МИНИСТЕРСТВО ПО ЧРЕЗВЫЧАЙНЫМ СИТУАЦИЯМ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «КОМАНДНО-ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ»

И.А. Гончаренко. В.С. Отчик. В.Н. Сережкин. В.И. Терешенков

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА.

Практикум.
В двух частях.
Часть 1.

Учебное пособие

Минск 2011

МИНИСТЕРСТВО ПО ЧРЕЗВЫЧАЙНЫМ СИТУАЦИЯМ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ «КОМАНДНО-ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ»

И.А. Гончаренко. В.С. Отчик. В.Н. Сережкин. В.И. Терешенков

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА.

Практикум.
В двух частях.
Часть 1

Учебное пособие

Минск 2011

УДК 51 (076.5)
ББК 22.11
В 93

Рецензенты:

кафедра высшей математики и физики ВА РБ,
заведующий кафедрой высшей математики БГЭУ, доктор физико – математических наук, профессор Дымков М.П.

Гончаренко И.А.
В 93 **Высшая математика**. Практикум. В двух частях. Часть 2. И. А. Гончаренко, [и др.]. – Минск: КИИ МЧС Республики Беларусь, 2011. – 162с.
ISBN

Первая часть практикума предназначена для курсантов и слушателей второго курса инженерного факультета ГУО «Командно-инженерный институт» МЧС Республики Беларусь. В ней рассмотрены примеры решения задач дифференциальному и интегральному исчислению функций одной переменной, линейной алгебре и аналитической геометрии. Приведены задачи для самостоятельного решения и ответы к ним.

УДК 51 (076.5)
ББК 22.11
ISBN
© Гончаренко И.А., Отчик В.С., Сережкин В.Н., Терешенков В.И., 2011
© Государственное учреждение образования “Командно-инженерный институт” МЧС Республики Беларусь, 2011

ГЛАВА 1

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1. Приближенные числа

Абсолютной погрешностью приближенного числа $\bar{x}$, заменяющего точное число x, называется величина

$$\Delta(\bar{x}) = |x - \bar{x}|.$$

Относительная погрешность числа $\bar{x}$ определяется равенством

$$\delta(\bar{x}) = \frac{|x - \bar{x}|}{|\bar{x}|}.$$

Относительную погрешность часто выражают в процентах: $\delta(\bar{x}) \cdot 100\%$.

Предельные абсолютная и *относительная погрешности* Δ и δ удовлетворяют неравенствам: $\Delta(\bar{x}) \le \Delta, \delta(\bar{x}) \le \delta$.

Любую конечную десятичную дробь a можно представить в виде $a = \pm\sum_{i=-k}^{m} a_i 10^i$, где a_i – одна из цифр 0, 1, …,9, $a_m \ne 0$. Например, $231{,}09 = 2\cdot 10^2 + 3\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0 + 0\cdot 10^{-1} + 9\cdot 10^{-2}$. Цифра a_i, стоящая в десятичной записи приближенного числа x на i-м месте, называется *верной*, если $\Delta(x) \le 0{,}5\cdot 10^i$. Цифры, не являющиеся верными, называют *сомнительными*. В десятичной записи числа первая слева отличная от нуля цифра и все последующие цифры называются *значащими*. Например, число 0,002040 имеет 4 значащих цифры.

Пример 1.1. Относительная погрешность числа $x = 13{,}92$ составляет 1%. Определить, какие цифры этого числа являются верными.

Решение. Абсолютная погрешность числа $\Delta(x) = 0{,}1392$. По определению, должно выполняться неравенство

$$0{,}1392 \le 0{,}5\cdot 10^i,\ 10^i \ge 0{,}2784,\ i \ge 0.$$

Отсюда следует, что данное число имеет две верных цифры (два верных знака).

Приближенные числа округляют, оставляя в записи числа только верные цифры. Если первая из отбрасываемых цифр больше или равна 5, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на 1, в противном случае эта цифра остается без изменения. Таким образом, округление числа в примере 1.1 дает $x \approx 14$. Часто приближенные числа записывают в *нормализованной* форме

$$x = x_0 \cdot 10^n,\ 0{,}1 \le |x_0| < 1.$$

Например, $120 = 0{,}120 \cdot 10^3$. При такой записи все цифры после запятой являются верными.

При сложении и вычитании приближенных чисел результат округляют по образцу исходного числа, десятичная запись которого обрывается ранее других. При умножении и делении в результате оставляют столько значащих цифр, сколько верных цифр имеется в исходных данных с наименьшим их количеством. Например,

$$153{,}21 - 81{,}329 = 71{,}881 \approx 71{,}88; \;\; 65{,}2 \cdot 78{,}5 = 5118{,}2 \approx 512 \cdot 10.$$

При возведении в степень или извлечении корня оставляют столько знаков, сколько их в основании степени или под корнем. При выполнении действий с приближенными числами более точные числа округляют таким образом, чтобы сохранить в них на один знак больше, чем в числе наименьшей точности. Полученный результат округляют на один знак.

1.1. Определить количество верных знаков в числе $x = 2{,}3743$, если относительная погрешность этого числа составляет 1%. Дать соответствующую запись приближенного числа.

1.2. Число $x = 12{,}213$ содержит 3 верных знака. Определить, какова относительная погрешность этого числа.

В задачах **1.3** – **1.11** произвести действия над приближенными числами, в которых все знаки являются верными, округляя результат.

1.3. $0{,}421 + 10{,}32 - 1{,}025$. **1.4.** $6{,}25 \cdot 0{,}43$. **1.5.** $4{,}52 : 2{,}4$.

1.6. $3{,}14^2$. **1.7.** 65^2. **1.8.** $0{,}20^2$.

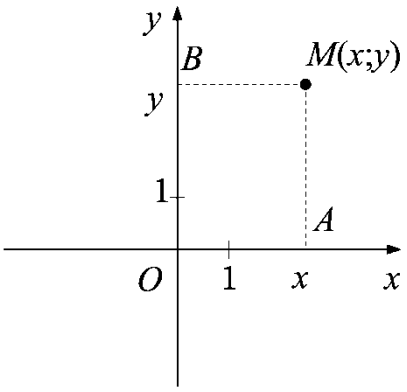
1.9. 120^2. **1.10.** $11{,}0^2$. **1.11.** $1{,}1^2$.

1.12. На батарею из трех последовательно соединенных одинаковых конденсаторов подано напряжение $U \approx 220$ В. Определить напряжение на одном конденсаторе.

1.2. Системы координат на плоскости

Числовой осью называют направленную прямую, на которой выбрано начало отсчета – точка O, и задана единица длины. Каждой точке x числовой оси соответствует действительное число, равное длине отрезка Ox, если x расположено правее точки O, и равное этой длине со знаком минус в противном случае. Пусть на плоскости выбран масштаб для измерения длин любых отрезков. *Декартова прямоугольная система координат* на плоскости определяется следующим образом. Через точку O – начало координат – на плоскости проведем две взаимно перпендикулярные числовые оси – горизонтальную Ox (ось абсцисс) и вертикальную Oy (ось ординат) так, как показано на рисунке 1.1. Пусть M – произвольная точка на координатной плоскости. Опустим из этой точки перпендикуляры MA и MB на оси Ox и Oy соответственно. Декартовыми прямоугольными координатами x и y точки M называются числа $x = OA$ и $y = OB$ (рис. 1.1).

Полярная система координат на плоскости определяется заданием полюса O и полярной оси OP с выбранной единицей длины. Положение точки M в полярной системе координат на плоскости задается двумя числами: числом $r \geq 0$, равным расстоянию от точки M до полюса (*полярный радиус*) и числом φ – величиной угла, образованного отрезком OM и полярной осью (*полярный угол)* (рис. 1.2). За положительное направление отсчета углов принимается отсчет против часовой стрелки. В качестве главного значения полярного угла выбирается значение $0 \leq \varphi < 2\pi$.



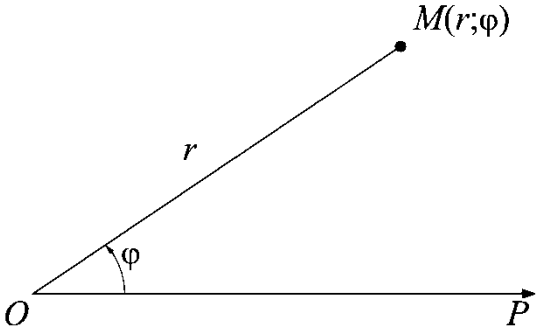


Рис. 1.1 Рис. 1.2

Если поместить полюс в начало декартовой системы координат, а полярную ось OP совместить с осью Ox, то можно установить формулы, связывающие декартовы и полярные координаты точки

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi; \tag{1.1}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{1.2}$$

Пример 1.2. В декартовой прямоугольной системе координат задана точка $M(1; -\sqrt{3})$. Определить ее полярные координаты.

Решение. По формулам (1.2) находим $r = 2, \cos\varphi = 1/2, \sin\varphi = -\sqrt{3}/2$, откуда $\varphi = -\pi/3$. Таким образом, в полярных координатах точка $M(2; -\pi/3)$.

1.13. Найти прямоугольные декартовы координаты точек, заданных полярными координатами: $A(2;\pi/3)$, $B(6;-\pi/2)$, $C(3;-\pi/6)$, $D(\sqrt{2};3\pi/4)$.

1.14. Найти полярные координаты точек $A(-1;1)$, $B(0;2)$, $C(3;0)$, $D(1;1)$.

1.3. Функции одной переменной

Определение. *Пусть* X и Y *– два множества действительных чисел. Если каждому числу* $x \in X$ *по определенному правилу* f *поставлено в соответствие единственное число* $y \in Y$*, то говорят, что на множестве* X *определена числовая функция* $y = f(x)$.

При этом x называют независимой переменной или аргументом, а y – зависимой переменной или функцией. Множество X называется *областью определения* функции $f(x)$ и обозначается $D(f)$. Совокупность всех значений, принимаемых переменной y, называется *множеством значений* $E(f)$.

При аналитическом способе задания функция определяется с помощью математической формулы, позволяющей вычислить значение функции $y = f(x)$ для каждого из значений аргумента x. В этом случае под областью определения понимают множество значений аргумента x, для которого данная формула имеет смысл.

Пример 1.3. Найти область определения и множество значений функции $y = 3\big/\sqrt{9-x^2}$.

Ответ: $D(f) = (-3, 3)$, $E(f) = [1, +\infty)$.

Найти области определения следующих функций.

1.15. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - x - 2}}$.

1.16. $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} + \dfrac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$.

1.17. $f(x) = \sqrt{\lg\dfrac{5x - x^2}{4}}$.

1.18. $f(x) = \arcsin\dfrac{x-3}{2} - \lg(4-x)$.

1.19. $f(x) = \log_x 5$.

1.20. $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{6-x}$.

1.21. $f(x) = \arccos\dfrac{2x}{1+x}$.

1.22. $f(x) = \sqrt{3-x} + \arccos\dfrac{x-2}{3}$.

1.23. $f(x) = \lg\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 4x + 6}$.

1.24. $f(x) = \dfrac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}$.

1.25. Найти функцию вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, если известно, что $f(0) = 5$, $f(2) = 13$, $f(4) = 45$.

1.26. Найти функцию вида $f(x) = a + bc^x\ (c > 0)$, если $f(0) = 15$, $f(2) = 30$, $f(4) = 90$.

1.27. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases} 3^{-x}-1, -1\le x<0, \\ \operatorname{tg} x, 0\le x<\pi/2, \\ \dfrac{x}{x^2-2}, \pi/2\le x\le 6. \end{cases}$$

Найти $f(-1)$, $f(\pi/4)$, $f(\pi/3)$, $f(4)$, $f(6)$.

При графическом способе задания функции используют ее представление в виде графика. На плоскости с заданной декартовой системой координат график функции $y=f(x)$ представляет собой множество точек вида $M(x;\, f(x))$.

Для построения графика функции, заданной аналитически, составляют таблицу значений аргумента и функции с помощью формулы $y=f(x)$, наносят точки $M_i(x_i;\, f(x_i))\,(i=1,2,...,n)$ на координатную плоскость и соединяют их линией.

Пример 1.4. Построить график функции $y=\sqrt[3]{x}$ на отрезке $[-8,8]$.

Решение. Данная функция определена при всех значениях *x*. Придавая *x* значения из указанного отрезка, составляем таблицу.

x	-8	$-27/8$	-1	$-1/8$	0	$1/8$	1	$27/8$	8
y	-2	$-3/2$	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	$3/2$	2

Нанеся на график точки с координатами $(x;\, y)$, приведенными в таблице, и соединив их плавной линией, получим график функции (рис. 1.3).

График функции, заданной формулой $r=r(\varphi)$, где r и φ – полярные координаты точки плоскости, строится в той же последовательности, что и график функции, заданной в декартовых координатах.

Пример 1.5. Построить график функции $r=1+\cos\varphi$.

Решение. Составим таблицу значений функции, соответствующих значениям $0\le\varphi<2\pi$.

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
r	2	$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$
φ	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
r	0	$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$

Построив найденные точки в полярной системе координат и соединив их плавной линией, получим график функции $r = 1 + \cos\varphi$ (рис. 1.4; данная линия называется кардиоидой).

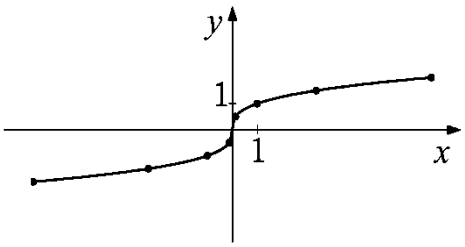


Рис. 1.3

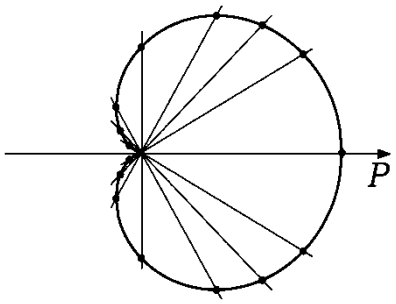


Рис. 1.4

Построить по точкам графики функций в декартовых координатах.

1.28. $y = x + \dfrac{1}{x}$. **1.29.** $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$. **1.30.** $y = \arcsin\dfrac{1}{x}$.

Построить графики функций в полярных координатах.

1.31. $r = \dfrac{\pi}{\varphi}$. **1.32.** $r = 2^{\varphi/\pi}$. **1.33.** $r = \dfrac{2}{\cos\varphi}$.

Функция $y = f(x)$ называется *четной* (*нечетной*), если ее область определения симметрична относительно точки O и $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$). График четной функции симметричен относительно оси Oy, график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на множестве *X*, если из условия $x_2 > x_1$ $(x_2, x_1 \in X)$ следует, что $f(x_2) > f(x_1)$. Функция $f(x)$ называется *убывающей* на множестве *X*, если из условия $x_2 > x_1$ $(x_2, x_1 \in X)$ следует, что $f(x_2) < f(x_1)$.

Функция $f(x)$ называется *ограниченной* на множестве *X*, если для всех $x \in X$ выполняется условие $m \le f(x) \le M$.

Функция $y = f(x)$ называется *взаимно-однозначной*, если из условия $x_1 \ne x_2$ следует, что $f(x_1) \ne f(x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in D(f)$. Возрастающие и убывающие функции являются взаимно-однозначными.

Если $y = f(x)$ – взаимно-однозначная функция, то каждому значению $y \in E(f)$ можно поставить в соответствие единственный элемент $x \in D(f)$, такой, что $f(x) = y$. Таким образом, на множестве $E(f)$ определена функция $x = f^{-1}(y)$, которая называется *обратной функцией* для $f(x)$. Например, для функции $y = x^3$ обратная функция $x = \sqrt[3]{y}$. Если у обратной функции аргумент обозначить через *x*, а зависимую переменную через *y*, то обратная функция запишется в виде $y = f^{-1}(x)$. В этом случае график обратной

функции будет симметричен графику исходной функции относительно прямой $y = x$.

Установить, какие из следующих функций являются четными, а какие нечетными.

1.34. $y = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$. **1.35.** $x^2 - |x|$.

1.36. $y = x\sin^2 x - x^3$. **1.37.** $\dfrac{\left(1+2^x\right)^2}{2^x}$.

1.38. $y = \lg\dfrac{1+x}{1-x}$. **1.39.** $y = \lg\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Представить функцию в виде суммы четной и нечетной функций.

1.40. $y = x^2 + 4x + 3$. **1.41.** $y = (1+x)^{20}$.

Найти функции, обратные данным.

1.42. $y = 2x + 3$. **1.43.** $y = x^2 - 1,\ x \le 0$.

1.44. $y = \sqrt[3]{1-x^3}$. **1.45.** $y = \lg\dfrac{x}{2}$.

1.4. Предел последовательности

Если каждому натуральному числу $n \in \mathbf{N}$ поставлено в соответствие действительное число $x_n = f(n)$, то говорят, что на множестве $\mathbf{N}$ определена *числовая последовательность* $\{x_n\} = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Число $x_n = f(n)$ называется n-м или *общим членом последовательности*. Примерами последовательностей являются:

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, \quad x_n = \frac{1}{n};$$

$$\{n\} = 1, 2, \ldots, n, \ldots, \quad x_n = n.$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если для некоторого числа $M > 0$ выполняется условие: $|x_n| \le M$ для всех $n \in \mathbf{N}$.

Определение. *Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число $N_0 = N_0(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.*

В этом случае пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \to a \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a. Последовательности, имеющие предел, называют *сходящимися последовательностями*.

Говорят, что предел последовательности $\{x_n\}$ равен $+\infty$, если для любого числа $M > 0$ найдется натуральное число $N_0 = N_0(M)$, такое, что для всех $n > N_0$ выполняется условие $x_n > M$. В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Если для любого $M > 0$ существует номер $N_0 = N_0(M)$, такой, что при $n > N_0$ выполняется условие $x_n < -M$, то говорят, что предел последовательности $\{x_n\}$ равен $-\infty$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Например, $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(1-n^2) = -\infty$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$, то последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой последовательностью.*

Если предел последовательности $\{x_n\}$ равен $\pm\infty$ или не существует, то такая последовательность называется *расходящейся*.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0.$ В частности, последовательности $x_n = \dfrac{1}{n^\alpha}, \alpha > 0$ и $x_n = q^n, |q| < 1$ являются бесконечно малыми последовательностями.

Если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – сходящиеся последовательности, то:

$$1)\lim_{n\to\infty}\{x_n \pm y_n\} = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$2)\lim_{n\to\infty}\{x_n y_n\} = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$3)\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n},\ \ y_n \neq 0, \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0,$ а $\{y_n\}$ – ограниченная последовательность, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$

Если $\{y_n\}$ – бесконечно большая последовательность, $y_n \neq 0$, то $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$ – бесконечно малая последовательность и наоборот, если $\{y_n\}$ – бесконечно малая последовательность $(y_n \neq 0)$, то $\left\{\dfrac{1}{y_n}\right\}$ – бесконечно большая последовательность.

Предел последовательности $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ равен числу $e \approx 2{,}71828\ldots$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Пример 1.6. Доказать, что предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2}=\frac{2}{3}$.

Решение. Рассмотрим модуль разности

$$\left|x_n-a\right|=\left|\frac{2n+1}{3n-2}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{3(2n+1)-2(3n-2)}{3(3n-2)}\right|=\frac{7}{3(3n-2)}.$$

Зададим произвольное $\varepsilon>0$. Неравенство $\frac{7}{3(3n-2)}<\varepsilon$ будет выполняться для всех $n>\frac{7}{9\varepsilon}+\frac{2}{3}$. Следовательно, в качестве $N=N(\varepsilon)$ можно взять целую часть от числа $\frac{7}{9\varepsilon}+\frac{2}{3}$. Например, при $\varepsilon=0{,}1$ имеем $N=N(0{,}1)=8$. Таким образом, согласно определению предела числовой последовательности, утверждение доказано.

Пример 1.7. Найти предел $a=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+n\sin n}{n^2+1}$.

Решение. Так как $|\sin n|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$. Для нахождения предела разделим числитель и знаменатель дроби на n^2.

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+n\sin n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{\sin n}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}.$$

Используя свойства пределов, имеем

$$a=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2-3\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{2-0+0}{1+0}=2.$$

Вычислить пределы последовательностей.

1.46. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-2}{n+1}$.

1.47. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+1}{2-n-n^2}$.

1.48. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$.

1.49. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

1.50. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$.

1.51*. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{(n-1)n}\right)$.

1.52. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!}{3(n+1)!-n^2n!}$. **1.53.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$.

Доказать следующие равенства, используя определение предела последовательности.

1.54.. $\lim\limits_{n\to\infty}2^{-n}=0.$ **1.55.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{2n^2+1}=\dfrac{1}{2}.$

1.5. Предел функции

Интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ называется ε-*окрестностью* $U_\varepsilon(a)$ точки *a*. Если из этой окрестности удалить точку *a*, то такая окрестность называ*ется проколотой окрестностью* точки *a*. Проколотую δ-окрестность можно задать с помощью двойного неравенства: $0<|x-a|<\delta$.

Определение. *Пусть функция* $f(x)$ *определена в некоторой проколотой окрестности U точки a. Число A называется пределом функции* $f(x)$ *в точке* $x=a$*, если для любого сколь угодно малого положительного числа* $\varepsilon>0$ *существует число* $\delta=\delta(\varepsilon)>0$*, такое, что для всех* x*, удовлетворяющих условию* $0<|x-a|<\delta$*, выполняется неравенство* $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Предел функции обозначают следующим образом:

$$\lim_{x\to a}f(x)=A.$$

Эквивалентное определение предела на языке последовательностей формулируется следующим образом.

Определение. *Число A называется пределом функции* $f(x)$ *в точке* $x=a$*, если для любой последовательности точек* $\{x_n \mid x_n\in U\}$*, сходящейся к a, последовательность соответствующих значений* $\{f(x_n)\}$ *сходится к A.*

Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x\to+\infty$, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $M=M(\varepsilon)>0$ такое, что для всех $x>M$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

В этом случае используют запись $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$. Например, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$. Аналогично определяется $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x\to a$, если для любого числа $M>0$ найдется число $\delta=\delta(M)>0$, такое, что $|f(x)|>M$ для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$.

Если $f(x)$ – бесконечно большая функция, то пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, если $f(x)>0$ при $0<|x-a|<\delta$, и пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, если $f(x)<0$ при $0<|x-a|<\delta$.

Если $x<a$ и $x\to a$, то пишут условно $x\to a-0$; аналогично, если $x>a$ и $x\to a$, то пишут $x\to a+0$. Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=f(a-0)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a+0)$, то они называются соответственно пределом слева и пределом справа функции $f(x)$ в точке a.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A, \lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, где A и B – конечные числа, то выполняются следующие равенства:

$$1)\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=A\pm B;$$
$$2)\lim_{x\to a} f(x)g(x)=AB;$$
$$3)\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B} \text{ при } g(x)\neq 0, B\neq 0.$$

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке *a*, если она определена в окрестности точки *a* и $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$. Если функция $f(x)$ непрерывна во всех точках множества *X*, то она называется непрерывной на *X*. Точки, в которых не выполняется хотя бы одно из этих условий, называются *точками разрыва* функции. Если в точке *a* хотя бы один из пределов $f(a-0)$ или $f(a+0)$ равен $\pm\infty$ или не существует, то *a – точка разрыва второго рода*. Если существуют конечные пределы $f(a\pm 0)$, и $f(a+0)\neq f(a-0)$, или $f(a+0)=f(a-0)\neq \neq f(a)$, или $a\notin D(f)$, то *a – точка разрыва первого рода.*

Пример 1.8. Найти предел $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x-2}{x-1}=\dfrac{4}{3}.$

Пример 1.9. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{2x^2+2x-1}$.

Решение. Для вычисления предела разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень многочлена, находящегося в числителе. Затем применим теоремы о пределах функций. В результате получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}2+2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}=\frac{1+0}{2+0-0}=\frac{1}{2}.$$

Пример 1.10. Найти предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$.

Решение.

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Найти пределы следующих функций.

1.56. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.

1.57. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

1.58. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-5x+10}{x^2-25}$.

1.59. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

1.60. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

1.61. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

1.62. $\lim\limits_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

1.63. $\lim\limits_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$.

1.64. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

1.65. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$.

1.66. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{(x^2+1)}$.

1.67. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$.

1.68. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1}{3x+7}$.

1.69. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$.

1.70. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$.

1.71. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$.

1.72. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$.

1.73. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$.

1.74. $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

1.75. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

1.76. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

1.77. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$.

1.78. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+a)}-x\right)$.

1.79. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

Имеют место два замечательных предела:

$$1)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1;\qquad 2)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\quad\text{или}\quad \lim_{x\to0}(1+x)^{1/x}=e.$$

Пример 1.11. Найти предел $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Пример 1.12. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}\left(\frac{-4x}{x+1}\right)}.$$

Так как

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}=e,\ \lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{1+\frac{1}{x}}=-4,$$

то

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2x}=e^{-4}.$$

Вычислить пределы

1.80. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

1.81. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$.

1.82. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 4x}{\sin x}$.

1.83. $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} 5x$.

1.84. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

1.85. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin 2x\sin x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

1.86*. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$.

1.87. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$.

1.88. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$.

1.89. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$.

1.90*. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$.

1.91*. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+4x}$.

1.92*. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x+1}\right)^{x}$.

1.93*. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2+x}\right)^{x-2}$.

1.6. Производная функции

Определение. *Пусть функция* $y=f(x)$ *определена в некоторой окрестности точки* x_0. *Производной функции в точке* x_0 *по аргументу* x *называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю, т. е.*

$$y'(x_0)=f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Производная функции в произвольной точке x обозначается одним из символов $y', y'_x, f'(x), \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{df}{dx}$. Процесс нахождения производной называют также дифференцированием. При дифференцировании функций используют следующие правила:

$c' = 0$, åñëè c – ï î ñòî ÿí í àÿ;

$(u \pm v)' = u' \pm v'$;

$(cu)' = cu'$;

$(uv)' = u'v + uv'$;

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},\ v \neq 0.$$

Производные простейших элементарных функций.

$1^\circ.\quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$

$2^\circ.\quad (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} \quad (0 < a \neq 1); \quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$

$3^\circ.\quad (a^x)' = a^x \ln a \quad (0 < a \neq 1); \quad (e^x)' = e^x.$

$4^\circ.\quad (\sin x)' = \cos x.$

$5^\circ.\quad (\cos x)' = -\sin x.$

$6^\circ.\quad (\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

$7^\circ.\quad (\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

$8^\circ.\quad (\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

$9^\circ.\quad (\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arcctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}.$

Найти производные следующих функций.

1.94. $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3.$

1.95. $y = ax^2 + bx + c.$

1.96. $y = -\dfrac{5x^3}{a}.$

1.97. $y = at^m + bt^{m+n}.$

1.98. $y = \dfrac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$

1.99. $y = \dfrac{\pi}{x} + \ln 2.$

1.100. $y = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-3}.$

1.101. $y = x^2 \sqrt[3]{x^2}.$

1.102. $y = \dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{b}{x\sqrt[3]{x}}.$

1.103. $y = \dfrac{a + bx}{c + dx}.$

1.104. $y = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 5x + 3}.$

1.105. $y = \dfrac{2}{2x - 1} - \dfrac{1}{x}.$

1.106. $y = \dfrac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}}.$

1.107. $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}.$

1.108. $y = \dfrac{x}{\operatorname{tg} x} + x \operatorname{tg} x$.

1.109. $y = x^2 \sin x - \dfrac{\sqrt{x}}{\cos x}$.

1.110. $y = 2t \sin t - (t^2 - 2)\cos t$.

1.111. $y = \dfrac{x^3}{\operatorname{ctg} x}$.

1.112. $y = x^2 \arcsin x$.

1.113. $y = \dfrac{(1 + x^2)\operatorname{arctg} x - x}{2}$.

1.114. $y = (x^2 - 1)e^x$.

1.115. $y = \dfrac{x^2 + 1}{e^x - 1}$.

1.116. $y = e^x \arcsin x$.

1.117. $y = x^3 \ln x - \dfrac{x^3}{3}$.

1.118. $y = \ln x \lg x - \ln a \log_a x$.

1.119. $y = \dfrac{1}{x} + 2\ln x - \dfrac{\ln x}{x}$.

Для вычисления производных сложных функций вида $y = f[u(x)]$ по аргументу x применяется формула $y'_x = y'_u u'_x$.

Пример 1.13. Найти производную функции $y = \sin(3x + 2)$.

Решение. В данном случае $u = 3x + 2$. Следовательно,

$$y'_x = \cos u \cdot u'_x = \cos u \cdot (3x + 2)' = 3\cos(3x + 2).$$

Пример 1.14. Найти производную функции $y = \ln \cos x^2$.

Решение. Применяя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$y' = \frac{1}{\cos x^2}(-\sin x^2)(2x) = -2x \operatorname{tg} x^2.$$

Найти производные следующих функций.

1.120. $y = \sqrt{1 - x^2}$.

1.121. $y = \sqrt[3]{a + bx^3}$.

1.122. $y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}$.

1.123. $y = (3 - 2\sin x)^5$.

1.124. $y = \operatorname{tg} x - \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \dfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$.

1.125. $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \sqrt{\operatorname{ctg} \alpha}$.

1.126. $y = -\dfrac{1}{6(1 - 3\cos x)^2}$.

1.127. $y = \sqrt[3]{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^3 x}$.

1.128. $y=\sqrt{1+\arcsin x}$.

1.129. $y=\sqrt{\operatorname{arctg} x}-\left(\arcsin x\right)^3$.

1.130. $y=\sqrt{xe^x+x}$.

1.131. $y=\ln^5 x+\sqrt[3]{2e^x-2^x+1}$.

1.132. $y=\arcsin 2x$.

1.133. $y=\sin\left(x^2-5x+1\right)+\operatorname{tg}\dfrac{a}{x}$.

1.134. $y=\arcsin\dfrac{1}{x^2}$.

1.135. $y=\arccos\sqrt{x}$.

1.136. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

1.137. $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1+x}{1-x}$.

1.138. $y=5e^{-\sqrt{x}}$.

1.139. $y=x^2\cdot 10^{2x}$.

1.140. $y=t\sin 2^t$.

1.141. $y=\lg\sin x$.

1.142. $y=\ln(2x+7)$.

1.143. $y=\ln^2 x-\ln(\ln x)$.

1.144. $y=\ln\left(e^x-4\arcsin x\right)$.

1.145. $y=\operatorname{arctg}(\ln x)+\ln(\operatorname{arctg} x)$.

1.146. $y=\dfrac{x^8}{8(1-x^2)^4}$.

1.147. $y=\sqrt{\ln x+1}+\ln\left(\sqrt{x}+1\right)$.

1.148. $y=\sin^3 5x\cos^2\dfrac{x}{3}$.

1.149. $y=\dfrac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

1.150. $y=\dfrac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$.

1.151. $y=\left(\dfrac{a+bx^n}{a-bx^n}\right)^m$.

1.152. $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$.

1.153. $y=\sin^2 t^3$.

1.154. $y=\dfrac{1}{2}(\arcsin x)^2\arccos x$.

1.155. $y=\ln(\arcsin 5x)$.

1.156. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}$.

1.157. $y=-\sqrt{2}\operatorname{arcctg}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}$.

1.158. $y=e^{\sin^2 x}$.

1.159. $y=3^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}$.

1.160. $y=\sqrt{\cos x}\,a^{\sqrt{\cos x}}$.

1.161. $y=\ln\cos\dfrac{x-1}{x}$.

1.162. $y=\ln\left(\ln\left(3-2x^3\right)\right)$. **1.163.** $y=\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

1.164. $y=\operatorname{arctg}\left(\ln\frac{1}{x}\right)$. **1.165.** $y=\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}$.

1.166. $y=\ln(\arcsin x)+\frac{1}{2}\ln^2 x+\arcsin(\ln x)$.

Производная от логарифма функции $(\ln y)'=\frac{y'}{y}$ называется *логарифмической производной*. Логарифмическая производная обычно применяется для вычисления производных вида $y=u^v$, где $u=u(x), v=v(x)$.

Пример 1.15. Найти производную функции $y=x^{\sin x}$.

Решение. Так как $\ln y=\sin x\ln x$, то, дифференцируя обе части этого равенства по *x*, получим

$$\frac{y'}{y}=(\sin x\ln x)'=\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x},$$

откуда

$$y'=y\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right).$$

Найти производные следующих функций, используя предварительное логарифмирование.

1.167. $y=(x+1)(2x+1)(3x+1)(4x+1)$.

1.168. $y=\frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}$. **1.169.** $\sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$.

1.170. $\frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$. **1.171.** $y=x\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$.

1.172. $y=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$. **1.173.** $y=\sqrt[x]{x}$.

1.174*. $y=x^{\sqrt{x}}$. **1.175*.** $y=(\operatorname{arctg} x)^x$. **1.176*.** $y=(\cos x)^{\sin x}$.

1.177*. $y=x^{2x-1}$. **1.178*.** $y=(\sin x)^{\arcsin x}$. **1.179*.** $y=(\ln x)^{1/x}$.

Если уравнение $F(x, y) = 0$ задает y как неявную функцию, то для нахождения ее производной нужно продифференцировать данное уравнение по x, считая, что y является функцией от x.

Пример 1.16. Найти производную неявной функции $y(x)$, заданной соотношением $e^y - 2xy + x^3 = 0$.

Решение. Дифференцируя это соотношение, получим

$$e^y y' - 2(y + xy') + 3x^2 = 0, \quad \text{откуда} \quad y' = \frac{2y - 3x^2}{e^y - 2x}.$$

Найти производные y' для следующих функций, заданных неявно.

1.180. $x^3 + y^3 = a^3$.

1.181. $x^3 + x^2 y + y^2 = 0$.

1.182. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$.

1.183. $y^3 = \dfrac{x - y}{x + y}$.

1.184. $y = a\cos(x + y) - x$.

1.185. $\operatorname{tg} y = xy$.

1.186. $xy = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

1.187. $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = c$.

1.188*. $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right)$.

1.189*. $x^y = y^x$.

Если функция задана с помощью *параметрических уравнений* $x = x(t)$, $y = y(t)$, то $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Пример 1.17. Найти производную y'_x функции, заданной параметрическими уравнениями $x = \sin t,\ y = t^3$.

Решение.

$$y'_x = \frac{(t^3)'}{(\sin t)'} = \frac{3t^2}{\cos t}, \quad x = \sin t.$$

Найти производные y'_x функций, заданных параметрическими уравнениями.

1.190. $x = \dfrac{1}{t+1},\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2$.

1.191. $x = \dfrac{2at}{1+t^2},\ y = \dfrac{a\left(1-t^2\right)}{1+t^2}$.

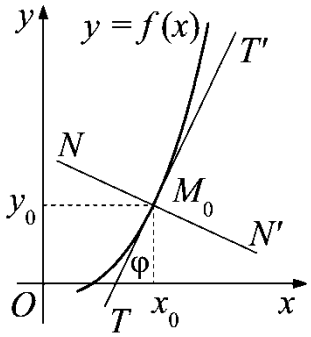
1.192. $x = \sqrt{t^2+1},\ y = \dfrac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}$.

1.193. $x = a\cos^2 t,\ y = b\sin^2 t$.

1.194. $x=\dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$, $y=\dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$. **1.195.** $x=e^{-t}$, $y=e^{2t}$.

1.196. $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$.

1.197. $x=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $y=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.



1.198. $x=a\left(\ln\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}+\cos t-\sin t\right)$, $y=a(\sin t+\cos t)$.

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной $f'(x_0)$ функции $y=f(x)$ равно угловому коэффициенту $k=\operatorname{tg}\varphi$ *касательной* TT' к графику этой функции в точке $M_0(x_0;y_0)$ (рис. 1.5). Уравнение этой касательной имеет вид $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

Прямая NN', проходящая через точку касания $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно к касательной, называется *нормалью* к кривой. Уравнение нормали имеет вид $x-x_0+f'(x_0)(y-y_0)=0$.

Рис. 1.5

1.199. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y=x^3+2x^2-4x-3$ в точке $M(-2;5)$.

1.200. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y=\ln x$ в точке пересечения ее с осью абсцисс.

1.201. Найти уравнения касательной и нормали к кривой, заданной уравнением $x^3+y^2-xy-7=0$, в точке $M(1;-2)$.

1.202. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ в точке его пересечения с осью абсцисс.

1.203*. Найти значение температуры воспламенения как координаты T точки, в которой прямая $Q_1 = B(T - T_0)$, описывающая теплоотдачу, касается кривой тепловыделения реакции $Q = Ae^{-E/RT}$ (A, B, E, R и T_0 – постоянные).

Производной второго порядка от функции $y = f(x)$ называется производная от ее первой производной, т. е.

$$y'' = y^{(2)} = f''(x) = f^{(2)}(x) = (y')'.$$

Соотношение, определяющее n-ю производную, имеет вид $y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$.

Пример 1.18. Найти вторую производную от функции $y = x^2 \sin x$.

Решение. $y' = (x^2 \sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x,$

$$y'' = (2x \sin x + x^2 \cos x)' = 4x \cos x - x^2 \sin x + 2 \sin x.$$

Найти производные второго порядка следующих функций.

1.204. $x^8 + 7x^6 - 5x + 4$.

1.205. $y = e^{x^2}$.

1.206. $y = \sin^2 x$.

1.207. $y = \ln \sqrt[3]{1 + x^2}$.

1.208. $y = \left(1 + x^2\right) \operatorname{arctg} x$.

1.209. $y = (\arcsin x)^2$.

1.210. Показать, что функция $y = \frac{1}{2} x^2 e^x$ удовлетворяет уравнению $y'' - 2y' + y = e^x$.

1.211. Показать, что функция $y = e^{2x} \sin 5x$ удовлетворяет уравнению $y'' - 4y' + 29y = 0$.

1.212. Найти $y'''(0)$, если $y = (2x - 3)^5$.

1.213. Показать, что функция $y = e^{-x} \cos x$ удовлетворяет уравнению $y^{(4)} + 4y = 0$.

1.214. Найти $y(0), y'(0), y''(0)$ и $y'''(0)$, если $y = e^x \sin x$.

