Глава 3

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

3.1. Основные понятия

Анализ эффективности рекурсивных алгоритмов **сложнее** анализа итеративных, поскольку речь идет об оценке

высоты дерева рекурсивных вызовов

Естественный метод анализа – решение рекуррентного соотношения относительно искомой трудоемкости (временнОй сложности) алгоритма

Рекурсивные алгоритмы

Разбивают большую задачу на фрагменты и применяются к каждому фрагменту в отдельности

При анализе сложности подсчитывается число операций, необходимых для:

1)разбиения задачи на части,

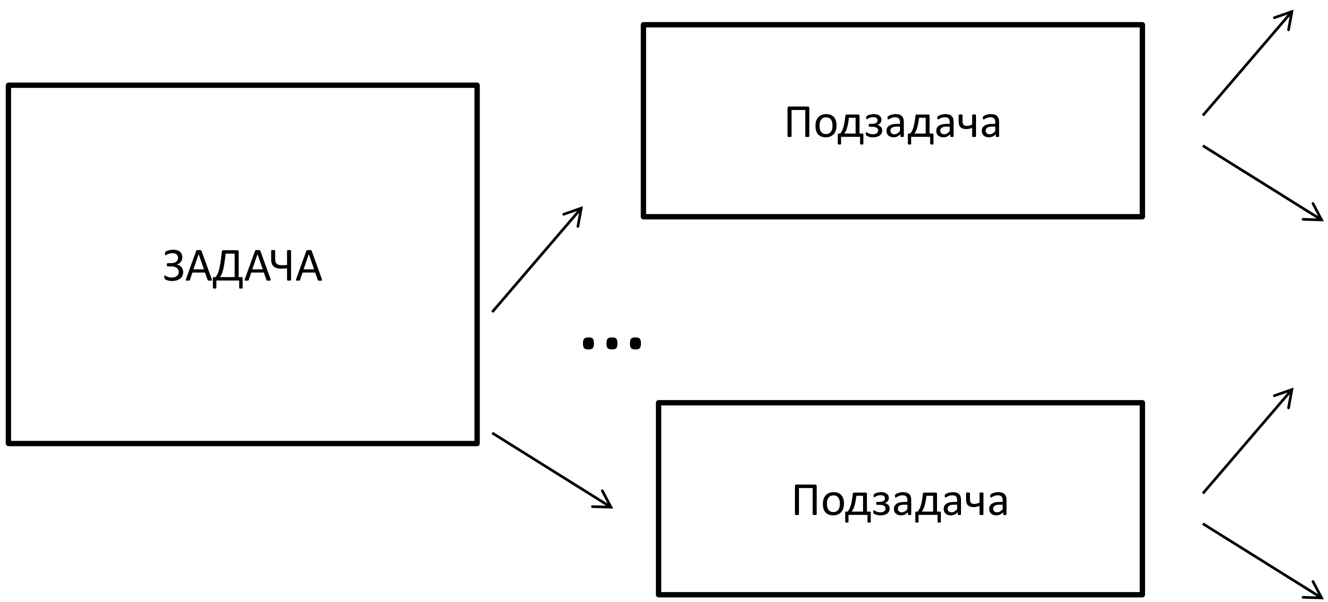
2)выполнения алгоритма на каждой из частей и

3)объединения отдельных результатов

Этапы каждого уровня рекурсии

- 1. Разделение (декомпозиция)
- 2.Властвование (решение)
- 3.Комбинирование (синтез результата)

Декомпозиция задачи



$$T(n\ параметров) \longrightarrow \begin{matrix} T(k < n\ параметров) \\ T(n\ параметров\ с\ меньшими\ значениями) \end{matrix}$$

Рекуррентное определение числовой последовательности

Числовые последовательности *T*(*n*) можно задавать несколькими основными способами:

- с помощью словесного, табличного, графического описаний;
- с помощью формулы общего члена *T*(*n*) – в явном (замкнутом) виде;
- с помощью рекуррентного соотношения

Рекуррентное соотношение — это равенство, которое выражает *n*-й член последовательности через предыдущие

В более общем формате: Уравнение (неравенство), которое связывает одни и те же функции, но с различными значениями аргументов, называется рекуррентным соотношением

Понятие полного РС

Правильное РС: значения аргументов у любой из функций в правой части меньше значения аргументов любой из функций в левой части

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2)$$

Сравните:

$$T(n) = T(n-1) + T(n+1)$$

Полное РС: правильное РС, определенное для всех допустимых значений аргумента

Рекуррентное соотношение порядка k

Рекуррентное соотношение имеет порядок k, если оно для любого n позволяет выразить $T(n)$ через предыдущие члены последовательности до $T(n–k)$ включительно

Общий вид:

$$T(n) = F(T(n–1), T(n–2), \dots , T(n–k)) \quad \text{или}$$

$$T(n+k) = F(T(n+k–1), T(n+k–2), \dots , T(n))$$

Примеры

1. $f(n) = 2f(n–1) + 3f\,(n–2),\ n>2;\quad f(1) = 1,\ f(2) = 2$

   1, 2, 7, 14+6=20, 40+21=61,… .

2. Геометрическая прогрессия

3. Арифметическая прогрессия

4. Последовательность квадратов (**кубов-упражнение!**) натуральных чисел

5. Задача Фибоначчи

Последовательность чисел Фибоначчи:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2) \quad \text{для } n > 1$$

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 1.$$

6.Задача Иосифа Флавия

Иосиф, попав в плен с 40 товарищами, не смог их убедить сдаться. Поэтому было решено по жребию уходить каждому второму

В конце концов, остался только Иосиф с товарищем, которого он убедил отдаться римлянам

Рекуррентное соотношение

1, 1,3, 1, 3, 5, 7, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13,…

$$J(1) = 1$$

$$J(2m) = 2J(m) - 1$$

$$J(2m+1) = 2J(m) + 1$$

Найти J(100)

$$J(100) = J(2\cdot 50) = 2J(50) - 1$$

$$J(50) = J(2\cdot 25) = 2J(25) - 1$$

$$J(25) = J(2\cdot 12 + 1) = 2J(12) + 1$$

$$J(12) = J(2\cdot 6) = 2J(6) - 1$$

$$J(6) = J(2\cdot 3) = 2J(3) - 1$$

$$J(3) = J(2\cdot 1 + 1) = 2J(1) + 1 = 3$$

$$J(6) = 5, J(12) = 9, J(25) = 19, J(50) = 37, J(100) = 73$$

Каким по счету должен был стать в круг Иосиф, чтобы остаться живым?

