

Лекции по суперматематике

Оганес М. Худавердян

10 апреля 2021 г.

Это конспект лекций на 10 апреля 2021
ИППИ, ИТМФ МГУ, мехмат МГУ

Содержание

1	Двойственное описание для точек и отображений	1
2	Отображения	3
3	Суперпространство	6
4	Березиниан (продолжение)	13
5	Супермногообразия	32

Очень грубо говоря, суперматематика, это наука в которой используются коммутирующие и антикоммутирующие переменные.

Обычные (коммутирующие) переменные $\{x^i\} = \{x^1, x^2, \dots, x^m\}$ принимают значения в числах, им можно сопоставить *точки*.

Антикоммутирующие переменные $\{\theta^a\} = \{\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n\}$ это символы, такие что

$$\theta^a \theta^b = -\theta^b \theta^a, \quad (x^i x^j = x^j x^i, x^i \theta^a = \theta^a x^i)$$

Им трудно сопоставить точки¹ Чтоб работать в суперматематике, нам надо освоить двойственный язык.

1 Двойственное описание для точек и отображений

1.1 Точки

Пусть \mathbf{R}^p - p -мерное аффинное пространство, (множество точек). Обозначим $A = C^\infty(\mathbf{R}^m)$ алгебру гладких функций на \mathbf{R}^m .

Мы иногда будем использовать алгебру $C(\mathbf{R}^m)$ алгебру непрерывных функций на \mathbf{R}^m .

Определение 1. каждой точке $P \in \mathbf{R}^p$ сопоставим гомоморфизм σ_P , такой, который сопоставляет каждой функции f её значение в этой точке:

$$\mathbf{R}^m \ni P \mapsto \sigma_P: \sigma_P(f) = f(P).$$

Понятно, что это гомоморфизм алгебры функций в числа, менее очевидно, что верно и обратное:

Теорема 1. Пусть D -область в \mathbf{R}^m , пусть σ_D произвольный ненулевой гомоморфизм алгебры функций $C^\infty(D)$ в \mathbf{R} :

$$\sigma_D \neq 0, \sigma_D(f + g) = \sigma_D(f) + \sigma_D(g), \sigma_D(fg) = \sigma_D(f)\sigma_D(g).$$

Тогда существует такая точка $P \in D$, что для любой функции $f \in C^\infty(D)$

$$\sigma_D(f) = f(P).$$

Иными словами множество точек области D = множеству гомоморфизмов из алгебры функций на D в вещественные числа.

Эта теорема позволяет реконструировать точки по алгебре функций $A = C^\infty(D)$. Заметим также, что она позволяет восстановить значение функции в точке. Если точка, это гомоморфизм σ алгебры функций в числа, то значение данной функции $f \in A$ на данной точке σ равно значению 'точки' σ на элементе f .

¹мы это сделаем в дальнейшем, используя язык так называемых Λ -точек.

Докажем эту теорему.

Доказательство теоремы.

Для простоты рассмотрим случай области $D = (0, 1)$.

Пусть σ гомоморфизм алгебры $A = C^\infty(0, 1)$ в \mathbf{R} . Пусть значение этого гомоморфизма на функции $f = x$ равно s : $\sigma(x) = s$. Покажем, что число $s \in (0, 1)$. Действительно, если $s \notin (0, 1)$, то функция $h = \frac{1}{x-s}$ хорошо определена и $\sigma(x-s) = 0$. Мы видим, что

$$\sigma\left((x-s)\frac{1}{x-s}\right) = \sigma(x-s)\sigma\left(\frac{1}{x-s}\right) = 0$$

и с другой стороны

$$\sigma\left((x-s)\frac{1}{x-s}\right) = 1.$$

Противоречие, значит $s \in [0, 1]$.

Теперь покажем, что для произвольной гладкой функции $g \in C^\infty(0, 1)$, выполняется условие $\sigma(g) = g(s)$. Пусть $\sigma(g) = t$. Мы хотим показать, что $t = g(s)$. Рассмотрим функцию

$$r = (x-s)^2 + (g-t)^2.$$

Легко понять, что $\sigma(r) = 0$, значит функция r необратима, (так как функция $\frac{1}{r}$ не существует). Мы приходим к выводу, что функция $r(\cdot)$ обращается в нуль, хотя бы в одной из точек интервала $(0, 1)$. Но если функция $r(x)$ обращается в нуль, то это может быть лишь точка $x = s$. Значит $g(s) = t$. ■

Упражнение 1. *Пройдет ли предыдущее доказательство, если алгебру гладких функций в $C^\infty(0, 1)$ заменить на алгебру непрерывных функций $C^0(0, 1)$.*

Упражнение 2. *Остнется ли верным утверждение, если алгебру гладких функций в $C^\infty([0, 1])$ заменить на произвольную алгебру функций, которые разделяют точки отрезка $[0, 1]$.*

Упражнение 3. *Найти и обсудить 'дырку' в следующем рассуждении*

Пусть σ гомоморфизм, такой, что $\sigma(x) = s \in \mathbf{R}$. Тогда очевидно, что $\sigma(x^2) = s^2$ и для любого натурального n , $\sigma(x^n) = s^n$. Значит для любого многочлена $P(x)$, $\sigma(P(x)) = P(s)$. Теперь теорема Вейерштрасса об аппроксимации гладкой функцией полиномами даёт, что для любой гладкой функции $g(x)$, $\sigma(g(x)) = g(s)$. ■

2 Отображения

Пусть снова \mathbf{R}^p - p -мерное аффинное пространство, (множество точек). Обозначим также $A = C^\infty(\mathbf{R}^m)$ алгебру гладких функций на \mathbf{R}^m .

Определение 2. каждому отображению $F: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ сопоставим гомоморфизм τ_F , такой, который сопоставляет каждой гладкой функции на \mathbf{R}^m ($f \in C^\infty(\mathbf{R}^m)$) гладкую функцию на \mathbf{R}^n ($\tau_F(f) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$) такую, что значение функции $\tau_F(f)$ на произвольной точке $P \in \mathbf{R}^m$ равно значению функции f на точке $Q = F(P)$:

$$\tau_F(f)(P) = f(F(P)) .$$

Замечание 1. Правило 'против шёрстки' Отображения F и гомоморфизм функций τ_F идут в противоположных изложениях ('против шёрстки').

Замечание 2. Гомоморфизм (2) построенный по отображению F обозначают F^* ,

Так же как и в случае точек верно и обратное

Теорема 2. Пусть U -область в \mathbf{R}^m и V -область в \mathbf{R}^n , и τ гомоморфизм (против 'шёрстки') алгебры $C^\infty(V)$ в алгебру $C^\infty(U)$. Тогда существует отображение $F: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ такое, что

$$\tau = F^* , \text{ то есть для любой функции } f \in C^\infty(V) \tau(f) = f(F(P)) .$$

Иными словами множество отображений = множеству гомоморфизмов из алгебры функций на V в алгебру функций на U .

Докажем эту теорему.

Доказательство теоремы.

Пусть P произвольная точка на U . Возьмём произвольную гладкую функцию f на V . Значение образа этой функции под действием гомоморфизма τ на данной точке P задаёт гомоморфизм алгебры гладких функций на V в вещественные числа, то есть согласно теореме 2 мы приходим к точке Q такой что

$$\tau(f)(P) = f(Q)$$

Это равенство приводит к определению точки $Q = F(P)$. Она задаёт гомоморфизм алгебры гладких функций

Пример 2.1. Пусть φ отображение пространств

$$\varphi: \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2: \begin{cases} x = u \\ y = \frac{v}{u} \end{cases} \quad (1)$$

Что тут написано?

Мы 'привыкли' 'читать эту формулу так

точке с координатами (u, v) сопоставляется точка с координатами (x, y)

Однако другой читатель скажет:

Формула определяет гомоморфизм гладких функций на плоскости \mathbf{R}^2 , зависящих от x, y в гладкие функции на плоскости \mathbf{R}^2 , зависящие от u, v . Гомоморфизм задан на образующих: Функция x переходит в функцию u и функция y переходит в функцию $\frac{v}{u}$; любая гладкая функция $f(x, y)$ переходит в гладкую функцию $f(x, y)|_{x=u, y=\frac{v}{u}}$.

Кто прав? Оба правы. Формулу можно читать по разному!

Пример 2.2. Пусть φ отображение пространств

$$\varphi: \mathbf{R}^1 \mapsto \mathbf{R}^2: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad (2)$$

Что тут написано?

Мы 'привыкли' 'читать эту формулу так

точке t на прямой сопоставляется точка с координатами

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

Другой скажет: в этой формуле определяется гомоморфизм функций на плоскости \mathbf{R}^2 в функции на \mathbf{R} . Формулы задают значения гомоморфизма на образующих: функция x переходит в функцию $\cos t$ и функция y переходит в функцию $\sin t$. Конечно, закон определяет образ любой (гладкой) функции. Например, функция $\frac{e^{-2xy}}{x^4+y^4}$ перейдет в функцию

$$\frac{e^{-2 \cos t \sin t}}{\cos^4 t + \sin^4 t} = \frac{e^{-\sin 2t}}{1 - \frac{1}{2} \sin 2t},$$

и для любой гладкой функции $f = f(x, y)$

$$\sigma(f) = f(x, y)|_{x=\cos t, y=\sin t}$$

И в заключение

задача-шутка

Рассмотрим набор разных простых чисел $\{p_i\}$, $i = 1, \dots, N$, $p_i \neq p_j$; также рассмотрим набор натуральных чисел, $\{a_i\}$, $i = 1, \dots, N$, так что каждое a_i меньше p_i . Найти число K , которое при делении на простое число p_i даст остаток a_i .

Вы скажете: это китайская теорема об остатках. Какое отношение она имеет к курсу?