1.215. Найти $y^{(5)}$ от функции $y = \ln(1 + x)$.

1.7. Дифференциал функции

Определение. *Функция* $y = f(x)$ *называется дифференцируемой в точке* x_0, *если она определена в некоторой окрестности точки* x_0 *и ее приращение в этой точке можно представить в виде*

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha \Delta x,$$

где A – некоторое число, $\alpha = \alpha(\Delta x)$, и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$. Главная часть $A\Delta x$ приращения Δy, линейная относительно Δx, называется *дифференциалом* функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается через dy. Таким образом, дифференциал $dy = A\Delta x$. Для дифференцируемости функции $y = f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы в точке x_0 существовала конечная

производная $f'(x_0)=A$. Так как для независимой переменной $dx=\Delta x$, то дифференциал $dy=f'(x_0)dx$. Поэтому производная функции может быть записана в виде

$$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}.$$

Дифференциал сложной функции $y=f[u(x)]$ равен $dy=y'_u du$.

Если $u=u(x), v=v(x)$ – дифференцируемые функции, а c – постоянная, то

$$1)\ dc=0,\ d(cu)=cdu,$$

$$2)\ d(u\pm v)=du\pm dv,$$

$$3)\ d(uv)=vdu+udv,$$

$$4)\ d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}.$$

Пример 1.19. Найти дифференциал функции $y=\dfrac{\sin 2x}{x^3}$.

Решение.

$$dy=\frac{x^3 d(\sin 2x)-\sin 2x d(x^3)}{x^6}=\frac{x^3\cdot 2\cos 2x dx-\sin 2x\cdot 3x^2 dx}{x^6}=$$

$$=\frac{(2x\cos 2x-3\sin 2x)dx}{x^4}.$$

Пример 1.20. Найти дифференциал неявной функции $y(x)$, заданной уравнением $y^3+y-x^2+1=0$.

Решение. Вычислим дифференциал от обеих частей равенства, задающего функцию. Имеем: $d(y^3+y-x^2+1)=3y^2dy+dy-2xdx=0$. Из полученного уравнения находим $dy=\dfrac{2xdx}{3y^2+1}$.

Найти дифференциалы следующих функций для произвольных значений аргумента и его приращения.

1.216. $y=\dfrac{x}{1-x}$.

1.217. $y=\arcsin\dfrac{x}{a}$.

1.218. $y=e^{-x^2}$.

1.219. $y=\operatorname{arctg}(\ln x)$.

1.220. $y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

1.221. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$.

Найти дифференциалы функций, заданных неявно.

1.222. $y = e^{-\frac{x}{y}}$. **1.223.** $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

1.224. $(x+y)^2(2x+y)^3 = 1$. **1.225.** $\sin(xy-1) = x+y$.

Из определения дифференциала вытекает следующая приближенная формула

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0) + df(x_0).$$

Пример 1.21. Вычислить приближенно $\sqrt{50}$.

Решение. Положим $y = f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 49$, $\Delta x = dx = 1$. Тогда $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Следовательно,

$$\sqrt{50} = f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = \sqrt{49} + \frac{1}{2\sqrt{49}}\cdot 1 = 7\frac{1}{14} \approx 7,07.$$

Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислить приближенно следующие значения.

1.226. $\sin 29^\circ$. **1.227.** $\arcsin 0,54$. **1.228.** $\sqrt[4]{17}$.

1.229. $\sqrt[3]{1,02}$. **1.230.** $\ln 1,2$. **1.231.** $\operatorname{arctg} 1,05$.

Найти приближенные значения функций в указанных точках с помощью дифференциала.

1.232. $x^3 - 4x^2 + 5x + 3,\ x = 1,03$. **1.233.** $y = \sqrt{1+x},\ x = 0,2$.

1.234. $y = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}},\ x = 0,1$. **1.235.** $y = e^{1-x^2},\ x = 1,05$.

Дифференциал второго порядка функции $y = f(x)$ равен

$$d^2y = d(dy) = d[f'(x)dx] = [f'(x)dx]'dx = f''(x)dx^2 = y''dx^2,$$

а дифференциал n-го порядка

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)dx^n = y^{(n)}dx^n.$$

Пример 1.22. Найти второй дифференциал функции $y = e^{x^2}$.

Решение. Вычисляя вторую производную функции y, находим:

$$y' = 2xe^{x^2};\ y'' = 2e^{x^2} + 2x\cdot 2xe^{x^2} = 2(1+2x^2)e^{x^2}.$$

Следовательно,

$$d^2y = 2(1+2x^2)e^{x^2}dx^2.$$

Найти дифференциалы второго порядка следующих функций.

1.236. $y=\sqrt{1-x^2}$.

1.237. $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

1.238. $y=\sin x\ln x$.

1.239. $y=x\cos x$.

1.8. Правило Лопиталя

Пусть при $x\to x_0$ функции $f(x)$ и $g(x)$ обе бесконечно малые или обе –бесконечно большие. Тогда их отношение не определено в точке x_0 .В этом случае говорят, что оно представляет собой *неопределенность* вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, соответственно. Нахождение предела отношения $f(x)/g(x)$ в таких случаях называют раскрытием неопределенности. Неопределенности можно раскрыть с помощью *правила Лопиталя*.

Пусть две функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на некотором интервале (a,b), за исключением, возможно, точки $x_0\in(a,b)$; Пусть, далее, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ или $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$, и производная $g'(x)\neq 0$ для $x\in(a,b)$. Тогда, если существует (конечный или бесконечный) предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем справедлива формула

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

Пример 1.23. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+1}}{1}=1.$

Неопределенность вида $0\cdot\infty$ можно преобразовать в неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Пример 1.24. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{1/x}-1\right)$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}x\left(e^{1/x}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{1/x}-1\right)}{1/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{1/x}-1\right)'}{(1/x)'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-e^{1/x}/x^2}{-1/x^2}=\lim_{x\to\infty}e^{1/x}=1.$$

К неопределенности вида $0\cdot\infty$ сводятся неопределенности видов $0^0, \infty^0, 1^\infty$. Для этого используются соотношения

$$f^g = e^{g\ln f}, \lim_{x\to a} f^g = e^{\lim\limits_{x\to a} g\ln f}.$$

Пример 1.25. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

Решение. В данном случае имеем неопределенность вида 1^∞. Согласно сказанному выше, $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = e^c$, где

$$c = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln(\cos x))'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2}$.

Вычислить следующие пределы, используя правило Лопиталя.

1.240. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$.

1.241. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$.

1.242. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$.

1.243. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x-\sin x}$.

1.244. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

1.245. $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\operatorname{ctg} x$.

1.246. $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\ln(x-1)$.

1.247. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

1.248. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

1.249. $\lim\limits_{x\to 0}x^x$.

1.250*. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

1.251*. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

1.252*. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$.

1.253*. $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{\frac{1}{x}}$.

1.9. Формула Тейлора

Пусть функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки a производную порядка $n+1$. Тогда справедлива *формула Тейлора* порядка n

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, $\xi=a+\theta(x-a)$, $0<\theta<1$ (остаточный член в форме Лагранжа).

Формула Тейлора при $a=0$ носит название *формулы Маклорена*:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$(0<\theta<1)$.

Формула Маклорена для некоторых элементарных функций:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}; \qquad (1.3)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}};$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Пример 1.26. С помощью формулы Маклорена для функции $f(x)=e^x$ определить число e с абсолютной погрешностью, не превосходящей 0,001.

Решение. При $x=1$ из формулы (1.3) получим

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\theta}{(n+1)!}.$$

Наименьшее значение n, удовлетворяющее условию $\dfrac{e^\theta}{(n+1)!}<0{,}001$, где $0<\theta<1$, равно 6. Следовательно, $e\approx 1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{6!}\approx 2{,}718$.

1.254. Написать формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $y=\sqrt{x}$ в точке $a=1$ для $n=2$.

1.255. Написать формулу Тейлора второго порядка для функции $y=\dfrac{x}{x-1}$ в точке $a=2$.

1.256. Написать формулу Маклорена второго порядка для функции $y=\operatorname{tg}x$.

1.257. Разложить многочлен x^3+3x^2-2x+4 по степеням двучлена $x+1$.

Вычислить с погрешностью, не превышающей 0,001, приближенные значения следующих чисел.

1.258*. $\sqrt{e}$. **1.259.** $\ln 1,05$. **1.260*.** $\sqrt[5]{33}$.

1.10. Экстремум функции

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ при всех $x \in (a, b)$, то функция возрастает на интервале (a, b). Если же $f'(x) < 0$ для всех $x \in (a, b)$, то функция убывает на этом интервале. Функция $y = f(x)$ постоянна на интервале (a, b), $y = c$, тогда и только тогда, когда на этом интервале $f'(x) = 0$.

Пример 1.27. Найти промежутки возрастания и убывания функции $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$.

Решение. Находим производную $y' = 3x^2 + 6x - 9$. Точки, в которых $y' = 0$, разделяют область определения функции на промежутки возрастания и убывания. Корнями уравнения $3x^2 + 6x - 9 = 0$ являются $x_1 = -3$ и $x_2 = 1$. Следовательно, $y' > 0$, и функция y возрастает при $x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$. При $x \in (-3, 1)$ выполняется неравенство $y' < 0$, и функция убывает на этом интервале.

Найти промежутки возрастания и убывания следующих функций.

1.261. $y = (x - 3)\sqrt{x}$. **1.262.** $y = x \ln x$.

1.263. $y = \arcsin(1 + x)$. **1.264.** $y = 2^{\frac{1}{x-a}}$.

1.265. $y = x^2(x - 3)$. **1.266.** $y = \operatorname{arctg} x - \ln x$.

1.267. $y = \dfrac{x}{\ln x}$. **1.268.** $y = \dfrac{x}{x^2 - 6x - 16}$.

Точка x_0 называется точкой *локального максимума* (*минимума*) функции $y = f(x)$, если существует такая δ-окрестность $U_\delta(x_0)$ точки x_0, что для всех точек x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$ ($f(x) \ge f(x_0)$). Значение $f(x_0)$ называется локальным максимумом (минимумом) функции $f(x)$.

Для точки локального максимума (минимума) используется обозначение $x_{\max}$ ($x_{\min}$), а для локального максимума (минимума) функции y – обозначение $y_{\max}$ ($y_{\min}$).

Локальный максимум и локальный минимум объединяются общим названием локальный экстремум.

Необходимое условие локального экстремума. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 локальный экстремум, то $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует.

Точки, в которых производная $f'(x_0)=0,$ называются *стационарными* точками функции. Стационарные точки, а также точки, в которых функция имеет бесконечную производную или в которых производная не существует, называются *критическими точками* функции.

Достаточные условия локального экстремума.

1) Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в критической точке x_0 и дифференцируема в проколотой δ-окрестности точки x_0. Если в этой окрестности производная $f'(x)>0(f'(x)<0)$ при $x<x_0$ и $f'(x)<0\,(f'(x)>0)$ при $x>x_0$, то x_0 – точка локального максимума (минимума).

2) Если x_0– стационарная точка дважды дифференцируемой в окрестности $U_\delta(x_0)$ функции $y=f(x)$, то при $f''(x_0)<0$ в точке x_0 функция имеет локальный максимум, а при $f''(x_0)>0$ в точке x_0 функция имеет локальный минимум.

Пример 1.28. Найти точки локального экстремума функции $y=x^3-3x$.

Решение. Находим производную $y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$. Производная обращается 0 при $x=1$ и $x=-1.$ Так как при $x<-1$ и $x>1$ производная $y'>0$, а при $-1<x<1$ производная $y'<0$, то в точке $x=-1$ функция имеет локальный максимум $y=2$, а в точке $x=1$ функция имеет локальный минимум $y=-2$ (рис. 1.6).

Пример 1.29. Найти точки локального экстремума функции $y=|x-1|$.

Решение. Производная функции не существует в точке $x=1$. Следовательно, эта точка является критической точкой. При $x<1$ имеем $y'=-1$, а при $x>1$, $y'=1$. В точке $x=1$ функция имеет локальный минимум $y=0$ (рис. 1.7).

Пример 1.28. Найти точки экстремума функции $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2$.

Решение. Находим производную $y'=x^3-x$. Приравнивая производную к нулю, находим стационарные точки функции: $x^3-x=0\Rightarrow x_1=-1,\, x_2=0,\, x_3=1.$

Вычисляем вторую производную $y''=3x^2-1$ и находим ее значения в стационарных точках: $y''(-1)=2>0,\;\; y''(0)=-1<0,\;\; y''(1)=2>0.$

Следовательно, при $x=\pm1$ функция имеет локальные минимумы, $y(\pm1)=-\frac{1}{4}$, а при $x=0$ – локальный максимум $y(0)=0$ (рис. 1.8).

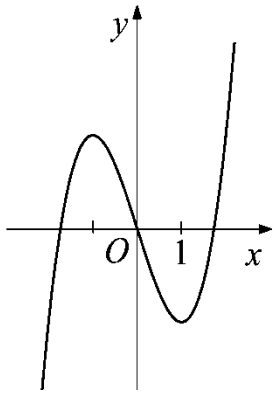


Рис. 1.6

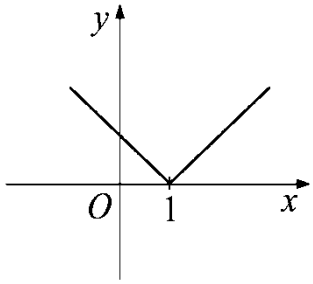


Рис. 1.7

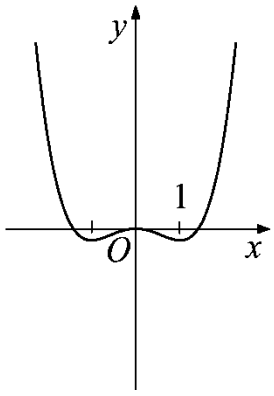


Рис. 1.8

Исследовать на экстремум следующие функции.

1.269. $y = x(x-1)^2(x-2)^3$.

1.270. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$.

1.271. $y = \sqrt[3]{\left(x^2 - 1\right)^2}$.

1.272. $y = x - \ln(1+x)$.

1.273. $y = xe^x$.

1.274. $y = x - \operatorname{arctg} x$.

1.275. $y = x^2 e^{-x}$.

1.276. $y = x \ln^2 x$.

Наибольшее и наименьшее значения функция, непрерывная на данном отрезке, может принимать или в точках локальных экстремумов или на концах отрезка. Для обозначения наибольшего и наименьшего значений функции y на отрезке $[a, b]$ используют обозначения $\max\limits_{x\in[a,\,b]} y$ и $\min\limits_{x\in[a,\,b]} y$ (или $y_{\text{наиб}}$, $y_{\text{наим.}}$).

Пример 1.31. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x + 3$ на отрезке $[-3, 2]$.

Решение. Находим стационарные точки функции:

$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0; \quad x_1 = -1, x_2 = 1.$

Вычисляем значения функции в найденных стационарных точках и на концах отрезка: $y(-1) = 5;\ y(1) = 1;\ y(-3) = -15;\ y(2) = 5$.

Сравнивая эти значения, находим, что наибольшее значение $M = 5$ функция принимает в точках $x = -1$ и $x = 2$, а наименьшее значение $m = -15$ в точке $x = -3$.

Найти наибольшие и наименьшие значения функций на данных отрезках или в области определения.

1.277. $y = 2\sin x + \cos 2x,\ x \in \left[0,\ \pi/2\right]$.

1.278. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1,$ $x \in [-1, 5]$.

1.279. $y=\ln(x^2-2x+2),\ x\in[0,3]$. **1.280.** $y=x+3\sqrt[3]{x},\ x\in[-1,1]$.

1.281. $y=\sqrt{x(10-x)}$. **1.282.** $y=\arccos x$.

1.283. $y=(3-x)e^{-x},\ x\in[0,5]$. **1.284.** $y=\sqrt{x-x^3}$.

1.285. Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилиндрической емкости для хранения пенообразователя, имеющей при заданном объеме наименьшую полную поверхность.

1.286. Под каким углом аварийно-спасательный автомобиль должен свернуть с шоссе, чтобы за наименьшее время достигнуть места пожара, находящегося на расстоянии $d=0{,}5$ км от шоссе. Скорость автомобиля на шоссе $v=100$ км/ч, а вне шоссе – $u=50$ км/ч.

1.287. В смеси метана и кислорода скорость реакции горения $CH_4+2O_2=2H_2O+CO_2$ пропорциональна xy^2, где x и y – концентрации метана и кислорода соответственно. Определить концентрацию метана в воздухе, при которой скорость горения максимальна, считая концентрацию кислорода в воздухе равной 21%.

1.288. Из цилиндров, вписанных в конус радиуса R и высоты H, найти тот, у которого боковая поверхность наибольшая.

1.11. Промежутки выпуклости и вогнутости графика функции

График дифференцируемой функции $y=f(x)$ называется *вогнутым* (или *выпуклым вниз*) на интервале (a,b), если в пределах этого интервала он расположен выше любой своей касательной. График функции называется *выпуклым* (или *выпуклым вверх*), если в пределах рассматриваемого интервала он расположен ниже любой своей касательной.

Точки, отделяющие выпуклые части графика от его вогнутых частей, называются *точками перегиба*.

Если функция $y=f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a,b), то при $f''(x)>0$ график этой функции является вогнутым, а при $f''(x)<0$ – выпуклым. Если $M_0(x_0;\ f(x_0))$– точка перегиба, то $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует.

Достаточное условие перегиба графика функции. Пусть функция $y=f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, возможно, самой точки x_0. Тогда, если при переходе через точку x_0 вторая производная функции меняет знак, то $M_0(x_0;\ f(x_0))$ – точка перегиба графика функции $y=f(x)$.

Пример 1.32. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции $y=\dfrac{1}{1+4x^2}$.

Решение. Находим первую и вторую производные

$$y' = -\frac{8x}{(1+4x^2)^2}, \quad y'' = \frac{96x^2-8}{(1+4x^2)^3}.$$

Решая неравенства $y''>0, y''<0$, находим, что график функции является вогнутым на интервалах $\left(-\infty, -\sqrt{3}/6\right)$, $\left(\sqrt{3}/6, +\infty\right)$ и выпуклым на интервале $\left(-\sqrt{3}/6, \sqrt{3}/6\right)$. Точки $M_1\left(-\sqrt{3}/6; 12/13\right)$ и $M_2\left(\sqrt{3}/6; 12/13\right)$ являются точками перегиба (см. рис. 1.9).

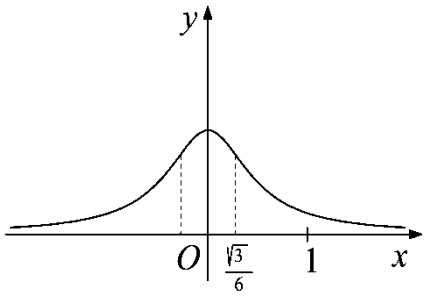


Рис. 1.9

1.289. Найти точку перегиба кривой тепловыделения экзотермической реакции $Q = Ae^{-E/RT}$.

Найти промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба графиков следующих функций.

1.290. $y = (x+1)^4$. **1.291.** $y = \dfrac{x^3}{x^2+12}$. **1.292.** $y = \sqrt[3]{4x^3-12x}$.

1.293. $y = x^2 \ln x$. **1.294.** $y = \operatorname{arctg} x - x$. **1.295.** $y = \left(1+x^2\right)e^x$.

1.12. Асимптоты

Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке a равен бесконечности, т. е. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$.

Пример 1.33. Найти вертикальные асимптоты графика функции $y = \dfrac{1}{x-1}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$, то прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой (см. рис. 1.10).

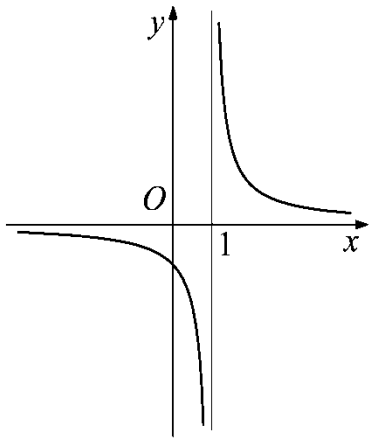


Рис. 1.10

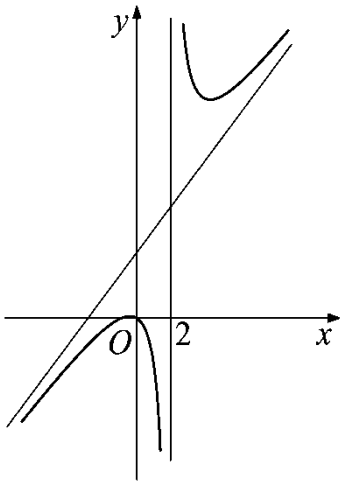


Рис. 1.11

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, если функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.

Для существования наклонных асимптот необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ и } \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Пример 1.34. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2 + x}{x - 2}$.

Решение. График данной функции имеет вертикальную асимптоту $x = 2$, так как $\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{x^2 + x}{x - 2} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{x^2 + x}{x - 2} = +\infty$.

Наклонные асимптоты находим с помощью равенств

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x + 1}{x - 2} = 1 = k,$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} (y - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 + x}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x}{x - 2} = 3 = b.$$

Следовательно, график функции имеет наклонную асимптоту $y = x + 3$ как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$ (см рис. 1.11).

Найти асимптоты графиков указанных функций.

1.296. $y = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$.

1.297. $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

1.298. $y = e^{-x^2} + 2$.

1.299. $y = \dfrac{1}{1 - e^x}$.

1.300. $y = \ln(1+x)$. **1.301*.** $y = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$.

1.13. Построение графиков функций

Исследование функций и построение их графиков целесообразно проводить по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать поведение функции в граничных точках области определения. Определить точки разрыва функции.
3. Проверить функцию на четность, нечетность и периодичность.
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Найти точки пересечения графика с осями координат.
6. Определить промежутки возрастания и убывания функции.
7. Найти точки экстремума и определить значения функции в этих точках.
8. Определить промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба.
9. Построить график функции.

Пример 1.35. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{4-x^2}$ и построить ее график.

Решение.

1. Функция определена на всей числовой оси, за исключением точек $x=-2$ и $x=2$. Таким образом, область определения функции состоит из трех интервалов: $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

2. Исследуем поведение функции в граничных точках области определения:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{4-x^2} = +\infty; \quad \lim_{x\to-2-0} \frac{x^3}{4-x^2} = +\infty; \quad \lim_{x\to-2+0} \frac{x^3}{4-x^2} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to2-0} \frac{x^3}{4-x^2} = +\infty; \quad \lim_{x\to2+0} \frac{x^3}{4-x^2} = -\infty; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{4-x^2} = -\infty.$$

Точками разрыва функции являются точки $x_1 = -2, x_2 = 2$.

3. Функция y – нечетная, так как

$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{4-(-x)^2} = -\frac{x^3}{4-x^2} = -y(x).$$

4. Из результатов исследования поведения функции в точках $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$ ясно, что прямые $x_1 = -2$ и $x_2 = 2$ являются вертикальными асимптотами.

Выясним вопрос о существовании наклонных асимптот. Найдем предел

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{4-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\frac{4}{x^2}-1} = -1,$$

откуда следует, что $k=-1$. Находим b из формулы

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{4-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x}{4-x^2}=0.$$

Таким образом, наклонной асимптотой является прямая $y=-x$, как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$.

5. Единственной точкой пересечения с осями координат является начало координат $O(0,0)$.

6. Определим промежутки возрастания и убывания функции y. Для этого вычислим ее первую производную $y'=x^2(12-x^2)/(4-x^2)^2$, которая обращается в нуль в точках $x=0$ и $x=\pm2\sqrt{3}$. Имея в виду, что функция y и ее первая производная не существуют в точках $x=\pm2$, мы найдем следующие промежутки возрастания и убывания функции:

Интервал	$\left(-\infty,-2\sqrt{3}\right)$	$\left(-2\sqrt{3},-2\right)$	$(-2,2)$	$\left(2,2\sqrt{3}\right)$	$\left(2\sqrt{3},+\infty\right)$
Знак y'	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$
Функция	убывает	возрастает	возрастает	возрастает	убывает

7. Из результатов предыдущего пункта следует, что функция имеет локальный минимум в точке $x_{\min}=-2\sqrt{3}$ и локальный максимум в точке $x_{\max}=2\sqrt{3}$. Значения функции в этих точках равны $y_{\min}=y\left(-2\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}$, $y_{\max}=y\left(2\sqrt{3}\right)=-3\sqrt{3}$.

8. Определим участки выпуклости и вогнутости графика функции y. Для этого вычислим вторую производную $y''=\dfrac{8x(x^2+12)}{(4-x^2)^3}$. Вторая производная обращается в нуль в точке $x=0$ и не существует в точках $x=-2$ и $x=2$. Имеем следующие области сохранения знака y'':

Интервал	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
Знак y''	$+$	$-$	$+$	$-$
График	вогнутый	выпуклый	вогнутый	выпуклый

Точкой перегиба графика является начало координат $O(0,0)$.

График исследуемой функции изображен на рис. 1.12.

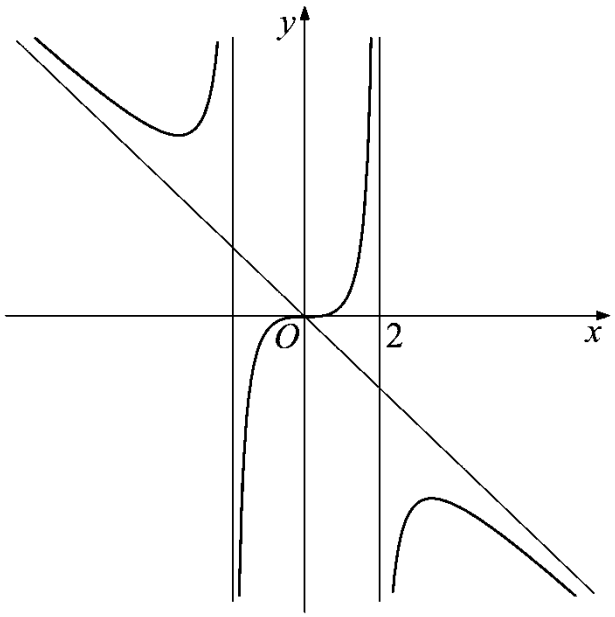


Рис. 1.12

Исследовать функции и построить их графики.

1.302. $y = 3x - x^3$.

1.303. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

1.304. $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$.

1.305. $y = xe^{-x}$.

1.306. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

1.307. $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

1.308. $y = \dfrac{x}{2} + \operatorname{arctg} x$.

1.309. $y = 2|x| - x^2$.

ГЛАВА 2.
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Комплексные числа

Комплексным числом называется выражение $z = a + bi$, где a и b – действительные числа, а $i^2 = -1$. Такая запись называется алгебраической формой комплексного числа z. Действительное число a называют действительной, а b – мнимой частью комплексного числа z и обозначают, соответственно, $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$.

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число $z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$. Произведением двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется комплексное число $z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$. Комплексные числа можно складывать и перемножать как алгебраические двучлены, учитывая, что $i^2 = -1$.

Частным двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называется такое комплексное число z, которое при умножении на z_2 дает z_1. Из этого определения следует выражение для частного

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Пример 2.1. Представить комплексное число $(1+3i)(2-i)^2 + 6i$ в алгебраической форме, выполнив необходимые операции.

Решение. Имеем

$(2-i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 3 - 4i, (1+3i)(2-i)^2 = (1+3i)(3-4i) =$

$= 3 + 5i - 12i^2 = 15 + 5i$, и окончательно $(1+3i)(2-i)^2 + 6i = 15 + 5i + 6i = 15 + 11i$.

Если задано комплексное число $z = a + bi$, то число $\bar{z} = a - bi$ называют *комплексно сопряженным* по отношению к z.

Используя операцию комплексного сопряжения, можно легко получить результат деления одного комплексного числа на другое.

Пример 2.2. Найти $\dfrac{2-3i}{1+2i}$.

Решение. Умножая числитель и знаменатель на комплексно сопряженное к знаменателю число $1-2i$, получим

$$\frac{2-3i}{1+2i} = \frac{(2-3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{2 - 7i + 6i^2}{1 - 4i^2} = \frac{-4-7i}{5} = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5} i.$$

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Модуль числа $z = a + bi$ равен расстоянию $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ от начала координат O до точки $M(a; b)$, изображающей это число.

Произвести указанные действия и представить результат в алгебраической форме.

2.1. $(2 + 3i)(3 - 2i)$.

2.2. $(3 - 2i)^2$.

2.3. $(1 + i)^3$.

2.4. $(a + bi)^3 - (a - bi)^3$.

2.5. $\dfrac{2 + i}{1 - i}$.

2.6. $\dfrac{2i}{1 + i}$.

2.7. $(1 - 2i)(2 + i)^2 + 5i$.

2.8. $(2i - 1)^2 + (1 - 3i)^2$.

2.9. $\dfrac{1}{1 + 4i} + \dfrac{1}{4 - i}$.

2.10. $\dfrac{4 - 3i}{4 + 3i}$.

2.11. $\dfrac{(1 + i)(3 + i)}{3 - i} - \dfrac{(1 - i)(3 - i)}{3 + i}$.

2.12. $\left(\dfrac{1 - i}{1 + i}\right)^3$.

Угол φ между положительным направлением оси Ox и отрезком OM называется *аргументом* комплексного числа, $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Считается, что $\varphi > 0$, если поворот от оси к отрезку OM происходит против часовой стрелки. Для комплексного числа $z = a + bi$ имеем: $a = r\cos\varphi,\ b = r\sin\varphi$, т. е. $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Последнее выражение называется *тригонометрической формой* комплексного числа. Аргумент φ определен неоднозначно, с точностью до слагаемого вида $2\pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Поэтому выбирают $0 \le \varphi < 2\pi$ (или $-\pi < \varphi \le \pi$) и обозначают $\varphi = \arg z$, называя его *главным значением* аргумента.

Пример 2.3. Представить в тригонометрической форме комплексное число $z = -\sqrt{3} - i$.

Решение. Находим модуль и аргумент числа z: $r = |z| = \sqrt{3 + 1} = 2$, $\cos\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \sin\varphi = -\dfrac{1}{2},\ \Rightarrow\ \varphi = \dfrac{7\pi}{6}$. Следовательно, $z = 2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

Используя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, всякое комплексное число можно записать в показательной форме

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi},$$

где $r = |z|, \varphi = \arg z + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Пусть $z_0 = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0) = r_0 e^{i\varphi_0}$ – некоторое комплексное число. Имеется ровно n различных корней степени n из числа z_0:

$$\sqrt[n]{z_0} = \sqrt[n]{r_0}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}\right) = e^{i\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}} = \varepsilon_k,\ \ k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где $\sqrt[n]{r_0}$ – арифметическое (т. е. действительное положительное) значение корня из положительного числа r_0.

Пример 2.4. Найти все значения $\sqrt[3]{-1}$.

Решение. Представим число $\sqrt[3]{-1}$ в тригонометрической форме. Имеем: $|z| = 1, \arg z = \pi$, т. е. $z = \cos\pi + i\sin\pi$. Следовательно,

$$\sqrt[3]{-1} = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3} = \varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2,$$

откуда получаем следующие три значения $\sqrt[3]{-1}$:

$$1)\ \varepsilon_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$2)\ \varepsilon_1 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

$$3)\ \varepsilon_2 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Представить следующие комплексные числа в тригонометрической форме.

2.13. $-i$. **2.14.** $1 - i\sqrt{3}$. **2.15.** $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **2.16.** $\frac{1-i}{1+i}$.

Представить следующие комплексные числа в показательной форме.

2.17. $\frac{7+24i}{5}$. **2.18.** $5 - 12i$. **2.19.** $-3 - 4i$. **2.20.** $-2 + i$.

Найти все значения корней.

2.21. $\sqrt{i}$. **2.22.** $\sqrt[4]{-1}$. **2.23.** $\sqrt[9]{-9}$.

Решить уравнения.

2.24. $z^2 + z + 1 = 0$. **2.25.** $|z| + z = 2 + i$.

2.26. $z^6 + 1 = 0$. **2.27.** $z^2 = i$.

2.2. Неопределенный интеграл

Определение. *Функция* $F(x)$ *называется первообразной для функции* $y = f(x)$ *на интервале* (a, b), *если* $F(x)$ *дифференцируема на этом интервале, и при этом выполняется условие* $F'(x) = f(x)$.

Из этого определения следует, что если $F(x)$ – первообразная, то функция $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, также является первообразной.

Определение. *Совокупность всех первообразных для функции* $f(x)$ *называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается символом* $\int f(x)dx$.

Если $F(x)$ – одна из первообразных функций для функции $y = f(x)$ на интервале (a, b), то

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Свойства неопределенного интеграла.

$$1)\ \left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$$

$$2)\ \int F'(x)dx = F(x) + C,$$

$$3)\ \int \left(af(x) + bg(x)\right)dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx,$$

где a и b – некоторые постоянные.

Таблица основных неопределенных интегралов.

$$1^\circ. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$$

$$2^\circ. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$3^\circ. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1), \quad \int e^x dx = e^x + C.$$

$$4^\circ. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$5^\circ. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$6^\circ. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$7^\circ. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$8^\circ. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$9^\circ. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

$$10^\circ. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

$$11^\circ. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Найти неопределенные интегралы непосредственным интегрированием.

2.28. $\int (6x^2 + 8x + 3)dx$.

2.29. $\int x(x+a)(x+b)dx$.

2.30. $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

2.31. $\int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^2}{\sqrt{ax}} dx$.

2.32. $\int \frac{dx}{x^2 + 7}$.

2.33. $\int \frac{dx}{x^2 - 10}$.

2.34. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}$.

2.35. $\int \frac{dx}{\sqrt{8 - x^2}}$.

2.36. $\int \frac{\sqrt{2 + x^2} - \sqrt{2 - x^2}}{\sqrt{4 - x^2}} dx$.

2.37. $\int \frac{dx}{3x^2 + 5}$.

2.38. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$.

2.39. $\int \frac{dx}{7x^2-8}$.

2.40. $\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}$.

2.41. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}$.

2.3. Замена переменной в неопределенном интеграле

Интегрирование *методом замены переменной* (*методом подстановки*). основывается на формуле

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

где $x=\varphi(t)$ – дифференцируемая функция переменной t. Это равенство может быть переписано также в следующем виде:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))d\varphi(t).$$

Здесь функция $\varphi(t)$ была подведена под знак дифференциала.

На практике, если нужно вычислить интеграл $\int f(x)dx$, часто делают подстановку $t=\psi(x)$.

Пример 2.5. Найти интеграл $\int \sin(2x+1)dx$.

Решение. Сделаем замену переменной $t=2x+1$, тогда $dt=2dx$, и, следовательно,

$$\int \sin(2x+1)dx = \frac{1}{2}\int \sin t dt = -\frac{1}{2}\cos t + C = -\frac{1}{2}\cos(2x+1)+C.$$

Пример 2.6. Найти интеграл $\int \sin^2 x \cos x dx$.

Решение. Подводя $\cos x$ под знак дифференциала, имеем:

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d(\sin x) = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3}+C = \frac{\sin^3 x}{3}+C.$$

Пример 2.7. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

Решение. Для вычисления интеграла сделаем подстановку $e^x+1=t^2$. Тогда имеем $d\left(e^x+1\right)=dt^2$, $e^x dx = 2t\,dt$, $dx=\frac{2t\,dt}{e^x}=\frac{2t\,dt}{t^2-1}$. После замены переменной получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int \frac{2t\,dt}{\left(t^2-1\right)t} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| + C.$$

Найти неопределенные интегралы методом замены переменной.

2.42. $\int \frac{dx}{3-2x}$.

2.43. $\int \left(a+\frac{b}{x-a}\right)^2 dx$.

2.44. $\int \frac{bdy}{\sqrt{1-y}}$.

2.45. $\int \sqrt{a-bx}\,dx$.

2.46. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$.

2.47. $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$.

2.48. $\int \frac{2x-5}{3x^2-2}dx$.

2.49. $\int \frac{2x-3}{5x^2+7}dx$.

2.50. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}}dx$.

2.51. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}dx$.

2.52. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$.

2.53. $\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{4+x^2}dx$.

2.54. $\int 4^{2-3x}dx$.

2.55. $\int \left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)^2 dx$.

2.56. $\int x\cdot 7^{x^2}dx$.

2.57. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$.

2.58. $\int \frac{5^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$.

2.59*. $\int e^x\sqrt{a-be^x}\,dx$.

2.60. $\int (\cos ax+\sin ax)^2 dx$.

2.61. $\int \sin(\lg x)\frac{dx}{x}$.

2.62. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x^2}$.

2.63*. $\int \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

2.64*. $\int \frac{dx}{\sin x\cos x}$.

2.65. $\int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}dx$.

2.66*. $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\sin 2xdx$.

2.67. $\int \frac{1+\sin 3x}{\cos^2 3x}dx$.

2.5. Интегрирование по частям

Если $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – функции от x, имеющие непрерывные производные, то справедлива формула *интегрирования по частям*

$$\int u\,dv = u\,v-\int v\,du.$$

Пример 2.8. Найти интеграл $\int x\cos xdx$.

Решение. Положим $u=x, dv=\cos xdx$, тогда $du=dx, v=\sin x$. Следовательно,

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Пример 2.9. Найти интеграл $\int x\ln x dx$.

Решение. Положим $u = \ln x, dv = xdx$, тогда $du = \frac{dx}{x}, v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$. Следовательно,

$$\int x\ln x dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Найти следующие интегралы методом интегрирования по частям.

2.68. $\int \ln x dx$.

2.69. $\int \arcsin x dx$.

2.70. $\int x\cos 3x dx$.

2.71. $\int 2^{-x} x dx$.

2.72. $\int xe^{2x} dx$.

2.73. $\int x\sin x\cos x dx$.

2.74. $\int x\arcsin x dx$.

2.75*. $\int e^x \sin x dx$.

2.76. $\int 3^x \cos x dx$.

2.77. $\int x\,\mathrm{arctg}\, x dx$.

2.78*. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}$.

2.79*. $\int \left(x^2+2\right)e^{-x} dx$.

