1. (20 Punkte) Es sei T eine Baum mit Wurzel w, in dem für jeden Knoten die Kinder geordnet sind, was in Darstelluingen durch die links–rechts Reihenfolge der Kinder abgebildet wird.

   Jedem Knoten v von T können diverse Werte zugeordnet werden: die Präordnungszahl $r[v]$, die Postordnungszahl $p[v]$, die "discovery-" und "finalisierungs-" Zahlen $d[v]$ und $f[v]$, sowie $a[v]$ und $n[v]$, die Anzahl der Ahnen und der Nachkommen von v in T, wobei jeder Knoten als sein eigener Ahne und Nachkomme gilt.

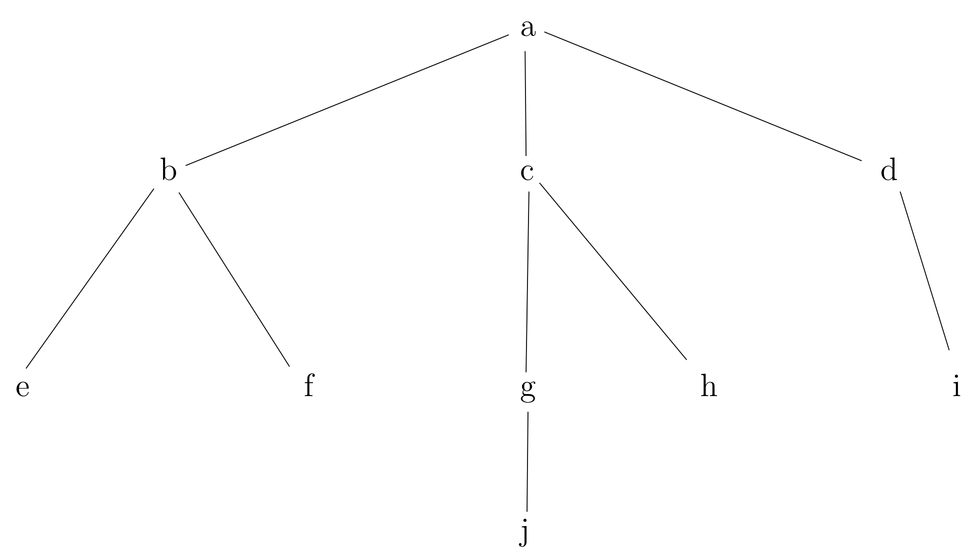
   (a) Bestimmen Sie für jeden Knoten des folgenden Baums jede dieser 6 Zahlen.

   (b) Diese 6 Zahlen sind bei jedem Knoten nicht voneinander unabhängig. Stellen Sie

   $f[]$ abhängig von $d[]$ und $n[]$ dar
   $d[]$ abhängig von $r[]$ und $a[]$
   $f[]$ abhängig von $r[]$ und $a[]$ und $n[]$

   Können Sie andere Relationen finden?

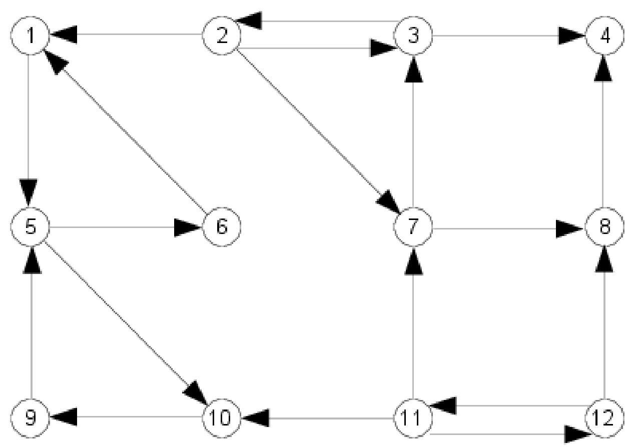
   (c) Zeigen Sie, dass in jedem Baum die durchschnittliche Anzahl der Ahnen eines Knotens gleich der durchschnittlichen Anzahl der Nachkommen ist. (Also durchschnittliche Unterbaumgröße ist gleich durchschnittliche Anzahl der Knoten auf dem Weg zur Wurzel.)
   Hint: Betrachten Sei die Funktion $A(u, v)$, die 1 ist, wenn u ein Ahne von v und 0 sonst.



2. (15 Bonus-Punkte) Bestimmen Sie für den unten aufgezeichneten Graphen die starken Zusammenhangskomponenten.

   Verwenden Sie dafür die in der Vorlesung vorgestellte Methode, also Besimmten eines lkW-Baums für den augementierten Graphen und Bestimmung der lowlink[] Werte.

   Kennzeichnen Sie die starken Zusammenhangskomponenten.



3. (10 Punkte) Es sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und $R \subset V$ sei eine vorgegebene Menge spezieller Knoten, nennen wir sie *rote* Knoten. Entwerfen Sie einen Algorithmus, der für jeden Knoten $v \in V$ einen roten Knoten $r[v] \in R$ berechnet, der von v erreichbar ist, oder feststellt, dass von v gar kein roter Knoten erreichbar ist (in dem Fall setzen Sie $r[v] = \perp$).

   Die Laufzeit des Algorithmus sollte idealerweise in $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ sein.