Auswählen nach Rang (Selektion)

Geg.: Folge X von n Schlüsseln, eine Zahl k mit $1 \leq k \leq n$

Ges.: ein k-kleinster Schlüssel von X, also den Schlüssel x_k für X sortiert als $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$

trivial lösbar in Zeit $O(kn)$ (k mal Minimum Entfernen), oder auch in Zeit $O(n \cdot \log n)$ (Sortieren)

Ziel: $O(n)$ Zeit Algorithmus für beliebiges k (z.B. auch $k=n/2$, "*Median* von X")

Vereinfachende Annahme für das Folgende: alle Schlüssel in X sind verschieden, also für sortiertes X gilt $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$

Geg.: Folge X von n Schlüsseln, eine Zahl k mit $1 \leq k \leq n$

Ges.: ein k-kleinster Schlüssel von X, also den Schlüssel x_k für X sortiert als $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$

Idee: Dezimiere!

Wähle irgendein $z \in X$ und berechne $X_{<z} = \{x \in X \mid x < z\}$ und $X_{>z} = \{x \in X \mid x > z\}$

(z.B. durch Partitionsfunktion aus der letzten Vorlesung)

Geg.: Folge X von n Schlüsseln, eine Zahl k mit $1 \leq k \leq n$

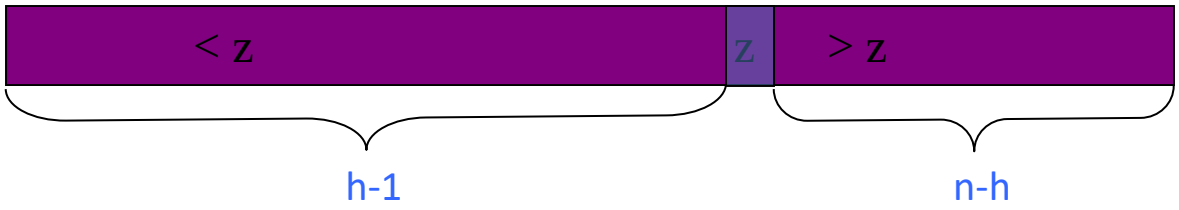
Ges.: ein k-kleinster Schlüssel von X, also den Schlüssel x_k für X sortiert als $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$

Idee: Dezimiere!

Wähle irgendein $z \in X$ und berechne $X_{<z} = \{x \in X \mid x < z\}$ und $X_{>z} = \{x \in X \mid x > z\}$

(z.B. durch Partitionsfunktion aus der letzten Vorlesung)

Es gilt dann $z = x_h$ mit $h-1 = |X_{<z}|$.



Fall $h=k$: $\Rightarrow$ z ist das gesuchte x_k

Fall $h>k$: $\Rightarrow$ x_k liegt in $X_{<z}$ und ist darin der k-kleinste Schlüssel ($X_{>z}$ ist irrelevant)

Fall $h<k$: $\Rightarrow$ x_k liegt in $X_{>z}$ und ist darin der $(k-h)$-kleinste Schlüssel ($X_{<z}$ ist irrelevant)

Also – x_k wird bei gegebenem z entweder sofort gefunden, oder man kann es rekursiv in $X_{<z}$ oder $X_{>z}$ finden. Welcher Fall für gewähltes z eintritt ist a priori nicht bekannt. Es wäre also günstig, wenn sowohl $X_{<z}$ als auch $X_{>z}$ "wenig" Schlüssel enthalten.

Algorithmus zum Finden des k-kleinsten Schlüssel in X (bei festgelegtem α)

Select(X , k)

1. If $|X|$ klein (z.B. $|X| \leq 50$) then verwende eine triviale Methode.
2. Finde einen α-guten Splitter $z \in X$ für X
3. Berechne $X_{<z} = \{x \in X | x<z\}$ und $X_{>z} = \{x \in X | x>z\}$ und bestimme $h = |X_{<z}|+1$.
4. If $h=k$ then return z
   else if $h>k$ then return **Select**($X_{<z}$, k)
   else (* $h<k$ *) return **Select**($X_{>z}$, k-h)

Sei $\frac{1}{2} < \alpha < 1$:
Wir nennen $z \in X$ einen **α-guten Splitter** für X, wenn sowohl
$|X_{<z}| \leq \alpha |X|$ als auch $|X_{>z}| \leq \alpha |X|$ gilt.