2.80*. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x}$.

2.81*. $\int \cos\ln x\,dx$.

2.6. Интегрирование рациональных функций

Рациональной дробью (или *рациональной функцией*) называется функция вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ и $Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m$ – некоторые многочлены степени, соответственно, n и m. Если $n < m$, то рациональная дробь называется правильной. Если $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – неправильная рациональная дробь, т. е. $n \geq m$, то, выполнив деление уголком, получим

$$f(x) = S_{n-m}(x) + \frac{R_l(x)}{Q_m(x)},$$

где $\dfrac{R_l(x)}{Q_m(x)}$ – правильная дробь, а $S_{n-m}(x)$ – многочлен степени $n-m$ (целая часть рациональной дроби).

Пример 2.10. Выделить целую часть дроби $\dfrac{2x^4+x^2-3x+1}{x^2+3}$.

Решение. Выполняя деление, находим

$$\begin{array}{l|l} 2x^4+x^2-3x+1 & x^2+3 \\ \hline -\underline{2x^4+6x^2} & 2x^2-5 \\ \quad -5x^2-3x+1 & \\ -\underline{-5x^2-15} & \\ \qquad\quad -3x+16 & \end{array}$$

Таким образом, мы получили частное $S_2=2x^2-5$ и остаток $R_1=-3x+16$,

$$\frac{2x^4+x^2-3x+1}{x^2+3}=2x^2-5+\frac{-3x+16}{x^2+3}.$$

Пусть $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ – правильная рациональная дробь, $P_n(x), Q_m(x)-$ многочлены с действительными коэффициентами. Знаменатель $Q_m(x)$ всегда можно разложить на множители

$$Q_m(x)=(x-a)^{\alpha}\ldots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\ldots(x^2+rx+s)^{\mu},$$

где многочлены $x^2+px+q,\ldots,x^2+rx+s$ не имеют действительных корней.

Тогда дробь $R(x)$ можно представить в виде следующей суммы простейших дробей:

$$R(x)=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}}+\ldots+$$
$$+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_{\beta}}{(x-b)^{\beta}}+$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_{\lambda}x+N_{\lambda}}{(x^2+px+q)^{\lambda}}+\ldots+$$
$$+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2}+\ldots+\frac{R_{\mu}x+S_{\mu}}{(x^2+rx+s)^{\mu}}.$$

Коэффициенты разложения $A_1,\ldots,A_{\alpha},\ldots,B_1,\ldots,B_{\beta},M_1,N_1,\ldots,M_{\lambda},N_{\lambda},\ldots,$ $R_1,S_1,\ldots,R_{\mu},S_{\mu}$ получаются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x у многочлена $P_n(x)$ и многочлена, который

получается в числителе правой части равенства после приведения ее к общему знаменателю. Такой подход называется *методом неопределенных коэффициентов.*

Пример 2.11. Разложить на сумму простейших дробей функцию

$$R(x)=\frac{(x-2)^2}{x(x+1)^2}.$$

Решение. Искомое разложение имеет вид

$$\frac{(x-2)^2}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}. \qquad (2.1)$$

Приводя правую часть равенства (2.1) к общему знаменателю, получим

$$\frac{(x-2)^2}{x(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+B_1x(x+1)+B_2x}{x(x+1)^2}.$$

Приравнивая числители двух дробей с одинаковыми знаменателями, получим равенство

$$x^2-4x+4=(A+B_1)x^2+(2A+B_1+B_2)x+A.$$

Сравнивая в этом равенстве коэффициенты при одинаковых степенях x, придем к системе уравнений

$$\begin{cases} A+B_1=1, \\ 2A+B_1+B_2=4, \\ A=4. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Из системы (2.2) находим $A=4, B_1=-3, B_2=-9$. Таким образом,

$$\frac{(x-2)^2}{x(x+1)^2}=\frac{4}{x}-\frac{3}{x+1}-\frac{9}{(x+1)^2}.$$

Систему уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов можно получить и другим способом, придавая переменной x ряд конкретных значений (столько, сколько имеется неопределенных коэффициентов). Такой метод называется *методом произвольных значений.*

Пример 2.12. Разложить на простейшие дроби функцию

$$\frac{x}{(x^2+2x+2)(x-1)(x+3)}.$$

Решение. Разложение имеет вид

$$\frac{x}{(x^2+2x+2)(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{Mx+N}{x^2+2x+2}. \qquad (2.3)$$

Приводя правую часть равенства (2.3) к общему знаменателю и приравнивая числители левой и правой частей, получим

$$x=A(x+3)(x^2+2x+2)+B(x-1)(x^2+2x+2)+(Mx+N)(x-1)(x+3).$$

Подставляя в последнее равенство последовательно $x=1, x=-3, x=0,$ $x=-1$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 20A=1, \\ 20B=3, \\ 6A-2B-3N=0, \\ 2A-2B+4M-4N=-1, \end{cases}$$

откуда

$$A=\frac{1}{20}, B=\frac{3}{20}, M=-\frac{1}{5}, N=0.$$

Следовательно,

$$\frac{x}{(x^2+2x+2)(x-1)(x+3)}=\frac{1}{20(x-1)}+\frac{3}{20(x+3)}-\frac{x}{5(x^2+2x+2)}.$$

Интегрирование любой рациональной функции сводится к вычислению интеграла от некоторого многочлена и интегралов следующего вида:

$$1)\int\frac{Adx}{x-a},\ 2)\int\frac{Adx}{(x-a)^k},\ 3)\int\frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q},\ 4)\int\frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^l}, \qquad (2.4)$$

где $k,l>1$. Первые два интеграла в (2.4) вычисляются при помощи подстановки $t=x-a, dt=dx$:

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{dt}{t}=A\ln|t|+C=A\ln|x-a|+C,$$

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int t^{-k}dt=\frac{A}{1-k}t^{1-k}+C=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C, k>1.$$

При вычислении интеграла третьего вида удобно явным образом выделить в числителе дифференциал знаменателя $d(x^2+px+q)=(2x+p)dx$:

$$\int\frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q}=\int\frac{\frac{M}{2}(2x+p)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)}{x^2+px+q}dx=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

Пример 2.13. Найти интеграл $\int \frac{(x-1)dx}{x^2+x+1}$.

Решение. Дифференциал знаменателя подынтегрального выражения равен $d(x^2+x+1)=(2x+1)dx$. Следовательно,

$$\int \frac{(x-1)dx}{x^2+x+1} = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{3}{2}}{x^2+x+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} - \frac{3}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Можно показать, что интеграл четвертого вида в (2.4) также может быть выражен через элементарные функции. Интеграл от любой рациональной функции путем выделения целой части и разложения на простейшие дроби приводится к сумме интеграла от некоторого многочлена и интегралов вида (2.4).

Пример 2.14. Найти интеграл $\int \frac{x^4+x^2+1}{x^3-x}dx$.

Решение. Так как дробь, входящая в подынтегральное выражение, – неправильная, то вначале следует выполнить деление:

$$\begin{array}{r|l} x^4+x^2+1 & x^3-x \\ \cline{2-2} -\underline{x^4-x^2} & x \\ 2x^2+1 & \end{array}$$

Следовательно, $\int \frac{x^4+x^2+1}{x^3-x}dx = \int xdx + \int \frac{2x^2+1}{x^3-x}dx.$

Представим дробь, входящую во второй интеграл, в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{2x^2+1}{x^3-x} = \frac{2x^2+1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Приводя дроби к общему знаменателю и сравнивая числители, получим

$$2x^2+1 = A(x^2-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1).$$

Коэффициенты A, B и C найдем с помощью метода произвольных значений.

При $x=0$ получим $A=-1$.

При $x=1$ получим $2B=3$, откуда $B=\frac{3}{2}$.

При $x=-1$ получим $2C=3$, откуда $C=\frac{3}{2}$.

Таким образом,

$$\int \frac{x^4+x^2+1}{x^3-x}dx = \int xdx - \int \frac{dx}{x} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln|x+1| + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x^2-1| + C.$$

Найти следующие неопределенные интегралы.

2.82. $\int \frac{2x+3}{x+2}dx$.

2.83*. $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$.

2.84. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$.

2.85. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$.

2.86. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$.

2.87*. $\int \frac{x^4}{x^4-1}dx$.

2.88*. $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx$.

2.89. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

2.90. $\int \frac{dx}{x^2+2x}$.

2.91. $\int \frac{dx}{3x^2-x+1}$.

2.92. $\int \frac{xdx}{x^2-7x+13}$.

2.93. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx$.

2.94. $\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}dx$.

2.95. $\int \frac{x^2}{x^2-6x+10}dx$.

2.96. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$.

2.97*. $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$.

2.7. Интегрирование иррациональных функций

Интегралы вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}\right)dx,$$

где $R(x,u,...,v)$ – рациональная функция своих аргументов, а $m,n,...,p,q$ – целые числа, сводятся к интегралу от рациональной функции при помощи подстановки

$$t=\sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}},\quad \frac{ax+b}{cx+d}=t^s,$$

где s – наименьшее общее кратное чисел $n,...,q$.

Пример 2.15. Найти интеграл $I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}-\sqrt{2x+3}}$.

Решение. Произведем замену $t=\sqrt[6]{2x+3}$. Тогда $x=(t^6-3)/2$, $dx=3t^5dt$, следовательно,

$$I=\int\frac{3t^5dt}{t^4-t^3}=3\int\frac{t^2dt}{t-1}=3\int(t+1)dt+3\int\frac{dt}{t-1}=$$

$$=3\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C=$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+3}+3\sqrt[6]{2x+3}+3\ln|\sqrt[6]{2x+3}-1|+C.$$

Найти следующие неопределенные интегралы:

2.98. $\int\frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$.

2.99. $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{ax+b}}$.

2.100. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

2.101. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

2.102*. $\int\frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$.

2.103*. $\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

2.104*. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$.

2.105. $\int\frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}dx$.

2.106*. $\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$.

2.107. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x-2}}$.

Нахождение интегралов вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ сводится к нахождению интегралов от рациональных функций с помощью подстановок Эйлера. Если квадратный трехчлен ax^2+bx+c не имеет действительных корней, то $a>0$. В этом случае можно сделать подстановку

$t=\sqrt{ax^2+bx+c}\pm\sqrt{a}x$. При $a<0, c>0$ можно сделать подстановку $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$.

Пример 2.16. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2+4}}$.

Решение. Положим $t-x=\sqrt{x^2+4}$. Возводя обе части этого равенства в квадрат и упрощая, получим:

$$t^2-2tx=4\Rightarrow x=\frac{t^2-4}{2t},\ dx=\frac{t^2+4}{2t^2}dt,\ \frac{1}{x-\sqrt{x^2+4}}=-\frac{t}{4}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2+4}}=-\frac{1}{8}\int\frac{(t^2+4)dt}{t}=-\frac{1}{8}\left(\int tdt+4\int\frac{dt}{t}\right)=$$

$$=-\frac{t^2}{16}-\frac{\ln|t|}{2}+C=-\frac{1}{16}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)^2-\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|+C.$$

Если квадратный трехчлен имеет действительные корни α и β, он может быть представлен в виде $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$. В этом случае для нахождения интеграла применяется вторая подстановка Эйлера $t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-\alpha}$.

Пример 2.17. Найти интеграл $\int\frac{dx}{(x+4)^2\sqrt{x^2+3x-4}}$.

Решение. Так как $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$, то сделаем подстановку

$$t=\frac{\sqrt{(x+4)(x-1)}}{x+4}.$$

Отсюда находим, что

$$x=\frac{1+4t^2}{1-t^2},\ dx=\frac{10tdt}{(1-t^2)^2},\ x+4=\frac{5}{1-t^2},\ \sqrt{x^2+3x-4}=\frac{5t}{1-t^2}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{(x+4)^2\sqrt{x^2+3x-4}}=\int\frac{10tdt}{(1-t^2)^2\left(\frac{5}{1-t^2}\right)^2\frac{5t}{1-t^2}}=\frac{2}{25}\int(1-t^2)dt=$$

$$=\frac{2}{25}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)+C=\frac{2}{25}\left[\left(\frac{x-1}{x+4}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]+C.$$

Укажем простейшие случаи, когда интегралы, содержащие корень из квадратного трехчлена, можно вычислить без использования подстановок Эйлера.

Интеграл вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ сводится к табличному интегралу путем выделения полного квадрата по формуле $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}\right]$ с последующей подстановкой $t=x+\frac{b}{2a}$

.

Пример 2.18. Найти интеграл $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x-2x^2}}$.

Решение. Выделяем полный квадрат:

$$x-2x^2=-2\left(x^2-\frac{x}{2}\right)=-2\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]=2\left[\frac{1}{16}-\left(x-\frac{1}{4}\right)^2\right].$$

Применяя подстановку $t=x-\frac{1}{4}, dt=dx$, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2-t^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin 4t+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(4x-1)+C.$$

Интеграл вида $\int \frac{(Mx+N)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ преобразуется следующим образом: в числителе выделяют дифференциал подкоренного выражения знаменателя, после чего интеграл приводится к табличным интегралам.

Пример 2.19. Найти интеграл $I=\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{x^2+4x+2}}$.

Решение. Находим дифференциал подкоренного выражения $d(x^2+4x+2)=(2x+4)dx$. Следовательно,

$$I=\int \frac{2x+4-3}{\sqrt{x^2+4x+2}}dx=\int \frac{d(x^2+4x+2)}{\sqrt{x^2+4x+2}}-3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+2}}.$$

В первом из полученных интегралов делаем подстановку $t=x^2+4x+2$; во втором выделяем полный квадрат подкоренного выражения по формуле $x^2+4x+2=(x+2)^2-2$ и делаем подстановку $u=x+2, du=dx$. Таким образом, получим

$$\int \frac{d(x^2+4x+2)}{\sqrt{x^2+4x+2}}=\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{x^2+4x+2}+C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+2}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2-2}} = \ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+2}|+C.$$

Окончательно находим:

$$I = 2\sqrt{x^2+4x+2} - 3\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+2}|+C.$$

Интеграл вида $\int \frac{dx}{(mx+n)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $r=1,2$ с помощью подстановки $t=\frac{1}{mx+n}$ приводится к рассмотренным ранее видам интегралов.

Пример 2.20. Найти интеграл $I=\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Решение. Произведем подстановку $t=\frac{1}{x+2}$, $x=\frac{1}{t}-2$, $dx=-\frac{dt}{t^2}$, тогда

$$I=-\int \frac{tdt}{t^2\sqrt{\left(\frac{1}{t}-2\right)^2+2\left(\frac{1}{t}-2\right)+2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{2t^2-2t+1}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+\frac{1}{2}}\right|+C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{-x+\sqrt{2(x^2+2x+2)}}{2(x+2)}\right|+C.$$

При нахождении интегралов вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ бывает удобно перейти к интегралам от тригонометрических функций. Для этого в подкоренном выражении выделяют полный квадрат и вводят новую переменную $u=x+\frac{b}{2a}$. В результате получается один из интегралов вида

$$I_1=\int R(u,\sqrt{k^2-u^2})du,\ I_2=\int R(u,\sqrt{k^2+u^2})du,$$

$$I_3=\int R(u,\sqrt{u^2-k^2})du,$$

который можно вычислить при помощи одной из следующих подстановок:

$$I_1: \quad u = k\sin t,\ du = k\cos t dt,\ \sqrt{k^2 - u^2} = k\cos t;$$

$$I_2: \quad u = k\,\mathrm{tg}\, t,\ du = \frac{k}{\cos^2 t}dt,\ \sqrt{k^2 + u^2} = \frac{k}{\cos t};$$

$$I_3: \quad u = \frac{k}{\cos t},\ du = \frac{\sin t}{\cos^2 t}dt,\ \sqrt{u^2 - k^2} = k\,\mathrm{tg}\, t.$$

Пример 2.21. Найти интеграл $I = \int \sqrt{-x^2 + 2x + 3}dx$.

Решение. Выделим полный квадрат из подкоренного выражения:

$$-x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4.$$

Введем теперь новую переменную $u = x - 1, du = dx$, тогда $I = \int \sqrt{4 - u^2}du.$

Произведя подстановку $u = 2\sin t, du = 2\cos t\, dt, \sqrt{4 - u^2} = 2\cos t,$ получим

$$I = 4\int \cos^2 t dt = 2\int (1 + \cos 2t)dt = 2t + \sin 2t + C.$$

Теперь, учитывая, что $t = \arcsin\frac{u}{2} = \arcsin\frac{x-1}{2}$, а $\sin 2t = 2\sin t\cos t =$ $= \frac{1}{2}u\sqrt{4 - u^2} = \frac{x-1}{2}\sqrt{-x^2 + 2x + 3}$, найдем

$$I = 2\arcsin\frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{2}\sqrt{-x^2 + 2x + 3} + C.$$

Найти следующие неопределенные интегралы.

2.108. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3x - 2x^2}}$.

2.109. $\int \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$.

2.110. $\int \frac{3x - 6}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}dx$.

2.111. $\int \frac{2x - 1}{\sqrt{4x^2 + 4x + 2}}dx$.

2.112*. $\int \frac{2x - 8}{\sqrt{1 - x - x^2}}dx$.

2.113*. $\int \frac{x + 3}{\sqrt{3 + 4x - 4x^2}}dx$.

2.114. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - x^2}}$.

2.115. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x - 1}}$.

2.116. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - 2}}$.

2.117. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + 2x}}$.

2.118*. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - 1}}$.

2.119. $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5}\,dx$.

2.120*. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}dx$. **2.121*.** $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

2.122. $\int \sqrt{3+4x-4x^2}\,dx$. **2.123.** $\int \sqrt{4x^2+4x-3}\,dx$.

2.8. Интегрирование тригонометрических выражений

Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$, если хотя бы одно из чисел m или n является нечетным положительным, находят с помощью подведения соответствующей тригонометрической функции под знак дифференциала.

Пример 2.22. Найти интеграл $\int \sin^3 x\sqrt{\cos x}dx$.

Решение.

$$\int \sin^3 x\sqrt{\cos x}\,dx = \int \sin^2 x\sqrt{\cos x}\sin x\,dx = -\int (1-\cos^2 x)\sqrt{\cos x}\,d\cos x =$$

$$= -\int \cos^{1/2} x\,d\cos x + \int \cos^{5/2} x\,d\cos x = -\frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x} + \frac{2}{7}\sqrt{\cos^7 x} + C.$$

Если m и n четные, то целесообразно применять формулы понижения степени $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, $\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$.

Пример 2.23.

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 2x\,d(2x) =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Интегралы вида $\int \sin ax\cos bx\,dx, \int \cos ax\cos bx\,dx, \int \sin ax\sin bx\,dx$, где $a \neq b$, находятся с помощью тригонометрических формул

$$\sin ax\cos bx = \tfrac{1}{2}[\sin(a-b)x + \sin(a+b)x],$$

$$\cos ax\cos bx = \tfrac{1}{2}[\cos(a-b)x + \cos(a+b)x],$$

$$\sin ax\sin bx = \tfrac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x].$$

Пример 2.24. $\int \sin 5x\sin 7x\,dx = \int \frac{1}{2}[\cos 2x - \cos 12x]dx =$

$$= \frac{1}{4}\int \cos 2x\,d(2x) - \frac{1}{24}\int \cos 12x\,d(12x) = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin 12x + C.$$

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx.$ приводятся к интегралам от рациональной функции при помощи универсальной подстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. При этом используются формулы: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Пример 2.25. Найти интеграл $I = \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

Решение. Применяя универсальную тригонометрическую подстановку, будем иметь:

$$I = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = 2\int \frac{dt}{1+2t-t^2} = -2\int \frac{dt}{(t-1)^2 - 2}.$$

Полагая в последнем интеграле $t-1 = u, dt = du$, получим

$$I = -2\int \frac{du}{u^2-2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right| + C = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}}\right| + C.$$

Если подынтегральная функция удовлетворяет равенству $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то можно применить подстановку $t = \cos x$. При выполнении равенства $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ можно использовать подстановку $t = \sin x$. Если справедливо равенство $R(-\sin x, -\cos x) = \quad = R(\sin x, \cos x)$, то приведение к интегралу от рациональной функции достигается с помощью подстановки $t = \operatorname{tg} x$.

Пример 2.26. Найти интеграл $\int \frac{(\sin x + 1)dx}{\cos x(\sin x + 2)}$.

Решение. В данном случае подынтегральная функция меняет знак при замене $\cos x$ на $-\cos x$. Производя замену $t = \sin x$, найдем $dt = \cos x\, dx$ и $\frac{dx}{\cos x} = \frac{dt}{1-t^2}$, поэтому

$$\int \frac{(\sin x + 1)dx}{\cos x(\sin x + 2)} = \int \frac{(t+1)dt}{(1-t^2)(t+2)} = \int \frac{dt}{(1-t)(t+2)} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+2} - \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t-1} = \frac{1}{3}\ln|t+2| - \frac{1}{3}\ln|t-1| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sin x + 2}{\sin x - 1}\right| + C.$$

Пример 2.27. Найти интеграл $I = \int \frac{dx}{1 - 5\sin^2 x}$.

Решение. Полагаем $t = \operatorname{tg} x$. Тогда $x = \operatorname{arctg} t, dx = \frac{dt}{1+t^2}$ и $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$. Следовательно,

$$I=\int\frac{dt}{(1+t^2)\left(1-5\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)}=-\int\frac{dt}{4t^2-1}=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2t-1}{2t+1}\right|+C=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}x-1}{2\operatorname{tg}x+1}\right|+C.$$

Найти следующие неопределенные интегралы.

2.124. $\int\cos^3 x\,dx$.

2.125. $\int\sin^5 x\,dx$.

2.126. $\int\sin^2 x\cos^3 x\,dx$.

2.127. $\int\sin^4 x\,dx$.

2.128. $\int\sin^2 x\cos^2 x\,dx$.

2.129. $\int\sin 3x\cos 5x\,dx$.

2.130. $\int\sin 10x\sin 15x\,dx$.

2.131. $\int\cos(ax+b)\cos(ax-b)dx$.

2.132. $\int\sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}dx$.

2.133. $\int\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}dx$.

2.134. $\int\sin^2 3x\,dx$.

2.135. $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$.

2.136. $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$.

2.137*. $\int\frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx$.

2.138*. $\int\frac{dx}{\sin x}$.

2.139. $\int\frac{dx}{3+5\cos x}$.

2.140*. $\int\frac{\cos x}{1+\cos x}dx$.

2.141*. $\int\frac{\sin x}{1-\sin x}dx$.

2.142. $\int\frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

2.143. $\int\frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$.

ГЛАВА 3.
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

3.1. Свойства определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$, и произведено разбиение этого отрезка на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. *Интегральной суммой* функции $f(x)$ называется сумма вида

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Обозначим $\lambda = \max\limits_i \{\Delta x_i\}$

Число S называется пределом интегральных сумм σ_n при $\lambda \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любого разбиения при $\lambda < \delta$ выполняется неравенство $|\sigma_n - S| < \varepsilon$.

Определение. *Если существует конечный предел интегральных сумм σ_n при $\lambda \to 0$, не зависящий от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части и выбора точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$, а сам предел называется определенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается* $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Геометрически, определенный интеграл от непрерывной функции $f(x) \geq 0$ ра-вен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью абсцисс (рис.3.1).

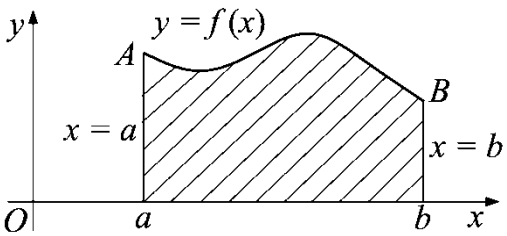


Рис. 3.1

Определенный интеграл обладает следующими свойствами.

1. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$

2. $\int\limits_a^b dx = b - a.$

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$

4. $\int\limits_a^b A f(x)dx = A\int\limits_a^b f(x)dx$, где A – постоянная.

5. $\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx.$

6. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$ при $a < c < b$.

7. $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq 0$ при $a < b,\ f(x) \geq 0$.

8. $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a),\ \xi \in (a,b)$ – теорема о среднем значении.

Если $F(x)$ – любая первообразная для функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, то справедлива *формула Ньютона – Лейбница*:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 3.1. Вычислить $\int\limits_1^2 (1-2x+3x^2)dx$.

Решение. Применяя формулу Ньютона – Лейбница, получим

$$\int\limits_1^2 (1-2x+3x^2)dx = \left(x - x^2 + x^3\right)\Big|_1^2 = \left(2-4+8\right) - \left(1-1+1\right) = 5.$$

Пример 3.2. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx$.

Решение. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/2} = 1.$

Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить интегралы.

3.1. $\int\limits_{-1}^2 x^2 dx$. **3.2.** $\int\limits_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. **3.3.** $\int\limits_1^4 \sqrt{x}dx$.

3.4. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{2x-1}$. **3.5.** $\int\limits_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}dx$. **3.6.** $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin x\,dx$.

3.7. $\int\limits_0^{\pi/4} \sin^2\varphi\, d\varphi$. **3.8.** $\int\limits_0^1 e^{-x}dx$. **3.9.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

3.10. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$. **3.11.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$. **3.12*.** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$.

3.2. Замена переменной в определенном интеграле

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция $x=\varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$, причем $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример 3.3. Вычислить интеграл $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+2}$.

Решение. Произведем замену переменной $x=t^2, dx=2tdt$, полагая $t\ge 0$. Так как $t=0$ при $x=0$ и $t=2$ при $x=4$, то

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+2}=\int_0^2 \frac{2tdt}{t+2}=2\int_0^2\left(1-\frac{2}{t+2}\right)dt=$$
$$=2(t-2\ln|t+2|)\Big|_0^2=4(1-\ln 2).$$

Пример 3.4. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x+2}$.

Решение. Применяя универсальную тригонометрическую подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, получим

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x+2}=\left|\begin{array}{c} x=2\operatorname{arctg}t,\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2},\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ x=0\Rightarrow t=0,\ x=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow t=1 \end{array}\right|=$$

$$=\int_0^1 \frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+2\right)}=2\int_0^1\frac{dt}{t^2+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Вычислить интегралы с помощью подходящей замены переменной.

3.13. $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}dx$. **3.14.** $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$. **3.15.** $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.

3.16. $\int_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$. **3.17.** $\int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$. **3.18.** $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

3.19. $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$. **3.20.** $\int_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x\sqrt{e^x-2}}{e^x+2}dx$. **3.21.** $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$.

3.22. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi \, d\varphi$. **3.23.** $\int\limits_0^{\pi/4} \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) dx$. **3.24.** $\int\limits_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx$.

3.25. $\int\limits_0^4 \sqrt{4x - x^2}\,dx$. **3.26.** $\int\limits_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt{(x+3)^2}}$. **3.27.** $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin t}$.

3.28. $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$. **3.29.** $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{3 - 2x - x^2}\,dx$. **3.30.** $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x + 3}$.

3.31. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{1 + 2\sin^2 x}$. **3.32*.** $\int\limits_{2/\sqrt{3}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. **3.33.** $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$.

3.34. $\int\limits_1^2 \frac{e^{1/x^2}}{x^3}\,dx$. **3.35*.** $\int\limits_0^1 \frac{x^2 dx}{1 + x^6}$. **3.36.** $\int\limits_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}$.

3.3. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$, то справедлива *формула интегрирования по частям*

$$\int\limits_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du.$$

Пример 3.5. Вычислить интеграл $\int\limits_1^e x \ln x dx$.

Решение. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int\limits_1^e x\ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x,\ du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = xdx,\ v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int\limits_1^e xdx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

Вычислить интегралы методом интегрирования по частям.

3.37. $\int\limits_0^1 xe^x dx$. **3.38.** $\int\limits_1^e \ln x\,dx$. **3.39.** $\int\limits_0^{\pi/4} x^2 \cos 2x\,dx$.

3.40. $\int\limits_1^e x^2 \ln x\,dx$. **3.41.** $\int\limits_1^e \ln^2 x\,dx$. **3.42.** $\int\limits_0^{\pi/2} x\sin 2x\,dx$.

3.43. $\int\limits_0^{2\pi} x\cos^2 x\,dx$. **3.44.** $\int\limits_0^{\pi/2} \varphi\cos\varphi\,d\varphi$. **3.45.** $\int\limits_0^1 \arccos x\,dx$.

3.46*. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{xdx}{\cos^2 x}$. **3.47.** $\int\limits_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$. **3.48*.** $\int\limits_0^{\pi/2} e^x \cos x\,dx$.

3.49. $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$. **3.50.** $\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx$. **3.51.** $\int\limits_{1/2}^1 \arcsin(1-x)\,dx$.

3.52. $\int\limits_0^{\pi/2} t^2 \sin t\,dt$. **3.53*.** $\int\limits_0^1 \mathrm{arctg}\sqrt{x}\,dx$. **3.54*.** $\int\limits_0^1 \arcsin\sqrt{x}\,dx$.

3.4. Приложения определенного интеграла

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком неотрицательной функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$ (см. рис. 3.1), вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b ydx.$$

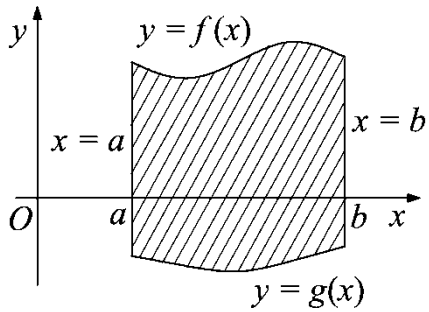


Рис. 3.2

Площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = a, x = b$ и кривыми $y = f(x), y = g(x)$ при условии $f(x) \geq g(x)$ (рис. 3.2), находится по формуле

$$S = \int\limits_a^b [f(x) - g(x)]dx. \qquad (3.1)$$

Пример 3.6. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 2x + 1$ (рис. 3.3).

Решение. Площадь может быть вычислена по формуле (3.1), где в данном случае $f(x) = 4 - x^2, g(x) = 2x + 1$:

$$S = \int\limits_{x_1}^{x_2} [(4 - x^2) - (2x + 1)]dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} (3 - 2x - x^2)dx.$$

Для определения пределов интегрирова-ния необходимо найти точки пересечения кри-вых, т. е. решить систему уравнений

$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0,$$

откуда находим $x_1 = -3, x_2 = 1$. Следовательно,

$$S = \int_{-3}^{1} (3 - 2x - x^2)dx =$$

$$= \left(3x - \frac{x^3}{3} - x^2 \right)\Bigg|_{-3}^{1} = \frac{32}{3}.$$

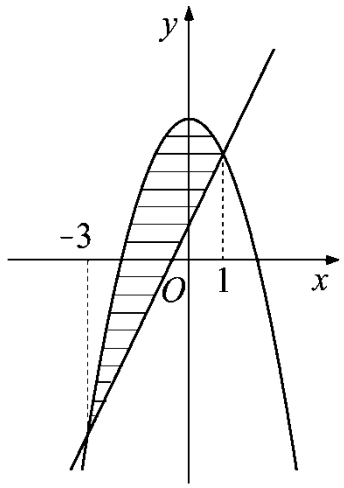


Рис 3.3

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $x = \varphi(y), x = \psi(y)\ (\varphi(y) \geq \psi(y))$ и прямыми $y = c, y = d$ (см. рис. 3.4), равна

$$S = \int_{c}^{d} [\varphi(y) - \psi(y)]dy. \qquad (3.2)$$

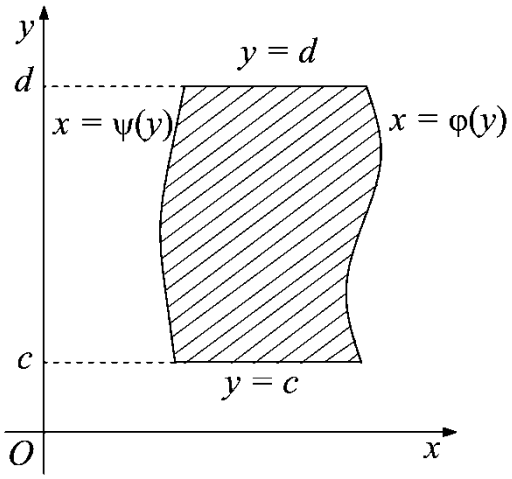


Рис. 3.4

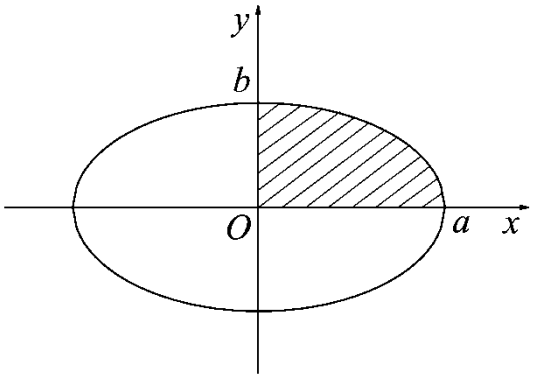


Рис. 3.5

Если плоская фигура ограничена кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t), t_1 \leq t \leq t_2$, то ее площадь определяется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt, \qquad (3.3)$$

где пределы интегрирования находятся из уравнений $x(t_1) = a, x(t_2) = b$.

Пример 3.7. Найти площадь, ограниченную эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t, 0 \le t < 2\pi$.

Решение. Площадь эллипса равна учетверенной площади его части, заштрихованной на рис. 3.5. Имеем $x = 0$ при $t = \frac{\pi}{2}$ и $x = a$ при $t = 0$. Следовательно, по формуле (3.3) получим

$$S = 4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = -2ab\int_{\pi/2}^{0}(1-\cos 2t)dt =$$

$$= -2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{\pi/2}^{0} = \pi ab.$$

В полярных координатах площадь фигуры, ограниченной графиком функции $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, (площадь криволинейного сектора) вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi. \qquad (3.4)$$

Пример 3.8. Найти площадь лунки, ограниченной окружностями $r = 2\cos\varphi, r = 2\sin\varphi$ (рис. 3.6).

Решение. Находим точку пересечения окружностей из уравнения $2\cos\varphi = \ = 2\sin\varphi \Rightarrow \mathrm{tg}\varphi = 1, \varphi = \frac{\pi}{4}$. Так как фигура симметрична относительно луча $\varphi = \frac{\pi}{4}$, то площадь лунки равна

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/4}(2\sin\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= 2\int_{0}^{\pi/4}(1-\cos 2\varphi)d\varphi =$$

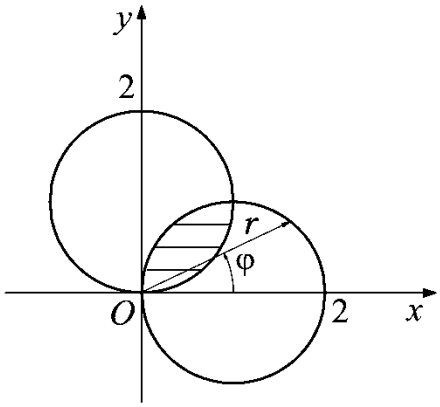


Рис. 3.6

$$= 2\int_{0}^{\pi/4} d\varphi - 2\int_{0}^{\pi/4}\cos 2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2} - \sin 2\varphi\Big|_{0}^{\pi/4} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Найти площади фигур, ограниченных линиями, заданными в прямоугольных координатах.

3.55. $y = x^2, y = 2.$

3.56. $y = x^2 + 1, x + y - 3 = 0.$

3.57. $xy = 6, x + y = 7.$

3.58. $y = \sqrt{x}, y = 6 - x, x = 0.$

3.59. $x^2 - 4x + y = 0, y = 0.$

3.60. $y = \sin x, y = 0\ (0 \le x \le \pi).$

3.61. $y^2 = 4x,\ x^2 = 4y.$

3.62. $y = \ln x,\ x = e,\ x = e^2,\ y = 0.$

3.63. $y - x^2 = 0,\ y - x = 0.$

3.64*. $(x-1)(y+2) = 2,\ x + y = 2.$

3.65. $y = \dfrac{x^2}{3},\ y = 4 - \dfrac{2}{3}x^2.$

3.66*. $x^2 + y^2 = 8,\ y = x,\ y = \sqrt{3}x$ $(x > 0,\ y > 0).$

3.67. $x = y^2 + 2y - 3,\ x = 0.$

3.68. $x = y^2 + 1,\ x = y + 3.$

Найти площади фигур, ограниченных линиями, заданными параметрически.

3.69. $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t.$

3.70. $x = 2t - t^2,\ y = 2t^2 - t^3.$

3.71*. $x = 2(t - \sin t),\ y = 2(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ и $y = 0.$

Найти площади фигур, ограниченных линиями, заданными в полярных координатах.

3.72. $r = 2(1 + \cos\varphi).$

3.73. $r = \cos 3\varphi.$

3.74*. $r^2 = 4\cos 2\varphi.$

3.75*. $r = 4\sin^2\varphi$ $(0 \le \varphi \le \pi).$

3.76. $r = a\sin 2\varphi.$

3.77*. $r^2 = a^2\sin 2\varphi.$

3.78. $r = 2 - \cos\varphi.$

3.79. $r = e^{\varphi}$ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$ и $\varphi = 0.$

Если кривая является графиком функции $y = y(x)$, имеющей на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную $y'(x)$, то длина дуги кривой определяется формулой

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx. \qquad (3.5)$$

Пример 3.9. Найти длину дуги кривой $y = x\sqrt{x}$ от начала координат до точки $A(4; 8)$.

Решение. Для определения длины дуги применим формулу (3.5). Так как $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, то

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\, dx = \frac{1}{18}\int_0^4 \sqrt{9x + 4}\, d(9x + 4) =$$

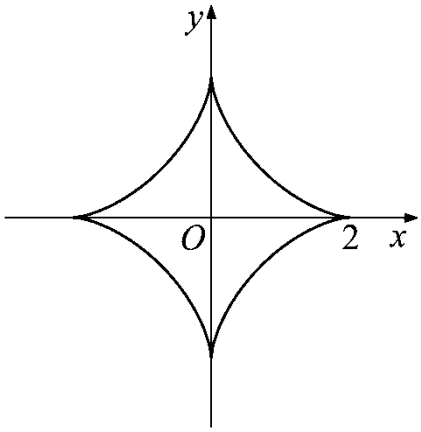
$$= \frac{1}{27}(9x + 4)^{3/2}\Big|_0^4 = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1).$$

Длина дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t), t \in [t_1, t_2]$:

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt. \qquad (3.6)$$

Пример 3.10. Найти длину астроиды, заданной уравнениями $x=2\cos^3 t, y=2\sin^3 t$ (рис. 3.7).

