Лекции по суперматематике

Оганес М. Худавердян

20 февраля 2021 г.

Это конспект лекций на 15 февраля 2021
ИППИ, ИТМФ МГУ, мехмат МГУ

Содержание

Очень грубо говоря, суперматематика, это наука в которой используются коммутирующие и антикоммутирующие переменные.

Обычные (коммутирующие) переменные $\{x^i\} = \{x^1, x^2, \dots, x^m\}$ принимают значения в числах, им можно сопоставить *точки*.

Антикоммутирующие переменные $\{\theta^a\} = \{\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^n\}$ это символы, такие что

$$\theta^a\theta^b = -\theta^b\theta^a, \quad \left(x^i x^j = x^j x^i \,, x^i\theta^a = \theta^a x^i\right)$$

Им трудно сопоставить точки [1] Чтоб работать в суперматематике, нам надо освоить двойственый язык.

1 Двойственное описание для точек и отображений

1.1 Точки

Пусть $\mathbf{R}^p$- p-мерное аффинное пространство, (`множество точек`). Обозначим $A = C^\infty(\mathbf{R}^m)$ алгебру гладких функций на $\mathbf{R}^m$.

Мы иногда будем использовать алгебру $C(\mathbf{R}^m)$ алгебру непрерывных функций на $\mathbf{R}^m$.

Определение 1. каждой **точке** $P \in \mathbf{R}^p$ сопоставим гомоморфизм σ_P, такой, который сопоставляет каждой функции f её значение в этой точке:

$$\mathbf{R}^m \ni P \mapsto \sigma_P \colon \sigma_P(f) = f(P)\,.$$

Понятно, что это гомоморфизм алгебры функций в числа, менее очевидно, что верно и обратное:

Теорема 1. *Пусть D-область в $\mathbf{R}^m$, пусть σ_D произвольный ненулевой гомоморфизм алгебры функций $C^\infty(D)$ в $\mathbf{R}$:*

$$\sigma_D \not\equiv 0\,, \sigma_D(f+g) = \sigma_D(f) + \sigma_D(g)\,, \sigma_D(fg) = \sigma_D(f)\sigma_D(g)\,.$$

Тогда существует такая точка $P \in D$, что для любой функции $f \in C^\infty(D)$

$$\sigma_D(f) = f(P)\,.$$

Иными словами множество точек области D = множеству гомоморфизмов из алгебры функций на D в вещественные числа.

Эта теорема позволяет реконструировать точки по алгебре функций $A = C^\infty(D)$. Заметим также, что она позволяет восстановить значение функции в точке. Если точка, это гомоморфизм σ алгебры функций в числа, то значение данной функции $f \in A$ на данной точке σ равно значемию 'точки' σ на элементе f.

[1] мы это сделаем в дальнейшем, используя язык так называемых Λ-точек.

Докажем эту теорему.

Доказательство теоремы.

Для простоты рассмотрим случай области $D = (0,1)$.

Пусть σ гомоморфизм алгебры $A = C^\infty(0,1)$ в $\mathbf{R}$. Пусть значение этого гомоморфизма на функции $f = x$ равно s: $\sigma(x) = s$. Покажем, что число $s \in (0,1)$. Действительно, если $s \notin (0,1)$, то функция $h = \frac{1}{x-s}$ хорошо определена и $\sigma(x-s) = 0$. Мы видим, что

$$\sigma\left((x-s)\frac{1}{x-s}\right) = \sigma(x-s)\sigma\left(\frac{1}{x-s}\right) = 0$$

и с другой стороны

$$\sigma\left((x-s)\frac{1}{x-s}\right) = 1\,.$$

Противоречие, значит $s \in [0,1]$.

Теперь покажем. что для произвольной гладкой функции $g \in C^\infty(0,1)$, выполняется условие $\sigma(g) = g(s)$. Пусть $\sigma(g) = t$. Мы хотим показать, что $t = g(s)$. Рассмотрим функцию

$$r = (x-s)^2 + (g-t)^2\,.$$

Легко понять, что $\sigma(r) = 0$, значит функция r необратима, (так как функция $\frac{1}{r}$ *не существует*). Мы приходим к выводу, что функция $r()$ обращается в нуль, хотя бы в одной из точек интервала $(0,1)$. Но если функция $r(x)$ обращается в нуль, то это может быть лишь точка $x = s$. Значит $g(s) = t$. ■

Exercise 1

Пройдет ли предыдущее доказательство, если алгебру гладких функций в $C^\infty(0,1)$ заменить на алгебру непрерывных функций $C^0(0,1)$.

Exercise 2

Пройдёт ли предыдущее доказательство если алгебру гладких функций в $C^\infty([0,1])$ заменить на произвольную алгебру функций, которые *разделяют* точки отрезка $[0,1]$.

