Лекции по суперматематике
ИППИ, ИТМФ МГУ, мехмат МГУ
Москва, 04 марта 2022
Первая лекция 2022

Очень грубо говоря, суперматематика, это наука в которой используются коммутирующие и антикоммутирующие переменные.
Обычные (коммутирующие) переменные $\{\mathrm{x}^{\mathrm{i}}\} = \{\mathrm{x}^1, \mathrm{x}^2, \ldots, \mathrm{x}^{\mathrm{m}}\}$ принимают значения в числах, им можно сопоставить точки.
Антикоммутирующие переменные $\{\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{a}}\} = \{\boldsymbol{\theta}^1, \boldsymbol{\theta}^2, \ldots, \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{n}}\}$ это символы, такие что

$$\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{a}}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{b}} = -\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{a}}, \quad \left(\mathrm{x}^{\mathrm{i}}\mathrm{x}^{\mathrm{j}} = \mathrm{x}^{\mathrm{j}}\mathrm{x}^{\mathrm{i}}, \mathrm{x}^{\mathrm{i}}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{a}} = \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{a}}\mathrm{x}^{\mathrm{i}}\right)$$

Им трудно сопоставить точки [1] Чтоб работать в суперматематике, нам надо освоить двойственый язык.

[1] мы это сделаем в дальнейшем, используя язык так называемых Λ-точек.

Точки — Гомоморфизмы

Пусть R^p- p-мерное аффинное пространство, (`множество точек`). Обозначим $\mathrm{A} = \mathrm{C}^\infty(\mathrm{R}^m)$ алгебру гладких функций на R^m.
Мы иногда будем использовать алгебру $\mathrm{C}(\mathrm{R}^m)$ алгебру непрерывных функций на R^m.

Definition

каждой точке $\mathrm{P} \in \mathrm{R}^p$ сопоставим гомоморфизм $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{P}}$, такой, который сопоставляет каждой функции f её значение в этой точке:

$$\mathrm{R}^m \ni \mathrm{P} \mapsto \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{P}} : \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{P}}(\mathrm{f}) = \mathrm{f}(\mathrm{P}).$$

Понятно, что это гомоморфизм алгебры функций в числа, менее очевидно, что верно и обратное:

Theorem

Пусть D-область в R^m, пусть σ_D произвольный ненулевой гомоморфизм алгебры функций $C^\infty(D)$ в R:

$$\sigma_D \not\equiv 0\,, \sigma_D(f+g) = \sigma_D(f) + \sigma_D(g)\,, \sigma_D(fg) = \sigma_D(f)\sigma_D(g)\,. \quad (1)$$

Тогда существует такая точка $P \in D$, что для любой функции $f \in C^\infty(D)$

$$\sigma_D(f) = f(P)\,.$$

Иными словами множество точек области D = множеству гомоморфизмов из алгебры функций на D в вещественные числа.

Эта теорема позволяет реконструировать точки по алгебре функций $A = C^{\infty}(D)$. Заметим также, что она позволяет восстановить значение функции в точке. Если точка, это гомоморфизм σ алгебры функций в числа, то значение данной функции $f \in A$ на данной точке σ равно значемию 'точки' σ на элементе f.
Докажем эту теорему.
Доказательство теоремы.
Для простоты рассмотрим случай области $D = (0,1)$.

Пусть $\boldsymbol{\sigma}$ гомоморфизм алгебры $\mathrm{A} = \mathrm{C}^{\infty}(0,1)$ в R. Пусть значение этого гомоморфизма на функции $\mathrm{f} = \mathrm{x}$ равно s: $\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{x}) = \mathrm{s}$. Покажем, что число $\mathrm{s} \in (0,1)$. Действительно, если $\mathrm{s} \notin (0,1)$, то функция $\mathrm{h} = \frac{1}{\mathrm{x}-\mathrm{s}}$ хорошо определена и $\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{x}-\mathrm{s}) = 0$. Мы видим, что

$$\boldsymbol{\sigma}\left((\mathrm{x}-\mathrm{s})\frac{1}{\mathrm{x}-\mathrm{s}}\right) = \boldsymbol{\sigma}(\mathrm{x}-\mathrm{s})\boldsymbol{\sigma}\left(\frac{1}{\mathrm{x}-\mathrm{s}}\right) = 0$$

