Пример. 1 способ

Проблема абитуриента

Поступающий в высшее учебное заведение должен сдать 4 экзамена. Он полагает, что для поступления будет достаточно набрать 17 очков. Сколькими способами он может сдать экзамены, чтобы наверняка поступить в ВУЗ?

Решение:

За каждый успешно сданный экзамен поступающий получает 3, 4 или 5 баллов.

F(k,N) число способов, которыми можно набрать N баллов после k экзаменов.

$$F(k, N)=F(k-1, N-3)+F(k-1, N-4)+F(k-1, N-5)$$

Отсюда получаем

$$F(4, 17)=F(3, 14)+F(3, 13)+F(3, 12)=$$
$$F(2, 11)+2F(2, 10)+3F(2, 9)+2F(2, 8)+F(2, 7)=$$
$$2+3F(2, 9)+2F(2, 8)+F(2, 7)$$

Пример. 1 способ

$F(2, 9)=F(1, 6)+F(1, 5)+F(1, 4)$
$F(2, 8)=F(1, 5)+F(1, 4)+F(1, 3)$
$F(2, 7)=F(1, 4)+F(1, 3)+F(1, 2)$
$F(4, 17)=2+3F(1, 6)+5F(1, 5)+6F(1, 4)+3F(1, 3)+F(1, 2).$

$F(1, 6)=F(1, 2)=0$, а $F(1, 5)=F(1, 4)=F(1, 3)=1.$

Поэтому

$F(4, 17)=2+5+6+3=16.$

$F(4, 18)=10$

$F(4, 19)=4$

$F(4, 20)=1$

Итого 16+10+4+1=31 способ успешной сдачи экзаменов.

Пример. 2 способ

17 оч ков

2 пятерки, 1 четверку и 1 тройку

1 пятерку и 3 чет верки

$$P(2, 1, 1)+P(1, 3)=\frac{4!}{2!1!1!}+\frac{4!}{3!1!}=12+4=16$$

18 очков

3 пятерки и 1 тройку

2 пятерки и 2 четверки

$$P(3, 1)+P(2, 2)=\frac{4!}{3!1!}+\frac{4!}{2!2!}=4+6=10$$

19 очков

три пятерки

одну четверку

$$P(3, 1)=\frac{4!}{3!1!}=4$$

20 очков

все «пятерки»

Итого: 16+10+4+1=31 способов

Пример. 3 способ

$$f(x)=(x^3+x^4+x^5)^4=x^{12}(1+x+x^2)^4.$$

$$expand\left((x^3+x^4+x^5)^4\right)$$

$$x^{12}+4x^{13}+10x^{14}+16x^{15}+19x^{16}+16x^{17}+10x^{18}+4x^{19}+x^{20}$$

$$p := (x^3+x^4+x^5)^4$$

$$(x^3+x^4+x^5)^4$$

$$expand(p)$$

$$x^{12}+4x^{13}+10x^{14}+16x^{15}+19x^{16}+16x^{17}+10x^{18}+4x^{19}+x^{20}$$

$$collect(p,x)$$

$$x^{12}+4x^{13}+10x^{14}+16x^{15}+19x^{16}+16x^{17}+10x^{18}+4x^{19}+x^{20}$$

Пример. 3 способ

$$z := \left(1 + e_1 \cdot x + e_1^{\,2} \cdot x^2\right) \cdot \left(1 + e_2 \cdot x\right)$$

$$\left(1 + e_1 x + e_1^2 x^2\right) \left(1 + e_2 x\right)$$

$expand(z)$

$$1 + e_2 x + e_1 x + e_1 x^2 e_2 + e_1^2 x^2 + e_1^2 x^3 e_2$$

$collect(z, x)$

$$1 + e_1^2 x^3 e_2 + \left(e_1 e_2 + e_1^2\right) x^2 + \left(e_2 + e_1\right) x$$

