Навигация на Римановой Сфере

А. В. Боровик и О. М. Худавердян

Для нетерпеливого и грамотного читателя сразу оговоримся, что основное математическое содержание этого этюда сводится к классическому предложению:

цилиндр – униформизующая поверхность для логарифма.

Тем не менее думается, что содержание этой исторической заметки в той или иной степени должно входить в любой курс комплексного анализа – но почему-то мы там этого не нашли.

1. Историческое предисловие

Если корабль должен из точки А приплыть в точку Б, как ему проложить маршрут? Конечно, наикратчайшее расстояние – это дуга большого круга. Но чтобы проложить такой маршрут, нужно уметь определять местоположение корабля в любой точке пути. А представьте, что на корабле есть только компас и скорость корабля точному измерению не подается. Тогда можно выбрать маршрут – траекторию, которая проходит через точки А и Б и составляет постоянный угол с меридианами – локсодрому. Если этот угол известен, то с помощью компаса курс фиксируется. При этом, даже если скорость корабля не контролируется – что и было в парусную эпоху, то он все равно не сбивается с курса! (Мы пренебрегаем сносом течением). Мы видим как жизненно важна локсодрома и определение угла, который составляет локсодрома с меридианами.

Конечно, меридианы и параллели – локсодромы. Если точки А и Б имеют одинаковую долготу (широту), то надо держать курс на Север или на Юг (на Восток или на Запад). Как же быть если точки А и Б имеют разную долготу и разную широту?

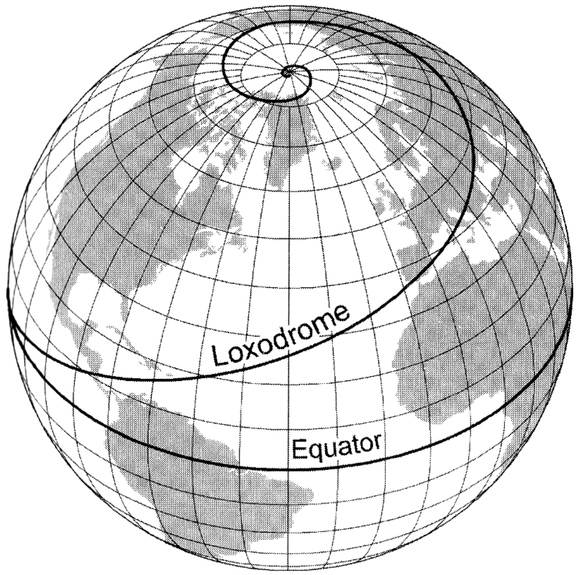

Рис. 1. Локсодрома

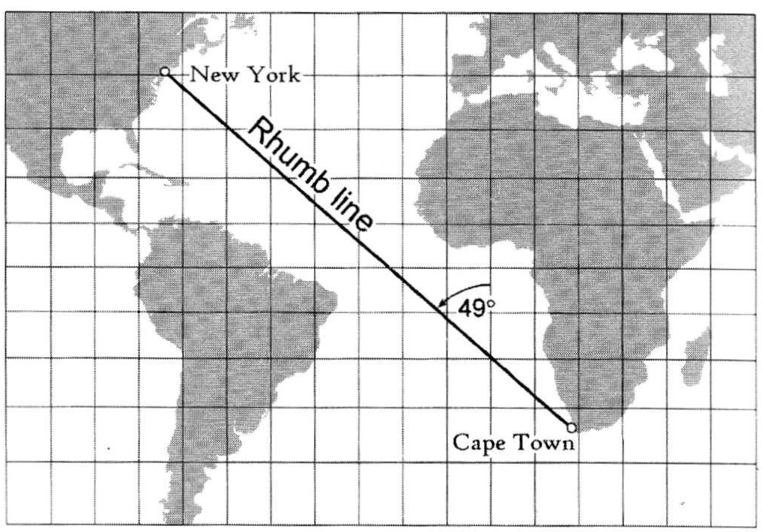

Рис. 2. Линия постоянного курса

А что если б можно было построить карту Земли в которой *все* локсодромы, не только меридианы и широты, были бы прямыми линиями? Имея такую карту, капитан корабля с линейкой в руках одним движением карандаша, соединив точки А и Б отрезком

Рис. 3. Герард Меркатор (1512–1594).

прямой, определял бы угол и соответственно фиксировал бы курс корабля.

Сразу же отметим, что многие карты мира, которые мы знаем с детства, этим свойством обладают. Это заслуга Меркатора.

Давайте попробуем повторить изобретение Меркатора. Мы, вооруженные знанием некоторых формул математики XX века, построим за Меркатора, то что он сделал в XVI–веке (видимо, не применяя математики, а только следуя интуитивному пониманию, какие преобразования карты сохраняют углы). И сделав это, он на самом деле заложил основание этих формул.

Почти как у Мандельштама:

Быть может вместо губ
Уже родился шепот
И в бездревесии кружилися листы ...

