Privet Davidik!

Pustj $B(x,y)$ bilinejnaja symmetricheskaja forma na linejnom prostranstve V (razmerrnostj konechnaja).

Ej sootvetstvujet kvadratichnaja forma

$$Q_B(x) = B(x,x) \tag{1}$$

kotoraja kak legko ponjatj udovletvorjajet pravilu parallelogramma:

$$Q(x+y) + Q(x-y) = 2Q(x) + 2Q(y) \tag{2}$$

i odnorodna:

$$Q(kx) = k^2 Q(x) \tag{3}$$

Esli $B(x,y)$ polozhiteljno opredelena to legko proveritj (legko?) forma $Q(x)$ opredeljajet normu:

$$||x|| = \sqrt{Q(x)} \tag{4}$$

Eta norma kak i sledujet ozhidatj udovletvorjajet vsem uslovijam normy: $||x|| \geq 0$ i $||x|| = 0$ iff $x = 0$ v silu polozhiteljnoj opredeljonnosti B. V silu neravenstva Cauchy-bunyakovskogo vypooljanejtsa i neravenstvo treugoljnika:

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| \tag{5}$$

To estj ponjatjije rasstojanija ne protivorechit nashej intujitsiji.

A teperj vopros: Kakim uslovijam dolhzna udovletvorjajt $Q(x)$ shtoby ej sootvetstvovala bilinejnaja forma.

Legko ponjatj shto uslovija (3) i (2) neobkhodimy: Esli B sootvetstvujushjee Q (to estj (1) imejet mesto bytj) sushestvujet to nikuda ne deneshsja, $B(x,y)$ dolzhno opredeljajtjs po sledujushej formule:

$$B(x,y) = \frac{1}{2}\left(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right) \tag{6}$$

ili mozhno takoj formuloj:

$$B(x,y) = \frac{1}{4}\left(Q(x+y) - Q(x-y)\right) \tag{7}$$

A dostatochny li oni? Vot v chom vopross... Ili po drugomu: a pravda li shto formula (6) ili (7) vydajut na gora bilinejnuju simmetricheskuju formulu.

To shto (6) i (7) vydajut simmetricheskij objekt–ochevidno. To shto oni vydajut odin i tot zhe objekt: eto tozhe ochevidno (is pravila parallelogramma)

Nemnogo pomuchivshisj (ja vsegda zabyvaju kak, eto golovnaja bolj no mozhno) mozhno pokazatj (po-mojemu ispoljzuja lishj praivlo parallelogramma bez uslovija odnorodnosti (3)) shto $B(x,y)$ opredeljonnoje cherez udovletvojrjajet tak nazyvajemu usloviju additivnosti:

$$B(x+x',y) = B(x,y) + B(x',y) \tag{8}$$

Kazalosj by eto pochti uzhe vsjo: Vedj iz (8) i izhe vytekajet shto dlja ljubogo tselogo m

$$B(mx,y) = mB(x,y)$$

Zametim tut tozhe odnorodnostj ne ispoljzujetjsa.

A teperj legko ponjatj shto dljaljubogo ratsionaljnogo a

$$B(ax,y) = aB(x,y) \tag{9}$$

My prishli k vyvodu: shto ljubaja forma $Q(x)$ udovletvorjajusja lishj pravilu paralellogramma sootvetstvujet objektu $B(x,y)$ kotoryj linejej nad ratsionaljnymi chislami, to estj:

$$B(ax+bx',y) = aB(x,y) + bB(x',y) \tag{10}$$

(Kontroljnyuj vopros v storonu: Mnohestvo dejstviteljnykh chissel javljajetjsa beskonechno-mernym prostranstvom nad mnozhestvom ratsionaljnykh chissel.)

A teperj: kakoje usovije nuzhno nalozhitj na formu $Q(x)$ shtob $B(x,y)$ v (6,7) bylo by linejnym nad ljubymi dejstviteljnymi.

Otvet? Praivlo treugoljnika: esli funtksija $Q(x)$ indutsirujet normu, (udovletvojrjaet praivlam odnorodnosti polozhiteljnoj opredeljonnosti i pravilu treugoljnika) i udovletvorjajet praivlu prallelogramma to B v (9) linenjno.

Dokazateljstvo: Esli Q dejstviteljno opredeljajet normu, to functsija $f(x) = B(x,y)$ gde B (oppredeljajetjs (9)) nepreryvna po otnosheniju k etoj norme, a znachit ravenstvo (9) vypolnjajetsja dlja vsekh dejstviteljnykh chissle kolj skoro ono vypolnjajetjsa dlja ratsionaljnykh. Vsjo!!!!