Algorithmus zum Finden des k-kleinsten Schlüssel in X (bei festgelegtem α)

Select(X , k)

1. If $|X|$ klein (z.B. $|X| \leq 50$) then verwende eine triviale Methode.
2. Finde einen α-guten Splitter $z \in X$ für X
3. Berechne $X_{<z} = \{x \in X | x<z\}$ und $X_{>z} = \{x \in X | x>z\}$ und bestimme $h = |X_{<z}|+1$.
4. If $h=k$ then return z
   else if $h>k$ then return **Select**($X_{<z}$, k)
   else (* $h<k$ *) return **Select**($X_{>z}$, $k-h$)

Laufzeitanalyse: $T(n)$ Laufzeit von **Select**(X , k), wobei $n=|X|$
$S_\alpha(n)$ (erwartete) Laufzeit um α-guten Splitter zu finden

1. $a \cdot n$ für eine Konstante a
2. $S_\alpha(n)$
3. $c \cdot n$ für eine Konstante c
4. $T(\alpha n)$

$T(n) \leq a \cdot n$	wenn $n \leq 50$
$T(n) \leq c \cdot n + S_\alpha(n) + T(\alpha n)$	wenn $n > 50$

Wie findet man einen α-guten Splitter für X ?

Methode 1: Randomisiert

Ziehe ein zufälliges Element z von X und bestimme die Größen von $|X_{<z}|$ und $|X_{>z}|$ und bestimme so, ob z ein α-guter Splitter ist. (Zeit $O(n)$)

Wiederhole dies, bis ein α-guter Splitter gefunden ist.

Wie findet man einen α-guten Splitter für X ?

Methode 1: Randomisiert

Ziehe ein zufälliges Element z von X und bestimme die Größen von $|X_{<z}|$ und $|X_{>z}|$ und bestimme so, ob z ein α-guter Splitter ist. (Zeit $O(n)$)

Wiederhole dies, bis ein α-guter Splitter gefunden ist.

Die $(1-\alpha)n$ kleinsten Schlüssel in X sind keine α-guten Splitter, weil sonst $X_{>z}$ zu groß
Die $(1-\alpha)n$ größten Schlüssel in X sind keine α-guten Splitter, weil sonst $X_{<z}$ zu groß

Es gibt also $n - 2(1-\alpha)n = (2\alpha - 1)n = \beta n$ viele α-gute Splitter.

Chance, zufällig gezogenes z ein α-guter Splitter, ist β.

Die erwartete Anzahl von Wiederholungen, bis ein α-guter Splitter gefunden wird, ist also $1/\beta$.

Für die erwartete Laufzeit, um einen α-guten Splitter zu finden, gilt

$$S_\alpha(n) = (1/\beta) O(n) \leq b_\alpha \cdot n$$ für irgendeine Konstante b_α.

Sei $\frac{1}{2} < \alpha < 1$:
Wir nennen $z \in X$ einen **α-guten Splitter** für X, wenn sowohl
$|X_{<z}| \leq \alpha |X|$ als auch $|X_{>z}| \leq \alpha |X|$ gilt.

Laufzeitanalyse: $T(n)$ Laufzeit von **Select**(X , k), wobei $n = |X|$

$S_\alpha(n)$ (erwartete) Laufzeit um α-guten Splitter zu finden

Sei $\frac{1}{2} < \alpha < 1$:
Wir nennen $z \in X$ einen **α-guten Splitter** für X, wenn sowohl
$|X_{<z}| \leq \alpha |X|$ als auch $|X_{>z}| \leq \alpha |X|$ gilt.

