maΣprof∫.ru

Высшая математика – просто и доступно!

Интенсивный курс
«Горячие интегралы»

Данная методичка позволит вам в кратчайшие сроки научиться решать основные и наиболее распространённые типы неопределённых интегралов. Курс предназначен ***для студентов с нулевым*** *(в интегральном исчислении)* ***уровнем подготовки****.*

Автор: Александр Емелин

Оглавление

1. Понятие неопределённого интеграла

Добро пожаловать в удивительный мир интегрального исчисления!

Пожалуйста, откройте, а ещё лучше распечатайте *Приложение* ***Правила интегрирования и таблица неопределенных интегралов***. Это наш рабочий материал, к которому придётся постоянно обращаться.

И давайте сразу пройдёмся по нему взглядом…. По аналогии с производными *(см. соответствующее Приложение)*, после немногочисленных правил следует симпатичная таблица с записями вида:

$\int f(x)dx = F(x) + C$, где $C = const$ *(произвольное число)*

Разбираемся в **обозначениях и терминах:**

$\int$ – значок интеграла.

$f(x)$ – *подынтегральная функция* (пишется с буквой «ы»).

dx – значок *дифференциала*. НЕ ТЕРЯЙТЕ этот значок! Заметный недочёт будет.

$f(x)dx$ – *подынтегральное выражение* или «начинка» интеграла.

$\int f(x)dx$ – собственно, **неопределённый интеграл** – прошу любить и жаловать! ☺

– Да, вот так вот просто и без комплексов! Справа:

$F(x)$ – *первообразная функция*.

$F(x) + C$ – *множество* первообразных функций. Не нужно сильно загружаться с терминами, самое важное, что в любом неопределенном интеграле к ответу приплюсовывается константа C.

А теперь **ещё раз посмотрим** на запись
$\int f(x)dx = F(x) + C$

И посмотрим в ***Таблицу интегралов***.

Что тут происходит?

Интегралы $\int f(x)dx$ **превращаются** в некоторые функции $F(x) + C$.

Решить неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ *(не обязательно табличный)* – это значит ПРЕВРАТИТЬ его в определённое множество функций $F(x)+C$, пользуясь некоторыми правилами, приёмами и таблицей.

Сам процесс называется **интегрированием** функции $f(x)$.

Возьмём, например, табличную запись $\int \sin xdx = -\cos x + C$. Что произошло? Интеграл $\int \sin xdx$ превратился в $-\cos x + C$. Иными словами, в результате *интегрирования* функции $f(x) = \sin x$ у нас получилось множество *первообразных* $F(x) = -\cos x + C$

Как и в случае с производными, для того, чтобы научиться находить интегралы, не обязательно быть в курсе, что такое интеграл и первообразная функция с теоретической точки зрения. Достаточно просто осуществлять превращения по некоторым формальным правилам. Так, в разобранном примере совсем не обязательно понимать, почему интеграл $\int \sin xdx$ превращается именно в $-\cos x + C$. В рамках данного курса мы будем принимать эту и другие формулы как данность.

И сейчас самое время вспомнить производные. Зачем?

Нахождение производных и нахождение неопределенных интегралов (дифференцирование и интегрирование) – это два взаимно обратных действия,

как, например, сложение/вычитание или умножение/деление. И поэтому **для любой первообразной, которая найдена правильно, справедливо следующее:**

$$(F(x)+C)' = F'(x) + 0 = f(x)$$

Иными словами, **если продифференцировать правильный ответ, то обязательно должна получиться подынтегральная функция** (или её «сестра»).

Вернемся к тому же табличному интегралу $\int \sin xdx = -\cos x + C$ и убедимся в справедливости данной формулы:

$(-\cos x + C)' = -(\cos x)' + (C)' = -(-\sin x) + 0 = \sin x$ – исходная подынтегральная функция.

Вот, кстати, стало понятно, почему к функции $F(x)$ всегда приписывается константа C. При дифференцировании константа всегда превращается в ноль.

Повторюсь, что **решить неопределенный интеграл** – это значит найти множество ВСЕХ первообразных, а не какую-то одну функцию. Так, в нашем примере: $-\cos x + 5$, $-\cos x - \frac{4}{7}$, $-\cos x + \sin 2$, $-\cos x - e^3$ и т. д. – все эти функции являются решением интеграла $\int \sin xdx$. Их бесконечно много и поэтому решение записывают коротко: $-\cos x + C$, где $C = const$

Разминочное задание для самостоятельного решения:

Используя правила дифференцирования и таблицу производных, проверить, что:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$$

На правило дифференцирования сложной функции:

$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$ …возникли трудности с трёхэтажной дробью? Загляните в *Приложение* ***Полезные формулы***.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + A}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C \quad (A \neq 0)$$

Решение в конце методички. Сверяйтесь!

Таким образом, в нашей сегодняшней теме есть **отличный бонус**:

Многие неопределенные интегралы достаточно легко проверить!

В отличие от производных, где хорошую стопудовую проверку можно осуществить разве что с помощью математических программ.

Но, как вы догадываетесь, бонусов просто так не бывает ☺

Если в производных имеют место строго 5 правил дифференцирования, таблица производных и довольно чёткий алгоритм действий, то в интегралах всё иначе. Существуют десятки способов и приемов интегрирования. И, если способ интегрирования изначально подобран неверно (т.е. Вы не знаете, как решать), то интеграл можно «колоть» часами, как самый настоящий ребус, пытаясь приметить различные приёмы и ухищрения. Кроме того, есть *неберущиеся* интегралы, которые нужно «знать в лицо» *(см. Таблицу)*.

В этом и состоит основная трудность изучения неопределенных интегралов. Хотя на самом деле трудностей никаких нет, просто **чтобы научить решать интегралы… – их нужно порешать**!

Вперёд:

2. Свойство линейности. Простейшие интегралы

Очевидно, что для интегралов справедливо *свойство линейности*, которое состоит в следующих правилах:

$\int kudx = k\int udx$, где $k - const$ – постоянный множитель можно вынести за знак интеграла. И нужно. Чтобы он «не мешался под ногами».

$\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx$ – интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме двух интегралов от каждой функции в отдельности.

Данное правило справедливо для любого количества слагаемых, и мы сразу рассмотрим штук шесть, а то два – это как-то уныло:)

Пример 1

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

$$\int\left(x+\sqrt{x}-3x^5+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{\sin^2 x}+tg5\right)dx$$

Сначала полное **решение**, затем подробные комментарии:

$$\int\left(x+\sqrt{x}-3x^5+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{\sin^2 x}+tg5\right)dx\overset{(1)}{=}$$
$$=\int xdx+\int\sqrt{x}dx-\int 3x^5dx+\int\frac{2dx}{x^3}-\int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int tg5dx\overset{(2)}{=}$$
$$=\int xdx+\int x^{\frac{1}{2}}dx-3\int x^5dx+2\int x^{-3}dx-\int\frac{dx}{\sin^2 x}+tg5\int dx\overset{(3)}{=}$$
$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{\frac{3}{2}}\cdot x^{\frac{3}{2}}-3\cdot\frac{1}{6}x^6+2\cdot\frac{1}{(-2)}\cdot x^{-2}-(-ctgx)+tg5\cdot x+C\overset{(4)}{=}$$
$$=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^6}{2}-\frac{1}{x^2}+ctgx+tg5\cdot x+C,\ \text{где } C=const$$

(1) Применяем правило $\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx$. На забываем записать значок дифференциала dx **под каждым** интегралом. Почему под каждым? dx **– это полноценный множитель**, и если расписывать совсем детально, то первый шаг следует записать так:

$$\int\left(x+\sqrt{x}-3x^5+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{\sin^2 x}+tg5\right)dx=$$
$$=\int\left(xdx+\sqrt{x}dx-3x^5dx+\frac{2dx}{x^3}-\frac{dx}{\sin^2 x}+tg5dx\right)=\ldots$$

(2) Согласно правилу $\int kudx = k\int udx$, выносим все константы за знаки интегралов. Обратите внимание, что в последнем слагаемом $tg5$ – это константа, её также выносим.

Кроме того, на данном шаге готовим корни и степени для интегрирования. **Точно так же, как и при дифференцировании, корни надо представить в виде $x^{\frac{a}{b}}$. Корни и степени, которые располагаются в знаменателе – перенести вверх** *(см. Приложение **Полезные формулы**)*.

! Примечание: *в отличие от производных, такое преобразование требуется далеко не всегда. Например,* $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}$ *– это готовый табличный интеграл, и всякие китайские хитрости вроде* $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \int (x^2+A)^{-\frac{1}{2}}dx$ *совершенно не нужны. Аналогично:* $\int \frac{dx}{x}$ *– тоже табличный интеграл, нет никакого смысла представлять дробь в виде* $\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1}dx$. ***Внимательно изучите таблицу ещё раз!***

(3) Все интегралы у нас табличные. Осуществляем превращение с помощью таблицы, используя формулы: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctgx + C$. Особое внимание обращаю на формулу интегрирования степенной функции, она встречается **очень часто** и её лучше **НЕМЕДЛЕННО** запомнить.

Обратите внимание, что **константу C достаточно приплюсовать один раз в конце выражения, а не ставить их после каждого интеграла**. Ибо сумма шести констант – это всё равно константа.

(4) Записываем полученный результат в более компактном виде, все степени вида $x^{\frac{a}{b}}$ снова представляем в виде корней, степени с отрицательным показателем – сбрасываем обратно в знаменатель.

Проверим результат дифференцированием:

$$\left(\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^6}{2} - \frac{1}{x^2} + ctgx + tg5\cdot x + C\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2)' + \frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' - \frac{1}{2}(x^6)' - (x^{-2})' + (ctgx)' + tg5\cdot(x)' + (C)' =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2x + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cdot 6x^5 - (-2)\cdot(x^{-3}) - \frac{1}{\sin^2 x} + tg5\cdot 1 + 0 =$$

$= x + \sqrt{x} - 3x^5 + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{\sin^2 x} + tg5$ – получена исходная *подынтегральная функция*, значит, интеграл найден правильно. От чего плясали, к тому и вернулись.

И очень хорошо, когда приключение с интегралом заканчивается именно так.

Иногда встречается немного другой подход к проверке неопределенного интеграла, где от ответа берётся не производная, а *дифференциал*:

$$d\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^6}{2}-\frac{1}{x^2}+ctgx+tg5\cdot x+C\right)$$

Не стоит пугаться понятия *дифференциал*. Потому что о нём я вам тоже не расскажу =) Сейчас важно понять, что с ним делать.

Дифференциал раскрывается следующим образом: $d(u(x))=u'(x)dx$

То есть: значок d убираем, справа над скобкой ставим штрих и в конце выражения приписываем множитель dx:

$$d\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^6}{2}-\frac{1}{x^2}+ctgx+tg5\cdot x+C\right)=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^6}{2}-\frac{1}{x^2}+ctgx+tg5\cdot x+C\right)'dx=$$

$$=\left[\frac{1}{2}(x^2)'+\frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'-\frac{1}{2}(x^6)'-(x^{-2})'+(ctgx)'+tg5\cdot(x)'+(C)'\right]dx=$$

$$=\left[\frac{1}{2}\cdot 2x+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\cdot 6x^5-(-2)\cdot(x^{-3})-\frac{1}{\sin^2 x}+tg5\cdot 1+0\right]dx=$$

$=\left(x+\sqrt{x}-3x^5+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{\sin^2 x}+tg5\right)dx$ – получено исходное *подынтегральное выражение*, значит, интеграл найден правильно.

Второй способ проверки является более громоздким, и на самом деле я вообще мог о нём умолчать. Однако дело вовсе не в способе, а в том, что сейчас мы научились раскрывать дифференциал. **Ещё раз**:

1) значок d убираем;
2) справа над скобкой ставим штрих (обозначение производной);
3) в конце выражения приписываем множитель dx.

Например: $d(2x-1)=(2x-1)'dx=(2-0)dx=2dx$

Запомните это. Рассмотренный приём потребуется нам очень скоро.

Пример 2

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

$$\int\left(\frac{1}{x}+x^2\ln 5-\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}+\frac{7}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$

Разминаемся с таблицами! Решение и ответ в конце методички.

А теперь святая святых практики:

По возможности ВСЕГДА выполняйте проверку!

Даже если этого не требует условие – берём черновик и берём производную! Исключение можно сделать лишь тогда, когда дико не хватает времени (например, на зачете, экзамене) или когда ответ уж слишком «наворочен».

Пример 3

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

$$\int x^2(3+4x)^2dx$$

Решение: к сожалению, на поприще интегральной битвы нет хороших и удобных формул для интегрирования произведения и частного:

$$\cancel{\int uvdx = \int udx \cdot \int vdx}$$

$$\cancel{\int \frac{u}{v}dx = \frac{\int udx}{\int vdx}}$$

А поэтому, когда встречаются такие штуки, то **сначала** смысл посмотреть: а нельзя ли преобразовать подынтегральную функцию в сумму? Тот случай, когда можно!

$$\int x^2(3+4x)^2dx \overset{(1)}{=} \int x^2(9+24x+16x^2)dx \overset{(2)}{=} \int (9x^2+24x^3+16x^4)dx \overset{(3)}{=}$$
$$= 9\int x^2dx + 24\int x^3dx + 16\int x^4dx \overset{(4)}{=} 9\cdot\frac{1}{3}x^3 + 24\cdot\frac{1}{4}x^4 + 16\cdot\frac{1}{5}x^5 + C \overset{(5)}{=}$$
$$= 3x^3 + 6x^4 + \frac{16}{5}x^5 + C, \text{ где } C = const$$

(1) Используем старую-добрую формулу квадрата суммы $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, избавляясь тем самым от степени.

(2) Вносим x^2 в скобку, избавляясь от произведения.

(3) Используем *свойство линейности* (оба правила сразу).

(4) Превращаем интегралы по табличной формуле $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$.

(5) Упрощаем ответ. Здесь следует обратить внимание на обыкновенную неправильную дробь $\frac{16}{5}$ – она несократима и в ответ входит именно в таком виде. Не нужно делить на калькуляторе $\frac{16}{5} = 3{,}2$! И не нужно представлять её в виде $\frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$!

Проверка:

$$\left(3x^3+6x^4+\frac{16}{5}x^5+C\right)'=3(x^3)'+6(x^4)'+\frac{16}{5}(x^5)'+(C)'=$$

$$=3\cdot 3x^2+6\cdot 4x^3+\frac{16}{5}\cdot 5x^4+0=9x^2+24x^3+16x^4=$$

$$=x^2(9+24x+16x^2)=x^2(3^2+2\cdot 3\cdot 4x+(4x)^2)=x^2(3+4x)^2$$

Получена исходная *подынтегральная функция*, значит, интеграл найден верно.

Самостоятельно:

Пример 4

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

$$\int x(1-2x)^3dx$$

Решение и ответ в конце методички.

Ещё одна типовая хитрость:

Пример 5

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

$$\int\frac{2x^3-\sqrt{x^5}+1}{\sqrt{x}}dx$$

В данном примере подынтегральная функция представляет собой дробь. И когда мы видим в подынтегральном выражении дробь, то **первой мыслью** должен быть вопрос: *А нельзя ли как-нибудь от этой дроби избавиться, или хотя бы упростить?*

Замечаем, что в знаменателе находится одинокий корень из «икс». Один в поле – не воин, а значит, можно разделить *почленно* числитель на знаменатель:

$$\int\frac{2x^3-\sqrt{x^5}+1}{\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{2x^3-x^{\frac{5}{2}}+1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)dx=\int\left(2x^{\frac{5}{2}}-x^2+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=$$

$$=2\cdot\frac{1}{\frac{7}{2}}\cdot x^{\frac{7}{2}}-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}+C=\frac{4}{7}\sqrt{x^7}-\frac{x^3}{3}+2\sqrt{x}+C,\ \text{где } C=const$$

Обратите внимание, что в решении пропущен один шаг, а именно, применение *линейности* $\int kudx=k\int udx$, $\int(u\pm v)dx=\int udx\pm\int vdx$. Обычно уже при начальном опыте решения интегралов данные правила считают само собой разумеющимися фактами и не расписывают подробно.

Проверка:

$$\left(\frac{4}{7}\sqrt{x^7}-\frac{x^3}{3}+2\sqrt{x}+C\right)'=\frac{4}{7}\cdot(x^{\frac{7}{2}})'-\frac{1}{3}\cdot(x^3)'+2\cdot(x^{\frac{1}{2}})'+(C)'=$$

$$=\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}\cdot 3x^2+2\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+0=2\sqrt{x^5}-x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2x^3-x^2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

Всё ОК.

Действия с дробными степенями я не комментирую, так как о них неоднократно шла речь в других темах. Однако если Вас всё-таки ставит в тупик такое действие, как $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$, то рекомендую обратиться к школьному учебнику или запросить в поисковике *«действия с обыкновенными дробями»*.

Аналогичный пример для самостоятельного решения:

Пример 6

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

$$\int\frac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{2x}dx$$

Решение и ответ в конце методички.

В рассмотренных примерах нам удалось избавиться от произведений и дробей, но это, конечно же, частные случаи. К обширному классу случаев «несчастных» мы вернёмся чуть позже – после изучения **важнейшего** и КЛЮЧЕВОГО метода интегрирования.

Технически он реализуется двумя способами:

– **подведением функции под знак дифференциала**;

– **заменой переменной интегрирования**.

По своей сути это одно и то же, и мы начинаем с более простой вариации:

3. Подведение функции под знак дифференциала

Не так давно мы научились раскрывать дифференциал, напомню пример, который я приводил выше:

$$d(2x-1)=(2x-1)'dx=(2-0)dx=2dx$$

И сейчас нам предстоит освоить обратное действие:

Пример 7

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

$$\int \sin(3x+1)dx$$

В ***Таблице интегралов*** есть похожая формула: $\int \sin xdx=-\cos x+C$, но проблема заключается в том, что у нас под синусом не просто буковка «икс», а сложное выражение. Что делать?

Организуем или, как говорят, *подведём* функцию $(3x+1)$ под знак дифференциала:

$$\int \sin(3x+1)dx=\frac{1}{3}\int \sin(3x+1)d(3x+1)$$

Легко видеть, что $d(3x+1)=(3x+1)'dx=3dx$, и всё корректно.

Почему именно так и зачем это нужно?

Принцип: формула $\int \sin xdx=-\cos x+C$ (и все другие табличные формулы) справедливы и применимы НЕ ТОЛЬКО для переменной x, но и для любого сложного выражения – ЛИШЬ БЫ АРГУМЕНТ ФУНКЦИИ $(3x+1$ ***в нашем примере)*** **И ВЫРАЖЕНИЕ ПОД ЗНАКОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛА БЫЛИ <u>ОДИНАКОВЫМИ</u>.**

Поэтому мысленное рассуждение при решении данного примера складывается следующим образом: *«Мне нужно решить интеграл $\int \sin(3x+1)dx$. Я посмотрел в таблицу и нашел похожую формулу $\int \sin xdx=-\cos x+C$. Но у меня сложный аргумент $(3x+1)$ и формулой я воспользоваться не могу. Однако если мне удастся получить $(3x+1)$ и под знаком дифференциала, то всё будет нормально. Если я запишу $d(3x+1)$, тогда $d(3x+1)=(3x+1)'dx=3dx$. Но в исходном интеграле $\int \sin(3x+1)dx$ множителя-тройки нет и для того, чтобы подынтегральная функция не изменилась, мне надо её домножить на $\frac{1}{3}$».*

После чего и рождается запись:

$$\int \sin(3x+1)dx=\frac{1}{3}\int \sin(3x+1)d(3x+1)$$

Теперь можно пользоваться табличной формулой $\int \sin x dx = -\cos x + C$, единственное отличие, у нас здесь не буква «икс», а сложное выражение $3x+1$:

$$\int \sin(3x+1)dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)d(3x+1) = -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C, \text{ где } C = const$$

Готово.

Выполним **проверку**:

$$\left(-\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C\right)' = -\frac{1}{3}(\cos(3x+1))' + (C)' =$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot(-\sin(3x+1))\cdot(3x+1)' + 0 = \frac{1}{3}\sin(3x+1)\cdot(3+0) = \sin(3x+1)$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, интеграл найден правильно.

Обратите внимание, что в ходе проверки мы использовали правило дифференцирования сложной функции $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$, и это не случайность.

Подведение функции под знак дифференциала и $(u(v))' = u'(v)\cdot v'$ – это два взаимно обратных правила.

Пример 8

Найти неопределенный интеграл. Выполнить проверку.

$$\int \frac{dx}{5-2x}$$

Анализируем подынтегральную функцию. Здесь у нас дробь, причем в знаменателе линейная функция (с «иксом» в первой степени). Смотрим в ***Таблицу интегралов*** и находим наиболее похожую вещь: $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

Подводим функцию $5-2x$ под знак дифференциала:

$$\int \frac{dx}{5-2x} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(5-2x)}{5-2x}$$

Те, кому трудно сразу сообразить, на какую дробь нужно домножать, могут быстренько на черновике раскрыть дифференциал:
$d(5-2x) = (5-2x)'dx = (0-2)dx = -2dx$. Ага, получается $-2dx$, значит, чтобы ничего не изменилось, надо домножить интеграл на $-\frac{1}{2}$.

Далее используем табличную формулу для сложного выражения $(5-2x)$:

$$\int \frac{dx}{5-2x} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(5-2x)}{5-2x} = -\frac{1}{2}\ln|5-2x| + C, \text{ где } C = const$$

Проверка:

$$\left(-\frac{1}{2}\ln|5-2x|+C\right)' = -\frac{1}{2}(\ln|5-2x|)'+(C)' =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(5-2x)}\cdot(5-2x)'+0 = -\frac{1}{2(5-2x)}\cdot(0-2) = \frac{1}{(5-2x)}$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, интеграл найден правильно.

Следующий пример для самостоятельного решения:

Пример 9

Найти неопределенные интегралы, ответы проверить дифференцированием.

а) $\int\cos\frac{x}{2}dx$

б) $\int 4^{5x}dx$

Решения и ответы в конце методички.

