Лекции по суперматематике

Оганес М. Худавердян

21 февраля 2021 г.

Это конспект лекций на 20 февраля 2021
тут материал первых двух лекций
ИППИ, ИТМФ МГУ, мехмат МГУ

Содержание

Очень грубо говоря, суперматематика, это наука в которой используются коммутирующие и антикоммутирующие переменные.

Обычные (коммутирующие) переменные $\{x^i\} = \{x^1, x^2, \ldots, x^m\}$ принимают значения в числах, им можно сопоставить *точки*.

Антикоммутирующие переменные $\{\theta^a\} = \{\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^n\}$ это символы, такие что

$$\theta^a\theta^b = -\theta^b\theta^a, \quad \left(x^i x^j = x^j x^i\,, x^i\theta^a = \theta^a x^i\right)$$

Им трудно сопоставить точки [1] Чтоб работать в суперматематике, нам надо освоить двойственый язык.

1 Двойственное описание для точек и отображений

1.1 Точки

Пусть $\mathbf{R}^p$- p-мерное аффинное пространство, (`множество точек`). Обозначим $A = C^\infty(\mathbf{R}^m)$ алгебру гладких функций на $\mathbf{R}^m$.

Мы иногда будем использовать алгебру $C(\mathbf{R}^m)$ алгебру непрерывных функций на $\mathbf{R}^m$.

Определение 1. каждой **точке** $P \in \mathbf{R}^p$ сопоставим гомоморфизм σ_P, такой, который сопоставляет каждой функции f её значение в этой точке:

$$\mathbf{R}^m \ni P \mapsto \sigma_P \colon \sigma_P(f) = f(P)\,.$$

Понятно, что это гомоморфизм алгебры функций в числа, менее очевидно, что верно и обратное:

Теорема 1. *Пусть D-область в $\mathbf{R}^m$, пусть σ_D произвольный ненулевой гомоморфизм алгебры функций $C^\infty(D)$ в $\mathbf{R}$:*

$$\sigma_D \not\equiv 0\,, \sigma_D(f+g) = \sigma_D(f) + \sigma_D(g)\,, \sigma_D(fg) = \sigma_D(f)\sigma_D(g)\,.$$

Тогда существует такая точка $P \in D$, что для любой функции $f \in C^\infty(D)$

$$\sigma_D(f) = f(P)\,.$$

Иными словами множество точек области D = множеству гомоморфизмов из алгебры функций на D в вещественные числа.

Эта теорема позволяет реконструировать точки по алгебре функций $A = C^\infty(D)$. Заметим также, что она позволяет восстановить значение функции в точке. Если точка, это гомоморфизм σ алгебры функций в числа, то значение данной функции $f \in A$ на данной точке σ равно значемию 'точки' σ на элементе f.

[1] мы это сделаем в дальнейшем, используя язык так называемых Λ-точек.

Докажем эту теорему.

Доказательство теоремы.

Для простоты рассмотрим случай области $D = (0, 1)$.

Пусть σ гомоморфизм алгебры $A = C^\infty(0, 1)$ в $\mathbf{R}$. Пусть значение этого гомоморфизма на функции $f = x$ равно s: $\sigma(x) = s$. Покажем, что число $s \in (0, 1)$. Действительно, если $s \notin (0, 1)$, то функция $h = \frac{1}{x-s}$ хорошо определена и $\sigma(x - s) = 0$. Мы видим, что

$$\sigma\left((x - s)\frac{1}{x - s}\right) = \sigma(x - s)\sigma\left(\frac{1}{x - s}\right) = 0$$

и с другой стороны

$$\sigma\left((x - s)\frac{1}{x - s}\right) = 1\,.$$

Противоречие, значит $s \in [0, 1]$.