и с другой стороны

$$\sigma\left((x-s)\frac{1}{x-s}\right)=1\,.$$

Противоречие, значит $s\in[0,1]$.
Теперь покажем. что для произвольной гладкой функции $g\in C^{\infty}(0,1)$, выполняется условие $\sigma(g)=g(s)$. Пусть $\sigma(g)=t$. Мы хотим показать, что $t=g(s)$.

Трюк с суммой двух квадратов

Рассмотрим функцию

$$r = (x - s)^2 + (g - t)^2 .$$

Легко понять, что $\sigma(r) = 0$, значит функция r необратима, (так как функция $\frac{1}{r}$ не существует). Мы приходим к выводу, что функция $r()$ обращается в нуль, хотя бы в одной из точек интервала $(0, 1)$. Но если функция $r(x)$ обращается в нуль, то это может быть лишь точка $x = s$. Значит $g(s) = t$. ∎

Exercise 1

Пройдет ли предыдущее доказательство, если алгебру гладких функций в $\mathrm{C}^\infty(0,1)$ заменить на алгебру непрерывных функций $\mathrm{C}^0(0,1)$.

Exercise 2

Остснется ли верным утверждение, если алгебру гладких функций в $C^{\infty}([0,1])$ заменить на произвольную алгебру функций, которые разделяют точки отрезка $[0,1]$.

Exercise 3

Найти и обсудить 'дырку' в следующем рассуждении
Пусть $\boldsymbol{\sigma}$ гомоморфизм, такой, что $\boldsymbol{\sigma}(x) = s \in R$. Тогда очевидно, что $\boldsymbol{\sigma}(x^2) = s^2$ и для любого натурального n, $\boldsymbol{\sigma}(x^n) = s^n$. Значит для любого многочлена $P(x)$, $\boldsymbol{\sigma}(P(x)) = P(s)$. Теперь теорема Вейерштрасса об апроксимации гладкой функцией полиномами даёт, что для любой гладкой функции $g(x)$, $\boldsymbol{\sigma}(g(x)) = g(s)$. ■

Отображения простраств — гомоморфизмы алгебр

Пусть снова R^p- p-мерное аффинное пространство, (`множество точек`). Обозначим также $A = C^\infty(R^m)$ алгебру гладких функций на R^m.

Definition

каждому отображению $F\colon R^m \to R^n$ сопоставим гомоморфизм τ_F, такой, который сопоставляет каждой гладкой функции на R^m $(f \in C^\infty(R^n))$ гладкую функцию ма R^n $(\tau_F(f) \in C^\infty(R^n))$ такую, что значение функции $\tau_F(f)$ на произвольной точке $P \in R^m$ равно значению функции f на точке $Q = F(P)$:

$$\tau_F(f)(P) = f\left(F(P)\right). \tag{2}$$

Remark

Правило 'против шёрстки' Отображения F и гомоморфизм функций τ_{F} идут в противоположных нзоравлениях ('против шёрстки').

Remark

Гомоморфизм (2) построенный по отображению F обозначают F^*,

Так же как и в случае точек верно и обратное

Theorem

Пусть U-область в R^{m} и V-область в R^{n}, и $\boldsymbol{\tau}$ гомоморфизм (против 'шёрстки') алгебры $\mathrm{C}^{\infty}(\mathrm{V})$ в алгебру $\mathrm{C}^{\infty}(\mathrm{U})$. Тогда существует отображение $\mathrm{F}\colon \mathrm{R}^{\mathrm{m}} \to \mathrm{R}^{\mathrm{n}}$ такое, что

$$\boldsymbol{\tau} = \mathrm{F}^*, \text{то есть для любой функции } \mathrm{f} \in \mathrm{C}^{\infty}(\mathrm{D})\ \boldsymbol{\tau}(\mathrm{f}) = \mathrm{f}(\mathrm{F}(\mathrm{P})).$$

Иными словами множество отображений = множеству гомоморфизмов из алгебры функций на V в алгебру функций на U.