$$p := \left(x^3 + x^4 + x^5\right)^4$$

$$\left(x^3 + x^4 + x^5\right)^4$$

$coeff(p, x, 17)$

$$16$$

$coeff(z, x, 3)$

$$e_1^2 e_2$$

```
solve(x^3-2);
```

$$2^{\left(\frac{1}{3}\right)}, -\frac{1}{2}2^{\left(\frac{1}{3}\right)}+\frac{1}{2}I\sqrt{3}\,2^{\left(\frac{1}{3}\right)}, -\frac{1}{2}2^{\left(\frac{1}{3}\right)}-\frac{1}{2}I\sqrt{3}\,2^{\left(\frac{1}{3}\right)}$$

```
solve(x^12=1);
```

$$1, -1, I, -I, \frac{1}{2}\sqrt{2+2I\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\sqrt{2+2I\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\sqrt{2-2I\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\sqrt{2-2I\sqrt{3}}, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3},$$
$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I\sqrt{3}, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}I\sqrt{3}$$

```
eqs1:={x+2*y+3*z=6,5*x+5*y+4*z=1,3*y+4*z=1};
```

$$eqs1 := \{x+2y+3z=6, 5x+5y+4z=1, 3y+4z=1\}$$

```
a1:=solve(eqs1, {x,y,z});
```

$$a1 := \{x=\frac{42}{13}, z=\frac{82}{13}, y=\frac{-105}{13}\}$$

ПРИМЕР Сколько последовательностей длины n можно сформировать из целых чисел $1, 2, 3$ и 4, если должно быть не менее одной цифры 1, двух цифр 2, нечетное количество цифр 3 и четное количество цифр 4?

Если бы мы просто выбирали объекты, производящая функция имела бы вид

$$(x + x^2 + x^3 \cdots)(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)(x + x^3 + x^5 \cdots)(x^2 + x^4 + x^6 + \cdots).$$

Учитывая, что требуется количество последовательностей, порядок элементов имеет значение, поэтому соответствующая экспоненциальная функция имеет вид

$$\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots\right).$$

ПРИМЕР 13.26. Найдем производящую функцию, описывающую количество способов размещения n человек в трех комнатах при условии, что в каждой комнате должно быть не менее двух и не более десяти человек. Используя основное свойство обычных экспоненциальных функций, определяем, что искомая экспоненциальная производящая функция имеет вид

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{10}}{10!}\right)\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{10}}{10!}\right)\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{10}}{10!}\right)$$

$$f(x) = \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{10}}{10!}\right)^3.$$

$$(1+x)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n,$$

$$\frac{1}{(1-x)^m} = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m+1}{2}x^2 + \binom{m+2}{3}x^3 + \cdots + \binom{m+n-1}{n}x^n + \cdots$$

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

ПРИМЕР Найдем коэффициент при x^{24} в разложении производящей функции $(x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \cdots)^4$.

$$\begin{aligned}(x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \cdots)^4 &= (x^3)^4(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^4 = \\ &= (x^{12})\left(\frac{1}{1-x}\right)^4 = \qquad \text{по теореме 13.2} \\ &= (x^{12})\frac{1}{(1-x)^4} = \\ &= (x^{12})(1 + 4x + \tbinom{5}{2}x^2 + \cdots + \tbinom{4+n-1}{n}x^n + \cdots)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{(1-x)^m} = 1 + \tbinom{m}{1}x + \tbinom{m+1}{2}x^2 + \tbinom{m+2}{3}x^3 + \cdots + \tbinom{m+n-1}{n}x^n + \cdots$$

ПРИМЕР Выясним, сколько существует способов выбора 12 объектов из совокупности объектов пяти типов, если необходимо выбрать не более 2 объектов первых трех типов и неограниченное количество объектов остальных двух типов.

Производящая функция имеет вид

$$(1+x+x^2)^3(1+x+x^2+x^3+\cdots)^2.$$

Но по теореме 13.3

$$(1+x+x^2)^3=\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right)^3.$$

Поэтому

$$(1+x+x^2)^3(1+x+x^2+x^3+\cdots)^2=\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right)^3(1+x+x^2+x^3+\cdots)^2=$$

$$=\frac{(1-x^3)^3}{(1-x)^3}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}=(1-x^3)^3\cdot\frac{1}{(1-x)^5}=(1-x^3)^3\cdot\frac{1}{(1-x)^5}.$$

