

Лекции по суперматематике

Оганес М. Худавердян

1 марта 2021 г.

Это конспект лекций на 20 февраля 2021
ИППИ, ИТМФ МГУ, мехмат МГУ

Содержание

1	Двойственное описание для точек и отображений	1
2	Отображения	3
3	Суперпространство	6

Очень грубо говоря, суперматематика, это наука в которой используются коммутирующие и антикоммутирующие переменные.

Обычные (коммутирующие) переменные $\{x^i\} = \{x^1, x^2, \dots, x^m\}$ принимают значения в числах, им можно сопоставить *точки*.

Антикоммутирующие переменные $\{\theta^a\} = \{\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n\}$ это символы, такие что

$$\theta^a \theta^b = -\theta^b \theta^a, \quad (x^i x^j = x^j x^i, x^i \theta^a = \theta^a x^i)$$

Им трудно сопоставить точки¹ Чтоб работать в суперматематике, нам надо освоить двойственный язык.

1 Двойственное описание для точек и отображений

1.1 Точки

Пусть \mathbf{R}^p - p -мерное аффинное пространство, (множество точек). Обозначим $A = C^\infty(\mathbf{R}^m)$ алгебру гладких функций на \mathbf{R}^m .

Мы иногда будем использовать алгебру $C(\mathbf{R}^m)$ алгебру непрерывных функций на \mathbf{R}^m .

Определение 1. каждой точке $P \in \mathbf{R}^p$ сопоставим гомоморфизм σ_P , такой, который сопоставляет каждой функции f её значение в этой точке:

$$\mathbf{R}^m \ni P \mapsto \sigma_P: \sigma_P(f) = f(P).$$

Понятно, что это гомоморфизм алгебры функций в числа, менее очевидно, что верно и обратное:

Теорема 1. Пусть D -область в \mathbf{R}^m , пусть σ_D произвольный ненулевой гомоморфизм алгебры функций $C^\infty(D)$ в \mathbf{R} :

$$\sigma_D \neq 0, \sigma_D(f + g) = \sigma_D(f) + \sigma_D(g), \sigma_D(fg) = \sigma_D(f)\sigma_D(g).$$

Тогда существует такая точка $P \in D$, что для любой функции $f \in C^\infty(D)$

$$\sigma_D(f) = f(P).$$

Иными словами множество точек области $D =$ множеству гомоморфизмов из алгебры функций на D в вещественные числа.

Эта теорема позволяет реконструировать точки по алгебре функций $A = C^\infty(D)$. Заметим также, что она позволяет восстановить значение функции в точке. Если точка, это гомоморфизм σ алгебры функций в числа, то значение данной функции $f \in A$ на данной точке σ равно значению 'точки' σ на элементе f .

¹мы это сделаем в дальнейшем, используя язык так называемых Λ -точек.

Докажем эту теорему.

Доказательство теоремы.

Для простоты рассмотрим случай области $D = (0, 1)$.

Пусть σ гомоморфизм алгебры $A = C^\infty(0, 1)$ в \mathbf{R} . Пусть значение этого гомоморфизма на функции $f = x$ равно s : $\sigma(x) = s$. Покажем, что число $s \in (0, 1)$. Действительно, если $s \notin (0, 1)$, то функция $h = \frac{1}{x-s}$ хорошо определена и $\sigma(x-s) = 0$. Мы видим, что

$$\sigma\left((x-s)\frac{1}{x-s}\right) = \sigma(x-s)\sigma\left(\frac{1}{x-s}\right) = 0$$

и с другой стороны

$$\sigma\left((x-s)\frac{1}{x-s}\right) = 1.$$

Противоречие, значит $s \in [0, 1]$.

