Grundzüge Datenstrukturen und Algorithmen (WS 2020/2021)

Lösung Probeklausur

Lösung 1. Aufgabe: (15 Punkte)

Die Reihenfolge lautet:

1000	$5\log n$	$4n$	$12n\log n$	n^4	4^n

- $1000 \in O(5\log n)$ direkter Beweis:
  Für $c = 200$ gilt $1000 \leq_{\text{fü}} c \times 5\log n = 1000\log n$, da $\log 3 > 1$ und log monoton wachsend ist ($n_0 = 3$).

- $5\log n \in o(4n)$ Beweis durch Grenzwertbetrachtung:
  $$\lim_{n\to\infty} \frac{5\log n}{4n} = \frac{5}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}$$
  Nach L'Hospital gilt:
  $$\frac{5}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n} = \frac{5}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1} = \frac{5}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

- $4n \in o(12n\log n)$ Beweis durch Grenzwertbetrachtung:
  $$\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{12n\log n} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n} = 0$$

- $12n\log n \in o(n^4)$ Beweis durch Grenzwertbetrachtung:
  $$\lim_{n\to\infty}\frac{12n\log n}{n^4} = 12\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n^3}$$
  Nach L'Hospital gilt:
  $$12\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n^3} = 12\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{3n^2} = 4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3} = 0$$

- $n^4 \in O(4^n)$ direkter Beweis:
  Für $c = 1$ gilt $n^4 \leq_{\text{fü}} c \times n^4 = n^4$, da für alle $n > n_0 = 5$ gilt dass $n^4 < 4^n$.
  Beweis durch Induktion über n:
  Induktionsanfang: Die Induktionsaussage gilt für $n = 5$ da $5^4 = 625 < 1024 = 4^5$.
  Induktionsschritt: $(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$. Da $n > 5$, ist $4n^3 < n^4$, $6n^2 < n^4$ und $4n + 1 < n^4$. In Summe ergibt sich $(n+1)^4 < 4n^4$. Nach Induktionsannahme gilt $4 \times n^4 < 4 \times 4^n = 4^{n+1}$.

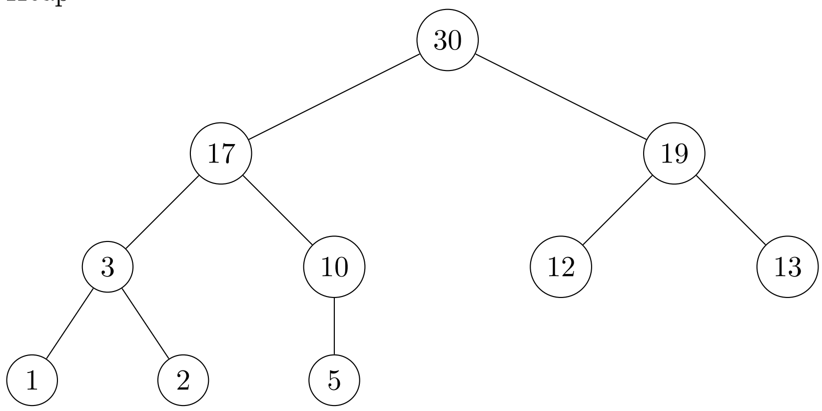
2. Aufgabe: (18 Punkte)

Zeichnen Sie für jede der folgenden potentiellen Inhalte des Feldes $A[1..10]$ den entsprechenden durch $A[]$ implizit dargestellten binären Baum. Klassifizieren Sie jeden der drei Fälle als Heap, Beinahe-Heap, oder nicht Heap. Verwenden Sie hierbei Max-Heaps. Illustrieren Sie für den Fall des Beinahe-Heaps eine Heapify Operation.

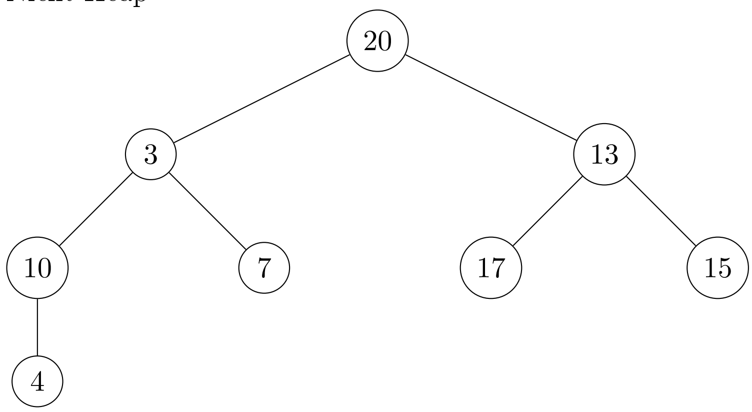
1. $\langle 30, 17, 19, 3, 10, 12, 13, 1, 2, 5 \rangle$
2. $\langle 20, 3, 13, 10, 7, 17, 15, 4 \rangle$
3. $\langle 5, 19, 14, 13, 7, 12, 8, 3, 4, 6 \rangle$