`Доказательство теоремы.`

Пусть P произвольная точка на U. Возьмём произвольную гладкую функцию f на V. Значение образа этой функции под действием гомоморфизма τ на данной точке P задаёт гомоморфизм алгебры гладких функций на V в вещественные числа, то есть согласно теореме 1 мы приходим к точке Q такой что

$$\tau(\mathrm{f})(\mathrm{P}) = \mathrm{f}(\mathrm{Q})$$

Это равенство приводит к определению точки $\mathrm{Q} = \mathrm{F}(\mathrm{P})$. Она задаёт гомоморфизм алгебры гладких функций

Example

Пусть φ отображение пространств

$$\varphi \quad \mathrm{R}^2 \mapsto \mathrm{R}^2 : \begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{u} \\ \mathrm{y} = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}} \end{cases} \tag{3}$$

Что тут написано?
Мы 'привыкли' 'читать эту формулу так
`точке с координатами` (u, v) сопоставляется точка с координатами (x.y)
Однако другой читатель скажет:

Формула определяет гомоморфизм гладких функций на плоскости R^2, зависящих от x, y в гладкие функции на плоскости R^2, зависящие от u, v. Гомоморфизм задан на образующих: Функция x переходит в функцию u и функция y переходит в функцию $\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}}$; любая гладкая функция $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ переходит в гладкую функцию $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\big|_{\mathrm{x}=\mathrm{u}, \mathrm{y}=\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}}}$.

Кто прав? Оба правы. Формулу можно читать по разному!

Example

Пусть φ отображение пространств

$$\varphi \quad \mathrm{R}^1 \mapsto \mathrm{R}^2: \begin{cases} \mathrm{x} = \cos \mathrm{t} \\ \mathrm{y} = \sin \mathrm{t} \end{cases} \tag{4}$$

Что тут написано?
Мы 'привыкли' 'читать эту формулу так
`точке` t `на прямой сопоставляется точка с координатами`

$$\begin{cases} \mathrm{x} = \cos \mathrm{t} \\ \mathrm{y} = \sin \mathrm{t} \end{cases}$$

Другой скажет: в этой формуле определяется гомоморфизм функций на плоскости R^2 в функции на R. Формулы задают значения гомоморфизма на образующих: функция x переходит в функцию $\cos t$ и функция y переходит в функцию $\sin t$. Конечно, закон определяет образ любой (гладкой) функции. Например, функция $\frac{e^{-2xy}}{x^4+y^4}$ перейдет в функцию

$$\frac{e^{-2\cos t \sin t}}{\cos^4 t + \sin^4 t} = \frac{e^{-\sin 2t}}{1 - \frac{1}{2}\sin 2t},$$

и для любой гладкой функции $f = f(x, y)$

$$\sigma(f) = f(x, y)x = \cos t, y = \sin t)$$

Задача-шутка (Китайская теорема об остатках)

И в заключение

задача-шутка

Рассмотрим набор разных простых чисел $\{p_i\}$, $i = 1, \ldots, N$, $p_i \neq p_j$; также рассмотрим набор матуральных чисел, $\{_i\}$, $i = 1, \ldots, N$, так что каждое a_i меньше p_i. Найти число K, которое при делении на простое число p_i даст остаток a_i. Вы скажете: это китайская теорема об остатках. Какое отношение она имеет к этому курсу?

Указание к решению

Используя идеи двойственности можно свести эту задачу к задаче построения интерполяционного многочлена Лагранжа.

n различных точек на прямой ——–n различных простых

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$——–—— $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$

$P(x)$ полином ——–- N натуральное число

$P(x_i) = y_i$——————–-N даёт остаток a_i при делении на p_i

Если полином $P(x)$ равен y_i в точке x_i то многочлен

$$P(x) = \sum_i y_i h_i(x), \tag{5}$$

удовлетворяет соотношению $P(x_i) = y_i$, то есть этот многочлен достаавляет решение задачи о построении интерполяционного многочлена Лагранжа.

