

Лекции по суперматематике

Оганес М. Худавердян

26 апреля 2021 г.

Это конспект лекций на 15 апреля 2021
ИППИ, ИТМФ МГУ, мехмат МГУ

Содержание

| | | |
|---|---|----|
| 1 | Двойственное описание для точек и отображений | 1 |
| 2 | Отображения | 3 |
| 3 | Суперпространство | 6 |
| 4 | Березиниан (продолжение) | 13 |
| 5 | Супермногообразия | 32 |
| 6 | Интегрирование по поверхностям | 37 |

Очень грубо говоря, суперматематика, это наука в которой используются коммутирующие и антикоммутирующие переменные.

Обычные (коммутирующие) переменные $\{x^i\} = \{x^1, x^2, \dots, x^m\}$ принимают значения в числах, им можно сопоставить *точки*.

Антикоммутирующие переменные $\{\theta^a\} = \{\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n\}$ это символы, такие что

$$\theta^a \theta^b = -\theta^b \theta^a, \quad (x^i x^j = x^j x^i, x^i \theta^a = \theta^a x^i)$$

Им трудно сопоставить точки¹ Чтоб работать в суперматематике, нам надо освоить двойственный язык.

1 Двойственное описание для точек и отображений

1.1 Точки

Пусть \mathbf{R}^p - p -мерное аффинное пространство, (**множество точек**). Обозначим $A = C^\infty(\mathbf{R}^m)$ алгебру гладких функций на \mathbf{R}^m .

Мы иногда будем использовать алгебру $C(\mathbf{R}^m)$ алгебру непрерывных функций на \mathbf{R}^m .

Определение 1. каждой **точке** $P \in \mathbf{R}^p$ сопоставим гомоморфизм σ_P , такой, который сопоставляет каждой функции f её значение в этой точке:

$$\mathbf{R}^m \ni P \mapsto \sigma_P: \sigma_P(f) = f(P).$$

Понятно, что это гомоморфизм алгебры функций в числа, менее очевидно, что верно и обратное:

Теорема 1. Пусть D -область в \mathbf{R}^m , пусть σ_D произвольный ненулевой гомоморфизм алгебры функций $C^\infty(D)$ в \mathbf{R} :

$$\sigma_D \neq 0, \sigma_D(f + g) = \sigma_D(f) + \sigma_D(g), \sigma_D(fg) = \sigma_D(f)\sigma_D(g).$$

Тогда существует такая точка $P \in D$, что для любой функции $f \in C^\infty(D)$

$$\sigma_D(f) = f(P).$$

Иными словами множество точек области $D =$ множеству гомоморфизмов из алгебры функций на D в вещественные числа.

Эта теорема позволяет реконструировать точки по алгебре функций $A = C^\infty(D)$. Заметим также, что она позволяет восстановить значение функции в точке. Если точка, это гомоморфизм σ алгебры функций в числа, то значение данной функции $f \in A$ на данной точке σ равно значению 'точки' σ на элементе f .

¹мы это сделаем в дальнейшем, используя язык так называемых Λ -точек.

Докажем эту теорему.

Доказательство теоремы.

Для простоты рассмотрим случай области $D = (0, 1)$.

Пусть σ гомоморфизм алгебры $A = C^\infty(0, 1)$ в \mathbf{R} . Пусть значение этого гомоморфизма на функции $f = x$ равно s : $\sigma(x) = s$. Покажем, что число $s \in (0, 1)$. Действительно, если $s \notin (0, 1)$, то функция $h = \frac{1}{x-s}$ хорошо определена и $\sigma(x-s) = 0$. Мы видим, что

$$\sigma\left((x-s)\frac{1}{x-s}\right) = \sigma(x-s)\sigma\left(\frac{1}{x-s}\right) = 0$$

и с другой стороны

$$\sigma\left((x-s)\frac{1}{x-s}\right) = 1.$$

Противоречие, значит $s \in [0, 1]$.

Теперь покажем, что для произвольной гладкой функции $g \in C^\infty(0, 1)$, выполняется условие $\sigma(g) = g(s)$. Пусть $\sigma(g) = t$. Мы хотим показать, что $t = g(s)$. Рассмотрим функцию

$$r = (x-s)^2 + (g-t)^2.$$

Легко понять, что $\sigma(r) = 0$, значит функция r необратима, (так как функция $\frac{1}{r}$ не существует). Мы приходим к выводу, что функция $r(\cdot)$ обращается в нуль, хотя бы в одной из точек интервала $(0, 1)$. Но если функция $r(x)$ обращается в нуль, то это может быть лишь точка $x = s$. Значит $g(s) = t$. ■

Упражнение 1. *Пройдет ли предыдущее доказательство, если алгебру гладких функций в $C^\infty(0, 1)$ заменить на алгебру непрерывных функций $C^0(0, 1)$.*

Упражнение 2. *Остнется ли верным утверждение, если алгебру гладких функций в $C^\infty([0, 1])$ заменить на произвольную алгебру функций, которые разделяют точки отрезка $[0, 1]$.*

Упражнение 3. *Найти и обсудить 'дырку' в следующем рассуждении*

Пусть σ гомоморфизм, такой, что $\sigma(x) = s \in \mathbf{R}$. Тогда очевидно, что $\sigma(x^2) = s^2$ и для любого натурального n , $\sigma(x^n) = s^n$. Значит для любого многочлена $P(x)$, $\sigma(P(x)) = P(s)$. Теперь теорема Вейерштрасса об аппроксимации гладкой функцией полиномами даёт, что для любой гладкой функции $g(x)$, $\sigma(g(x)) = g(s)$. ■

2 Отображения

Пусть снова \mathbf{R}^p - p -мерное аффинное пространство, (множество точек). Обозначим также $A = C^\infty(\mathbf{R}^m)$ алгебру гладких функций на \mathbf{R}^m .

Определение 2. каждому отображению $F: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ сопоставим гомоморфизм τ_F , такой, который сопоставляет каждой гладкой функции на \mathbf{R}^m ($f \in C^\infty(\mathbf{R}^m)$) гладкую функцию на \mathbf{R}^n ($\tau_F(f) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$) такую, что значение функции $\tau_F(f)$ на произвольной точке $P \in \mathbf{R}^m$ равно значению функции f на точке $Q = F(P)$:

$$\tau_F(f)(P) = f(F(P)) .$$

Замечание 1. Правило 'против шёрстки' Отображения F и гомоморфизм функций τ_F идут в противоположных изложениях ('против шёрстки').

Замечание 2. Гомоморфизм (2) построенный по отображению F обозначают F^* ,

Так же как и в случае точек верно и обратное

Теорема 2. Пусть U -область в \mathbf{R}^m и V -область в \mathbf{R}^n , и τ гомоморфизм (против 'шёрстки') алгебры $C^\infty(V)$ в алгебру $C^\infty(U)$. Тогда существует отображение $F: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ такое, что

$$\tau = F^* , \text{ то есть для любой функции } f \in C^\infty(V) \tau(f) = f(F(P)) .$$

Иными словами множество отображений = множеству гомоморфизмов из алгебры функций на V в алгебру функций на U .

Докажем эту теорему.

Доказательство теоремы.

Пусть P произвольная точка на U . Возьмём произвольную гладкую функцию f на V . Значение образа этой функции под действием гомоморфизма τ на данной точке P задаёт гомоморфизм алгебры гладких функций на V в вещественные числа, то есть согласно теореме 2 мы приходим к точке Q такой что

$$\tau(f)(P) = f(Q)$$

Это равенство приводит к определению точки $Q = F(P)$. Она задаёт гомоморфизм алгебры гладких функций

Пример 2.1. Пусть φ отображение пространств

$$\varphi: \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2: \begin{cases} x = u \\ y = \frac{v}{u} \end{cases} \quad (1)$$

Что тут написано?

Мы 'привыкли' 'читать эту формулу так

точке с координатами (u, v) сопоставляется точка с координатами (x, y)

Однако другой читатель скажет:

Формула определяет гомоморфизм гладких функций на плоскости \mathbf{R}^2 , зависящих от x, y в гладкие функции на плоскости \mathbf{R}^2 , зависящие от u, v . Гомоморфизм задан на образующих: Функция x переходит в функцию u и функция y переходит в функцию $\frac{v}{u}$; любая гладкая функция $f(x, y)$ переходит в гладкую функцию $f(x, y)|_{x=u, y=\frac{v}{u}}$.

Кто прав? Оба правы. Формулу можно читать по разному!

Пример 2.2. Пусть φ отображение пространств

$$\varphi: \mathbf{R}^1 \mapsto \mathbf{R}^2: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad (2)$$

Что тут написано?

Мы 'привыкли' 'читать эту формулу так

точке t на прямой сопоставляется точка с координатами

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

Другой скажет: в этой формуле определяется гомоморфизм функций на плоскости \mathbf{R}^2 в функции на \mathbf{R} . Формулы задают значения гомоморфизма на образующих: функция x переходит в функцию $\cos t$ и функция y переходит в функцию $\sin t$. Конечно, закон определяет образ любой (гладкой) функции. Например, функция $\frac{e^{-2xy}}{x^4+y^4}$ перейдет в функцию

$$\frac{e^{-2 \cos t \sin t}}{\cos^4 t + \sin^4 t} = \frac{e^{-\sin 2t}}{1 - \frac{1}{2} \sin 2t},$$

и для любой гладкой функции $f = f(x, y)$

$$\sigma(f) = f(x, y)|_{x=\cos t, y=\sin t}$$

И в заключение

задача-шутка

Рассмотрим набор разных простых чисел $\{p_i\}$, $i = 1, \dots, N$, $p_i \neq p_j$; также рассмотрим набор натуральных чисел, $\{a_i\}$, $i = 1, \dots, N$, так что каждое a_i меньше p_i . Найти число K , которое при делении на простое число p_i даст остаток a_i .

Вы скажете: это китайская теорема об остатках. Какое отношение она имеет к курсу?

Указание к решению

Используя идеи двойственности можно свести эту задачу к задаче построения интерполяционного многочлена Лагранжа.

n различных точек на прямой — n различных простых

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$

$P(x)$ полиномиал — N натуральное число

$P(x_i) = y_i$ — N даёт остаток a_i при делении на p_i

Если полином $P(x)$ равен y_i в точке x_i то многочлен

$$ch1P(x) = \sum_i y_i h_i(x), \quad (3)$$

удовлетворяет соотношению $P(x_i) = y_i$, то есть этот многочлен достаавляет решение задачи о построении интерполяционного многочлена Лагранжа.

если многочлен $h_i(x)$ такой, что

$$h_m(x_j) = \delta_{mj}, \text{ то есть } h_m(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x = x_m \\ 0 & \text{если } x = x_j \text{ при любом } j \neq m \end{cases}, \quad (4)$$

Построим многочлен (4), затем построим аналогичный объект в числах, затем переведите формулу (??) из многочленов в числа.

Рассмотрим многочлен $Q(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$. Этот многочлен зануляется во всех точках $\{x_1, \dots, x_n\}$, а вот многочлен $H_i(x) = \frac{Q(x)}{x - x_i}$ зануляется во всех точках $\{x_1, \dots, x_n\}$, кроме быть может точки x_i и в этой точке он равен

$$H_i(x_i) = \frac{Q(x)}{x - x_i} \Big|_{x_i} = \frac{Q(x) - Q(x_i)}{x - x_i} = Q'(x_i) \quad (5)$$

Замечание 3. Обратим внимание, что мы в формуле (6) определили 'производную' в кольце целых чисел.

Теперь ясно, что в (4)

$$h_m(x) = \frac{H_m(x)}{H'_m(x_m)} = \frac{\prod_{i \neq m} (x - x_i)}{\prod_{i \neq m} (x_m - x_i)} = \begin{cases} 1 & \text{если } x = x_m \\ 0 & \text{если } x = x_j \text{ при любом } j \neq m \end{cases}, \quad (6)$$

пр

Это искомый базисмый многочлен. Его легко перевести в числа.

Например кубический многочлен, который равен y_i в точке x_i ($i = 1, 2, 3$ и $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$) равен

$$P(x) = \sum y_m \frac{\prod_{i \neq m} (x - x_i)}{\prod_{i \neq m} (x_m - x_i)} = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)} + \\ + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} + y_4 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} \quad (7)$$

Перепишем эту формулу для чисел получим

$$P = \sum a_m \prod_{i \neq m} p_i \left[\prod_{i \neq m} p_i \right]_{mpdulop_m}^{-1} \quad (8)$$

Например, $p_i = 2, 3, 5, 7$

$$= a_1 3 \cdot 5 \cdot 7 [3 \cdot 5 \cdot 7]_{modulo 2}^{-1} + a_2 2 \cdot 5 \cdot 7 [2 \cdot 5 \cdot 7]_{modulo 3}^{-1} + a_3 2 \cdot 3 \cdot 7 [2 \cdot 3 \cdot 7]_{modulo 5}^{-1} + a_4 2 \cdot 3 \cdot 5 [2 \cdot 3 \cdot 5]_{modulo 7}^{-1} \\ = a_1 \cdot 105 [105]_{modulo 2}^{-1} + a_2 70 [70]_{modulo 3}^{-1} + a_3 42 [42]_{modulo 5}^{-1} + a_4 30 [30]_{modulo 7}^{-1} = \\ = a_1 \cdot 105 \cdot 1 + a_2 \cdot 70 \cdot 1 + a_3 \cdot 42 \cdot 3 + a_4 \cdot 30 \cdot 4 = \\ = 105a_1 + 70a_2 + 126a_3 + 120a_4$$

Это число при делении на 2 даст остаток $_1$ при делении на 3 даст остаток $_2$ при делении на 5 даст остаток $_3$ и при делении на 7 даст остаток $_4$. ■

Лекция 20 февраля

3 Суперпространство

Немного забегаая вперед дадим определение в духе идей двойственности — — — :

Определение 3. Алгебра гладких функций $\mathbf{R}(x, \xi)$ от коммутирующих переменных x^1, \dots, x^p и антикоммутирующих переменных ξ^1, \dots, ξ^q это алгебра функций на $p|q$ -мерном линейном пространстве $\mathbf{R}^{p|q}$.