Lösung

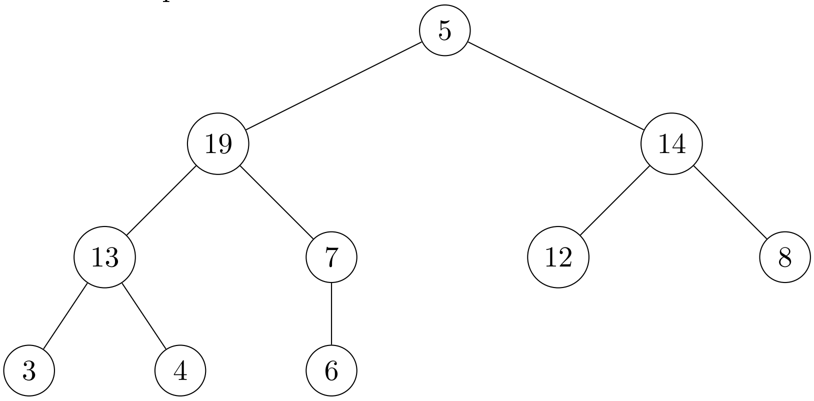
1. Heap



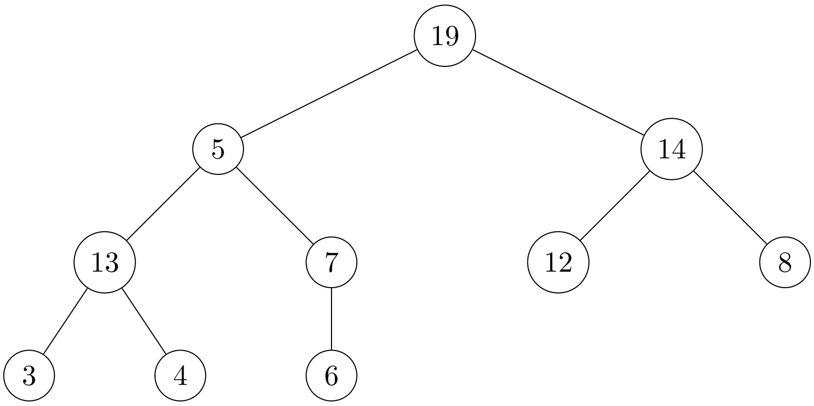
2. Nicht Heap



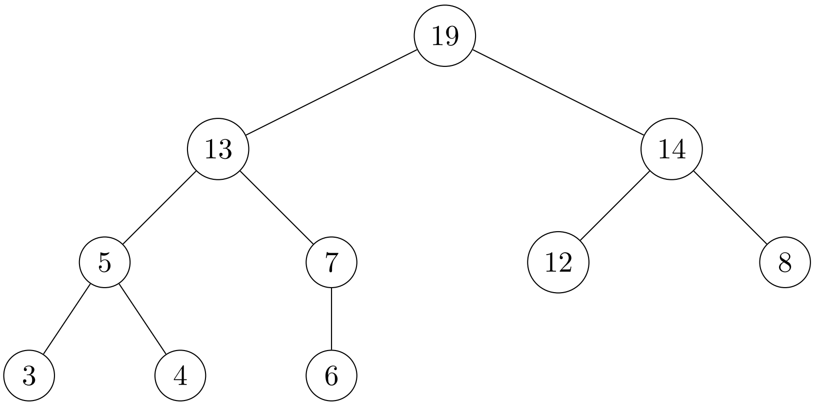
3. Beinahe Heap



Nach einem Schritt von `heapify`:



Nach dem zweiten und finalen Schritt von `heapify`:



3. Aufgabe: (12 Punkte) Es seien $A[]$ und $B[]$ zwei Felder, die jeweils n Schlüssel aus einem geordneten Schlüsseluniversum enthalten. Die Einträge in den beiden Feldern sind nicht notwendigerweise alle verschieden.

Entwerfen Sie ein Programm, das ein Feld $C[]$ erzeugt, dass genau jene Schlüssel enthält, die sowohl in $A[]$ wie auch in $B[]$ vorkommen. In $C[]$ soll es keine Duplikate geben.

Was ist die Laufzeit Ihres Programms (in Abhängigkeit von n) und warum?

