Лекции по суперматематике

Оганес М. Худавердян

16 марта 2021 г.

Это конспект лекций на 20 февраля 2021
ИППИ, ИТМФ МГУ, мехмат МГУ

Содержание

Очень грубо говоря, суперматематика, это наука в которой используются коммутирующие и антикоммутирующие переменные.

Обычные (коммутирующие) переменные $\{x^i\} = \{x^1, x^2, \ldots, x^m\}$ принимают значения в числах, им можно сопоставить *точки*.

Антикоммутирующие переменные $\{\theta^a\} = \{\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^n\}$ это символы, такие что

$$\theta^a\theta^b = -\theta^b\theta^a, \quad \left(x^ix^j = x^jx^i\,, x^i\theta^a = \theta^a x^i\right)$$

Им трудно сопоставить точки [1] Чтоб работать в суперматематике, нам надо освоить двойственый язык.

1 Двойственное описание для точек и отображений

1.1 Точки

Пусть $\mathbf{R}^p$- p-мерное аффинное пространство, (`множество точек`). Обозначим $A = C^\infty(\mathbf{R}^m)$ алгебру гладких функций на $\mathbf{R}^m$.

Мы иногда будем использовать алгебру $C(\mathbf{R}^m)$ алгебру непрерывных функций на $\mathbf{R}^m$.

Определение 1. каждой **точке** $P \in \mathbf{R}^p$ сопоставим гомоморфизм σ_P, такой, который сопоставляет каждой функции f её значение в этой точке:

$$\mathbf{R}^m \ni P \mapsto \sigma_P\colon \sigma_P(f) = f(P)\,.$$

Понятно, что это гомоморфизм алгебры функций в числа, менее очевидно, что верно и обратное:

Теорема 1. *Пусть D-область в $\mathbf{R}^m$, пусть σ_D произвольный ненулевой гомоморфизм алгебры функций $C^\infty(D)$ в $\mathbf{R}$:*

$$\sigma_D \not\equiv 0\,, \sigma_D(f+g) = \sigma_D(f) + \sigma_D(g)\,, \sigma_D(fg) = \sigma_D(f)\sigma_D(g)\,.$$

Тогда существует такая точка $P \in D$, что для любой функции $f \in C^\infty(D)$

$$\sigma_D(f) = f(P)\,.$$

Иными словами множество точек области D = множеству гомоморфизмов из алгебры функций на D в вещественные числа.

Эта теорема позволяет реконструировать точки по алгебре функций $A = C^\infty(D)$. Заметим также, что она позволяет восстановить значение функции в точке. Если точка, это гомоморфизм σ алгебры функций в числа, то значение данной функции $f \in A$ на данной точке σ равно значемию 'точки' σ на элементе f.

[1] мы это сделаем в дальнейшем, используя язык так называемых Λ-точек.

Докажем эту теорему.

Доказательство теоремы.

Для простоты рассмотрим случай области $D = (0,1)$.

Пусть σ гомоморфизм алгебры $A = C^\infty(0,1)$ в $\mathbf{R}$. Пусть значение этого гомоморфизма на функции $f = x$ равно s: $\sigma(x) = s$. Покажем, что число $s \in (0,1)$. Действительно, если $s \notin (0,1)$, то функция $h = \frac{1}{x-s}$ хорошо определена и $\sigma(x-s) = 0$. Мы видим, что

$$\sigma\left((x-s)\frac{1}{x-s}\right) = \sigma(x-s)\sigma\left(\frac{1}{x-s}\right) = 0$$

и с другой стороны

$$\sigma\left((x-s)\frac{1}{x-s}\right) = 1\,.$$

Противоречие, значит $s \in [0,1]$.

Теперь покажем. что для произвольной гладкой функции $g \in C^\infty(0,1)$, выполняется условие $\sigma(g) = g(s)$. Пусть $\sigma(g) = t$. Мы хотим показать, что $t = g(s)$. Рассмотрим функцию

$$r = (x-s)^2 + (g-t)^2\,.$$

Легко понять, что $\sigma(r) = 0$, значит функция r необратима, (так как функция $\frac{1}{r}$ *не существует*). Мы приходим к выводу, что функция $r()$ обращается в нуль, хотя бы в одной из точек интервала $(0,1)$. Но если функция $r(x)$ обращается в нуль, то это может быть лишь точка $x = s$. Значит $g(s) = t$. ■

Exercise 1

Пройдет ли предыдущее доказательство, если алгебру гладких функций в $C^\infty(0,1)$ заменить на алгебру непрерывных функций $C^0(0,1)$.

Exercise 2

Пройдёт ли предыдущее доказательство если алгебру гладких функций в $C^\infty([0,1])$ заменить на произвольную алгебру функций, которые *разделяют* точки отрезка $[0,1]$.

Exercise 3

Найти и обсудить 'дырку' в следующем рассуждении

Пусть σ гомоморфизм, такой, что $\sigma(x) = s \in \mathbf{R}$. Тогда очевидно, что $\sigma(x^2) = s^2$ и для любого натурального n, $\sigma(x^n) = s^n$. Значит для любого многочлена $P(x)$, $\sigma(P(x)) = P(s)$. Теперь теорема Вейерштрасса об апроксимации гладкой функцией полиномами даёт, что для любой гладкой функции $g(x)$, $\sigma(g(x)) = g(s)$. ■

2 Отображения

Пусть снова $\mathbf{R}^p$- p-мерное аффинное пространство, (`множество точек`). Обозначим также $A = C^\infty(\mathbf{R}^m)$ алгебру гладких функций на $\mathbf{R}^m$.

Определение 2. каждому отображению $F\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ сопоставим гомоморфизм τ_F, такой, который сопоставляет каждой гладкой функции на $\mathbf{R}^m$ ($f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$) гладкую функцию ма $\mathbf{R}^n$ ($\tau_F(f) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$) такую, что значение функции $\tau_F(f)$ на произвольной точке $P \in \mathbf{R}^m$ равно значению функции f на точке $Q = F(P)$:

$$\tau_F(f)(P) = f\left(F(P)\right) \,.$$

Замечание 1. Правило 'против шёрстки' Отображения F и гомоморфизм функций τ_F идут в противоположных нзоравлениях ('против шёрстки').