Решение рекуррентного соотношения

Решением рекуррентного соотношения называется любая числовая последовательность, члены которой удовлетворяют этому соотношению

Найти решение рекуррентного соотношения — это значит найти выражение для ее общего члена (решение в замкнутом виде)

Пример. Решением рекуррентного соотношения

$$f(n+2) = 5f(n+1) - 6f(n)$$

является последовательность с общим членом

$$f(n) = 2^n$$

Общее решение

Общее решение рекуррентного соотношения k-го порядка — это выражение, которое зависит от k произвольных постоянных $C1$, $C2$, ... , Ck, и из которого путем подбора постоянных можно получить любое решение данного рекуррентного соотношения

Начальные условия: $T(1)=t1,\ldots,T(k)=t$k

Пример

$f(n+2) = 5f(n+1) - 6f(n)$

$f(n) = C_1 2^n + C_2 3^n$ -- общее решение

Для нахождения решения любых рекуррентных соотношений общих методов не существует

Однако есть класс рекуррентных соотношений, для которых такой метод имеется

3.2 Методы решения линейных рекуррентных уравнений (*rsolve*())

3.2.1 С помощью характеристического многочлена

Линейные рекуррентные уравнения с постоянными коэффициентами

Однородным линейным рекуррентным соотношением с постоянными коэффициентами (ОЛРС) называется рекуррентное соотношение вида

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + ... + a_k f(n)$$

где a1, a2 , ..., ak — некоторые числа.

Свойства решений ОЛРС

Если ОЛРС имеет решение $f(n)$, то $Cf(n)$ — также решение ОЛРС для любого действительного C

Для ОЛРС общее решение представляет собой линейную комбинацию k линейно независимых решений

Определение

<u>Неоднородным линейным</u> рекуррентным уравнением с постоянными коэффициентами (НЛРС) называется рекуррентное соотношение вида

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + \ldots + a_k f(n) + g(n)$$

где g(n) — член некоторой числовой последовательности

Решение ОЛРС второго порядка

$$f(n+2) = a_1 f(n+1) + a_2 f(n)$$

<u>**Характеристическим уравнением**</u> <u>для ОЛРС</u> (см. вверх!) называется квадратное уравнение вида

$$r^2 = a_1 r + a_2$$

1) Дискриминант положительный

Характеристическое уравнение имеет два различных корня $r1$ и $r2$,

и общее решение рекуррентного соотношения имеет вид:

$$f(n) = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$$

где C1, C2 — произвольные постоянные

Примеры

$$f(n+2)=6f(n+1)-8f(n), n\in\mathbb{N}_0$$
$$f(0)=3,\ f(1)=-4$$

$$f(n+2)=f(n+1)+f(n),\ n\in\mathbb{N}_0$$
$$f(0)=0,\ f(1)=1$$

Общее решение для последовательности Фибоначчи

$$r^2 = r + 1 \Rightarrow r^2 - r - 1 = 0$$

$$D = 5 > 0 \Rightarrow r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$F(n) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$\varphi \qquad\qquad\qquad -\frac{1}{\varphi}$$

Решение при начальных данных

$$C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1$$

$$C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$\sqrt{5}(C_1 - C_2) = 2 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

2) Дискриминант равен 0

Корень *r* -- единственный (кратности два),

и общее решение имеет вид:

$$f(n) = C_1 r^n + C_2 n r^n$$

3) Дискриминант отрицательный

Корни комплексные и имеют вид $r_{1,2} = a \pm ib$

Чтобы построить общее решение ОЛРС, надо перевести комплексные корни из алгебраической формы в тригонометрическую:

$$r = \rho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)$$

Для этого на комплексной плоскости удобно построить корень с положительной мнимой частью

Найти для него ρ — радиус — и φ — аргумент комплексного числа, как полярные координаты точки.

После этого общее решение ОЛРС строится по формуле:

$$f(n) = \rho^n (C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi)$$

Алгоритм решения ОЛРС для k>2 с постоянными коэффициентами

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + \ldots + a_k f(n)$$

$$\downarrow$$

$$x^k = a_1 x^{k-1} + \ldots + a_{k-1} x + a_k$$

$$\boxed{f(n) = C_1 x_1^n + \ldots + C_k x_k^n}$$

$$\boxed{f_o(n) = \sum_{x_i} (C_{i1} + C_{i2} n + \ldots C_{ir_i} n^{r_i - 1}) x_i^n}$$

Алгоритм решения ЛНРС

$$f(n+k)=a_1 f(n+k-1)+a_2 f(n+k-2)+\ldots+a_k f(n)+g(n)$$

$$f(n+k)=a_1 f(n+k-1)+a_2 f(n+k-2)+\ldots+a_k f(n)$$

$$\boxed{f_o(n)=\sum_{x_i}(C_{i1}+C_{i2}n+\ldots C_{ir_i}n^{r_i-1})x_i^n}$$

$$g(n)=Q_m(n)\lambda^n \longrightarrow f^*(n)=n^r R_m(n)\lambda^n$$

$$f(n)=f_o(n)+f^*(n)$$

Пример

- $f(n+2) = 6f(n+1) - 8f(n)+\underline{3n+2}$, $n>=0$
- $f(0) = 0$, $f(1) = -11$

- $f(n) = 6f(n-1) - 8f(n-2)+\underline{3n+2}$, $n>=2$
- $f(0) = 0$, $f(1) = -11$

- Сравните ответы $f(2)$!