Довольно таки скоро подобные примеры будут казаться вам лёгкими, и щелкаться как орехи:

$$\int e^{7-x}dx = -\int e^{7-x}d(7-x) = -e^{7-x}+C, \text{ где } C=const$$

$$\int(2x+1)^5dx = \frac{1}{2}\int(2x+1)^5d(2x+1) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}(2x+1)^6+C = \frac{1}{12}(2x+1)^6+C, \text{ где } C=const$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{5}} = 5\int\frac{d\left(\frac{x}{5}\right)}{\cos^2\frac{x}{5}} = 5tg\frac{x}{5}+C, \text{ где } C=const$$

$$\int\frac{dx}{1+9x^2} = \int\frac{dx}{1+(3x)^2} = \frac{1}{3}\int\frac{d(3x)}{1+(3x)^2} = \frac{1}{3}arctg(3x)+C, \text{ где } C=const$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4-2x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{2^2-(\sqrt{2}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2^2-(\sqrt{2}x)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)+C, \text{ где } C=const$$

И так далее.

Особо хочется остановиться на «халявном» случае, когда в линейной функции переменная x входит с единичным коэффициентом, например:

$$\int \frac{dx}{x+3}$$

Строго говоря, решение должно выглядеть так:

$$\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C, \text{ где } C = const$$

Как видите, подведение функции $x+3$ под знак дифференциала прошло «безболезненно», без всяких домножений. Поэтому на практике таким длинным решением часто пренебрегают и сразу записывают, что $\int \frac{dx}{x+3} = \ln|x+3| + C$. Но будьте готовы при необходимости объяснить преподавателю, как Вы решали! Поскольку интеграла $\int \frac{dx}{x+3}$ в таблице вообще-то нет.

Разумеется, помимо линейной $ax+b$, под знак дифференциала подводИмы и другие функции. Рассмотрим классику жанра:

Пример 10

Найти неопределенный интеграл.

$$\int tgx dx$$

Решение: $\int tgx dx \overset{(1)}{=} \int \frac{\sin x dx}{\cos x} \overset{(2)}{=} -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} \overset{(3)}{=} -\ln|\cos x| + C, \text{ где } C = const$

(1) Используем тригонометрическую формулу $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ *(см. Приложение **Полезные формулы**)*.

(2) Очевидно, что $d(\cos x) = (\cos x)' dx = -\sin x dx$ и статус-кво соблюдён.

(3) Используем табличный интеграл $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ для косинуса «икс».

Проверка: $(-\ln|\cos x| + C)' = -\frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' + 0 = -\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos x} = tgx$

Чуть более занятный интеграл для самостоятельного решения:

Пример 11

$$\int ctg 2x dx$$

И, конечно, не забываем о проверке. Дерзайте!

4. Метод замены переменной в неопределённом интеграле

Переходим к рассмотрению второго, «академичного» способа решения, в котором осуществляется прямой переход к новой переменной. Вернёмся к нашему подопытному интегралу из предыдущего параграфа:

Пример 12

$$\int \sin(3x+1)dx$$

Как мы уже говорили, для решения этого интеграла нам приглянулась табличная формула $\int \sin x dx = -\cos x + C$, и всё дело хотелось бы свести к ней.

Идея метода замены состоит в том, чтобы **сложное выражение заменить одной буквой**. В данном случае напрашивается замена $3x+1=t$:

$$\int \sin(\underbrace{3x+1}_{t})dx$$

Наверное, вы догадываетесь, что если осуществляется переход к новой переменной t, то в новом интеграле **ВСЁ** должно быть выражено через букву t, то есть, дифференциалу dx здесь совсем не место. Откуда следует логичный вывод, что dx нужно **превратить в некоторое выражение, которое зависит только от t.**

Действие следующее. Берём нашу замену $3x+1=t$ и «навешиваем» на обе части значки дифференциалов:

$$d(3x+1)=dt$$

Справа у нас получился «готовенький» дифференциал, а вот слева его нужно раскрыть:

$$(3x+1)'dx=dt$$

$$3dx=dt$$

Теперь по правилам пропорции сбрасываем «тройку» вниз правой части, выражая тем самым нужный нам dx:

$$dx=\frac{dt}{3}$$

Таким образом:

$$\int \sin(\underbrace{3x+1}_{t})\underbrace{dx}_{\frac{dt}{3}}$$

и переход к новой переменной осуществлён:

$$\int \sin(3x+1)dx = \frac{1}{3}\int \sin t dt$$

А это уже самый что ни на есть табличный интеграл $\int \sin x dx = -\cos x + C$ с тем отличием, что вместо «икса» у нас буква «тэ», которая ничем не хуже:

$$\int \sin(3x+1)dx = \frac{1}{3}\int \sin t dt = -\frac{1}{3}\cos t + C$$

Осталось провести *обратную замену*. Вспоминаем, что $t = 3x+1$:

$$\int \sin(3x+1)dx = \frac{1}{3}\int \sin t dt = -\frac{1}{3}\cos t + C \overset{t=3x+1}{=}$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C, \text{ где } C = const$$

Готово.

Чистовое оформление рассмотренного примера должно выглядеть примерно так:

“

$$\int \sin(3x+1)dx = (*)$$

Проведем замену: $3x+1=t$

$$3dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$$

$$(*) = \frac{1}{3}\int \sin t dt = -\frac{1}{3}\cos t + C \overset{t=3x+1}{=}$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C, \textit{ где } C = const$$

“

Справка: $\Rightarrow$ *– это математический знак следования («из этого следует это»).*

Значок $(*)$ не несет никакого математического смысла, он обозначает, что мы прервали решение для промежуточных объяснений. При оформлении примера в тетради надстрочную пометку $^{t=3x+1}$ обратной замены лучше выполнять простым карандашом.

А теперь самое время вспомнить первый способ решения:

$$\int \sin(3x+1)dx = \frac{1}{3}\int \sin(3x+1)d(3x+1) =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x+1) + C, \text{ где } C = const$$

В чем разница? При подведении под знак дифференциала нет фактической замены переменной *(хотя МЫСЛЕННО мы можем считать* $3x+1$ *одной буквой)*, поэтому этот способ короче, а значит, привлекательнее.

И возникает **вопрос**: если первый способ короче, то зачем тогда использовать метод замены? А дело в том, что во многих интегралах «подогнать» функцию под знак дифференциала бывает не так-то просто:

Пример 13

Найти неопределенный интеграл.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}} = (*)$$

Проведем замену: $3-4x=t$ (другую здесь трудно придумать).

Навешиваем дифференциалы на обе части:
$d(3-4x)=dt$

Откуда следует:
$$-4dx = dt \Rightarrow dx = -\frac{dt}{4}$$

$$(*) = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}} = -\frac{1}{4}\int t^{-\frac{2}{3}}dt = -\frac{1}{4}\cdot 3t^{\frac{1}{3}} + C = ^{t=3-4x}$$
$$= -\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{3-4x} + C, \text{ где } C = const$$

Как видите, в результате замены исходный интеграл значительно упростился – свёлся к обычной степенной функции. **Это и есть цель замены – упростить интеграл**.

~~Ленивые~~ продвинутые люди запросто решат данный интеграл методом подведения функции под знак дифференциала:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-4x)^2}} = \int (3-4x)^{-\frac{2}{3}}dx = -\frac{1}{4}\int (3-4x)^{-\frac{2}{3}}d(3-4x) =$$
$$= -\frac{1}{4}\cdot 3\cdot(3-4x)^{\frac{1}{3}} + C = -\frac{3\cdot\sqrt[3]{3-4x}}{4} + C, \text{ где } C = const$$

Но такое решение очевидно далеко не для всех студентов. Кроме того, уже в этом примере использование «быстрого» способа **значительно повышает риск** допустить ошибку. Образно говоря, это плата за экономию времени. Как поступать в том или ином случае – решать вам:

Пример 14

Найти неопределенный интеграл и выполнить проверку.

$$\int \sqrt[5]{(1+x)^4}dx$$

Усложняем задание:

Пример 15

Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{xdx}{(3x+2)^7} = (*)$$

После напрашивающейся замены $3x+2=t$, выясняем, во что превратится dx:

$$d(3x+2) = dt$$

$$3dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$$

Хорошо, дифференциал мы выразили, но что делать с оставшимся в числителе «иксом»?! Знакомьтесь с типовым приёмом – «икс» выражается из той же замены:

$$3x+2=t \Rightarrow 3x = t-2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}t - \frac{2}{3}$$

$$(*) = \int \frac{\left(\frac{1}{3}t - \frac{2}{3}\right)\cdot\frac{dt}{3}}{t^7} = \frac{1}{9}\int\frac{(t-2)dt}{t^7} = \frac{1}{9}\int\left(\frac{1}{t^6} - \frac{2}{t^7}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{9}\int(t^{-6} - 2t^{-7})dt = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{(-5)}t^{-5} - 2\cdot\frac{1}{(-6)}t^{-6}\right) \overset{t=3x+2}{=}$$

$$= \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{5(3x+2)^5} + \frac{1}{3(3x+2)^6}\right) + C, \text{ где } C = const$$

Готово.

Не поленимся, проверим:

$$\left[\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{5(3x+2)^5} + \frac{1}{3(3x+2)^6}\right) + C\right]' = \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{5}((3x+2)^{-5})' + \frac{1}{3}((3x+2)^{-6})'\right) + (C)' =$$

$$= \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{5}\cdot(-5)\cdot(3x+2)^{-6}\cdot(3x+2)' + \frac{1}{3}\cdot(-6)\cdot(3x+2)^{-7}\cdot(3x+2)'\right) + 0 =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{(3x+2)^6}\cdot 3 - \frac{2}{(3x+2)^7}\cdot 3\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(3x+2)^6} - \frac{2}{(3x+2)^7}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3x+2-2}{(3x+2)^7} = \frac{x}{(3x+2)^7}$$

Аналогичный пример для самостоятельного решения:

Пример 16

$$\int x(1-x)^5 dx$$

Возводить в 5-ю степень и раскрывать скобки тут, конечно, не разумно.

Настало время озвучить **основную предпосылку** для использования метода замены переменной: **в подынтегральном выражении должна находиться некоторая функция $\varphi(x)$ и её производная $\varphi'(x)$:** $\int \varphi(x)\cdot\varphi'(x)dx$ *(функции $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ могут быть и не в произведении)*.

В этой связи при анализе интегралов полезно заглядывать в ***Таблицу производных***:

Пример 17

$$\int \frac{xdx}{4x^2+1} = (*)$$

Анализируя подынтегральную функцию, замечаем, что степень числителя на единицу меньше степени знаменателя. А в таблице производных как раз есть формула $(x^n)' = nx^{n-1}$, которая понижает степень на единицу. Значит, если обозначить за t знаменатель, то велики шансы, что числитель xdx превратится во что-нибудь хорошее.

Проведём замену $4x^2+1=t$ и навесим дифференциалы на обе части:

$$d(4x^2+1)=dt$$

$$(4x^2+1)'dx=dt$$

$8xdx=dt$, откуда и выражаем нужное нам произведение: $xdx=\dfrac{dt}{8}$

$$(*)=\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{8}\ln|t|+C\overset{t=4x^2+1}{=}\frac{1}{8}\ln(4x^2+1)+C, \text{ где } C=const$$

Примечание: *т.к.* $4x^2+1>0$*, то знак модуля можно заменить круглыми скобками*

Кстати, здесь не так сложно подвести функцию под знак дифференциала:

$$\int\frac{xdx}{4x^2+1}=\frac{1}{8}\int\frac{d(4x^2+1)}{4x^2+1}=\frac{1}{8}\ln|4x^2+1|+C, \text{ где } C=const$$

И этот способ, в данном случае даже лучше, ибо он действительно прост.

Следует отметить, что для дробей вроде $\int\dfrac{xdx}{4x^2+2x+1}$, $\int\dfrac{(x-3)dx}{4x^2+1}$ такой фокус уже не пройдет (точнее говоря, применить нужно будет не только замену). Но об этом позже.

Пара типовых интегралов для самостоятельного решения:

Пример 18

а) $\int\dfrac{xdx}{\sqrt{9-8x^2}}$

б) $\int e^{2x^3-1}\cdot x^2dx$

И в заключение параграфа парочка более «упитанных» образцов:

Пример 19

$$\int \frac{\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}dx = (*)$$

Смотрим в ***Таблицу производных*** и находим там арккосинус: $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
У нас же в подынтегральном выражении находится арккосинус и нечто похожее на его производную. Многие уже поняли, что к чему, но я таки сформулирую

общее правило: за t обозначаем саму функцию (а не её производную).

В данном случае: $\arccos 3x = t$. Осталось выяснить, во что превратится оставшаяся часть подынтегрального выражения $\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

Здесь я распишу $d(\arccos 3x)$ подробно и в конце приравняю результат к dt – так будет компактнее:

$$d(\arccos 3x) = (\arccos 3x)'dx = -\frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}\cdot(3x)'dx = -\frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}} = dt$$

И из последнего равенства по правилу пропорции выражаем нужный нам кусок:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = -\frac{dt}{3}$$

Таким образом:

$$(*) = -\frac{1}{3}\int tdt = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}t^2 + C \overset{t=\arccos 3x}{=} -\frac{\arccos^2 3x}{6} + C, \text{ где } C = const$$

Вот тут подвести функцию под знак дифференциала уже тяжеловато.

Контроль:

$$\left(-\frac{\arccos^2 3x}{6} + C\right)' = -\frac{1}{6}(\arccos^2 3x)' + (C)' = -\frac{1}{6}\cdot 2\arccos 3x\cdot(\arccos 3x)' + 0 =$$

$$= -\frac{1}{3}\arccos 3x\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}\right)\cdot(3x)' = \frac{\arccos 3x}{3\sqrt{1-9x^2}}\cdot 3 = \frac{\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}, \text{ ч.т.п.}$$

Пример 20

$$\int \frac{\sqrt[3]{\ln(3x+1)}}{3x+1}dx$$

Разбираемся с «монстром» и продолжаем:

5. Интегрирование по частям

Этот метод представляет собой третий «столп» интегрального исчисления, без которого никуда. Он позволяет нам проинтегрировать некоторые функции, которых нет в таблице, многие произведения функций, а также некоторые дроби. И сразу список в студию. По частям берутся интегралы следующих видов – смотрим и запоминаем:

1) $\int \ln xdx$, $\int (x^2+3)\ln xdx$, $\int x\ln^2 xdx$ – логарифм и логарифмы, умноженные на многочлены *(логарифм не обязан быть натуральным)*;

2) $\int xe^x dx$, $\int (x^2-2x+5)e^{-2x}dx$ – экспоненциальная функция, умноженная на какой-нибудь многочлен. Сюда же относится общий случай с показательной функцией, например: $\int x\cdot 4^x dx$, но на практике процентах так в 97 встречается экспонента;

3) $\int x\cos 6xdx$, $\int (x^2+3x)\sin 2xdx$, $\int xtg^2xdx$ – тригонометрические функции, умноженные на какой-нибудь многочлен;

4) $\int \arcsin xdx$, $\int x^2 arctgxdx$ – обратные тригонометрические функции («арки») и «арки», умноженные на многочлены.

Для всех перечисленных случаев существует один-единственный инструмент:

$\int udv = uv - \int vdu$ – **формула интегрирования по частям** собственной персоной, прошу любить и жаловать. Идём прямо по списку:

1) Интегралы от логарифмов

Думаю, вы догадываетесь, с чего мы начнём:)

Пример 21

$\int \ln xdx = (*)$

Прерываем решение для применения формулы $\int udv = uv - \int vdu$ и смотрим на левую её часть: $\int udv$. Очевидно, что в нашем интеграле $\int \ln xdx$ что-то нужно обозначить за u, а что-то за dv.

Общее правило: в интегралах рассматриваемого типа за u всегда обозначается логарифм.

Сначала слева в столбик записываются исходные данные:

$u = \ln x$

$dv = dx$

То есть, за u мы обозначили логарифм, а за dv – **оставшуюся часть** *подынтегрального выражения*.

Теперь находим дифференциал du, распишу очень подробно:

$$u = \ln x \Rightarrow du = d(\ln x) = (\ln x)'dx = \frac{dx}{x}$$
$$dv = dx$$

Далее находим функцию v. Для того чтобы это сделать, нужно проинтегрировать **правую часть** нижнего равенства, при этом нас устроит «голая» первообразная (без константы «цэ»):

$$u = \ln x \Rightarrow du = (\ln x)'dx = \frac{dx}{x}$$
$$dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x$$

И, наконец, открываем «звёздочкой» решение, чтобы сконструировать правую часть формулы: $uv - \int v du$. Вот образец чистового решения с цветными пометками:

$$\int \ln x dx = (*)$$

Интегрируем по частям: $\int u dv = uv - \int v du$

$$u = \ln x \Rightarrow du = (\ln x)'dx = \frac{dx}{x}$$
$$dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x$$

$$(*) = x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C, \text{ где } C = const$$

Единственный момент – в произведении uv я сразу переставил местами u и v, так как множитель x принято записывать перед логарифмом.

Как видите, применение формулы свело решение к двум простым интегралам.

Выполним **проверку**:
$$(x\ln x - x + C)' = (x\ln x)' - (x)' + (C)' = (x)'\ln x + x(\ln x)' - 1 + 0 =$$
$= 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$ – получена исходная подынтегральная функция, значит, интеграл решён правильно.

В ходе проверки мы использовали правило дифференцирования произведения: $(uv)' = u'v + uv'$. И это тоже не случайно.

Формула интегрирования по частям $\int u dv = uv - \int v du$ **и формула** $(uv)' = u'v + uv'$ **– это два взаимно обратных правила.**

Пример 22

$\int x\ln^2 xdx = (*)$

Подынтегральная функция представляет собой произведение логарифма на многочлен, а значит, нужно использовать формулу $\int udv = uv - \int vdu$.

Как уже говорилось, за u следует обозначить логарифм (то, что он в степени – значения не имеет). За dv обозначаем **оставшуюся часть** подынтегрального выражения.

Ещё один раз распишу подробный порядок действий. Сначала слева записываем:

$u = \ln^2 x$

$dv = xdx$

Затем находим дифференциал du, здесь придётся использовать правило дифференцирования сложной функции:

$$u = \ln^2 x \Rightarrow du = d(\ln^2 x) = (\ln^2 x)'dx = 2\ln x \cdot (\ln x)'dx = \frac{2\ln xdx}{x}$$

$dv = xdx$

Далее находим функцию v, для этого интегрируем **правую часть** нижнего равенства:

$$u = \ln^2 x \Rightarrow du = (\ln^2 x)'dx = 2\ln x \cdot (\ln x)'dx = \frac{2\ln xdx}{x}$$

$$dv = xdx \Rightarrow v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$$

Надеюсь, простейшие производные и интегралы уже «отлетают у вас от зубов».

Теперь открываем «звёздочкой» решение и «конструируем» правую часть формулы $\int udv = uv - \int vdu$:

$$(*) = \frac{x^2\ln^2 x}{2} - \int\left(\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2\ln xdx}{x}\right) = \frac{x^2\ln^2 x}{2} - \int x\ln xdx = (*)$$

Под интегралом у нас снова многочлен на логарифм! Поэтому решение опять прерывается и правило интегрирования по частям применяется второй раз. Не забываем, что за u в похожих ситуациях всегда обозначается логарифм:

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$\int udv = uv - \int vdu$, и решение выходит на финишную прямую, где будут уместны некоторые технические комментарии:

$$(*)\overset{(1)}{=}\frac{x^2\ln^2 x}{2}-\left(\frac{x^2\ln x}{2}-\int\left(\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}\right)\right)\overset{(2)}{=}\frac{x^2\ln^2 x}{2}-\frac{x^2\ln x}{2}+\frac{1}{2}\int x dx\overset{(3)}{=}$$

$$=\frac{x^2\ln^2 x}{2}-\frac{x^2\ln x}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C\overset{(4)}{=}\frac{x^2(2\ln^2 x-2\ln x+1)}{4}+C,\ \text{где}\ C=const$$

(1) Не путаемся в знаках! Очень часто здесь теряют минус, также обратите внимание, что минус относится **ко всей** скобке $\left(\frac{x^2\ln x}{2}-\int\left(\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}\right)\right)$, и эти скобки нужно корректно раскрыть.

(2) Раскрываем скобки. Последний интеграл упрощаем.

(3) Берём последний интеграл.

(4) «Причёсываем» ответ. Впрочем, этот шаг совсем не обязателен.

И не забываем о святая святых, по правилу $(uv)'=u'v+uv'$:

$$\left(\frac{x^2(2\ln^2 x-2\ln x+1)}{4}+C\right)'=\frac{1}{4}(x^2)'\cdot(2\ln^2 x-2\ln x+1)+\frac{1}{4}x^2\cdot(2\ln^2 x-2\ln x+1)'+(C)'=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 2x\cdot(2\ln^2 x-2\ln x+1)+\frac{1}{4}x^2\cdot\left(2\cdot\frac{2\ln x}{x}-2\cdot\frac{1}{x}+0\right)+0=$$

$$=\frac{1}{4}(4x\ln^2 x-4x\ln x+2x)+\frac{1}{4}(4\ln x-2x)=$$

$$=\frac{1}{4}(4x\ln^2 x-4x\ln x+2x+4\ln x-2x)=\frac{1}{4}\cdot 4x\ln^2 x=x\ln^2 x$$, что мы и хотели увидеть.

Необходимость дважды (а то и трижды) применять правило интегрирования по частям возникает не так уж и редко.

Пример 23

а) $\int\frac{\ln x dx}{x}$

б) $\int\frac{\ln x dx}{x^2}$

Обещанные дроби. Интегралы очень похожие, но…

этот пример ярко иллюстрирует основную трудность темы – если неправильно подобрать метод решения, то возиться с интегралом можно, как с самой настоящей головоломкой. Подумайте, порешайте ;)

Примерный образец чистового оформления задания в конце методички.