Теперь покажем, что для произвольной гладкой функции $g \in C^\infty(0, 1)$, выполняется условие $\sigma(g) = g(s)$. Пусть $\sigma(g) = t$. Мы хотим показать, что $t = g(s)$. Рассмотрим функцию

$$r = (x-s)^2 + (g-t)^2.$$

Легко понять, что $\sigma(r) = 0$, значит функция r необратима, (так как функция $\frac{1}{r}$ не существует). Мы приходим к выводу, что функция $r(\cdot)$ обращается в нуль, хотя бы в одной из точек интервала $(0, 1)$. Но если функция $r(x)$ обращается в нуль, то это может быть лишь точка $x = s$. Значит $g(s) = t$. ■

Exercise 1

Пройдет ли предыдущее доказательство, если алгебру гладких функций в $C^\infty(0, 1)$ заменить на алгебру непрерывных функций $C^0(0, 1)$.

Exercise 2

Пройдёт ли предыдущее доказательство если алгебру гладких функций в $C^\infty([0, 1])$ заменить на произвольную алгебру функций, которые *разделяют* точки отрезка $[0, 1]$.

Exercise 3

Найти и обсудить 'дырку' в следующем рассуждении

Пусть σ гомоморфизм, такой, что $\sigma(x) = s \in \mathbf{R}$. Тогда очевидно, что $\sigma(x^2) = s^2$ и для любого натурального n , $\sigma(x^n) = s^n$. Значит для любого многочлена $P(x)$, $\sigma(P(x)) = P(s)$. Теперь теорема Вейерштрасса об аппроксимации гладкой функции полиномами даёт, что для любой гладкой функции $g(x)$, $\sigma(g(x)) = g(s)$. ■

2 Отображения

Пусть снова \mathbf{R}^p - p -мерное аффинное пространство, (множество точек). Обозначим также $A = C^\infty(\mathbf{R}^m)$ алгебру гладких функций на \mathbf{R}^m .

Определение 2. каждому отображению $F: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ сопоставим гомоморфизм τ_F , такой, который сопоставляет каждой гладкой функции на \mathbf{R}^m ($f \in C^\infty(\mathbf{R}^m)$) гладкую функцию на \mathbf{R}^n ($\tau_F(f) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$) такую, что значение функции $\tau_F(f)$ на произвольной точке $P \in \mathbf{R}^m$ равно значению функции f на точке $Q = F(P)$:

$$\tau_F(f)(P) = f(F(P)) .$$

Замечание 1. Правило 'против шёрстки' Отображения F и гомоморфизм функций τ_F идут в противоположных изложениях ('против шёрстки').

Замечание 2. Гомоморфизм (2) построенный по отображению F обозначают F^* ,

Так же как и в случае точек верно и обратное

Теорема 2. Пусть U -область в \mathbf{R}^m и V -область в \mathbf{R}^n , и τ гомоморфизм (против 'шёрстки') алгебры $C^\infty(V)$ в алгебру $C^\infty(U)$. Тогда существует отображение $F: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ такое, что

$$\tau = F^* , \text{ то есть для любой функции } f \in C^\infty(D) \tau(f) = f(F(P)) .$$

Иными словами множество отображений = множеству гомоморфизмов из алгебры функций на V в алгебру функций на U .

Докажем эту теорему.

Доказательство теоремы.

Пусть P произвольная точка на U . Возьмём произвольную гладкую функцию f на V . Значение образа этой функции под действием гомоморфизма τ на данной точке P задаёт гомоморфизм алгебры гладких функций на V в вещественные числа, то есть согласно теореме 2 мы приходим к точке Q такой что

$$\tau(f)(P) = f(Q)$$

Это равенство приводит к определению точки $Q = F(P)$. Она задаёт гомоморфизм алгебры гладких функций

Пример 2.1. Пусть φ отображение пространств

$$\varphi: \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2: \begin{cases} x = u \\ y = \frac{v}{u} \end{cases} \quad (1)$$

Что тут написано?

Мы 'привыкли' 'читать эту формулу так

точке с координатами (u, v) сопоставляется точка с координатами (x, y)

Однако другой читатель скажет:

Формула определяет гомоморфизм гладких функций на плоскости \mathbf{R}^2 , зависящих от x, y в гладкие функции на плоскости \mathbf{R}^2 , зависящие от u, v . Гомоморфизм задан на образующих: Функция x переходит в функцию u и функция y переходит в функцию $\frac{v}{u}$; любая гладкая функция $f(x, y)$ переходит в гладкую функцию $f(x, y)|_{x=u, y=\frac{v}{u}}$.