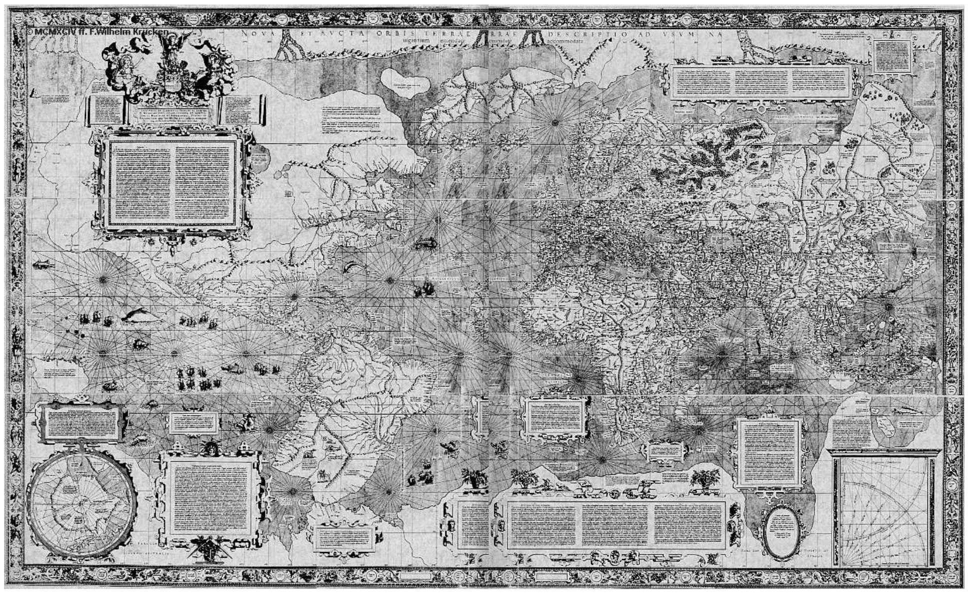

Рис. 4. Знаменитая карта, опубликованная Меркатором в 1569 году.

2. Локсодромы на сфере—логарифмические спирали—прямые линии. Вычислительный эксперимент

2.1. Сферические координаты. Пусть θ, φ—стандартные сферические координаты на сфере

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 :$$

$x = R\sin\theta\cos\varphi, y = R\sin\theta\sin\varphi, z = R\cos\theta$. Метрика на сфере выражается формой

$$R^2 d\theta^2 + R^2\sin^2\theta d\varphi^2.$$

Если $(\theta(t), \varphi(t))$ – кривая на сфере, то косинус угла наклона $\alpha(t)$ к меридиану равен

$$\cos\alpha(t) = \frac{\theta_t(t)}{\sqrt{\theta_t^2 + \sin^2\theta(t)\varphi_t^2(t)}} \tag{1}$$

Кривая $(\theta(t), \varphi(t))$ –локсодрома, если

$$\frac{\theta_t(t)}{\sqrt{\theta_t^2 + \sin^2\theta(t)\varphi_t^2(t)}} = \text{const}, \ \frac{\theta_t}{\varphi_t} = \pm\frac{c}{1-c^2}\sin\theta \tag{2}$$

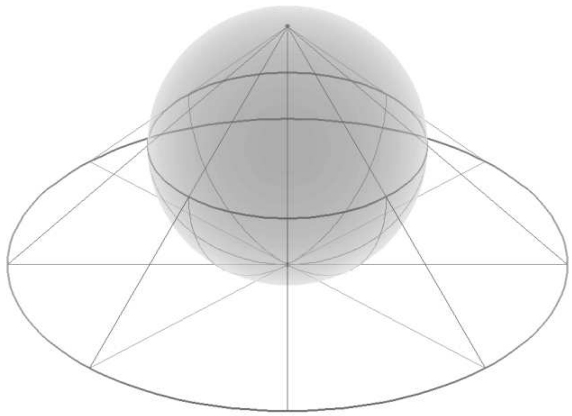

Рис. 5. Стереографическая проекция

Это дифференциальное уравнение локсодромы. Перейдя к параметру $t = \varphi$ ($\theta = \theta(\varphi)$ мы видим, что

$$\varphi(\theta) = k \int \frac{d\theta}{\sin\theta} = k \log \tan \frac{\theta}{2} + \varphi_0 \tag{3}$$

В случае когда $\cos\alpha = 0$, $\theta_t \equiv 0$, локсодрома—параллель $\theta = \theta_0$.

