USTHB

Faculté des mathématiques ~ LIC1 MI ~ Analyse I

Série d'exercices No 1

1) Montrer que $a \neq 0$ et $b \neq 0$ impliquent $ab \neq 0$ et $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$
2) Montrer que si $a > b \geq 0$, alors $a^2 > b^2$ et $a^3 > b^3$. L'hypothèse $b \geq 0$ est-elle nécessaire?
3) Soient $s \in \mathbf{N}^*$ et $E = \left\{ \frac{p}{q} / p + q = s + 1,\ p, q \in \mathbf{N}^* \right\}$. Montrer que E est borné et déterminer $\sup E$ et $\inf E$.
4) Montrer que si $\phi \neq F \subset E \subset \mathbf{R}$, alors $\inf E \leq \inf F \leq \sup F \leq \sup E$.
5) Soit E et F deux ensembles non vides tels que $x \in E$ et $y \in F$ impliquent $x \leq y$. Montrer que E est borné supérieurement, que F est borné inférieurement et que $\sup E \leq \inf F$.
6) Soient E et F deux ensembles de $\mathbf{R}$ non vides bornés inférieurement. Montrer que leur réunion l'est aussi et que $\inf (E \cup F) = \min \{\inf E, \inf F\}$.
7) Montrer que, quels que soient $x, y \in \mathbf{R}$, $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
8) Soit $a < b$. Montrer que l'inégalité $|x - a| < |x - b|$ est équivalente à l'inégalité $x < \frac{a+b}{2}$
9) Vérifier les relations suivantes:

$$\max \{a, b\} = \frac{(a + b) + |a - b|}{2}, \quad \min \{a, b\} = \frac{(a + b) - |a - b|}{2}.$$

10) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tous $a, b \in \mathbf{R}$,

$$a^n - b^n = (a - b) \left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + b^{n-1}\right).$$

11) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tous $a, b \in \mathbf{R}$, $ab \neq 0$,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

(indication: montrer que $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k$.)
12) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tous $a_k, b_k \in \mathbf{R}$, $1 \leq k \leq n$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 . \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

13) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n (n + 1)}{2}.$$

14) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

15) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$

16) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

17)
a) Démopntrer l'inégalité de Bernoulli:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \ldots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

avec $x_1, x_2, \ldots x_n$ des nombres de même signe, strictement supérieurs à -1.
b) En déduire que pour tout $x > -1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

18) Montrer que l'ensemble des nombres rationnels de la forme $\frac{m}{n}$, avec m et n des nombres entiers naturels tels que $0 < m < n$, n'admet ni maximum ni minimum. Trouver ses bornes inférieure et supérieure.

Série N° 01

Exo 17

a) Montrons par récurrence que

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geqslant 1+x_1+x_2+\dots+x_n$$

où $x_1, \dots, x_n$ sont des nombres réels de même signe strictement supérieurs à (-1).

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$H(n) \overset{def}{\iff} (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geqslant 1+x_1+x_2+\dots+x_n.$$

Pour $n=1$, on a

$1+x_1 \geqslant 1+x_1$ qui est vraie car $1+x_1 = 1+x_1$.

Supposons que $H(n)$ est vraie et montrons que $H(n+1)$ est vraie.

On a : $H(n)$ est vraie donc

$(*) \dots (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geqslant 1+x_1+x_2+\dots+x_n$

Par hypothèse de l'exercice on a

$x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$ sont supérieurs à -1.

Donc $1+x_{n+1} \geqslant 0$.

