Разбиение чисел

Сколькими способами можно представить число n в виде k

а) неотрицательных

б) положительных целых слагаемых, если представления, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются: 1) различными, 2) одинаковыми. (Всего рассмотреть 4 варианта.)

Разбиение чисел

$$n = 13, \quad k = 4.$$

Данная задача равносильна задаче распределения 13 неразличимых шаров (т. е. единиц, образующих число 13) по 4 ящикам (4 слагаемым).

1а) Если слагаемые неотрицательны, а представления, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются различными, то количество различных способов представления числа 13 в виде суммы 4 слагаемых равно $T(13,4) = C_{13+4-1}^{4-1} = C_{16}^{3} = \frac{16!}{3!13!} = 560.$

1б) Если слагаемые положительны, а представления, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются различными, то количество различных способов представления числа 13 в виде суммы 4 слагаемых равно $T^*(13,4) = C_{13-1}^{4-1} = C_{12}^{3} = \frac{12!}{3!9!} = 220.$

2а), 2б).

Разбиение чисел

n \ k	1	2	3	4
1	1 1	1 0	1 0	1 0
2	1 1	2 1	2 0	2 0
3	1 1	2 1	3 1	3 0
4	1 1	3 2	4 1	5 1
5	1 1	3 2	5 2	6 1
6	1 1	4 3	7 3	9 2
7	1 1	4 3	8 4	11 3

n \ k	1	2	3	4
8	1 1	5 4	10 5	15 5
9	1 1	5 4	12 7	18 6
10	1 1	6 5	14 8	23 9
11	1 1	6 5	16 10	27 11
12	1 1	7 6	19 2	34 15
13	1 1	7 6	21 14	39 18

Рекуррентные соотношения

Рекуррентные соотношения

При решении многих комбинаторных задач используется метод сведения данной задачи к аналогичной задаче, касающейся меньшего числа предметов.

Такой метод называется ***методом рекуррентных соотношений***. Пользуясь рекуррентным соотношением можно свести задачу об ***n*** предметах к задаче об ***(n–1)*** предметах, потом об ***(n–2)*** предметах и т.д. Последовательно уменьшая число предметов, доходим до задачи, которую уже легко решить. Во многих случаях удается получить из рекуррентного отношения явную формулу для решения комбинаторной задачи.

Пример рекурсивно заданной функции

$$a_1 = 1$$

$$\underbrace{a_k = a_{k-1} + k}_{\Downarrow}$$

Непосредственное задание функции

$$a_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Рекуррентные соотношения

Семеро математиков хорошо посидели в ресторане и, уходя, каждый захватил с собой чужую шляпу. Сколькими способами это возможно?

$$X(n)=(n-1)\left[X(n-2)+X(n-1)\right].$$

При $n=1$ $X(1)=0$, а при $n=2$ $X(2)=1$. Далее получаем $X(3)=2$, $X(4)=9$, $X(5)=44$, $X(6)=165$,

$X(7)=1254$.

Рекуррентные соотношения

Сколькими способами можно оплатить марками бандероль на сумму k рублей, если есть неограниченное число марок достоинством в a, b, c рублей и два способа, отличающиеся только порядком наклейки марок, считаются

1) различными? 2) одинаковыми?

Если число способов не превосходит 10, выписать их в явном виде.

