# Комбинаторика

# Проблемы комбинаторного анализа

- Задачи на перечисления, в которых необходимо определить количество размещений элементов конечного множества, удовлетворяющих определенным условиям;
- Задачи о существовании и построении
- Задачи о выборе

# Магический квадрат

Разместить числа 1,2,3,4,5,6,7,8,9 в виде квадрата так, чтобы сумма чисел из каждого из столбцов, строк и диагоналей была одинакова.

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

# Правило суммы

# Правило суммы

Пусть $A$ и $B$ — конечные множества такие, что $A \cap B = \varnothing$, $|A| = m$ и $|B| = n$. Тогда $|A \cup B| = m + n$.

Если первая задача может быть сделана $n_1$ способами, а вторая – $n_2$ способами, и если эти задачи не могут быть сделаны одновременно, то существует

$$n_1 + n_2$$

способов сделать любую задачу.

# Правило суммы

Можно применять правило суммы более, чем для 2 множеств.

Пусть задачи $T_1$, $T_2$, ..., $T_m$ могут быть сделаны $n_1$, $n_2$, ..., $n_m$ способами соответственно, и никакие 2 из этих задач не могут выполняться одновременно. Тогда количество способов выполнить любую из задач определяется как

$$n_1+n_2+\ldots+n_m$$

# Правило суммы

**Пример**

В городе находятся 4 технических ВУЗа, 1 медицинский и 2 гуманитарных. Сколькими способами можно получить высшее образование по государственному набору в данном городе?

**Решение:**

Поскольку государственный набор предполагает бесплатное обучение только в одном ВУЗе, применимо правило суммы, по которому число способов $N$ выбора ВУЗа определяется как: $N = 4+1+2 = 7$.

# Правило произведения

# Правило произведения

Пусть $A$ и $B$ — конечные множества, $|A| = m$ и $|B| = n$, тогда $|A \times B| = m \cdot n$.

*Интерпретация*. Если элемент $a \in A$ можно выбрать $m$ способами и если после каждого такого выбора элемент $b \in B$ можно выбрать $n$ способами, то выбор пары $(a,b) \in A \times B$ в указанном порядке можно осуществить $|A \times B| = m \cdot n$ способами.

Пусть задача может быть разбита на 2 подзадачи. Если первая подзадача может быть сделана $n_1$ способами, а вторая – $n_2$ способами, то существует

$$n_1 \cdot n_2$$

способов сделать эту задачу.

# Правило произведения

**Пример**

Имеются 4 научные темы, 3 студента и 2 преподавателя. Исследовательскую группу, занимающуюся одной темой, составляет один студент и один преподаватель. Сколько существует комбинаций выбора различных тем и различных исследовательских групп?

**Решение:**

Так как одна исследовательская группа может вести только одну тему, применимо правило произведения, по которому число комбинаций равно ***4·3·2=24.***

**Пример**

Сколько различных битовых строк длинной 7 можно составить?

Каждый из 7 бит может быть выбран двумя способами (0 или 1).

Получаем:

$$2^7=128$$

различных битовых строк длинной 7.

командир $a_1, a_2, a_3, a_4$

инженер $b_1, b_2, b_3$

врач $c_1, c_2, c_3$

$a_1$ с $b_1, b_2, c_2, c_3$;

$a_2$ с $b_1, b_2, c_1, c_2, c_3$;

