} = y_1 + y_2$.
$f_1 = \sin 2x$, частное решение ищем в виде (2): $\alpha + \beta i = 2i$,$m = 0$,$s = 0$, так как $2i$ не является корнем характеристического уравнения. Согласно (2): $y_{\text{Ч1}} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$.
$f_2 = e^{2x}$, частное решение ищем в виде (1):$\gamma = 2$, $m = 0$, $s = 2$, так как $\gamma = 2$– корень характерестического уравнения, значит s равен крастности корня.
Согласно (1): $y_{\text{Ч2}} = Ax^2e^{2x}$.
Частное решение: $y_{\text{ч.н}} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + Ax^2e^{2x}$

д) $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1)e^x + xe^{2x}$. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$
Корни: $\lambda_1 = 2$ кратности 1,$\lambda_1 = 3$ кратности 1 .
Правая часть состоит из суммы двух функций f_1 и f_2, поэтому частное решение примет вид $y_{\text{ч.н}} = y_1 + y_2$.
$f_1 = (x^2 + 1)e^x$, $m = 2$,$\gamma = 1$– не является корнем характеристического уравнения, значит $s = 0$.
Согласно (1): $y_{\text{Ч1}} = e^x(Ax^2 + Bx + C)$.
$f_2 = xe^{2x}$, $m = 1$,$\gamma = 2$ – является корнем характеристического уравнения, значит $s = 1$.
Согласно (1): $y_{\text{Ч2}} = xe^{2x}(Dx + F)$.
Частное решение: $y_{\text{ч.н}} = e^x(Ax^2 + Bx + C) + xe^{2x}(Dx + F)$.

Найти общие решения уравнений:

2999. $y'' - y = e^x$.
Характеристическое уравнение и корни: $\lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda_1 = 1$,$\lambda_2 = -1$, оба корня кратности 1.
Решение однородного уравнения $y_o = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$
$f = e^x$, значит $m = 0$,$\gamma = 1$ – корень характеристического уравнения, значит $s = 1$.
$\Rightarrow y_{\text{чн}} = Ax \cdot e^x$.
Далее определяем неизвестный коэффициент:
$y'_{\text{чн}} = Ae^x + Axe^x = A(1 + x)e^x$.
$y''_{\text{чн}} = Ae^x + A(1 + x)e^x = A(2 + x)e^x$.
Подставляем частное решение и его производные в исходное уравнение и находим A:
$A(2 + x)e^x - Ax \cdot e^x = e^x \Rightarrow 2A + Ax - Ax = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$.
$y_{\text{OH}} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x$.

3000. $y'' + y = \cos x$.
Характеристическое уравнение и корни: $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda = \pm i$.
Решение однородного уравнения $y_o = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
$f = \cos x$, значит $m = 0$,$\alpha + \beta i = i$ – корень характеристического уравнения, значит $s = 1$.
$\Rightarrow y_{\text{чн}} = x(A \cos x + B \sin x)$.
Далее определяем неизвестные коэффициенты:
$y'_{\text{чн}} = (A \cos x + B \sin x) + x(-A \sin x + B \cos x) = (B - Ax) \sin x + (A + Bx) \cos x$.
$y''_{\text{чн}} = -A \sin x + (B - Ax) \cos x + B \cos x - (A + Bx) \sin x = -(2A + Bx) \sin x + (2B - Ax) \cos x$.
Подставляем частное решение и его производные в исходное уравнение, определяем A, B:
$-(2A + Bx) \sin x + (2B - Ax) \cos x + x(A \cos x + B \sin x) = \cos x$.
$-2A \sin x + 2B \cos x = \cos x$. $\quad A = 0,\ B = \frac{1}{2}$.
Решение общего неоднородного– сумма однородного и частного решений:
$y_{\text{OH}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x$.