Теперь покажем. что для произвольной гладкой функции $g \in C^\infty(0, 1)$, выполняется условие $\sigma(g) = g(s)$. Пусть $\sigma(g) = t$. Мы хотим показать, что $t = g(s)$. Рассмотрим функцию

$$r = (x - s)^2 + (g - t)^2\,.$$

Легко понять, что $\sigma(r) = 0$, значит функция r необратима, (так как функция $\frac{1}{r}$ *не существует*). Мы приходим к выводу, что функция $r()$ обращается в нуль, хотя бы в одной из точек интервала $(0, 1)$. Но если функция $r(x)$ обращается в нуль, то это может быть лишь точка $x = s$. Значит $g(s) = t$. ∎

Exercise 1

Пройдет ли предыдущее доказательство, если алгебру гладких функций в $C^\infty(0, 1)$ заменить на алгебру непрерывных функций $C^0(0, 1)$.

Exercise 2

Пройдёт ли предыдущее доказательство если алгебру гладких функций в $C^\infty([0, 1])$ заменить на произвольную алгебру функций, которые *разделяют* точки отрезка $[0, 1]$.

Exercise 3

Найти и обсудить 'дырку' в следующем рассуждении

Пусть σ гомоморфизм, такой, что $\sigma(x) = s \in \mathbf{R}$. Тогда очевидно, что $\sigma(x^2) = s^2$ и для любого натурального n, $\sigma(x^n) = s^n$. Значит для любого многочлена $P(x)$, $\sigma(P(x)) = P(s)$. Теперь теорема Вейерштрасса об апроксимации гладкой функцией полиномами даёт, что для любой гладкой функции $g(x)$, $\sigma(g(x)) = g(s)$. ∎

2 Отображения

Пусть снова $\mathbf{R}^p$- p-мерное аффинное пространство, (`множество точек`). Обозначим также $A = C^\infty(\mathbf{R}^m)$ алгебру гладких функций на $\mathbf{R}^m$.

Определение 2. каждому отображению $F\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ сопоставим гомоморфизм τ_F, такой, который сопоставляет каждой гладкой функции на $\mathbf{R}^m$ ($f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$) гладкую функцию ма $\mathbf{R}^n$ ($\tau_F(f) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$) такую, что значение функции $\tau_F(f)$ на произвольной точке $P \in \mathbf{R}^m$ равно значению функции f на точке $Q = F(P)$:

$$\tau_F(f)(P) = f\left(F(P)\right) .$$

Замечание 1. Правило 'против шёрстки' Отображения F и гомоморфизм функций τ_F идут в противоположных нзоравлениях ('против шёрстки').

Замечание 2. Гомоморфизм (2) построенный по отображению F обозначают F^*,

Так же как и в случае точек верно и обратное

Теорема 2. *Пусть U-область в $\mathbf{R}^m$ и V-область в $\mathbf{R}^n$, и τ гомоморфизм (против 'шёрстки') алгебры $C^\infty(V)$ в алгебру $C^\infty(U)$. Тогда существует отображение $F\colon\ \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ такое, что*

$$\tau = F^*\,, \text{то есть для любой функции } f \in C^\infty(D)\ \tau(f) = f(F(P))\,.$$

Иными словами множество отображений = множеству гомоморфизмов из алгебры функций на V в алгебру функций на U.

Докажем эту теорему.

`Доказательство теоремы.`

Пусть P произвольная точка на U. Возьмём произвольную гладкую функцию f на V. Значение образа этой функции под действием гомоморфизма τ на данной точке P задаёт гомоморфизм алгебры гладких функций на V в вещественные числа, то есть согласно теореме 2 мы приходим к точке Q такой что

$$\tau(f)(P) = f(Q)$$

Это равенство приводит к определению точки $Q = F(P)$. Она задаёт гомоморфизм алгебры гладких функций

Пример 2.1. Пусть φ отображение пространств

$$\varphi \quad \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2\colon \quad \begin{cases} x = u \\ y = \frac{v}{u} \end{cases} \tag{1}$$

Что тут написано?