Указание к решению

Используя идеи двойственности можно свести эту задачу к задаче построения интерполяционного многочлена Лагранжа.

n различных точек на прямой — n различных простых

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$

$P(x)$ полиномиал — N натуральное число

$P(x_i) = y_i$ — N даёт остаток a_i при делении на p_i

Если полином $P(x)$ равен y_i в точке x_i то многочлен

$$ch1P(x) = \sum_i y_i h_i(x), \quad (3)$$

удовлетворяет соотношению $P(x_i) = y_i$, то есть этот многочлен достаавляет решение задачи о построении интерполяционного многочлена Лагранжа.

если многочлен $h_i(x)$ такой, что

$$h_m(x_j) = \delta_{mj}, \text{ то есть } h_m(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x = x_m \\ 0 & \text{если } x = x_j \text{ при любом } j \neq m \end{cases}, \quad (4)$$

Построим многочлен (4), затем построим аналогичный объект в числах, затем переведите формулу (??) из многочленов в числа.

Рассмотрим многочлен $Q(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$. Этот многочлен зануляется во всех точках $\{x_1, \dots, x_n\}$, а вот многочлен $H_i(x) = \frac{Q(x)}{x - x_i}$ зануляется во всех точках $\{x_1, \dots, x_n\}$, кроме быть может точки x_i и в этой точке он равен

$$H_i(x_i) = \frac{Q(x)}{x - x_i} \Big|_{x_i} = \frac{Q(x) - Q(x_i)}{x - x_i} = Q'(x_i) \quad (5)$$

Замечание 3. Обратим внимание, что мы в формуле (6) определили 'производную' в кольце целых чисел.

Теперь ясно, что в (4)

$$h_m(x) = \frac{H_m(x)}{H'_m(x_m)} = \frac{\prod_{i \neq m} (x - x_i)}{\prod_{i \neq m} (x_m - x_i)} = \begin{cases} 1 & \text{если } x = x_m \\ 0 & \text{если } x = x_j \text{ при любом } j \neq m \end{cases}, \quad (6)$$

пр

Это искомый базисмый многочлен. Его легко перевести в числа.

Например кубический многочлен, который равен y_i в точке x_i ($i = 1, 2, 3$ и $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$) равен

$$P(x) = \sum y_m \frac{\prod_{i \neq m} (x - x_i)}{\prod_{i \neq m} (x_m - x_i)} = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} + \\ + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} + y_4 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} \quad (7)$$

Перепишем эту формулу для чисел получим

$$P = \sum a_m \prod_{i \neq m} p_i \left[\prod_{i \neq m} p_i \right]_{mpdulop_m}^{-1} \quad (8)$$

Например, $p_i = 2, 3, 5, 7$

$$= a_1 3 \cdot 5 \cdot 7 [3 \cdot 5 \cdot 7]_{modulo 2}^{-1} + a_2 2 \cdot 5 \cdot 7 [2 \cdot 5 \cdot 7]_{modulo 3}^{-1} + a_3 2 \cdot 3 \cdot 7 [2 \cdot 3 \cdot 7]_{modulo 5}^{-1} + a_4 2 \cdot 3 \cdot 5 [2 \cdot 3 \cdot 5]_{modulo 7}^{-1} \\ = a_1 \cdot 105 [105]_{modulo 2}^{-1} + a_2 70 [70]_{modulo 3}^{-1} + a_3 42 [42]_{modulo 5}^{-1} + a_4 30 [30]_{modulo 7}^{-1} = \\ = a_1 \cdot 105 \cdot 1 + a_2 \cdot 70 \cdot 1 + a_3 \cdot 42 \cdot 3 + a_4 \cdot 30 \cdot 4 = \\ = 105a_1 + 70a_2 + 126a_3 + 120a_4$$

Это число при делении на 2 даст остаток $_1$ при делении на 3 даст остаток $_2$ при делении на 5 даст остаток $_3$ и при делении на 7 даст остаток $_4$. ■

Лекция 20 февраля

3 Суперпространство

Немного забегаая вперед дадим определение в духе идей двойственности — — — :

Определение 3. Алгебра гладких функций $\mathbf{R}(x, \xi)$ от коммутирующих переменных x^1, \dots, x^p и антикоммутирующих переменных ξ^1, \dots, ξ^q это алгебра функций на $p|q$ -мерном линейном пространстве $\mathbf{R}^{p|q}$.

Вместо того чтоб определять пространство мы определяем алгебру функций на нём. Например вместо

\mathbf{R}^p рассматривается алгебра гладких функций от x^1, \dots, x^p .

Перейдём к разъяснению.

3.1 Алгебра Грассмана

Обозначим символом Λ_q алгебру Грассмана с q антикоммутирующими свободными переменными $\theta^1, \dots, \theta^q$, то есть

$$\theta^i \theta^k + \theta^k \theta^i = 0, \quad (9)$$

и любое другое соотношение на θ^i является следствием этих соотношений ²

Произвольный элемент λ алгебры Λ^q может быть записан в виде

$$\lambda = \sum_{0 \leq k \leq q} a_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_k},$$

где коэффициенты антисимметричны при перестановке индексов.

Элемент $a_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_k}$ имеет чётность $p(s) = (-1)^k$.

Всякий элемент алгебры Грассмана можно однозначно представить в виде суммы чётного и нечётного элементов этой алгебры.

Для всякого элемента λ алгебры Грассмана Λ^q ,

$$\lambda = m(\lambda) + n(\lambda),$$

где $m(\lambda)$ -обычное число и $n(\lambda)$ -нильпотент.

Упражнение 4. Назовём элемент алгебры Грассмана целым если все коэффициенты в разложении (3.1) целые.

Доказать, что если λ целый нильпотентный элемент алгебры Грассмана, то для любого натурального n , $\frac{\lambda^n}{n!}$ тоже цел и нильпотентен.

Наряду с алгеброй Грассмана Λ^q мы будем рассматривать также алгебру $\Lambda_{p|q}$ как алгебру функций от p коммутирующих переменных x^1, \dots, x^p и q антикоммутирующих переменных $\theta^1, \dots, \theta^q$. Каждый элемент алгебры $\Lambda_{p|q}$ (мы будем эту алгебру называть алгеброй Березина) может быть представлен в виде (3.1), где коэффициенты $a_{\alpha_{i_1} \dots i_k}$ являются гладкими функциями от переменных x^1, \dots, x^p : для любого $w \in \Lambda_{p|q}$

$$\lambda = \sum_{0 \leq k \leq q} a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x^1, \dots, x^p) \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_k}.$$

²то есть для любого многочлена P такого, что $P = 0$, многочлен P принадлежит идеалу тензорной алгебры с образующими θ^i , образованному левыми частями соотношений (9).

Чётность вводится естественным образом.

Отметим, что выражение осмысленно при любой замене переменных, сохраняющих чётность.

Упражнение 5. Как преобразуется функция $g = \cos x$ при замене координат $x = x' + \varepsilon^1 \varepsilon^2$.

Мы снова возвращаемся к определению суперпространства:

Определение 4. Алгебра гладких функций $\mathbf{R}(x, \xi)$ от коммутирующих переменных x^1, \dots, x^p и антикоммутирующих переменных $\theta^1, \dots, \theta^q$, то есть алгебра Березина $\Lambda_{p|q}$, это алгебра функций на $p|q$ -мерном линейном пространстве $\mathbf{R}^{p|q}$.

3.2 Дифференцирование и интегрирование

Мы подсчитаем для

3.2.1 Взятие производной.

Пусть $\theta^1, \dots, \theta^q$ набор антикоммутирующих переменных в алгебре Березина $\Lambda_{p|q}$. Выберем любую из этих переменных, например переменную θ^{i_0} .

Легко понять, что для любой функции $f = f(x^i, \theta^\alpha) \in \mathcal{L}_{p|q}$

$$f(x^i, \theta^\alpha) = \theta^{i_0} g + h$$

где функции g и h не зависят от θ^{i_0} . Таким образом мы приходим к естественному определению частной производной по антикоммутирующей переменной.

$$\frac{\partial}{\partial \theta^{i_0}} f(x^i, \theta^\alpha) = g, .$$

Соблюдается правило Лейбница (со знаком)

$$\frac{\partial}{\partial \theta^a} (fg) = \frac{\partial f}{\partial \theta^a} g + (-1)^p (fg) \frac{\partial g}{\partial \theta^a}. \quad (10)$$

Замечание 4. Пусть u какой нибудь элемент из множества $(x^1, \dots, x^n, \theta^1, \dots, \theta^q)$ и какой нибудь другой элемент из множества $(x^1, \dots, x^n, \theta^1, \dots, \theta^q)$.

Упражнение 6. Показать, что

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} = (-1)^{p(u)p(v)} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u}$$

Упражнение 7. Пусть $f(x, \theta)$ -элемент алгебры Березина, гладкая функция on, θ . Написать формулу Тэйлора.

Взятие производной композиции функций.

3.3 Интегрирование

Что такое интеграл?

Определение 5. Пусть ∂ операция взятия производной. Тогда интегрирование это линейная операция которая зануляется на образе ∂ :

$$I(\partial f = 0)$$

Очевидно, что интеграл как мы его учили тому свойству удовлетворяет. Можно показать, что на пространстве функций с компактным носителем, это определение приводит к обычному.

Хороший пример, это интеграл Коши от аналитической функции.

В итоге мы приходим к выводу, что

Определение 6. Для антикоммутирующей переменной θ

$$\int \theta d\theta \neq 0.$$

так как θ не является производной и мы выбираем нормировку

$$\int \theta d\theta = 1. \quad (11)$$

Лекция 1 марта

3.4 Отображения и замены переменных

Мы вернёмся к интегралу, прежде поговорив немножко об отображениях и заменах переменных...

