Лекции по суперматематике
ИППИ, ИТМФ МГУ, мехмат МГУ
Москва, 8 апреля 2022
Пятая лекция 2022

## Домашнее задание

Пусть U и V две области
$x^1,\ldots,x^m$ — координаты в области U
$y^1,\ldots,y^n$ — координаты в области V
Рассмотрим отображение области U в области V

$$\Psi: \quad \begin{cases} y^1 = f^1(x^1,\ldots,x^m) \\ \ldots \\ y^n = f^n(x^i) = f^n(x^1,\ldots,x^m) \end{cases} \tag{1}$$

Это отображение можно рассматривать как гомоморфизм $\boldsymbol{\psi}^*$ "против шёрстки" $C^\infty(V)$ в $C^\infty(U)$

$$\Psi^* \quad \begin{cases} \Psi^*(y^1) = f^1(x^1,\ldots,x^m) \\ \ldots \\ \Psi^*(y^n) = f^n(x^1,\ldots,x^m) \end{cases} \tag{2}$$

На самом деле имеет место теорема: любой гомоморфизм (2) $\psi^*$ $C^\infty(V)$ в $C^\infty(U)$ индуцирует 'точечное' преобразование (1).
Предварим доказательству этого результата лемму.
Пусть U область, $x^1,\ldots,x^m$ — координаты в этой области.
Пусть $\sigma$ гомоморфизм алгебры гладких (вещественнозначных) функций в R. Тогда существует точка P в области U, такая, что для любой гладкой функции $f \in C^\infty(V)$

$$\sigma(f) = f(P)\,. \tag{3}$$

Proof of the lemma.
Рассмотрим точку P с координатами $a^i = \sigma(x^i)$ $(i = 1,\ldots m)$.
Пусть этой точки нет, то есть $P \notin U$. Тогда функция

$$G(x^1,\ldots x^m) = \sum_{i=1}^{m}(x^i - a^i)^2 \tag{4}$$

нигде не обращается в нуль,потому что эта функция может лишь обращаться в нуль лишь только в точках с координатами $x^i = a^i$. Значит эта функция обратимая. С другой стороны очевидно, что функция G лежит в ядре гомоморфизма $\sigma$. Значит

$$1 = \sigma(1)\sigma\left(G \cdot \frac{1}{G}\right) = \sigma(G) \cdots = 0\,. \tag{5}$$

Противоречие. Значит точка P существует.
Осталось доказать соотношение (3). Пусть оно неверно, то есть существует функция $f_0$, такая, что

$$\sigma(f_0) = h \neq f_0(P)\,. \tag{6}$$

Рассмотрим функцию

$$F = G + (f_0 - h)^2 ,$$

где функция G определяется соотношением (4). Ясно, что соотношение (6) означает, что эта функция обратима. Это приводит к противоречию, то есть условие (6) не соблюдается. Утверждение (3) доказано.
Докажем теорему.

Пусть $\Psi^*$ гомоморфизм алгебры $C^\infty(V)$ алгебры гладких функций на V $C^\infty(V)$ в алгебру $C^\infty(U)$ гладких функций на U. Пусть

$$\begin{cases} \Psi^*(y^1) = f^1(x^1, \dots, x^m) \\ \dots \\ \Psi^*(y^n) = f^n(x^1, \dots, x^m) \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим произвольную точку $P = x_0$ на U и для каждой гладкой функции f на V рассмотрим вещественное число, равное значению функции $g = \Psi^*(f)$ функции g в точке P:

$$\sigma(f) = \Psi^* f(P).$$

Мы построили гомоморфизм алгебры гладких функций на $U$ в вещественные числа. Лемма даёт, что существует точка $Q \in V$ такая, что

$$\boldsymbol{\sigma}(f) = \Psi^* f(P) = f(Q)\,.$$

В итоге мы для любой точки $P \in U$ построили точку $Q \in V$

## Разложение характеристичекой функции $R_A(z) = \mathrm{Ber}\,(1 + Az)$

We will consider the expansions for the function $R_A(z)$.

**Example**

Пусть A оператор в трахмерном линейном пространстве.
Тогда

$$\mathrm{Ber}\,(1+zA) = \det(1+zA) = 1 + z\mathrm{Tr}\,A + z^2\mathrm{Tr}\,(A\wedge A) + z^3\mathrm{Tr}\,(A\wedge A\wedge A)$$

и

$$\det A = +\mathrm{Tr}\,(A\wedge A\wedge A\wedge A)$$

Что это такое???

Пусть линейный оператор  действует на V. Действие $A \wedge A$ на $V \wedge V$ определяется

$$(A \wedge A)(u \wedge v) = A(u) \wedge A(v).$$

При этом

$$u \wedge v = -v \wedge u(-1)^{p(u)p(v)}.$$

Посчитаем действие $A \wedge A$ на $V \wedge V$ Ограничимся случаем, когда оператор A диагонализируем. (используем , что диагонализируемые всюду плотны)
Пусть $\{e_i, f_\alpha\}$ базис $p|q$-мерного суперпорстранства V, состоящий из собственных векторов.