Кто прав? Оба правы. Формулу можно читать по разному!

Пример 2.2. Пусть φ отображение пространств

$$\varphi: \mathbf{R}^1 \mapsto \mathbf{R}^2: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad (2)$$

Что тут написано?

Мы 'привыкли' 'читать эту формулу так

точке t на прямой сопоставляется точка с координатами

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

Другой скажет: в этой формуле определяется гомоморфизм функций на плоскости \mathbf{R}^2 в функции на \mathbf{R} . Формулы задают значения гомоморфизма на образующих: функция x переходит в функцию $\cos t$ и функция y переходит в функцию $\sin t$. Конечно, закон определяет образ любой (гладкой) функции. Например, функция $\frac{e^{-2xy}}{x^4+y^4}$ перейдет в функцию

$$\frac{e^{-2 \cos t \sin t}}{\cos^4 t + \sin^4 t} = \frac{e^{-\sin 2t}}{1 - \frac{1}{2} \sin 2t},$$

и для любой гладкой функции $f = f(x, y)$

$$\sigma(f) = f(x, y)|_{x=\cos t, y=\sin t}$$

И в заключение

задача-шутка

Рассмотрим набор разных простых чисел $\{p_i\}$, $i = 1, \dots, N$, $p_i \neq p_j$; также рассмотрим набор натуральных чисел, $\{a_i\}$, $i = 1, \dots, N$, так что каждое a_i меньше p_i . Найти число K , которое при делении на простое число p_i даст остаток a_i .

Вы скажете: это китайская теорема об остатках. Какое отношение она имеет к курсу?

Указание к решению

Используя идеи двойственности можно свести эту задачу к задаче построения интерполяционного многочлена Лагранжа.

n различных точек на прямой — n различных простых

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$

$P(x)$ полином — N натуральное число

$P(x_i) = y_i$ — N даёт остаток a_i при делении на p_i

Если полином $P(x)$ равен y_i в точке x_i то многочлен

$$ch1P(x) = \sum_i y_i h_i(x), \quad (3)$$

удовлетворяет соотношению $P(x_i) = y_i$, то есть этот многочлен достаавляет решение задачи о построении интерполяционного многочлена Лагранжа.

если многочлен $h_i(x)$ такой, что

$$h_m(x_j) = \delta_{mj}, \text{ то есть } h_m(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x = x_m \\ 0 & \text{если } x = x_j \text{ при любом } j \neq m \end{cases}, \quad (4)$$

Построим многочлен (4), затем построим аналогичный объект в числах, затем переведите формулу (??) из многочленов в числа.

Рассмотрим многочлен $Q(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$. Этот многочлен зануляется во всех точках $\{x_1, \dots, x_n\}$, а вот многочлен $H_i(x) = \frac{Q(x)}{x - x_i}$ зануляется во всех точках $\{x_1, \dots, x_n\}$, кроме быть может точки x_i и в этой точке он равен

$$H_i(x_i) = \frac{Q(x)}{x - x_i} \Big|_{x_i} = \frac{Q(x) - Q(x_i)}{x - x_i} = Q'(x_i) \quad (5)$$

Замечание 3. Обратим внимание, что мы в формуле (6) определили 'производную' в кольце целых чисел.

Теперь ясно, что в (4)

$$h_m(x) = \frac{H_m(x)}{H'_m(x_m)} = \frac{\prod_{i \neq m}(x - x_i)}{\prod_{i \neq m}(x_m - x_i)} = \begin{cases} 1 & \text{если } x = x_m \\ 0 & \text{если } x = x_j \text{ при любом } j \neq m \end{cases}, \quad (6)$$

пр

Это искомый базисный многочлен. Его легко перевести в числа.

