Лекции по суперматематике

Оганес М. Худавердян

26 апреля 2021 г.

Это конспект лекций на 15 апреля 2021
ИППИ, ИТМФ МГУ, мехмат МГУ

Содержание

Очень грубо говоря, суперматематика, это наука в которой используются коммутирующие и антикоммутирующие переменные.

Обычные (коммутирующие) переменные $\{x^i\} = \{x^1, x^2, \ldots, x^m\}$ принимают значения в числах, им можно сопоставить *точки.*

Антикоммутирующие переменные $\{\theta^a\} = \{\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^n\}$ это символы, такие что

$$\theta^a\theta^b = -\theta^b\theta^a, \quad \left(x^i x^j = x^j x^i\,, x^i\theta^a = \theta^a x^i\right)$$

Им трудно сопоставить точки [1] Чтоб работать в суперматематике, нам надо освоить двойственый язык.

1 Двойственное описание для точек и отображений

1.1 Точки

Пусть $\mathbf{R}^p$- p-мерное аффинное пространство, (`множество точек`). Обозначим $A = C^\infty(\mathbf{R}^m)$ алгебру гладких функций на $\mathbf{R}^m$.

Мы иногда будем использовать алгебру $C(\mathbf{R}^m)$ алгебру непрерывных функций на $\mathbf{R}^m$.

Определение 1. каждой **точке** $P \in \mathbf{R}^p$ сопоставим гомоморфизм σ_P, такой, который сопоставляет каждой функции f её значение в этой точке:

$$\mathbf{R}^m \ni P \mapsto \sigma_P \colon \sigma_P(f) = f(P)\,.$$

Понятно, что это гомоморфизм алгебры функций в числа, менее очевидно, что верно и обратное:

Теорема 1. *Пусть D-область в $\mathbf{R}^m$, пусть σ_D произвольный ненулевой гомоморфизм алгебры функций $C^\infty(D)$ в $\mathbf{R}$:*

$$\sigma_D \not\equiv 0\,, \sigma_D(f+g) = \sigma_D(f) + \sigma_D(g)\,, \sigma_D(fg) = \sigma_D(f)\sigma_D(g)\,.$$

Тогда существует такая точка $P \in D$, что для любой функции $f \in C^\infty(D)$

$$\sigma_D(f) = f(P)\,.$$

Иными словами множество точек области D = множеству гомоморфизмов из алгебры функций на D в вещественные числа.

Эта теорема позволяет реконструировать точки по алгебре функций $A = C^\infty(D)$. Заметим также, что она позволяет восстановить значение функции в точке. Если точка, это гомоморфизм σ алгебры функций в числа, то значение данной функции $f \in A$ на данной точке σ равно значемию 'точки' σ на элементе f.

[1] мы это сделаем в дальнейшем, используя язык так называемых Λ-точек.

Докажем эту теорему.

Доказательство теоремы.

Для простоты рассмотрим случай области $D = (0,1)$.

Пусть σ гомоморфизм алгебры $A = C^\infty(0,1)$ в $\mathbf{R}$. Пусть значение этого гомоморфизма на функции $f = x$ равно s: $\sigma(x) = s$. Покажем, что число $s \in (0,1)$. Действительно, если $s \notin (0,1)$, то функция $h = \frac{1}{x-s}$ хорошо определена и $\sigma(x-s) = 0$. Мы видим, что

$$\sigma\left((x-s)\frac{1}{x-s}\right) = \sigma(x-s)\sigma\left(\frac{1}{x-s}\right) = 0$$

и с другой стороны

$$\sigma\left((x-s)\frac{1}{x-s}\right) = 1\,.$$

Противоречие, значит $s \in [0,1]$.

Теперь покажем. что для произвольной гладкой функции $g \in C^\infty(0,1)$, выполняется условие $\sigma(g) = g(s)$. Пусть $\sigma(g) = t$. Мы хотим показать, что $t = g(s)$. Рассмотрим функцию

$$r = (x-s)^2 + (g-t)^2\,.$$

Легко понять, что $\sigma(r) = 0$, значит функция r необратима, (так как функция $\frac{1}{r}$ *не существует*). Мы приходим к выводу, что функция $r()$ обращается в нуль, хотя бы в одной из точек интервала $(0,1)$. Но если функция $r(x)$ обращается в нуль, то это может быть лишь точка $x = s$. Значит $g(s) = t$. ■

Упражнение 1. *Пройдет ли предыдущее доказательство, если алгебру гладких функций в $C^\infty(0,1)$ заменить на алгебру непрерывных функций $C^0(0,1)$.*

Упражнение 2. *Остснется ли верным утверждение, если алгебру гладких функций в $C^\infty([0,1])$ заменить на произвольную алгебру функций, которые разделяют точки отрезка $[0,1]$.*

Упражнение 3. *Найти и обсудить 'дырку' в следующем рассуждении*

Пусть σ гомоморфизм, такой, что $\sigma(x) = s \in \mathbf{R}$. Тогда очевидно, что $\sigma(x^2) = s^2$ и для любого натурального n, $\sigma(x^n) = s^n$. Значит для любого многочлена $P(x)$, $\sigma(P(x)) = P(s)$. Теперь теорема Вейерштрасса об апроксимации гладкой функцией полиномами даёт, что для любой гладкой функции $g(x)$, $\sigma(g(x)) = g(s)$. ■

2 Отображения

Пусть снова $\mathbf{R}^p$- p-мерное аффинное пространство, (`множество точек`). Обозначим также $A = C^\infty(\mathbf{R}^m)$ алгебру гладких функций на $\mathbf{R}^m$.

Определение 2. каждому отображению $F\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ сопоставим гомоморфизм τ_F, такой, который сопоставляет каждой гладкой функции на $\mathbf{R}^m$ ($f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$) гладкую функцию ма $\mathbf{R}^n$ ($\tau_F(f) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$) такую, что значение функции $\tau_F(f)$ на произвольной точке $P \in \mathbf{R}^m$ равно значению функции f на точке $Q = F(P)$:

$$\tau_F(f)(P) = f\left(F(P)\right) .$$

Замечание 1. Правило 'против шёрстки' Отображения F и гомоморфизм функций τ_F идут в противоположных нзоравлениях ('против шёрстки').

Замечание 2. Гомоморфизм (2) построенный по отображению F обозначают F^*,

Так же как и в случае точек верно и обратное

Теорема 2. *Пусть U-область в $\mathbf{R}^m$ и V-область в $\mathbf{R}^n$, и τ гомоморфизм (против 'шёрстки') алгебры $C^\infty(V)$ в алгебру $C^\infty(U)$. Тогда существует отображение $F\colon\ \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ такое, что*

$$\tau = F^*\,, \textit{то есть для любой функции } f \in C^\infty(D)\ \tau(f) = f(F(P))\,.$$

Иными словами множество отображений = множеству гомоморфизмов из алгебры функций на V в алгебру функций на U.

Докажем эту теорему.

`Доказательство теоремы.`

Пусть P произвольная точка на U. Возьмём произвольную гладкую функцию f на V. Значение образа этой функции под действием гомоморфизма τ на данной точке P задаёт гомоморфизм алгебры гладких функций на V в вещественные числа, то есть согласно теореме 2 мы приходим к точке Q такой что

$$\tau(f)(P) = f(Q)$$

Это равенство приводит к определению точки $Q = F(P)$. Она задаёт гомоморфизм алгебры гладких функций

Пример 2.1. Пусть φ отображение пространств

$$\varphi \quad \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2\colon\ \begin{cases} x = u \\ y = \frac{v}{u} \end{cases} \tag{1}$$

Что тут написано?

Мы 'привыкли' 'читать эту формулу так

`точке с координатами` (u, v) сопоставляется точка с координатами $(x.y)$

Однако другой читатель скажет:

Формула определяет гомоморфизм гладких функций на плоскости $\mathbf{R}^2$, зависящих от x, y в гладкие функции на плоскости $\mathbf{R}^2$, зависящие от u, v. Гомоморфизм задан на образующих: Функция x переходит в функцию u и функция y переходит в функцию $\frac{v}{u}$; любая гладкая функция $f(x, y)$ переходит в гладкую функцию $f(x, y)\big|_{x=u, y=\frac{v}{u}}$.

Кто прав? Оба правы. Формулу можно читать по разному!

Пример 2.2. Пусть φ отображение пространств

$$\varphi \quad \mathbf{R}^1 \mapsto \mathbf{R}^2 \colon \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \tag{2}$$

Что тут написано?

Мы 'привыкли' 'читать эту формулу так

`точке` t `на прямой сопоставляется точка с координатами`

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

Другой скажет: в этой формуле определяется гомоморфизм функций на плоскости $\mathbf{R}^2$ в функции на $\mathbf{R}$. Формулы задают значения гомоморфизма на образующих: функция x переходит в функцию $\cos t$ и функция y переходит в функцию $\sin t$. Конечно, закон определяет образ любой (гладкой) функции. Например, функция $\frac{e^{-2xy}}{x^4+y^4}$ перейдет в функцию

$$\frac{e^{-2\cos t \sin t}}{\cos^4 t + \sin^4 t} = \frac{e^{-\sin 2t}}{1 - \frac{1}{2}\sin 2t},$$

и для любой гладкой функции $f = f(x, y)$

$$\sigma(f) = f(x, y)x = \cos t, y = \sin t)$$

И в заключение

задача-шутка

Рассмотрим набор разных простых чисел $\{p_i\}$, $i = 1, \ldots, N$, $p_i \neq p_j$; также рассмотрим набор матуральных чисел, $\{_i\}$, $i = 1, \ldots, N$, так что каждое a_i меньше p_i. Найти число K, которое при делении на простое число p_i даст остаток a_i.

Вы скажете: это китайская теорема об остатках. Какое отношение она имеет к курсу?

`Указание к решению`

Используя идеи двойственности можно свести эту задачу к задаче построения интерполяционного многочлена Лагранжа.

n различных точек на прямой ——n различных простых

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$——— $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$

$P(x)$ полиномиал ——- N натуральное число

$P(x_i) = y_i$——————-N даёт остаток a_i при делении на p_i

Если полином $P(x)$ равен y_i в точке x_i то многочлен

$$ch1P(x) = \sum_i y_i h_i(x)\,, \tag{3}$$

удовлетворяет соотношению $P(x_i) = y_i$, то есть этот многочлен достаавляет решение задачи о построении интерполяционного многочлена Лагранжа.

если многочлен $h_i(x)$ такой, что

$$h_m(x_j) = \delta_{mj}\,, \text{то есть } h_m(x) = \begin{cases} 1 \text{ если } x = x_m \\ 0 \text{ если } x = x_j \text{ при любом } j \neq m \end{cases}\,, \tag{4}$$

Построим многочлен (4),затем построим аналогичный объект в числах, затем переведите формулу (**??**) из многочленов в числа.

Рассмотрим многочлен $Q(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_n)$. Этот многочлен зануляется во всех точках $\{x_1, \ldots, x_n\}$, а вот многочлен $H_i(x) = \frac{Q(x)}{x - x_i}$ зануляется во всех точках $\{x_1, \ldots, x_n\}$, кроме быть может точки x_i и в этой точке он равен

$$H_i(x_i) = \frac{Q(x)}{x - x_i}\Big|_{x_i} = \frac{Q(x) - Q(x_i)}{x - x_i} = Q'(x_i) \tag{5}$$

Замечание 3. Обратим внимание, что мы в формуле (6) определили 'производную' в кольце целых чисел.

Теперь ясно, что в (4)

$$h_m(x) = \frac{H_m(x)}{H'_m(x_m)} = \frac{\prod_{i\neq m}(x - x_i)}{\prod_{i\neq m}(x_m - x_i)} = \begin{cases} 1 \text{ если } x = x_m \\ 0 \text{ если } x = x_j \text{ при любом } j \neq m \end{cases} , \tag{6}$$

пр

Это искомый базисмый многочлен. Его легко перевести в числа.

Например кубический многочлен, который равен y_i в точке x_i ($i = 1, 2, 3$ и $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$) равен

$$P(x) = \sum y_m \frac{\prod_{i\not m}(x - x_i)}{\prod_{i\not m}(x_m - x_i)} = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} +$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} + y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_3)(x_3-x_4)} + y_4 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} \tag{7}$$

Перепишем эту формулу для чисел получим

$$P = \sum a_m \prod_{i\neq m} p_i \left[\prod_{i\neq m} p_i \right]^{-1}_{mpdulop_m} \tag{8}$$

Например, $p_i = 2, 3, 5, 7$

$$= a_1 3 \cdot 5 \cdot 7 \, [3 \cdot 5 \cdot 7]^{-1}_{modulo2} + a_2 2 \cdot 5 \cdot 7 \, [2 \cdot 5 \cdot 7]^{-1}_{modulo3} + a_3 2 \cdot 3 \cdot 7 \, [2 \cdot 3 \cdot 7]^{-1}_{modulo5} + a_4 2 \cdot 3 \cdot 5 \, [2 \cdot 3 \cdot 5]^{-1}_{modulo}$$

$$a_1 \cdot 105 \, [105] \, -1_{modulo2} + a_2 70 \, [70]^{-1}_{modulo3} + a_3 42 \, [42]^{-1}_{modulo5} + a_4 30 \, [30]^{-1}_{modulo7} =$$

$$a_1 \cdot 105 \cdot 1 + a_2 \cdot 70 \cdot 1 + a_3 \cdot 42 \cdot 3 + a_4 \cdot 30 \cdot 4 =$$

$$105 a_1 + 70 a_2 + 126 a_3 + 120 a_4$$

Это число при делении на 2 даст остаток $_1$ при делении на 3 даст остаток $_2$ при делении на 5 даст остаток $_3$ и при делении на 7 даст остаток $_4$. ■

Лекция 20 февраля

3 Суперпространство

Немного забегая вперед дадим определение в духе идей двойственности $---$:

Определение 3. Алгебра гладких функций $\mathbf{R}(x, \xi)$ от коммутирующих переменных $x^1, \ldots, x^p$ и антикоммутирующих переменных $\xi^1, \ldots, \xi^q$ это алгебра функций на $p|q$-мерном линейном пространстве $\mathbf{R}^{p|q}$.

Вместо того чтоб определять пространство мы определяем алгебру функций на нём.
Например вместо
$\mathbf{R}^p$ рассматривается алгебра гладких функций от $x^1, \dots, x^p$.
Перейдём к разъяснению.

