Лекции по суперматематике
ИППИ, ИТМФ МГУ, мехмат МГУ
Москва, 11 марта 2022
Четвёртая лекция 2022

интеграл по области и функция Хевисайда.

Как брать интеграл по области? Покажем это на примере.

Пусть $F = F(x, \theta, \varphi)$ гладкая быстроубывающая функция на $R^{1|2}$.

$$F(x, \theta, \varphi) = f(x) + \theta g(x) + \varphi s(x) + \theta\varphi h(x).$$

(x — чётная переменная, θ и φ — нечётные переменные.)
Определим интеграл от этой функции по лучу $(0, \infty)$ как

$$\int_{x\geq 0} D(x, \theta, \varphi) F(x, \theta, \varphi) = \int_{R^{1|2}} D(x, \theta, \varphi) H(x) F(x, \theta, \varphi), \qquad (1)$$

функция Хевисайда

где H(x) — функция Хевисайда

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } x \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

и покажем "разумность этого определения.

Мы покажем, интеграл (1) инвариантен при замене

$$\begin{cases} x = y + \xi\eta \\ \theta = \xi \\ \varphi = \eta \end{cases} \tag{3}$$

Сделаем это поподробнее

Имеем , что для любой обратимой замены переменных

$$\begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{x}(\mathrm{y}, \xi, \eta) \\ \theta = \theta(\mathrm{y}, \xi, \eta) \\ \varphi = \varphi(\mathrm{y}, \xi, \eta) \end{cases}, \left(\begin{cases} \mathrm{y} = \mathrm{y}(\mathrm{x}, \theta, \varphi) \\ \xi = \xi(\mathrm{x}, \theta, \varphi) \\ \eta = \eta(\mathrm{x}, \theta, \varphi) \end{cases}, \right)$$

выполняется равенство

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial \theta}{\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{y}} \\ \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \xi} & \frac{\partial \theta}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \eta} & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial \xi}{\partial \mathrm{x}} & \frac{\partial \eta}{\partial \mathrm{x}} \\ \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \theta} & \frac{\partial \xi}{\partial \theta} & \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} & \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим специальное преобразование (3)
Посчитаем его в новых и старых координатах, связанных преобразованием (3).
Заметим, что березиниан преобразования (3) равен 1.
Действительно для преобразования (3)

$$\mathrm{Ber}\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial \theta}{\partial \mathrm{y}} & \frac{\partial \varphi}{\partial \mathrm{y}} \\ \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \xi} & \frac{\partial \theta}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \eta} & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \mathrm{Ber}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 .$$

в координатах (x, θ, φ)
интеграл (1) равен

$$\int_{R^{1|2}} D(x, \theta, \varphi) H(x) \left[f_0(x) + \theta f_1(x) + \varphi g(x) + \theta \varphi h(x)\right] = \int dx h(x) \,.$$

Мы покажем,что в координатах (y, ξ, η) он также равен
$I = \int h(x) dx$.

$$\int h(x) dx = \int D(x, \theta, \varphi) H(x) F(x, \theta, \varphi) =$$

$$\int \mathrm{Ber}\, \frac{\partial(x, \theta, \varphi)}{\partial(y, \xi, \eta)} D(y, \xi, \eta) H(x) F(x, \theta, \varphi)_{x = y + \xi\eta, \theta = \xi, \varphi = \eta} \,.$$

Действительно

$$\int \operatorname{Ber} \frac{\partial(\mathrm{x}, \theta, \varphi)}{\partial(\mathrm{y}, \xi, \eta)} \mathrm{D}(\mathrm{y}, \xi, \eta) \mathrm{H}(\mathrm{x}) \mathrm{F}(\mathrm{x}, \theta, \varphi)_{\mathrm{x}=\mathrm{y}+\xi\eta, \theta=\xi, \varphi=\eta} =$$

$$\int 1 \cdot \mathrm{D}(\mathrm{y}, \xi, \eta) \mathrm{H}(\mathrm{y} + \xi\eta)$$

$$\mathrm{F}\left[\mathrm{y} + \xi\eta, \xi, \eta\right] =$$

$$\int \mathrm{D}(\mathrm{y}, \xi, \eta) \left[\mathrm{H}(\mathrm{y}) + \xi\eta\delta(\mathrm{y})\right]$$