Мы 'привыкли' 'читать эту формулу так

`точке с координатами` (u, v) сопоставляется точка с координатами $(x.y)$

Однако другой читатель скажет:

Формула определяет гомоморфизм гладких функций на плоскости $\mathbf{R}^2$, зависящих от x, y в гладкие функции на плоскости $\mathbf{R}^2$, зависящие от u, v. Гомоморфизм задан на образующих: Функция x переходит в функцию u и функция y переходит в функцию $\frac{v}{u}$; любая гладкая функция $f(x, y)$ переходит в гладкую функцию $f(x, y)\big|_{x=u, y=\frac{v}{u}}$.

Кто прав? Оба правы. Формулу можно читать по разному!

Пример 2.2. Пусть φ отображение пространств

$$\varphi \quad \mathbf{R}^1 \mapsto \mathbf{R}^2 \colon \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \tag{2}$$

Что тут написано?

Мы 'привыкли' 'читать эту формулу так

`точке` t `на прямой сопоставляется точка с координатами`

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

Другой скажет: в этой формуле определяется гомоморфизм функций на плоскости $\mathbf{R}^2$ в функции на $\mathbf{R}$. Формулы задают значения гомоморфизма на образующих: функция x переходит в функцию $\cos t$ и функция y переходит в функцию $\sin t$. Конечно, закон определяет образ любой (гладкой) функции. Например, функция $\frac{e^{-2xy}}{x^4+y^4}$ перейдет в функцию

$$\frac{e^{-2\cos t \sin t}}{\cos^4 t + \sin^4 t} = \frac{e^{-\sin 2t}}{1 - \frac{1}{2}\sin 2t},$$

и для любой гладкой функции $f = f(x, y)$

$$\sigma(f) = f(x, y)x = \cos t, y = \sin t)$$

И в заключение

задача-шутка

Рассмотрим набор разных простых чисел $\{p_i\}$, $i = 1, \ldots, N$, $p_i \neq p_j$; также рассмотрим набор матуральных чисел, $\{_i\}$, $i = 1, \ldots, N$, так что каждое a_i меньше p_i. Найти число K, которое при делении на простое число p_i даст остаток a_i.

Вы скажете: это китайская теорема об остатках. Какое отношение она имеет к курсу?

`Указание к решению`

Используя идеи двойственности можно свести эту задачу к задаче построения интерполяционного многочлена Лагранжа.

n различных точек на прямой ——n различных простых

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$——— $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$

$P(x)$ полиномиал ——- N натуральное число

$P(x_i) = y_i$—————-N даёт остаток a_i при делении на p_i

Если полином $P(x)$ равен y_i в точке x_i то многочлен

$$ch1P(x) = \sum_i y_i h_i(x)\,, \tag{3}$$

удовлетворяет соотношению $P(x_i) = y_i$, то есть этот многочлен достаавляет решение задачи о построении интерполяционного многочлена Лагранжа.

если многочлен $h_i(x)$ такой, что

$$h_m(x_j) = \delta_{mj}\,, \text{то есть } h_m(x) = \begin{cases} 1 \text{ если } x = x_m \\ 0 \text{ если } x = x_j \text{ при любом } j \neq m \end{cases}\,, \tag{4}$$

Построим многочлен (4),затем построим аналогичный объект в числах, затем переведите формулу (**??**) из многочленов в числа.

Рассмотрим многочлен $Q(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_n)$. Этот многочлен зануляется во всех точках $\{x_1, \ldots, x_n\}$, а вот многочлен $H_i(x) = \frac{Q(x)}{x - x_i}$ зануляется во всех точках $\{x_1, \ldots, x_n\}$, кроме быть может точки x_i и в этой точке он равен

$$H_i(x_i) = \frac{Q(x)}{x - x_i}\Big|_{x_i} = \frac{Q(x) - Q(x_i)}{x - x_i} = Q'(x_i) \tag{5}$$

Замечание 3. Обратим внимание, что мы в формуле (6) определили 'производную' в кольце целых чисел.

Теперь ясно, что в (4)

$$h_m(x) = \frac{H_m(x)}{H'_m(x_m)} = \frac{\prod_{i\neq m}(x - x_i)}{\prod_{i\neq m}(x_m - x_i)} = \begin{cases} 1 \text{ если } x = x_m \\ 0 \text{ если } x = x_j \text{ при любом } j \neq m \end{cases} \quad , \tag{6}$$

пр

Это искомый базисмый многочлен. Его легко перевести в числа.