Напомним, что алгебра Березина $\Lambda_{r|s}$ это алгебра $C^\infty(\mathbf{R}^{r|s})$ гладких функций на $\mathbf{R}^{r|s}$. Каждый элемент алгебры Березина $\Lambda_{r|s}$ представим в виде

$$f(x, \theta) = a_\emptyset(x) + a_i(x)\theta^i + \dots = \sum_{0 \leq k \leq q} a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x^1, \dots, x^r) \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_k},$$

где $\{\theta^1, \dots, \theta^s\}$, это набор антикоммутирующих переменных и $\{x^1, \dots, x^s\}$ это стандартные координаты ³ в \mathbf{R}^s и коэффициентные функции это гладкие функции от координат $\{x^1, \dots, x^s\}$.

Замечание 5. Напомнить определение чётного и нечётного элементов

³например, в качестве таковых можно рассмотреть координаты $x^i(a^1, \dots, a^n) = a^i$, где \mathbf{R}^r рассматривается как множество s -ок действительных чисел.

Замечание 6. Введённые выше координаты алгебры Березина, мы иногда будем называть *образующими* этой алгебры.

Мы сейчас определим гладкое отображение Φ суперпространства $\mathbf{R}^{m|n}$ в суперпространство $\mathbf{R}^{p|q}$, которое согласно нашей философии определяется 'против шёрстки'— гомоморфизмом алгебры $\Lambda_{p|q}$ в алгебру $\Lambda_{m|n}$.

Теорема 3. Пусть $\{f^a(x, \theta)\}$, $a = 1, \dots, p$ произвольный упорядоченный набор чётных функций алгебры $\Lambda_{m|n}$ в количестве p штук и пусть $\{\varphi^\alpha(x, \theta)\}$, $\alpha = 1, \dots, q$ произвольный набор нечётных функций алгебры $\Lambda_{m|n}$ в количестве q штук.

Тогда существует гомоморфизм $\alpha: \Lambda_{p|q} \mapsto \Lambda_{m|n}$ такой, что

$$\begin{cases} \alpha(y^a) = f^a(x, \theta) & (a = 1, \dots, p) \\ \alpha(\eta^\mu) = \phi^\mu(x, \theta) & (\mu = 1, \dots, q) \end{cases} \quad (12)$$

и этот гомоморфизм единственен.

Значение этого гомоморфизма на любой функции $f \in \Lambda_{p|q}$ равно

$$\begin{aligned} \alpha[f] &= \alpha \left[f = \sum_{0 \leq k \leq q} a_{\mu_1 \dots \mu_k}(y^1, \dots, y^p) \eta^{\mu_1} \dots \eta^{\mu_k} \right] = \alpha[f = a_\emptyset(y) + a_{\mu\nu}(y) \eta^\nu \eta^\mu + \dots] = \\ &= a_\emptyset(f_\emptyset^a(x) + f_{\alpha\beta}^a(x) \theta^\beta \theta^\alpha + \dots) + \\ &+ a_{\mu\nu}(f_\emptyset^a(x) + f_{\alpha\beta}^a \theta^\beta \theta^\alpha + \dots) [\Phi_\alpha^\mu(x) \theta^\alpha + \dots] [\Phi_\beta^\nu(x) \theta^\alpha + \dots] + \dots \end{aligned}$$

Замечание 7. Эта теорема позволяет определить отображение Φ суперпространства $\mathbf{R}^{m|n}$ в суперпространство $\mathbf{R}^{p|q}$ с помощью упорядоченного набора чётных гладких функций $\{\{f^a(x, \theta)\}, a = 1, \dots, p$ и нечётных гладких функций $\{\{\phi^\alpha(x, \theta)\}, \alpha = 1, \dots, q$

Отображение Φ определяется с помощью гомоморфизма (12).

Замечание 8. Сформулированная выше Теорема 3 даёт право отождествлять стандартные координаты на $\mathbf{R}^{r|s}$ и образующими алгебры Березина $\Lambda_{r|s}$.

Определение 7. Мы будем называть иногда $\mathbf{R}^{p|q}$ $p|q$ -мерным аффинным суперпространством

Пусть $\{x^i, \theta^\alpha\}$, $i = 1, \dots, r$, $\alpha = 1, \dots, s$ стандартные координаты на $\mathbf{R}^{r|s}$ = образующие алгебры Березина $\Lambda_{r|s}$; каждый элемент $\Lambda_{r|s}$ представим в виде

$$f(x, \theta) = a_\emptyset(x) + a_i(x) \theta^i + \dots = \sum_{0 \leq k \leq q} a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x^1, \dots, x^p) \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_k}.$$

Чтобы определить замену переменных в суперпространстве мы следуя нашей философии дуальности определим *обратимое отображение* алгебры функций на себя.

Рассмотрим отображение

$$\begin{cases} x^{i'} = f^{i'}(x, \theta), i = 1, \dots, r \\ \theta^{i'} = \varphi^{i'}(x, \theta), i = 1, \dots, s \end{cases} \quad (13)$$

Каково условие, что оно обратимо?

Имеет место следующая теорема

Теорема 4. Произвольное преобразование переменных (13) обратимо если и только если выполняются следующие условия:

- отображение $\mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^r$ задаваемое формулами (13)

$$x^{i'}|_{\theta=0} = f^{i'}(x, \theta)|_{\theta=0} \quad \text{обратимо} \quad (14)$$

- $s \times s$ -матрица

$$\frac{\partial \theta^{i'}}{\partial \theta^j}|_{\theta=0} = \frac{\partial \varphi^{i'}(x, \theta)}{\partial \theta^j}|_{\theta=0} \quad (15)$$

обратима

Замечание 9. Мы рассматриваем только гладкие функции. Это неявно используется в формулировках теорем.

Пример 3.1. Рассмотрим аффинное суперпространство $\mathbf{R}^{1|3}$. Ему соответствует алгебра гладких функций на прямой со значениями в Грассмановой алгебре. Λ_2 (Это то же, что алгебра Березина $\Lambda_{1|2}$) Рассмотрим гладкую замену переменных:

$$\begin{aligned} x' &= x + \theta^1 \theta^2 \\ \theta^{1'} &= \theta^1 + \sin x \theta^1 \theta^2 \theta^3 \\ \theta^{2'} &= 2\theta^2 \\ \theta^{3'} &= \theta^3 \end{aligned} \quad (16)$$

Вначале отметим, что условия теоремы соблюдаются: отображение

$$x'|_{\theta=0} = (x + \theta^1 \theta^2)|_{\theta=0} = x$$

поэтому условие (14) очевидно соблюдается; второе условие легко проверить: матрица (15) имеет вид

$$\frac{\partial \theta^{i'}}{\partial \theta^j}|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta^{1'}}{\partial \theta^1} & \frac{\partial \theta^{2'}}{\partial \theta^1} & \frac{\partial \theta^{3'}}{\partial \theta^1} \\ \frac{\partial \theta^{1'}}{\partial \theta^2} & \frac{\partial \theta^{2'}}{\partial \theta^2} & \frac{\partial \theta^{3'}}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial \theta^{1'}}{\partial \theta^3} & \frac{\partial \theta^{2'}}{\partial \theta^3} & \frac{\partial \theta^{3'}}{\partial \theta^3} \end{pmatrix} |_{\theta^i=0} = \begin{pmatrix} 1 + \sin x \theta^2 \theta^3 & 0 & 0 \\ 1 - \sin x \theta^1 \theta^3 & 2 & 0 \\ 1 + \sin x \theta^1 \theta^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} |_{\theta^i=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} |_{\theta^i=0} =$$

и очевидно обратима.

Проверим, что замена (16) обратима. Нам удобно обозначить $\theta^1 \rightarrow \theta$, $\theta^2 \rightarrow \eta$, $\theta^3 \rightarrow \xi$.
Имеем

$$\begin{cases} x' = x + \theta\eta \\ \theta' = \theta + \sin x\theta\eta\xi \\ \eta' = 2\eta \\ \xi' = \xi \end{cases}$$

Имеем

$$\xi = \xi', \eta = \frac{1}{2}\eta', \theta = \theta' - \sin x\theta\eta\xi =$$

$$\theta' - \frac{1}{2}\sin x\theta\eta'\xi' = \theta' - \frac{1}{2}\sin x[\theta' - \sin x\theta\eta\xi]\eta'\xi' = \theta' - \frac{1}{2}\sin x\left[\theta' - \frac{1}{2}x^3\theta'\eta'\xi'\right]\eta'\xi' = \theta' - \frac{1}{2}\sin x\theta'\eta'\xi'$$

и

$$x = x' - \theta\eta = x' - \left[\theta' - \frac{1}{2}\sin x\theta'\eta'\xi'\right]\frac{1}{2}\eta' = x' - \frac{1}{2}\theta'\eta'$$

3.5 Интегрирование функции на суперпространстве $\mathbf{R}^{p|q}$

Снова вернёмся к интегрированию.

Мы определим интеграл от быстроубывающей функции по пространству $\mathbf{R}^{p|q}$.

Определение 8. Пусть $\{x^i, \theta^\alpha\}$. $i = 1, \dots, p$, $\alpha = 1, \dots, q$ координаты аффинного суперпространства $\mathbf{R}^{p|q}$. Пусть

$$f(x, \theta) = \sum_{0 \leq k \leq q} a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x^1, \dots, x^p) \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_k} = a_\emptyset(x) + \theta^i(x) a_i(x) + \dots + \theta^1 \dots \theta^n a_{[1 \dots n]}(x) \quad (17)$$

произвольная *быстроубывающая* функция на $\mathbf{R}^{p|q}$, то есть функция, то есть любая производная этой функции убывает быстрее чем любая степень x :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n D^m f = 0.$$

Тогда

$$\int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x, \theta) f = \int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x, \theta) \theta^1 \dots \theta^n a_{[1 \dots n]}(x) = (-1)^s \int_{\mathbf{R}^p} dx^1 \dots dx^n a_{[1 \dots n]}(x) = \quad (18)$$

Замечание 10. Мы немного странно пишем разложение (17)

Упражнение 8. Проверить, что это определение согласовано с формулой (11)

Доказать, что условие быстрого убывания не зависит от системы координат.

