

Björn Feuerbacher

Tutorium Mathematische Methoden der Elektrodynamik

Ausführlich erklärt für Studierende
der Physik im Haupt- und
Nebenfach



Springer Spektrum

Tutorium Mathematische Methoden der Elektrodynamik

Björn Feuerbacher

Tutorium Mathematische Methoden der Elektrodynamik

Ausführlich erklärt für Studierende der
Physik im Haupt- und Nebenfach

Björn Feuerbacher
Schweinfurt, Deutschland

ISBN 978-3-662-58339-5

ISBN 978-3-662-58340-1 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-662-58340-1>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2019

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Zeichnungen: Kristin Riebe, Nuthetal und Wolfgang Zettlmeier, Barbing
Verantwortlich im Verlag: Lisa Edelhäuser

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Bereits im Vorwort zum *Tutorium Elektrodynamik* (Feuerbacher (2016)) hatte ich gesagt, dass die Elektrodynamik für viele Studenten wohl die erste große Hürde in der theoretischen Physik darstellt, unter anderem wegen der weitreichenden Kenntnisse der Vektoranalysis, die hierfür zwingend notwendig sind. Einen Teil davon hat man vielleicht bereits in der theoretischen Mechanik kennengelernt (beispielsweise Wegintegrale und Gradienten beim Zusammenhang zwischen Kraft und Potenzial), allerdings kann man sich in der Mechanik letztlich auch „durchmogeln“, ohne das alles so richtig verstanden zu haben. Außerdem hören manche Studenten die Vorlesungen auch in anderer Reihenfolge, sodass ihnen diese Vorkenntnisse völlig fehlen.

Hinzu kommen in der Elektrodynamik meist noch zahlreiche weitere mathematische Verfahren und Tricks, beispielsweise die Fourier-Darstellung, Methoden aus der komplexen Funktionentheorie und oft auch noch einige Anwendungen von vollständigen Funktionensystemen. (Die ersten beiden kennt man wiederum vielleicht schon aus der Mechanik, Letztere werden dagegen eigentlich erst in der Quantenmechanik wirklich wichtig.) All dies wird in diesem Buch ausführlich mit vielen Beispielen erklärt. Bei einigen weiteren Methoden, wie die Delta-„Funktion“ und das Konzept der Green’schen Funktionen, ist dagegen der direkte Bezug zur Elektrodynamik so wichtig, dass ihre Einführung parallel zu den entsprechenden physikalischen Konzepten sinnvoller ist – dementsprechend wird dies im *Tutorium Elektrodynamik* ausführlich erklärt. Da die Delta-Funktion an einigen Stellen in diesem Buch vorkommt, findet sich im Anhang allerdings eine (knappe) Einführung der wichtigsten Konzepte dazu.

Wie bereits im *Tutorium Elektrodynamik* erwähnt, bringe ich eine andere Sichtweise auf den Stoff mit als die meisten anderen Lehrbuchautoren, da ich zwar promovierter Physiker bin, aber kein Dozent an einer Hochschule, sondern Lehrer für Mathe und Physik an einer Fachoberschule. Das und meine langjährige Tätigkeit als Tutor für Übungsgruppen während meiner Promotion ermöglichen mir einen besseren Einblick in die typischen Probleme, die Studenten mit den mathematischen Methoden der Elektrodynamik haben.

Im gesamten Buch lege ich deshalb auch mehr Wert auf eine physikalische Motivation und eine anschauliche Darstellung als auf mathematische Exaktheit (allerdings bin ich andererseits schon auch bemüht gewesen, keine mathematisch falschen Aussagen zu treffen). Insbesondere wird eigentlich immer vorausgesetzt, dass die betrachteten Funktionen stetig und genügend oft (stetig) differenzierbar sind, ohne das ständig explizit zu erwähnen – nur an einigen Stellen, wo es wirklich wichtig ist, wird darauf hingewiesen. Auch Grenzwertübergänge werden im Allgemeinen mehr anschaulich plausibel gemacht, statt sie im Detail auszuführen.

Man sollte allerdings trotzdem einiges an mathematischem Vorwissen mitbringen: Aus der Schule sollten das Ableiten und Integrieren von skalarwertigen Funktionen einer Variable bekannt sein, außerdem Grundlagen zur Vektorrechnung. Zusätzlich sind für einige Abschnitte dieses Buches Vorkenntnisse in der linearen Algebra (etwa im Umfang der Vorlesung Lineare Algebra I) wichtig, und die komplexen Zahlen sollten bekannt sein. Aus der Mechanik sollte man krummlinige Koordinatensysteme und den Feldbegriff kennen sowie gewöhnliche Differenzialgleichungen lösen können. Wer mit all diesen Themen nicht genügend vertraut ist, kann zumindest eine knappe Zusammenfassung im Anhang nachlesen.

Kurz noch zu den Notationen: Das Skalarprodukt zwischen (dreidimensionalen) Vektoren wird als \circ geschrieben, das Vektorprodukt wie üblich als \times . Die Einheitsmatrix ist \mathbf{I} , wenn nötig mit Index daran, um die Dimension klarzumachen, z. B. \mathbf{I}_3 . Die natürlichen Zahlen einschließlich der Null werden nach DIN mit \mathbb{N} bezeichnet, die ohne Null mit \mathbb{N}^* .

Kräfte werden, um Verwechslungen mit Flächen zu vermeiden, mit \mathbf{K} bezeichnet (man könnte für Flächen natürlich auch \mathbf{A} verwenden – aber das ist die übliche Bezeichnung für das Vektorpotenzial in der Elektrodynamik). Auch andere Größen werden oft mit jeweils demselben (griechischen Klein-)Buchstaben bezeichnet; zum Glück gibt es dafür aber oft verschiedene Schreibweisen: ϕ ist das Potenzial, φ dagegen der Azimutalwinkel in Zylinder- und Kugelkoordinaten; ρ ist die Ladungsdichte, q dagegen der Abstand zur z -Achse in Zylinderkoordinaten; ϑ ist der Polarwinkel in Kugelkoordinaten, θ dagegen wird (selten) für beliebige andere Winkel verwendet.

Auf die Einstein'sche Summenkonvention verzichte ich in diesem Buch. Allgemein bevorzuge ich oft die Schreibweise mit „kompletten“ Vektoren und Matrizen, statt die Rechnungen, wie in anderen Büchern oft üblich, nur in Komponenten durchzuführen.

Abschließend noch einige Literaturempfehlungen. In meiner Darstellung hier orientiere ich mich teilweise an Großmann (2000); dort findet sich auch einiges an interessantem zusätzlichem Material, und das Buch deckt auch noch weitere Teilgebiete (beispielsweise gewöhnliche Differenzialgleichungen) ab. Sehr ausführlich ist auch Boas (2009). Wer die mathematischen Methoden der theoretischen Physik dagegen lieber parallel zur eigentlichen Physik lernt und alles in einer Hand haben möchte, der sollte zu Bartelmann et al. (2014) greifen.

Danksagung

Zunächst möchte ich Vera Spillner danken, die mich vor ihrem Weggang vom Springer-Verlag dazu angeregt hat, das Tutorium zur Elektrodynamik zu schreiben, auf welchem aufbauend wiederum dieses Tutorium zu den mathematischen Methoden entstanden ist. Besonderer Dank gebührt allerdings Lisa Edelhäuser, die das Lektorat dieses Buches übernommen hat, ebenso wie Stefanie Adam für die Betreuung des Projekts und die schnelle Beantwortung meiner vielen organisatorischen Fragen.

Kristin Riebe danke ich für die Erstellung der Abbildungen, Tatjana Strasser für das sorgfältige Korrekturlesen und die zahlreichen Anregungen, wie man manches noch klarer formulieren kann. Ebenso danke ich einigen (anonym gebliebenen) studentischen Korrekturlesern, denen einige Seiten vorab zur Verfügung gestellt wurden und die daraufhin ebenfalls mehrere gute Anregungen für Verbesserungen lieferten.

Auch meiner ehemaligen Lerngruppe im Studium möchte ich danken: Hannes Klehr, Wouter Kornelis, Max Urban und Alexander Wingler. Sie haben mich damals überhaupt erst auf die Idee gebracht, den Stoff der Elektrodynamik mal ordentlich und klar zusammenzuschreiben – auch wenn das damals eigentlich nur für unseren privaten Gebrauch gedacht war. . .

Florian Felix danke ich für seine Beratung bei einigen mathematischen Feinheiten.

Und schließlich geht noch Dank an meine Familie und an Julia Bauer für die moralische Unterstützung während der Arbeit an diesem Buch.