Замечание 2. Гомоморфизм (2) построенный по отображению F обозначают F^*,

Так же как и в случае точек верно и обратное

Теорема 2. *Пусть U-область в $\mathbf{R}^m$ и V-область в $\mathbf{R}^n$, и τ гомоморфизм (против 'шёрстки') алгебры $C^\infty(V)$ в алгебру $C^\infty(U)$. Тогда существует отображение $F\colon\ \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ такое, что*

$$\tau = F^*\,, \textit{то есть для любой функции } f \in C^\infty(D)\ \tau(f) = f(F(P))\,.$$

Иными словами множество отображений = множеству гомоморфизмов из алгебры функций на V в алгебру функций на U.

Докажем эту теорему.

`Доказательство теоремы.`

Пусть P произвольная точка на U. Возьмём произвольную гладкую функцию f на V. Значение образа этой функции под действием гомоморфизма τ на данной точке P задаёт гомоморфизм алгебры гладких функций на V в вещественные числа, то есть согласно теореме 2 мы приходим к точке Q такой что

$$\tau(f)(P) = f(Q)$$

Это равенство приводит к определению точки $Q = F(P)$. Она задаёт гомоморфизм алгебры гладких функций

Пример 2.1. Пусть φ отображение пространств

$$\varphi \quad \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2\colon\ \begin{cases} x = u \\ y = \frac{v}{u} \end{cases} \tag{1}$$

Что тут написано?

Мы 'привыкли' 'читать эту формулу так

`точке с координатами` (u, v) сопоставляется точка с координатами $(x.y)$

Однако другой читатель скажет:

Формула определяет гомоморфизм гладких функций на плоскости $\mathbf{R}^2$, зависящих от x, y в гладкие функции на плоскости $\mathbf{R}^2$, зависящие от u, v. Гомоморфизм задан на образующих: Функция x переходит в функцию u и функция y переходит в функцию $\frac{v}{u}$; любая гладкая функция $f(x, y)$ переходит в гладкую функцию $f(x, y)\big|_{x=u, y=\frac{v}{u}}$.

Кто прав? Оба правы. Формулу можно читать по разному!

Пример 2.2. Пусть φ отображение пространств

$$\varphi \quad \mathbf{R}^1 \mapsto \mathbf{R}^2 \colon \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \tag{2}$$

Что тут написано?

Мы 'привыкли' 'читать эту формулу так

`точке` t `на прямой сопоставляется точка с координатами`

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

Другой скажет: в этой формуле определяется гомоморфизм функций на плоскости $\mathbf{R}^2$ в функции на $\mathbf{R}$. Формулы задают значения гомоморфизма на образующих: функция x переходит в функцию $\cos t$ и функция y переходит в функцию $\sin t$. Конечно, закон определяет образ любой (гладкой) функции. Например, функция $\frac{e^{-2xy}}{x^4+y^4}$ перейдет в функцию

$$\frac{e^{-2\cos t \sin t}}{\cos^4 t + \sin^4 t} = \frac{e^{-\sin 2t}}{1 - \frac{1}{2}\sin 2t},$$

и для любой гладкой функции $f = f(x, y)$

$$\sigma(f) = f(x, y)x = \cos t, y = \sin t)$$

И в заключение

задача-шутка

Рассмотрим набор разных простых чисел $\{p_i\}$, $i = 1, \dots, N$, $p_i \neq p_j$; также рассмотрим набор матуральных чисел, $\{_i\}$, $i = 1, \dots, N$, так что каждое a_i меньше p_i. Найти число K, которое при делении на простое число p_i даст остаток a_i.

Вы скажете: это китайская теорема об остатках. Какое отношение она имеет к курсу?

`Указание к решению`

Используя идеи двойственности можно свести эту задачу к задаче построения интерполяционного многочлена Лагранжа.

n различных точек на прямой ——n различных простых

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$———— $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$

$P(x)$ полиномиал ——- N натуральное число

$P(x_i) = y_i$—————-N даёт остаток a_i при делении на p_i

Если полином $P(x)$ равен y_i в точке x_i то многочлен

$$ch1P(x) = \sum_i y_i h_i(x)\,, \tag{3}$$

удовлетворяет соотношению $P(x_i) = y_i$, то есть этот многочлен достаавляет решение задачи о построении интерполяционного многочлена Лагранжа.

если многочлен $h_i(x)$ такой, что

$$h_m(x_j) = \delta_{mj}\,, \text{то есть } h_m(x) = \begin{cases} 1 \text{ если } x = x_m \\ 0 \text{ если } x = x_j \text{ при любом } j \neq m \end{cases}\,, \tag{4}$$

Построим многочлен (4),затем построим аналогичный объект в числах, затем переведите формулу (**??**) из многочленов в числа.

Рассмотрим многочлен $Q(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$. Этот многочлен зануляется во всех точках $\{x_1, \dots, x_n\}$, а вот многочлен $H_i(x) = \frac{Q(x)}{x - x_i}$ зануляется во всех точках $\{x_1, \dots, x_n\}$, кроме быть может точки x_i и в этой точке он равен

$$H_i(x_i) = \frac{Q(x)}{x - x_i}\Big|_{x_i} = \frac{Q(x) - Q(x_i)}{x - x_i} = Q'(x_i) \tag{5}$$

Замечание 3. Обратим внимание, что мы в формуле (6) определили 'производную' в кольце целых чисел.

Теперь ясно, что в (4)

$$h_m(x) = \frac{H_m(x)}{H'_m(x_m)} = \frac{\prod_{i\neq m}(x-x_i)}{\prod_{i\neq m}(x_m-x_i)} = \begin{cases} 1 \text{ если } x = x_m \\ 0 \text{ если } x = x_j \text{ при любом } j \neq m \end{cases} , \tag{6}$$

пр

Это искомый базисмый многочлен. Его легко перевести в числа.