Например кубический многочлен, который равен y_i в точке x_i ($i = 1, 2, 3$ и $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$) равен

$$P(x) = \sum y_m \frac{\prod_{i\not m}(x - x_i)}{\prod_{i\not m}(x_m - x_i)} = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} +$$

$$+ y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_3)(x_3 - x_4)} + y_4 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} \tag{7}$$

Перепишем эту формулу для чисел получим

$$P = \sum a_m \prod_{i\neq m} p_i \left[\prod_{i\neq m} p_i \right]^{-1}_{mpdulop_m} \tag{8}$$

Например, $p_i = 2, 3, 5, 7$

$$= a_1 3\cdot 5\cdot 7 \left[3\cdot 5\cdot 7\right]^{-1}_{modulo2} + a_2 2\cdot 5\cdot 7 \left[2\cdot 5\cdot 7\right]^{-1}_{modulo3} + a_3 2\cdot 3\cdot 7 \left[2\cdot 3\cdot 7\right]^{-1}_{modulo5} + a_4 2\cdot 3\cdot 5 \left[2\cdot 3\cdot 5\right]^{-1}_{modulo}$$

$$a_1 \cdot 105 \left[105\right] -1_{modulo2} + a_2 70 \left[70\right]^{-1}_{modulo3} + a_3 42 \left[42\right]^{-1}_{modulo5} + a_4 30 \left[30\right]^{-1}_{modulo7} =$$

$$a_1 \cdot 105 \cdot 1 + a_2 \cdot 70 \cdot 1 + a_3 \cdot 42 \cdot 3 + a_4 \cdot 30 \cdot 4 =$$

$$105 a_1 + 70 a_2 + 126 a_3 + 120 a_4$$

Это число при делении на 2 даст остаток $_1$ при делении на 3 даст остаток $_2$ при делении на 5 даст остаток $_3$ и при делении на 7 даст остаток $_4$. ■

Лекция 20 февраля

3 Суперпространство

Немного забегая вперед дадим определение в духе идей двойственности $---$:

Определение 3. Алгебра гладких функций $\mathbf{R}(x, \xi)$ от коммутирующих переменных $x^1, \ldots, x^p$ и антикоммутирующих переменных $\xi^1, \ldots, \xi^q$ это алгебра функций на $p|q$-мерном линейном пространстве $\mathbf{R}^{p|q}$.

Вместо того чтоб определять пространство мы определяем алгебру функций на нём.
Например вместо
$\mathbf{R}^p$ рассматривается алгебра гладких функций от $x^1, \ldots, x^p$.
Перейдём к разъяснению.

3.1 Алгебра Грассмана

Обозначим символом Λ_q алгебру Грассмана с q антикоммутирующими свободными переменными $\theta^1, \ldots, \theta^q$, то есть

$$\theta^i \theta^k + \theta^k \theta^i = 0 \,, \tag{9}$$

и любое другое соотношение на θ^i является следствием этих соотношений [2]

Произвольный элемент λ алгебры Λ^q может быть записан в виде

$$\lambda = \sum_{0 \le k \le q} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \theta^{\alpha_1} \ldots \theta^{\alpha_k},$$

где коэффициенты антисимметричны при перестановке индексов.

Элемент $= a_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \theta^{\alpha_1} \ldots \theta^{\alpha_k}$ имеет чётность $p(s) = (-1)^k$.

Всякий элемент алгебры Грассмана можно однозначно представить в виде суммы чётного и нечётного элементов этой алгебры.

Для всякого элемента λ алгебры Грассмана Λ^q,

$$\lambda = m(\lambda) + n(\lambda) \,,$$

где $m(\lambda)$-обычное число и $n(\lambda)$-нильпотент.

Exercise Назовём элемент алгебры Грассмана *целым* если все коэффициенты в разложении (3.1) целые.