Laufzeitanalyse: $T(n)$ Laufzeit von **Select**(X , k), wobei $n = |X|$
$S_\alpha(n)$ (erwartete) Laufzeit um α-guten Splitter zu finden

$$T(n) \leq a \cdot n \quad \text{wenn } n \leq 50$$
$$T(n) \leq c \cdot n + S_\alpha(n) + T(\alpha n) \quad \text{wenn } n > 50$$

Methode 1: $S_\alpha(n) \leq b_\alpha \cdot n$

$$T(n) \leq a \cdot n \quad \text{wenn } n \leq 50$$
$$T(n) \leq c \cdot n + b_\alpha \cdot n + T(\alpha n) = C_\alpha \cdot n + T(\alpha n) \quad \text{wenn } n > 50$$

$$\Rightarrow T(n) \leq B_\alpha \cdot n \,/\, (1-\alpha) = O(n) \quad \text{mit } B_\alpha = \max\{ a , C_\alpha \}$$

mit Induktion

Auswahl nach Rang kann in $O(n)$ erwarteter Laufzeit gelöst werden.

Wie findet man einen α-**guten Splitter** für X ?

Methode 1: Randomisiert

Methode 2: Deterministisch (Blum, Floyd, Pratt, Rivest, Tarjan) für $\alpha = 7/10$

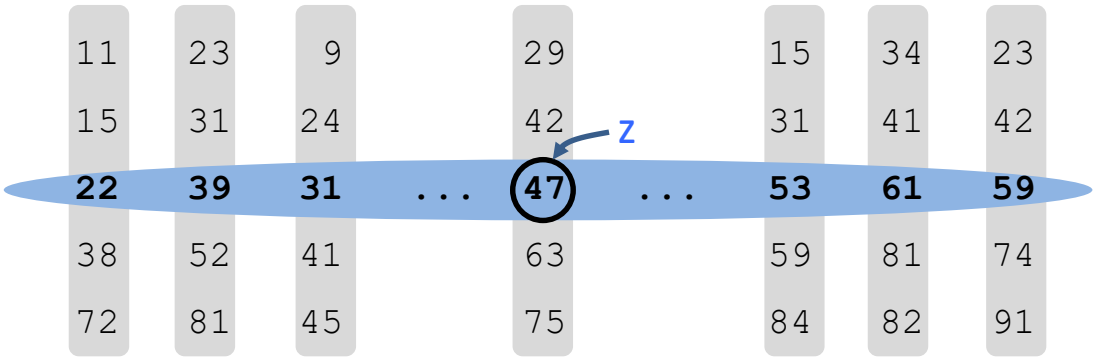
i) Teile X in $n/5$ Gruppen zu je 5 Schlüssel auf
ii) Bestimme für jede 5-er Gruppe den Median (3.-kleinsten Schlüssel)
iii) Verwende verschränkt rekursiv **Select**()
um den Median z dieser $n/5$ Mediane zu bestimmen

Wie findet man einen α-guten Splitter für X ?

Methode 2: Deterministisch (Blum, Floyd, Pratt, Rivest, Tarjan) für $\alpha = 7/10$

i) Teile X in n/5 Gruppen zu je 5 Schlüssel auf
ii) Bestimme für jede 5-er Gruppe den Median (3.-kleinsten Schlüssel)
iii) Verwende verschränkt rekursiv **Select**()
um den Median z dieser n/5 Mediane zu bestimmen

Behauptung: z ist ein α-guter Splitter für $\alpha = 7/10$.