Например кубический многочлен, который равен y_i в точке x_i ($i = 1, 2, 3$ и $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$) равен

$$P(x) = \sum y_m \frac{\prod_{i\neq m}(x-x_i)}{\prod_{i\neq m}(x_m-x_i)} = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} +$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} + y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_3)(x_3-x_4)} + y_4 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} \tag{7}$$

Перепишем эту формулу для чисел получим

$$P = \sum a_m \prod_{i\neq m} p_i \left[\prod_{i\neq m} p_i\right]^{-1}_{mpdulop_m} \tag{8}$$

Например, $p_i = 2, 3, 5, 7$

$$= a_1 3\cdot 5\cdot 7\,[3\cdot 5\cdot 7]^{-1}_{modulo2} + a_2 2\cdot 5\cdot 7\,[2\cdot 5\cdot 7]^{-1}_{modulo3} + a_3 2\cdot 3\cdot 7\,[2\cdot 3\cdot 7]^{-1}_{modulo5} + a_4 2\cdot 3\cdot 5\,[2\cdot 3\cdot 5]^{-1}_{modulo}$$

$$a_1\cdot 105\,[105]\,{-1}_{modulo2} + a_2 70\,[70]^{-1}_{modulo3} + a_3 42\,[42]^{-1}_{modulo5} + a_4 30\,[30]^{-1}_{modulo7} =$$

$$a_1\cdot 105\cdot 1 + a_2\cdot 70\cdot 1 + a_3\cdot 42\cdot 3 + a_4\cdot 30\cdot 4 =$$

$$105a_1 + 70a_2 + 126a_3 + 120a_4$$

Это число при делении на 2 даст остаток $_1$ при делении на 3 даст остаток $_2$ при делении на 5 даст остаток $_3$ и при делении на 7 даст остаток $_4$. ■

Лекция 20 февраля

3 Суперпространство

Немного забегая вперед дадим определение в духе идей двойственности $---$:

Определение 3. Алгебра гладких функций $\mathbf{R}(x,\xi)$ от коммутирующих переменных $x^1,\ldots,x^p$ и антикоммутирующих переменных $\xi^1,\ldots,\xi^q$ это алгебра функций на $p|q$-мерном линейном пространстве $\mathbf{R}^{p|q}$.

Вместо того чтоб определять пространство мы определяем алгебру функций на нём.
Например вместо
$\mathbf{R}^p$ рассматривается алгебра гладких функций от $x^1, \ldots, x^p$.
Перейдём к разъяснению.

3.1 Алгебра Грассмана

Обозначим символом Λ_q алгебру Грассмана с q антикоммутирующими свободными переменными $\theta^1, \ldots, \theta^q$, то есть

$$\theta^i\theta^k + \theta^k\theta^i = 0\,, \tag{9}$$

и любое другое соотношение на θ^i является следствием этих соотношений [2]

Произвольный элемент λ алгебры Λ^q может быть записан в виде

$$\lambda = \sum_{0\leq k\leq q} a_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\theta^{\alpha_1}\ldots\theta^{\alpha_k},$$

где коэффициенты антисимметричны при перестановке индексов.

Элемент $= a_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\theta^{\alpha_1}\ldots\theta^{\alpha_k}$ имеет чётность $p(s) = (-1)^k$.

Всякий элемент алгебры Грассмана можно однозначно представить в виде суммы чётного и нечётного элементов этой алгебры.

Для всякого элемента λ алгебры Грассмана Λ^q,

$$\lambda = m(\lambda) + n(\lambda)\,,$$

где $m(\lambda)$-обычное число и $n(\lambda)$-нильпотент.

Exercise Назовём элемент алгебры Грассмана *целым* если все коэффициенты в разложении (3.1) целые.

Доказать, что если λ целый нильпотентный элемент алгебры Грассмана, то для любого натурального n, $\frac{\lambda^n}{n!}$ тоже цел и нильпотентен.

Наряду с алгеброй Грассмана Λ^q мы будем рассматривать также алгебру $\Lambda_{p|q}$ как алгебру функций от p коммутирующих переменных $x^1, \ldots, x^p$ и q антикоммутирующих переменных $\theta^1, \ldots, \theta^q$. Каждый элемент алгебры $\Lambda_{p|q}$ (мы будем эту алгебру называть алгеброй Березина) может быть представлен в виде (3.1), где коэффициенты $a_{\alpha_{i_1\cdots i_k}}$ являются гладкими функциями от переменных $x^1, \ldots, x^p$: для любого $w \in \Lambda_{p|q}$

$$\lambda = \sum_{0\leq k\leq q} a_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(x^1 \ldots, x^p)\theta^{\alpha_1}\ldots\theta^{\alpha_k}\,.$$

[2] то есть для любого многочлена P такого, что $P = 0$, mnogohlen P принадлежит идеалу тензорной алгебры с образующими θ^i, образованному левыми частями соотношений (9).

Чётность вводится естественным образом.

Отметим, что выражение осмысленно при любой замене переменных, сохраняющих чётность.

Exercise Как преобразуется функция $g = \cos x$ при замене координат $x = x' + \varepsilon^1\varepsilon^2$.

Мы снова возвращаемся к определению суперпространства:

Определение 4. Алгебра гладких функций $\mathbf{R}(x, \xi)$ от коммутирующих переменных $x^1, \dots, x^p$ и антикоммутирующих переменных $\theta^1, \dots, \theta^q$, то есть алгебра Березина $\Lambda_{p|q}$, это алгебра функций на $p|q$-мерном линейном пространстве $\mathbf{R}^{p|q}$.

3.2 Дифференцирование и интегрирование

Мы подсчитаем для

3.2.1 Взятие производной.

Пусть $\theta^1, \dots, \theta^q$ набор антикоммутирующих переменных в алгебре Березина $\Lambda_{p|q}$. Выберем любую из этих переменных, например переменную θ^{i_0}.