3.6 Березиниан

На прошлой неделе мы сформулировали идею интеграла (см. 6). Однако затем, мы остановились на замене переменных и только потом снова перешли к интегрированию. Почему?

Пусть (x^i, θ^α) , $i = 1, \dots, p$, $\alpha = 1, \dots, q$ и $(x^{i'}, \theta^{\alpha'})$, $i' = 1, \dots, p$, $\alpha' = 1, \dots, q$ пара двух координатных систем на аффинном суперпространстве $\mathbf{R}^{p|q}$.

$$\det \frac{\partial x}{\partial x'} \Big|_{\theta=0} > 0 \quad (19)$$

Вычислим интеграл (18) от одной и той же быстроубывающей функции $F(x, \theta)$ в двух различных системах координат (x^i, θ^α) и $(x^{i'}, \theta^{\alpha'})$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x, \theta) f(x, \theta) &= \int_{\mathbf{R}^{p|q}} \frac{D(x, \theta)}{D(x', \theta')} D(x', \theta') f(x(x', \theta'), \theta(x', \theta')) = \\ &= \int_{\mathbf{R}^{p|q}} \text{Ber} \left(\frac{\partial(x, \theta)}{\partial(x', \theta')} \right) D(x', \theta') f(x', \theta') \end{aligned} \quad (20)$$

Мы вычислим Березиниан на следующей лекции.

3.6.1 Два интеграла

Пусть $||A_{ik}||$ положительно определенная симметрическая $n \times n$ матрица в Евклидовом пространстве \mathbf{E}^n . Вычислить интеграл по \mathbf{E}^n от $e^{-A_{ik}x^i x^k}$.

Пусть $||B_{ik}||$ антисимметрическая $q \times q$ матрица. Вычислить интеграл от функции $e^{-B_{ik}\theta^i \theta^k}$ по $\mathbf{R}^{0|q}$.

4 Березиниан (продолжение)

лекция 15 марта

Вернёмся снова к уравнению (20) и обсудим березиниан.

Определение 9. Пусть M чётная $p|q \times p|q$ матрица:

$$M = \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} \quad (21)$$

A это $p \times p$ матрица с чётными элементами, β это $p \times q$ матрица с нечётными элементами, Γ это $q \times p$ матрица с нечётными элементами и D $q \times q$ матрица с чётными элементами, then

$$\text{Ber} M = \text{Ber} \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} = \frac{\det(A - \beta D^{-1} \Gamma)}{\det D}. \quad (22)$$

Замечание 11. Вы спросите, а в каком пространстве действует чётная $p|q \times p|q$ матрица? Вспомним обычную линейную алгебру: $m \times m$ матрица элементами которой являются действительные числа действует в векторном пространстве \mathbf{R}^m — в пространстве упорядоченных m -ок действительных чисел. На самом деле $p|q \times p|q$ матрица действует в множестве Λ -точек пространства $\mathbf{R}^{p|q}$, то есть в множестве упорядоченных наборов p чётных элементов алгебры Грассмана Λ и q нечётных элементов этой алгебры:

$$\mathbf{R}_\Lambda^{p|q} = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_p; \mu_1, \dots, \mu_q), \lambda_i \in \Lambda_0, \mu_j \in \Lambda_1\} \quad (23)$$

Мы далее ещё вернемся к этому.

Оказывается, березиниан (22) имеет самое прямое отношение к задаче, которую мы решали в конце прошлой лекции. Напомним, что в конце прошлой лекции мы ввели понятие интеграла от быстроубывающей функции $f(x, \theta) \in C^\infty(\mathbf{R}^{p|q})$ по всему пространству $\mathbf{R}^{p|q}$.

Затем мы рассмотрели две произвольные системы координат (x^i, θ^α) и $(x^{i'}, \theta^{\alpha'})$ и, руководствуясь правилом (18), и инвариантностью интеграла по отношению к замене координат мы приходим к правилу

Теорема 5. При замене координат $\begin{cases} x^{i'} = x^{i'}(x, \theta) \\ \theta^{\alpha'} = \theta^{\alpha'}(x, \theta) \end{cases}$ в интеграле $\int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x, \theta) f(x, \theta)$ подынтегральное выражение домножается на березиниан матрицы Якоби преобразования координат:

$$\int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x, \theta) f(x, \theta) = \int_{\mathbf{R}^{p|q}} \frac{D(x, \theta)}{D(x', \theta')} D(x', \theta') f(x, \theta) \Big|_{x(x', \theta'), \theta(x', \theta')},$$

где

$$\frac{D(x, \theta)}{D(x', \theta')} = \text{Ber} \left(\frac{\partial(x, \theta)}{\partial(x', \theta')} \right) = \text{Ber} \begin{pmatrix} \frac{\partial x(x', \theta')}{\partial x(x', \theta')} & \frac{\partial \theta(x', \theta')}{\partial x(x', \theta')} \\ \frac{\partial x(x', \theta')}{\partial \theta(x', \theta')} & \frac{\partial \theta(x', \theta')}{\partial \theta(x', \theta')} \end{pmatrix} = \text{Ber} \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix}$$

где

$$A_{j'}^i = \frac{\partial x^i(x', \theta')}{\partial x^{j'}}, \quad \beta_{j'}^\alpha = \frac{\partial \theta^\alpha(x', \theta')}{\partial x^{j'}}, \quad \gamma_{\alpha'}^i = \frac{\partial x^i(x', \theta')}{\partial \theta^{\alpha'}}, \quad D_{\alpha'}^\alpha = \frac{\partial \theta^\alpha(x', \theta')}{\partial \theta^{\alpha'}},$$

Условие (15) теоремы о замене переменных обеспечивает, что березиниан хорошо определен.

Замечание 12. Интеграл (20) посчитан в предположении

$$\det \frac{\partial x}{\partial x'} \Big|_{\theta=0} > 0 \quad (24)$$

В общем случае надо домножать ответ на знак якобиана (24).

Замечание 13. Вы можете часто увидеть НЕПРАВИЛЬНОЕ обозначение для координатной формы объёма

Следствие 1. Березиниан мультипликативен: $Ber(M_1 M_2) = Ber M_1 \cdot Ber M_2$.

Proof

$$Ber \left(\frac{\partial(x, \theta)}{\partial(\tilde{x}, \tilde{\theta})} \right) = \frac{D(x, \theta)}{D(\tilde{x}, \tilde{\theta})} = \frac{D(x, \theta)}{D(x', \theta')} \frac{D(x', \theta')}{D(\tilde{x}, \tilde{\theta})} = Ber \left(\frac{\partial(x, \theta)}{\partial(x', \theta')} \right) Ber \left(\frac{\partial(x', \theta')}{\partial(\tilde{x}, \tilde{\theta})} \right) \quad (25)$$

Мультипликативность практически следует из определения!

Пример 4.1. Рассмотрим в $\mathbf{R}^{1|1}$ 'линейное' преобразование

$$\varphi_M: \begin{cases} x = x'a + \theta'\gamma \\ \theta = x'\beta + \theta k \end{cases} \Leftrightarrow (x, \theta) = (x', \theta') \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & k \end{pmatrix} \quad (26)$$

которое соответствует $1|1 \times 1|1$ матрице

$$M = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & k \end{pmatrix} \quad (27)$$

Замечание 14. Матрица Якоби преобразования (26) равна матрице (27).

Обратите внимание на последовательность написания термов в формуле 26. Это объясняется тем, что производная берется слева (см. также замечание 10)

Вычислим интеграл от быстро убывающей функции $f(x, \theta) = f_0(x) + \theta f_1(x)$ в координатах (x, θ) и в новых координатах (x', θ') . В координатах (x, θ)

$$\int D(x, \theta) f(x, \theta) = I, \quad (I = \int f_1(x) dx).$$

В координатах (x', θ') имеем

$$I = \int D(x, \theta) f(x, \theta) = Ber M \int D(x', \theta') f(ax' - \gamma\theta', \beta x' + k\theta')$$

(Мы положили, что $Ber M$ равен константе.)

Рассмотрим три подслучаи

а)

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (a > 0). \quad (28)$$

В этом случае имеем

$$I = \int D(x, \theta) f(x, \theta) = Ber M \int D(x', \theta') f(ax, \theta) =$$

$$Ber M \int D(x', \theta') [f_0(ax) + \theta f_1(ax)] = Ber M \int f_1(\tilde{x}) d\tilde{x} = \frac{Ber M}{|a|} I \Rightarrow Ber M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a.$$

Перейдем ко второму подслучаю: б)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \quad (29)$$

В этом случае имеем

$$I = \int D(x, \theta) f(x, \theta) = \text{Ber} M \int D(x', \theta') f(x, k\theta') =$$

$$\text{Ber} M \int D(x', \theta') [f_0(x) + k\theta' f_1(x)] = \text{Ber} M \int f_1(x) dx = kI \Rightarrow \text{Ber} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \frac{1}{k}.$$

Теперь перейдём к общему случаю:

с)

$$M = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & k \end{pmatrix} \quad (30)$$

Имеем

$$I = \int D(x, \theta) f(x, \theta) = \text{Ber} M \int D(x', \theta') f(ax' - \gamma\theta', \beta x' + k\theta') =$$

$$\text{Ber} M \int D(x, \theta) f(ax - \gamma\theta, \beta x + k\theta) .$$

(мы положим $a > 0$) Продолжим вычисления:

$$I = \text{Ber} M \left[\int D(x, \theta) f_0(ax - \gamma\theta) + (\beta x + k\theta) f_1(ax - \gamma\theta) \right] , .$$

