1. (6 Punkte) Es sei $f \in$ FÜP ein Polynom vom Grad genau k. Beweise:
   (a) $f(n) = \Theta(n^k)$.
   (b) Für $\ell > k$ gilt $f(n) \in o(n^\ell)$.
   (c) Für $\ell < k$ gilt $f(n) \in \omega(n^\ell)$.

2. (9 Punkte) Beweise die folgenden Aussagen für beliebige Funktionen in FÜP:
   (a) $\left(\exists c : 0 < c < \infty \text{ mit } \lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = c\right) \Longrightarrow f(n) \in \Theta(g(n))$.
   (b) $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 0 \Longrightarrow f(n) \in o(g(n))$.
   (c) $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = \infty \Longrightarrow f(n) \in \omega(g(n))$.

   Sind diese drei Aussagen sogar Äquivalenzen, d.h. man könnte sogar "$\Longleftrightarrow$" anstatt von "$\Longrightarrow$" schreiben?

3. (8 Punkte) Ordnen Sie die folgenden 9 Funktionen nach ihrem asymptotischen Wachstum.

$$n/1000 \quad n^{4/3} \quad 5^n \quad n\log n \quad n^{1-\varepsilon} \quad n/\log\log n \quad n^{4/3}\log n \quad (4/3)^n \quad n\cdot 2^{\sqrt{\log n}}$$

   Dabei ist $0 < \varepsilon < 1$ eine beliebige feste Zahl.

   Bitte geben Sie Beweise für Ihre Anordnung an.

4. (6 Punkte)
   (a) Geben Sie ein Paar von Funktionen f und g an, sodass weder $f \in O(g)$ noch $g \in O(f)$ gilt. Beweisen Sie die Richtigkeit Ihrer Antwort.
   (b) Gibt es so ein Paar von Funktionen auch, wenn zusätzlich die Bedingung besteht, dass sowohl f als auch g streng monoton steigend ist?

5. (10 Punkte) In dieser Aufgabe geht es darum, dass wenn man schnell quadrieren kann, man auch schnell multiplizieren kann.

   Zeigen Sie, dass sich die Multplikation zweier Zahlen auf eine konstante Anzahl von Quadrierungen, Additionen, Subtraktionen, und Divisionen durch 2 zurückführen lässt.

   Wie viele Quadrierungen, Additionen, Subtraktionen und Divisionen durch 2 sind genau notwendig? Wieviele Stellen haben die Zwischenergebnisse, wenn man zwei m-stellige Zahlen multiplizieren möchte? Stimmt es, dass wenn Quadrieren von n-stelligen Zahlen $Q(n)$ Zeit braucht, dass dann auch die Multiplikation zweier m-stelligen Zahlen $O(Q(m))$ Zeit braucht? Oder braucht das bei genauerer Betrachtung Bedingungen für $Q()$?

6. (2 Punkte) In der Vorlesung haben wir den Karatsuba-Ofmann Algorithmus vorgestellt und zwar für Zahlen in Potenztdarstellung bezüglich Basis B.

   Welches B würden Sie auf einem Rechner mit einem 64-Bit-Prozessor verwenden, und warum?

7. (8 Punkte) Der Karatsuba-Ofman Algorithmus verwendet das Paradigma des "Teile-und-herrsche" (divide-and-conquer), indem man eine n-stellige Zahl(endarstellung) in zwei $(n/2)$-stellige Zahlen(darstellungen) "teilt".

   Es stellt sich heraus, dass man auch in drei $(n/3)$-stellige Zahlen teilen könnte. Dann werden allerdings rekursiv 5 Quadrierungen von Zahlen mit $n/3$ Stellen[1] gemacht plus eine konstante Anzahl von "einfachen" Operationen wie Addition, Subtraktion, Multiplikation mit bzw. Division durch eine Ziffer. Diese einfachen Operationen brauchen jeweils nur $O(n)$ Zeit.

   Stellen Sie die Laufzeit $Q_3(n)$ dieser Methode durch eine Rekursionsgleichung dar und versuchen Sie diese Rekursion zu lösen. Welche asymptotische Laufzeit wird erzielt? Ist das besser als der "normale" Karatsuba-Ofman Algorithmus?

8. (8 Punkte) Man kann den Karatsube-Ofman Algorithmus noch weiter verallgemeinern und die zu quadrierende Zahl in b Teile mit n/b Stellen teilen. Man muss dann allerdings $2b-1$ rekursive Quadrierungen von Zahlen mit n/b Stellen[2] durchführen plus $O(n)$ Overhead für diverse "einfache" Operationen.

   Stellen Sie dir Laufzeit $Q_b(n)$ dieser Methode durch eine Rekursionsgleichung dar und versuchen Sie diese Rekursion zu lösen. Welche asymptotische Laufzeit wird erzielt? Wird das "besser", wenn b größer wird? Ist da ein Unterschied zwischen Asymptotik und Praxis zu erwarten?

[1] Genauer betrachtet wären es $(n/3) + 3$ Stellen, aber es stellt sich heraus, dass man das $+3$ für die vorliegenden Zwecke ignorieren kann.

[2] Analoges zur vorherigen Fußnote gilt auch hier.