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n$$

$$(1-x^3)^3 = 1 - 3x^3 + 3x^6 - x^9$$

$$\frac{1}{(1-x)^5} = 1 + 5x + \binom{6}{2}x^2 + \cdots + \binom{5+n-1}{n}x^n \cdots,$$

$$(1 - 3x^3 + 3x^6 - x^9)\left(1 + 5x + \binom{6}{2}x^2 + \cdots + \binom{5+n-1}{n}x^n \cdots\right)$$

$$1 \cdot \binom{5+12-1}{12} - 3\binom{5+9-1}{9} + 3\binom{5+6-1}{6} - \binom{5+3-1}{3}.$$

$$\frac{1}{(1-x)^m} = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m+1}{2}x^2 + \binom{m+2}{3}x^3 + \cdots + \binom{m+n-1}{n}x^n + \cdots$$

$$(1+x)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n,$$

ПРИМЕР Сколько существует способов выбора 20 объектов из множества объектов пяти типов, если количество выбранных объектов первого типа кратно 5, количество выбранных объектов второго типа кратно 3, объектов третьего типа следует выбрать не более 4, объектов четвертого типа — не менее 3, а объектов пятого типа — не более 2?

Производящая функция имеет вид

$$(1+x^5+x^{10}+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x+\cdots+x^4)(x^3+x^4+\cdots)(1+x+x^2)$$

и может быть представлена в виде выражения

$$\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^5}{1-x}\cdot\frac{x^3}{1-x}\cdot\frac{1-x^3}{1-x}=\frac{x^3}{(1-x)^3},$$

исходя из этого, производящая функция имеет вид

$$x^3\left(1+3x+\binom{4}{2}x^2+\cdots\binom{3+n-1}{n}x^n+\cdots\right).$$

Коэффициент при x^r равен $\binom{r-1}{r-3}$, а коэффициент при x^{20} равен $\binom{19}{17}$.

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n$$

$$\frac{1}{(1-x)^m}=1+\binom{m}{1}x+\binom{m+1}{2}x^2+\binom{m+2}{3}x^3+\cdots+\binom{m+n-1}{n}x^n+\cdots$$

Разбиения. Производящие функции числа разбиений С

Найдем, например, сколькими способами можно получить 25 очков, бросая 7 костей. Здесь надо образовать производящую функцию

$$f(x) = (x + x^2 + \ldots + x^6)^7.$$

По формуле для суммы геометрической прогрессии эту функцию можно записать в следующем виде:

$$f(x) = \frac{x^7(1 - x^6)^7}{(1 - x)^7} = x^7(1 - x^6)^7(1 - x)^{-7}.$$

Теперь разложим $(1 - x^6)^7$ по формуле бинома Ньютона, а $(1 - x)^{-7}$ — по формуле ряда Ньютона. Мы получим

$$f(x) = x^7(1 - 7x^6 + 21x^{12} - 35x^{18} + 35x^{24} - 21x^{30} + 7x^{36} - x^{42})(1 + 7x + 28x^2 + 84x^3 + 210x^4 + 462x^5 + \ldots).$$

Перемножая эти разложения, без труда вычислим коэффициент при x^{25}. Он и даст ответ на поставленную задачу.

$$\frac{1}{(1-x)^m} = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m+1}{2}x^2 + \binom{m+2}{3}x^3 + \cdots + \binom{m+n-1}{n}x^n + \cdots$$

$$(1+x)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n,$$

Пример. 3 способ

$f(x) = (x^3+x^4+x^5)^4 = x^{12}(1+x+x^2)^4.$

$$1+x+x^2 = \frac{1-x^3}{1-x}.$$

Поэтому

$$f(x) = \frac{x^{12}(1-x^3)^4}{(1-x)^4} = x^{12}(1-x^3)^4(1-x)^{-4}$$

По формуле бинома Ньютона

$$(1-x^3)^4 = 1-4x^3+6x^6-4x^9+x^{12},$$

По формуле ряда Ньютона

$$(1-x)^{-4} = 1+4x+10x^2+20x^3+35x^4+56x^5+84x^6+120x^7+165x^8+\ldots$$

$$+\frac{4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(n+3)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n+\ldots$$

$$(1+x)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n,$$

$$\frac{1}{(1-x)^m} = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m+1}{2}x^2 + \binom{m+2}{3}x^3 + \cdots + \binom{m+n-1}{n}x^n + \cdots$$