2) Интеграл от экспоненты, умноженной на многочлен

Общее правило: за u всегда обозначается многочлен

Пример 24

$$\int (x-2)e^{2x}dx = (*)$$

Используя знакомый алгоритм, интегрируем по частям:

$$u = x-2 \Rightarrow du = (x-2)'dx = dx$$
$$dv = e^{2x}dx \Rightarrow v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

Заметьте, как ловко подключаются уже пройденные методы интегрирования. Впрочем, интеграл здесь настолько прост, что чащё сразу записывают, что $v = \frac{1}{2}e^{2x}$.

Таким образом, по формуле $\int udv = uv - \int vdu$:

$$(*) = \frac{(x-2)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{(x-2)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + C =$$
$$= \frac{(x-2)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C, \text{ где } C = const$$

В принципе, результат можно красиво упаковать:

$$... = \frac{2(x-2)e^{2x} - e^{2x}}{4} + C = \frac{(2x-4-1)e^{2x}}{4} + C = \frac{(2x-5)e^{2x}}{4} + C, \text{ где } C = const$$

Но, повторюсь, это вовсе не обязательный шаг, то есть, **пример считается решенным, когда взят последний интеграл**. И, кстати, важная вещь:

Многие первообразные можно представить не единственным способом!

Таким образом, если Ваш ответ не совпадает с заранее известным ответом задачника, то **это ещё не значит**, что Вы ошиблись. **Проверка и ещё раз проверка:**

$$\left(\frac{(2x-5)e^{2x}}{4} + C\right)' = \frac{1}{4}\cdot((2x-5)e^{2x})' + (C)' = \frac{1}{4}(2x-5)'e^{2x} + \frac{1}{4}(2x-5)\cdot(e^{2x})' + 0 =$$

$= \frac{1}{4}\cdot 2e^{2x} + \frac{1}{4}(2x-5)\cdot 2e^{2x} = \frac{1}{2}(1+2x-5)e^{2x} = \frac{1}{2}(2x-4)e^{2x} = (x-2)e^{2x}$, ну вот, теперь душа может быть спокойна.

Пример 25

$$\int (x^2 + x)e^{-x}dx$$

Самостоятельно. Особое внимание обратите на знаки – здесь легко в них запутаться; также помним, что e^{-x} – это сложная функция.

3) Интегралы от тригонометрических функций, умноженных на многочлен

Общее правило: за u всегда обозначается многочлен

Пример 26

$$\int x\cos 6x dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos 6x dx \Rightarrow v = \int \cos 6x dx = \frac{1}{6}\int \cos 6x d(6x) = \frac{1}{6}\sin 6x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$(*) = \frac{1}{6}x\sin 6x - \frac{1}{6}\int \sin 6x dx =$$

$$= \frac{1}{6}x\sin 6x - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\int \sin 6x d(6x) =$$

$$= \frac{1}{6}x\sin 6x - \frac{1}{36}\cdot(-\cos 6x) + C = \frac{1}{6}x\sin 6x + \frac{1}{36}\cos 6x + C, \text{ где } C = const$$

Хммм, …и комментировать особо нечего. Разве что подведение под знак дифференциала. Напоминаю, что $6x$ удобно МЫСЛЕННО считать одной буквой. Но можно и сразу записывать, что $\int \sin 6x dx = -\frac{1}{6}\cos 6x$.

Проверка:

$$\left(\frac{1}{6}x\sin 6x + \frac{1}{36}\cos 6x + C\right)' = \frac{1}{6}(x\sin 6x)' + \frac{1}{36}(\cos 6x)' + (C)' =$$

$$= \frac{1}{6}(x)'\sin 6x + \frac{1}{6}x(\sin 6x)' + \frac{1}{36}(-\sin 6x)\cdot(6x)' + 0 =$$

$$= \frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{6}x\cdot 6\cos 6x - \frac{1}{36}\sin 6x\cdot 6 = \frac{1}{6}\sin 6x + x\cos 6x - \frac{1}{6}\sin 6x = x\cos 6x$$

ОК.

Теперь ваша очередь:

Пример 27

$$\int (x-6)\sin\frac{x}{2}dx$$

Решаем аккуратно, внимательно и с проверкой!

И ещё один интеграл с дробью:

Пример 28

$$\int \frac{xdx}{\sin^2 x} = (*)$$

Как и в двух предыдущих примерах за u обозначается многочлен:

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x} \Rightarrow v = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx$ *(интеграл почти табличный)*.

По формуле $\int udv = uv - \int vdu$:

$$(*) = -xctgx + \int ctgxdx = -xctgx + \int \frac{\cos xdx}{\sin x} =$$

$$= -xctgx + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = -xctgx + \ln|\sin x| + C, \text{ где } C = const$$

После применения формулы нарисовался старый знакомый интеграл, который мы разобрали в *Примерах 10, 11*. Творческое задание для самостоятельного решения:

Пример 29

$$\int x \sin x \cos x dx$$

Используем *Приложение* ***Полезные формулы*** ;)

4) Интегралы с «арками»

То бишь, с арксинусом, арккосинусом, арктангенсом или арккотангенсом.

Общее правило: за u обозначается обратная тригонометрическая функция.

Пример 30

$$\int arctg2xdx = (*)$$

$$u = arctg2x \Rightarrow du = (arctg2x)'dx = \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot (2x)'dx = \frac{2dx}{1+4x^2}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$(*) = xarctg2x - 2\int \frac{xdx}{1+4x^2} = xarctg2x - \frac{1}{4}\int \frac{d(1+4x^2)}{1+4x^2} =$$

$$= xarctg2x - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2) + C, \text{ где } C = const$$

Вот и всё! Последний интеграл можно решить и с помощью замены переменной (см. *Пример 17*), но «быстрый» аналог значительно сокращает путь.

Таким образом, помимо «чистого» интегрирования по частям часто требуется применять и другие методы решения. И мы ещё не раз увидим целые серии методов!

Самостоятельно:

Пример 31

Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \arcsin 3x dx$

б) $\int x arctg x dx = (*)$

В пункте «бэ» встретится новый приём, и поэтому можно не мучиться – сразу посмотреть готовое решение.

Поздравляю вас с освоением интегралов «первой необходимости», теперь получить «двойку» по теме будет ОЧЕНЬ трудно!

Но лучше – чтобы стало ещё лучше!

6. «Тригонометрические» интегралы

Такое вот несколько условное название параграфа, где мы рассмотрим интегралы, «нашинкованные» синусами, косинусами, тангенсами и котангенсами в различных их комбинациях:

Пример 32

$\int \sin 5x \sin 7x dx = (*)$

Этот интеграл уже не берётся по частям, и здесь мы возвращаемся к старому мотиву – преобразовать произведение в сумму. Используем тригонометрическую формулу $\sin\alpha \sin\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$ *(см. Приложение* ***Полезные формулы****)*:

$$(*) = \int \frac{\cos(5x-7x)-\cos(5x+7x)}{2}dx = \frac{1}{2}\int(\cos(-2x)-\cos 12x)dx = \frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 12x)dx = (*)$$

И тут я хочу снова остановиться, чтобы напомнить ***важный момент***:

Косинус *– это чётная функция, то есть* $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$*, и минус исчезает без всяких последствий. В данном примере:* $\cos(-2x)=\cos 2x$

Синус *же – функция нечетная:* $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ *– здесь минус, наоборот – не пропадает, а выносится.*

Дальнейшее просто:

$$(*) = \frac{1}{2}\int \cos 2x dx - \frac{1}{2}\int \cos 12x dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 2x d(2x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\int \cos 12x d(12x) =$$
$$= \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 12x}{24} + C, \text{ где } C = const$$

Готово.

Проверка:
$\left(\frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 12x}{24} + C\right)' = \frac{1}{4}\cdot 2\cos 2x - \frac{1}{24}\cdot 12\cos 12x + 0 = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 12x$, после чего перепроверяем, правильно ли мы применили тригонометрическую формулу.

Пример 33

$$\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}dx$$

Это пример для самостоятельного решения.

Во многих тематических интегралах тригонометрические функции находятся в различных степенях. На всякий пожарный напомню, что степень – это свёрнутая запись того же произведения:
$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ раз}}$$

и мы начинаем с интегралов, где синус и (или) косинус находятся в **чётных** положительных степенях.

Такие интегралы решаются **методом понижения степени**. Для этого используют эпичные тригонометрические формулы $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$, а также формулу синуса двойного угла: $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$ *(в обратном направлении)*.

Пример 34

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C, \text{ где } C = const$$

Проверка: $\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C\right)' = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot 2\cos 2x\right) + 0 = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) = \cos^2 x$

Без комментариев.

По мере «набивки руки» **решение можно (и нужно) сокращать**, а именно не расписывать Свойство линейности и Подведение функции под знак дифференциала. Так, в рассмотренном примере интеграл от $\cos 2x$ легко взять и устно.

Разминаемся на втором «карлике»:

Пример 35

$$\int \sin^2 \frac{3x}{2} dx$$

Не ленимся и решаем! Потому что степени у нас будут потихоньку повышаться:)

Пример 36

$$\int \sin^4 x dx$$

Сначала полное решение, затем комментарии:

$$\int \sin^4 x dx \overset{(1)}{=} \int (\sin^2 x)^2 dx \overset{(2)}{=} \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right)^2 dx \overset{(3)}{=} \frac{1}{4} \int (1-\cos 2x)^2 dx \overset{(4)}{=}$$
$$= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx \overset{(5)}{=} \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2} \right) dx \overset{(6)}{=}$$
$$= \frac{1}{4} \int \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{\cos 4x}{2} \right) dx \overset{(7)}{=} \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} x - 2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sin 4x}{4 \cdot 2} \right) + C \overset{(8)}{=}$$
$$= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} x - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8} \right) + C, \text{ где } C = const$$

(1) Готовим подынтегральную функцию для применения формулы $\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

(2) Собственно применяем формулу.

(3) Возводим знаменатель в квадрат и выносим константу за знак интеграла. Можно было поступить несколько иначе, но, на мой взгляд, так удобнее.

(4) Используем формулу $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(5) В третьем слагаемом снова понижаем степень, но уже с помощью формулы $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

(6) Приводим подобные слагаемые (здесь я почленно разделил $\frac{1+\cos 4x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2}$ и выполнил сложение $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$).

(7) Собственно берём интеграл, при этом свойство линейности и метод подведения функции под знак дифференциала выполняем устно.

(8) Причёсываем ответ.

Как уже отмечалось, зачастую ответ можно представить не единственным способом, и в задачнике, например, может быть такой вариант:
$\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{\sin 4x}{32}+C$, где $C=const$

Для самостоятельного решения ещё более характерный в этом смысле пример:

Пример 37

$\int \sin^2 x\cos^2 x dx$

Этот интеграл раскручивается двумя способами, и у Вас могут получиться **два совершенно разных ответа** (точнее говоря, они будут выглядеть совершенно по-разному, но с математической точки зрения являться эквивалентными). Попробуйте увидеть наиболее рациональный способ ;)

…Вам понравилось так же, как и мне? ☺ Ну тогда продолжаем! Что делать, если синус или косинус находится в нечётной степени?

Пример 38

$\int \sin^3 x dx=(*)$

Тут нужно «отщипнуть» один синус, «затолкать» его под дифференциал и воспользоваться *основным тригонометрическим тождеством* в виде $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$:

$$(*)=\int \sin^2 x\cdot\sin x dx=\int \sin^2 x\cdot(-d(\cos x))=-\int(1-\cos^2 x)\cdot d(\cos x)=(*)$$

Косинус для удобства заменим одной буквой: $\cos x=t$. Этот приём я называю «турбо»-заменой, поскольку здесь можно вообще не прерывать решение:

$$(*)=-\int(1-t^2)dt=\int(t^2-1)dt=\frac{t^3}{3}-t+C\overset{t=\cos x}{=}=\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+C,\ \text{где}\ C=const$$

Потренируйтесь самостоятельно:

Пример 39

а) $\int\frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}$, а) $\int\cos^5 x dx$, в) $\int\sin^3 x\cos^8 x dx$,

Итак, для рассмотренных интегралов справедливо следующее **правило: от функции, которая находится в нечётной степени, «откусываем» один множитель, а за t – обозначаем другую функцию**.

Следует отметить, что далеко не все «тригонометрические» интегралы являются берущимися, но в рамках данного курса я не буду останавливаться на подробной классификации и ограничусь лишь распространёнными примерами.

Замолвим слово о тангенсах и котангенсах:

Пример 40

$$\int ctg^2 x dx$$

Тут всё просто:

$$\int ctg^2 x dx \overset{(1)}{=} \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x} \overset{(2)}{=} \int \frac{(1-\sin^2 x)dx}{\sin^2 x} \overset{(3)}{=} \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx \overset{(4)}{=}$$
$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx \overset{(5)}{=} -ctgx - x + C, \text{ где } C = const$$

(1) Используем формулы $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

(2) и $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$.

(3) Почленно делим числитель на знаменатель. К слову, получился вывод формулы $ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1$. Так и надо изучать математику! Знаем минимум – остальное выводим!

(4) Используем свойство линейности.

(5) Интегрируем с помощью таблицы.

Аналогичный интеграл для самостоятельного решения:

Пример 41

$$\int tg^2 \frac{x}{2} dx$$

Если тангенс / котангенс находятся в более высоких степенях *(3-й, 4-й, 5-й и т.д.)*, то их «разваливают» на части с помощью формул $tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1$, $ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1$. Посмотрим, как это происходит в простейшем случае:

Пример 42

$$\int tg^3 x dx = \int tg^2 x \cdot tgx dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \cdot tgx dx = \int \left(\frac{tgx}{\cos^2 x} - tgx\right)dx =$$
$$= \int \frac{tgx dx}{\cos^2 x} - \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \int tgx d(tgx) + \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \frac{tg^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C, \text{ где } C = const$$

То есть, что? Отщипнули тангенс, воспользовались формулой $tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1$, свойством линейности и подведением функций под знак дифференциала. Заметьте, что первый интеграл настолько прост, что в нём можно обойтись даже без «турбо»-замены $tgx = t$

«Быстрая» замена – это хорошо и удобно, но в более трудных случаях лучше использовать её «полноценный» вариант, дабы не запутаться:

Пример 43

$$\int \frac{\cos 2xdx}{\sin^{3} 2x}$$

Как мы помним, основной предпосылкой замены является наличие в *подынтегральном выражении* некоторой функции и её производной. Но при дифференцировании косинус и синус взаимно превращаются друг в друга, и возникает вопрос: что же обозначать за t – синус или косинус?! Вопрос можно решить методом ~~научного~~ практического тыка, но делать этого мы не будем. Потому что есть

общий ориентир: **за** t **часто** *(но не всегда!)* **нужно обозначить ту функцию, которая, образно говоря, находится в «неудобном положении»**.

$$\int \frac{\cos 2xdx}{\sin^{3} 2x} = (*)$$

В данном случае косинус «гуляет сам по себе», а вот синус «обременён» степенью. Его-то и обозначаем: $\sin 2x = t$. Далее можно «навесить» значки дифференциала на обе части: $d(\sin 2x) = dt$ и оформить преобразования «столбиком», но мы всё запишем компактнее:

$d(\sin 2x) = (\sin 2x)'dx = 2\cos 2xdx = dt$, и из последнего равенства выражаем нужный нам кусок:

$$\cos 2xdx = \frac{dt}{2}$$

Такая вот красота:

$$\int \frac{\cos 2xdx = \frac{dt}{2}}{\underbrace{\sin^{3} 2x}_{\substack{\shortparallel \\ t}}}$$

и можно продолжать:

$$(*) = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^{3}} = \frac{1}{2}\int t^{-3}dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(-2)} t^{-2} + C \overset{t=\sin 2x}{=} -\frac{1}{4\sin^{2} 2x} + C, \text{ где } C = const$$

Готово.

Интеграл по Вашу душу:

Пример 44

$$\int \cos^{7} 2x \sin 2xdx$$

Решение и ответ в конце методички.

Следует отметить, что сформулированный выше ориентир является всего лишь частным ориентиром, а не каким-то всеобъемлющим и абсолютным правилом. Так, если для интеграла $\int \frac{\sqrt[3]{tg5x}dx}{\cos^2 5x}$ он ещё работает, то для $\int \frac{tg5xdx}{\cos^2 5x}$ оказывается неверным.

Да, кстати, а почему бы и нет? =)

Пример 45

$$\int \frac{\sqrt[3]{tg5x}dx}{\cos^2 5x}$$

Здесь можно рискнуть подвести функцию под знак дифференциала или использовать «турбо»-замену – каждый решает для себя сам.

7. Интегрирование некоторых дробей

Дроби нам уже встречались (не далее, как в предыдущем примере ☺), и в этом параграфе мы несколько систематизируем информацию, а также освоим специфические приёмы интегрирования дробей.

Начнём с заштатных случаев $\int \frac{dx}{ax^2+c}$, $\int \frac{dx}{ax^2-c}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 \pm c}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{c-ax^2}}$ *(коэффициенты a и c не равны нулю)*, которые «проскакивали» после *Примера 9*.

Такие интегралы проще всего решить подведением функции под знак дифференциала. Пожалуйста, возьмите в руки ***Таблицу интегралов*** и проследите, по каким формулам осуществляется интегрирование:

Пример 46

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(3x)^2+3}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{\sqrt{(3x)^2+3}} = \frac{1}{3}\ln\left|3x+\sqrt{9x^2+3}\right| + C$, где $C = const$

б) $\int \frac{dx}{2x^2-5} = \int \frac{dx}{(\sqrt{2}x)^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}x)}{(\sqrt{2}x)^2-(\sqrt{5})^2} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-\sqrt{5}}{\sqrt{2}x+\sqrt{5}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x-\sqrt{5}}{\sqrt{2}x+\sqrt{5}}\right| + C$, где $C = const$

Проанализируйте, **как и зачем** выделяются квадраты в данных примерах.

Так, в пункте «бэ» сначала представляем знаменатель в виде $(\sqrt{2}x)^2-(\sqrt{5})^2$ и затем подводим $\sqrt{2}x$ под знак дифференциала. А сделать это всё нужно для того, чтобы воспользоваться стандартной табличной формулой $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

Да чего там смотреть, попробуйте решить самостоятельно:

Пример 47

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-3}}$

б) $\int \frac{dx}{7x^2-4}$

И непременно проверочку – проверьте на прочность свои навыки!

«Родственные» интегралы $\int \frac{bxdx}{ax^2+c}$, $\int \frac{bxdx}{ax^2-c}$, $\int \frac{bxdx}{\sqrt{ax^2 \pm c}}$, $\int \frac{bxdx}{\sqrt{c-ax^2}}$ решаются путём замены знаменателя или подкоренной суммы (см. *Примеры 17, 18а*), причём корни могут вообще любыми, например: $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{(2x^2+1)^4}}$ – заменили $2x^2+1=t$, и порядок.

Едем дальше. Интегралы вида $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (коэффициенты a и b не равны нулю) сводятся к одному из четырех табличных интегралов, которые мы только что рассмотрели. А достигается это **методом выделения полного квадрата**. Его суть состоит в том, чтобы **искусственно** организовать конструкцию вида $a^2+2ab+b^2$ либо $a^2-2ab+b^2$ с целью её превращения в $(a+b)^2$ либо $(a-b)^2$ соответственно.

Как говорится, школа, и ничего ВУЗовского =) Давайте изучим сам процесс:

Пример 48

$$\int \frac{dx}{x^2+4x}=(*)$$

Легко видеть, что всё дело сведётся к применению формулы $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, и мы начинаем «подгонять» знаменатель под этот шаблон: $x^2+4x=x^2+2\cdot 2x$. Очевидно, что $b=2$, а значит, нам нужно прибавить 4. И, чтобы выражение не изменилось – эту же «четвёрку» следует сразу вычесть:

$$x^2+4x=x^2+2\cdot 2x=x^2+2\cdot 2x+\mathbf{4-4}=(x+2)^2-4$$

Обязательно выполняем обратный ход:
$(x+2)^2-4=x^2+4x+4-4=x^2+4x$, всё нормально, ошибок нет.

$$(*)=\int \frac{dx}{x^2+4x+4-4}=\int \frac{dx}{(x+2)^2-4}=\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2-2^2}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x+2-2}{x+2+2}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x+4}\right|+C, \text{ где } C=const$$

Готово. Подведением «халявной» сложной функции под знак дифференциала: $d(x+2)$, в принципе, можно было пренебречь

Пример 49

Найти неопределенный интеграл:
$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 10}$$

Это пример для самостоятельного решения.

В том случае, если перед x^2 находится «минус», используем такой приём:

Пример 50

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 2x - x^2}} = (*)$$

Выносим «минус» за скобки и располагаем слагаемые в нужном нам порядке: $2 + 2x - x^2 = 2 - (x^2 - 2x)$. **Константу** *(«двойку» в данном примере)* **не трогаем!**

Таким образом, у нас «прорисовались» контуры формулы $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$, где $a = x, b = 1$

Поэтому ВНУТРИ скобок прибавляем единичку. И, анализируя это действие, приходим к выводу, что и ЗА скобкой единичку тоже нужно **прибавить**:
$$2 + 2x - x^2 = 2 - (x^2 - 2x) = 2 - (x^2 - 2x + \mathbf{1}) + \mathbf{1} = 3 - (x - 1)^2$$

Всегда, повторюсь, **ВСЕГДА** выполняем проверку. Используем ту же формулу в обратном направлении $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:
$$3 - (x - 1)^2 = 3 - (x^2 - 2x + 1) = 3 - x^2 + 2x - 1 = 2 + 2x - x^2, \text{ OK.}$$

Ну а зачем допускать ошибку там, где её можно 100%-но не допускать?