Вместо того чтоб определять пространство мы определяем алгебру функций на нём. Например вместо

\mathbf{R}^p рассматривается алгебра гладких функций от x^1, \dots, x^p .

Перейдём к разъяснению.

3.1 Алгебра Грассмана

Обозначим символом Λ_q алгебру Грассмана с q антикоммутирующими свободными переменными $\theta^1, \dots, \theta^q$, то есть

$$\theta^i \theta^k + \theta^k \theta^i = 0, \quad (9)$$

и любое другое соотношение на θ^i является следствием этих соотношений ²

Произвольный элемент λ алгебры Λ^q может быть записан в виде

$$\lambda = \sum_{0 \leq k \leq q} a_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_k},$$

где коэффициенты антисимметричны при перестановке индексов.

Элемент $a_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_k}$ имеет чётность $p(s) = (-1)^k$.

Всякий элемент алгебры Грассмана можно однозначно представить в виде суммы чётного и нечётного элементов этой алгебры.

Для всякого элемента λ алгебры Грассмана Λ^q ,

$$\lambda = m(\lambda) + n(\lambda),$$

где $m(\lambda)$ -обычное число и $n(\lambda)$ -нильпотент.

Упражнение 4. Назовём элемент алгебры Грассмана целым если все коэффициенты в разложении (3.1) целые.

Доказать, что если λ целый нильпотентный элемент алгебры Грассмана, то для любого натурального n , $\frac{\lambda^n}{n!}$ тоже цел и нильпотентен.

Наряду с алгеброй Грассмана Λ^q мы будем рассматривать также алгебру $\Lambda_{p|q}$ как алгебру функций от p коммутирующих переменных x^1, \dots, x^p и q антикоммутирующих переменных $\theta^1, \dots, \theta^q$. Каждый элемент алгебры $\Lambda_{p|q}$ (мы будем эту алгебру называть алгеброй Березина) может быть представлен в виде (3.1), где коэффициенты $a_{\alpha_{i_1} \dots i_k}$ являются гладкими функциями от переменных x^1, \dots, x^p : для любого $w \in \Lambda_{p|q}$

$$\lambda = \sum_{0 \leq k \leq q} a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x^1, \dots, x^p) \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_k}.$$

²то есть для любого многочлена P такого, что $P = 0$, многочлен P принадлежит идеалу тензорной алгебры с образующими θ^i , образованному левыми частями соотношений (9).

Чётность вводится естественным образом.

Отметим, что выражение осмысленно при любой замене переменных, сохраняющих чётность.

Упражнение 5. Как преобразуется функция $g = \cos x$ при замене координат $x = x' + \varepsilon^1 \varepsilon^2$.

Мы снова возвращаемся к определению суперпространства:

Определение 4. Алгебра гладких функций $\mathbf{R}(x, \xi)$ от коммутирующих переменных x^1, \dots, x^p и антикоммутирующих переменных $\theta^1, \dots, \theta^q$, то есть алгебра Березина $\Lambda_{p|q}$, это алгебра функций на $p|q$ -мерном линейном пространстве $\mathbf{R}^{p|q}$.

3.2 Дифференцирование и интегрирование

Мы подсчитаем для

3.2.1 Взятие производной.

Пусть $\theta^1, \dots, \theta^q$ набор антикоммутирующих переменных в алгебре Березина $\Lambda_{p|q}$. Выберем любую из этих переменных, например переменную θ^{i_0} .

Легко понять, что для любой функции $f = f(x^i, \theta^\alpha) \in \mathcal{L}_{p|q}$

$$f(x^i, \theta^\alpha) = \theta^{i_0} g + h$$

где функции g и h не зависят от θ^{i_0} . Таким образом мы приходим к естественному определению частной производной по антикоммутирующей переменной.

$$\frac{\partial}{\partial \theta^{i_0}} f(x^i, \theta^\alpha) = g, .$$

Соблюдается правило Лейбница (со знаком)

$$\frac{\partial}{\partial \theta^a} (fg) = \frac{\partial f}{\partial \theta^a} g + (-1)^p (fg) \frac{\partial g}{\partial \theta^a}. \quad (10)$$

Замечание 4. Пусть u какой нибудь элемент из множества $(x^1, \dots, x^n, \theta^1, \dots, \theta^q)$ и какой нибудь другой элемент из множества $(x^1, \dots, x^n, \theta^1, \dots, \theta^q)$.

Упражнение 6. Показать, что

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} = (-1)^{p(u)p(v)} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u}$$

Упражнение 7. Пусть $f(x, \theta)$ –элемент алгебры Березина, гладкая функция от x, θ . Написать формулу Тэйлора.

Взятие производной композиции функций.

3.3 Интегрирование

Что такое интеграл?

Определение 5. Пусть ∂ операция взятия производной. Тогда интегрирование это линейная операция которая зануляется на образе ∂ :

$$I(\partial f = 0)$$

Очевидно, что интеграл как мы его учили тому свойству удовлетворяет. Можно показать, что на пространстве функций с компактным носителем, это определение приводит к обычному.

Хороший пример, это интеграл Коши от аналитической функции.

В итоге мы приходим к выводу, что

Определение 6. Для антикоммутирующей переменной θ

$$\int \theta d\theta \neq 0.$$

так как θ не является производной и мы выбираем нормировку

$$\int \theta d\theta = 1. \quad (11)$$

Лекция 1 марта

3.4 Отображения и замены переменных

Мы вернёмся к интегралу, прежде поговорив немножко об отображениях и заменах переменных...

Напомним, что алгебра Березина $\Lambda_{r|s}$ это алгебра $C^\infty(\mathbf{R}^{r|s})$ гладких функций на $\mathbf{R}^{r|s}$. Каждый элемент алгебры Березина $\Lambda_{r|s}$ представим в виде

$$f(x, \theta) = a_\emptyset(x) + a_i(x)\theta^i + \dots = \sum_{0 \leq k \leq q} a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x^1, \dots, x^r) \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_k},$$

где $\{\theta^1, \dots, \theta^s\}$, это набор антикоммутирующих переменных и $\{x^1, \dots, x^s\}$ это стандартные координаты ³ в \mathbf{R}^s и коэффициентные функции это гладкие функции от координат $\{x^1, \dots, x^s\}$.

Замечание 5. Напомнить определение чётного и нечётного элементов

³например, в качестве таковых можно рассмотреть координаты $x^i(a^1, \dots, a^n) = a^i$, где \mathbf{R}^r рассматривается как множество s -ок действительных чисел.

Замечание 6. Введённые выше координаты алгебры Березина, мы иногда будем называть *образующими* этой алгебры.

Мы сейчас определим гладкое отображение Φ суперпространства $\mathbf{R}^{m|n}$ в суперпространство $\mathbf{R}^{p|q}$, которое согласно нашей философии определяется 'против шёрстки'— гомоморфизмом алгебры $\Lambda_{p|q}$ в алгебру $\Lambda_{m|n}$.

Теорема 3. Пусть $\{f^a(x, \theta)\}$, $a = 1, \dots, p$ произвольный упорядоченный набор чётных функций алгебры $\Lambda_{m|n}$ в количестве p штук и пусть $\{\varphi^\alpha(x, \theta)\}$, $\alpha = 1, \dots, q$ произвольный набор нечётных функций алгебры $\Lambda_{m|n}$ в количестве q штук.

Тогда существует гомоморфизм $\alpha: \Lambda_{p|q} \mapsto \Lambda_{m|n}$ такой, что

$$\begin{cases} \alpha(y^a) = f^a(x, \theta) & (a = 1, \dots, p) \\ \alpha(\eta^\mu) = \phi^\mu(x, \theta) & (\mu = 1, \dots, q) \end{cases} \quad (12)$$

и этот гомоморфизм единственен.

Значение этого гомоморфизма на любой функции $f \in \Lambda_{p|q}$ равно

$$\begin{aligned} \alpha[f] &= \alpha \left[f = \sum_{0 \leq k \leq q} a_{\mu_1 \dots \mu_k}(y^1, \dots, y^p) \eta^{\mu_1} \dots \eta^{\mu_k} \right] = \alpha[f = a_\emptyset(y) + a_{\mu\nu}(y) \eta^\nu \eta^\mu + \dots] = \\ &= a_\emptyset(f_\emptyset^a(x) + f_{\alpha\beta}^a(x) \theta^\beta \theta^\alpha + \dots) + \\ &+ a_{\mu\nu}(f_\emptyset^a(x) + f_{\alpha\beta}^a \theta^\beta \theta^\alpha + \dots) [\Phi_\alpha^\mu(x) \theta^\alpha + \dots] [\Phi_\beta^\nu(x) \theta^\alpha + \dots] + \dots \end{aligned}$$

Замечание 7. Эта теорема позволяет определить отображение Φ суперпространства $\mathbf{R}^{m|n}$ в суперпространство $\mathbf{R}^{p|q}$ с помощью упорядоченного набора чётных гладких функций $\{\{f^a(x, \theta)\}\}$, $a = 1, \dots, p$ и нечётных гладких функций $\{\{\phi^\alpha(x, \theta)\}\}$, $\alpha = 1, \dots, q$

Отображение Φ определяется с помощью гомоморфизма (12).

Замечание 8. Сформулированная выше Теорема 3 даёт право отождествлять стандартные координаты на $\mathbf{R}^{r|s}$ и образующими алгебры Березина $\Lambda_{r|s}$.

Определение 7. Мы будем называть иногда $\mathbf{R}^{p|q}$ $p|q$ -мерным аффинным суперпространством

Пусть $\{x^i, \theta^\alpha\}$, $i = 1, \dots, r$, $\alpha = 1, \dots, s$ стандартные координаты на $\mathbf{R}^{r|s}$ = образующие алгебры Березина $\Lambda_{r|s}$; каждый элемент $\Lambda_{r|s}$ представим в виде

$$f(x, \theta) = a_\emptyset(x) + a_i(x) \theta^i + \dots = \sum_{0 \leq k \leq q} a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x^1, \dots, x^p) \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_k}.$$

Чтобы определить замену переменных в суперпространстве мы следуя нашей философии дуальности определим *обратимое отображение* алгебры функций на себя.

Рассмотрим отображение

$$\begin{cases} x^{i'} = f^{i'}(x, \theta), i = 1, \dots, r \\ \theta^{i'} = \varphi^{i'}(x, \theta), i = 1, \dots, s \end{cases} \quad (13)$$

Каково условие, что оно обратимо?

Имеет место следующая теорема

Теорема 4. Произвольное преобразование переменных (13) обратимо если и только если выполняются следующие условия:

- отображение $\mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^r$ задаваемое формулами (13)

$$x^{i'}|_{\theta=0} = f^{i'}(x, \theta)|_{\theta=0} \quad \text{обратимо} \quad (14)$$

- $s \times s$ -матрица

$$\frac{\partial \theta^{i'}}{\partial \theta^j}|_{\theta=0} = \frac{\partial \varphi^{i'}(x, \theta)}{\partial \theta^j}|_{\theta=0} \quad (15)$$

обратима

Замечание 9. Мы рассматриваем только гладкие функции. Это неявно используется в формулировках теорем.

Пример 3.1. Рассмотрим аффинное суперпространство $\mathbf{R}^{1|3}$. Ему соответствует алгебра гладких функций на прямой со значениями в Грассмановой алгебре. Λ_2 (Это то же, что алгебра Березина $\Lambda_{1|2}$) Рассмотрим гладкую замену переменных:

$$\begin{aligned} x' &= x + \theta^1 \theta^2 \\ \theta^{1'} &= \theta^1 + \sin x \theta^1 \theta^2 \theta^3 \\ \theta^{2'} &= 2\theta^2 \\ \theta^{3'} &= \theta^3 \end{aligned} \quad (16)$$

Вначале отметим, что условия теоремы соблюдаются: отображение

$$x'|_{\theta=0} = (x + \theta^1 \theta^2)|_{\theta=0} = x$$

поэтому условие (14) очевидно соблюдается; второе условие легко проверить: матрица (15) имеет вид

$$\frac{\partial \theta^{i'}}{\partial \theta^j}|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta^{1'}}{\partial \theta^1} & \frac{\partial \theta^{2'}}{\partial \theta^1} & \frac{\partial \theta^{3'}}{\partial \theta^1} \\ \frac{\partial \theta^{1'}}{\partial \theta^2} & \frac{\partial \theta^{2'}}{\partial \theta^2} & \frac{\partial \theta^{3'}}{\partial \theta^2} \\ \frac{\partial \theta^{1'}}{\partial \theta^3} & \frac{\partial \theta^{2'}}{\partial \theta^3} & \frac{\partial \theta^{3'}}{\partial \theta^3} \end{pmatrix} \Big|_{\theta^i=0} = \begin{pmatrix} 1 + \sin x \theta^2 \theta^3 & 0 & 0 \\ 1 - \sin x \theta^1 \theta^3 & 2 & 0 \\ 1 + \sin x \theta^1 \theta^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big|_{\theta^i=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big|_{\theta^i=0} =$$

и очевидно обратима.

Проверим, что замена (16) обратима. Нам удобно обозначить $\theta^1 \rightarrow \theta$, $\theta^2 \rightarrow \eta$, $\theta^3 \rightarrow \xi$.
Имеем

$$\begin{cases} x' = x + \theta\eta \\ \theta' = \theta + \sin x\theta\eta\xi \\ \eta' = 2\eta \\ \xi' = \xi \end{cases}$$

Имеем

$$\xi = \xi', \eta = \frac{1}{2}\eta', \theta = \theta' - \sin x\theta\eta\xi =$$

$$\theta' - \frac{1}{2}\sin x\theta\eta'\xi' = \theta' - \frac{1}{2}\sin x[\theta' - \sin x\theta\eta\xi]\eta'\xi' = \theta' - \frac{1}{2}\sin x\left[\theta' - \frac{1}{2}x^3\theta'\eta'\xi'\right]\eta'\xi' = \theta' - \frac{1}{2}\sin x\theta'\eta'\xi'$$

и

$$x = x' - \theta\eta = x' - \left[\theta' - \frac{1}{2}\sin x\theta'\eta'\xi'\right]\frac{1}{2}\eta' = x' - \frac{1}{2}\theta'\eta'$$

3.5 Интегрирование функции на суперпространстве $\mathbf{R}^{p|q}$

Снова вернёмся к интегрированию.