Par $(*)$ on obtient donc

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n)(1+x_{n+1})$$
$$\geqslant (1+x_1+x_2+\dots+x_n)(1+x_{n+1}) \dots (\Delta)$$

Comme $x_1, \dots, x_n$ sont de même signe,

donc on a deux cas :

Ou bien $x_1, \dots, x_n$ sont positifs

" " " " négatifs

si $x_1, \dots, x_n$ sont positifs, posons

$X_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Donc $X_n \geq 0 > -1$

Par $H(n)$ on a $(1+\cancel{X}_n)(1+x_{n+1}) \geq 1 + X_n + x_{n+1}$

$= 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}$

de (Δ) on obtient

$(1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_n)(1+x_{n+1}) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}$

c-à-d $H(n+1)$ est vraie.

si $x_1, \dots, x_n$ sont négatifs,

Posons $X_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

par $H(n)$

$1 \geq (1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_n) \geq 1 + X_n$

Donc X_n est négatif.

si $X_n \geq -1$ par $H(n)$ on a

$(1+\cancel{X}_n)(1+x_{n+1}) \geq 1 + X_n + x_{n+1}$

(Δ) $\Leftrightarrow$ $(1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_n)(1+x_{n+1}) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}$

donc $H(n+1)$ est vraie

si $X_n < -1$ on a

$1 + X_n + x_{n+1} < 0$ car $x_{n+1} \leq 0$

et $(1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_n)(1+x_{n+1}) \geq 0$

donc $(1+x_1)(1+x_2)(1+x_n)(1+x_{n+1}) \geq 0 > 1 + X_n + x_{n+1}$

$\qquad\qquad \| $

$1 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}$

donc $H(n+1)$ vraie.

On a donc montré que

si $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ sont des nombres réels de même signe et supérieur à -1 alors

$$H(n) \Rightarrow H(n+1).$$

Comme $H(1)$ est vrai donc pour $x_1, \dots, x_n$ de même signe et supérieurs à -1

On a
$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\dots+x_n.$$

b) En particulier lorsque $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x \geq -1$

On a
$$(1+x)^n = \underbrace{(1+x)(1+x)\dots(1+x)}_{n \text{ fois}} \geq 1+\underbrace{x+x+\dots+x}_{n \text{ fois}} = 1+nx$$

Partie entière

Rappelons que la partie entière d'un nombre réel x est notée $E(x)$ et définie par

$E(x) \in \mathbb{Z}$; $x-1 < E(x) \leq x$. ...(Δ)

Exo :

Montrer que :

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $E(x+1) = E(x)+1$,

2) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $E(x)+E(y) \leq E(x+y)$,

3) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $E(x)+E(y)+E(x+y) \leq E(2x)+E(2y)$

Solution :

Soit $x \in \mathbb{R}$, par définition (Δ) on a

$x < E(x)+1$ et $E(x) \leq x$

donc $E(x) \leq x < E(x)+1$

implique $\overbrace{E(x)+1}^{\alpha} \leq x+1 < \underbrace{\overbrace{(E(x)+1)}^{\alpha}}_{\in \mathbb{Z}} + 1$

Comme $E(x)+1 \in \mathbb{Z}$, par définition de la partie entière on obtient

$E(x+1) = E(x)+1$

2) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

par définition de la partie entière

on $E(x) \leq x$ et $E(y) \leq y$

donc $E(x) + E(y) \leq x+y < E(x+y)+1$

donc $E(x) + E(y) - E(x+y) \not\leq 1$

comme $E(x) + E(y) - E(x+y) \in \mathbb{Z}$

donc $E(x) + E(y) - E(x+y) \leq 0$

c-à-d $E(x) + E(y) \leq E(x+y)$.

3) $\forall z \in \mathbb{R}$,

si $2(\cancel{z} - E(z)) \leq 1$

alors $E(2z) = 2E(z)$

si $2(z - E(z)) > 1$ alors

$E(2z) = 2E(z)+1$

On donc (4) cas

$2(x - E(x)) \leq 1$ et $2(y - E(y)) > 1$

$2(x - E(x)) \leq 1$; $2(y - E(y)) \leq 1$

$2(x - E(x)) > 1$ et $2(y - E(y)) > 1$

$2(x - E(x)) > 1$; $2(y - E(y)) \leq 1$