Решение. Находим производные $x'=-6\cos^2 t\sin t,\ y'=6\sin^2 t\cos t$. Длина аст-роиды равна учетверенной длине ее части, на-ходящейся в первом квадранте, когда $0\le t\le\frac{\pi}{2}$. По формуле (3.6) находим



$$l=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{36(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t)}\,dt=$$

$$=24\int_0^{\pi/2}\cos t\sin t\,dt=24\int_0^{\pi/2}\sin t\,d\sin t=\ =12\sin^2 t\Big|_0^{\pi/2}=12.$$

Рис. 3.7

Если в полярных координатах задано уравнение кривой $r=r(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha,\beta]$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2(\varphi)+[r'(\varphi)]^2}\,d\varphi. \qquad (3.7)$$

Пример 3.11. Найти длину одного витка логарифмической спирали $r=e^{\varphi/3}$.

Решение. По формуле (3.7) находим:

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{e^{2\varphi/3}+\tfrac{1}{9}e^{2\varphi/3}}\,d\varphi=\frac{\sqrt{10}}{3}\int_0^{2\pi}e^{\varphi/3}d\varphi=\sqrt{10}e^{\varphi/3}\Big|_0^{2\pi}=\sqrt{10}\left(e^{2\pi/3}-1\right).$$

Вычислить длины дуг следующих линий.

3.80. $y=2\sqrt{x},\ 0\le x\le 1.$

3.81. $y=\ln x,\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}.$

3.82. $y=x^2,\ 0\le x\le 1.$

3.83. $y=\ln\sin x,\ \pi/3\le x\le\pi/2.$

3.84*. $y=\ln\left(1-x^2\right),\ 0\le x\le 1/2$. **3.85*.** $y=\dfrac{1}{3}(3-x)\sqrt{x},\ 0\le x\le 3.$

Найти длины дуг следующих линий, заданных параметрически.

3.86. $x=e^t\sin t,\ y=e^t\cos t,\ 0\le t\le 1.$

3.87. $x=2(\cos t+t\sin t),\ y=2(\sin t-t\cos t),\ 0\le t\le \pi/2.$

3.88. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi.$

3.89*. Найти длину петли линии $x=t^2,\ y=t-\dfrac{t^3}{3}$.

3.90*. Найти длину линии $x=\dfrac{t^6}{6},\ y=2-\dfrac{t^4}{4}$ между точками ее пересечения с осями координат.

Найти длины дуг следующих линий, заданных в полярных координатах.

3.91. $r=3(1+\cos\varphi)$ (всей линии). **3.92.** $r=a\varphi,\ 0\le\varphi\le 2\pi.$

3.93*. $r=4\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$ (всей линии). **3.94*.** $r=3\cos^4\dfrac{\varphi}{4}$ (всей линии).

3.95*. Найти длину дуги кардиоиды $r=2(1-\cos\varphi)$, находящейся внутри окружности $r=1$.

3.96. Найти длину дуги кривой $r=5\varphi$, находящейся внутри окружности $r=10\pi$.

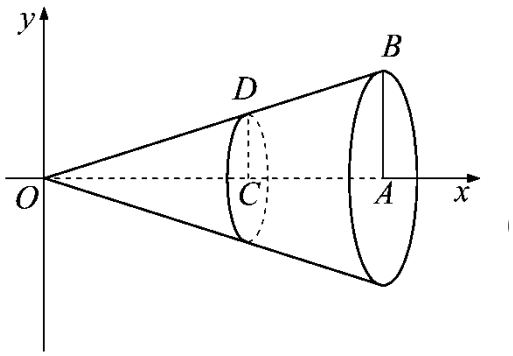
Если площадь $S(x)$ сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, является непрерывной функцией на отрезке $[a,b]$, где точки $x=a$ и $x=b$ соответствуют крайним точкам тела, то объем тела вычисляется по формуле

$$\mathrm{v}=\int_a^b S(x)dx.$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=y(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, вычисляется по формуле

$$\mathrm{v}=\pi\int_a^b y^2dx. \qquad (3.8)$$

Пример 3.12. Найти объем прямого кругового конуса высоты h и радиуса основания r.



Решение. Расположим ось конуса вдоль оси Ox, совместив вершину конуса с началом оси (рис. 3.8). Конус можно рассматривать как тело, полученное вращением вокруг оси Ox треугольника OBA. Уравнение прямой OB имеет вид $y = kx$, где $k = \mathrm{tg}\angle AOB = r/h$. По формуле (3.8) найдем объем конуса

Рис. 3.8

$$\mathrm{v} = \pi\int_0^h \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^h = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной кривой $x = x(y)$, осью Oy и прямыми $y = c,\ y = d$, вычисляется по формуле

$$\mathrm{v} = \pi\int_c^d x^2 dy.$$

Найти объем тел, образованных вращением вокруг оси Ox фигур, ограниченных указанными линиями.

3.97. $2y = x^2,\ 2x + 2y - 3 = 0.$

3.98. $y^2 = 4x,\ x = 1.$

3.99. $y = x^2,\ x = y^2.$

3.100. $xy = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0.$

3.101. $y = \sin x,\ y = 0\ \ (0 \le t \le \pi).$

3.102. $y = \dfrac{1}{1+x^2},\ x = \pm 1,\ y = 0.$

3.103. $x = a\cos t,\ y = b\sin t.$

3.104. $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t.$

Найти объем тел, образованных вращением фигур, ограниченных указанными линиями, вокруг оси Oy.

3.105. $y^2 = 4 - x,\ x = 0.$

3.106. $y = x\sqrt{-x},\ x = -4,\ y = 0.$

3.107*. $x^2 - y^2 = 1,\ y = \pm 1.$

3.108. $y = x^3,\ x = 0,\ y = 8.$

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox графика функции $y = y(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, находится по формуле

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}dx. \qquad (3.9)$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t), y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, то площадь поверхности вращения равна

$$S = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt.$$

Если кривая задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \le r \le \beta$, то площадь поверхности, образованной вращением кривой вокруг полярной оси, равна

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\sin\varphi\, d\varphi.$$

Пример 3.13. Найти площадь поверхности шара.

Решение. Рассматриваем шар как поверхность, образованную вращением полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ вокруг оси Ox. Имеем: $y' = -x\big/\sqrt{R^2 - x^2}$. Применяя формулу (3.9), получим

$$S = 2\pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)^{1/2}\left(1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}\right)^{1/2} dx = 2\pi R \int_{-R}^{R} dx = 4\pi R^2.$$

Найти площади поверхностей, образованных вращением вокруг оси Ox указанных дуг кривых.

3.109. $y = \sin x,\ 0 \le t \le \pi.$

3.110. $y = \dfrac{x^3}{3},\ -2 \le x \le 2.$

3.111. $y^2 = 4 + x,\ x \le 2.$

3.112*. $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t.$

3.113*. $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ \ 0 \le t \le 2\pi.$

Найти площади поверхностей, образованных вращением линий вокруг полярной оси.

3.114. $r = a(1 + \cos\varphi).$

3.115. $r^2 = a^2\cos 2\varphi.$

3.5 Физические приложения определенного интеграла

Путь, пройденный телом при поступательном движении со скоростью $v = v(t)$, равен $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$. Работа переменной силы $\vec{F}, |\vec{F}| = f(x)$, действующей в направлении оси Ox при перемещении от точки a до точки b, равна $A = \int_a^b f(x)\,dx$. Работу электродвигателя переменной мощности $N(t)$ можно найти по формуле $A = \int_{t_1}^{t_2} N(t)\,dt$.

Пример 3.14. Найти работу, необходимую для откачивания воды из подвала здания, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда. Длина подвала равна $a = 20$ м, ширина $b = 12$ м, высота $h = 2,4$ м. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.

Решение. Выделим на расстоянии x от верха подвала элементарный слой воды толщиной dx (рис.3. 9). Масса этого слоя воды равна $dm = \rho ab\,dx$. Элементарная работа по откачиванию этого слоя воды равна $dA = gx\,dm = \rho\, gab\,x\,dx$. Для определения работы по откачиванию всей воды из подвала нужно проинтегрировать последнее равенство в пределах от 0 до h.

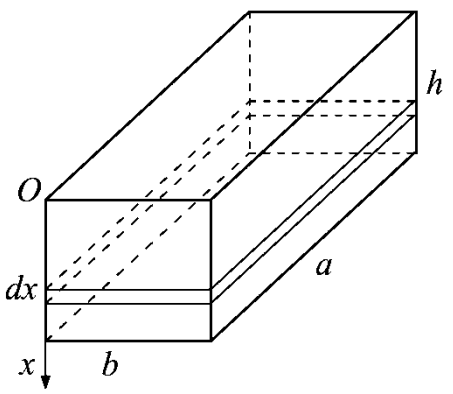


Рис. 3.8

$$A = \int_0^h \rho\, gab\,x\,dx = \frac{\rho gabh^2}{2} = \frac{1000 \cdot 9,81 \cdot 20 \cdot 12 \cdot 2,4^2}{2} \approx 6774 \text{ кДж}.$$

3.116*. Сферическая емкость радиуса $R = 0,5$м заполнена жидким химически опасным веществом (ХОВ) плотностью $\rho = 1500$ кг/м^3 до уровня 0,9м. В результате аварии в емкости на уровне 0,5м образовалось отверстие. Определить количество ХОВ, вылившегося из емкости.

3.117*. Определить время истечения ХОВ в задаче 3.116, если площадь отверстия $s = 0,001$м^2. Скорость истечения принять равной $v = \sqrt{2gh}$, где h – высота уровня жидкости над отверстием, $g \approx 9,81$м/с^2.

3.118*. Найти работу, необходимую для выкачивания нефтяного масла плотностью $\rho = 890$ кг/м^3 из вертикального цилиндрического резервуара высотой 3 м и радиусом основания 1 м.

3.119. Вычислить среднее значение $I_{\text{ср}} = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} I\,dt$ переменного тока $I = I(t) = I_0 \sin\omega t$ за полупериод $T/2$, где I_0 – амплитудное значение тока $I(t)$, $\omega = 2\pi/T$ – угловая частота.

3.120. Вычислить работу и среднюю мощность электродвигателя переменного тока за промежуток времени $[0, 2\pi/\omega]$, если сила тока $I = I_0 \sin\omega t$, $\omega = 2\pi/T$, сопротивление цепи R. Мощность $N = I^2 R$.

3.121. При гармоническом колебательном процессе по оси абсцисс около начала координат скорость $v(t)$ изменяется по закону

$v(t)=\frac{2\pi}{T}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0\right)$, где t – время, T – период колебания, φ_0 – начальная фаза. Найти положение точки в момент времени $t=T/4$, если в начальный момент она находилась в начале координат.

3.122. Скорость остывания тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела T и температурой воздуха $T_в$, $\frac{dT}{dt}=-k(T-T_в), k>0.$ Найти зависимость от времени температуры тела, если в начальный момент его температура равнялась T_0.

3.123*. Определить дозу облучения, которую получит спасатель, находясь в зараженной местности с момента времени t_1 до момента времени t_2, если доза облучения $D=\int\limits_{t_1}^{t_2}P(t)\,dt$, где $P(t)=P_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1,2}$ рентген/час – спад уровня радиации, P_0 – уровень радиации в момент взрыва.

3.6. Интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Если функция $y=f(x)$ определена на промежутке $[a,+\infty)$ и интегрируема на любом конечном промежутке $[a,b]$, то, по определению, *несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом* равен

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если предел в правой части равенства существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*. Если же указанный предел не существует, или он бесконечен, то говорят, что несобственный интеграл не существует или расходится. Аналогично определяется $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$.

Для функции, заданной на всей числовой оси, по определению полагают

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

где c – любое число.

Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $y=f(x)$. Тогда, используя формулу Ньютона – Лейбница, получим:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}[F(b)-F(a)]=\lim_{b\to+\infty}F(b)-F(a).$$

Пример 3.15. Исследовать на сходимость интеграл $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{4+x^2}$.

Решение. По определению,

$$I = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{dx}{4+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^b = \frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{b}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, данный интеграл сходится, и его значение $I = \frac{\pi}{4}$.

При исследовании сходимости несобственных интегралов применяются следующие признаки сходимости.

1) Признак сравнения. Если на промежутке $[a,+\infty)$ $0 \le f(x) \le g(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ вытекает сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ вытекает расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

2) Предельный признак сравнения. Если на промежутке $[a,+\infty)$ $f(x)>0$ и $g(x)>0$, и существует конечный предел $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = A > 0$, то несобственные интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

3) Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ (последний интеграл называется в этом случае абсолютно сходящимся).

В качестве интеграла, с которым производится сравнение, обычно используется интеграл вида

$$I = \int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} \quad (a>0), \tag{3.10}$$

который сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Пример 3.16. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

Решение. Так как $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}}$, а интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{3/2}}$ сходится (это частный случай интеграла (3.10) при $\alpha = \frac{3}{2}$), то, по признаку сравнения, сходится и данный интеграл.

Пример 3.17. Исследовать на сходимость интеграл $I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Решение. В данном случае подынтегральная функция $f(x)=$ $=\frac{1}{x^2+2x+2}=\frac{1}{(x+1)^2+1}>0.$ Положим $g(x)=\frac{1}{x^2}$, тогда получим: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+2x+2}=1.$ Представим интеграл I в виде $I=\int\limits_0^1\frac{dx}{x^2+2x+2}+$ $+\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$. Здесь первое слагаемое – определенный интеграл, а второе – несобственный интеграл, который сходится по предельному признаку сравнения, т. к. сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ (это интеграл (3.10) при $\alpha=2$). Следовательно, сходится и исходный интеграл.

Пример 3.18. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x dx}{x^2}$.

Решение. Так как $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2}$, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится, то, по признаку сравнения, сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|dx$. Следовательно, сходится и интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos x dx}{x^2}$.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

3.124. $\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$. **3.125.** $\int\limits_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx$. **3.126.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+4)^4}$.

3.127. $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$. **3.128.** $\int\limits_0^{+\infty}\sin 2x dx$. **3.129.** $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

3.130. $\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}dx$. **3.131.** $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x}$. **3.132.** $\int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$.

3.133*. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$. **3.134*.** $\int\limits_1^{+\infty}\frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2}$. **3.135.** $\int\limits_0^{+\infty}xe^{-x}dx$.

Исследовать сходимость интегралов.

3.136. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+\sin^2 x}$. **3.137.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2+x^4}$. **3.138*.** $\int\limits_1^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{1+x^5}}$.

3.7. Интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b)$ и неограничена слева от точки b, то есть b – точка разрыва второго рода. *Несобственный интеграл от неограниченной функции* определяется по формуле

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если указанный предел существует и конечен, то несобственный интеграл от неограниченной функции называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Если функция определена на промежутке $(a, b]$ и имеет разрыв второго рода в точке a, то несобственный интеграл определяется равенством

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Если функция терпит разрыв второго рода во внутренней точке $c \in [a, b]$, то несобственный интеграл от неограниченной функции определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\eta \to 0} \int_{c+\eta}^b f(x)dx.$$

Пример 3.19. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x}$.

Решение. Функция $y = \frac{1}{x}$ имеет разрыв второго рода в точке $x = 0$. По определению

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln|x|\Big|_\varepsilon^1 = -\lim_{\varepsilon \to 0} \ln \varepsilon = \infty.$$

Следовательно, данный интеграл расходится.

Признаки сходимости несобственных интегралов от неограниченных функций аналогичны признакам сходимости для интегралов с бесконечными пределами интегрирования. В качестве интегралов, с которыми производится сравнение, обычно используются интегралы вида

$$I_1 = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, \quad I_2 = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \quad (\alpha > 0), \tag{3.11}$$

которые сходятся при $\alpha < 1$ и расходятся при $\alpha \geq 1$.

Пример 3.20. Исследовать на сходимость интеграл $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + x^2}$.

Решение. Так как $\frac{1}{\sqrt{x}+x^2} < \frac{1}{\sqrt{x}}$, а интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится (это частный случай интеграла I_2 в (3.11)), то сходится и интеграл *I*.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

3.139. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

3.140. $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

3.141. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

3.142. $\int\limits_0^1 \ln x dx$.

3.143. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

3.144*. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

3.145. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$.

3.146. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

3.147*. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$.

3.148*. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+x}$.

3.149*. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

3.150*. $\int\limits_0^e \frac{dx}{e^x-1}$.

ГЛАВА 4.
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

4.1. Матрицы

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из *m* строк и *n* столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}).$$

Здесь a_{ij} – элемент матрицы, расположенный на пересечении *i*-ой строки и *j*-го столбца. Две матрицы *A* и *B* считаются равными $(A = B)$, если они имеют одинаковые размеры и одинаковые элементы на соответствующих позициях. Если число строк матрицы *A* равно числу столбцов $(m = n)$, то *A* называют квадратной матрицей порядка *n*. Элементы a_{ii} квадратной матрицы *A* составляют главную диагональ. Квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю, называется *диагональной матрицей*. Диагональная матрица *E*, у которой $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$, называется *единичной матрицей*. Матрицу *O*, у которой все элементы равны нулю, называют *нулевой матрицей.*

Если строки матрицы *A* заменить соответствующими столбцами, то получим *транспонированную матрицу* A^T, т. е. если $A = (a_{ik})$, то $A^T = (a_{ki})$.

Суммой двух матриц одинаковых размеров $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется матрица того же размера $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. Аналогично определяется разность двух матриц $A - B = (a_{ij} - b_{ij})$. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ называется матрица $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

Пример 4.1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $3A + 2B$.

Решение.

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 12 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -2 & -12 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 12 & 0 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пусть $A=(a_{ij})$ – матрица размера $m\times n$, $B=(b_{ij})$ – матрица размера $n\times k$, тогда их произведение $AB=C=(c_{ij})$, определяемое по формуле

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj}.$$

является матрицей размера $m\times k$. Произведение матриц не обладает свойством коммутативности.

Пример 4.2. Найти произведение AB, где

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$AB=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot5-2\cdot1 & 3\cdot(-2)-2\cdot0 & 3\cdot3-2\cdot4\\ 4\cdot5+1\cdot1 & 4\cdot(-2)+1\cdot0 & 4\cdot3+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -6 & 1\\ 21 & -8 & 13\end{pmatrix}.$$

Найти линейные комбинации матриц A и B.

4.1. $2A-B,\quad A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$

4.2. $3A+2B,\quad A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 2\end{pmatrix}.$

Найти произведения матриц.

4.3. $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}.$ **4.4.** $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}^2.$

4.5. $\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 4\end{pmatrix}.$ **4.6.** $\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\end{pmatrix}.$

4.7. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}.$ **4.8.** $\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}.$

4.9. $\begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}^3$.

4.10. $\begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}^2$.

4.11. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2$.

4.12. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

4.13. Найти AA^T, где

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & i \\ 2-i & i & 0 \\ 3 & -1 & i \end{pmatrix}.$$

4.14. Найти $f(A)$, если

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 4,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.2. Определитель матрицы

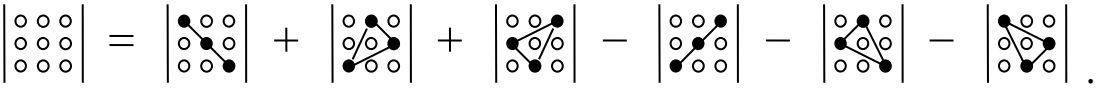
Каждой квадратной матрице $A = (a_{ij})$ порядка n можно поставить в соответствие действительное число $|A|$ (или $\det A, \Delta$), называемое *определителем* матрицы. При $n = 1$ полагают $|A| = a_{11}$. Определитель второго порядка равен

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель третьего порядка определяется равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для вычисления определителя третьего порядка удобно пользоваться следующей схемой:



Пример 4.3.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ 7 & 8 & -9 \end{vmatrix} = 2\cdot 5\cdot(-9) + 1\cdot(-6)\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 8 -$$
$$-3\cdot 5\cdot 7 - 1\cdot 4\cdot(-9) - 2\cdot 8\cdot(-6) = -9.$$

Понятие определителя матрицы A произвольного порядка n вводится индуктивно, в предположении, что уже введено понятие определителя порядка $n-1$. Если в матрице A произвольным образом выбраны k строк и k столбцов, то элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k, определитель M которой называется *минором k-го порядка* матрицы A.

Пример 4.4. Если

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

и выбраны 1-я и 3-я строки, 2-й и 3-й столбцы, то соответствующий минор второго порядка матрицы A равен $M=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}=-11.$

Минором M', дополнительным к минору M, называется определитель матрицы, оставшейся после вычеркивания тех k строк и k столбцов, которые входят в минор M. Миноры квадратной матрицы называют также минорами ее определителя.

Алгебраическим дополнением минора M называется дополнительный к нему минор, умноженный на $(-1)^l$, где l – сумма номеров строк и столбцов, входящих в минор M, т. е. алгебраическое дополнение равно $(-1)^l M'$. Каждый элемент a_{ij} матрицы A является минором первого порядка. Дополнительный к нему минор, который является определителем порядка $n-1$, обозначается через M_{ij}, а алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначается через A_{ij}. Таким образом,

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Пример 4.5. Если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

и выбран минор, образованный элементами, стоящими на пересечении 3-й и 4-й строк и 2-го и 3-го столбцов, то $M=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=12$, дополнительный минор $M'=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2$, а алгебраическое дополнение минора M равно $(-1)^{3+4+2+3}M'=2.$

Алгебраическое дополнение элемента $a_{23} = -3$ равно

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 50.$$

Определение. *Определителем* $|A|$ *порядка* n *матрицы* A *называется число*

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k},$$

Определитель матрицы обладает рядом свойств, которые упрощают его вычисление.

1. Определитель транспонированной матрицы $\det A^T = \det A$.

2. Если все элементы некоторой строки определителя равны нулю, то определитель равен нулю.

3. При перестановке двух строк определитель меняет знак.

4. Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.

5. Общий множитель всех элементов некоторой строки определителя можно вынести за знак определителя.

6. Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.

7. Определитель, у которого каждый элемент i-й строки является суммой двух слагаемых, равен сумме двух определителей, у первого из которых в указанной строке стоят первые слагаемые, а у второго – вторые слагаемые. Все остальные строки у определителей одинаковы.

8. Определитель не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

9. Определитель матрицы равен сумме произведений элементов какой-либо его строки (столбца) на алгебраические дополнения этих элементов,

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

Пример 4.6. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Разлагая определитель Δ по третьей строке, получим

$$\Delta = -2(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 3(-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(-4-8+4+4) - 3(1+4+12-12-2-2) = 5.$$

Вычисления существенно упрощаются, если перед разложением определителя по элементам строки или столбца как можно большее число этих элементов будет превращено в нули. Для этого используют элементарные преобразования строк и столбцов матрицы. К элементарным преобразованиям строк матрицы относятся:

1) умножение строки матрицы на ненулевое число;

2) перестановка двух строк;

3) прибавление к строке матрицы другой строки, умноженной на некоторое число.

Аналогичным образом определяются элементарные преобразования столбцов матрицы. Согласно свойствам определителя, перестановка строк или столбцов изменяет знак определителя. Элементарное преобразование третьего типа не изменяет определитель. Применяя элементарные преобразования второго и третьего типа, определитель можно привести к треугольному виду:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Такой определитель равен произведению диагональных элементов

$$\Delta = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Пример 4.7. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Приведем определитель Δ к треугольному виду. Для этого первую строку умножим на -2 и прибавим ко второй строке. Затем первую строку умножим на -3 и прибавим к третьей строке, далее первую строку умножим на -4 и прибавим к четвертой строке. В итоге найдем, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix}.$$

Умножим теперь вторую строку на -2 и прибавим к третьей строке, затем вторую строку умножим на -7 и прибавим к четвертой строке. В результате получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{vmatrix}.$$

Для приведения определителя Δ к треугольному виду прибавим третью строку к четвертой строке. Имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-4) \cdot 40 = 160.$$

Вычислить определители.

4.15. $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$. **4.16.** $\begin{vmatrix} x & 1+x \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$. **4.17.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$.

4.18. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. **4.19.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$. **4.20.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 8 & -15 \end{vmatrix}$.

4.21. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. **4.22.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & -6 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

4.23. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & -3 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

4.24. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

4.25. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

4.26. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & -3 \\ 9 & 5 & 3 & -7 \\ 13 & 7 & 4 & -14 \\ 25 & 13 & 7 & -21 \end{vmatrix}$.

4.27. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & 1 \\ -6 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 2 & 9 \end{vmatrix}$.

4.28. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

4.29. $\begin{vmatrix} 181 & 281 \\ 217 & 317 \end{vmatrix}$.

4.30. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$.

4.31. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

Решить уравнения.

4.32. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 2 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$.

4.33*. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0$

.

4.34. Дана матрица

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) минор *M*, стоящий на пересечении первой, второй и четвертой строк, первого, третьего и четвертого столбцов; б) минор, дополнительный к минору *M*; в) алгебраическое дополнение к минору *M*; г) алгебраическое дополнение к элементу, стоящему на пересечении второй строки и третьего столбца; д) алгебраическое дополнение к минору *M*, стоящему в первой и третьей строках, втором и четвертом столбцах.

4.3. Ранг матрицы

Пусть $A=(a_{ij})$ – прямоугольная матрица размера $m\times n$. *Рангом* матрицы *A* называется наибольший из порядков ее ненулевых миноров. Ранг матрицы будем обозначать через $r=\operatorname{rang} A$. Любой минор порядка *r*, не равный нулю, называется базисным минором.

Для вычисления ранга матрицы используют элементарные преобразования строк и столбцов. Эти преобразования не меняют ранг матрицы. Если матрица *B* получена из матрицы *A* с помощью элементарных преобразований, то будем писать $B \sim A$. При вычислении ранга матрицы *A* ее с помощью элементарных преобразований приводят к виду

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \sim A,$$

где диагональные элементы $b_{11}, b_{22}, \dots, b_{rr}$ отличны от нуля. Ранг матрицы *A* совпадает с числом ненулевых диагональных элементов матрицы *B*.

Пример 4.8. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Проводя последовательно элементарные преобразования, получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\operatorname{rang} A = 3$.

Пример 4.9. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. С помощью элементарных преобразований получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\operatorname{rang} A = 2$.

Найти ранг матрицы.

4.35. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. **4.36.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. **4.37.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$.

4.38. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 12 & 13 & 13 \\ 1 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}$. **4.39.** $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 4 & 5 \\ -1 & 4 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

4.40*. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$. **4.41.** $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

4.42*. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$. **4.43.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{pmatrix}$.

Матрица B называется *обратной* для квадратной матрицы A, если $AB = BA = E$. Матрицу, обратную матрице A, обозначают A^{-1}.

Пусть $A = (a_{ij})$ – квадратная матрица порядка n, A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}. Обозначим через A^* следующую матрицу:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если определитель $\det A \neq 0$, то матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}, причем

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*.$$

Пример 4.10. Найти обратную матрицу A^{-1}, если

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Так как $\det A = 4$, то $A^{-1} = \frac{1}{4} A^* = \frac{1}{4}(A_{ji})$. Находим алгебраические дополнения A_{ij}

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-10,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}5 & 4\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-9,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}5 & -2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=8,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=6,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}=5,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}0 & 3\\ -2 & 4\end{vmatrix}=6,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 4\end{vmatrix}=7,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 5 & -2\end{vmatrix}=-4.$$

Следовательно,

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-10 & 6 & 6\\ -9 & 5 & 7\\ 8 & -4 & -4\end{pmatrix}.$$

Найти матрицы, обратные данным.

4.44. $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 13\end{pmatrix}$. **4.45.** $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. **4.46.** $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

4.47. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. **4.48.** $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 0 & 5\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$. **4.49.** $\begin{pmatrix}1 & 2 & -5\\ 1 & -3 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

4.50*. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$. **4.51*.** $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -2 & -6\end{pmatrix}$.

Решить матричные уравнения.

4.52. $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 5\end{pmatrix}$. **4.53.** $\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & 1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & 5\end{pmatrix}$.

Определить, при каких значениях λ существует матрица, обратная данной.

4.54. $\begin{pmatrix}1 & \lambda-5 & 2\\ 0 & 1 & 4\\ \lambda & 0 & 0\end{pmatrix}$. **4.55.** $\begin{pmatrix}1 & \lambda & 4\\ 0 & 1 & 5\\ 1 & 1+\lambda & 9\end{pmatrix}$.

4.4. Системы линейных алгебраических уравнений

Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij}, b_i – действительные числа, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}),$$

составленная из коэффициентов при неизвестных системы, называется *матрицей системы.* Обозначая

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

матрицу-столбец неизвестных x_i и матрицу-столбец свободных членов b_i, можно записать систему в матричном виде, $AX = B$.

Если $B = O$, то система называется *однородной*, в противном случае она называется неоднородной. *Решением* системы называется упорядоченный набор чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, подстановка которых в уравнения системы вместо соответствующих неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обращает каждое уравнение в тождество. Две системы линейных уравнений называются *равносильными*, если множества их решений совпадают. Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет решений.

Матрица

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} = (A \;\; B)$$

называется *расширенной матрицей системы* линейных уравнений.

Теорема Кронекера – Капелли. *Для совместности системы линейных уравнений необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство* $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A}$.

Если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} = n$, *то система имеет единственное решение. Если* $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A} < n$, *то система имеет бесконечное множество решений.*

Пример 4.11. Исследовать на совместность систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - \ \ x_3 = 7, \\ x_1 \qquad\quad + 5x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Найдем ранги матрицы системы A и расширенной матрицы $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = (A \ \ B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Будем проводить элементарные преобразования матрицы $\tilde{A}$ так, чтобы они одновременно являлись элементарными преобразованиями матрицы A. Умножим первую строку матрицы $\tilde{A}$ на -3 и прибавим ко второй строке, затем первую строку вычтем из последней строки. В полученной матрице из последней строки вычтем вторую строку. В итоге получим

$$\tilde{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Отсюда заключаем, что $\operatorname{rang} A = 2$, $\operatorname{rang} \tilde{A} = 3$. Следовательно, данная система решений не имеет.

Система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

называется *невырожденной*, если определитель матрицы системы не равен нулю, т. е. $\Delta = \det A \neq 0, A = (a_{ij})$. Если $\Delta = 0$, то система называется *вырожденной*. Невырожденная система имеет единственное решение, которое можно найти матричным способом. Пусть A^{-1} – матрица, обратная матрице системы, тогда $X = A^{-1}B$.

Пример 4.12. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 = -3. \end{cases}$$

Решение. Матрица

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

невырожденная, т. к. $\det A = -2 \neq 0.$ Обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 11 & 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 11 & 2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т. е. $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 1.$

Решить следующие системы уравнений матричным способом.

4.56. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 3, \\ 3x_1 + 8x_2 = 5. \end{cases}$ **4.57.** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -5, \\ x_1 + x_2 = -1. \end{cases}$

4.58. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$ **4.59.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5, \\ 6x_1 - x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

В покомпонентной записи решение невырожденной системы принимает вид

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.1}$$

где Δ_i – определитель, получаемый из определителя матрицы системы Δ заменой i-го столбца на столбец свободных членов. Формулы (4.1) называются *формулами Крамера.*

Пример 4.13. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 = 2, \\ x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

Решение. Так как определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

то данная система является невырожденной и ее решение можно найти по формулам Крамера. Найдем определители $\Delta_i, i = 1, 2, 3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Следовательно, решением системы являются числа

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 0, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -2, \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$$

Решить следующие системы уравнений по формулам Крамера.

4.60. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 4, \\ x_1 + 3x_2 = 5. \end{cases}$

4.61. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -11, \\ 3x_1 - 2x_2 = 3. \end{cases}$

4.62. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -2, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 13. \end{cases}$

4.63. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 21, \\ 7x_1 - x_2 - 3x_3 = 6. \end{cases}$

4.64. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

4.65. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

4.66. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_3 = 2. \end{cases}$

4.67. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$

Для решения произвольной системы линейных уравнений применяют *метод последовательного исключения неизвестных* (*метод Гаусса*). Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Предположим, что $a_{11} \neq 0$. Исключим x_1 из всех уравнений, кроме первого. Для этого прибавим к i-му уравнению первое уравнение, умноженное на $-a_{i1}/a_{11}, i = 2, 3, ..., m$. В итоге получим систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad b_{22}x_2 + ... + b_{2n}x_n = b'_2, \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \qquad b_{m2}x_2 + ... + b_{mn}x_n = b'_m. \end{cases}$$

Если $b_{22} \neq 0$, то аналогичным образом исключаем неизвестную x_2 из последних $m-2$ уравнений полученной системы. Если $b_{22} = 0$, то с помощью перенумерации неизвестных можно добиться того, чтобы коэффициент при неизвестной x_2 был отличен от нуля. После $p-1<m$ шагов, состоящих в последовательном исключении неизвестных, придем к системе вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + ... + b_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad c_{33}x_3 + ... + c_{3n}x_n = \bar{b}_3, \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ \qquad d_{pp}x_p + ... + d_{pn}x_n = \bar{b}_p, \\ \qquad 0 = \bar{b}_{p+1}, \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \\ \qquad 0 = \bar{b}_m. \end{cases}$$

Если хотя бы одно из чисел $\bar{b}_{p+1}, ..., \bar{b}_m$ отлично от нуля, то данная система несовместна. Предположим теперь, что все элементы $\bar{b}_{p+1}, ..., \bar{b}_m$ равны нулю. В этом случае при $p = n$ система имеет единственное решение, а при $p < n$ она имеет бесконечное множество решений. Осуществляя обратный ход метода Гаусса, последовательно выражают базисные неизвестные $x_p, x_{p-1}, ..., x_1$ через свободные неизвестные $x_{p+1}, ..., x_n$. Решение системы содержит $n-p$ произвольных постоянных, где n – число неизвестных, а $p = \operatorname{rang} A$ – ранг матрицы системы.

Пример 4.14. Решить методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 8, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 8x_4 + 11x_5 = -12, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 5x_5 = -7. \end{cases}$$

Решение. Исключаем x_1 из второго, третьего и четвертого уравнений. Для этого первое уравнение умножаем на -2 и прибавляем ко второму и третьему уравнениям, затем первое уравнение умножаем на -3 и прибавляем к четвертому уравнению. В итоге получим систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 8, \\ -x_2 - x_3 + x_5 = -8, \\ 7x_2 - 5x_3 - 12x_4 + 17x_5 = -28, \\ 4x_2 - 5x_3 - 9x_4 + 14x_5 = -31. \end{cases}$$

Из последних двух уравнений исключаем x_2. Получим систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 8, \\ x_2 + x_3 - x_5 = 8, \\ -12x_3 - 12x_4 + 24x_5 = -84, \\ -9x_3 - 9x_4 + 18x_5 = -63. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 8, \\ x_2 + x_3 - x_5 = 8, \\ x_3 + x_4 - 2x_5 = 7, \\ x_3 + x_4 - 2x_5 = 7. \end{cases}$$

Последняя система эквивалентна системе трех уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 8 - 2x_4 + 3x_5, \\ x_2 + x_3 = 8 + x_5, \\ x_3 = 7 - x_4 + 2x_5. \end{cases}$$

Обозначая в этой системе свободные переменные $x_4 = c_1, x_5 = c_2$, последовательно находим, что

$$x_3 = 7 - c_1 + 2c_2,$$
$$x_2 = 8 + c_2 - (7 - c_1 + 2c_2) = 1 + c_1 - c_2,$$
$$x_1 = 8 - 2c_1 + 3c_2 - (7 - c_1 + 2c_2) + 1 + c_1 - c_2 = 2.$$

При применении метода Гаусса удобно вместо преобразований системы производить соответствующие преобразования над строками расширенной матрицы системы.

Пример 4.15. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид (столбец свободных членов для удобства отделен вертикальной чертой)

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -3 & -2 \end{array}\right).$$

Производя элементарные преобразования строк матрицы $\tilde{A}$, получаем

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & -7 & 8 & 10 \\ 0 & -7 & 6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & -7 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right).$$

Следовательно, исходная система уравнений равносильна следующей:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -2, \\ -7x_2 + 8x_3 = 10, \\ -2x_3 = -6. \end{cases}$$

Из последней системы последовательно находим $x_3 = 3,\ x_2 = 2,\ x_1 = 1$.

Пример 4.16. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -2, \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & -7 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Таким образом, исходная система равносильна системе двух уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 5x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Полагая свободную неизвестную $x_3 = c$, где c – произвольная постоянная, находим $x_2 = c,\ x_1 = -1 - 2c$.

Пример 4.17. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5, \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Решение. Составляя и преобразуя расширенную матрицу системы, получим

$$\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 7 & 4 & 2 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{13}{2} & \frac{11}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{13}{2} & \frac{11}{2} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{13}{2} & \frac{11}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Отсюда очевидно, что система не имеет решений.

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

4.68. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 11, \\ 4x_1 + 5x_2 = 9. \end{cases}$

4.69. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 = 2, \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

4.70. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 2, \\ 6x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$

4.71. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7, \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$

4.72. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 7, \\ 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

4.73. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5, \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$

4.74. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

4.75. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -2. \end{cases}$

4.76. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

4.77. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - x_3 + 12x_4 = 6. \end{cases}$

4.78. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 11, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$

4.79. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 7, \\ 7x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 6x_4 = 6. \end{cases}$

4.80. $\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 6. \end{cases}$

4.81. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + 19x_3 + x_4 = 8, \\ 6x_1 - 5x_2 + 11x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$

Однородная система всегда имеет нулевое решение $X = O$. Система n однородных уравнений с n неизвестными имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю, $\Delta = \det A = 0$. Решение системы уравнений с n неизвестными зависит от $n - r$ произвольных постоянных, где r – ранг матрицы системы. Придавая поочередно каждой из постоянных значение 1, а остальные полагая равными 0, получим $n - r$ частных решений, которые в совокупности образуют нормированную фундаментальную систему решений. Любое решение однородной системы уравнений является линейной комбинацией решений, входящих в фундаментальную систему решений.