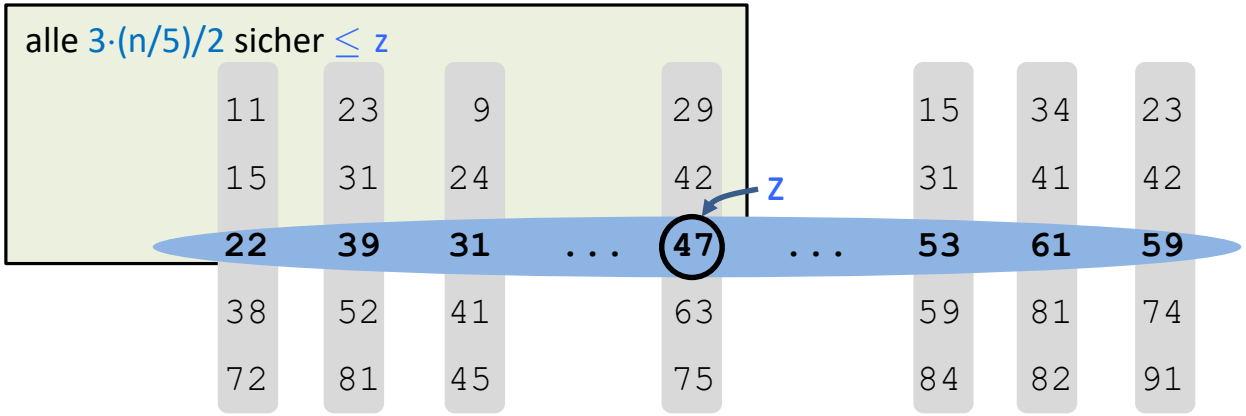


Wie findet man einen α-guten Splitter für X ?

Methode 2: Deterministisch (Blum, Floyd, Pratt, Rivest, Tarjan) für $\alpha = 7/10$

i) Teile X in n/5 Gruppen zu je 5 Schlüssel auf
ii) Bestimme für jede 5-er Gruppe den Median (3.-kleinsten Schlüssel)
iii) Verwende verschränkt rekursiv **Select**()
um den Median z dieser n/5 Mediane zu bestimmen

Behauptung: z ist ein α-guter Splitter für $\alpha = 7/10$.



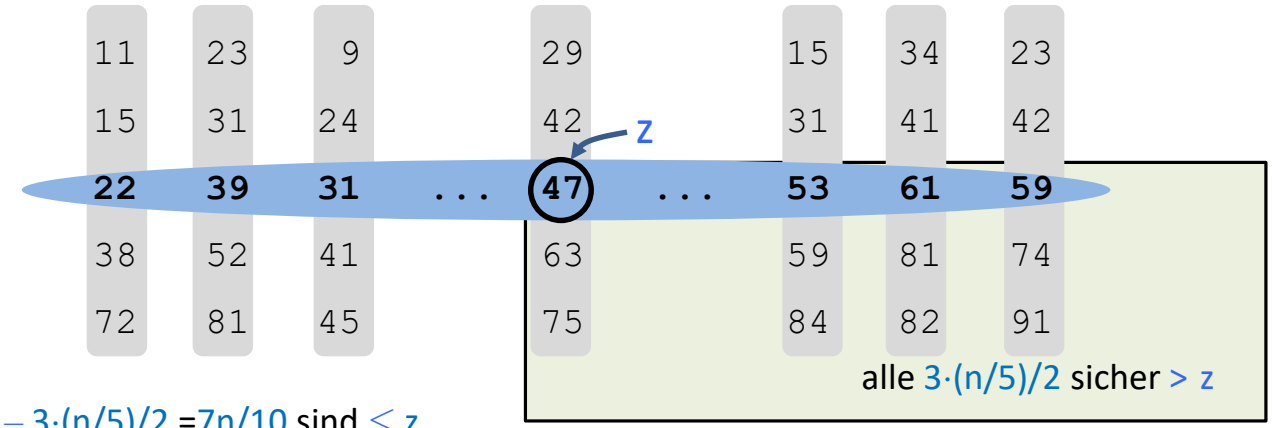
also höchstens $n - 3\cdot(n/5)/2 = 7n/10$ sind $> z$

Wie findet man einen α-guten Splitter für X ?

Methode 2: Deterministisch (Blum, Floyd, Pratt, Rivest, Tarjan) für $\alpha = 7/10$

i) Teile X in n/5 Gruppen zu je 5 Schlüssel auf
ii) Bestimme für jede 5-er Gruppe den Median (3.-kleinsten Schlüssel)
iii) Verwende verschränkt rekursiv **Select**()
um den Median z dieser n/5 Mediane zu bestimmen

Behauptung: z ist ein α-guter Splitter für $\alpha = 7/10$.



also höchstens $n - 3\cdot(n/5)/2 = 7n/10$ sind $\leq z$

Wie findet man einen α-guten Splitter für X ?