Доказать, что если λ целый нильпотентный элемент алгебры Грассмана, то для любого натурального n, $\frac{\lambda^n}{n!}$ тоже цел и нильпотентен.

[2]то есть для любого многочлена P такого, что $P = 0$, mnogohlen P принадлежит идеалу тензорной алгебры с образующими θ^i, образованному левыми частями соотношений (9).

Наряду с алгеброй Грассмана Λ^q мы будем рассматривать также алгебру $\Lambda_{p|q}$ как алгебру функций от p коммутирующих переменных $x^1,\dots,x^p$ и q антикоммутирующих переменных $\theta^1,\dots,\theta^q$. Каждый элемент алгебры $\Lambda_{p|q}$ (мы будем эту алгебру называть алгеброй Березина) может быть представлен в виде (3.1), где коэффициенты $a_{\alpha_{i_1\dots i_k}}$ являются гладкими функциями от переменных $x^1,\dots,x^p$: для любого $w\in\Lambda_{p|q}$

$$\lambda=\sum_{0\le k\le q} a_{\alpha_1\dots\alpha_k}(x^1\dots,x^p)\theta^{\alpha_1}\dots\theta^{\alpha_k}\,.$$

Чётность вводится естественным образом.

Отметим, что выражение осмысленно при любой замене переменных, сохраняющих чётность.

Exercise Как преобразуется функция $g=\cos x$ при замене координат $x=x'+\varepsilon^1\varepsilon^2$.

Мы снова возвращаемся к определению суперпространства:

Определение 4. Алгебра гладких функций $\mathbf{R}(x,\xi)$ от коммутирующих переменных $x^1,\dots,x^p$ и антикоммутирующих переменных $\theta^1,\dots,\theta^q$, то есть алгебра Березина $\Lambda_{p|q}$, это алгебра функций на $p|q$-мерном линейном пространстве $\mathbf{R}^{p|q}$.

3.2 Дифференцирование и интегрирование

Мы подсчитаем для

3.2.1 Взятие производной.

Пусть $\theta^1,\dots,\theta^q$ набор антикоммутирующих переменных в алгебре Березина $\Lambda_{p|q}$. Выберем любую из этих переменных, например переменную θ^{i_0}.

Легко понять, что для любой функции $f=f(x^i,\theta^\alpha)\in\mathcal{L}_{p|q}$

$$f(x^i,\theta^\alpha)=\theta^{\beta_0}g+h$$

где функции g и h не зависят от θ^{i_0}. Таким образом мы приходим к естественному определению частной производной по антикоммутирующей переменной.

$$\frac{\partial}{\partial\theta^{i_0}}f(x^i,\theta^\alpha)=g,.$$

Соблюдается правило Лейбница (со знаком)

$$\frac{\partial}{\partial\theta^a}(fg)=\frac{\partial f}{\partial z^a}g+(-1)^p(fg)f\frac{\partial g}{\partial z^a}\,. \tag{10}$$

Замечание 4. Пусть u какой нибудь элемент из множества $(x^1,\dots,x^n,\theta^1,\dots,\theta^q)$ и какой нибудь другой элемент из множества $(x^1,\dots,x^n,\theta^1,\dots,\theta^q)$.

Exersize Показать, что

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}=(-1)^{p(u)p(v)}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}$$

Exercise Пусть $f(x, \theta)$–элемент алгебры Березина, гладкая функция он $, \theta$. Написать формулу Тэйлора.

Взятие производной композиции функций.

3.3 Интегрирование

Что такое интеграл?

Определение 5. Пусть ∂ операция взятия производной. Тогда интегрирование это линейная операция которая зануляется на образе ∂:

$$I(\partial f = 0)$$

Очевидно, что интеграл как мы его учили тому свойству удовлетворяет. Можно показать, что на пространстве функций с компактным носителем, это определение приводит к обычному.

Хороший пример, это интеграл Коши от аналитической функции.

В итоге мы приходим к

Определение 6. Для антикоммутирующей переменной θ

$$\int \theta d\theta = 0 \,.$$