Заметим, что $\int D(x, \theta) f_0(ax - \gamma\theta) = 0$, так как $f_0(x)$ быстроубывающая функция:

$$\int D(x', \theta') f_0(ax' - \gamma\theta') = -\frac{1}{a} \int \gamma f'(x) dx = 0 ,$$

значит

$$I = \text{Ber} M \left[\int D(x, \theta) f_0(ax - \gamma\theta) + (\beta x + k\theta) f_1(ax - \gamma\theta) \right] = \text{Ber} M \int D(x, \theta) (\beta x + k\theta) f_1(ax - \gamma\theta) =$$

$$\text{Ber} M \int D(x, \theta) (\beta x + k\theta) [g(ax) - \gamma\theta g'(ax)] =$$

$$\text{Ber} M \left[\int D(x, \theta) \theta k g(ax) - \int D(x, \theta) \theta \beta x \gamma g'(ax) \right] =$$

$$\text{Ber} M \left[\frac{k}{a} \int g(x) dx - \frac{\beta\gamma}{a^2} \int x g'(x) dx \right] = \text{Ber} M \left[\frac{k}{a} \int g(x) dx + \frac{\beta\gamma}{a^2} \int g(x) dx \right] =$$

$$IBerM \left[\frac{k}{a} + \frac{\beta\gamma}{a^2} \right] \Rightarrow \\ Ber \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & k \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{k}{a} + \frac{\beta\gamma}{a^2}} = \frac{a^2}{ka + \beta\gamma} = \frac{a}{k} \left(1 - \frac{\beta\gamma}{ka} \right).$$

Exercises

Мы посчитаем интегралы 3.6.1, потом мы сделаем упражнение, где проясим смысл условия быстроубывающей функции для интеграла Березина.

Exercise

Приведя форму к диагональному виду легко понять, что

$$\int e^{-A(\mathbf{x}, \mathbf{x})} d^n x = \int e^{-\lambda_1 x_1^2 - \dots - \lambda_n x_n^2} d^n x = \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}.$$

Во втором интеграле детерминант перепрыгнет в числитель⁴.

$$\int D(\theta^1, \dots, \theta^n) e^{-B_{ik} \theta^i \theta^k} d^n x = C \sqrt{\det B} = C \text{Pfaffian } B$$

(это для чётных n , а для нечётных нуль.) Это можно увидеть прямым подсчётом: при $n = 2k$

$$\int D(\theta^1, \dots, \theta^n) e^{B_{ik} \theta^i \theta^k} d^n x = \int D(\theta^1, \dots, \theta^n) \frac{1}{k!} (B_{ij} \theta^i \theta^j)^k = \\ \frac{1}{k!} B_{i_1 j_1} \dots B_{i_k j_k} \varepsilon^{i_1 j_1 \dots i_k j_k}$$

а можно и косвенно: если обозначить

$$\int D(\theta^1, \dots, \theta^n) e^{B_{ik} \theta^i \theta^k} d^n x = F(B_{ik})$$

то заменой переменной $\theta^i = L_k^i \xi^k$ легко увидеть, что

$$F(B) = \frac{F(L^+ B L)}{\det L}$$

hence

$$\frac{F(\tilde{B})}{\sqrt{\tilde{B}}} \frac{F(B)}{\sqrt{B}}, (\tilde{B} = L^+ B L)$$

то есть

$$\int D(\theta^1, \dots, \theta^n) e^{B_{ik} \theta^i \theta^k} d^n x = F(B_{ik}) = C \sqrt{B}$$

⁴this integral appeared in Faddeev Popov quantisation. This was not supersymmetry, however this was a good push for it.

Замечание 15. Я не знаю более эффективного способа проверить формулу для Пфаффиана.

Пусть f гладкая быстроубывающая функция на $\mathbf{R}^{1|2}$. Определим интеграл от этой функции по лучу $(0, \infty)$:

$$\int_{x \geq 0} D(x, \theta, \varphi) f(x, \theta, \varphi) = \int_{\mathbf{R}^{1|2}} D(x, \theta, \varphi) H(x) f(x, \theta, \varphi) \quad (31)$$

Покажем, что этот интеграл инвариантен при замене

$$\begin{cases} x = y + \xi\eta \\ \theta = \xi \\ \varphi = \eta \end{cases}$$

Березиниан той замены равен 1 (Проверьте это!)

Посчитаем его в новых и старых координатах.

а) в координатах (x, θ, φ)

$$\begin{aligned} \int_{x \geq 0} D(x, \theta, \varphi) f(x, \theta, \varphi) &= \int_{\mathbf{R}^{1|2}} D(x, \theta, \varphi) H(x) f(x, \theta, \varphi) = \\ &= \int_{\mathbf{R}^{1|2}} D(x, \theta, \varphi) H(x) [f_0(x) + \theta f_1(x) + \varphi f_2(x) + \theta\varphi f_3(x)] = \int dx f_3(x). \end{aligned}$$

б) в координатах (y, ξ, η)

$$\begin{aligned} \int_{x \geq 0} D(x, \theta, \varphi) f(x, \theta, \varphi) &= \int_{\mathbf{R}^{1|2}} D(x, \theta, \varphi) H(x) f(x, \theta, \varphi) = \\ &= \int_{\mathbf{R}^{1|2}} \text{Ber} \frac{\partial(x, \theta, \varphi)}{\partial(y, \xi, \eta)} [H(x) f(x, \theta, \varphi)]_{x=y+\xi\eta, \theta=\xi, \varphi=\eta} = \\ &= \int_{\mathbf{R}^{1|2}} 1 \cdot H(y + \xi\eta) [f_0(y + \xi\eta) + \xi f_1(y + \xi\eta) + \eta f_2(y + \xi\eta) + \xi\eta f_3(y + \xi\eta)] = \\ &= \int_{\mathbf{R}^{1|2}} (H(y) + \xi\eta\delta(y)) [f_0(y) + \xi\eta f'_0(y) + \xi f_1(y) + \eta f_2(y) + \xi\eta f_3(y)] = \\ &= \int_{\mathbf{R}^{1|2}} (H(y) + \xi\eta\delta(y)) [f_0(y) + \xi\eta f'_0(y) + \xi f_1(y) + \eta f_2(y) + \xi\eta f_3(y)] = \\ &= \int dy H(y) [f'_0(y) + f_3(y)] + \int dy \delta(y) f_0(y) = \\ &= \int_0^\infty dy [f'_0(y) + f_3(y)] + f_0(0) = \\ &= f_0(\infty) - f_0 + \int_0^\infty dy f_3(y) + f_0(0) = \int_0^\infty dy f_3(y) \blacksquare \end{aligned}$$

Упражнение 9. Проверьте, пожалуйста, что это нехорошее определение интеграла вдоль луча.

$$\int_{x \geq 0} D(x, \theta, \varphi) f(x, \theta, \varphi) = \int_0^\infty dx \int_{\mathbf{R}^{0|2}} D(x, \theta, \varphi) H(x) f(x, \theta, \varphi)$$

Сравните с (31)

4.1 О некоторых свойствах Березиниана

Эта лекция основана на статье Khudaverdian, Voronov *Berezinians, Exterior Powers and Recurrent sequences*, LMP(2005), **74**, pp. 201–228

4.1.1 Детерминант

Детерминант и площадь параллелограмма

Упражнение 10. Объяснить связь между площадью параллелограмма и детерминантом линейного оператора в V^2 .

Упражнение 11. Пусть ω n -форма в n -мерном линейном пространстве,

А что это такое?

пусть $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ базис в V и пусть линейный оператор на V .

Вычислить

$$\frac{\omega(A\mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{e}_n)}{\omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)}$$

Легко увидеть, что для невырожденной формы

$$\frac{\omega(A\mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{e}_n)}{\omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)} = \det A, \quad (32)$$

или если угодно для любого линейного оператора $: V \rightarrow V$, для любой полилинейной n -формы и любых n векторов $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ этого пространства

$$\omega(A\mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{e}_n) = \det A \omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n), \quad (33)$$

Из соотношения (32) вытекает мультипликативность детерминанта.

Действительно рассмотрим произвольный базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ n -мерного линейного пространства V . Пусть B невырожденный линейный оператор в V . Тогда система векторов $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$, где $\mathbf{f}_i = B(\mathbf{e}_i)$ тоже будет базисом. Тогда из равенства (32) следует, что

$$\det(A \cdot B) = \frac{\omega(AB\mathbf{e}_1, \dots, AB\mathbf{e}_n)}{\omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)} = \frac{\omega(AB\mathbf{e}_1, \dots, AB\mathbf{e}_n)}{\omega(B\mathbf{e}_1, \dots, B\mathbf{e}_n)} \cdot \frac{\omega(B\mathbf{e}_1, \dots, B\mathbf{e}_n)}{\omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)} =$$

$$\frac{\omega(A\mathbf{f}_1, \dots, A\mathbf{f}_n)}{\omega(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)} \cdot \frac{\omega(B\mathbf{e}_1, \dots, B\mathbf{e}_n)}{\omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)} = \det A \cdot \det B$$

Сравните, пожалуйста, этот вывод свойства мультипликативности детерминанта с выводом (32).

4.1.2 След и детерминант

$$\det(1 + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \operatorname{Tr} A.$$

Формула Лиувилля:

$$\det e^A = e^{\operatorname{Tr} A}.$$

Упражнение 12. Пусть A матрица линейного оператора.

Перейдем в базис в котором она диагональна.

В этом базисе утверждение легко проверить. (Проверьте!)

Значит оно верно всегда.

Упражнение 13. Сделать предыдущее доказательство полным.

Замечание 16. Решение

Множество диагонализируемых матриц всюду плотно в множестве всех матриц. Поэтому если функции \det и Tr непрерывны утверждение, что $\det e^A = e^{\operatorname{Tr} A}$ по непрерывности может быть продолжено на множество всех матриц, если оно верно на множестве диагонализируемых матриц,

Упражнение 14. Второе доказательство:

Напишем

$$B(t) = \det e^{tA}, \quad D(t) = e^{t \operatorname{Tr} A}.$$

Мы видим, что обе функции $B(t)$ и $D(t)$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению и одним и тем же граничным условиям.

