Полиномиальная формула

Пример

Найти коэффициент при x^{30} *в разложении выражения* $(3-x^2+x^5)^{19}$ *по полиномиальной формуле, полученный после раскрытия скобок и приведения подобных членов.*

Общий член разложения по полиномиальной формуле имеет вид: $3^m \cdot (-x^2)^n \cdot (x^5)^k \cdot P(m,n,k)$,

Для отыскания всех случаев, в которых возникает x^{30}, решаем в целых неотрицательных числах уравнение $2n+5k=30$.

Полиномиальная формула

Выразим k: $k = 6 - \frac{2n}{5}$. Видно, что k принимает целые значения, если n кратно 5. Выпишем все такие случаи:

$$n = 0 \Rightarrow k = 6; \quad n = 5 \Rightarrow k = 4;$$

$$n = 10 \Rightarrow k = 2; \quad n = 15 \Rightarrow k = 0.$$

Для каждой найденной пары значений n, k значение m находим из уравнения $m + n + k = 19$. Получим 4 набора $(m; n; k)$:

$$(13;0;6), (10;5;4), (7;10;2), (4;15;0).$$

Слагаемые, содержащие x^{30}, таковы:

$$3^{13} \cdot (-x^2)^0 \cdot (x^5)^6 \cdot P(13,0,6); \qquad 3^{10} \cdot (-x^2)^5 \cdot (x^5)^4 \cdot P(10,5,4);$$

$$3^7 \cdot (-x^2)^{10} \cdot (x^5)^2 \cdot P(7,10,2); \qquad 3^4 \cdot (-x^2)^{15} \cdot (x^5)^0 \cdot P(4,15,0).$$

В итоге, коэффициент при x^{30} имеет вид:

$$19!\left(\frac{3^{13}}{13!0!6!} - \frac{3^{10}}{10!5!4!} + \frac{3^7}{7!10!2!} - \frac{3^4}{4!15!0!}\right).$$

<u>Ответ:</u> $19!\left(\frac{3^{13}}{13!0!6!} - \frac{3^{10}}{10!5!4!} + \frac{3^7}{7!10!2!} - \frac{3^4}{4!15!0!}\right).$

Формула включений и исключений

Формула включений и исключений

Пусть даны N объектов (предметов), каждый из которых может обладать или не обладать одним или несколькими из свойств $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Через a_i' обозначим отсутствие свойства a_i;

через $N(a)$ – количество предметов, обладающих свойством a (a – любое из свойств a_i или a_i');

через $N(a,b,c,\ldots,k)$ – количество предметов, обладающих попарно различными свойствами $a,b,c,\ldots,k$

Формула включений и исключений

Если все свойства a_i попарно не совместимы (т.е. $N(a_i a_k)=0$ при $i \neq k$), то формула имеет вид:

$$N(a_1' \dots a_n') = N - \sum_{1 \le i \le n} N(a_i)$$

Формула включений и исключений

Тогда, очевидно, $N(a_i^{/}) = N - N(a_i)$

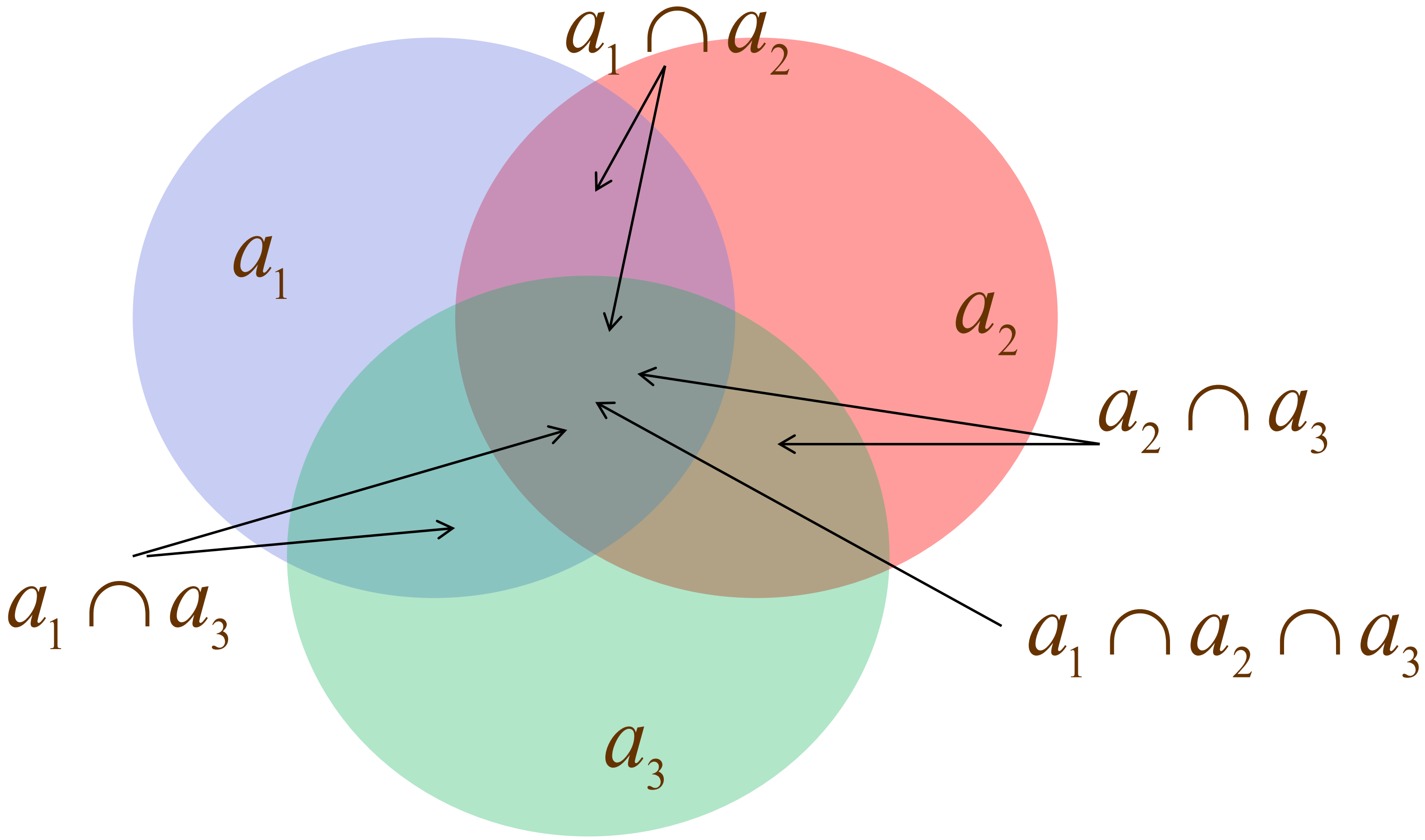
$$N(a_1^{/}a_2^{/}) = N - N(a_1) - N(a_2) + N(a_1a_2)$$

т.к. при вычитании $N(a_1)$ и $N(a_2)$ из общего числа предметов число $N(a_1a_2)$ вычитается дважды.

Формула включений и исключений

$$N(a_1' a_2' a_3') = N - N(a_1) - N(a_2) - N(a_3) +$$

$$N(a_1 a_2) + N(a_1 a_3) + N(a_3 a_2) - N(a_1 a_2 a_3)$$



Формула включений и исключений

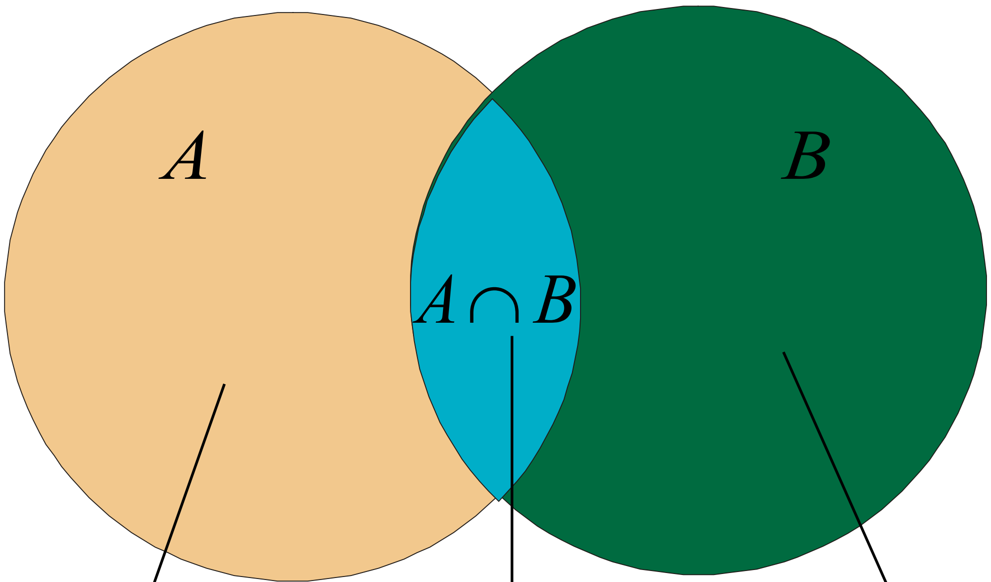
При произвольном ***n*** справедлива формула включений и исключений:

$$N(a_1' a_2' \ldots a_n') = N - \sum_{1 \le i \le n} N(a_i) +$$

$$\sum_{1 \le i < j \le n} N(a_i a_j) + \ldots + (-1)^n N(a_1 a_2 \ldots a_n)$$

Формула включений и исключений

Сколько положительных целых чисел, не превышающих 1000, делятся на 7 или на 11?



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$= \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{7 \cdot 11} \right\rfloor$$

$$= 142 + 90 - 12$$

$$= 220$$

$|A| = 142$
делится на 7

$|B| = 90$
делится на 11

$|A \cap B| = 12$

Задачи о встречах и беспорядках

Формулы включений и исключений. Задача о беспорядках

Определить количество перестановок $a_1, \ldots, a_n$, чисел $1, \ldots, n$ таких, что $a_i \neq i, i = \overline{1,n}$.

.

<u>Решение.</u>

Число всех перестановок $N=n!$

Свойство $s_i : a_i = i, i = \overline{1,n}$.

$N(i_1, \ldots, i_r)$ - число перестановок, оставляющих на месте по крайней мере числа $i_1, \ldots, i_r$

$N(i_1, \ldots, i_r) = (n-r)!$

Задача о беспорядках

В $\sum\limits_{i_1<\ldots<i_r} N(i_1,\ldots,i_r)$ C_n^r слагаемых – количество способов выбора чисел $i_1,\ldots,i_r$ из $1,\ldots,n$.

На основании формулы включений и исключений :

$$D_n = n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! + \ldots + (-1)^r C_n^r (n-r)! + \ldots$$

$$+(-1)^n C_n^n 0! = n!(1 - 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + (-1)^r \frac{1}{r!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}) =$$

$$= n! \sum_{r=2}^{n} (-1)^r \frac{1}{r!}$$

Задача о встречах. Формулировка

Определить количество перестановок $a_1, \ldots, a_n$ чисел $1, \ldots, n$, для которых $a_i = i$ ровно в r местах

$$D_{n,r} = C_n^r D_{n-r}.$$

Задача о встречах.

Пример

Сколько существует перестановок 9 различных предметов, при которых на своих первоначальных местах окажутся ровно 2 или ровно 6 предметов?

Количество различных перестановок девяти предметов, при которых на своих первоначальных местах окажутся ровно 2 предмета, равно $D_{9,2}$, а количество различных перестановок девяти предметов, при которых на своих первоначальных местах окажутся ровно 6 предметов, равно $D_{9,6}$. Применяя правило суммы, а также формулу для вычисления $D_{n,k}$, имеем:

$$D_{9,2} + D_{9,6} = C_9^2 D_7 + C_9^6 D_3 =$$

$$= \frac{9!}{2!7!} 7! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!}\right) +$$

$$+ \frac{9!}{6!3!} 3! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) = \frac{9!}{7!2!} \cdot 1854 + \frac{9!}{6!3!} \cdot 2 = 66912.$$

Ответ: 66912 перестановок.

Разбиения множества

Упорядоченное разбиение множеств

Подсчитаем число разбиений конечного множества S, где $|S| = n$, на k различных подмножеств $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k$, попарно не пересекающихся, $|S_i| = n_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ и $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Последовательность различных $S_1, S_2, \ldots, S_k$ рассматривается как упорядоченная последовательность подмножеств. При формировании упорядоченной $S_1, S_2, \ldots, S_k$ последовательности на первое место подмножество S_1 можно выбрать $C_n^{n_1}$ способами, на второе место подмножество S_2 можно выбрать из оставшихся $n - n_1$ элементов $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами и т. д., на последнее место множество S_k можно выбрать из оставшихся $n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{k-1}$ элементов $C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}^{n_k}$ способами. По правилу прямого произведения получаем, что общее число упорядоченных разбиений множества S на k подмножеств равно

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \ldots C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!},$$

что совпадает с числом $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ перестановок с повторениями.