Lösung

Algorithmus: Man sortiere A und B durch jene Variante von Mergesort die beim Mergen Duplikate verwirft und damit die Liste von allen Duplikaten befreit. Anschließend überprüft man für jedes Element in B der Reihe nach durch binäre Suche, ob es in A enthalten ist. Ist dies der Fall, so fügt man es C hinzu.

Korrektheit: Offensichtlich sind alle Elemente in C sowohl in A als auch in B, jedes Element aus B stammt und in A gefunden wurde. Gleichzeitig werden alle (einzigartigen) Elemente in B betrachtet (und in A zum Vergleich herangezogen). Da B von Duplikaten befreit wurde ist auch C frei von Duplikaten.

Laufzeit: Das Sortieren der beiden Listen hat jeweils eine Laufzeit in $\mathcal{O}(n \log n)$ (Mergesort). Jede binäre Suche hat eine Laufzeit in $\mathcal{O}(\log n)$ und somit haben n vielen Suchen (für jedes Element in B) eine Laufzeit in $\mathcal{O}(n \log n)$. Insgesamt ist die Laufzeit also in $\mathcal{O}(n \log n)$.

4. Aufgabe: (15 Punkte) Es sei X eine Menge mit n (verschiedenen) Schlüsseln aus einem geordneten Schlüsseluniversum U. Wir nennen einen Schlüssel $z \in U$ einen 2/3-Splitter für X, wenn

$$|\{x \in X \,:\, x \leq z\}| \leq 2n/3 \qquad \text{und} \qquad |\{x \in X \,:\, x \geq z\}| \leq 2n/3\,.$$

Anders ausgedrückt, mindestens ein Drittel der Schlüssel in X müssen kleiner als z sein und mindestens ein Drittel muss größer sein.

Entwickeln Sie einen Algorithmus, der für ein gegebenes Paar A, B von Mengen mit jeweils n verschiedenen Schlüsseln entscheidet, ob es einen Schllüssel z gibt, der sowohl für A wie auch für B ein 2/3-Splliter ist.

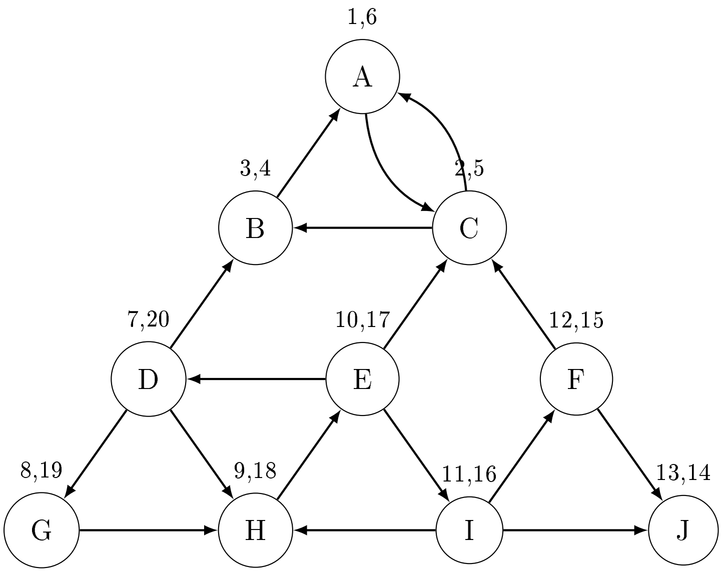
Was ist die Laufzeit Ihres Algorithmus und warum? Idealerweise sollte sie $O(n)$ sein.