Methode 2: Deterministisch (Blum, Floyd, Pratt, Rivest, Tarjan) für $\alpha = 7/10$

i) Teile X in $n/5$ Gruppen zu je 5 Schlüssel auf
ii) Bestimme für jede 5-er Gruppe den Median (3.-kleinsten Schlüssel)
iii) Verwende verschränkt rekursiv **Select**()
um den Median z dieser $n/5$ Mediane zu bestimmen

Behauptung: z ist ein α-guter Splitter für $\alpha = 7/10$.

Laufzeit:

Wie findet man einen α-guten Splitter für X ?

Methode 2: Deterministisch (Blum, Floyd, Pratt, Rivest, Tarjan) für $\alpha = 7/10$

i) Teile X in $n/5$ Gruppen zu je 5 Schlüssel auf
ii) Bestimme für jede 5-er Gruppe den Median (3.-kleinsten Schlüssel)
iii) Verwende verschränkt rekursiv **Select**()
um den Median z dieser $n/5$ Mediane zu bestimmen

Behauptung: z ist ein α-guter Splitter für $\alpha = 7/10$.

Laufzeit:

Median einer 5-er Gruppe Bestimmen braucht konstant viel Zeit, $O(1)$.
$\Rightarrow$ Schritt ii) braucht $(n/5)\cdot O(1) = O(n)$ Zeit.

Schritt i) braucht $O(n)$ Zeit
Schritt iii) braucht $T(n/5)$ Zeit

$\Rightarrow S_\alpha(n) \leq D\cdot n + T(n/5)$ für irgendeine Konstante D, wobei $\alpha = 7/10$.

Sei $\frac{1}{2} < \alpha < 1$:
Wir nennen $z \in X$ einen **α-guten Splitter** für X, wenn sowohl
$|X_{<z}| \leq \alpha |X|$ als auch $|X_{>z}| \leq \alpha |X|$ gilt.

Laufzeitanalyse: $T(n)$ Laufzeit von **Select**(X , k), wobei $n = |X|$

$S_\alpha(n)$ (erwartete) Laufzeit um α-guten Splitter zu finden

$T(n) \leq a \cdot n$	wenn $n \leq 50$
$T(n) \leq c \cdot n + S_\alpha(n) + T(\alpha n)$	wenn $n > 50$

$\Rightarrow S_\alpha(n) \leq D \cdot n + T(n/5)$ für irgendeine Konstante D, wobei $\alpha = 7/10$.

Sei $\frac{1}{2} < \alpha < 1$:
Wir nennen $z \in X$ einen **α-guten Splitter** für X, wenn sowohl
$|X_{<z}| \leq \alpha |X|$ als auch $|X_{>z}| \leq \alpha |X|$ gilt.

Laufzeitanalyse: $T(n)$ Laufzeit von **Select**(X , k), wobei $n = |X|$

$S_\alpha(n)$ (erwartete) Laufzeit um α-guten Splitter zu finden

$$T(n) \leq a \cdot n \quad \text{wenn } n \leq 50$$
$$T(n) \leq c \cdot n + S_\alpha(n) + T(\alpha n) \quad \text{wenn } n > 50$$

$\Rightarrow S_\alpha(n) \leq D \cdot n + T(n/5)$ für irgendeine Konstante D, wobei $\alpha = 7/10$.

$$T(n) \leq a \cdot n \quad \text{wenn } n \leq 50$$
$$T(n) \leq c \cdot n + D \cdot n + T((1/5)n) + T((7/10)n)$$
$$= (c+D) \cdot n + T((1/5)n) + T((7/10)n) \quad \text{wenn } n > 50$$

$\Rightarrow T(n) \leq 10E \cdot n = O(n)$ mit $E = \max\{ a , c+D \}$

mit Induktion

Auswahl nach Rang kann in $O(n)$ „worst case“ Laufzeit gelöst werden.

Wie "langsam" muss Sortieren sein?

Frage: Gibt es Sortieralgorithmen mit Laufzeit $o(n \cdot \log n)$?

Beschränke Betrachtung auf

Vergleichsbasierte Algoritmen

Wie "langsam" muss Sortieren sein?

In Vorlesung nur beiläufig behandelt.

Frage: Gibt es Sortieralgorithmen mit Laufzeit $o(n \cdot \log n)$?

