Aufgabe 1

Ein Polynom vom Grad k lässt sich wie folgt schreiben:

$$f(n) = a_0 n^0 + a_1 n^1 + \cdots + a_k n^k$$

(a) Zu zeigen ist $f(n) = \Theta(n^k)$, also

$$\exists c_1 > 0 : f(n) \leq_{\text{fü}} c_1 \cdot n^k \quad \text{und} \quad \exists c_2 > 0 : c_2 \cdot n^k \leq_{\text{fü}} f(n)$$

Aus $f \in$ FÜP folgt $a_k > 0$. Wir können die erste Aussage umformen zu

$$\begin{aligned} & f(n) \leq_{\text{fü}} c_1 \cdot n^k \\ \Leftrightarrow \quad & a_0 n^0 + a_1 n^1 + \cdots + a_k n^k \leq_{\text{fü}} c_1 \cdot n^k \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{a_0}{n^k} + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{n} \leq_{\text{fü}} c_1 - a_k \\ \Leftrightarrow \quad & \exists n_0 > 0 : \forall n > n_0 : \frac{a_0}{n^k} + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{n} \leq c_1 - a_k. \end{aligned}$$

Wähle $c_1 = a_k + k > 0$ und $n_0 \geq \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{k-1}|\}$ sodass für $n > n_0$ gilt

$$\frac{a_0}{n^k} + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{n} \leq 1 + 1 + \ldots + 1 = k = a_k + k - a_k$$

Nun zur zweiten Aussage:

$$\begin{aligned} & c_2 \cdot n^k \leq_{\text{fü}} f(n) \\ \Leftrightarrow \quad & c_2 \cdot n^k \leq_{\text{fü}} a_0 n^0 + a_1 n^1 + \cdots + a_k n^k \\ \Leftrightarrow \quad & c_2 - a_k \leq_{\text{fü}} \frac{a_0}{n^k} + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{n} \\ \Leftrightarrow \quad & \exists n_0 > 0 : \forall n > n_0 : c_2 - a_k \leq \frac{a_0}{n^k} + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{n} \end{aligned}$$

Wähle $c_2 = \frac{a_k}{2} > 0$ und $n_0 \geq \frac{2k}{a_k} \cdot \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{k-1}|, |a_k|\}$, womit für $n > n_0$

$$\begin{aligned} c_2 - a_k &= -\frac{a_k}{2} \\ &\leq -\frac{\frac{2k}{n_0} \cdot \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{k-1}|, |a_k|\}}{2} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{-\max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{k-1}|, |a_k|\}}{n_0} \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{-\max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{k-1}|, |a_k|\}}{n^{k-i}} \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_i}{n^{k-i}} \\ &= \frac{a_0}{n^k} + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{n} \end{aligned}$$

(b) Zu zeigen: Für $\ell > k$ gilt $f(n) \in o(n^\ell)$, also $\forall c > 0 : f(n) \leq_{\text{fü}} c \cdot n^\ell$.

$$\begin{aligned} f(n) &\leq_{\text{fü}} c \cdot n^\ell \\ \Leftrightarrow a_0 + a_1 n + ... + a_k n^k &\leq_{\text{fü}} c \cdot n^\ell \end{aligned}$$

Wir schätzen nun jeden Summanden einzeln so ab, dass die ursprüngliche Ungleichung gilt.

$$\forall i \in [k] : a_i n_i^i \leq \frac{c}{k+1} n_i^\ell \iff (k+1)\frac{a_i}{c} \leq n_i^{\ell - i}$$
$$\implies \text{wähle } n_i = \left((k+1)\frac{a_i}{c}\right)^{\frac{1}{\ell - i}}$$

Da $\ell - i > 0$ für alle i, ist $n^{\ell - i}$ immer monoton steigend.