$$f(k) = f(k-6) + f(k-5) + f(k-3).$$

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0,$$

$$f(2) = 0, \quad f(3) = 1, \quad f(4) = 0, \quad f(5) = 1, \quad f(6) = 2;$$

$$f(7) = f(1) + f(2) + f(4) = 0 + 0 + 0 = 0;$$

$$f(8) = f(2) + f(3) + f(5) = 0 + 1 + 1 = 2;$$

Рекуррентные соотношения

$$g(20;6,5,3) = g(20;5,3) + g(14;5,3) + g(8;5,3) + g(2;5,3)$$

$$g(20;5,3) = g(20;3) + g(15;3) + g(10;3) + g(5;3) + g(0;3);$$

$$g(14;5,3) = g(14;3) + g(9;3) + g(4;3); \;\; g(8;5,3) = g(8;3) + g(3;3).$$

$$g(20;5,3) = 0+1+0+0+1 = 2; \;\; g(14;5,3) = 0+1+0 = 1;$$

$$g(8;5,3) = 0+1 = 1; \quad g(20;6,5,3) = 2+1+1+0 = 4.$$

Рекуррентные соотношения

Поступающий в высшее учебное заведение должен сдать 4 экзамена. Он полагает, что для поступления будет достаточно набрать 17 очков. Сколькими способами он может сдать экзамены, чтобы наверняка поступить в вуз?

$$F(k;\ N) = F(k-1;\ N-3) + F(k-1;\ N-4) + F(k-1;\ N-5).$$

$$F(4;\ 17) = F(3;\ 14) + F(3;\ 13) + F(3;\ 12) =$$
$$= F(2;\ 11) + 2F(2;\ 10) + 3F(2;\ 9) + 2F(2;\ 8) + F(2;\ 7) =$$
$$= 2 + 3F(2;\ 9) + 2F(2;\ 8) + F(2;\ 7),$$

Рекуррентные соотношения

$$F(4;\ 17)=F(3;\ 14)+F(3;\ 13)+F(3;\ 12)=$$
$$=F(2;\ 11)+2F(2;\ 10)+3F(2;\ 9)+2F(2;\ 8)+F(2;\ 7)=$$
$$=2+3F(2;\ 9)+2F(2;\ 8)+F(2;\ 7),$$

$$F(4;\ 17)=2+3F(1;\ 6)+5F(1;\ 5)+$$
$$+6F(1;\ 4)+3F(1;\ 3)+F(1;\ 2).$$

$F(1;\ 6)=F(1;\ 2)=0$,

$F(1;\ 5)=F(1;\ 4)=F(1;3)=1.$

$F(4;\ 17)=16.$

$F(4;\ 18)=10,\quad F(4;\ 19)=4$ и $F(4;\ 20)=1.$

$16+10+4+1=31$

Линейные рекуррентные соотношения

Рекуррентное соотношение вида

$a_n=b_1(n)a_{n-1}+b_2(n)a_{n-2}+b_3(n)a_{n-3}+\ldots+b_p(n)a_p$

называется ***линейным рекуррентным соотношением порядка*** p , т.к. a_n выражается через p элементов вида $a_i\,(i=\overline{1,p})$

Соотношение линейно-рекуррентное, т.к. показатель каждой степени a_i равен 1.

Линейные рекуррентные соотношения

Рекуррентным соотношением k-го порядка называется формула, позволяющая выражать значения члена последовательности с номером n $(n > k)$ через члены этой последовательности с номерами $n-1, n-2, \ldots, n-k$.

Решением рекуррентного соотношения называется числовая последовательность, обращающая его в верное равенство при подстановке в него формулы общего члена последовательности.

Начальными условиями рекуррентного соотношения k-го порядка называются первые k членов последовательности, являющейся решением данного рекуррентного соотношения.

Линейным однородным рекуррентным соотношением k-го порядка с постоянными коэффициентами называется соотношение вида

$$f(n+k) = a_1 \cdot f(n+k-1) + a_2 \cdot f(n+k-2) + \ldots + a_k \cdot f(n).$$

Линейные рекуррентные соотношения

1) $a_n = 3a_{n-1}^3 + 4a_{n-2}$ - нелинейное, т.к. a_{n-1} в 3-ей степени

2) $a_n = 3n^3 a_{n-1} + n \cdot a_{n-2}$ - линейное

3) $a_{n+2}=a_n \cdot a_{n+1}-3a_{n+1}+1$ - нелинейное рекуррентное соотношение порядка 2, т.к. зависит от a_n и a_{n+1}