$$\left[\mathrm{f}(\mathrm{y} + \xi\eta) + \xi \mathrm{g}(\mathrm{y} + \xi\eta) + \eta \mathrm{s}(\mathrm{y} + \xi\eta) + \xi\eta \mathrm{h}(\mathrm{y} + \xi\eta)\right] =$$

$$\int \mathrm{D}(\mathrm{y}, \xi, \eta) \left[\mathrm{H}(\mathrm{y}) + \xi\eta\delta(\mathrm{y})\right] \left[\mathrm{f}(\mathrm{y}) + \xi\eta \mathrm{f}'(\mathrm{y}) + \xi\eta \mathrm{h}(\mathrm{y})\right] = \tag{4}$$

We see that

$$\int D(y,\xi,\eta)H(y)\xi\eta f'(y) = -f(0),$$

$$\int D(y,\xi,\eta)\xi\eta f(y) = f(0),$$

$$\int D(y,\xi,\eta)\xi\eta h(y) = I,$$

that means that integral (4) is equal to

$$+f(0) - f(0) + I = I.$$

.

$$\int_{x\geq 0} D(x,\theta,\varphi)f(x,\theta.\varphi) = \int_0^\infty dx \int_{R^{0|2}} D(x,\theta,\varphi)H(x)f(x,\theta,\varphi)$$

Сравните с (1)

Вычислим 2 важных интеграла

Пусть симметрическая билинейная форма в R^n. Приводя форму ортогональным преобразованием к симметрическоу виду легко увидеть, что

$$\int e^{-A(x,x)} d^n x = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}\,. \tag{5}$$

Действительно можно выбрать базис в котором

$$(Ax, x) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots \lambda_n x_n^2 \quad \text{a} \quad \lambda_1 \cdot \cdots \cdot \lambda_n = \det A\,.$$

Что произойдёт с этой формулой если симметрическую матрицу заменить на антисимметрическую матрицу B?

Матрица антисимметрическая

и к тому же переменная интегрирования x лежит в n-мерном грассмановом пространстве Λ_n, или, что то же самое в $(0|n)$-мерном аффинном суперпространстве $R^{0|n}$

$$\int_{R^n} e^{-A(x,x)} d^n x \Rightarrow \int_{R^{0|n}} D(x,\theta) e^{B(x,x)} = \int_{R^{0|n}} D(\theta) e^{B_{ik}\theta^i\theta^k}. \quad (6)$$

Рассмотрим замену переменной $\theta^i = L^i_k \eta_k$ Тогда

$$Z(B) = \int_{R^{0|n}} D(x,\theta) e^{B(x,x)} = \int_{R^{0|n}} \left(\frac{D(x,\theta)}{D(x,\eta)}\right) D(x,\eta) e^{B(x,x)} =$$

$$\frac{Z(L^+BL)}{\det L}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\mathrm{Z(B)}}{\sqrt{\det \mathrm{B}}} = \mathrm{consta}\,,$$

значит

$$\mathrm{Z(B)} = \mathrm{C}\sqrt{\det \mathrm{B}}\,.$$

С другой стороны очевидно, что интеграл (6) является очевидно многочленом от элементов матрицы B. (см. прмеры ниже) Рассмотрим,например, $\mathrm{n} = 2$ или $\mathrm{n} = 4$.

n=2

$$\int_{\mathrm{R}^{0|1}} \mathrm{D}(\mathrm{x},\boldsymbol{\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{x})} = \int_{\mathrm{R}^{0|1}} \mathrm{D}(\mathrm{x},\boldsymbol{\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{B}_{12}\boldsymbol{\theta}^1\boldsymbol{\theta}^2} =$$

$$\int_{\mathrm{R}^{0|1}} \mathrm{D}(\mathrm{x},\boldsymbol{\theta})\left[1+\mathrm{B}_{12}\boldsymbol{\theta}^1\boldsymbol{\theta}^2\right] = \int \mathrm{B}_{12}\boldsymbol{\theta}^1\boldsymbol{\theta}^2 = \mathrm{B}_{12} = \sqrt{\det \mathrm{B}}$$

$$\left(\det \mathrm{B} = \det \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{B}_{12} \\ -\mathrm{B}_{12} & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{B}_{12}^2\right)$$

Теперь рассмотрим $\mathrm{n} = 4$.