3.1 Алгебра Грассмана

Обозначим символом Λ_q алгебру Грассмана с q антикоммутирующими свободными переменными $\theta^1, \dots, \theta^q$, то есть

$$\theta^i\theta^k + \theta^k\theta^i = 0\,, \tag{9}$$

и любое другое соотношение на θ^i является следствием этих соотношений [2]

Произвольный элемент λ алгебры Λ^q может быть записан в виде

$$\lambda = \sum_{0\leq k\leq q} a_{\alpha_1\dots\alpha_k}\theta^{\alpha_1}\dots\theta^{\alpha_k},$$

где коэффициенты антисимметричны при перестановке индексов.

Элемент $= a_{\alpha_1\dots\alpha_k}\theta^{\alpha_1}\dots\theta^{\alpha_k}$ имеет чётность $p(s) = (-1)^k$.

Всякий элемент алгебры Грассмана можно однозначно представить в виде суммы чётного и нечётного элементов этой алгебры.

Для всякого элемента λ алгебры Грассмана Λ^q,

$$\lambda = m(\lambda) + n(\lambda)\,,$$

где $m(\lambda)$-обычное число и $n(\lambda)$-нильпотент.

Упражнение 4. *Назовём элемент алгебры Грассмана целым если все коэффициенты в разложении (3.1) целые.*

Доказать, что если λ целый нильпотентный элемент алгебры Грассмана, то для любого натурального n, $\frac{\lambda^n}{n!}$ тоже цел и нильпотентен.

Наряду с алгеброй Грассмана Λ^q мы будем рассматривать также алгебру $\Lambda_{p|q}$ как алгебру функций от p коммутирующих переменных $x^1, \dots, x^p$ и q антикоммутирующих переменных $\theta^1, \dots, \theta^q$. Каждый элемент алгебры $\Lambda_{p|q}$ (мы будем эту алгебру называть алгеброй Березина) может быть представлен в виде (3.1), где коэффициенты $a_{\alpha_{i_1\dots i_k}}$ являются гладкими функциями от переменных $x^1, \dots, x^p$: для любого $w \in \Lambda_{p|q}$

$$\lambda = \sum_{0\leq k\leq q} a_{\alpha_1\dots\alpha_k}(x^1 \dots, x^p)\theta^{\alpha_1}\dots\theta^{\alpha_k}\,.$$

[2] то есть для любого многочлена P такого, что $P = 0$, mnogohlen P принадлежит идеалу тензорной алгебры с образующими θ^i, образованному левыми частями соотношений (9).

Чётность вводится естественным образом.

Отметим, что выражение осмысленно при любой замене переменных, сохраняющих чётность.

Упражнение 5. *Как преобразуется функция* $g = \cos x$ *при замене координат* $x = x' + \varepsilon^1\varepsilon^2$.

Мы снова возвращаемся к определению суперпространства:

Определение 4. Алгебра гладких функций $\mathbf{R}(x, \xi)$ от коммутирующих переменных $x^1, \ldots, x^p$ и антикоммутирующих переменных $\theta^1, \ldots, \theta^q$, то есть алгебра Березина $\Lambda_{p|q}$, это алгебра функций на $p|q$-мерном линейном пространстве $\mathbf{R}^{p|q}$.

3.2 Дифференцирование и интегрирование

Мы подсчитаем для

3.2.1 Взятие производной.

Пусть $\theta^1, \ldots, \theta^q$ набор антикоммутирующих переменных в алгебре Березина $\Lambda_{p|q}$. Выберем любую из этих переменных, например переменную θ^{i_0}.

Легко понять, что для любой функции $f = f(x^i, \theta^\alpha) \in \mathcal{L}_{p|q}$

$$f(x^i, \theta^\alpha) = \theta^{\beta_0} g + h$$

где функции g и h не зависят от θ^{i_0}. Таким образом мы приходим к естественному определению частной производной по антикоммутирующей переменной.

$$\frac{\partial}{\partial\theta^{i_0}} f(x^i, \theta^\alpha) = g, .$$

Соблюдается правило Лейбница (со знаком)

$$\frac{\partial}{\partial\theta^a}(fg) = \frac{\partial f}{\partial z^a} g + (-1)^p (fg) f \frac{\partial g}{\partial z^a}\,. \tag{10}$$

Замечание 4. Пусть u какой нибудь элемент из множества $(x^1, \ldots, x^n, \theta^1, \ldots, \theta^q)$ и какой нибудь другой элемент из множества $(x^1, \ldots, x^n, \theta^1, \ldots, \theta^q)$.

Упражнение 6. *Показать, что*

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v} = (-1)^{p(u)p(v)} \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}$$

Упражнение 7. *Пусть* $f(x, \theta)$*–элемент алгебры Березина, гладкая функция он ,*θ*. Написать формулу Тэйлора.*

Взятие производной композиции функций.

3.3 Интегрирование

Что такое интеграл?

Определение 5. Пусть ∂ операция взятия производной. Тогда интегрирование это линейная операция которая зануляется на образе ∂:

$$I(\partial f = 0)$$

Очевидно, что интеграл как мы его учили тому свойству удовлетворяет. Можно показать, что на пространстве функций с компактным носителем, это определение приводит к обычному.

Хороший пример, это интеграл Коши от аналитической функции.

В итоге мы приходим к выводу, что

Определение 6. Для антикоммутирующей переменной θ

$$\int \theta d\theta \neq 0\,.$$

так как θ не является производной и мы выбираем нормировку

$$\int \theta d\theta = 1\,. \tag{11}$$

Лекция 1 марта

3.4 Отображения и замены переменных

Мы вернёмся к интегралу, прежде поговорив немножко об отображениях и заменах переменных...

Напомним, что алгебра Березина $\Lambda_{r|s}$ это алгебра $C^\infty(\mathbf{R}^{r|s})$ гладких функций на $\mathbf{R}^{r|s}$. Каждый элемент алгебры Березина $\Lambda_{r|s}$ представим в виде

$$f(x,\theta) = a_\emptyset(x) + a_i(x)\theta^i + \cdots = \sum_{0\leq k\leq q} a_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(x^1,\ldots,x^r)\theta^{\alpha_1}\ldots\theta^{\alpha_k}\,,$$

где $\{\theta^1,\ldots,\theta^s\}$, это набор антикоммутирующих переменных и $\{x^1,\ldots,x^s\}$ это стандартные координаты [3] в $\mathbf{R}^s$ и коэффициентные функции это гладкие функции от координат $\{x^1,\ldots,x^s\}$.

Замечание 5. Напомнить определение чётного и нечётного элементов

[3]например, в качестве таковых можно рассмотреть координаты $x^i(a^1,\ldots a^n) = a^i$, где $\mathbf{R}^r$ рассматривается как множество s-ок действительных чисел.

Замечание 6. Введённые выше координаты алгебры Березина, мы иногда будем называть *образующими* этой алгебры.

Мы сейчас определим гладкое отображение Φ суперпространства $\mathbf{R}^{m|n}$ в суперпространство $\mathbf{R}^{p|q}$, которое согласно нашей философии определяется 'против шёрстки'— гомоморфизмом алгебры $\Lambda_{p|q}$ в алгебру $\Lambda_{m|n}$.

Теорема 3. *Пусть* $\{f^a(x,\theta)\}$, $a = 1,\dots p$ *произвольный упорядоченный набор чётных функций алгебры* $\Lambda_{m|n}$ *в количестве* p *штук и пусть* $\{\varphi^\alpha(x,\theta)\}$, $\alpha = 1,\dots q$ *произвольный набор нечётных функций алгебры* $\Lambda_{m|n}$ *в количестве* q *штук.*

Тогда существует гомоморфизм $\alpha\colon \Lambda_{p|q} \mapsto \Lambda_{m|n}$ *такой, что*

$$\begin{cases} \alpha(y^a) = f^a(x,\theta) \ (a = 1,\dots,p) \\ \alpha(\eta^\mu) = \phi^\mu(x,\theta) \ (\mu = 1,\dots,p) \end{cases} \tag{12}$$

и этот гомоморфизм единственен.

Значение этого гомоморфизма на любой функции $f \in \Lambda_{p|q}$ *равно*

$$\alpha\,[f] = \alpha\left[f = \sum_{0\le k\le q} a_{\mu_1\dots\mu_k}(y^1,\dots,y^p)\eta^{\mu_1}\dots\eta^{\mu_k}\right] = \alpha\,[f = a_\emptyset(y) + a_{\mu\nu}(y)\eta^\nu\eta^\mu + \dots] =$$

$$a_\emptyset\left(f^a_\emptyset(x) + f^a_{\alpha\beta}(x)\theta^\beta\theta^\alpha + \dots\right) +$$
$$+a_{\mu\nu}\left(f^a_\emptyset(x) + f^a_{\alpha\beta}\theta^\beta\theta^\alpha + \dots\right)\left[\Phi^\mu_\alpha(x)\theta^\alpha + \dots\right]\left[\Phi^\nu_\beta(x)\theta^\alpha + \dots\right] + \dots$$

Замечание 7. Эта теорема позволяет определить отображение Φ суперпространства $\mathbf{R}^{m|n}$ в суперпространство $\mathbf{R}^{p|q}$ с помощью упорядоченного набора чётных гладких функций $\{\{f^a(x,\theta)\}\}$,$a = 1,\dots p$ и нечётных гладких функций $\{\{\phi^a(x,\theta)\}\}$,$a = 1,\dots q$

Отображение Φ определяется с помощью гомоморфизма (12).

Замечание 8. Сформулированная выше Теорема3 даёт право отождествлять стандартные координаты на $\mathbf{R}^{r|s}$ и образующими алгебры Березина $\Lambda_{r|s}$.

Определение 7. Мы будем называть иногда $\mathbf{R}^{p|q}$ $p|q$-мерным аффинным суперпространством

Пусть $\{x^i,\theta^\alpha\}$, $i = 1,\dots,r$, $\alpha = 1,\dots,s$ стандартные координаты на $\mathbf{R}^{r|s}$ = образующие алгебры Березина $\Lambda_{r|s}$; каждый элемент $\Lambda_{r|s}$ представим в виде

$$f(x,\theta) = a_\emptyset(x) + a_i(x)\theta^i + \dots = \sum_{0\le k\le q} a_{\alpha_1\dots\alpha_k}(x^1,\dots,x^p)\theta^{\alpha_1}\dots\theta^{\alpha_k}\,.$$

Чтобы определить замену переменных в суперпространстве мы следуя нашей философии дуальности определим *обратимое отображение* алгебры функций на себя.

Рассмотрим отображение

$$\begin{cases} x^{i'} = f^{i'}(x,\theta), i = 1,\dots,r \\ \theta^{i'} = \varphi^{i'}(x,\theta)\,,\, i = 1,\dots,s \end{cases} \tag{13}$$

Каково условие, что оно обратимо?

Имеет место следующая теорема

Теорема 4. *Произвольное преобразование переменных* (13) *обратимо если и только если выполняются следующие условия:*

- *отображение* $\mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^r$ *задаваемое формулами* (13)
$$x^{i'}\big|_{\theta=0} = f^{i'}(x,\theta)\big|_{\theta=0} \quad \textit{обратимо} \tag{14}$$
- $s \times s$*-матрица*
$$\frac{\partial \theta^{i'}}{\partial \theta^j}\Big|_{\theta=0} = \frac{\partial \varphi^{i'}(x,\theta)}{\partial \theta^j}\Big|_{\theta=0} \tag{15}$$
обратима

Замечание 9. Мы рассматриваем только гладкие функции. Это неявно используется в формулировках теорем.

Пример 3.1. Рассмотрим аффинное суперпространство $\mathbf{R}^{1|3}$. Ему соответствует алгебра гладких функций на прямой со значениями в Грассмановой алгебре. Λ_2 (Это то же, что алгебра Березина $\Lambda_{1|2}$) Рассмотрим гладкую замену переменных:

$$\begin{gathered} x' = x + \theta^1\theta^2 \\ \theta^{1'} = \theta^1 + \sin x \theta^1\theta^2\theta^3 \\ \theta^{2'} = 2\theta^2 \\ \theta^{3'} = \theta^3 \end{gathered} \tag{16}$$

Вначале отметим, что условия теоремы соблюдаются: отображение

$$x'\big|_{\theta=0} = (x + \theta^1\theta^2)\big|_{\theta=0} = x$$

поэтому условие (14) очевидно соблюдается; второе условие легко проверить: матрица (15) имеет вид

$$\frac{\partial \theta^{i'}}{\partial \theta^j}\Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\theta^{1'}}{\partial\theta^1} & \frac{\partial\theta^{2'}}{\partial\theta^1} & \frac{\partial\theta^{3'}}{\partial\theta^1} \\ \frac{\partial\theta^{1'}}{\partial\theta^2} & \frac{\partial\theta^{2'}}{\partial\theta^2} & \frac{\partial\theta^{3'}}{\partial\theta^2} \\ \frac{\partial\theta^{1'}}{\partial\theta^3} & \frac{\partial\theta^{2'}}{\partial\theta^3} & \frac{\partial\theta^{3'}}{\partial\theta^3} \end{pmatrix}\Big|_{\theta^i=0} = \begin{pmatrix} 1+\sin x\theta^2\theta^3 & 0 & 0 \\ 1-\sin x\theta^1\theta^3 & 2 & 0 \\ 1+\sin x\theta^1\theta^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Big|_{\theta^i=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Big|_{\theta^i=0} =$$

и очевидно обратима.

Проверим, что замена (16) обратима. Нам удобно обозначить $\theta^1 \to \theta$, $\theta^2 \to \eta$, $\theta^3 \to \xi$. Имеем

$$\begin{cases} x' = x + \theta\eta \\ \theta' = \theta + \sin x\theta\eta\xi \\ \eta' = 2\eta \\ \xi' = \xi \end{cases}$$

Имеем

$$\xi = \xi', \eta = \frac{1}{2}\eta', \theta = \theta' - \sin x\theta\eta\xi =$$

$$\theta' - \frac{1}{2}\sin x\theta\eta'\xi' = \theta' - \frac{1}{2}\sin x\left[\theta' - \sin x\theta\eta\xi\right]\eta'\xi' = \theta' - \frac{1}{2}\sin x\left[\theta' - \frac{1}{2}x^3\theta'\eta'\xi'\right]\eta'\xi' = \theta' - \frac{1}{2}\sin x\theta'\eta'\xi'$$

и

$$x = x' - \theta\eta = x' - \left[\theta' - \frac{1}{2}\sin x\theta'\eta'\xi'\right]\frac{1}{2}\eta' = x' - \frac{1}{2}\theta'\eta'$$

3.5 Интегрирование функции на суперпространстве $\mathbf{R}^{p|q}$

Снова вернёмся к интегрированию.

