Лекции по суперматематике
ИППИ, ИТМФ МГУ, мехмат МГУ
Москва, 11 марта 2022
Третья лекция 2022

# Как возникает детерминант при интегрировании

Конечно, мы прекрасно знаем, что такое детерминант.
Как он возникает при интегрировании? Пусть $(x^i)$, $i = 1, \ldots, p$, и $(x^{i'})$, $i' = 1, \ldots, p$ пара двух координатных систем на обычном афинном пространстве $R^p$. Тогда (с точностью до знака)

$$\int_{R^p} F(x) d^p x =$$

$$\int_{R^p} \mathsf{det} \left( \frac{\partial x}{\partial x'} \right) F(x(x')) d^p x'$$

# Как возникает Березиниан при интегрировании

Пусть $(x^i, \theta^\alpha)$, $i = 1, \ldots, p$, $\alpha = 1, \ldots, q$
и
$(x^{i'}, \theta^{\alpha'})$, $i' = 1, \ldots, p$, $\alpha' = 1, \ldots, q$ пара двух координатных систем на афинном суперпространстве $R^{p|q}$.
Вычислим интеграл вдоль координатной формы объёма от одной и той же быстроубывающей функции $F(x, \theta)$ в двух различных системах координат $(x^i, \theta^\alpha)$ и $(x^{i'}, \theta^{\alpha'})$:

$$\int_{R^{p|q}} D(x,\theta) F(x,\theta) = \int_{R^{p|q}} \frac{D(x,\theta)}{D(x',\theta')} D(x',\theta') F\left(x\left(x',\theta'\right), \theta\left(x',\theta'\right)\right) =$$

$$\int_{R^{p|q}} \mathrm{Ber}\left(\frac{\partial\left(x,\theta\right)}{\partial\left(x',\theta'\right)}\right) D(x',\theta') f'(x',\theta') \qquad (1)$$

Напоминаем, что для быстроубывающей функции $F(x,\theta)$ и для координатной формы объёма $D(x,\theta)$

$$\int_{R^p} D(x,\theta)F(x,\theta) = \int a_{[1\dots p]}(x) d^p x\,,$$

где

$$F(x,\theta) = f(x,\theta) = \sum_{0\le k\le q} a_{\alpha_1\dots\alpha_k}(x^1,\dots,x^p)\theta^{\alpha_1}\dots\theta^{\alpha_k} = a_{\emptyset}(x) + \theta^i(x)a_i(x)$$

$$\theta^1\dots\theta^n a_{[1\dots n]}(x) \qquad (2)$$

## Example

Пусть $F(x, \theta) = \theta e^{-x^2}$ быстроубывающая функция на $1|1$ мерном аффинном суперпространстве. Рассмотрим вместе с координатами $(x, \theta)$ другую систему координат на $R^{1|1}$ — координаты $(x', \theta')$, где $\begin{cases} x = 2x' \\ \theta = 3\theta' \end{cases}$.

Интеграл от функции $F(x, \theta)$ вдоль координатной формы объёма равен

$$\int D(x, \theta) F(x, \theta) = \int e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

а интеграл $D(x, \theta)F(x, \theta)$ вдоль новой координатной формы объёма $D(x', \theta')$ равен

$$\int D(x', \theta') F(x = 2x', \theta = 3\theta') = 3 \int e^{-4x^2} dx = \frac{3}{2}\sqrt{\pi}.$$

Сравнивая эти интегралы приходим к выводу, что

$$\frac{\mathrm{D}(\mathrm{x},\boldsymbol{\theta})}{\mathrm{D}(\mathrm{x}',\boldsymbol{\theta}')} = \mathrm{Ber}\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{x}(\mathrm{x}',\boldsymbol{\theta}')}{\partial \mathrm{x}'}, & \frac{\partial \mathrm{x}(\mathrm{x}',\boldsymbol{\theta}')}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \\ \frac{\partial \boldsymbol{\theta}(\mathrm{x}',\boldsymbol{\theta}')}{\partial \mathrm{x}'}, & \frac{\partial \boldsymbol{\theta}(\mathrm{x}',\boldsymbol{\theta}')}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \end{pmatrix} = \mathrm{Ber}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\,.$$

Теперь мы готовы к формулировке свойств Березиниана.