Strannoje oshushenije ostajotsja posle etogo dokazateljstva?

A prichom tut nepreryvnostj. MY zhe dokazyvajem linejnostj.

Na samom dele slovo nepreryvnostj ochenj sootvetstvujet nashej intuiitsjii i zashifrovyvajet soboju kuchu ponjatij.

Mozhno formaljno ne govoritj slovo nepreryvnostj i pritvorjajsja shto ego ne znajeshj chestno i tupo otsenivatj dlja ljubogo dejstviteljnogo a rasstojanije mezhdu $B(ax,y)$ i $B(a_nx,y)$, gde $\{a_n\}$ posledovateljnostjh ratsionaljnykh chissel kotorajaj stremitsja (opredeljajet???) dejstviteljnoje chislo a. Da eto tak..

Kazalosj by vysheprivedjonnoje rassuzhdenije velikolepnoje podtverzhdenije tezisa: ""Mavr sdelal svojo delo, mavr mozhet umeretj" My vospoljzovalisj lsovom nepreryvnostj a potom vybrossili.

No tut zhe voznikajet drugoj vopros? A naskoljko vsjotaki nuzhno uslovje normy? Mogli by my bez nego obojtisj?

Ja nikak ne mogu pridumatj kontrpirmera, to estj primera posledovateljnosti kotorjaja udovletvorjajet uslovijam parallelogramma i odnorodnosti, no ne privodit k norme potomu shto ne udovletvorjajet usloviju treugoljnika (Mozhet bytj dlaj kontrpirmera nuzhno rassmotretj objekt kotoryj udovletvojrjaet lishj pravilu parallelgoramma, ne znaju....)

I esho vopros: Nepreryvnostj kotooj my poljzovalisj vkljcuhajet v sebja kuchu trebovanij v tom chisle i trebovanije na polozhiteljnuju opredeljnoostj formy. Kazalosj by dlja svjazi (1) eto ne nuzhno.

V zakljuchenijii dva dopolnenija:

Istorija voprosa: Vopros voznik tri goda tomu nazad u mojego druga. Togda my byli pomolozhe i ponaivnejee. Ochenj bystro my dokazali svojstvo (10) i vrode by togda ja lego dokazal shto dlja konechnomernykh prostranstv vsjo prosto i vsja eta bodjaga s neraventsvom treugoljnika ne nuzhna. Problemy voznikajut v beskonechnomeriji. No ja nikak ne mogu eto vosstanovitj. Mozhet ja ne prav byl, a mozhet bytj sejchas psotarel...

No sdrugoj storony my togda zastrjali na (10) i daljehse ne poshli. Nam uslovije nepreryvnosti kazalosj vneshnim doponiteljnym trebovanije.

Potom na menja svet prolilsja (eto bylo dva goda tomu nazad) kogda ja ponjal shto nepreryvnostj opredeljajetsja v terminakh samoj formy!!!! No ja nikak ne mogu privesti kontrpirmer.

Shob ponjatj shto ne vsjo gladko v datskom korolevstve.

Predlagaju sledujushee kazalosj by bezobidnoje uprazheninie: uprazhnenije

Zadacha: Privesti primer funcktsiji $F(x)$ gde x proizovljnoje dejstviteljnoje chislo tak shto $F(x)$ udovletvorjajet usloviju additivnosti:

$$F(x+x') = F(x) + F(x')$$

no linejnoj ne javljajetjsa !!!!

Okazyvajejtsja eto ne ochenj legko. V kakom-to smysle reshenije nevozmozhno bez aksiomy vybora:

Reshenije: Rassmotrim R kak linejnoje porstranostvo nad Q i vvedjom v njom basis $\{e_i\}$ tak shto pervyj element $e_1 = 1$ (zametim shto indeks i probegajet neschotnoje mnozhestvo znachenij.) (Takoj bazis nazyvajetjsa bazis Gamelja????)

Teperj jasno shto ljuboje chislo odnoznachno mozheno predstavitj vvide summy ratsionaljnogo i irratsionaljnogo:

$$x = x^1 + x' \tag{11}$$

Imenno dlja etogo nuzhen bazis Gamelja!

Zametim shto bez basia Gamelja razlozhenije (11) ne poluchitsja, a dlja basisa Gamelja nuzhna transfinitnaja induktsija, to estj aksioma vybora!!!!

A teperj s uchotmo (11) stroim: $F(x) = x^1$

Jasno stho eta funtsija udovletvorjajet usloviju additivnosti Na ratsionaljnykh ona ravna x i na mnogikh irratsionaljnykh chislkah (no ne na vsekh!) ona ravna nulju.

Vidno shto eto uzhasnyj objekt....

Nu ladno...