Beschränke Betrachtung auf

Vergleichsbasierte Algoritmen

- Vergleich ob < , = , > ist die einzige erlaubte Operation auf Schlüsseln
  (außer Kopieren oder im Speicher Bewegen)
- Algorithmus muss für jeden Typ von Schlüssel funktionieren, solange < , = , > definiert sind und eine totale Ordnung auf den Schlüsseln darstellen

z.B. unzulässig: arithmetische Operationen auf Schlüsseln,
Verwendung von Schlüssel als Index in Feld

In Vorlesung gar nihct behandelt.

Wenn die Eingabegröße fixiert wird, kann jeder vergleichsbasierte Algorithmus als schleifenfreies Programm von **if**-Statements geschrieben werden

Bsp.: Programm um n=3 Schlüssel x_1,x_2,x_3 zu sortieren

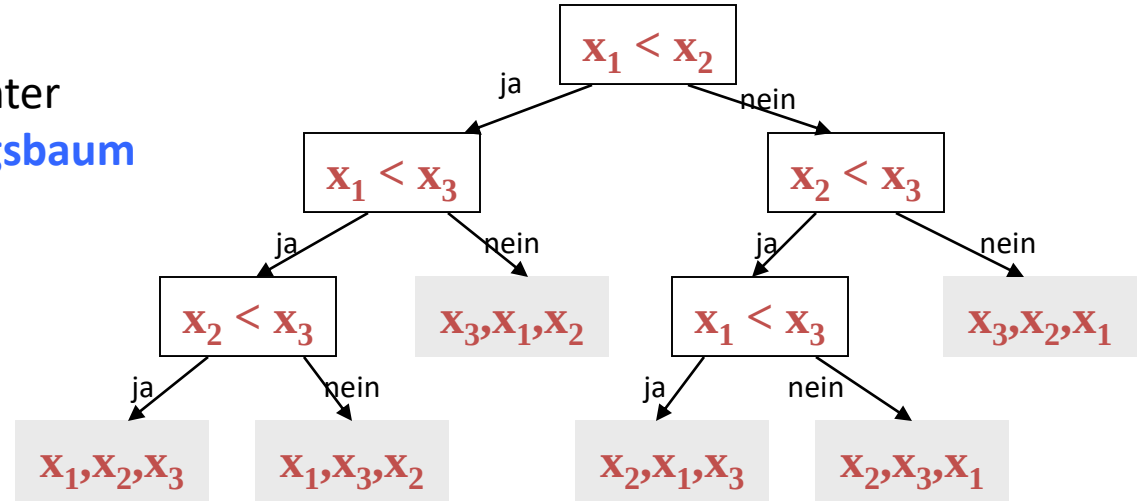
if $x_1<x_2$ **then if** $x_1<x_3$ **then if** $x_2<x_3$ **then** output x_1,x_2,x_3
else output x_1,x_3,x_2
else output x_3,x_1,x_2
else if $x_2<x_3$ **then if** $x_1<x_3$ **then** output x_2,x_1,x_3
else output x_2,x_3,x_1
else output x_3,x_2,x_1

Wenn die Eingabegröße fixiert wird, kann jeder vergleichsbasierte Algorithmus als schleifenfreies Programm von **if**-Statements geschrieben werden