Wähle $n_0 \geq \max\{n_i\}$. Dann gilt

$$\frac{a_0}{n^\ell} + \frac{a_1}{n^{\ell-1}} + \cdots + \frac{a_k}{n^{\ell-k}} \leq (k+1)\frac{c}{k+1} = c \leq c$$

(c) Zu zeigen: Für $\ell < k$ gilt $f(n) \in \omega(n^\ell)$, also $\forall c > 0 : f(n) \geq_{\text{fü}} c \cdot n^\ell$.

$$\begin{aligned} f(n) &\leq_{\text{fü}} c \cdot n^\ell \\ \Leftrightarrow a_0 + a_1 n + ... + a_k n^k &\geq_{\text{fü}} c \cdot n^\ell \\ \Leftrightarrow -a_0 - a_1 n - ... - a_{k-1} n^{k-1} + c \cdot n^\ell &\leq_{\text{fü}} a_k n^k \end{aligned}$$

Mit der selben Vorgehensweise wie in (b) lässt sich zeigen, dass diese Ungleichung für beliebige positive a_k und c gilt.

Aufgabe 2

(a) Nach der Prämisse gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c \\ \Rightarrow \quad & \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon, c - \varepsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < c + \varepsilon \\ \Rightarrow \quad & \forall \varepsilon > 0 : (c - \varepsilon) g(n) <_{\text{fü}} f(n) <_{\text{fü}} (c + \varepsilon) g(n) \end{aligned}$$

Wähle $\varepsilon < c$ und definiere $c_1 = c + \varepsilon$, $c_2 = c - \varepsilon$. Dann folgt

$$c_2 \cdot g(n) \leq_{\text{fü}} f(n) \leq_{\text{fü}} c_1 \cdot g(n)$$

und somit $f(n) \in \Theta(g(n))$.

(b) Nach der Prämisse gilt

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \\
\Rightarrow\quad & \forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon, \frac{f(n)}{g(n)} < \varepsilon \leq \varepsilon \\
\Rightarrow\quad & \forall \varepsilon > 0 : f(n) \leq_{\text{fü}} \varepsilon g(n) \\
\Rightarrow\quad & f(n) \in o(g(n))
\end{aligned}$$

(c) Nach der Prämisse gilt

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \\
\Rightarrow\quad & \forall X > 0, \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon, \frac{f(n)}{g(n)} > X \geq X \\
\Rightarrow\quad & \forall X > 0 : f(n) \geq_{\text{fü}} X g(n) \\
\Rightarrow\quad & f(n) \in \omega(g(n))
\end{aligned}$$

Für die Äquivalenzen gilt folgendes:

(a) Man betrachte $f(n) = n, g(n) = (2 + (-1)^n)n$. Also $g(n)$ entspricht $3n$ für gerade und n für ungerade Eingaben. $f(n) \in \Theta(g(n))$ aber der Grenzwert existiert nicht (es gibt zwei Häufungspunkte).

(b) Es handelt sich um eine Äquivalenz.

$$\begin{aligned}
& f(n) \in o(g(n)) \\
\Rightarrow\quad & \forall c > 0 : f(n) \leq_{\text{fü}} c \cdot g(n) \\
\Rightarrow\quad & \forall c > 0, \exists n_0, \forall n > n_0, f(n) \leq c \cdot g(n) < 2c \cdot g(n) \\
\Rightarrow\quad & \forall c' > 0, \exists n_0, \forall n > n_0, f(n) < c' \cdot g(n) \qquad \text{(wähle } n_0 \text{ von } c = c'/2\text{)} \\
\Rightarrow\quad & \forall c' > 0, \exists n_0, \forall n > n_0, \frac{f(n)}{g(n)} < c' \\
\Rightarrow\quad & \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0
\end{aligned}$$

(c) Es handelt sich um eine Äquivalenz.

$$\begin{aligned}
& f(n) \in \omega(g(n)) \\
\Rightarrow\quad & \forall c > 0 : f(n) \geq_{\text{fü}} c \cdot g(n) \\
\Rightarrow\quad & \forall c > 0, \exists n_0, \forall n > n_0, f(n) \geq c \cdot g(n) > \frac{c}{2} \cdot g(n) \\
\Rightarrow\quad & \forall c' > 0, \exists n_0, \forall n > n_0, f(n) > c' \cdot g(n) \qquad \text{(wähle } n_0 \text{ von } c = 2c'\text{)} \\
\Rightarrow\quad & \forall c' > 0, \exists n_0, \forall n > n_0, \frac{f(n)}{g(n)} > c' \\
\Rightarrow\quad & \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Im Folgenden verwenden wir die Aussage der Aufgabe 2b.