Пример 4.18. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Для решения системы применим метод Гаусса. После исключения неизвестной x_1 из последних трех уравнений, получим

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ -3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ -6x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Базисные переменные – x_1, x_2, свободные переменные – x_3, x_4. Обозначая $x_3 = c_1, x_4 = c_2$, находим, что $x_2 = \frac{1}{3}c_2 - c_1, x_1 = -\frac{1}{3}c_2 - c_1$. Следовательно, решение системы имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}c_2 - c_1 \\ \frac{1}{3}c_2 - c_1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 X_1 + c_2 X_2,$$

где $X_1 = (-1\ -1\ 1\ 0)^T$, $X_2 = (-\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ 0\ 1)^T$ – нормированная фундаментальная система решений.

Решить однородные системы уравнений.

4.82. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0, \\ -2x_1 + 6x_2 = 0. \end{cases}$

4.83. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

4.84. $\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

4.85. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

4.86. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

4.87. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

4.88. $\begin{cases} 5x_1+8x_2-5x_3=0, \\ 7x_1+5x_2-x_3=0, \\ 2x_1-3x_2+4x_3=0. \end{cases}$ **4.89*.** $\begin{cases} 2x_1+3x_2+2x_3-x_4=0, \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0, \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 15x_1+4x_2+16x_3-6x_4=0. \end{cases}$

Найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений.

4.90. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+x_3=0, \\ 3x_1-2x_2+2x_3=0. \end{cases}$ **4.91.** $\begin{cases} 2x_1-x_2-7x_3+x_4=0, \\ 7x_1-5x_2+x_3-x_4=0, \\ 5x_1-4x_2+8x_3-2x_4=0. \end{cases}$

4.92. $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0, \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0, \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0. \end{cases}$ **4.93*.** $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4+2x_5=0, \\ 2x_1+3x_2+2x_3-x_4+x_5=0, \\ 3x_1+5x_2+x_3+3x_5=0, \\ 3x_1+4x_2+5x_3-3x_4=0. \end{cases}$

4.5. Векторы

Величины, которые характеризуются своим численным значением и направлением, называют *векторными*. Например, сила, скорость, ускорение и т. д. Задав единицу длины, векторные величины можно изображать геометрическими векторами в трехмерном пространстве. *Вектором* называется направленный отрезок $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ с начальной точкой *A* и конечной точкой *B*. Вектор, для которого начальная точка совпадает с конечной точкой, считается *нулевым вектором* $\vec{0}$. Расстояние между начальной и конечной точками называют *длиной* или *модулем* вектора $\vec{a}$ и обозначают $|\vec{a}|$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют *коллинеарными,* $\vec{a}\,\square\,\vec{b}$, если существует прямая, которой они параллельны. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ считаются равными, если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине. Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором* или *ортом*.

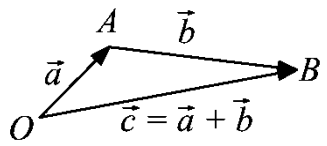
Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число α называется вектор, обозначаемый $\alpha\vec{a}$, такой, что:

1) $|\alpha\vec{a}|=|\alpha||\vec{a}|$,

2) $\alpha\vec{a}\,\square\,\vec{a}$,

3) векторы $\alpha\vec{a}$ и $\vec{a}$ одинаково направлены, если $\alpha>0$, и противоположно направлены, если $\alpha<0$.

Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, который идет из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ (рис. 4.1). Сумма трех и более векторов определяется через последовательное



сложение: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$. Рис. 4.1

Вектор $-\vec{a}$ называется противоположным вектору $\vec{a}$. Разностью $\vec{a}-\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, равный сумме векторов $\vec{a}$ и $-\vec{b}$.

Векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c},...$ называются *компланарными*, если они параллельны одной плоскости.

Углом между векторами (или вектором и осью) называется наименьший угол, на который нужно повернуть один вектор, чтобы он совпал по направлению с другим вектором (или осью). *Проекция* вектора $\vec{a}$ на ось l равна $\mathrm{pr}_l\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$, где $\varphi=(\vec{a},l)$ – угол между вектором $\vec{a}$ и осью l. Под *проекцией* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ понимают проекцию вектора $\vec{a}$ на ось, проходящую через вектор $\vec{b}$. Если угол $\varphi=(\vec{a},\vec{c})=\pi/2$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ называются *перпендикулярными* (или *ортогональными*) векторами.

4.94. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, причем $|\vec{a}|=4,\ |\vec{b}|=3$. Найти $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$.

4.95. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=60^\circ$. Найти $|\vec{a}+\vec{b}|$ и $|\vec{a}-\vec{b}|$, если известно, что $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=2$.

4.96. Дан прямоугольник $ABCD$. Среди векторов $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$ указать коллинеарные и равные.

4.97. В треугольнике ABC проведена медиана AA'. Выразить вектор $\overrightarrow{AA'}$ через векторы $\overrightarrow{BC}=\vec{a},\ \overrightarrow{AB}=\vec{c}$.

4.98. В треугольнике ABC проведена медиана AA'. Выразить вектор $\overrightarrow{AA'}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

4.99. Найти проекции вектора $\vec{a}$ на ось l, образующую с ним угол φ, в каждом из указанных случаев:

а) $|\vec{a}|=4,\ \varphi=0$; б) $|\vec{a}|=3,\ \varphi=\pi/2$; в) $|\vec{a}|=5,\ \varphi=\pi$;

г) $|\vec{a}|=6,\ \varphi=\pi/3$; д) $|\vec{a}|=\sqrt{2},\ \varphi=\pi/4$; е) $|\vec{a}|=2,\ \varphi=3\pi/4$.

Векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_k$ называются *линейно зависимыми*, если существуют действительные числа $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$ среди которых есть ненулевые числа, такие, что линейная комбинация $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_k\vec{a}_k=\vec{0}$. В противном случае (т. е. когда таких чисел не существует) векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_k$ называются *линейно независимыми.* Если векторы линейно независимы, то из равенства $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_k\vec{a}_k=\vec{0}$ следует, что $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_k=0$.

Любые два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны. Любые три компланарных вектора линейно зависимы, любые

три некомпланарных вектора линейно независимы и каждые четыре вектора в трехмерном пространстве линейно зависимы.

Базисом на плоскости называют два неколлинеарных вектора на этой плоскости, взятых в определенном порядке. Пусть векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ образуют базис. Тогда любой компланарный с ними вектор $\vec{a}$ единственным образом раскладывается по базису, $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2$. Коэффициенты α_1, α_2 называются *координатами* вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Между векторами и их координатами в некотором базисе существует взаимно однозначное соответствие, поэтому векторы можно обозначать, указывая их координаты: $\vec{a} = (\alpha_1; \alpha_2)$.

Базисом в трехмерном пространстве называется любая тройка $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ некомпланарных векторов, взятых в определенном порядке. Любой вектор $\vec{a}$ в трехмерном пространстве единственным образом можно разложить по базисным векторам,

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3.$$

Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ называются *координатами* вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Таким образом, $\vec{a} = (\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$.

В n-мерном пространстве базис образуют любые n линейно независимых векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$. Коэффициенты разложения вектора $\vec{a}$ по базису называются его координатами в данном базисе и могут быть использованы для обозначения вектора:

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + ... + \alpha_n\vec{e}_n = (\alpha_1; \alpha_2; ...; \alpha_n).$$

Линейные операции над векторами переносятся на такие же линейные операции над их координатами. Если $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, $\vec{a} = (\alpha_1; \alpha_2)$, $\vec{b} = (\beta_1; \beta_2)$, то вектор $\vec{c} = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1; \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2)$. Равенство $\vec{a} = \vec{b}$ справедливо в том и только в том случае, когда $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2$.

Пример 4.19. Даны векторы $\vec{a} = (1;1), \vec{b} = (2;-1)$. Разложить вектор $\vec{c} = (0;1)$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то они образуют базис, и, следовательно, имеет место разложение $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Переходя к соответствующим соотношениям для координат векторов, получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0, \\ \alpha - \ \ \beta = 1. \end{cases}$$

Из этой системы находим, что $\beta = -\frac{1}{3}, \alpha = \frac{2}{3}$. Следовательно, $\vec{c} = \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$.

Пример 4.20. Определить, являются ли линейно независимыми векторы $\vec{a}_1 = (2; 1; 0), \vec{a}_2 = (-5; 0; 3), \vec{a}_3 = (3; 4; 3)$.

Решение. Если векторы линейно зависимы, то существуют $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, такие, что

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 = \vec{0}. \qquad (4.2)$$

Записывая равенство (4.2) через координаты векторов, получим систему уравнений относительно $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - 5\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 \qquad\quad + 4\alpha_3 = 0, \\ \qquad\quad 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет решение $\alpha_1 = -4c, \alpha_2 = -c, \alpha_3 = c$, где c – любое число. Таким образом, существуют отличные от нуля числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, для которых справедливо равенство (4.2), т. е. векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ линейно зависимы.

Заданы координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в некотором базисе. В задачах 4.100 – 4.103 определить координаты вектора $\vec{c}$ в этом же базисе.

4.100. $\vec{a} = (2; 3; -1), \vec{b} = (0; 1; 2), \vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

4.101. $\vec{a} = (0; -5; 4; 1), \vec{b} = (7; 2; 0; -1), \vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

4.102. $\vec{a} = (1; 0), \vec{b} = (2; -3), 2\vec{a} + 3\vec{c} = \vec{b}$.

4.103. $\vec{a} = (2; -1; 4), \vec{b} = (1; 0; -2), 5\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

4.104. Найти координаты вектора $\vec{x} = (1; -2)$ в базисе $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (-1; 3)$.

4.105. Найти координаты вектора $\vec{x} = (-3; 6; 21)$ в базисе $\vec{a} = (1; 2; -3)$, $\vec{b} = (1; -1; 2), \vec{c} = (1; 2; -5)$.

4.106. Даны три вершины $A(3; -4; 7)$, $B(-5; 3; -2)$ и $C(1; 2; 3)$ параллелограмма $ABCD$. Найти его четвертую вершину D.

В задачах 4.107 – 4.111 выяснить, является ли линейно независимой каждая из систем векторов.

4.107. $\vec{a}_1 = (1; -2), \vec{a}_2 = (-1; 2)$.

4.108. $\vec{a}_1 = (1; 0; 0), \vec{a}_2 = (0; 1; 0), \vec{a}_3 = (0; 0; 1)$.

4.109. $\vec{a}_1 = (-1; 2; 0; 0), \vec{a}_2 = (0; 0; -1; 2)$.

4.110. $\vec{a}_1 = (1; 0; 0; 0), \vec{a}_2 = (0; 1; 0; 0), \vec{a}_3 = (0; 0; \alpha; 0)$.

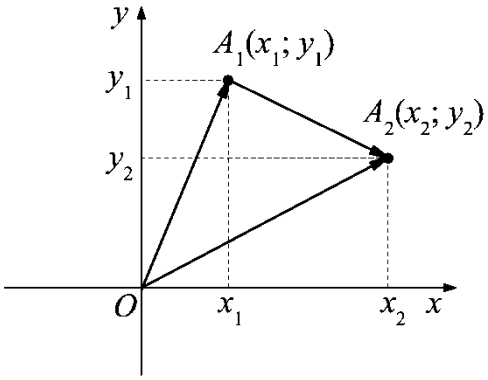
4.111. $\vec{a}_1 = (1; 2; 3; 4), \vec{a}_2 = (0; 1; 2; 0)$.

В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на плоскости отложим от точки O по оси Ox единичный вектор $\vec{i}$, а по оси Oy –

единичный вектор $\vec{j}$. Векторы $\vec{i}, \vec{j}$ образуют *ортонормированный* базис на плоскости.

Любой вектор $\vec{a}$ на плоскости можно разложить по базису $\vec{i}, \vec{j}$, т. е. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$. где $x = \mathrm{pr}_{Ox}\vec{a}, y = \mathrm{pr}_{Oy}\vec{a}$ – координаты вектора $\vec{a}$. Если начало вектора $\vec{a}$ поместить в точку O, то вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ называется *радиус-вектором* точки A, и его координаты x и y совпадают с координатами точки $A(x; y)$.

Пусть $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$ – две точки на плоскости. Тогда $\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{A_1A_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ (рис. 4.2). Расстояние между точками A_1 и A_2 равно модулю вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$,



$$\rho(A_1, A_2) = |\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Рис. 4.2

Декартова прямоугольная система координат в пространстве определяется заданием масштаба для измерения длин любых отрезков, точки O – начала координат и трех проходящих через точку O взаимно-перпендикулярных числовых осей Ox, Oy, Oz, занумерованных в определенном порядке. Отложим от точки O по оси Ox единичный вектор $\vec{i}$, по оси Oy – единичный вектор $\vec{j}$, по оси Oz – единичный вектор $\vec{k}$. Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. образуют *ортонормированный* базис трехмерного пространства. Оси, проходящие через точку O и векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, называются *координатными осями.* Плоскость, проходящая через две оси, называется *координатной плоскостью*. В дальнейшем, под декартовой прямоугольной системой координат в пространстве будем по-нимать систему координат с ориентацией осей как показано на рисунке 4.3.

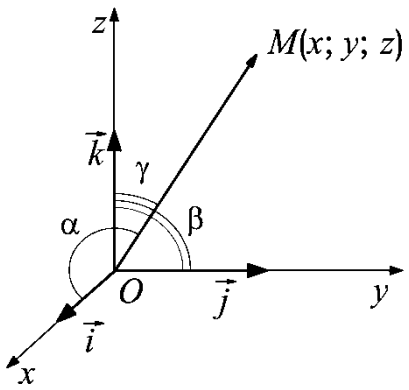


Рис. 4.3

Любой вектор $\vec{a}$ можно разложить по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x; y; z).$$

Если начало вектора $\vec{a}$ поместить в точку O, то $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$ – радиус-вектор точки M, и координаты x, y, z точки M совпадают с координатами радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$: $x=\mathrm{pr}_{Ox}\vec{a}, y=\mathrm{pr}_{Oy}\vec{a}, z=\mathrm{pr}_{Oz}\vec{a}$. Обозначим через α, β, γ углы, которые образует вектор $\vec{a}$ с осями Ox, Oy и Oz соответственно. Тогда $x=|\vec{a}|\cos\alpha$, $y=|\vec{a}|\cos\beta, z=|\vec{a}|\cos\gamma, \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. Числа $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$. Модуль вектора $\vec{a}$ находят по формуле $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Если даны две точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то вектор $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1)$. Расстояние между точками A и B равно модулю вектора $\overrightarrow{AB}$,

$$\rho(A, B)=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Координаты точки $M(x; y; z)$, которая делит отрезок AB, ограниченный точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, в отношении λ $\left(\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}\right)$, вычисляются по формулам:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

В частности, если точка $M(x; y; z)$ делит отрезок на равные части, то $\lambda=1$, и координаты точки M выражаются равенствами

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, y=\frac{y_1+y_2}{2}, z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

В задачах 4.112 – 4.116 выяснить, является ли линейно независимой каждая из систем векторов.

4.112. $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}, \vec{b}=\vec{i}+\vec{k}$.

4.113. $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}, \vec{b}=4\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}$.

4.114. $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}, \vec{b}=5\vec{j}+3\vec{k}, \vec{c}=7\vec{k}$.

4.115. $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}, \vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}, \vec{c}=3\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$.

4.116. $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}, \vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}, \vec{c}=3\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}, \vec{d}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

4.117. На оси абсцисс найти точку M, расстояние от которой до точки $A(3;-3)$ равно 5.

4.118. На оси ординат найти точку M, равноудаленную от точек $A(1;-4;7)$ и $B(5;6;-5)$.

4.119. Даны вершины треугольника $A(3;-1;5), B(4;2;-5)$ и $C(-4;0;3)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины A.

4.120. Отрезок с концами в точках $A(3;-2)$ и $B(6;4)$ разделен на три равные части. Найти координаты точек деления.

4.121. Определить координаты концов отрезка, который точками $C(2;0;2)$ и $D(5;-2;0)$ разделен на три равные части.

Скалярным произведением $\vec{a}\cdot\vec{b}$ двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, где $\varphi=(\vec{a},\vec{b})$ – угол между векторами.

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$;

4) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

Пример 4.21. Найти скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $\vec{a}=\vec{m}-\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}+2\vec{n}, |\vec{m}|=1, |\vec{n}|=2, \varphi=(\vec{m},\vec{n})=\pi/3$.

Решение. Применяя свойства скалярного произведения, находим

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{m}-\vec{n})\cdot(\vec{m}+2\vec{n})=\vec{m}\cdot\vec{m}+2\vec{m}\cdot\vec{n}-\vec{n}\cdot\vec{m}-2\vec{n}\cdot\vec{n}=$$
$$=|\vec{m}|^2+|\vec{m}||\vec{n}|\cos\varphi-2|\vec{n}|^2=1+1\cdot2\cdot\tfrac{1}{2}-2\cdot4=-6.$$

Если векторы заданы своими декартовыми прямоугольными координатами, $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1), \vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, то скалярное произведение равно

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

В частности, отсюда следует формула для определения угла между векторами

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}},\quad \varphi=(\vec{a},\vec{b}).$$

Векторным произведением $\vec{a}\times\vec{b}$ (или $[\vec{a},\vec{b}]$) двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который определяется следующими условиями:

1) $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, где $\varphi=(\vec{a},\vec{b})$;

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) из конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ до совпадения с направлением вектора $\vec{b}$ виден происходящим против часовой стрелки (рис. 4.4).

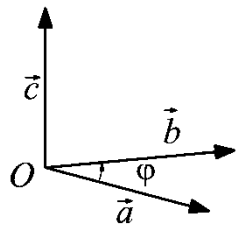


Рис. 4.4

Свойства векторного произведения:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$;

2) $\alpha\vec{a}\times\vec{b}=\alpha\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$;

3) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$;

4) $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=S$,

где S – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Если векторы заданы своими декартовыми прямоугольными координатами, $\vec{a}=(x_1;\,y_1;\,z_1),\vec{b}=(x_2;\,y_2;\,z_2)$, то их векторное произведение равно

$$\vec{a}\times\vec{b}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=$$

$$=(y_1z_2-z_1y_2)\vec{i}+(z_1x_2-x_1z_2)\vec{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\vec{k}=$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Пример 4.22. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

Решение.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}=-3\vec{i}-5\vec{j}-\vec{k}.$$

Пример 4.23. Найти площадь треугольника ABC с вершинами $A(1;\,0;\,-1)$, $B(1;\,2;\,1)$, $C(2;\,-1;\,1)$.

Решение. Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Следовательно,

$$S=\frac{1}{2}\,|\,\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\,|.$$

Так как $\overrightarrow{AB}=(0;\,2;\,2)$, $\overrightarrow{AC}=(1;\,-1;\,2)$, то

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=6\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k},$$

$$S=\frac{1}{2}\,|\,6\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}\,|=\frac{1}{2}\sqrt{36+4+4}=\sqrt{11}.$$

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется число

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}.$$

Свойства смешанного произведения векторов:

1) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$;

2) $\left(\alpha\vec{a}\right)\vec{b}\vec{c} = \alpha\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)$;

3) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$;

4) $\vec{a}\vec{b}\left(\vec{c} + \vec{d}\right) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}$.

Если $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}, \vec{c} = \overrightarrow{OC}$ – некомпланарные векторы, то модуль смешанного произведения этих векторов равен объему параллелепипеда с ребрами OA, OB, OC.

Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

В случае, когда заданы декартовы прямоугольные координаты векторов, $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2), \vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$, смешанное произведение находится по формуле

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Пример 4.24. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}, \vec{c} = \vec{j} - \vec{k}$.

Решение. В соответствии с приведенной формулой, имеем

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

4.122. Даны векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, где $|\vec{a}_1| = 3, |\vec{a}_2| = 4, (\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 2\pi/3$. Вычислить скалярные произведения:

а) $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$; б) $\left(3\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2\right) \cdot \left(\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2\right)$; в) $\left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2\right) \cdot \left(\vec{a}_1 + \vec{a}_2\right)$.

4.123. Даны векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, |\vec{a}_1| = 3, |\vec{a}_2| = 5$. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a}_1 + \alpha\vec{a}_2$ и $\vec{a}_1 - \alpha\vec{a}_2$ будут перпендикулярны.

4.124. Вычислить длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}$, $\vec{b} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$, если известно, что $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}, |\vec{q}| = 3$ и $(\vec{p}, \vec{q}) = \pi/4$.

4.125. Определить угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если известно, что $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2=20$ и $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2$.

4.126*. Известно, что в треугольнике ABC $\overrightarrow{AB}=2\vec{e}_1-6\vec{e}_2$ и $\overrightarrow{AC}=3\vec{e}_1+\vec{e}_2$, где $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ – взаимно перпендикулярные орты. Определить углы треугольника.

4.127. Найти угол, образованный единичными векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, если известно, что векторы $\vec{a}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$ и $\vec{b}=5\vec{e}_1-4\vec{e}_2$ перпендикулярны.

4.128. Даны векторы $\vec{a}_1=(4;-2;-4)$ и $\vec{a}_2=(6;-3;2)$. Вычислить:

а) $\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2$; б) $\left(2\vec{a}_1-3\vec{a}_2\right)\cdot\left(\vec{a}_1+2\vec{a}_2\right)$; в) $\left|\vec{a}_1-\vec{a}_2\right|^2$;

г) $\left|2\vec{a}_1-\vec{a}_2\right|$; д) $\mathrm{pr}_{\vec{a}_1}\vec{a}_2$; е) $\mathrm{pr}_{\vec{a}_2}\vec{a}_1$.

4.129. Найти длины сторон и величины углов треугольника с вершинами $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$ и $C(3;-2;1)$.

4.130. Доказать, что четырехугольник с вершинами $A(-3;5;6)$, $B(1;-5;7)$, $C(8;-3;-1)$ и $D(4;7;-2)$ является квадратом.

4.131. Вычислить скалярное произведение векторов, заданных своими координатами:

а) $\vec{a}=(2;-1), \vec{b}=(3;4)$; б) $\vec{a}=(2;-3;4), b=(-1;2;2)$.

4.132. Найти углы между векторами:

а) $\vec{a}=(1;1;-1), b=(5;1;1)$; б) $\vec{a}=(4;-10;1), b=(11;-8;-7)$.

4.133. Даны векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, $|\vec{a}_1|=1, |\vec{a}_2|=2$ и $(\vec{a}_1,\vec{a}_2)=2\pi/3$. Вычислить:

а) $\left|\vec{a}_1\times\vec{a}_2\right|$; б) $\left|\left(\vec{a}_1+\vec{a}_2\right)\times\left(\vec{a}_1+2\vec{a}_2\right)\right|$; в) $\left|\left(\vec{a}_1+3\vec{a}_2\right)\times\left(3\vec{a}_1-\vec{a}_2\right)\right|$.

4.134. Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, |\vec{a}|=|\vec{b}|=5$ и $(\vec{a},\vec{b})=\pi/4$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}-2\vec{b}$ и $3\vec{a}+2\vec{b}$.

4.135. Заданы векторы $\vec{a}_1=(3;-1;2)$ и $\vec{a}_2=(1;2;-1)$. Найти координаты векторов:

а) $\vec{a}_1\times\vec{a}_2$; б) $\left(2\vec{a}_1+\vec{a}_2\right)\times\vec{a}_2$; в) $\left(2\vec{a}_1-\vec{a}_2\right)\times\left(2\vec{a}_1+\vec{a}_2\right)$.

4.136. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$ и $C(4;3;2)$.

4.137. Определить, при каких значениях α и β вектор $\alpha\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$ будет коллинеарен вектору $\vec{a}\times\vec{b}$, если $\vec{a}=(3;-1;1), \vec{b}=(1;2;0)$.

4.138. Найти вектор $\vec{a}\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$, если $\vec{a}=(2;1;-3), \vec{b}=(1;-1,1)$.

4.139. Заданы векторы $\vec{a}_1\left(1;-1;3\right), \vec{a}_2=\left(-2;2;1\right), \vec{a}_3=(3;-2;5)$. Вычислить $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

4.140. Выяснить, образуют ли векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$ базис в множестве векторов, если:

а) $\vec{a}_1 = (2; 3; -1), \vec{a}_2 = (1; -1; 3), \vec{a}_3 = (1; 9; -11);$

б) $\vec{a}_1 = (3; -2; 1), \vec{a}_2 = (2; 1; 2), \vec{a}_3 = (3; -1; -2).$

4.141. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A(2; -3; 5)$, $B(0, 2; 1), C(-2; -2; 3)$ и $D(3; 2; 4)$.

4.142. Проверить, являются ли компланарными данные векторы:

а) $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}, \vec{c} = 14\vec{i} - 13\vec{j} + 7\vec{k};$

б) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}, \vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}, \vec{c} = \vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}.$

4.143. Выяснить, при каком λ векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ будут компланарными:

а) $\vec{a} = (\lambda; 3; 1), \vec{b} = (5; -1; 2), \vec{c} = (-1; 5; 4);$

б) $\vec{a} = (1; 2\lambda; 1), \vec{b} = (1; \lambda; 0), \vec{c} = (0; \lambda; 1).$

4.144. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (2; 2; 3), \vec{b} = (3; 1; 2), \vec{c} = (1; 3; 1)$.

4.145. Доказать, что четыре точки $A(1; 2; -1), B(0; 1; 5), C(-1; 2; 1)$ и $D(2; 1; 3)$ лежат в одной плоскости.

4.146. Вычислить $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$, если $\vec{a} = (3; -1; 2), \vec{b} = (1; 1; -1), \vec{c} = (2; 0; 1)$.

ГЛАВА 5.
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

5.1. Уравнение линии на плоскости

Уравнение вида $F(x, y) = 0$ называется уравнением линии, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на данной плоской линии, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на ней. Если, в частности, $F(x, y) = f(x) - y$, уравнение линии принимает вид $y = f(x)$, и в этом случае линия является графиком функции $f(x)$.

Пример 5.1. На оси Ox найти точку, одинаково удаленную от двух точек $A(-1; 3)$ и $B(2; 5)$.

Решение. Пусть искомая точка $M(x; 0)$. Из условия $\rho(A, M) = \rho(M, B)$ получим уравнение $(x+1)^2 + 9 = (x-2)^2 + 25$, откуда $x = \frac{19}{6}$.

Пример 5.2. На отрезке прямой, соединяющем точки $A(-3; -2)$ и $B(4; 3)$ найти точку, лежащую на оси Ox.

Решение. Точка $M(x; y)$, делящая расстояние между точками A и B в отношении λ будет иметь координаты

$$x = \frac{-3+4\lambda}{1+\lambda},\ y = \frac{-2+3\lambda}{1+\lambda}.$$

Для того, чтобы эта точка лежала на оси Ox, необходимо:

$$y = \frac{-2+3\lambda}{1+\lambda} = 0, \quad \text{откуда} \quad \lambda = \frac{2}{3}.$$

Следовательно, искомая точка $M\left(-\frac{1}{5}; y\right)$.

5.1. Координаты двух противоположных вершин квадрата $ABCD$ находятся в точках $A(-2; 3), C(2; -1)$. Найти координаты остальных вершин.

5.2. На оси Ox найти точку, равноудаленную от начала координат и от точки $M(2; 4)$.

5.3. На оси Oy найти точку, расстояние которой до точки $M(3; 2)$ равно 5.

5.4. В треугольнике с вершинами $A(7; 5), B(3; 2), C(5; 4)$ найти длину медианы AM.

5.5. Найти координаты концов A и D отрезка, который точками $B(-2; 1)$ и $C(1; 3)$ разделен на три равные части.

5.6. Даны вершины $A(6; -6), B(2; -3), C(8; 5)$ треугольника ABC. Найти длину биссектрисы, проведенной из вершины B.

5.7. Найти длины сторон треугольника с вершинами $A(1; 2), B(-3; 4)$, $C(2; -1)$.

Пример 5.3. Составить уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(a; b)$.

Решение. Расстояние от произвольной точки окружности $M(x;y)$ до центра $C(a;b)$ равно радиусу окружности, $CM = R$. С другой стороны, $CM = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$. Следовательно, $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R$, или

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2.$$

Пусть заданы функции $x(t)$ и $y(t)$, непрерывные на некотором промежутке числовой оси. Уравнения $x = x(t), y = y(t)$ называются параметрическими уравнениями линии, если для всякого допустимого значения параметра t точка $M(x(t); y(t))$ принадлежит этой линии, и, обратно, для каждой точки $M(x;y)$, принадлежащей линии, существует такое значение параметра t, что $x = x(t)$ и $y = y(t)$.

Пример 5.4. Записать параметрические уравнения окружности радиуса R с центром в точке $C(a;b)$.

Решение. Пусть $M(x;y)$ – произволь-ная точка окружности. Обозначим через t угол, образуемый отрезком CM с положи-тельным направлением оси Ox (рис. 5.1). Имеем:

$$x - a = C_1M_1 = CL = R\cos t,$$

$$y - b = C_2M_2 = CN = R\sin t.$$

Таким образом, параметрические урав-нения данной окружности имеют вид

$$x = a + R\cos t, \quad y = b + R\sin t.$$

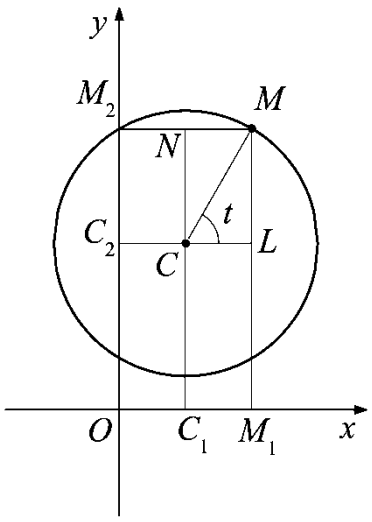


Рис. 5.1

Уравнение линии в полярных координатах имеет вид $F(r,\varphi) = 0$ или $r = f(\varphi)$. Оно может быть получено или непосредственно, исходя из свойств линии, или переходом к полярным координатам в уравнении этой линии, заданном в декартовых координатах.

Пример 5.5. Составить уравнение окруж-ности радиуса R, касающейся полярной оси в по-люсе, центр которой расположен выше полярной оси (рис. 5.2).

<u>Решение.</u> Пусть $M(r;\varphi)$ – произвольная точка окружности, $OA = 2R$ – диаметр окружно-сти. Так как в треугольнике OAM угол при вер-шине M прямой, а угол при вершине O равен $\frac{\pi}{2} - \varphi$, то $2R\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = r$, или

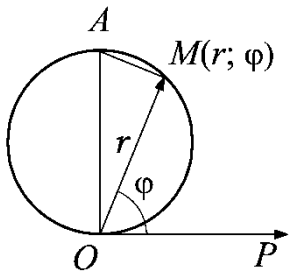


Рис. 5.2

$$r = 2R\sin\varphi.$$

5.8. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от двух данных точек $A(-1;2), B(2;-3)$.

5.9. Составить уравнение множества точек, удаленных от точки $C(-1;2)$ на 5 единиц.

5.10. Найти точки пересечения линий $x^2 + y^2 = 25, x + 7y = 25$.

5.11. Вывести уравнение множества точек, равноудаленных от точек пересечения линий $x^2 + y^2 = 25$ и $4x - 3y = 0$.

5.12. Вывести уравнение множества точек, для которых расстояние до точки $A(1;0)$ вдвое меньше расстояния до точки $B(4;0)$.

5.13. Прямая перпендикулярна к полярной оси и отсекает на ней отрезок, равный 5. Составить уравнение прямой в полярных координатах.

5.14. В полярных координатах составить уравнение множества точек, расстояние от которых до полярной оси равно 5.

Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах.

5.15. $r = 4.$ **5.16.** $\varphi = \dfrac{\pi}{3}.$ **5.17.** $r\sin\varphi = -1.$

Записать в полярных координатах уравнения линий.

5.18. $x^2 + y^2 = R^2.$ **5.19.** $x - y = 0.$

5.20. $x^2 - y^2 = a^2.$ **5.21.** $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a\left(3x^2y - y^3\right).$

Записать в декартовых координатах уравнения линий.

5.22. $r\cos\varphi = a.$ **5.23.** $r = 2a\cos\varphi.$

5.24. $r = \dfrac{2a}{1+\cos\varphi}.$ **5.25.** $r = 2a(1-\cos\varphi).$

Построить линии, заданные параметрическими уравнениями.

5.26. $x = 2 - t,\ y = 1 + 2t.$ **5.27.** $x = 2\cos t - 3,\ y = 2\sin t + 1.$

5.28. $x = t,\ y = 2t^{-1}.$ **5.29.** $x = 2t,\ y = t - t^2.$

5.2. Прямая линия на плоскости

В декартовой прямоугольной системе координат прямая на плоскости может быть задана уравнением одного из приведенных ниже видов.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$ *перпендикулярно нормальному вектору* $\vec{n} = (A; B)$, записанное в *векторной форме*

$$\vec{n}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_1) = 0, \tag{5.1}$$

где $\vec{r}_1 = (x_1; y_1)$ и $\vec{r} = (x; y)$ – радиус-векторы точки M_1 и произвольной точки прямой $M(x; y)$. В координатной форме уравнение (5.1) имеет вид

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0.$$

Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0. \qquad (5.2)$$

Если прямая пересекает координатные оси Ox и Oy в точках $A(a; 0)$ и $B(0; b)$, $ab \neq 0$, то ее уравнение можно записать в виде *уравнения прямой в отрезках*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

В этом случае говорят, что прямая отсекает отрезок a на оси Ox и отрезок b на оси Oy.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b,$$

где угловой коэффициент k равен тангенсу угла, образованного прямой с положительным направлением оси Ox, а b представляет собой ординату точки пересечения прямой с осью Oy.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом, проходящей через заданную точку $M(x_1; y_1)$

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Нормальное уравнение прямой на плоскости

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p, \qquad (5.3)$$

где p – расстояние от начала координат до прямой, а α – угол между осью абсцисс и нормальным вектором $\vec{n}$, направленным из начала координат в сторону прямой.

Общее уравнение прямой (5.2) можно привести к нормальному виду (5.3), умножив обе части уравнения (5.2) на нормирующий множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

При $C \neq 0$ μ и C имеют противоположные знаки.

Векторно-параметрическое уравнение прямой на плоскости

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{s},$$

где $\vec{s} = (m; n)$ – направляющий вектор прямой, проходящей через точку $M_1(x_1; y_1)$. Координатная форма этого уравнения дает *параметрические уравнения прямой на плоскости*

$$x = x_1 + tm, \quad y = y_1 + tn.$$

Каноническое уравнение прямой на плоскости

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n},$$

представляющее собой уравнение прямой, проходящей через точку с координатами $(x_1; y_1)$ параллельно направляющему вектору $\vec{s} = (m; n)$.

Пример 5.6. Привести к нормальному виду уравнение прямой $4x - 3y - 10 = 0$.

Решение. В данном случае $C < 0$, поэтому нормирующий множитель $\mu = \frac{1}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{1}{5}$. Нормальное уравнение прямой имеет вид $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2 = 0.$

В *полярных координатах* r, φ уравнение прямой на плоскости имеет вид

$$r = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)},$$

где α – угол между нормальным вектором прямой и осью абсцисс.

Если на плоскости даны две прямые, заданные уравнениями

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0, \end{aligned} \tag{5.4}$$

то угол φ между прямыми можно найти из соотношения

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{5.5}$$

Признаком перпендикулярности двух прямых, заданных уравнениями (5.4), является соотношение $A_1A_2 + B_1B_2 = 0,$ а признаком их параллельности – соотношение $A_2B_1 = A_1B_2$.

Пример 5.7. Найти угол между прямыми $2x - y + 5 = 0$ и $3x + y - 1 = 0$.

Решение. Имеем $A_1 = 2, B_1 = -1; A_2 = 3, B_2 = 1$. По формуле (5.5) находим

$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{откуда } \varphi = 45^\circ.$$

Если прямые заданы уравнениями $y = k_1x + b_1,\ y = k_2x + b_2$, то угол φ между прямыми можно найти из соотношения

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2},\ k_1k_2 \neq -1.$$

Для параллельных прямых $k_1 = k_2$, а для перпендикулярных $k_1k_2 = -1$.

Расстояние d от точки $M_1(x_1; y_1)$ до прямой, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$, находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

5.30. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $A(2; -3)$.

5.31. Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Oy для каждой из прямых:

а) $2x - y + 2 = 0;$ б) $3x - 4y + 1 = 0;$

в) $2y + 5 = 0;$ г) $x = 1 - 2t,\ y = 2 + t.$

5.32. Найти отрезки a и b, отсекаемые прямыми на осях координат.

а) $2x + 3y - 6 = 0;$ б) $3x - 4y - 12 = 0.$

5.33. Найти значения параметра b, при котором прямая $y = 2x + b$ отсекает на оси Ox отрезок $a = 3$.

5.34. Составить уравнения прямых, проходящих через точки:

а) $A(1; -3),\ B(4; 3);$ б) $A(2; 1),\ B(2; -3).$

5.35. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; -3)$ параллельно прямой:

а) $2x - 3y + 4 = 0;$ б) $3x + 5y + 3 = 0.$

5.36. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1; 4)$ и перпендикулярной к прямой $-2x + 5y - 6 = 0$.

5.37. Через точку пересечения прямых $2x - 3y - 5 = 0$ и $3x - 4y - 7 = 0$ провести прямую, перпендикулярную к прямой $5x + 6y - 2 = 0$.

5.38. Найти угол между прямыми:

а) $3x - y + 2 = 0,\ 2x + y - 6 = 0;$ б) $3x - 4y + 1 = 0,\ 8x + 6y - 5 = 0;$

в) $y = 2x - 3,\ y = 3x + 5;$ г) $5x - y - 1 = 0,\ 2x - 3y + 2 = 0.$

5.39. Найти точку, симметричную точке $N(4; 5)$ относительно прямой $8x + 6y - 37 = 0$.

