Лекции по суперматематике
ИППИ, ИТМФ МГУ, мехмат МГУ
Москва, 22 апреля 2022
Шестая лекция 2022

Comments

8 апреля была пятая лекция

15 апреля была "вольная лекция" — мы повторяли теорию интегрирования

Сегодня мы будем рассматривать тождество

$$\mathrm{Ber}\left(1+\mathrm{z}\mathrm{A}\right)=\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\mathrm{z}^{\mathrm{k}}\underbrace{\mathrm{sTr}\left(\mathrm{A}\wedge\cdots\wedge\mathrm{A}\right)}_{\text{k раз}}=1+\mathrm{z}\,\mathrm{sTr}\,\mathrm{A}+\mathrm{z}^2\mathrm{str}\left(\mathrm{A}\wedge\mathrm{A}\right)+\ldots \tag{1}$$

В частности мы приходим к известному тождеству

$$\mathrm{Ber}\begin{pmatrix}1+\mathrm{zA} & \beta\\ \gamma & 1+\mathrm{zD}\end{pmatrix}=1+\mathrm{z}\left(\mathrm{trA}-\mathrm{trD}\right)+\ldots$$

Обратим внимание на универсальность тождества(1)

Более простой случай

Покажем, что

$$\mathsf{det}(1+zA)=\sum_{k=1}^{\infty} z^k \underbrace{\mathrm{Tr}\,(A\wedge\dots\wedge A)}_{\text{k раз}} = 1+z\mathrm{Tr}\,A+z^2\mathrm{Tr}\,(A\wedge A)+\dots \tag{2}$$

Заметим, что на множестве диагоналируемых матриц

$$\mathsf{det}(1+zA)=\prod_{i=1}^{n}(1+z\lambda_i)=\sum_{n=1}^{\infty} z^k\left(\sum_{i_1<\dots<i_k}\lambda_{i_1}\dots\lambda_{i_k}\right) \tag{3}$$

Сравнивая левые части уравнений (2) и (3) мы видим, что для доказательства (2) нам нужно показать, что

$$\underbrace{\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A} \wedge \cdots \wedge \mathrm{A})}_{\text{k раз}} = \left(\sum_{\mathrm{i}_1 < \cdots < \mathrm{i}_\mathrm{k}} \lambda_{\mathrm{i}_1} \ldots \lambda_{\mathrm{i}_\mathrm{k}} \right) \tag{4}$$

где A диагонализируемый линейный оператор в конечномерном линейном пространстве V. Проверим равенство (4).

Для определённости положим, что V — это n-мерное векторное пространство. Так как оператор диагонализуем в пространстве V положим, что $\{e_i\}$ базис, такой ,что $A(e_i) = \lambda_i e_i$, $(i = 1, \ldots n)$. Нетрудно заметить, что система векторов $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}\}$ такая, что $i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ это произвольный упорядоченный набор индексов является базисом векторного d-мерного пространства $\underbrace{\mathrm{Tr}\,(V \wedge \cdots \wedge V)}_{\text{k раз}}$

$(d = C_n^k)$. С учётом того, что

$$A\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}\} = \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_r} \{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}\} =$$

мы приходим к (4)

Тем самым мы доказали (2) для множества диагонализируемых матриц.
Но это множество всюду плотно.
Значит мы доказали для любой матрицы.
Похожим образом докажем (1).
Проверим вначале формулу (1) на диагонализируемых матрицах

$$= \mathrm{diag}\left(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_p}_{\text{бозонные}};\ \underbrace{\mu_1, \ldots, \mu_q}_{\text{фермионные}}\right)$$

На таких матрицах

$$\mathrm{Ber}\,(1 + zA) = \prod_{i,\alpha} \frac{(1 + z\lambda_i)}{(1 + z\mu_\alpha)} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^k \left(\sum_{i_1 < \cdots < i_k} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_k} \right) \prod_{\alpha=1}^{q} \frac{1}{1 + z\mu_\alpha} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^k \left(\sum_{i_1 < \cdots < i_k} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_k} \right) \times \prod_{\alpha=1}^{q} \sum_{r=0}^{\infty} z^r \left(\mu_\alpha^r (-1)^r \right) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^k \left(\sum_{i_1 < \cdots < i_k} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_k} \right) \times \sum_{n=1}^{\infty} z^r \left(\sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_k} \mu_{\alpha_1} \ldots \mu_{\alpha_k} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{k}\left(\sum_{i_1<\cdots<i_k} \lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_k}\right)\sum_{n=1}^{\infty} z^{r}\left(\sum_{\alpha_1\leq\cdots\leq\alpha_k} \mu_{\alpha_1}\ldots\mu_{\alpha_k}\right)=$$

$$\sum_{N=1}^{\infty} z^{N}\left(\sum_{i_1<\cdots<i_k<N} \lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_k}\right)\left(\sum_{\alpha_1\leq\cdots\leq\alpha_{N-k}} (-1)^{\alpha_1+\cdots+\alpha_{N-k}}\mu_{\alpha_1}\ldots\mu_{\alpha_{N-k}}\right)$$