Die Transitivität des Vergleiches ist trivial zu zeigen und wird vorausgesetzt. Es ergibt sich folgende Reihenfolge in Hinblick auf das asymptotische Wachstum:

$n^{1-\varepsilon} \quad n/\log\log n \quad n/1000 \quad n\log n \quad n \cdot 2^{\sqrt{\log n}} \quad n^{4/3} \quad n^{4/3}\log n \quad (4/3)^n \quad 5^n$

Es folgen die Beweise.

- $n^{1-\varepsilon} \in o(n/\log\log n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1-\varepsilon}}{n/\log\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\log n}{n^{\varepsilon}}$$

Wir wenden die Regel von L'Hospital an:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\log n}}{\varepsilon \cdot n^{\varepsilon-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varepsilon \cdot \log(n) \cdot n^{\varepsilon}} = 0$$

- $n/\log\log n \in o(n/1000)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n/\log\log n}{\frac{n}{1000}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1000}{\log\log n} = 0$$

- $\frac{n}{1000} \in o(n\log n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{1000}}{n\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1000 \cdot \log n} = 0$$

- $n\log n \in o(n \cdot 2^{\sqrt{\log n}})$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\log(n)}{n \cdot 2^{\sqrt{\log(n)}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{2^{\sqrt{\log(n)}}}$$

Da log und die Wurzelfunktion monoton wachsend sind kann man $\sqrt{\log n}$ als t substituieren und den folgeden Grenzwert betrachten:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{2^t}$$

Wir wenden die Regel von L'Hospital an:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{2^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{2t}{2^t\log(2)} = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{2^t\log^2(2)} = 0$$

- $n \cdot 2^{\sqrt{\log(n)}} \in o(n^{4/3})$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 2^{\sqrt{\log(n)}}}{n^{4/3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{\frac{1}{3}\log(n)-\sqrt{\log(n)}}} = 0,$$

denn es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\log(n) - \sqrt{\log(n)} = \infty$$

Da log und die Wurzelfunktion monoton wachsend sind kann man $\sqrt{\log n}$ als t substituieren und den folgeden Grenzwert betrachten:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{3}t^2 - t = \lim_{t\to\infty} t\left(\frac{1}{3}t - 1\right) = \infty$$

da, beide Faktoren ab $t > 3$ positiv sind und linear steigen.

- $n^{4/3} \in o(n^{4/3}\log n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{4/3}}{n^{4/3}\log(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n)} = 0$$

- $n^{4/3}\log n \in o\big((\frac{4}{3})^n\big)$
Es gilt $n^{4/3}\log n \in o(n^2)$, da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{4/3}\log n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^{2/3}}$$

Nach L'Hospital gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^{2/3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-1}}{n^{-1/3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2/3}} = 0$$

Es genügt also zu zeigen, dass $n^2 \in o\big((\frac{4}{3})^n\big)$. Nach L'Hospital gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(\frac{4}{3})^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{(\frac{4}{3})^n \log(\frac{4}{3})} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(\frac{4}{3})^n \log^2(\frac{4}{3})} = 0$$

- $(\frac{4}{3})^n \in o(5^n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{4}{3})^n}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{4}{3})^n}{(\frac{4}{3})^n(\frac{15}{4})^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\frac{15}{4})^n} = 0$$

Aufgabe 4

(a) Man muss nun zwei fast überall positive Funktionen f und g finden, für die weder $f \in \mathcal{O}(g)$ noch $g \in \mathcal{O}(f)$ gelten darf. Also darf weder $f \leq_{\text{fü}} c \cdot g$ noch $g \leq_{\text{fü}} c \cdot f$ gelten. Ein Beispiel für zwei solche Funktionen ist:

$$f(x) = x$$

$$g(x) = x^{1+(-1)^x}$$

(Also $g(x) = x^2$, wenn x gerade, $g(x) = 1$, wenn x ungerade ist.)