Имеем p чётных собственных векторов

$$A(e_i) = \lambda_i e_i\,, \quad i = 1\ldots,p$$

и q нечётных собственных векторов

$$A(f_\alpha) = \mu_\alpha f_\alpha\,, \quad \alpha = 1\ldots,q.$$

Рассмотрим базис пространства $V \wedge V$:

$$\text{чётные вектора} - \{e_i \wedge e_j, (i < j); f_\alpha \wedge f_\beta (\alpha \leq \beta)\}$$

$$\text{в количестве } \tfrac{p(p-1)}{2} + \tfrac{q(q+1)}{2} \text{ штук}$$

и

$$\text{нечётные вектора} - \{e_i \wedge f_\alpha\} \text{в количестве pq штук,}$$

Имеем

$$A \wedge A(e_i \wedge e_j) = \lambda_i \lambda_j\,, A \wedge A(f_\alpha \wedge f_\beta) = \mu_\alpha \mu_\beta\,,$$

соответственно для нечётных векторов

$$A \wedge A(e_i \wedge f_\alpha) = \lambda_i \mu_\alpha\,,$$

Вернёмся к разложению

$$\mathrm{Ber}\left(1+zA\right)=1+z\mathrm{sTr}A+z^2\mathrm{sTr}\left(A\wedge A\right)+\dots$$

Предложение

$$\mathrm{Ber}\left(1+Az\right)=1+c_1(A)z+c_2(A)z^2+\dots=\sum_k c_k(A)z^k \qquad (1)$$

где

$$c_k(A)=\mathrm{sTr}\left(\underbrace{A\wedge\dots\wedge A}_{k\ \text{раз}}\right)$$

Например, можно показать, что для оператора $\mathrm{L}$ в трёхмерном пространстве

$$\det(1+\mathrm{zL}) = 1+\mathrm{z}\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{L} + \mathrm{z}^2\mathrm{Tr}\,(\mathrm{L}\wedge\mathrm{L}) + \mathrm{z}^3\mathrm{Tr}\,(\mathrm{L}\wedge\mathrm{L}\wedge\mathrm{L})\,,$$

В частности для оператора $\mathrm{L}$ в трёхмерном пространстве

$$\det \mathrm{L} = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{L}\wedge\mathrm{L}\wedge\mathrm{L})\,,$$

а для оператора $\mathrm{L}$ в двухмерном пространстве

$$\det \mathrm{L} = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{L}\wedge\mathrm{L})$$

Сделайте эти экзерсизы!

Перепишем разложение в предложении :

$$\mathrm{Ber}\,(1+zA)=\sum_{k\in \mathbb{Z}} c_k(A)z^k, \qquad \text{где } \begin{cases} c_k(A)=\mathrm{sTr}\,\Lambda^k A & \text{для целых } k\geq 0 \\ c_k(A)=0 & \text{для целых } k<0 \end{cases}$$

(Тут выписано разложение в ряд Тейлора. Немного странное записывание закона суммирования оправдается в последующей Теореме .)

Proof

$$\mathrm{Ber}\,(1+zA)=\prod_{i=1}^{p}(1+z\lambda_i)\prod_{\alpha=1}^{q}(1+z\mu_\alpha)^{-1}= \tag{2}$$

$$\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r}\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_r}\mu_1^{n_1}\ldots\mu_q^{n_q}(-1)^{n_1+\cdots+n_q}z^{r+n_1+\cdots+n_q}= \tag{3}$$

$$1+(\lambda_1+\cdots+\lambda_p-\mu_1-\cdots-\mu_q)z+\left(\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j-\sum_{i=1,\alpha=1}^{i=p,\alpha=q}\lambda_i\mu_\alpha+\sum\mu_\alpha\mu_\beta\right)z^2$$

$$1+z\,\mathrm{sTr}\,A+z^2\mathrm{sTr}\,(A\wedge A)+\ldots$$

$$\sum c_k(A)z^k,\text{где}\,c_k(A)=\mathrm{sTr}\,((\wedge^k A).\ \blacksquare \tag{4}$$

Обсудить?
Выразить базис в $V \wedge V \wedge V$ через базис в V.
`Решение` Пусть V -линейное $p|q$-мерное пространство. Пусть $\{e_i, f_\alpha\}$, где вектора $e_1, \ldots, e_p$—чётные вектора, и вектора $f_1, \ldots, f_q$—нечётные вектора- произвольный базис в V. Тогда,например,
будет базисом в $V \wedge V \wedge V$.
Конечно, количество чётных векторов в базисе минус количество нечётных, это суперслед единичного оператора (см, вычисления ниже). Тут мы еще ответим на вопрос, а каковы другие базисы в V.