Пример. 3 способ

$$f(x)=x^{12}(1-4x^3+6x^6-4x^9+x^{12})\cdot$$
$$(1+4x+10x^2+20x^3+35x^4+56x^5+84x^6+120x^7+165x^8+..)=$$

$$=x^{12}+4x^{13}+10x^{14}+20x^{15}+35x^{16}+56x^{17}+84x^{18}+120x^{19}+165x^{20}+\ldots$$
$$-4x^{15}-16x^{16}-40x^{17}-80x^{18}-140x^{19}-224x^{20}-\ldots+6x^{18}+24x^{19}+60x^{20}+\ldots=$$
$$\ldots+16x^{17}+10x^{18}+4x^{19}+x^{20}+\ldots$$

коэффициенты при x^{17}, x^{18}, x^{19} и x^{20} равны 16, 10, 4, 1

По правилу суммы имеем: 16+10+4+1=31.

Разбиения. Производящие функции числа разбиений

Сколькими способами можно уплатить 29 коп. монетами по 3 и 5 коп?

В этой задаче надо найти число способов разбить число 29 на слагаемые, равные 3 и 5, причем порядок слагаемых не имеет значения. Иными словами, нам надо найти число неотрицательных решений уравнения $3m+5n=29$.

Для этого составим выражение

$$f(x)=(1+x^3+x^6+\ldots+x^{3m}+\ldots)\times$$
$$\times(1+x^5+x^{10}+\ldots+x^{5n}+\ldots).$$

коэффициент при x^{29} дает ответ на задачу.

Разбиения. Производящие функции числа разбиений с

Вместо раскрытия скобок можно поступить так. Воспользуемся формулой для бесконечной геометрической прогрессии. Тогда выражение переписывается в виде

$$f(x)=\frac{1}{1-x^3}\,\frac{1}{1-x^5}=\frac{1}{1-x^3-x^5+x^8}\,.$$

А теперь разделим числитель на знаменатель по правилу деления многочленов (только будем располагать многочлены не по убывающим, а по возрастающим степеням x). Начало этого деления таково:

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1-x^3-x^5+x^8 \\
\hline
x^3+x^5-x^8 & 1+x^3+x^5+x^6+x^8+\ldots \\
\hline
\quad x^5+x^6-x^{11} & \\
\hline
\qquad x^6+x^8+x^{10}-x^{11}-x^{13} & \\
\hline
\qquad\quad x^8+x^9+x^{10}-x^{13}-x^{14} &
\end{array}$$

Продолжая деление, найдем искомый коэффициент при x^{29}.

Производящие функции с

$$\frac{Ax+B}{(1-Cx)(1-Dx)},$$

где константы C и D различны, равна

$$\frac{a}{1-Cx}+\frac{b}{1-Dx}$$

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{(1-Dx)(1-Ex)(1-Fx)},$$

$$\frac{a}{1-Dx}+\frac{b}{1-Ex}+\frac{c}{1-Fx}$$

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{(1-Dx)^2(1-Ex)}=\frac{a}{1-Dx}+\frac{b}{(1-Dx)^2}+\frac{c}{1-Ex}$$

$$\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(1-Ex)^3(1-Fx)}=\frac{a}{1-Ex}+\frac{b}{(1-Ex)^2}+\frac{c}{(1-Ex)^3}+\frac{d}{1-Fx}$$

Производящие функции С

$$\frac{15x}{1+3x-4x^2} = \frac{15x}{(1+4x)(1-x)}.$$

$$\frac{15x}{(1+4x)(1-x)} = \frac{a}{1+4x} + \frac{b}{1-x}$$

$$15x = a(1-x) + b(1+4x).$$

$$15(1) = a(1-1) + b(1+4), \qquad b = 3.$$

$$15\left(-\frac{1}{4}\right) = a\left(1-\frac{1}{4}\right) + b\left(1+4\left(-\frac{1}{4}\right)\right), \qquad a = -5,$$