Мы определим интеграл от быстроубывающей функции по пространству $\mathbf{R}^{p|q}$.

Определение 8. Пусть $\{x^i, \theta^\alpha\}$. $i = 1, \ldots, p$, $\alpha = 1, \ldots, q$ координаты афинного суперпространства $\mathbf{R}^{p|q}$. Пусть

$$f(x,\theta) = \sum_{0 \le k \le q} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(x^1, \ldots, x^p)\theta^{\alpha_1} \ldots \theta^{\alpha_k} = a_\emptyset(x) + \theta^i(x)a_i(x) + \cdots + \theta^1 \ldots \theta^n a_{[1\ldots n]}(x) \quad (17)$$

произвольная *быстроубывающая* функция на $\mathbf{R}^{p|q}$, то есть функция, то есть любая производная этой функции убывает быстрее чем любая степень x:

$$\lim_{x\to\infty} x^n D^m f = 0\,.$$

Тогда

$$\int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x,\theta) f = \int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x,\theta)\theta^1 \ldots \theta^n a_{[1\ldots n]}(x) = (-1)^s \int_{\mathbf{R}^p} dx^1 \ldots dx^n a_{[1\ldots n]}(x) = \quad (18)$$

Замечание 10. Мы немного странно пишем разложение (17)

Упражнение 8. *Проверить, что это определение согласовано с формулой* (11)

Доказать, что условие быстрого убывания не зависит от системы координат.

3.6 Березиниан

На прошлой неделе мы сформулировали идею интеграла (см. 6). Однако затем, мы остановились на замене переменных и только потом снова перешли к интегрированию. Почему?

Пусть (x^i, θ^α), $i = 1, \dots, p$, $\alpha = 1, \dots, q$ и $(x^{i'}, \theta^{\alpha'})$, $i' = 1, \dots, p$, $\alpha' = 1, \dots, q$ пара двух координатных систем на афинном суперпространстве $\mathbf{R}^{p|q}$.

$$\det \frac{\partial x}{\partial x'}\big|_{\theta=0} > 0 \tag{19}$$

Вычислим интеграл (18) от одной и той же быстроубывающей функции $F(x, \theta)$ в двух различных системах координат (x^i, θ^α) и $(x^{i'}, \theta^{\alpha'})$:

$$\int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x,\theta) f(x,\theta) = \int_{\mathbf{R}^{p|q}} \frac{D(x,\theta)}{D(x',\theta')} D(x',\theta') f\left(x\left(x',\theta'\right), \theta\left(x',\theta'\right)\right) =$$

$$\int_{\mathbf{R}^{p|q}} \mathrm{Ber}\left(\frac{\partial\left(x,\theta\right)}{\partial\left(x',\theta'\right)}\right) D(x',\theta') f'(x',\theta') \tag{20}$$

Мы вычислим Березиниан на следующей лекции.

3.6.1 Два интеграла

Пусть $|||A_{ik}|$ положительно определенная симметрическая $n \times n$ матрица в Евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$. Вычислить интеграл по $\mathbf{E}^n$ от $e^{-A_{ik}x^i x^k}$.

Пусть $||B_{ik}||$ антисимметрическая $q \times q$ матрица. Вычислить интеграл от функции $e^{-B_{ik}\theta^i\theta^k}$ по $\mathbf{R}^{0|q}$.:

4 Березиниан (продолжение)

лекция 15 марта

Вернёмся снова к уравнению (20) и обсудим березиниан.

Определение 9. Пусть M чётная $p|q \times p|q$ матрица:

$$M = \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} \tag{21}$$

A это $p \times p$ матрица с чётными элементами, β это $p \times q$ матрица с нечётными элементами, Γ это $q \times p$,матрица с нечётными элементами и D $q \times q$ матрица с чётными элементами, then

$$\mathrm{Ber} M = \mathrm{Ber}\begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} = \frac{\det\left(A - \beta D^{-1}\Gamma\right)}{\det D}\,. \tag{22}$$

Замечание 11. Вы спросите, а в каком пространстве действует чётная $p|q \times p|q$ матрица? Вспомним обычную линейную алгебру: $m \times m$ матрица элементами которой являются действительные числа действует в векторном пространстве $\mathbf{R}^m$— в пространстве упорядоченных n-ок действителйнух чисел. На самом деле $p|q \times p|q$ матрица действует *в множестве Λ-точек пространства* $\mathbf{R}^{p|q}$, то есть в множестве упорядоченных наборов p чётных элементов алгебры Грассмана Λ и q нечётных элементов этой алгебры:

$$\mathbf{R}_\Lambda^{p|q} = \{(\lambda_1, \dots \lambda_p; \mu_1, \dots \mu_q), \lambda_i \in \Lambda_0, \mu_j \in \Lambda_1\} \tag{23}$$

Мы далее ещё вернемся к этому.

Оказывается, березиниан (22) имеет самое прямое отношение к задаче, которую мы решали в конце прошлой лекции. Напомним, что в конце прошлой лекции мы ввели понятие интеграла от быстроубывающей функции $f(x, \theta) \in C^\infty(\mathbf{R}^{p|q})$ по всему пространству $\mathbf{R}^{p|q}$.

Затем мы рассмотрели две произвольные системы координат (x^i, θ^α) и $(x^{i'}, \theta^{\alpha'})$ и,руководствуяс правилом (18), и инвариантностью интеграла по отношению к замене координат мы приходим к правилу

Теорема 5. *При замене координат* $\begin{cases} x^{i'} = x^{i'}(x, \theta) \\ \theta^{\alpha'} = \theta^{\alpha''}(x, \theta) \end{cases}$ *в интеграле* $\int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x, \theta) f(x, \theta)$ *подынтегральное выражение домножается на березиниан матрицы Якоби преобразования координат:*

$$\int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x, \theta) f(x, \theta) = \int_{\mathbf{R}^{p|q}} \frac{D(x, \theta)}{D(x', \theta')} D(x', \theta') f(x, \theta)\big|_{x(x', \theta'), \theta(x', \theta')},$$

где

$$\frac{D(x, \theta)}{D(x', \theta')} = Ber\left(\frac{\partial\,(x, \theta)}{\partial\,(x', \theta')}\right) = Ber\begin{pmatrix} \frac{\partial x(x', \theta')}{\partial x'} & \frac{\partial \theta(x', \theta')}{\partial x'} \\ \frac{\partial x(x', \theta')}{\partial \theta'} & \frac{\partial \theta(x', \theta')}{\partial \theta'} \end{pmatrix} = Ber\begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix}$$

где

$$A^i_{j'} = \frac{\partial x^i(x', \theta')}{\partial x^{j'}}],, \quad \beta^\alpha_{j'} = \frac{\partial \theta^\alpha(x', \theta')}{\partial x^{j'}}],, \quad \gamma^i_{\alpha'} = \frac{\partial x^i(x', \theta')}{\partial \theta^{\alpha'}}],, \quad D^\alpha_{\alpha'} = \frac{\partial \theta^\alpha(x', \theta')}{\partial \theta^{\alpha'}}],,$$

Условие (15) *теоремы о замене переменных обеспечивает, что березиниан хорошо определен.*

Замечание 12. Интеграл (20) посчитан в предположении

$$\det \frac{\partial x}{\partial x'}\big|_{\theta=0} > 0 \tag{24}$$

В общем случае надо домножать ответ на знак якобиана (24).

Замечание 13. Вы можете часто увидеть НЕПРАВИЛЬНОЕ обозначение для координатной формы объёма

Следствие 1. *Березиниан мультипликативен:* $Ber(M_1M_2) = BerM_1 \cdot BerM_2$.

`Proof`

$$Ber\left(\frac{\partial\,(x,\theta)}{\partial\left(\tilde{x},\tilde{\theta}\right)}\right) = \frac{D(x,\theta)}{D(\tilde{x},\tilde{\theta})} = \frac{D(x,\theta)}{D(x',\theta')}\frac{D(x',\theta')}{D(\tilde{x},\tilde{\theta})} = Ber\left(\frac{\partial\,(x,\theta)}{\partial\,(x',\theta')}\right) Ber\left(\frac{\partial\,(x',\theta')}{\partial\left(\tilde{x},\tilde{\theta}\right)}\right) \tag{25}$$

Мультипликативность практически следует из определения!

Пример 4.1. Рассмотрим в $\mathbf{R}^{1|1}$ 'линейное' преобразование

$$\varphi_M\colon \quad \begin{cases} x = x'a + \theta'\gamma \\ \theta = x'\beta + \theta k \end{cases} \quad \Leftrightarrow \big(x,\theta\big) = \big(x', theta'\big)\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & k \end{pmatrix} \tag{26}$$

которое соответствует $1|1 \times 1|1$ матрице

$$M = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & k \end{pmatrix} \tag{27}$$

Замечание 14. Матрица Якоби преобразования (26) равна матрице (27).

Обратите внимание на последовательность написания термов в формуле 26. Это объясняется тем, что производная берется слева (см. также замечание 10)

Вычислим интеграл от быстро убывающей функции $f(x,\theta) = f_0(x) + \theta f_1(x)$ в координатах (x,θ) и в новых координатах (x',θ'). В координатах (x,θ)

$$\int D(x,\theta) f(x,\theta) = I,\ \left(I = \int f_1(x)dx\right).$$

В координатах (x',θ') имеем

$$I = \int D(x,\theta) f(x,\theta) = \mathrm{Ber}M \int D(x',\theta') f\left(ax' - \gamma\theta', \beta x' + k\theta'\right)$$

(Мы положили, что $\mathrm{Ber}M$ равен константе.)

Рассмотрим три подслучаи

а)

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (a > 0)\,. \tag{28}$$

В этом случае имеем

$$I = \int D(x,\theta) f(x,\theta) = \mathrm{Ber}M \int D(x',\theta') f\left(ax,\theta\right) =$$

$$\mathrm{Ber}M \int D(x',\theta')\left[f_0(ax) + \theta f_1(ax)\right] = \mathrm{Ber}M \int f_1(\tilde{x})d\tilde{x} = \frac{\mathrm{Ber}M}{|a|} I \Rightarrow \mathrm{Ber}M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a\,.$$

Перейдем ко второму подслучаю: б)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \tag{29}$$

В этом случае имеем

$$I = \int D(x,\theta) f(x,\theta) = \mathrm{Ber} M \int D(x',\theta') f\left(x, k\theta'\right) =$$

$$\mathrm{Ber} M \int D(x',\theta') \left[f_0(x) + k\theta' f_1(x)\right] = \mathrm{Ber} M \int f_1(x) dx = kI \Rightarrow \mathrm{Ber} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \frac{1}{k}\,.$$

Теперь перейдём к общему случаю:
c)

$$M = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & k \end{pmatrix} \tag{30}$$

Имеем

$$I = \int D(x,\theta) f(x,\theta) = \mathrm{Ber} M \int D(x',\theta') f\left(ax' - \gamma\theta', \beta x' + k\theta'\right) =$$

$$\mathrm{Ber} M \int D(x,\theta) f\left(ax - \gamma\theta, \beta x + k\theta\right)\,.$$

(мы положим $a > 0$) Продолжим вычисления:

$$I = \mathrm{Ber} M \left[\int D(x,\theta) f_0(ax - \gamma\theta) + (\beta x + k\theta) f_1(ax - \gamma\theta)\right],.$$

Заметим, что $\int D(x,\theta) f_0(ax - \gamma\theta) = 0$,так как $f_0(x)$ быстроубывающая функция:

$$\int D(x',\theta') f_0(ax' - \gamma\theta') = -\frac{1}{a} \int \gamma f'(x) dx = 0\,,$$

значит

$$I = \mathrm{Ber} M \left[\int D(x,\theta) f_0(ax - \gamma\theta) + (\beta x + k\theta) f_1(ax - \gamma\theta)\right] = \mathrm{Ber} M \int D(x,\theta)(\beta x + k\theta) f_1(ax - \gamma\theta) =$$

$$\mathrm{Ber} M \int D(x,\theta)(\beta x + k\theta) \left[g(ax) - \gamma\theta g'(ax)\right] =$$

$$\mathrm{Ber} M \left[\int D(x,\theta) \theta k g(ax) - \int D(x,\theta) \theta \beta x \gamma g'(ax)\right] =$$

$$\mathrm{Ber} M \left[\frac{k}{a} \int g(x) dx - \frac{\beta\gamma}{a^2} \int x g'(x) dx\right] = \mathrm{Ber} M \left[\frac{k}{a} \int g(x) dx + \frac{\beta\gamma}{a^2} \int g(x) dx\right] =$$

$$IBerM\left[\frac{k}{a}+\frac{\beta\gamma}{a^2}\right]\Rightarrow$$

$$\mathrm{Ber}\begin{pmatrix}a & \beta\\ \gamma & k\end{pmatrix}=\frac{1}{\frac{k}{a}+\frac{\beta\gamma}{a^2}}=\frac{a^2}{ka+\beta\gamma}=\frac{a}{k}\left(1-\frac{\beta\gamma}{ka}\right).$$

Exercises

Мы посчитаем интегралы 3.6.1, потом мы сделаем упражнение, где проясим смысл условия быстроубывающей функции для интеграла Березина.