Inhaltsverzeichnis

1	Vektor-Differenzialoperatoren – Wie ändern sich Felder?	1
1.1	Erste Ableitungen – Änderungsraten	1
1.2	Die zweiten Ableitungen sind nicht so anschaulich	23
1.3	Anwendungen: Taylor-Reihen und Extremwerte	29
1.4	Aufgaben	38
2	Integrale – unendliche Summen in der Ebene und im Raum	51
2.1	Wegintegrale	51
2.2	Flächenintegrale in der Ebene	58
2.3	Volumenintegrale	68
2.4	Flächenintegrale im Raum	75
2.5	Was sind eigentlich Lebesgue-Integrale?	83
2.6	Aufgaben	89
3	Zusammenhänge – Integralsätze und Potenziale	103
3.1	Darstellungen der Differenzialoperatoren mit Integralen – und in krummlinigen Koordinaten	104
3.2	Die Krönung der Vektoranalysis: Die Integralsätze von Gauß und Stokes	115
3.3	Potenziale – „Stammfunktionen“ für Vektorfelder	125
3.4	Historische Anmerkungen zur Vektoranalysis	136
3.5	Aufgaben	140
4	Fourier-Analyse – unendliche Summen von Schwingungen	153
4.1	Fourier-Reihen	153
4.2	Fourier-Integrale – erst mal nur in einer Dimension	163
4.3	Räumliche Fourier-Analyse	169
4.4	Aufgaben	178

5	Was sind denn vollständige Funktionensysteme?	191
5.1	Erst mal der allgemeine Formalismus	192
5.2	Ein wichtiges, aber einfaches Beispiel: Die Legendre-Polynome	196
5.3	Noch mehr mathematische Hilfsmittel: Selbstadjungierte Differenzialoperatoren und Separationsansatz	205
5.4	Für Physiker wichtige Funktionensysteme	214
5.5	Aufgaben	230
6	Wozu brauchen wir die komplexe Funktionentheorie?	243
6.1	Holomorphe Funktionen – und der Integralsatz von Cauchy	244
6.2	Meromorphe Funktionen – und der Residuensatz	250
6.3	Komplexe Potenziale – und konforme Abbildungen	262
6.4	Aufgaben	268
A	Anhang Mathematische Grundlagen	277
A.1	Vektoren und Matrizen	277
A.2	Krummlinige Koordinatensysteme	283
A.3	Differenzialrechnung	287
A.4	Integralrechnung	291
A.5	Komplexe Zahlen	300
A.6	Felder	304
Literatur		309
Sachverzeichnis		311

Vektor-Differenzialoperatoren – Wie ändern sich Felder?

1

In der Elektrodynamik bekommt man es ständig mit Feldern zu tun. Die wichtigsten davon (Kraft, elektrische Feldstärke, magnetische Flussdichte, aber auch die Stromdichte) sind Vektorfelder, es gibt aber auch einige grundlegende skalare Felder (Ladungsdichte, elektrostatisches Potenzial). In praktisch allen Fällen sind diese Felder nicht konstant – beispielsweise wird in realistischen Situationen die Ladungsdichte sowohl vom Ort als auch von der Zeit abhängen.

Wie bereits bei Funktionen von einer Variablen wird die momentane bzw. lokale Änderungsrate von Feldern mithilfe von Ableitungen beschrieben. Im Unterschied zu Funktionen von nur einer Variablen gibt es aber zahlreiche verschiedene Möglichkeiten, mit Ableitungen von Feldern zu arbeiten. Dies wird wir in diesem Kapitel ausführlich dargestellt.

In Abschn. 1.1 besprechen wir die grundlegenden Möglichkeiten, Felder (einmal) abzuleiten, in Abschn. 1.2 gehen wir dann (wer hätt's gedacht) zu den zweiten Ableitungen über. Den Abschluss bildet eine kurze Diskussion, wie man das Konzept der Taylor-Reihen auf Felder erweitert, und als Anwendung wird die Berechnung von Extrempunkten bei skalaren Feldern besprochen.

1.1 Erste Ableitungen – Änderungsraten

Das grundlegende Konzept hier sind die partiellen Ableitungen – im Wesentlichen Änderungsraten parallel zu den Koordinatenachsen. Im Folgenden werden wir dann darauf aufbauend die Ableitungsoperatoren Gradient, Divergenz und Rotation kennenlernen sowie den „Nabla-Operator“, der alle diese Konzepte in gewissem Sinne vereinigt. Außerdem wird auch die Bedeutung der totalen Ableitung erklärt, die in Mathematik und Physik leicht unterschiedlich definiert ist.

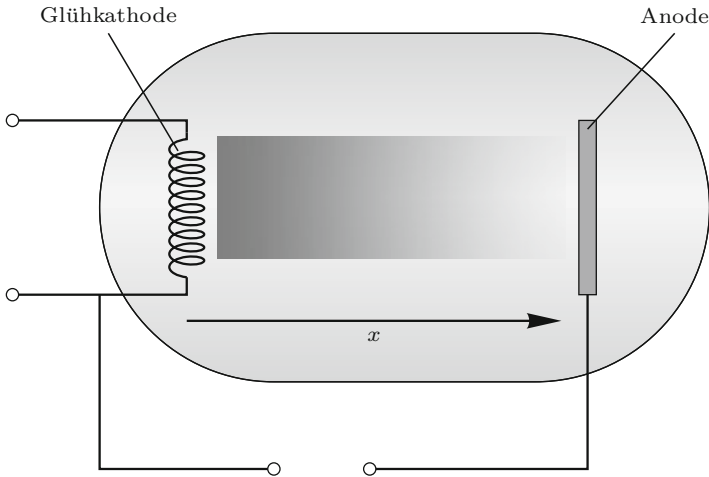


Abb. 1.1 Die Ladungsdichte (schraffiert dargestellt) in einer Vakuumröhre hängt näherungsweise nur vom Abstand x zur Glühkathode und von der Zeit t ab, die seit dem Einschalten vergangen ist

1.1.1 Partielle Ableitungen – Änderungen parallel zu den Achsen

Betrachten wir zunächst als anschauliches Beispiel eine Vakuumröhre (Braun'sche Röhre), wie sie beispielsweise in alten Fernsehern und Oszilloskopen eingesetzt wird, aber auch prinzipiell in Röntgenröhren. In diesen werden an der Kathode freie Elektronen erzeugt (meistens durch Glühemission), die sich dann durch eine angelegte Spannung in Richtung der Anode bewegen.

Vor und direkt nach dem Einschalten der Röhre hat man im kompletten Innenraum eine verschwindende Ladungsdichte. Im Folgenden nehmen wir vereinfachend an, dass sich die Elektronen nur in x -Richtung bewegen und die Ladungsdichte in y - und z -Richtung im Inneren der Röhre annähernd konstant ist. Dann haben wir eine Funktion $\rho(x, t)$, die von zwei Variablen abhängt: Die Ladungsdichte ändert sich sowohl zeitlich als auch räumlich, wenn sich die Elektronen in der Röhre ausbreiten (vgl. Abb. 1.1).

Als naheliegende Vereinfachung bietet es sich an, erst mal nur die Ladungsdichte an einem festen Ort oder zu einer festen Zeit zu betrachten, beispielsweise am Ort $x_0 = 1 \text{ cm}$ oder zur Zeit $t_0 = 5 \text{ s}$. Wir haben dann jeweils eine Funktion, die nur noch von einer Variablen abhängt,

$$f(t) = \rho(1 \text{ cm}, t) \quad \text{bzw.} \quad g(x) = \rho(x, 5 \text{ s}). \quad (1.1)$$

Wenn wir nun wissen wollen, wie sich am Ort $x_0 = 1 \text{ cm}$ die Ladungsdichte momentan zeitlich ändert, dann benötigen wir eben die Ableitung von f nach der Zeit t , also

$$\dot{f}(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Entsprechend erhalten wir die lokale räumliche Änderung der Ladungsdichte zur Zeit $t_0 = 5 \text{ s}$ (also wie schnell sich die Ladungsdichte ändert, wenn man von einem Ort x aus zu einem direkt benachbarten Ort geht) als Ableitung von g nach x ,

$$g'(x) = \frac{dg}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}.$$

Setzen wir die Definitionen (1.1) von f und g wieder ein, so erhalten wir also die momentane zeitliche bzw. lokale räumliche Änderung der Ladungsdichte am festen Ort $x_0 = 1 \text{ cm}$ bzw. zur festen Zeit $t_0 = 5 \text{ s}$ aus den Grenzwerten

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho(1 \text{ cm}, t + \Delta t) - \rho(1 \text{ cm}, t)}{\Delta t} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\rho(x + \Delta x, 5 \text{ s}) - \rho(x, 5 \text{ s})}{\Delta x}.$$

Dies bezeichnet man als die *partiellen Ableitungen* der Ladungsdichte und schreibt dafür

$$\frac{\partial \rho(1 \text{ cm}, t)}{\partial t} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial \rho(x, 5 \text{ s})}{\partial x}.$$

Verallgemeinern wir dies:

Definition: Partielle Ableitung

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *partiell differenzierbar* bezüglich der Variable x_j ($1 \leq j \leq n$), wenn der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_j + \Delta x_j, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{\Delta x_j} \quad (1.2)$$

existiert. Man schreibt dafür dann

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}{\partial x_j}. \quad (1.3)$$

Das Symbol ∂ wird meist als „del“ ausgesprochen, also z. B. „del rho nach del t“ für die partielle zeitliche Ableitung der Ladungsdichte.