По аналогии со случаем (2), где доказательство стандартного алгебраяического факта (2) сводилось к проверке (4) следа, сейчас проверка формулы (1) сведётся к проверке формулы

$$\underbrace{\mathrm{sTr}\,(\mathrm{A}\wedge\cdots\wedge\mathrm{A})}_{\mathrm{N}\ \text{раз}} = \left(\sum_{\mathrm{i}_1<\cdots<\mathrm{i}_\mathrm{k}<\mathrm{N}} \lambda_{\mathrm{i}_1}\ldots\lambda_{\mathrm{i}_\mathrm{k}}\right)\left(\sum_{\alpha_1\leq\cdots\leq\alpha_{\mathrm{N}-\mathrm{k}}} \mu_{\alpha_1}\ldots\mu_{\alpha_{\mathrm{N}-\mathrm{k}}}\right) \tag{5}$$

Пусть A оператор в $p|q$-мерном суперпространстве V, диагонализируемый в базисе $\{e_1, \ldots e_p; f_1, \ldots f_q\}$, где $\{e_i\}$ — чётные вектора и $\{f_\alpha\}$ — нечётные вектора суперпространатва V:

$$A(e_1) = \lambda_1 e_1, \ldots, A(e_p) = \lambda_p e_p, A(f_1) = \mu_1 f_1, A(e_1) = \mu_1 f_q,$$

Теперь зададим действие оператора A (правильнее сказать оператора $\underbrace{sTr\,(A \wedge \cdots \wedge A)}_{N\ \text{раз}}$ на пространстве $\underbrace{(V \wedge \cdots \wedge V)}_{N\ \text{раз}}$.

Согласно формуле (5) базисом в пространстве $\underbrace{sTr\,(A \wedge \cdots \wedge A)}_{N\ \text{раз}}$ является система векторов

Рассмотрим примеры

Example

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \wedge f_{\alpha_1} \cdots \wedge f_{\alpha_{N-k}}\} \tag{6}$$

Базисом в самом суперпространстве V будут p чётных векторов e_i и q нечётных векторов f_β. Формула (5) сведётся к

$$\underbrace{\mathrm{sTr}\, A} = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_p) - (\mu_1 + \cdots + \mu_q)\,.$$

Example

$$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \wedge f_{\alpha_1} \cdots \wedge f_{\alpha_{N-k}}\} \tag{7}$$

Базисом в суперпространстве $V \wedge V$ будут $\frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q+1)}{2}$ чётных векторов $e_i \wedge e_j (i < j)$, $f_\alpha \wedge f_\beta$ $(\alpha \leq \beta)$ и и pq нечётных векторов $e_\alpha \wedge f_\beta$. Формула (5) сведётся к

$$\underbrace{\mathrm{sTr}\,(A \wedge A)}_{2 \text{ раза}} = (\lambda_1\lambda_2 + \cdots + \lambda_{p-1}\lambda_p) + \underbrace{\mu_1^2 + \cdots + \mu_q^2}_{\frac{q(q+1)}{2}\text{terms}} -$$

$$(\lambda_1 + \cdots + \lambda_p)(\mu_1 + \cdots + \mu_q)\,.$$

Другой пример.

Example

Базисом в суперпространстве $\mathrm{V} \wedge \mathrm{V} \wedge \mathrm{V}$ будут $\frac{\mathrm{p}(\mathrm{p}-1)(\mathrm{p}-2)}{6} + \frac{\mathrm{q}(\mathrm{q}+1)}{2} \times \mathrm{p}$ чётных векторов $\mathrm{e_i} \wedge \mathrm{f}_\alpha \wedge \mathrm{f}_\beta$ $(\alpha \leq \beta)$ и $\frac{\frac{\mathrm{p}(\mathrm{p}-1)}{2} \times \mathrm{q} + \mathrm{q}(\mathrm{q}+1)(\mathrm{q}+2)}{6}$ нечётных векторов $\mathrm{e_i} \wedge \mathrm{e_j} \wedge \mathrm{f}_\alpha$ $(\mathrm{i} < \mathrm{j})$, $\mathrm{f}_\alpha \wedge \mathrm{f}_\beta \wedge \mathrm{f}_\gamma$ $(\alpha \leq \beta \leq \gamma)$. Формула (5) преобретает вид

$$\underbrace{\mathrm{sTr}\,(\mathrm{A} \wedge \mathrm{A} \wedge \mathrm{A})}_{3\text{ раза}} = (\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \cdots + \lambda_{\mathrm{p}-2}\lambda_{\mathrm{p}-1}\lambda_{\mathrm{p}}) +$$

$$(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{\mathrm{p}}) \underbrace{(\mu_1^2 + \cdots + \mu_{\mathrm{q}}^2)}_{\frac{\mathrm{q}(\mathrm{q}+1)}{2}\text{terms}} -$$

$$(\lambda_1\lambda_2 + \cdots + \lambda_{\mathrm{p}-1}\lambda_{\mathrm{p}})(\mu_1 + \cdots + \mu_{\mathrm{q}}) - \underbrace{(\mu_1^3 + \cdots + \mu_{\mathrm{q}}^3)}_{\frac{\mathrm{q}(\mathrm{q}+1)(\mathrm{q}+2)}{6}\text{terms}}.$$