Exercise

Приведя форму к диагональному виду легко понять, что

$$\int e^{-A(\mathbf{x},\mathbf{x})}d^nx=\int e^{-\lambda_1x_1^2-\cdots-\lambda_nx_n^2}d^nx=\prod_{i=1}^n\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}}=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}.$$

Во втором интеграле детерминант перепрыгнет в числитель[4].

$$\int D(\theta^1,\ldots,\theta^n)e^{-B_{ik}\theta^i\theta^k}d^nx==C\sqrt{\det B}=C\mathrm{Pfaffian}B$$

(это для чётных n, а для нечётных нуль.) Это можно увидеть прямым подсчётом: при $n=2k$

$$\int D(\theta^1,\ldots,\theta^n)e^{B_{ik}\theta^i\theta^k}d^nx=\int D(\theta^1,\ldots,\theta^n)\frac{1}{k!}\left(B_{ij}\theta^i\theta^j\right)^k=$$

$$\frac{1}{k!}B_{i_1j_1}\ldots B_{i_kj_k}\varepsilon^{i_1j_1\ldots i_kj_k}$$

а можно и косвенно: если обозначить

$$\int D(\theta^1,\ldots,\theta^n)e^{B_{ik}\theta^i\theta^k}d^nx=F(B_{ik})$$

то заменой переменной $\theta^i=L^i_k\xi^k$ легко увидеть. что

$$F(B)=\frac{F(L^+BL)}{\det L}$$

hence

$$\frac{F(\tilde B)}{\sqrt{\tilde B}}\frac{F(B)}{\sqrt{B}},(\tilde B=L^+BL)$$

то есть

$$\int D(\theta^1,\ldots,\theta^n)e^{B_{ik}\theta^i\theta^k}d^nx=F(B_{ik})=C\sqrt{B}$$

[4] this integral appeared in Faddeev Popov quantisation. This was not supersymmetry, however this was a good push for it.

Замечание 15. Я не знаю более эффективного способа проверить формулу для Пфаффиана.

Пусть f гладкая быстроубывающая функция на $\mathbf{R}^{1|2}$. Определим интеграл от этой функции по лучу $(0,\infty)$:

$$\int_{x\geq 0} D(x,\theta,\varphi)f(x,\theta.\varphi) = \int_{\mathbf{R}^{1|2}} D(x,\theta,\varphi)H(x)f(x,\theta,\varphi) \tag{31}$$

Покажем, что этот интеграл инвариантен при замене

$$\begin{cases} x = y + \xi\eta \\ \theta = \xi \\ \varphi = \eta \end{cases}$$

Березиниан той замены равен 1 (Проверьте это!)

Посчитаем его в новых и старых координатах.

a) в координатах (x,θ,φ)

$$\int_{x\geq 0} D(x,\theta,\varphi)f(x,\theta.\varphi) = \int_{\mathbf{R}^{1|2}} D(x,\theta,\varphi)H(x)f(x,\theta,\varphi) =$$

$$\int_{\mathbf{R}^{1|2}} D(x,\theta,\varphi)H(x)\left[f_0(x)+\theta f_1(x)+\varphi f_2(x)+\theta\varphi f_3(x)\right] = \int dx f_3(x)\,.$$

b) в координатах (y,ξ,η)

$$\int_{x\geq 0} D(x,\theta,\varphi)f(x,\theta.\varphi) = \int_{\mathbf{R}^{1|2}} D(x,\theta,\varphi)H(x)f(x,\theta,\varphi) =$$

$$\int_{\mathbf{R}^{1|2}} \mathrm{Ber}\frac{\partial(x,\theta,\varphi)}{\partial(y,\xi,\eta)}\left[H(x)f(x,\theta,\varphi)\right]_{x=y+\xi\eta,\theta=\xi,\varphi=\eta} =$$

$$\int_{\mathbf{R}^{1|2}} 1\cdot H(y+\xi\eta)\left[f_0(y+\xi\eta)+\xi f_1(y+\xi\eta)+\eta f_2(y+\xi\eta)+\xi\eta f_3(y+\xi\eta)\right] =$$

$$\int_{\mathbf{R}^{1|2}} \left(H(y)+\xi\eta\delta(y)\right)\left[f_0(y)+\xi\eta f_0'(y)+\xi f_1(y)+\eta f_2(y)+\xi\eta f_3(y)\right] =$$

$$\int_{\mathbf{R}^{1|2}} \left(H(y)+\xi\eta\delta(y)\right)\left[f_0(y)+\xi\eta f_0'(y)+\xi f_1(y)+\eta f_2(y)+\xi\eta f_3(y)\right] =$$

$$\int dy H(y)\left[f_0'(y)+f_3(y)\right] + \int dy\delta(y)f_0(y) =$$

$$\int_0^\infty dy\left[f_0'(y)+f_3(y)\right] + f_0(0) =$$

$$f_0(\infty) - f_0 + \int_0^\infty dy f_3(y) + f_0(0) = \int_0^\infty dy f_3(y) \quad \blacksquare$$

Упражнение 9. *Проверьте,пожалуйста, что это нехорошее определение интеграла вдоль луча.*

$$\int_{x\geq 0} D(x,\theta,\varphi) f(x,\theta.\varphi) = \int_0^\infty dx \int_{\mathbf{R}^{0|2}} D(x,\theta,\varphi) H(x) f(x,\theta,\varphi)$$

Сравните с (31)

4.1 О некоторых свойствах Березиниана

Эта лекция основана на статье Khudaverdian, Voronov *Berezinians, Exterior Powers and Recurrent sequences*, LMP(2005), **74**, pp. 201–228

4.1.1 Детерминант

Детерминант и площадь параллелограмма

Упражнение 10. *Объяснить связь между площадью параллелограма и и детерминантом линейного оператора в* V^2.

Упражнение 11. *Пусть* ω n*-форма в* n*-мерном линейном пространстве,*
А что это такое?
пусть $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ *базис в* V *и пусть линейный оператор на* V.
Вычислить

$$\frac{\omega(A\mathbf{e}_1,\dots,A\mathbf{e}_n)}{\omega(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)}$$

Легко увидеть, что для невырожденной формы

$$\frac{\omega(A\mathbf{e}_1,\dots,A\mathbf{e}_n)}{\omega(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)} = \det A\,, \tag{32}$$

или если угодно для любого линейного оператора : $V \to V$,*для любой* полилинейной n-формы и *любых* n *векторов* $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ этого пространства

$$\omega(A\mathbf{e}_1,\dots,A\mathbf{e}_n) = \det A\omega(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)\,, \tag{33}$$

Из соотношения (32) вытекает мультипликативность детерминанта.

Действительно рассмотрим произвольный базис $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ n-мерного линейного пространства V. Пусть B невырожденнык линейный оператор в V. Тогда система векторов $\{\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_n\}$, где $\mathbf{f}_i = B(\mathbf{e}_i)$ тоже будет базисом. Тогда из равенства (32) следует, что

$$\det(A\cdot B) = \frac{\omega\left(AB\mathbf{e}_1,\dots,AB\mathbf{e}_n\right)}{\omega(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)} = \frac{\omega\left(AB\mathbf{e}_1,\dots,AB\mathbf{e}_n\right)}{\omega(B\mathbf{e}_1,\dots,B\mathbf{e}_n)}\cdot\frac{\omega\left(B\mathbf{e}_1,\dots,B\mathbf{e}_n\right)}{\omega(\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n)} =$$

$$\frac{\omega\left(A\mathbf{f}_1,\ldots,A\mathbf{f}_n\right)}{\omega(\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_n)}\cdot\frac{\omega\left(B\mathbf{e}_1,\ldots,B\mathbf{e}_n\right)}{\omega(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)}=\det A\cdot\det B$$

Сравните,пожалуйста, этот вывод свойства мультипликативности детерминанта с выводом (32).

4.1.2 След и детерминант

$$\det(1+\varepsilon A)=1+\varepsilon \mathrm{Tr}\, A\,.$$

Формула Лиувилля:

$$\det e^A=e^{\mathrm{Tr}\, A}\,.$$

Упражнение 12. *Пусть A матрица линейного оператора.*
Перейдем в базис в котором она диагональна.
В этом базисе утверждение легко проверить. (Проверьте!)
Значит оно верно всегда.

Упражнение 13. *Сделать предыдущее доказательство полным.*

Замечание 16. Решение

Множество *диагонализируемых матриц* всюду плотно в мнозестве всех матриц. Поэтому если функции и B непрерывны утверждение, что $A=B$ по непрерывности может быть продолжено на множество всех матриц, если оно верно на множестве диагонализируемых матриц,

Упражнение 14. *Второе доказательство:*
Напишем

$$B(t)=\det e^{tA},\quad ,D(t)=e^{t\mathrm{Tr}\, A}\,.$$

Мы видим, что обе функции $B(t)$ и $D(t)$ удивлетворяют одному и тому дифференциальному уравнению и одним и тем же граничным условиям.

решите задачку

Упражнение 15. *Если Вас не убедит предыдущее рассуждение*
посчитате $\frac{d}{dt}\left(\frac{B(t)}{D(t)}\right)$.

Четвертое 'доказательство':

Упражнение 16.

$$\det e^A=\det\left(\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{A}{N}\right)^N\right)=\left(\lim_{N\to\infty}\left(e^{\mathrm{Tr}\,\frac{A}{N}}\right)^N\right)=e^{\mathrm{Tr}\, A}\,.$$

4.1.3 supertrace of the supermatrix

Мы попробуем определить след матрицы, так чтобы не нарушать теорему Лиувилля. Мы рассмотрим матрицы бесконечно близкие к 1. Рассмотрим чётную $p|q \times p|q$ чётную матрицу $M = \begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & D \end{pmatrix}$,

- A это $p \times p$ матрица все коэффициенты которой чётные числа,
- B это $p{\times}q$ нечётная матрица, то есть все коэффициенты её нечётные элементы алгебры Грассманна,
- Γ это $q{\times}p$ нечётная матрица, то есть все коэффициенты её нечётные элементы алгебры Грассманна,
- D это $q \times q$ чётная матрица, то есть все коэффициенты её чётные элементы алгебры Грассманна,

$$e^{\mathrm{sTr}\ (\varepsilon M)} = 1 + \varepsilon \mathrm{sTr}\ M = 1 + \mathrm{sTr}\ \varepsilon \begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & D \end{pmatrix} =$$

С другой стороны:

$$\mathrm{Ber} e^{\varepsilon M} = \mathrm{Ber} \left(e^{\varepsilon \begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & D \end{pmatrix}} \right) = \mathrm{Ber} \left(1 + \varepsilon \begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & D \end{pmatrix} \right) =$$

$$\mathrm{Ber} \left(\begin{pmatrix} 1+\varepsilon A & \varepsilon B \\ \varepsilon\Gamma & 1+\varepsilon D \end{pmatrix} \right) = \frac{\det(1+\varepsilon A) - \det\left(\varepsilon B (1+\varepsilon D)^{-1} \varepsilon \Gamma\right)}{\det(1+\varepsilon D)} =$$

$$= \frac{\det(1+\varepsilon A)}{\det(1+\varepsilon D)} = \frac{1+\varepsilon \mathrm{Tr}\, A}{1+\varepsilon \mathrm{Tr}\, D} = 1 + \varepsilon(\mathrm{Tr}\, A - \mathrm{Tr}\, D)\,.$$

Comparing these formulae we come to

$$\mathrm{sTr}\ \varepsilon \begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & D \end{pmatrix} = \mathrm{Tr}\, A - \mathrm{Tr}\, D\,.$$

4.2 Expansions of the function $R_A(z) = \mathbf{Ber}(1 + Az)$

We will consider the expansions for the function $R_A(z)$.

Пример 4.2. Пусть A оператор в трахмерном линейном пространстве. Тогда

$$\mathrm{Ber}(1+zA) = \det(1+zA) = 1 + z\mathrm{Tr}\, A + z^2 \mathrm{Tr}\,(A \wedge A) + z^3 \mathrm{Tr}\,(A \wedge A \wedge A)$$

и

$$\det A = +\mathrm{Tr}\,(A \wedge A \wedge A \wedge A)$$

Что это такое???

4.2.1 Действие $\underbrace{A \wedge \cdots \wedge A}_{k \text{ раз}}$ на $\underbrace{V \wedge \cdots \wedge V}_{k \text{ раз}}$

Пусть линейный оператор действует на V.

Действие $A \wedge A$ на $V \wedge V$ определяется

$$(A \wedge A)(u \wedge v) = A(u) \wedge A(v).$$

При этом

$$u \wedge v = -v \wedge u(-1)^{p(u)p(v)}\,.$$

Посчитаем действие $A \wedge A$ на $V \wedge V$ Ограничимся случаем, когда диагонализируем. (см. замечание 16)

Пусть $\{\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_\alpha\}$ базис $p|q$-мерного суперпорстранства V, состоящий из собственных векторов. Имеем p чётных собственных векторов

$$A(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i\,, \quad i = 1 \ldots, p$$

и q нечётных собственных векторов

$$A(\mathbf{f}_\alpha) = \mu_\alpha \mathbf{f}_\alpha\,, \quad \alpha = 1 \ldots, q\,.$$

Рассмотрим базис пространства $V \wedge V$:

чётные вектора $-$ $\{\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j, (i < j); \mathbf{f}_\alpha \wedge \mathbf{f}_\beta (\alpha \leq \beta)\}$в количестве $\frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q+1)}{2}$ штук

нечётные вектора $-$ $\{\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{f}_\alpha\}$в количестве pq штук,

Имеем

$$A \wedge A(\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j) = \lambda_i \lambda_j\,, A \wedge A(\mathbf{f}_\alpha \wedge \mathbf{f}_\beta) = \mu_\alpha \mu_\beta\,,$$

соответственно для нечётных векторов

$$A \wedge A(\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{f}_\alpha) = \lambda_i \mu_\alpha\,,$$

размерность пространства $V \wedge V$ равна $\frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q+1)}{2}|pq$, и соответственно

$$\mathrm{sTr}\ (A \wedge A) = \sum_{i<j\leq p} \lambda_i \lambda_j + \sum_{\alpha \leq \beta \leq q} \mu_\alpha \lambda_\beta - \sum \lambda_i \mu_\alpha\,.$$

-

В следующий понедельник мы начнём с того, что покажем, как устроено разложение:

$$\mathrm{Ber}(1 + zA) = 1 + z\mathrm{sTr}\ A + z^2 \mathrm{sTr}\ (A \wedge A) + \ldots$$

Лекция 29 марта

`Эта лекция какбы провалилась: по неизвестной причине отказал 'stylos' мы лишились возможности записывать... Я постарался более подробный file выложить на домашней страничке.`

Предложение 1.

$$Ber(1+Az) = 1 + c_1(A)z + c_2(A)z^2 + \dots = c_k(A)z^k$$

where $c_k(A) = \mathrm{sTr}\,(\underbrace{A \wedge \dots \wedge A}_{k\ \text{раз}})$

