Лекции по суперматематике

ИППИ, ИТМФ МГУ, мехмат МГУ

Москва, 11 марта 2022

Вторая лекция 2022

Взятие производной, дифференцирование

Пусть $\theta^1, \ldots, \theta^q$ набор антикоммутирующих переменных в алгебре Березина $\Lambda_{p|q}$. Выберем любую из этих переменных, например, переменную $\theta^{'}$.
Переменная θ' грассманова: $\theta' \cdot \theta' = 0$. Значит для любой функции $f = f(x^i, \theta^\alpha) \in \Lambda_{p|q}$ ее можно представить в виде суммы функции линейной по θ' и функции, которая не зависит от θ'

$$f(x^i, \theta^\alpha) = \theta^{'} g + h$$

где функции g и h не зависят от $\theta^{'}$. Таким образом мы приходим к естественному определению частной производной по антикоммутирующей переменной.

$$\frac{\partial}{\partial \theta^{'}} f(x^i, \theta^\alpha) = g,. \tag{1}$$

Соблюдается правило Лейбница (со знаком)

$$\frac{\partial}{\partial \theta^{\mathrm{a}}}(\mathrm{fg}) = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \theta^{\mathrm{a}}}\mathrm{g} + (-1)^{\mathrm{p(f)}}\frac{\partial \mathrm{g}}{\partial \mathrm{z}^{\mathrm{a}}}\,. \qquad (2)$$

Remark
Обратите внимание, что если ω_1 и ω_2 произвольные формы , то

$$\mathrm{d}(\omega_1 \wedge \omega_2) = \mathrm{d}\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{\mathrm{rank}\,\omega_1}\omega_1 \wedge \mathrm{d}\omega_2$$

Сравните это равенство с (2).

Exercise

Пусть u какой нибудь элемент из множества $(x^1, \ldots, x^n, \theta^1, \ldots, \theta^q)$ и v какой нибудь, вообще говоря, другой элемент из множества $(x^1, \ldots, x^n, \theta^1, \ldots, \theta^q)$. Показать, что

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v} = (-1)^{p(u)p(v)}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}$$

В некоторых источниках вводят правило взятия "левой" и "правой" производной. Например

$$\frac{\partial^{\mathrm{L}}}{\partial \boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}_1\boldsymbol{\theta}_2)=\boldsymbol{\theta}_2,,\text{но}\frac{\partial^{\mathrm{R}}}{\partial \boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}_1\boldsymbol{\theta}_2)=-\boldsymbol{\theta}_2,,\text{но}$$

Мы как правило, будем использовать определение (1) и иногда будем называть его правилом взятия "левой" производной.

Exercise

Пусть f–элемент алгебры Березина, гладкая функция он $,\boldsymbol{\theta}$.

Написать формулу Тэйлора.

Exercise

Взятие производной композиции функций.

Отображения и замены переменной

Мы вернёмся к интегралу, прежде поговорив немножко об отображениях и заменах переменных... Напомним, что алгебра Березина $\Lambda_{r|s}$ это алгебра $C^\infty(R^{r|s})$ гладких функций на $R^{r|s}$. Каждый элемент алгебры Березина $\Lambda_{r|s}$ представим в виде

$$f(x,\theta) = a_\emptyset(x) + a_i(x)\theta^i + \cdots = \sum_{0\le k\le q} a_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(x^1,\ldots,x^r)\theta^{\alpha_1}\ldots\theta^{\alpha_k},$$

где $\{\theta^1,\ldots,\theta^s\}$, это набор антикоммутирующих переменных и $\{x^1,\ldots,x^s\}$ это стандартные координаты [1] в R^s и коэффициентные функции это гладкие функции от координат $\{x^1,\ldots,x^s\}$.

[1] например, в качестве таковых можно рассмотреть координаты $x^i(a^1,\ldots a^n) = a^i$, где R^r рассматривается как множество s-ок действительных чисел.