Beweis durch Widerspruch. Angenommen $\exists c : f \leq c \cdot g, \forall x \geq x_0$.

$$\Rightarrow f(x) \leq c \cdot g(x) \Leftrightarrow x \leq c \cdot x^{1+(-1)^x}$$

Wenn $x > x_0$ ungerade ist, folgt:

$$\Rightarrow x \leq c \cdot x^{1-1} = c$$

Dies ist ein Widerspruch, da es ein $x > c$ gibt und somit nicht für alle gilt. Der Beweis, dass $g \leq_{\text{fü}} c \cdot f$ für die gegebenen Funktionen nicht gilt, folgt analog.

(b) Die beiden Funktionen aus (a) kann man hier nicht verwenden, da g offensichtlich nicht monoton steigend ist. Man wählt nun folgende Funktionen:

$$f(x) = (2x)^{x^2}$$

$$g(x) = (2x + (-1)^x)^{x^2}$$

z.z.: $g(x)$ und $f(x)$ sind monoton steigend und $f \notin O(g)$ und $g \notin O(f)$
f ist offensichtlich streng monoton steigend. Für g gilt z.z. dass $\frac{g(x+1)}{g(x)} > 1$

$$\frac{g(x+1)}{g(x)} = \frac{(2(x+1) + (-1)^{x+1})^{(x+1)^2}}{(2x + (-1)^x)^{x^2}}$$

Fallunterscheidung:

- x gerade:

$$\frac{(2(x+1) + (-1)^{x+1})^{(x+1)^2}}{(2x + (-1)^x)^{x^2}} = \frac{(2x + 2 - 1)^{(x+1)^2}}{(2x+1)^{x^2}} = \frac{(2x+1)^{(x+1)^2}}{(2x+1)^{x^2}} > 1$$

- x ungerade:

$$\frac{(2(x+1) + (-1)^{x+1})^{(x+1)^2}}{(2x + (-1)^x)^{x^2}} = \frac{(2x+3)^{(x+1)^2}}{(2x-1)^{x^2}} \geq \frac{(2x)^{(x+1)^2}}{(2x)^{x^2}} > 1$$

Es bleibt zu zeigen, dass $f \notin \mathcal{O}(g)$ und $g \notin \mathcal{O}(f)$.
Auch bei diesem Beispiel ist der ausschlaggebende Punkt, dass g um f oszillieren, da die Basis von g entweder um 1 kleiner oder größer als die Basis von f ist.
Beweis durch Widerspruch:
Angenommen $\exists c : f \leq c \cdot g, \forall x \geq x_0$.

$$f(x) \leq c \cdot g(x) \Leftrightarrow (2x)^{x^2} \leq c \cdot (2x + (-1)^x)^{x^2}$$

Man setzt also für x eine beliebige ungerade Zahl ein.

$$\Rightarrow (2x)^{x^2} \leq c \cdot (2x-1)^{x^2}$$

$$\Rightarrow c \geq \left(\frac{2x}{2x-1}\right)^{x^2} = \left(1 + \frac{1}{2x-1}\right)^{x^2} \overset{\text{(Bernoulli)}}{\geq} 1 + \frac{x^2}{2x-1} \geq 1 + \frac{x}{2}$$

Dies ist ein Widerspruch, da z.B. $x = 2c$ eine legitime Wahl ist.
Der andere Fall folgt analog.

Bemerkung: Unsere Definition der $\mathcal{O}$-Notation betrachtet nur Funktionen von $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, jedoch existieren Definitionen (z.B. die auf Wikipedia) über jegliche Funktionen von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Aussage gilt auch in diesem Fall. Man betrachte folgende Funktionen:

$$f(x) = x^{\sin(x)+x+1} \quad g(x) = x^{\cos(x)+x+1}$$

Beide Funktionen sind streng monoton steigend. (Es ist leicht zu sehen, dass die Exponenten stets positiv und streng monoton steigend sind.)