Легко понять, что для любой функции $f = f(x^i, \theta^\alpha) \in \mathcal{L}_{p|q}$

$$f(x^i, \theta^\alpha) = \theta^{\beta_0} g + h$$

где функции g и h не зависят от θ^{i_0}. Таким образом мы приходим к естественному определению частной производной по антикоммутирующей переменной.

$$\frac{\partial}{\partial\theta^{i_0}} f(x^i, \theta^\alpha) = g, .$$

Соблюдается правило Лейбница (со знаком)

$$\frac{\partial}{\partial\theta^a}(fg) = \frac{\partial f}{\partial z^a} g + (-1)^p (fg) f \frac{\partial g}{\partial z^a}\,. \tag{10}$$

Замечание 4. Пусть u какой нибудь элемент из множества $(x^1, \dots, x^n, \theta^1, \dots, \theta^q)$ и какой нибудь другой элемент из множества $(x^1, \dots, x^n, \theta^1, \dots, \theta^q)$.

Exersize Показать, что

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v} = (-1)^{p(u)p(v)} \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}$$

Exercise Пусть $f(x, \theta)$–элемент алгебры Березина, гладкая функция он $, \theta$. Написать формулу Тэйлора.

Взятие производной композиции функций.

3.3 Интегрирование

Что такое интеграл?

Определение 5. Пусть ∂ операция взятия производной. Тогда интегрирование это линейная операция которая зануляется на образе ∂:

$$I(\partial f = 0)$$

Очевидно, что интеграл как мы его учили тому свойству удовлетворяет. Можно показать, что на пространстве функций с компактным носителем, это определение приводит к обычному.

Хороший пример, это интеграл Коши от аналитической функции.

В итоге мы приходим к выводу, что

Определение 6. Для антикоммутирующей переменной θ

$$\int \theta d\theta \neq 0\,.$$

так как θ не является производной и мы выбираем нормировку

$$\int \theta d\theta = 1\,. \tag{11}$$

Лекция 1 марта

3.4 Отображения и замены переменных

Мы вернёмся к интегралу, прежде поговорив немножко об отображениях и заменах переменных...

Напомним, что алгебра Березина $\Lambda_{r|s}$ это алгебра $C^\infty(\mathbf{R}^{r|s})$ гладких функций на $\mathbf{R}^{r|s}$. Каждый элемент алгебры Березина $\Lambda_{r|s}$ представим в виде

$$f(x,\theta) = a_\emptyset(x) + a_i(x)\theta^i + \cdots = \sum_{0\le k\le q} a_{\alpha_1\ldots\alpha_k}(x^1,\ldots,x^r)\theta^{\alpha_1}\ldots\theta^{\alpha_k}\,,$$

где $\{\theta^1,\ldots,\theta^s\}$, это набор антикоммутирующих переменных и $\{x^1,\ldots,x^s\}$ это стандартные координаты [3] в $\mathbf{R}^s$ и коэффициентные функции это гладкие функции от координат $\{x^1,\ldots,x^s\}$.

Замечание 5. Напомнить определение чётного и нечётного элементов

[3]например, в качестве таковых можно рассмотреть координаты $x^i(a^1,\ldots a^n) = a^i$, где $\mathbf{R}^r$ рассматривается как множество s-ок действительных чисел.

Замечание 6. Введённые выше координаты алгебры Березина, мы иногда будем называть *образующими* этой алгебры.

Мы сейчас определим гладкое отображение Φ суперпространства $\mathbf{R}^{m|n}$ в суперпространство $\mathbf{R}^{p|q}$, которое согласно нашей философии определяется 'против шёрстки'— гомоморфизмом алгебры $\Lambda_{p|q}$ в алгебру $\Lambda_{m|n}$.

Теорема 3. *Пусть* $\{f^a(x,\theta)\}$, $a = 1,\dots p$ *произвольный упорядоченный набор чётных функций алгебры* $\Lambda_{m|n}$ *в количестве* p *штук и пусть* $\{\varphi^\alpha(x,\theta)\}$, $\alpha = 1,\dots q$ *произвольный набор нечётных функций алгебры* $\Lambda_{m|n}$ *в количестве* q *штук.*

Тогда существует гомоморфизм $\alpha\colon \Lambda_{p|q} \mapsto \Lambda_{m|n}$ *такой, что*

$$\begin{cases} \alpha(y^a) = f^a(x,\theta) \ (a = 1,\dots,p) \\ \alpha(\eta^\mu) = \phi^\mu(x,\theta) \ (\mu = 1,\dots,p) \end{cases} \tag{12}$$

и этот гомоморфизм единственен.

Значение этого гомоморфизма на любой функции $f \in \Lambda_{p|q}$ *равно*

$$\alpha\,[f] = \alpha\left[f = \sum_{0\le k\le q} a_{\mu_1\dots\mu_k}(y^1,\dots,y^p)\eta^{\mu_1}\dots\eta^{\mu_k}\right] = \alpha\,[f = a_\emptyset(y) + a_{\mu\nu}(y)\eta^\nu\eta^\mu + \dots] =$$

$$a_\emptyset\left(f^a_\emptyset(x) + f^a_{\alpha\beta}(x)\theta^\beta\theta^\alpha + \dots\right) +$$
$$+a_{\mu\nu}\left(f^a_\emptyset(x) + f^a_{\alpha\beta}\theta^\beta\theta^\alpha + \dots\right)\left[\Phi^\mu_\alpha(x)\theta^\alpha + \dots\right]\left[\Phi^\nu_\beta(x)\theta^\alpha + \dots\right] + \dots$$

Замечание 7. Эта теорема позволяет определить отображение Φ суперпространства $\mathbf{R}^{m|n}$ в суперпространство $\mathbf{R}^{p|q}$ с помощью упорядоченного набора чётных гладких функций $\{\{f^a(x,\theta)\}\}$,$a = 1,\dots p$ и нечётных гладких функций $\{\{\phi^a(x,\theta)\}\}$,$a = 1,\dots q$

Отображение Φ определяется с помощью гомоморфизма (12).