**Theorem**

Пусть $\{e_i, f_\alpha\}$-произвольный базис в V, и пусть $\{e_{1'}, \ldots, e_{p'}, f_{1'}, \ldots, f_{q'}\}$ произвольный набор p чётных и q нечётных векторов V, Рассмотрим матрицу перехода T:

$$\begin{cases} e_{i'} = T^i_{i'} e_i + T^\alpha_{i'} f_\alpha \\ f_{\alpha'} = T^i_{\alpha'} e_i + T^\alpha_{\alpha'} f_\alpha \end{cases},$$

где $||T^i_{i'}||, ||T^a_{\alpha'}||$-чётные матрицы (все их элементы чётные) и $||T^\alpha_{i'}||, ||T^i_{\alpha'}||$-нечётные матрицы (все элементы нечётные) $\{e_{1'}, \ldots, e_{p'}, f_{1'}, \ldots, f_{q'}\}$—базис если и только если матрица обратима, то есть матрицы $||T^i_{i'}||$ и $||T^a_{\alpha'}||$-обратимы.

Обсудить вычисление $\mathrm{Ber}(1+zA)$ до третьего порядка по z.
Пусть E единичный оператор в p|q-мерном линейном пространстве. Вычислить
$\mathrm{sTr}\, E$
$\mathrm{sTr}(E \wedge E)$
$\mathrm{Ber}(E+zE)$
Решение.

Мы видим, что $\mathrm{Ber}\,(E+zE)=(1+z)^{p-q}$. Раскладывая в ряд получим:

$$\mathrm{Ber}\,(E+zE)=(1+z)^{p-q}=1+(p-q)z+\ldots,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{sTr}\,E&=p-q,\\ \mathrm{sTr}\,(E\wedge E)&=\frac{(p-q)(p-q-1)}{2},\\ \mathrm{sTr}\,(E\wedge E\wedge E)&=\frac{(p-q)(p-q-1)(p-q-2)}{6},\end{aligned}$$

и так далее. Проверим эти формулы.
Пусть $\{e_i,f_\alpha\}$ произвольный базис в V.

Мы видим, что

$$\text{суперслед } = \text{количество чётных элементов в базисе в } V - \text{количество нечётных элементов в базисе в } V = p - q\,.$$

теперь проверим суперслед квадрата:
рассмотрим базис в $V \wedge V$: это будет например

$$\Big\{\{e_i \wedge e_j (i < j); f_\alpha \wedge f_\beta (\alpha \leq \beta)_{\text{чётные вектора}}, \{e_i \wedge f_\alpha;\}_{\text{нечётные векто}}$$

мы видим, что

$$\text{суперслед } E \wedge E = \text{количество чётных элементов в базисе} - \text{количество нечётных элементов в базисе } = \frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q+1)}{2} - pq = \frac{(p-q)(p-q-1)}{2}\,,$$

## Действительно нетривиально!

теперь проверим суперслед куба:
рассмотрим базис в $\mathrm{V} \wedge \mathrm{V} \wedge \mathrm{V}$: это будет

$$\{\mathrm{e_i} \wedge \mathrm{e_j} \wedge \mathrm{e_k} (\mathrm{i} < \mathrm{j} < \mathrm{k})\},$$

$$\mathrm{e_i} \wedge \mathrm{f}_\alpha \wedge \mathrm{f}_\beta (\alpha \leq \beta)\} - - - \text{чётные вектора,}$$

$$\{\mathrm{f}_\alpha \wedge \mathrm{f}_\beta \wedge \mathrm{f}_\gamma (\alpha \leq \beta \leq \gamma)\},, \{\mathrm{e_i} \wedge \mathrm{e_j} \wedge \mathrm{f}_\alpha\} - - - \text{нечётные вектора}$$

мы видим, что

$$\text{суперслед } \mathrm{E} \wedge \mathrm{E} \wedge \mathrm{E} =$$

$$\text{количество чётных элементов в базисе в } \mathrm{V} \wedge \mathrm{V} \wedge \mathrm{V} -$$

$$\text{количество нечётных элементов в базисе в } \mathrm{V} \wedge \mathrm{V} \wedge \mathrm{V} =$$

$$\left[\frac{\mathrm{p}(\mathrm{p}-1)(\mathrm{p}-2)}{6}+\frac{\mathrm{pq}(\mathrm{q}+1)}{2}\right]-\left[\frac{\mathrm{q}(\mathrm{q}+1)(1+2)}{6}+\frac{\mathrm{p}(\mathrm{p}-1)\mathrm{q}}{2}\right]=$$

$$\mathrm{sTr}\left(\mathrm{E}\wedge\mathrm{E}\wedge\mathrm{E}\right)=\frac{(\mathrm{p}-\mathrm{q})(\mathrm{p}-\mathrm{q}-1)(\mathrm{p}-\mathrm{q}-2)}{6},$$

Проверка последнего равенства несколько утомительна... (Сравните результаты этих упражнений с результатами упражнений по вычислению примеров базисов в $\mathrm{V}\wedge\mathrm{V}$ и в $\mathrm{V}\wedge\mathrm{V}\wedge\mathrm{V}$.)