- Angenommen $f \in \mathcal{O}(g)$:
  Das heißt es existieren ein c und ein x_0, so dass $f(x) \leq c \cdot g(x)$ für alle $x > x_0$.
  Wir wählen $x = 2m\pi + \frac{\pi}{2}$ für ein m groß genug, sodass $x > x_0$ und $x > c$ gilt.

  $$\begin{aligned} f(x) \leq c \cdot g(x) &\iff x^{\sin(x)+x+1} \leq c \cdot x^{\cos(x)+x+1} \\ &\iff \frac{x^{x+2}}{x^{x+1}} = x \leq c \end{aligned}$$

  Ein Widerspruch, da $x > c$.
  Anders ausgedrückt: Für die Teilfolge $x_i = 2\pi i + \frac{\pi}{2}$ entspricht

  $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^{x+2}}{x^{x+1}} = x$$

  Der Wert divergiert. Dementsprechend gilt:

  $$\limsup_{x \to \infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \infty \implies f \notin \mathcal{O}(g)$$

- Angenommen $g \in \mathcal{O}(f)$:
  Das heißt es existieren ein c und ein x_0, so dass $g(x) \leq c \cdot f(x)$ für alle $x > x_0$. Wir wählen $x = 2m\pi$ für ein m groß genug, sodass $x > x_0$ und $x > c$.

$$\begin{aligned} g(x) \leq c \cdot f(x) &\iff x^{\cos(x)+x+1} \leq c \cdot x^{\sin(x)+x+1} \\ &\iff \frac{x^{x+2}}{x^{x+1}} = x \leq c \end{aligned}$$

  Ein Widerspruch.
  Anders ausgedrückt: Für die Teilfolge $x_i = 2\pi i$ entspricht

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^{x+2}}{x^{x+1}} = x$$

  Der Wert divergiert. Dementsprechend gilt:

$$\limsup_{x\to\infty} \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| = \infty \implies g \notin \mathcal{O}(f)$$

Aufgabe 5

Es gilt $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ sodass wir Multiplikation durch

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$$

mit 3 Quadrierungen, 2 Subtraktionen, 1 Addition und 1 Division durch 2 berechnen können. Seien nun $a, b \in \mathbb{N}$ jeweils m-stellig, dann gilt

Zwischenergebnis	$a+b$	$(a+b)^2$	a^2	b^2	$(a+b)^2 - a^2$	$(a+b)^2 - a^2 - b^2$
Stelligkeit $\leq$	$m+1$	$2m+2$	$2m$	$2m$	$2m+2$	$2m+2$

Damit wissen wir also

$$\begin{aligned} M(m) &= Q(m+1) + 2Q(m) + A(m) + 2S(2m+2) + D(2m+2) \\ &= Q(m+1) + 2Q(m) + \Theta(m) \end{aligned}$$

wobei $\Theta(m)$ hier für eine beliebige Funktion aus $\Theta(m)$ steht. Es gibt mehrere Fälle in denen $M(m) \notin \mathcal{O}(Q(m))$

- Für $Q(m) \in o(m)$ ist $M(m) \in \Theta(m)$, aber $\Theta(m) \cap o(m) = \emptyset$.
- Für $Q(m) = m^m$, gilt $M(m) \geq (m+1)^{m+1}$. Wir zeigen $(m+1)^{m+1} \notin \mathcal{O}(m^m)$. Für jedes $c > 0$ gilt $(m+1)^{m+1} = (m+1)(m+1)^m \geq mm^m$ und für jedes $m > c$ gilt $mm^m > cm^m$.

Andererseits gilt zum Beispiel für $Q(m) = m^2$, dass

$$M(m) = (m+1)^2 + 2m^2 + \Theta(m) = 3m^2 + 2m + 1 + \Theta(m) \in \mathcal{O}(m^2)$$

Die Aussage gilt also für $Q(m) = m^2$. Eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der Aussage wäre zum Beispiel, dass Q ein Polynom mit Grad ≥ 1 ist.