2.2. Стереографическая проекция. Функция $\tan\frac{\theta}{2}$ напоминает нам о стереографической проекции. И это верное наблюдение. При стереографической проекции сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

на плоскость $z = 0$ каждая точка

$$x = R \sin\theta \cos\varphi, \quad y = R \sin\theta \sin\varphi, \quad z = R \cos\theta$$

сферы переходит в точку $x = u, y = v, z = 0$ такую, что эти две точки лежат на одной прямой с Северным полюсом, точкой $(0, 0, 1)$. Следовательно, точка с декартовыми координатами (x, y, z) на сфере переходит в такую точку с декартовыми координатами (u, v) на плоскости, что

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{1-z}{1}$$

то есть

$$\begin{cases} x = \frac{u}{1+u^2+v^2} \\ y = \frac{v}{1+u^2+v^2} \\ z = \frac{u^2+v^2}{1+u^2+v^2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u = \frac{x}{1-z} \\ v = \frac{y}{1-z} \end{cases} \tag{4}$$

2.3. Логарифмическая спираль. Стереографическая проекция (4) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между сферой (без северного полюса) и точками плоскости $z = 0$. Если r, φ полярные координаты на плоскости $z = 0$, $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ $\varphi = \arctan \frac{u}{v}$ (то же что и на сфере), то получаем, что

$$\frac{r}{R \sin\theta} = \frac{R}{R(1 - \cos\theta)},\ r = R\tan\frac{\theta}{2} \tag{5}$$

При стереографической проекции точка с сферическими координатами (θ, φ) на сфере переходит в точку с плоскости $z = 0$ с полярными координатами $(R\tan\frac{\theta}{2}, \varphi)$. Значит, образом локсодромы (3) в стереографической проекции будет кривая на плоскости $z = 0$, задаваемая уравнением

$$\varphi = k \log \frac{r}{R} + \varphi_0\,. \tag{6}$$

Это логарифмическая спираль. Немного позже мы объясним это явление качественно, используя азы конформной геометрии.

Заметим, что логарифмическая спираль характеризуется тем, что пересекает все выходящие из начала координат радиальные линии под постоянным углом. Насекомые летят на свечку по логарифмической спирали – у них есть инстинкт лететь под постоянным углом к источнику света. В природе источник света – солнце или луна, и их метод навигации обеспечивает насекомым полет по прямой линии – локсодроме их насекомого мира.

2.4. Проекция Меркатора. А теперь ровно один шаг до проекции Меркатора: Рассмотрим отображение $W = \log\frac{Z}{R}$ комплексной плоскости $Z = u + iv$ в комплексную плоскость $W = s + it$: if $Z = u + iv = \rho e^{i\varphi}$ then

$$W = \log\frac{Z}{R} = \log\frac{\rho}{R} + i\varphi,\ \text{i.e. } s = \log\frac{\rho}{R}, t = \varphi \tag{7}$$

Очевидно, что это отображение переводит образ локсодромы (6) в прямую. Композиция стереографической проекции и функции $W = \log\frac{Z}{R}$

$$(\theta, \varphi) \mapsto R\tan\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} \mapsto \log\tan\frac{\theta}{2} + i\varphi \tag{8}$$

отображает локсодрому $\varphi = k\log\tan\frac{\theta}{2}$ на сфере в прямую $t = ks$. В частности меридианы $\varphi = \varphi_0$ переходят в прямые $t = \varphi_0$ и параллели $\theta = \theta_0$ переходят в отрезки прямых $s = \log\tan\frac{\theta_0}{2}$.

Конечно, для того чтобы функция $W = \operatorname{Log} Z$ была бы определена на всей комплексной плоскости, нужно, например, отождествить в образе точки $\pm i\pi t$, то есть нужно полагать, что функция (7) принимает значения на цилиндре.

Подытожим наши вычисления. Мы показали, что отображение (8) отображает сферу с выколотыми полюсами на полосу

$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

с отождествленными краями (цилиндрическую поверхность); при этом все локсодромы, в том числе и меридианы, и параллели вереходят в прямые линии (винтовые линии). Это и есть карта Земли по Меркатору (без Арктики и Антарктики).

Теперь попробуем уяснить смысл этих вычислений.

3. Проекция Меркатора как конформное отображение. Качественный анализ.

3.1. Конформость проекции Меркатора. В предыдущем разделе мы прямыми вычислениями, решив соответствующее дифференциальное уравнение, нашли локсодромы на сфере и увидели, что при стереографической проекции они превращаются в архимедовы спирали. Затем мы показали, что функция $\operatorname{Log} z$, отображая сферу на прямоуголйную полосу плоскости (более точно сферу без полюсов на цилиндрическую поверхность). Обсудим это явление качественно.

При проекции Меркатора сохраняются углы локсодром с меридианами, значит и сохраняются углы между локсодромами. Отсюда следует, что проекция Меркатора – это конформное отображение: отображение сохраняет угол между любыми двумя векторами касательными к данной точке сферы.

3.2. Конформые отображения. Стереографическая проекция сферы на плоскость – это тоже конформное отображение[1], при котором параллели переходят в концентрические окружности и меридианы переходят в лучи, исходящиеся из центра. Значит каждая локсодрома в стереографической проекции должна пересекать все лучи, исходящие из начала координат, под одним и тем же углом.

[1]Действительно, метрика сферы в стереографических координатах имеет вид $\frac{du^2+dv^2}{(1+u^2+v^2)^2}$ и потому отличается от стандартной Евклидовой метрики $du^2 + dv^2$ на плоскости только скалярным фактором. Следовательно, локально это гомотетия и потому сохраняет углы.

Рис. 6. Бернхард Риман (1826–1866).