Замечание 8. Сформулированная выше Теорема3 даёт право отождествлять стандартные координаты на $\mathbf{R}^{r|s}$ и образующими алгебры Березина $\Lambda_{r|s}$.

Определение 7. Мы будем называть иногда $\mathbf{R}^{p|q}$ $p|q$-мерным аффинным суперпространством

Пусть $\{x^i,\theta^\alpha\}$, $i = 1,\dots,r$, $\alpha = 1,\dots,s$ стандартные координаты на $\mathbf{R}^{r|s}$ = образующие алгебры Березина $\Lambda_{r|s}$; каждый элемент $\Lambda_{r|s}$ представим в виде

$$f(x,\theta) = a_\emptyset(x) + a_i(x)\theta^i + \dots = \sum_{0\le k\le q} a_{\alpha_1\dots\alpha_k}(x^1,\dots,x^p)\theta^{\alpha_1}\dots\theta^{\alpha_k}\,.$$

Чтобы определить замену переменных в суперпространстве мы следуя нашей философии дуальности определим *обратимое отображение* алгебры функций на себя.

Рассмотрим отображение

$$\begin{cases} x^{i'} = f^{i'}(x,\theta), i = 1,\dots,r \\ \theta^{i'} = \varphi^{i'}(x,\theta)\,,\ i = 1,\dots,s \end{cases} \tag{13}$$

Каково условие, что оно обратимо?

Имеет место следующая теорема

Теорема 4. *Произвольное преобразование переменных* (13) *обратимо если и только если выполняются следующие условия:*

- *отображение* $\mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^r$ *задаваемое формулами* (13)
$$x^{i'}\big|_{\theta=0} = f^{i'}(x,\theta)\big|_{\theta=0} \quad \textit{обратимо} \tag{14}$$
- $s \times s$*-матрица*
$$\frac{\partial\theta^{i'}}{\partial\theta^j}\Big|_{\theta=0} = \frac{\partial\varphi^{i'}(x,\theta)}{\partial\theta^j}\Big|_{\theta=0} \tag{15}$$
обратима

Замечание 9. Мы рассматриваем только гладкие функции. Это неявно используется в формулировках теорем.

Пример 3.1. Рассмотрим аффинное суперпространство $\mathbf{R}^{1|3}$. Ему соответствует алгебра гладких функций на прямой со значениями в Грассмановой алгебре. Λ_2 (Это то же, что алгебра Березина $\Lambda_{1|2}$) Рассмотрим гладкую замену переменных:

$$\begin{gathered} x' = x + \theta^1\theta^2 \\ \theta^{1'} = \theta^1 + \sin x\theta^1\theta^2\theta^3 \\ \theta^{2'} = 2\theta^2 \\ \theta^{3'} = \theta^3 \end{gathered} \tag{16}$$

Вначале отметим, что условия теоремы соблюдаются: отображение

$$x'\big|_{\theta=0} = (x + \theta^1\theta^2)\big|_{\theta=0} = x$$

поэтому условие (14) очевидно соблюдается; второе условие легко проверить: матрица (15) имеет вид

$$\frac{\partial\theta^{i'}}{\partial\theta^j}\Big|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\theta^{1'}}{\partial\theta^1} & \frac{\partial\theta^{2'}}{\partial\theta^1} & \frac{\partial\theta^{3'}}{\partial\theta^1} \\ \frac{\partial\theta^{1'}}{\partial\theta^2} & \frac{\partial\theta^{2'}}{\partial\theta^2} & \frac{\partial\theta^{3'}}{\partial\theta^2} \\ \frac{\partial\theta^{1'}}{\partial\theta^3} & \frac{\partial\theta^{2'}}{\partial\theta^3} & \frac{\partial\theta^{3'}}{\partial\theta^3} \end{pmatrix}\Big|_{\theta^i=0} = \begin{pmatrix} 1+\sin x\theta^2\theta^3 & 0 & 0 \\ 1-\sin x\theta^1\theta^3 & 2 & 0 \\ 1+\sin x\theta^1\theta^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Big|_{\theta^i=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Big|_{\theta^i=0} =$$

и очевидно обратима.

Проверим, что замена (16) обратима. Нам удобно обозначить $\theta^1 \to \theta$, $\theta^2 \to \eta$, $\theta^3 \to \xi$. Имеем

$$\begin{cases} x' = x + \theta\eta \\ \theta' = \theta + \sin x\theta\eta\xi \\ \eta' = 2\eta \\ \xi' = \xi \end{cases}$$

Имеем

$$\xi = \xi', \eta = \frac{1}{2}\eta', \theta = \theta' - \sin x\theta\eta\xi =$$

$$\theta' - \frac{1}{2}\sin x\theta\eta'\xi' = \theta' - \frac{1}{2}\sin x\left[\theta' - \sin x\theta\eta\xi\right]\eta'\xi' = \theta' - \frac{1}{2}\sin x\left[\theta' - \frac{1}{2}x^3\theta'\eta'\xi'\right]\eta'\xi' = \theta' - \frac{1}{2}\sin x\theta'\eta'\xi'$$

и

$$x = x' - \theta\eta = x' - \left[\theta' - \frac{1}{2}\sin x\theta'\eta'\xi'\right]\frac{1}{2}\eta' = x' - \frac{1}{2}\theta'\eta'$$

3.5 Интегрирование функции на суперпространстве $\mathbf{R}^{p|q}$

Снова вернёмся к интегрированию.

Мы определим интеграл от быстроубывающей функции по пространству $\mathbf{R}^{p|q}$.