$$\frac{15x}{(1+4x)(1-x)} = \frac{-5}{1+4x} + \frac{3}{1-x}.$$

Производящие функции с

$$\frac{15x}{(1+4x)(1-x)} = \frac{-5}{1+4x} + \frac{3}{1-x}.$$

$$\frac{1}{1+4x} = 1 + (-4)x + (-4)^2x^2 + (-4)^3x^3 + \cdots + (-4)^n x^n + \cdots$$

$$\frac{1}{(1-x)} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots,$$

$$\frac{-5}{1+4x} + \frac{3}{1-x} = -5(1 + (-4)x + (-4)^2x^2 + (-4)^3x^3 + \cdots$$
$$\cdots + (-4)^n x^n + \cdots) + 3(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots) =$$
$$= -2 + 23x - 77x^2 + 323x^3 + \cdots + (-5(-4)^n + 3)x^n + \cdots.$$

$$\frac{1}{(1-ax)} = 1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + \cdots + a^n x^n + \cdots,$$

Производящие функции С

Найдем функцию, заданную рекуррентными отношениями

$$a_0 = 5;$$
$$a_k = a_{k-1} + 3.$$

Второе уравнение можно переписать в виде $a_k - a_{k-1} - 3 = 0$.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots .$$

$$x f(x) = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \cdots + a_n x^{n+1} + \cdots .$$

$$\frac{3}{1-x} = 3(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots) =$$
$$= 3 + 3x + 3x^2 + 3x^3 + \cdots + 3x^n + \cdots .$$

$$f(x) - x f(x) - \frac{3}{1-x} = a_0 - 3 + (a_1 - a_0 - 3)x +$$
$$+ (a_2 - a_1 - 3)x^2 + \cdots + (a_n - a_{n-1} - 3) + \cdots .$$

$$f(x) - x f(x) - \frac{3}{1-x} = a_0 - 3 = 2.$$

Производящие функции с

$$f(x) - xf(x) - \frac{3}{1-x} = a_0 - 3 = 2.$$

$$f(x) = \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x} =$$
$$= 3(1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots) +$$
$$+ 2(1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots) =$$
$$= 5 + 8x + 11x^2 + 14x^3 + \cdots + (3n+5)x^n + \cdots,$$

$$a_n = 3n + 5.$$

$$\frac{1}{(1-x)^m} = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m+1}{2}x^2 + \binom{m+2}{3}x^3 + \cdots + \binom{m+n-1}{n}x^n + \cdots$$

Производящие функции с

$$a_0 = 1;$$
$$a_1 = 4;$$
$$a_k = a_{k-1} + 6a_{k-2}.$$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots .$$

$$xf(x) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + \cdots + a_nx^{n+1} + \cdots$$

$$6x^2f(x) = 6a_0x^2 + 6a_1x^3 + 6a_2x^4 + 6a_3x^5 + \cdots + 6a_nx^{n+2} + \cdots .$$

$$f(x) - xf(x) - 6x^2f(x) = a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1 - 6a_0)x^2 + \\ + (a_3 - a_2 - 6a_1)x^3 + \cdots + (a_n - a_{n-1} - 6a_{n-2})x^n + \cdots .$$

$$f(x) - xf(x) - 6x^2f(x) = a_0 + (a_1 - a_0)x = 1 + 3x.$$

Производящие функции с

$$f(x) - xf(x) - 6x^2 f(x) \quad = \quad 1 + 3x.$$

$$f(x) = \frac{1+3x}{1-x-6x^2} = \frac{1+3x}{(1-3x)(1+2x)}.$$

$$\frac{1+3x}{(1-3x)(1+2x)} = \frac{a}{(1-3x)} + \frac{b}{(1+2x)}$$

$$1 + 3x = a(1+2x) + b(1-3x).$$

Производящие функции С

$$1 + 3x = a(1 + 2x) + b(1 - 3x).$$

Полагая $x = -\frac{1}{2}$, получаем

$$1 + \left(-\frac{3}{2}\right) = a\left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right) + b\left(1 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)\right),$$

$$b = -\frac{1}{5}.$$

Полагая $x = \frac{1}{3}$, получаем

$$1 + 1 = a\left(1 + 2\left(\frac{1}{3}\right)\right) + b\left(1 - 3\left(\frac{1}{3}\right)\right),$$

$$a = \frac{6}{5}.$$

$$\frac{1 + 3x}{(1 - 3x)(1 + 2x)} = \frac{a}{(1 - 3x)} + \frac{b}{(1 + 2x)}$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{6}{(1 - 3x)} - \frac{1}{(1 + 2x)}\right)$$