n=4

$$\int_{\mathrm{R}^{0|4}} \mathrm{D}(\mathrm{x},\boldsymbol{\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{x})} =$$

$$\int_{\mathrm{R}^{0|4}} \mathrm{D}(\mathrm{x},\boldsymbol{\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{B}_{12}\boldsymbol{\theta}^1\boldsymbol{\theta}^2+\cdots+\mathrm{B}_{34}\boldsymbol{\theta}^3\boldsymbol{\theta}^4} = \int_{\mathrm{R}^{0|4}} \mathrm{D}(\mathrm{x},\boldsymbol{\theta})\left[1+\mathrm{x}+\frac{\mathrm{x}^2}{2}\right],$$

где $\mathrm{x} = \mathrm{B}_{12}\boldsymbol{\theta}^1\boldsymbol{\theta}^2+\cdots+\mathrm{B}_{34}\boldsymbol{\theta}^3\boldsymbol{\theta}^4$, то есть

$$\int_{\mathrm{R}^{0|4}} \mathrm{D}(\mathrm{x},\boldsymbol{\theta})\mathrm{e}^{\mathrm{B}_{12}\boldsymbol{\theta}^1\boldsymbol{\theta}^2+\cdots+\mathrm{B}_{34}\boldsymbol{\theta}^3\boldsymbol{\theta}^4} =$$

$$\mathrm{D}(\mathrm{x},\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta}^1\boldsymbol{\theta}^2\boldsymbol{\theta}^3\boldsymbol{\theta}^4\left[2\mathrm{B}_{12}\mathrm{B}_{34}-\mathrm{B}_{13}\mathrm{B}_{24}+\mathrm{B}_{14}\mathrm{B}_{23}\right]$$

$$\mathrm{B}_{12}\mathrm{B}_{34}-\mathrm{B}_{13}\mathrm{B}_{24}+\mathrm{B}_{14}\mathrm{B}_{23}\,.$$

Theorem

Пусть B антисимметрическая матрица в n-мерном пространстве. Тогда $\det B = 0$ в случае если n нечётно.
В случае если n чётно, $n = 2k$, то

$$\det B = \sqrt{\varepsilon_{i_1 j_1 \ldots i_k j_k} B_{i_1 j_1} \ldots B_{i_k j_k}}$$

(Этот многочлен называется Пфафианном).

Ремарка

Я не знаю более простого доказательства этой теоремы!

Ремарка

Забавно, что формула (6) является основанием для трюка Фаддеева-Попова. Физики полагают, и у них на это есть серьёзные основания, что именно формула (6) привела к суперматематике.

Детерминант и площадь параллелограмма

Exercise Объяснить связь между площадью параллелограма и детерминантом линейного оператора .

exercise Пусть ω n-форма в n-мерном линейном пространстве,
А что это такое?

exercise
пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ базис в V
и пусть A линейный оператор на V.

exercise Вычислить

$$\frac{\omega(Ae_1, \ldots, Ae_n)}{\omega(e_1, \ldots, e_n)}$$

Решение

для любого линейного оператора $\mathrm{A}\colon \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, $\{\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_\mathrm{n}\}$ этого пространства

$$\boldsymbol{\omega}(\mathrm{A}\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{A}\mathrm{e}_\mathrm{n}) = \mathsf{det}\,\mathrm{A}\,\boldsymbol{\omega}(\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_\mathrm{n}), \tag{7}$$

Из соотношения (7) вытекает мультипликативность детерминанта.

Действительно рассмотрим произвольный базис $\{\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_\mathrm{n}\}$ n-мерного линейного пространства V.

Пусть B невырожденный линейный оператор в V.

multiplicativity

Тогда система векторов $\{f_1, \ldots, f_n\}$, где $f_i = B(e_i)$ тоже будет базисом. Тогда из равенства (7) следует, что

$$\mathsf{det}(A \cdot B) = \frac{\boldsymbol{\omega}(ABe_1, \ldots, ABe_n)}{\boldsymbol{\omega}(e_1, \ldots, e_n)} =$$

$$\frac{\boldsymbol{\omega}(ABe_1, \ldots, ABe_n)}{\boldsymbol{\omega}(Be_1, \ldots, Be_n)} \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}(Be_1, \ldots, Be_n)}{\boldsymbol{\omega}(e_1, \ldots, e_n)} =$$

$$\frac{\boldsymbol{\omega}(Af_1, \ldots, Af_n)}{\boldsymbol{\omega}(f_1, \ldots, f_n)} \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}(Be_1, \ldots, Be_n)}{\boldsymbol{\omega}(e_1, \ldots, e_n)} = \mathsf{det}\, A \cdot \mathsf{det}\, B$$