$> s1 := rsolve(\{y(n+2) = 6 \cdot y(n+1) - 8 \cdot y(n) + 3n + 2, y(0) = 0, y(1) = -11\}, y)$

$$s1 := 3\,2^n - 5\,4^n + n + 2 \tag{1}$$

$> s2 := rsolve(\{y(n) = 6 \cdot y(n-1) - 8 \cdot y(n-2) + 3n + 2, y(0) = 0, y(1) = -11\}, y)$

$$s2 := -4\,4^n + n + 4 \tag{2}$$

$> seq(s1, n = 0..10)$

$$0, -11, -64, -291, -1226, -5017, -20280, -81527, -326902, -1309173, -5239796 \tag{3}$$

$> seq(s2, n = 0..10)$

$$0, -11, -58, -249, -1016, -4087, -16374, -65525, -262132, -1048563, -4194290 \tag{4}$$

$>$

Примеры

$$a_{n+3} = 3\cdot a_{n+2} + 6\cdot a_{n+1} - 8\cdot a_n, \quad a_0 = 9,\ a_1 = -9,\ a_2 = -9.$$

$$a_{n+3} = -a_{n+2} + 5\cdot a_{n+1} - 3\cdot a_n, \quad a_0 = 6,\ a_1 = 15,\ a_2 = -8.$$

$$a_{n+2} = 18\cdot a_{n+1} - 81\cdot a_n + 128, \quad a_0 = 5,\ a_1 = 2.$$

$$a_{n+2} = 10\cdot a_{n+1} - 25\cdot a_n + 50\cdot 5^n, \quad a_0 = 7,\ a_1 = 50.$$

$$a_{n+2} = 6\cdot a_{n+1} - 8\cdot a_n + 3n + 2, \quad a_0 = 0,\ a_1 = -11.$$

Задачи для самостоятельного решения

$a_{n+2} = 9\cdot a_{n+1} - 14\cdot a_n$, $a_0 = 2$, $a_1 = -1$.

$a_{n+2} = -8\cdot a_{n+1} + 3\cdot a_n$, $a_0 = 4$, $a_1 = -16$.

$a_{n+2} = 2\cdot a_{n+1} - 10\cdot a_n$, $a_0 = 3$, $a_1 = 3 + 21i$.

$a_{n+2} = 10\cdot a_{n+1} - 25\cdot a_n$, $a_0 = 3$, $a_1 = -20$.

$a_{n+3} = 4\cdot a_{n+2} - a_{n+1} - 6\cdot a_n$, $a_0 = 4$, $a_1 = -5$, $a_2 = 11$.

$a_{n+3} = 6\cdot a_{n+2} - 12\cdot a_{n+1} + 8\cdot a_n$, $a_0 = 5$, $a_1 = 8$, $a_2 = 20$.

$a_{n+3} = 5\cdot a_{n+2} - 3\cdot a_{n+1} - 9\cdot a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$.

$a_{n+1} = 3\cdot a_n + 4n^2 - 6n - 11$, $a_0 = 14$.

$a_{n+2} = 4\cdot a_{n+1} - 4\cdot a_n + 5$, $a_0 = 8$, $a_1 = 25$.

$a_{n+2} = 7\cdot a_{n+1} - 10\cdot a_n + (12n - 14)\cdot 2^n$, $a_0 = 2$, $a_1 = -3$.

3.2.2 Метод производящих функций

Понятие производящей функции

$(a_0, a_1, ..., a_k, ...)$ – некоторая числовая последовательность

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$ – **производящая функция** для данной последовательности

Эти ряды будем понимать как формально сходящиеся и рассматривать соотношения между коэффициентами.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = f(x)$$

Операции над производящими функциями

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k,\ g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k$$

Сложение:

$$f(x)+g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)x^k$$

Умножение на число:

$$cf(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(ca_k)x^k,\ c=const$$

Умножение

$$f(x)\cdot g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k, c_k=\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}$$

Почленное дифференцирование и интегрирование

ПРИМЕРЫ

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^k + \ldots} \longrightarrow (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$$

?

$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + \ldots + 2^k x^k + \ldots \longrightarrow (1, 2, 4, \ldots, 2^k, \ldots)$$

?

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (k+1)x^k + \ldots \longrightarrow (1, 2, 3, \ldots, k+1, \ldots)$$

?

$$\boxed{(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k} \longrightarrow (C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^k, \ldots, C_n^n)$$

?

Найти формулу для производящей функции и решить РС

$$f(n) = 2f(n-1) + 3f(n-2),\ n>1$$
$$f(0) = 0,\ f(1) = -11$$

РУ→F(x) →Разложение в ряд Тейлора→Коэффициенты Тейлора →Решение РУ

Упражнение Сравнить решение методом <u>производящей функции</u> с решением через нахождение <u>характеристического многочлена</u>

Ответ $$G(x) = \frac{11x}{3x^2+2x-1},\ f(n) = \frac{11}{4}\left((-1)^n - 3^n\right)$$

Алгоритм нахождения решения РУ через производящие функции

1. Записать уравнение, выражающее a_n через другие элементы последовательности. Полученное уравнение должно оставаться справедливым для всех целых n с учетом того, что $a_{-1} = a_{-2} = \cdots = 0$.

2. Умножить обе части уравнения на z^n и просуммировать по всем n. В левой части получится сумма $\sum_n a_n z^n = G(z)$. Правую часть следует преобразовать так, чтобы она превратилась в другое выражение, включающее $G(z)$.

3. Решить полученное уравнение относительно $G(z)$, тем самым получив замкнутое выражение для $G(z)$.

4. Разложить $G(z)$ в степенной ряд и взять коэффициент при z^n, который является замкнутым видом для a_n.