Например кубический многочлен, который равен y_i в точке x_i ($i = 1, 2, 3$ и $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$) равен

$$P(x) = \sum y_m \frac{\prod_{i \neq m}(x - x_i)}{\prod_{i \neq m}(x_m - x_i)} = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} + \\ + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} + y_4 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} \quad (7)$$

Перепишем эту формулу для чисел получим

$$P = \sum a_m \prod_{i \neq m} p_i \left[\prod_{i \neq m} p_i \right]_{\text{modulo } p_m}^{-1} \quad (8)$$

Например, $p_i = 2, 3, 5, 7$

$$= a_1 3 \cdot 5 \cdot 7 [3 \cdot 5 \cdot 7]_{\text{modulo } 2}^{-1} + a_2 2 \cdot 5 \cdot 7 [2 \cdot 5 \cdot 7]_{\text{modulo } 3}^{-1} + a_3 2 \cdot 3 \cdot 7 [2 \cdot 3 \cdot 7]_{\text{modulo } 5}^{-1} + a_4 2 \cdot 3 \cdot 5 [2 \cdot 3 \cdot 5]_{\text{modulo } 7}^{-1} = \\ a_1 \cdot 105 [105]_{\text{modulo } 2}^{-1} + a_2 70 [70]_{\text{modulo } 3}^{-1} + a_3 42 [42]_{\text{modulo } 5}^{-1} + a_4 30 [30]_{\text{modulo } 7}^{-1} = \\ a_1 \cdot 105 \cdot 1 + a_2 \cdot 70 \cdot 1 + a_3 \cdot 42 \cdot 3 + a_4 \cdot 30 \cdot 4 = \\ 105a_1 + 70a_2 + 126a_3 + 120a_4$$

Это число при делении на 2 даст остаток $_1$ при делении на 3 даст остаток $_2$ при делении на 5 даст остаток $_3$ и при делении на 7 даст остаток $_4$. ■

Лекция 20 февраля

3 Суперпространство

Немного забегаая вперед дадим определение в духе идей двойственности — — — :

Определение 3. Алгебра гладких функций $\mathbf{R}(x, \xi)$ от коммутирующих переменных x^1, \dots, x^p и антикоммутирующих переменных ξ^1, \dots, ξ^q это алгебра функций на $p|q$ -мерном линейном пространстве $\mathbf{R}^{p|q}$.

Вместо того чтоб определять пространство мы определяем алгебру функций на нём. Например вместо

\mathbf{R}^p рассматривается алгебра гладких функций от x^1, \dots, x^p .

Перейдём к разъяснению.

3.1 Алгебра Грассмана

Обозначим символом Λ_q алгебру Грассмана с q антикоммутирующими свободными переменными $\theta^1, \dots, \theta^q$, то есть

$$\theta^i \theta^k + \theta^k \theta^i = 0, \quad (9)$$

и любое другое соотношение на θ^i является следствием этих соотношений ²

Произвольный элемент λ алгебры Λ^q может быть записан в виде

$$\lambda = \sum_{0 \leq k \leq q} a_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_k},$$

где коэффициенты антисимметричны при перестановке индексов.

Элемент $a_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_k}$ имеет чётность $p(s) = (-1)^k$.

Всякий элемент алгебры Грассмана можно однозначно представить в виде суммы чётного и нечётного элементов этой алгебры.

Для всякого элемента λ алгебры Грассмана Λ^q ,

$$\lambda = m(\lambda) + n(\lambda),$$

где $m(\lambda)$ -обычное число и $n(\lambda)$ -нильпотент.

Exercise Назовём элемент алгебры Грассмана *целым* если все коэффициенты в разложении (3.1) целые.

Доказать, что если λ целый нильпотентный элемент алгебры Грассмана, то для любого натурального n , $\frac{\lambda^n}{n!}$ тоже цел и нильпотентен.