Exercise 3

Найти и обсудить 'дырку' в следующем рассуждении

Пусть σ гомоморфизм, такой, что $\sigma(x) = s \in \mathbf{R}$. Тогда очевидно, что $\sigma(x^2) = s^2$ и для любого натурального n, $\sigma(x^n) = s^n$. Значит для любого многочлена $P(x)$, $\sigma(P(x)) = P(s)$. Теперь теорема Вейерштрасса об апроксимации гладкой функцией полиномами даёт, что для любой гладкой функции $g(x)$, $\sigma(g(x)) = g(s)$. ■

2 Отображения

Пусть снова $\mathbf{R}^p$- p-мерное аффинное пространство, (`множество точек`). Обозначим также $A = C^\infty(\mathbf{R}^m)$ алгебру гладких функций на $\mathbf{R}^m$.

Определение 2. каждому отображению $F\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ сопоставим гомоморфизм τ_F, такой, который сопоставляет каждой гладкой функции на $\mathbf{R}^m$ ($f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$) гладкую функцию ма $\mathbf{R}^n$ ($\tau_F(f) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$) такую, что значение функции $\tau_F(f)$ на произвольной точке $P \in \mathbf{R}^m$ равно значению функции f на точке $Q = F(P)$:

$$\tau_F(f)(P) = f\left(F(P)\right) .$$

Замечание 1. Правило 'против шёрстки' Отображения F и гомоморфизм функций τ_F идут в противоположных нзоравлениях ('против шёрстки').

Замечание 2. Гомоморфизм (2) построенный по отображению F обозначают F^*,

Так же как и в случае точек верно и обратное

Теорема 2. *Пусть U-область в $\mathbf{R}^m$ и V-область в $\mathbf{R}^n$, и τ гомоморфизм (против 'шёрстки') алгебры $C^\infty(V)$ в алгебру $C^\infty(U)$. Тогда существует отображение $F\colon\ \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ такое, что*

$$\tau = F^*\,, \textit{то есть для любой функции } f \in C^\infty(D)\ \tau(f) = f(F(P))\,.$$

Иными словами множество отображений = множеству гомоморфизмов из алгебры функций на V в алгебру функций на U.

Докажем эту теорему.

`Доказательство теоремы.`

Пусть P произвольная точка на U. Возьмём произвольную гладкую функцию f на V. Значение образа этой функции под действием гомоморфизма τ на данной точке P задаёт гомоморфизм алгебры гладких функций на V в вещественные числа, то есть согласно теореме 2 мы приходим к точке Q такой что

$$\tau(f)(P) = f(Q)$$

Это равенство приводит к определению точки $Q = F(P)$. Она задаёт гомоморфизм алгебры гладких функций

Пример 2.1. Пусть φ отображение пространств

$$\varphi \quad \mathbf{R}^2 \mapsto \mathbf{R}^2\colon \quad \begin{cases} x = u \\ y = \frac{v}{u} \end{cases} \tag{1}$$

Что тут написано?

Мы 'привыкли' 'читать эту формулу так

`точке с координатами` (u, v) сопоставляется точка с координатами $(x.y)$

Однако другой читатель скажет:

Формула определяет гомоморфизм гладких функций на плоскости $\mathbf{R}^2$, зависящих от x, y в гладкие функции на плоскости $\mathbf{R}^2$, зависящие от u, v. Гомоморфизм задан на образующих: Функция x переходит в функцию u и функция y переходит в функцию $\frac{v}{u}$; любая гладкая функция $f(x, y)$ переходит в гладкую функцию $f(x, y)\big|_{x=u, y=\frac{v}{u}}$.

Кто прав? Оба правы. Формулу можно читать по разному!

Пример 2.2. Пусть φ отображение пространств

$$\varphi \quad \mathbf{R}^1 \mapsto \mathbf{R}^2\colon \quad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \tag{2}$$

Что тут написано?

Мы 'привыкли' 'читать эту формулу так

`точке` t `на прямой сопоставляется точка с координатами`

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

Другой скажет: в этой формуле определяется гомоморфизм функций на плоскости $\mathbf{R}^2$ в функции на $\mathbf{R}$. Формулы задают значения гомоморфизма на образующих: функция x переходит в функцию $\cos t$ и функция y переходит в функцию $\sin t$. Конечно, закон определяет образ любой (гладкой) функции. Например, функция $\frac{e^{-2xy}}{x^4+y^4}$ перейдет в функцию

$$\frac{e^{-2\cos t \sin t}}{\cos^4 t + \sin^4 t} = \frac{e^{-\sin 2t}}{1 - \frac{1}{2}\sin 2t},$$

и для любой гладкой функции $f = f(x, y)$

$$\sigma(f) = f(x, y)x = \cos t, y = \sin t)$$

И в заключение

задача-шутка

Рассмотрим набор разных простых чисел $\{p_i\}$, $i = 1, \ldots, N$, $p_i \neq p_j$; также рассмотрим набор матуральных чисел, $\{_i\}$, $i = 1, \ldots, N$, так что каждое a_i меньше p_i. Найти число K, которое при делении на простое число p_i даст остаток a_i.