### Definition

Пусть M чётная $p|q \times p|q$ матрица:

$$M = \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} \tag{3}$$

A это $p \times p$ матрица с чётными элементами, $\beta$ это $p \times q$ матрица с нечётными элементами, $\Gamma$ это $q \times p$ ,матрица с нечётными элементами и D $q \times q$ матрица с чётными элементами.
Определим

$$\operatorname{Ber} M = \operatorname{Ber} \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} = \frac{\det \left( A - \beta D^{-1} \Gamma \right)}{\det D} . \tag{4}$$

## Ремарка

В каком пространстве действует чётная $p|q \times p|q$ матрица? Вспомним обычную линейную алгебру: $m \times m$ матрица элементами которой являются действительные числа действует в векторном пространстве $R^m$— в пространстве упорядоченных n-ок действителйнух чисел. На самом деле $p|q \times p|q$ матрица действует в множестве $\Lambda$-точек пространства $R^{p|q}$, то есть в множестве упорядоченных наборов p чётных элементов алгебры Грассмана $\Lambda$ и q нечётных элементов этой алгебры:

$$R_{\Lambda}^{p|q} = \{(\lambda_1, \dots \lambda_p; \mu_1, \dots \mu_q), p(\lambda_i) = 0\,, p(\mu_j) = 1\} \qquad (5)$$

Мы далее ещё вернемся к этому.

Березиниан (4) имеет самое прямое отношение к задаче, которую мы решали:

**Theorem**

При замене координат $\begin{cases} x^{i'} = x^{i'}(x, \theta) \\ \theta^{\alpha'} = \theta^{\alpha''}(x, \theta) \end{cases}$ в интеграле $\int_{R^{p|q}} D(x, \theta) f(x, \theta)$ подынтегральное выражение домножается на березиниан матрицы Якоби преобразования координат:

$$\int_{R^{p|q}} D(x, \theta) f(x, \theta) = \int_{R^{p|q}} \frac{D(x, \theta)}{D(x', \theta')} D(x', \theta') f(x, \theta)\Big|_{x(x', \theta'), \theta(x', \theta')},$$

где

$$\frac{D(x, \theta)}{D(x', \theta')} = \mathrm{Ber}\left(\frac{\partial (x, \theta)}{\partial (x', \theta')}\right) = \mathrm{Ber}\begin{pmatrix} \frac{\partial x(x', \theta')}{\partial x'} & \frac{\partial \theta(x', \theta')}{\partial x'} \\ \frac{\partial x(x', \theta')}{\partial \theta'} & \frac{\partial \theta(x', \theta')}{\partial \theta'} \end{pmatrix} = \mathrm{Ber}\begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{j}'} = \frac{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{i}}(\mathrm{x}', \theta')}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{j}'}}],, \quad \beta^{\alpha}_{\mathrm{j}'} = \frac{\partial \theta^{\alpha}(\mathrm{x}', \theta')}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{j}'}}],,$$

$$\gamma^{\mathrm{i}}_{\alpha'} = \frac{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{i}}(\mathrm{x}', \theta')}{\partial \theta^{\alpha'}}],, \quad \mathrm{D}^{\alpha}_{\alpha'} = \frac{\partial \theta^{\alpha}(\mathrm{x}', \theta')}{\partial \theta^{\alpha'}}],,$$

Условие теоремы о замене переменных обеспечивает, что березиниан хорошо определен.

## Remark

Интеграл (1) посчитан в предположении

$$\operatorname{det}\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{x}'}\Big|_{\theta=0} > 0 \tag{6}$$

В общем случае надо домножать ответ на знак якобиана (6).
Remark
Вы можете часто увидеть обозначение для координатной формы объёма
$\mathrm{dx}^1 \dots \mathrm{dx}^\mathrm{p} \mathrm{d}\theta^1 \dots \mathrm{d}\theta_\mathrm{q}$
Мы не будем его использовать.

Следствие.
Березиниан мультипликативен: $\mathrm{Ber}\,(\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2) = \mathrm{Ber}\,\mathrm{M}_1 \cdot \mathrm{Ber}\mathrm{M}_2$.
`Доказательство`

$$\mathrm{Ber}\left(\frac{\partial\,(\mathrm{x},\boldsymbol{\theta})}{\partial\left(\tilde{\mathrm{x}},\tilde{\boldsymbol{\theta}}\right)}\right) = \frac{\mathrm{D}(\mathrm{x},\boldsymbol{\theta})}{\mathrm{D}(\tilde{\mathrm{x}},\tilde{\boldsymbol{\theta}})} = \frac{\mathrm{D}(\mathrm{x},\boldsymbol{\theta})}{\mathrm{D}(\mathrm{x}',\boldsymbol{\theta}')}\frac{\mathrm{D}(\mathrm{x}',\boldsymbol{\theta}')}{\mathrm{D}(\tilde{\mathrm{x}},\tilde{\boldsymbol{\theta}})} =$$

$$\mathrm{Ber}\left(\frac{\partial\,(\mathrm{x},\boldsymbol{\theta})}{\partial\,(\mathrm{x}',\boldsymbol{\theta}')}\right)\mathrm{Ber}\left(\frac{\partial\,(\mathrm{x}',\boldsymbol{\theta}')}{\partial\left(\tilde{\mathrm{x}},\tilde{\boldsymbol{\theta}}\right)}\right) \tag{7}$$

Мультипликативность практически следует из определения!

