

Privet Sasha, Vo pervykh boljšoe spasibo za vsjo! Vo vtorykh boljšoe spasibo za potrisasjushij vecher s butylkoj italianskogo likjora nedopitogo Ferapontovym , i s tvojimi matematicheskimi rasskazami. A pro orthogonalnyje polynomy $P_n(x) = P(n, x)$ eto super! V tretjikh naschot spetsfunktzii kotoryje ne analitichny. Ja vernulsia domoj i posmotrel moji staryje zapisi: V 1996 godu ja khotel poniatj sviazj teorii veroyatnosti s teoriej mery Poniatno shto to, shto ja napishu trivilajno, no vsjo -taki napishu: Rasmotrim dlia proizvoljnogo $q: 0 \leq q \leq 1$ na otrezke $[0, 1]$ funktsiju:

$$F = F_q(x) = F\left(\sum a_n(2^n)\right) = \sum a_n q^n \left(\frac{p}{q}\right)^{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}},$$

gde a_i eto nuli libo edinichki, $p = 1 - q$, $0 \leq q \leq 1$ $x = \sum a_n/2^n$ argument funtskii $F = F_q$ eto chislo v dvojichnoj sisteme i funtskija F_q otobrazhajet $[0, 1]$ v $[0, 1]$. Esli $q = 1/2$ to F tozhdestvennaja funtskija Naprimen

$$F(0) = 0, F(1/2) = q, F(1/4) = q^2, F(1/8) = q^3 F(1/2+1/4) = q+qpF(1/2+1/8) = q+q^2pF(1/2+1/4+1/8) = q+pq+p^2q$$

F monotnonno vozrastajushaja ne differentsiruemaja funtskija esli $q \neq 1/2$. (Esli $q = 1/2$ to F is identity) V chom smysl etoj funkciintsii: eto konechno elementrano, no v 1996 godu ja izuchal teoremu Kolmogorova o rekonstruktsii veroyatnostnogo prostranstva s meroj po zadannym sluchajnym velichinam. V chastnosti dlia brosanija monetki mozžno postrojij veroyatnoje prostranstvo i v slucaje ravnykh veroyatnostej orla i reshki poluchaetsja v kachestve veroyatnostnogo prostranstva s meroj, prostranstvo $\Omega_{1/2} = \text{interval } [0, 1]$ s meroj Lebege. (Eto byla zadacha v knige Lamperti Teorija veroyatnosti) Kazhdoje chislo v intervale $x = 0, a_1a_2a_3\dots$ v dvojichnoj sisteme, $a_i = 0, 1$ oboznahcajet sobytije: shto pri i -om brosaniji vypala a_i ($a_i = 0, 1$). Naprimen veroyatnostj sobytija shto v trjokh brosanijakh v pervom i v tretjem brosanij vypadet 1 a vo vtorom vypadet 0 eto estj mera mnozhestva A_{101} chisel zapisj kotorykh imejet vid 0, 101..... i mera etogo mnozhestva konechno ravna $1/8$:

$$\int_{A_{101}} dF = F(0.1011111111\dots) - F(0.101) = F(0.11) - F(0.101) = (1/2 + 1/4) - (1/2 + 1/8) = 1/8$$

Ja togda reshil postrojij veroyatnsonoje prostranstvo dlia sluchaja, kogda veroyatnostj vypadenija chisla 0 ravna $q \neq 1/2$ i veroyatnostj vypadenija chisla 1 ravna $p = 1 - q$. Tak ja i prishjol k funtsii $F(x) = F_q(x)$ opisannoj vyshe. Naprimen veroyatnostj sobytija shto v trjokh brosanijakh v pervom i v tretjem brosanij vypadet 1 a vo vtorom vypadet 0 eto estj mera mnozhestva A_{101} chisel zapisj kotorykh imejet vid 0, 101..... i mera etogo mnozhestva konechno ravna:

$$\int_{A_{101}} dF_q = F_q(0.1011111111\dots) - F_q(0.101) = F_q(0.11) - F_q(0.101) = F_q(1/2+1/4) - F_q(1/2+1/8) = (q+qp) - (q+q^2p) = q$$

Konechno eto prostoje uprazhnenije po teorii veroyatnostej, no mozhet bytj eto interesno.
Hovik