Wie so oft in der Mathematik und insbesondere beim Thema Ableitungen sind hier viele verschiedene Schreibweisen üblich. Vor allem in der Physik verwendet man statt der eben definierten sehr häufig auch $\partial_{x_j} f$ oder noch kürzer $\partial_j f$, für zeitliche Ableitungen wie bekannt oft \dot{f} (viele Autoren verwenden diese Schreibweise aber auch nur für $\frac{df}{dt}$), bei räumlichen (wenn klar ist, welche der drei Koordinaten gemeint ist), oft f' . Andere verbreitete Schreibweisen in der Mathematik sind $d_j f$, $f_{|j}$ oder f_{x_j} ; in der allgemeinen Relativitätstheorie ist $f_{,x_j}$ gebräuchlich.

Nach dieser abstrakten Definition kommen wir wieder zum Alltagsgeschäft des Physikers: Rechnen. Da die partiellen Ableitungen letztlich genauso definiert sind

wie die normale Ableitung für Funktionen $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, können auch alle bekannten Ableitungsregeln weiter verwendet werden – man muss nur immer darauf achten, dass die jeweils andere(n) Variable(n) festgehalten, also wie Konstanten behandelt werden.

Beispiele 1.1

- Ein einfaches Beispiel zum Einstieg, mit Verwendung der Summenregel:

$$\begin{aligned}\partial_x (x^2 y + x y^2) &= y \partial_x x^2 + y^2 \partial_x x = 2xy + y^2, \quad \text{aber} \\ \partial_y (x^2 y + x y^2) &= x^2 \partial_y y + x \partial_y y^2 = x^2 + 2xy.\end{aligned}$$

Im ersten Fall wird y als Konstante betrachtet, im zweiten Fall x .

- Die Ladungsdichte sei gegeben durch

$$\rho(x, t) = 5\rho_0 (1 - e^{-3t/t_0 x_0/x}), \quad t, x > 0$$

mit $\rho_0, t_0, x_0 > 0$. Mit der Kettenregel folgen dann die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -5\rho_0 e^{-3t/t_0 x_0/x} \partial_t \left(-3 \frac{t x_0}{t_0 x} \right) = \frac{15 x_0 \rho_0}{t_0 x} e^{-3t/t_0 x_0/x} \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} &= -5\rho_0 e^{-3t/t_0 x_0/x} \partial_x \left(-3 \frac{t x_0}{t_0 x} \right) = -\frac{15 t x_0 \rho_0}{t_0 x^2} e^{-3t/t_0 x_0/x}.\end{aligned}$$

- Öfter mal hat man partielle (kartesische) Ableitungen einer Funktion f zu bilden, die nur vom Radius r abhängt, also nur indirekt von den kartesischen Koordinaten. In solchen Fällen hilft die Kettenregel weiter:

$$\partial_j f(r) = \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_j} \quad \forall j \in \{1; 2; 3\},$$

und mit

$$\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{\partial \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{\partial x_j} = \frac{x_j}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_j}{r}$$

folgt dann

$$\partial_j f(r) = \frac{x_j}{r} \frac{df}{dr}. \quad (1.4)$$

Bei der Ableitung von f nach r kann man nun d schreiben statt ∂ , da die Funktion ja nur von der einen Variable abhängt.

Man schreibt bei den partiellen Ableitungen ∂ statt d , um daran zu erinnern, dass immer nur eine Variable geändert, die anderen aber festgehalten werden; die explizite Koordinatenabhängigkeit $(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$ der Felder wird dagegen meist weggelassen.

Dieses Festhalten ist insbesondere dann wichtig, wenn man beispielsweise die Ladungsdichte am momentanen Ort eines bestimmten Teilchens betrachtet, das sich aber seinerseits auch bewegt: Man hat dann $\rho = \rho(x(t), t)$ und muss beim partiellen Ableiten aufpassen, dass x festgehalten wird, obwohl dort auch eine Zeitabhängigkeit besteht! In Abschn. 1.1.3 werden wir darauf nochmals zurückkommen.

Abschließend sollte noch erwähnt werden, dass man partielle Ableitungen natürlich auch von Vektorfeldern bilden kann – wie bereits bei den normalen Ableitungen macht man das einfach komponentenweise. Beispielsweise ist bei einem Kraftfeld $\mathbf{K} = (K_x(x, y, z), K_y(x, y, z), K_z(x, y, z))^T$ die partielle Ableitung nach x gegeben durch

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_x}{\partial x} \\ \frac{\partial K_y}{\partial x} \\ \frac{\partial K_z}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

1.1.2 Gradient und Richtungsableitung – Änderung in beliebiger Richtung

In Abschn. 1.1.1 haben wir uns angeschaut, wie sich ein Feld ändert, wenn man sich nur in einer Richtung einer Koordinate (räumlich oder zeitlich) „bewegt“. Im Allgemeinen hat man ja aber mehrere Ortskoordinaten und bewegt sich nicht nur entlang einer der Achsen, sondern auch mal schräg dazu. Es wäre also nützlich, eine Ableitung auch in einer *beliebigen* Richtung bilden zu können.

Betrachten wir zunächst eine Ladungsdichte, die nur von x und y abhängt. Wir interessieren uns nun dafür, wie schnell sich ρ ändert, wenn wir uns vom Punkt \mathbf{r} aus in eine Richtung bewegen, die durch einen Einheitsvektor \mathbf{e} vorgegeben wird, d. h., wir interessieren uns für den Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(\mathbf{r} + h\mathbf{e}) - \rho(\mathbf{r})}{h}. \quad (1.5)$$

Dafür gibt es mal wieder viele verschiedene Schreibweisen; wir verwenden hier $\partial_{\mathbf{e}} \rho$ (gesprochen: „Ableitung von ρ in Richtung von \mathbf{e} “).

Um diesen Grenzwert auszuwerten, benutzt man einen kleinen Trick: Statt gleich zum Ort $\mathbf{r} + h\mathbf{e}$ zu gehen, macht man einen Umweg über einen Zwischenpunkt, indem man parallel zu den beiden Achsen läuft (in Abb. 1.2 ist das gleich dreidimensional dargestellt) – denn die Ableitungen in Richtung der Achsen kennen wir ja schon! Führen wir als Abkürzungen $\Delta x = h e_x$, $\Delta y = h e_y$ ein, mit den Komponenten e_x, e_y von \mathbf{e} , so haben wir

$$\rho(\mathbf{r} + h\mathbf{e}) - \rho(\mathbf{r}) = \rho(x + \Delta x, y + \Delta y) - \rho(x + \Delta x, y) + \rho(x + \Delta x, y) - \rho(x, y).$$

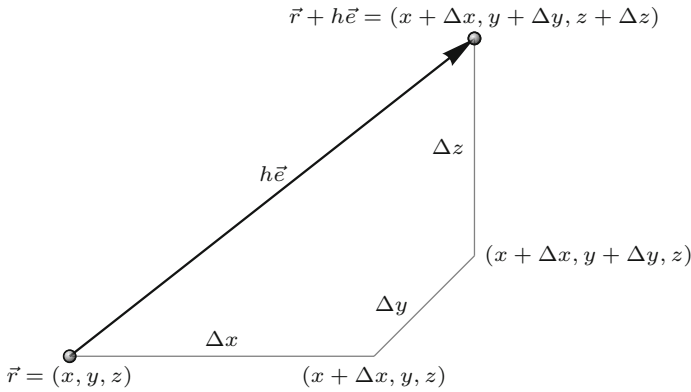


Abb. 1.2 Zur Herleitung der Richtungsableitung (vgl. Text): Statt direkt von \mathbf{r} nach $\mathbf{r} + h\mathbf{e}$ zu gehen, verwenden wir einen Umweg parallel zu den Achsen

Damit können wir den Grenzwert (1.5) aufteilen in

$$\begin{aligned} \partial_e \rho &= e_y \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(x + \Delta x, y + \Delta y) - \rho(x + \Delta x, y)}{\Delta y} \\ &\quad + e_x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(x + \Delta x, y) - \rho(x, y)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Für $h \rightarrow 0$ gilt natürlich auch $\Delta x \rightarrow 0$ und $\Delta y \rightarrow 0$; diese beiden Grenzwerte sind deshalb (nach Definition!) die partiellen Ableitungen,

$$\partial_e \rho = e_y \partial_y \rho(\mathbf{r}) + e_x \partial_x \rho(\mathbf{r}). \quad (1.6)$$

Dabei wurde übrigens auch noch vorausgesetzt, dass die partielle Ableitung nach y stetig bezüglich x ist – nur deshalb dürfen wir im ersten Summanden $x + \Delta x$ durch x ersetzen!