4) $a_{n+3}=6a_n \cdot a_{n+2}+a_{n+1}$ - нелинейное рекуррентное соотношение порядка 3, т.к. зависит от a_n, a_{n+1} и a_{n+2}

5) $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$ - линейное рекуррентное соотношение порядка 2, т.к. зависит от a_n и a_{n+1}

Линейные рекуррентные соотношения

$$f(n+k)=a_1\cdot f(n+k-1)+a_2\cdot f(n+k-2)+\ldots+a_k\cdot f(n).$$

Общим решением соотношения (*) называется такое его решение, которое содержит k произвольных постоянных, путём подбора которых можно удовлетворить любым начальным условиям.

Характеристическим уравнением соотношения (*) называется уравнение

$$x^k=a_1\cdot x^{k-1}+a_2\cdot x^{k-2}+\ldots+a_k. \qquad (**)$$

Линейные рекуррентные соотношения

$$f(n+k)=a_1\cdot f(n+k-1)+a_2\cdot f(n+k-2)+\ldots+a_k\cdot f(n).$$

Теорема: Общее решение соотношения (∗) имеет вид:

$$f(n)=A_1+A_2+\ldots+A_p,$$

где $A_i=C_i x^n$, если x — действительный корень первой кратности уравнения (∗∗), где C_i — произвольные постоянные.

$$A_i=x^n\cdot(C_{i,1}+nC_{i,1}+n^2C_{i,3}+\ldots+n^{m-1}C_{i,m}),$$

если x — действительный корень кратности m уравнения (∗∗), где $C_{i,1},C_{i,2},\ldots,C_{i,m}$ — произвольные постоянные;

Линейные рекуррентные соотношения

$$A_i = r^n(\cos\, n\varphi \cdot D_i + \sin\, n\varphi \cdot E_i),$$

если $r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$ — комплексно-сопряжённая пара, каждый член которой является корнем первой кратности уравнения (**) и D_i, E_i — произвольные постоянные;

$$A_i = r^n(\cos n\varphi \cdot (D_{i.1} + nD_{i.2} + n^2 D_{i.3} + \ldots + n^{m-1} D_{i.m}) +$$

$$+ \sin n\varphi \cdot (E_{i.1} + nE_{i.2} + n^2 E_{i.3} + \ldots + n^{m-1} E_{i.m})),$$

если $r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$ — комплексно-сопряжённая пара, каждый член которой является корнем кратности m уравнения (**) и $D_{i.1}, D_{i.2}, \ldots, D_{i.m}$, $E_{i.1}, E_{i.2}, \ldots, E_{i.m}$ — произвольные постоянные.

Линейные рекуррентные соотношения

Найти общее решение рекуррентного соотношения 5-го порядка

$$f(n+5)=4\cdot f(n+4)-4\cdot f(n+3)-2\cdot f(n+2)+5\cdot f(n+1)-2\cdot f(n).$$

Запишем характеристическое уравнение данного соотношения:

$$x^5-4x^4+4x^3+2x^2-5x+2=0.$$

$x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$,

$x_4=-1$ и $x_5=2$.

$$f(n)=1^n\cdot(C_1+nC_2+n^2C_3)+(-1)^nC_4+C_5\cdot 2^n=$$

$$=C_1+nC_2+n^2C_3+(-1)^nC_4+C_5\cdot 2^n.$$

Линейные рекуррентные соотношения

Найти общий вид решения рекуррентного соотношения 4-го порядка $x_{n+4}-3x_{n+3}-8x_{n+1}+24=0$, *если* $x_0=0$.