Это условие, как раз и определяет архимедову спираль. Конформное отображение

$$Z \mapsto \operatorname{Log} Z$$

отображает лучи, исходящие из начала координат, в прямые параллельные вещественной прямой м локсодромы, составляющие угол α с меридианами в прямые (винтовые линии), составляющие угол α с вещественной прямой.

3.3. Пара великих имен. И тут становится незаменимой великая идея Бернхарда Римана: при помощи стереографической проекции отождествить комплексную плоскость $\mathbb{C}$ со сферой, добавив к плоскости точку ∞ на бесконечности, приравняв ее к северному полюсу сферы; неудивительно, что эта конструкция называется *римановой сферой*. Идея рассматривать цилиндр как естественную область значений комплексного логарифма $\operatorname{Log} Z$ (тем самым избавляясь от всех проблем, порождаемых его многозначностью) тоже восходит к Риману; этот трюк называется *униформизацией*. Геометрия цилиндра, бесконечного в длину и переодического поперек себя, воплощает в себе фундаментальный принцип переодичности экспоненциальной функции

$$z \mapsto e^z,$$

что происходит, конечно, потому что

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z,$$

Рис. 7. Леонард Эйлер (1707–1783).

где в вычислении прячется великое тождество Эйлера[2]

$$e^{\pi i} = -1.$$

Логарифм – не более чем обратная функция к экспоненте, и переодичность экспоненты делает логарифм многозначной функцией. При униформизации мы приравниваем точки с одинаковыми экспонентами, то есть отождествляем комплексные числа z and $z + 2k\pi i$ для всех целых значений k; но это и означает свернуть плоскость в цилиндр.

После этих отождествлений проекция Меркатора становится ничем иным, как самим логарифмом

$$Z \mapsto \operatorname{Log} Z.$$

Вернемся на секунду к насекомым, тем самым, которые летят под постоянным углом к источнику света. В природе источник света – солнце или луна – находится на бесконечности, что обеспечивает насекомым полет по прямой линии. Если же свет исходит из обманной свечки в начале координат $Z = 0$, то чешуекрылые

[2]Википедия утверждает, что знаменитая формула Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

была открыта в 1714 году Роджером Коутсом, причем в логарифмической форме:

$$\log(\cos x + i \sin x) = ix.$$

навигаторы оказываются на логарифмической спирали, накручивающейся на свечку.[3] Взятие логарифма посылает свечку в бесконечность и развертывает спираль в спасительную прямую.

Только надо очень верить
Этим синим маякам,
И тогда желанный берег
Из тумана выйдет к нам.

Булат Окуджава

3.4. Аналитические функции. Очевидно, что отображение

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & az \end{array}$$

– конформное отображение, так как оно поворачивает каждый вектор z на угол $\arg a$ и растягивает его в $|a|$ раз. Но конформность - свойство, которому достаточно выполняться в "бесконечно малом" масштабе вокруг каждой точки. Поэтому если функция $w = F(z)$ из некоторой области $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$ дифференцируема, то она в каждой точке этой области приближается линейной функцией,

$$\Delta w = F'(z)\Delta z,$$

и потому является конформным отображением. В частности, каждая аналитическая функция

$$z \mapsto a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

дифференцируема в своей области абсолютной сходимости и посему определяет конформное отображение. Верно и обратное – конформное отображение из открытой области вещественной плоскости $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, сохраняющее ориентацию – аналитическая функция. Действительно, условие конформности означает, что Якобиан функции $(x, y) \mapsto (u, v)$ положителен (сохранение ориентации) и матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

[3]Полезно помнить одно трагическое свойство логарифмической спирали: длина ее накручивающейся части всегда конечна – несмотря на то, что она успевает сделать бесконечное число оборотов. Мы оставляем проверку этого классического факта как упражнение для читателя.

является произведением скалярной матрицы и матрицы ортогональной, что в точности и означает выполнение уравнений Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Остальное – классическая теория функций комплексной переменной. Нам важно другое: конформных отображений римановой сфер с выколотыми полюсами на цилиндр бесконечно много. Но такие, что при этом еще и переводят меридианы в меридианы – все они являются композициями логарифма и линейных функций. Мы оставляем проверку этого факта читателю.

3.5. Обратно к Мандельштаму. А теперь немного общих рассуждений. Мы тут все красиво объяснили, используя функцию комплексной переменной $\operatorname{Log} Z$. Логарифм уже присутствовал, в скрытом виде, в самом принципе меркаторовой проекции как проекции, сохраняющей углы!

Трудно удержаться и не привести гениальное стихотворение Мандельштама полностью:

И Шуберт на воде,
И Моцарт в птичьем гаме,
И Гете, свищущий на вьющейся тропе,
И Гамлет мысливший пугливыми шагами
Считали пульс толпы и верили толпе
Быть может раньше губ сперва родился шепот,
И в бездревесии кружилися листы,
И те кому мы посвящаем опыт
До опыта приобрели черты.