Производящая функция для последовательности Фибоначчи

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_0 = F_1 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k = 1 + x + \sum_{k=2}^{\infty} (F_{k-2} + F_{k-1}) x^k =$$

$$= 1 + x + x^2 \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-2} x^{k-2} + x \sum_{k=2}^{\infty} F_{k-1} x^{k-1} =$$

$$= 1 + x + x^2 F(x) + x(F(x) - 1) = 1 + (x + x^2) F(x)$$

(продолжение)

$$F(x)-(x+x^2)F(x)=1 \longrightarrow \boxed{F(x)=\frac{1}{1-x-x^2}}$$

$$1-x-x^2=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{(1+x_1x)(1+x_2x)}=\frac{A}{1+x_1x}+\frac{B}{1+x_2x}=\frac{A+B+(Ax_2+Bx_1)x}{(1+x_1x)(1+x_2x)}$$

$$\Downarrow$$

$$F(x)=A\sum_{k=0}^{\infty}(-x_1x)^k+B\sum_{k=0}^{\infty}(-x_2x)^k$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{k+1}\right)}$$

3.2.3 **Метод верхних оценок решения**

(Метод подстановки)

Рассмотрим правильное рекуррентное уравнение

$$\begin{cases} T(n) = f\left(T(\alpha_1 \cdot n), T(\alpha_2 \cdot n), \ldots, T(\alpha_l \cdot n), n\right), & n > 1, \\ T(1) = C, \end{cases}$$

f – неубывающая функция по каждой из переменных

Идея метода подстановок

Подобрать мажоранту $g(n)$ для функции $T(n)$:

$T(n) \leq g(n)\ \forall n$ с наименьшим возможным порядком в общем виде;

определить значения параметров $g(n)$, **не зависящие** от n

Теорема (о мажоранте)

Функция $g(n)$:

$$\begin{cases} g(n) \geq f\left(g(\alpha_1 \cdot n), g(\alpha_2 \cdot n), \ldots, g(\alpha_l \cdot n), n\right), & n > 1, \\ g(1) \geq T(1). \end{cases}$$

является мажорантой для функции $T(n)$ из заданного РУ, если существуют ее

<u>не зависящие от *n* параметры</u>

Доказательство ММИ

1. Проверяем истинность неравенства $T(1) \le g(1)$

Если неравенство не выполняется, то мажорирующая функция выбрана слишком маленькой и необходимо ее изменить путем добавления некоторой константы, не зависящей от *n*, либо путем увеличения порядка функции.

Повторить попытку доказательства теоремы с модифицированной функцией g(n).

Доказательство ММИ
(индукционный переход)

2. Если неравенство для n=1 выполняется, то предположим, что оно верно и для всех k < n, т.е. $T(k) \le g(k)\ \forall k < n \quad \Rightarrow f(T(k)) \le f(g(k))\ \forall k < n$
3. Попытаемся определить, существуют ли такие неопределенные параметры функции g(n), что справедливо будет и неравенство

$$T(n) \le g(n)\ \forall n$$

$$g(n) \ge f\left(g(\alpha_1 \cdot n), g(\alpha_2 \cdot n), \ldots, g(\alpha_l \cdot n), n\right) \ge$$
$$\ge f\left(T(\alpha_1 \cdot n), T(\alpha_2 \cdot n), \ldots, T(\alpha_l \cdot n), n\right) = T(n)$$

Подбор мажоранты

- Желательно начинать с полиномов

Пример 1 Поиск min и max элементов (количество элементов – степень 2)

1. Разделить массив на две части
2. В каждой из частей найти максимальный и минимальный элементы

Для этого к каждой из частей применить этот же алгоритм, т. е. разделить часть на две части и т.д.

Разбиение прекратить, когда в части останется 2 элемента (<u>сравнение двух элементов – С1</u>)

3. Выбрать наибольший элемент из двух максимальных и наименьший элемент из двух минимальных (<u>стоимость операции – С2</u>)

Посчитать операции для n=2,4,8,16

- n=2 $\longrightarrow$ T(2)=C1
- n=4 $\longrightarrow$ T(4)=2T(2)+C2=2C1+C2
- n=8 $\longrightarrow$ T(8)=2T(4)+C2=4C1+3C2
- 3 4 5 8 2 1 6 7
- 3 4 5 8 2 1 6 7
- 3 4 5 8 2 1(12) 6 7 -- C1*4
- 3 8 1 7 -- C2*2
- 1 8 -- C2

РУ для n = степени 2

$$
\begin{cases}
T(n) = 2T\left(\dfrac{n}{2}\right) + C_2,\ n > \cancel{1}\,2,\ C_2 > 0, \\
T(\cancel{1}\,2) = C_1,\ C_1 > 0.
\end{cases}
$$

Попытка 1

$$\begin{cases} T(n) = 2T\left(\dfrac{n}{2}\right) + C_2,\ n > 1,\ C_2 > 0, \end{cases}$$

$$g(n) = a \cdot n$$

???

$$T(\cancel{1}\,2) \le g(\cancel{1}\,2), \qquad g(n) \ge 2 \cdot g\left(\frac{n}{2}\right) + C_2,$$

$$C_1 \le 2a, \qquad a \cdot n \ge 2 \cdot \frac{a \cdot n}{2} + C_2,$$

$$a \overset{\text{def}}{:=} C_1 / 2 \qquad 0 \ge C_2.$$

Попытка 2

$$\begin{cases} T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + C_2,\ n > 1,\ C_2 > 0, \end{cases}$$

$$g(n) = a \cdot n + b\,.$$

$$T(2) \leq g(2),$$

$$C_1 \leq 2a + b,$$

$$2a \stackrel{\text{def}}{:=} C_1 - b.$$

$$g(n) \geq 2 \cdot g\left(\frac{n}{2}\right) + C_2,$$

$$a \cdot n + b \geq 2 \cdot \left(\frac{a \cdot n}{2} + b\right) + C_2,$$

$$a \cdot n + b \geq a \cdot n + 2b + C_2,$$

$$b \leq -C_2,$$

$$b \stackrel{\text{def}}{:=} -C_2.$$

Решение

$$g(n) = a \cdot n + b = (\underset{2}{\underline{C_1 + C_2}}) \cdot n - C_2$$

$$\begin{cases} T(n) = 2T\left(\dfrac{n}{2}\right) + C_2,\ n > \overset{2}{1},\ C_2 > 0, \\ T(\overset{2}{1}) = C_1,\ C_1 > 0. \end{cases}$$

$$T(n) \le (\underset{2}{\underline{C_1 + C_2}}) \cdot n - C_2 = O(n)$$

Пример 2 Сортировка слиянием (количество элементов – степень 2)