Производящие функции с

$$f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{6}{(1-3x)} - \frac{1}{(1+2x)}\right) =$$

$$= \left(\frac{6}{5}\right)(1 + 3x + 3^2x^2 + 3^3x^3 + \cdots + 3^nx^n + \cdots) -$$

$$- \left(\frac{1}{5}\right) 1 + (-2)x + (-2)^2x^2 + (-2)^3x^3 + \cdots + (-2)^nx^n + \cdots ,$$

$$a_n = \left(\frac{1}{5}\right)(6 \cdot (3)^n - (-2)^n) .$$

Производящие функции с

$$a_0 = 1;$$
$$a_k = 3a_{k-1} + 4^n.$$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots .$$

$$3xf(x) = 3a_0 x + 3a_1 x^2 + 3a_2 x^3 + 3a_3 x^4 + \cdots + 3a_n x^{n+1} + \cdots .$$

$$\boxed{\frac{1}{(1-4x)} = (1 + 4x + 4^2 x^2 + 4^3 x^3 + \cdots + 4^n x^n + \cdots),}$$

это даст $4^n x^n$. Поэтому

$$f(x) - 3xf(x) - \frac{1}{(1-4x)} =$$
$$= a_0 - 1 + (a_1 - 3a_0 - 4)x + (a_2 - 3a_1 - 4^2)x^2 +$$
$$+ (a_3 - 3a_2 - 4^2)x^3 + \cdots + (a_n - a_{n-1} - 4^n)x^n + \cdots .$$

Производящие функции С

$$a_0 = 3;$$
$$a_n = 2a_{n-1} + n.$$

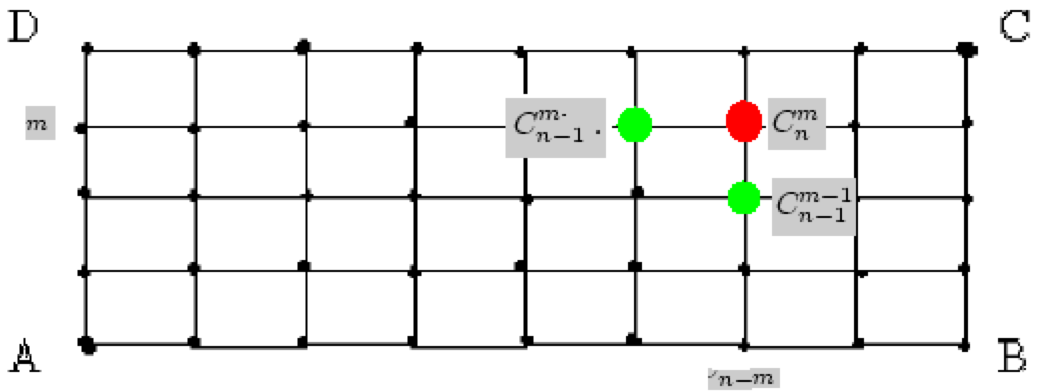
$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots .$$

$$2xf(x) = 2a_0x + 2a_1x^2 + 2a_2x^3 + 2a_3x^4 + \cdots + 2a_nx^{n+1} + \cdots .$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{x}{(1-x)^2} &= x(1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots) = \\ &= x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots .\end{aligned}}$$

