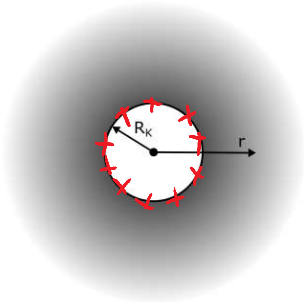
Aufgabe 2

Donnerstag, 10. Juni 2021 14:11

Aufgabe 2: Ladungsverteilung (7P)

Im Zentrum des Koordinatensystems befindet sich eine positiv geladene metallische Kugel mit Radius R_K und Gesamtladung $Q_0 > 0$. Die Kugel ist umgeben von einer Ladungsdichte der Form $\rho(r) = -\frac{A}{r^4}$ mit $A > 0$.



a) Bestimmen Sie den Wert von A in Abhängigkeit der gegebenen Parameter, für den die Gesamtladung des Systems Kugel + Außenraum gleich 0 ist. (2P)

b) Berechnen Sie mit dem zuvor bestimmten Wert von A das elektrische Feld $\vec{E}(r)$ und das elektrostatische Potential $\varphi(r)$ als Funktion des Abstands r vom Mittelpunkt des Kerns für $0 \leq r < \infty$. Für das elektrostatische Potential soll folgende Randbedingung gelten: $\varphi(r \to \infty) = 0$. (4P)

c) Skizzieren Sie $E(r)$ und $\varphi(r)$ jeweils als Funktion des Abstands r vom Mittelpunkt der Kugel. (1P)

Ladung Kugel

a) $$-Q_0 \overset{!}{=} Q_{außen} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{R_K}^{\infty} \rho(r)\, r^2 \sin(\vartheta)\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$= 4\pi \cdot \int_{R_K}^{\infty} -\frac{A}{r^{\cancel{4}\,2}}\cancel{r^2}\, dr$$

$$= 4\pi A \left[\frac{1}{r}\right]_{R_K}^{\infty} = 4\pi A\left(0 - \frac{1}{R_K}\right)$$

$$= -\frac{4\pi A}{R_K} \overset{!}{=} -Q_0$$

$$\Rightarrow A = +\frac{Q_0}{4\pi} R_K$$

b) Satz von Gauß: $$\oint_{\partial V} \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{Q_{ein}}{\varepsilon_0}$$

$\vec{E} = E\,\hat{e}_r$, $d\vec{A} = dA\,\hat{e}_r$

Kugelschale

$$\Rightarrow \oint \vec{E}\, d\vec{A} = E \underbrace{\oint dA}_{\text{Kugeloberfläche}} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_{ein}}{\varepsilon_0}$$

$\rightarrow E = \quad Q_{ein}$

Kugeloberfläche

ε_0

$$\rightarrow E = \frac{Q_{ein}}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

$r < R_K$: Metallkugel, Ladungen an Oberfläche

$$\Rightarrow Q_{ein} = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$$

$r > R_K$: $Q_{ein} = Q_0 + \int \rho(r)\, dV$

$$= Q_0 + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{R_K}^{r} -\frac{Q_0 R_K}{4\pi \cancel{r^4}} \cancel{r^2} \sin(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$= Q_0 - \int_{R_K}^{r} Q_0 R_K \frac{1}{r^2}\, dr$$

$$= Q_0 - Q_0 R_K \left(\frac{1}{R_K} - \frac{1}{r}\right)$$

$$= Q_0 - Q_0 + Q_0 \frac{R_K}{r} = Q_0 \frac{R_K}{r}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q_0 R_K}{4\pi\, r^3} \hat{e}_r \quad (r > R_K)$$

Potential:

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi} \overset{\text{hier}}{\Leftrightarrow} E \cdot \hat{e}_r = -\frac{\partial}{\partial r}\phi(r)\, \hat{e}_r$$

$$\Rightarrow E = -\frac{\partial}{\partial r}\phi(r) \Rightarrow \phi(r) = \int E\, dr$$

$r > R_K$:

$$\phi(\vec{r}) = -\int_0^r E(r')\, dr'$$

$$= -\frac{Q_0 R_K}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^r \frac{1}{r'^3}\, dr' = \frac{Q_0 R_K}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

$$\rightarrow \phi(r \to \infty) = 0$$

$r < R_K$: $\phi = \text{const.}$, damit stetig bei R_K:

$$\phi(r < R_k) = \phi(R_k) = \frac{Q_0}{8\pi\varepsilon_0 R_k}$$

c)