Мы определим интеграл от быстроубывающей функции по пространству $\mathbf{R}^{p|q}$.

Определение 8. Пусть $\{x^i, \theta^\alpha\}$. $i = 1, \dots, p$, $\alpha = 1, \dots, q$ координаты аффинного суперпространства $\mathbf{R}^{p|q}$. Пусть

$$f(x, \theta) = \sum_{0 \leq k \leq q} a_{\alpha_1 \dots \alpha_k}(x^1, \dots, x^p) \theta^{\alpha_1} \dots \theta^{\alpha_k} = a_\emptyset(x) + \theta^i(x) a_i(x) + \dots + \theta^1 \dots \theta^n a_{[1 \dots n]}(x) \quad (17)$$

произвольная *быстроубывающая* функция на $\mathbf{R}^{p|q}$, то есть функция, то есть любая производная этой функции убывает быстрее чем любая степень x :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n D^m f = 0.$$

Тогда

$$\int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x, \theta) f = \int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x, \theta) \theta^1 \dots \theta^n a_{[1 \dots n]}(x) = (-1)^s \int_{\mathbf{R}^p} dx^1 \dots dx^n a_{[1 \dots n]}(x) = \quad (18)$$

Замечание 10. Мы немного странно пишем разложение (17)

Упражнение 8. Проверить, что это определение согласовано с формулой (11)

Доказать, что условие быстрого убывания не зависит от системы координат.

3.6 Березиниан

На прошлой неделе мы сформулировали идею интеграла (см. 6). Однако затем, мы остановились на замене переменных и только потом снова перешли к интегрированию. Почему?

Пусть (x^i, θ^α) , $i = 1, \dots, p$, $\alpha = 1, \dots, q$ и $(x^{i'}, \theta^{\alpha'})$, $i' = 1, \dots, p$, $\alpha' = 1, \dots, q$ пара двух координатных систем на аффинном суперпространстве $\mathbf{R}^{p|q}$.

$$\det \frac{\partial x}{\partial x'} \Big|_{\theta=0} > 0 \quad (19)$$

Вычислим интеграл (18) от одной и той же быстроубывающей функции $F(x, \theta)$ в двух различных системах координат (x^i, θ^α) и $(x^{i'}, \theta^{\alpha'})$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x, \theta) f(x, \theta) &= \int_{\mathbf{R}^{p|q}} \frac{D(x, \theta)}{D(x', \theta')} D(x', \theta') f(x(x', \theta'), \theta(x', \theta')) = \\ &= \int_{\mathbf{R}^{p|q}} \text{Ber} \left(\frac{\partial(x, \theta)}{\partial(x', \theta')} \right) D(x', \theta') f(x', \theta') \end{aligned} \quad (20)$$

Мы вычислим Березиниан на следующей лекции.

3.6.1 Два интеграла

Пусть $||A_{ik}||$ положительно определенная симметрическая $n \times n$ матрица в Евклидовом пространстве \mathbf{E}^n . Вычислить интеграл по \mathbf{E}^n от $e^{-A_{ik}x^i x^k}$.

Пусть $||B_{ik}||$ антисимметрическая $q \times q$ матрица. Вычислить интеграл от функции $e^{-B_{ik}\theta^i \theta^k}$ по $\mathbf{R}^{0|q}$.

4 Березиниан (продолжение)

лекция 15 марта

Вернёмся снова к уравнению (20) и обсудим березиниан.

Определение 9. Пусть M чётная $p|q \times p|q$ матрица:

$$M = \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} \quad (21)$$

A это $p \times p$ матрица с чётными элементами, β это $p \times q$ матрица с нечётными элементами, Γ это $q \times p$ матрица с нечётными элементами и D $q \times q$ матрица с чётными элементами, then

$$\text{Ber} M = \text{Ber} \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} = \frac{\det(A - \beta D^{-1} \Gamma)}{\det D}. \quad (22)$$

Замечание 11. Вы спросите, а в каком пространстве действует чётная $p|q \times p|q$ матрица? Вспомним обычную линейную алгебру: $m \times m$ матрица элементами которой являются действительные числа действует в векторном пространстве \mathbf{R}^m — в пространстве упорядоченных m -ок действительных чисел. На самом деле $p|q \times p|q$ матрица действует в множестве Λ -точек пространства $\mathbf{R}^{p|q}$, то есть в множестве упорядоченных наборов p чётных элементов алгебры Грассмана Λ и q нечётных элементов этой алгебры:

$$\mathbf{R}_\Lambda^{p|q} = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_p; \mu_1, \dots, \mu_q), \lambda_i \in \Lambda_0, \mu_j \in \Lambda_1\} \quad (23)$$

Мы далее ещё вернемся к этому.

Оказывается, березиниан (22) имеет самое прямое отношение к задаче, которую мы решали в конце прошлой лекции. Напомним, что в конце прошлой лекции мы ввели понятие интеграла от быстроубывающей функции $f(x, \theta) \in C^\infty(\mathbf{R}^{p|q})$ по всему пространству $\mathbf{R}^{p|q}$.

Затем мы рассмотрели две произвольные системы координат (x^i, θ^α) и $(x^{i'}, \theta^{\alpha'})$ и, руководствуясь правилом (18), и инвариантностью интеграла по отношению к замене координат мы приходим к правилу

Теорема 5. При замене координат $\begin{cases} x^{i'} = x^i(x, \theta) \\ \theta^{\alpha'} = \theta^\alpha(x, \theta) \end{cases}$ в интеграле $\int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x, \theta) f(x, \theta)$ подынтегральное выражение домножается на березиниан матрицы Якоби преобразования координат:

$$\int_{\mathbf{R}^{p|q}} D(x, \theta) f(x, \theta) = \int_{\mathbf{R}^{p|q}} \frac{D(x, \theta)}{D(x', \theta')} D(x', \theta') f(x, \theta) \Big|_{x(x', \theta'), \theta(x', \theta')},$$

где

$$\frac{D(x, \theta)}{D(x', \theta')} = \text{Ber} \left(\frac{\partial(x, \theta)}{\partial(x', \theta')} \right) = \text{Ber} \begin{pmatrix} \frac{\partial x(x', \theta')}{\partial x(x', \theta')} & \frac{\partial \theta(x', \theta')}{\partial x(x', \theta')} \\ \frac{\partial x(x', \theta')}{\partial \theta(x', \theta')} & \frac{\partial \theta(x', \theta')}{\partial \theta(x', \theta')} \end{pmatrix} = \text{Ber} \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix}$$

где

$$A_{j'}^i = \frac{\partial x^i(x', \theta')}{\partial x^{j'}}, \quad \beta_{j'}^\alpha = \frac{\partial \theta^\alpha(x', \theta')}{\partial x^{j'}}, \quad \gamma_{\alpha'}^i = \frac{\partial x^i(x', \theta')}{\partial \theta^{\alpha'}}, \quad D_{\alpha'}^\alpha = \frac{\partial \theta^\alpha(x', \theta')}{\partial \theta^{\alpha'}},$$

Условие (15) теоремы о замене переменных обеспечивает, что березиниан хорошо определен.

Замечание 12. Интеграл (20) посчитан в предположении

$$\det \frac{\partial x}{\partial x'} \Big|_{\theta=0} > 0 \quad (24)$$

В общем случае надо домножать ответ на знак якобиана (24).

Замечание 13. Вы можете часто увидеть НЕПРАВИЛЬНОЕ обозначение для координатной формы объёма

Следствие 1. Березиниан мультипликативен: $Ber(M_1 M_2) = Ber M_1 \cdot Ber M_2$.

Proof

$$Ber \left(\frac{\partial(x, \theta)}{\partial(\tilde{x}, \tilde{\theta})} \right) = \frac{D(x, \theta)}{D(\tilde{x}, \tilde{\theta})} = \frac{D(x, \theta)}{D(x', \theta')} \frac{D(x', \theta')}{D(\tilde{x}, \tilde{\theta})} = Ber \left(\frac{\partial(x, \theta)}{\partial(x', \theta')} \right) Ber \left(\frac{\partial(x', \theta')}{\partial(\tilde{x}, \tilde{\theta})} \right) \quad (25)$$

Мультипликативность практически следует из определения!

Пример 4.1. Рассмотрим в $\mathbf{R}^{1|1}$ 'линейное' преобразование

$$\varphi_M: \begin{cases} x = x'a + \theta'\gamma \\ \theta = x'\beta + \theta k \end{cases} \Leftrightarrow (x, \theta) = (x', \theta') \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & k \end{pmatrix} \quad (26)$$

которое соответствует $1|1 \times 1|1$ матрице

$$M = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & k \end{pmatrix} \quad (27)$$

Замечание 14. Матрица Якоби преобразования (26) равна матрице (27).

Обратите внимание на последовательность написания термов в формуле 26. Это объясняется тем, что производная берется слева (см. также замечание 10)

Вычислим интеграл от быстро убывающей функции $f(x, \theta) = f_0(x) + \theta f_1(x)$ в координатах (x, θ) и в новых координатах (x', θ') . В координатах (x, θ)

$$\int D(x, \theta) f(x, \theta) = I, \quad (I = \int f_1(x) dx).$$

В координатах (x', θ') имеем

$$I = \int D(x, \theta) f(x, \theta) = Ber M \int D(x', \theta') f(ax' - \gamma\theta', \beta x' + k\theta')$$

(Мы положили, что $Ber M$ равен константе.)

Рассмотрим три подслучаи

а)

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (a > 0). \quad (28)$$

В этом случае имеем

$$I = \int D(x, \theta) f(x, \theta) = Ber M \int D(x', \theta') f(ax, \theta) =$$

$$Ber M \int D(x', \theta') [f_0(ax) + \theta f_1(ax)] = Ber M \int f_1(\tilde{x}) d\tilde{x} = \frac{Ber M}{|a|} I \Rightarrow Ber M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a.$$

Перейдем ко второму подслучаю: б)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \quad (29)$$

В этом случае имеем

$$\begin{aligned} I &= \int D(x, \theta) f(x, \theta) = \text{Ber} M \int D(x', \theta') f(x, k\theta') = \\ \text{Ber} M \int D(x', \theta') [f_0(x) + k\theta' f_1(x)] &= \text{Ber} M \int f_1(x) dx = kI \Rightarrow \text{Ber} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Теперь перейдём к общему случаю:

с)

$$M = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & k \end{pmatrix} \quad (30)$$

Имеем

$$\begin{aligned} I &= \int D(x, \theta) f(x, \theta) = \text{Ber} M \int D(x', \theta') f(ax' - \gamma\theta', \beta x' + k\theta') = \\ &\text{Ber} M \int D(x, \theta) f(ax - \gamma\theta, \beta x + k\theta) . \end{aligned}$$

(мы положим $a > 0$) Продолжим вычисления:

$$I = \text{Ber} M \left[\int D(x, \theta) f_0(ax - \gamma\theta) + (\beta x + k\theta) f_1(ax - \gamma\theta) \right] , .$$

Заметим, что $\int D(x, \theta) f_0(ax - \gamma\theta) = 0$, так как $f_0(x)$ быстроубывающая функция:

$$\int D(x', \theta') f_0(ax' - \gamma\theta') = -\frac{1}{a} \int \gamma f'(x) dx = 0 ,$$

значит

$$\begin{aligned} I &= \text{Ber} M \left[\int D(x, \theta) f_0(ax - \gamma\theta) + (\beta x + k\theta) f_1(ax - \gamma\theta) \right] = \text{Ber} M \int D(x, \theta) (\beta x + k\theta) f_1(ax - \gamma\theta) = \\ &\text{Ber} M \int D(x, \theta) (\beta x + k\theta) [g(ax) - \gamma\theta g'(ax)] = \\ &\text{Ber} M \left[\int D(x, \theta) \theta k g(ax) - \int D(x, \theta) \theta \beta x \gamma g'(ax) \right] = \\ &\text{Ber} M \left[\frac{k}{a} \int g(x) dx - \frac{\beta\gamma}{a^2} \int x g'(x) dx \right] = \text{Ber} M \left[\frac{k}{a} \int g(x) dx + \frac{\beta\gamma}{a^2} \int g(x) dx \right] = \end{aligned}$$

$$IBerM \left[\frac{k}{a} + \frac{\beta\gamma}{a^2} \right] \Rightarrow \\ Ber \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & k \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{k}{a} + \frac{\beta\gamma}{a^2}} = \frac{a^2}{ka + \beta\gamma} = \frac{a}{k} \left(1 - \frac{\beta\gamma}{ka} \right).$$

Exercises

Мы посчитаем интегралы 3.6.1, потом мы сделаем упражнение, где проясим смысл условия быстроубывающей функции для интеграла Березина.