Упражнение 17. *Пусть L оператор в в трёмерном пространстве Показать, что*

$$\det(1+zL) = 1 + z\mathrm{Tr}\,L + z^2\mathrm{Tr}\,(L \wedge L) + z^3\mathrm{Tr}\,(L \wedge L \wedge L)\,,$$

показать, что

$$\det L = \mathrm{Tr}\,(L \wedge L \wedge L)\,,$$

Перепишем разложение в предложении 4.2.1:

$$\mathrm{Ber}(1+zA) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k(A) z^k, \qquad \text{где } \begin{cases} c_k(A) = \mathrm{sTr}\ \Lambda^k A & \text{для целых } k \geq 0 \\ c_k(A) = 0 & \text{для целых } k < 0 \end{cases}$$

Замечание 17. Тут выписано разложение в ряд Тейлора. Немного странное записывание закона суммирования оправдается в Теореме 6

`Proof`

$$\mathrm{Ber}(1+zA) = \prod_{i=1}^{p}(1+z\lambda_i)\prod_{\alpha=1}^{q}(1+z\mu_\alpha)^{-1} = \tag{34}$$

$$\sum_{i_1<i_2<\dots<i_r} \lambda_{i_1}\dots\lambda_{i_r}\mu_1^{n_1}\dots\mu_q^{n_q}(-1)^{n_1+\dots+n_q} z^{r+n_1+\dots+n_q} = \tag{35}$$

$$1 + (\lambda_1 + \dots + \lambda_p - \mu_1 - \dots - \mu_q)z + \left(\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j - \sum_{i=1,\alpha=1}^{i=p,\alpha=q}\lambda_i\mu_\alpha + \sum \mu_\alpha\mu_\beta\right) z^2 + \dots =$$

$$1 + z\mathrm{sTr}\ A + z^2\mathrm{sTr}\ (A \wedge A) + \dots$$

$$\sum c_k(A)z^k\,, \text{где} c_k(A) = \mathrm{sTr}\ ((\wedge^k A)\,. \blacksquare \tag{36}$$

Обсудить

Упражнение 18. *Выразить базис в $V \wedge V \wedge V$ через базис в V.*

`Решение` Пусть V -линейное $p|q$-мерное пространство. Пусть $\{\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_\alpha\}$, где вектора $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$—чётные вектора, и вектора $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_q$—нечётные вектора- произвольный базис в V. Тогда,например,

будет базисом в $V \wedge V \wedge V$.

Конечно, количество чётных векторов в базисе минус количество нечётных, это суперслед единичного оператора (см, вычисления ниже). Тут мы еще ответим на вопрос, а каковы другие базисы в V.

Предложение 2. *Пусть* $\{\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_\alpha\}$*-произвольный базис в* V*, и пусть* $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{p'}, \mathbf{f}_{1'}, \dots, f_{q'}\}$ *произвольный набор* p *чётных и* q *нечётных векторов* V*, Рассмотрим матрицу перехода* T*:*

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{i'} = T^i_{i'}\mathbf{e}_i + T^\alpha_{i'}\mathbf{f}_\alpha \\ \mathbf{f}_{\alpha'} = T^i_{\alpha'}\mathbf{e}_i + T^\alpha_{\alpha'}\mathbf{f}_\alpha \end{cases},$$

где $||T^i_{i'}||, ||T^a_{\alpha'}||$*-чётные матрицы (все их элементы чётные) и* $||T^\alpha_{i'}||, ||T^i_{\alpha'}||$*-нечётные матрицы (все элементы нечётные)*

$\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{p'}, \mathbf{f}_{1'}, \dots, f_{q'}\}$*—базис если и только если матрица обратима, то есть матрицы* $||T^i_{i'}||$ *и* $||T^a_{\alpha'}||$*-обратимы.*

Упражнение 19. *Обсудить вычисление* $Ber(1 + zA)$ *до третьего порядка по* z*.*

Упражнение 20. *Пусть* E *единичный оператор в* $p|q$*-мерном линейном пространстве. Вычислить*

$\mathrm{sTr}\ E$

$\mathrm{sTr}\ (E \wedge E)$

$Ber(E + zE)$

Замечание 18. Иногда мы будем путать обозначение для следа матрицы и для суперследа.

Решение.

Мы видим, что $\mathrm{Ber}(E + zE) = (1 + z)^{p-q}$. Раскладывая в ряд получим:

$$\mathrm{Ber}(E + zE) = (1 + z)^{p-q} = 1 + (p - q)z + \dots,$$

$$\mathrm{sTr}\ E = p - q,$$

$$\mathrm{sTr}\ (E \wedge E) = \frac{(p - q)(p - q - 1)}{2},$$

$$\mathrm{sTr}\ (E \wedge E \wedge E) = \frac{(p - q)(p - q - 1)(p - q - 2)}{6},$$

и так далее. Проверим эти формулы.

Пусть $\{\mathbf{e}_i, f_\alpha\}$ произвольный базис в V,

Мы видим, что

суперслед $=$ количество чётных элементов в базисе в $V-$количество нечётных элементов в базис

теперь проверим суперслед квадрата:

рассмотрим базис в $V \wedge V$: это будет например

$$\Big\{\{\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j (i < j); \mathbf{f}_\alpha \wedge \mathbf{f}_\beta (\alpha \leq \beta)_{\text{чётные вектора}}, \{\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{f}_\alpha;\}_{\text{нечётные вектора}}\Big\}$$

мы видим, что

$$\text{суперслед } E\wedge E = \text{количество чётных элементов в базисе}-$$
$$\text{количество нечётных элементов в базисе } = \frac{p(p-1)}{2}+\frac{q(q+1)}{2}-pq=\frac{(p-q)(p-q-1)}{2}\,,$$

теперь проверим суперслед куба:

рассмотрим базис в $V\wedge V\wedge V$: это будет например

$$\Big\{\{\mathbf{e}_i\wedge\mathbf{e}_j\wedge\mathbf{e}_k(i<j<k);\mathbf{e}_i\wedge\mathbf{f}_\alpha\wedge\mathbf{f}_\beta(\alpha\leq\beta)\}_{\text{чётные вектора}},\{\mathbf{f}_\alpha\wedge\mathbf{f}_\beta\wedge\mathbf{f}_\gamma(\alpha\leq\beta\leq\gamma);\mathbf{e}_i\wedge\mathbf{e}_j\wedge\mathbf{f}_\alpha\}_{\text{н}}$$

мы видим, что

$$\text{суперслед } E\wedge E\wedge E = \text{количество чётных элементов в базисе в } V\wedge V\wedge V-$$
$$\text{количество нечётных элементов в базисе в } V\wedge V\wedge V =$$
$$\left[\frac{p(p-1)(p-2)}{6}+\frac{pq(q+1)}{2}\right]-\left[\frac{q(q+1)(1+2)}{6}+\frac{p(p-1)q}{2}\right]=\frac{(p-q)(p-q-1)(p-q-2)}{6}\,,$$

Проверка последнего равенства несколько утомительна...

(Сравните результаты этих упражнений с результатами упражнений по вычислению примеров базисов в $V\wedge V$ и в $V\wedge V\wedge V$.)

4.2.2 Универсальные полиномы Ньютона

Воспользуемся теоремой+тождеством Лиувилля: Обозначим $s_k=\mathrm{sTr}\ A^k$. Имеем

$$\mathrm{Ber}(1+zA)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{sTr}\ \underbrace{A\wedge\dots\wedge A}_{k\ \text{раз}}z^k=e^{\mathrm{sTr}\ \log(1+zA)}=e^{\mathrm{sTr}\ \left(\sum_{k=1}^{\infty}A^k(-1)^{k+1}z^k\right)}=$$
$$e^{\left(\sum_{k=1}^{\infty}s_k(-1)^{k+1}z^k\right)}=e^{\left(s_1+s_2z^2+s_3z^3+\dots\right)}=$$
$$1+\left(s_1+s_2z^2+s_3z^3+\dots\right)+\frac{1}{2}\left(s_1+s_2z^2+s_3z^3+\dots\right)^2+\frac{1}{6}\left(s_1+s_2z^2+s_3z^3+\dots\right)^3+\dots=$$
$$1+s_1z+\frac{1}{2}(s_1^2-s_2)z^2+\frac{1}{6}(s_1^3-3s_1s_2+2s_3)z^3+\dots$$

Из этого предложения и формулы Лиувилля следует

Предложение 3.
$$c_k(A)=P_k(s_1,\dots,s_k)$$
$$c_0=1\,,\quad c_1=s_1,\quad c_2=\frac{1}{2}(s_1^2-s_2)\quad c_3=\frac{1}{6}(s_1^3-3s_1s_2+2s_3)\,,$$

Замечание 19. В предложении при классические полиномы Ньютона очень важна их универсальность.

(и sTr можно заменить на Tr)

4.3 Возвращение к березинианам

Мы ещё раз вернёмся к предложению 4.2.1.

Упражнение 21. *Пусть L оператор в n-мерном линейном пространстве.*

Рассмотреть многочлен $\det(1+zL)$ *'разложив' его в окрестности нуля и бесконечности. Сравнив полученные выражения придём к формулам*

$$\underbrace{L\wedge\cdots\wedge L}_{k\ \text{раз}} = \det L\,\underbrace{L^{-1}\wedge\cdots\wedge L^{-1}}_{N-k\ \text{раз}}, \dim V = N\,.$$

Обсудим, что за ними стоит. Немного теории.

Пусть задано представление $\rho()$ группы обратимых операторов в линейном пространстве V. Контргредиентное представление определяется как представление $\mapsto \rho(A^{-1})$

Левая часть формулы, это след представления

$\underbrace{\rho\wedge\cdots\wedge\rho}_{k\ \text{раз}}$ группы. Правая часть есть след представления

$\det\rho\,\underbrace{\rho^*\wedge\cdots\wedge\rho^*}_{N-k\ \text{раз}}$, где $\rho^* : GL(V^*)\to GL(V^*)$ контрагредиентное представление:

$$\rho^*(A) = \big(\rho(A^{-1})\big)^*$$

Отметим, что если $A\colon V\to V$ и $B\colon V\to V$ то * и B^* и $^{-1}$ и B^{-1} отображают в "другую сторону а $(A^{-1})^*$ в ту же:

$$(AB)^* = B^*A^*, (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \text{а} \quad \big((AB)^{-1}\big) = \big((A)^{-1}\big)\cdot\big((B)^{-1}\big)\ .$$

На матричном уровне это обратная транспонированная матрица. Поэтому за тождеством философски стоит *естественный изоморфизм*

$$\underbrace{V\wedge\cdots\wedge V}_{k\ \text{раз}} = \underbrace{\det V\otimes V\wedge\cdots\wedge V}_{k\ \text{раз}}$$

Это и есть естественная версия звёздочки Ходжа.

Упражнение 22. *Рассмотрим матрицу* $=\begin{pmatrix} a & \beta\\ \gamma & d\end{pmatrix}$ *Вычислить собственные значения этой матрицы.*

`Решение`

Пусть эта матрица имеет λ в качестве чётного (бозонного) собственного значения и пусть эта матрица имеет μ в качестве нечечётного (фермионного) собственного значения. Тогда $\mathrm{sTr}\ M = a - d = \lambda - \mu$ и

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & \beta\\ \gamma & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & \beta\\ \gamma & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+\beta\gamma & \dots\\ \dots & d^2+\gamma\beta\end{pmatrix}$$

Имеем

$$\begin{cases}\mathrm{sTr}\ M = \lambda - \mu = a - d \mathrm{sTr}\ M^2 = \lambda^2 - \mu^2 = a - d + 2\beta\gamma\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lambda = a + \frac{\beta\gamma}{a-d}\\ \mu = d + \frac{\beta\gamma}{a-d}\end{cases}$$

А что делать если $a = d$?

4.4 Об одной проблеме стандартной формулы о березиниане

Почему мы пошли эттим путем? Ведь у нас уже была формула для березиниана? Напомним (см. определение 9):

Пусть M чётная $p|q \times p|q$ матрица:

$$M = \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} \tag{37}$$

A это $p \times p$ матрица с чётными элементами, β это $p \times q$ матрица с нечётными элементами, Γ это $q \times p$,матрица с нечётными элементами и D $q \times q$ матрица с чётными элементами, тогда

$$\mathrm{Ber} M = \mathrm{Ber}\begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} = \frac{\det\left(A - \beta D^{-1}\Gamma\right)}{\det D}\,. \tag{38}$$

Попробуем воспользовавшись стандартной формулой для березиниана посчитать нашу рациональную функцию

$$R_M(z) = \mathrm{Ber}\left(1 + z\begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix}\right)$$

Подробные вычисления показывают, что в итоге получается:

$$R_M(z) = \mathrm{Ber}\left(1 + z\begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix}\right) = \frac{\text{полином степени } p + pq \text{ по } z}{\text{полином степени } q + pq \text{ по } z}$$

а с другой стороны мы знаем и исследуем формулу (34) в которой

$$R_M(z) = \mathrm{Ber}\left(1 + z\begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix}\right) = \frac{\text{полином степени } p \text{ по } z}{\text{полином степени } q \text{ по } z}$$

Формула Березина приводит к сокращению числителя и знаменателя на многочлен степени pq!