След и детерминант

$$\mathsf{det}(1+\varepsilon \mathrm{A}) = 1+\varepsilon \mathrm{Tr}\,\mathrm{A}\,.$$

Формула Лиувилля :

$$\mathsf{det}\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{Tr}\,\mathrm{A}} \to \mathrm{Ber}\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{\mathrm{str}\mathrm{A}}\,,$$

где операция str должна быть определена. КАК?
Вначале покажем, что теорема Лиувилля выполняется в классике. Затем доопределим операцию str.

Решение

Пусть A матрица линейного оператора.
Перейдем в базис в котором она диагональна.
В этом базисе формулу Лиувилля легко проверить.
(Проверьте!)
Значит оно верно всегда.

Решение

Множество диагонализируемых матриц всюду плотно в множестве всех матриц. Поэтому если функции и B непрерывны утверждение, что $A = B$ по непрерывности может быть продолжено на множество всех матриц, если оно верно на множестве диагонализируемых матриц,

Второе доказательство

Рассмотрим две функции

$$B(t) = \det e^{tA}, \quad , D(t) = e^{t \operatorname{Tr} A} .$$

Мы видим, что обе функции $B(t)$ и $D(t)$ удивлетворяют одному и тому дифференциальному уравнению и одним и тем же граничным условиям, значит

$$A(t) \equiv B(t) .$$

Третье доказательство

$$\det e^{A} = \det\left(\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{A}{N}\right)^{N}\right) = \left(\lim_{N\to\infty}\left(e^{\mathrm{Tr}\,\frac{A}{N}}\right)^{N}\right) = e^{\mathrm{Tr}\,A}.$$

Теперь мы попробуем определить след матрицы, так чтобы это было б согласовано с теорему Лиувилля.

Рассмотрим чётную $p|q \times p|q$ чётную матрицу $M = \begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & D \end{pmatrix}$.

tr C

- A это $p \times p$ матрица все коэффициенты которой чётные числа,
- B это $p \times q$ нечётная матрица, то есть все коэффициенты её нечётные элементы алгебры Грассманна,
- Γ это $q \times p$ нечётная матрица, то есть все коэффициенты её нечётные элементы алгебры Грассманна,
- D это $q \times q$ чётная матрица, то есть все коэффициенты её чётные элементы алгебры Грассманна,

Мы видим, что

$$\operatorname{Ber} e^{\varepsilon \mathrm{M}} = \operatorname{Ber}\left(e^{\varepsilon \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathsf{\Gamma} & \mathrm{D} \end{pmatrix}} \right) = \operatorname{Ber}\left(1 + \varepsilon \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathsf{\Gamma} & \mathrm{D} \end{pmatrix} \right) =$$

$$\operatorname{Ber}\left(\begin{pmatrix} 1+\varepsilon \mathrm{A} & \varepsilon \mathrm{B} \\ \varepsilon \mathsf{\Gamma} & 1+\varepsilon \mathrm{D} \end{pmatrix} \right) = \frac{\mathsf{det}(1+\varepsilon \mathrm{A}) - \mathsf{det}\left(\varepsilon \mathrm{B}(1+\varepsilon \mathrm{D})^{-1} \varepsilon \mathsf{\Gamma}\right)}{\mathsf{det}(1+\varepsilon \mathrm{D})} =$$

$$= \frac{\mathsf{det}(1+\varepsilon \mathrm{A})}{\mathsf{det}(1+\varepsilon \mathrm{D})} = \frac{1+\varepsilon \operatorname{Tr} \mathrm{A}}{1+\varepsilon \operatorname{Tr} \mathrm{D}} = 1 + \varepsilon(\operatorname{Tr} \mathrm{A} - \operatorname{Tr} \mathrm{D}).$$

Сравнивая мы приходим к разумному определению, что суперслед это разность следов: для произвольной чётной p|q матрицы

$$\mathrm{str}\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} = \mathrm{trA} - \mathrm{trD}$$

и

$$\mathrm{Ber}\, \mathrm{e}^{\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}} = \mathrm{e}^{\mathrm{trA} - \mathrm{trD}}$$