Dasselbe Ergebnis erhält man auch, wenn man den Zwischenpunkt andersherum wählt, also erst entlang der y -, dann entlang der x -Achse läuft – vorausgesetzt, die partielle Ableitung nach x ist stetig bezüglich y . (Nachrechnen!)

Das Ergebnis (1.6) sieht nun aber wie ein Skalarprodukt aus, wobei der Vektor \mathbf{e} mit einem Vektor multipliziert wird, der die Komponenten $\partial_i \rho$ hat. Genauer: Im ursprünglichen Grenzwert (1.5) steht eine Differenz von Skalaren, geteilt durch einen Skalar, was natürlich insgesamt wieder ein Skalar ist. Damit dies identisch zum Ergebnis (1.6) sein kann, in dem die Komponenten des Vektors \mathbf{e} stehen, muss sich das Zahlenpaar $\partial_i \rho$ in der Tat unter Drehungen wie ein zweidimensionaler Vektor verhalten. Da das Ergebnis wieder von \mathbf{r} abhängt, ist es sogar ein Vektorfeld. Dieses bezeichnet man als den *Gradienten* von ρ und schreibt

$$\mathbf{grad} \rho(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x \rho \\ \partial_y \rho \end{pmatrix}.$$

Die Verallgemeinerung auf drei oder mehr Dimensionen ist offensichtlich.

Definitionen

Der *Gradient* eines partiell differenzierbaren skalaren Feldes $f(\mathbf{r})$ ist das Vektorfeld mit den Komponenten

$$(\mathbf{grad} f(\mathbf{r}))_j = \partial_j f(\mathbf{r}). \quad (1.7)$$

Die *Richtungsableitung* des Feldes in Richtung des Einheitsvektors \mathbf{e} erhält man dann einfach als

$$\partial_{\mathbf{e}} f(\mathbf{r}) = \mathbf{e} \circ \mathbf{grad} f(\mathbf{r}). \quad (1.8)$$

Suggestiv, aber mathematisch natürlich nicht korrekt, schreibt man manchmal auch

$$\mathbf{grad} f(\mathbf{r}) = \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}} \quad \text{und} \quad \partial_{\mathbf{e}} f(\mathbf{r}) = \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{e}}.$$

Wählt man \mathbf{e} insbesondere so, dass sich in dieser Richtung die Funktion nicht verändert, so folgt

$$\mathbf{e} \circ \mathbf{grad} f = 0.$$

Der Gradient eines skalaren Feldes f ist also allgemein ein Vektor, der senkrecht zu den Linien (bzw. im dreidimensionalen Fall Flächen) steht, auf denen f konstant ist. Im Spezialfall, dass das skalare Feld ein Potenzial ist, nennt man diese bekanntlich *Äquipotenziallinien* bzw. *-flächen*, ansonsten spricht man oft auch von „Niveaulinien“ bzw. „-flächen“.

Dies kann man sogar noch etwas genauer sagen: Schreiben wir α für den Winkel zwischen \mathbf{e} und $\mathbf{grad} f$, dann ist die infinitesimale Änderung von f in dieser Richtung gegeben durch

$$df = \partial_{\mathbf{e}} f \cdot dh = |\mathbf{grad} f| \cos \alpha \cdot dh.$$

Weil der Kosinus natürlich für $\alpha = 0$ maximal ist, ist dies dann am größten, wenn \mathbf{e} parallel zu $\mathbf{grad} f$ ist. Deshalb zeigt der Gradient immer in die Richtung, in der f am schnellsten zunimmt. Im wichtigen Spezialfall einer potenziellen Energie, bei der die lokale Kraft durch den *negativen* Gradienten gegeben ist, zeigt die Kraft also in die Richtung, in der die potenzielle Energie am schnellsten *abnimmt*; man spricht in diesem Fall manchmal auch vom „vector of steepest descent“.

Außerdem ist noch eine andere, ständig verwendete Schreibweise für den Gradienten zu erwähnen: Da sich $\mathbf{grad} f$ für *jedes* skalare Feld f wie ein Vektor verhält, liegt es nahe, dies als die Anwendung eines „Vektor-Differenzialoperators“ auf das

Feld zu betrachten. Definiert man den sogenannten *Nabla-Operator* durch

$$\nabla := \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y + \mathbf{e}_z \partial_z = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

so verhält sich dieser in der Tat unter Drehungen wie ein Vektor, und man kann kurz schreiben

$$\mathbf{grad} f = \nabla f. \quad (1.10)$$

Der schottische Physiker *Peter Guthrie Tait*, 1831–1901, führte dieses Zeichen ein – als ein auf den Kopf gestelltes Delta (damals noch nicht als Vektor geschrieben, also nicht fettgedruckt bzw. ohne einen Vektorpfeil darüber). Der Name „Nabla“ wurde aber vom schottischen Orientalisten und Theologen *William Robertson Smith* (1846–1894) geprägt, der auch Mathematik studiert hatte: Ihn erinnerte die Form an eine antike Harfe, griechisch $\nu\alpha\beta\lambda\alpha$. Die ursprüngliche Idee dieses Operators stammt von Hamilton, der in seinem „Quaternionen“-System allerdings dafür das Symbol \triangleleft verwendete (vgl. Abschn. 3.4).

Beispiele 1.2

- Für das skalare Feld $f(x, y, z) = x^3 y^2 z$ ergibt sich

$$\nabla f = \mathbf{grad} f = \begin{pmatrix} 3x^2 y^2 z \\ 2x^3 y z \\ x^3 y^2 \end{pmatrix}.$$

- Für $f(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \circ \mathbf{r} = a_x x + a_y y + a_z z$ mit einem konstanten Vektor \mathbf{a} erhalten wir

$$\mathbf{grad} f = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z = \mathbf{a}.$$

- Mithilfe des Ergebnisses (1.4) aus Abschn. 1.1.1 folgt für Funktionen, die nur vom Radius r abhängen, nun einfach

$$\nabla f(r) = \mathbf{grad} f(r) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \frac{df}{dr} = \mathbf{e}_r \frac{df}{dr}. \quad (1.11)$$

Abschließend noch eine wichtige Verallgemeinerung: Da $\mathbf{e} \circ \nabla$ insgesamt ein skalarer Operator ist, kann man ihn auch auf Vektorfelder \mathbf{K} anwenden; das Ergebnis ist wieder ein Vektorfeld. Ausführlich:

$$(\mathbf{e} \circ \nabla) \mathbf{K} = \begin{pmatrix} (\mathbf{e} \circ \nabla) K_x \\ (\mathbf{e} \circ \nabla) K_y \\ (\mathbf{e} \circ \nabla) K_z \end{pmatrix},$$

d. h.

$$[(\mathbf{e} \circ \nabla) \mathbf{K}]_k = \left(\sum_{j=1}^3 e_j \partial_j \right) K_k = \sum_{j=1}^3 (\partial_j K_k) e_j.$$

Dies kann man auch als Produkt einer Matrix, deren k - j -Komponente $\partial_j K_k$ ist, mit dem Vektor \mathbf{e} schreiben. Diese Matrix heißt die *Jacobi-Matrix* von \mathbf{K} , nach dem deutschen Mathematiker *Carl Gustav Jacob Jacobi* (1804–1851); wir schreiben dafür kurz $\mathbf{J}_\mathbf{K}$. (Vorsicht: Das ist keine Standardschreibweise! Mir ist hier keine übliche Abkürzung bekannt.) Es ist also ausführlich

$$\mathbf{J}_\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_x}{\partial x} & \frac{\partial K_x}{\partial y} & \frac{\partial K_x}{\partial z} \\ \frac{\partial K_y}{\partial x} & \frac{\partial K_y}{\partial y} & \frac{\partial K_y}{\partial z} \\ \frac{\partial K_z}{\partial x} & \frac{\partial K_z}{\partial y} & \frac{\partial K_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Die Jacobi-Matrix eines Vektorfeldes wird deshalb manchmal auch als sein *Vektorgradient* bezeichnet; gelegentlich schreibt man suggestiv, aber mathematisch mal wieder alles andere als korrekt,

$$\mathbf{J}_\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial (K_x, K_y, K_z)}{\partial (x, y, z)}.$$

Mit der Jacobi-Matrix können wir dann die Richtungsableitung des Vektorfeldes \mathbf{K} kurz ausdrücken als

$$(\mathbf{e} \circ \nabla) \mathbf{K} = \mathbf{J}_\mathbf{K} \mathbf{e}.$$

Beispiele 1.3

- Für das Vektorfeld

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} xyz \\ \sin(x) \cos(y) \tan(z) \\ e^{x+2y+3z} \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\mathbf{J}_\mathbf{K} = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ \cos(x) \cos(y) \tan(z) & -\sin(x) \sin(y) \tan(z) & \frac{\sin(x) \cos(y)}{\cos^2(z)} \\ e^{x+2y+3z} & 2e^{x+2y+3z} & 3e^{x+2y+3z} \end{pmatrix}.$$

- Betrachten wir den zweidimensionalen Ortsvektor in kartesischen und in ebenen Polarkoordinaten,