Exercise

Приведя форму к диагональному виду легко понять, что

$$\int e^{-A(\mathbf{x}, \mathbf{x})} d^n x = \int e^{-\lambda_1 x_1^2 - \dots - \lambda_n x_n^2} d^n x = \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}.$$

Во втором интеграле детерминант перепрыгнет в числитель⁴.

$$\int D(\theta^1, \dots, \theta^n) e^{-B_{ik} \theta^i \theta^k} d^n x = C \sqrt{\det B} = C \text{Pfaffian } B$$

(это для чётных n , а для нечётных нуль.) Это можно увидеть прямым подсчётом: при $n = 2k$

$$\int D(\theta^1, \dots, \theta^n) e^{B_{ik} \theta^i \theta^k} d^n x = \int D(\theta^1, \dots, \theta^n) \frac{1}{k!} (B_{ij} \theta^i \theta^j)^k = \\ \frac{1}{k!} B_{i_1 j_1} \dots B_{i_k j_k} \varepsilon^{i_1 j_1 \dots i_k j_k}$$

а можно и косвенно: если обозначить

$$\int D(\theta^1, \dots, \theta^n) e^{B_{ik} \theta^i \theta^k} d^n x = F(B_{ik})$$

то заменой переменной $\theta^i = L_k^i \xi^k$ легко увидеть, что

$$F(B) = \frac{F(L^+ B L)}{\det L}$$

hence

$$\frac{F(\tilde{B})}{\sqrt{\tilde{B}}} \frac{F(B)}{\sqrt{B}}, (\tilde{B} = L^+ B L)$$

то есть

$$\int D(\theta^1, \dots, \theta^n) e^{B_{ik} \theta^i \theta^k} d^n x = F(B_{ik}) = C \sqrt{B}$$

⁴this integral appeared in Faddeev Popov quantisation. This was not supersymmetry, however this was a good push for it.

Замечание 15. Я не знаю более эффективного способа проверить формулу для Пфаффиана.

Пусть f гладкая быстроубывающая функция на $\mathbf{R}^{1|2}$. Определим интеграл от этой функции по лучу $(0, \infty)$:

$$\int_{x \geq 0} D(x, \theta, \varphi) f(x, \theta, \varphi) = \int_{\mathbf{R}^{1|2}} D(x, \theta, \varphi) H(x) f(x, \theta, \varphi) \quad (31)$$

Покажем, что этот интеграл инвариантен при замене

$$\begin{cases} x = y + \xi\eta \\ \theta = \xi \\ \varphi = \eta \end{cases}$$

Березиниан той замены равен 1 (Проверьте это!)

Посчитаем его в новых и старых координатах.

а) в координатах (x, θ, φ)

$$\begin{aligned} \int_{x \geq 0} D(x, \theta, \varphi) f(x, \theta, \varphi) &= \int_{\mathbf{R}^{1|2}} D(x, \theta, \varphi) H(x) f(x, \theta, \varphi) = \\ &= \int_{\mathbf{R}^{1|2}} D(x, \theta, \varphi) H(x) [f_0(x) + \theta f_1(x) + \varphi f_2(x) + \theta\varphi f_3(x)] = \int dx f_3(x). \end{aligned}$$

б) в координатах (y, ξ, η)

$$\begin{aligned} \int_{x \geq 0} D(x, \theta, \varphi) f(x, \theta, \varphi) &= \int_{\mathbf{R}^{1|2}} D(x, \theta, \varphi) H(x) f(x, \theta, \varphi) = \\ &= \int_{\mathbf{R}^{1|2}} \text{Ber} \frac{\partial(x, \theta, \varphi)}{\partial(y, \xi, \eta)} [H(x) f(x, \theta, \varphi)]_{x=y+\xi\eta, \theta=\xi, \varphi=\eta} = \\ &= \int_{\mathbf{R}^{1|2}} 1 \cdot H(y + \xi\eta) [f_0(y + \xi\eta) + \xi f_1(y + \xi\eta) + \eta f_2(y + \xi\eta) + \xi\eta f_3(y + \xi\eta)] = \\ &= \int_{\mathbf{R}^{1|2}} (H(y) + \xi\eta\delta(y)) [f_0(y) + \xi\eta f'_0(y) + \xi f_1(y) + \eta f_2(y) + \xi\eta f_3(y)] = \\ &= \int_{\mathbf{R}^{1|2}} (H(y) + \xi\eta\delta(y)) [f_0(y) + \xi\eta f'_0(y) + \xi f_1(y) + \eta f_2(y) + \xi\eta f_3(y)] = \\ &= \int dy H(y) [f'_0(y) + f_3(y)] + \int dy \delta(y) f_0(y) = \\ &= \int_0^\infty dy [f'_0(y) + f_3(y)] + f_0(0) = \\ &= f_0(\infty) - f_0 + \int_0^\infty dy f_3(y) + f_0(0) = \int_0^\infty dy f_3(y) \blacksquare \end{aligned}$$

Упражнение 9. Проверьте, пожалуйста, что это нехорошее определение интеграла вдоль луча.

$$\int_{x \geq 0} D(x, \theta, \varphi) f(x, \theta, \varphi) = \int_0^\infty dx \int_{\mathbf{R}^{0|2}} D(x, \theta, \varphi) H(x) f(x, \theta, \varphi)$$

Сравните с (31)

4.1 О некоторых свойствах Березиниана

Эта лекция основана на статье Khudaverdian, Voronov *Berezinians, Exterior Powers and Recurrent sequences*, LMP(2005), **74**, pp. 201–228

4.1.1 Детерминант

Детерминант и площадь параллелограмма

Упражнение 10. Объяснить связь между площадью параллелограмма и детерминантом линейного оператора в V^2 .

Упражнение 11. Пусть ω n -форма в n -мерном линейном пространстве,

А что это такое?

пусть $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ базис в V и пусть линейный оператор на V .

Вычислить

$$\frac{\omega(A\mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{e}_n)}{\omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)}$$

Легко увидеть, что для невырожденной формы

$$\frac{\omega(A\mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{e}_n)}{\omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)} = \det A, \quad (32)$$

или если угодно для любого линейного оператора $: V \rightarrow V$, для любой полилинейной n -формы и любых n векторов $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ этого пространства

$$\omega(A\mathbf{e}_1, \dots, A\mathbf{e}_n) = \det A \omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n), \quad (33)$$

Из соотношения (32) вытекает мультипликативность детерминанта.

Действительно рассмотрим произвольный базис $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ n -мерного линейного пространства V . Пусть B невырожденный линейный оператор в V . Тогда система векторов $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n\}$, где $\mathbf{f}_i = B(\mathbf{e}_i)$ тоже будет базисом. Тогда из равенства (32) следует, что

$$\det(A \cdot B) = \frac{\omega(AB\mathbf{e}_1, \dots, AB\mathbf{e}_n)}{\omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)} = \frac{\omega(AB\mathbf{e}_1, \dots, AB\mathbf{e}_n)}{\omega(B\mathbf{e}_1, \dots, B\mathbf{e}_n)} \cdot \frac{\omega(B\mathbf{e}_1, \dots, B\mathbf{e}_n)}{\omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)} =$$

$$\frac{\omega(A\mathbf{f}_1, \dots, A\mathbf{f}_n)}{\omega(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)} \cdot \frac{\omega(B\mathbf{e}_1, \dots, B\mathbf{e}_n)}{\omega(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)} = \det A \cdot \det B$$

Сравните, пожалуйста, этот вывод свойства мультипликативности детерминанта с выводом (32).

4.1.2 След и детерминант

$$\det(1 + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \operatorname{Tr} A.$$

Формула Лиувилля:

$$\det e^A = e^{\operatorname{Tr} A}.$$

Упражнение 12. Пусть A матрица линейного оператора.

Перейдем в базис в котором она диагональна.

В этом базисе утверждение легко проверить. (Проверьте!)

Значит оно верно всегда.

Упражнение 13. Сделать предыдущее доказательство полным.

Замечание 16. Решение

Множество диагонализируемых матриц всюду плотно в множестве всех матриц. Поэтому если функции \det и Tr непрерывны утверждение, что $\det e^A = e^{\operatorname{Tr} A}$ по непрерывности может быть продолжено на множество всех матриц, если оно верно на множестве диагонализируемых матриц,

Упражнение 14. Второе доказательство:

Напишем

$$B(t) = \det e^{tA}, \quad D(t) = e^{t \operatorname{Tr} A}.$$

Мы видим, что обе функции $B(t)$ и $D(t)$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению и одним и тем же граничным условиям.

решите задачу

Упражнение 15. Если Вас не убедит предыдущее рассуждение

посчитайте $\frac{d}{dt} \left(\frac{B(t)}{D(t)} \right)$.

Четвертое 'доказательство':

Упражнение 16.

$$\det e^A = \det \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{A}{N} \right)^N \right) = \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \left(e^{\operatorname{Tr} \frac{A}{N}} \right)^N \right) = e^{\operatorname{Tr} A}.$$

4.1.3 supertrace of the supermatrix

Мы попробуем определить след матрицы, так чтобы не нарушать теорему Лиувилля. Мы рассмотрим матрицы бесконечно близкие к 1. Рассмотрим чётную $p|q \times p|q$ чётную матрицу

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & D \end{pmatrix},$$

- A это $p \times p$ матрица все коэффициенты которой чётные числа,
- B это $p \times q$ нечётная матрица, то есть все коэффициенты её нечётные элементы алгебры Грассманна,
- Γ это $q \times p$ нечётная матрица, то есть все коэффициенты её нечётные элементы алгебры Грассманна,
- D это $q \times q$ чётная матрица, то есть все коэффициенты её чётные элементы алгебры Грассманна,

$$e^{s\text{Tr}(\varepsilon M)} = 1 + \varepsilon s\text{Tr} M = 1 + s\text{Tr} \varepsilon \begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & D \end{pmatrix} =$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} \text{Ber} e^{\varepsilon M} &= \text{Ber} \left(e^{\varepsilon \begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & D \end{pmatrix}} \right) = \text{Ber} \left(1 + \varepsilon \begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & D \end{pmatrix} \right) = \\ \text{Ber} \left(\begin{pmatrix} 1 + \varepsilon A & \varepsilon B \\ \varepsilon \Gamma & 1 + \varepsilon D \end{pmatrix} \right) &= \frac{\det(1 + \varepsilon A) - \det(\varepsilon B(1 + \varepsilon D)^{-1} \varepsilon \Gamma)}{\det(1 + \varepsilon D)} = \\ &= \frac{\det(1 + \varepsilon A)}{\det(1 + \varepsilon D)} = \frac{1 + \varepsilon \text{Tr} A}{1 + \varepsilon \text{Tr} D} = 1 + \varepsilon (\text{Tr} A - \text{Tr} D). \end{aligned}$$

Comparing these formulae we come to

$$s\text{Tr} \varepsilon \begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & D \end{pmatrix} = \text{Tr} A - \text{Tr} D.$$

4.2 Expansions of the function $R_A(z) = \text{Ber}(1 + Az)$

We will consider the expansions for the function $R_A(z)$.

Пример 4.2. Пусть A оператор в трахмерном линейном пространстве. Тогда

$$\text{Ber}(1 + zA) = \det(1 + zA) = 1 + z\text{Tr} A + z^2\text{Tr}(A \wedge A) + z^3\text{Tr}(A \wedge A \wedge A)$$

и

$$\det A = +\text{Tr}(A \wedge A \wedge A \wedge A)$$

Что это такое???

4.2.1 Действие $\underbrace{A \wedge \dots \wedge A}_k \text{ раз}$ на $\underbrace{V \wedge \dots \wedge V}_k \text{ раз}$

Пусть линейный оператор действует на V .

Действие $A \wedge A$ на $V \wedge V$ определяется

$$(A \wedge A)(u \wedge v) = A(u) \wedge A(v).$$

При этом

$$u \wedge v = -v \wedge u (-1)^{p(u)p(v)}.$$

Посчитаем действие $A \wedge A$ на $V \wedge V$. Ограничимся случаем, когда диагонализуем. (см. замечание 16)

Пусть $\{\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_\alpha\}$ базис $p|q$ -мерного суперпространства V , состоящий из собственных векторов. Имеем p чётных собственных векторов

$$A(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i, \quad i = 1 \dots, p$$

и q нечётных собственных векторов

$$A(\mathbf{f}_\alpha) = \mu_\alpha \mathbf{f}_\alpha, \quad \alpha = 1 \dots, q.$$

Рассмотрим базис пространства $V \wedge V$:

чётные вектора — $\{\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j, (i < j); \mathbf{f}_\alpha \wedge \mathbf{f}_\beta (\alpha \leq \beta)\}$ в количестве $\frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q+1)}{2}$ штук

нечётные вектора — $\{\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{f}_\alpha\}$ в количестве pq штук,

Имеем

$$A \wedge A(\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j) = \lambda_i \lambda_j, A \wedge A(\mathbf{f}_\alpha \wedge \mathbf{f}_\beta) = \mu_\alpha \mu_\beta,$$

соответственно для нечётных векторов

$$A \wedge A(\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{f}_\alpha) = \lambda_i \mu_\alpha,$$

размерность пространства $V \wedge V$ равна $\frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q+1)}{2} |pq$, и соответственно

$$\text{sTr} (A \wedge A) = \sum_{i < j \leq p} \lambda_i \lambda_j + \sum_{\alpha \leq \beta \leq q} \mu_\alpha \mu_\beta - \sum \lambda_i \mu_\alpha.$$

-

В следующий понедельник мы начнём с того, что покажем, как устроено разложение:

$$\text{Ber}(1 + zA) = 1 + z \text{sTr} A + z^2 \text{sTr} (A \wedge A) + \dots$$

Лекция 29 марта

Эта лекция какбы провалилась: по неизвестной причине отказал 'stylus' мы лишились возможности записывать... Я постарался более подробный file выложить на домашней страничке.