3004. $y'' + y' = \sin^2 x$.
Известно: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, тогда $y'' + y' = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.
Характеристическое уравнение и его корни:$\lambda^2 + \lambda = 0$, $\lambda_1 = -1$ кратности 1, $\lambda_2 = 0$ кратности 1.
Решение однородного уравнения $y_o = {}_1 e^{-x} + {}_2$
$f_1 = \frac{1}{2}$, значит $m = 0$,$\gamma = 0$ – корень характеристического уравнения, значит $s = 1$.
$\Rightarrow y_{\text{ч1}} = Ax$
$f_2 = -\frac{\cos 2x}{2}$,значит $m = 0$,$\alpha + \beta i = 2i$ – не является корнем, значит $s = 0$
$\Rightarrow y_{\text{ч2}} = B \cos 2x + C \sin 2x$
Частное решение:
$y_{\text{чн}} = Ax + B \cos 2x + C \sin 2x$.
Найдем неизвестные коэффициенты:
$y'_{\text{чн}} = A + -2B \sin 2x + 2C \cos 2x$;
$y''_{\text{чн}} = -4B \cos 2x - 4C \sin 2x$.
Подставляем частное решение и его производные в исходное уравнение:

$$-4B \cos 2x - 4C \sin 2x + A - 2B \sin 2x + 2C \cos 2x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$(-4B + 2C) \cos 2x + (-2B - 4C) \sin 2x + A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$\begin{cases} -4B+2C &= -\dfrac{1}{2} \\ -2B-4C &= 0 \\ A &= \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{10},\ C=-\frac{1}{20}.$$

$y_{\text{он}} = C_1e^{-x} + C_2 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{10}\cos 2x - \dfrac{1}{20}\sin 2x.$

3016. $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x + e^x$.

Характеристическое уравнение и его корни: $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$, $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$ кратности 2. Решение однородного уравнения $y_{\text{о}} = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$.

$f_1 = \sin 3x$, $m = 0$,$\alpha + \beta i = 3i$ – не является корнем, значит $s = 0$.
$\Rightarrow y_{\text{ч1}} = A\cos 3x + B\sin 3x$

$f_2 = e^x$,$m = 0$,$\gamma = 1$ – не является корнем, значит $s = 0$.
$\Rightarrow y_{\text{ч2}} = Ce^x$
Частное решение: $y_{\text{чн}} = A\cos 3x + B\sin 3x + Ce^x$.
$y'_{\text{чн}} = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x + Ce^x$.
$y''_{\text{чн}} = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x + Ce^x$.
Подставляем частное решение и его производные в исходное уравнение:
$(-9A - 6B + 10A)\cos 3x + (-9B + 6A + 10B)\sin 3x + (C - 2C + 10C)e^x = \sin 3x + e^x$
$(A - 6B)\cos 3x + (6A + B)\sin 3x + (C - 2C + 10C)e^x = \sin 3x + e^x$
$A = \dfrac{6}{37}$, $B = \dfrac{1}{37}$, $C = \dfrac{1}{9}$.
Общее решение неоднородного уравнения:
$y_{\text{он}} = e^x\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right) + \dfrac{1}{37}(6\cos 3x + \sin 3x) + \dfrac{1}{9}e^x.$

Найти общие решения уравнений:

3062. $y''' - y = x^3 - 1$.

Характеристическое уравнение и его корни: $\lambda^3 - 1 = 0$, $\lambda_1 = -1$ кратности1, $\lambda_{2,3} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ кратности 2.

Решение однородного уравнения $y_{\text{о}} = e^{-x/2}\left(C_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

$f = x^3 - 1$,$m = 3$,$\gamma = 0$–не является корнем,значит $s = 0 \Rightarrow$
$y_{\text{чн}} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$.
$y'_{\text{чн}} = 3Ax^2 + 2Bx + C$.
$y''_{\text{чн}} = 6Ax + 2B$.
$y'''_{\text{чн}} = 6A$.
Подставляем частное решение и его производные в исходное уравнение:
$-Ax^3 - Bx^2 - Cx - D + 6A = x^3 - 1$.
$A = -1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = -5$.
Общее решение неоднородного уравнения:
$y_{\text{он}} = C_1e^x + e^{-x/2}\left(C_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) - x^3 - 5.$

3064. $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x$.

Характеристическое уравнение и его корни: $\lambda^3+\lambda^2=0$, $\lambda_1=-1$ – кратность 1, $\lambda_{2,3}=0$ – кратность 2.
Решение однородного уравнения $y_o=C_1e^{-x}+C_2+C_3x$.