1. Сортируемый массив разбивается на две части
2. Каждая из получившихся частей сортируется отдельно тем же самым алгоритмом (рекурсия достигает нижнего предела при получении одноэлементного массива)
3. Два упорядоченных массива половинного размера соединяются в один следующим образом:

1) На каждом шаге берётся меньший из двух первых элементов подмассивов и записывается в результирующий массив

2) Когда один из подмассивов закончился, все оставшиеся элементы второго подмассива добавляются в результирующий массив.

Пример

- 1 8 4 3 2 6 5 7
  18 34 26 57 (сравнение
- 1 2 двух первых
- 3 5 меньших)
- 4 6
- 8 7
- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7
- 8

РУ для n = степени 2

$$\begin{cases} T(n) = 2T\left(\dfrac{n}{2}\right) + C_1 \cdot n,\ n > 1,\ C_1 > 0, \\ T(1) = C_2,\ C_2 > 0. \end{cases}$$

Попытка 1

$$g(n) = a \cdot n$$

$$T(1) \le g(1),$$

$$C_2 \le a,$$

$$a \stackrel{\text{def}}{:=} C_2.$$

$$g(n) \ge 2 \cdot g\left(\frac{n}{2}\right) + C_1 \cdot n,$$

$$a \cdot n \ge 2 \cdot \frac{a \cdot n}{2} + C_1 \cdot n,$$

$$0 \ge C_1 \cdot n \ge C_1.$$

Попытка 2

$$g(n) = a \cdot n + b$$

$$T(1) \le g(1),$$

$$C_2 \le a + b,$$

$$a :\overset{\text{def}}{=} C_2 - b.$$

$$g(n) \ge 2 \cdot g\left(\frac{n}{2}\right) + C_1 \cdot n,$$

$$a \cdot n + b \ge 2 \cdot \left(\frac{a \cdot n}{2} + b\right) + C_1 \cdot n,$$

$$a \cdot n + b \ge a \cdot n + 2b + C_1 \cdot n,$$

$$-b \ge C_1 \cdot n.$$

Попытка 3

$$g(n) = a \cdot n \cdot \log n$$

$$T(1) \le g(1),$$

$$C_2 \le a \cdot 1 \cdot \log 1,$$

$$C_2 \le 0.$$

Попытка 4

$$g(n) = a \cdot n \cdot \log n + b$$

$$T(1) \le g(1),$$

$$C_2 \le a \cdot 1 \cdot \log 1 + b,$$

$$C_2 \le b,$$

$$b \stackrel{\text{def}}{:=} C_2.$$

$$g(n) \ge 2 \cdot g\left(\frac{n}{2}\right) + C_1 \cdot n,$$

$$a \cdot n \cdot \log n + b \ge 2 \cdot \left(\frac{a \cdot n}{2} \cdot \log \frac{n}{2} + b\right) + C_1 \cdot n,$$

$$a \cdot n \cdot \log n + b \ge a \cdot n \cdot \log \frac{n}{2} + 2b + C_1 \cdot n,$$

$$a \cdot n \cdot \log n + b \ge a \cdot n \cdot \log n - a \cdot n + 2b + C_1 \cdot n,$$

$$-b \ge -a \cdot n + C_1 \cdot n,$$

$$-b \ge n \cdot (C_1 - a),$$

$$b \le n \cdot (a - C_1).$$

Решение

$$a - C_1 \geq b \quad \Rightarrow \quad b \leq n \cdot (a - C_1)$$

$$b \overset{\text{def}}{=} C_2,$$

$$a \overset{\text{def}}{=} b + C_1 = C_2 + C_1,$$

$$g(n) = a \cdot n \cdot \log n + b = (C_1 + C_2) \cdot n \cdot \log n + C_2$$

$$T(n) \leq (C_1 + C_2) \cdot n \cdot \log n + C_2 = O(n \cdot \log n)$$

3.2.4 Метод итераций

- Идея метода: рекуррентное уравнение расписывается через множество других с последующим суммированием полученного выражения

Пример 1 (факториал)

$$\begin{cases} T(n) = T(n-1) + 1, & n \geq 1, \\ T(0) = 1. \end{cases}$$

Решить с помощью характеристического многочлена как линейное неоднородное и переходя к линейному однородному.
С помощью методов производящей функции, подстановки и итераций

$$T(n) = T(n-k) + k$$

Пример 2

$$\begin{cases} T(n) = 2 \cdot T\left(\dfrac{n}{2}\right) + 2, \quad n \geq 2, \\ T(1) = 2. \end{cases}$$

Решение методом итераций (ср. с методом подстановки)

$$T(n) = 2^3 \cdot T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 2^3 + 2^2 + 2^1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T(n) = 2^k \cdot T\left(\frac{n}{2^k}\right) + 2^k + 2^{k-1} + \ldots + 2$$

Ответ

$$T(n) = n \cdot T(1) + \frac{2 \cdot \left(2^k - 1\right)}{2 - 1} = n \cdot T(1) + 2(n-1) = 2 \cdot n + 2(n-1) = 4 \cdot n - 2$$

Пример 3

$$\begin{cases} T(n) = 2 \cdot T\left(\dfrac{n}{2}\right) + 5 \cdot n^2, \quad n \geq 2, \\ T(1) = 7. \end{cases}$$