Remark

Введённые выше координаты алгебры Березина, мы иногда будем называть образующими этой алгебры.

Мы сейчас определим гладкое отображение Φ суперпространства $\mathrm{R}^{\mathrm{m}|\mathrm{n}}$ в суперпространство $\mathrm{R}^{\mathrm{p}|\mathrm{q}}$, которое согласно нашей философии определяется 'против шёрстки'—гомоморфизмом алгебры $\Lambda_{\mathrm{p}|\mathrm{q}}$ в алгебру $\Lambda_{\mathrm{m}|\mathrm{n}}$.

Theorem

Пусть $\{\mathrm{f}^{\mathrm{a}}(\mathrm{x},\theta)\}$, $\mathrm{a}=1,\ldots\mathrm{p}$ произвольный упорядоченный набор чётных функций алгебры $\Lambda_{\mathrm{m}|\mathrm{n}}$ в количестве p штук и пусть $\{\varphi^{\alpha}(\mathrm{x},\theta)\}$, $\alpha=1,\ldots\mathrm{q}$ произвольный набор нечётных функций алгебры $\Lambda_{\mathrm{m}|\mathrm{n}}$ в количестве q штук.
Тогда существует гомоморфизм $\alpha\colon\Lambda_{\mathrm{p}|\mathrm{q}}\mapsto\Lambda_{\mathrm{m}|\mathrm{n}}$ такой, что

$$\begin{cases}\alpha(\mathrm{y}^{\mathrm{a}})=\mathrm{f}^{\mathrm{a}}(\mathrm{x},\theta)\ (\mathrm{a}=1,\ldots,\mathrm{p})\\ \alpha(\eta^{\mu})=\phi^{\mu}(\mathrm{x},\theta)\ (\mu=1,\ldots,\mathrm{p})\end{cases}\tag{3}$$

и этот гомоморфизм единственен.

Значение этого гомоморфизма на любой функции $\mathrm{f} \in \Lambda_{\mathrm{p}|\mathrm{q}}$ равно

$$\alpha\,[\mathrm{f}] = \alpha\left[\mathrm{f} = \sum_{0\le \mathrm{k}\le \mathrm{q}} \mathrm{a}_{\mu_1\ldots\mu_{\mathrm{k}}}(\mathrm{y}^1,\ldots,\mathrm{y}^{\mathrm{p}})\eta^{\mu_1}\ldots\eta^{\mu_{\mathrm{k}}}\right] =$$

$$\alpha\left[\mathrm{f} = \mathrm{a}_{\emptyset}(\mathrm{y}) + \mathrm{a}_{\mu\nu}(\mathrm{y})\eta^{\nu}\eta^{\mu} + \ldots\right] =$$

$$\mathrm{a}_{\emptyset}\left(\mathrm{f}^{\mathrm{a}}_{\emptyset}(\mathrm{x}) + \mathrm{f}^{\mathrm{a}}_{\alpha\beta}(\mathrm{x})\theta^{\beta}\theta^{\alpha} + \ldots\right) +$$

$$+\mathrm{a}_{\mu\nu}\left(\mathrm{f}^{\mathrm{a}}_{\emptyset}(\mathrm{x}) + \mathrm{f}^{\mathrm{a}}_{\alpha\beta}\theta^{\beta}\theta^{\alpha} + \ldots\right)\left[\Phi^{\mu}_{\alpha}(\mathrm{x})\theta^{\alpha} + \ldots\right]\left[\Phi^{\nu}_{\beta}(\mathrm{x})\theta^{\alpha} + \ldots\right] + \ldots$$

Эта теорема позволяет определить отображение Φ суперпространства $\mathrm{R}^{\mathrm{m}|\mathrm{n}}$ в суперпространство $\mathrm{R}^{\mathrm{p}|\mathrm{q}}$ с помощью упорядоченного набора чётных гладких функций $\{\{\mathrm{f}^{\mathrm{a}}(\mathrm{x}, \theta)\}\}$,$\mathrm{a} = 1, \dots \mathrm{p}$ и нечётных гладких функций $\{\{\phi^{\mathrm{a}}(\mathrm{x}, \theta)\}\}$,$\mathrm{a} = 1, \dots \mathrm{q}$
Отображение Φ определяется с помощью гомоморфизма (3).

