Числа Маркова—приближения квадратичных иррациональностей, числа Фибонначи, модулярные формы и все такое(*рассказ Саши Веселова*)

Здравствуй, Давидик.

Я на днях был в Лавборо (Loughborough) у ребят. Саша Веселов рассказал мне захватывающую историю про числа Маркова, откуда они взялись и с чем они связаны. Я мало что понял—надо почитать, обдумать. Но то что услышал и переварил уже настолько интересно!

Я решил это записать, пока "не остыло".

Итак, что такое числа Маркова? Рассмотрим целочисленные решения уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz\,. \tag{1}$$

(Например, $(1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(1,2,5)$, $(1,5,13)$, $(2,5,29)$.)

Целое число x называется *числом Маркова* если существуют такие целые число x и y, что тройка чисел (x,y,z) является решением уравнения (1). Например, числа $1,2,5,29$ это числа Маркова, а вот число 3, не есть число Маркова. (Впоследствии я тебе опишу все числа Маркова.)

Ну и что? А вот чтоб понять, ну и что, давай на время сменим пластинку.

1. Приближения квадратичных иррациональностей рациональными числами. Или почему $\sqrt{5}$ это самое иррациональное число.

Хорошо известно, что алгебраические иррациональные числа далеко находятся от рациональных. А именно, если вещественное алгебраическое иррациональное число α—корень полинома степени n, то есть алгебраическая степень числа $\leq n$ (конечно, имеется ввиду полином с целыми коэффициентами) то существует положительная зависящая от α константа $C = C(\alpha)$,так что

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{|q|^n} \tag{2}$$

для любого рационального числа p/q ($p,q \in \mathbf{Z}$). Насколько я понимаю, это точная оценка, в том смысле, что если алгебраическое число α имеет степень $n+1$, т.е. оно является корнем *неприводимого* полинома степени $n+1$, то это число очень хорошо приближается с точностью $1/q^n$: для любого $\varepsilon > 0$ существуют целые p,q такие что

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{\varepsilon}{|q|^n}\,. \tag{3}$$

Например, можно увидеть, что

$$\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right| > \frac{1}{4q^2} \quad \text{(хорошая олимпиадная задачка!)}\,. \tag{4}$$

и для любого $\varepsilon > 0$ существуют целые p, q такие что

$$\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right| < \frac{\varepsilon}{q} \quad \text{элементарное применение принципа Дирихле} \tag{5}$$

(Очевидно, что эта оценка проходит для всех вещественных чисел.)

О неравенстве (2) можно прочесть, например, в книжке Куранта Роббинса "Что такое математика". Это неравенство служит основанием примера трансцендентного числа,

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}},$$

построенного Лиувиллем, Действительно можно показать, что число θ иррационально, и неравенство (2) не выполняется для этого числа ни для какого n, то есть число θ трансцендентно[1].

Теперь введем спектральные числа Лагранжа.

Полезно напомнить детали о приближениях чисел рациональными дробями и о свойствах квадратичных иррациональностей.

Цепные дроби доставляют наилучшее приближение вещественных чисел.

Если

$$\alpha = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}} \quad (a_i\ \mathbf{N}) \tag{6}$$

то последовательность "обрезанных"рациональных дробей

$$\frac{p_k}{q_k} = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_k] \tag{7}$$

обладает свойствами:

- $\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{q_k} = \alpha$ (Очевидно)
- Число α лежит между последовательными числами $\frac{p_k}{q_k}$ и $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ для любого k: $\frac{p_k}{q_k} \le \alpha \le \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ или наоборот $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \le \alpha \le \frac{p_k}{q_k}$. (Докажи)
- Длина интервала $\left(\frac{p_k}{q_k}, \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right)$ равна $\frac{1}{q_k q_{k+1}}$:

$$\left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}\right| = \frac{1}{q_k q_{k+1}} \tag{8}$$

Это самое замечательное свойство! (Докажи!)