Запишем характеристическое уравнение данного соотношения:

$$x^4-3x^3-8x+24=0.$$

$$x_1=2,\quad x_2=3,\quad x_{3,4}=-1\pm i\sqrt{3}.$$

Комплексное число $-1+i\sqrt{3}$ имеет модуль $r=2$ и аргумент $\varphi=\frac{2\pi}{3}$.

$$x_n=C_1 2^n+C_2 3^n+2^n\left(C_3\cos\frac{2\pi n}{3}+C_4\sin\frac{2\pi n}{3}\right).$$

$x_0=0$:

$0=C_1 2^0+C_2 3^0+2^0\left(C_3\cos 0+C_4\sin 0\right)$,

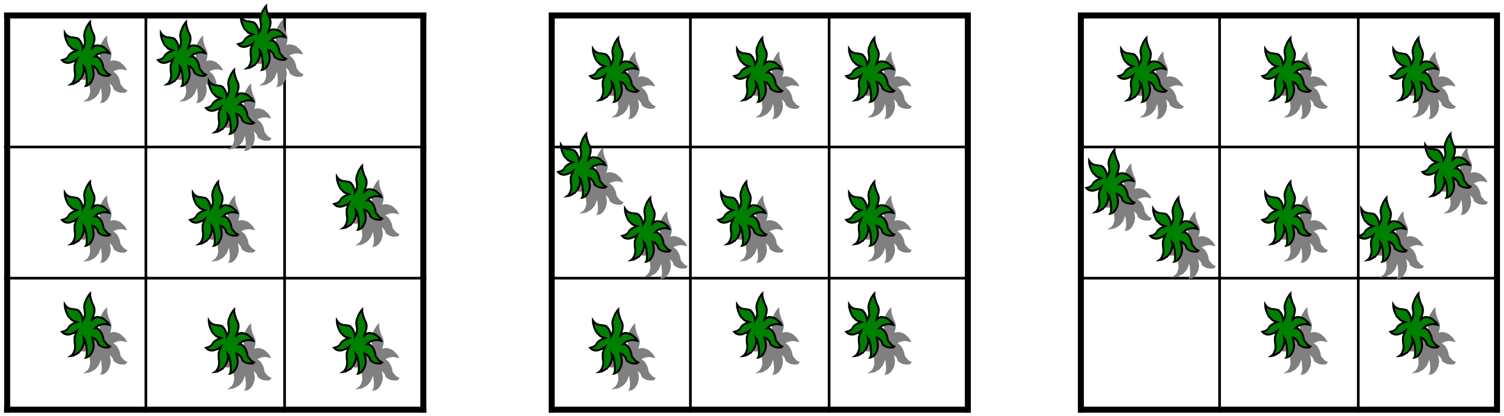
$C_1=-C_2-C_3$.

$$x_n=(-C_2-C_3)\cdot 2^n+C_2 3^n+2^n\left(C_3\cos\frac{2\pi n}{3}+C_4\sin\frac{2\pi n}{3}\right).$$

Принцип Дирихле

Принцип Дирихле

Если $k+1$ или более объектов расположены в k коробках, тогда есть по крайней мере одна коробка, содержащая два или более из объектов.



Пусть $f : A \to B$ – функция, причем как A, так и B – конечные множества. Предположим, что A состоит из n элементов: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Принцип Дирихле гласит, что если $|A| > |B|$, то по крайней мере одно значение f встретится более одного раза. То есть, найдется пара элементов $a_i \neq a_j$, для которых $f(a_i) = f(a_j)$.

Чтобы убедиться в истинности принципа, предположим, что для любой пары разных индексов $i \neq j$ имеем: $f(a_i) \neq f(a_j)$. Тогда множество B содержит по крайней мере n различных элементов: $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)$. В любом случае, $|B| \geq n$, что противоречит предположению: $n = |A| > |B|$. Следовательно, есть хотя бы два разных элемента $a_i, a_j \in A$, для которых $f(a_i) = f(a_j)$.

Пример . На семинар записалось восемь студентов. Покажите, что по крайней мере двое из них учатся на одном курсе.

