Im Folgenden sei $A[1..n]$ ein Feld, das die Elementenfolge $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ enthält, wobei $A[i] = a_i$ für $1 \leq i \leq n$.

1. (10 Punkte) In dieser Aufgabe betrachten wir die Prozedur $\textsc{Partition}(A, i, j, x)$ so, wie sie in der Vorlesung definiert wurde.

   (a) Nehmen wir an, das Feld $A[1..n]$ hält keine zwei gleichen Schlüssel und ist aufsteigend sortiert. Wie sieht das umgestellte $A[1..n]$ nach einem Aufruf $\textsc{Partition}(A, 1, n, A[k])$ jeweils aus für den Fall $k = 1$, für den Fall $k = n$ und für den beliebigen Fall k mit $1 < k < n$?

   (b) Die gleiche Frage, aber jetzt mit der Annahme, dass das Feld absteigend sortiert ist.

2. (15 Punkte) Entwickeln Sie ein Program $\text{EQ\_}\textsc{Partition}(A,\ell,r)$ (wobei angenommen wird, dass $1 \leq \ell \leq r \leq n$), das das Teilfeld $A[\ell..r]$ so umordnet, dass

   die Elemente, die echt kleiner als $x = a_r$ sind, an den Stellen $A[\ell..m-1]$ liegen,

   die Elemente, die gleich x sind, an den Stellen $A[m..m']$,

   und die Elemente, die echt größer als x sind, an den Stellen $A[m'+1..r]$.

   Das Programm soll dazu noch die beiden Werte m und m' als Ergebnisse zurückgeben. Der Rest des Feldes $A[]$ soll unverändert bleiben und es soll auch sonst nur konstant viel extra Speicher verwendet werden.

   Wie können Sie argumentieren, dass Ihr Programm korrekt ist?

   Was ist die Laufzeit Ihres Programmes?

3. (10 Punkte) Sie bekommen ein Feld mit 1 000 000 Zahlen. Wie können Sie möglichst effizient feststellen, ob es eine Zahl gibt, die in dem Feld mindestens 20 000 mal vorkommt? Geht das sozusagen schneller als Sortieren?

4. (10 Punkte) Verallgemeinern wir die vorherige Frage: Wie kann man möglichst effizient feststellen, ob es in einem Feld mit n Zahlen eine Zahl gibt, die mindenstens k mal vorkommt? Können Sie eine Laufzeit von $O(n \log(1 + n/k))$ erzielen?

5. (5 Punkte) Nehmen wir an, wir hätten $n = k^2$ leere Eimer und beliebig viele Bälle. Wir werfen nun einen Ball nach dem anderen auf die Eimer. Jedesmal bleibt der Ball in einem zufälligen Eimer liegen, und zwar mit gleicher Wahrscheinlichkeit in jedem der n Eimer und unabhängig von den Ergebnissen der anderen Ballwürfe. Es sei D die erwartet Anzahl von Bällen, die geworfen werden, bis irgendein Eimer zwei Bälle enthält.

   Zeigen Sie auf möglichst einfache Weise, dass $D \leq 2k$ gilt. (Hinweis: Wie stellt sich die Situation dar, nachdem die ersten k Bälle geworfen wurden? Kann man da das in der Vorlesung besprochene Münzwurfproblem zum anwenden?)