решите задачу

Упражнение 15. Если Вас не убедит предыдущее рассуждение

посчитайте $\frac{d}{dt} \left(\frac{B(t)}{D(t)} \right)$.

Четвертое 'доказательство':

Упражнение 16.

$$\det e^A = \det \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{A}{N} \right)^N \right) = \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \left(e^{\operatorname{Tr} \frac{A}{N}} \right)^N \right) = e^{\operatorname{Tr} A}.$$

4.1.3 supertrace of the supermatrix

Мы попробуем определить след матрицы, так чтобы не нарушать теорему Лиувилля. Мы рассмотрим матрицы бесконечно близкие к 1. Рассмотрим чётную $p|q \times p|q$ чётную матрицу

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & D \end{pmatrix},$$

- A это $p \times p$ матрица все коэффициенты которой чётные числа,
- B это $p \times q$ нечётная матрица, то есть все коэффициенты её нечётные элементы алгебры Грассманна,
- Γ это $q \times p$ нечётная матрица, то есть все коэффициенты её нечётные элементы алгебры Грассманна,
- D это $q \times q$ чётная матрица, то есть все коэффициенты её чётные элементы алгебры Грассманна,

$$e^{s\text{Tr}(\varepsilon M)} = 1 + \varepsilon s\text{Tr} M = 1 + s\text{Tr} \varepsilon \begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & D \end{pmatrix} =$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} \text{Ber} e^{\varepsilon M} &= \text{Ber} \left(e^{\varepsilon \begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & D \end{pmatrix}} \right) = \text{Ber} \left(1 + \varepsilon \begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & D \end{pmatrix} \right) = \\ \text{Ber} \left(\begin{pmatrix} 1 + \varepsilon A & \varepsilon B \\ \varepsilon \Gamma & 1 + \varepsilon D \end{pmatrix} \right) &= \frac{\det(1 + \varepsilon A) - \det(\varepsilon B(1 + \varepsilon D)^{-1} \varepsilon \Gamma)}{\det(1 + \varepsilon D)} = \\ &= \frac{\det(1 + \varepsilon A)}{\det(1 + \varepsilon D)} = \frac{1 + \varepsilon \text{Tr} A}{1 + \varepsilon \text{Tr} D} = 1 + \varepsilon (\text{Tr} A - \text{Tr} D). \end{aligned}$$

Comparing these formulae we come to

$$s\text{Tr} \varepsilon \begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & D \end{pmatrix} = \text{Tr} A - \text{Tr} D.$$

4.2 Expansions of the function $R_A(z) = \text{Ber}(1 + Az)$

We will consider the expansions for the function $R_A(z)$.

Пример 4.2. Пусть A оператор в трахмерном линейном пространстве. Тогда

$$\text{Ber}(1 + zA) = \det(1 + zA) = 1 + z\text{Tr} A + z^2\text{Tr}(A \wedge A) + z^3\text{Tr}(A \wedge A \wedge A)$$

и

$$\det A = +\text{Tr}(A \wedge A \wedge A \wedge A)$$

Что это такое???

4.2.1 Действие $\underbrace{A \wedge \dots \wedge A}_k \text{ раз}$ на $\underbrace{V \wedge \dots \wedge V}_k \text{ раз}$

Пусть линейный оператор действует на V .

Действие $A \wedge A$ на $V \wedge V$ определяется

$$(A \wedge A)(u \wedge v) = A(u) \wedge A(v).$$

При этом

$$u \wedge v = -v \wedge u (-1)^{p(u)p(v)}.$$

Посчитаем действие $A \wedge A$ на $V \wedge V$. Ограничимся случаем, когда диагонализуем. (см. замечание 16)

Пусть $\{\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_\alpha\}$ базис $p|q$ -мерного суперпространства V , состоящий из собственных векторов. Имеем p чётных собственных векторов

$$A(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i, \quad i = 1 \dots, p$$

и q нечётных собственных векторов

$$A(\mathbf{f}_\alpha) = \mu_\alpha \mathbf{f}_\alpha, \quad \alpha = 1 \dots, q.$$

Рассмотрим базис пространства $V \wedge V$:

чётные вектора — $\{\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j, (i < j); \mathbf{f}_\alpha \wedge \mathbf{f}_\beta (\alpha \leq \beta)\}$ в количестве $\frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q+1)}{2}$ штук

нечётные вектора — $\{\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{f}_\alpha\}$ в количестве pq штук,

Имеем

$$A \wedge A(\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j) = \lambda_i \lambda_j, A \wedge A(\mathbf{f}_\alpha \wedge \mathbf{f}_\beta) = \mu_\alpha \mu_\beta,$$

соответственно для нечётных векторов

$$A \wedge A(\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{f}_\alpha) = \lambda_i \mu_\alpha,$$

размерность пространства $V \wedge V$ равна $\frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q+1)}{2} |pq$, и соответственно

$$\text{sTr} (A \wedge A) = \sum_{i < j \leq p} \lambda_i \lambda_j + \sum_{\alpha \leq \beta \leq q} \mu_\alpha \mu_\beta - \sum \lambda_i \mu_\alpha.$$

-

В следующий понедельник мы начнём с того, что покажем, как устроено разложение:

$$\text{Ber}(1 + zA) = 1 + z \text{sTr} A + z^2 \text{sTr} (A \wedge A) + \dots$$

Лекция 29 марта

Эта лекция какбы провалилась: по неизвестной причине отказал 'stylus' мы лишились возможности записывать... Я постарался более подробный file выложить на домашней страничке.

Предложение 1.

$$\text{Ber}(1 + Az) = 1 + c_1(A)z + c_2(A)z^2 + \dots = c_k(A)z^k$$

where $c_k(A) = \text{sTr} \left(\underbrace{A \wedge \dots \wedge A}_{k \text{ раз}} \right)$

Упражнение 17. Пусть L оператор в трёхмерном пространстве. Показать, что

$$\det(1 + zL) = 1 + z\text{Tr } L + z^2\text{Tr} (L \wedge L) + z^3\text{Tr} (L \wedge L \wedge L),$$

показать, что

$$\det L = \text{Tr} (L \wedge L \wedge L),$$

Перепишем разложение в предложении 4.2.1:

$$\text{Ber}(1 + zA) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k(A)z^k, \quad \text{где} \quad \begin{cases} c_k(A) = \text{sTr } \Lambda^k A & \text{для целых } k \geq 0 \\ c_k(A) = 0 & \text{для целых } k < 0 \end{cases}$$

Замечание 17. Тут выписано разложение в ряд Тейлора. Немного странное записывание закона суммирования оправдается в Теореме 6

Proof

$$\text{Ber}(1 + zA) = \prod_{i=1}^p (1 + z\lambda_i) \prod_{\alpha=1}^q (1 + z\mu_\alpha)^{-1} = \quad (34)$$

$$\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_r} \mu_1^{n_1} \dots \mu_q^{n_q} (-1)^{n_1 + \dots + n_q} z^{r + n_1 + \dots + n_q} = \quad (35)$$

$$\begin{aligned} 1 + (\lambda_1 + \dots + \lambda_p - \mu_1 - \dots - \mu_q)z + \left(\sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j - \sum_{i=1, \alpha=1}^{i=p, \alpha=q} \lambda_i \mu_\alpha + \sum \mu_\alpha \mu_\beta \right) z^2 + \dots = \\ 1 + z\text{sTr } A + z^2\text{sTr} (A \wedge A) + \dots \\ \sum c_k(A)z^k, \text{ где } c_k(A) = \text{sTr} ((\wedge^k A)). \blacksquare \end{aligned} \quad (36)$$

Обсудить

Упражнение 18. Выразить базис в $V \wedge V \wedge V$ через базис в V .

Решение Пусть V -линейное $p|q$ -мерное пространство. Пусть $\{\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_\alpha\}$, где вектора $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ — чётные вектора, и вектора $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_q$ — нечётные вектора — произвольный базис в V . Тогда, например, будет базисом в $V \wedge V \wedge V$.

Конечно, количество чётных векторов в базисе минус количество нечётных, это суперслед единичного оператора (см, вычисления ниже). Тут мы еще ответим на вопрос, а каковы другие базисы в V .

Предложение 2. Пусть $\{\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_\alpha\}$ -произвольный базис в V , и пусть $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{p'}, \mathbf{f}_{1'}, \dots, \mathbf{f}_{q'}\}$ произвольный набор p чётных и q нечётных векторов V , Рассмотрим матрицу перехода T :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{i'} = T_{i'}^i \mathbf{e}_i + T_{i'}^\alpha \mathbf{f}_\alpha \\ \mathbf{f}_{\alpha'} = T_{\alpha'}^i \mathbf{e}_i + T_{\alpha'}^\alpha \mathbf{f}_\alpha \end{cases},$$

где $\|T_{i'}^i\|, \|T_{\alpha'}^\alpha\|$ -чётные матрицы (все их элементы чётные) и $\|T_{i'}^\alpha\|, \|T_{\alpha'}^i\|$ -нечётные матрицы (все элементы нечётные)

$\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{p'}, \mathbf{f}_{1'}, \dots, \mathbf{f}_{q'}\}$ —базис если и только если матрица обратима, то есть матрицы $\|T_{i'}^i\|$ и $\|T_{\alpha'}^\alpha\|$ -обратимы.

Упражнение 19. Обсудить вычисление $\text{Ber}(1 + zA)$ до третьего порядка по z .