На чистовике решение следует оформить примерно так:

$$(*) = \int \frac{dx}{\sqrt{2 - (x^2 - 2x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2 + 1 - (x^2 - 2x + 1)}} =$$
$$= \int \frac{dx}{\sqrt{3 - (x - 1)^2}} = \int \frac{d(x - 1)}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - (x - 1)^2}} = \arcsin\left(\frac{x - 1}{\sqrt{3}}\right) + C, \text{ где } C = const$$

Усложняем задачу:

Пример 51

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 + 4x + 7}}$$

Здесь при x^2 уже не единичный коэффициент, а «пятёрка». И алгоритм решения таков:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+4x+7}}\overset{(1)}{=}\int\frac{dx}{\sqrt{5\cdot\left(x^2+\frac{4}{5}x+\frac{7}{5}\right)}}\overset{(2)}{=}\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{4}{5}x+\frac{7}{5}}}\overset{(3)}{=}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2\cdot\frac{2}{5}x+\frac{7}{5}}}\overset{(4)}{=}\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2\cdot\frac{2}{5}x+\frac{4}{25}+\frac{7}{5}-\frac{4}{25}}}\overset{(5)}{=}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{7}{5}-\frac{4}{25}}}\overset{(6)}{=}\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|x+\frac{2}{5}+\sqrt{\left(x+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{7}{5}-\frac{4}{25}}\right|+C\overset{(7)}{=}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|x+\frac{2}{5}+\sqrt{x^2+\frac{4}{5}x+\frac{7}{5}}\right|+C,\ \text{где } C=const$$

(1) Если при x^2 находится константа, то её сразу выносим за скобки.

(2) И вообще эту константу выносим за пределы интеграла, чтобы она «не путалась под ногами».

(3) Очевидно, что всё сведется к формуле $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$. Надо разобраться в слагаемом $2ab$, а именно, выделить множитель-«двойку»

(4) Ага, $b=\frac{2}{5}$. Значит, прибавляем $\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{4}{25}$, и эту же дробь вычитаем.

(5) Теперь выделяем полный квадрат. Поскольку у нас вырисовывается «длинный» логарифм $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+C$, то вычислять разность $\frac{7}{5}-\frac{4}{25}$ не имеет смысла (скоро будет понятно, почему).

(6) Собственно, применяем формулу $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+A}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right|+C$, только вместо «икс» у нас $x+\frac{2}{5}$. И, строго говоря, здесь пропущен один шаг – перед интегрированием функцию $x+\frac{2}{5}$ следовало подвести под знак дифференциала: $\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{d\left(x+\frac{2}{5}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{7}{5}-\frac{4}{25}}}$, но, как я уже неоднократно отмечал, этим часто пренебрегают.

(7) Под корнем всё желательно вернуть к первозданному виду:
$$\left(x+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{7}{5}-\frac{4}{25}=x^2+\frac{4}{5}x+\frac{4}{25}+\frac{7}{5}-\frac{4}{25}=x^2+\frac{4}{5}x+\frac{7}{5}$$

Готово.

Сложно? Как ни странно, математика тут школьная. Однако сильно маньячить тоже не будем:

Пример 52

$$\int \frac{dx}{2x^2+2x+1}$$

Это пример для самостоятельного решения.

Следующий метод можно назвать **частичным подведением числителя под знак дифференциала**. Он используется для интегралов вида: $\int \frac{(fx+g)dx}{ax^2+bx+c}$ или $\int \frac{(fx+g)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (коэффициенты a, b и f не равны нулю).

Пример 53

Я сразу запишу первый шаг, а потом объясню, что к чему:

$$\int \frac{(3x+2)dx}{x^2+x-1} = \int \frac{\frac{3}{2}d(x^2+x-1)+\frac{1}{2}dx}{x^2+x-1} = (*)$$

Такой подбор числителя выполняется устно либо на черновике. Сначала записываем под значком дифференциала весь знаменатель: $d(x^2+x-1)$. Теперь нужно подобрать множитель – ТАК, чтобы при раскрытии дифференциала получилось $3x$ *(см. исходный интеграл)*. Нетрудно выяснить, что этому требованию удовлетворяет множитель $\frac{3}{2}$, ибо:

$$\frac{3}{2}d(x^2+x-1) = \frac{3}{2}(x^2+x-1)'dx = \frac{3}{2}(2x+1)dx = \left(\boxed{3x}+\frac{3}{2}\right)dx$$

Но в исходном интеграле у нас «двойка», а значит, к нашей конструкции нужно добавить $\frac{1}{2}dx$:

$$\frac{3}{2}d(x^2+x-1)+\frac{1}{2}dx$$

Примечание: *в ряде примеров нужно наоборот, вычесть «излишек», это зависит от константы* g.

И в самом деле, если упростить всё это безобразие:

$$\frac{3}{2}d(x^2+x-1)+\frac{1}{2}dx = \frac{3}{2}(2x+1)dx+\frac{1}{2}dx =$$

$$= \left(3x+\frac{3}{2}\right)dx+\frac{1}{2}dx = \left(3x+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)dx = (3x+2)dx$$ – то получится в точности исходный числитель.

Осталось распилить интеграл на две части и применить уже известные методы:

$$(*) \overset{(1)}{=} \int\left(\frac{\frac{3}{2}d(x^2+x-1)}{x^2+x-1}+\frac{\frac{1}{2}dx}{x^2+x-1}\right) \overset{(2)}{=} \frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+x-1)}{x^2+x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x-1} \overset{(3)}{=}$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+x-1\right|+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-1}=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+x-1\right|+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+x-1\right|+\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+x-1\right|+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right|+C=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+x-1\right|+\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x+1-\sqrt{5}}{2x+1+\sqrt{5}}\right|+C,\ \text{где}\ C=const$$

(1) Делим дробь на 2 части (на практике этот шаг можно опускать)

(2) Используя свойство линейности.

(3) Первый интеграл, по сути, табличный $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|$; во втором интеграле выделяем полный квадрат (только что занимались).

Остальное дело техники, и я расписал все преобразования максимально подробно. Заметьте, что все эти «подробности» происходят только во втором интеграле, первое же слагаемое $\frac{3}{2}\ln\left|x^2+x-1\right|$ пришлось «тащить за собой» до конца решения.

И для закрепления материала пара интегралов для самостоятельного решения:

Пример 54

а) $\int\frac{8-13x}{\sqrt{x^2-1}}dx$

б) $\int\frac{(2x-10)dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$

Оба довольно простые. Здесь будет полезен частный случай интегрирования степенной функции, которого нет в таблице: $\int\frac{dx}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+C$

Интегралы $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$, $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$ решаются путём замен $x=\frac{1}{t}$ и $x+1=\frac{1}{t}$ соответственно, но подобные «кадры» проскакивают ой как редко, и поэтому я не счёл нужным включить их в настоящий курс. Более подробную информацию и соответствующие примеры можно найти на сайте, в статье Сложные интегралы.

И в заключение параграфа **самое вкусное**.

Внимание, важно! Следующие интегралы являются типовыми и встречаются особенно часто, в том числе, они возникают *(и уже возникали – см. Пример 31б)* в ходе решения других интегралов.

Этот тот случай, к**огда в числителе и знаменателе находятся многочлены одинаковых степеней**:

Пример 55

$$\int \frac{xdx}{x+3} = (*)$$

В принципе, здесь можно провести замену $x+3=t$, но есть более короткий и изящный путь. Идея состоит в том, чтобы **искусственно организовать в числителе <u>такое же</u> выражение, что и в знаменателе**. Для этого *прибавляем и сразу же вычитаем* «тройку», после чего делим числитель на знаменатель:

$$(*) = \int \frac{(x+3-3)dx}{x+3} = \int \left(1 - \frac{3}{x+3}\right)dx =$$

$$= \int dx - 3\int \frac{dx}{x+3} = x - 3\ln|x+3| + C, \text{ где } C = const$$

Аналогичный пример для самостоятельного решения:

Пример 56

$$\int \frac{x^2dx}{x^2-5}$$

Кстати, замена $x^2-5=t$ тут уже не проходит *(убедитесь в этом самостоятельно)*.

Рассмотренный приём работает и в ситуации, **если старшая степень числителя, больше старшей степени знаменателя**:

Пример 57

$$\int \frac{x^2dx}{2x-1}$$

Мысль та же – искусственно организовать в числителе $2x-1$. Для этого к скобке $(2x-1)$ подбираем ТАКОЙ множитель, чтобы при их раскрытии получился x^2:

$$\frac{1}{2}x(2x-1) = x^2 - \frac{1}{2}x$$

Однако у нас появился лишний кусок, и чтобы соблюсти равносильность, его же и прибавляем: $\frac{1}{2}x(2x-1) + \mathbf{\frac{1}{2}x}$

Теперь в последнем слагаемом снова вычленяем $(2x-1)$, при этом перед скобкой получается следующий множитель:

$$\frac{1}{2}x(2x-1)+\frac{1}{4}(2x+1)$$

Но в результате этого действия у нас снова появился «побочный продукт»: $\frac{1}{4}(2x+1)=\frac{1}{2}x+\mathbf{\frac{1}{4}}$, который следует вычесть:

$$\frac{1}{2}x(2x-1)+\frac{1}{4}(2x+1)-\frac{1}{4}$$

Если всё выполнено правильно, то при раскрытии всех скобок у нас должен получиться исходный числитель. **Проверяем**:

$$\frac{1}{2}x(2x-1)+\frac{1}{4}(2x-1)+\frac{1}{4}=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=x^2$$, гуд.

Далее *почленно* делим числитель на знаменатель, распиливая интеграл на 3 части:

$$\int\frac{x^2dx}{2x-1}=\int\frac{\frac{1}{2}x(2x-1)+\frac{1}{4}(2x-1)+\frac{1}{4}}{2x-1}dx=$$

$$=\int\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+\frac{1}{4(2x-1)}\right)dx=\frac{1}{2}\int xdx+\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{2x-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{d(2x-1)}{2x-1}=\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\ln|2x-1|+C,\text{ где } C=const$$

Проверим результат дифференцированием:

$$\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\ln|2x-1|+C\right)'=\frac{1}{4}\cdot2x+\frac{1}{4}\cdot1+\frac{1}{8(2x-1)}\cdot(2x-1)'+0=$$

$$=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4(2x-1)}=\frac{x\cdot2(2x-1)+1\cdot(2x-1)+1}{4(2x-1)}=\frac{4x^2-2x+2x}{4(2x-1)}=\frac{4x^2}{4(2x-1)}=\frac{x^2}{2x-1}$$

Надеюсь, у вас не возникло трудностей с приведением дробей к общему знаменателю *(принцип: «домножаем вверху на то, чего не хватает внизу»)*.

Желающие могут решить интеграл с помощью замены $2x-1=t$ $\left(x=\frac{1}{2}(t+1)\right)$, но лично мне первый способ кажется удобнее. Главное, немного потренироваться:

Пример 58

$$\int\frac{(x^3-3)dx}{x-1}$$

Это пример для самостоятельного решения. Здесь снова «прокатывает» замена: $x-1=t$, однако если вверху находится 4-я, 5-я и более высокие степени t, то менять переменную уже становится как-то совсем не весело. А посему рулит искусственное разложение. Вспоминаю рекорд, когда я раскладывал числитель с «тэ» в 11-й степени.

8. Универсальная тригонометрическая подстановка

Это «тяжёлая артиллерия» против «тригонометрических» интегралов, которая может помочь в тех случаях, когда не видно других способов решения. **Типичными интегралами**, где её нужно применить, являются следующие:

$$\int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x},\ \int \frac{dx}{3-\sin x},\ \int \frac{dx}{3+2\cos x},\ \int \frac{(7+\cos x)dx}{3+2\cos x-\sin x}$$ и некоторые другие.

С технической точки зрения, универсальная тригонометрическая подстановка (УТП) представляет собой обычную замену переменной, которая основана на тригонометрических формулах $\sin\alpha=\dfrac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$, $\cos\alpha=\dfrac{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

И очевидно, что для перечисленных выше примеров **замена** будет такова:

$tg\dfrac{x}{2}=z$ (для разнообразия я буду использовать букву «зет», а не «тэ»).

Таким образом, синус с косинусом становятся дробями: $\sin x=\dfrac{2z}{1+z^2}$, $\cos x=\dfrac{1-z^2}{1+z^2}$ и нам остаётся выяснить, во что превратится дифференциал dx. Для этого на обе части равенства $tg\dfrac{x}{2}=z$ «навешиваем» арктангенсы:

$$arctg\left(tg\frac{x}{2}\right)=arctgz,$$

после чего арктангенс и тангенс взаимно уничтожаются:

$$\frac{x}{2}=arctgz$$

$$x=2arctgz$$

и дифференциал вываливается прямо нам в руки:

$$dx=d(2arctgz)=(2arctgz)'dz=\frac{2dz}{1+z^2}$$

Пример 59

$$\int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}=(*)$$

Проведем универсальную тригонометрическую подстановку: $z=tg\dfrac{x}{2}$. Тогда:

$$\sin x=\frac{2z}{1+z^2},\quad \cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$x=2arctgz\Rightarrow dx=\frac{2dz}{1+z^2}$$

Сначала решение, затем комментарии:

$$(*)\overset{(1)}{=}\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{3+\frac{2(1-z^2)}{1+z^2}-\frac{2z}{1+z^2}}\overset{(2)}{=}\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{3(1+z^2)+2(1-z^2)-2z}{1+z^2}}\overset{(3)}{=}$$

$$=\int\frac{2(1+z^2)dz}{(1+z^2)(3+3z^2+2-2z^2-2z)}\overset{(4)}{=}2\int\frac{dz}{z^2-2z+5}\overset{(5)}{=}2\int\frac{dz}{z^2-2z+1+4}\overset{(6)}{=}$$

$$=2\int\frac{d(z-1)}{(z-1)^2+2^2}\overset{(7)}{=}\frac{2}{2}arctg\left(\frac{z-1}{2}\right)+C\overset{(8)}{=}arctg\left(\frac{tg\frac{x}{2}-1}{2}\right)+C,\text{ где } C=const$$

(1) Собственно, проводим замену: $\sin x=\frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$, $dx=\frac{2dz}{1+z^2}$.

(2) Приводим знаменатель к общему знаменателю.

(3) Избавляемся от четырехэтажности дроби *(см. Приложение **Полезные формулы**)* и раскрываем скобки.

(4) Двойку выносим за знак интеграла, сокращаем на $(1+z^2)$ и наводим порядок на нижнем этаже (приводим подобные слагаемые).

(5) Не правда ли, знакомая картина? ☺ Да, дроби будут преследовать нас до конца ~~жизни~~ темы. Выполняем подготовку для выделения полного квадрата.

(6) Выделяем полный квадрат и в академичном стиле подводим «халявную» функцию под дифференциал.

(7) Интегрируем по табличной формуле $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$.

(8) Проводим обратную замену $z=tg\frac{x}{2}$.

Готово. Надо сказать, проверка здесь не подарочная, и поэтому **в подобных интегралах следует проявлять повышенное внимание!**

Универсальная тригонометрическая подстановка применима и в том случае, если под синусом и косинусом находятся не «просто иксы», а аргумент вида $ax+b$ $(a\neq 0)$. Рассмотрим похожий и простейший в этом смысле интеграл:

$$\int\frac{dx}{3+2\cos 2x-\sin 2x}$$

Согласно тем же формулам $\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$, $\cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$, здесь нужно провести замену $tgx=z$ и подстановки $\sin 2x=\frac{2z}{1+z^2}$, $\cos 2x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$ у нас не меняются.

Но вот дифференциал будет немного другой, «навешиваем» арктангенсы:

$$arctg(tgx) = arctgz$$

$$x = arctgz \Rightarrow dx = \frac{dz}{1+z^2}$$

и решение будет отличаться от разобранного выше примера только константой.

Аналогично обстоят дела с другими «родственными» интегралами: $\int \frac{dx}{3+2\cos 3x - \sin 3x}$ решается путем замены $z = tg\frac{3x}{2}$ – и всё точно так же, единственное, дифференциал и константа будут опять другими. И так далее.

Следующие два интеграла для самостоятельного решения:

Пример 60

а) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$

б) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 5\cos^2 x}$

Во втором случае перед применением УТП нужно понизить степени с помощью формул $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

Как вы только что убедились на собственном опыте, УТП – есть процесс трудоёмкий, и поэтому по возможности её стараются обойти. Таким образом, перед решением «подозрительного» интеграла, **всегда анализируйте – а нет ли пути короче?** Так, например, вроде бы похожий интеграл $\int \frac{\cos x}{\sin x + 2}dx$ решается элементарно:

$$\int \frac{\cos x}{\sin x + 2}dx = \int \frac{d(\sin x + 2)}{\sin x + 2} = \ln|\sin x + 2| + C, \text{ где } C = const$$

Но можно использовать и УТП. Если такой возможности не заметить.

И сейчас мы рассмотрим типовые ситуации, когда лишней работы можно (и нужно) избегать:

Пример 61

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

Классика жанра. Справедливости ради, надо сказать, что здесь всё не так страшно, и УТП проходит без особых трудностей, но то лишь простейший случай.

Рассмотрим более традиционное решение:

$$\int \frac{dx}{\sin x} \overset{(1)}{=} \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} \overset{(2)}{=} \int \frac{dx}{2\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2}} \overset{(3)}{=} \int \frac{dx}{2\cdot tg\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}} \overset{(4)}{=}$$

$$= \int \frac{d\left(tg\frac{x}{2}\right)}{tg\frac{x}{2}} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C, \text{ где } C = const$$

(1) Используем тригонометрическую формулу $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, в данном случае $\alpha = \frac{x}{2}$.

(2) Искусственно делим и умножаем знаменатель на $\cos\frac{x}{2}$.

(3) По формуле $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ превращаем дробь в тангенс.

(4) Подводим функцию под знак дифференциала и дальше всё понятно.

Чтобы разделаться с «родственником» $\int \frac{dy}{\cos x}$ можно использовать так называемую *формулу приведения* $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ и решение фактически продублируется:

$$\int \frac{dy}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \int \frac{dx}{\sin\left(2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right)} = \ldots = \ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + C, \text{ где } C = const$$

Следует, однако, отметить, что это не единственный способ, и в других источниках информации вы можете встретить иной путь.

Для самостоятельного решения совсем простая вещь:

Пример 62

$$\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$$

Думаю, теперь ни у кого не возникнет проблем с интегралами:
$\int \frac{dx}{\sin 2x}$, $\int \frac{dx}{\cos 3x}$, $\int \frac{dx}{\sin 4x}$,... и т.п.

Как мы только что выяснили, идея состоит в том, чтобы с помощью преобразований, тригонометрических формул организовать в подынтегральной функции только тангенсы и его производную, после чего провести замену $tg\alpha = t$ (либо подвести тангенс под знак дифференциала).

Примечание: *допустимо и «зеркальное» решение с заменой* $ctg\alpha = t$

Кроме того, существует и **формальная предпосылка** для применения вышеуказанной замены: **сумма степеней синуса и косинуса должно быть целым отрицательным и ЧЁТНЫМ числом**, например:

$\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$: $\cos^{-1} x \cdot \sin^{-1} x \quad -1-1=-2$ – целое отрицательное и чётное число.

а если подынтегральная функция содержит ТОЛЬКО синус или ТОЛЬКО косинус, то интеграл берётся **и при нечётной степени**. Кстати, почему? По той причине, что есть формула $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, и всё дело сводится к озвученной предпосылке. Например:

$\int \frac{dx}{\sin^3 2x} = \int \frac{dx}{(2\sin x\cos x)^3} = \int \frac{dx}{8\sin^3 x\cos^3 x}$, здесь $\sin^{-3} x \cdot \cos^{-3} x$: $\quad -3-3=-6$ – целое отрицательное и чётное число.

Ну а интегралы наподобие $\int \frac{dx}{\cos^3 2x}$ сводятся к синусу с помощью формулы приведения $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

Рассмотрим ещё пару примеров на это правило:

Пример 63

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^6 x}$$

Сумма степеней синуса и косинуса $\sin^2 x \cdot \cos^{-6} x$: $\quad 2-6=-4$ – целое отрицательное **и нечётное** число, а значит, интеграл можно свести к тангенсам и его производной:

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^6 x} \overset{(1)}{=} \int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^2 x \cdot \cos^4 x} \overset{(2)}{=} \int \frac{tg^2 x dx}{\cos^4 x} \overset{(3)}{=} \int \frac{tg^2 x dx}{\cos^2 x \cdot \cos^2 x} \overset{(4)}{=}$$
$$= \int \frac{tg^2 x(tg^2 x+1)dx}{\cos^2 x} \overset{(5)}{=} \int tg^2 x(tg^2 x+1)d(tgx) \underset{tgx=t}{\overset{(6)}{=}}$$
$$= \int t^2(t^2+1)dt = \int (t^4+t^2)dt = \frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}+C \overset{t=tgx}{=} \frac{tg^5 x}{5}+\frac{tg^3 x}{3}+C, \text{ где } C=const$$

(1) «Отщипываем» $\cos^2 x$

(2) чтобы с помощью формулы $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$ получить $tg^2 x$.

(3) «Отщипываем» $\cos^2 x$ ещё раз

(4) и используем формулу $\frac{1}{\cos^2 x} = tg^2 x + 1$.

(5) Подводим под знак дифференциала.

(6) Проводим «турбо»-замену $tgx = t$ с дальнейшим интегрированием и обратной заменой.

Пример 64

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}$$

Это пример для самостоятельного решения.

Нередко в подынтегральной функции находится «солянка»:

Пример 65

$$\int \frac{(2tgx+3)dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$$

В этом интеграле изначально присутствует тангенс, что сразу наталкивает на знакомую мысль:

$$\int \frac{(2tgx+3)dx}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{(2tgx+3)dx}{\frac{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x} = \int \frac{(2tgx+3)d(tgx)}{(tg^2 x + 2)} \overset{tgx=t}{=}$$

$$= \int \frac{(2t+3)dt}{t^2+2} = \int \frac{2tdt}{t^2+2} + 3\int \frac{dt}{t^2+2} = \int \frac{d(t^2+2)}{t^2+2} + 3\int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{2})^2} =$$

$$= \ln(t^2+2) + \frac{3}{\sqrt{2}} arctg \frac{t}{\sqrt{2}} + C \overset{t=tgx}{=} \ln(tg^2 x + 2) + \frac{3}{\sqrt{2}} arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right) + C, \text{ где } C = const$$

Искусственное преобразование в самом начале и остальные шаги оставлю без комментариев, поскольку обо всем уже говорилось выше.