Предложение 1.

$$\text{Ber}(1 + Az) = 1 + c_1(A)z + c_2(A)z^2 + \dots = c_k(A)z^k$$

where $c_k(A) = \text{sTr} \left(\underbrace{A \wedge \dots \wedge A}_{k \text{ раз}} \right)$

Упражнение 17. Пусть L оператор в трёхмерном пространстве. Показать, что

$$\det(1 + zL) = 1 + z\text{Tr } L + z^2\text{Tr} (L \wedge L) + z^3\text{Tr} (L \wedge L \wedge L),$$

показать, что

$$\det L = \text{Tr} (L \wedge L \wedge L),$$

Перепишем разложение в предложении 4.2.1:

$$\text{Ber}(1 + zA) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k(A)z^k, \quad \text{где} \quad \begin{cases} c_k(A) = \text{sTr } \Lambda^k A & \text{для целых } k \geq 0 \\ c_k(A) = 0 & \text{для целых } k < 0 \end{cases}$$

Замечание 17. Тут выписано разложение в ряд Тейлора. Немного странное записывание закона суммирования оправдывается в Теореме 6

Proof

$$\text{Ber}(1 + zA) = \prod_{i=1}^p (1 + z\lambda_i) \prod_{\alpha=1}^q (1 + z\mu_\alpha)^{-1} = \quad (34)$$

$$\sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_r} \mu_1^{n_1} \dots \mu_q^{n_q} (-1)^{n_1 + \dots + n_q} z^{r + n_1 + \dots + n_q} = \quad (35)$$

$$\begin{aligned} 1 + (\lambda_1 + \dots + \lambda_p - \mu_1 - \dots - \mu_q)z + \left(\sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j - \sum_{i=1, \alpha=1}^{i=p, \alpha=q} \lambda_i \mu_\alpha + \sum \mu_\alpha \mu_\beta \right) z^2 + \dots = \\ 1 + z\text{sTr } A + z^2\text{sTr} (A \wedge A) + \dots \\ \sum c_k(A)z^k, \text{ где } c_k(A) = \text{sTr} ((\wedge^k A)). \blacksquare \end{aligned} \quad (36)$$

Обсудить

Упражнение 18. Выразить базис в $V \wedge V \wedge V$ через базис в V .

Решение Пусть V -линейное $p|q$ -мерное пространство. Пусть $\{\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_\alpha\}$, где вектора $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ — чётные вектора, и вектора $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_q$ — нечётные вектора — произвольный базис в V . Тогда, например, будет базисом в $V \wedge V \wedge V$.

Конечно, количество чётных векторов в базисе минус количество нечётных, это суперслед единичного оператора (см, вычисления ниже). Тут мы еще ответим на вопрос, а каковы другие базисы в V .

Предложение 2. Пусть $\{\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_\alpha\}$ -произвольный базис в V , и пусть $\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{p'}, \mathbf{f}_{1'}, \dots, \mathbf{f}_{q'}\}$ произвольный набор p чётных и q нечётных векторов V , Рассмотрим матрицу перехода T :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{i'} = T_{i'}^i \mathbf{e}_i + T_{i'}^\alpha \mathbf{f}_\alpha \\ \mathbf{f}_{\alpha'} = T_{\alpha'}^i \mathbf{e}_i + T_{\alpha'}^\alpha \mathbf{f}_\alpha \end{cases},$$

где $\|T_{i'}^i\|, \|T_{\alpha'}^\alpha\|$ -чётные матрицы (все их элементы чётные) и $\|T_{i'}^\alpha\|, \|T_{\alpha'}^i\|$ -нечётные матрицы (все элементы нечётные)

$\{\mathbf{e}_{1'}, \dots, \mathbf{e}_{p'}, \mathbf{f}_{1'}, \dots, \mathbf{f}_{q'}\}$ —базис если и только если матрица обратима, то есть матрицы $\|T_{i'}^i\|$ и $\|T_{\alpha'}^\alpha\|$ -обратимы.

Упражнение 19. Обсудить вычисление $\text{Ber}(1 + zA)$ до третьего порядка по z .

Упражнение 20. Пусть E единичный оператор в $p|q$ -мерном линейном пространстве. Вычислить

$$\begin{aligned} & \text{sTr } E \\ & \text{sTr } (E \wedge E) \\ & \text{Ber}(E + zE) \end{aligned}$$

Замечание 18. Иногда мы будем путать обозначение для следа матрицы и для суперследа.

Решение.

Мы видим, что $\text{Ber}(E + zE) = (1 + z)^{p-q}$. Раскладывая в ряд получим:

$$\text{Ber}(E + zE) = (1 + z)^{p-q} = 1 + (p - q)z + \dots,$$

$$\text{sTr } E = p - q,$$

$$\text{sTr } (E \wedge E) = \frac{(p - q)(p - q - 1)}{2},$$

$$\text{sTr } (E \wedge E \wedge E) = \frac{(p - q)(p - q - 1)(p - q - 2)}{6},$$

и так далее. Проверим эти формулы.

Пусть $\{\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_\alpha\}$ произвольный базис в V ,

Мы видим, что

суперслед = количество чётных элементов в базисе в V — количество нечётных элементов в базисе

теперь проверим суперслед квадрата:

рассмотрим базис в $V \wedge V$: это будет например

$$\left\{ \{\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j (i < j); \mathbf{f}_\alpha \wedge \mathbf{f}_\beta (\alpha \leq \beta)\} \text{ чётные вектора}, \{\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{f}_\alpha\} \text{ нечётные вектора} \right\}$$

мы видим, что

суперслед $E \wedge E =$ количество чётных элементов в базисе—

$$\begin{aligned} & \text{количество нечётных элементов в базисе} = \\ & \frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q+1)}{2} - pq = \frac{(p-q)(p-q-1)}{2}, \end{aligned}$$

теперь проверим суперслед куба:

рассмотрим базис в $V \wedge V \wedge V$: это будет например

$$\left\{ \{ \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{e}_k (i < j < k); \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{f}_\alpha \wedge \mathbf{f}_\beta (\alpha \leq \beta) \} \text{чётные вектора}, \{ \mathbf{f}_\alpha \wedge \mathbf{f}_\beta \wedge \mathbf{f}_\gamma (\alpha \leq \beta \leq \gamma); \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \wedge \mathbf{f}_\alpha \} \right\}_{\text{н}}$$

мы видим, что

суперслед $E \wedge E \wedge E =$ количество чётных элементов в базисе в $V \wedge V \wedge V$ —

$$\begin{aligned} & \text{количество нечётных элементов в базисе в } V \wedge V \wedge V = \\ & \left[\frac{p(p-1)(p-2)}{6} + \frac{pq(q+1)}{2} \right] - \left[\frac{q(q+1)(1+2)}{6} + \frac{p(p-1)q}{2} \right] = \frac{(p-q)(p-q-1)(p-q-2)}{6}, \end{aligned}$$

Проверка последнего равенства несколько утомительна...

(Сравните результаты этих упражнений с результатами упражнений по вычислению примеров базисов в $V \wedge V$ и в $V \wedge V \wedge V$.)

4.2.2 Универсальные полиномы Ньютона

Воспользуемся теоремой+тождеством Лиувилля: Обозначим $s_k = \text{sTr } A^k$. Имеем

$$\begin{aligned} \text{Ber}(1+zA) &= \sum_{k=0}^{\infty} \text{sTr } \underbrace{A \wedge \dots \wedge A}_k z^k = e^{\text{sTr } \log(1+zA)} = e^{\text{sTr } (\sum_{k=1}^{\infty} A^k (-1)^{k+1} z^k)} = \\ & e^{(\sum_{k=1}^{\infty} s_k (-1)^{k+1} z^k)} = e^{(s_1 + s_2 z^2 + s_3 z^3 + \dots)} = \\ & 1 + (s_1 + s_2 z^2 + s_3 z^3 + \dots) + \frac{1}{2} (s_1 + s_2 z^2 + s_3 z^3 + \dots)^2 + \frac{1}{6} (s_1 + s_2 z^2 + s_3 z^3 + \dots)^3 + \dots = \\ & 1 + s_1 z + \frac{1}{2} (s_1^2 - s_2) z^2 + \frac{1}{6} (s_1^3 - 3s_1 s_2 + 2s_3) z^3 + \dots \end{aligned}$$

Из этого предложения и формулы Лиувилля следует

Предложение 3.

$$\begin{aligned} c_k(A) &= P_k(s_1, \dots, s_k) \\ c_0 &= 1, \quad c_1 = s_1, \quad c_2 = \frac{1}{2}(s_1^2 - s_2) \quad c_3 = \frac{1}{6}(s_1^3 - 3s_1 s_2 + 2s_3), \end{aligned}$$

Замечание 19. В предложении при классические полиномы Ньютона очень важна их универсальность.

(и sTr можно заменить на Tr)

4.3 Возвращение к березинианам

Мы ещё раз вернёмся к предложению 4.2.1.

Упражнение 21. Пусть L оператор в n -мерном линейном пространстве.

Рассмотреть многочлен $\det(1 + zL)$ 'разложив' его в окрестности нуля и бесконечности. Сравнив полученные выражения придём к формулам

$$\underbrace{L \wedge \cdots \wedge L}_{k \text{ раз}} = \det L \underbrace{L^{-1} \wedge \cdots \wedge L^{-1}}_{N-k \text{ раз}}, \dim V = N.$$

Обсудим, что за ними стоит. Немного теории.

Пусть задано представление $\rho()$ группы обратимых операторов в линейном пространстве V . Контргрессиентное представление определяется как представление $\mapsto \rho(A^{-1})$

Левая часть формулы, это след представления

$\underbrace{\rho \wedge \cdots \wedge \rho}_{k \text{ раз}}$ группы. Правая часть есть след представления

$\det \rho \underbrace{\rho^* \wedge \cdots \wedge \rho^*}_{N-k \text{ раз}}$, где $\rho^* : GL(V^*) \rightarrow GL(V^*)$ контраг्रेसиентное представление:

$$\rho^*(A) = (\rho(A^{-1}))^*$$

Отметим, что если $A: V \rightarrow V$ и $B: V \rightarrow V$ то $*$ и B^* и $^{-1}$ и B^{-1} отображают в "другую сторону а $(A^{-1})^*$ в ту же:

$$(AB)^* = B^* A^*, (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}, \text{ а } ((AB)^{-1}) = ((A^{-1})) \cdot ((B^{-1})) .$$

На матричном уровне это обратная транспонированная матрица. Поэтому за тождеством философски стоит *естественный изоморфизм*

$$\underbrace{V \wedge \cdots \wedge V}_{k \text{ раз}} = \underbrace{\det V \otimes V \wedge \cdots \wedge V}_{k \text{ раз}}$$

Это и есть естественная версия звёздочки Ходжа.

Упражнение 22. Рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & d \end{pmatrix}$ Вычислить собственные значения этой матрицы.

Решение

Пусть эта матрица имеет λ в качестве чётного (бозонного) собственного значения и пусть эта матрица имеет μ в качестве нечётного (фермионного) собственного значения. Тогда $s\text{Tr } M = a - d = \lambda - \mu$ и

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + \beta\gamma & \dots \\ \dots & d^2 + \gamma\beta \end{pmatrix}$$

Имеем

$$\left\{ \begin{aligned} \text{sTr } M &= \lambda - \mu = a - d \\ \text{sTr } M^2 &= \lambda^2 - \mu^2 = a - d + 2\beta\gamma \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = a + \frac{\beta\gamma}{a-d} \\ \mu = d + \frac{\beta\gamma}{a-d} \end{cases}$$

А что делать если $a = d$?

4.4 Об одной проблеме стандартной формулы о березиниане

Почему мы пошли этим путем? Ведь у нас уже была формула для березиниана? Напомним (см. определение 9):

Пусть M чётная $p|q \times p|q$ матрица:

$$M = \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} \quad (37)$$

A это $p \times p$ матрица с чётными элементами, β это $p \times q$ матрица с нечётными элементами, Γ это $q \times p$ матрица с нечётными элементами и D $q \times q$ матрица с чётными элементами, тогда

$$\text{Ber } M = \text{Ber} \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} = \frac{\det(A - \beta D^{-1} \Gamma)}{\det D}. \quad (38)$$

Попробуем воспользовавшись стандартной формулой для березиниана посчитать нашу рациональную функцию

$$R_M(z) = \text{Ber} \left(1 + z \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} \right)$$

Подробные вычисления показывают, что в итоге получается:

$$R_M(z) = \text{Ber} \left(1 + z \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} \right) = \frac{\text{полином степени } p + pq \text{ по } z}{\text{полином степени } q + pq \text{ по } z}$$

а с другой стороны мы знаем и исследуем формулу (34) в которой

$$R_M(z) = \text{Ber} \left(1 + z \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} \right) = \frac{\text{полином степени } p \text{ по } z}{\text{полином степени } q \text{ по } z}$$

Формула Березина приводит к сокращению числителя и знаменателя на многочлен степени pq !

Уже в простом случае $p = q = 1$ формула Березина даёт ответ:

$$R_M(z) = \text{Ber} \left(1 + z \begin{pmatrix} A & \beta \\ \Gamma & D \end{pmatrix} \right) = \text{Ber} \begin{pmatrix} 1 + az & \beta \\ \Gamma & 1 + dz \end{pmatrix} = \frac{(1 + az)(1 + dz) - \beta\Gamma}{1 + dz}$$

Кажется, что в этой формуле имеем дело с отношением квадратичных полиномов по z , а нет, используя результаты упражнения 22 легко получить, что

$$\text{Ber} \begin{pmatrix} 1 + az & \beta \\ \Gamma & 1 + dz \end{pmatrix} = \frac{(1 + az)(1 + dz) - \beta\Gamma}{1 + dz} = \frac{1 + \lambda z}{1 + \mu z} = \frac{1 + z \left(a + \frac{\beta\gamma}{a-d} \right)}{1 + z \left(d + \frac{\beta\gamma}{a-d} \right)}.$$

4.5 Возвращение к формуле $R_A(z) = \text{Ber}(1 + Az)$

Функция $\text{Ber}(1 + zA)$ можно разложить не только в окрестности нуля, но и в окрестности другой точки, например, бесконечности⁵

Предложение 4.

$$\text{Ber}(1 + zA) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k^*(A) z^k, \quad \text{где} \quad \begin{cases} c_k^*(A) = \text{Ber} A \text{Tr} \Lambda^{p-q-k} A^{-1} & \text{для целых } k \leq p - q \\ c_k^*(A) = 0 & \text{для целых } k > p - q \end{cases}$$

Proof На основании первого предложения получаем

$$\begin{aligned} \text{Ber}(1 + zA) &= \text{Ber}(zA) \text{Ber} \left(1 + \frac{1}{z} A^{-1} \right) = \text{Ber} A z^{p-q} \sum_{i \in \mathbf{Z}} \frac{1}{z^i} c_i(A^{-1}) = \\ &= \text{Ber} A \left(1 + \frac{1}{z} \text{Tr} A^{-1} + \frac{1}{z^2} \text{Tr} (A^{-1} \wedge A^{-1}) + \frac{1}{z^3} \text{Tr} (A^{-1} \wedge A^{-1} \wedge A^{-1}) + \dots \right) \\ &= \sum_{k \leq p-q} \overbrace{\text{Ber} A c_{p-q-k}(A^{-1})}^{c_k^*} z^k = \sum c_k^*(A) z^k, \end{aligned}$$

где

$$c_k^*(A) = \begin{cases} \text{Ber} A c_{p-q-k}(A^{-1}) & \text{if } k = p - q, p - q - 1, \dots \\ 0 & \text{if } k > p - q \end{cases}$$

Что можно сказать о последовательностях $\{c_k\}$ и $\{c_k^*\}$?