4. Назад в историю: как это все на самом деле было

4.1. Математика *без* математики или математика *до* математики? Меркатор так никогда и не объяснил, как он получил свою знаменитую карту. Но он жестко настаивал, что она передает локсодромы прямыми линиями. Его главное достижение было в том, что он сформулировал понятие конформной карты как карты, правильно передающей углы.

Возможно, что Меркатор и действовал без математики, на голой интуиции. Она у него могла быть. Он был мастер изготовления точных и высоко художественных глобусов (Рис. 8). Глобус делался

Рис. 8. Глобус работы Меркатора, сделан в 1541 году. Музей Меркатора в Синт-Никлаас, Бельгия. Источник: Wikimedia Commons.

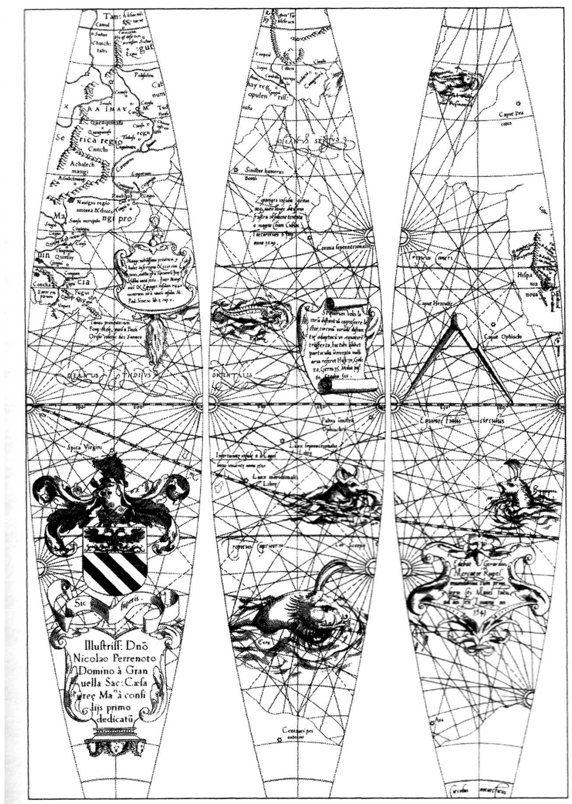

Рис. 9. Сегменты глобуса 1541 года.

Рис. 10. Обложка книги Райта *The Correction of Certain Errors in Navigation*, 1599 год.

из плоских бумажных долек (Рис. 9), которые наклеивались на деревянный шар. Так как изометрично отобразить ни плоскость, ни ее кусок на фрагмент сферы нельзя, необходима ручная подгонка – бумагу намачивали и растягивали, чтобы она плотно, без щелей и морщин легла на шар. Возможно, Меркатор чувствовал геометрию сферы кончиками пальцев.

А еще Меркатор был первым, кто выпустил атлас, составленный из карт в одном масштабе и перекрывавшихся по краям. Математикам это тоже должно что-то такое напоминать …

4.2. Эдвард Райт и суммирование искажений. По стандартам математики, Эдвард Райт (1561–1615) прожил колоритную жизнь. После изучения математики в Кембридже и некольких лет преподавания, он был избран членом Кейз Колледжа в 1587 году. Завоевав репутацию эксперта по математическим методам навигации, в 1589 году он по приказу королевы Елизаветы был приписан в качестве навигатора к известной пиратской экспедиции Эрла Кумберлендского, охотившейся вокруг Азорских островов за испанскими золотыми галеонами. Протоколы колледжа деликатно упоминают, что Райту был предоставлен академический отпуск “по Высочайшему Указу”.

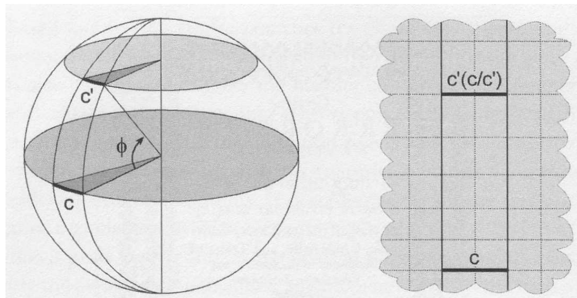

Рис. 11. Метод Райта: откуда берутся секанты.

В 1600 году он окончательно покинул Кембридж и перебрался в Лондон, где принял пост советника по навигации Восточно-Индийской Компании. К тому времени он уже опубликовал свою знаменитую книгу (Рис. 10).