Сформулированная выше Теорема1 даёт право отождествлять стандартные координаты на $\mathrm{R}^{\mathrm{r}|\mathrm{s}}$ и образующими алгебры Березина $\Lambda_{\mathrm{r}|\mathrm{s}}$.

Definition

Мы будем называть иногда $\mathrm{R}^{\mathrm{p}|\mathrm{q}}$ p|q-мерным аффинным суперпространством

Пример отображения суперпространств

Пусть $\mathrm{R}^{1|1}$ это $1|1$-мерное афинное суперпространство с координатами t, $\boldsymbol{\theta}$, где t — чётная координата , а $\boldsymbol{\theta}$ — нечётная координата . Пусть $\mathrm{R}^{2|1}$ это $2|1$-мерное афинное суперпространство с координатами x, y $\boldsymbol{\theta}$, где x, y — чётные координату , а $\boldsymbol{\varphi}$ — нечётная координата . Рассмотрим отображение Φ, задаваемое следующими гомомоморфизмами "против шёрстки"

$$\begin{cases} \Phi^*(\mathrm{x}) = \cos \mathrm{t} \\ \Phi^*(\mathrm{y}) = \sin \mathrm{t} \\ \Phi^*(\varphi) = \theta \end{cases} .$$

Замечание о нечётной константе

Каждый элемент f алгебры $\Lambda_{2|1}$

$$f = a(x, y) + b(x, y)\varphi$$

преобразуется в элемент g алгебры $\Lambda_{1|1}$ такой что

$$g = a(\cos t, \sin t) + b(\cos t, \sin t)\theta$$

Замечание о нечётной константе

В этом примере мы могли бы рассматривать более широкий класс функций, если бы разрешили б использовать нечётные константы. Например, чётная функция $\beta\varphi$ переходит в чётную функцию

$$\Phi^*(\beta\varphi) = \beta\varphi\,,$$

где β — нечётная константа.

Обратимые отображения

Теперь перейдём к замене переменных в суперпространстве. Чтобы определить замену переменных в суперпространстве мы следуя нашей философии дуальности определим обратимое отображение алгебры функций на себя.
Рассмотрим отображение

$$\begin{cases} x^{i'} = f^{i'}(x, \boldsymbol{\theta}), i = 1, \dots, r \\ \boldsymbol{\theta}^{i'} = \boldsymbol{\varphi}^{i'}(x, \boldsymbol{\theta}), i = 1, \dots, s \end{cases} \tag{4}$$

Каково условие, что оно обратимо?
Имеет место следующая теорема

Theorem

Произвольное преобразование переменных (4) обратимо если и только если выполняются следующие условия:

- отображение $\mathrm{R}^{\mathrm{r}} \to \mathrm{R}^{\mathrm{r}}$ задаваемое формулами (4)
$$\mathrm{x}^{\mathrm{i}'}\big|_{\theta=0} = \mathrm{f}^{\mathrm{i}'}(\mathrm{x},\theta)\big|_{\theta=0} \quad \text{обратимо} \tag{5}$$
- $\mathrm{s} \times \mathrm{s}$-матрица
$$\frac{\partial \theta^{\mathrm{i}'}}{\partial \theta^{\mathrm{j}}}\Big|_{\theta=0} = \frac{\partial \varphi^{\mathrm{i}'}(\mathrm{x},\theta)}{\partial \theta^{\mathrm{j}}}\Big|_{\theta=0} \tag{6}$$
обратима

(Мы рассматриваем только гладкие функции. Это неявно используется в формулировках теорем.)