Решение. Множество студентов семинара обозначим буквой A, а множество всех пяти курсов обозначим через B. Рассмотрим функцию f: $A \to B$, сопоставляющую каждому студенту курс, на котором он учится. Так как $|A| = 8$, а $|B| = 5$, то $|A| > |B|$. По принципу Дирихле функция f должна иметь повторяющиеся значения, т. е. найдутся два студента с одного и того же курса.

Пример . Какое наименьшее число фамилий должно быть записано в телефонном справочнике, чтобы с гарантией можно было утверждать, что хотя бы две фамилии начинаются с одной и той же буквы и заканчиваются одинаковыми буквами?

Решение. Пусть А — множество фамилий в справочнике, а В — множество пар букв, выписанных из стандартного алфавита русского языка, насчитывающего 33 буквы (если учесть, что фамилии не могут начинаться с букв «Ь» и «Ъ», то требуемый объем справочника окажется меньше). Обозначим через f: $A \to B$ функцию, которая каждой фамилии справочника ставит в соответствие пару букв: первую и последнюю буквы фамилии. Например, f(Кузнецов) = (к, в). Множество В содержит $33 \cdot 33 = 1089$ пар букв. Принцип Дирихле гарантирует нам, что если $|A| > |B| = 1089$, то найдется по крайней мере две фамилии, начинающиеся и оканчивающиеся на одинаковые буквы. Поэтому телефонный справочник должен содержать не менее 1090 фамилий.

Производящие функции

Производящие функции

Определение

Производящей функцией последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$ называют степенной ряд вида

$$a^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (1)$$

Ряд вида

$$a^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \qquad (2)$$

называется экспоненциальной производящей функцией последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots$

Числа a_n и $\frac{a_n}{n!}$ называются коэффициентами ряда (1) и ряда (2) соответственно.

Операции над формальными объектами

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$, если для любого n $a_n = b_n$;

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{n!} x^n$$

(3) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, где $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$

$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$, где $d_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$

Производящие функции числа основных комбинаторных объектов

Производящая функция числа сочетаний

$$(1+e_1x)(1+e_2x)\ldots(1+e_nx)=$$

$$=1+(e_1+e_2+\ldots+e_n)x+(e_1e_2+e_1e_3+\ldots+e_{n-1}e_n)x^2+$$

$$+(e_1e_2e_3+e_1e_2e_4+\ldots+e_{n-2}e_{n-1}e_n)x^3+\ldots+e_1e_2e_3\ldots e_nx^n$$

Каждому слагаемому коэффициента при $x^k, k=1,2,\ldots,n$ можно сопоставить сочетание из множества $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ по k.

$$e_1=\ldots=e_n=1$$

$$(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\ldots+C_n^nx^n$$

$(1+x)^n$ - производящая функция числа сочетаний

$$C_n^k=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Производящая функция числа сочетаний

$$\left(1+e\,x+e_1^2x^2\right)\left(1+e_2x\right)\left(1+e_3x\right)=$$

$$=1+\left(e_1+e_2+e_3\right)x+\left(e_1e_2+e_1e_3+e_2e_3+e_1e_1\right)x^2+$$

$$+\left(e_1e_2e_3+e_1e_1e_2+e_1e_1e_3\right)x^3+e_1e_1e_2e_3x^4$$

Каждому слагаемому коэффициента при $x^k, k=1,2,3,4$ можно сопоставить сочетание с повторениями из множества $\{e_1,e_2,e_3\}$ по k, e_1 имеет кратность не более двух (0,1,2), кратность элементов e_2,e_3 не более единицы.