Наряду с алгеброй Грассмана Λ^q мы будем рассматривать также алгебру $\Lambda_{p|q}$ как алгебру функций от p коммутирующих переменных x^1, \dots, x^p и q антикоммутирующих переменных $\theta^1, \dots, \theta^q$. Каждый элемент алгебры $\Lambda_{p|q}$ (мы будем эту алгебру называть алгеброй Березина) может быть представлен в виде (3.1), где коэффициенты $a_{\alpha_{i_1} \dots i_k}$ являются гладкими функциями от переменных x^1, \dots, x^p : для любого $w \in \Lambda_{p|q}$

$$\lambda = \sum_{0 \leq k \leq q} a_{\alpha_1 \dots \alpha_k} (x^1, \dots, x^p) \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_k}.$$

²то есть для любого многочлена P такого, что $P = 0$, многочлен P принадлежит идеалу тензорной алгебры с образующими θ^i , образованному левыми частями соотношений (9).

Чётность вводится естественным образом.

Отметим, что выражение осмысленно при любой замене переменных, сохраняющих чётность.

Exercise Как преобразуется функция $g = \cos x$ при замене координат $x = x' + \varepsilon^1 \varepsilon^2$.

Мы снова возвращаемся к определению суперпространства:

Определение 4. Алгебра гладких функций $\mathbf{R}(x, \xi)$ от коммутирующих переменных x^1, \dots, x^p и антикоммутирующих переменных $\theta^1, \dots, \theta^q$, то есть алгебра Березина $\Lambda_{p|q}$, это алгебра функций на $p|q$ -мерном линейном пространстве $\mathbf{R}^{p|q}$.

3.2 Дифференцирование и интегрирование

Мы подсчитаем для

3.2.1 Взятие производной.

Пусть $\theta^1, \dots, \theta^q$ набор антикоммутирующих переменных в алгебре Березина $\Lambda_{p|q}$. Выберем любую из этих переменных, например переменную θ^{i_0} .

Легко понять, что для любой функции $f = f(x^i, \theta^\alpha) \in \mathcal{L}_{p|q}$

$$f(x^i, \theta^\alpha) = \theta^{i_0} g + h$$

где функции g и h не зависят от θ^{i_0} . Таким образом мы приходим к естественному определению частной производной по антикоммутирующей переменной.

$$\frac{\partial}{\partial \theta^{i_0}} f(x^i, \theta^\alpha) = g, .$$

Соблюдается правило Лейбница (со знаком)

$$\frac{\partial}{\partial \theta^a} (fg) = \frac{\partial f}{\partial \theta^a} g + (-1)^p (fg) \frac{\partial g}{\partial \theta^a}. \quad (10)$$

Замечание 4. Пусть u какой нибудь элемент из множества $(x^1, \dots, x^n, \theta^1, \dots, \theta^q)$ и какой нибудь другой элемент из множества $(x^1, \dots, x^n, \theta^1, \dots, \theta^q)$.

Exersize Показать, что

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} = (-1)^{p(u)p(v)} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u}$$

Exercise Пусть $f(x, \theta)$ —элемент алгебры Березина, гладкая функция он , θ . Написать формулу Тэйлора.

Взятие производной композиции функций.

3.3 Интегрирование

Что такое интеграл?

Определение 5. Пусть ∂ операция взятия производной. Тогда интегрирование это линейная операция которая зануляется на образе ∂ :

$$I(\partial f = 0)$$

Очевидно, что интеграл как мы его учили тому свойству удовлетворяет. Можно показать, что на пространстве функций с компактным носителем, это определение приводит к обычному.

Хороший пример, это интеграл Коши от аналитической функции.

В итоге мы приходим к

Определение 6. Для антикоммутирующей переменной θ

$$\int \theta d\theta = 0.$$

Лекция 1 марта

3.4 Отображения и замены переменных

Мы вернёмся к интегралу, прежде поговорив немножко об отображениях и заменах переменных...

