Une méthode de calcul du logarithme

On présente ici l'algorithme utilisé par les calculatrices pour calculer les logarithmes. Cet algorithme suppose connu le calcul de la racine carrée. Il repose sur l'utilisation de la moyenne arithmético-géométrique.

A. Moyenne arithméticogéométrique *Les résultats de cette partie peuvent être admis pour traiter la partie algorithmique.*

Soient a, b ($a < b$) deux réels strictement positifs. On définit deux suites par les relations :
- $u_0 = a$
- $v_0 = b$
- $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$
- $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$

Montrer les résultats suivants :

1. Les suites $(u_n), (v_n)$ sont adjacentes.
2. La suite $(c_n) = (v_n - u_n)$ vérifie une inégalité de la forme $c_{n+1} \leq M c_n^2$, où M est une constante.

   La limite $L(a, b)$ des deux suite est appelée moyenne arithmético-géométrique des deux nombres a, b. La relation démontrée à la question 2 démontre que la convergence des suites est très rapide. C'est ce qui justifie l'efficacité des méthodes qui vont suivre.

   On note $I(a, b)$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}}$.
   Nous admettrons (la démonstration n'est pas difficile, mais technique) que l'on a l'égalité :

$$2I(a, b) = \frac{\pi}{L(a, b)}$$

3. Démontrer que $I(1, b) = 2 \displaystyle\int_0^{\sqrt{b}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 1)(x^2 + b^2)}}$.
4. Etablir les inégalités :
   pour tout $x \in [0, \sqrt{b}]$, $|\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}} - 1| \leq \dfrac{b}{2}$

   pour tout $u > 0$, $argsh(u) \leq u$
5. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{b}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + b^2)}}$.
6. Déduire des résultats précédent l'inégalité : $|I(1, b) - 2argsh(\dfrac{1}{\sqrt{b}})| \leq \sqrt{b}$
7. Soit x un réel > 2. En posant $b = (\dfrac{2x}{x^2 - 1})^2$, démontrer que

$$|I(1, b) - 2 \ln x| \leq \frac{2}{x}$$

B. Algorithme de Calcul du logarithme

1. Ecrire une procédure `sqr(x ,x_0, p)`, qui calcule la racine carrée de x à une précision inférieure à 10^{-p}, étant donnée une valeur approchée x_0 de $\sqrt{x}$. Quel est le type de complexité de cet algorithme (combien de décimales de précision gagne-t'on à chaque itération) ? Donnez si possible une itération qui n'utilise que des multiplications, et pas de division.
2. Ecrire une procedure `arithmeticogeo(a,b,p)`, qui calcule la moyenne arithmeticogeometrique de a, b, à une précision inférieure à 10^{-p}. Quelle est la complexité ?

   En déduire une procédure donnant $I(1, b)$ à une précision arbitraire (on supposera que la constante π est connue à une précision arbitraire)

3. On se donne maintenant un réel x plus grand que 1. Ecrire une procedure qui `puissance(x,p)` qui calcule le plus petit entier n tel que $x^{2^n} > \dfrac{10^p}{2^n}$ et qui renvoie x^{2^n}. On cherchera une procedure dont la complexité n'excède pas $O(\ln(p))$.
4. A l'aide de la question $A7$ écrire enfin une procédure qui calcule $\ln x$ à une précision donnée.

C. Calcul de Pi, et de l'exponentielle

1. A l'aide de la partie B et d'un choix judicieux de x, donner une procédure qui calcule rapidement les décimales de π.
2. A l'aide de la partie B, écrire une procédure qui calcule $\exp x$ à une précision donnée en utilisant la moyenne arithmético-géométrique et la méthode de Newton.