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix},$$

so ist

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Mithilfe der Richtungsableitung können wir übrigens auch leicht eine Darstellung des Gradienten in krummlinigen Koordinatensystemen erhalten. Schreiben wir beispielsweise in Zylinderkoordinaten

$$\mathbf{grad} \rho = (\mathbf{grad} \rho)_\varrho \mathbf{e}_\varrho + (\mathbf{grad} \rho)_\varphi \mathbf{e}_\varphi + (\mathbf{grad} \rho)_z \mathbf{e}_z,$$

so erhalten wir wegen der Orthonormalität der Koordinatenvektoren z. B.

$$(\mathbf{grad} \rho)_\varphi = \mathbf{e}_\varphi \circ \mathbf{grad} \rho$$

und entsprechend für die anderen beiden Komponenten. Andererseits können wir für eine infinitesimale Verschiebung $d\mathbf{r}$ allgemein schreiben

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varrho} d\varrho + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} dz = \mathbf{e}_\varrho d\varrho + \varrho \mathbf{e}_\varphi d\varphi + \mathbf{e}_z dz.$$

Beispielsweise bei einer infinitesimalen Verschiebung $d\mathbf{r}$ nur in φ -Richtung gilt also

$$d\mathbf{r} \circ \mathbf{grad} \rho = \varrho d\varphi \mathbf{e}_\varphi \circ \mathbf{grad} \rho = \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} d\varphi,$$

und damit folgt

$$(\mathbf{grad} \rho)_\varphi = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi}.$$

Verfährt man mit den anderen beiden Koordinaten ebenso, so ergibt sich insgesamt in Zylinderkoordinaten

$$\mathbf{grad} = \mathbf{e}_\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.12)$$

In Kugelkoordinaten läuft die Rechnung ähnlich, ist aber aufwendiger. Bereits ein infinitesimaler Vektor sieht komplizierter aus:

$$d\mathbf{r} = e_r dr + r e_\vartheta d\vartheta + r \sin \vartheta e_\varphi d\varphi.$$

Wie man nachrechnen kann (und sollte!), erhält man hier

$$\mathbf{grad} = e_r \frac{\partial}{\partial r} + e_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + e_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (1.13)$$

Im Spezialfall eines skalaren Feldes, das nur von r abhängt, erhalten wir daraus sofort wieder (1.11).

Beispiel 1.4

Beim skalaren Feld $f(\mathbf{r}) = x + y + z$ ist der Gradient in kartesischen Koordinaten offensichtlich gleich

$$\mathbf{grad} f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Schreiben wir dieses Feld in Kugelkoordinaten um, so haben wir

$$f(\mathbf{r}) = r \sin \vartheta \cos \varphi + r \sin \vartheta \sin \varphi + r \cos \vartheta.$$

Die partiellen Ableitungen nach den drei Koordinaten sind dann

$$\partial_r f = \sin \vartheta \cos \varphi + \sin \vartheta \sin \varphi + \cos \vartheta,$$

$$\partial_\vartheta f = r \cos \vartheta \cos \varphi + r \cos \vartheta \sin \varphi - r \sin \vartheta,$$

$$\partial_\varphi f = -r \sin \vartheta \sin \varphi + r \sin \vartheta \cos \varphi,$$

und mit (1.13) sowie der expliziten Form der Einheitsvektoren folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} f &= (\sin \vartheta \cos \varphi + \sin \vartheta \sin \varphi + \cos \vartheta) \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \\ &+ (\cos \vartheta \cos \varphi + \cos \vartheta \sin \varphi - \sin \vartheta) \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix} \\ &+ (-\sin \varphi + \cos \varphi) \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Fasst man alles zusammen, so erhält man nach einer länglichen, aber nicht grundsätzlich schwierigen Rechnung (macht mal!) tatsächlich wieder (1.14).

1.1.3 Totale Ableitung, für Mathematiker und für Physiker

In diesem Abschnitt machen wir einen kurzen Ausflug in die reine Mathematik, um die Bedeutung eines Begriffes zu klären, den Mathematiker und Physiker etwas unterschiedlich verwenden.

Wie wir gesehen haben, kann man die infinitesimale Änderung eines skalaren Feldes f in Richtung eines Einheitsvektors e schreiben als

$$df = \mathbf{grad} f \circ e \, dh.$$

Dies entspricht bei einer Funktion einer Variablen einfach

$$df = f' \cdot dx.$$

Anders gesagt kann man eine Funktion einer Variablen durch ihre Tangente, also eine lineare Funktion, annähern (Taylor-Entwicklung bis zur ersten Ordnung),

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \cdot \Delta x + R(\Delta x),$$

wobei für das „Restglied“ $R(\Delta x)$

$$\frac{R(\Delta x)}{\Delta x} \rightarrow 0$$

gilt für $\Delta x \rightarrow 0$. (Es fällt also mindestens mit $(\Delta x)^2$ ab.) Ähnlich gilt auch für ein skalares Feld

$$f(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) + \mathbf{grad} f(\mathbf{r}) \circ \Delta \mathbf{r} + R(\Delta \mathbf{r}),$$

mit

$$\frac{R(\Delta \mathbf{r})}{|\Delta \mathbf{r}|} \rightarrow 0$$

bzw. für ein Vektorfeld

$$\mathbf{K}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) = \mathbf{K}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}_K \Delta \mathbf{r} + \mathbf{R}(\Delta \mathbf{r}),$$

mit

$$\frac{\mathbf{R}(\Delta \mathbf{r})}{|\Delta \mathbf{r}|} \rightarrow 0$$

für $\Delta \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}$. Die beiden Terme $\mathbf{grad} f(\mathbf{r}) \circ \Delta \mathbf{r}$ bzw. $\mathbf{J}_K \Delta \mathbf{r}$ beschreiben aber genau wieder lineare Abbildungen (im Sinne der linearen Algebra, nicht im Sinne der linearen Funktionen der Schulmathematik!); zusammen mit dem konstanten Summanden $f(\mathbf{r})$ bzw. $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ hat man dann eine affine Abbildung (manchmal auch „inhomogene lineare Abbildung“ genannt – das wäre dann für eine Variable eine lineare Funktion im Sinne der Schulmathematik). Das führt zur folgenden allgemeinen Definition.

Definition: Totale Ableitung (in der Mathematik)

Ein Feld f (skalar-, vektor- oder auch tensorwertig) heißt *total differenzierbar* bei \mathbf{r}_0 , wenn es eine lineare Abbildung A und eine Funktion R gibt (die dann auch entsprechend skalar- vektor- oder tensorwertig sind), sodass

$$f(\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_0) + A(\Delta \mathbf{r}) + R(\Delta \mathbf{r}) \quad (1.15)$$

ist, mit

$$\frac{R(\Delta \mathbf{r})}{|\Delta \mathbf{r}|} \rightarrow 0 \quad \text{für } \Delta \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}. \quad (1.16)$$

Diese lineare Abbildung heißt dann die *totale Ableitung* von f bei \mathbf{r}_0 .

Da eine lineare Abbildung von \mathbb{R}^n nach \mathbb{R}^m (nach Wahl von Basen) bekanntlich immer als reelle $m \times n$ -Matrix darstellbar ist (bzw. im Spezialfall einer Abbildung nach \mathbb{R} als 1×3 -Matrix, also als Vektor), können wir Physiker diese lineare Abbildung als die Jacobi-Matrix (bzw. im Spezialfall eines skalaren Feldes als den Gradienten) identifizieren.

Wichtig ist die Unterscheidung zwischen totaler und partieller Ableitung in der Mathematik vor allem deswegen, weil die Begriffe eben nicht äquivalent sind: Aus der totalen Differenzierbarkeit an einer Stelle folgt zwar die partielle Differenzierbarkeit dort, dies gilt umgekehrt aber im Allgemeinen nicht. Nur wenn man voraussetzt, dass die partiellen Ableitungen dort auch stetig sind, folgt die totale Differenzierbarkeit – wiederum gilt dies umgekehrt aber nicht allgemein. Für eine genaue Diskussion und Beweise zu diesen Aussagen besuche man Vorlesungen zur Analysis II oder schaue sich entsprechende Bücher an. In der Physik können wir aber praktisch immer davon ausgehen, dass die auftretenden Felder genügend „gutartig“ sind, sodass wir uns um diese Feinheiten kaum Gedanken machen müssen.

Trotzdem wird auch in der Physik der Begriff der „totalen Ableitung“ öfter mal verwendet – bedeutet dort aber etwas ein wenig anderes. Als Beispiel betrachten wir wieder eine Ladungsverteilung, deren Dichte $\rho(\mathbf{r})$ zeitlich nun aber konstant sei. Durch diese Ladungsverteilung bewege sich nun ein Punktteilchen mit der Bahnkurve $\mathbf{x}(t)$; am jeweils momentanen Ort des Punktteilchens haben wir also die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{x}(t))$. Damit hängt die Ladungsdichte, die das Punktteilchen momentan „sieht“, von der Zeit ab, obwohl ρ selbst ja zeitunabhängig ist! Man spricht hier auch von einer *impliziten* Zeitabhängigkeit.