Анализируя метод Меркатора, Райт начал искать формулы, которые описывали бы растяжение сегмента глобуса (вроде того, что изображен на Рис. 9) в прямоугольную полоску. Принципиальное наблюдение Райта состоит в том, что длина дуги, зажатой между двумя меридианами на широте ϕ меняется обратно пропорционально $\cos\phi$ (Рис. 11):

$$\frac{c}{c'} = \frac{1}{\cos\phi} = \sec\phi.$$

Заметим, что широта ϕ отсчитывается от экватора, а не от южного полюса, как θ, и потому

$$\theta = \phi + \frac{\pi}{2}.$$

На Рис. 12 показано, как дольки сегментиков глобуса, образованные меридианами и параллелями отстоящими на одну угловую секунду $1'$ друг от друга, растягиваются в прямоугольники с одним и тем же основанием d (длина дуги одной секунды на экваторе). Мы ничего не делаем с самой нижней долькой, на экваторе: она практически квадратная. Но основание следующей дольки надо растягивать в $\sec 1'$ раз, следующей - в $\sec 2'$ раз, и так далее. Чтобы растяжение дольки было пропорциональным (то есть, сохраняло углы), дольки надо растягивать вдоль меридиана, в высоту, в той же пропорции. Поэтому высоты долек становятся

$$d\sec 1', \quad , d\sec 2', \quad , d\sec 3', \ldots$$

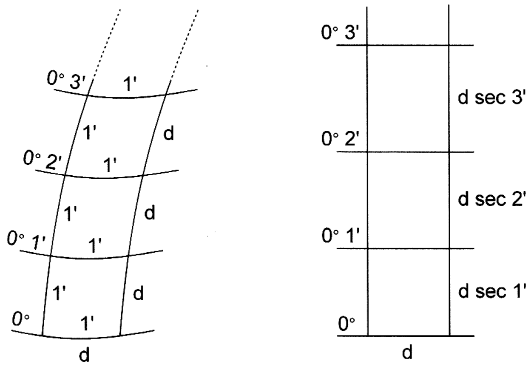

Рис. 12. Метод Райта: накапливающаяся поправка.

Поэтому высота $Y(\phi)$ над экватором точки на широте ϕ равняется сумме высот секундных долек от экватора до широты ϕ секунд:

$$Y(\phi) = d(\sec 1' + \sec 2' + \sec 3' + \cdots + \sec \phi).$$

Далее Райт не мудрил: он просто взял таблицу значений секанта (а детальные таблицы тригонометрических функций существовали, по причине мореплавания) и просуммировал их значения через каждую угловую секунду. Это и стало его знаменитой таблицей.

Конечно, его вычисление в современных обозначениях не более чем численное интегрирование функции $\sec t$, и при этом самым простым методом прямоугольников:

$$Y(\phi) = \int_0^\phi \sec t dt.$$

Возможно, Меркатор в работе над своей карте просто перечерчивал дольки глобуса как прямоугольники (Рис. 12), но чисто геометрическими методами, без вычислений.

4.3. Джон Непер и его логарифмы. В 1614 году Джон Непер опубликовал книгу *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, в которой он построил логарифмы (в современной терминологии, он вычислял в базе $1/e$, хотя осовременивание терминологии огрубляет его подход). Спустя два года книга была переведена с латыни на английский язык, и ни кем иным, как Едвардом Райтом. Но Райт не заметил, что его собственная работа над проекцией Меркатора имеет какое-то отношение к логарифмам.

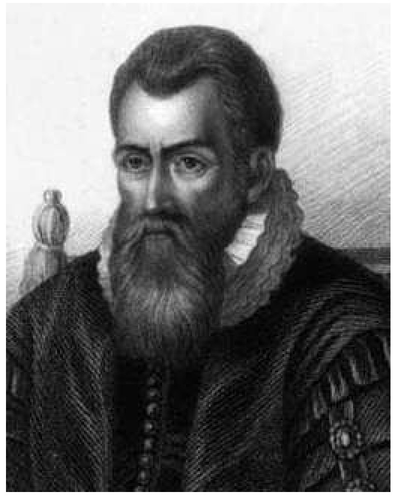

Рис. 13. Джон Непер (1550–1617).

Но, что важно, почти сразу после первых работ Непера начали появляться – и широко использоваться – таблицы логарифмов тригонометрических функций. Более того, если верить статье в MacTutor [**3**], Непер с самого начала думал о манипуляциях с числами вида $100 \sin x$, и делал вычисления с точностью до семи десятичных знаков, потому что такова была точность лучших таблиц синусов. Предисловие к его книге (цитируемое здесь в переводе Райта) сразу делает ясным, что Непер думал о технических вычислениях, а не сложных процентах в бухгалтерских расчетах:

> *Seeing there is nothing (right well-beloved Students of the Mathematics) that is so troublesome to mathematical practice, nor that doth more molest and hinder calculators, than the multiplications, divisions, square and cubical extractions of great numbers, which besides the tedious expense of time are for the most part subject to many slippery errors, I began therefore to consider in my mind by what certain and ready art I might remove those hindrances. And having thought upon many things to this purpose, I found at length some excellent brief rules to be treated of (perhaps) hereafter. But amongst all, none more profitable than this which together with the hard and tedious multiplications, divisions, and extractions of roots, doth also cast away from the work itself even the very numbers themselves that are to be multiplied, divided and resolved into roots, and putteth*

other numbers in their place which perform as much as they can do, only by addition and subtraction, division by two or division by three.