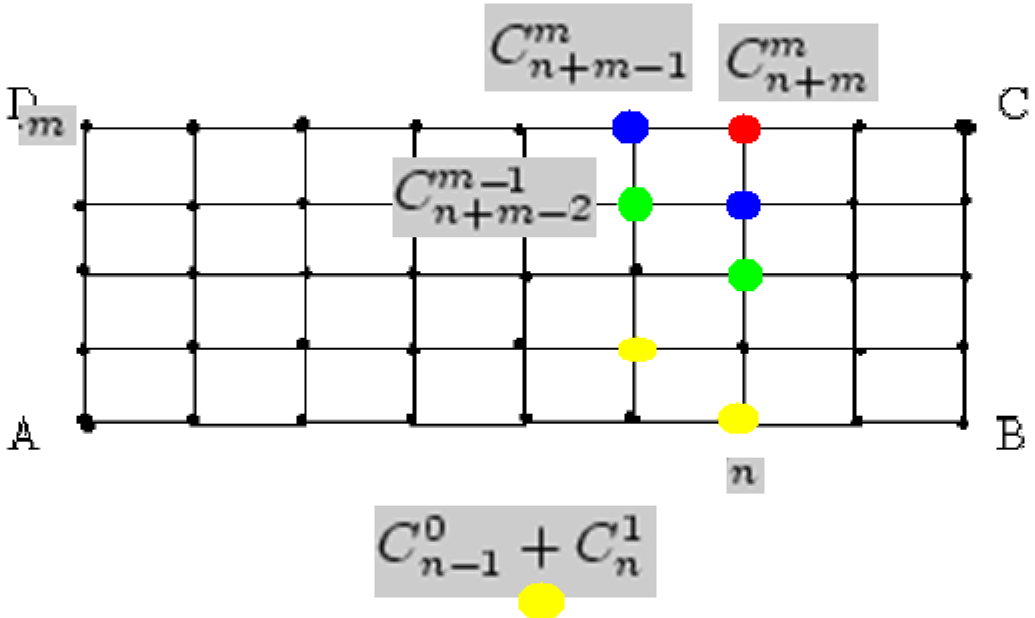
$$\begin{aligned}f(x) - 2xf(x) - \frac{x}{(1-x)^2} &= a_0 + (a_1 - 2a_0 - 1)x + \\ &+ (a_2 - 2a_1 - 2)x^2 + \cdots + (a_n - 2a_{n-1} - n) + \cdots .\end{aligned}$$

Доказательство тождеств



$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}.$$

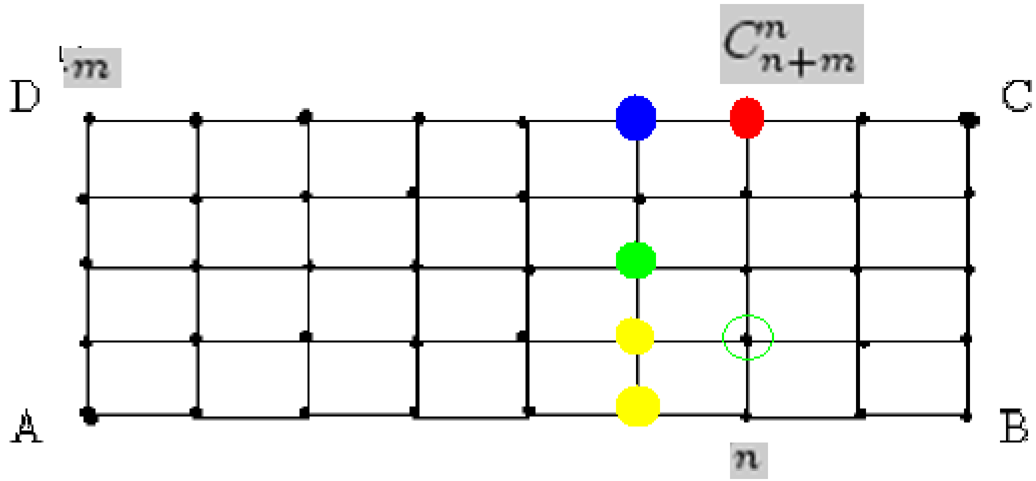
Доказательство тождеств



$$C_{n+m}^{m}=C_{n-1}^{0}+C_{n}^{1}+C_{n+1}^{2}+\ldots+C_{n+m-1}^{m}$$

$A_i(n-1,i)$

Доказательство тождеств



$C_{n-1}^{n-1} + C_{n}^{n-1}$

C_{n+1}^{n-1}

C_{n+m-1}^{n-1}

$$C_{n+m}^{m} = C_{n-1}^{n-1} + C_{n}^{n-1} + C_{n+1}^{n-1} + \ldots + C_{n+m-1}^{n-1}$$

C_{n-1+i}^{n-1}


Дискретная
математика
и комбинаторика
Джеймс Андерсон