Anschaulich erhalten wir dann die momentane zeitliche Änderungsrate der Ladungsdichte, die vom Teilchen „gesehen“ wird, indem wir die Richtungsableitung von ρ in der jeweils momentanen Bewegungsrichtung bilden und dann noch durch dt teilen, also

$$\frac{d\mathbf{x} \circ \mathbf{grad} \rho}{dt} \equiv \mathbf{grad} \rho \circ \mathbf{v}(t)$$

mit der Momentangeschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$. Dass dies mathematisch wirklich korrekt ist, sieht man relativ leicht, indem man sich den entsprechenden Grenzwert

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho(\mathbf{x}(t + \Delta t)) - \rho(\mathbf{x}(t))}{\Delta t}$$

anschaut. Die Rechnung verläuft ähnlich wie bei der Herleitung der Kettenregel für Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, wenn man noch denselben zusätzlichen Trick wie in Abschn. 1.1.1 verwendet: Man teilt die Änderung von \mathbf{x} auf in die Änderungen in den einzelnen Koordinatenrichtungen. (Man muss also wieder voraussetzen, dass die partiellen Ableitungen stetig sind!) Da hier nun ρ nach *allen* Koordinaten abgeleitet wird, ist es naheliegend, dies eben als *totale* Ableitung zu bezeichnen. Entsprechend schreibt man hier wieder d statt ∂ .

Definition: Totale Ableitung (in der Physik)

Hängt ein skalar Feld f implizit von einem Parameter λ ab, so versteht man unter seiner *totalen Ableitung* den Ausdruck

$$\frac{df(\mathbf{r}(\lambda))}{d\lambda} = \mathbf{grad} f \circ \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda}; \quad (1.17)$$

entsprechend hat man bei einem Vektorfeld

$$\frac{d\mathbf{K}(\mathbf{r}(\lambda))}{d\lambda} = \mathbf{J}_K \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda}. \quad (1.18)$$

Manchmal wird dies auch als die „verallgemeinerte Kettenregel“ bezeichnet.

Durch Vergleich mit der mathematischen Definition sehen wir, dass man die totale Ableitung im physikalischen Sinne (die nur für Felder Sinn ergibt, die implizit von einem Parameter λ abhängen) erhält, wenn man die totale Ableitung im mathematischen Sinne (also die lineare Abbildung) auf $\frac{d\mathbf{r}}{d\lambda}$ anwendet. In beiden Fällen ist die Voraussetzung für die Existenz aber die Stetigkeit der partiellen Ableitungen!

Abschließend betrachten wir noch die wichtige Verallgemeinerung, dass ein Feld nicht nur implizit, sondern auch noch explizit von der Zeit abhängt. Man überlegt sich leicht, dass man dann einfach noch einen zusätzlichen Summanden erhält (man betrachte z. B. ein Feld, das von vier Koordinaten abhängt, mit $x_4 = t$), der schlicht

die übliche partielle Ableitung ist,

$$\frac{df(\mathbf{r}(t), t)}{dt} = \mathbf{grad} f \circ \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (1.19)$$

Hier sieht man nun deutlich, worauf schon in Abschn. 1.2 hingewiesen wurde: Es ist wichtig, zwischen partieller und totaler Ableitung zu unterscheiden (zumindest bei Funktionen mit impliziten Abhängigkeiten); deshalb verwendet man für Erstere eben ∂ , für Letztere d .

Beispiel 1.5

Ein Punktteilchen bewege sich auf der Bahnkurve

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 t \\ -\frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$$

mit $v_0, g > 0$ durch eine Ladungsverteilung mit der Dichte

$$\rho(x, y, t) = \rho_0 \frac{xyt}{x_0 y_0 t_0}$$

mit $x_0, y_0, t_0, \rho_0 > 0$. Setzen wir die Zeitabhängigkeit aus der Bahnkurve ein, so ist also

$$\rho(x(t), y(t), t) = -\rho_0 \frac{v_0 g t^4}{2 x_0 y_0 t_0}$$

und deshalb

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho_0 \frac{2 v_0 g t^3}{x_0 y_0 t_0}.$$

Andererseits ist

$$\mathbf{grad} \rho = \rho_0 \frac{t}{x_0 y_0 t_0} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix};$$

also erhalten wir alternativ aus (1.19):

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho_0 \frac{t}{x_0 y_0 t_0} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} v_0 \\ -gt \end{pmatrix} + \rho_0 \frac{xy}{x_0 y_0 t_0} = \rho_0 \frac{v_0 t y - g t^2 x + x y}{x_0 y_0 t_0}.$$

Setzen wir hier $x(t)$ und $y(t)$ ein, so ergibt sich wieder

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho_0 \frac{-\frac{1}{2} v_0 t g t^2 - g t^2 v_0 t - \frac{1}{2} v_0 t g t^2}{x_0 y_0 t_0} = -\rho_0 \frac{2 v_0 g t^3}{x_0 y_0 t_0}.$$

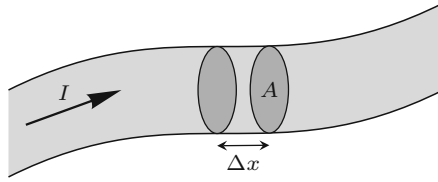


Abb. 1.3 Durch ein Drahtstück der Länge Δx und mit Querschnittsfläche A fließt ein Strom der Stärke I ; wir sind an der Änderung der Ladung in diesem Bereich interessiert

1.1.4 Divergenz – Quellen eines Vektorfeldes

Betrachten wir hier zunächst ein quasi-eindimensionales Problem: In x -Richtung erstreckt sich ein Draht mit konstanter Querschnittsfläche A , durch den ein elektrischer Strom mit der Stärke I fließt. Unter der (mittleren) *Stromdichte* versteht man dann den Quotienten $\vec{j} := \frac{I}{A} \vec{e}_x$. Wir sind nun daran interessiert, wie sich durch diesen Stromfluss die (mittlere) Ladungsdichte $\bar{\rho}$ in einem Intervall der Breite Δx am Ort x_0 ändert; vgl. Abb. 1.3.

Erst mal könnte man denken, dass die zeitliche Änderung der Dichte direkt durch die Stromdichte gegeben ist ($\dot{\bar{\rho}} = \vec{j}_x$ oder ähnliches, analog zu $\dot{Q} = I$) – schließlich führt doch das Weg- oder Hinfließen von Ladung von bzw. zu einer Stelle offensichtlich dazu, dass sich an dieser Stelle die Dichte ändert? Aber man sieht schon direkt an den Einheiten, dass das so nicht stimmen kann.

Der Grund ist letztlich einfach: Man muss berücksichtigen, dass in das Intervall Δx sowohl von der linken als auch von der rechten Seite her Ladung einfließen bzw. daraus hinaus fließen kann. Die gesamte Änderung der Ladungsdichte ergibt sich also aus der *Differenz* der Stromflüsse an den beiden Seiten!

Die Stromdichte gibt an, wie viel Ladung pro Zeiteinheit und Flächeneinheit hin- oder wegfällt, wobei $j_x > 0$ einen Fluss in positive x -Richtung bedeutet. Die gesamte Ladung im Intervall ist $\bar{\rho} A \Delta x$. Mit den vorherigen Überlegungen haben wir damit insgesamt:

$$\partial_t (\bar{\rho} A \Delta x) = (\vec{j}_x(x_0) - \vec{j}_x(x_0 + \Delta x)) \cdot A.$$

Da Δx und A zeitlich konstant sind, folgt daraus sofort

$$\partial_t \bar{\rho} = \frac{\vec{j}_x(x_0) - \vec{j}_x(x_0 + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Im Grenzwert $\Delta x \rightarrow 0$ können wir die räumlichen Mittelwerte von ρ und j_x durch ihre lokalen Werte ersetzen; außerdem geht der Differenzialquotient auf der rechten Seite dann in eine Ableitung über. Es ergibt sich also der einfache Zusammenhang

$$\partial_t \rho = -\partial_x j_x$$

zwischen der zeitlichen Ableitung der Ladungsdichte und der räumlichen Ableitung der Stromdichte.

Die Verallgemeinerung auf drei Dimensionen ist jetzt in kartesischen Koordinaten einfach: Man betrachtet die Stromflüsse senkrecht durch alle sechs Flächen eines (infinitesimalen) Körpers, bei dem jeweils zwei der Begrenzungsflächen parallel zu jeweils einer Koordinatenebene liegen, und addiert alles auf. Es folgt:

$$\partial_t \rho = -(\partial_x j_x + \partial_y j_y + \partial_z j_z).$$

Diese Gleichung drückt aus, dass sich die Ladungsdichte und damit auch die Ladung nur dadurch ändern kann, dass Ladung in ein Volumenelement ein- oder ausströmt, beschreibt also letztlich die Ladungserhaltung. Man nennt sie auch die (oder korrekter eigentlich: eine) *Kontinuitätsgleichung*.