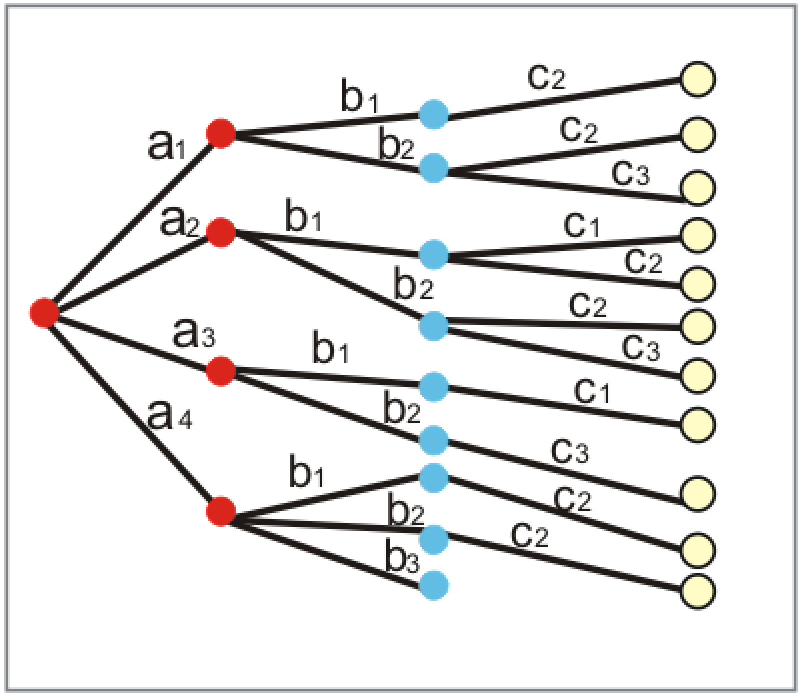
$a_3$ с $b_1$ и $b_2, c_1, c_3$;

$a_4$ с $b_1, b_2, b_3, c_2$;

$b_1$ с $c_3$;

$b_2$ с $c_1$;

$b_3$ с $c_2$.



# Перестановки и размещения

Набор элементов $x_{i1},\ldots, x_{ik}$ из множества X=$\{x_1, \ldots, x_n\}$ называется ***выборкой*** объема $k$ из $n$ элементов или, иначе, ***(n, k)-выборкой***.

Выборка называется ***упорядоченной***, если задан порядок следования элементов в ней. Две упорядоченные выборки, различающиеся лишь порядком следования элементов, считаются различными.

Если порядок следования элементов в выборке не является существенным, то такая выборка называется ***неупорядоченной***.

# *Перестановки без повторений*

***Перестановкой*** ***без повторений*** из *n* элементов называется всякий упорядоченный набор из этих элементов.

Число различных перестановок *n* элементов обозначают $P_n$.

$$P_n = n!$$

***Пример***

***M={1,2,3}***

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

# *Перестановки без повторений*

***Пример***

На кафедре защищаются дипломники A, B, C и D, причем A и B имеют комплексную тему и B не может защитить диплом после A. Сколькими способами можно определить очередность защит?

***Решение:***

Так как B и A защищают одну тему, необходимо рассматривать перестановки из трех элементов

$P_3=3!=1\cdot 2\cdot 3=6$

# Размещения без повторений

***Размещением*** ***без повторений*** из $n$ элементов по $k$ называется упорядоченный набор из $k$ различных элементов некоторого $n$-элементного множества (упорядоченная $(n, k)$-выборка без возвращений называется). Перестановка также является размещением из $n$ элементов по $n$.

Число различных ***размещений*** (без повторений) из $n$ элементов по $k$ обозначается  и вычисляется по формуле

$$A_n^k = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

# Размещения без повторений

***Пример***

*M = {1,2,3}*.

2-перестановки

*(1,2);(2,1);(1,3);(3,1);(2,3); (3,2);*

3-перестановки

*(1,2,3);(1,3,2);(2,1,3); (2,3,l); (3,1,2);(3,2,1)*.

# Размещения без повторений

**Пример**

*Из группы в 25 человек требуется выбрать старосту, заместителя старосты и профорга. Сколько вариантов выбора руководящего состава группы?*