если многочлен $h_i(x)$ такой, что

$$h_m(x_j) = \boldsymbol{\delta}_{mj}\,, \text{то есть}\, h_m(x) = \begin{cases} 1 \text{ если } x = x_m \\ 0 \text{ если } x = x_j \text{ при любом } j \neq m \end{cases} , \tag{6}$$

Построим многочлен (6),затем построим аналогичный объект в числах, затем переведем формулу (6) из многочленов в числа.

Рассмотрим многочлен $Q(x) = (x - x_1)\dots(x - x_n)$. Этот многочлен зануляется во всех точках $\{x_1, \dots, x_n\}$, а вот многочлен $H_i(x) = \frac{Q(x)}{x - x_i}$ зануляется во всех точках $\{x_1, \dots, x_n\}$, кроме быть может точки x_i и в этой точке он равен

$$H_i(x_i) = \frac{Q(x)}{x - x_i}\Big|_{x_i} = \frac{Q(x) - Q(x_i)}{x - x_i} = Q'(x_i) \tag{7}$$

Remark

Обратим внимание, что мы в формуле (8) определили 'производную' в кольце целых чисел.

Теперь ясно, что в (6)

$$\mathrm{h_m(x)} = \frac{\mathrm{H_m(x)}}{\mathrm{H'_m(x_m)}} = \frac{\prod_{\mathrm{i}\neq \mathrm{m}}(\mathrm{x}-\mathrm{x_i})}{\prod_{\mathrm{i}\neq \mathrm{m}}(\mathrm{x_m}-\mathrm{x_i})} = \begin{cases} 1 \text{ если } \mathrm{x} = \mathrm{x_m} \\ 0 \text{ если } \mathrm{x} = \mathrm{x_j} \text{ при любом } \mathrm{j} \neq \mathrm{m} \end{cases} \tag{8}$$

Это искомый базисмый многочлен. Его легко перевести в числа.

Например кубический многочлен, который равен $\mathrm{y_i}$ в точке $\mathrm{x_i}$ $(\mathrm{i} = 1,2,3$ и $\mathrm{x_1} \neq \mathrm{x_2} \neq \mathrm{x_3} \neq \mathrm{x_1})$ равен

$$P(x) = \sum y_m \frac{\prod_{i \neq m}(x - x_i)}{\prod_{i \neq m}(x_m - x_i)} = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} +$$

$$+ y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_3)(x_3 - x_4)} + y_4 \frac{(x -}{(x_4 -} \quad (9)$$

Перепишем эту формулу для чисел получим

$$P = \sum a_m \prod_{i \neq m} p_i \left[\prod_{i \neq m} p_i \right]^{-1}_{\mathrm{mpdulop_m}} \tag{10}$$

Например, $p_i = 2, 3, 5, 7$

$$= a_1 3 \cdot 5 \cdot 7 \, [3 \cdot 5 \cdot 7]^{-1}_{\mathrm{modulo2}} + a_2 2 \cdot 5 \cdot 7 \, [2 \cdot 5 \cdot 7]^{-1}_{\mathrm{modulo3}} + a_3 2 \cdot 3 \cdot 7 \, [2 \cdot 3 \cdot 7]^{-1}_{\mathrm{moc}}$$

$$a_1 \cdot 105 \, [105] - 1_{\mathrm{modulo2}} + a_2 70 \, [70]^{-1}_{\mathrm{modulo3}} + a_3 42 \, [42]^{-1}_{\mathrm{modulo5}} + a_4 30 \, [30]^{-1}_{\mathrm{modu}}$$

$$a_1 \cdot 105 \cdot 1 + a_2 \cdot 70 \cdot 1 + a_3 \cdot 42 \cdot 3 + a_4 \cdot 30 \cdot 4 =$$

$$105 a_1 + 70 a_2 + 126 a_3 + 120 a_4$$

Это число при делении на 2 даст остаток a_1 при делении на 3 даст остаток a_2 при делении на 5 даст остаток a_3 и при делении на 7 даст остаток a_4. ∎

Немного забегая вперед дадим определение линейного $p|q$-мерного суперпространствав духе идей двойственности $---$:

Definition

Алгебра гладких функций $R(x,\xi)$ от коммутирующих переменных $x^1,\ldots,x^p$ и антикоммутирующих переменных $\xi^1,\ldots,\xi^q$ это алгебра функций на $p|q$-мерном линейном пространстве $R^{p|q}$.