Вы скажете: это китайская теорема об остатках. Какое отношение она имеет к курсу?

`Указание к решению`

Используя идеи двойственности можно свести эту задачу к задаче построения интерполяционного многочлена Лагранжа.

n различных точек на прямой ——n различных простых

$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$———— $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$

$P(x)$ полиномиал ——- N натуральное число

$P(x_i) = y_i$——————-N даёт остаток a_i при делении на p_i

Если полином $P(x)$ равен y_i в точке x_i то многочлен

$$ch1P(x) = \sum_i y_i h_i(x)\,, \tag{3}$$

удовлетворяет соотношению $P(x_i) = y_i$, то есть этот многочлен достаавляет решение задачи о построении интерполяционного многочлена Лагранжа.

если многочлен $h_i(x)$ такой, что

$$h_m(x_j) = \delta_{mj}\,, \text{то есть } h_m(x) = \begin{cases} 1 \text{ если } x = x_m \\ 0 \text{ если } x = x_j \text{ при любом } j \neq m \end{cases}\,, \tag{4}$$

Построим многочлен (4),затем построим аналогичный объект в числах, затем переведите формулу (**??**) из многочленов в числа.

Рассмотрим многочлен $Q(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_n)$. Этот многочлен зануляется во всех точках $\{x_1, \ldots, x_n\}$, а вот многочлен $H_i(x) = \frac{Q(x)}{x - x_i}$ зануляется во всех точках $\{x_1, \ldots, x_n\}$, кроме быть может точки x_i и в этой точке он равен

$$H_i(x_i) = \frac{Q(x)}{x - x_i}\Big|_{x_i} = \frac{Q(x) - Q(x_i)}{x - x_i} = Q'(x_i) \tag{5}$$

Замечание 3. Обратим внимание, что мы в формуле (6) определили 'производную' в кольце целых чисел.

Теперь ясно, что в (4)

$$h_m(x) = \frac{H_m(x)}{H'_m(x_m)} = \frac{\prod_{i\neq m}(x-x_i)}{\prod_{i\neq m}(x_m-x_i)} = \begin{cases} 1 \text{ если } x = x_m \\ 0 \text{ если } x = x_j \text{ при любом } j \neq m \end{cases} \quad , \tag{6}$$

пр

Это искомый базисмый многочлен. Его легко перевести в числа.

Например кубический многочлен, который равен y_i в точке x_i ($i = 1, 2, 3$ и $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$) равен

$$P(x) = \sum y_m \frac{\prod_{i \not m}(x-x_i)}{\prod_{i \not m}(x_m-x_i)} = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} +$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} + y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_3)(x_3-x_4)} + y_4 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} \tag{7}$$

Перепишем эту формулу для чисел получим

$$P = \sum a_m \prod_{i\neq m} p_i \left[\prod_{i\neq m} p_i\right]^{-1}_{mpdulop_m} \tag{8}$$

Например, $p_i = 2, 3, 5, 7$

$$= a_1 3\cdot 5\cdot 7\,[3\cdot 5\cdot 7]^{-1}_{modulo2} + a_2 2\cdot 5\cdot 7\,[2\cdot 5\cdot 7]^{-1}_{modulo3} + a_3 2\cdot 3\cdot 7\,[2\cdot 3\cdot 7]^{-1}_{modulo5} + a_4 2\cdot 3\cdot 5\,[2\cdot 3\cdot 5]^{-1}_{modulo}$$

$$a_1 \cdot 105\,[105]\,-1_{modulo2} + a_2 70\,[70]^{-1}_{modulo3} + a_3 42\,[42]^{-1}_{modulo5} + a_4 30\,[30]^{-1}_{modulo7} =$$

$$a_1 \cdot 105 \cdot 1 + a_2 \cdot 70 \cdot 1 + a_3 \cdot 42 \cdot 3 + a_4 \cdot 30 \cdot 4 =$$

$$105a_1 + 70a_2 + 126a_3 + 120a_4$$

Это число при делении на 2 даст остаток $_1$ при делении на 3 даст остаток $_2$ при делении на 5 даст остаток $_3$ и при делении на 7 даст остаток $_4$. ■