Упражнение 20. Пусть E единичный оператор в $p|q$ -мерном линейном пространстве. Вычислить

$$\begin{aligned} & \text{sTr } E \\ & \text{sTr } (E \wedge E) \\ & \text{Ber}(E + zE) \end{aligned}$$

Замечание 18. Иногда мы будем путать обозначение для следа матрицы и для суперследа.

Решение.

Мы видим, что $\text{Ber}(E + zE) = (1 + z)^{p-q}$. Раскладывая в ряд получим:

$$\text{Ber}(E + zE) = (1 + z)^{p-q} = 1 + (p - q)z + \dots,$$

$$\text{sTr } E = p - q,$$

$$\text{sTr } (E \wedge E) = \frac{(p - q)(p - q - 1)}{2},$$

$$\text{sTr } (E \wedge E \wedge E) = \frac{(p - q)(p - q - 1)(p - q - 2)}{6},$$

и так далее. Проверим эти формулы.

Пусть $\{\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_\alpha\}$ произвольный базис в V ,

Мы видим, что

суперслед = количество чётных элементов в базисе в V — количество нечётных элементов в базисе

теперь проверим суперслед квадрата:

рассмотрим базис в $V \wedge V$: это будет например

$$\left\{ \{\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j (i < j); \mathbf{f}_\alpha \wedge \mathbf{f}_\beta (\alpha \leq \beta)\} \text{ чётные вектора}, \{\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{f}_\alpha\} \text{ нечётные вектора} \right\}$$

мы видим, что

суперслед $E \wedge E =$ количество чётных элементов в базисе—

$$\begin{aligned} & \text{количество нечётных элементов в базисе} = \\ & \frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q+1)}{2} - pq = \frac{(p-q)(p-q-1)}{2}, \end{aligned}$$

теперь проверим суперслед куба:

рассмотрим базис в $V \wedge V \wedge V$: это будет например

$$\left\{ \{ \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k (i < j < k); \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{f}_\alpha \wedge \mathbf{f}_\beta (\alpha \leq \beta) \} \text{чётные вектора}, \{ \mathbf{f}_\alpha \wedge \mathbf{f}_\beta \wedge \mathbf{f}_\gamma (\alpha \leq \beta \leq \gamma); \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{f}_\alpha \} \right\}_{\text{н}}$$

мы видим, что

суперслед $E \wedge E \wedge E =$ количество чётных элементов в базисе в $V \wedge V \wedge V$ —

$$\begin{aligned} & \text{количество нечётных элементов в базисе в } V \wedge V \wedge V = \\ & \left[\frac{p(p-1)(p-2)}{6} + \frac{pq(q+1)}{2} \right] - \left[\frac{q(q+1)(1+2)}{6} + \frac{p(p-1)q}{2} \right] = \frac{(p-q)(p-q-1)(p-q-2)}{6}, \end{aligned}$$

Проверка последнего равенства несколько утомительна...

(Сравните результаты этих упражнений с результатами упражнений по вычислению примеров базисов в $V \wedge V$ и в $V \wedge V \wedge V$.)

4.2.2 Универсальные полиномы Ньютона

Воспользуемся теоремой+тождеством Лиувилля: Обозначим $s_k = \text{sTr } A^k$. Имеем

$$\begin{aligned} \text{Ber}(1+zA) &= \sum_{k=0}^{\infty} \text{sTr } \underbrace{A \wedge \dots \wedge A}_k z^k = e^{\text{sTr } \log(1+zA)} = e^{\text{sTr } (\sum_{k=1}^{\infty} A^k (-1)^{k+1} z^k)} = \\ & e^{(\sum_{k=1}^{\infty} s_k (-1)^{k+1} z^k)} = e^{(s_1 + s_2 z^2 + s_3 z^3 + \dots)} = \\ & 1 + (s_1 + s_2 z^2 + s_3 z^3 + \dots) + \frac{1}{2} (s_1 + s_2 z^2 + s_3 z^3 + \dots)^2 + \frac{1}{6} (s_1 + s_2 z^2 + s_3 z^3 + \dots)^3 + \dots = \\ & 1 + s_1 z + \frac{1}{2} (s_1^2 - s_2) z^2 + \frac{1}{6} (s_1^3 - 3s_1 s_2 + 2s_3) z^3 + \dots \end{aligned}$$

Из этого предложения и формулы Лиувилля следует

Предложение 3.

$$\begin{aligned} c_k(A) &= P_k(s_1, \dots, s_k) \\ c_0 &= 1, \quad c_1 = s_1, \quad c_2 = \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2) \quad c_3 = \frac{1}{6}(s_1^3 - 3s_1 s_2 + 2s_3), \end{aligned}$$

Замечание 19. В предложении при классические полиномы Ньютона очень важна их универсальность.

(и sTr можно заменить на Tr)

4.3 Возвращение к березинианам

Мы ещё раз вернёмся к предложению 4.2.1.

Упражнение 21. Пусть L оператор в n -мерном линейном пространстве.

Рассмотреть многочлен $\det(1 + zL)$ 'разложив' его в окрестности нуля и бесконечно-сти. Сравнив полученные выражения придём к формулам

$$\underbrace{L \wedge \cdots \wedge L}_{k \text{ раз}} = \det L \underbrace{L^{-1} \wedge \cdots \wedge L^{-1}}_{N-k \text{ раз}}, \dim V = N.$$

Обсудим, что за ними стоит. Немного теории.

Пусть задано представление $\rho()$ группы обратимых операторов в линейном пространстве V . Контргрессиентное представление определяется как представление $\mapsto \rho(A^{-1})$

Левая часть формулы, это след представления

$\underbrace{\rho \wedge \cdots \wedge \rho}_{k \text{ раз}}$ группы. Правая часть есть след представления

$\det \rho \underbrace{\rho^* \wedge \cdots \wedge \rho^*}_{N-k \text{ раз}}$, где $\rho^* : GL(V^*) \rightarrow GL(V^*)$ контраг्रेसиентное представление:

$$\rho^*(A) = (\rho(A^{-1}))^*$$

Отметим, что если $A : V \rightarrow V$ и $B : V \rightarrow V$ то $*$ и B^* и $^{-1}$ и B^{-1} отображают в "другую сторону а $(A^{-1})^*$ в ту же:

$$(AB)^* = B^* A^*, (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}, \text{ а } ((AB)^{-1}) = ((A^{-1})) \cdot ((B^{-1})) .$$

На матричном уровне это обратная транспонированная матрица. Поэтому за тождеством философски стоит *естественный изоморфизм*

$$\underbrace{V \wedge \cdots \wedge V}_{k \text{ раз}} = \underbrace{\det V \otimes V \wedge \cdots \wedge V}_{k \text{ раз}}$$

Это и есть естественная версия звёздочки Ходжа.

Упражнение 22. Рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & d \end{pmatrix}$ Вычислить собственные значения этой матрицы.

Решение

Пусть эта матрица имеет λ в качестве чётного (бозонного) собственного значения и пусть эта матрица имеет μ в качестве нечётного (фермионного) собственного значения. Тогда $s\text{Tr } M = a - d = \lambda - \mu$ и

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + \beta\gamma & \dots \\ \dots & d^2 + \gamma\beta \end{pmatrix}$$

Имеем

$$\left\{ \begin{aligned} \text{sTr } M &= \lambda - \mu = a - d \\ \text{sTr } M^2 &= \lambda^2 - \mu^2 = a - d + 2\beta\gamma \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = a + \frac{\beta\gamma}{a-d} \\ \mu = d + \frac{\beta\gamma}{a-d} \end{cases}$$

А что делать если $a = d$?

4.4 Об одной проблеме стандартной формулы о березиниане

Почему мы пошли этим путем? Ведь у нас уже была формула для березиниана? Напомним (см. определение 9):

Пусть M чётная $p|q \times p|q$ матрица:

$$M = \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} \quad (37)$$

A это $p \times p$ матрица с чётными элементами, β это $p \times q$ матрица с нечётными элементами, Γ это $q \times p$ матрица с нечётными элементами и D $q \times q$ матрица с чётными элементами, тогда

$$\text{Ber } M = \text{Ber} \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} = \frac{\det(A - \beta D^{-1} \Gamma)}{\det D}. \quad (38)$$

Попробуем воспользовавшись стандартной формулой для березиниана посчитать нашу рациональную функцию

$$R_M(z) = \text{Ber} \left(1 + z \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} \right)$$

Подробные вычисления показывают, что в итоге получается:

$$R_M(z) = \text{Ber} \left(1 + z \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} \right) = \frac{\text{полином степени } p + pq \text{ по } z}{\text{полином степени } q + pq \text{ по } z}$$

а с другой стороны мы знаем и исследуем формулу (34) в которой

$$R_M(z) = \text{Ber} \left(1 + z \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} \right) = \frac{\text{полином степени } p \text{ по } z}{\text{полином степени } q \text{ по } z}$$

Формула Березина приводит к сокращению числителя и знаменателя на многочлен степени pq !