И пара «чемпионских» интегралов для самостоятельного решения:

Пример 66

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x}$

б) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + 4\cos^4 x}$

Да, в них, конечно, можно понизить степени синуса, косинуса, использовать универсальную тригонометрическую подстановку, но решение будет гораздо эффективнее и короче, если его провести через тангенсы с «турбо»-заменой.

Решения и ответы в конце методички.

9. Метод неопределённых коэффициентов

Данный метод используется в ходе интегрирования *дробно-рациональных функций*, с которыми мы уже имели дело. Что это за функции? Простыми словами, дробно-рациональная функция – это дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены. В частности, в числителе может быть константа:

Пример 67

$$\int \frac{dx}{x^2-4}$$

Да, совершенно верно, табличный интеграл «высокого» логарифма, строго говоря, не элементарен и подлежит доказательству. Чтобы не путаться с параметром, выведем частный случай формулы $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ для $a = 2$.

Разложим знаменатель на множители:

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{dx}{x^2-2^2} = \int \frac{dx}{(x-2)(x+2)}$$

И здесь проскакивает интуитивная мысль, что неплохо бы нашу большую дробь превратить в две маленьких:

$\frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$, где A и B – *пока ещё* неопределённые числовые коэффициенты. И что тут сказать… – их нужно определить! ☺

Для этого приводим сумму дробей к общему знаменателю. Для удобства дальнейших действий левую и правую часть лучше поменять местами:

$$\frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{(x-2)(x+2)}$$

Одинаковые знаменатели убираем и справа приписываем формальное слагаемое:

$$A(x+2)+B(x-2) = 0\cdot x + 1$$

Теперь приравниваем коэффициенты при «иксах»:

$$A+B=0$$

и при константах:

$$2A-2B=1$$

В результате получена простейшая система линейных уравнений:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-2B=1 \end{cases}$$

Из 1-го уравнения выражаем $B=-A$ и подставляем во 2-е уравнение:

$2A-2(-A)=1 \quad \Rightarrow \quad 4A=1 \quad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{4}$, откуда: $B=-A=-\frac{1}{4}$.

Таким образом: $\dfrac{1}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x+2}=\dfrac{\frac{1}{4}}{x-2}+\dfrac{-\frac{1}{4}}{x+2}$

Само собой, проверочка:
$$\frac{1}{4(x-2)}-\frac{1}{4(x+2)}=\frac{1\cdot(x+2)-1\cdot(x-2)}{4(x-2)(x+2)}=\frac{x+2-x+2}{4(x-2)(x+2)}=\frac{4}{4(x-2)(x+2)}=\frac{1}{x^2-4}$$

И теперь-то мы вряд ли ошибёмся:
$$\int\frac{dx}{x^2-4}=\int\frac{dx}{(x-2)(x+2)}=\int\left(\frac{\frac{1}{4}}{x-2}+\frac{-\frac{1}{4}}{x+2}\right)dx=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+2}=$$
$$=\frac{1}{4}\ln|x-2|-\frac{1}{4}\ln|x+2|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C,\ \text{где}\ C=const$$

Потренируйтесь самостоятельно:

Пример 68

$$\int\frac{dx}{x^2+x}$$

Здесь можно выделить полный квадрат, но, коль скоро, многочлен разложим на множители, то работает и метод неопределённых коэффициентов. Кому как удобнее.

Но то были, конечно, шутки, и сейчас мы разберём более содержательный пример с **подробным алгоритмом** действий:

Пример 69

$$\int\frac{(x^2-19x+6)dx}{(x-1)(x^2+5x+6)}$$

Шаг 1. Первое, что мы ВСЕГДА делаем при решении интеграла от дробно-рациональной функции – это отвечаем на следующий вопрос: **является ли дробь правильной?** Данный шаг выполняется устно, и сейчас я объясню как:

Сначала смотрим на числитель и выясняем *старшую степень* многочлена:
$$\int\frac{(x^2-19x+6)dx}{(x-1)(x^2+5x+6)}$$
Старшая степень числителя равна двум.

Теперь смотрим на знаменатель и выясняем *старшую степень* знаменателя. Напрашивающийся путь – это раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, но можно поступить проще, в **каждой** скобке находим старшую степень
$$\int\frac{(x^2-19x+6)dx}{(x-1)(x^2+5x+6)}$$

и мысленно умножаем соответствующие члены: $x \cdot x^2 = x^3$ – таким образом, старшая степень знаменателя равна трём. Совершенно понятно, что если реально раскрыть скобки, то мы не получим степени, больше трёх.

Вывод: старшая степень числителя (2) СТРОГО **меньше** старшей степени знаменателя (3), значит, дробь является правильной.

Если бы в числителе находился многочлен 3-й, 4-й, 5-й и т.д. степеней, то дробь была бы **неправильной**.

И сейчас мы будем рассматривать только правильные дробно-рациональные функции. Неправильные дроби разберём в конце параграфа.

Шаг 2. Раскладываем знаменатель на множители. Смотрим на наш знаменатель:
$(x-1)(x^2+5x+6)$

Вообще говоря, здесь уже произведение множителей, но, тем не менее, зададимся вопросом: а нельзя ли что-нибудь разложить еще? Решаем квадратное уравнение (см. *Приложение* ***Полезные формулы***):
$x^2+5x+6=0$
$D=25-24=1>0$, значит, трехчлен раскладывается на множители.

Что мы незамедлительно и делаем:
$\sqrt{D}=\sqrt{1}=1$
$$x_1=\frac{-5-1}{2}=-3,\quad x_2=\frac{-5+1}{2}=-2$$
$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

Общее правило: ВСЁ, что в знаменателе МОЖНО разложить на множители – раскладываем на множители.

Шаг 3. Методом неопределенных коэффициентов раскладываем подынтегральную функцию в сумму простейших дробей. Такие дроби часто называют **элементарными**.

По мотивам предыдущих примеров:

$\dfrac{x^2-19x+6}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x+3}$, где A, B, C – *пока ещё* неизвестные коэффициенты.

И осталась одна маленькая проблемка – выяснить, чему они равны ☺

Приводим конструкцию к общему знаменателю и приписываем справа исходную подынтегральную функцию:

$$\frac{A(x+2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x+3)}=\frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

Благополучно избавляемся от знаменателей (т.к. они одинаковы):
$A(x+2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x+2)=x^2-19x+6$

И вспоминаем знаменитое **школьное правило:** **для того чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена**:

$$A(x^2+5x+6)+B(x^2+2x-3)+C(x^2+x-2)=x^2-19x+6$$

На всякий пожарный: $(x+2)(x+3)=x\cdot x+2\cdot x+x\cdot 3+2\cdot 3=x^2+5x+6$

Коэффициенты A, B, C я тоже затолкаю в скобки. Ради лучшего понимания:

$$(Ax^2+5Ax+6A)+(Bx^2+2Bx-3B)+(Cx^2+Cx-2C)=x^2-19x+6$$

Теперь нужно составить систему линейных уравнений. Сначала разыскиваем старшие степени:

$$(Ax^2+5Ax+6A)+(Bx^2+2Bx-3B)+(Cx^2+Cx-2C)=x^2-19x+6$$

и записываем первое уравнение:

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ \ldots \\ \ldots \end{cases}$$

Ещё раз повторю следующий нюанс. Что было бы, если б в правой части вообще не было x^2? То есть, красовалось бы просто $-19x+6$ без всякого квадрата? В этом случае в уравнении нужно было бы поставить справа ноль: $A+B+C=0$. По той причине, что в правой части всегда можно приписать этот самый квадрат с нулём: $0\cdot x^2-19x+6$. **Итак, если в правой части отсутствует какие-нибудь переменные или (и) свободный член, то в правых частях соответствующих уравнений системы ставим нули**.

Далее процесс идет по снижающейся траектории, отмечаем все «иксы»:

$$(Ax^2+5Ax+6A)+(Bx^2+2Bx-3B)+(Cx^2+Cx-2C)=x^2-19x+6$$

и записываем соответствующие коэффициенты во второе уравнение системы:

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ 5A+2B+C=-19 \\ \ldots \end{cases}$$

И, наконец, в третье уравнение «собираем» свободные члены:

$$(Ax^2+5Ax+6A)+(Bx^2+2Bx-3B)+(Cx^2+Cx-2C)=x^2-19x+6$$

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ 5A+2B+C=-19 \\ 6A-3B-2C=6 \end{cases}$$

Тут, конечно, не нужно извращаться с формулами Крамера, обратной матрицей или элементарными преобразованиями. Систему решаем «дедовскими» методами:

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ 5A+2B+C=-19 \\ 6A-3B-2C=6 \end{cases} \overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} C=1-A-B \\ 5A+2B+1-A-B=-19 \\ 6A-3B-2(1-A-B)=6 \end{cases} \overset{(2)}{\Rightarrow} \begin{cases} C=1-A-B \\ 4A+B=-20 \\ 8A-B=8 \end{cases} \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 12A=-12 \Rightarrow A=-1$$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} B=-16$$

$$\overset{(5)}{\Rightarrow} C=18$$

(1) Из первого уравнения выражаем C и подставляем его во 2-е и 3-е уравнения системы. Это сам рациональное решение.

(2) Приводим подобные слагаемые во 2-м и 3-м уравнениях.

(3) Почленно складываем 2-е и 3-е уравнение, получая равенство $12A=-12$, из которого следует, что $A=-1$

(4) Подставляем $A=-1$ во 2-е *(или 3-е)* уравнение, откуда находим, что $B=-16$

(5) Подставляем $A=-1$ и $B=-16$ в первое уравнение, получая $C=18$.

После решения системы всегда полезно сделать **проверку** – подставить найденные значения A, B, C *в каждое* уравнение системы, в результате чего всё должно «сойтись».

Чистовое оформление задание должно выглядеть примерно так:
“

$$\int \frac{(x^2-19x+6)dx}{(x-1)(x^2+5x+6)} = \int \frac{(x^2-19x+6)dx}{(x-1)(x+2)(x+3)} = (*)$$

Методом неопределенных коэффициентов разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей:

$$\frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

$$A(x+2)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x+2) = x^2-19x+6$$

$$A(x^2+5x+6)+B(x^2+2x-3)+C(x^2+x-2) = x^2-19x+6$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях:

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ 5A+2B+C=-19 \\ 6A-3B-2C=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=1-A-B \\ 4A+B=-20 \\ 8A-B=8 \end{cases} \Rightarrow 12A=-12 \Rightarrow A=-1,\ \ B=-16,\ \ C=18$$

$$(*) = \int\left(-\frac{1}{x-1} - \frac{16}{x+2} + \frac{18}{x+3}\right)dx = -\int\frac{dx}{x-1} - 16\int\frac{dx}{x+2} + 18\int\frac{dx}{x+3} =$$

$$= -\ln|x-1| - 16\ln|x+2| + 18\ln|x+3| + C, \text{ где } C = const$$
“

Как видите, основная трудность задания состояла в том, чтобы составить (правильно!) и решить (правильно!) систему линейных уравнений.

Не позволяй душе лениться:

$$(-\ln|x-1|-16\ln|x+2|+18\ln|x+3|+C)'=$$
$$=-(\ln|x-1|)'-16(\ln|x+2|)'+18(\ln|x+3|)'+(C)'=$$
$$=-\frac{1}{(x-1)}\cdot(x-1)'-16\cdot\frac{1}{(x+2)}\cdot(x+2)'+18\cdot\frac{1}{(x+3)}\cdot(x+3)'+0=$$
$$=-\frac{1}{(x-1)}-\frac{16}{(x+2)}+\frac{18}{(x+3)}=$$
$$=\frac{-(x+2)(x+3)-16(x-1)(x+3)+18(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x+3)}=$$
$$=\frac{-(x^2+5x+6)-16(x^2+2x-3)+18(x^2+x-2)}{(x-1)(x^2+5x+6)}=$$
$$=\frac{-x^2-5x-6-16x^2-32x+48+18x^2+18x-36}{(x-1)(x^2+5x+6)}=\frac{x^2-19x+6}{(x-1)(x^2+5x+6)}$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, интеграл найдем правильно.

В ходе проверки пришлось приводить выражение к общему знаменателю, и фактически *метод неопределённых коэффициентов* – есть обратное действие.

Отрабатываем навыки!

Пример 70

$$\int\frac{(43x-67)dx}{(x-1)(x^2-x-12)}$$

Решение и ответ в конце методички.

И снова вернёмся к дроби из «разжёванного» выше примера: $\dfrac{x^2-19x+6}{(x-1)(x+2)(x+3)}$. Нетрудно заметить, что в знаменателе все множители РАЗНЫЕ. Возникает вопрос, а что делать, если дана, например, такая дробь: $\dfrac{x^2-19x+6}{x^3(x+2)(x+3)^2(x^2+2x+13)}$?

Здесь в знаменателе у нас степени, или, как говорят математики, *кратные* множители. Кроме того, есть неразложимый *(здесь и далее – в поле действительных чисел)* на множители квадратный трехчлен $x^2+2x+13$. Легко убедиться, что дискриминант уравнения $x^2+2x+13=0$ отрицателен, и с трёхчлен не «развалить».

Что делать? Разложение в сумму будет выглядеть наподобие $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{x+3}$ с коэффициентами A, B, C вверху или может быть как-то по-другому? Ответим на этот вопрос следующим заданием:

Пример 71

Представить функцию $\dfrac{x^2-19x+6}{x^3(x+2)(x+3)^2(x^2+2x+13)}$ в виде суммы элементарных дробей с неизвестными коэффициентами.

Шаг 1. Проверяем, правильная ли у нас дробь
Старшая степень числителя: 2
Старшая степень знаменателя: 8
$2<8$, значит, дробь является правильной.

Шаг 2. Можно ли что-нибудь разложить в знаменателе на множители? Очевидно, что нет, всё уже разложено. Квадратный трехчлен $x^2+2x+13$ не раскладывается в произведение по указанным выше причинам. Это хорошо – работы меньше.

Шаг 3. Представим дробно-рациональную функцию в виде суммы элементарных дробей. В данном случае, разложение имеет следующий вид:

$$\frac{x^2-19x+6}{x^3(x+2)(x+3)^2(x^2+2x+13)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x+2}+\frac{E}{x+3}+\frac{F}{(x+3)^2}+\frac{Gx+H}{x^2+2x+13}$$

И здесь можно выделить три принципиальных момента:

1) Если в исходном знаменателе находится «одинокий» множитель в первой степени (в нашем случае $(x+2)$), то вверху ставим неопределённый коэффициент (в нашем случае D). *Примеры 67-70* только и состояли из таких «уникальных» множителей.

2) Если в знаменателе есть *кратный* множитель x^n, то раскладывать нужно так: $\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\ldots+\frac{A_n}{x^n}$ – то есть последовательно перебрать все степени «икса» от первой до энной степени. В нашем примере два кратных множителя: x^3 и $(x+3)^2$ – ещё раз взгляните на разложение выше и проследите, как работает это правило.

3) Если в знаменателе находится неразложимый многочлен второй степени (в нашем случае $x^2+2x+13$), то в числителе нужно записать линейную функцию с неопределенными коэффициентами (в нашем случае $Gx+H$ с неопределенными коэффициентами G и H).

Есть еще 4-й случай, но на практике он встречается крайне редко.

Потренируйтесь самостоятельно:

Пример 72

Представить функцию $\dfrac{x^6+25x^3-12}{x(x-2)^3(x^2-4)(x^2+4)}$ в виде суммы элементарных дробей с неизвестными коэффициентами.

Строго следуйте алгоритму!!

И после того, как мы разобрались в принципах разложения, можно смело переходить к «настоящим» примерам:)

Пример 73

$$\int \frac{(x^2-6x+8)dx}{x^3+8}$$

Тем не менее, будем занудны, и ещё раз выдержим алгоритм:

Шаг 1. Очевидно, что дробь является правильной: $2<3$

Шаг 2. Можно ли знаменатель разложить на множители? Можно. Здесь сумма кубов $x^3+8=x^3+2^3$. Раскладываем знаменатель на множители, используя формулу сокращенного умножения $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$. Потихоньку начинаем оформлять решение:

$$\int \frac{(x^2-6x+8)dx}{x^3+8}=\int \frac{(x^2-6x+8)dx}{(x+2)(x^2-2x+4)}=(*)$$

Шаг 3. Методом неопределенных коэффициентов разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей:

$$\frac{x^2-6x+8}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}$$

Обратите внимание, что многочлен x^2-2x+4 неразложим на множители *(проверьте, что дискриминант отрицательный)*, поэтому вверху мы ставим линейную функцию $Bx+C$ с двумя неизвестными коэффициентами, а не просто одну буковку.

Приводим сумму к общему знаменателю и приписываем справа исходную дробь:

$$\frac{A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{x^2-6x+8}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$

Знаменатели аминь:

$$A(x^2-2x+4)+B(x^2+2x)+C(x+2)=x^2-6x+8$$

Составим и решим систему:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+2B+C=-6 \\ 4A+2C=8 \end{cases} \overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} B=1-A \\ -2A+2(1-A)+C=-6 \\ 4A+2C=8 \end{cases} \overset{(2)}{\Rightarrow} \begin{cases} B=1-A \\ -4A+C=-8 \\ 4A+2C=8 \end{cases} \overset{(3)}{\Rightarrow} 3C=0$$

$$\Rightarrow A=2,\ \ B=-1$$

(1) Из 1-го уравнения выражаем B и подставляем во второе уравнение системы (это наиболее рациональный способ).

(2) Приводим подобные слагаемые во 2-м уравнении.

(3) Почленно складываем 2-е и 3-е уравнения, и дальше всё понятно.

Таким образом, наш интеграл разваливается на две – даже на три части:

$$(*)\overset{(1)}{=}\int\left(\frac{2}{x+2}-\frac{x}{x^2-2x+4}\right)dx\overset{(2)}{=}2\int\frac{dx}{x+2}+\int\frac{-\frac{1}{2}d(x^2-2x+4)-dx}{(x^2-2x+4)}\overset{(3)}{=}$$

$$=2\ln|x+2|-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-2x+4)}{(x^2-2x+4)}-\int\frac{dx}{x^2-2x+1+3}\overset{(4)}{=}$$

$$=2\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+4)-\int\frac{d(x-1)}{(x-1)^2+(\sqrt{3})^2}\overset{(5)}{=}$$

$$=2\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+4)-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)+C,\text{ где } C=const$$

(1) В соответствии с найденными коэффициентами $A=2,\ B=-1,\ C=0$ записываем сумму $\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}$.

(2) Используем свойство линейности. Во втором интеграле сразу выполняем частичное подведение функции под знак дифференциала. Проведённый искусственный подбор предварительно проверяем *(устно либо на черновике)*:

$$-\frac{1}{2}d(x^2-2x+4)-dx=-\frac{1}{2}(x^2-2x+4)'dx-dx=-\frac{1}{2}(2x-2)dx-dx=$$

$$=(-x+1)dx-dx=(-x+1+1)dx=-xdx$$

ОК.

(3) Еще раз используем свойство линейности. В последнем интеграле готовим знаменатель для выделения полного квадрата.

(4) Берём второй интеграл, в третьем – выделяем полный квадрат.

(5) Берём третий интеграл.

Готово.

Пара интегралов для самостоятельного решения, один похожий, другой – труднее:

Пример 74

а) $\int\frac{(x^2+23)dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}$

б) $\int\frac{(2x^3-2x^2+5)dx}{(x-1)^2(x^2+4)}$

Ни в коем случае не пропускаем – такие интегралы предлагают даже студентам заочных отделений.

И наша «мыльная опера» продолжается. Перейдем к рассмотрению случая, когда старшая степень числителя *больше либо равна* старшей степени знаменателя:

Интегрирование неправильной дробно-рациональной функции

Пример 75

$$\int \frac{(4x^4 + 8x^3 - 3x - 3)dx}{x^3 + 2x^2 + x}$$

Совершенно очевидно, что данная дробь является неправильной: $4 > 3$

Основной метод решения интеграла с неправильной дробно-рациональной функций – это **деление числителя на знаменатель**. Да-да, делить будем столбиком, как самые обычные числа в школе.

Коротко о самом алгоритме. Сначала рисуем «заготовку» для деления:

$$\begin{array}{l|l} 4x^4 + 8x^3 + 0x^2 - 3x - 3 & x^3 + 2x^2 + x + 0 \\ \hline & \end{array}$$

Обратите внимание: ВСЕ недостающие степени *(и (или) свободные члены)* **без пропусков записываем с нулевыми коэффициентами в ОБОИХ многочленах!**

Теперь маленькая задачка, на какой множитель нужно умножить x^3, чтобы получить $4x^4$? Очевидно, что на $4x$:

$$\begin{array}{l|l} 4x^4 + 8x^3 + 0x^2 - 3x - 3 & x^3 + 2x^2 + x + 0 \\ \cline{2-2} & 4x \end{array}$$

Далее умножаем $4x$ сначала на x^3, потом – на $2x^2$, потом – на x, потом – на 0 и записываем результаты слева:

$$\begin{array}{l|l} 4x^4 + 8x^3 + 0x^2 - 3x - 3 & x^3 + 2x^2 + x + 0 \\ \cline{2-2} 4x^4 + 8x^3 + 4x^2 + \ 0 & 4x \end{array}$$

Проводим черточку и из верхней строки вычитаем нижнюю, после чего сносим вниз свободный член (–3):

$$\begin{array}{l|l} 4x^4 + 8x^3 + 0x^2 - 3x - 3 & x^3 + 2x^2 + x + 0 \\ \cline{2-2} 4x^4 + 8x^3 + 4x^2 + \ 0 & 4x \\ \cline{1-1} \qquad\qquad -4x^2 - 3x - 3 & \end{array}$$

Старшая степень остатка $-4x^2 - 3x - 3$ равна двум, старшая степень делителя $x^3 + 2x^2 + x + 0$ – больше, она равна трём, значит, больше разделить не удастся. Если бы в числителе, был многочлен, скажем, пятой степени, то пришлось бы делить еще раз.