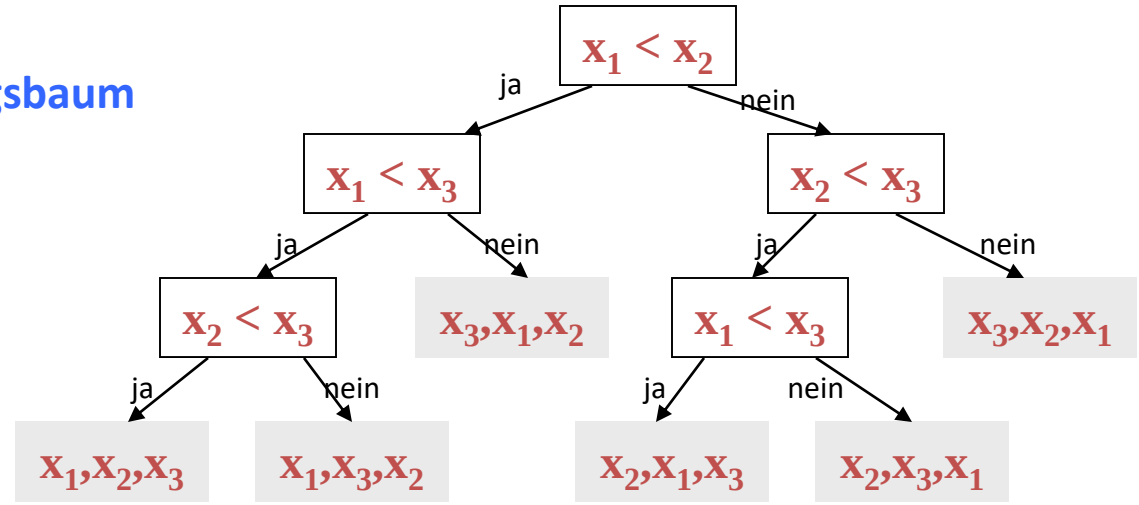
Bsp.: Programm um n=3 Schlüssel x_1,x_2,x_3 zu sortieren

if $x_1<x_2$ **then if** $x_1<x_3$ **then if** $x_2<x_3$ **then** output x_1,x_2,x_3
else output x_1,x_3,x_2
else output x_3,x_1,x_2
else if $x_2<x_3$ **then if** $x_1<x_3$ **then** output x_2,x_1,x_3
else output x_2,x_3,x_1
else output x_3,x_2,x_1

Äquivalenter
Entscheidungsbaum



Entscheidungsbaum



- Programmdurchlauf entspricht Wurzel-Blatt Pfad
- Länge des Pfades entspricht Anzahl der Schlüsselvergleiche bei diesem Programmdurchlauf
- Blatt entspricht der (sortierten) Ausgabepermutation der Eingabe
- Worst-case Laufzeit des Programmes entspricht dem längsten Wurzel-Blatt Pfad im Baum, also der Höhe des Baums.
- Zu zeigen:

  Jeder Entscheidungsbaum fürs Sortieren muss große Höhe haben.

In Vorlesung gar nicht behandelt.

- Programmdurchlauf entspricht Wurzel-Blatt Pfad
- Länge des Pfades entspricht Anzahl der Schlüsselvergleiche bei diesem Programmdurchlauf
- Blatt entspricht der (sortierten) Ausgabepermutation der Eingabe
- Worst-case Laufzeit des Programmes entspricht dem längsten Wurzel-Blatt Pfad im Baum, also der Höhe des Baums.
- Zu zeigen:
  Jeder Entscheidungsbaum fürs Sortieren muss große Höhe haben.

- Programmdurchlauf entspricht Wurzel-Blatt Pfad
- Länge des Pfades entspricht Anzahl der Schlüsselvergleiche bei diesem Programmdurchlauf
- Blatt entspricht der (sortierten) Ausgabepermutation der Eingabe
- Worst-case Laufzeit des Programmes entspricht dem längsten Wurzel-Blatt Pfad im Baum, also der Höhe des Baums.
- Zu zeigen:
  Jeder Entscheidungsbaum fürs Sortieren muss große Höhe haben.

B Entscheidungsbaum, um n Schlüssel zu sortieren

$\#\text{Blätter}(B) \geq n!$ (mindestens ein Blatt für jede der n! Eingabepermutationen)

$\#\text{Blätter}(B) \leq 2^{\text{Höhe}(B)}$

$\text{Höhe}(B) \geq \log_2(\text{Blätter}(B))$

$\geq \log_2 n!$

$n! > (n/e)^n$ da
$e^n = \sum_{i \geq 0} n^i/i! > n^n/n!$

$> \log_2(n/e)^n$

$= n \cdot \log_2 n - n \cdot \log_2 e$

$> n \cdot \log_2 n - 1.5n$

In Vorlesung nur beiläufig behandelt.

Satz: Für jeden Entscheidungsbaum B zum Sortieren von n Schlüsseln gilt

$$\text{Höhe}(B) > n \cdot \log_2 n - 1.5n.$$

Korollar: Für jeden vergleichsbasierten Algorithmus zum Sortieren von n Schlüsseln gibt es eine Eingabe, für die der Algorithmus mehr als $n \cdot \log_2 n - 1.5n$ Vergleiche durchführt.