Уже в простом случае $p = q = 1$ формула Березина даёт ответ:

$$R_M(z) = \mathrm{Ber}\left(1 + z\begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Ber}\begin{pmatrix} 1 + az & \beta \\ \Gamma & 1 + dz \end{pmatrix} = \frac{(1 + az)(1 + dz) - \beta\Gamma}{1 + dz}$$

Кажется, что в этой формуле имеем дело с отношением квадратичных полиномов по z, а нет , используя результаты упражнения 22 легко получить, что

$$\mathrm{Ber}\begin{pmatrix} 1 + az & \beta \\ \Gamma & 1 + dz \end{pmatrix} = \frac{(1 + az)(1 + dz) - \beta\Gamma}{1 + dz} = \frac{1 + \lambda z}{1 + \mu z} = \frac{1 + z\left(a + \frac{\beta\gamma}{a-d}\right)}{1 + z\left(a + \frac{\beta\gamma}{a-d}\right)}\,.$$

4.5 Возвращение к формуле $R_A(z) = \mathbf{Ber}(1+Az)$

Функция $\mathrm{Ber}(1+zA)$ можно разложить не только в в окрестноsти нуля, но и в окрестности другой точки, например, бесконечности[5]

Предложение 4.

$$
Ber(1+zA) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k^*(A) z^k, \qquad где \begin{cases} c_k^*(A) = BerA\mathrm{Tr}\,\Lambda^{p-q-k}A^{-1} & для\ целых\ k \leq p-q \\ c_k^*(A) = 0 \quad для\ целых\ k > p-q \end{cases}
$$

`Proof` На основаниии первого предложения получаем

$$
\mathrm{Ber}(1+zA) = \mathrm{Ber}(zA)\mathrm{Ber}\left(1 + \frac{1}{z}A^{-1}\right) = \mathrm{Ber}Az^{p-q}\sum_{i\in\mathbf{Z}}\frac{1}{z^i}c_i(A^{-1}) =
$$

$$
\mathrm{Ber}A\left(1 + \frac{1}{z}\mathrm{Tr}\,A^{-1} + \frac{1}{z^2}\mathrm{Tr}\,\left(A^{-1}\wedge A^{-1}\right) + \frac{1}{z^3}\mathrm{Tr}\,\left(A^{-1}\wedge A^{-1}\wedge A^{-1}\right) + \dots\right)
$$

$$
\sum_{k\leq p-q}\overbrace{\mathrm{Ber}Ac_{p-q-k}(A^{-1})}^{c_k^*}z^k = \sum c_k^*(A)z^k\,,
$$

где

$$
c_k^*(A) = \begin{cases} \mathrm{Ber}Ac_{p-q-k}(A^{-1})\text{if } k = p-q, p-q-1, \dots \\ 0 \quad \text{if } k > p-q \end{cases}
$$

Что можно сказать о последовательностях $\{c_k\}$ и $\{c_k^*\}$?

Оказывается, изучая эти последовательности мы попадаем в мир возвратнух последовательностей; более удивительно, что изучая этот мир мы пишем новые формулы для березиниана.

Мы приходим к теореме, что

Теорема 6. *Для линейного оператора, действующего в $(p|q)$-мерном суперпространстве разница последовательностей c_k (см. Предложение 1) и c_k^* (см. Предложение 2)*

$$
\gamma_k = c_k - c_k^*
$$

есть возвратная последовательность периода q.

Эта теорема позволяет написать другую формулу для березиниана:

Мы не будем доказывать этой вообшем-то элементарной теоремы, но разберём примеры

[5]Интересно, что получиться если это сделать в другой, не бесконечно удалённой точке...

Пример 4.3. Пусть L линейный оператор в $p|q$-мерном суперпространстве и $q = 1$.

$$\mathrm{Ber}(1 + zL) = \frac{1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_p z^p}{1 + \mu z} = \sum c_k(L) z^k$$

Мы видим, что при больших (например начиная с c_p последовательность становится геометрической[6] В этом проявляется фернионная размерность!,

Упражнение 23. *Написать разложение функции* $\frac{1}{1-z}$ *в нуле и в бесконечности* ,

Упражнение 24. *Написать разложение функции* $\frac{z^2}{z^2-z-1}$ *в нуле и в бесконечности*

Решение

Разложение в нуле

$$\frac{z^2}{z^2 - z - 1} = \sum_{k \geq 2} c_k z^k, \quad \begin{cases} a_k = c_{k-2} - c_{k-1} - c_k \\ c_2 = -1, c_3 = 1 \end{cases}$$

Мы приходим к

$$\begin{cases} c_k = -a_k - c_{k-1} + c_{k-2}, a_k = \delta_{20}\,, \\ c_2 = -1, c_3 = 1 \end{cases}$$

Разложение в бесконечности. Как бы та же формула, но другие граничные условия

$$\frac{z^2}{z^2 - z - 1} = 1 + \frac{1}{z} + \cdots = \sum_{\leq 0} c_k^* z^k\,,$$

Мы приходим к

$$\begin{cases} c_k = -a_k - c_{k-1} + c_{k-2}, a_k = \delta_{20}\,, \\ c_0 = 1, c_{-1} = 1 \end{cases}$$

мы видим, что

$$\gamma_n = c_n - c_n^* = 1$$

то есть теорема подтверждается.

Пусть L оператор, такой, что

$$\mathrm{Ber}(1 + zL) = \frac{1 + z + z^2}{1 + z - z^2}$$

Что можно сказать об операторе L. Например, можно ли сказать, что $\mathrm{Ber}L = -1$? А чему равен суперслед L.?

Решение

Сравнивя с формулой (34) получим

$$\mathrm{Ber}L = \frac{\prod \lambda_i}{\prod_\alpha \mu} = \frac{1}{-1} = -1\,.$$

[6].

4.6 Теорема 6 и вычисления березинианов

Используя теорему (6) мозно с лёгкостью посчитать березиниан так как

$$\mathrm{Ber} A = c^*_{p-q}$$

Для этого нужно уметь распознавать возвратную последовательность. Как?

Вспомним школьное упражнение

Предложение 5. *Последовательность $\{c_k\}$ геометрическая если и только если*

$$\det \begin{pmatrix} c_k & c_{k+1} \\ c_{k+1} & c_{k+2} \end{pmatrix} = 0$$

А теперь почти школьное упражнение

Предложение 6. *Последовательность $\{c_k\}$ возвратная последовательность периода q если и только если соответствующие детерминанты Ганкеля зануляются, Например, последовательность $\{c_k\}$ возвратная периода 2 (как Фибиначчи) если и только если*

$$\det \begin{pmatrix} c_k & c_{k+1} & c_{k+2} \\ c_{k+1} & c_{k+2} & c_{k+3} \\ c_{k+2} & c_{k+3} & c_{k+4} \end{pmatrix} = 0$$

и.т.д.

При помощи Ганкелей и использованием определителей посчитаем березинианы матриц в $p|q$-мерных пространствах

$q = 1$

Пример 4.4. Пусть действует в $p|1$-мерном суперпространстве.

Имеем

$$\sum_{k \le p-1} c^*_k z^k = R_A(z) = \frac{P(z)}{1 + \mu z} = \sum_{k \ge 0} c_k z^k$$

и

$$\gamma_k = c_k - c^*_k - - - \text{ геометрическая прогрессия}$$

Значит

$$\det \begin{pmatrix} \gamma_{p-1} & \gamma_p \\ \gamma_p & c_{p+1} \end{pmatrix} == 0 \det \begin{pmatrix} c_{p-1} - \mathrm{Ber} A & c_p \\ c_p & c_{p+1} \end{pmatrix} == 0$$

Отсюда получим, что для пространств размерности $p|1$

$$\mathrm{Ber} A = \frac{1}{c_{p-1}} \det \begin{pmatrix} c_{p-1} & c_p \\ c_p & c_{p+1} \end{pmatrix}$$

Пример 4.5. Пусть действует в $p|2$-мерном суперпространстве.

Имеем

$$\sum_{k\le p-1} c_k^* z^k = R_A(z) = \frac{P(z)}{1+pz+qz^2} = \sum_{k\ge 0} c_k z^k$$

Рассмотрим частный случай, когда многочлен в знаменателе имеет вид $1+z+z^2$,то есть $c_{k+2} = c_k + c_{k+1}$ (начиная с некоторого номера), Имеем для

$$\gamma_k = c_k - c_k^* - - - \text{геометрическая прогрессия}$$

поаследовательность a la Fibonacchi, то есть

$$0 = \det \begin{pmatrix} \gamma_{p-2} & \gamma_{p-1} & \gamma_p \\ \gamma_{p-1} & \gamma_p & \gamma_{p+1} \\ \gamma_p & \gamma_{p+1} & \gamma_{p+2} \end{pmatrix} == 0 \det \begin{pmatrix} c_{p-2} - \mathrm{Ber}A & c_{p-1} & c_p \\ c_{p-1} & c_p & c_{p+1} \\ c_p & c_{p+1} & c_{p+2} \end{pmatrix} == 0$$

Отсюда получим, что для пространств размерности $p|2$ типа Fibonacchi

$$\mathrm{Ber}A = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} c_p & c_{p+1} \\ c_{p+1} & c_{p+2} \end{pmatrix}} \det \begin{pmatrix} c_{p-2} & c_{p-1} & c_p \\ c_{p-1} & c_p & c_{p+1} \\ c_p & c_{p+1} & c_{p+2} \end{pmatrix}$$

На самом деле используя хорошую математику ето все можно переписать в следующем виде

Теорема 7. *Березиниан линейного оператора в $p|q$-мерном пространстве равен отношению следов представлений в инвариантных подпрстранствах, соответствующих прямоугольным диаграммам Юнга $D(p.q+1)$ и $D(p.q+1)$*[7]

$$BerA = \frac{|\mathrm{Tr}\wedge^{p-q} A \dots \mathrm{Tr}\wedge^{p} A|_{q+1}}{|\mathrm{Tr}\wedge^{p-q+2} A \dots \mathrm{Tr}\wedge^{p+1} A|_{q}} = \pm \frac{\mathrm{Tr}\, A_{D(p,q+1)}}{\mathrm{Tr}\, A_{D(p+1,q)}} \tag{39}$$

Тут стоят детерминанты Ганкеля $q+1$ и q составленные из суперследов внешних степеней A.

Лекция 12 апреля.

[7]Пусть $D_{\lambda_1,\dots,\lambda_s}$-диаграмма Юнга ($\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \dots \ge \lambda_s$), пусть V_D, инвариантное подпространство в тензорном произведении $\underbrace{V\otimes\dots\otimes V}_{N=\lambda_1+\dots+\lambda_s \text{ раз}}$, соответствующее диаграмме V_D.

Пусть A-линейный оператор в V ,

След оператора в подпространстве соответствующем диаграмме Юнга равен

$$\mathrm{Tr}\, A_{V_D} = \det(||a_i j||)$$

где $||a_{ij}||$ $s\times s$ матрица, равная

$$a_{ij} = \underbrace{\mathrm{Tr}\,(A\wedge\dots\wedge)}_{\lambda_i+j-i \text{ раз}}$$

5 Супермногообразия

5.1 Многообразия

Напомним многообразия. Мы обсудим два примера: сферу и кокасательное расслоение,
`Напомнить`

Пример 5.1. n-мерная сфера в $\mathbf{E}^{n+1}$:

$$({}^{1})^2 + \ldots ({}^{n+1})^2 = 1\,.$$

stereographic coordinates on the sphere Возьмём северный полюс N и южный полюс S

Первая карта: координаты $u^i = u^i_{(N)}$

$$\frac{u^i}{x^i} = 1 - z\,, \quad (z = x^{n+1})$$

Приходим к

$$\begin{cases} x^i = \frac{2u^i}{1+u^2} \\ x^{n+1} = \frac{u^2-1}{1+u^2} \end{cases}$$

Вторая карта: координаты $u^i = u^i_{(S)}$

$$\frac{u^i}{x^i} = 1 + z\,, \quad (z = x^{n+1})$$

Приходим к

$$u^i_{(S)} = k u^i_{(N)}, \quad u^2_{(N)} u^2_{(S)} = 1\,.$$

Обсудить, что ответ не просто 'фокус-покус' а следствие теоремы Виета (в силу которой точки с рациональными координатами на сфере переходят в точки с рациональными стереографическими координататми.)

Пример 5.2. T^*M и каноническая симплектическая структура.

Рассмотрим локальные 'хорошие 'координаты $\{x^i, p_j\}$. При переходе к другим 'хорошим' координатам $\{x^{i'}, p_{j'}\}$,

$$p_{j'} = p_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\,.$$

Зададим невырожденную скобку Пуассона в таких 'хороших' координатах требованием, чтобы

$$\{x^i, x^j\} = 0\,, \quad \{p_i, x^j\} = \delta_i^j\,, \quad \{p_i, p_j\} = 0\,, \tag{40}$$

Конечно, при этом важно проверить корректность этого определения, то есть то, что формула (40) выполняется в любых 'хороших' координатах. Например проверим, что в любых 'хороших' координатах

$$\{p_{i'}, x^{j'}\} = \delta_{i'}^{j'}\,.$$

Имеем

$$\{p_{i'}, x^{j'}\} = \{p_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, x^k\} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \delta_i^k \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} = \delta_{i'}^{j'}\,.$$

5.2 Определение супермногообразия

Пусть $\left[\{x^i_{(\alpha)}\}\right]$ это атлас локальных координат на m-мерном многообразии M_0^m, где $\{x^i_{(\alpha)}\}$ определены в областях U_α и $x^i_{(\alpha)} = \Psi^i_{\alpha\beta}(x_{(\beta)})$ это функции перехода. Рассмотрим атлас $\left[\{x^i_{(\alpha)}, \theta^j_{(\alpha)}\}\right]$, где нечётные переменные $\{\theta^j_{(\alpha)}\}$ $(j = 1, \dots, n)$ являются образующими алгебры Грассманна и функции перехода

$$\begin{cases} x^i_{(\alpha)} = \widetilde{\Psi}^i_{(\alpha\beta)}(x_{(\beta)}, \theta_{(\beta)}) \\ \theta^j_{(\alpha)} = \Phi^j_{(\alpha\beta)}(x_{(\beta)}, \theta_{(\beta)}) \end{cases} \tag{41}$$

удовлетворяют следующим свойствам:
1) они сохраняют чётность, то есть. $p(\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}) = 0, p(\Phi_{\alpha\beta}) = 1$, где $p(x^i) = 0, p(\theta^j) = 1$,
2) $\widetilde{\Psi}_{\alpha\beta}(x_{(\beta)}, \theta_{(\beta)})\big|_{\theta^j=0} = \Psi_{\alpha\beta}(x_{(\beta)})$ и $\partial\Phi^j/\partial\theta^i_{(\beta)}$ являются обратимыми матрицами.