# Example

## Example

Рассмотрим 'линейное' преобразование аффинного суперпространства $\mathrm{R}^{1|1}$,

$$\boldsymbol{\varphi}_{\mathrm{M}}: \quad \begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{x}'\mathrm{a} + \boldsymbol{\theta}'\boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\theta} = \mathrm{x}'\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\theta}'\mathrm{k} \end{cases} \Leftrightarrow (\mathrm{x}, \boldsymbol{\theta}) = (\mathrm{x}', \boldsymbol{\theta}') \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} & \mathrm{k} \end{pmatrix} \tag{8}$$

которое соответствует $1|1 \times 1|1$ матрице

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} & \mathrm{k} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Матрица Якоби преобразования (8) равна матрице (9). Обратите внимание на последовательность написания термов в формуле (8). (Производная берется слева!)

Вычислим интеграл от быстро убывающей функции $F(x,\theta) = f(x) + \theta g(x)$ в координатах $(x,\theta)$ и в новых координатах $(x',\theta')$. В координатах $(x,\theta)$

$$\int D(x,\theta) f(x,\theta) = I, \ (I = \int g(x) dx).$$

В координатах $(x',\theta')$ имеем

$$I = \int D(x,\theta) f(x,\theta) = \operatorname{Ber} M \int D(x',\theta') f\left(a x' - \gamma\theta', \beta x' + k\theta'\right).$$

(Мы положили, что $\operatorname{Ber} M$ равен константе.)

Рассмотрим три подслучаи

а)

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\mathrm{a} > 0)\,. \tag{10}$$

В этом случае имеем

$$\mathrm{I} = \int \mathrm{D}(\mathrm{x}, \boldsymbol{\theta}) \mathrm{F}(\mathrm{x}, \boldsymbol{\theta}) = \mathrm{Ber}\,\mathrm{M} \int \mathrm{D}(\mathrm{x}', \boldsymbol{\theta}') \mathrm{F}\,(\mathrm{ax}, \boldsymbol{\theta}) =$$

$$\mathrm{Ber}\,\mathrm{M} \int \mathrm{D}(\mathrm{x}', \boldsymbol{\theta}')\,[\mathrm{f}(\mathrm{ax}) + \boldsymbol{\theta}\mathrm{g}(\mathrm{ax})] = \mathrm{Ber}\,\mathrm{M} \int \mathrm{g}(\tilde{\mathrm{x}}) \mathrm{d}\tilde{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{Ber}\,\mathrm{M}}{|\mathrm{a}|} \mathrm{I} \Rightarrow$$

$$\mathrm{Ber}\,\mathrm{M} = \mathrm{Ber} \begin{pmatrix} \mathrm{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{a}\,.$$

Перейдем ко второму подслучаю: б)

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{k} \end{pmatrix} \tag{11}$$

В этом случае имеем

$$\mathrm{I} = \int \mathrm{D}(\mathrm{x}, \boldsymbol{\theta}) \mathrm{F}(\mathrm{x}, \boldsymbol{\theta}) = \operatorname{Ber} \mathrm{M} \int \mathrm{D}(\mathrm{x}', \boldsymbol{\theta}') \mathrm{F}\left(\mathrm{x}, \mathrm{k}\boldsymbol{\theta}'\right) =$$

$$\operatorname{Ber} \mathrm{M} \int \mathrm{D}(\mathrm{x}', \boldsymbol{\theta}') \left[\mathrm{f}(\mathrm{x}) + \mathrm{k}\boldsymbol{\theta}' \mathrm{g}(\mathrm{x})\right] = \operatorname{Ber} \mathrm{M} \cdot \mathrm{k} \int \mathrm{f}_1(\mathrm{x}) \mathrm{dx} = \mathrm{kI} \Rightarrow$$

$$\operatorname{Ber} \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{k} \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathrm{k}}\,.$$

Теперь перейдём к общему случаю:
c)

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} & \mathrm{k} \end{pmatrix} \tag{12}$$