Решение методом итераций

$$T(n) = 2^2 \cdot T\left(\frac{n}{2^2}\right) + 2 \cdot 5 \cdot \frac{n^2}{2^2} + 5 \cdot n^2 = 2^2 \cdot \left(2 \cdot T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 5 \cdot \frac{n^2}{2^4}\right) + 5 \cdot \frac{n^2}{2} + 5 \cdot n^2 =$$

$$= 2^3 \cdot T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 2^2 \cdot 5 \cdot \frac{n^2}{2^4} + 5 \cdot \frac{n^2}{2} + 5 \cdot n^2 = 2^3 \cdot T\left(\frac{n}{2^3}\right) + 5 \cdot \frac{n^2}{2^2} + 5 \cdot \frac{n^2}{2} + 5 \cdot n^2.$$

Завершение решения

....

$$T(n) = 2^k \cdot T\left(\frac{n}{2^k}\right) + 5 \cdot \frac{n^2}{2^{k-1}} + 5 \cdot \frac{n^2}{2^{k-2}} + \ldots + 5 \cdot \frac{n^2}{2^0} = 2^k \cdot T\left(\frac{n}{2^k}\right) + 5 \cdot n^2 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^i} =$$

$$= 2^k \cdot T\left(\frac{n}{2^k}\right) + 5 \cdot n^2 \cdot \frac{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 2^k \cdot T\left(\frac{n}{2^k}\right) + 5 \cdot n^2 \cdot 2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right).$$

Ответ

$$T(n) = 2^k \cdot T\left(\frac{n}{2^k}\right) + 5 \cdot n^2 \cdot 2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) = n \cdot T(1) + 10 \cdot n^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= 7 \cdot n + 10 \cdot n^2 - 10 \cdot n = 10 \cdot n^2 - 3 \cdot n.$$

3.2.5 Метод рекурсивных деревьев

Данный метод является особым способом записи явных функций, получаемых на шагах метода итераций

Метод рекурсивных деревьев заключается в том, что по рекуррентному уравнению итерационно строится древовидная структура, суммирование значений ключей в узлах которой осуществляется специальным образом

Формирование дерева

1. В корень дерева заносится свободный член исходного рекуррентного уравнения.

2. Сыновьями корня являются рекуррентные функции правой части исходного рекуррентного соотношения.

3. На последующих итерациях для каждого из сыновей строится аналогичная древовидная структура.

4. Процесс ветвления в некоторой вершине дерева заканчивается, когда данная вершина соответствует начальным данным уравнения.

5. Значения внутренних вершин дерева есть некоторые явные функции.

Суммирование в вершинах

1. Определяют сумму ключей в вершинах, равноудаленных от корня дерева (эти вершины находятся в дереве на одном уровне).

2. Находится максимальная сумма по уровням.

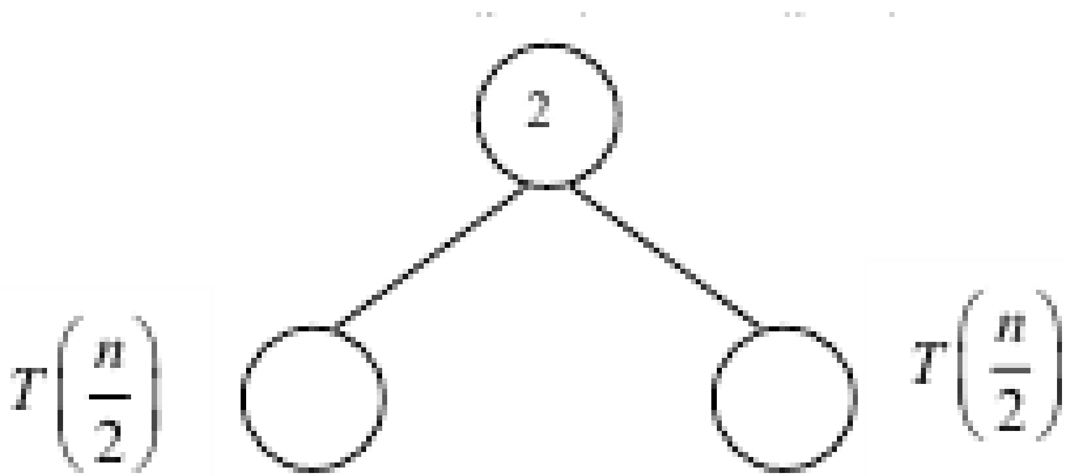
3. Итоговая сумма ограничена сверху одним из следующих значений:
 - максимальной суммой, которая умножается на количество уровней;
-суммой, полученной в результате сложения сумм значений по уровням.

Количество уровней для дерева равно **O(log*n*)**.