Der Ausdruck in der Klammer auf der rechten Seite beschreibt, wie sich die Dichte am Ort \mathbf{r} zeitlich ändert: Ist der Klammerausdruck positiv, so nimmt die Dichte dort ab, ist er negativ, so nimmt sie zu. Im ersten Fall strömt also mehr Ladung von diesem Ort weg als dort hin, im anderen Fall ist es umgekehrt.

Im ersten Fall sagt man, dass das Strömungsfeld \mathbf{j} an diesem Ort eine *Quelle* hat, im zweiten Fall spricht man von einer *Senke*. Senken werden oft aber auch schlicht als „negative Quellen“ betrachtet, sodass man insgesamt sagen kann: Der Ausdruck in der Klammer beschreibt die Quellen des Feldes. Da man dies häufig braucht, bekommt es einen eigenen Namen: Man nennt es die *Divergenz* des Feldes und schreibt dafür kurz

$$\operatorname{div} \mathbf{j} := \partial_x j_x + \partial_y j_y + \partial_z j_z = \sum_{i=1}^3 \partial_i j_i. \quad (1.20)$$

(Übrigens ist dies genau die Spur der Jacobi-Matrix von \mathbf{j} .) Mit dem Nabla-Operator (1.9) ist (1.20) dasselbe wie

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \nabla \circ \mathbf{j}. \quad (1.21)$$

Die Kontinuitätsgleichung kann damit nun auch kurz geschrieben werden als

$$\partial_t \rho = -\operatorname{div} \mathbf{j} = -\nabla \circ \mathbf{j}. \quad (1.22)$$

Die obige Interpretation der Divergenz kann man sich übrigens auch gut an der ersten Maxwell-Gleichung in differenzieller Form veranschaulichen, $\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \circ \mathbf{E} = k\rho$ (mit einer Konstante k , die vom Einheitensystem abhängt): Dies sagt also aus, dass die Ladungen die Quellen des elektrischen Feldes bilden.

Für magnetische Felder gibt es dagegen keine Quellen (keine magnetischen Monopole) – dies ist die Aussage der Maxwell-Gleichung $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Quellenfreie Felder (also solche, deren Divergenz eben überall gleich null ist) nennt man deshalb manchmal auch „solenoidal“ – frei übersetzt: Das sind solche Felder, wie sie von einer stromdurchflossenen Spule erzeugt werden. (Ein „Solenoid“ ist eine Zylinderspule.)

Beispiele 1.6

- Als einfachstes Beispiel betrachten wir die Divergenz des Ortsvektors selbst:

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \partial_x x + \partial_y y + \partial_z z = 1 + 1 + 1 = 3. \quad (1.23)$$

Dieses Ergebnis benötigt man relativ häufig.

- Mithilfe der Produktregel können wir dies verallgemeinern auf radiale Felder, deren Stärke nur vom Radius abhängt,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} f(r)\mathbf{r} &= \partial_x f(r)x + \partial_y f(r)y + \partial_z f(r)z \\ &= x\partial_x f(r) + f(r)\partial_x x + y\partial_y f(r) + f(r)\partial_y y \\ &\quad + z\partial_z f(r) + f(r)\partial_z z \\ &= x f'(r) \frac{x}{r} + y f'(r) \frac{y}{r} + z f'(r) \frac{z}{r} + 3f(r) \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} f'(r) + 3f(r), \end{aligned}$$

wobei wir das Ergebnis (1.4) verwendet haben, also insgesamt

$$\operatorname{div} f(r)\mathbf{r} = r f'(r) + 3f(r). \quad (1.24)$$

Trotz der einfachen r -Abhängigkeit des Feldes f ergibt sich hier also schon ein etwas komplizierteres Ergebnis.

- Insbesondere folgt für die Divergenz des Einheitsvektors in radialer Richtung

$$\operatorname{div} \mathbf{e}_r = \operatorname{div} \frac{1}{r} \mathbf{r} = r \frac{-1}{r^2} + 3 \frac{1}{r} = \frac{2}{r},$$

für ein Feld mit der typischen r^{-2} -Abhängigkeit (Gravitation, Coulomb) ergibt sich dagegen

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} = \dots = 0,$$

wobei man natürlich $r > 0$ voraussetzen muss.

- Als Letztes betrachten wir das Geschwindigkeitsfeld eines rotierenden Körpers, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, mit konstantem Winkelgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}$.

Hier verwendet man am günstigsten die Summenschreibweise für die einzelnen Komponenten,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) &= \sum_{j=1}^3 \partial_j (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_j = \sum_{j,k,\ell=1}^3 \epsilon_{jk\ell} \omega_k \partial_j x_\ell \\ &= \sum_{j,k,\ell=1}^3 \epsilon_{jk\ell} \omega_k \delta_{j\ell} = \sum_{k,\ell=1}^3 \epsilon_{\ell k\ell} \omega_k = 0,\end{aligned}$$

wobei die Antisymmetrie des ϵ -Tensors ausgenutzt wurde.

Im Gegensatz zum Gradienten ist es bei der Divergenz deutlich schwieriger, eine Darstellung in krummlinigen Koordinatensystemen zu finden; wir werden dies erst in Abschn. 3.1 besprechen.

Abschließend noch ein wichtiger Hinweis: Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist zwar im Allgemeinen kommutativ – aber da nach Vereinbarung ein Differenzialoperator immer auf alles wirkt, was *rechts* von ihm steht, ist $\mathbf{j} \circ \nabla$ dennoch etwas völlig anderes als $\nabla \circ \mathbf{j}$! Ersteres ist ein Differenzialoperator, genauer: eine Richtungsableitung in Richtung von \mathbf{j} ; Letzteres ist die Divergenz des Feldes \mathbf{j} – und damit ein skalar Feld!

1.1.5 Rotation – Wirbel eines Vektorfeldes

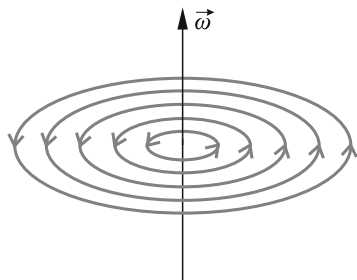
In den Abschn. 1.1.2 und 1.1.4 haben wir die Anwendung des Nabla-Operators auf ein skalar Feld (den Gradienten) und sein Skalarprodukt mit einem Vektorfeld (die Divergenz) betrachtet. Es liegt nahe, auch noch zu untersuchen, was sich aus dem Vektorprodukt von ∇ mit einem Vektorfeld \mathbf{j} ergibt. Dies bezeichnet man als die *Rotation* des Vektorfeldes:

$$\mathbf{rot} \mathbf{j} := \nabla \times \mathbf{j} \quad \Longrightarrow \quad (\mathbf{rot} \mathbf{j})_i = \sum_{\ell,m=1}^3 \epsilon_{i\ell m} \partial_\ell j_m. \quad (1.25)$$

Wiederum muss man vorsichtig sein: Das Vektorprodukt zweier Vektoren ist zwar im Allgemeinen antikommutativ – aber da nach Vereinbarung ein Differenzialoperator immer auf alles wirkt, was *rechts* von ihm steht, ist $-\mathbf{j} \times \nabla$ dennoch etwas völlig anderes als $\nabla \times \mathbf{j}$!

In der englischsprachigen Literatur schreibt man statt **rot** meist *curl*, was zu deutsch so etwas wie „Wirbel“ heißt. Der Name kommt daher, dass **rot** \mathbf{j} eben

Abb. 1.4 Strömungsfeld einer Flüssigkeit, die sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse bewegt



die *Wirbel* in einem Vektorfeld beschreibt. Besonders einfach sieht man das am Strömungsfeld \mathbf{j} einer Flüssigkeit. Diese soll sich beispielsweise in konzentrischen Kreisbahnen mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um den Ursprung bewegen (vgl. Abb. 1.4) und überall dieselbe Dichte ρ haben. Dann gilt

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Die Berechnung der Rotation ist hier zwar etwas unübersichtlich, aber nicht grundsätzlich schwierig:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_i &= \rho \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \partial_j (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_k = \rho \sum_{j,k,\ell,m=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{k\ell m} \omega_\ell \partial_j x_m \\ &= \rho \sum_{j,k,\ell,m=1}^3 \omega_\ell \epsilon_{ijk} \epsilon_{k\ell m} \delta_{jm} = \rho \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j,k=1}^3 \omega_\ell \epsilon_{ijk} \epsilon_{\ell jk} \\ &= \rho \sum_{\ell=1}^3 \omega_\ell \cdot 2\delta_{i\ell} = 2\rho \omega_i. \end{aligned}$$

Es folgt, dass die Rotation des Strömungsfeldes proportional zur Winkelgeschwindigkeit ist,

$$\text{rot}(\rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 2\rho \boldsymbol{\omega};$$

die Rotation ist also in der Tat ein Maß dafür, wie „verwirbelt“ dieses Vektorfeld ist.