Verwendet man zur Berechnung stattdessen

$$ab = \frac{a^2 + b^2 - (a-b)^2}{2}$$

so ändert sich die Laufzeit. Da $a - b$ nur m Stellen besitzt, haben alle Quadrierungen Laufzeit $Q(m)$ und die Gesamtlaufzeit liegt bei $M(m) = 3Q(m) + \Theta(m)$.

Das erste Gegenbeispiel bleibt gültig, aber $M(m)$ bleibt in $\mathcal{O}(Q(m))$ auch für $Q(m) = m^m$.

Aufgabe 6

Der Algorithmus gilt für jegliche Basen, weil alle ausgeführten Operationen in jeder festen Basis realisierbar sind.

Auf 64-Bit-Prozessoren bietet es sich an, $B = 2^{64}$ zu wählen. Im Basisfall $n = 1$ können wir dann eine einfache 64-Bit-Multiplikations-Instruktion wählen. Damit verringern wir im Vergleich zu $B = 2$ die Tiefe des Rekursionsbaumes um 6. Wir sparen uns damit etwa $2\log_2(x)$ Rekursionsschritte (wenn x die Eingabezahl ist). Das ändert leider nichts an der Zeitkomplexität.

Aufgabe 7

Für die Rechnung siehe Aufgabe 8 mit $b = 3$. Die asymptotische Laufzeit ist demnach in $\mathcal{O}(n^{\log_3(5)}) \subseteq \mathcal{O}(n^{1.47})$ und damit besser als das bekannte $\mathcal{O}(n^{1.59})$.

Aufgabe 8

Es existieren α und β sodass

$$Q_b(n) = \left\{\begin{matrix} \mathcal{O}(1) & n = 1 \\ (2b-1)Q_b\left(\frac{n}{b}\right) + \mathcal{O}(n) & n \geq 2 \end{matrix}\right\} \leq \left\{\begin{matrix} \alpha & n = 1 \\ (2b-1)Q_b\left(\frac{n}{b}\right) + \beta n & n \geq 2 \end{matrix}\right\}$$

Mit ein paar Abschätzungen und den Partialsummen der geometrische Reihe folgt

$$
\begin{aligned}
Q_b(n) &\leq \alpha(2b-1)^{\log_b(n)} + \sum_{i=0}^{\log_b(n)-1} (2b-1)^i \beta \frac{n}{b^i} \\
&= \alpha(2b-1)^{\log_b(n)} + \beta n \sum_{i=0}^{\log_b(n)-1} \left(\frac{2b-1}{b}\right)^i \\
&= \alpha(2b-1)^{\log_b(n)} + \beta n \frac{\left(\frac{2b-1}{b}\right)^{\log_b(n)} - 1}{\underbrace{\left(\frac{2b-1}{b}\right) - 1}_{\geq 0.5}} \\
&\leq \alpha(2b-1)^{\log_b(n)} + 2\beta n \left(\frac{2b-1}{b}\right)^{\log_b(n)} \\
&= (\alpha + 2\beta)(2b-1)^{\log_b(n)} \\
&= (\alpha + 2\beta) n^{\log_b(2b-1)} \\
&= \mathcal{O}\big(n^{\log_b(2b-1)}\big)
\end{aligned}
$$

Die asymptotische Laufzeit verbessert sich für größere b, da für jedes $b' > b$ gilt, dass $\log_{b'}(2b'-1) < \log_b(2b-1)$ und $\mathcal{O}(n^{k'}) \subseteq o(n^k)$ für $k' < k$.

Wir können b beliebig groß wählen, und damit die theoretische Zeitkomplexität immer kleiner bekommen. In der Praxis jedoch sollten wir b nicht zu groß wählen, da die $\mathcal{O}$-Notation beliebig große Konstanten verschwinden lässt und diese möglicherweise nur durch astronomische n ausgeglichen werden können.

Zusatzfrage: Wir könnten die Teilungsanzahl b dynamisch wählen, zum Beispiel $b = n$. Warum liefert das keine Laufzeit von $\mathcal{O}(n^{\log_n(2n-1)}) = \mathcal{O}(n)$? Wie ist die Laufzeit stattdessen?