Имеем

$$\mathrm{I} = \int \mathrm{D}(\mathrm{x}, \boldsymbol{\theta})\mathrm{F}(\mathrm{x}, \boldsymbol{\theta}) = \mathrm{Ber}\,\mathrm{M} \int \mathrm{D}(\mathrm{x}', \boldsymbol{\theta}')\mathrm{F}\left(\mathrm{a}\mathrm{x}' - \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\beta}\mathrm{x}' + \mathrm{k}\boldsymbol{\theta}'\right) =$$

$$\mathrm{Ber}\,\mathrm{M} \int \mathrm{D}(\mathrm{x}, \boldsymbol{\theta})\mathrm{F}\left(\mathrm{a}\mathrm{x} - \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}\mathrm{x} + \mathrm{k}\boldsymbol{\theta}\right).$$

(мы положим $\mathrm{a} > 0$) Продолжим вычисления:

$$\mathrm{I} = \mathrm{Ber\,M}\left[\int \mathrm{D}(\mathrm{x}, \boldsymbol{\theta})\mathrm{f}(\mathrm{ax} - \boldsymbol{\gamma\theta}) + (\boldsymbol{\beta}\mathrm{x} + \mathrm{k}\boldsymbol{\theta})\mathrm{g}(\mathrm{ax} - \boldsymbol{\gamma\theta})\right],.$$

Заметим, что $\int \mathrm{D}(\mathrm{x}, \boldsymbol{\theta})\mathrm{f}(\mathrm{ax} - \boldsymbol{\gamma\theta}) = 0$,так как $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ быстроубывающая функция:

$$\int \mathrm{D}(\mathrm{x}', \boldsymbol{\theta}')\mathrm{f}(\mathrm{ax}' - \boldsymbol{\gamma\theta}') = -\frac{1}{\mathrm{a}}\int \boldsymbol{\gamma}\mathrm{f}'(\mathrm{x})\mathrm{dx} = 0\,,$$

значит

$$\mathrm{I} = \mathrm{Ber\,M}\left[\int \mathrm{D}(\mathrm{x}, \boldsymbol{\theta})\mathrm{f}(\mathrm{ax} - \boldsymbol{\gamma\theta}) + (\boldsymbol{\beta}\mathrm{x} + \mathrm{k}\boldsymbol{\theta})\mathrm{g}(\mathrm{ax} - \boldsymbol{\gamma\theta})\right] =$$

$$\mathrm{Ber\,M}\int \mathrm{D}(\mathrm{x}, \boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{\beta}\mathrm{x} + \mathrm{k}\boldsymbol{\theta})\mathrm{g}(\mathrm{ax} - \boldsymbol{\gamma\theta})\,.$$

$$I = \mathrm{Ber}\, M \int D(x,\theta)(\beta x + k\theta)\left[g(ax) - \gamma\theta g'(ax)\right] =$$

$$\mathrm{Ber}\, M \left[\int D(x,\theta)\theta k g(ax) - \int D(x,\theta)\theta\beta x\gamma g'(ax)\right] =$$

$$\mathrm{Ber}\, M \left[\frac{k}{a}\int g(x)dx - \frac{\beta\gamma}{a^2}\int x g'(x)dx\right] =$$

$$\mathrm{Ber}\, M \left[\frac{k}{a}\int g(x)dx + \frac{\beta\gamma}{a^2}\int g(x)dx\right] =$$

$$\mathrm{I}\cdot\mathrm{Ber}\,\mathrm{M}\left[\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{a}}+\frac{\beta\gamma}{\mathrm{a}^2}\right]=\mathrm{I}\Rightarrow$$

$$\mathrm{Ber}\begin{pmatrix}\mathrm{a} & \beta\\ \gamma & \mathrm{k}\end{pmatrix}=\frac{1}{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{a}}+\frac{\beta\gamma}{\mathrm{a}^2}}=\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{ka}+\beta\gamma}=\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{k}}\left(1-\frac{\beta\gamma}{\mathrm{ka}}\right).$$

Мы видим, что ответ совпадает!:

$$\mathrm{Ber}\begin{pmatrix}\mathrm{a} & \beta\\ \gamma & \mathrm{k}\end{pmatrix}=\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{k}}-\frac{\beta\gamma}{\mathrm{k}^2}.$$

В заключение два упражнения

$$\int e^{-A(x,x)} d^n x = \int e^{-\lambda_1 x_1^2 - \dots - \lambda_n x_n^2} d^n x = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}.$$

Что будет если поменять чётность переменных в этой формуле?

$$\int \mathrm{e}^{-\mathrm{B}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta})} \mathrm{d}^{\mathrm{n}} \boldsymbol{\theta} = \mathrm{CPfaffianB} = \sqrt{\mathsf{det}\,\mathrm{B}}$$