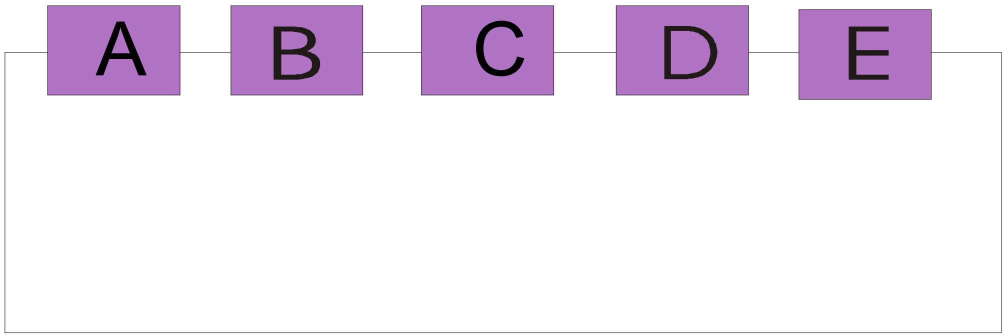
***Решение****: Старосту можно выбрать одним из 25 способов. Поскольку выбранный староста не может быть своим заместителем, то для выбора заместителя старосты остается 24 варианта. Профорга выбирают одним из 23 способов. Всего вариантов:*

$$23 \cdot 24 \cdot 25 = \frac{25!}{22!} = 13800$$

# Круговые перестановки

Сколькими способами можно рассадить 5 детей за круглым и за квадратным столом?

Рассмотрим случай, когда дети сидят за квадратным столом:

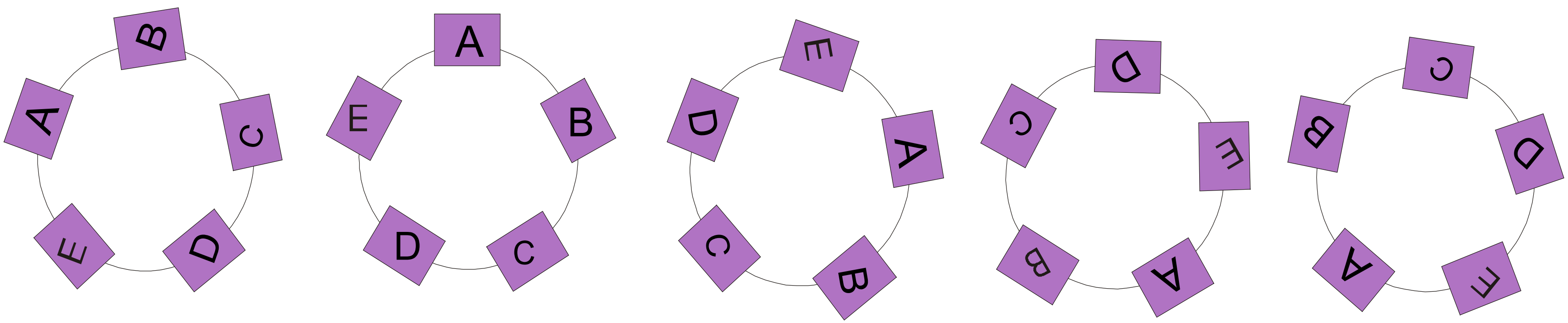



После применения формулы для нахождения количества перестановок получаем:

$$P(5,5) = 5!$$

# Круговые перестановки

Рассмотрим случай, когда дети сидят за круглым столом :




Для *n* элементов существует *(n-1)!* круговых перестановок.

# Перестановки с повторениями

*Перестановками с повторениями* из $n$ элементов по $k$ называется упорядоченное подмножество из $k$ элементов $n$-элементного множества, в которой каждый элемент множества встречается $k_i$ раз (причем, $k_1+k_2+...+k_n=k$). Число перестановок с повторениями обозначается

**Пример**

$A=\{a,b,c\}$, $|A|=3$, $M_a=\{a,a,...\}$, $M_b=\{b,b,..\}$, $M_c=\{c,c,...\}$.

6-перестановками с повторениями из трех элементов будут:

$(a,b,c,a,a,a)$, $(b,b,c,c,a,b)$, $(c,b,b,c,a,a)$ и т.д.

# Перестановки с повторениями

Две *k*-перестановки считаются равными, если они совпадают как своими элементами, так и порядком их расположения; и различными, если они отличаются либо элементами, либо порядком их расположения.