Выполняются условия коцикла:

$$\begin{cases} x^i_{(\alpha)} = \widetilde{\Psi}^i_{(\alpha\beta)}\left(\widetilde{\Psi}_{(\beta\gamma)}\left(x_{(\gamma)}, \theta_{(\gamma)}\right), \Phi_{(\beta\gamma)}\left(x_{(\gamma)}, \theta_{(\gamma)}\right)\right) = \widetilde{\Psi}^i_{(\alpha\gamma)}(x_{(\gamma)}, \theta_{(\gamma)}) \\ \theta^j_{(\alpha)} = \Phi^j_{(\alpha\beta)}\left(\widetilde{\Psi}^i_{(\beta\gamma)}(x_{(\gamma)}, \theta_{(\gamma)}), \Phi^j_{(\beta\gamma)}(x_{(\gamma)}, \theta_{(\gamma)})\right) = \Phi^j_{(\alpha\gamma)}(x_{(\gamma)}, \theta_{(\gamma)}) \end{cases} \tag{42}$$

Координаты $\{x^i_{(\alpha)}, \theta^j_{(\alpha)}\}$ определяют $(m.n)$-мерную суперобласть $\hat{U}^{m.n}_{(\alpha)}$ с подстилающей областью $U^m_{(\alpha)}$. Формулы склейки (41) определяют $(m.n)$-мерное супермногообразие, пдостилающим многообразием которого является M^m. Это определение супермногообразия, принадлежащее Ф. Березину и Д.Лейтесу (см. [?], [?]). В этом определении у супермногообразия 'нет точек'.

Гладкие функции и функции склейки

5.3 Первые примеры

A. **Суперсфера**

Take $\mathbf{R}^{p+1|2q}$ with coordinates

$$\underbrace{x^1 \dots x^{p+1}}_{\text{even}}, \underbrace{\xi^1 \dots x^{2q}}_{\text{odd}},$$

$$defofsphereS^{m|n}_\rho: \quad (x^1)^2 + \dots + (x^{p+1})^2 + 2\xi^1\xi^{m+q} + \dots + 2\xi^q\xi^{2q} = 1\,. \tag{43}$$

Например, $S^{1|2} \subset \mathbf{R}^{2|2}$.

Функции на $S^{p|2q}$ это функции на $\mathbf{R}^{p+1|q}$ modulo уравнение (**??**).
Координаты на сфере

- 'декартовы координаты'

$$\underbrace{x^1 \dots x^{p+1}}_{\text{even}}, \underbrace{\xi^1 \dots x^{2q}}_{\text{odd}},$$

- 'Соединяя' точку сферы с северным полюсом приходим к координатам

$$\begin{cases} u^i_{(N)} = \frac{x^i}{1-x^{n+1}}\,, \quad (i = 1, \dots, p) \\ \theta^\alpha_{(N)} = \frac{\xi^\alpha}{1-x^{n+1}}\,, \\ (\alpha = 1, \dots 2q) \end{cases}$$

- 'Соединяя' точку сферы с южным полюсом приходим к другим координатам

$$\begin{cases} u^i_{()} = \frac{x^i}{1-x^{n+1}}\,, \quad (i = 1, \dots, p) \\ \theta^\alpha_{()} = \frac{\xi^\alpha}{1-x^{n+1}}\,, \\ (\alpha = 1, \dots 2q) \end{cases}$$

  'Северные' и 'южные' координаты связаны соотношением:

$$u^i_{(N)} = \frac{u^i_{(S)}}{u^2_{(S)}}\,, =$$

  где $u^2 = u^i u^i + 2\theta^i \theta^{i+q}$

5.4 Векторные расслоения и супермногообразия

:

Определение 10. Пусть задано гладкое многообразие B. Вещественное векторное расслоение ξ над пространством B это

- топологическое пространство $E = E(\xi)$, *пространство расслоения*
- непрерывное отображения $p\colon E \to B$, проекция
- заданное для каждого $b \in B$ структура векторного пространства на $p^{-1}(b)$
- Выполняется условие *локальной тривиальности*: существует число n, такое, что для каждой $b \in B$ существует окрестность $U \subseteq B$ и гомеоморфизм

$$h\colon U \times \mathbf{R}^n \to p^{-1}(U)\,. \tag{44}$$

  При этом соответствие $x \to h(x, b)$ определяет изоморфизм векторных пространств $\mathbf{R}^n$ и $p^{-1}(b)$. Пара (U, h) называется локальной координатной системой для расслоения ξ в окрестности точки b.

  Если можно взять U равному B,то расслоение ξ называют *тривиальным расслоением.*

Замечание 20. Все объекты даже если это специально не упомянуто будут гладкими.

5.4.1 Векторные расслоения и супермногообразия

Пусть $\xi = \xi(B, E, n)$ локально тривиальное векторное расслоение и пусть $\mathfrak{A} = \{\varphi_{(\alpha)} x^i_{(\alpha)}\}$ какой нибудь атлас на B.

Тогда изоморфизмы (44) для каждой функции перехода $\Psi_{\alpha\beta} = \varphi_{(\alpha)} \circ \varphi^{-1}_{(\beta)}$ определяет линейное отображение, изоморфизм $\mathbf{R}^n$ на себя. Этот изоморфизм, конечно, зависит от точки:

$$\rho_{\alpha\beta}(b, \mathbf{x}) = h^{-1}_{(\alpha)} \circ h_{(\beta)}(b, \mathbf{x})$$

При этом соблюдается условие коцикла: для точек, лежащих в пересечении $U_{(\alpha)} \cap U_{(beta)} \cap U_{(gamma)}$ (в которых одновременно определены локальные координаты $_{(\alpha)}$, $_{(\beta)}$ и $_{(\gamma)}$)

$$\rho_{\alpha\beta} \circ \rho_{\beta\gamma} \circ \rho_{\gamma\alpha} = \mathbf{id}$$

Легко понять, что верно и обратное: задание для произвольного атласа на B, набора изоморфизмов $\rho_{\alpha\beta}$, подчиняющих условиям коцикла, задаёт расслоение.

Теорема 8. *Каждое векторное расслоение $E \to B$ канонически задаёт $(p|q)$-мерное супермногообразие ΠE, где p размерность базы и $q = n$ есть размерность векторного пространства.*

Замечание 21. Измельчением покрытия и выбором новых переменных можно добиться того, чтоб в функциях склейки (41) исчезли 'высшие хвосты':

$$\begin{cases} x^i_{(\alpha)} = \widetilde{\Psi}^i_{(\alpha\beta)}(x^-_{(\beta)}) \\ \theta^j_{(\alpha)} = \theta^i \Phi^j_i(\alpha\beta)(x_{(\beta)}) \end{cases} \tag{45}$$

Мы приходим к теореме

Теорема 9. *(теорема Березина —Гавенского–Бачелора) Для каждого гладкого супермногообразия F существует векторное расслоение $E \to B$, такое, что $\Pi E = F$.*

Эта теорема верна лишь в гладкой категории.

5.5 Супермногообразие ΠTM и ΠT^*M

. Пусть M произвольное многообразие и пусть $\{x^i_{(\alpha)}\}$ это произвольный атлас на M. Рассмотрим касательное расслоение TM и кокасательное расслоение T^*M. Пусть $\{x^i_{(\alpha)}\}$ это произвольный атлас на M.

Пусть $\{v^j_{(\alpha)}, x^i_{(\alpha)}\}$ атлас на TM и $\{p_{j(\alpha)}, x^i_{(\alpha)}\}$ атлас на T^*M, соответствующие атласу $\{x^i_{(\alpha)}\}$ на M, то есть при замене карты

$$v^j_{(\beta)} = v^i_{(\alpha)} \frac{\partial x^j_{(\alpha)}}{\partial x^i_{(\beta)}}\,, \qquad p_{j(\beta)} = p_{i(\alpha)} \frac{\partial x^i_{(\alpha)}}{\partial x^j_{(\beta)}}\,. \tag{46}$$

Мы придём от многообразия к супермногообразию ΠTM если мы обратим чётности слоёв в супермногообразии T^*M, то есть если заменим координаты $v^{j\beta}$ на нечётные координаты $\xi^{j\beta}$, которые при замене карты буду изменяться по тому же закону, что и координаты $v^{j\beta}$ в (46); соответственно мы придём от многообразия T^*M к супермногообразию ΠT^*M если мы обратим чётности слоёв в супермногообразии T^*M, то есть если заменим координаты $p_{j\beta}$ на нечётные координаты $\theta_{j\beta}$, которые при замене карты буду изменяться по тому же закону, что и координаты $p_{j\beta}$ в (46);

Определение 11. Пусть $\{x^i_{(\alpha)}\}$ произвольный атлас на M.

Мы назовём атласы,

$$
\begin{array}{cc}
\{x^i_{(\alpha)}, p_{j(\beta)}\} & \text{на многообразии } T^*M \\
\{x^i_{(\alpha)}, \theta_{j(\beta)}\} & \text{на супермногообразии } \Pi T^*M \\
\{x^i_{(\alpha)}, v^j_{(\beta)}\} & \text{на многообразии } TM \\
\{x^i_{(\alpha)}, \xi^j(\beta)\} & \text{на многообразии } \Pi TM
\end{array}
\tag{47}
$$

построенные с помощью формул (46) *каноническими атласами* или, *естественными атласами*, соответствующими атласу $\{x^i_{(\alpha)}\}$ на M.

Отметим существование канонических чётной и нечётной симплектических структур на кокасательном многообразии T^*M и на ассоциированном с ним супермногообразии ΠT^*M. Пусть $\{x^i_{(\alpha)}\}$ произвольный атлас на M. Тогда рассмотрим канонические атласы $\{p_{j(\alpha)}, x^i_{(\alpha)}\}$ на многообразии T^*M и $\{f_{j(\alpha)}, x^i_{(\alpha)}\}$ на супермногообразии ΠT^*M, соответствующие атласу $\{x^i_{(\alpha)}\}$ (см. выше в этом пасраграфе замечание 11).

Рассмотрим каноническую чётную скобку Пуассона $\{\_,\_\}_0$ на многообразии T^*M, генерируемую соотношениями

$$
\{x^i(\alpha), x^j(\alpha)\}_0 = 0\,, \quad \{p_{j(\alpha)}, p_{i(\alpha)}\}_0 = 0\,, \quad \{p_{j(\alpha)}, x^i_{(\alpha)}\}_0 = \delta^i_j\,.
$$

Легко заметить, что это определение не зависит от карты. Например, если одна и та же точка на T^*M находится как в карте $U_{(\alpha)}$ так и в карте $U_{(\beta)}$, то в силу соотношений (46) и правила Лейбница для скобки имеем

$$
\{p_{j(\beta)}, x^i_{(\beta)}\}_0 = \left\{p_{r(\alpha)} \frac{\partial x^r(x_{(\beta)})}{\partial x^j_{(\beta)}}, x^i_{(\beta)}\right\} = \frac{\partial x^r(x_{(\beta)})}{\partial x^j_{(\beta)}} \left\{p_{r(\alpha)}, x^i_{(\beta)}\right\} =
$$

$$
\frac{\partial x^r(x_{(\beta)})}{\partial x^j_{(\beta)}} \frac{\partial x^i_{\beta)}}{\partial x^m_\alpha} \{p_{r(\alpha)}, x^m_{(\alpha)}\} = \frac{\partial x^r(x_{(\beta)})}{\partial x^j_{(\beta)}} \frac{\partial x^i_{\beta)}}{\partial x^m_\alpha} \delta^m_r\,.
$$

Можно рассмотреть аналогично каноническую нечётную скобку Пуассона $\{\_,\_\}_1$ на супермногообразии ΠT^*M,С генерируемую соотношениями

$$
\{x^i(\alpha), x^j(\alpha)\}_1 = 0\,, \quad \{\theta_{j(\alpha)}, \theta_{i(\alpha)}\}_1 = 0\,, \quad \{\theta_{j(\alpha)}, x^i_{(\alpha)}\}_1 = \delta^i_j\,.
$$

(Эта скобка имеет и другие названия: скобка Бюттен, скобка Схоутена, антискобка:шя)

Замечание 22. Соотношения (5.5) означает, что координаты $\{x^i, \theta_j\}$ являются координатами Дарбу на ΠT^*M (равно как соотношения (5.5) означают, что координаты $\{x^i, p_j\}$ являются координатами Дарбу на T^*M). Легко понять, что эти координаты Дарбу однозначно строятся по любому атласу локальных координат на .

Предложение 7. *Пусть M произвольное многообразие.*

1. На супермногообразии ΠTM существует каноническая форма объёма, которая равна координатной форме объёма $D(x, \xi)$ в произвольных канонических координатах соответствующим атласу координат $\{x^i_{(\alpha)}\}$ произвольного атласа на M,

2. Произвольная форма объёма σ на M определяет форму объёма $\mathfrak{r}_\sigma$ на ΠT^*M, поднятие этой формы

3.Если σ произвольная форма объёма на M, то существует атлас на M, такой, что форма объёма σ становится координатной формой объёма в этом атласе. Если $\{x^i_\alpha\}$ произвольный атлас в котором форма σ является координатной формой, то поднятие $\mathfrak{r}_\sigma$ формы объёма σ с многообразия M на супермногообразие ΠT^*M также является координатной формой объёма в канонических координатах соответствующих атласу $\{x^i_\alpha\}$:

$$\text{если в атласе } \{x^i_\alpha\}\ \sigma = D(x) \Rightarrow \mathfrak{r}_\sigma = D(x, f)\,.$$

`Proof` Пусть $\{x^i_{(\alpha)}\}$ $\{x^{i'}_{(\beta)}\}$ два произвольных атласа на M и $\{x^i_{(\alpha)}, r^j_{(\alpha)}\}$, $\{x^{i'}_{(\beta)}, r^{j'}_{(\beta)}\}$: соответствующие канонические атласы на ΠTM. Легко понять, что переход от одних координат к другим (если пересечения соответствуюэих карт не пусто) унимодулярен:

$$\mathrm{Ber}\left(\frac{\partial(x,r)}{\partial(x',r')}\right) = \mathrm{Ber}\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial r}{\partial x'} \\ \frac{\partial x}{\partial r'} & \frac{\partial r}{\partial r'} \end{pmatrix} = \mathrm{Ber}\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial r}{\partial x'} \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial x'} \end{pmatrix} = \frac{\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)}{\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)} = 1\,.$$

$$\frac{D(x,r)}{D(x',r')} = \mathrm{Ber}\left(\frac{\partial(x,r)}{\partial(x',r')}\right) = 1\,,$$

то есть форма объёма $D(x, r)$ корректно определена. Мы доказали пункт 1 предложения 7.

Конец лекции 12 апреля

Лекция 19 апреля

6 Интегрирование по поверхностям

Дифференциальные формы.