Оказывается, изучая эти последовательности мы попадаем в мир возвратных последовательностей; более удивительно, что изучая этот мир мы пишем новые формулы для березиниана.

Мы приходим к теореме, что

Теорема 6. Для линейного оператора, действующего в $(p|q)$ -мерном суперпространстве разность последовательностей c_k (см. Предложение 1) и c_k^* (см. Предложение 2)

$$\gamma_k = c_k - c_k^*$$

есть возвратная последовательность периода q .

Эта теорема позволяет написать другую формулу для березиниана:

Мы не будем доказывать этой вообще-то элементарной теоремы, но разберём примеры

⁵Интересно, что получится если это сделать в другой, не бесконечно удалённой точке...

Пример 4.3. Пусть L линейный оператор в $p|q$ -мерном суперпространстве и $q = 1$.

$$\text{Ber}(1 + zL) = \frac{1 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_pz^p}{1 + \mu z} = \sum c_k(L)z^k$$

Мы видим, что при больших (например начиная с c_p последовательность становится геометрической⁶ В этом проявляется фермионная размерность!,

Упражнение 23. Написать разложение функции $\frac{1}{1-z}$ в нуле и в бесконечности ,

Упражнение 24. Написать разложение функции $\frac{z^2}{z^2-z-1}$ в нуле и в бесконечности

Решение

Разложение в нуле

$$\frac{z^2}{z^2 - z - 1} = \sum_{k \geq 2} c_k z^k, \quad \begin{cases} a_k = c_{k-2} - c_{k-1} - c_k \\ c_2 = -1, c_3 = 1 \end{cases}$$

Мы приходим к

$$\begin{cases} c_k = -a_k - c_{k-1} + c_{k-2}, a_k = \delta_{20}, \\ c_2 = -1, c_3 = 1 \end{cases}$$

Разложение в бесконечности. Как бы та же формула, но другие граничные условия

$$\frac{z^2}{z^2 - z - 1} = 1 + \frac{1}{z} + \cdots = \sum_{\leq 0} c_k^* z^k,$$

Мы приходим к

$$\begin{cases} c_k = -a_k - c_{k-1} + c_{k-2}, a_k = \delta_{20}, \\ c_0 = 1, c_{-1} = 1 \end{cases}$$

мы видим, что

$$\gamma_n = c_n - c_n^* = 1$$

то есть теорема подтверждается.

Пусть L оператор, такой, что

$$\text{Ber}(1 + zL) = \frac{1 + z + z^2}{1 + z - z^2}$$

Что можно сказать об операторе L . Например, можно ли сказать, что $\text{Ber} L = -1$? А чему равен суперслед L ?

Решение

Сравнив с формулой (34) получим

$$\text{Ber} L = \frac{\prod \lambda_i}{\prod_{\alpha} \mu} = \frac{1}{-1} = -1.$$

⁶.

4.6 Теорема 6 и вычисления березинианов

Используя теорему (6) можно с лёгкостью посчитать березиниан так как

$$\text{Ber} A = c_{p-q}^*$$

Для этого нужно уметь распознавать возвратную последовательность. Как?

Вспомним школьное упражнение

Предложение 5. *Последовательность $\{c_k\}$ геометрическая если и только если*

$$\det \begin{pmatrix} c_k & c_{k+1} \\ c_{k+1} & c_{k+2} \end{pmatrix} = 0$$

А теперь почти школьное упражнение

Предложение 6. *Последовательность $\{c_k\}$ возвратная последовательность периода q если и только если соответствующие детерминанты Ганкеля зануляются, Например, последовательность $\{c_k\}$ возвратная периода 2 (как Фибоначчи) если и только если*

$$\det \begin{pmatrix} c_k & c_{k+1} & c_{k+2} \\ c_{k+1} & c_{k+2} & c_{k+3} \\ c_{k+2} & c_{k+3} & c_{k+4} \end{pmatrix} = 0$$

и.т.д.

При помощи Ганкелей и использованием определителей посчитаем березинианы матриц в $p|q$ -мерных пространствах

$$q = 1$$

Пример 4.4. Пусть действует в $p|1$ -мерном суперпространстве.

Имеем

$$\sum_{k \leq p-1} c_k^* z^k = R_A(z) = \frac{P(z)}{1 + \mu z} = \sum_{k \geq 0} c_k z^k$$

и

$$\gamma_k = c_k - c_k^* - \dots - \text{геометрическая прогрессия}$$

Значит

$$\det \begin{pmatrix} \gamma_{p-1} & \gamma_p \\ \gamma_p & c_{p+1} \end{pmatrix} = 0 \det \begin{pmatrix} c_{p-1} - \text{Ber} A & c_p \\ c_p & c_{p+1} \end{pmatrix} = 0$$

Отсюда получим, что для пространств размерности $p|1$

$$\text{Ber} A = \frac{1}{c_{p-1}} \det \begin{pmatrix} c_{p-1} & c_p \\ c_p & c_{p+1} \end{pmatrix}$$

Пример 4.5. Пусть действует в $p|2$ -мерном суперпространстве.

Имеем

$$\sum_{k \leq p-1} c_k^* z^k = R_A(z) = \frac{P(z)}{1 + pz + qz^2} = \sum_{k \geq 0} c_k z^k$$

Рассмотрим частный случай, когда многочлен в знаменателе имеет вид $1 + z + z^2$, то есть $c_{k+2} = c_k + c_{k+1}$ (начиная с некоторого номера), Имеем для

$$\gamma_k = c_k - c_k^* \text{ — — — геометрическая прогрессия}$$

последовательность а la Fibonacchi, то есть

$$0 = \det \begin{pmatrix} \gamma_{p-2} & \gamma_{p-1} & \gamma_p \\ \gamma_{p-1} & \gamma_p & \gamma_{p+1} \\ \gamma_p & \gamma_{p+1} & \gamma_{p+2} \end{pmatrix} == 0 \det \begin{pmatrix} c_{p-2} - \text{Ber} A & c_{p-1} & c_p \\ c_{p-1} & c_p & c_{p+1} \\ c_p & c_{p+1} & c_{p+2} \end{pmatrix} == 0$$

Отсюда получим, что для пространств размерности $p|2$ типа Fibonacchi

$$\text{Ber} A = \frac{1}{\det \begin{pmatrix} c_p & c_{p+1} \\ c_{p+1} & c_{p+2} \end{pmatrix}} \det \begin{pmatrix} c_{p-2} & c_{p-1} & c_p \\ c_{p-1} & c_p & c_{p+1} \\ c_p & c_{p+1} & c_{p+2} \end{pmatrix}$$

На самом деле используя хорошую математику это все можно переписать в следующем виде

Теорема 7. Березиниан линейного оператора в $p|q$ -мерном пространстве равен отношению следов представлений в инвариантных подпространствах, соответствующих прямоугольным диаграммам Юнга $D(p, q+1)$ и $D(p, q+1)^7$

$$\text{Ber} A = \frac{|\text{Tr } \wedge^{p-q} A \dots \text{Tr } \wedge^p A|_{q+1}}{|\text{Tr } \wedge^{p-q+2} A \dots \text{Tr } \wedge^{p+1} A|_q} = \pm \frac{\text{Tr } A_{D(p, q+1)}}{\text{Tr } A_{D(p+1, q)}} \quad (39)$$

Тут стоят детерминанты Ганкеля $q+1$ и q составленные из суперследов внешних степеней A .

Лекция 12 апреля.

⁷Пусть $D_{\lambda_1, \dots, \lambda_s}$ -диаграмма Юнга ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s$), пусть V_D , инвариантное подпространство в тензорном произведении $\underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_N$, соответствующее диаграмме V_D .

$$N = \lambda_1 + \dots + \lambda_s \text{ раз}$$

Пусть A -линейный оператор в V ,

След оператора в подпространстве соответствующем диаграмме Юнга равен

$$\text{Tr } A_{V_D} = \det(|a_{ij}|)$$

где $|a_{ij}|$ $s \times s$ матрица, равная

$$a_{ij} = \underbrace{\text{Tr } (A \wedge \dots \wedge)}_{\lambda_i + j - i \text{ раз}}$$

5 Супермногообразия

5.1 Многообразия

Напомним многообразия. Мы обсудим два примера: сферу и кокасательное расслоение,
Напомнить

Пример 5.1. n -мерная сфера в \mathbf{E}^{n+1} :

$$(x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = 1.$$

stereographic coordinates on the sphere Возьмём северный полюс N и южный полюс S

Первая карта: координаты $u^i = u_{(N)}^i$

$$\frac{u^i}{x^i} = 1 - z, \quad (z = x^{n+1})$$

Приходим к

$$\begin{cases} x^i = \frac{2u^i}{1+u^2} \\ x^{n+1} = \frac{u^2-1}{1+u^2} \end{cases}$$

Вторая карта: координаты $u^i = u_{(S)}^i$

$$\frac{u^i}{x^i} = 1 + z, \quad (z = x^{n+1})$$

Приходим к

$$u_{(S)}^i = k u_{(N)}^i, \quad u_{(N)}^2 u_{(S)}^2 = 1.$$

Обсудить, что ответ не просто 'фокус-покус' а следствие теоремы Виета (в силу которой точки с рациональными координатами на сфере переходят в точки с рациональными стереографическими координатами.)

Пример 5.2. T^*M и каноническая симплектическая структура.

Рассмотрим локальные 'хорошие' координаты $\{x^i, p_j\}$. При переходе к другим 'хорошим' координатам $\{x^{i'}, p_{j'}\}$,

$$p_{j'} = p_j \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}.$$

Зададим невырожденную скобку Пуассона в таких 'хороших' координатах требованием, чтобы

$$\{x^i, x^j\} = 0, \quad \{p_i, x^j\} = \delta_i^j, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad (40)$$

Конечно, при этом важно проверить корректность этого определения, то есть то, что формула (40) выполняется в любых 'хороших' координатах. Например проверим, что в любых 'хороших' координатах

$$\{p_{i'}, x^{j'}\} = \delta_{i'}^{j'}.$$

Имеем

$$\{p_{i'}, x^{j'}\} = \{p_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, x^k\} \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \delta_i^k \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} = \delta_{i'}^{j'}.$$

5.2 Определение супермногообразия

Пусть $\left[\{x_{(\alpha)}^i\} \right]$ это атлас локальных координат на m -мерном многообразии M_0^m , где $\{x_{(\alpha)}^i\}$ определены в областях U_α и $x_{(\alpha)}^i = \Psi_{\alpha\beta}^i(x_{(\beta)})$ это функции перехода. Рассмотрим атлас $\left[\{x_{(\alpha)}^i, \theta_{(\alpha)}^j\} \right]$, где нечётные переменные $\{\theta_{(\alpha)}^j\}$ ($j = 1, \dots, n$) являются образующими алгебры Грассманна и функции перехода

$$\begin{cases} x_{(\alpha)}^i = \tilde{\Psi}_{(\alpha\beta)}^i(x_{(\beta)}, \theta_{(\beta)}) \\ \theta_{(\alpha)}^j = \Phi_{(\alpha\beta)}^j(x_{(\beta)}, \theta_{(\beta)}) \end{cases} \quad (41)$$

удовлетворяют следующим свойствам:

- 1) они сохраняют чётность, то есть. $p(\tilde{\Psi}_{\alpha\beta}) = 0, p(\Phi_{\alpha\beta}) = 1$, где $p(x^i) = 0, p(\theta^j) = 1$,
- 2) $\tilde{\Psi}_{\alpha\beta}(x_{(\beta)}, \theta_{(\beta)})|_{\theta^j=0} = \Psi_{\alpha\beta}(x_{(\beta)})$ и $\partial\Phi^j/\partial\theta_{(\beta)}^i$ являются обратимыми матрицами.

Выполняются условия коцикла:

$$\begin{cases} x_{(\alpha)}^i = \tilde{\Psi}_{(\alpha\beta)}^i \left(\tilde{\Psi}_{(\beta\gamma)}(x_{(\gamma)}, \theta_{(\gamma)}), \Phi_{(\beta\gamma)}(x_{(\gamma)}, \theta_{(\gamma)}) \right) = \tilde{\Psi}_{(\alpha\gamma)}^i(x_{(\gamma)}, \theta_{(\gamma)}) \\ \theta_{(\alpha)}^j = \Phi_{(\alpha\beta)}^j \left(\tilde{\Psi}_{(\beta\gamma)}(x_{(\gamma)}, \theta_{(\gamma)}), \Phi_{(\beta\gamma)}^j(x_{(\gamma)}, \theta_{(\gamma)}) \right) = \Phi_{(\alpha\gamma)}^j(x_{(\gamma)}, \theta_{(\gamma)}) \end{cases} \quad (42)$$

Координаты $\{x_{(\alpha)}^i, \theta_{(\alpha)}^j\}$ определяют (m, n) -мерную суперобласть $\hat{U}_{(\alpha)}^{m, n}$ с подстилающей областью $U_{(\alpha)}^m$. Формулы склейки (41) определяют (m, n) -мерное супермногообразие, подстилающим многообразием которого является M^m . Это определение супермногообразия, принадлежащее Ф. Березину и Д.Лейтесу (см. [?], [?]). В этом определении у супермногообразия 'нет точек'.