Уже в простом случае $p = q = 1$ формула Березина даёт ответ:

$$R_M(z) = \text{Ber} \left(1 + z \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} \right) = \text{Ber} \begin{pmatrix} 1 + az & \beta \\ \Gamma & 1 + dz \end{pmatrix} = \frac{(1 + az)(1 + dz) - \beta\Gamma}{1 + dz}$$

Кажется, что в этой формуле имеем дело с отношением квадратичных полиномов по z , а нет, используя результаты упражнения 22 легко получить, что

$$\text{Ber} \begin{pmatrix} 1 + az & \beta \\ \Gamma & 1 + dz \end{pmatrix} = \frac{(1 + az)(1 + dz) - \beta\Gamma}{1 + dz} = \frac{1 + \lambda z}{1 + \mu z} = \frac{1 + z \left(a + \frac{\beta\gamma}{a-d} \right)}{1 + z \left(d + \frac{\beta\gamma}{a-d} \right)}.$$

4.5 Возвращение к формуле $R_A(z) = \text{Ber}(1 + Az)$

Функция $\text{Ber}(1 + zA)$ можно разложить не только в окрестности нуля, но и в окрестности другой точки, например, бесконечности⁵

Предложение 4.

$$\text{Ber}(1 + zA) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k^*(A) z^k, \quad \text{где} \quad \begin{cases} c_k^*(A) = \text{Ber} A \text{Tr } \Lambda^{p-q-k} A^{-1} & \text{для целых } k \leq p - q \\ c_k^*(A) = 0 & \text{для целых } k > p - q \end{cases}$$

Proof На основании первого предложения получаем

$$\begin{aligned} \text{Ber}(1 + zA) &= \text{Ber}(zA) \text{Ber} \left(1 + \frac{1}{z} A^{-1} \right) = \text{Ber} A z^{p-q} \sum_{i \in \mathbf{Z}} \frac{1}{z^i} c_i(A^{-1}) = \\ &= \text{Ber} A \left(1 + \frac{1}{z} \text{Tr } A^{-1} + \frac{1}{z^2} \text{Tr} (A^{-1} \wedge A^{-1}) + \frac{1}{z^3} \text{Tr} (A^{-1} \wedge A^{-1} \wedge A^{-1}) + \dots \right) \\ &= \sum_{k \leq p-q} \overbrace{\text{Ber} A c_{p-q-k}(A^{-1})}^{c_k^*} z^k = \sum c_k^*(A) z^k, \end{aligned}$$

где

$$c_k^*(A) = \begin{cases} \text{Ber} A c_{p-q-k}(A^{-1}) & \text{if } k = p - q, p - q - 1, \dots \\ 0 & \text{if } k > p - q \end{cases}$$

Что можно сказать о последовательностях $\{c_k\}$ и $\{c_k^*\}$?

Оказывается, изучая эти последовательности мы попадаем в мир возвратных последовательностей; более удивительно, что изучая этот мир мы пишем новые формулы для березиниана.

Мы приходим к теореме, что

Теорема 6. Для линейного оператора, действующего в $(p|q)$ -мерном суперпространстве разность последовательностей c_k (см. Предложение 1) и c_k^* (см. Предложение 2)

$$\gamma_k = c_k - c_k^*$$

есть возвратная последовательность периода q .

Эта теорема позволяет написать другую формулу для березиниана:

Мы не будем доказывать этой вообще-то элементарной теоремы, но разберём примеры

⁵Интересно, что получится если это сделать в другой, не бесконечно удалённой точке...

Пример 4.3. Пусть L линейный оператор в $p|q$ -мерном суперпространстве и $q = 1$.

$$\text{Ber}(1 + zL) = \frac{1 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_pz^p}{1 + \mu z} = \sum c_k(L)z^k$$

Мы видим, что при больших (например начиная с c_p последовательность становится геометрической⁶ В этом проявляется фермионная размерность!,

Упражнение 23. Написать разложение функции $\frac{1}{1-z}$ в нуле и в бесконечности ,

Упражнение 24. Написать разложение функции $\frac{z^2}{z^2-z-1}$ в нуле и в бесконечности

Решение

Разложение в нуле

$$\frac{z^2}{z^2 - z - 1} = \sum_{k \geq 2} c_k z^k, \quad \begin{cases} a_k = c_{k-2} - c_{k-1} - c_k \\ c_2 = -1, c_3 = 1 \end{cases}$$

Мы приходим к

$$\begin{cases} c_k = -a_k - c_{k-1} + c_{k-2}, a_k = \delta_{20}, \\ c_2 = -1, c_3 = 1 \end{cases}$$

Разложение в бесконечности. Как бы та же формула, но другие граничные условия

$$\frac{z^2}{z^2 - z - 1} = 1 + \frac{1}{z} + \cdots = \sum_{\leq 0} c_k^* z^k,$$

Мы приходим к

$$\begin{cases} c_k = -a_k - c_{k-1} + c_{k-2}, a_k = \delta_{20}, \\ c_0 = 1, c_{-1} = 1 \end{cases}$$

мы видим, что

$$\gamma_n = c_n - c_n^* = 1$$

то есть теорема подтверждается.

Пусть L оператор, такой, что

$$\text{Ber}(1 + zL) = \frac{1 + z + z^2}{1 + z - z^2}$$

Что можно сказать об операторе L . Например, можно ли сказать, что $\text{Ber} L = -1$? А чему равен суперслед L ?

Решение

Сравнив с формулой (34) получим

$$\text{Ber} L = \frac{\prod \lambda_i}{\prod_{\alpha} \mu} = \frac{1}{-1} = -1.$$

⁶.

4.6 Теорема 6 и вычисления березинианов

Используя теорему (6) можно с лёгкостью посчитать березиниан так как

$$\text{Ber} A = c_{p-q}^*$$

Для этого нужно уметь распознавать возвратную последовательность. Как?

Вспомним школьное упражнение

Предложение 5. *Последовательность $\{c_k\}$ геометрическая если и только если*

$$\det \begin{pmatrix} c_k & c_{k+1} \\ c_{k+1} & c_{k+2} \end{pmatrix} = 0$$

А теперь почти школьное упражнение

Предложение 6. *Последовательность $\{c_k\}$ возвратная последовательность периода q если и только если соответствующие детерминанты Ганкеля аннулируются, Например последовательность $\{c_k\}$ возвратная периода 2 (как Фибоначчи) если и только если*

$$\det \begin{pmatrix} c_k & c_{k+1} & c_{k+2} \\ c_{k+1} & c_{k+2} & c_{k+3} \\ c_{k+2} & c_{k+3} & c_{k+4} \end{pmatrix} = 0$$

и.т.д.

При помощи Ганкелей и использованием определителей посчитаем березинианы матриц в $p|q$ -мерных пространствах

$$q = 1$$

Пример 4.4. Пусть действует в $p|1$ -мерном суперпространстве.

Имеем

$$\sum_{k \leq p-1} c_k^* z^k = R_A(z) = \frac{P(z)}{1 + \mu z} = \sum_{k \geq 0} c_k z^k$$

и

$$\gamma_k = c_k - c_k^* - \dots - \text{геометрическая прогрессия}$$

Значит

$$\det \begin{pmatrix} \gamma_{p-1} & \gamma_p \\ \gamma_p & c_{p+1} \end{pmatrix} = 0 \det \begin{pmatrix} c_{p-1} - \text{Ber} A & c_p \\ c_p & c_{p+1} \end{pmatrix} = 0$$

Отсюда получим, что для пространств размерности $p|1$

$$\text{Ber} A = \frac{1}{c_{p-1}} \det \begin{pmatrix} c_{p-1} & c_p \\ c_p & c_{p+1} \end{pmatrix}$$

Пример 4.5. Пусть γ действует в $p|2$ -мерном суперпространстве.

Имеем

$$\sum_{k \leq p-1} c_k^* z^k = R_A(z) = \frac{P(z)}{1 + pz + qz^2} = \sum_{k \geq 0} c_k z^k$$

Рассмотрим частный случай, когда многочлен в знаменателе имеет вид $1 + z + z^2$, то есть $c_{k+2} = c_k + c_{k+1}$ (начиная с некоторого номера), Имеем для

$$\gamma_k = c_k - c_k^* - \dots - \text{геометрическая прогрессия}$$

последовательность а la Fibonacci, то есть

$$0 = \det \begin{pmatrix} \gamma_{p-2} & \gamma_{p-1} & \gamma_p \\ \gamma_{p-1} & \gamma_p & \gamma_{p+1} \\ \gamma_p & \gamma_{p+1} & \gamma_{p+2} \end{pmatrix} == 0 \det \begin{pmatrix} c_{p-2} - \text{Ber} A & c_{p-1} & c_p \\ c_{p-1} & c_p & c_{p+1} \\ c_p & c_{p+1} & c_{p+2} \end{pmatrix} == 0$$

Отсюда получим, что для пространств размерности $p|2$ типа Fibonacci

$$\text{Ber} A = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} c_p & c_{p+1} \\ c_{p+1} & c_{p+2} \end{pmatrix}} \det \begin{pmatrix} c_{p-2} & c_{p-1} & c_p \\ c_{p-1} & c_p & c_{p+1} \\ c_p & c_{p+1} & c_{p+2} \end{pmatrix}$$

На самом деле используя хорошую математику это все можно переписать в следующем виде

Теорема 7. Березиниан линейного оператора γ в $p|q$ -мерном пространстве равен отношению следов представлений в инвариантных подпространствах, соответствующих прямоугольным диаграммам Юнга $D(p, q+1)$ и $D(p, q+1)^7$

$$\text{Ber} A = \frac{|\text{Tr } \wedge^{p-q} A \dots \text{Tr } \wedge^p A|_{q+1}}{|\text{Tr } \wedge^{p-q+2} A \dots \text{Tr } \wedge^{p+1} A|_q} = \pm \frac{\text{Tr } A_{D(p, q+1)}}{\text{Tr } A_{D(p+1, q)}} \quad (39)$$

Тут стоят детерминанты Ганкеля $q+1$ и q составленные из суперследов внешних степеней A .

⁷Пусть $D_{\lambda_1, \dots, \lambda_s}$ -диаграмма Юнга ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s$), пусть V_D , инвариантное подпространство в тензорном произведении $\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_N$, соответствующее диаграмме V_D .

$$N = \lambda_1 + \dots + \lambda_s \text{ раз}$$

Пусть A -линейный оператор в V ,

След оператора γ в подпространстве соответствующем диаграмме Юнга равен

$$\text{Tr } A_{V_D} = \det(|a_{ij}|)$$

где $|a_{ij}|$ $s \times s$ матрица, равная

$$a_{ij} = \underbrace{\text{Tr } (A \wedge \dots \wedge)}_{\lambda_i + j - i \text{ раз}}$$

5 Супермногообразия