5.40. Найти точку C пересечения прямой, проходящей через точки $A(4;3)$ и $B(-2;6)$, с осью Oy.

5.41. Составить уравнения сторон и медиан треугольника с вершинами в точках $A(3;2), B(5;-2), C(1;0)$.

5.42. Найти расстояние от начала координат до прямой $4x-3y-20=0$.

5.43. Найти расстояние от точки $A(-1;4)$ до прямой $4x+3y-3=0$.

5.44. На оси ординат найти точку A, находящуюся на одинаковом расстоянии от начала координат и от прямой $4x+3y-8=0$

5.45. Составить уравнение биссектрисы угла, образованного прямыми $x+3y-7=0$ и $2x-6y+15=0$, внутри которого находится точка $M(1;-2)$.

5.46. Для треугольника с вершинами в точках $A(3;5), B(-1;2), C(-3;3)$ составить уравнения медианы, биссектрисы и высоты, проведенных из вершины A.

5.47. Найти площадь квадрата, если одна из его вершин $A(9;-11)$, а уравнение противоположной стороны $7x+5y-82=0$.

5.48. Составить каноническое, параметрическое, общее и нормальное уравнения прямой, проходящей через точки $A(7;0), B(3;1)$.

5.49. Привести к нормальному виду уравнения прямых:

а) $3x+4y-15=0;$ б) $2y+5=0;$

в) $5x-12y+26=0;$ г) $x-y-2=0.$

5.50. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;2)$ на расстоянии $d=5$ от точки $B(6;1)$.

5.51. Найти расстояние между параллельными прямыми:

а) $3x-4y+10=0,\ 6x-8y+5=0;$

б) $5x+12y+26=0,\ 10x+24y-39=0.$

5.52. Составить общее уравнение прямой $x=1+3t,\ y=-4+2t$.

5.3. Плоскость и прямая в пространстве

В декартовой прямоугольной системе координат в пространстве положение плоскости вполне определяется заданием точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ этой плоскости и ненулевым вектором $\vec{n}=(A;B;C)$, перпендикулярным к плоскости. Вектор $\vec{n}=(A;B;C)$ называется *нормальным* вектором плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(A;B;C)$ в *векторной форме* имеет вид

$$\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_1)=0,$$

где $\vec{r}_1=(x_1;y_1;z_1)$ – радиус-вектор точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{r}=(x;y;z)$ – радиус-вектор произвольной точки плоскости.

В координатной форме оно записывается в виде

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \qquad (5.6)$$

Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (5.7)$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой, записывается в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.8)$$

Уравнение плоскости в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,\ abc \neq 0.$$

В этом случае, $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ – точки пересечения плоскости с координатными осями Ox, Oy и Oz соответственно.

Нормальное уравнение плоскости

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \qquad (5.9)$$

где p – расстояние от плоскости до начала координат, а α, β, γ – углы, которые образует с осями координат нормальный вектор $\vec{n}$, направленный из начала координат в сторону плоскости.

Общее уравнение плоскости (5.7) можно привести к нормальному виду (5.9), умножив обе его части на нормирующий множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

взяв перед корнем знак, противоположный знаку числа D.

Пример 5.8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1; 2; -1)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}$, где $B(2; 5; 1)$.

Решение. В данном случае нормальный вектор плоскости равен $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (1; 3; 2)$. Следовательно, уравнение плоскости имеет вид (см. (5.6)) $(x-1) + 3(y-2) + 2(z+1) = 0$, или $x + 3y + 2z - 5 = 0$.

Пример 5.9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1; -1; 2)$ и ось Ox.

Решение. Возьмем на оси Ox две точки: $O(0; 0; 0)$ и $B(1; 0; 0)$ и составим уравнение плоскости, проходящей через точки O, B и A. В соответствии с (5.8) оно имеет вид

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad 2y + z = 0.$$

Пример 5.10. Привести к нормальному виду уравнение плоскости $2x - 2y + z + 15 = 0$.

Решение. Умножая обе части уравнения на нормирующий множитель $\mu = -\frac{1}{\sqrt{4+4+1}} = -\frac{1}{3}$, получим нормальное уравнение плоскости

$$-\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - 5 = 0.$$

Косинус угла между двумя плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ определяется формулой

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (5.10)$$

Условие параллельности плоскостей: $A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2$. Условие перпендикулярности плоскостей имеет вид $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

Пример 5.11. Найти угол между плоскостями $11x - 8y - 7z + 3 = 0$, $4x - 10y + z - 2 = 0$.

Решение. Имеем $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1) = (11; -8; -7)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2) = (4; -10; 1)$. По формуле (5.10) находим

$$\cos\alpha = \frac{11 \cdot 4 + (-8)\cdot(-10) + (-7)\cdot 1}{\sqrt{121 + 64 + 49}\sqrt{16 + 100 + 1}} = \frac{117}{\sqrt{234}\sqrt{117}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, острый угол между плоскостями $\alpha = \pi/4$.

Пример 5.12. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2; 0; -1)$ и $M_2(4; 2; 2)$ перпендикулярно к плоскости $x + 2y - 3z + 4 = 0$.

Решение. Нормальный вектор $\vec{n}$ искомой плоскости перпендикулярен нормальному вектору заданной плоскости $\vec{n}_1 = (1; 2; -3)$ и вектору $\overrightarrow{M_1M_2} = (2; 2; 3)$. Поэтому в качестве вектора $\vec{n}$ можно взять вектор

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12\vec{i} - 9\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Таким образом, уравнение плоскости можно записать в виде (см. (5.6))

$$12(x-2) - 9y - 2(z+1) = 0 \quad \text{или} \quad 12x - 9y - 2z - 26 = 0.$$

Расстояние от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до плоскости, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (5.11)$$

Пример 5.13. Найти расстояние от точки $A(3;4;0)$ до плоскости $2x+2y-z+4=0$.

Решение. По формуле (5.11) находим

$$d = \frac{|2\cdot 3 + 2\cdot 4 - 1\cdot 0 + 4|}{\sqrt{4+4+1}} = 6.$$

5.53. Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку $A(1;3;-2)$ параллельно координатным плоскостям Oxy, Oyz, Oxz.

5.54. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $A(3;4;-5)$.

5.55. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $A(9;-4;7)$.

5.56. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;-1;4)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (-2;1;3)$.

5.57*. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(7;0;3)$ и $B(1;-1;3)$ параллельно оси Oz.

5.58. Найти отрезки, отсекаемые плоскостью $2x - y + 3z - 6 = 0$ на осях координат.

5.59. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;-1;5)$ параллельно плоскости $2x - 3y + 5z - 2 = 0$.

5.60. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;-3;2)$ параллельно плоскости $7x + 3y - 8z = 0$.

5.61. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oz перпендикулярно к плоскости $9x - y + 5z - 18 = 0$.

5.62*. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;-3;1)$ и $B(1;0;-1)$ перпендикулярно к плоскости $4x - 5y + 3z + 6 = 0$.

5.63. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;1;0)$, $B(0;1;1)$ и $C(0;1;-2)$.

5.64. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;-2;-1)$ и $B(4;1;1)$ параллельно вектору $\vec{s} = (5;3;4)$.

5.65. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;-3;1)$ параллельно векторам $\vec{a} = (1;-1;4)$ и $\vec{b} = (-5;1;3)$.

5.66. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;5;-4)$ и отсекающей на осях координат равные отрезки.

5.67. Найти углы между двумя плоскостями:

а) $3x - 2y + 5z - 2 = 0,\ x + 4y + z - 6 = 0;$

б) $x - 4y - 8z + 2 = 0,\ x + 20y + 7z = 0.$

5.68*. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-3;1;-2)$ перпендикулярно к плоскостям $6x-y+5z-13=0$ и $z=0$.

5.69. Привести к нормальному виду уравнения плоскостей:

а) $x+y-4z+3=0;$ б) $2x-y+2z-15=0;$

в) $3x-2y+6z-3=0;$ г) $2x-11y+10z-45=0.$

5.70. Найти расстояние от точки до плоскости в каждом из следующих случаев:

а) $M(2;-1;5),\ x-2y+2z-5=0;$

б) $M(2;-3;5),\ 2x+3y-6z-7=0;$

в) $M(2;-1;-1),\ 16x-12y+15z-4=0.$

5.71. Найти расстояние между параллельными плоскостями:

а) $3x+2y-6z-14=0,\ 3x+2y-6z+35=0;$

б) $12x-16y+15z+50=0,\ 12x-16y+15z+100=0.$

5.72. На оси Ox найти точку, отстоящую от плоскости $6x+2y+3z-12=0$ на расстоянии $d=6$.

5.73. Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $6x+3y-2z+13=0$ и отстоящей от нее на 7 единиц.

5.74. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(7;0;-2),\ B(0;0;8)$ и отстоящей от начала координат на 4 единицы.

5.75. Даны вершины пирамиды $A(3;5;3), B(-2;11;-5), C(1;-1;4),$ $D(0;6;4)$. Найти высоту, опущенную из вершины D.

Прямая в пространстве может быть задана уравнением одного из приведенных ниже видов.

Векторно-параметрическое уравнение прямой в пространстве

$$\vec{r}=\vec{r}_1+t\vec{s}, \tag{5.12}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор произвольной точки прямой, $\vec{r}_1$ – радиус-вектор некоторой точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, принадлежащей прямой, а $\vec{s}=(l;m;n)$ – направляющий вектор прямой. Координатная форма уравнения (5.12) дает *параметрические уравнения прямой в пространстве*

$$x=x_1+tl,$$

$$y=y_1+tm,$$

$$z=z_1+tn.$$

Канонические уравнения прямой в пространстве

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}, \tag{5.13}$$

представляющие собой уравнения прямой, проходящей через точку с координатами $(x_1; y_1; z_1)$ параллельно направляющему вектору $\vec{s} = (l; m; n)$.

Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Общие уравнения прямой в пространстве

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{5.14}$$

задающие прямую, как линию пересечения двух плоскостей.

Пример 5.14. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $A(1; 2; -1)$ параллельно вектору $\vec{s} = (-1; 0; 2)$.

Решение. Канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+1}{2}.$$

Эти уравнения эквивалентны системе двух уравнений

$$\begin{cases} y - 2 = 0, \\ 2x + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Пример 5.15. Прямая задана общими уравнениями

$$2x - y + 5z - 2 = 0, \ 3x + 4y - z - 3 = 0. \tag{5.15}$$

Составить канонические уравнения прямой.

Решение. Положим в уравнениях (5.15) $z = 0$, тогда получим систему уравнений $2x - y - 2 = 0, \ 3x + 4y - 3 = 0,$ из которой находим $x = 1, y = 0.$ Таким образом, точка $M_1(1; 0; 0)$ лежит на рассматриваемой прямой. Так как $\vec{n}_1 = (2; -1; 5), \vec{n}_2 = (3; 4; -1)$, то направляющий вектор прямой равен

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -19\vec{i} + 17\vec{j} + 11\vec{k}.$$

Следовательно, канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x-1}{-19} = \frac{y}{17} = \frac{z}{11}.$$

Угол между прямыми в пространстве можно определить с помощью формулы

$$\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1|\,|\vec{s}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\,\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}, \qquad (5.16)$$

где $\vec{s}_1 = (l_1; m_1; n_1), \vec{s}_2 = (l_2; m_2; n_2)$ – направляющие векторы данных прямых. Если две прямые параллельны, то их направляющие векторы коллинеарны, т. е. выполняется условие $l_1/l_2 = m_1/m_2 = n_1/n_2$. Если две прямые взаимно перпендикулярны, то $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

Пример 5.16. Найти угол между прямыми

$$\frac{x-1}{7} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{4} \quad \text{и} \quad \frac{x+5}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{7}.$$

Решение. Направляющими векторами прямых являются векторы $\vec{s}_1 = (1; -3; 8)$ и $\vec{s}_2 = (3; 4; 7)$. По формуле (5.16) находим

$$\cos\varphi = \frac{7\cdot 3 + (-3)\cdot 4 + 4\cdot 7}{\sqrt{49+9+16}\,\sqrt{9+16+49}} = \frac{37}{74} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, острый угол между прямыми $\varphi = \pi/3$.

Пример 5.17. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(-4; -5; 3)$ и перпендикулярной к прямым

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}, \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-2}.$$

Решение. Искомая прямая перпендикулярна к направляющим векторам данных прямых $\vec{s}_1 = (3; -2; -1)$ и $\vec{s}_2 = (2; 1; -2)$. Поэтому в качестве ее направляющего вектора можно взять векторное произведение

$$\vec{s} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k}.$$

Таким образом, уравнения искомой прямой имеют вид

$$\frac{x+4}{5} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-3}{7}.$$

Если прямая задана каноническими уравнениями (5.13), а плоскость общим уравнением (5.7), то синус угла между прямой и плоскостью определяется формулой

$$\sin\varphi = \frac{\vec{s}\cdot\vec{n}}{|\vec{s}|\,|\vec{n}|} = \frac{|\,Al + Bm + Cn\,|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Если прямая параллельна плоскости, то $Al + Bm + Cn = 0$. Если прямая перпендикулярна к плоскости, то $A/l = B/m = C/n$.

Пример 5.18. Найти значение m, при котором прямая $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{m}=\frac{z-3}{-2}$ параллельна плоскости $x-3y+6z+3=0.$

Решение. Направляющий вектор прямой $\vec{s}=(3;m;-2)$, а нормальный вектор плоскости $\vec{n}=(1;-3;6)$. Условие параллельности прямой и плоскости имеет вид: $\vec{n}\cdot\vec{s}=-3m-9=0,$ откуда $m=-3$.

Расстояние от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до прямой (5.13), проходящей через точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, равно

$$d=\frac{\left|\left(\vec{r}_0-\vec{r}_1\right)\times\vec{s}\right|}{|\vec{s}|},$$

где $\vec{r}_0-\vec{r}_1=(x_0-x_1;y_0-y_1;z_0-z_1)$.

Пример 5.19. Найти расстояние от точки $M_0(1;3;-2)$ до прямой

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{-2}.$$

Решение. Точка $M_1(1;-3;1)$ лежит на прямой. Поэтому $\vec{r}_0-\vec{r}_1=(0;6;-3),$ $\vec{s}=(1;2;-2).$ Далее находим

$$\left(\vec{r}_0-\vec{r}_1\right)\times\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 6 & -3\\ 1 & 2 & -2\end{vmatrix}=-6\vec{i}-3\vec{j}-6\vec{k},\ \left|\left(\vec{r}_0-\vec{r}_1\right)\times\vec{s}\right|=9,\ |\vec{s}|=3,$$

и искомое расстояние $d=3$.

5.76. Составить параметрические и канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(4;-2;3)$ параллельно вектору $\vec{a}=(4;5;-7)$.

5.77. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(9;-8;-5)$ перпендикулярно:

а) плоскости $2x+3y+4z-6=0;$ б) плоскости $Oxy.$

5.78. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2;5;-8)$ параллельно прямой $x=3-4t,\ y=7+9t,\ z=-2-6t$.

5.79. Составить параметрические уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника с вершинами $A(4;-5;7),\ B(3;2;-1),\ C(-6;8;10)$.

5.80. Написать канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями $x-2y+3z-4=0,\ 3x+2y-5z-4=0$.

5.81. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(-3;1;0)$ параллельно прямой $4x-y+3z-1=0,\ x+3y-5z+7=0$.

5.82. Найти косинус угла между прямыми $x=2+8t,\ y=-5+4t,\ z=-2+t$ и $x=1+2t,\ y=-1-2t,\ z=3+t$.

5.83. Найти угол между прямой $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-7}{1}$ и плоскостью $x+y-2z-5=0$.

5.84. Найти расстояние от начала координат до прямой $x=6+3t$, $y=-5-5t$, $z=-2-t$.

5.85. Найти расстояние от точки $M(1;-1;-2)$ до прямых:

а) $x=5+3t,\ y=2t,\ z=-25-2t;$

б) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-13}{4}$.

5.86. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}$ и плоскости $2x-y+z+4=0$.

5.87*. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;1;4)$ и прямую $\frac{x-3}{2}=\frac{y+5}{11}=\frac{z}{3}$.

5.88. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1;1;2)$ и прямую $x=1+5t,\ y=-1+t,\ z=2t$.

5.89*. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-3}{-4}=\frac{y-7}{1}=\frac{z+2}{-1}$ перпендикулярно к плоскости $x-5y+2z-7=0$.

5.90*. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4}$ перпендикулярно к плоскости $x+3y-z+2=0$.

5.91. Проверить, лежит ли прямая $x=1+5t,\ y=1+4t,\ z=1+7t$ в плоскости $x-3y+z+1=0$.

5.92*. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $A(-1;1;-1)$ и пересекающей прямые $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{-1}$ и $\frac{x}{4}=\frac{y+5}{-5}=\frac{z-3}{2}$.

5.93. Точка A лежит на прямой $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{-1}$ и равноудалена от точек $B(3;0;2)$ и $C(-1;1;5)$. Найти координаты точки A.

5.4. Линии второго порядка

Линия второго порядка на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат определяется уравнением второй степени

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0.$$

Примерами линий второго порядка являются окружность, эллипс, гипербола, парабола. Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(a;b)$ имеет вид (см. пример 5.3)

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

5.94. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2-2x+y^2+4y+1=0$.

5.95. Составить уравнение окружности, касающейся оси Oy и проходящей через точки $M(1;6)$ и $N(5;-2)$.

5.96*. Составить уравнение окружности, имеющей центр в точке $C(5;5)$ и касающейся прямой $3x+4y-15=0$.

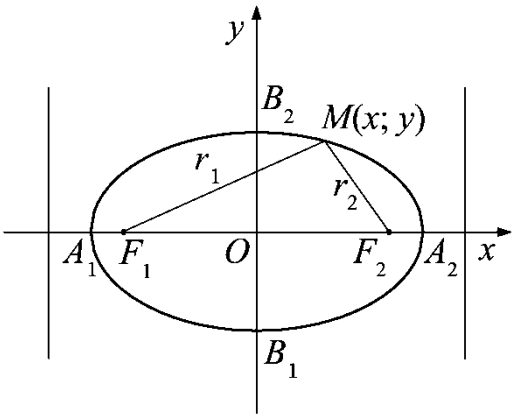
Определение. *Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая чем расстояние между фокусами.*

Каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (5.17)$$

где a – большая, b – малая полуоси. *Фокусами* эллипса, определяемого уравнением (5.17), являются точки $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ (см. рис. 5.3), где $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Точки $A_1(-a;0), A_2(a;0), B_1(-b;0), B_2(0;b)$ называются *вершинами* эллипса.

Отношение расстояния между фокусами к длине большой оси эллипса называется *эксцентриситетом* эллипса, $\varepsilon=c/a$.



Отрезки $F_1M=r_1$ и $F_2M=r_2$, где $M(x;y)$ – произвольная точка эллипса, называются *фокальными радиусами* этой точки. Их можно вычислить по формулам: $r_1=a+\varepsilon x, r_2=a-\varepsilon x$.

Прямые $x=-a/\varepsilon$ и $x=a/\varepsilon$ называ-ются *директрисами* эллипса.

Рис. 5.3

Отношение расстояния r от любой точки эллипса до фокуса к расстоянию d от той же точки до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса, $r/d=\varepsilon$.

Пример. **5.20.** Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса $9x^2+16y^2=144$.

Решение. Разделив данное уравнение на 144, приведем его к каноническому виду $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, Отсюда находим, что большая полуось $a=4$, малая полуось $b=3$. Так как $c^2=a^2-b^2$, то $c=\sqrt{16-9}=\sqrt{5}$.

Следовательно, фокусы эллипса находятся в точках $F_1(-\sqrt{5};0)$, $F_2(\sqrt{5};0)$ соответственно. Эксцентриситет $\varepsilon = c/a = \sqrt{5}/4$.

5.97. Составить уравнение эллипса, фокусы которого находятся на оси *Ox*, симметрично относительно начала координат, если:

а) большая ось равна 10, а расстояние между фокусами 8;

б) малая полуось равна 5, а расстояние между фокусами 4;

в) расстояние между фокусами равно 6, а эксцентриситет $3/5$.

5.98. Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса, заданного уравнением $4x^2 + 9y^2 = 36$.

5.99. Найти расстояние между директрисами эллипса $9x^2 + 18y^2 = 162$.

5.100. Построить линии, определяемые уравнениями:

а) $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$; б) $y = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$; в) $x = \frac{1}{7}\sqrt{49 - y^2}$;

5.101. Определить точки эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$, расстояние от которых до правого фокуса равно 4.

5.102. Определить точки эллипса $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$, расстояние от которых до правого фокуса в четыре раза больше расстояния до левого фокуса.

5.103. Составить каноническое уравнение эллипса, если:

а) фокусы эллипса находятся в точках $(\pm 2; 0)$, а директрисами являются прямые $x = \pm 18$;

б) расстояние от директрисы до ближайшей вершины равно 4, а до вершины, лежащей на оси *Oy* равно 8;

в) директрисами эллипса являются прямые $x = \pm 4$, а четырехугольник с вершинами в фокусах и концах малой оси – квадрат.

5.104. Фокусы эллипса делят расстояние между директрисами на три части. Найти его эксцентриситет.

5.105. Определить эксцентриситет эллипса, если его малая ось видна из фокусов под прямым углом.

5.106. Составить уравнения сторон квадрата, вписанного в эллипс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

5.107. На эллипсе $x^2 + 4y^2 = 4$ найти точки, из которых отрезок, соединяющий фокусы, виден: а) под прямым углом; б) под углом 120°.

5.108*. Орбита Земли относительно Солнца – эллипс с полуосью $a = 150$ млн. км и эксцентриситетом $\varepsilon = 0{,}017$. Найти разность максимального и минимального расстояний от Земли до Солнца, которое находится в одном из фокусов орбиты Земли.

Определение. *Гиперболой называется множество всех точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами гиперболы, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.*

Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (5.18)$$

где a – *действительная*, b – *мнимая полуоси*. *Фокусами* гиперболы, определяемой уравнением (5.18), являются точки $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ (см. рис. 5.4), где $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ называются *вершинами* гиперболы.

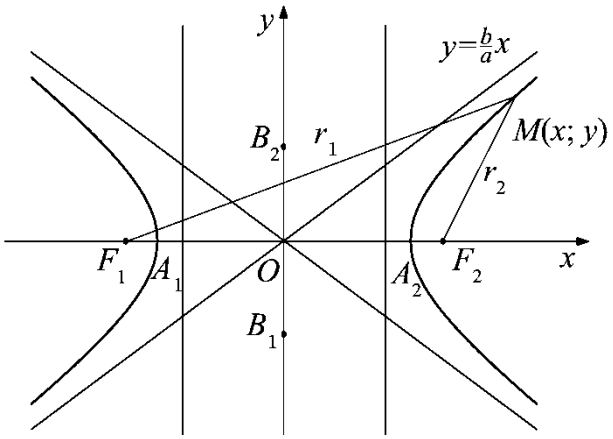


Рис. 5.4

Прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ являются *асимптотами* гиперболы.

Отношение расстояния между фокусами к длине действительной оси гиперболы называется *эксцентриситетом* гиперболы, $\varepsilon=c/a$.

Отрезки $F_1M=r_1$ и $F_2M=r_2$, где $M(x;y)$ – произвольная точка гиперболы, называются *фокальными радиусами* этой точки. Фокальные радиусы равны: $r_1=a+\varepsilon x, r_2=a-\varepsilon x$, если точка M лежит на правой ветви гиперболы, и $r_1=-a-\varepsilon x, r_2=-a+\varepsilon x$, если эта точка лежит на левой ветви гиперболы.

Прямые $x=\pm a/\varepsilon$ называются *директрисами* гиперболы. Как и для эллипса, отношение расстояния от любой точки гиперболы до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету гиперболы.

Пример 5.21. Составить каноническое уравнение гиперболы, если ее асимптоты заданы уравнениями $y=\pm\frac{3}{4}x$, а расстояние между фокусами равно 20.

Решение. Из условия задачи следует, что $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}, 2c=2\sqrt{a^2+b^2}=20$. Отсюда находим, что $a=8, b=6$. Следовательно, каноническое уравнение гиперболы $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

5.109. Составить уравнение гиперболы, центр которой совпадает с началом координат, а действительная ось с осью *Ox*, если:

а) действительная полуось равна 3, а расстояние между фокусами равно 10;

б) действительная ось гиперболы равна 8 и гипербола проходит через точку $M\left(8; 2\sqrt{3}\right)$;

в) расстояние между директрисами равно $8/3$ и эксцентриситет равен $3/2$.

5.110. Дана гипербола $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Найти координаты фокусов и эксцентриситет.

5.111. Определить угол между асимптотами гиперболы, если ее эксцентриситет равен $\sqrt{2}$.

5.112. Найти эксцентриситет гиперболы, если угол между ее асимптотами равен $\pi/3$.

5.113. На гиперболе $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ найти точки, расстояние от которых до правого фокуса равно 6.

5.114. На гиперболе $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ найти точки, для которых расстояние от левого фокуса вдвое больше, чем от правого.

5.115. Найти расстояние от фокуса гиперболы $x^2-8y^2=8$ до ее асимптоты.

5.116. Найти точки пересечения гиперболы $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ и прямой $2x-y-10=0$.

5.117. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет $\varepsilon=2$.

5.118. Написать уравнение гиперболы, проходящей через фокусы эллипса $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ и имеющей фокусы в вершинах этого эллипса.

5.119. Директрисы гиперболы делят расстояние между ее фокусами на три равные части. Найти эксцентриситет гиперболы.

5.120. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon=3$, фокальный радиус ее точки *M*, проведенный из правого фокуса, равен 16. Найти расстояние от точки *M* до правой директрисы.

5.121*. Доказать, что вершины гиперболы и четыре точки пересечения ее директрис с асимптотами лежат на одной окружности.

Определение. *Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых находится на одинаковом расстоянии от данной точки, называемой фокусом параболы, и данной прямой, называемой директрисой.*

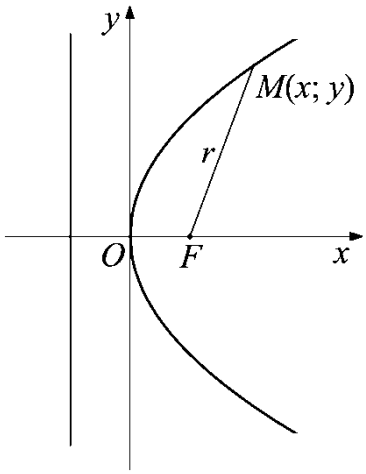


Рис.5.5

Каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px, \qquad (5.19)$$

где p – параметр параболы. Парабола, определяемая уравнением (5.19), проходит через начало координат и симметрична относительно оси Ox (рис. 5.5). Уравнение директрисы параболы имеет вид $x = -p/2$, а ее *фокусом* является точка $F(p/2, 0)$.

Отрезок $FM = r$, где $M(x; y)$ – произвольная точка параболы, называется *фокальным радиусом* этой точки. Он равен $r = x + p/2$.

Уравнение параболы, проходящей через начало координат, симметричной относительно оси Oy и лежащей в верхней полуплоскости, имеет вид $x^2 = 2py$.

Пример 5.22. Написать уравнение касательной к параболе $y^2 = 8x$, параллельной прямой $2x + 2y - 3 = 0$.

Решение. Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Функция $y = f(x)$ задается уравнением параболы $y^2 = 2px$ как неявная функция. Дифференцируя это уравнение, получим $yy' = p,\ y_0y'(x_0) = p$. Отсюда находим, что $y_0y - y_0^2 = y_0y_0'(x - x_0),\ y_0y - 2px_0 = \ = p(x - x_0),\ y_0y = p(x + x_0)$. В данном примере $p = 4$. По условию, угловой коэффициент касательной $k = p/y_0 = -1$. Отсюда получаем, что $y_0 = -4,\ x_0 = 2$. Таким образом, уравнение искомой касательной имеет вид $x + y + 2 = 0$.

5.122. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, а ось симметрии совпадает с осью Ox, если:

а) расстояние от вершины до фокуса равно 3;

б) расстояние от фокуса до директрисы равно 8;

в) парабола проходит через точку $M(1; 2)$.

5.123. На параболе $y^2 = 4x$ найти точки, расстояние от которых до фокуса равно 5.

5.124. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, а ось симметрии совпадает с осью Oy, если парабола проходит через точку $M(4; 8)$.

5.125*. Камень, брошенный под углом к горизонту, описал дугу параболы и упал на расстоянии 16 м от начальной точки. Найти параметр p параболы, если наибольшая высота, достигнутая камнем, равна 12 м.

5.126*. Найти, под каким углом к горизонту должна быть направлена струя воды, вылетающая из пожарного рукава со скоростью $v = 20$ м/с, чтобы попасть в окно, находящееся на высоте $h = 6$ м в стене, расположенной на расстоянии $d = 10$ м от наконечника рукава.

5.127. Определить точки пересечения прямой $x + y - 3 = 0$ и параболы $y^2 = 4x$.

5.128. Составить уравнение прямой, которая касается параболы $y^2 = 12x$ и параллельна прямой $3x - y + 5 = 0$.

5.129*. Найти наибольший радиус окружности, лежащей внутри параболы $y^2 = 2px$ и касающейся этой параболы в ее вершине.

Общее по форме уравнение для эллипса, правой ветви гиперболы и параболы в полярных координатах имеет вид

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi}. \tag{5.20}$$

При этом полюс совпадает с фокусом, а полярная ось направлена в сторону, противоположную ближайшей к этому полюсу директрисе. Уравнение (5.20) при $\varepsilon < 1$ описывает эллипс, при $\varepsilon = 1$ – параболу, при $\varepsilon > 1$ – правую ветвь гиперболы. Входящее в это уравнение число p для параболы совпадает с ее параметром. Для эллипса и гиперболы $p = b^2/a$.

Пример 5.23. Написать каноническое уравнение линии, заданной в полярных координатах уравнением $r = \dfrac{5}{3 - 2\cos\varphi}$.

Решение. Преобразуя уравнение линии к виду

$$r = \frac{\frac{5}{3}}{1 - \frac{2}{3}\cos\varphi},$$

найдем $p = 5/3, \varepsilon = 2/3$. Таким образом, данная линия – эллипс. Далее имеем:

$$\frac{b^2}{a} = \frac{5}{3}, \quad \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{5}{9},$$

откуда находим $a = 3, b = \sqrt{5}$ и каноническое уравнение линии

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

5.130. Составить уравнение эллипса в полярных координатах, если дано его каноническое уравнение $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, полярная ось совпадает с осью Ox, а полюс – с левым фокусом.

5.131. Составить уравнение правой ветви гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ в полярных координатах, считая, что полярная ось совпадает с осью Ox, а полюс – с левым фокусом.

Составить канонические уравнения следующих линий, заданных уравнениями в полярных координатах:

5.132. $r=\frac{3}{2-\cos\varphi}$. **5.133.** $r=\frac{18}{4-5\cos\varphi}$. **5.134.** $r=\frac{2}{1-\cos\varphi}$.

5.135. $r=\frac{144}{13-5\cos\varphi}$. **5.136.** $r=\frac{25}{12-13\cos\varphi}$. **5.137.** $r=\frac{6}{1-\cos\varphi}$.

5.138. $r=\frac{21}{5-2\cos\varphi}$. **5.139.** $r=\frac{16}{3-5\cos\varphi}$. **5.140.** $r=\frac{4}{\sqrt{5}-\cos\varphi}$.

5.5. Исследование общего уравнения линии второго порядка

Общее уравнение алгебраической линии второго порядка имеет вид

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0. \qquad (5.21)$$

Числа

$$s=a_{11}+a_{22},\quad \delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},\quad \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

называются *инвариантами* уравнения линии второго порядка. При $\delta\neq 0$ уравнение (5.21) описывает центральную линию. Центр линии – точка $O_1(x_0, y_0)$, координаты которой удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_0+a_{12}y_0=-a_{13}, \\ a_{12}x_0+a_{22}y_0=-a_{23} \end{cases} \qquad (5.22)$$

и могут быть определены по формулам

$$x_0=\frac{\delta_x}{\delta},\quad y_0=\frac{\delta_y}{\delta},\quad \text{где}\quad \delta_x=\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix},\quad \delta_y=\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{12} & -a_{23} \end{vmatrix}. \qquad (5.23)$$

Преобразование координат $x = x_1 + x_0,\ y = y_1 + y_0,$ которое соответствует переносу начала координат в точку $O_1(x_0; y_0)$, приводит уравнение центральной линии к виду $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 + c_1 = 0,$ где $c_1 = \Delta/\delta$.

Дальнейшее упрощение уравнения достигается при помощи преобразования координат $x_1 = X\cos\alpha - Y\sin\alpha,\ y_1 = X\sin\alpha + Y\cos\alpha,$ соответствующего повороту осей координат на угол α. Если определить угол поворота из соотношения

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}, \tag{5.24}$$

где λ_1 – одно из решений характеристического уравнения

$$\lambda^2 - s\lambda + \delta = 0, \tag{5.25}$$

то уравнение центральной линии принимает вид

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \tag{5.26}$$

Это уравнение может определять различные линии на плоскости в зависимости от значений, принимаемых инвариантами уравнения $s = \lambda_1 + \lambda_2$, $\delta = \lambda_1\lambda_2$ и Δ.

Если $\delta > 0, s\Delta < 0$, то корни характеристического уравнения λ_1 и λ_2 имеют одинаковый знак, противоположный знаку Δ. В этом случае уравнение (5.26) можно переписать в виде $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1,$ где $a^2 = -\frac{\Delta}{\delta\lambda_1} > 0, b^2 = -\frac{\Delta}{\delta\lambda_2} > 0$. Следовательно, уравнение (5.26) описывает эллипс, в частности, при $\lambda_1 = \lambda_2$ – окружность. Если при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ выбрать в качестве λ_1 меньший корень характеристического уравнения (5.25), то $a > b$.

Если $\delta > 0, s\Delta > 0$, то уравнению (5.26) не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости.

Если $\delta > 0, \Delta = 0$, то уравнению (5.26) удовлетворяют координаты лишь одной точки плоскости с координатами $x_2 = 0, y_2 = 0$.

Если $\delta < 0, \Delta \neq 0$, то λ_1 и λ_2 имеют разные знаки. Обозначая через λ_1 тот корень характеристического уравнения, знак которого совпадает со знаком Δ, уравнение (5.26) можно представить в виде $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1,$ где $a^2 = -\frac{\Delta}{\delta\lambda_1} > 0,\ b^2 = \frac{\Delta}{\delta\lambda_2} > 0$. Таким образом, в данном случае уравнение (5.26) описывает гиперболу.

Если $\delta < 0, \Delta = 0$, то уравнение (5.26) задает пару пересекающихся прямых.

Пример 5.24. Построить линию $5x^2+6xy+5y^2-14x-2y+5=0$.

Решение. В данном примере $a_{11}=5, a_{12}=3, a_{22}=5, a_{13}=-7, a_{23}=-1, a_{33}=5$. Найдем инварианты уравнения линии:

$$s=10,\quad \delta=\begin{vmatrix}5 & 3\\ 3 & 5\end{vmatrix}=16,\quad \Delta=\begin{vmatrix}5 & 3 & -7\\ 3 & 5 & -1\\ -7 & -1 & 5\end{vmatrix}=-128.$$

Поскольку $\delta\neq 0$, то уравнение определяет центральную линию. Координаты центра можно найти, решив систему уравнений (см. (5.22))

$$\begin{cases}5x_0+3y_0=7,\\ 3x_0+5y_0=1.\end{cases}$$

Так как $\delta_x=\begin{vmatrix}7 & 3\\ 1 & 5\end{vmatrix}=32,\ \delta_y=\begin{vmatrix}5 & 7\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-16,$ то $x_0=2, y_0=-1$. Преобразование координат $x=x_1+2, y=y_1-1$ приводит уравнение линии к виду $5x_1^2+6x_1y_1+5y_1^2-8=0.$

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2-10\lambda+16=0,$ откуда $\lambda_1=2, \lambda_2=8.$ Угловой коэффициент оси O_1X равен $k=\mathrm{tg}\alpha=(\lambda_1-a_{11})/a_{12}=$ $=(2-5)/3=-1,$ следовательно, $\alpha=-\pi/4$.

В системе координат O_1XY уравнение линии примет вид $2x_2^2+8y_2^2-8=0,$ или $\dfrac{x_2^2}{4}+\dfrac{y_2^2}{1}=1.$ Таким образом, линия представляет собой эллипс с центром в точке $O_1(2;-1)$, большая полуось которого повернута на угол $-45°$ по отношению к оси Ox (см. рис. 5.6).

Пример 5.25. Построить линию $3x^2+4xy+y^2-2x-1=0$.

Решение. Находим инварианты уравнения линии:

$$s=4,\quad \delta=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1,\quad \Delta=\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix}=0.$$

Поскольку $\delta<0, \Delta=0$, то уравнение определяет пару пересекающихся прямых. Разрешая уравнение относительно y, получим $y=-2x\pm\sqrt{(x+1)^2}$, откуда находим уравнения прямых $y=-x+1, y=-3x-1$. Центром линии является точка пересечения прямых $O_1(-1;2)$ (рис. 5.7).

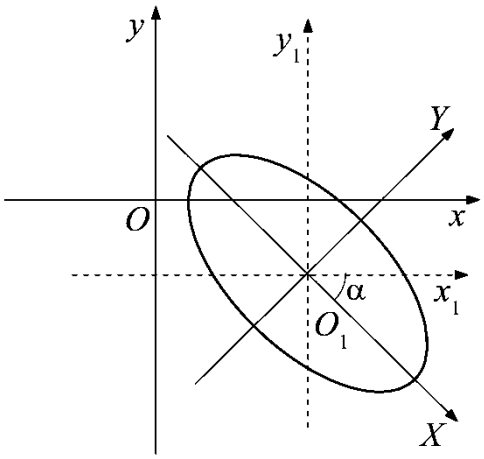


Рис. 5.6.

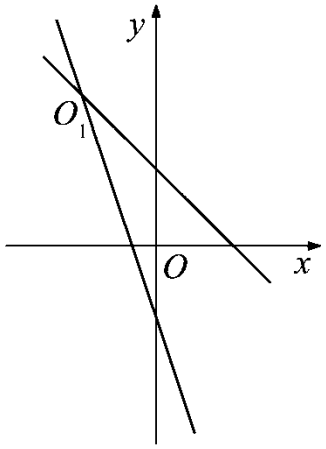


Рис. 5.7.