Вместо того чтоб определять пространство мы определяем алгебру функций на нём.

Например вместо
R^p рассматривается алгебра гладких функций от $x^1,\ldots,x^p$.

Обозначим символом Λ_q алгебру Грассмана с q антикоммутирующими свободными переменными $\theta^1, \ldots, \theta^q$, то есть

$$\theta^i \theta^k + \theta^k \theta^i = 0, \tag{11}$$

и любое другое соотношение на θ^i является следствием этих соотношений, то есть для любого многочлена P такого, что $P = 0$, многочлен P принадлежит идеалу тензорной алгебры с образующими θ^i, образованному левыми частями соотношений (11).

Произвольный элемент λ алгебры Λ^{q} может быть записан в виде

$$\lambda = \sum_{0 \le \mathrm{k} \le \mathrm{q}} \mathrm{a}_{\alpha_1 \dots \alpha_\mathrm{k}} \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_\mathrm{k}},$$

где коэффициенты антисимметричны при перестановке индексов.
Элемент $= \mathrm{a}_{\alpha_1 \dots \alpha_\mathrm{k}} \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_\mathrm{k}}$ имеет чётность $\mathrm{p}(\mathrm{s}) = (-1)^{\mathrm{k}}$.
Всякий элемент алгебры Грассмана можно однозначно представить в виде суммы чётного и нечётного элементов этой алгебры.

Для всякого элемента λ алгебры Грассмана Λ^{q},

$$\lambda = \mathrm{m}(\lambda) + \mathrm{n}(\lambda),$$

где $\mathrm{m}(\lambda)$-обычное число и $\mathrm{n}(\lambda)$-нильпотент.

Exercise

Назовём элемент алгебры Грассмана целым если все коэффициенты в разложении (30) целые.

Доказать, что если λ целый нильпотентный элемент алгебры Грассмана, то для любого натурального n, $\frac{\lambda^{n}}{n!}$ тоже цел и нильпотентен.

Наряду с алгеброй Грассмана Λ^q мы будем рассматривать также алгебру $\Lambda_{p|q}$ как алгебру функций от p коммутирующих переменных $x^1, \ldots, x^p$ и q антикоммутирующих переменных $\theta^1, \ldots, \theta^q$. Каждый элемент алгебры $\Lambda_{p|q}$ (мы будем эту алгебру называть алгеброй Березина) может быть представлен в виде (30), где коэффициенты $a_{\alpha_{i_1 \ldots i_k}}$ являются гладкими функциями от переменных $x^1, \ldots, x^p$: для любого $w \in \Lambda_{p|q}$

$$\lambda = \sum_{0 \le k \le q} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(x^1 \ldots, x^p)\theta^{\alpha_1} \ldots \theta^{\alpha_k}.$$

Чётность вводится естественным образом.

Example

Как преобразуется функция $g = \cos x$ при замене координат $x = x' + \theta^1\theta^2$.

Обычная формула Тейлора дает, что

$$\cos(x+y) = \cos x - y \sin x \; - \frac{y^2}{2}\cos x + \frac{y^3}{6}\sin x + \ldots,$$

значит

$$\cos x' = \cos(x + \theta_1\theta_2) = \cos x - \theta^1\theta^2 \sin x.$$

Мы снова возвращаемся к определению линейного (аффинного) суперпространства:

Definition

Алгебра гладких функций $R(x, \xi)$ от коммутирующих переменных $x^1, \ldots, x^p$ и антикоммутирующих переменных $\theta^1, \ldots, \theta^q$, то есть алгебра Березина $\Lambda_{p|q}$, это алгебра функций на $p|q$-мерном линейном (аффинном) суперпространстве $R^{p|q}$.