Aufgabe 1

Wir sortieren den gerichteten azyklischen Graphen zunächst topologisch. Danach gehen wir in topologischer Reihenfolge über alle Knoten zwischen s und t und relaxieren jeweils alle ausgehenden Kanten. Danach lesen wir den kürzesten Weg für t aus den ermittelten Eltern.

```
SP_DAG(Graph G, Node s, Node t):
  δ ← new Array(|V|, ∞)
  δ[s] ← 0
  π ← new Array(|V|, NIL)
  Node List T = topoSort(G)
  while T.front() ≠ s do
    T.pop()
  for v in T do // in topological order
    if v = t then
     break
    for e in G.out(v) do
      relax(δ, π, e)
  if δ[t] = ∞ then
    return NIL // no path exists
  // get path:
  P ← new Stack
  v ← t
  while v ≠ s do
    P.push(v)
    v ← π[v]
  P.push(s)
  return toField(P)
```

Die Korrektheit ergibt sich aus der folgenden Invariante: Ist ein Knoten an der Reihe, so sind die kürzesten Wege von s zu ihm und allen vorherigen Knoten bereits korrekt bestimmt.

Beweis durch Induktion:

Induktionsanfang: Da keine Zyklen existieren ist Für s selbst der kürzeste Pfad immer der leere Pfad mit Distanz null. Für alle topologisch kleineren Knoten ist bekannt, dass kein Pfad von s zu diesen Knoten existiert.

Induktionsschritt: Beim Relaxieren der Kante (v, u) wurde nach Invariante der kürzeste Weg zwischen s und u in Betracht gezogen, bei dem v der Vorgänger von u ist. Ist Knoten u an der Reihe, so wurden alle Wege dieser Art für alle möglichen Vorgänger v betrachtet, der kürzeste Weg also gefunden.

Die topologische Sortierung benötigt lineare Laufzeit. Wir relaxieren jede Kante höchstens einmal und betrachten jeden Knoten höchstens einmal. Das auslesen des Pfades betrach-

tet jeden Knoten höchstens einmal und P hat höchstens lineare Größe. Folglich hat der Algorithmus lineare Laufzeit in der Größe des Graphen.

Aufgabe 2

(a) Wir weisen jeder interessanten Kante das Kantengewicht $-(1+\epsilon)$ für ein positives ϵ kleiner $\frac{1}{n}$ und allen anderen Kanten das Gewicht 2 zu. Danach nutzen wir den Bellman-Ford-Algorithmus um zu ermitteln, ob ein negativer Zyklus existiert.

Die negativen Zyklen entsprechen exakt den Zyklen auf denen 2/3 der Kanten interessant sind:

$\Rightarrow$ Sind mindestens 2/3 der i Kanten eines Zyklus interessant, so liegt sein Gewicht

$$\leq 2\frac{i}{3} - \frac{2i}{3} - \frac{2i}{3}\epsilon \leq -\frac{2i}{3}\epsilon < 0$$

. Der Zyklus ist negativ.

$\Leftarrow$ Sind weniger als 2/3 der i Kanten eines Zyklus interessant, so liegt sein Gewicht

$$\begin{aligned}
&\geq 2\left(\left\lfloor\frac{i}{3}\right\rfloor + 1\right) - \left(\left\lceil\frac{2i}{3}\right\rceil - 1\right)(1+\epsilon)\\
&\geq 2\left(\frac{i}{3}\right) - \left(\frac{2i}{3} - 1\right)(1+\epsilon)\\
&\geq 1 - \left(\frac{2i}{3} - 1\right)\epsilon\\
&> 0
\end{aligned}$$

, da $(\frac{2i}{3} - 1)\epsilon \leq n\epsilon < 1$. Der Zyklus ist nicht negativ.

Die Konstruktion der Gewichtsfunktion ist in Laufzeit $\mathcal{O}(m)$ möglich. Die Laufzeit des Bellman-Ford-Algorithmus ist $\mathcal{O}(nm)$. Dies ist folglich auch die Gesamtlaufzeit.

(b) Nennt man eine Kante interessant genau dann wenn ihr Startknoten interessant ist, so entspricht die Anzahl der interessanten Kanten eines Zyklus der Anzahl der interessanten Knoten. Folglich lässt sich die Methode aus Teil (a) entsprechend anwenden.