Гладкие функции и функции склейки

5.3 Первые примеры

А.

Суперсфера

Take $\mathbf{R}^{p+1|2q}$ with coordinates

$$\underbrace{x^1 \dots x^{p+1}}_{\text{even}}, \underbrace{\xi^1 \dots \xi^{2q}}_{\text{odd}},$$

$$defosphere S_p^{m|n}: \quad (x^1)^2 + \dots + (x^{p+1})^2 + 2\xi^1\xi^{m+q} + \dots + 2\xi^q\xi^{2q} = 1. \quad (43)$$

Например, $S^{1|2} \subset \mathbf{R}^{2|2}$.

Функции на $S^{p|2q}$ это функции на $\mathbf{R}^{p+1|q}$ modulo уравнение (??).

Координаты на сфере

- 'декартовы координаты'

$$\underbrace{x^1 \dots x^{p+1}}_{\text{even}}, \underbrace{\xi^1 \dots \xi^{2q}}_{\text{odd}},$$

- 'Соединяя' точку сферы с северным полюсом приходим к координатам

$$\begin{cases} u_{(N)}^i = \frac{x^i}{1-x^{n+1}}, & (i = 1, \dots, p) \\ \theta_{(N)}^\alpha = \frac{\xi^\alpha}{1-x^{n+1}}, \\ (\alpha = 1, \dots, 2q) \end{cases}$$

- 'Соединяя' точку сферы с южным полюсом приходим к другим координатам

$$\begin{cases} u_{()}^i = \frac{x^i}{1-x^{n+1}}, & (i = 1, \dots, p) \\ \theta_{()}^\alpha = \frac{\xi^\alpha}{1-x^{n+1}}, \\ (\alpha = 1, \dots, 2q) \end{cases}$$

'Северные' и 'южные' координаты связаны соотношением:

$$u_{(N)}^i = \frac{u_{(S)}^i}{u_{(S)}^2}, =$$

где $u^2 = u^i u^i + 2\theta^i \theta^{i+q}$

5.4 Векторные расслоения и супермногообразия

:

Определение 10. Пусть задано гладкое многообразие B . Вещественное векторное расслоение ξ над пространством B это

- топологическое пространство $E = E(\xi)$, *пространство расслоения*
- непрерывное отображения $p: E \rightarrow B$, проекция
- заданное для каждого $b \in B$ структура векторного пространства на $p^{-1}(b)$
- Выполняется условие *локальной тривиальности*: существует число n , такое, что для каждой $b \in B$ существует окрестность $U \subseteq B$ и гомеоморфизм

$$h: U \times \mathbf{R}^n \rightarrow p^{-1}(U). \quad (44)$$

При этом соответствие $x \rightarrow h(x, b)$ определяет изоморфизм векторных пространств \mathbf{R}^n и $p^{-1}(b)$. Пара (U, h) называется локальной координатной системой для расслоения ξ в окрестности точки b .

Если можно взять U равным B , то расслоение ξ называют *тривиальным расслоением*.

Замечание 20. Все объекты даже если это специально не упомянуто будут гладкими.

5.4.1 Векторные расслоения и супермногообразия

Пусть $\xi = \xi(B, E, n)$ локально тривиальное векторное расслоение и пусть $\mathfrak{A} = \{\varphi_{(\alpha)} x_{(\alpha)}^i\}$ какой нибудь атлас на B .

Тогда изоморфизмы (44) для каждой функции перехода $\Psi_{\alpha\beta} = \varphi_{(\alpha)} \circ \varphi_{(\beta)}^{-1}$ определяет линейное отображение, изоморфизм \mathbf{R}^n на себя. Этот изоморфизм, конечно, зависит от точки:

$$\rho_{\alpha\beta}(b, \mathbf{x}) = h_{(\alpha)}^{-1} \circ h_{(\beta)}(b, \mathbf{x})$$

При этом соблюдается условие коцикла: для точек, лежащих в пересечении $U_{(\alpha)} \cap U_{(\beta)} \cap U_{(\gamma)}$ (в которых одновременно определены локальные координаты $_{(\alpha)}$, $_{(\beta)}$ и $_{(\gamma)}$)

$$\rho_{\alpha\beta} \circ \rho_{\beta\gamma} \circ \rho_{\gamma\alpha} = \text{id}$$

Легко понять, что верно и обратное: задание для произвольного атласа на B , набора изоморфизмов $\rho_{\alpha\beta}$, подчиняющихся условиям коцикла, задаёт расслоение.

Теорема 8. Каждое векторное расслоение $E \rightarrow B$ канонически задаёт $(p|q)$ -мерное супермногообразие ΠE , где p размерность базы и $q = n$ есть размерность векторного пространства.

Замечание 21. Измельчением покрытия и выбором новых переменных можно добиться того, чтоб в функциях склейки (41) исчезли 'высшие хвосты':

$$\begin{cases} x_{(\alpha)}^i = \tilde{\Psi}_{(\alpha\beta)}^i(x_{(\beta)}) \\ \theta_{(\alpha)}^j = \theta^j \Phi_i^j(\alpha\beta)(x_{(\beta)}) \end{cases} \quad (45)$$

Мы приходим к теореме

Теорема 9. (теорема Березина — Гавенского — Бачелора) Для каждого гладкого супермногообразия F существует векторное расслоение $E \rightarrow B$, такое, что $\Pi E = F$.

Эта теорема верна лишь в гладкой категории.

5.5 Супермногообразие $\Pi T M$ и $\Pi T^* M$

. Пусть M произвольное многообразие и пусть $\{x_{(\alpha)}^i\}$ это произвольный атлас на M . Рассмотрим касательное расслоение $T M$ и кокасательное расслоение $T^* M$. Пусть $\{x_{(\alpha)}^i\}$ это произвольный атлас на M .

Пусть $\{v_{(\alpha)}^j, x_{(\alpha)}^i\}$ атлас на $T M$ и $\{p_{j(\alpha)}, x_{(\alpha)}^i\}$ атлас на $T^* M$, соответствующие атласу $\{x_{(\alpha)}^i\}$ на M , то есть при замене карты

$$v_{(\beta)}^j = v_{(\alpha)}^i \frac{\partial x_{(\alpha)}^j}{\partial x_{(\beta)}^i}, \quad p_{j(\beta)} = p_{i(\alpha)} \frac{\partial x_{(\alpha)}^i}{\partial x_{(\beta)}^j}. \quad (46)$$

Мы придём от многообразия к супермногообразию $ПТМ$ если мы обратим чётности слоёв в супермногообразии T^*M , то есть если заменим координаты $v^{j\beta}$ на нечётные координаты $\xi^{j\beta}$, которые при замене карты будут изменяться по тому же закону, что и координаты $v^{j\beta}$ в (46); соответственно мы придём от многообразия T^*M к супермногообразию $ПТ^*M$ если мы обратим чётности слоёв в супермногообразии T^*M , то есть если заменим координаты $p_{j\beta}$ на нечётные координаты $\theta_{j\beta}$, которые при замене карты будут изменяться по тому же закону, что и координаты $p_{j\beta}$ в (46);

Определение 11. Пусть $\{x^i_{(\alpha)}\}$ произвольный атлас на M .

Мы назовём атласы,

$$\begin{array}{ll} \{x^i_{(\alpha)}, p_{j(\beta)}\} & \text{на многообразии } T^*M \\ \{x^i_{(\alpha)}, \theta_{j(\beta)}\} & \text{на супермногообразии } ПТ^*M \\ \{x^i_{(\alpha)}, v^j_{(\beta)}\} & \text{на многообразии } TM \\ \{x^i_{(\alpha)}, \xi^j_{(\beta)}\} & \text{на многообразии } ПТМ \end{array} \quad (47)$$

построенные с помощью формул (46) *каноническими атласами* или, *естественными атласами*, соответствующими атласу $\{x^i_{(\alpha)}\}$ на M .

Отметим существование канонических чётной и нечётной симплектических структур на кокасательном многообразии T^*M и на ассоциированном с ним супермногообразии $ПТ^*M$. Пусть $\{x^i_{(\alpha)}\}$ произвольный атлас на M . Тогда рассмотрим канонические атласы $\{p_{j(\alpha)}, x^i_{(\alpha)}\}$ на многообразии T^*M и $\{\theta_{j(\alpha)}, x^i_{(\alpha)}\}$ на супермногообразии $ПТ^*M$, соответствующие атласу $\{x^i_{(\alpha)}\}$ (см. выше в этом параграфе замечание 11).

Рассмотрим каноническую чётную скобку Пуассона $\{_, _\}_0$ на многообразии T^*M , генерируемую соотношениями

$$\{x^i(\alpha), x^j(\alpha)\}_0 = 0, \quad \{p_{j(\alpha)}, p_{i(\alpha)}\}_0 = 0, \quad \{p_{j(\alpha)}, x^i_{(\alpha)}\}_0 = \delta_j^i.$$

Легко заметить, что это определение не зависит от карты. Например, если одна и та же точка на T^*M находится как в карте $U_{(\alpha)}$ так и в карте $U_{(\beta)}$, то в силу соотношений (46) и правила Лейбница для скобки имеем

$$\begin{aligned} \{p_{j(\beta)}, x^i_{(\beta)}\}_0 &= \left\{ p_{r(\alpha)} \frac{\partial x^r(x_{(\beta)})}{\partial x^j_{(\beta)}}, x^i_{(\beta)} \right\} = \frac{\partial x^r(x_{(\beta)})}{\partial x^j_{(\beta)}} \{p_{r(\alpha)}, x^i_{(\beta)}\} = \\ &= \frac{\partial x^r(x_{(\beta)})}{\partial x^j_{(\beta)}} \frac{\partial x^i_{(\beta)}}{\partial x^m_{(\alpha)}} \{p_{r(\alpha)}, x^m_{(\alpha)}\} = \frac{\partial x^r(x_{(\beta)})}{\partial x^j_{(\beta)}} \frac{\partial x^i_{(\beta)}}{\partial x^m_{(\alpha)}} \delta_r^m. \end{aligned}$$

Можно рассмотреть аналогично каноническую нечётную скобку Пуассона $\{_, _\}_1$ на супермногообразии $ПТ^*M$, генерируемую соотношениями

$$\{x^i(\alpha), x^j(\alpha)\}_1 = 0, \quad \{\theta_{j(\alpha)}, \theta_{i(\alpha)}\}_1 = 0, \quad \{\theta_{j(\alpha)}, x^i_{(\alpha)}\}_1 = \delta_j^i.$$

(Эта скобка имеет и другие названия: скобка Бюттен, скобка Схоутена, антискобка:пия)

Замечание 22. Соотношения (5.5) означает, что координаты $\{x^i, \theta_j\}$ являются координатами Дарбу на PT^*M (равно как соотношения (5.5) означают, что координаты $\{x^i, p_j\}$ являются координатами Дарбу на T^*M). Легко понять, что эти координаты Дарбу однозначно строятся по любому атласу локальных координат на M .

Предложение 7. Пусть M произвольное многообразие.

1. На супермногообразии ПТМ существует каноническая форма объёма, которая равна координатной форме объёма $D(x, \xi)$ в произвольных канонических координатах соответствующим атласу координат $\{x_{(\alpha)}^i\}$ произвольного атласа на M ,

2. Произвольная форма объёма σ на M определяет форму объёма \mathbf{r}_σ на PT^*M , поднятие этой формы

3. Если σ произвольная форма объёма на M , то существует атлас на M , такой, что форма объёма σ становится координатной формой объёма в этом атласе. Если $\{x_\alpha^i\}$ произвольный атлас в котором форма σ является координатной формой, то поднятие \mathbf{r}_σ формы объёма σ с многообразия M на супермногообразии PT^*M также является координатной формой объёма в канонических координатах соответствующего атласу $\{x_\alpha^i\}$:

$$\text{если в атласе } \{x_\alpha^i\} \sigma = D(x) \Rightarrow \mathbf{r}_\sigma = D(x, f).$$

Proof Пусть $\{x_{(\alpha)}^i\}$ $\{x_{(\beta)}^{i'}\}$ два произвольных атласа на M и $\{x_{(\alpha)}^i, r_{(\alpha)}^j\}$, $\{x_{(\beta)}^{i'}, r_{(\beta)}^{j'}\}$: соответствующие канонические атласы на ПТМ. Легко понять, что переход от одних координат к другим (если пересечения соответствующих карт не пусто) унимодулярен:

$$\text{Ber} \left(\frac{\partial(x, r)}{\partial(x', r')} \right) = \text{Ber} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial r}{\partial x'} \\ \frac{\partial x}{\partial r'} & \frac{\partial r}{\partial r'} \end{pmatrix} = \text{Ber} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial r}{\partial x'} \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial r'} \end{pmatrix} = \frac{\det \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right)}{\det \left(\frac{\partial x}{\partial r'} \right)} = 1.$$

$$\frac{D(x, r)}{D(x', r')} = \text{Ber} \left(\frac{\partial(x, r)}{\partial(x', r')} \right) = 1,$$

то есть форма объёма $D(x, r)$ корректно определена. Мы доказали пункт 1 предложения 7.

Конец лекции 12 апреля

Лекция 19 апреля

6 Интегрирование по поверхностям

Дифференциальные формы.

Определения. Примеры.
 ω -1-форма

Интегрирование дифференциальных форм

$$\int_\gamma \omega = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum \omega(\xi_i).$$

Если ω - k -форма, C - k -мерная поверхность разбивается на k -мерные (криволинейные) параллелипипеды

Интеграл k -формы в ориентированном \mathbf{R}^k .

$$\omega = a(x)dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k, \int \omega_D = \int a(x)dx^1 \dots dx^k,$$

где $(^1, \dots, x^k)$ ориентирующая система координат в \mathbf{R}^k .