[1] *Замечание вбок: Число Лиувиля* θ,это исторически первый пример трансцендентного числа. Лишь потом была доказана Эрмитом трансцендентность числа e, а затем Линдеман доказал трансцендентность числа π (этот факт выгравирован на его могильном камне.) Эти трудные результаты являлись одними из важнейших в математике XIX-го века. (И в дальнейшем доказательство трансцендентности *индивидуальных чисел* давалось нелегко.) Так вот, приходит Кантор и в одну строчку доказывает что почти все числа трансцендентны.— Высокая трагедия...

Теперь нетрудно понять,что

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| = \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{q_k^2} \tag{9}$$

Теперь рассмотрим специально квадратичные иррациональности.

Число α квадратичная иррациональность если оно является корнем неприводимого полинома (с целыми коэффициентами). Цепная дробь $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \ldots]$, равная числу α является смешанной периодической, то есть начиная с некоторого N_0, $a_{k+d} = a_k$ $(k > N_0)$. Например

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, 2, \ldots], \ \sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2 \ldots], \ \sqrt{5} = [2, 4, 4, 4, \ldots] \tag{10}$$

Для числа $\sqrt{2}$, например, рациональными приближениями (9) будут

$$\frac{p_1}{q_1} = [1] = 1, \ \frac{p_2}{q_2} = [1, 2] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \ \frac{p_3}{q_3} = [1, 2, 2] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5}$$

и так далее:

$$\frac{p_4}{q_4} = \frac{17}{12}, \ \frac{p_5}{q_5} = \frac{41}{29}, \ \frac{p_6}{q_6} = \frac{99}{70}, \ \frac{p_5}{q_5} = \frac{239}{169}, \ \ldots \tag{11}$$

А теперь вернемся к спектру Лагранжа.

Неравенство (2) дает самую грубую оценку для расстояний между квадратичными иррациональностями и множеством рациональных чисел. Какова точная оценка для C (для данного числа α) в неравенстве

$$\forall \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}, \qquad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C(\alpha)}{q^2} \tag{12}$$

Понятно, что $C(\alpha) = 0$ всех чисел α, кроме квадратичных иррациональностей. Это очевидно для $\alpha \in \mathbf{Q}$, а для остальных чисел (квадратичных иррациональностей) это следует из неравенства (12) (если оно верно?). Из неравенства (9) следует, что для квадратичных иррациональностей $C(\alpha) \leq 1$. Дадим точную оценку.

Для каждого (вещественного) числа α рассмотрим число $\nu(\alpha)$, определяемое условием

$$\nu(\alpha) = \inf_{p,q \in \mathbf{Z}} \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| q^2, . \tag{13}$$

Мы назовем число $\nu(\alpha)$ *спектральным числомю*

Как следует из предудущих рассуждений спектральные числа $\nu(\alpha) \neq 0$ лишь для квадратичных иррациональностей и а для квадратичных иррациональностей $\nu(\alpha) < 1$.

Таким образом мы пришли к соотношению

$$\text{для любого } \alpha \quad 0 \leq \nu(\alpha) < 1\,. \tag{14}$$

То есть спектр всех чисел (спектральные числа $\nu(\alpha)$) лежит в интервале $[0, 1)$.

Важное *(и по моему верное)* **замечание**

Одно и то же спектральное значение имеют многие числа. Например, $\nu(\alpha) = \nu(a\alpha + b)$, где a, b произвольные рациональные числа. (Это похоже на правду).

Теперь мы сформулируем важную теорему.

Теорема (Hurwitz). Максимальное спектральное число равно $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Это спектральное число квадратичной иррациональности, числа $\alpha = \sqrt{5}$ [2]. Иначе говоря для любой квадратичной иррациональности α

$$\forall \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}, \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{\sqrt{5}q^2} \tag{15}$$

Эта оценка улучшаема для всех чисел кроме числа $\alpha = \sqrt{5}$ (и его рациональных комбинаций). В этом смысле $\sqrt{5}$ самое иррациональное число!

А что дальше.

Для нетерпеливого читателя заранее скажем, что следующее по "наихудшести" иррациональное число, это число $\sqrt{2}$: $\nu(\sqrt{2}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. А что дальше? В следующем параграфе мы постараемся ответить на этот вопрос.

2. Устройство множества спектральных чисел и числа Маркова

Как устроено множество $M = \{\nu(\alpha)\}$ всех спектральных точек? Ответ на этот вопрос удивителен.