Упорядоченное разбиение множеств

В студенческой группе, состоящей из 25 человек, при выборе старосты за выдвинутую кандидатуру проголосовали 19 человек, против — 3, воздержались — 3. Сколькими способами может быть проведено такое голосование?

Решение. Имеем три различные корзины: «за», «против», «воздержались», в которые необходимо разложить 25 шаров, соответственно 19 — в первую, 3 — во вторую, 3 — в третью. Количество таких разложений определяется выражением $C_{25}^{19} \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = \frac{25!}{19! \times 3! \times 3!}$.

Неупорядоченное разбиение множеств

Подсчитаем, сколькими способами можно разбить множество S, где $|S| = n$, на подмножества, среди которых для каждого $i = 1$, $2,\dots, n$ имеется $m_i \geq 0$ подмножеств с i элементами. Тогда верно, что $\sum_{i=1}^{n} i \cdot m_i = n$. Данное разбиение позволяет представить исходное множество следующим образом:

$$S = \bigcup_{j=1}^{m_1} S_{1j} \cup \bigcup_{j=1}^{m_2} S_{2j} \cup \ldots \cup \bigcup_{j=1}^{m_n} S_{nj} = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m_i} S_{ij},$$

где S_{ij} попарно не пересекаются и $|S_{i1}| = |S_{i2}| = \ldots = |S_{im_i}| = i$ для каждого $i = 1, 2,\dots, n$. Порядок подмножеств в разбиении не является существенным. Так, например, разбиения множества $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ вида

{1, 3}, {4}, {25};
{1, 3}, {25}, {4};
{25}, {1, 3}, {4};
{4}, {1, 3}, {25};

считаются одинаковыми.

Обозначим число неупорядоченных разбиений множества S через $N(m_1, m_2,..., m_n)$. Рассмотрим схему формирования *упорядоченных разбиений* для представления $n = 1\cdot m_1 + 2\cdot m_2 + \ldots + n\cdot m_n$:

$$\underbrace{C_n^1 C_{n-1}^1 \ldots}_{m_1} \underbrace{C_{n-1m_1}^2 C_{n-1m_1-1}^2 \ldots}_{m_2} \underbrace{C_{n-1m_1-2m_2}^3 C_{n-1m_1-2m_2-1}^3 \ldots}_{m_3} \underbrace{C_{n-1m_1-2m_2-\ldots-(n-1)m_{n-1}}^n}_{m_n} =$$

$$= \frac{n!}{\underbrace{1!1!\ldots1!}_{m_1}\underbrace{2!2!\ldots2!}_{m_2}\ldots\underbrace{n!n!\ldots n!}_{m_n}} = \frac{n!}{(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\ldots(n!)^{m_n}}.$$

Тогда общее число неупорядоченных разбиений будет в $m_1!m_2!\ldots m_n!$ раз меньше, чем упорядоченных. Следовательно,

$$N(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \frac{n!}{(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\ldots(n!)^{m_n}\, m_1!m_2!\ldots m_n!}.$$

Неупорядоченное разбиение множеств

Сколькими способами из группы в 17 человек можно сформировать 6 коалиций по 2 человека и 1 коалицию из 5 человек?

Решение. Требуется разбить множество из 17 человек на непересекающиеся и неупорядоченные группы людей. Откуда искомое число равно $N(0_1, 6_2, 0_3, 0_4, 1_5, 0_6, 0_7, \ldots, 0_{17}) = \frac{17!}{(2!)^6 (5!)^1 6!\, 1!}$.

Неупорядоченное разбиение множеств

Сколькими способами можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в каждой пачке было по два туза?