$f_1=x^2+1$,$m=2$,$\gamma=0$–является корнем, значит $s=2$
$\Rightarrow y_{\text{ч}1}=x^2(Ax^2+Bx+C)$.
$f_2=3xe^x$,$m=1$,$\gamma=1$– не является корнем, значит $s=0$
$\Rightarrow y_{\text{ч}2}=(Dx+E)e^x$. Частное решение:
$y_{\text{чн}}=x^2(Ax^2+Bx+C)+(Dx+E)e^x$.
$y'_{\text{чн}}=4Ax^3+3Bx^2+2Cx+De^x+(Dx+E)e^x$.
$y''_{\text{чн}}=12Ax^2+6Bx+2C+2De^x+(Dx+E)e^x$.
$y'''_{\text{чн}}=24Ax+6B+3De^x+(Dx+E)e^x$.
Подставляем частное решение и его производные в исходное уравнение:
$12Ax^2+(24A+6B)x+6B+2C+(5D+E)e^x+Dxe^x=x^2+1+3xe^x$ $D=\dfrac{3}{2}$, $E=-\dfrac{15}{4}$, $A=\dfrac{1}{12}$, $B=-\dfrac{1}{3}$, $C=\dfrac{3}{2}$. Общее решение неоднородного уравнения:
$y_{\text{он}}=C_1e^{-x}+C_2+C_3x+\dfrac{1}{12}x^4-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{3}{2}x^2+\left(\dfrac{3}{2}x-\dfrac{15}{4}\right)e^x$. ▷

3063. $y^{IV}+y'''=\cos 4x$.
Характеристическое уравнение и его корни: $\lambda^4+\lambda^3=0$, $\lambda_1=-1$ кратности 1, $\lambda_{2,3,4}=0$ кратности 3.
Решение однородного уравнения:$y_o=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^{-x}$.
$f=\cos 4x$,$m=0$,$\alpha+\beta i=4i$– не является корнем, значит $s=0$.
$\Rightarrow$ частное решение:
$y_{\text{чн}}=A\cos 4x+B\sin 4x$.
$y'_{\text{чн}}=-4A\sin 4x+4B\cos 4x$.
$y''_{\text{чн}}=-16A\cos 4x-16B\sin 4x$.
$y'''_{\text{чн}}=64A\sin 4x-64B\cos 4x$.
$y^{IV}_{\text{чн}}=256A\cos 4x+256B\sin 4x$.
Подставляем частное решение и его производные в исходное уравнение и находим неизвестные переменные:
$(256A-64B)\cos 4x+(64A+256B)\sin 4x=\cos 4x$.

$$\begin{cases}256A-64B&=&1\\64A+256B&=&0\end{cases}\quad\Rightarrow A=\frac{1}{272},\ B=-\frac{1}{1088}.$$

Общее решение неоднородного уравнения:
$y_{\text{он}}=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^{-x}+\dfrac{1}{1088}(4\cos 4x-\sin 4x)$.

9.369. $y^{(5)}-y^{(4)}=xe^x-1$.

Характеристическое уравнение и его корни: $\lambda^5-\lambda^4=0$, $\lambda_{1,2,3,4}=0$ кратности 4, $\lambda_5=1$ кратности 1. Решение однородного уравнения:$y_o=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+C_5e^x$.
$f_1=xe^x$, $m=1$,$\gamma=1$–корень уравнения, значит $s=1$.
$\Rightarrow y_{\text{ч}1}=x(Ax+B)e^x$
$f_2=-1$,$m=0$,$\gamma=0$ – корень уравнения, значит $s=4$.
$\Rightarrow y_{\text{ч}2}=Dx^4$
Значит частное неоднородное решение: $y_{\text{чн}}=y_{\text{ч}1}+y_{\text{ч}2}$.

