Удивительное рядом.

Ford circles and Farey sequences

We will discuss here the following beautiful phenomenon. For every rational number p/q (where p, q are coprimes) consider a circle $C(p, q)$ in the upper half plane such that it is tangent to x-axis at the point p/q and has a diameter $1/q^2$:

$$C[p/q]\colon \quad (x - p/q)^2 + \left(y - \frac{1}{2q^2}\right)$$

The circles $C[p/q]$ are called **Ford circles**.

These circles have the following striking property:

`Every two Ford circles do not intersect or are tangent to each other`

Можно ли построить круги, по одному для каждой рационалйной точке, так, чтобы каждая рациональная точка была бы окружена "своим кругом" и чтобы эти круги не пересекались? Что за бред, конечно, нельзя! Но, оказывается, немного ослабив условия, можно. А именно, можно построить непересекающиеся круги, по одному для каждой рациональной точке так, чтобы через каждую рациональную точку проходила бы "своя"окружность, граница круга!

Как?

Рассмотрим в верхней полуплоскости $y \geq 0$ две окружности C_1, C_2, которые касаются оси абсцисс в точках, отстоящих на расстоянии a друг от друга. Пусть R_1, R_2 радиусы этих окружностей. Квадрат расстояния между центрами окружностей будет равен $a^2 + (R_1 - R_2)^2$. Окружности не пересекаются если и только если это больше чем $(R_1 + R_2)^2$. Мы приходим к заключению:

$$\text{окружности } C_1, C_2 \text{ не пересекаются} \Leftrightarrow a^2 > 4R_1R_2\,,$$

то есть окружности C_1 и C_2 не пересекаются если расстояние между точками касания этих окружностей с осью абсцисс больше чем среднее геометрическое их диаметров, окружности касаются друг друга, если расстояние между точками касания равно среднему геометрическому их диаметров.

Замечание Красивая геометрическая картинка (см. рис.1) для случае касания: Пусть PM общая касательная, A, B касания (см. рис.1). Треугольник O_1MO_2 прямоугольный, так как $\angle PMO_2 = \frac{1}{2}\angle PMA$ и $\angle PMO_1 = \frac{1}{2}\angle PMB$, значит $\angle O_1MO_2 = \frac{\pi}{2}$. Отрезок MP, это высота, проведенная на гипотенузу O_1O_2. Этот отрезок с одной стороны равен половине отрезка AB, а с другой сторону среднему геометрическому отрезков гипотенузы. То есть

$$\frac{a}{2} = \sqrt{R_1R_2}\,.$$

Теперь рассмотрим две произвольные рациональные дроби $\alpha = p/q$ и $\beta = r/s$, $p/q < r/s$. Мы положим, что эти дроби несократимы, то есть пары (p, q) и (r, s) взаимно просты. Обозначим символом $C_a(r)$ окружность радиуса r, касающуюся оси абсцисс в точке . Заметим, что

$$|\alpha - \beta| = \left| \frac{r}{s} - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{rq - ps}{qs} \right| \geq \frac{1}{qs}$$

Поэтому мы приходим к выводу, что
множество кругов не если и только если