Мы опишем подробно часть множества M, лежащего, в интервале $(1/3, 1)$. Обозначим эту часть множества M как M_{discret}

$$M_{\text{discret}} = \left\{\mu: \ \mu \in M, \ \mu > \frac{1}{3}\right\} \tag{16}$$

Обозначение неслучайно. Оказывается, что M_{discret} это дискретное множество, имеющее точку накопления $1/3$. Мы уже знаем, что самое "верхнее"число в M_{discret} это число $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (теорема Гурвица). Сразу отметим, мало что известно про часть множества , лежащего в интервале $[0, 1/3]$, но оно точно не дискретно.

Для подробного описания множество M_{discret} самое время вернуться к числам Маркова (1).

Расположим все числа Маркова(1) в виде возрастающей последовательности:

$$m_1 < m_2 < m_3 < \cdots < m_k < \ldots \tag{17}$$

[2]Как следует из замечания выше, $\nu(\alpha) = 1\sqrt{5}$ для всех $\alpha = \frac{p\sqrt{5}}{q} + \frac{r}{s}$, в том числе и для числа $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ("золотого сечения"). Одно и то же спектральное значение имеют многие числа. Например, $\nu(\alpha) = \nu(a\alpha + b)$, где a, b произвольные рациональные числа. (Это похоже на правду.

Легко понять, что $m_1 = 1$ и $m_2 = 2$, так как тройки $(1,1,1)$ и $(1,1,2)$ решения уравнения $x^2+y^2+z^2 = 3xyz$. Также $m_3 = 5$, так как числа $3,4$ не есть числа Маркова. В следующем параграфе мы опишем множество всех чисел Маркова и в частности увидим, что это множество бесконечно.

А теперь утверждение:

Множество M_{discret} это бесконечная последовательность чисел $\{l_i\}$, такая что

$$l_k = \frac{m_k}{9m_k^2 - 4}\,, \tag{18}$$

где m_k—числа Маркова (17)*. Легко видеть, что*

$$1 > l_1 > l_2 > l_3 > \cdots > l_n > \cdots > \frac{1}{3}, \text{ and } \lim_{n\to\infty} l_n = \frac{1}{3}\,. \tag{19}$$

Теперь видно, что самое большое спектральное число это число

$$l_1 = \frac{m_1}{9m_1^2 - 4} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,, \text{(Теорема Гурвица)}\,, \tag{20}$$

Следующее за ним спектральное число это число

$$l_2 = \frac{m_2}{9m_2^2 - 4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,, \tag{21}$$

Можно показать (как, не знаю), что это спектральное число квадратичной иррациональности $\sqrt{2}$.

А вот

$$l_3 = \frac{m_3}{9m_3^2 - 4} = \frac{1}{\sqrt{221}}\,, \tag{22}$$

Что это такое? Числа $\sqrt{5}$ и $\sqrt{2}$ не надо представлять. Они чрезвычайно знамениты уже тысячи лет. А каков смысл числа $\sqrt{221}$? Остальных чисел? И напоследок вопрос, вопрос вопросов:

В чем смысл линейного оператора, спектром которого является множество M спектральных чисел. Дискретная часть спектра этого оператора–это последовательность $\{l_k\}$ в формуле (18)*, а остальная часть спектра???*

Вопросов больше чем ответов. Но давай вспомним, что мы начали с чисел Маркова, а до сих пор их толком не описали.

3. Описание чисел Маркова

Пусть тройка целых чисел (x,y,z) является решениеми уравнения Маркова, *марковской тройкой*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz \tag{23}$$

Содержание этого параграфа удобно изложить в виде списка упражнений. (Решения многих из них тривиальны или поучительны).

Пусть тройка целых чисел (x, y, z) является решениеми уравнения Маркова, *марковской тройкой чисел*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz \tag{24}$$

Упражнение 1 Действие группы перестановок переводит марковскую тройку чисел в марковскую тройку чисел.

Решение: Очевидно.

Упражнение 2 Замена

$$z \to 3xy - z \tag{25}$$

переводит марковскую тройку чисел (x, y, z) в марковскую тройку чисел $(x, y, 3xy - z)$.