$e_1=e_2=e_3=1$,

$$\left(1+x+x^2\right)\left(1+x\right)^2=1+3x+4x^2+3x^3+1x^4$$

коэффициент при $x^k, k=1,2,3,4$ равен числу таких сочетаний

Производящая функцией числа таких сочетаний

$$\left(1+x+x^2\right)\left(1+x\right)^2$$

Производящая функция числа сочетаний

Производящая функция числа сочетаний из множества $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$, когда кратность каждого элемента e_i может быть одним из чисел $k_1(i), k_2(i), \ldots$

$$\left(x^{k_1(1)} + x^{k_2(1)} + \ldots\right)\left(x^{k_1(2)} + x^{k_2(2)} + \ldots\right)\ldots\left(x^{k_1(n)} + x^{k_2(n)}\right)$$

Коэффициент при x_k в степенном ряде равен числу таких сочетаний

Производящая функция числа сочетаний. Пример 1

Найти число сочетаний с повторениями из n элементов по k без ограничений на кратность элементов в данном сочетании (число $\overline{C_n^k}$).

Пусть $a^*(x)$ – производящая функция последовательности

$1, \overline{C_n^1}, \overline{C_n^2}, \ldots, \overline{C_n^k}, \ldots$

Тогда

$$a^*(x) = (1 + x + x^2 + \ldots)^n = \frac{1}{(1-x)^n}$$

Производящая функция числа сочетаний. Пример 2

Найти число сочетаний с повторениями из n элементов по k, в которых каждый элемент встречается не менее r раз (кратность каждого элемента может быть одним из чисел $r, r+1, r+2, \ldots$).

Производящей функцией $b(k)$ для числа сочетаний такого вида является функция

$$b^*(x) = (x^r + x^{r+1} + x^{r+2} + \ldots)^n = \frac{x^{nr}}{(1-x)^n}.$$

Производящая функция числа сочетаний. Пример 3

В урне находятся 4 красных, 5 синих и 2 зеленых шара. (а) Сколько существует способов выбора 7 шаров из урны? (б) Сколько существует способов выбора из урны 7 шаров, если 1 шар красный и 2 синие.

Для части (а) производящая функция имеет вид

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2),$$

и количество способов выбора 7 шаров равно коэффициенту при x^7 в разложении этой производящей функции.

В части (б) нужно учесть, что 1 вытянутый шар красный, соответствующий многочлен имеет вид $(x+x^2+x^3+x^4)$, что представляет вытягивание 1, 2, 3 или 4 красных шаров. Точно так же, учитывая, что 2 вытянутых шара синие, соответствующий многочлен должен иметь вид $(x^2+x^3+x^4+x^5)$, что представляет вытягивание 2, 3, 4 или 5 синих шаров. Таким образом, производящий многочлен имеет вид

$$(x+x^2+x^3+x^4)(x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2),$$

и количество способов выбора 7 шаров равно коэффициенту при x^7 в разложении производящей функции.

Производящая функция числа выборок. Размещения

Согласно биному Ньютона для любого натурального n

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^k + \ldots + x^n,$$

$$(1+x)^n = 1 + A_n^1\frac{x}{1!} + A_n^2\frac{x^2}{2!} + \ldots + A_n^k\frac{x^k}{k!} + \ldots + A_n^n\frac{x^n}{n!}$$

$(1+x)^n$ - экспоненциальная производящая функция числа размещений

Производящая функция числа выборок. Общий случай

Выборки из множества $E=\{e_1,\ldots e_n\}$

Условия: кратность каждого элемента e_i может быть одним из чисел $k_1(i),k_2(i),\ldots$

Экспоненциальная производящая функция числа таких выборок

$$\left(\frac{x^{k_1(1)}}{k_1(1)!}+\frac{x^{k_2(1)}}{k_2(1)}+\ldots\right)\left(\frac{x^{k_1(2)}}{k_1(2)}+\frac{x^{k_2(2)}}{k_2(2)}+\ldots\right)\ldots\left(\frac{x^{k_1(n)}}{k_1(n)}+\frac{x^{k_2(n)}}{k_2(n)}+\ldots\right)$$

Производящая функция числа выборок. Пример

Найти число 3-выборок из множества $\{e_1, e_2, e_3\}$ в которые элемент e_1 может входить не более одного раза, элемент e_2 входит обязательно, но не более двух раз, а элемент e_3 либо не входит, либо входит два раза.