Определение 8. Пусть $\{x^i, \theta^\alpha\}$. $i = 1, \ldots, p$, $\alpha = 1, \ldots, q$ координаты афинного суперпространства $\mathbf{R}^{p|q}$. Пусть

$$f(x,\theta) = \sum_{0 \le k \le q} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}(x^1, \ldots, x^p)\theta^{\alpha_1} \ldots \theta^{\alpha_k} = a_\emptyset(x) + \theta^i(x)a_i(x) + \cdots + \theta^1 \ldots \theta^n a_{[1\ldots n]}(x) \quad (17)$$

произвольная *быстроубывающая* функция на $\mathbf{R}^{p|q}$, то есть функция, то есть любая производная этой функции убывает быстрее чем любая степень x:

$$\lim_{x\to\infty} x^n D^m f = 0\,.$$

Тогда

$$\int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x,\theta) f = \int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x,\theta)\theta^1 \ldots \theta^n a_{[1\ldots n]}(x) = (-1)^s \int_{\mathbf{R}^p} dx^1 \ldots dx^n a_{[1\ldots n]}(x) = \quad (18)$$

Замечание 10. Мы немного странно пишем разложение (17)

Exersize Проверить, что это определение согласовано с формулой (11)

Доказать, что условие быстрого убывания не зависит от системы координат.

3.6 Березиниан

На прошлой неделе мы сформулировали идею интеграла (см. 6). Однако затем, мы остановились на замене переменных и только потом снова перешли к интегрированию. Почему?

Пусть (x^i, θ^α), $i = 1, \ldots, p$, $\alpha = 1, \ldots, q$ и $(x^{i'}, \theta^{\alpha'})$, $i' = 1, \ldots, p$, $\alpha' = 1, \ldots, q$ пара двух координатных систем на афинном суперпространстве $\mathbf{R}^{p|q}$.

$$\det \frac{\partial x}{\partial x'}\big|_{\theta=0} > 0 \tag{19}$$

Вычислим интеграл (18) от одной и той же быстроубывающей функции $F(x,\theta)$ в двух различных системах координат (x^i, θ^α) и $(x^{i'}, \theta^{\alpha'})$:

$$\int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x,\theta) f(x,\theta) = \int_{\mathbf{R}^{p|q}} \frac{D(x,\theta)}{D(x',\theta')} D(x',\theta') f\left(x\left(x',\theta'\right), \theta\left(x',\theta'\right)\right) =$$

$$\int_{\mathbf{R}^{p|q}} \mathrm{Ber}\left(\frac{\partial\left(x,\theta\right)}{\partial\left(x',\theta'\right)}\right) D(x',\theta') f'(x',\theta') \tag{20}$$

Мы вычислим Березиниан на следующей лекции.

3.6.1 Два интеграла

Пусть $|||A_{ik}|$ положительно определенная симметрическая $n \times n$ матрица в Евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$. Вычислить интеграл по $\mathbf{E}^n$ от $e^{-A_{ik}x^i x^k}$.

Пусть $||B_{ik}||$ антисимметрическая $q \times q$ матрица. Вычислить интеграл от функции $e^{-B_{ik}\theta^i\theta^k}$ по $\mathbf{R}^{0|q}$.:

3.7 Berezinian (continuation)

лекция 15 марта

Вернёмся снова к уравнению (20) и обсудим березиниан.

Определение 9. Пусть M чётная $p|q \times p|q$ матрица:

$$M = \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} \tag{21}$$

A это $p \times p$ матрица с чётными элементами, β это $p \times q$ матрица с нечётными элементами, Γ это $q \times p$,матрица с нечётными элементами и D $q \times q$ матрица с чётными элементами, then

$$\mathrm{Ber} M = \mathrm{Ber}\begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} = \frac{\det\left(A - \beta\Gamma D^{-1}\right)}{\det D}\,. \tag{22}$$

Замечание 11. Вы спросите, а в каком пространстве действует чётная $p|q \times p|q$ матрица? Вспомним обычную линейную алгебру: $m \times m$ матрица элементами которой являются действительные числа действует в векторном пространстве $\mathbf{R}^m$— в пространстве упорядоченных n-ок действителйнух чисел. На самом деле $p|q \times p|q$ матрица действует *в множестве Λ-точек пространства* $\mathbf{R}^{p|q}$, то есть в множестве упорядоченных наборов p чётных элементов алгебры Грассмана Λ и q нечётных элементов этой алгебры:

$$\mathbf{R}^{p|q}_{\Lambda} = \{(\lambda_1, \dots \lambda_p; \mu_1, \dots \mu_q), \lambda_i \in \Lambda_0, \mu_j \in \Lambda_1\} \tag{23}$$

Мы далее ещё вернемся к этому.

Оказывается, березиниан (22) имеет самое прямое отношение к задаче, которую мы решали в конце прошлой лекции. Напомним, что в конце прошлой лекции мы ввели понятие интеграла от быстроубывающей функции $f(x,\theta) \in C^\infty(\mathbf{R}^{p|q})$ по всему пространству $\mathbf{R}^{p|q}$.

Затем мы рассмотрели две произвольные системы координат (x^i, θ^α) и $(x^{i'}, \theta^{\alpha'})$ и,руководствуяс правилом (18), и инвариантностью интеграла по отношению к замене координат мы приходим к правилу

Теорема 5. *При замене координат* $\begin{cases} x^{i'} = x^{i'}(x,\theta) \\ \theta^{\alpha'} = \theta^{\alpha''}(x,\theta) \end{cases}$ *в интеграле* $\int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x,\theta) f(x,\theta)$ *подынтегральное выражение домножается на березиниан матрицы Якоби преобразования координат:*

$$\int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x,\theta) f(x,\theta) = \int_{\mathbf{R}^{p|q}} \frac{D(x,\theta)}{D(x',\theta')} D(x',\theta') f(x,\theta)\big|_{x(x',\theta'),\theta(x',\theta')},$$

где

$$\frac{D(x,\theta)}{D(x',\theta')} = Ber\left(\frac{\partial\,(x,\theta)}{\partial\,(x',\theta')}\right) = Ber\begin{pmatrix} \frac{\partial x(x',\theta')}{\partial x'} & \frac{\partial \theta(x',\theta')}{\partial x'} \\ \frac{\partial x(x',\theta')}{\partial \theta'} & \frac{\partial \theta(x',\theta')}{\partial \theta'} \end{pmatrix} = Ber\begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix}$$

где

$$A^i_{j'} = \frac{\partial x^i(x',\theta')}{\partial x^{j'}}],, \quad \beta^\alpha_{j'} = \frac{\partial \theta^\alpha(x',\theta')}{\partial x^{j'}}],, \quad \gamma^i_{\alpha'} = \frac{\partial x^i(x',\theta')}{\partial \theta^{\alpha'}}],, \quad D^\alpha_{\alpha'} = \frac{\partial \theta^\alpha(x',\theta')}{\partial \theta^{\alpha'}}],,$$

Условие (15) *теоремы о замене переменных обеспечивает, что березиниан хорошо определен.*

Замечание 12. Интеграл (20) посчитан в предположении

$$\det \frac{\partial x}{\partial x'}\big|_{\theta=0} > 0 \tag{24}$$

В общем случае надо домножать ответ на знак якобиана (24).