Напомним, что алгебра Березина $\Lambda_{r|s}$ это алгебра $C^\infty(\mathbf{R}^{r|s})$ гладких функций на $\mathbf{R}^{r|s}$. Каждый элемент алгебры Березина $\Lambda_{r|s}$ представим в виде

$$f(x, \theta) = a_\emptyset(x) + a_i(x)\theta^i + \dots = \sum_{0 \leq k \leq q} a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x^1, \dots, x^r) \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_k},$$

где $\{\theta^1, \dots, \theta^s\}$, это набор антикоммутирующих переменных и $\{x^1, \dots, x^s\}$ это стандартные координаты ³ в \mathbf{R}^s и коэффициентные функции это гладкие функции от координат $\{x^1, \dots, x^s\}$.

Замечание 5. Напомнить определение чётного и нечётного элементов

Замечание 6. Введённые выше координаты алгебры Березина, мы иногда будем называть *образующими* этой алгебры.

³например, в качестве таковых можно рассмотреть координаты $x^i(a^1, \dots, a^n) = a^i$, где \mathbf{R}^r рассматривается как множество s -ок действительных чисел.

Мы сейчас определим гладкое отображение Φ суперпространства $\mathbf{R}^{m|n}$ в суперпространство $\mathbf{R}^{p|q}$, которое согласно нашей философии определяется 'против шерстки'— гомоморфизмом алгебры $\Lambda_{p|q}$ в алгебру $\Lambda_{m|n}$.

Теорема 3. Пусть $\{f^a(x, \theta)\}$, $a = 1, \dots, p$ произвольный упорядоченный набор чётных функций алгебры $\Lambda_{m|n}$ в количестве p штук и пусть $\{\varphi^\alpha(x, \theta)\}$, $\alpha = 1, \dots, q$ произвольный набор нечётных функций алгебры $\Lambda_{m|n}$ в количестве q штук.

Тогда существует гомоморфизм $\alpha: \Lambda_{p|q} \mapsto \Lambda_{m|n}$ такой, что

$$\begin{cases} \alpha(y^a) = f^a(x, \theta) & (a = 1, \dots, p) \\ \alpha(\eta^\mu) = \phi^\mu(x, \theta) & (\mu = 1, \dots, q) \end{cases} \quad (11)$$

и этот гомоморфизм единственен.

Значение этого гомоморфизма на любой функции $f \in \Lambda_{p|q}$ равно

$$\begin{aligned} \alpha[f] = \alpha \left[f = \sum_{0 \leq k \leq q} a_{\mu_1 \dots \mu_k}(y^1, \dots, y^p) \eta^{\mu_1} \dots \eta^{\mu_k} \right] = \alpha[f = a_\emptyset(y) + a_{\mu\nu}(y) \eta^\nu \eta^\mu + \dots] = \\ a_\emptyset(f_\emptyset^a(x) + f_{\alpha\beta}^a(x) \theta^\beta \theta^\alpha + \dots) + \\ + a_{\mu\nu}(f_\emptyset^a(x) + f_{\alpha\beta}^a(x) \theta^\beta \theta^\alpha + \dots) [\Phi_\alpha^\mu(x) \theta^\alpha + \dots] [\Phi_\beta^\nu(x) \theta^\alpha + \dots] + \dots \end{aligned}$$

Замечание 7. Эта теорема позволяет определить отображение Φ суперпространства $\mathbf{R}^{m|n}$ в суперпространство $\mathbf{R}^{p|q}$ с помощью упорядоченного набора чётных гладких функций $\{\{f^a(x, \theta)\}\}$, $a = 1, \dots, p$ и нечётных гладких функций $\{\{\phi^a(x, \theta)\}\}$, $a = 1, \dots, q$

Отображение Φ определяется с помощью гомоморфизма (11).

Замечание 8. Сформулированная выше Теорема 3 даёт право отождествлять стандартные координаты на $\mathbf{R}^{r|s}$ и образующими алгебры Березина $\Lambda_{r|s}$.