Экспоненциальной производящей функцией числа таких выборок является функция

$$(1+x)\left(x+\frac{x^2}{2!}\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}\right)=x+3\frac{x^2}{2!}+6\frac{x^3}{3!}+18\frac{x^4}{4!}+30\frac{x^5}{5!}$$

Число искомых выборок равно коэффициенту при $\frac{x^3}{3!}$, т.е. равно 6.

Производящая функция числа выборок

Для получения числа k-выборок с неограниченными повторениями

$$a^*(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\right)^n = (e^x)^n = e^{nx} =$$

$$= 1 + nx + \frac{n^2x^2}{2!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} n^k \frac{x^k}{k!}$$

Число k-выборок из множества, состоящего из n элементов, равно n^k.

Разбиения

Сколькими способами можно представить данное натуральное число n в виде суммы

$$n = a_1 + \ldots + a_k$$

где $k, a_1, \ldots, a_k$ – положительные целые числа.
Такое представление является разбиением числа n на k частей.

Случаи:
1) две суммы, различающиеся порядком слагаемых считаются различными (такие разбиения принято называть композициями);
2) суммы, отличающиеся друг от друга только порядком слагаемых, не различаются (именно в этом случае принято говорить о разбиении)

Разбиения. Производящие функции числа разбиений

Пусть, например, рассматриваются *разбиения числа N на слагаемые, каждое из которых равно одному из чисел $n_1, \ldots, n_k$. При этом в сумме слагаемые не должны повторяться, а порядок слагаемых не играет роли.*

Для решения задачи образуем выражение

$$(1+x^{n_1})(1+x^{n_2})\ldots(1+x^{n_k}).$$

Например, если надо узнать, сколькими способами можно уплатить 78 коп., беря не более одной монеты каждого достоинства, то надо составить выражение

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^5)\times$$
$$\times(1+x^{10})(1+x^{15})(1+x^{20})(1+x^{50}),$$

раскрыть скобки и найти коэффициент при x^{78}.

Разбиения. Производящие функции числа разбиений

Сколькими способами можно уплатить 29 коп. монетами по 3 и 5 коп?

В этой задаче надо найти число способов разбить число 29 на слагаемые, равные 3 и 5, причем порядок слагаемых не имеет значения. Иными словами, нам надо найти число неотрицательных решений уравнения $3m+5n=29$.

Для этого составим выражение

$$f(x)=(1+x^3+x^6+\ldots+x^{3m}+\ldots)\times$$
$$\times(1+x^5+x^{10}+\ldots+x^{5n}+\ldots).$$

коэффициент при x^{29} дает ответ на задачу.

Разбиения. Производящие функции числа разбиений с

если надо найти, сколькими способами можно разбить число N на k слагаемых, принимающих значения $n_1, \ldots, n_s$, причем учитывается порядок слагаемых, то производящая функция имеет вид

$$f(x) = (x^{n_1} + x^{n_2} + \ldots + x^{n_s})^k.$$

Задача упрощается, если числа $n_1, \ldots, n_s$ образуют арифметическую прогрессию — в этом случае $x^{n_1}, \ldots, x^{n_s}$ образуют геометрическую прогрессию, а это позволяет упростить выражение для $f(x)$.

Разбиения. Производящие функции числа разбиений с

Найдем, например, сколькими способами можно получить 25 очков, бросая 7 костей. Здесь надо образовать производящую функцию

$$f(x) = (x + x^2 + \ldots + x^6)^7.$$

По формуле для суммы геометрической прогрессии эту функцию можно записать в следующем виде:

$$f(x) = \frac{x^7 (1 - x^6)^7}{(1 - x)^7} = x^7 (1 - x^6)^7 (1 - x)^{-7}.$$