Korollar: Jeder vergleichsbasierte Algorithmus zum Sortieren von n Schlüsseln hat im schlechtesten Fall Laufzeit

$$\Omega(n \cdot \log n).$$

In Vorlesung nur beiläufig behandelt.

Korollar: Jeder vergleichsbasierte Algorithmus zum Sortieren von n Schlüsseln hat im schlechtesten Fall Laufzeit

$$\Omega(n \cdot \log n).$$

Will man schneller als in $\Theta(n \cdot \log n)$. sortieren, muss man anderes machen, als Schlüssel zu vergleichen. Man kann sich auf spezielle Schlüsseltypen konzentrieren und deren Eigenschaften ausnutzen.

Beispiel:

Die Schlüssel sind ganze Zahlen aus einem kleinen Bereich, z.B. $\{0,\ldots,K-1\}$

Problem:
Sortiere n Stücke $x_1,\ldots,x_n$ nach Schlüssel $key(x_i)$, wobei $key(x_i) \in \{0,\ldots,K-1\}$.

Problem:
Sortiere n Stücke $x_1,\ldots,x_n$ nach $key(x_i)$, wobei $key(x_i)\in\{0,\ldots,K-1\}$.

$x_1,\ldots,x_n$ ist gegeben durch Eingabefeld X[1..n]

CountingSort
Idee: Bestimme für jedes $h\in\{0,\ldots,K-1\}$ den Wert C[h], der besagt für wie viele Stücke x gilt $key(x)\leq h$.

Die Stücke x mit key(x)=h gehören dann im Ausgabefeld B[1..n] auf die Stellen C[h-1]+1 bis C[h]. (C[-1]=0)

Verwendet zusätzliche Felder
C[0..k-1] fürs Zählen und
B[1..n] für die Ausgabe.

Problem:
Sortiere n Stücke $x_1,\ldots,x_n$ nach $key(x_i)$, wobei $key(x_i)\in\{0,\ldots,K-1\}$.

$x_1,\ldots,x_n$ ist gegeben durch Eingabefeld X[1..n]

CountingSort
Idee: Bestimme für jedes $h\in\{0,\ldots,K-1\}$ den Wert C[h], der besagt für wie viele Stücke x gilt $key(x)\leq h$.

Die Stücke x mit key(x)=h gehören dann im Ausgabefeld B[1..n] auf die Stellen C[h-1]+1 bis C[h]. (C[-1]=0)

```
CountingSort(X,n,K)
        for (h=0;h<K;h++) C[h]=0;
        for (i=1;i≤n;i++) C[ key(X[i]) ]++;
        for (h=1;h<K;h++) C[h]+=C[h-1];
        for (i=n;i≥1;i--) B[ C[ key(X[i]) ] ] = X[i]
                          C[ key(X[i]) ]--;
        return B[1..n];
```

Verwendet zusätzliche Felder C[0..k-1] fürs Zählen und B[1..n] für die Ausgabe.

Laufzeit: O(K+n)

Zusätzlicher Platzbedarf: K+n

CountingSort hat Laufzeit und Platzbedarf $\Theta(K+n)$.
Unpraktikabel, wenn K sehr groß.

RadixSort:

Idee: Sei $K=B^d$. Betrachte jedes $h \in \{0,...,K-1\}$ geschrieben als d-stellige Zahl zur Basis B. Sortiere $X[]$ wiederholt nach den Stellen in dieser Darstellung, und zwar nach aufsteigender Signifikanz der Stellen. Jede dieser Sortierungen muss ***stabil*** sein, d.h. die relative Ordnung zweier Stücke mit gleichem Schlüssel darf nicht geändert werden.

Für die jeweiligen Sortierungen kann CountingSort verwendet werden, denn diese Methode ist ***stabil***. Damit erzielt man

Laufzeit: $O(d \cdot (B+n))$

Zusätzlicher Platzbedarf: $B+n$

Bsp: B=10, d=3, n=7