***Пример***

***М*** – множество букв разрезной азбуки (все буквы в азбуке строчные).

Различными 4-перестановками будут:

***(м,а,м,а),(р,а,м,а), (н,а,а,а), (а,н,а,а), (а,а,а,н)*** и т. д.

# Перестановки с повторениями

$$P(k_1, k_2, \ldots, k_k) = C_n^{k_1} \cdot C_{n-k_1}^{k_2} \cdot \ldots \cdot C_{k_n}^{k_n} = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_k!}$$

**Пример**

Сколько слов можно составить из букв слова “Миссисипи” (слова могут не иметь смысла)?

“м” встречается 1 раз,

“и” – 4 раза,

“с” -3 раза,

“п” - 1 раз

***P(9;1,4,3,1) =9!/(1!·4! ·3! ·1!)= 2520*.**

# n-перестановки из n-множества с заданной спецификацией

$$P(n;n_1,n_2,...,n_k)=C_n^{n_1}\cdot C_{n-n_1}^{n_2}\cdot ...\cdot C_{n_k}^{n_k}=\frac{n!}{n_1!\,n_2!...n_k!}$$

Пример

*Сколько различных слов можно получить перестановкой букв слова огород так, чтобы три буквы "о" не стояли бы рядом?*

Общее количество различных слов, полученных перестановкой букв слова огород, равно

$$P(3,1,1,1)=\frac{(3+1+1+1)!}{3!\,1!\,1!\,1!}=\frac{6!}{3!}=6\cdot 5\cdot 4=120\,.$$

Если в каком-то слове все три буквы "*о*" стоят рядом, то тройную "*о*" можно считать единым символом, и количество слов, в которых три буквы "*о*" стоят рядом, равно P(4) = 4! = 24.

В итоге получаем: 120 – 24 = 96.

# Размещения с неограниченными повторениями

***Размещением* с повторениями** из $n$ элементов по $k$ называется упорядоченный набор из $k$ элементов некоторого $n$-элементного множества, среди которых могут быть одинаковые элементы (упорядоченная ($n$, $k$)-выборка с возвращением). Число элементов каждого вида неограниченно.

Число различных ***размещений с повторениями*** из $n$ элементов по $k$ обозначается $\overline{A}_n^k$ и вычисляется по формуле

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

# Размещения с неограниченными повторениями

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

**Пример**

Сколько строк длиной $n$ может быть сформировано из букв английского алфавита?

По правилу произведения:

$$26^n$$

строк длинной $n$.

# Сочетания

***Сочетанием*** ***без повторений*** из $n$ по $k$ называется неупорядоченный набор $k$ элементов, выбранных из данных $n$ элементов (неупорядоченная $(n, k)$-выборка без возвращения). Наборы, отличающиеся только порядком следования элементов (но не составом), считаются одинаковыми, этим сочетания отличаются от размещений.

Количество всех различных ***сочетаний*** (без повторений) из $\boldsymbol{n}$ элементов по $\boldsymbol{k}$ обозначают $C_n^k$ или $\binom{n}{k}$

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

# Сочетания

***Пример***

Различными 2-сочетаниями множества

***M = {l,2,3 }:***

***{1,2},{1,3},{2,3}.***

# Сочетания

**Пример**

Пусть ***C* = {*a*, *b*, *c*, *d*}**

Количество 2-***сочетаний*** из ***C*** равно

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(4-2)! \cdot 2!} = 6$$

6 подмножеств: ***{a, b}, {a, c}, {a, d}, {b, c}, {b, d}, {c, d}.***

## Пример

Комитет, который разрабатывает курс по дискретной математики, должен состоять из 3 преподавателей дискретной математики и 4 программистов. Есть 9 преподавателей дискретной математики и 11 программистов.

Сколько существует способов сделать это?

После применения правила произведения получаем:

$$C_9^3 \cdot C_{11}^4 = \frac{9!}{3!\cdot 6!} \cdot \frac{11!}{4!\cdot 7!} = 84 \cdot 330 = 27720$$

# Свойства сочетаний

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

# Сочетания с повторениями

# *Сочетания с повторениями*

***Сочетаниями с повторениями*** из $n$ элементов по $k$ называются неупорядоченные подмножества $k$ элементов, выбранных из данных $n$ элементов, среди которых могут быть одинаковые элементы, и которые отличаются они хотя бы одним элементом (неупорядоченная ($n$, $k$)-выборка с возвращением). Число элементов каждого вида неограниченно.