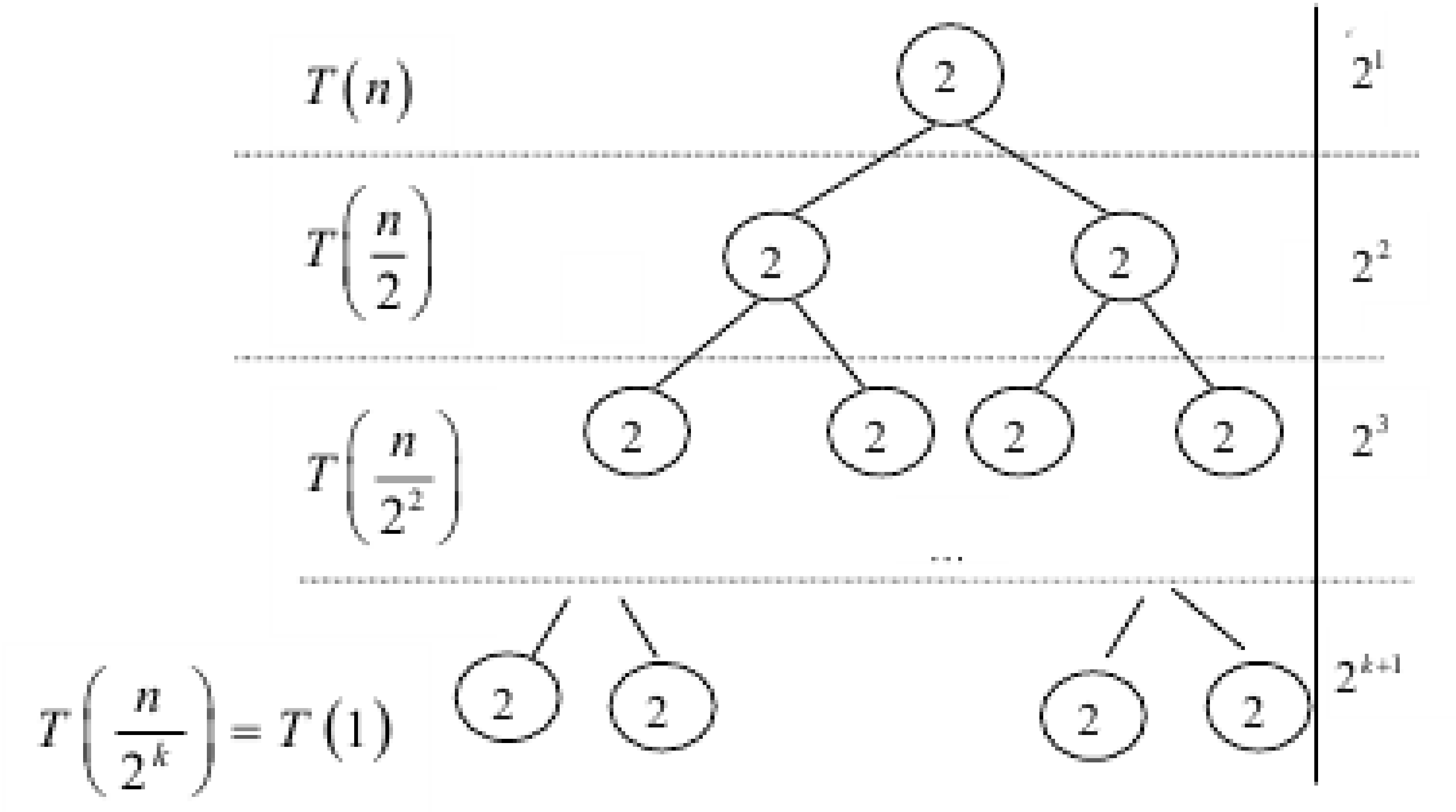
Пример 1 (n- степень 2)

$$\begin{cases} T(n) = 2 \cdot T\left(\dfrac{n}{2}\right) + 2, & n \geq 2, \\ T(1) = 2. \end{cases}$$

1-я итерация



Построенная древовидная структура



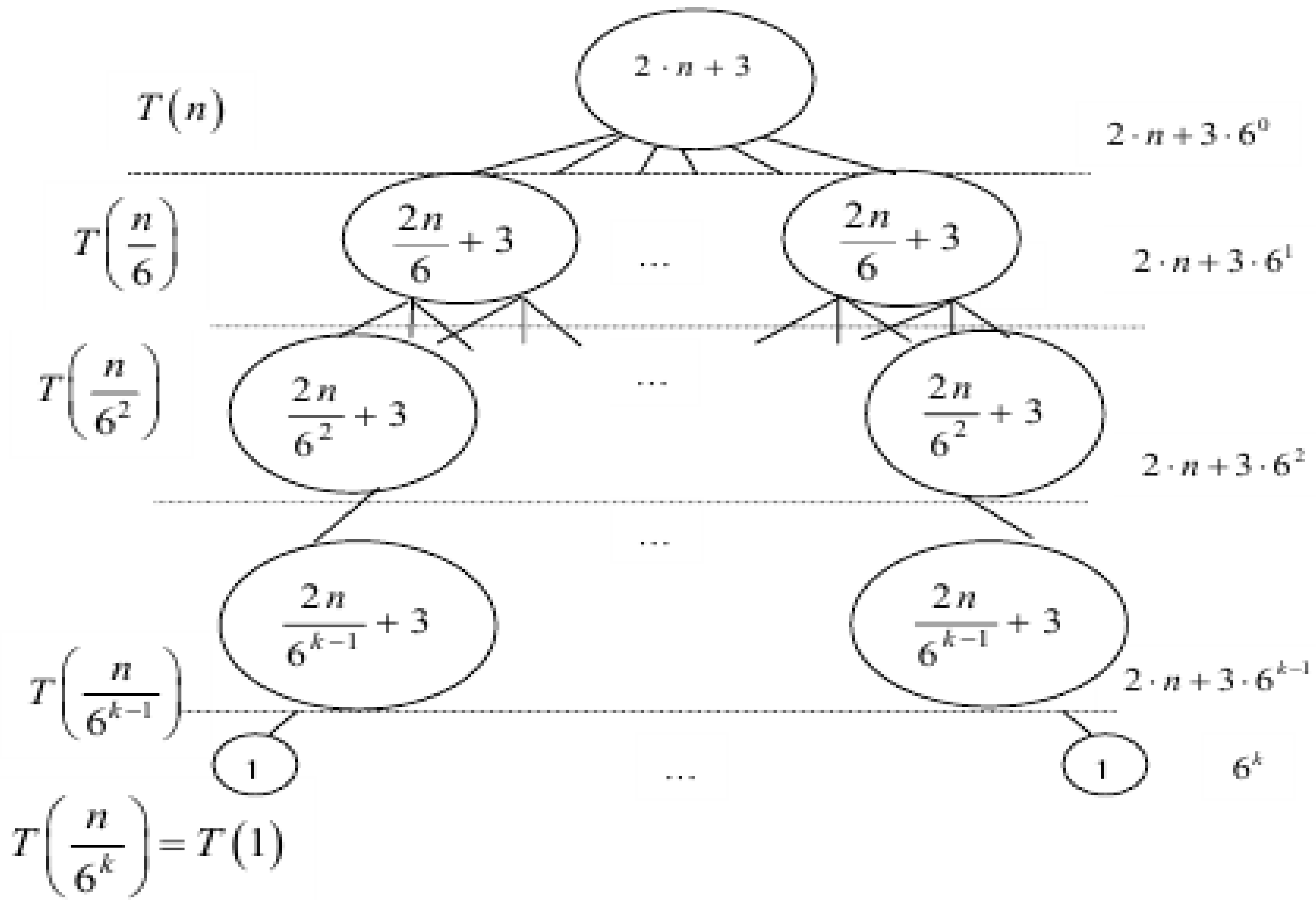
Ответ (получите асимптотическую оценку и ДОКАЖИТЕ!)