Example

Рассмотрим аффинное суперпространство $\mathrm{R}^{1|3}$. Ему соответствует алгебра гладких функций на прямой со значениями в грассмановой алгебре. Λ_2 (Это то же, что алгебра Березина $\Lambda_{1|2}$) Рассмотрим гладкую замену переменных:

$$\begin{gathered} \mathrm{x}' = \mathrm{x} + \theta^1\theta^2 \\ \theta^{1'} = \theta^1 + \sin \mathrm{x}\,\theta^1\theta^2\theta^3 \\ \theta^{2'} = 2\theta^2 \\ \theta^{3'} = \theta^3 \end{gathered} \tag{7}$$

Вначале отметим, что условия теоремы соблюдаются: отображение

$$\mathrm{x}'\big|_{\theta=0} = (\mathrm{x} + \theta^1\theta^2)\big|_{\theta=0} = \mathrm{x}$$

поэтому условие (5) очевидно соблюдается;

Продолжение примера

второе условие легко проверить: матрица (6) имеет вид

$$\frac{\partial \theta^{i'}}{\partial \theta^{j}}\Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta^{1'}}{\partial \theta^{1}} & \frac{\partial \theta^{2'}}{\partial \theta^{1}} & \frac{\partial \theta^{3'}}{\partial \theta^{1}} \\ \frac{\partial \theta^{1'}}{\partial \theta^{2}} & \frac{\partial \theta^{2'}}{\partial \theta^{2}} & \frac{\partial \theta^{3'}}{\partial \theta^{2}} \\ \frac{\partial \theta^{1'}}{\partial \theta^{3}} & \frac{\partial \theta^{2'}}{\partial \theta^{3}} & \frac{\partial \theta^{3'}}{\partial \theta^{3}} \end{pmatrix}\Big|_{\theta^{i}=0} = \begin{pmatrix} 1+\sin x\theta^{2}\theta^{3} & 0 & 0 \\ 1-\sin x\theta^{1}\theta^{3} & 2 & 0 \\ 1+\sin x\theta^{1}\theta^{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}\Big|_{\theta^{i}=0} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Она очевидно обратима.

Нам удобно обозначить $\theta^1 \to \theta$, $\theta^2 \to \eta$, $\theta^3 \to \xi$. Имеем

$$\begin{cases} \mathrm{x}' = \mathrm{x} + \theta\eta \\ \theta' = \theta + \sin \mathrm{x}\theta\eta\xi \\ \eta' = 2\eta \\ \xi' = \xi \end{cases},$$

$$\xi = \xi', \eta = \frac{1}{2}\eta', \theta = \theta' - \sin \mathrm{x}\theta\eta\xi =$$

$$\theta' - \frac{1}{2}\sin \mathrm{x}\theta\eta'\xi' = \theta' - \frac{1}{2}\sin \mathrm{x}\left[\theta' - \sin \mathrm{x}\theta\eta'\xi'\right]\eta'\xi' =$$

$$\theta' - \frac{1}{2}\sin \mathrm{x}\theta'\eta'\xi',$$

$$\mathrm{x} = \mathrm{x}' - \theta\eta = \mathrm{x}' - \left[\theta' - \frac{1}{2}\sin \mathrm{x}\theta'\eta'\xi'\right]\frac{1}{2}\eta' = \mathrm{x}' - \frac{1}{2}\theta'\eta'$$

Таким образом мы непосредственно видим, что преобразование

$$\begin{cases} \mathrm{x}' = \mathrm{x} + \theta\eta \\ \theta' = \theta + \sin \mathrm{x}\theta\eta\xi \\ \eta' = 2\eta \\ \xi' = \xi \end{cases},$$

обратно преобразованию

$$\begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{x} - \frac{1}{2}\theta\eta \\ \theta = \theta' - \sin \mathrm{x}'\theta'\eta'\xi' \\ \eta = 2\eta' \\ \xi = \xi' \end{cases},$$

Интегрирование функции на суперпространстве $\mathrm{R}^{\mathrm{p|q}}$. Предварительные идеи.