4.4. Генри Бонд, или о пользе чтения логарифмических таблиц (на сон грядущий?) Примерно в 1640-м году некто по имени Генри Бонд заметил совпадение (с точностью до линейной замены переменной, что сделало его наблюдение крайне нетривиальным) двух таблиц: таблицы Райта для $Y(\phi)$ и таблицы логарифма тангенса:

$$Y(\phi) = \log(\tan(\phi/2 + \pi/4))$$

(что то же самое что $\log\tan\frac{\theta}{2}$ в обозначениях Главы 2).

Он опубликовал свое наблюдение в 1645 году в качестве гипотезы, и оно стало одной из самых знаменитых проблем математики 17-го века. Конечно, в современной терминологии это не более чем равенство

$$\int_0^\phi \sec(t)\,dt = \log\left(\tan\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

где интеграл слева понимается в смысле интегральной суммы. Но это и классический пример того, как опасно говорить о математике прошлого в современных терминах – ведь у нас в голове сидит формула Ньютона-Лейбница, которая применительно к конкретной задаче выглядит как

$$\frac{d}{d\phi}\int_0^\phi \sec(t)\,dt = \sec\phi,$$

но была тогда неизвстна – Лейбниц начал печатать свои работы по дифференциальному исчислению в 1684, а Ньютон – в 1693 году.

Николай Меркатор (о нем ниже) даже предложил денежный приз за доказательство гипотезы Бонда.

4.5. Джеймс Грегори и Исаак Барроу. Проблема Бонда была решена в 1668 году Джеймсом Грегори, но, как утверждается, очень сложным образом.[4] Наконец, в 1670 году Исаак Барроу опубликовал приемлемое доказательство. К сожалению, мы (авторы этих заметок) не знаем деталей их доказательств.

[4]Статья в английской Википедии (по сотоянию на 18 февраля 2008 года) про Джеймса Грегори никак не упоминает его работу над гипотезой Бонда, но зато приписывает ему возможное открытие – и об ту же самую пору – Основной Теоремы Анализа. Это сомнительно – почему тогда он не мог найти короткого решения проблемы Бонда?

Рис. 14. Джеймс Грегори (1638–1675). Источник: Wikimedia Commons.

Рис. 15. Исаак Барроу (1630–1677). Источник: Wikimedia Commons.

Конечно, сегодня было бы достаточно проверить начальное условие при $\phi = 0$ и продифференцировать:

or

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\phi}\log\left(\tan\left(\frac{\phi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right) &= \frac{1}{2}\cot\left(\frac{\phi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sec^2\left(\frac{\phi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{1}{2\sin\left(\frac{\phi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\\ &= \frac{1}{\sin\left(\phi+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\cos(\phi)}=\sec(\phi)\end{aligned}$$

А еще лучше посоветовать читателю сделать какое упражнение: возьмите интеграл

$$\int \sec(x)\,dx$$

при помощи универсальной тригонометрической замены

$$\tan\frac{x}{2}=t,\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dt=\frac{2dt}{1+t^2},$$

а потом предайтесь медитации на тему: почему эти формулы – почти в точности формулы для стереографической проекции оси абсцисс на единичный круг:

$$(t,0)\mapsto\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{t^2-1}{1+t^2}\right).$$

(Мы позаимствовали часть материала этой главки из статьи Роберта Израела [**2**].)

4.6. Николаус Меркатор (1620–1687; не родственник и даже не однофамилец). Действительно, оба Меркатора – псевдонимы. Настоящее имя одного было Герард де Кремер или Геерт Кремер, второго Никлаус Кауффман. Имя “Mercator” образовано от латинского слова “купец”.

Николаус Меркатор был был первым, кто опубликовал ряд для логарифма (в 1668 году),

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

и тем самым окончательно утвердил его как аналитическую функцию, почти замкнув круг в нашем качественном анализе (Глава 3).

А еще Николаус Меркатор печатал книги с характерными названиями вроде *Trigonometria sphaericorum logarithmica.* Это он ввел в массовую практику использование логарифмов для решения треугольников и тем самым нес ответственность за мучения русских гимназистов и школьников 19-го и 20-го веков, которых заставляли решать тригонометрические уравнения, и не просто так, а чтобы

Рис. 16. Карта мира в проекции Меркатора. Видимо, напечатана в Америке, раз Америка помещена в центре мира.

ответ был в “форме, удобной для логарифмирования”. Мы (авторы этой статьи) принадлежим к первому поколению, с которым этого не делали. А может, и напрасно.

5. Политические аспекты

Недостатком проекции Меркатора считается то, что она искажает площади. Это в большей степени политическая проблема, чем математическая (Рис. 16). Мы не удивимся, если с ростом озабоченности по поводу глобального потепления и таяния полярных ледников преувеличенные размеры Гренландии и Антарктиды перестанут считаться недостатками карт мира.

А древняя проекция Меркатора как раз очень хорошо выражает этот новый взгляд на мир (Рис. 17).

Есть серьезные причины, почему метеорологи предпочитают для своих карт погоды проекцию Меркатора – или, для полярных районов, стереографическую проекцию (Рис. 18). Но мы про это напишем как-нибудь в другой раз.

6. Многообразие геометрий

Пусть любопытный сам поставит небольшой опыт.

Рис. 17. Поверхность Земли в проекции Меркатора.