$$T(n) = \sum_{i=1}^{k+1} 2^i = \frac{2\cdot\left(2^{k+1}-1\right)}{2-1} = \left[\frac{n}{2^k} = 1; \quad 2^k = n\right] = 4n-2\,.$$

Пример 2

$$\begin{cases} T(n) = 6 \cdot T\left(\dfrac{n}{6}\right) + 2 \cdot n + 3, \\ T(1) = 1. \end{cases}$$

Дерево ($n = 6^k$)



$2 \cdot n + 3$
$T(n)$
$2 \cdot n + 3 \cdot 6^0$
$T\left(\frac{n}{6}\right)$
$\frac{2n}{6} + 3$
…
$\frac{2n}{6} + 3$
$2 \cdot n + 3 \cdot 6^1$
$T\left(\frac{n}{6^2}\right)$
$\frac{2n}{6^2} + 3$
…
$\frac{2n}{6^2} + 3$
$2 \cdot n + 3 \cdot 6^2$
…
$\frac{2n}{6^{k-1}} + 3$
$\frac{2n}{6^{k-1}} + 3$
$T\left(\frac{n}{6^{k-1}}\right)$
$2 \cdot n + 3 \cdot 6^{k-1}$
1
…
1
6^k
$T\left(\frac{n}{6^k}\right) = T(1)$

Решение

$$T(n) = 2 \cdot n \cdot k + 3 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} 6^i + 6^k = 2 \cdot n \cdot k + 3 \cdot \frac{6^k - 1}{6-1} + 6^k =$$

$$= \left[\cdot \frac{n}{6^k} = 1;\ 6^k = n;\ \ k = \log_6 n \right] = 2 \cdot n \cdot \log_6 n + \frac{3}{5} \cdot (n-1) + n =$$

$$= 2 \cdot n \cdot \log_6 n + \frac{8}{5} \cdot n - \frac{3}{5}.$$

Упражнения

1. $\begin{cases} T(n) = 3T(n-1) - 15,\ n \ge 2, \\ T(1) = 8. \end{cases}$

2. $\begin{cases} T(n) = T(n-1) + n - 1,\ n \ge 2, \\ T(1) = 3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} T(n) = 2T(n-2) - 15,\ n > 2, \\ T(2) = 40, \\ T(1) = 40. \end{cases}$

4. $\begin{cases} T(n) = T(n-2) + a,\ a > 0,\ n > 2, \\ T(1) = C_1, \\ T(2) = C_2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} T(n) = 4 \cdot T(n/2) - 1,\ n = 2^k,\ k \ge 1, \\ T(4) = 5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log_2 n,\ n = x^{2^k},\ k \ge 1, \\ T(x) = 0. \end{cases}$

3.2.6. Основная теорема (n=b^m)

$$\begin{cases} T(n) = a \cdot T\left(\dfrac{n}{b}\right) + c \cdot n^k, \\ T(1) = c \end{cases}$$

$$T(n) = \mathrm{O}\left(n^{\log_b a}\right), \text{ если } a > b^k;$$

$$T(n) = \mathrm{O}\left(n^k \cdot \log n\right), \text{ если } a = b^k;$$

$$T(n) = \mathrm{O}\left(n^k\right), \text{ если } a < b^k.$$

Доказательство $\left(n = b^m \ (m = \log_b n)\right)$

$$T(n) = a \cdot \left(a \cdot T\left(\frac{n}{b^2}\right) + c \cdot \left(\frac{n}{b}\right)^k \right) + c \cdot n^k = \ \ldots =$$

$$= a^m \cdot T(1) + a^{m-1} \cdot c \cdot \left(\frac{n}{b^{m-1}}\right)^k + \ldots + a \cdot c \cdot \left(\frac{n}{b}\right)^k + c \cdot n^k =$$

$$= c \cdot \sum_{i=0}^{m} a^{m-i} \cdot b^{i \cdot k} = c \cdot a^m \cdot \sum_{i=0}^{m} \left(\frac{b^k}{a}\right)^i .$$

$$a^m = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$$

$$r = b^k / a$$

$$r < 1$$

$$\sum_{i=0}^{m} r^i \leq \frac{1}{1-r}$$

$$T(n) = O\left(a^m\right) = O\left(n^{\log_b a}\right)$$

$$r = {b^k}/{a}$$

$$r = 1 \qquad a^m = b^{m \cdot k} = n^k$$

$$\sum_{i=0}^{m} r^i = m + 1 = \left(m = \log_b n\right) = \log_b n + 1$$

$$c \cdot a^m \cdot \sum_{i=0}^{m} r^i = c \cdot n^k \cdot \left(\log_b n + 1\right) = \frac{c}{\log_2 b} \cdot n^k \cdot \log_2 n + c \cdot n^k$$

$$T(n) = \mathrm{O}\left(n^k \cdot \log n\right)$$

$$r = b^k / a$$

$r > 1$

$$\sum_{i=0}^{m} r^i = \frac{r^{m+1} - 1}{r - 1} = \mathrm{O}\left(r^m\right)$$

$$T(n) = \mathrm{O}\left(a^m \cdot r^m\right) = \mathrm{O}\left(a^m \cdot \left(\frac{b^k}{a}\right)^m\right) = \mathrm{O}\left(b^{k \cdot m}\right) = \mathrm{O}\left(n^k\right)$$

Замечания

- Учет округлений см.в литературе (например, Кормен и др. стр 130)

- Чтобы разобраться с теоремой, просто порешайте методом итераций РУ.

Рекомендации по выбору способа программной реализации РС