Займемся теперь интегрированиема

Definition

Пусть ∂ операция взятия производной. Тогда интегрирование это линейная операция которая зануляется на образе ∂

$$\mathrm{I}(\partial \mathrm{f}) = 0 \tag{8}$$

Очевидно, что интеграл этому свойству удовлетворяет. Можно показать, что на пространстве функций с компактным носителем, определение (8) приводит к обычному интегралу.

Theorem

Пусть линейный функционал I удовлетворяет условию (8) и нормировочному условию

$$\mathrm{I}(1) = 1\,. \tag{9}$$

Тогда на пространстве непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ выполняется условие

$$\mathrm{I}(\mathrm{f}) = \int_{-1}^{1} \mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{dt}\,.$$

Доказательство

Пусть
$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \ .$$
Рассмотрим функцию
$$G(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt - x\,.$$
Очевидно, что
$$\frac{d}{dx}G(x) = f(x) - a,\,.$$
Поэтому $I(f-a) = 0$. Значит в силу нормировочного условия (9) $I(f) = a$ ■.

Exercise

Сформулировать и попорбовать доказать утверждение об интеграле от голоморфной функции.

Мы видим, что из свойства (8) вытекает, что для алгебры Грассманна

$$\int \theta_{\mathrm{i}} \mathrm{d}\theta_{\mathrm{j}}$$

зануляется если $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$, так как в этом случае $\theta_{\mathrm{i}} = \frac{\partial}{\theta_{\mathrm{j}}}(\theta_{\mathrm{j}}\theta_{\mathrm{i}}\theta)$. Мы приходим к определению Березина:

$$\int \theta_{\mathrm{i}} \mathrm{d}\theta_{\mathrm{j}} = \delta_{\mathrm{ij}}\,.$$

Определение интеграла от функции вдоль координатной формы объёма

Пусть $\{x^i, \theta^\alpha\}$. $i = 1, \ldots, p$, $\alpha = 1, \ldots, q$ координаты афинного суперпространства $R^{p|q}$. Пусть f произвольная быстроубывающая функция на $R^{p|q}$, т.е. любая производная этой функции убывает быстрее чем любая степень x: $\lim_{x\to\infty} x^n D^m f = 0$. Тогда интеграл от этой функции вдоль координатной формы объёма $D(x,\theta)$ равен

$$\int_{R^{p|q}} D(x,\theta) f = \int_{R^{p|q}} D(x,\theta)\theta^1 \ldots \theta^n a_{[1\ldots n]}(x) =$$

$$(-1)^s \int_{R^p} dx^1 \ldots dx^n a_{[1\ldots n]},$$

где

$\mathrm{D}(\mathrm{x},\theta)$ — координатная форма объёма,

$$\mathrm{f}(\mathrm{x},\theta)=\sum_{0\leq \mathrm{k}\leq \mathrm{q}} \mathrm{a}_{\alpha_1\ldots\alpha_\mathrm{k}}(\mathrm{x}^1,\ldots,\mathrm{x}^\mathrm{p})\theta^{\alpha_1}\ldots\theta^{\alpha_\mathrm{k}}=\mathrm{a}_\emptyset(\mathrm{x})+\theta^\mathrm{i}(\mathrm{x})\mathrm{a}_\mathrm{i}(\mathrm{x})+\cdots+$$

$$\theta^1\ldots\theta^\mathrm{n}\mathrm{a}_{[1\ldots\mathrm{n}]}(\mathrm{x}) \tag{10}$$

Remark Обращаю ваше внимание на то как мы немного странно пишем разложение в (10)
Exercise
Доказать, что условие быстрого убывания не зависит от системы координат.