Например, пусть он встанет рано утром,
подойдет на цыпочках к окну, и,
осторожно отведя штору,
выглянет наружу ...

Владимир Пелевин, "*Оружие Возмездия*".

Одна из причин, почему геометрия недооценивается в современном образовании – мы забыли, что нас окружают много разных геометрий, и мы должны выбирать ту, которая лучше всего соответствует нашему способу измерять или смотреть на мир. Мореплаватель, державший курс по компасу под переменчивым ветром, жил на римановой сфере. Астроном, мерявший угловые расстояния между звездами, пользовался сферической геометрией. Мир теории относительности - геометрия Лобачевского.

Наконец, в горьких словах Пелевина содержится еще одна геометрия – если взглянуть на мир одним глазом через щелочку в шторе, то увидишь действительную проективную плоскость $\mathbb{PR}^2$.

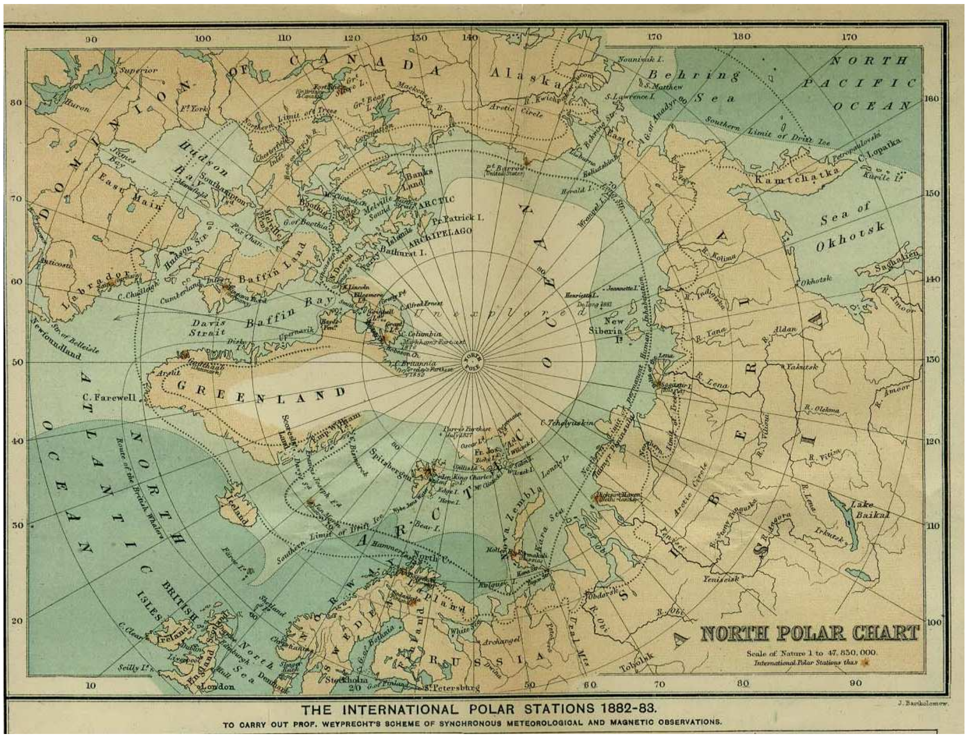

Рис. 18. Карта Северного Полюса, 1885 год. Стереографическая проекция. Обратите внимание на громадное белое пятно.

Но это отдельная история, которая заслуживает отдельного рассказа, и снова с большим количеством картинок (включая, конечно, “Послов” Ганса Голбейна, как примера сознательной игры с перспективой, Рис. 19). Мы ее когда-нибудь напишем.

Список литературы

[1] N. Crane. **Mercator: The Man Who Mapped the Planet**. Phoenix: London, 2002.

[2] R. Israel, Mercator’s Projection, http://www.math.ubc.ca/∼israel/m103/mercator/mercator.html, accessed 18 Feb 2008.

[3] MacTutur, an article on John Napier, http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/∼history/Biographies/Napier.html, accessed 18 Feb 2008.

[4] M. Monmonier. **Rhumb Lines and Map wars. A Social History of the Mercator Projection.** The University of Chicago Press, 2004.

[5] J. M. Sachs, A Curious Mixture of Maps, Dates, and Names, Mathematics Magazine 60 no. 3 (June 1987) 151–t158.

Рис. 19. Ганс Голбейн Младший (1497–1543). "Послы". Упражнение для читателя: под каким углом надо смотреть на картину, чтобы странный объект на переднем плане обрел реальные черты? (Источник: Wikimedia Commons.)

[6] A. Taylor. **The World of Gerard Mercator**. New York: Walker and Company, 2004.
[7] The First Caian Engineer and the First Caian Pirate, http://www.cai.cam.ac.uk/students/study/engineering/engineer01/cepirate.htm, accessed 18 Feb 2008.

School of Mathematics, University of Manchester, Oxford Street, Manchester M13 9PL, United Kingdom
E-mail address: borovik@manchester.ac.uk, khudian@manchester.ac.uk