Если $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, то линия не имеет единственного центра. В этом случае преобразование координат $x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha,\ y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha,$ соответствующее повороту системы координат Oxy на угол α, приводит уравнение (5.21) к виду $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + 2b_1x_1 + 2b_2y_1 + a_{33} = 0,$ где

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha, \\ b_2 &= -a_{13}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha, \end{aligned} \tag{5.27}$$

а λ_1 и λ_2 являются корнями характеристического уравнения (5.25). Поскольку $\delta = 0$, то один из корней этого уравнения равен нулю. Пусть $\lambda_1 = 0$, тогда $\mathrm{tg}\alpha = -a_{11}/a_{12}$, а уравнение линии принимает вид

$$\lambda_2 y_1^2 + 2b_1x_1 + 2b_2y_1 + a_{33} = 0. \tag{5.28}$$

Если $\Delta \neq 0$, то и $b_1 \neq 0$, причем угол α можно выбрать так, что $b_1 < 0$. В этом случае, выделяя в уравнении (5.28) полный квадрат и вводя новые координаты X, Y по формулам $X = x_1 + \dfrac{a_{33}}{2b_1} - \dfrac{b_2^2}{2\lambda_2 b_1}, Y = y_1 + \dfrac{b_2}{\lambda_2},$ получим каноническое уравнение параболы

$$Y^2 = 2pX, \quad p = -\frac{b_1}{\lambda_2} = \sqrt{\frac{-\Delta}{s^3}}.$$

Если $\Delta = 0$, то $b_1 = 0$, и уравнение линии примет вид $\lambda_2\left(Y + b_2/\lambda_2\right)^2 + c = 0,$ где $c = \left(a_{33} - b_2^2/\lambda_2\right)/\lambda_2$. При $\lambda_2 c < 0$ это уравнение описывает пару параллельных прямых, при $\lambda_2 c = 0$ – пару совпадающих прямых, при $\lambda_2 c > 0$ нет точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Пример 5.26. Построить линию $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y + 100 = 0$.

Решение. Инварианты уравнения линии равны

$$s = 9 + 16 = 25, \quad \delta = \begin{vmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 9 & 12 & -20 \\ 12 & 16 & 15 \\ -20 & 15 & 100 \end{vmatrix} = -15625.$$

Поскольку $\delta = 0, \Delta < 0$, то уравнение описывает параболу. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 - 25\lambda = 0$, а его корни равны $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 25$.

Найдем угол поворота осей координат. Имеем

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{3}{4}, \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{4}{5}, \sin\alpha = -\frac{3}{5}.$$

Далее по формулам (5.27) находим

$$b_1 = a_{13}\cos\alpha + a_{23}\sin\alpha = -20\cdot(4/5) + 15\cdot(-3/5) = -25,$$

$$b_2 = -a_{13}\sin\alpha + a_{23}\cos\alpha = 20\cdot(-3/5) + 15\cdot(4/5) = 0.$$

Таким образом, после поворота осей координат на угол $\alpha = -\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$, при котором происходит преобразование координат $x = (4x_1 + 3y_1)/5, y = (-3x_1 + 4y_1)/5$, уравнение примет вид $25y_1^2 - 50x_1 + 100 = 0$, или $y_1^2 - 2(x_1 - 2) = 0$. Перенося начало координат в точку O_1 (рис. 5.8), так что $y_1 = Y, x_1 = X + 2$, получаем каноническое уравнение параболы $Y^2 = 2X$ в системе координат O_1XY.

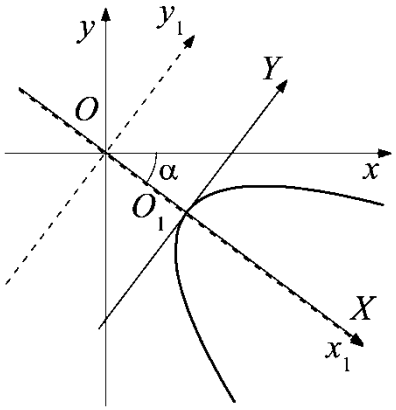


Рис. 5.8

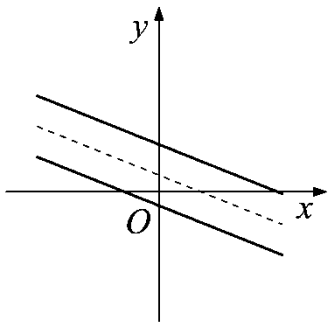


Рис. 5.9

Пример 5.27. Построить линию $4x^2 + 20xy + 25y^2 - 4x - 10y - 3 = 0$.

Решение. Имеем $a_{11} = 4, a_{12} = 10, a_{22} = 25, a_{13} = -2, a_{23} = -5, a_{33} = -3$. Найдем инварианты уравнения линии:

$$s = 29, \quad \delta = \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 4 & 25 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 4 & 10 & -2 \\ 10 & 25 & -5 \\ -2 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку $\delta = 0, \Delta = 0$, то уравнение описывает пару параллельных прямых. Действительно, его можно представить в виде $(2x+5y)^2 - 2(2x+5y) - \ -3 = 0$, откуда $2x+5y = 1 \pm 2$. В данном случае линия имеет бесконечное множество центров, координаты которых удовлетворяют уравнению (см. (5.22)) $2x+5y=1$ (рис. 5.9).

Найти центры следующих линий.

5.141. $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$.

5.142. $2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 10y - 7 = 0$.

5.143. $5x^2 + 4xy + 2y^2 + 20x + 20y - 18 = 0$.

5.144. $9x^2 - 6xy + y^2 + 2x - 7 = 0$.

5.145. $4x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 4y - 21 = 0$.

5.146. $2x^2 - 6xy + 5y^2 + 22x - 36y + 11 = 0$.

Построить линии, приведя их уравнения к каноническому виду и определив координаты центра и угол поворота системы координат.

5.147. $x^2 - 6xy + y^2 - 10x - 2y - 11 = 0$.

5.148. $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$.

5.149. $29x^2 - 24xy + 36y^2 + 82x - 96y - 91 = 0$.

5.150. $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$.

Проверить, что каждое из следующих уравнений определяет пару пересекающихся прямых, и найти их уравнения.

5.151. $x^2 + 4xy + 3y^2 - 6x - 12y + 9 = 0$.

5.152. $2x^2 + 5xy - 3y^2 - 11x + 9y - 6 = 0$.

5.153. $14x^2 + 24xy - 8y^2 - 15x + 18y - 9 = 0$.

Построить линии, приведя их уравнения к каноническому виду и указав соответствующие преобразования координат.

5.154. $9x^2 - 24xy + 16y^2 + 2x - 11y + 8 = 0$.

5.155. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$.

5.156. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$.

Проверить, что каждое из следующих уравнений определяет пару параллельных прямых, и найти их уравнения.

5.157. $4x^2+4xy+y^2-12x-6y+5=0$.

5.158. $25x^2-10xy+y^2+10x-2y-15=0$.

5.159. $4x^2-4xy+y^2+12x-6y+9=0$.

5.6. Поверхности второго порядка

Общее уравнение поверхности второго порядка в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ имеет вид

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz+$$
$$+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0.$$

Так же как и в случае линии второго порядка, с помощью преобразований координат это уравнение можно привести к наиболее простому (каноническому) виду. Приведем уравнения для основных типов получаемых при этом поверхностей.

Эллипсоид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 5.10);

однополостный гиперболоид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 5.11);

двуполостный гиперболоид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ (рис. 5.12);

эллиптический параболоид $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z \quad (p,q>0)$ (рис. 5.13);

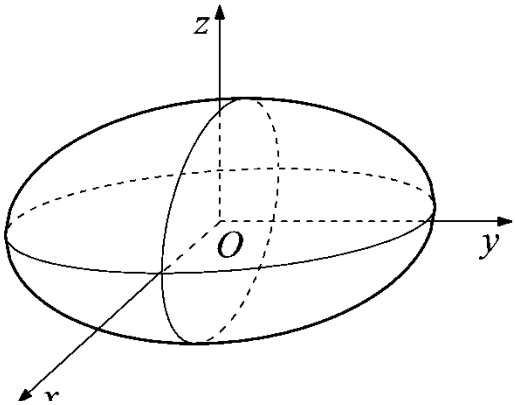
гиперболический параболоид $\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2z \quad (p,q>0)$ (рис. 5.14);

эллиптический цилиндр $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 5.15);

гиперболический цилиндр $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 5.16);

параболический цилиндр $y^2=2px$ (рис. 5.17);

конус второго порядка $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ (рис. 5.18).



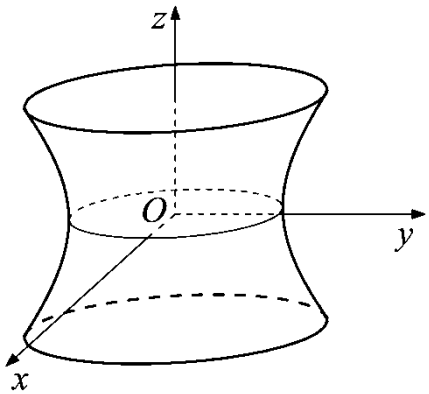
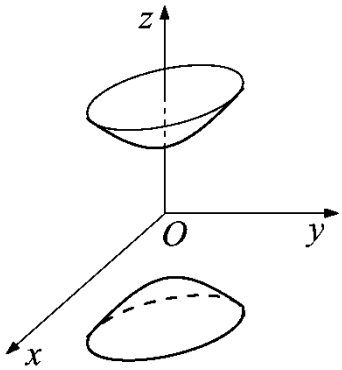


Рис. 5.10

Рис. 5.11



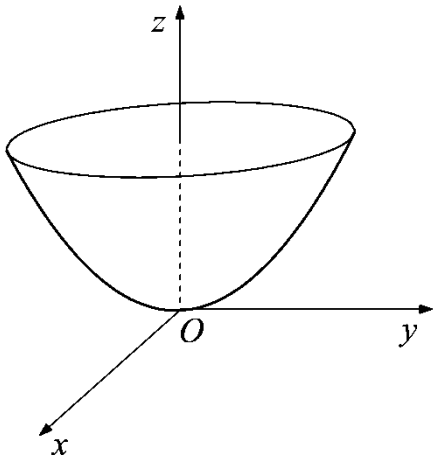
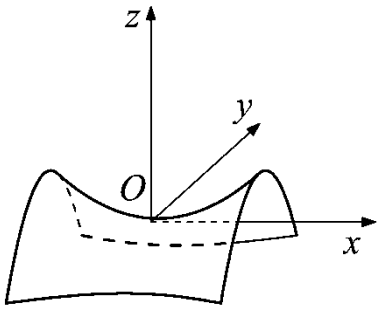


Рис. 5.12

Рис. 5.13



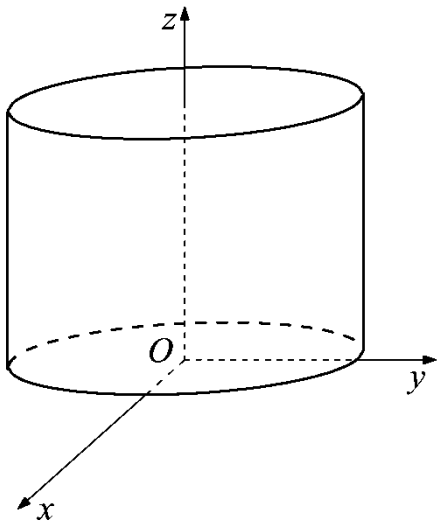
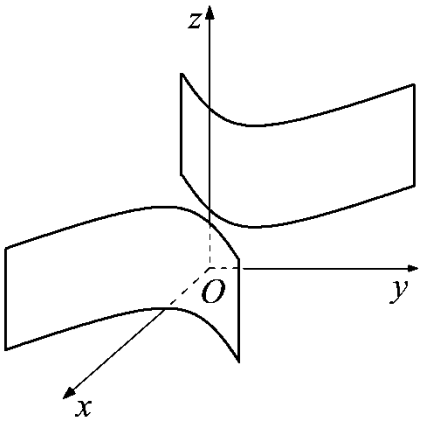


Рис. 5.14

Рис. 5.15



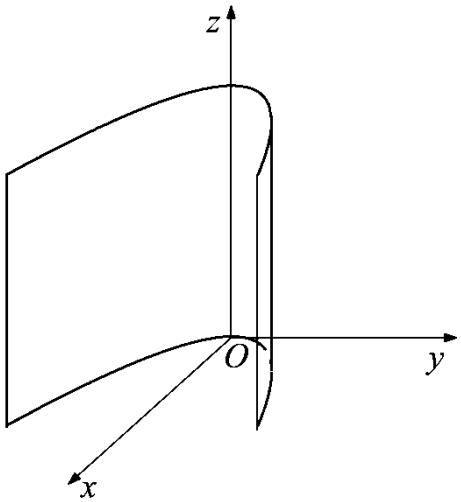


Рис. 5.16

Рис. 5.17

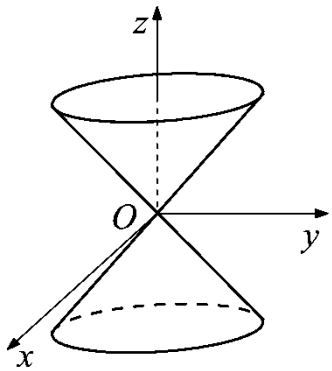


Рис. 5.18

5.160. Записать уравнение сферы, проходящей через точку $A(1; -2; 2)$ и имеющей центр в точке $O_1(2; 0; -3)$.

Привести уравнение поверхности второго порядка к каноническому виду и определить вид поверхности.

5.161. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$.

5.162. $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 - 36x + 24y + 36 = 0$.

5.163. $2x^2 + 3y^2 - 6z^2 - 8x - 6y - 12z - 1 = 0$.

5.164. $4x^2 + y^2 - z^2 - 2y - 4z - 2 = 0$.

5.165. $4x^2 + 4y^2 - 9z^2 - 16x - 36z - 20 = 0$.

5.166. $x^2 + 25y^2 - 4x + 50y - 50z + 76 = 0$.

5.167. $2x^2 - 3y^2 + 12x + 12y - 12z - 42 = 0$.

5.168. $9x^2 + 4y^2 - 54x + 8y + 49 = 0$.

ОТВЕТЫ

Глава 1

1.1. Два, $2,4$. **1.2.** $\delta(x) \le 0,41\%$. **1.3.** $9,72$. **1.4.** 27. **1.5.** $1,9$. **1.6.** $9,86$. **1.7.** $42 \cdot 10^2$. **1.8.** $0,040$. **1.9.** $144 \cdot 10^2$. **1.10.** 121. **1.11** $1,2$. **1.12.** $73,3$ В. **1.13.** $A(1;\sqrt{3}), B(0;-6), C(3\sqrt{3}/2;-3/2), D(-1;1)$. **1.14.** $A(\sqrt{2};3\pi/4), B(2;\pi/2), C(3;0), D(\sqrt{2};\pi/4)$. **1.15.** $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$. **1.16.** $[2,3)$. **1.17.** $(1,4)$. **1.18.** $[1,4)$. **1.19.** $(0,1)\cup(1,+\infty)$. **1.20.** $[1,6]$. **1.21.** $[-1/3,1]$. **1.22.** $[-1,3]$. **1.23.** $(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$. **1.24.** $[-2,0)\cup(0,1)$. **1.25.** $f(x)=3x^2-2x+5$. **1.26.** $f(x)=10+5\cdot 2^x$. **1.27.** $2;1;\sqrt{3};2/7;2/17$. **1.34.** Четная. **1.35.** Четная. **1.36.** Нечетная. **1.37.** Четная. **1.38.** Нечетная. **1.39.** Нечетная. **1.40.** $y=(x^2-3)+\quad+4x$. **1.41.** $y=\dfrac{(1+x)^{20}+(1-x)^{20}}{2}+\dfrac{(1+x)^{20}-(1-x)^{20}}{2}$. **1.42.** $x=\dfrac{y-3}{2}, y\in\mathbf{R}$.

1.43. $x=-\sqrt{1+y},\ y\in[-1;\infty)$. **1.44.** $x=\sqrt[3]{1-y^2},\ y\in\mathbf{R}$. **1.45.** $x=2\cdot 10^y, y\in\mathbf{R}$. **1.46.** 1. **1.47.** -2. **1.48.** 0. **1.49.** 0. **1.50.** $1/2$. **1.51*.** 1. **1.52.** -1. **1.53.** $-1/2$. **1.56.** 4. **1.57.** $1/2$. **1.58.** ∞. **1.59.** -2. **1.60.** -1. **1.61.** $1/2$. **1.62.** 3. **1.63.** 12. **1.64.** $4/3$. **1.65.** $1/9$. **1.66.** 1. **1.67.** 0. **1.68.** ∞. **1.69.** 72. **1.70.** 2. **1.71.** 2. **1.72.** ∞. **1.73.** 0. **1.74.** $-1/56$. **1.75.** $-1/3$. **1.76.** 1. **1.77.** 0. **1.78.** $a/2$. **1.79.** 3. **1.80.** 3. **1.81.** $5/3$. **1.82.** 4. **1.83.** $1/5$. **1.84.** $\cos a$. **1.85.** $1/2$. **1.86*.** 0. **1.87.** e^2. **1.88.** $1/e$. **1.89.** $1/e^4$. **1.90*.** 0. **1.91*.** e^4. **1.92*.** e^5. **1.93*.** $1/e$. **1.94.** $5x^4-12x^2+2$. **1.95.** $2ax+b$. **1.96.** $-\dfrac{15x^2}{a}$. **1.97.** $mat^{m-1}+(m+n)bt^{m+n-1}$. **1.98.** $\dfrac{6ax^5}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **1.99.** $-\dfrac{\pi}{x^2}$. **1.100.** $2x^{-\frac{1}{3}}-5x^{\frac{3}{2}}+x^{-4}$. **1.101.** $\dfrac{8}{3}\sqrt[3]{x^5}$. **1.102.** $y=\dfrac{4b}{3x^2\sqrt[3]{x}}-\dfrac{2a}{3x\sqrt[3]{x^2}}$. **1.103.** $\dfrac{bc-ad}{(c+dx)^2}$.

1.104. $\dfrac{-2x^2-6x+21}{\left(x^2-5x+3\right)^2}$. **1.105.** $\dfrac{1-4x}{x^2(2x-1)^2}$. **1.106.** $\dfrac{1}{\sqrt{z}\left(1-\sqrt{z}\right)^2}$.

1.107. $-\dfrac{2}{(\sin x-\cos x)^2}$. **1.108.** $\dfrac{2(1-2x\operatorname{ctg}2x)}{\sin 2x}$. **1.109.** $x(2\sin x+x\cos x)-$ $-\dfrac{\cos x+2x\sin x}{2\sqrt{x}\cos^2 x}$. **1.110.** $t^2\sin t$. **1.111.** $3x^2\operatorname{tg}x+\dfrac{x^3}{\cos^2 x}$. **1.112.** $2x\arcsin x+$

$+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. **1.113.** $x\operatorname{arctg} x$. **1.114.** $e^x(x^2+2x-1)$. **1.115.** $-\frac{e^x(x-1)^2+2x}{\left(e^x-1\right)^2}$.

1.116. $e^x\left(\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. **1.117.** $3x^2\ln x$. **1.118.** $\frac{2\ln x}{x\ln 10}-\frac{1}{x}$. **1.119.** $\frac{2}{x}+$ $+\frac{\ln x}{x^2}-\frac{2}{x^2}$. **1.120.** $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **1.121.** $\frac{bx^2}{\sqrt[3]{\left(a+bx^3\right)^2}}$. **1.122.** $\frac{4}{9\sqrt[3]{x\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)}}$.

1.123. $-10\cos x(3-2\sin x)^4$. **1.124.** $\frac{1-\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x}$. **1.125.** $-\frac{1}{2\sin^2 x\sqrt{\operatorname{ctg} x}}$.

1.126. $\frac{\sin x}{(1-3\cos x)^3}$. **1.127.** $\frac{2\cos x}{3\sqrt[3]{\sin x}}+\frac{3\sin x}{\cos^4 x}$. **1.128.** $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\arcsin x}}$.

1.129. $\frac{1}{2\left(1+x^2\right)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}-\frac{3\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}$. **1.130.** $\frac{e^x+xe^x+1}{2\sqrt{x\left(e^x+1\right)}}$. **1.131.** $\frac{5\ln^4 x}{x}+$ $+\frac{2e^x-2^x\ln 2}{3\sqrt[3]{\left(2e^x-2^x+1\right)^2}}$. **1.132.** $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$. **1.133.** $(2x-5)\cos\left(x^2-5x+1\right)-\frac{a}{x^2\cos^2\frac{a}{x}}$.

1.134. $-\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$. **1.135.** $-\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$. **1.136.** $-\frac{1}{1+x^2}$. **1.137.** $-\frac{1}{1+x^2}$.

1.138. $-\frac{5e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$. **1.139.** $2x\cdot 10^{2x}(1+x\ln 10)$. **1.140.** $\sin 2^t+t\cdot 2^t\cos 2^t\ln 2$.

1.141. $\frac{\operatorname{ctg} x}{\ln 10}$. **1.142.** $\frac{2}{2x+7}$. **1.143.** $\frac{2\ln x}{x}-\frac{1}{x\ln x}$. **1.144.** $\frac{e^x\sqrt{1-x^2}-4}{\left(e^x-4\arcsin x\right)\sqrt{1-x^2}}$.

1.145. $\frac{1}{\left(1+\ln^2 x\right)x}+\frac{1}{\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg} x}$. **1.146.** $\frac{x^7}{\left(1-x^2\right)^5}$. **1.147.** $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x+1}}+$ $+\frac{1}{2\left(\sqrt{x}+x\right)}$. **1.148.** $15\sin^2 5x\cos 5x\cos^2\frac{x}{3}-\frac{2}{3}\sin^3 5x\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}$. **1.149.** $\frac{x^2}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^5}}$. **1.150.** $\frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$. **1.151.** $\frac{2abmnx^{n-1}\left(a+bx^n\right)^{m-1}}{\left(a-bx^n\right)^{m+1}}$. **1.152.** $\frac{1+2\sqrt{x}}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{\left(x+\sqrt{x}\right)^2}}$. **1.153.** $3t^2\sin 2t^3$. **1.154.** $\frac{\arcsin x\left(2\arccos x-\arcsin x\right)}{2\sqrt{1-x^2}}$. **1.155.** $\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}\arcsin 5x}$. **1.156.** $\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$. **1.157.** $\frac{2}{1+\cos^2 x}$. **1.158.** $e^{\sin^2 x}\sin 2x$.

1.159. $\dfrac{3^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}\ln 3}{\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^2}$. **1.160.** $-\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}x\left(1+\sqrt{\cos x}\ln a\right)y$. **1.161.** $-\dfrac{1}{x^2}\operatorname{tg}\dfrac{x-1}{x}$. **1.162.** $\dfrac{6x^2}{\left(3-2x^3\right)\ln\left(3-2x^3\right)}$. **1.163.** $\dfrac{1}{2\sin x}$. **1.164.** $-\dfrac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$. **1.165.** $\dfrac{\arcsin x}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$.

1.166. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}+\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. **1.167.** $(2x+1)(3x+1)(4x+1)+2(x+1)(3x+1)(4x+1)+$ $+3(x+1)(2x+1)(4x+1)+4(x+1)(2x+1)(3x+1)$. **1.168.** $-\dfrac{(x+2)\left(5x^2+19x+20\right)}{(x+1)^4(x+3)^5}$. **1.169.** $\dfrac{x^2-4x+2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}$. **1.170.** $\dfrac{(x-2)^8\left(x^2-7x+1\right)}{(x-1)(x-3)\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$.

1.171. $\dfrac{3x^2+5}{3\left(x^2+1\right)}\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$. **1.172.** $-\dfrac{5x^2+x-24}{3\sqrt{x-1}\sqrt[3]{(x+2)^5}\sqrt{(x+3)^5}}$. **1.173.** $\sqrt[x]{x}\,\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

1.174*. $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}\left(1+\dfrac{1}{2}\ln x\right)$. **1.175*.** $(\operatorname{arctg}x)^x\left(\ln\operatorname{arctg}x+\dfrac{x}{\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg}x}\right)$.

1.176*. $\cos x^{\sin x}\left(\cos x\ln\cos x-\sin x\operatorname{tg}x\right)$. **1.177*.** $x^{2x-2}(2x\ln x+2x-1)$.

1.178*. $(\sin x)^{\arcsin x}\left(\dfrac{\ln\sin x}{\sqrt{1-x^2}}+\arcsin x\operatorname{ctg}x\right)$. **1.179*.** $(\ln x)^{\frac{1}{x}}\,\dfrac{1-\ln x\ln(\ln x)}{x^2\ln x}$.

1.180. $-\dfrac{x^2}{y^2}$. **1.181.** $-\dfrac{x(3x+2y)}{x^2+2y}$. **1.182.** $-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$. **1.183.** $\dfrac{1-y^3}{1+3xy^2+4y^3}$. **1.184.** -1.

1.185. $\dfrac{y\cos^2 y}{1-x\cos^2 y}$. **1.186.** $\dfrac{y\left(1-x^2-y^2\right)}{x\left(x^2+y^2+1\right)}$. **1.187.** $\dfrac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}$. **1.188.** $\dfrac{x+y}{x-y}$.

1.189. $\dfrac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}$. **1.190.** $-\dfrac{2t}{t+1}$. **1.191.** $\dfrac{2t}{t^2-1}$. **1.192.** $\dfrac{t+1}{t\left(t^2+1\right)}$. **1.193.** $-\dfrac{b}{a}$.

1.194. $-\operatorname{tg}3t$. **1.195.** $-2e^{3t}$. **1.196.** $\operatorname{tg}t$. **1.197.** $y'_x=\left[\begin{array}{l}1,\ t>0,\\ -1,\ t<0\end{array}\right.$. **1.198.** $\operatorname{tg}t$.

1.199. $y-5=0,\ x+2=0$. **1.200.** $y=x-1,\ y=1-x$. **1.201.** $y=x-3,\ y=-1-x$.

1.202. $x-2y-1=0,\ 2x=y-2=0$. **1.203*.** $T=\dfrac{E}{2R}\left(1-\sqrt{1-\dfrac{4RT_0}{E}}\right)$. **1.204.**

$56x^6 + \quad +210x^4$. **1.205.** $e^{x^2}\left(4x^2+2\right)$. **1.206.** $2\cos 2x$. **1.207.** $\dfrac{2\left(1-x^2\right)}{3\left(1+x^2\right)}$.

1.208. $2\operatorname{arctg} x + \dfrac{2x}{1+x^2}$. **1.209.** $\dfrac{2}{1-x^2} + \dfrac{2x\arcsin x}{\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^2}}$. **1.212.** 4320. **1.214.** $0; 1; 2; 2$.

1.215. $\dfrac{24}{(x+1)^5}$. **1.216.** $\dfrac{dx}{(1-x)^2}$. **1.217.** $\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. **1.218.** $-2xe^{-x^2}dx$.

1.219. $\dfrac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$. **1.220.** $\dfrac{2dx}{x^2-1}$. **1.221.** $\dfrac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$. **1.222.** $\dfrac{ydx}{x-y}$. **1.223.** $\dfrac{x+y}{x-y}dx$

.

1.224. $-\dfrac{(10x+8y)dx}{7x+5y}$. **1.225.** $\dfrac{(1-y\cos(xy-1))dx}{x\cos(xy-1)-1}$. **1.226.** $0{,}485$. **1.227.** $0{,}57$.
1.228. $2{,}03$. **1.229.** $1{,}007$. **1.230.** $0{,}2$. **1.231.** $0{,}81$. **1.232.** 5. **1.233.** $1{,}1$.
1.234. $0{,}93$. **1.235.** $0{,}9$. **1.236.** $-\dfrac{dx^2}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$. **1.237.** $\dfrac{\left(2\ln x-3\right)^2}{x^3}dx^2$.

1.238. $\left(-\sin x\ln x + \dfrac{2\cos x}{x} - \dfrac{\sin x}{x^2}\right)dx^2$. **1.239.** $-(2\sin x + x\cos x)dx^2$. **1.240.** $1/2$.
1.241. $-1/3$. **1.242.** ∞. **1.243.** 3. **1.244.** $2/\pi$. **1.245.** 1. **1.246.** 0. **1.247.** $1/2$.
1.248. -1. **1.249.** 1. **1.250*.** $1/e$. **1.251*.** $1/e$. **1.252*.** 1. **1.253*.** 1.
1.254. $\sqrt{x} = 1 + \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{(x-1)^2}{8} + \dfrac{3(x-1)^3}{48(1+\theta(x-1))^{5/2}}$. **1.255.**

$y = 2-(x-2)+(x-2)^2 - \quad -\dfrac{(x-2)^3}{\left(1+\theta(x-2)\right)^4}$. **1.256.** $\operatorname{tg} x = x + \dfrac{x^3}{3}\dfrac{1+2\sin^3\theta x}{\cos^4\theta x}$.

1.257. $8-5(x+1)+(x+1)^3$. **1.258*.** $1{,}648$. **1.259.** $0{,}049$.**1.260*.** $2{,}012$. **1.261.** $(0,1)$ – интервал убывания, $(1,+\infty)$ – интервал возрастания. **1.262.** $(0,1/e)$ – интервал убывания, $(1/e,+\infty)$ – интервал возрастания. **1.263.** $(-2,0)$ – интервал возрастания. **1.264.** $(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$ – интервалы убывания. **1.265.** $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ – интервалы возрастания, $(0,2)$ – интервал убывания. **1.266.** $(0,+\infty)$ – интервал убывания. **1.267.** $(0,1)\cup(1,e)$ – интервалы убывания, $(e,+\infty)$ – интервал возрастания. **1.268.** $(-\infty,-2)\cup(-2,8)\cup(8,+\infty)$ – интервалы убывания.

1.269.

$x_{\min} = \dfrac{5-\sqrt{13}}{6} \approx 0{,}23$, $y_{\min} \approx -0{,}76$; $x_{\max} = 1$, $y_{\max} = 0$; $x_{\min} = \dfrac{5+\sqrt{13}}{6} \approx 1{,}43$,
$y_{\min} \approx -0{,}05$. **1.270.** $x_{\max} = 0$, $y_{\max} = -2$; $x_{\min} = 2$, $y_{\min} = 2$. **1.271.** $x_{\min} = \pm 1$,

$y_{\min}=0;\ x_{\max}=0,\ y_{\max}=1$. **1.272.** $x_{\min}=0,\ y_{\min}=0$. **1.273.** $x_{\min}=-1,\ y_{\min}=-1/e$. **1.274.** Экстремумов нет. **1.275.** $x_{\min}=0,\ y_{\min}=0;\ x_{\max}=2,\ y_{\max}=4/e^2$. **1.276.** $x_{\max}=\dfrac{1}{\sqrt{e}},\ y_{\max}=\dfrac{1}{4\sqrt{e}}$. **1.277.** $\min y=y(0)=y(\pi/2)=1;\ \max y=y(\pi/6)= =3/2$. **1.278.** $\min y=y(1)=-6;\ \max y=y(5)=266$. **1.279.** $\min y=y(1)=0;$ $\max y=y(3)=\ln 5$. **1.280.** $\min y=y(-1)=-4;\ \max y=y(1)=4$. **1.281.** $\min y=$ $=y(0)=y(10)=0;\ \max y=y(5)=5$. **1.282.** $\min y=y(1)=0;\ \max y=y(-1)=\pi$. **1.283.** $\min y=y(4)=-1/e^4;\ \max y=y(0)=3$. **1.284.** $\min y=y(0)=y(1)=0;$ $\max y=y\left(1/\sqrt{3}\right)=\sqrt{2}/\sqrt[4]{27}\approx 0,62$. **1.285.** $H=2R$. **1.286.** $\arccos\dfrac{u}{v}=30^\circ$. **1.287.** 10%. **1.288.** Радиус основания цилиндра $R/2$, высота цилиндра $H/2$. **1.289.** $T=E/2R$. **1.290.** $(-\infty,+\infty)$ – интервал вогнутости. **1.291.** $(-\infty,-6)\cup(0,6)$ – интервалы вогнутости, $(-6,0)\cup(6,+\infty)$ – интервалы выпуклости; $M_1(-6;-9/2),\ M_2(0;0),\ M_3(6;9/2)$ – точки перегиба.

1.292. $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$ – интервалы вогнутости, $(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$ – интервалы выпуклости; $M_1\left(-\sqrt{3};0\right),\ M_2(0;0),\ M_3\left(\sqrt{3};0\right)$ – точки перегиба. **1.293.** $\left(0,1/\sqrt{e^3}\right)$ – интервал выпуклости, $\left(1/\sqrt{e^3},+\infty\right)$ – интервал вогнутости; $M\left(1/\sqrt{e^3};-3/\left(2e^3\right)\right)$ – точка перегиба. **1.294.** $(-\infty,0)$ – интервал вогнутости, $(0,+\infty)$ – интервал выпуклости; $M(0;0)$ – точка перегиба. **1.295.** $(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)$ – интервалы вогнутости, $(-3,-1)$ – интервал выпуклости; $M_1\left(-3;10/e^3\right),\ M_2\left(-1;2/e\right)$ – точки перегиба. **1.296.** $x=1, x=3;\ y=0$. **1.297.** $y=-x$ – левая, $y=x$ – правая. **1.298.** $y=2$. **1.299.** $x=0;\ y=1$ – левая, $y=0$ – правая. **1.300.** $x=-1$. **1.301.** $x=-1, x=1;\ y=-x$ – левая, $y=x$ – правая. **1.302.** $x_{\min}=-1, y_{\min}=-2;\ x_{\max}=1, y_{\max}=2;$ точка перегиба $O(0;0)$. **1.303.** Асимптоты $x=1, y=x-1;$ $x_{\max}=0, y_{\max}=-2; x_{\min}=2, y_{\min}=2$. **1.304.** Асимптота $x=0;\ x_{\min}=1, y_{\min}=3;$ точка перегиба $M\left(-\sqrt[3]{2};0\right)$. **1.305.** Асимптота $y=0;\ x_{\max}=1, y_{\max}=1/e;$ точка перегиба $M\left(2;2/e^2\right)$. **1.306.** Асимптоты $x=0, y=0;\ x_{\max}=e^2, y_{\max}=2/e;$ точка перегиба $M\left(\sqrt[3]{e^8};8\Big/\left(3\sqrt[3]{e^4}\right)\right)$. **1.307.** Асимптота $x=1;\ y\to 0$ при $x\to 0;$ $x_{\min}=e,\ y_{\min}=e;$ точка перегиба $M\left(e^2;\dfrac{e^2}{2}\right)$. **1.308.** Асимптоты $y=\dfrac{x}{2}+\pi$ (при

$x \to -\infty$), $y = \frac{x}{2}$ (при $x \to +\infty$); $x_{\max} = -1$, $y_{\max} = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}$; $x_{\min} = 1$, $y_{\min} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$; точка перегиба $M\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. **1.309.** $x_{\max} = \pm 1$, $y_{\max} = 1$;

Глава 2.

2.1. $12 + 5i$. **2.2.** $5 - 12i$. **2.3.** $-2 + 2i$. **2.4.** $2b(3a^2 - b^2)i$. **2.5.** $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$. **2.6.** $1 + i$. **2.7.** $11 + 3i$. **2.8.** $-11 - 10i$. **2.9.** $\frac{5}{17} - \frac{3}{17}i$. **2.10.** $7 - \frac{24}{25}i$. **2.11.** $\frac{14}{5}i$. **2.12.** i. **2.13.** $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$. **2.14.** $2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$. **2.15.** $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. **2.16.** $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$. **2.17.** $5e^{i\,\mathrm{arctg}\frac{24}{7}}$. **2.18.** $13e^{i\,\mathrm{arctg}\left(-\frac{12}{5}\right)}$. **2.19.** $5e^{i\left(\mathrm{arctg}\frac{4}{5}+\pi\right)}$. **2.20.** $\sqrt{5}e^{i\left(\pi - \mathrm{arctg}\frac{1}{2}\right)}$. **2.21.** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$. **2.22.** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$. **2.23.** $\sqrt[9]{9}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{9}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{9}\right)\right]$, $k = 0, 1, ..., 8$. **2.24.** $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. **2.25.** $\frac{3}{4} + \quad + i$. **2.26.** $z_0 = e^{\frac{i\pi}{6}}$, $z_1 = e^{\frac{i\pi}{2}}$, $z_2 = e^{\frac{5i\pi}{6}}$, $z_3 = e^{\frac{7i\pi}{6}}$, $z_4 = e^{\frac{3i\pi}{2}}$, $z_5 = e^{-\frac{i\pi}{6}}$. **2.27.** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

2.28. $2x^3 + 4x^2 + 3x + C$. **2.29.** $\frac{x^4}{4} + \frac{(a+b)x^3}{3} + \frac{abx^2}{2} + C$. **2.30.** $\frac{3x^4\sqrt[3]{x}}{13} - \frac{3x^2\sqrt[3]{x}}{7} - 6\sqrt[3]{x} + C$. **2.31.** $2\sqrt{ax} - 2x + \frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{a}} + C$. **2.32.** $\frac{1}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{7}} + C$. **2.33.** $\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right| + C$. **2.34.** $\ln\left|x + \sqrt{4+x^2}\right| + C$. **2.35.** $\arcsin\frac{x}{2\sqrt{2}} + C$. **2.36.** $\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} - \ln\left|x + \sqrt{x^2+2}\right| + C$. **2.37.** $\frac{1}{\sqrt{15}}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{5}} + C$. **2.38.** $-\mathrm{ctg}x - x + C$. **2.39.** $\frac{1}{4\sqrt{14}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}x - 2\sqrt{2}}{\sqrt{7}x + 2\sqrt{2}}\right| + C$. **2.40.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + \frac{7}{8}}\right| + C$. **2.41.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{7}} + C$. **2.42.** $-\frac{1}{2}\ln\left|x - \frac{3}{2}\right| + C$. **2.43.** $a^2x + 2ab\ln|x-a| - \frac{b^2}{x-a} + C$. **2.44.** $-2b\sqrt{1-y} + C$. **2.45.** $-\frac{2}{3b}\sqrt{(a-bx)^2} + C$. **2.46.** $\sqrt{x^2+1} + C$.