Определение 7. Мы будем называть иногда $\mathbf{R}^{p|q}$ $p|q$ -мерным аффинным суперпространством

Пусть $\{x^i, \theta^\alpha\}$, $i = 1, \dots, r$, $\alpha = 1, \dots, s$ стандартные координаты на $\mathbf{R}^{r|s}$ = образующие алгебры Березина $\Lambda_{r|s}$; каждый элемент $\Lambda_{r|s}$ представим в виде

$$f(x, \theta) = a_\emptyset(x) + a_i(x) \theta^i + \dots = \sum_{0 \leq k \leq q} a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x^1, \dots, x^p) \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_k}.$$

Чтобы определить замену переменных в суперпространстве мы следуя нашей философии дуальности определим *обратимое отображение* алгебры функций на себя.

Рассмотрим отображение

$$\begin{cases} x^{i'} = f^{i'}(x, \theta), i = 1, \dots, r \\ \theta^{i'} = \varphi^{i'}(x, \theta), i = 1, \dots, s \end{cases} \quad (12)$$

Каково условие, что оно обратимо?

Имеет место следующая теорема

Теорема 4. Произвольное преобразование переменных (12) обратимо если и только если выполняются следующие условия:

- отображение $\mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^r$ задаваемое формулами (12)

$$x^{i'}|_{\theta=0} = f^{i'}(x, \theta)|_{\theta=0} \quad \text{обратно} \quad (13)$$

- $s \times s$ -матрица

$$\frac{\partial \theta^{i'}}{\partial \theta^j}|_{\theta=0} = \frac{\partial \varphi^{i'}(x, \theta)}{\partial \theta^j}|_{\theta=0}$$

обратима

Замечание 9. Мы рассматриваем только гладкие функции. Это неявно используется в формулировках теорем.

Пример 3.1. Рассмотрим аффинное суперпространство $\mathbf{R}^{1|3}$. Ему соответствует алгебра гладких функций на прямой со значениями в Грассмановой алгебре. Λ_2 (Это то же, что алгебра Березина $\Lambda_{1|2}$) Рассмотрим гладкую замену переменных:

$$\begin{aligned} x' &= x + \theta^1 \theta^2 \\ \theta^{1'} &= \theta^1 + \sin x \theta^1 \theta^2 \theta^3 \\ \theta^{2'} &= 2\theta^2 \\ \theta^{3'} &= \theta^3 \end{aligned} \quad (14)$$

Вначале отметим, что условия теоремы соблюдаются: отображение

$$x'|_{\theta=0} = (x + \theta^1 \theta^2)|_{\theta=0} = x$$

поэтому условие (13) очевидно соблюдается; второе условие легко проверить: матрица (4) имеет вид

$$\frac{\partial \theta^{i'}}{\partial \theta^j}|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta^{1'}}{\partial \theta^1} & \frac{\partial \theta^{1'}}{\partial \theta^2} & \frac{\partial \theta^{1'}}{\partial \theta^3} \\ \frac{\partial \theta^{2'}}{\partial \theta^1} & \frac{\partial \theta^{2'}}{\partial \theta^2} & \frac{\partial \theta^{2'}}{\partial \theta^3} \\ \frac{\partial \theta^{3'}}{\partial \theta^1} & \frac{\partial \theta^{3'}}{\partial \theta^2} & \frac{\partial \theta^{3'}}{\partial \theta^3} \end{pmatrix} \Big|_{\theta^i=0} = \begin{pmatrix} 1 + \sin x \theta^2 \theta^3 & 0 & 0 \\ 1 - \sin x \theta^1 \theta^3 & 2 & 0 \\ 1 + \sin x \theta^1 \theta^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big|_{\theta^i=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big|_{\theta^i=0} =$$

и очевидно обратима.