Операция $f^*\omega$

Пусть ω - k -форма в \mathbf{R}^n , $n > k$,

D -область в \mathbf{R}^k

'пути интегрирования'- $\sigma = (D, f, Or)$

a) D -область в \mathbf{R}^k .

b) $f: D \rightarrow M$

c) ориентация \mathbf{R}^k , Or .

Определение:

$$\int \omega_\sigma = \int_D f^*\omega.$$

Цепи

Интеграл от формы по цепи.

Упражнение 25. Определить поток векторного поля через поверхность, доказать теорему Остроградского-Гаусса

Теорема 10.

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

Решение Пусть \mathbf{K} векторное поле на \mathbf{E}^3 , Ω -форма объёма, и M -поверхность в \mathbf{E}^3 . Поток векторного поля через поверхность. это интеграл по поверхности от 2-формы $\iota_{\mathbf{K}}\Omega$.

Теперь пусть $M = \partial D$, тогда

поток векторного поля через границу поверхности =

$$\int_{\partial D} \iota_{\mathbf{K}}\Omega = \int d(\iota_{\mathbf{K}}\Omega) = \int_D \operatorname{div} \mathbf{K} \Omega$$

где

$$\operatorname{div} \mathbf{K} = \frac{\iota_{\mathbf{K}}\Omega}{\Omega} = \frac{\mathfrak{L}_{\mathbf{K}}\Omega}{\Omega}.$$

$$M = \partial D$$

Упражнение 26. Рассмотреть $\varphi = -\frac{1}{r}$. Вычислить поток векторного поля $\mathbf{R}_{d\varphi}$

В этом упражнении мы будем использовать как сферические так декартовы координаты в \mathbf{E}^3 .

Решение В сферических координатах 1-форма

$$d\Phi = \frac{dr}{r^2},$$

квадрат элемента длины:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

то есть вектор дуальный ковектору $d\varphi$ будет

$$\mathbf{K} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}, \text{ (закон Кулона)}$$

так как форма объёма

$$\Omega = dx \wedge dy \wedge dz = r^2 \sin \theta dr \wedge d\theta \wedge d\varphi$$

то внутреннее произведение формы поля \mathbf{K} на форму объёма есть

$$\begin{aligned} \iota_{\mathbf{K}} \Omega &= \iota_{\frac{\partial}{r^2 \partial r}} (dx \wedge dy \wedge dz) = \iota_{\frac{\partial}{r^2 \partial r}} (r^2 \sin \theta dr \wedge d\theta \wedge d\varphi) = \\ &= \sin \theta d\theta \wedge d\varphi. \end{aligned}$$

Мы приходим к

поток векторного поля $q\mathbf{K}$ через поверхность равен $\int \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi q$. (закон Гаусса)

v Соответствие

дифференциальная форма на — — — гладкая функция на PT^*M — — —

дифференциал де Рама d — — — векторное поле на PT^*M

Формы на PTM

Пусть M многообразие.

Рассмотрим TM и PTM , меняя чётность координат слоя.

Если x^1, \dots, x^n — локальные координаты на M , то $(x^1, \dots, x^n, dx^1, \dots, dx^n)$ локальные координаты на PTM .

Если x^i чётные координаты, то dx^i нечётные координаты: $p(dx^i) = p(x^i) + 1$. Функции на PT это дифференциальные формы на M :

$$\omega(x, dx) = \underbrace{\omega(x)}_{0\text{-form}} + \underbrace{\omega_i(x) dx^i}_{1\text{-form}} + \dots + \underbrace{\omega_{\text{top}}(x) dx^1 dx^2 \dots dx^n}_{n\text{-form}}$$

If M is a supermanifold then $\omega(x, dx)$, function on PTM is pseudodifferential form. We do it later

Каноническая форма объёма на PTM Пусть $(x^{i'}, dx^{j'})$ новые локальные координаты:

$$\begin{cases} x^i = x^i(x^{i'}) \\ dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} dx^{j'} \end{cases} .$$
 Березиниан преобразования равен

$$\left| \frac{\partial(x, dx)}{\partial(x', dx')} \right| = \text{Ber} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial dx}{\partial dx'} \\ \frac{\partial x}{\partial dx'} & \frac{\partial dx}{\partial x'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial^2 x}{\partial x' \partial x'} dx' \\ 0 & \frac{\partial x}{\partial x'} \end{pmatrix} = 1 .$$

Мы пришли к канонической форме объёма $D(x, dx)$

$$D(x, dx) = \underbrace{\text{Ber} \frac{\partial(x, dx)}{\partial(x', dx')}}_{\text{equals to 1}} D(x', dx') .$$

и определим интеграл на PTM .

Интеграл по PTM

$$\begin{aligned} \int_{PTN} \omega(x, dx) D(x, dx) &= \\ \int_{PTN} (\omega(x) + \omega_i(x) dx^i + \dots + \omega_{\text{top}}(x) dx^1 dx^2 \dots dx^n) D(x, dx) &= \\ \int_M \omega_{\text{top}}(x) D(x) &= \int_M \omega . \end{aligned}$$

: Thus we arrive at invariant definition of integral of pseudodifferential form $\omega(x, dx)$ in the case if M is a superspace.

Интегрирование вдоль поверхности

Пусть C поверхность in M . Пусть C определено отображением $D \xrightarrow{\varphi} N$. Пусть $\omega = \omega(x, dx)$ форма на M .

Тогда $\int_C \omega = \int_D \varphi^* \omega$. Если $\varphi: x^i = x^i(\xi^\alpha)$ то

$$\begin{aligned} \int_C \omega &= \int_D \omega \left(x^i(\xi), \frac{\partial x^i(\xi)}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha \right) = \\ \int_{PTD} \omega \left(x^i(\xi), \frac{\partial x^i(\xi)}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha \right) D(\xi, d\xi) , \end{aligned}$$

где $D(\xi, d\xi)$ каноническая форма объёма на суперпространстве параметров PTD .

$$\int_C \omega = \int_{PTC \subset PTM} \omega D(\xi, d\xi) .$$

Псевдодифференциальные формы—функции на PTM .

6.1 Плотности и псевдодифференциальные формы

Мы представим некоторые результаты теории интегрирования (see [28], [64], [40]).

Пусть $\Omega^{m,n}$ ($m|n$)–мерная поверхность в суперпространстве $E^{M,N}$, заданная параметризацией $z^A = z^A(\zeta^B)$ (отображение суперпространства параметров $E^{m|n}$ в $E^{M|N}$ где $z^A = (x^1, \dots, x^M, \theta^1, \dots, \theta^N)$ координаты суперпространства $E^{M,N}$ и $\zeta^B = (\xi^1, \dots, \xi^m, \nu^1, \dots, \nu^n)$ координаты $E^{m,n}$ (параметры.)

Рассмотрим функционал $\Phi_A(\Omega)$ заданный на суперпространстве ($m|n$)–поверхностях выражением:

$$\Phi_A(\Omega) = \int A \left(z^A(\zeta), \frac{\partial z^A}{\partial \zeta^B}, \dots, \frac{\partial^k z^A}{\partial \zeta^{B_1} \dots \partial \zeta^{B_k}} \right) d^{m+n} \zeta \quad (48)$$

где A такая, что

$$A \left(z^A, \frac{\partial z^A}{\partial \tilde{\zeta}^B}, \dots, \frac{\partial^k z^A}{\partial \tilde{\zeta}^{B_1} \dots \partial \tilde{\zeta}^{B_k}} \right) = \text{Ber} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \tilde{\zeta}} \right) \cdot A \left(z^A, \frac{\partial z^A}{\partial \zeta^B}, \dots, \frac{\partial^k z^A}{\partial \zeta^{B_1} \dots \partial \zeta^{B_k}} \right). \quad (49)$$

Если условие (49) соблюдается то функционал (48) не зависит от параметризации $z(\zeta)$ of the суперповерхности Ω .

Функция A уд. условиям (49) называется ($m|n$) плотностью ранга k .

Плотность задаёт аддитивный функционал:

$$\Phi_A(\Omega_1 + \Omega_2) = \Phi_A(\Omega_1) + \Phi_A(\Omega_2).$$

6.2 Плотности и псевдодифференциальные формы

Пусть $W(z, z^*)$ функция на ПТМ, где M супермногообразие.

Если многообразие мы придём к дифференциальным формам.

Примеры.

6.3 псевдодифференциальные формы и плотности

Преобразование Баранова-Шварца сопоставляет каждой псевдодифференциальной форме плотность...

Разбор.

6.4 Формы Воронова-Зорича

Рассмотрим подробнее случай, когда ранг равен единице.

$$A = A \left(z^A, \frac{\partial z^A}{\partial \zeta^B} \right). \quad (3.1.4)$$

Условие (49) перепишется в виде

$$A \left(z^A, K_{B'}^B \frac{\partial z^A}{\partial \zeta^B} \right) = \text{Ber } K \cdot A \left(z^A, \frac{\partial z^A}{\partial \zeta^B} \right). \quad (3.1.5)$$

$$\text{Ber} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{\text{Det}(A - BD^{-1}C)}{\text{Det } D} \quad (3.1.6)$$

В обычном (не супер) случае, условие линейности по $\frac{\partial z^A}{\partial \zeta^B} \Leftrightarrow$ дифференциальная форма: k -форме $\omega = \omega_{i_1 \dots i_k} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_k}$ соответствует плотность

$$A_\omega = < \frac{\partial z^{i_1}}{\partial \zeta^1}, \dots, \frac{\partial z^{i_k}}{\partial \zeta^k}, \omega > = k! \omega_{i_1 \dots i_k} \frac{\partial z^{i_1}}{\partial \zeta^1} \dots \frac{\partial z^{i_k}}{\partial \zeta^k},$$

$$\Phi_A(\Omega^k) = \int_{\Omega^k} \omega. \quad (3.1.7)$$

Выполнение условия 3.1.5 связано с тем, что детерминант это полилинейная антисимметрическая функция от векторов $\frac{\partial x^a}{\partial \zeta^b}$.

Теорема Стокса соблюдается

$$\Phi_{A\omega}(\partial\Omega) = \Phi_{A_{d\omega}}(\Omega) \quad (3.1.8)$$

Замечание 23. Можно показать, что выполнение теоремы Стокса, достаточное условие: Плотность а необходимостью соответствует форме, если теорема Стокса выполняется.

Что происходит в суперслучае?

В обычной математике дифференц. форма одновременно и полилинейная функция и объект интегрирования. В суперслучае мы приходим к разным объектам к

$$\omega(\dots, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots) = -\omega(\dots, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \dots)(-1)^{p(u)p(v)}. \quad (3.1.9)$$

не имеет отношения к форме объёма.

Строя объекты интегрирования в суперслучае кмы должны быть внимательны к теореме Стокса,

Какие условия надо поставить на плотность, чтоб не нарушить теорему Стокса.

Пусть две $(m|n)$ поверхности Ω_0 и Ω_1 заданы параметризацией $z_0^A = z_0^A(\zeta^B)$ и $z_1^A = z_1^A(\zeta^B)$ и пусть

$$z^A = z^A(t, \zeta^B), (0 \leq t \leq 1) : \quad z(0, \zeta^B) = z_0(\zeta^B), z(1, \zeta^B) = z_1(\zeta^B) \quad (3.1.10)$$

это параметризация $(m+1|n)$ поверхности \mathcal{V}

$$\partial\mathcal{V} = \Omega_1 - \Omega_0 \quad (3.1.11)$$

A это плотность ранга 1 если

$$\begin{aligned}
\Phi_A(\partial\mathcal{V}) &= \Phi_A(\Omega_1) - \Phi_A(\Omega_0) = \int d\zeta^{m+n} \int_0^1 dt \frac{d}{dt} A \left(z^A(t, \zeta^B), \frac{\partial z^A(t, \zeta^B)}{\partial \zeta^B} \right) = \\
&= \int d\zeta^{m+n} \int dt \left[\left(\frac{dz^A}{dt} \frac{\partial A}{\partial z^A} + \frac{dz_B^A}{dt} \frac{\partial A}{\partial z_B^A} \right) \right] = \\
&= \int d\zeta^{m+n} \int dt \left[\frac{dz^A}{dt} \frac{\partial A}{\partial z^A} + \frac{d}{d\zeta^B} \left(\frac{dz^A}{dt} \frac{\partial A}{\partial z_B^A} \right) - \frac{dz^A}{dt} \frac{d}{d\zeta^B} \frac{\partial A}{\partial z_B^A} (-1)^{p(B)p(A)} \right] = \\
&= \int d\zeta^{m+n} dt \left(\frac{dz^A}{dt} \frac{\partial A}{\partial z^A} - \left(\frac{dz^A}{dt} \frac{\partial z^{A'}}{\partial \zeta^B} \frac{\partial^2 A}{\partial z^{A'} \partial z_B^A} + \frac{dz^A}{dt} \frac{\partial z_{B'}^{A'}}{\partial \zeta^B} \frac{\partial^2 A}{\partial z_{B'}^{A'} \partial z_B^A} \right) (-1)^{p(A)p(B)} \right) + . \quad (3.1.12)
\end{aligned}$$

(Обозначения: $z_B^A = \frac{\partial z^A}{\partial \zeta^B}$).

Мы видим, что вторые производные не дают вклад в интеграл если

$$\begin{aligned}
&\frac{dz^A}{dt} \frac{\partial^2 z^{A'}}{\partial \zeta^B \partial \zeta^{B'}} \frac{\partial^2 A}{\partial z_{B'}^{A'} \partial z_B^A} (-1)^{p(A)p(B)} = 0 \quad .. \\
&\frac{\partial^2 A}{\partial z_{B'}^{A'} \partial z_B^A} = -(-1)^{p(B)p(B')+(p(B)+p(B'))p(A)} \frac{\partial^2 A}{\partial z_B^{A'} \partial z_{B'}^A} \quad (3.1.13)
\end{aligned}$$