Useful exercise

Рассмотрим специальный случай, когда A в (1) это единичный оператор.

$$\mathrm{Ber}\,(1+zA) = (1+z)^{p-q} = 1+(p-q)z+\frac{(p-q-1)(p-q-2)}{2}z^2+=$$

$$\frac{(p-q-1)(p-q-2)(p-q-2)}{6}z^3+\cdots=$$

$$1+(\lambda_1+\cdots+\lambda_p-\mu_1-\cdots-\mu_q)z+$$

$$(\lambda_1\lambda_2+\cdots+\lambda_{p-1}\lambda_p)z^2+(\mu_1\mu_2+\cdots+\mu_{q-1}\mu_q)z^2$$

$$-(\lambda_1+\cdots+\lambda_p)(\mu_1+\cdots+\mu_q)z^2+$$

$$(\lambda_1\lambda_2\lambda_3+\cdots+\lambda_{\mathrm{p}-2}\lambda_{\mathrm{p}-1}\lambda_{\mathrm{p}})\mathrm{z}^3+$$

$$\mathrm{z}^3(\lambda_1+\cdots+\lambda_{\mathrm{p}})\underbrace{\left(\mu_1^2+\cdots+\mu_{\mathrm{q}}^2\right)}_{\frac{\mathrm{q}(\mathrm{q}+1)}{2}\,\mathrm{terms}}-$$

$$\mathrm{z}^3\left(\lambda_1\lambda_2+\cdots+\lambda_{\mathrm{p}-1}\lambda_{\mathrm{p}}\right)\left(\mu_1+\cdots+\mu_{\mathrm{q}}\right)-\mathrm{z}^3\underbrace{\left(\mu_1^3+\cdots+\mu_{\mathrm{q}}^3\right)}_{\frac{\mathrm{q}(\mathrm{q}+1)(\mathrm{q}+2)}{6}\,\mathrm{terms}}.$$

В случае если оператор единичный, то есть все $\lambda_i = \mu_\alpha = 1$ имеем согласно предыдущим вычислениям

$$\mathrm{Ber}\,(1+zE) = 1 + z(p-q) + z^2\left(\frac{p(p-1)}{2} + \frac{q(q+1)}{2} - pq\right) +$$

$$\left[\frac{p(p-1)(p-2)}{6} + p\frac{q(q+1)}{2} - q\frac{p(p-1)}{2} - \frac{q(q+1)(q+2)}{6}\right] z^3$$

и это равняется $(1+z)^{p-q}$;

Универсальные полиномы Ньютона

Заметим, что по формуле Лиувилля :

$$\mathrm{Ber}\,(1+\mathrm{z}\mathrm{A}) = \mathsf{exp}\,\mathrm{Tr}\,\mathsf{log}(1+\mathrm{z}\mathrm{A}) =$$

$$\mathsf{exp}\,\mathrm{Tr}\,\left(\left[\mathrm{zA} - \frac{\mathrm{z}^2}{2}\mathrm{A}^2 + \frac{\mathrm{z}^3}{3}\mathrm{A}^3 + \dots\right]\right) = \mathsf{exp}\left[\mathrm{z}\mathrm{s}_1 - \frac{\mathrm{z}^2}{2}\mathrm{s}_2 + \frac{\mathrm{z}^3}{3}\mathrm{s}_3 + \dots\right] =$$

$$1 + \left[\mathrm{z}\mathrm{s}_1 - \frac{\mathrm{z}^2}{2}\mathrm{s}_2 + \frac{\mathrm{z}^3}{3}\mathrm{s}_3 + \dots\right] + \frac{1}{2}\left[\mathrm{z}\mathrm{s}_1 - \frac{\mathrm{z}^2}{2}\mathrm{s}_2 + \frac{\mathrm{z}^3}{3}\mathrm{s}_3 + \dots\right]^2 +$$

$$\frac{1}{6}\left[\mathrm{zA} - \frac{\mathrm{z}^2}{2}\mathrm{A}^2 + \frac{\mathrm{z}^3}{3}\mathrm{A}^3 + \dots\right]^3 + \dots =$$

$$1 + \mathrm{z}\mathrm{s}_1 - \frac{\mathrm{z}^2}{2}\mathrm{s}_2$$