2.47. $2\sqrt{x}+\frac{1}{2}\ln^2 x+C$. **2.48.** $\frac{1}{3}\ln\left|3x^2-2\right|-\frac{5}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-2}{\sqrt{3}x+2}\right|+C$. **2.49.** $\frac{1}{5}\ln\left(5x^2+7\right)-\ -\frac{3}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{7}}+C$. **2.50.** $\frac{3}{5}\sqrt{5x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\sqrt{5}x+\sqrt{5x^2+1}\right|+C$.

2.51. $\sqrt{x^2-4}+\quad+3\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+C$. **2.52.** $\frac{2}{3}\sqrt{\arcsin^3 x}+C$. **2.53.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}^2\frac{x}{2}+C$.

2.54. $-\frac{1}{3\ln 4}4^{2-3x}+C$. **2.55.** $\frac{a}{2}e^{2x/a}+2x-\frac{a}{2}e^{-2x/a}+C$. **2.56.** $\frac{1}{2\ln 7}7^{x^2}+C$.

2.57. $-e^{1/x}+C$. **2.58.** $\frac{2}{\ln 5}5^{\sqrt{x}}+C$. **2.59*.** $-\frac{2}{3b}\sqrt{\left(a-be^x\right)^3}+C$.

2.60. $x-\frac{1}{2a}\cos 2ax+C$. **2.61.** $-\ln 10\ \cos(\lg x)\ +\ C$. **2.62.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}x^2+C$.

2.63*. $-2\ln\left|\cos\sqrt{x}\right|+C$. **2.64*.** $\ln|\operatorname{tg}x|+C$. **2.65.** $-\frac{1}{3}\ln\left(3+\cos 3x\right)+C$.

2.66*. $-\frac{2}{9}\sqrt{\left(1+3\cos^2 x\right)^3}+C$. **2.67.** $\frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}3x+\frac{1}{\cos^2 3x}\right)+C$. **2.68.** $x(\ln x-1)+C$.

2.69. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$. **2.70.** $\frac{x\sin 3x}{3}+\frac{\cos 3x}{9}+C$. **2.71.** $-\frac{x\ln 2+1}{2^x\ln 2}+C$.

2.72. $\frac{e^{2x}}{4}\left(\frac{x}{4}-1\right)+C$. **2.73.** $-\frac{x\cos 2x}{4}+\frac{\sin 2x}{8}+C$. **2.74.** $\frac{x^2}{2}\arcsin x-\frac{1}{4}\arcsin x+$ $+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C$. **2.75*.** $\frac{e^x}{2}\left(\sin x-\cos x\right)+C$. **2.76.** $\frac{3^x(\sin x+\cos x\ln 3)}{1+\ln^2 3}+C$.

2.77. $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+C$. **2.78*.** $2\sqrt{x+1}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C$. **2.79*.** $\left(x^2-2x+\quad+4\right)e^x+C$. **2.80*.** $x\operatorname{tg}x+\ln\left|\cos x\right|+C$. **2.81*.** $\frac{x}{2}(\sin\ln x+\cos\ln x)+C$.

2.82. $2x-\ln x+2+C$. **2.83*.** $5x+\frac{161}{6}\ln|x-4|-\frac{7}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x|$. **2.84.** $\frac{1}{1+x}+\quad+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$. **2.85.** $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C$. **2.86.** $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x^{16}}{(2x-1)^7(2x+1)^9}\right|+\frac{x}{4}+C$. **2.87*.** $x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$. **2.88*.**

$\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|+x+C$. **2.89.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+\quad+C$. **2.90.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|+C$. **2.91.** $\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{6x-1}{\sqrt{11}}+C$. **2.92.** $\frac{1}{2}\ln\left(x^2-7x+13\right)+\quad+\frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-7}{\sqrt{3}}+C$. **2.93.** $\frac{3}{2}\ln\left(x^2-4x+5\right)+4\operatorname{arctg}\left(x-2\right)+C$. **2.94.** $x-$ $-\frac{5}{2}\ln\left(x^2+3x+4\right)+\frac{9}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+C$. **2.95.** $3\ln\left(x^2-6x+10\right)-8\operatorname{arctg}\left(x-3\right)+$ $+x+C$. **2.96.** $x+3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$. **2.97*.** $\ln|x(x-1)|+\frac{2}{x-1}+C$. **2.98.** $2\sqrt{x-1}\left(\frac{(x-1)^3}{7}+\frac{3(x-1)^2}{5}+x\right)+C$. **2.99.** $\frac{3}{10a^2}\left(2\sqrt[3]{(ax+b)^5}-\right.$ $\left.-5b\sqrt[3]{(ax+b)^2}\right)+C$. **2.100.** $6\sqrt[6]{x}-3\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-6\ln\left(1+\sqrt[6]{x}\right)+C$. **2.101.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}+C$. **2.102*.** $\ln\left|\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2}{x+2+\sqrt{x+1}}\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}+C$. **2.103*.** $-2\operatorname{arctg}\sqrt{1-x}+C$. **2.104*.** $\frac{x-2}{2}\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$. **2.105.** $-\frac{\sqrt{2x+3}}{x}+C$. **2.106*.** $\frac{1}{3}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z+2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{z^3-1}+C$, где $z=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$. **2.107.** $2\sqrt{x-2}-2\ln\left|\sqrt{x-2}+1\right|+C$. **2.108.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C$. **2.109.** $\arcsin(2x-1)+C$. **2.110.** $3\sqrt{x^2-4x+5}+C$. **2.111.** $\frac{1}{2}\sqrt{4x^2+4x+2}-$ $-\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+2}\right|+C$. **2.112*.** $-2\sqrt{1-x-x^2}-9\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C$. **2.113*.** $-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\arcsin\frac{2x-1}{2}+C$. **2.114.** $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|+C$. **2.115.** $\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{5}x}+C$. **2.116.** $\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{2}(x-1)}+C$. **2.117.** $-\arcsin\frac{1}{x+1}+C$. **2.118*.** $\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2}+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{x}+C$. **2.119.** $\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2-2x+5}+$ $+2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2-2x+5}\right|+C$ **2.120*.** $\frac{2x+3}{4}\sqrt{x^2-x+1}-$

$-\frac{1}{8}\ln\left|2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}\right|+C$. **2.121*.** $-\frac{8+4x^2+3x^4}{15}\sqrt{1-x^2}+C$. **2.122.** $\frac{x-2}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\arcsin\frac{2x-1}{2}+C$. **2.123.** $\frac{x+2}{4}\sqrt{4x^2+4x-3}-$ $-\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x-3}\right|+C$. **2.124.** $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C$. **2.125.** $-\cos x+$ $+\frac{2\cos^3 x}{3}-\frac{\cos^5 x}{5}+C$. **2.126.** $\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C$. **2.127.** $\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C$. **2.128.** $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}+C$. **2.129.** $-\frac{\cos 8x}{16}+\frac{\cos 2x}{4}+C$. **2.130.** $-\frac{\sin 25x}{50}+\frac{\sin 5x}{10}+C$. **2.131.** $\frac{\sin 2ax}{4a}+\frac{x\cos 2b}{2}+C$. **2.132.** $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cos x+C$. **2.133.** $\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6}+$ $+3\sin\frac{x}{6}+C$. **2.134.** $\frac{x}{2}-\frac{\sin 6x}{12}+C$. **2.135.** $\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x+\frac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x+C$. **2.136.** $-\frac{1}{3\sin^3 x}+$ $+\frac{1}{\sin x}+C$. **2.137*.** $\frac{\cos^2 x}{2}-2\cos x+3\ln(\cos x+2)+C$. **2.138*.** $\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. **2.139.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\mathrm{tg}(x/2)}{2-\mathrm{tg}(x/2)}\right|+C$. **2.140*.** $x-\mathrm{tg}\frac{x}{2}+C$. **2.141*.** $-x+\mathrm{tg}\,x+\frac{1}{\cos x}+C$. **2.142.** $\ln\left|\frac{\mathrm{tg}(x/2)-5}{\mathrm{tg}(x/2)-3}\right|+C$. **2.143.** $\mathrm{arctg}\left(1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)+C$.

Глава 3

3.1. 3. **3.2.** $\frac{9}{2}$. **3.3.** $\frac{14}{3}$. **3.4.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **3.5.** $\frac{11}{2}+7\ln 2$. **3.6.** 1. **3.7.** $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$. **3.8.** $1-\frac{1}{e}$. **3.9.** $\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\frac{4}{7}$. **3.10.** 1. **3.11.** $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$. **3.12*.** $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$. **3.13.** $45/4$. **3.14.** $2-\pi/2$. **3.15.** $32/3$. **3.16.** $5/3-2\ln 2$. **3.17.** $\frac{2}{3}\left(3+\ln\frac{2}{5}\right)$. **3.18.** $\ln(3/2)$. **3.19.** $-\frac{2}{3}$. **3.20.** $4-\pi$. **3.21.** $1-\cos 1$. **3.22.** $2/3$. **3.23.** $-\frac{\sqrt{3}}{4}$. **3.24.** $14/15$. **3.25.** 2π. **3.26.** $\pi/6$. **3.27.** $0{,}5\ln 3$. **3.28.** $\sqrt{3}-\pi/3$. **3.29.** π. **3.30.** $\frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$. **3.31.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **3.32*.** $\pi/6$. **3.33.** $\mathrm{arctg}\,e-\pi/4$. **3.34.** $(e-e^{1/4})/2$. **3.35*.** $\pi/12$. **3.36.** $\pi/4$. **3.37.** 1. **3.38.** 1. **3.39.** $\frac{\pi^2-8}{32}$. **3.40.** $\frac{2e^3+1}{9}$. **3.41.** $e-2$. **3.42.** $\frac{\pi}{4}$. **3.43.** π^2. **3.44.** $\frac{\pi}{2}-1$. **3.45.** 1. **3.46*.** $\frac{5\pi\sqrt{3}-9\ln 3}{18}$. **3.47.** $\frac{\pi-2}{4}$. **3.48*.** $\frac{e^{\pi/2}-1}{2}$. **3.49.** $1-\frac{2}{e}$. **3.50.** 1.

3.51. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}-1$. **3.52.** $\pi-2$. **3.53*.** $\frac{\pi}{2}-1$. **3.54*.** $\frac{\pi}{4}$. **3.55.** $\frac{8\sqrt{2}}{3}$. **3.56.** $9/2$. **3.57.** $35/2-6\ln 6$. **3.58.** $32/3$. **3.59.** $32/3$. **3.60.** 2. **3.61.** $16/3$. **3.62.** e^2. **3.63.** $1/6$. **3.64*.** $1{,}5-2\ln 2$. **3.65.** $32/3$. **3.66*.** $\pi/3$. **3.67.** $32/3$. **3.68.** $9/2$. **3.69.** $3\pi a^2/8$. **3.70.** $8/15$. **3.71*.** 12π **3.72.** 6π. **3.73.** $\pi/4$. **3.74*.** 4. **3.75*.** 3π. **3.76.** $\pi a^2/4$. **3.77*.** a^2. **3.78.** $9\pi/2$. **3.79.** $\left(e^{4\pi}-1\right)/4$. **3.80.** $\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. **3.81.** $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **3.82.** $\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$. **3.83.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **3.84*.** $\ln 3-\frac{1}{2}$. **3.85*.** $2\sqrt{3}$. **3.86.** $\sqrt{2}(e-1)$. **3.87.** $\pi^2/4$. **3.88.** $8a$. **3.89*.** $4\sqrt{3}$. **3.90*.** $13/3$. **3.91.** 24. **3.92.** $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{1}{2}a\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$. **3.93*.** 6π. **3.94*.** 16. **3.95*.** $8\left(2-\sqrt{3}\right)$. **3.96.** $5\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{5}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$. **3.97.** $\frac{272}{15}\pi$. **3.98.** 2π. **3.99.** $\frac{3\pi}{10}$. **3.100.** 12π. **3.101.** $\frac{\pi^2}{2}$. **3.102.** $\frac{(\pi+2)\pi}{4}$. **3.103.** $\frac{4\pi ab^2}{3}$. **3.104.** $\frac{32\pi a^3}{105}$. **3.105.** $\frac{512\pi}{15}$. **3.106.** $\frac{512\pi}{7}$. **3.107*.** $8\pi/3$. **3.108.** $19{,}2\pi$. **3.109.** $2\pi\left(\sqrt{2}+\right.$ $\left.+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$. **3.110.** $\frac{34\sqrt{17}-2}{9}\pi$. **3.111.** $\frac{62\pi}{3}$. **3.112*.** $\frac{12\pi}{5}$. **3.113*.** $\frac{64\pi a^2}{3}$. **3.114.** $\frac{32\pi a^2}{5}$. **3.115.** $2\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$. **3.116*.** $\frac{236\pi\rho R^3}{375}$. **3.117*.** $t\approx 153$с. **3.118*.** 493 кДж. **3.119.** $2I_0/\pi\approx 0{,}637I_0$ **3.120.** $A=\frac{I_0^2R\pi}{\omega}$, $N_{\text{ñð.}}=\frac{A}{2\pi/\omega}=\frac{I_0^2R}{2}$. **3.121.** $\cos\varphi_0-\sin\varphi_0$. **3.122.** $T(t)=T_{\hat{a}}+(T_0-T_{\hat{a}})e^{-kt}$. **3.123*.** $5P_0t_0^{1,2}\left(\frac{1}{t_1^{0,2}}-\frac{1}{t_2^{0,2}}\right)$ рентген/час. **3.124.** $1/2$. **3.125.** $1/2$. **3.126.** $1/192$. **3.127.** $\pi/2$. **3.128.** Расходится. **3.129.** Расходится. **3.130.** 1. **3.131.** $\ln 2$. **3.132.** Расходится. **3.133*.** $\pi/2$. **3.134*.** $1/4$. **3.135*.** 1. **3.136.** Сходится. **3.137.** Сходится. **3.138*.** Сходится. **3.139.** 4. **3.140.** $1/\ln 2$. **3.141.** $\pi/2$. **3.142** –1. **3.143.** 2. **3.144*.** 1. **3.145.** Расходится. **3.146.** 6. **3.147.** Расходится. **3.148*.** 4. **3.149*.** Расходится. **3.150*.** Расходится.

Глава 4.

4.1. $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. **4.2.** $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -6 & 7 & -8 \end{pmatrix}$. **4.3.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$. **4.4.** $\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 20 & 0 \end{pmatrix}$. **4.5.** (12).

4.6. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 4 & -8 & 8 \end{pmatrix}$. **4.7.** $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. **4.8.** $\begin{pmatrix} -11 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. **4.9.** $\begin{pmatrix} -\sin 3\alpha & \cos 3\alpha \\ -\cos 3\alpha & -\sin 3\alpha \end{pmatrix}$.

4.10. $(a^2+b^2)E$. **4.11.** $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **4.12.** $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 9 & -7 \end{pmatrix}$.

4.13. $\begin{pmatrix} -1+2i & 3+i & 2+3i \\ 3+i & 3-4i & 6-4i \\ 2+3i & 6-4i & 9 \end{pmatrix}$. **4.14.** $f(A)=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. **4.15.** 1. **4.16.** $x-1$. **4.17.** 17. **4.18.** -16. **4.19.** 10. **4.20.** 0. **4.21.** -5. **4.22.** 24. **4.23.** -24. **4.24.** -5. **4.25.** 102.

4.26. 56. **4.27.** 319. **4.28.** 48. **4.29.** -3600. **4.30.** 1. **4.31.** 2640. **4.32.** $x_1=1, x_2=2$. **4.33*.** $x_1=0, x_2=1, x_3=2$. **4.34.** а) -21; б) 1; в) -1; г) 20; д) -21. **4.35.** 1. **4.36.** 2. **4.37.** 2. **4.38.** 2. **4.39.** 3. **4.40*.** 2. **4.41.** 1. **4.42*.** 3. **4.43.** $r=4$ при $x \neq 0$; $r=3$ при $x=0$. **4.44.** $\begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. **4.45.** $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. **4.46.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

4.47. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **4.48.** $\frac{1}{48}\begin{pmatrix} -10 & 12 & -10 \\ -17 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. **4.49.** $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 9 \\ -5 & -3 & 8 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

4.50*. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **4.51*.** $\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$. **4.52.** $X=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & 26 \\ -7 & -7 \end{pmatrix}$. **4.53.** $X=\frac{1}{50}\begin{pmatrix} 15 & -13 \\ 45 & 11 \end{pmatrix}$. **4.54.** $\lambda \neq 0, \lambda \neq 11/2$. **4.55.** Ни при каком λ. **4.56.** $x_1=-1,\ x_2=1$. **4.57.** $x_1=2, x_2=-3$. **4.58.** $x_1=4, x_2=5,\ x_3=-3$. **4.59.** $x_1=1, x_2=2,\ x_3=-1$. **4.60.** $x_1=2, x_2=1$. **4.61.** $x_1=-1, x_2=-3$. **4.62.** $x_1=2, x_2=-1, x_3=1$.

4.63. $x_1=0, x_2=3, x_3=-3$. **4.64.** $x_1=-2/5, x_2=3/5, x_3=3/5$. **4.65.** $x_1=1, x_2=-1,\ x_3=2$. **4.66.** $x_1=8/7, x_2=-1/7, x_3=-3/7$. **4.67.** $x_1=3, x_2=1, x_3=-1$.

4.68. $x_1=-4,\ x_2=5$. **4.69.** $x_1=3, x_2=2, x_3=1$. **4.70.** $x_1=1/2, x_2=1/4, x_3=-1/2$

. **4.71.** Система несовместна. **4.72.** Система несовместна. **4.73.** $x_1=(10c+16)/7,\ x_2=(8c+3)/7,\ x_3=c$. **4.74.** $x_1=c,\ x_2=-7/5,$ $x_3=(18-15c)/10$. **4.75.** $x_1=c_1, x_2=c_2, x_3=-c_1+(c_2-1)/2, x_4=c_1-2c_2+2$. **4.76.** $x_1=1,\ x_2=0,\ x_3=2$. **4.77.** $x_1=1/2,\ x_2=1/3,\ x_3=-1/2,\ x_4=1/4$. **4.78.** $x_1=c-1,\ x_2=2-c,\ x_3=c$. **4.79.** $x_1=(10-3c)/4,\ x_2=(10-3c)/4,$ $x_3=(-8+5c)/4,\ x_4=c$. **4.80.** Если $\alpha=-2$, то система несовместна; Если $\alpha=1,$ то $x_1=6-c_2-c_3,\ x_2=c_2,\ x_3=c_3$; Если $(\alpha+2)(\alpha-1)\neq 0$, то $x_1=x_2=x_3=6/(\alpha+2)$. **4.81.** $x_1=1,\ x_2=3,\ x_3=0,\ x_4=-2$. **4.82.** $x_1=3c, x_2=c$. **4.83.** $x_1=c/2,\ x_2=c,\ x_3=0$. **4.84.** $x_1=7c/5,\ x_2=11c/5,\ x_3=c$. **4.85.** $x_1=0,$ $x_2=0, x_3=0$. **4.86.** $x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=0$. **4.87.** $x_1=c/26,\ x_2=19c/26,\ x_3=c$. **4.88.** $x_1=-17c/31,\ x_2=30c/31,\ x_3=c$. **4.89*.** $x_1=-c/2,\ x_2=c/8,\ x_3=13c/16,$ $x_4=c$. **4.90.** $X_1=(4;1;-5)^T$ – фундаментальное решение, $X=(4c;c;-5c)^T$ – общее решение. **4.91.** $X_1=(12;17;1;0)^T,\ X_2=(-2;-3;0;1)^T$. **4.92.** $X_1=(8;-6;1;0)^T,$ $X_2=(-7;5;0;1)^T$. **4.93*.** $X_1=(-7;4;1;0;0)^T,$ $X_2=(5;-3;0;1;0)^T, X_3=(4;-3;0;0;1)^T$. **4.94.** $|\vec{a}+\vec{b}|=5,\ |\vec{a}-\vec{b}|=5$. **4.95.** $|\vec{a}+\vec{b}|=2\sqrt{3},\ |\vec{a}-\vec{b}|=2$. **4.96.** $\overrightarrow{AB}\square\overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$. **4.97.** $\vec{c}+\vec{a}/2$. **4.98.** $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)/2$. **4.99.** а) 4; б) 0; в) -5; г) $3\sqrt{3}$; д) 1; е) $-\sqrt{2}$. **4.100.** $(4;9;4)$. **4.101.** $(-7;-7;4;2)$. **4.102.** $(0;-1)$. **4.103.** $(9;-5;22)$. **4.104.** $\vec{x}=\frac{1}{5}\vec{a}-\frac{4}{5}\vec{b}$.

4.105. $\vec{x}=17\vec{a}-4\vec{b}-16\vec{c}$. **4.106.** $D(9;-5;12)$. **4.107.** Нет. **4.108.** Да. **4.109.** Да. **4.110.** Да при $\alpha\neq 0$, нет при $\alpha=0$. **4.111.** Да. **4.112.** Да. **4.113.** Нет. **4.114.** Да. **4.115.** Нет. **4.116.** Нет. **4.117.** $M_1(-1;0), M_2(7;0)$. **4.118.** $M(0;1;0)$. **4.119.** 7. **4.120.** $(4;0),(5;2)$. **4.121.** $(-1;2;4),\ (8;4;2)$. **4.122.** а) -6; б) -61; в) 13. **4.123.** $\alpha=\pm 3/5$. **4.124.** $15,\ \sqrt{593}$. **4.125.** $2\pi/3$. **4.126*.** $\angle A=\pi/2;$ $\angle B=\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}; \angle C=\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$. **4.127.** $\pi/3$. **4.128.** а) 22; б) -200; в) 41; г) $\sqrt{105}$; д) $11/3$; е) $22/7$. **4.129.** $AB=5,\ BC=5\sqrt{2},\ AC=5;$ $\angle A=\frac{\pi}{2},\ \angle B=\angle C=\frac{\pi}{4}$. **4.131.** а) 2; б) 0. **4.132.** а) $\arccos\frac{5}{9}$; б) $\frac{\pi}{4}$. **4.133.** а) $\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{3}$; в) $10\sqrt{3}$. **4.134.** $50\sqrt{2}$. **4.135.** а) $(-3;5;7)$; б) $(-6;10;14)$; в) $(-12;20;28)$.

4.136. $2\sqrt{6}$. **4.137.** $\alpha=-6,\ \beta=21$. **4.138.** $(-20;7;-11)$. **4.139.** -7. **4.140.** а) Нет; б) да. **4.141.** 6. **4.142.** а) Да; б) нет. **4.143.** а) -3; б) при любом λ. **4.144.** 12. **4.146.** $(8;8;-8)$.

Глава 5

5.1. $B(2;3), D(-2;-1)$. **5.2.** $N(5;0)$. **5.3.** $N_1(6;0), N_2(0;-2)$. **5.4.** 5. **5.5.** $A(-5;-1)$, $D(4;5)$. **5.6.** $10\sqrt{2}/3$. **5.7.** $2\sqrt{5}, 5\sqrt{2}, \sqrt{10}$. **5.8.** $3x-5y-4=0$. **5.9.** $(x+1)^2+\ \ +(y-2)^2=25$. **5.10.** $M(-3;4), N(4;3)$. **5.11.** $3x+4y=0$. **5.12.** $x^2+y^2=4$.

5.13. $r\cos\varphi=5$. **5.14.** $r\sin\varphi\pm5=0$. **5.18.** а) $r=R$. **5.19.** $\operatorname{tg}\varphi=1$. **5.20.** $r^2\cos2\varphi=a^2$. **5.21.** $r=a\sin3\varphi$. **5.22.** $x=a$. **5.23.** $x^2+y^2=2ax$. **5.24.** $y=4a(a-x)$. **5.25.** $\left(x^2+y^2+2ax\right)^2=4a^2\left(x^2+y^2\right)$. **5.30.** $y=-\dfrac{3}{2}x$. **5.31.** а) $k=2, b=2$; б) $k=3/4, b=1/4$; в) $k=0, b=-5/2$; г) $k=-1/2, b=5/2$. **5.32.** а) $a=3, b=2$; б) $a=4, b=-3$. **5.33.** $b=-6$. **5.34.** а) $2x-y-5=0$; б) $x=2$. **5.35.** а) $2x-3y-13=0$; б) $3x+5y+9=0$. **5.36.** $5x+2y-3=0$. **5.37.** $6x-5y-\ \ -11=0$. **5.38.** а) $\pi/4$; б) $\pi/2$; в) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}$; г) $\pi/4$. **5.39.** $M(0;2)$. **5.40.** $C(0;5)$.

5.41. Уравнение стороны $AB: 2x+y-8=0$; $BC: x+2y-1=0$; $CA: x-y-1=0$. Уравнения медиан, проведенных из вершин $A, B, C: x-3=0, x+y-3=0, y=0$. **5.42.** 4. **5.43.** 1. **5.44.** $A_1(0;-4), A_2(0;1)$. **5.45.** $4x+1=0$. **5.46.** $11x-10y+17=0$, $x-y+2=0, 2x+5y-31=0$. **5.47.** 74. **5.48.** $\dfrac{x-7}{-4}=\dfrac{y}{1}$; $x=7-4t, y=t$; $x+4y-7=0$; $\dfrac{x}{\sqrt{17}}+\dfrac{4y}{\sqrt{17}}-\dfrac{7}{\sqrt{17}}=0$. **5.49.** а) $\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y-3=0$; б) $y+\dfrac{5}{2}=0$; в) $\dfrac{5}{13}x-\dfrac{12}{13}y+2=0$; г) $\dfrac{x}{\sqrt{2}}-\dfrac{y}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}=0$. **5.50.** $3x-4y+11=0, 4x+3y-2=0$. **5.51.** а) $3/2$; б) $7/2$. **5.52.** $2x-3y-14=0$. **5.53.** $z+2=0, x-1=0, y-3=0$. **5.54.** $4x-3y=0$. **5.55.** $7y+4z=0$. **5.56.** $-2x+y+3z-7=0$. **5.57*.** $x-2y-7=0$. **5.58.** $a=3, b=-6, c=2$. **5.59.** $2x-3y+5z-32=0$. **5.60.** $7x+3y-8z+18=0$.

5.61. $x+9y=0$. **5.62*.** $x+5y+7z+6=0$. **5.63.** $x-2y+z+1=0$. **5.64.** $3x-y-\ \ -3z-8=0$. **5.65.** $13x-7y+17z-74=0$. **5.66.** $x+y+z-3=0$. **5.67.** а) $\pi/2$; б) $\pi/4$. **5.68*.** $x+6y-3=0$. **5.69.** а) $-\dfrac{x}{3\sqrt{2}}-\dfrac{y}{3\sqrt{2}}+\dfrac{4z}{3\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0$; б) $\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}y+\ \ +\dfrac{2}{3}z-5=0$; в) $\dfrac{3}{7}x-\dfrac{2}{7}y+\dfrac{6}{7}z-\dfrac{3}{7}=0$; г) $\dfrac{2}{15}x-\dfrac{11}{15}y+\dfrac{2}{3}z-3=0$. **5.70.** а) 3; б) 6; в) 1. **5.71.** а) 7; б) 2. **5.72.** $A_1(9;0;0), A_2(-5;0;0)$. **5.73.** $6x+3y-2z-36=0$, $6x+3y-2z+62=0$. **5.74.** $10x\pm\sqrt{47}y+7z-56=0$. **5.75.** 3. **5.76.** $x=4+4t$,

$y=-2+5t,\ z=3-7t;\ \frac{x-4}{4}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-3}{-7}$. **5.77.** а) $\frac{x-9}{2}=\frac{y+8}{3}=\frac{z+5}{4}$; б) $\frac{x-9}{0}=\quad=\frac{y+8}{0}=\frac{z+5}{1}$. **5.78.** $\frac{x-2}{-4}=\frac{y-5}{9}=\frac{z+8}{-6}$. **5.79.** $AB: x=4-t,\ y=-5+7t,\quad z=7-8t;\quad BC: x=4-10t,\ y=-5+13t,\ z=7+3t;$ $CA: x=3-9t,\ y=2+6t,\ z=-1+\quad+11t$. **5.80.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}$. **5.81.** $\frac{x+3}{-4}=\frac{y-1}{23}=\frac{z}{13}$. **5.82.** $1/3$. **5.83.** $\pi/6$. **5.84.** $\frac{5\sqrt{14}}{7}$. **5.85.** а) 21; б) 6. **5.86.** $A(-7;-7;3)$. **5.87*.** $13x-7y+17z-74=0$. **5.88.** $x+7y-6z+6=0$. **5.89*.** $3x-7y-19z+2=0$. **5.90.** $5x-2y-z-2=0$. **5.91.** Прямая лежит в плоскости. **5.92*.** $\frac{x+1}{5}=\frac{y-1}{27}=\frac{z+1}{22}$. **5.93.** $A(1;-3;2)$. **5.94.** $C(1;2), R=2$. **5.95.** $(x-5)^2+(y-3)^2=25; (x-25)^2+(y-13)^2=625$. **5.96*.** $(x-5)^2+(y-5)^2=16$. **5.97.** а) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; б) $\frac{x^2}{29}+\frac{y^2}{25}=1$; в) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

5.98. $a=3, b=2; F_1\left(-\sqrt{5};0\right), F_2\left(\sqrt{5};0\right); \varepsilon=\sqrt{5}/3$. **5.99.** 12. **5.101.** $M_1\left(-\frac{3}{2};\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$, $M_2\left(-\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$. **5.102.** $M_1\left(-\frac{15}{2};\frac{3\sqrt{7}}{2}\right), M_2\left(-\frac{15}{2};-\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$. **5.103.** а) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$; б) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$; в) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. **5.104.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **5.105.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **5.106.** $x=\pm\frac{6}{\sqrt{13}}; y=\pm\frac{6}{\sqrt{13}}$. **5.107.** а) $\left(\pm\sqrt{\frac{8}{3}};\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; б) $(0;\pm1)$. **5.108*.** 5,1 млн. км. **5.109.** а) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; б) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$; в) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. **5.110.** $F_1(-5;0), F_2(5;0); \varepsilon=5/4$. **5.111.** $\pi/2$. **5.112.** $\varepsilon=2/\sqrt{3}$. **5.113.** $\left(8;\pm3\sqrt{3}\right)$. **5.114** $\left(5,4;\pm8\sqrt{14}/5\right)$. **5.115.** 1. **5.116.** $(6;2)$ и $\left(14/3;-2/3\right)$. **5.117.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$. **5.118.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$. **5.119.** $\sqrt{3}$. **5.120.** 8. **5.122.** а) $y^2=12x$; б) $y^2=16x$; в) $y^2=4x$. **5.123.** $(4;\pm4)$. **5.124.** $x^2=2y$. **5.125*.** $p=8/3$. **5.126*.** $\operatorname{arctg}\left(\frac{v^2}{dg}-\sqrt{\frac{v^4}{d^2g^2}-\frac{2hv^2}{d^2g}-1}\right)\approx39^\circ$. **5.127.** $M_1(1;2)$, $M_2(9;-6)$. **5.128.** $3x-y+1=0$. **5.129*.** p. **5.130.** $r=\frac{9}{5-4\cos\varphi}$.

5.131. $r=\dfrac{9}{4-5\cos\varphi}$. **5.132.** $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. **5.133.** $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1$. **5.134.** $y^2=4x$. **5.135.** $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$. **5.136.** $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{25}=1$. **5.137.** $y^2=12x$. **5.138.** $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{21}=1$. **5.139.** $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$. **5.140.** $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$. **5.141.** $(7;5)$. **5.142.** $(9/2;4)$. **5.143.** $(0;-5)$. **5.144.** Центра нет. **5.145.** Линия центров $2x+y-2=0$. **5.146.** $(-1;3)$. **5.147.** $X^2-\dfrac{Y^2}{2}=1;\ O_1(-1;-2);\ \alpha=-\pi/4$. **5.148.** $\dfrac{X^2}{16}+\dfrac{Y^2}{9}=1; O_1(-1;1); \alpha=\pi/4$. **5.149.** $\dfrac{X^2}{9}+\dfrac{Y^2}{4}=1; O_1(-1;1); \operatorname{tg}\alpha=3/4$. **5.150.** $\dfrac{X^2}{4}-Y^2=1; O_1(1;-3); \operatorname{tg}\alpha=-3/4$. **5.151.** $x+y-3=0,\ \ x+3y-3=0$. **5.152.** $x+3y-6=0,\ \ 2x-y+1=0$. **5.153.** $2x+4y-3=0,\ \ 7x-2y+3=0$. **5.154.** $Y^2=X/5;\ \ x=(4x_1-3y_1)/5,$ $y=(3x_1+4y_1)/5;\ \ x_1=X+7/5,\ y_1=Y+1/5$. **5.155.** $Y^2=\sqrt{2}X;\ x=\dfrac{x_1-y_1}{\sqrt{2}},$ $y=\dfrac{x_1+y_1}{\sqrt{2}};\ x_1=X+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, y_1=Y$. **5.156.** $Y^2=2X;\ \ x=(-4x_1+3y_1)/5,$ $y=(-3x_1-4y_1)/5;\ x_1=X-3, y_1=Y+2$. **5.157.** $2x+y-1=0,\ \ 2x+y-5=0$. **5.158.** $5x-y-3=0, 5x-y+5=0$. **5.159.** $2x-y+3=0$ (совпадающие прямые). **5.160.** $(x-2)^2+y^2+(z+3)^2=0$. **5.161.** Сфера $X^2+Y^2+Z^2=9;$ $O_1(1;-2;3)$. **5.162.** Эллипсоид $\dfrac{X^2}{4}+\dfrac{Y^2}{9}+Z^2=1; O_1(2;-3;0)$. **5.163.** Однополостный гипербо-лоид $\dfrac{X^2}{3}+\dfrac{Y^2}{2}-Z^2=1; O_1(2;-1;1)$. **5.164.** Двуполостный гиперболоид $X^2+\dfrac{Y^2}{4}-\dfrac{Z^2}{4}=-1;\ O_1(0;1;-2)$. **5.165.** Конус $\dfrac{X^2}{9}+\dfrac{Y^2}{9}-\dfrac{Z^2}{4}=0; O_1(2;0;-2)$. **5.166.** Эллиптический параболоид $\dfrac{X^2}{25}+\dfrac{Y^2}{1}=2Z; O_1(2;-1;1)$. **5.167.** Гиперболический параболоид $\dfrac{X^2}{3}-\dfrac{Y^2}{2}=2Z; O_1(-3;2;-4)$. **5.168.** Эллиптический цилиндр $\dfrac{X^2}{4}+\dfrac{Y^2}{9}=1; x=X+3, y=Y-1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: АСТ-Астрель, 2010.
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: АСТ-Астрель, 2010.
3. Гусак А.А. Высшая математика, т. 1, – Мн.: ТетраСистемс, 2004
4. .Гусак А.А. Математический анализ и дифференциальные уравнения. Справочное пособие к решению задач – Мн.: ТетраСистемс, 2008
5. Гусак А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Справочное пособие к решению задач – Мн.: ТетраСистемс, 2008.
6. Майсеня А.И. Справочник по математике. – Мн.: Вышэйшая школа, 2008.
7. Отчик В.С., Сережкин В.Н. Высшая математика. Курс лекций. Часть 1. Основы математического анализа функций одной переменной – Мн.: УП “ЦНИИТУ”, 2003.
8. Отчик В.С., Сережкин В.Н. Высшая математика. Курс лекций. Часть 2. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии – Мн.: УП “ЦНИИТУ”, 2005.
9. Руководство к решению задач по высшей математике. Под ред. Е.И.Гурского Части 1-2, – Мн.: Вышэйшая школа, 1989, 1990.
10. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа (Под ред. Ефимова А.В., Демидовича Б.П.). – М.: Наука, 1986.
11. Сухая Т.А., Бубнов В.Ф. Задачи по высшей математике. Часть 1. – Мн.: Вышэйшая школа, 1993.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие. 3
Глава 1. Дифференциальное и интегральное исчислении функций одной переменной 4
1.1. Приближенные числа 4
1.2. Системы координат на плоскости 5
1.3. Функции одной переменной 6
1.4. Предел последовательности 10
1.5. Предел функции 12
1.6. Производная функции 16
1.7. Дифференциал функции 23
1.8. Правило Лопиталя 26
1.9. Формула Тейлора 27
1.10. Экстремум функции одной переменной 28
1.11. Промежутки выпуклости и вогнутости графика функции 32
1.12. Асимптоты 33
1.13. Построение графика функции 34
Глава 2. Неопределенный интеграл 37
2.1. Комплексные числа 37

2.2. Неопределенный интеграл 39
2.3. Замена переменной в неопределенном интеграле. 41
2.4. Интегрирование по частям 43
2.5. Интегрирование рациональных функций 43
2.6. Интегрирование иррациональных функций 49
2.7. Интегрирование тригонометрических выражений 53
Глава 3. Определенный интеграл 57
3.1. Свойства определенного интеграла 57
3.2. Замена переменной в определенном интеграле 59
3.3. Интегрирование по частям в определенном интеграле 60
3.4. Приложения определенного интеграла 61
3.5. Физические приложения определенного интеграла 68
3.6. Интегралы с бесконечными пределами интегрирования 70
3.7. Интегралы от неограниченных функций 72
Глава 4. Линейная алгебра 74
4.1. Матрицы 74
4.2. Определитель матрицы 76
4.3. Ранг матрицы 82
4.4. Системы линейных алгебраических уравнений 85
4.5. Векторы. 94
Глава 5.Аналитическая геометрия 105
5.1. Уравнение линии на плоскости 105
5.2. Прямая линия на плоскости 107
5.3. Плоскость и прямая и в пространстве 111
5.4. Линии второго порядка 119
5.5. Исследование общего уравнения линии второго порядка 125
5.6. Поверхности второго порядка 131
Ответы 134
Литература 148