Решение. 4 туза можно разбить на $\frac{4!}{(2!)^2 2!} = 3$ различные коалиции по две карты в каждой (неупорядоченные разбиения), т.е. только 3 способами можно разделить тузы пополам. Далее, каждая половина любого из этих трех разбиений тузов выполняет роль различных двух «корзин», куда необходимо разложить пополам оставшиеся 32 карты. Разложение 32 оставшихся карт уже будет упорядоченным, так как «корзины» различные, число разложений равно $\frac{32!}{16!\,16!}$. Согласно правилу прямого произведения, общее число вариантов разделить колоду пополам равно $\frac{4!}{(2!)^2 2!} \cdot \frac{32!}{16!\,16!} = \frac{3 \cdot 32!}{16!\,16!}$.

Разбиения множества

Под разбиением n-элементного множества A на k блоков будем понимать произвольное семейство $\pi = \{B_1, \ldots, B_k\}$, такое что $B_1 \cup \ldots \cup B_k = A$, $B_i \cap B_j \emptyset$ для $1 \le i < j \le k$ и $B_i \ne \emptyset$ для $1 \le i \le k$. Подмножества $B_1, \ldots, B_k$ будем называть блоками семейства π. Множество всех разбиений множества A на k блоков будем обозначать $\Pi_k(A)$, а множество всех разбиений через $\Pi(A)$.

Числа Стирлинга второго рода

Определение. Число Стирлинга второго рода $S(n,k)$ есть число разбиений n-элементного множества на k блоков:

$$S(n,k)=\left|\Pi_k(A)\right|, \text{ где } \left|A\right|=n.$$

Пример. $S(4,2)=7$, множество $A=\{1,2,3,4\}$ можно разбить на 2 блока семью различными способами:

$\{\{1,2,3\},\{4\}\}$
$\{\{1,2,4\},\{3\}\}$
$\{\{1,3,4\},\{2\}\}$
$\{\{1,2\},\{3,4\}\}$
$\{\{1,3\},\{2,4\}\}$
$\{\{1,4\},\{2,3\}\}$
$\{\{1\},\{2,3,4\}\}$

$S(n,k)=0$ для $k>n$.

$S(0,0)=1$, т.к. пустое семейство блоков является разбиением пустого множества.

Числа Стирлинга второго рода

Теорема

$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$ для $0 < k \le n$,

$S(n,n) = 1$ для $n \ge 0$,

$S(n,0) = 0$ для $n > 0$,

$$S(5, 3) = S(4, 2) + 3S(4, 3)$$

Числа Стирлинга второго рода

$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$ для $0 < k \le n$,

$S(n,n) = 1$ для $n \ge 0$,

$S(n,0) = 0$ для $n > 0$,

$S(n,k)$

$0 \le n,k \le 8$

k / n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0	0	0
6	0	1	31	90	65	15	1	0	0
7	0	1	63	301	350	140	21	1	0
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Распределения

Сколькими способами можно распределить n различных открыток в k

1) различных;

2) неразличимых конвертов, если:

а) все конверты непусты;

б) допускаются пустые конверты. (Всего рассмотреть 4 случая.)

для $n=6,\quad k=4.$

1а) Если конверты различимы, и все они должны быть непусты, то число способов распределения равно

$$U^*(6,4)=C_4^0 4^6-C_4^1 3^6+C_4^2 2^6-C_4^3=4096-4\cdot 729+6\cdot 64-4=1560;$$

1б) если конверты различимы и допускаются пустые конверты, то число способов распределения равно $U(6,4)=4^6=4096$;

2а) если конверты неразличимы и все они должны быть непусты, то число способов распределения равно

$$V^*(6,4)=\frac{U^*(6,4)}{4!}=\frac{1560}{24}=65;$$

2б) если конверты неразличимы и допускаются пустые конверты, то число способов распределения равно

$$V(6,4)=V^*(6,4)+V^*(6,3)+V^*(6,2)+V^*(6,1)=$$

$$=65+\frac{U^*(6,3)}{3!}+\frac{U^*(6,2)}{2!}+U^*(6,1)=$$

$$=65+\frac{C_3^0\cdot 3^6-C_3^1\cdot 2^6+C_3^2\cdot 1^6}{6}+\frac{C_2^0\cdot 2^6-C_2^1}{2}+C_1^0=$$

$$=65+\frac{1\cdot 729-3\cdot 64+3}{6}+\frac{64-2}{2}+1=65+90+31+1=187.$$

<u>Ответ:</u> 1а) 1560; 1б) 4096; 2а) 65; 2б) 187.