$$y'_{\text{ч}1} = (Ax+B)e^x + Axe^x + x(Ax+B)e^x = (Ax^2+(2A+B)x+B)e^x.$$

$$y''_{\text{ч}1} = (2Ax+2A+B)e^x + (Ax^2+(2A+B)x+B)e^x = (Ax^2+(4A+B)x+2A+2B)e^x.$$

$$y'''_{\text{ч}1} = (2Ax+4A+B)e^x + (Ax^2+(4A+B)x+2A+2B)e^x = (Ax^2+(6A+B)x+6A+3B)e^x.$$

$$y^{(4)}_{\text{ч}1} = (2Ax+6A+B)e^x + (Ax^2+(6A+B)x+6A+3B)e^x = (Ax^2+(8A+B)x+12A+4B)e^x.$$

$$y^{(5)}_{\text{ч}1} = (2Ax+8A+B)e^x + (Ax^2+(8A+B)x+12A+4B)e^x = (Ax^2+(10A+B)x+20A+5B)e^x.$$

Подставляем в исходное уравнение с правой частью xe^x:

$$(Ax^2+(10A+B)x+20A+5B)e^x - (Ax^2+(8A+B)x+12A+4B)e^x = xe^x$$

$$2Ax+8A+B = x \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2},\ B=-4,\ y_{\text{ч}1} = x\left(\frac{1}{2}x-4\right)e^x.$$

$y'_{\text{ч}2} = 4Dx^3$, $y''_{\text{ч}2} = 12Dx^2$, $y'''_{\text{ч}2} = 24Dx$,
$y^{(4)}_{\text{ч}2} = 24D$, $y^{(5)}_{\text{ч}2} = 0$.
Подставляя в исходное уравнение с правой частью -1, получаем $-24D=-1$, т.е. $D=1/24$ и $y_{\text{ч}2} = \dfrac{x^4}{24}$.

Общее решение неоднородного уравнения:
$y_{\text{он}} = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 - 4x\right)e^x + \frac{x^4}{24}$.

3067. Найти частное решение уравнения $y''' + 2y'' + 2y' + y = x$, удовлетворяющее начальному условию $y''(0) = y'(0) = y(0) = 0$.

Решение однородного уравнения:$y_{\text{о}} = C_1e^{-x} + e^{-x/2}\left(C_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)x$.

Характеристическое уравнение и его корни:$\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda+1=0$, $\lambda_1=-1$ кратности 1, $\lambda_{2,3} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ кратности 2.

$f=x$,$m=1$,$\gamma=0$–не является корнем уравнения, значит $s=0$,$\Rightarrow$
$y_{\text{чн}} = Ax+B$.
$y'_{\text{чн}} = A$,
$y''_{\text{чн}} = y'''_{\text{чн}} = 0$.
Подставляя в исходное уравненение:
$2A + Ax + B = x \Rightarrow A=1,\ B=-2$.
Общее неоднородное:
$y_{\text{он}} = C_1e^{-x} + e^{-x/2}\left(C_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + x - 2$.
Решим задачу Коши:
$y(0) = C_1 + C_2 - 2 = 0$;
$y' = -C_1e^{-x} - \dfrac{1}{2}e^{-x/2}\left(C_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + e^{-x/2}\left(-C_2\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_3\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + 1$

$y' = -C_1e^{-x} + e^{-x/2}\left((-\dfrac{1}{2}C_3 - C_2\dfrac{\sqrt{3}}{2})\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + (-\dfrac{1}{2}C_2 + C_3\dfrac{\sqrt{3}}{2})\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right) + 1$

$$y'(0) = -C_1 - \frac{1}{2}C_2 + C_3\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 0$$

$$y'' = C_1 e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-x/2}\left((-\frac{1}{2}C_3 - C_2\frac{\sqrt{3}}{2})\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + (-\frac{1}{2}C_2 + C_3\frac{\sqrt{3}}{2})\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) +$$

$$+e^{-x/2}\left((-\frac{1}{2}C_3 - C_2\frac{\sqrt{3}}{2})\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - (-\frac{1}{2}C_2 + C_3\frac{\sqrt{3}}{2})\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$y''(0) = C_1 - \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}C_2 - C_3\frac{\sqrt{3}}{2})\frac{\sqrt{3}}{2} + (-\frac{1}{2}C_3 - C_2\frac{\sqrt{3}}{2})\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$C_1 = 1,\ C_2 = 1,\ C_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$y = e^{-x} + e^{-x/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + x - 2.$$

Текущее ДЗ: : 2994 (б, г, е), 3003, 3002, 2995, 3018, 3012, 3060, 3061, 3065.