Проверим, что замена (14) обратима. Нам удобно обозначить $\theta^1 \rightarrow \theta$, $\theta^2 \rightarrow \eta$, $\theta^3 \rightarrow \xi$. Имеем

$$\begin{cases} x' = x + \theta \eta \\ \theta' = \theta + \sin x \theta \eta \xi \\ \eta' = 2\eta \\ \xi' = \xi \end{cases}$$

Имеем

$$\xi = \xi', \eta = \frac{1}{2}\eta', \theta = \theta' - \sin x \theta \eta \xi =$$

$$\theta' - \frac{1}{2} \sin x \theta \eta' \xi' = \theta' - \frac{1}{2} \sin x [\theta' - \sin x \theta \eta \xi] \eta' \xi' = \theta' - \frac{1}{2} \sin x \left[\theta' - \frac{1}{2} x^3 \theta' \eta' \xi' \right] \eta' \xi' = \theta' - \frac{1}{2} \sin x \theta' \eta' \xi'$$

и

$$x = x' - \theta \eta = x' - \left[\theta' - \frac{1}{2} \sin x \theta' \eta' \xi' \right] \frac{1}{2} \eta' = x' - \frac{1}{2} \theta' \eta'$$

3.5 Интегрирование функции на суперпространстве $\mathbf{R}^{p|q}$

Снова вернёмся к интегрированию.

Мы определим интеграл от быстроубывающей функции по пространству $\mathbf{R}^{p|q}$.

Определение 8. Пусть $\{x^i, \theta^\alpha\}$. $i = 1, \dots, p$, $\alpha = 1, \dots, q$ координаты аффинного суперпространства $\mathbf{R}^{p|q}$. Пусть

$$f(x, \theta) = \sum_{0 \leq k \leq q} a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x^1, \dots, x^p) \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_k} = a_\emptyset(x) + \theta^i(x) a_i(x) + \dots + \theta^1 \dots \theta^n a_{[1 \dots n]}(x) \quad (15)$$

произвольная *быстроубывающая* функция на $\mathbf{R}^{p|q}$, то есть функция, то есть любая производная этой функции убывает быстрее чем любая степень x :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n D^m f = 0.$$

Тогда

$$\int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x, \theta) f = \int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x, \theta) \theta^1 \dots \theta^n a_{[1 \dots n]}(x) = (-1)^s \int_{\mathbf{R}^p} dx^1 \dots dx^n a_{[1 \dots n]}(x) =$$

Замечание 10. Мы немного странно пишем разложение (15)

Exersize

Доказать, что условие быстрого убывания не зависит от системы координат.

(x^i, θ^α) , $i = 1, \dots, p$, $\alpha = 1, \dots, q$ и $(x^{i'}, \theta^{\alpha'})$, $i' = 1, \dots, p$, $\alpha' = 1, \dots, q$ пара двух координатных систем на аффинном суперпространстве $\mathbf{R}^{p|q}$,

3.6 Березиниан

На прошлой неделе мы сформулировали идею интеграла (см. 6). Однако затем, мы остановились на замене переменных и только потом снова перешли к интегрированию. Почему?

Пусть (x^i, θ^α) , $i = 1, \dots, p$, $\alpha = 1, \dots, q$ и $(x^{i'}, \theta^{\alpha'})$, $i' = 1, \dots, p$, $\alpha' = 1, \dots, q$ пара двух координатных систем на аффинном суперпространстве $\mathbf{R}^{p|q}$.

Пусть f быстроубывающая функция на $\mathbf{R}^{p|q}$.

Вычислим интеграл Березина в системах координат (x^i, θ^α) и $(x^{i'}, \theta^{\alpha'})$:

$$\int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x, \theta) f(x, \theta) = \int_{\mathbf{R}^{p|q}} \frac{D(x, \theta)}{D(x', \theta')} D(x', \theta') f(x(x', \theta'), \theta(x', \theta')) = \text{up to a sign}$$

$$\int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x', \theta') f'(x', \theta') \text{Ber} \left(\frac{\partial(x, \theta)}{\partial(x', \theta')} \right)$$

Таким образом мы пришли к Березиниану.

3.6.1 Один интеграл

Пусть $||B_{ik}||$ антисимметрическая $q \times q$ матрица. Рассмотрим функцию

$$f = e^{B_{ik} \theta^i \theta^k}.$$

Вычислить интеграл от этой функции по $\mathbf{R}^{0|q}$.