# *Сочетания с повторениями*

***Пример***

*A={a,b,c}*,

6-сочетаниями с повторениями из трех элементов будут:

***{a,b,a,a,a,a},***

***{b,b,a,c,a,a},***

***{c,c,c,c,b,b}*** и т.д.

# Сочетания с повторениями

*A={a,b,c},*

*{a,b,a,a,a,a}, 11111010*

*{b,b,a,c,a,a}, 11101101*

*{c,c,c,c,b,b} 01101111*

# *Сочетания с повторениями*

Имеются предметы *n* различных видов. Число элементов каждого вида неограниченно. Сколько существует расстановок длины *k*, если не принимать во внимание порядок элементов? Такие расстановки называют ***сочетаниями с повторениями***, количество и обозначение которых следующее:

$$C_n^k = C_{n+r-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$$

# Сочетания с повторениями

## Пример

У преподавателя есть карточки на четыре различных варианта. Сколькими способами можно выбрать шесть карточек?

$$\overline{C_4^6} = C_9^6 = C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$$

# Свойства сочетаний с неограниченными повторениями

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$$

$$\overline{C}_n^k = \overline{C}_n^{k-1} + \overline{C}_{n-1}^k$$

| Соединение / Тип | Перестановки | Размещения | Сочетания |
|---|---|---|---|
| Без повторений | $P_n = n!$ | $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ | $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ |
| С повторениями | $P_{(p_1,\ldots p_n)} = \dfrac{k!}{P_1!P_2!\ldots P_n!}$ | $\overline{A_n^k} = n^k$ | $\overline{C_n^k} = \dfrac{(k+n-1)!}{k!(n-k)!}$ |

# Бином Ньютона

***Биномиальная теорема:***

Для произвольного положительного целого числа ***n*** справедливы равенства:

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_n^r \cdot a^r \cdot b^{n-r} = \sum_{r=0}^{n} C_n^r \cdot a^{n-r} \cdot b^r$$

Получить разложение

$$(2x+3y^2)^3 =$$

$$C_3^0(2x)^3 + C_3^1(2x)^2 \cdot (3y^2)^1 +$$

$$+ C_3^2(2x)^1 \cdot (3y^2)^2 + C_3^3(3y^2)^3 =$$

$$8x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 3y^2 + 3 \cdot 2x \cdot 9y^4 + 27y^6 =$$

$$8x^3 + 36x^2y^2 + 54xy^4 + 27y^6$$

**Пример:** Доказать тождество $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$

**Решение:** Воспользуемся формулой бинома Ньютона, в которой положим, *a* = *1* и *b* = 1, тогда

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^k \cdot 1^{n-k}$$

# Треугольник Паскаля

$$C_0^0$$

$$C_1^0 \quad C_1^1$$

$$C_2^0 \quad C_2^1 \quad C_2^2$$

$$C_3^0 \quad C_3^1 \quad C_3^2 \quad C_3^3$$

$$C_4^0 \quad C_4^1 \quad C_4^2 \quad C_4^3 \quad C_4^4$$

$$C_5^0 \quad C_5^1 \quad C_5^2 \quad C_5^3 \quad C_5^4 \quad C_5^5$$

$$\underbrace{C_{n-1}^{r-1} \qquad C_{n-1}^{r}}_{C_n^r}$$

Каждый из внутренних элементов треугольника равен сумме двух элементов расположенных над ними.

# Треугольник Паскаля

***(n+1)*** ряд треугольника состоит из коэффициента разложения ***(a+b)$^n$***

**1**

**1 1**

**1 2 1**

**1 3 3 1**

**1 4 6 4 1**

**1 5 10 10 5 1**

# Полиномиальная формула

$(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n=$

$$=\sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n}\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}\cdot x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$$

суммирование всем решениям уравнения $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$ в целых неотрицательных числах, $n_i\geq 0$, $i=1,2,\ldots k$.

$k=2$

бином Ньютона $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$