

Präsenzblatt 6

Hinweis: Dieses Aufgabenblatt wurde von Tutor:innen erstellt. Die Aufgaben sind für die Klausur weder relevant noch irrelevant.

Aufgabe 6.1: Hashfunktionen

Sei $t = 2^b$ und das Universum beinhalte Elemente $v \in \{0, 1\}^k$. Die Hashfunktionen sind definiert als $h_M(v) = Mv \bmod 2$, wobei M eine $b \times k$ -Matrix mit Einträgen aus $\{0, 1\}$ ist. Das Resultat ist demnach ein b langer binärer Vektor und somit eine Zahl $\leq t$. Sei \mathcal{H} die Familie aller Funktionen h_M . Argumentieren Sie, dass \mathcal{H} eine 1-universelle Hashfamilie ist.

Aufgabe 6.2: Knapsack

- (a) Das Weihnachtsfest steht vor der Tür und morgen fahren Sie mit dem Zug nach Hause. Natürlich waren Sie schon eifrig und haben Geschenke besorgt. Doch dummerweise stellen Sie beim Packen Ihres Rucksacks fest, dass gar nicht alle hineinpassen. Kurz bevor Sie verzweifeln, setzt wieder Ihr Verstand ein und Sie überlegen sich, dass die Geschenke unterschiedliche Wichtigkeiten haben. Das für Ihre Eltern darf eigentlich auf keinen Fall fehlen, während das für Dieter Schlau, der sich für Heiligabend angekündigt hat, nicht so wichtig ist. Schließlich glaubt er immer noch, dass seine Probleme Geschenke sind und er wird Ihnen garantiert nichts anderes schenken. Sie erstellen also eine Liste, in der sie jedem Geschenk eine Wichtigkeit als Zahl zuweisen sowie das Volumen notieren. Nun haben Sie ein klassisches Optimierungsproblem vor sich: Unter Einhaltung des maximalen Volumens müssen Sie den maximalen Nutzwert bestimmen.

Entwickeln Sie einen Algorithmus, der dieses Problem durch geschicktes Berechnen und Speichern von Teilergebnissen in polynomieller Laufzeit löst.

- (b) Nachdem Sie gerade so noch das Geschenk für Dieter in Ihren Rucksack gezwängt haben – laut Ihrem Algorithmus gehörte das nun doch zur optimalen Lösung – klingelt es an der Tür. Es ist Dieter. „Vorträge! Weihnachtsüberraschung! Folgendes Problem: Ich soll die optimale Sitzplatzzuweisung für den Heiligabendgottesdienst herausfinden. Die Leute können sich in Gruppen anmelden, zwischen den Gruppen müssen aber immer drei Plätze frei bleiben. Wegen Corona, Du weißt schon. Es gibt jedenfalls zehn Bankreihen, die vorderste mit 15 Plätzen, die hinterste mit sechs. Ich habe da auch schon ein kleines Programm geschrieben, nur läuft es halt schon drei Tage. Vielleicht hast Du da ja eine bessere ...“ Und noch ehe Dieter seinen Satz beendet hat, ist er mit den Worten „Oh, muss los. Ich zähl’ auf Dich.“ verschwunden. Sie haben offenbar keine Wahl.

Stehen die beiden Probleme in Verbindung zueinander? Können Sie Ihren Algorithmus entsprechend anpassen? Oder braucht es einen anderen Lösungsansatz?¹

¹Falls Ihre AlgoDat-Tutor:in über die Weihnachtstage nicht auf Ihre Hilferufe reagiert, finden Sie unter https://developers.google.com/optimization/bin/multiple_knapsack, wie man dieses Problem in der Praxis lösen kann.