Замечание 13. Вы можете часто увидеть НЕПРАВИЛЬНОЕ обозначение для координатной формы объёма

Следствие 1. *Березиниан мультипликативен:* $Ber(M_1 M_2) = Ber M_1 \cdot Ber M_2$.

`Proof`

$$Ber\left(\frac{\partial (x,\theta)}{\partial \left(\tilde{x},\tilde{\theta}\right)}\right) = \frac{D(x,\theta)}{D(\tilde{x},\tilde{\theta})} = \frac{D(x,\theta)}{D(x',\theta')}\frac{D(x',\theta')}{D(\tilde{x},\tilde{\theta})} = Ber\left(\frac{\partial (x,\theta)}{\partial (x',\theta')}\right) Ber\left(\frac{\partial (x',\theta')}{\partial \left(\tilde{x},\tilde{\theta}\right)}\right)$$

Мультипликативность практически следует из определения!

Пример 3.2. Рассмотрим в $\mathbf{R}^{1|1}$ 'линейное' преобразование

$$\varphi_M: \quad \begin{cases} x = x'a + \theta'\gamma \\ \theta = x'\beta + \theta k \end{cases} \quad \Leftrightarrow \left(x,\theta\right) = \left(x', theta'\right)\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & k \end{pmatrix} \tag{25}$$

которое соответствует $1|1 \times 1|1$ матрице

$$M = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & k \end{pmatrix} \tag{26}$$

Замечание 14. Матрица Якоби преобразования (25) равна матрице (26).

Обратите внимание на последовательность написания термов в формуле 25. Это объясняется тем, что производная берется слева (см. также замечание 10)

Вычислим интеграл от быстро убывающей функции $f(x,\theta) = f_0(x) + \theta f_1(x)$ в координатах (x,θ) и в новых координатах (x',θ'). В координатах (x,θ)

$$\int D(x,\theta) f(x,\theta) = I,\ \left(I = \int f_1(x)dx\right).$$

В координатах (x',θ') имеем

$$I = \int D(x,\theta)f(x,\theta) = \mathrm{Ber}M \int D(x',\theta') f\left(ax' - \gamma\theta', \beta x' + k\theta'\right)$$

(Мы положили, что $\mathrm{Ber}M$ равен константе.)

Рассмотрим три подслучаи

а)

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (a > 0)\,. \tag{27}$$

В этом случае имеем

$$I = \int D(x,\theta)f(x,\theta) = \mathrm{Ber}M \int D(x',\theta') f\left(ax,\theta\right) =$$

$$\mathrm{Ber}M \int D(x',\theta')\left[f_0(ax) + \theta f_1(ax)\right] = \mathrm{Ber}M \int f_1(\tilde{x})d\tilde{x} = \frac{\mathrm{Ber}M}{|a|} I \Rightarrow \mathrm{Ber}M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a\,.$$

Перейдем ко второму подслучаю: б)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \tag{28}$$

В этом случае имеем

$$I = \int D(x,\theta) f(x,\theta) = \mathrm{Ber} M \int D(x',\theta') f\left(x, k\theta'\right) =$$

$$\mathrm{Ber} M \int D(x',\theta') \left[f_0(x) + k\theta' f_1(x)\right] = \mathrm{Ber} M \int f_1(x) dx = kI \Rightarrow \mathrm{Ber} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \frac{1}{k}\,.$$

Теперь перейдём к общему случаю:
c)

$$M = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & k \end{pmatrix} \tag{29}$$

Имеем

$$I = \int D(x,\theta) f(x,\theta) = \mathrm{Ber} M \int D(x',\theta') f\left(ax' - \gamma\theta', \beta x' + k\theta'\right) =$$

$$\mathrm{Ber} M \int D(x,\theta) f\left(ax - \gamma\theta, \beta x + k\theta\right)\,.$$

(мы положим $a > 0$) Продолжим вычисления:

$$I = \mathrm{Ber} M \left[\int D(x,\theta) f_0(ax - \gamma\theta) + (\beta x + k\theta) f_1(ax - \gamma\theta)\right],.$$

Заметим, что $\int D(x,\theta) f_0(ax - \gamma\theta) = 0$,так как $f_0(x)$ быстроубывающая функция:

$$\int D(x',\theta') f_0(ax' - \gamma\theta') = -\frac{1}{a}\int \gamma f'(x) dx = 0\,,$$

значит

$$I = \mathrm{Ber} M \left[\int D(x,\theta) f_0(ax - \gamma\theta) + (\beta x + k\theta) f_1(ax - \gamma\theta)\right] = \mathrm{Ber} M \int D(x,\theta)(\beta x + k\theta) f_1(ax - \gamma\theta) =$$

$$\mathrm{Ber} M \int D(x,\theta)(\beta x + k\theta)\left[g(ax) - \gamma\theta g'(ax)\right] =$$

$$\mathrm{Ber} M \left[\int D(x,\theta)\theta k g(ax) - \int D(x,\theta)\theta\beta x\gamma g'(ax)\right] =$$

$$\mathrm{Ber} M \left[\frac{k}{a}\int g(x)dx - \frac{\beta\gamma}{a^2}\int x g'(x) dx\right] = \mathrm{Ber} M \left[\frac{k}{a}\int g(x)dx + \frac{\beta\gamma}{a^2}\int g(x) dx\right] =$$

$$I\mathrm{Ber}M\left[\frac{k}{a}+\frac{\beta\gamma}{a^2}\right]\Rightarrow$$

$$\mathrm{Ber}\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & k \end{pmatrix}=\frac{1}{\frac{k}{a}+\frac{\beta\gamma}{a^2}}=\frac{a^2}{ka+\beta\gamma}=\frac{a}{k}\left(1-\frac{\beta\gamma}{ka}\right).$$

Exercises

Мы посчитаем интегралы 3.6.1, потом мы сделаем упражнение, где проясим смысл условия быстроубывающей функции для интеграла Березина.