Таким образом: $\dfrac{4x^4 + 8x^3 - 3x - 3}{x^3 + 2x^2 + x} = 4x + \dfrac{-4x^2 - 3x - 3}{x^3 + 2x^2 + x}$, и немедленная проверка:

$$4x + \frac{-4x^2 - 3x - 3}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{4x(x^3 + 2x^2 + x) - 4x^2 - 3x - 3}{x^3 + 2x^2 + x} =$$

$$= \frac{4x^4 + 8x^3 + 4x^2 - 4x^2 - 3x - 3}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{4x^4 + 8x^3 - 3x - 3}{x^3 + 2x^2 + x}$$, всё тип-топ.

Итак, наше чистовое решение принимает следующий вид:

$$\int \frac{(4x^4+8x^3-3x-3)dx}{x^3+2x^2+x}=(*)$$

Делим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{l|l} 4x^4+8x^3+0x^2-3x-3 & x^3+2x^2+x+0 \\ \cline{2-2} \underline{4x^4+8x^3+4x^2+\ 0} & 4x \\ \qquad\quad -4x^2-3x-3 & \end{array}$$

$$(*)\overset{(1)}{=}\int\left(4x+\frac{(-4x^2-3x-3)}{x(x^2+2x+1)}\right)dx\overset{(2)}{=}2x^2+\int\frac{(-4x^2-3x-3)}{x(x+1)^2}dx=(*)$$

(1) Что нам дало деление? Много хорошего: теперь у нас два слагаемых, первое – интегрируется совсем просто, а второе представляет собой **правильную дробь**, которую мы решать уже умеем.

(2) От первого слагаемого сразу берем интеграл. Знаменатель дроби раскладываем на множители

Дальше всё идет по отработанной схеме. Методом неопределенных коэффициентов разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей:

$$\frac{(-4x^2-3x-3)}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}=\frac{-4x^2-3x-3}{x(x+1)^2}$$

$$A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx=-4x^2-3x-3$$

$$\begin{cases} A+B=-4 \\ 2A+B+C=-3 \quad \Rightarrow B=-1, C=4 \\ A=-3 \end{cases}$$

…почти во всех задачах у нас получаются «хорошие» целые коэффициенты, но на практике это, конечно же, не всегда так. Поэтому ни в коем случае не тушуйтесь, если у вас начнут выскакивать дроби – проверка всё прояснит.

$$(*)=2x^2+\int\left(-\frac{3}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{4}{(x+1)^2}\right)dx=2x^2-3\ln|x|-\ln|x+1|-\frac{4}{x+1}+C, \text{ где } C=const$$

Готово.

И крайне полезный пример для самостоятельного решения ;)

Пример 76

$$\int\frac{(x^3-3)dx}{(x-1)(x^2-1)}$$

10. Интегрирование корней

Интегралы с корнями (радикалами) мы уже решали, и этот параграф будет посвящён тем случаям, когда изученные методы не срабатывают. Как правило, в таких примерах корни находятся в загадочном положении, и зачастую их несколько штук.

Спешу вас обрадовать, что особой новизны не будет, поскольку **основной приём решения подобных интегралов – это тоже замена переменной**. Но замена *особая* – она должна избавить нас **от ВСЕХ корней в подынтегральной функции**.

Начнём с детского квадратного корня:

Пример 77

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)}$$

Анализируя подынтегральную функцию, приходишь к печальному выводу, что она совсем не напоминает табличные интегралы. Вот если бы всё это добро находилось в числителе – было бы просто. Или бы корня внизу не было. Или многочлена. Никакие методы интегрирования дробей тоже не помогают. Что делать?

В данном примере нужно провести замену $x = t^2$. Почему именно такую замену? Потому что $\sqrt{t^2} = t$ и корень пропадает.

Если бы в *подынтегральной функции* вместо квадратного корня находился $\sqrt[3]{x}$, то мы бы провели замену $x = t^3$. Если бы там был $\sqrt[4]{x}$ – то $x = t^4$ и так далее.

Хорошо, $\sqrt{x}$ у нас трансформировался в $\sqrt{t^2} = t$. Что произойдет с суммой $(x+3)$? Берём нашу замену $x = t^3$ и прибавляем к обеим частям «тройку»:

$$x + 3 = t^3 + 3$$

Ловкость рук и никакого обмана ☺

Осталось выяснить, во что превратится дифференциал dx. Делается это по отработанной технологии – снова берём замену $x = t^2$ и «навешиваем» значки дифференциала на обе части:

$$dx = d(t^2)$$

Слева получился готовый дифференциал, а вот справа его нужно раскрыть:

$$dx = (t^2)'dt$$
$$dx = 2tdt$$

Чистовое оформление решения должно выглядеть примерно так:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)} = (*)$$

Проведём замену: $x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$
$x + 3 = t^2 + 3$

$$(*) \overset{(1)}{=} \int \frac{2tdt}{t(t^2+3)} \overset{(2)}{=} 2\int \frac{dt}{t^2+3} \overset{(3)}{=} 2\int \frac{dt}{(\sqrt{3})^2 + t^2} \overset{(5)}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{t}{\sqrt{3}} + C \overset{(6)}{=} \overset{t=\sqrt{x}}{}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \sqrt{\frac{x}{3}} + C, \text{ где } C = const$$

(1) Проводим подстановку (как, что и куда, уже рассмотрено).

(2) Выносим множитель за пределы интеграла. Числитель и знаменатель сокращаем на t.

(3) Получившийся интеграл является табличным, готовим его для интегрирования.

(4) Интегрируем по формуле арктангенса.

(5) Проводим *обратную замену*. Как это делается? Вспоминаем, от чего плясали: если $x = t^2$, то $t = \sqrt{x}$.

Ну а как иначе? Корни вернулись.

И нет нам от них избавления ☺:

Пример 78

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + 3}$$

Это пример для самостоятельного решения.

Рассмотрим несколько другую вариацию по теме:

Пример 79

$$\int \frac{\sqrt{x+2}dx}{x-3} = (*)$$

Предварительный анализ *подынтегральной функции* опять показывает, что лёгкого пути нет. А поэтому нужно избавляться от корня.

Проведем замену: $x + 2 = t^2$

Иными словами, **за** t^2 **обозначается ВСЁ выражение под корнем**. Замена из предыдущих примеров $x = t^2$ здесь не годится, так как не устраняет радикал.

Навешиваем дифференциалы на обе части:
$$d(x+2)=d(t^2)$$

Тут нужно потрудиться уже в обеих частях (хоть слева и «халявная» функция):
$$(x+2)'dx=(t^2)'dt$$
$$dx=2tdt$$

С числителем разобрались. Что делать с $(x-3)$ в знаменателе? Используем знакомый фокус. Сначала из замены $x+2=t^2$ удобно выразить $x=t^2-2$, после чего из обеих частей вычесть «тройку»:
$$x-3=t^2-2-3$$
$$x-3=t^2-5$$

Таким образом:

$$(*)\overset{(1)}{=}\int\frac{\sqrt{t^2}\cdot 2tdt}{t^2-5}\overset{(2)}{=}\int\frac{2t^2dt}{t^2-5}\overset{(3)}{=}\int\frac{2(t^2-5)+10}{t^2-5}dt\overset{(4)}{=}\int\left(2+\frac{10}{t^2-5}\right)dt\overset{(5)}{=}2\int dt+10\int\frac{dt}{t^2-(\sqrt{5})^2}\overset{(6)}{=}$$
$$=2t+\frac{10}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}}\right|+C\overset{(7)}{=}2\sqrt{x+2}+\sqrt{5}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{5}}\right|+C,\text{ где } C=const$$

(1) Проводим подстановку в соответствии с выполненной заменой.

(2) Причёсываем числитель. Константу я предпочел не выносить за знак интеграла (можно делать и так, ошибкой не будет)

(3) Раскладываем числитель в нужную сумму.

(4) Почленно делим числитель на знаменатель.

(5) Используем свойство линейности. Во втором интеграле выделяем квадрат $(\sqrt{5})^2$ для последующего интегрирования по таблице.

(6) Интегрируем по табличной формуле «высокого логарифма».

(7) Проводим обратную замену, если $x+2=t^2$, то обратно: $t=\sqrt{x+2}$

Готово.

Самостоятельно:

Пример 80

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{5x+3}+1}$$

Проверьте, хорошо ли вы усвоили технику решения ;)

Принципиально так же решаются интегралы с несколькими **одинаковыми** корнями, например $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+4}$, $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)dx}{\sqrt[3]{x}(5-\sqrt[3]{x})}$ и т.п., единственное, в них будут получаться более сложные дробно-рациональные функции.

А что делать, если в подынтегральной функции корни **разные**?

Пример 81

$$\int \frac{(x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})dx}{x(1+\sqrt[3]{x})}$$

Когда встречается подобный интеграл, обычно становится страшно. Но страхи напрасны – после проведения подходящей замены подынтегральная функция упрощается. Вспоминаем основной принцип: **замена должна избавить нас сразу от ВСЕХ корней**.

Когда даны разные корни удобно придерживаться следующей схемы решения. Сначала выписываем на черновике подынтегральную функцию, при этом все радикалы представляем в виде $x^{\frac{a}{b}}$: $\frac{x+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}}{x(1+x^{\frac{1}{3}})}$. Нас будут интересовать **знаменатели** степеней:

$$\frac{x+x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}}{x(1+x^{\frac{1}{3}})}$$

Записываем эти знаменатели: 2, 3, 3.

Теперь нужно найти *наименьшее общее кратное* чисел 2, 3, 3 – такое число, чтобы оно делилось и на 2 и на 3 (в данном случае), кроме того, это число должно быть как можно меньше.

Очевидно, что наименьшим общим кратным является число 6. Оно делится и на 2 и на 3, и меньше «шестёрки» ничего нет.

Как многие уже догадались, замена в рассматриваемом интеграле будет следующей:
$$x = t^6$$

с очевидным и простым дифференциалом:
$$dx = d(t^6) = 6t^5dt$$

Оформляем решение:

$$\int \frac{(x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})dx}{x(1+\sqrt[3]{x})}=(*)$$

Проведём замену: $x=t^6 \Rightarrow dx=6t^5dt$

$$(*)\overset{(1)}{=}\frac{(t^6+\sqrt{t^6}+\sqrt[3]{(t^6)^2})\cdot 6t^5dt}{t^6(1+\sqrt[3]{t^6})}\overset{(2)}{=}6\int\frac{(t^6+t^3+t^4)dt}{t(1+t^2)}\overset{(3)}{=}6\int\frac{(t^5+t^3+t^2)dt}{t^2+1}\overset{(4)}{=}$$

$$=6\int\frac{t^3(t^2+1)+(t^2+1)-1}{t^2+1}dt\overset{(5)}{=}6\int\left(t^3+1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt\overset{(6)}{=}$$

$$=\frac{6}{4}t^4+6t-6arctgt+C\overset{(7)}{=}\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+6\sqrt[6]{x}-6arctg\sqrt[6]{x}+C,\ \text{где } C=const$$

(1) Проводим подстановку.

(2) Избавляемся от корней. Выносим константу за знак интеграла. Сокращаем числитель и знаменатель на t^5.

(3) Сокращаем числитель и знаменатель ещё на t.

(4) Используем знакомый метод.

(5) Почленно делим числитель на знаменатель.

(6) Интегрируем по таблице. При этом константу я снова «прилепил» к каждому из трёх слагаемых (хотя, можно этого и не делать – момент технический).

(7) Проводим обратную замену. Если $x=t^6$, то, обратно: $t=\sqrt[6]{x}$. При этом некоторые корни лучше сразу сократить (обычно это делается устно). В рассмотренном примере сокращение корней встретилось в первом слагаемом: $t^4=\sqrt[6]{x^4}=\sqrt[3]{x^2}$

Как видите, особых сложностей нет, несмотря на то, что сначала интеграл показался трудным и страшным.

Пример 82

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[4]{x}}$$

Это пример для самостоятельного решения.

Иногда встречаются интегралы, где корень вложен в какую-нибудь другую функцию, например:

$$\int e^{\sqrt{x}}dx,\quad \int \sin\sqrt{x}dx$$

Здесь нужно провести ту же замену $x=t^2$ с дальнейшим интегрированием по частям.

$\int arctg(\sqrt[3]{6x-1})dx$ – аналогичный мотив: замена $6x-1=t^3$, и корня, как ни бывало.

Решения этих и других примеров можно найти в статье Сложные интегралы.

И совсем редко встречается интеграл вида $\int \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}dx$, который решается заменой $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$. Конкретный пример тоже есть в указанном выше источнике.

11. Биномиальные интегралы

С некоторыми из них мы уже имели дело, и сейчас пришло время систематизировать информацию. Так называемый биномиальный интеграл имеет следующий вид: $\int x^m(a+bx^n)^p dx$. Он берётся в трёх случаях.

1) Случай первый. Самый лёгкий.

Если степень p – целое число.

Например: $\int \frac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt[5]{x})^2}$

Представим интеграл в стандартном виде (это лучше делать на черновике):

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt[5]{x})^2}=\int x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{5}})^{-2}dx$$

Мы видим, что степень $p=-2$ – целая, а, значит, действительно имеет место первый случай. На самом деле биномиальный интеграл первого типа решается практически так же, как интегралы в только что рассмотренных *Примерах 81, 82*, поэтому приводить почти такие же решения особого смысла нет. Я просто покажу, какую замену здесь нужно провести.

Смотрим на знаменатели дробей:

$$\int x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{5}})^{-2}dx$$

Выписываем знаменатели: 2, 5. Находим *наименьшее общее кратное* этих чисел. Очевидно, это 10: оно делится и на 2 и на 5, кроме того – десятка самая маленькая в этом смысле.

После замены $x=t^{10}$ все корни гарантировано пропадут. Решать этот пример не нужно, поскольку я его придумал с ходу и легко там не будет =)

2) $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ **– случай второй**

Если $\dfrac{m+1}{n}$ **– целое число, то необходимо провести замену** $a+bx^n=t^N$**, где** N **– знаменатель дроби** p**.**

Спокойствие, только спокойствие, сейчас во всём разберемся.

Пример 83

$$\int\frac{\sqrt{x^2-1}dx}{x}$$

Во-первых, представим интеграл в стандартном виде $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$:

$\int\frac{\sqrt{x^2-1}dx}{x}=\int x^{-1}(x^2-1)^{\frac{1}{2}}dx$. Вообще говоря, формально правильнее было записать $\int x^{-1}(-1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx$, но перестановка слагаемых в скобках не играет никакой роли.

Выписываем степени:

$m=-1,\ n=2,\ p=\frac{1}{2}$

И сразу проверяем, не относится ли наш интеграл к первому случаю?

$p=\frac{1}{2}$ – *целое?* Нет.

Проверяем второй случай:

$\frac{m+1}{n}=\frac{-1+1}{2}=\frac{0}{2}=0$ – целое, значит у нас второй случай, и согласно правилу, нужно провести замену $a+bx^n=t^N$, где N – знаменатель дроби p.

В рассматриваемом примере $p=\frac{1}{2}$, и знаменатель этой дроби равен «двойке». Таким образом, «наше всё» – это замена: $x^2-1=t^2$.

! Несмотря на то*, что она очевидна:* $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{t^2}=t$, ***строго*** *следуйте алгоритму решения биномиального интеграла! Ибо не всё очевидное правильно ;)*

Оформляем решение:

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}dx}{x} = (*)$$

Итак, в результате замены $x^2 - 1 = t^2$ корень у нас исчезает, и теперь нужно выяснить, во что превратится **оставшаяся часть** подынтегрального выражения: $\frac{dx}{x}$.

Берём нашу замену $x^2 - 1 = t^2$ и навешиваем на обе части значки дифференциала:
$d(x^2-1) = d(t^2)$
после чего оба дифференциала раскрываем:
$(x^2-1)'dx = (t^2)'dt$
$2xdx = 2tdt$
$xdx = tdt$

Но вот, незадача, тут получилось xdx, а нам-то нужно выразить $\frac{dx}{x}$. Да без проблем – умножаем обе части на $\frac{1}{x^2}$:

$$xdx \cdot \frac{1}{x^2} = tdt \cdot \frac{1}{x^2}$$

Таким образом: $\frac{dx}{x} = \frac{tdt}{x^2}$. Уже лучше, но нам надо выразить $\frac{dx}{x}$ **только через** t, а в правой части есть «икс» в квадрате. Что делать? Снова вспоминаем нашу замену $x^2 - 1 = t^2$, выражаем из неё нужный нам $x^2 = t^2 + 1$. Окончательно:

$$\frac{dx}{x} = \frac{tdt}{x^2} = \frac{tdt}{t^2+1}.$$

Несколько головоломно, но, увы, другие алгоритмы еще запутаннее. Собственно, продолжаем решение:

$$(*) \overset{(1)}{=} \int \frac{t \cdot tdt}{t^2+1} \overset{(2)}{=} \int \frac{t^2dt}{t^2+1} \overset{(3)}{=} \int \frac{(t^2+1-1)dt}{t^2+1} \overset{(4)}{=} \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt \overset{(5)}{=}$$
$$= t - arctgt + C \overset{(6)}{=} \sqrt{x^2-1} - arctg\sqrt{x^2-1} + C, \text{ где } C = const$$

(1) Проводим подстановку согласно замене.

(2) Записываем компактно числитель.

(3) Уже без комментариев :)

(4) Делим числитель на знаменатель.

(5) Интегрируем по таблице.

(6) Проводим *обратную замену*: если $x^2 - 1 = t^2$, то $t = \sqrt{x^2-1}$

Пример 84

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

Это пример для самостоятельного решения.

3) $\int x^m (a+bx^n)^p dx$ – **случай третий**. Самый сложный.

Если $\frac{m+1}{n}+p$ **– целое число, то необходимо провести замену** $b+\frac{a}{x^n}=t^N$ **, где** N **– знаменатель дроби** p **.**

Пример 85

$$\int \frac{\sqrt{x^2+4}dx}{x^2}$$

Представим интеграл в стандартном виде $\int x^{-2}(x^2+4)^{\frac{1}{2}}dx$ и выпишем степени и коэффициенты:

$m=-2,\ n=2,\ p=\frac{1}{2},\ a=4,\ b=1$

1) Не относится ли наш интеграл к первому случаю?

$p=\frac{1}{2}$ – *целое?* Нет.

2) Проверяем второй случай:

$\frac{m+1}{n}=\frac{-2+1}{2}=-\frac{1}{2}$ – *целое?* Нет.

3) $\frac{m+1}{n}+p=\frac{-2+1}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$ – целое! Значит, у нас третий случай.

И, согласно правилу, здесь нужно провести замену $b+\frac{a}{x^n}=t^N$, где N – знаменатель дроби p . В рассматриваемом примере $p=\frac{1}{2}$, и знаменатель этой дроби равен опять же «двойке». Коэффициенты (будьте внимательны) $a=4,\ b=1$

Таким образом, искомая замена: $1+\frac{4}{x^2}=t^2$

Оформляем решение:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+4}dx}{x^2} = (*)$$

Проведём замену $1+\frac{4}{x^2}=t^2$ и сразу разберёмся с корнем. Это труднее, чем в предыдущих случаях.

Сначала из нашей замены $1+\frac{4}{x^2}=t^2$ нужно выразить «икс квадрат»:

$$\frac{4}{x^2}=t^2-1 \Rightarrow x^2=\frac{4}{t^2-1}$$

Теперь подставляем $x^2=\frac{4}{t^2-1}$ под корень:

$\sqrt{x^2+4}=\sqrt{\frac{4}{t^2-1}+4}=\sqrt{\frac{4+4t^2-4}{t^2-1}}=\sqrt{\frac{4t^2}{t^2-1}}=\frac{2t}{\sqrt{t^2-1}}$ – от корня мы пока не избавились, по это только пока ;)

На втором этапе выясняем, во что превратится **оставшаяся часть** подынтегрального выражения $\frac{dx}{x^2}$. Берем нашу замену $1+\frac{4}{x^2}=t^2$ и навешиваем дифференциалы на обе части:

$$d\left(1+\frac{4}{x^2}\right)=d(t^2)$$

вот тут-то уже не самая простая производная:

$$(1+4x^{-2})'dx=2tdt$$

$$(0+4\cdot(-2)x^{-3})dx=2tdt$$

$$\frac{4dx}{x^3}=-tdt$$

теперь слева по правилу пропорции вычленяем нужный нам кусок:

$$\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{4}tdt$$

$$\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{4}txdt$$

Опять проблема, в правой части у нас есть x, а нам нужно всё выразить через t.

Берём ранее найденный $x^2=\frac{4}{t^2-1}$ и выражаем $x=\sqrt{\frac{4}{t^2-1}}=\frac{2}{\sqrt{t^2-1}}$

Окончательно:

$$\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{4}txdt=-\frac{1}{4}t\cdot\frac{2}{\sqrt{t^2-1}}\cdot dt=-\frac{tdt}{2\sqrt{t^2-1}}$$

В итоге мы выразили $\sqrt{x^2+4}=\frac{2t}{\sqrt{t^2-1}}$ и $\frac{dx}{x^2}=-\frac{tdt}{2\sqrt{t^2-1}}$ *(смотрим вверх на исходный интеграл!)*, и всё готово для продолжения решения:

$$(*)\overset{(1)}{=}\int\frac{2t}{\sqrt{t^2-1}}\cdot\left(-\frac{tdt}{2\sqrt{t^2-1}}\right)\overset{(2)}{=}-\int\frac{t^2dt}{t^2-1}\overset{(3)}{=}-\int\frac{(t^2-1+1)dt}{t^2-1}=-\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=$$

$$=-\int dt-\int\frac{1}{t^2-1}=-t-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C\overset{(4)}{=}-\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}-1}{\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}+1}\right|+C\overset{(5)}{=}$$

$$=-\frac{\sqrt{4+x^2}}{x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}-x}{\sqrt{4+x^2}+x}\right|+C,\ \text{где}\ C=const$$

(1) Проводим подстановку согласно замене.

(2) Упрощаем выражение и выносим «минус» за знак интеграла (так удобнее).

(3) Разваливаем интеграл на 2 части и, понятно, интегрируем.

(4) Проводим обратную замену. В третьем случае биномиального интеграла это тоже труднее. Если изначально $1+\frac{4}{x^2}=t^2$, то $t^2=\frac{x^2+4}{x^2}\Rightarrow t=\sqrt{\frac{x^2+4}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$.