Решение: Если (x, y, z) марковская тройка, то z является корнем квадратного уравнения $t^2 + pt + q = 0$, где $p = -3xy$, $q = x^2 + y^2$. Значит второй корень уравнения равен $-p - z = 3xy - z = \frac{q}{z} = \frac{x^2+y^2}{z}$ (Теорема Виета).

Упражнение 3 Если (x, y, z), марковская тройка чисел, то число z делит число $x^2 + y^2$.

Решение: См. предыдущее упражнение.

Обозначим через A множество всех марковских троек .

Упражнение 4 На множестве A всех марковских троек действует группа $S_3 \times S_2$. (Группа S_n—это группа перестановок n элементов.) Обозначим $S_3 = \{1, \tau, \tau^2, \pi_{12}, \pi_{13}, \pi_{23}\}$, $S_2 = \{1, \sigma\}$ $(\sigma^2 = 1)$. Тогда то

(26)

$$\tau(x, y, z) = (y, z, x),\ \tau^2(x, y, z) = (z, x, y),\ \pi_{12}(x, y, z) = (y, z, x), \ldots$$

и

$$\sigma(x, y, z) = (x, y, 3xy - z^2) \tag{27}$$

Решение: Непосредственная проверка.

Упражнение 5 (a la Bourbacki)

Множество A марковских троек непустое.

Решение: Очевидно, что $(1, 1, 1)$ это марковская тройка. Имеем $(1, 1, 1) \in A \Rightarrow M \neq \emptyset$

Теперь понятно что делать: применяя операции (26), (27) к марковской тройке мы придем к другим марковским тройкам. Например:

(28)

$$(1,1,1) \xrightarrow{\sigma} (1,1,2) \xrightarrow{\tau} (1,2,1) \xrightarrow{\sigma} (1,2,5) \xrightarrow{\sigma} (2,5,1) \xrightarrow{\tau} (1,2,1) \xrightarrow{\sigma} (2,5,29) \to \ldots$$

или

$$(1,1,1)\xrightarrow{\sigma}(1,1,2)\xrightarrow{\pi_{23}}(1,2,1)\xrightarrow{\sigma}(1,2,5)\xrightarrow{\pi_{23}}(1,5,2)\xrightarrow{\sigma}(1,5,13)\xrightarrow{\pi_{23}}$$

$$(1,13,5)\xrightarrow{\sigma}(1,13,34)\xrightarrow{\pi_{23}}(1,34,89)\xrightarrow{\sigma}(1,89,34)\to\ldots \tag{29}$$

Угадываешь, да?...числа Фибонначи...

Упражнение 6 Показать, что действие группы преобразований $S_2\times S_2=\{1,\tau,\pi_{23},\tau\pi_{23}\}$ на элемент $(1,1,1)$ приводит к числам Фибонначи с нечетными номерами:

$$(\pi_{23}\sigma)^n(1,1,1)=(1,u_{2n+1},u_{2n-1})\ , \tag{30}$$

где

$$\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,\ldots,\ldots\}=\{1,1,2,3,5,8,13,\ldots\} \tag{31}$$

числа Фибонначи. ($u_1=u_2=1$, $u_{n+2}=u_n+u_{n+1}$.)

Все это хорошо; но оказывается преобразованиями (26), (27) можно получить все тройки Маркова!!!

Теорема Множество A троек Маркова это орбита действия (26), (27) группы $S_3\times S_2$, то есть любые две тройки (x,y,z), (x',y',z') могут быть получены друг из друга действием соответствующего элемента группы $S_3\times S_2$. В частности любая тройка Маркова (x,y,z) может быть получена из тройки $(1,1,1)$ действием соответствующего элемента группы $S_3\times S_2$.

Доказательство Покажем, что тройка $(1,1,1)$ входит в орбиту действия группы $S_3\times S_2$ на произвольную тройку Маркова. Пусть (x,y,z) произвольная тройка. Рассмотрим ее орбиту. Предположим, что тройка $(1,1,1,)$ не входит в орбиту. Тогда возьмем в орбите тройку, наиближайщыю к тройке $(1,1,1)$. Начнем с ней возиться, чтоб сделать ее еще ближе.... Вообщем не могу пока доказать...