Определения. Примеры. Интегрирование дифференциальных форм

ω–1-форма

$$\int_\gamma \omega = \lim_{\Delta\to 0} \sum \omega(\xi_i)\,.$$

Если ω–k-форма, C-k-мерная поверхность разбивается на k-мерные (криволинейные) параллелипипеды

Интеграл k-формы в ориентированном $\mathbf{R}^k$.

$$\omega = a(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k, , \int \omega_D = \int a(x)dx^1 \dots dx^k \,,$$

где $({}^1, \dots, x^k)$ *ориентирующая* система координат в $\mathbf{R}^k$.

Операция $f^*\omega$

Пусть ω–k-форма в $\mathbf{R}^n$, $n > k$,

D–область в $\mathbf{R}^k$

'путь интегрирования'–$\sigma = (D, f, Or)$

a) D-область в $\mathbf{R}^k$.

b) $f\colon D \to M$

c) ориентация $\mathbf{R}^k$, Or.

Определение:

$$\int \omega_\sigma = \int_D f^*\omega \,.$$

Цепи

Интеграл от формы по цепи.

Упражнение 25. *Определить поток векторного поля через поверхность, доказать теорему Остроградского-Гаусса*

Теорема 10.

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega \,.$$

`Решение` Пусть $\mathbf{K}$ векторное поле на $\mathbf{E}^3$, Ω-форма объёма, и M-поверхность в $\mathbf{E}^3$. Поток векторного поля через поверхность. это интеграл по поверхности от 2-формы $\iota_{\mathbf{K}}\Omega$.

Теперь пусть $M = \partial D$, тогда

$$\text{поток векторного поля через границу поверхности} =$$

$$\int_{\partial D} \iota_{\mathbf{K}}\Omega = \int d\left(\iota_{\mathbf{K}}\Omega\right) = \int_D \operatorname{div}\mathbf{K}\Omega$$

где

$$\operatorname{div}\mathbf{K} = \frac{\iota_{\mathbf{K}}\Omega}{\Omega} = \frac{\mathfrak{L}_{\mathbf{K}}\Omega}{\Omega} \,.$$

$M = \partial D$

Упражнение 26. *Рассмотреть $\varphi = -\frac{1}{r}$. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{R}_{d\varphi}$*

В этом упражнении мы будем использовать kak сферические так декартовы координаты в $\mathbf{E}^3$.

`Решение` В сферических координатах 1-форма

$$d\Phi = \frac{dr}{r^2}\,,$$

квадрат элемента длины:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

то есть вектор дуальный ковектору $d\varphi$ будет

$$\mathbf{K} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\,, \text{(закон Кулона)}$$

так как форма объёма

$$\Omega = dx \wedge dy \wedge dz = r^2 \sin^\theta dr \wedge \wedge d\varphi$$

то внутреннее произведение формы поля $\mathbf{K}$ на форму объёма есть

$$\iota_{\mathbf{K}}\Omega = \iota_{\frac{\partial}{r^2\partial r}}(dx \wedge dy \wedge dz) = \iota_{\frac{\partial}{r^2\partial r}}\left(r^2 \sin\theta dr \wedge d\theta \wedge d\varphi\right) =$$

$$\sin\theta d\theta \wedge d\varphi\,.$$

Мы приходим к

$$\text{поток векторного поля } q\mathbf{K} \text{ через поверхность равен } \int \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi q\,.\text{(закон Гаусса)}$$

v Соответствие

$$\text{дифференциальная форма на } --- \text{ гладкая функция на } \Pi T^*M ---$$

$$\text{дифференциал де Рама } d --- \text{ векторное поле на } \Pi T^*M$$

Формы на ΠTM

Пусть M многообразие.

Рассмотрим TM и ΠTM, меняя чётность координат слоя.

Если $x^1, \dots, x^n$)—локальные координаты на , то $(x^1, \dots, x^n, dx^1, \dots, dx^n)$ локальные координаты на ΠTN.

Если x^i чётные координаты, то dx^i нечётные координаты: $p(dx^i) = p(x^i) + 1$. Функции на ΠT это дифференциальнуе формы на :

$$\omega(x, dx) = \underbrace{\omega(x)}_{\text{0-form}} + \underbrace{\omega_i(x)dx^i}_{\text{1-form}} + \cdots + \underbrace{\omega_{\text{top}}(x)dx^1dx^2\dots dx^n}_{n\text{-form}}$$

If N is a supermanifold then $\omega(x, dx)$ is pseudodifferential form. We do it later

Каноническая форма объёма на ΠT Пусть $(x^{i'}, dx^{j'})$ новые локальные координаты: $\begin{cases} x^i = x^i(x^{i'}) \\ dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} d \end{cases}$

Березиниан преобразования равен

$$\left|\frac{\partial(x, dx)}{\partial(x', dx')}\right| = \mathrm{Ber}\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial dx}{\partial x'} \\ \frac{\partial x}{\partial dx'} & \frac{\partial dx}{\partial dx'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial^2 x}{\partial x' \partial x'} dx' \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial x'} \end{pmatrix} = 1\,.$$

Мы пришли к канонической форме объёма $D(x, dx)$

$$D(x, dx) = \underbrace{\mathrm{Ber}\,\frac{\partial(x, dx)}{\partial(x', dx')}}_{\text{equals to 1}} D(x', dx')\,.$$

и определим интеграл на ΠT.

Интеграл по ΠTM

$$\int_{\Pi TN} \omega(x, dx) D(x, dx) =$$

$$\int_{\Pi TN} \left(\omega(x) + \omega_i(x) dx^i + \cdots + \omega_{\mathrm{top}}(x) dx^1 dx^2 \ldots dx^n\right) D(x, dx) =$$

$$\int_M \omega_{\mathrm{top}}(x) D(x) = \int_M \omega\,.$$

.

: Thus we arrive at invariant definition of integral of pseudodifferential form $\omega(x, dx)$ in the case if is a superspace.

Интегрирование вдоль поверхности

Пусть C поверхность in . Пусть C определено отображением $D \xrightarrow{\varphi} N$. Пусть $\omega = \omega(x, dx)$ форма на .

Тогда $\int_C \omega = \int_D \varphi^* \omega$. Если $\varphi\colon\ x^i = x^i(\xi^\alpha)$ то

$$\int_C \omega = \int_D \omega\left(x^i(\xi), \frac{\partial x^i(\xi)}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha\right) =$$

$$\int_{\Pi TD} \omega\left(x^i(\xi), \frac{\partial x^i(\xi)}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha\right) D(\xi, d\xi)\,,$$

где $D(\xi, d\xi)$ канони:шяческая форма обьёма на суперпространстве параметров ΠTD .

$$\int_C \omega = \int_{\Pi TC \subset \Pi TM} \omega\, D(\xi, d\xi)\,.$$

Псевдодифференциальные формы—функции на ΠTM.

6.1 Плотности и псевдодифференциальные формы

Мы представим некоторые результаты теории интегрирования (see [28], [64], [40]).

Пусть $\Omega^{m.n}$ $(m|n)$–мерная поверхность в суперпространстве $E^{M.N}$, заданная параметризацией $z^A = z^A(\zeta^B)$ (отображение суперпространства параметров $E^{m|n}$ в $E^{M|N}$ где $z^A = (x^1, \dots, x^M, \theta^1, \dots, \theta^N)$ координаты суперпространства $E^{M.N}$ и $\zeta^B = (\xi^1, \dots, \xi^m,\ \nu^1, \dots, \nu^n)$ координаты $E^{m.n}$ (параметры.)

Рассмотрим функционал $\Phi_A(\Omega)$ заданный на суперпространстве $(m|n)$–поверхностях выражением:

$$\Phi_A(\Omega) = \int A\left(z^A(\zeta), \frac{\partial z^A}{\partial \zeta^B}, \dots, \frac{\partial^k z^A}{\partial \zeta^{B_1} \dots \partial \zeta^{B_k}}\right) d^{m+n}\zeta \tag{48}$$

где A такая. что

$$A\left(z^A, \frac{\partial z^A}{\partial \tilde{\zeta}^B}, \cdots, \frac{\partial^k z^A}{\partial \tilde{\zeta}^{B_1} \dots \partial \tilde{\zeta}^{B_k}}\right) = \mathrm{Ber}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \tilde{\zeta}}\right) \cdot A\left(z^A, \frac{\partial z^A}{\partial \zeta^B}, \cdots, \frac{\partial^k z^A}{\partial \zeta^{B_1} \dots \partial \zeta^{B_k}}\right). \tag{49}$$

Если условие (49) соблюдается то функционал (48) не зависит от параметризации $z(\zeta)$ of the суперповерхности Ω.

Функция A уд. условиям (49) называется $(m|n)$ плотностью ранга k.

Плотность задаёт аддитивный функционал:

$$\Phi_A(\Omega_1 + \Omega_2) = \Phi_A(\Omega_1) + \Phi_A(\Omega_2).$$

6.2 Плотности и псевдодифференциальные формы

Пусть $W(z, z*)$ функция на ΠTM, где M супермногообразие

6.3 псевдодифференциальные формы и плотности

Преобразование Баранова-Шварца сопоставляет каждой псевдодофференциальной форме плотность...

6.4 Формы Воронова-Зорича

Рассмотрим подробнее случай, когда ранг равен единице.

$$A = A\left(z^A, \frac{\partial z^A}{\partial \zeta^B}\right). \tag{3.1.4}$$

Условие (49) перепишртся в виде

$$A\left(z^A, K^B_{B'} \frac{\partial z^A}{\partial \zeta^B}\right) = \mathrm{Ber}\, K \cdot A\left(z^A, \frac{\partial z^A}{\partial \zeta^B}\right). \tag{3.1.5}$$

$$\mathrm{Ber}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{Det}(A - BD^{-1}C)}{\mathrm{Det}\, D} \tag{3.1.6}$$

В обычном (не супер) случае, условие линейности по $\frac{\partial z^A}{\partial \zeta^B}$ $\Leftrightarrow$ дифференциальная форма:

k–форме $\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_k}$ соответствует плотность

$$A_\omega = < \frac{\partial z^{i_1}}{\partial \zeta^1}, \dots, \frac{\partial z^{i_k}}{\partial \zeta^k}, \omega >= k! \omega_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial z^{i_1}}{\partial \zeta^1} \dots \frac{\partial z^{i_k}}{\partial \zeta^k},$$

$$\Phi_A(\Omega^k) = \int_{\Omega^k} \omega\,. \tag{3.1.7}$$

Выполнение условия 3.1.5 связано с тем, что детерминант это полилинейная антисимметрическая функция от векторов $\frac{\partial x^a}{\partial \zeta^b}$.

Теорема Стокса соблюдается

$$\Phi_{A\omega}(\partial\Omega) = \Phi_{A_{d\omega}}(\Omega) \tag{3.1.8}$$

Замечание 23. Можно показать, что выполнение теоремы Стокса, достаточное условие: Плотность а необходимостью соответствует форме, если теорема Стокса выполняется.

Что происходит в суперслучае?

В обычной математике дифференц. форма одновременно и полилинейная функция и объэкт интегрирования. В суперслучае мы приходим к разным объектам к

$$\omega(\dots, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots) = -\omega(\dots, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \dots)(-1)^{p(u)p(v)}\,. \tag{3.1.9}$$

не имеет отношения к форме объёма.

Строя объекты интегрирования в суперслучае кмы должны быть внимательны к теореме Стокса,

Какие условия надо поставить на плотность, чтоб не нарушить теорему Стокса.

Пусть две $(m|n)$ поверхности Ω_0 и Ω_1 заданы параметризацией $z_0^A = z_0^A(\zeta^B)$ и $z_1^A = z_1^A(\zeta^B)$ и пусть

$$z^A = z^A(t, \zeta^B)\,,\ (0 \le t \le 1): \quad z(0, \zeta^B) = z_0(\zeta^B),\ z(1, \zeta^B) = z_1(\zeta^B) \tag{3.1.10}$$

это параметризация $(m+1|n)$ поверхности $\mathcal{V}$

$$\partial\mathcal{V} = \Omega_1 - \Omega_0 \tag{3.1.11}$$

A это плотность ранга 1 если

$$\Phi_A(\partial\mathcal{V}) = \Phi_A(\Omega_1) - \Phi_A(\Omega_0) = \int d\zeta^{m+n} \int_0^1 dt \frac{d}{dt} A\left(z^A(t, \zeta^B), \frac{\partial z^A(t, \zeta^B)}{\partial \zeta^B}\right) =$$

$$\int d\zeta^{m+n} \int dt \left[\left(\frac{dz^A}{dt}\frac{\partial A}{\partial z^A} + \frac{dz^A_B}{dt}\frac{\partial A}{\partial z^A_B}\right)\right] =$$

$$\int d\zeta^{m+n}\int dt\left[\frac{dz^A}{dt}\frac{\partial A}{\partial z^A}+\frac{d}{d\zeta^B}\left(\frac{dz^A}{dt}\frac{\partial A}{\partial z^A_B}\right)-\frac{dz^A}{dt}\frac{d}{\partial\zeta^B}\frac{\partial A}{\partial z^A_B}(-1)^{p(B)p(A)}\right]=$$

$$\int d\zeta^{m+n}dt(\frac{dz^A}{dt}\frac{\partial A}{\partial z^A}-(\frac{dz^A}{dt}\frac{\partial z^{A'}}{\partial\zeta^B}\frac{\partial^2 A}{\partial z^{A'}\partial z^A_B}+\frac{dz^A}{dt}\frac{\partial z^{A'}_{B'}}{\partial\zeta^B}\frac{\partial^2 A}{\partial z^{A'}_{B'}\partial z^A_B})(-1)^{p(A)p(B)})+\ . \tag{3.1.12}$$

(Обозначения: $z^A_B=\frac{\partial z^A}{\partial\zeta^B}$).

Мы видим, что вторые производные не дают вклад в интеграл если

$$\frac{dz^A}{dt}\frac{\partial^2 z^{A'}}{\partial\zeta^B\partial\zeta^{B'}}\frac{\partial^2 A}{\partial z^{A'}_{B'}\partial z^A_B}(-1)^{p(A)p(B)}=0\quad ..$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^{A'}_{B'}\partial z^A_B}=-(-1)^{p(B)p(B')+(p(B)+p(B'))p(A)}\frac{\partial^2 A}{\partial z^{A'}_B\partial z^A_{B'}} \tag{3.1.13}$$