(5) Избавляемся от четырехэтажности в логарифме.

Пример 86

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$$

Это пример для самостоятельного решения *(здесь* $m=0$*)*. Полное решение и ответ только для выживших читателей =)

Что делать, если биномиальный интеграл $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$ не подходит ни под один из рассмотренных случаев? Это грустный четвертый случай, когда интеграл не берётся.

Поздравляю! Теперь Вы сможете решить почти любой интеграл!

Почти. Студентам-технарям настоятельно рекомендую проработать неоднократно упоминавшуюся статью Сложные интегралы, в частности, *метод сведения интеграла к самому себе*. Я намеренно не включил в данный курс «раритеты», поскольку его целью была именно **быстрая** помощь, и надеюсь, что этой цели мне удалось достичь.

Дополнительную информацию по теме однократных интегралов можно найти в соответствующем разделе портала mathprofi.ru *(ссылка на аннотацию к разделу)*.

Из учебной литературы рекомендую: К.А. Бохан, 1-й том *(попроще)*, Г.М. Фихтенгольц, 2-й том *(посложнее)*, Н.С. Пискунов *(для ВТУЗов)*.

Желаю успехов!

12. Решения и ответы

Разминочное задание:

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\right)'=\frac{1}{n+1}\cdot(x^{n+1})'+(C)'=\frac{1}{n+1}\cdot(n+1)x^{n+1-1}+0=x^{n}$$

$$(\ln|x|+C)'=(\ln|x|)'+(C)'=\frac{1}{x}+0=\frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{a^{x}}{\ln a}+C\right)'=\frac{1}{\ln a}\cdot(a^{x})'+(C)'=\frac{1}{\ln a}\cdot a^{x}\ln a+0=a^{x}$$

$$(\sin x+C)'=(\sin x)'+(C)'=\cos x+0=\cos x$$

$$(tgx+C)'=(tgx)'+(C)'=\frac{1}{\cos^{2}x}+0=\frac{1}{\cos^{2}x}$$

$$(-ctgx+C)'=-(ctgx)'+(C)'=-\left(-\frac{1}{\sin^{2}x}\right)+0=\frac{1}{\sin^{2}x}$$

$$\left(\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C\right)'=\frac{1}{a}\left(arctg\frac{x}{a}\right)'+(C)'=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^{2}}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)'=$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^{2}}{a^{2}}}\cdot\frac{1}{a}\cdot(x)'=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\frac{a^{2}+x^{2}}{a^{2}}}\cdot\frac{1}{a}\cdot 1=\frac{1}{a}\cdot\frac{a^{2}}{a^{2}+x^{2}}\cdot\frac{1}{a}=\frac{a^{2}}{a^{2}(a^{2}+x^{2})}=\frac{1}{a^{2}+x^{2}}$$

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^{2}+A}\right|+C\right)'=\left(\ln\left|x+\sqrt{x^{2}+A}\right|\right)'+(C)'=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^{2}+A}}\cdot(x+\sqrt{x^{2}+A})'+0=\frac{1}{x+\sqrt{x^{2}+A}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^{2}+A}}\cdot(x^{2}+A)'\right)=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^{2}+A}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^{2}+A}}\cdot(2x+0)\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^{2}+A}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^{2}+A}}\right)=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^{2}+A}}\cdot\frac{(\sqrt{x^{2}+A}+x)}{\sqrt{x^{2}+A}}=\frac{1}{\sqrt{x^{2}+A}}$$

Пример 2. Решение:

$$\int\left(\frac{1}{x}+x^2\ln 5-\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}+\frac{7}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=$$

$$=\int\frac{dx}{x}+\ln 5\int x^2dx-4\int x^{-\frac{1}{2}}dx+\frac{1}{3}\int x^{-\frac{4}{3}}dx+7\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\ln|x|+\ln 5\cdot\frac{1}{3}x^3-4\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)}\cdot x^{-\frac{1}{3}}+7\arcsin x+C=$$

$$=\ln|x|+\frac{(\ln 5)\cdot x^3}{3}-8\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+7\arcsin x+C,\ \text{где } C=const$$

Проверка:

$$\left(\ln|x|+\frac{(\ln 5)\cdot x^3}{3}-8\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+7\arcsin x+C\right)'=$$

$$=(\ln|x|)'+\frac{(\ln 5)}{3}\cdot(x^3)'-8(\sqrt{x})'-(x^{-\frac{1}{3}})'+7(\arcsin x)'+(C)'=$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{(\ln 5)}{3}\cdot 3x^2-8\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot x^{-\frac{4}{3}}+7\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+0=$$

$$=\frac{1}{x}+x^2\ln 5-\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}+\frac{7}{\sqrt{1-x^2}}$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, интеграл найден верно.

Пример 4. Решение:

$$\int x(1-2x)^3dx=\int x(1-6x+12x^2-8x^3)dx=\int(x-6x^2+12x^3-8x^4)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-6\cdot\frac{x^3}{3}+12\cdot\frac{x^4}{4}-8\cdot\frac{x^5}{5}+C=\frac{x^2}{2}-2x^3+3x^4-\frac{8x^5}{5}+C,\ \text{где } C=const$$

В данном примере мы использовали формулу сокращенного умножения $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ *(см. Приложение **Полезные формулы**)*

Проверка:

$$\left(\frac{x^2}{2}-2x^3+3x^4-\frac{8x^5}{5}+C\right)'=\frac{1}{2}(x^2)'-2(x^3)'+3(x^4)'-\frac{8}{5}(x^5)'+(C)'=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2x-2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3-\frac{8}{5}\cdot 5x^4+0=x-6x^2+12x^3-8x^4=$$

$$=x(1-6x+12x^2-8x^3)=x(1-2x)^3$$

Получена исходная подынтегральная функция, значит, интеграл найден верно.

Пример 6. Решение:

$$\int\frac{2x^2+3\sqrt{x}-1}{2x}dx=\int\left(x+\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2x}\right)dx=\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\ln|x|+C=$$

$$=\frac{x^2}{2}+3\sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln|x|+C,\ \text{где } C=const$$

Проверка:

$$\left(\frac{x^2}{2}+3\sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln|x|+C\right)'=\frac{1}{2}(x^2)'+3(x^{\frac{1}{2}})'-\frac{1}{2}(\ln|x|)'+(C)'=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2x+3\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+0=x+\frac{3}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x}=\frac{x^2+3\sqrt{x}-1}{2x}$$

Получена исходная подынтегральная функция, что и требовалось проверить.

Пример 9. Решение:

а) $\int\cos\frac{x}{2}dx=2\int\cos\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right)=2\sin\frac{x}{2}+C,\ \text{где } C=const$

Проверка: $\left(2\sin\frac{x}{2}+C\right)'=2\left(\sin\frac{x}{2}\right)'+(C)'=2\cos\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'+0=2\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}=\cos\frac{x}{2}$

б) $\int 4^{5x}dx=\frac{1}{5}\int 4^{5x}d(5x)=\frac{4^{5x}}{5\ln 4}+C,\ \text{где } C=const$

Проверка: $\left(\frac{4^{5x}}{5\ln 4}+C\right)'=\frac{1}{5\ln 4}\cdot(4^{5x})'+(C)'=\frac{1}{5\ln 4}\cdot 4^{5x}\ln 4\cdot(5x)'+0=\frac{1}{5}\cdot 4^{5x}\cdot 5=4^{5x}$

Пример 11. Решение:

$$\int ctg2xdx=\int\frac{\cos 2xdx}{\sin 2x}=\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin 2x)}{\sin 2x}=\frac{1}{2}\ln|\sin 2x|+C,\ \text{где } C=const$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{2}\ln|\sin 2x|+C\right)'=\frac{1}{2}(\ln|\sin 2x|)'+(C)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin 2x}\cdot(\sin 2x)'+0=$$

$$=\frac{1}{2\sin 2x}\cdot\cos 2x\cdot(2x)'=\frac{\cos 2x}{2\sin 2x}\cdot 2=\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=ctg2x$$

Пример 14. Решение:

$$\int\sqrt[5]{(1+x)^4}dx=\int(1+x)^{\frac{4}{5}}d(1+x)=$$

$$=\frac{5}{9}\cdot(1+x)^{\frac{9}{5}}+C=\frac{5}{9}\cdot\sqrt[5]{(1+x)^9}+C,\ \text{где } C=const$$

Проверка:

$$\left(\frac{5}{9}\cdot\sqrt[5]{(1+x)^9}+C\right)'=\frac{5}{9}((1+x)^{\frac{9}{5}})'+(C)'=\frac{5}{9}\cdot\frac{9}{5}(1+x)^{\frac{4}{5}}\cdot(1+x)'+0=\sqrt[5]{(1+x)^4}$$

Пример 16. Решение:

$$\int x(1-x)^5 dx = (*)$$

Проведём замену: $1-x=t \Rightarrow -dx=dt \Rightarrow dx=-dt$

Из $1-x=t$ *выразим* $x=1-t$

$$(*)=\int(1-t)t^5(-dt)=-\int(t^5-t^6)dt=\int(t^6-t^5)dt=$$

$$=\frac{t^7}{7}-\frac{t^6}{6}+C\overset{t=1-x}{=}=\frac{(1-x)^7}{7}-\frac{(1-x)^6}{6}+C,\ \text{где } C=const$$

Проверка:

$$\left(\frac{(1-x)^7}{7}-\frac{(1-x)^6}{6}+C\right)'=\frac{1}{7}\cdot 7(1-x)^6\cdot(1-x)'-\frac{1}{6}\cdot 6(1-x)^5\cdot(1-x)'+0=$$

$$=-(1-x)^6+(1-x)^5=(1-x)^5\cdot\left[-(1-x)+1\right]=(1-x)^5\cdot\left[-1+x+1\right]=x(1-x)^5$$

Пример 18. Решение:

а) $\int\frac{xdx}{\sqrt{9-8x^2}}=(*)$

Проведем замену:

$9-8x^2=t$

$d(9-8x^2)=(9-8x^2)'dx=-16xdx=dt$

откуда выражаем: $xdx=-\frac{dt}{16}$

$$(*)=-\frac{1}{16}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{16}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=-\frac{1}{16}\cdot 2t^{\frac{1}{2}}+C=$$

$$=-\frac{\sqrt{t}}{8}+C\overset{t=9-8x^2}{=}=-\frac{\sqrt{9-8x^2}}{8}+C,\ \text{где } C=const$$

б) $\int x^2e^{2x^3-1}dx=(*)$

Проведем замену:

$2x^3-1=t$

$d(2x^3-1)=6x^2dx=dt\Rightarrow x^2dx=\frac{dt}{6}$

$$(*)=\frac{1}{6}\int e^t dt=\frac{1}{6}e^t+C\overset{t=2x^3-1}{=}=\frac{1}{6}e^{2x^3-1}+C,\ \text{где } C=const$$

Проверка: $\left(\frac{1}{6}e^{2x^3-1}+C\right)'=\frac{1}{6}e^{2x^3-1}\cdot(2x^3-1)'+0=\frac{1}{6}e^{2x^3-1}\cdot 6x^2=x^2e^{2x^3-1}$

Пример 20. Решение:

$$\int \frac{\sqrt[3]{\ln(3x+1)}}{3x+1}dx = (*)$$

Проведем замену:

$$\ln(3x+1) = t$$

$$d(\ln(3x+1)) = (\ln(3x+1))'dx = \frac{3dx}{3x+1} = dt \Rightarrow \frac{dx}{3x+1} = \frac{dt}{3}$$

$$(*) = \frac{1}{3}\int \sqrt[3]{t}dt = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{3}}dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} + C \overset{t=\ln(3x+1)}{=} = \frac{\sqrt[3]{\ln^4(3x+1)}}{4} + C, \textit{ где } C = const$$

Проверка:

$$\left(\frac{\sqrt[3]{\ln^4(3x+1)}}{4} + C\right)' = \frac{1}{4}(\ln^{\frac{4}{3}}(3x+1))' + (C)' = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\ln^{\frac{1}{3}}(3x+1)\cdot(\ln(3x+1))' + 0 =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt[3]{\ln(3x+1)}\cdot\frac{1}{3x+1}\cdot(3x+1)' = \frac{\sqrt[3]{\ln(3x+1)}}{3(3x+1)}\cdot 3 = \frac{\sqrt[3]{\ln(3x+1)}}{3x+1}$$

Пример 23. Решение:

а) $\displaystyle\int \frac{\ln x dx}{x} = \int \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C, \textit{ где } C = const$

Проверка: $\displaystyle\left(\frac{\ln^2 x}{2} + C\right)' = \frac{1}{2}\cdot 2\ln x\cdot(\ln x)' + 0 = \frac{\ln x}{x}$

б) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}dx = (*)$

Интегрируем по частям:

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow v = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$(*) = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C = -\frac{(\ln x + 1)}{x} + C, \textit{ где } C = const$$

Проверка:

$$\left(-\frac{(\ln x+1)}{x} + C\right) = -\left(\frac{1}{x}\cdot(\ln x + 1)\right)' + (C)' = -\left(\left(\frac{1}{x}\right)'\cdot(\ln x+1) + \frac{1}{x}\cdot(\ln x + 1)'\right) + 0 =$$

$$= -\left(-\frac{1}{x^2}\cdot(\ln x+1) + \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x} + 0\right)\right) = -\left(-\frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{\ln x}{x^2}$$

Пример 25. Решение:

$$\int (x^2+x)e^{-x}dx = (*)$$

Дважды интегрируем по частям:

$$u = x^2 + x \Rightarrow du = (x^2+x)'dx = (2x+1)dx$$
$$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = \int e^{-x}dx = -\int e^{-x}d(-x) = -e^{-x}$$
$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$(*) = -e^{-x}(x^2+x) + \int (2x+1)e^{-x}dx = (*)$$

$$u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx$$
$$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$(*) = -e^{-x}(x^2+x) - e^{-x}(2x+1) + 2\int e^{-x}dx =$$
$$= -e^{-x}(x^2+x) - e^{-x}(2x+1) - 2e^{-x} + C = -e^{-x}(x^2+x+2x+1+2) + C =$$
$$= -e^{-x}(x^2+3x+3) + C, \textit{ где } C = const$$

Проверка:

$$(-e^{-x}(x^2+3x+3)+C)' = (-e^{-x})' \cdot (x^2+3x+3) - e^{-x}(x^2+3x+3)' + 0 =$$
$$= -e^{-x} \cdot (-1) \cdot (x^2+3x+3) - e^{-x}(2x+3+0) = (x^2+3x+3-2x-3)e^{-x} = (x^2+x)e^{-x}$$

Пример 27. Решение:

$$\int (x-6)\sin\frac{x}{2}dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$$u = x-6 \Rightarrow du = dx$$
$$dv = \sin\frac{x}{2}dx \Rightarrow v = \int \sin\frac{x}{2}dx = -2\cos\frac{x}{2}$$
$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$(*) = -2(x-6)\cos\frac{x}{2} + 2\int\cos\frac{x}{2}dx = -2(x-6)\cos\frac{x}{2} + 2\cdot 2\int\cos\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right) =$$
$$= -2(x-6)\cos\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2} + C, \textit{ где } C = const$$

Проверка:

$$\left(-2(x-6)\cos\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2} + C\right)' = -2(x-6)'\cos\frac{x}{2} - 2(x-6)\left(\cos\frac{x}{2}\right)' + 4\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2} + 0 =$$
$$= -2\cos\frac{x}{2} - 2(x-6)\cdot\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\right) + 2\cos\frac{x}{2} = -2\cos\frac{x}{2} + (x-6)\sin\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2} = (x-6)\sin\frac{x}{2}$$

***Пример 29. Решение**: используем тригонометрическую формулу*

$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$ *и интегрируем по частям:*

$$\int x\sin x\cos xdx = \frac{1}{2}\int x\sin 2xdx = (*)$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \sin x\cos xdx = \frac{1}{2}\sin 2xdx \Rightarrow v = \frac{1}{2}\int \sin 2xdx = -\frac{1}{4}\cos 2x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$(*) = -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{4}\int \cos 2xdx = -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C, \text{ где } C = const$$

Проверка:

$$\left(-\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C\right) = -\frac{1}{4}(x)'\cos 2x - \frac{1}{4}x(\cos 2x)' + \frac{1}{8}\cdot 2\cos 2x + 0 =$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{4}x(-2\sin 2x) + \frac{1}{4}\cos 2x = \frac{1}{2}x\sin 2x = \frac{1}{2}x\cdot 2\sin x\cos x = x\sin x\cos x$$

***Примечание**: Похожим способом также решаются интегралы вида* $\int x\sin^2 xdx$, $\int x\cos^2 xdx$, *где нужно понизить степень синуса / косинуса с помощью соответствующих тригонометрических формул.*

***Пример 31. Решение**:*

а) $\int \arcsin 3xdx = (*)$

Интегрируем по частям:

$$u = \arcsin 3x \Rightarrow du = \frac{3dx}{\sqrt{1-9x^2}}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$(*) = x\arcsin 3x - \int \frac{3xdx}{\sqrt{1-9x^2}} = x\arcsin 3x + \frac{1}{6}\int \frac{d(1-9x^2)}{\sqrt{1-9x^2}} =$$

$$= x\arcsin 3x + \frac{1}{3}\sqrt{1-9x^2} + C, \text{ где } C = const$$

Проверка:

$$\left(x\arcsin 3x + \frac{1}{3}\sqrt{1-9x^2} + C\right)' = (x)'\arcsin 3x + x(\arcsin 3x)' + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-9x^2}}\cdot(1-9x^2)' + 0 =$$

$$= \arcsin 3x + x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}\cdot 3 + \frac{1}{6\sqrt{1-9x^2}}\cdot(-18x) = \arcsin 3x$$

б) $\int x arctgx dx$=(*)

Интегрируем по частям:

$$u = arctgx \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$(*) = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(x^2arctgx - \int\frac{(1+x^2-1)dx}{1+x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2arctgx - \int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx\right) = \frac{1}{2}\left(x^2arctgx - \int dx + \int\frac{dx}{1+x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2arctgx - x + arctgx) + C = \frac{1}{2}\left((x^2+1)arctgx - x\right) + C, \text{ где } C = const$$

Проверка:

$$\left[\frac{1}{2}\left((x^2+1)arctgx - x\right) + C\right]' = \frac{1}{2}\left((x^2+1)'arctgx + (x^2+1)\cdot(arctgx)' - (x)'\right) + 0 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2xarctgx + (x^2+1)\cdot\frac{1}{x^2+1} - 1\right) = \frac{1}{2}(2xarctgx + 1 - 1) = xarctgx$$

Пример 33. Решение:

$$\int\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}dx = (*)$$

Используем формулу $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$*:*

$$(*) = \int\frac{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{4}\right)}{2} = \frac{1}{2}\int\sin\frac{3x}{4}dx + \frac{1}{2}\int\sin\frac{x}{4}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\int\sin\frac{3x}{4}d\left(\frac{3x}{4}\right) + \frac{1}{2}\cdot 4\int\sin\frac{x}{4}d\left(\frac{x}{4}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\left(-\cos\frac{3x}{4}\right) + 2\cdot\left(-\cos\frac{x}{4}\right) + C = -\frac{2}{3}\cos\frac{3x}{4} - 2\cos\frac{x}{4} + C, \text{ где } C = const$$

Примечание: *здесь и далее я не всегда буду переписывать проверку со своих черновиков – надеюсь, у вас уже сложилась устойчивая привычка проверять результаты*

Пример 35. Решение: *используем формулу* $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$*:*

$$\int\sin^2\frac{3x}{2}dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos 3x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\sin 3x\right) + C, \text{ где } C = const$$

Пример 37. Решение:

$$\int \sin^2 x\cos^2 x dx = \int (\sin x\cos x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int (1-\cos 4x)dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C,\ \textit{где}\ C = const$$

Пример 39. Решение:

а) отделяем косинус и используем формулу $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$ *:*

$$\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}} = \int \frac{\cos^2 x\cdot\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}} = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cdot d(\sin x)}{\sqrt[3]{\sin^4 x}} \stackrel{\sin x = t}{=}$$

$$= \int \frac{(1-t^2)\cdot dt}{\sqrt[3]{t^4}} = \int \left(t^{-\frac{4}{3}} - t^{\frac{2}{3}}\right)dt = -3t^{-\frac{1}{3}} - \frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}} + C \stackrel{t=\sin x}{=}$$

$$= -\frac{3}{\sqrt[3]{\sin x}} - \frac{3}{5}\sqrt[3]{\sin^5 x} + C,\ \text{где}\ C = const$$

б)

$$\int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x\cdot\cos x dx = \int (\cos^2 x)^2\cdot\cos x dx = \int (1-\sin^2 x)^2\cdot d(\sin x) \stackrel{\sin x = t}{=}$$

$$= \int (1-t^2)^2 dt = \int (1-2t^2+t^4)dt = t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C \stackrel{t=\sin x}{=}$$

$$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C,\ \textit{где}\ C = const$$

в)

$$\int \sin^3 x\cos^8 x dx = \int \sin^2 x\cos^8 x\sin x dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^8 x\cdot(-d(\cos x)) \stackrel{\cos x = t}{=}$$

$$= -\int (1-t^2)t^8 dt = \int (t^2-1)t^8 dt = \int (t^{10}-t^8)dt =$$

$$= \frac{t^{11}}{11} - \frac{t^9}{9} + C \stackrel{t=\cos x}{=} \frac{\cos^{11} x}{11} - \frac{\cos^9 x}{9} + C,\ \textit{где}\ C = const$$

Пример 41. Решение:

$$\int tg^2\frac{x}{2}dx = \int \frac{\sin^2\frac{x}{2}dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = \int \left(\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} - 1\right)dx =$$

$$= 2\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}} - \int dx = 2tg\frac{x}{2} - x + C,\ \textit{где}\ C = const$$

Пример 44. Решение:

$$\int \cos^7 2x \sin 2x dx = (*)$$

Проведем замену: $\cos 2x = t$

$$d(\cos 2x) = -2\sin 2x dx = dt \Rightarrow \sin 2x dx = -\frac{dt}{2}$$

$$(*) = -\frac{1}{2}\int t^7 dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^8}{8} + C = -\frac{\cos^8 2x}{16} + C,\ \text{где } C = const$$