Exercise

Приведя форму к диагональному виду легко понять, что

$$\int e^{-A(\mathbf{x},\mathbf{x})}d^nx=\int e^{-\lambda_1x_1^2-\dots-\lambda_nx_n^2}d^nx=\prod_{i=1}^n\sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}}=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}.$$

Во втором интеграле детерминант перепрыгнет в числитель[4].

$$\int D(\theta^1,\dots,\theta^n)e^{-B_{ik}\theta^i\theta^k}d^nx==C\sqrt{\det B}=C\mathrm{Pfaffian}B$$

(это для чётных n, а для нечётных нуль.) Это можно увидеть прямым подсчётом: при $n=2k$

$$\int D(\theta^1,\dots,\theta^n)e^{B_{ik}\theta^i\theta^k}d^nx=\int D(\theta^1,\dots,\theta^n)\frac{1}{k!}\left(B_{ij}\theta^i\theta^j\right)^k=$$

$$\frac{1}{k!}B_{i_1j_1}\dots B_{i_kj_k}\varepsilon^{i_1j_1\dots i_kj_k}$$

а можно и косвенно: если обозначить

$$\int D(\theta^1,\dots,\theta^n)e^{B_{ik}\theta^i\theta^k}d^nx=F(B_{ik})$$

то заменой переменной $\theta^i=L^i_k\xi^k$ легко увидеть. что

$$F(B)=\frac{F(L^+BL)}{\det L}$$

hence

$$\frac{F(\tilde{B})}{\sqrt{\tilde{B}}}\frac{F(B)}{\sqrt{B}},(\tilde{B}=L^+BL)$$

то есть

$$\int D(\theta^1,\dots,\theta^n)e^{B_{ik}\theta^i\theta^k}d^nx=F(B_{ik})=C\sqrt{B}$$

[4]this integral appeared in Faddeev Popov quantisation. This was not supersymmetry, however this was a good push for it.

Замечание 15. Я не знаю более эффективного способа проверить формулу для Пфаффиана.

Exercise Пусть f гладкая быстроубывающая функция на $\mathbf{R}^{1|2}$.
Определим интеграл от этой функции по лучу $(0, \infty)$:

$$\int_{x \geq 0} D(x,\theta,\varphi) f(x,\theta.\varphi) = \int_{\mathbf{R}^{1|2}} D(x,\theta,\varphi) H(x) f(x,\theta,\varphi) \tag{30}$$

Покажем, что этот интеграл инвариантен при замене

$$\begin{cases} x = y + \xi\eta \\ \theta = \xi \\ \varphi = \eta \end{cases}$$

Березиниан той замены равен 1 (Проверьте это!)

Посчитаем его в новых и старых координатах.

a) в координатах (x, θ, φ)

$$\int_{x \geq 0} D(x,\theta,\varphi) f(x,\theta.\varphi) = \int_{\mathbf{R}^{1|2}} D(x,\theta,\varphi) H(x) f(x,\theta,\varphi) =$$

$$\int_{\mathbf{R}^{1|2}} D(x,\theta,\varphi) H(x) \left[f_0(x) + \theta f_1(x) + \varphi f_2(x) + \theta\varphi f_3(x)\right] = \int dx f_3(x)\,.$$

b) в координатах (y, ξ, η)

$$\int_{x \geq 0} D(x,\theta,\varphi) f(x,\theta.\varphi) = \int_{\mathbf{R}^{1|2}} D(x,\theta,\varphi) H(x) f(x,\theta,\varphi) =$$

$$\int_{\mathbf{R}^{1|2}} \mathrm{Ber}\frac{\partial(x,\theta,\varphi)}{\partial(y,\xi,\eta)} \left[H(x) f(x,\theta,\varphi)\right]_{x=y+\xi\eta, \theta=\xi, \varphi=\eta} =$$

$$\int_{\mathbf{R}^{1|2}} 1 \cdot H(y+\xi\eta) \left[f_0(y+\xi\eta) + \xi f_1(y+\xi\eta) + \eta f_2(y+\xi\eta) + \xi\eta f_3(y+\xi\eta)\right] =$$

$$\int_{\mathbf{R}^{1|2}} (H(y) + \xi\eta\delta(y)) \left[f_0(y) + \xi\eta f_0'(y) + \xi f_1(y) + \eta f_2(y) + \xi\eta f_3(y)\right] =$$

$$\int_{\mathbf{R}^{1|2}} (H(y) + \xi\eta\delta(y)) \left[f_0(y) + \xi\eta f_0'(y) + \xi f_1(y) + \eta f_2(y) + \xi\eta f_3(y)\right] =$$

$$\int dy H(y) \left[f_0'(y) + f_3(y)\right] + \int dy \delta(y) f_0(y) =$$

$$\int_0^\infty dy \left[f_0'(y) + f_3(y)\right] + f_0(0) =$$

$$f_0(\infty) - f_0 + \int_0^\infty dy f_3(y) + f_0(0) = \int_0^\infty dy f_3(y) \blacksquare$$

Exercise Check please, that the following definition is not good:

$$\int_{x\geq 0} D(x,\theta,\varphi) f(x,\theta.\varphi) = \int_0^\infty dx \int_{\mathbf{R}^{0|2}} D(x,\theta,\varphi) H(x) f(x,\theta,\varphi)$$

Compare it with a definition(30)