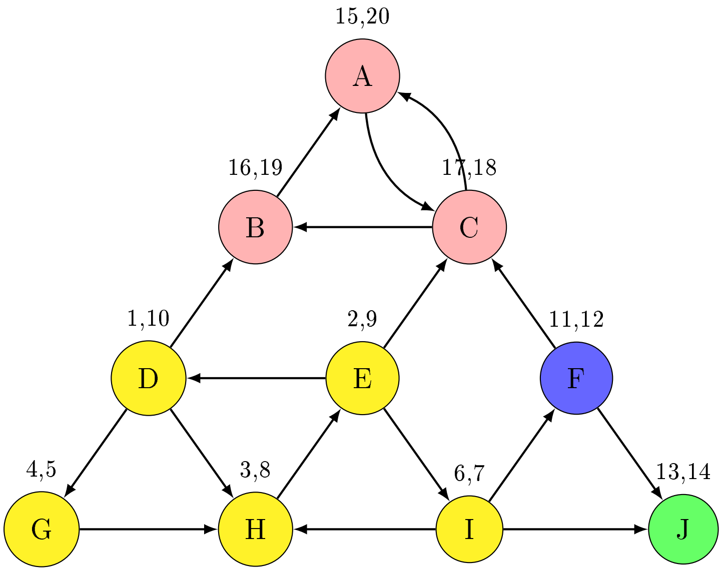
Lösung

Die 2/3-Splitter für eine Menge sind genau jene Schlüssel die größer oder gleich dem $\lfloor 1/3 \rfloor$-ten Schlüssel nach Rang aber gleichzeitig kleiner oder gleich dem $\lceil 2/3 \rceil$-ten Schlüssel nach Rang sind. Es reicht also aus, für beide Mengen diese beiden Intervallgrenzen zu finden und zu überprüfen ob die Intervalle der 2/3-Splitter für beide Mengen überlappen.

Auswählen nach Rang ist in $\mathcal{O}(n)$ möglich. Ob die Intervalle überlappen lässt sich dann mit konstant vielen Vergleichen überprüfen. Also ist die Gesamtlaufzeit in $\mathcal{O}(n)$.

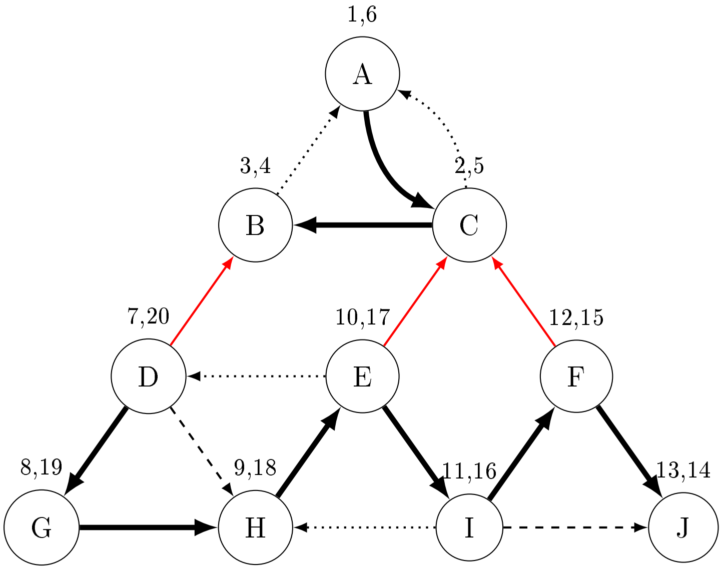
Lösung 5. Aufgabe

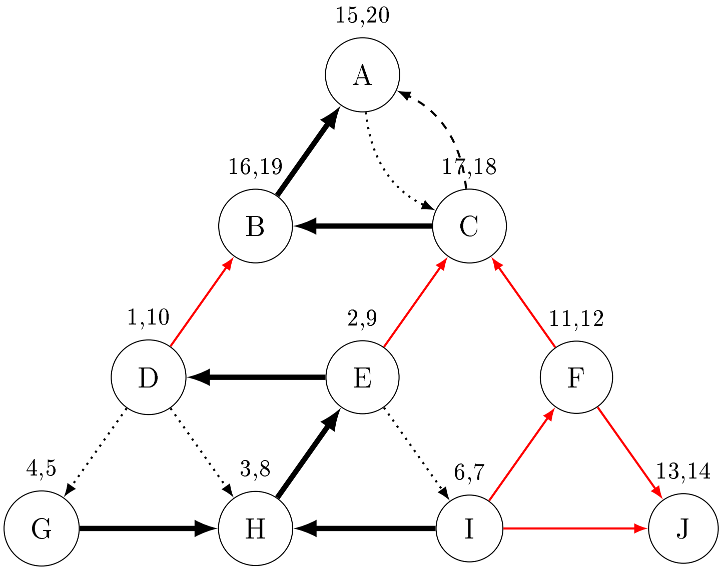




Lösung 6. Aufgabe

Dick sind Baumkanten, gestrichelt Abkanten, gepunktet Aufkanten, rot Rückwärtskanten.





7. Aufgabe: (15 Punkte)

Hier wurde der Bellman-Ford-Algorithmus mit Startknoten A angewendet. Die Distanz eines Knoten u zu A fungiert als $h(u)$.

$h(A) = 0$
$h(B) = 3$
$h(C) = 4$
$h(D) = -1$
$h(E) = 2$
$h(F) = 0$.

8. Aufgabe: (15 Punkte)

Hier wird der Algorithmus von Kruskal angewandt, d.h. in jedem Schritt wird eine minimale Kante ausgewählt die mit den bereits ausgewählten Kanten keinen Kreis bildet.