Пример 45. Решение:

$$\int \frac{\sqrt[3]{tg5x}dx}{\cos^2 5x} = (*)$$

Проведём замену: $tg5x = t$

$$d(tg5x) = \frac{5dx}{\cos^2 5x} = dt \Rightarrow \frac{dx}{\cos^2 5x} = \frac{dt}{5}$$

$$(*) = \frac{1}{5}\int t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3\cdot\sqrt[3]{tg^4 5x}}{20} + C,\ \text{где } C = const$$

Пример 47. Решение:

а) $$\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2 - 3}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{d(\sqrt{7}x)}{\sqrt{(\sqrt{7}x)^2 - 3}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\sqrt{7}x + \sqrt{7x^2 - 3}\right| + C,\ \text{где } C = const$$

б)

$$\int \frac{dx}{7x^2 - 4} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{d(\sqrt{7}x)}{(\sqrt{7}x)^2 - 2^2} = \frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{\sqrt{7}x - 2}{\sqrt{7}x + 2}\right| + C = \frac{1}{4\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}x - 2}{\sqrt{7}x + 2}\right| + C,\ \text{где } C = const$$

Пример 49. Решение:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 10} = \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 1 + 9} = \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 9} = \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2 + 3^2} =$$

$$= \frac{1}{3}arctg\left(\frac{x-1}{3}\right) + C,\ \text{где } C = const$$

Пример 52. Решение:

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 2x + 1} = \int \frac{dx}{2\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + x + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}arctg\left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) + C =$$

$$= arctg\left(2\cdot\left(\frac{2x+1}{2}\right)\right) + C = arctg(2x+1) + C,\ \text{где } C = const$$

Пример 54. Решение:

$$a)\ \int\frac{8-13x}{\sqrt{x^2-1}}dx=\int\frac{-\frac{13}{2}d(x^2-1)+8dx}{\sqrt{x^2-1}}=-13\int\frac{d(x^2-1)}{2\sqrt{x^2-1}}+8\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=-13\cdot\sqrt{x^2-1}+8\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C,\ \text{где } C=const$$

б)

$$\int\frac{(2x-10)dx}{\sqrt{1+x-x^2}}=\int\frac{-d(1+x-x^2)-9dx}{\sqrt{1+x-x^2}}=-2\int\frac{d(1+x-x^2)}{2\sqrt{1+x-x^2}}-9\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}}}=$$

$$=-2\sqrt{1+x-x^2}-9\int\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=-2\sqrt{1+x-x^2}-9\arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+C,\ \text{где } C=const$$

Пример 56. Решение:

$$\int\frac{x^2dx}{x^2-5}=\int\frac{(x^2-5+5)dx}{x^2-5}=\int\left(1+\frac{5}{x^2-5}\right)dx=$$

$$=\int dx+5\int\frac{dx}{x^2-(\sqrt{5})^2}=x+\frac{5}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right|+C,\ \text{где } C=const$$

Пример 58. Решение:

$$\int\frac{(x^3-3)dx}{x-1}=\int\frac{x^2(x-1)+x(x-1)+(x-1)-2}{x-1}dx=$$

$$=\int\left(x^2+x+1-\frac{2}{x-1}\right)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x-2\ln|x-1|+C,\ \text{где } C=const$$

Пример 60. Решение:

$$a)\ \int\frac{dx}{5-3\cos x}=(*)$$

Проведем универсальную тригонометрическую подстановку:

$$tg\frac{x}{2}=z,\quad \cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$x=2arctgz\Rightarrow dx=\frac{2dz}{1+z^2}$$

$$(*)=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{5-\frac{3(1-z^2)}{1+z^2}}=2\int\frac{dz}{5+5z^2-3+3z^2}=2\int\frac{dz}{8z^2+2}=\int\frac{dz}{4z^2+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(2z)}{(2z)^2+1}=\frac{1}{2}arctg2z+C\overset{z=tg\frac{x}{2}}{=}\frac{1}{2}arctg\left(2tg\frac{x}{2}\right)+C,\ \text{где } C=const$$

б) Используем формулы $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$:

$$\int\frac{dx}{4\sin^2 x-5\cos^2 x}=\int\frac{dx}{4\cdot\dfrac{(1-\cos 2x)}{2}-5\cdot\dfrac{(1+\cos 2x)}{2}}=$$

$$=\int\frac{dx}{2-2\cos 2x-\dfrac{5}{2}-\dfrac{5\cos 2x}{2}}=\int\frac{dx}{\dfrac{4-4\cos 2x-5-5\cos 2x}{2}}=\int\frac{2dx}{-1-9\cos 2x}=(*)$$

Проведём универсальную тригонометрическую подстановку:

$$tgx=z,\quad \cos 2x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$x=arctgz\Rightarrow dx=\frac{dz}{1+z^2}$$

$$(*)=\int\frac{2\cdot\dfrac{dz}{1+z^2}}{-1-\dfrac{9(1-z^2)}{1+z^2}}=2\int\frac{dz}{-1-z^2-9+9z^2}=2\int\frac{dz}{8z^2-10}=\int\frac{dz}{4z^2-5}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(2z)}{(2z)^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2z-\sqrt{5}}{2z+\sqrt{5}}\right|+C\overset{z=tgx}{=}\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2tgx-\sqrt{5}}{2tgx+\sqrt{5}}\right|+C,\ \text{где } C=const$$

Пример 62. Решение:

$$\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=\int\frac{dx}{\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^2 x}=\int\frac{dx}{tgx\cdot\cos^2 x}=\int\frac{d(tgx)}{tgx}=\ln|tgx|+C,\ \text{где } C=const$$

Пример 64. Решение:

–3 – 3 = –6 – целое отрицательное и чётное число

$$\int\frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}=\int\frac{dx}{\dfrac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\cdot\cos^6 x}=\int\frac{dx}{tg^3x\cdot(\cos^2 x)^2\cdot\cos^2 x}=\int\frac{(tg^2x+1)^2d(tgx)}{tg^3x}\overset{tgx=t}{=}$$

$$=\int\frac{(t^2+1)^2dt}{t^3}=\int\frac{(t^4+2t^2+1)dt}{t^3}=\int\left(t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt=\frac{t^2}{2}+2\ln|t|-\frac{1}{2t^2}+C\overset{t=tgx}{=}$$

$$=\frac{tg^2x}{2}+2\ln|tgx|-\frac{1}{2tg^2x}+C,\ \text{где } C=const$$

***Пример 66. Решение**: а)*

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\dfrac{(\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x)}{\cos^2 x}\cdot\cos^2 x}=$$

$$=\int\frac{dx}{(tg^2x-4tgx+5)\cdot\cos^2 x}=\int\frac{d(tgx)}{(tg^2x-4tgx+5)}\overset{tgx=t}{=}$$

$$=\int\frac{dt}{t^2-4t+5}=\int\frac{dt}{(t-2)^2+1}=arctg(t-2)+C\overset{t=tgx}{=}arctg(tgx-2)+C,\ \text{где } C=const$$

б)

$$\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + 4\cos^4 x} = \int \frac{2\sin x \cos x dx}{\sin^4 x + 4\cos^4 x} = \int \frac{2\sin x \cos x dx}{\frac{(\sin^4 x + 4\cos^4 x)}{\cos^4 x}\cdot \cos^4 x} =$$

$$= \int \frac{2\sin x dx}{(tg^4 x + 4)\cdot \cos^3 x} = \int \frac{2tgx dx}{(tg^4 x + 4)\cdot \cos^2 x} = \int \frac{2tgx d(tgx)}{tg^4 x + 4} \stackrel{tgx=t}{=}$$

$$= \int \frac{2tdt}{t^4 + 4} = \int \frac{d(t^2)}{(t^2)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} arctg\left(\frac{t^2}{2}\right) + C \stackrel{t=tgx}{=} \frac{1}{2} arctg\left(\frac{tg^2 x}{2}\right) + C, \text{ где } C = const$$

Пример 68. Решение:

$$\int \frac{dx}{x^2 + x} = \int \frac{dx}{x(x+1)} = (*)$$

Методом неопределённых коэффициентов разложим подынтегральную функцию в сумму дробей:

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

$$A(x+1) + Bx = 1$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow A = 1,\ \ B = -A = -1$$

$$(*) = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \ln|x| - \ln|x+1| = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C, \text{ где } C = const$$

Пример 70. Решение:

$$\int \frac{(43x-67)dx}{(x-1)(x^2 - x - 12)} = \int \frac{(43x-67)dx}{(x-1)(x-4)(x+3)} = (*)$$

Методом неопределенных коэффициентов разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей:

$$\frac{(43x-67)}{(x-1)(x-4)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x+3}$$

$$\frac{A(x-4)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-4)(x+3)} = \frac{43x-67}{(x-1)(x-4)(x+3)}$$

$$A(x^2 - x - 12) + B(x^2 + 2x - 3) + C(x^2 - 5x + 4) = 43x - 67$$

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -A + 2B - 5C = 43 \\ -12A - 3B + 4C = -67 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -A - B \\ 4A + 7B = 43 \\ -16A - 7B = -67 \end{cases} \Rightarrow -12A = -24$$

$$\Rightarrow A = 2, \quad B = 5, \quad C = -7$$

Примечание: *в правой части у нас нет слагаемого с* x^2*, поэтому в первом уравнении системы справа ставим ноль.*

$$(*) = \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{5}{x-4} - \frac{7}{x+3}\right) dx = 2\ln|x-1| + 5\ln|x-4| - 7\ln|x+3| + C, \text{ где } C = const$$

Пример 72. Решение:

$$\frac{x^6+25x^3-12}{x(x-2)^3(x^2-4)(x^2+4)}$$

Шаг 1. *Проверяем, правильная ли у нас дробь*
Старшая степень числителя: 6
Старшая степень знаменателя: 8 ($x\cdot x^3\cdot x^2\cdot x^2$ *)*
$6<8$*, значит, дробь является правильной.*

Шаг 2. *Можно ли что-нибудь разложить в знаменателе на множители? Множитель* x^2+4 *разложить нельзя, а вот* x^2-4 *– можно:*

$$\frac{x^6+25x^3-12}{x(x-2)^3(x^2-4)(x^2+4)}=\frac{x^6+25x^3-12}{x(x-2)^3(x-2)(x+2)(x^2+4)}=\frac{x^6+25x^3-12}{x(x-2)^4(x+2)(x^2+4)}$$

Шаг 3. *Разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей:*

$$\frac{x^6+25x^3-12}{x(x-2)^4(x+2)(x^2+4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}+\frac{D}{(x-2)^3}+\frac{E}{(x-2)^4}+\frac{F}{(x+2)}+\frac{Gx+H}{x^2+4}$$

Пример 74. Решение:

а) $\int\frac{(x^2+23)dx}{(x+1)(x^2+6x+13)}=(*)$

Методом неопределенных коэффициентов разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей:

$$\frac{x^2+23}{(x+1)(x^2+6x+13)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{(x^2+6x+13)}$$

$$\frac{A(x^2+6x+13)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+6x+13)}=\frac{x^2+23}{(x+1)(x^2+6x+13)}$$

$$A(x^2+6x+13)+B(x^2+x)+C(x+1)=x^2+23$$

$$\begin{cases}A+B=1\\6A+B+C=0\\13A+C=23\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=1-A\\5A+C=-1\\13A+C=23\end{cases}\Rightarrow 8A=24\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=3,\ B=-2,\ C=-16$$

$$(*)=\int\left(\frac{3}{x+1}+\frac{-2x-16}{(x^2+6x+13)}\right)dx=3\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{-d(x^2+6x+13)-10dx}{(x^2+6x+13)}=$$

$$=3\ln|x+1|-\int\frac{d(x^2+6x+13)}{(x^2+6x+13)}-10\int\frac{dx}{x^2+6x+9+4}=$$

$$=3\ln|x+1|-\ln(x^2+6x+13)-10\int\frac{d(x+3)}{(x+3)^2+2^2}=$$

$$=3\ln|x+1|-\ln(x^2+6x+13)-5arctg\left(\frac{x+3}{2}\right)+C,\ \text{где}\ C=const$$

б) $\int \frac{(2x^3-2x^2+5)dx}{(x-1)^2(x^2+4)}$ =(*)

Методом неопределенных коэффициентов разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей:

$$\frac{(2x^3-2x^2+5)}{(x-1)^2(x^2+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+4)}$$

$$\frac{A(x-1)(x^2+4)+B(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x^2+4)}=\frac{2x^3-2x^2+5}{(x-1)^2(x^2+4)}$$

$$A(x^3-x^2+4x-4)+B(x^2+4)+C(x^3-2x^2+x)+D(x^2-2x+1)=2x^3-2x^2+5$$

$$\begin{cases}A+C=2\\-A+B-2C+D=-2\\4A+C-2D=0\\-4A+4B+D=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=2-A\\A+B+D=2\\3A-2D=-2\\-4A+4B+D=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=2-A\\D=2-A-B\\5A+2B=2\\-5A+3B=3\end{cases}\Rightarrow 5B=5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow B=1,\ A=0,\ C=2,\ D=1$$

$$(*)=\int\left(\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2x+1}{(x^2+4)}\right)dx=\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4}+\int\frac{dx}{x^2+2^2}=$$

$$=-\frac{1}{x-1}+\ln(x^2+4)+\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+C,\ \text{где}\ C=const$$

Пример 76. Решение:

$$\int\frac{(x^3-3)dx}{(x-1)(x^2-1)}\overset{(1)}{=}\int\frac{(x^3-3)dx}{x^3-x^2-x+1}\overset{(2)}{=}\int\frac{(x^3-x^2-x+1)+x^2+x-4}{x^3-x^2-x+1}dx\overset{(3)}{=}$$

$$=\int\left(1+\frac{x^2+x-4}{x^3-x^2-x+1}\right)dx\overset{(4)}{=}x+\int\frac{(x^2+x-4)dx}{(x-1)^2(x+1)}=(*)$$

(1) Поскольку старшие степени числителя и знаменателя равны: 3 = 3, то мы имеем дело с неправильной дробью. Для того чтобы разделить числитель на знаменатель придётся временно раскрыть скобки в знаменателе.

(2)-(3) Теперь можно разделить $x^3+0\cdot x^2+0\cdot x-3$ *на* x^3-x^2-x+1, *но делать этого… я не буду. Здесь удобно применить искусственный приём из Примеров 55-58. Запишем в числителе* x^3-x^2-x+1 *и добавим ТАКИЕ слагаемые, чтобы при упрощении всей суммы получился исходный числитель* x^3-3.

(4) От первого слагаемого сразу берем интеграл. Знаменатель оставшейся, уже правильной, дроби снова записываем в виде произведения множителей. Тут я немного подсократил разложение, надеюсь, всем понятно, что:

$$(x-1)(x^2-1)=(x-1)(x-1)(x+1)=(x-1)^2(x+1)$$

Далее решение идёт по накатанной колее:

Методом неопределенных коэффициентов разложим подынтегральную функцию в сумму элементарных дробей:

$$\frac{x^2+x-4}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}$$

$$\frac{A(x-1)(x+1)+B(x+1)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{x^2+x-4}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$A(x^2-1)+B(x+1)+C(x^2-2x+1)=x^2+x-4$$

$$\begin{cases}A+C=1\\ B-2C=1\\ -A+B+C=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=1-A\\ 2A+B=3\\ -2A+B=-5\end{cases}\Rightarrow 2B=-2\Rightarrow B=-1,\ A=2,\ C=-1$$

и главное, не забыть о первом слагаемом:

$$(*)=x+\int\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x+1}\right)dx=x+2\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}-\ln|x+1|+C,\ \text{где } C=const$$

Пример 78. Решение:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+3}=(*)$$

Проведём замену: $x=t^2\Rightarrow dx=2tdt$

$$(*)=\int\frac{2tdt}{t+3}=2\int\frac{tdt}{t+3}=2\int\frac{(t+3-3)dt}{t+3}=2\int\left(1-\frac{3}{t+3}\right)dt=2(t-3\ln|t+3|)+C\overset{t=\sqrt{x}}{=}$$

$$=2(\sqrt{x}-3\ln|\sqrt{x}+3|)+C,\ \text{где } C=const$$

Пример 80. Решение:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{5x+3}+1}=(*)$$

Проведем замену $5x+3=t^3$. *Навешиваем дифференциалы на обе части:*

$$d(5x+3)=d(t^3)$$

$$(5x+3)'dx=(t^3)'dt$$

$$5dx=3t^2dt\Rightarrow dx=\frac{3}{5}t^2dt$$

! Примечание**: вот почему дифференциалы нужно именно навешивать и* ***добросовестно *раскрывать. Дабы не допустить машинальную ошибку* $dx=3t^2dt$.

$$(*)=\int\frac{\frac{3}{5}t^2dt}{\sqrt[3]{t^3}+1}=\frac{3}{5}\int\frac{t^2dt}{t+1}=\frac{3}{5}\int\frac{t(t+1)-(t+1)+1}{t+1}dt=\frac{3}{5}\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{3}{5}\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)+C\overset{t=\sqrt[3]{5x+3}}{=}\frac{3}{5}\left(\frac{\sqrt[3]{(5x+3)^2}}{2}-\sqrt[3]{5x+3}+\ln\left|\sqrt[3]{5x+3}+1\right|\right)+C,\ \text{где } C=const$$

Пример 82. Решение:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[4]{x}} = (*)$$

Проведём замену: $x = t^4 \Rightarrow dx = 4t^3dt$

$$(*) = \int \frac{\sqrt{t^4} \cdot 4t^3dt}{1-\sqrt[4]{t^4}} = \int \frac{t^2 \cdot 4t^3dt}{1-t} = 4\int \frac{t^5dt}{1-t} = -4\int \frac{t^5dt}{t-1} =$$

$$= -4\int \frac{t^4(t-1)+t^3(t-1)+t^2(t-1)+t(t-1)+(t-1)+1}{t-1}dt =$$

$$= -4\int \left(t^4+t^3+t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt = -4\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C \stackrel{t=\sqrt[4]{x}}{=}$$

$$= -4\left(\frac{\sqrt[4]{x^5}}{5}+\frac{x}{4}+\frac{\sqrt[4]{x^3}}{3}+\frac{\sqrt{x}}{2}+\sqrt[4]{x}+\ln\left|\sqrt[4]{x}-1\right|\right)+C, \text{ где } C = const$$

Пример 84. Решение:

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+4}} = (*)$$

Представим интеграл в виде $\int x^3(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}dx$ *и выпишем коэффициенты:*

$m=3,\ n=2,\ p=-\dfrac{1}{2}$.

1) $p = \dfrac{1}{2}$ *– целое? Нет.*

2) $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{3+1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ *– целое, значит у нас второй случай.*

Проведём замену $x^2+4=t^2$. *Тогда:*

$\sqrt{x^2+4} = \sqrt{t^2} = t$

$d(x^2+4) = d(t^2)$

$2xdx = 2tdt$

$xdx = tdt$

Чтобы выразить x^3dx, *домножим обе части на* x^2*:*

$xdx \cdot x^2 = tdt \cdot x^2$

$x^3dx = tx^2dt$

Если $x^2+4=t^2$, *то* $x^2 = t^2-4$ *и окончательно:*

$x^3dx = tx^2dt = t(t^2-4)dt$

$$(*) = \int \frac{t(t^2-4)dt}{t} = \int (t^2-4)dt = \frac{t^3}{3} - 4t + C \stackrel{t=\sqrt{x^2+4}}{=}$$

$$= \frac{\sqrt{(x^2+4)^3}}{3} - 4\sqrt{x^2+4} + C, \text{ где } C = const$$

Пример 86. Решение:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}} = (*)$$

Представим интеграл в виде $\int x^0(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}dx$ *и выпишем коэффициенты:*

$m=0$, $n=2$, $p=-\frac{3}{2}$, $a=-1$, $b=1$

1) $p=-\frac{3}{2}$ *– целое? Нет.*

2) $\frac{m+1}{n}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$ *– целое? Нет.*

3) $\frac{m+1}{n}+p=\frac{0+1}{2}-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1$ *– целое! Поэтому следует провести замену* $b+\frac{a}{x^n}=t^N$*, в данном случае:* $1-\frac{1}{x^2}=t^2$

Из замены выражаем $\frac{1}{x^2}=1-t^2 \Rightarrow x^2=\frac{1}{1-t^2}$ *и подставляем под корень:*

$$\sqrt{(x^2-1)^3}=\sqrt{\left(\frac{1}{1-t^2}-1\right)^3}=\sqrt{\left(\frac{1-1+t^2}{1-t^2}\right)^3}=\sqrt{\left(\frac{t^2}{1-t^2}\right)^3}=\sqrt{\frac{t^6}{(1-t^2)^3}}=\frac{t^3}{\sqrt{(1-t^2)^3}}$$

Выразим оставшуюся часть подынтегрального выражения, т.е. dx*:*

$$d\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=d(t^2)$$

$$\frac{2dx}{x^3}=2tdt$$

$$\frac{dx}{x^3}=tdt$$

$$dx=tx^3dt$$

из $x^2=\frac{1}{1-t^2}$ *выражаем* $x=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \Rightarrow x^3=\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)^3}}$ *и окончательно:*

$$dx=tx^3dt=t\cdot\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)^3}}\cdot dt=\frac{tdt}{\sqrt{(1-t^2)^3}}$$

$$(*)=\int\frac{\frac{tdt}{\sqrt{(1-t^2)^3}}}{\frac{t^3}{\sqrt{(1-t^2)^3}}}=\int\frac{t\cdot\sqrt{(1-t^2)^3}\cdot dt}{t^3\cdot\sqrt{(1-t^2)^3}}=\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+C=(*)$$

Обратная замена. Если $1-\frac{1}{x^2}=t^2$*, то* $t^2=\frac{x^2-1}{x^2} \Rightarrow t=\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

$$(*)=-\frac{1}{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}+C=-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+C, \text{ где } C=const$$