Auch für komplizierte Vektorfelder kann man argumentieren, dass die Rotation zumindest lokal die „Wirbelstärke“ angibt. Dazu betrachten wir analog zu Abschn. 1.1.3 eine lineare Näherung von \mathbf{j} bei einem Punkt \mathbf{r}_0 ,

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{j}(\mathbf{r}_0) + \mathbf{J}_j(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

mit der Jacobi-Matrix \mathbf{J}_j . Die Rotation berechnet man hier am besten wieder komponentenweise. Da der erste Summand konstant ist, verschwindet seine Ableitung,

und wir haben

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{rot} \mathbf{j}(\mathbf{r}))_i &= (\mathbf{rot} \mathbf{J}_j(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0))_i = \sum_{k,\ell=1}^3 \epsilon_{ik\ell} \partial_k (\mathbf{J}_j(\mathbf{r}_0)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0))_\ell \\
 &= \sum_{k,\ell,m=1}^3 \epsilon_{ik\ell} J_{\ell m}(\mathbf{r}_0) \partial_k (x_m - x_{0,m}) = \sum_{k,\ell,m=1}^3 \epsilon_{ik\ell} J_{\ell m} \delta_{km} \\
 &= \sum_{k,\ell}^3 \epsilon_{ik\ell} J_{\ell k},
 \end{aligned}$$

also beispielsweise

$$(\mathbf{rot} \mathbf{j}(\mathbf{r}))_1 = J_{32} - J_{23}.$$

Zur Rotation von \mathbf{j} trägt in dieser linearen Näherung also lokal nur der antisymmetrische Teil der Jacobi-Matrix bei. Das Produkt einer antisymmetrischen Matrix mit einem Vektor bewirkt aber genau eine (infinitesimale) Drehung des Vektors, wie man hoffentlich in der Mechanik gelernt hat. Damit wäre die Behauptung gezeigt.

Beispiele 1.7

- Wieder beginnen wir mit dem einfachsten Beispiel, dem Ortsvektor:

$$\mathbf{rot} \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \partial_y z - \partial_z y \\ \partial_z x - \partial_x z \\ \partial_x y - \partial_y x \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (1.26)$$

dies ist also ein wirbelfreies Feld. Vergleichen wir mit der Divergenz: Dort war $\text{div} \mathbf{r} \neq 0$, aber $\text{div} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 0$; hier bei der Rotation ist nun $\mathbf{rot} \mathbf{r} = \mathbf{0}$, aber $\mathbf{rot} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \neq \mathbf{0}$. Diese vier Ergebnisse fassen den Hauptunterschied zwischen Divergenz und Rotation bzw. die Bedeutung dieser Operationen eigentlich schon gut zusammen.

- Sogar bei jedem Feld, das radial nach außen zeigt und nur von r abhängt, erhalten wir allgemein mithilfe der Produktregel

$$\begin{aligned}
 \mathbf{rot} f(\mathbf{r}) \mathbf{r} &= \begin{pmatrix} \partial_y z f(\mathbf{r}) - \partial_z y f(\mathbf{r}) \\ \partial_z x f(\mathbf{r}) - \partial_x z f(\mathbf{r}) \\ \partial_x y f(\mathbf{r}) - \partial_y x f(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \partial_y f(\mathbf{r}) - y \partial_z f(\mathbf{r}) \\ x \partial_z f(\mathbf{r}) - z \partial_x f(\mathbf{r}) \\ y \partial_x f(\mathbf{r}) - x \partial_y f(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} z f'(\mathbf{r}) \frac{y}{r} - y f'(\mathbf{r}) \frac{z}{r} \\ x f'(\mathbf{r}) \frac{z}{r} - z f'(\mathbf{r}) \frac{x}{r} \\ y f'(\mathbf{r}) \frac{x}{r} - x f'(\mathbf{r}) \frac{y}{r} \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (1.27)
 \end{aligned}$$

wobei mal wieder (1.4) verwendet wurde.

- Insbesondere folgt auch für alle Felder mit der üblichen r^{-2} -Abhängigkeit

$$\mathbf{rot} \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} = \mathbf{0};$$

solche Felder sind also (für $r > 0$) nicht nur quellen-, sondern auch wirbelfrei. Außerdem ist $\mathbf{rot} \mathbf{e}_r = \mathbf{rot} \frac{1}{r} \mathbf{r} = \mathbf{0}$.

Auch die Darstellung der Rotation in krummlinigen Koordinatensystemen ist mit den bisherigen Mitteln nur schwierig zu finden; dies wird deshalb ebenfalls auf Abschn. 3.1 verschoben.

1.1.6 Rechenregeln

Da partielle Ableitungen linear sind, folgt zunächst sofort, dass alle drei Differenzialoperatoren linear sind, d. h., für Konstanten α , β und Skalarfelder ϕ , ψ bzw. Vektorfelder \mathbf{A} , \mathbf{B} gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} (\alpha\phi + \beta\psi) &= \alpha \mathbf{grad} \phi + \beta \mathbf{grad} \psi, \\ \operatorname{div} (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) &= \alpha \operatorname{div} \mathbf{A} + \beta \operatorname{div} \mathbf{B}, \\ \mathbf{rot} (\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B}) &= \alpha \mathbf{rot} \mathbf{A} + \beta \mathbf{rot} \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Ebenso gilt natürlich auch bei der Jacobi-Matrix (d. h. beim Vektorgradienten) und bei der Richtungsableitung die Linearität.

Für Produkte von Feldern gibt es zahlreiche Möglichkeiten (Skalar mal Skalar, Skalar mal Vektor, Skalarprodukt von Vektorfeldern und Vektorprodukt von Vektorfeldern) und dementsprechend auch mehrere Produktregeln:

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} (\phi\psi) &= (\mathbf{grad} \phi) \psi + \phi (\mathbf{grad} \psi), \\ \mathbf{grad} (\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) &= (\mathbf{B} \circ \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{B} \times \mathbf{rot} \mathbf{A} + (\mathbf{A} \circ \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{rot} \mathbf{B}, \\ \operatorname{div} (\phi\mathbf{A}) &= (\mathbf{grad} \phi) \circ \mathbf{A} + \phi \operatorname{div} \mathbf{A}, \\ \operatorname{div} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \circ \mathbf{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \circ \mathbf{rot} \mathbf{B}, \\ \mathbf{rot} (\phi\mathbf{A}) &= (\mathbf{grad} \phi) \times \mathbf{A} + \phi \mathbf{rot} \mathbf{A}, \\ \mathbf{rot} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= (\mathbf{B} \circ \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A} - (\mathbf{A} \circ \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Viele davon sind sofort einsichtig; etwas Vorsicht ist nur bei den Produktregeln mit Vektorprodukten nötig – hier ist die Reihenfolge wichtig. Insbesondere bei doppelten Vektorprodukten ist außerdem die Regel „bac-cab“ zu beachten. An dieser Stelle ist wirklich mal ein Satz nötig, der häufig in Lehrbüchern steht, aber leider auch häufig ignoriert wird: Der Beweis wird dem Leser als Übungsaufgabe 1.5 überlassen!

Falls ϕ konstant ist, so kann man bei der ersten, dritten und fünften Produktregel auch einfach wieder die Linearität ausnutzen. Für konstantes A bleibt dagegen

$$\begin{aligned}\mathbf{grad} (A \circ B) &= (A \circ \nabla) B + A \times \mathbf{rot} B, \\ \operatorname{div} (A \times B) &= -A \circ \mathbf{rot} B, \\ \mathbf{rot} (A \times B) &= -(A \circ \nabla) B + A \operatorname{div} B.\end{aligned}\tag{1.30}$$

Beispiel 1.8

Für einen konstanten Vektor a folgt $\operatorname{div} (ra) = (\mathbf{grad} r) \circ a = e_r \circ a = a_r$.

1.2 Die zweiten Ableitungen sind nicht so anschaulich

Wie bereits Funktionen von einer Variablen kann man natürlich auch solche, die von mehreren Variablen abhängen, zweimal nacheinander (oder auch noch öfter) ableiten. Aus der Schulmathematik sollte bekannt sein, dass die zweite Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ die Krümmung des Graphen von f beschreibt. Wie man die zweite Ableitung eines Feldes anschaulich interpretieren kann, werden wir erst in Abschn. 1.3.2 genauer besprechen; hier soll es erst mal nur um die mathematischen Begriffe (und Sätze) gehen.

Es gibt natürlich viele Möglichkeiten, ein Feld zweimal abzuleiten: Man kann ja beispielsweise eine Ableitung nach x beim zweiten Mal wieder nach x ableiten, aber auch nach y oder nach z . Es ist einsichtig, dass wir deshalb beim zweiten Ableiten eines Skalarfeldes nicht mehr mit einem Vektor (dem Gradienten) auskommen, sondern eine Matrix erhalten.

Mit dieser sogenannten Hesse-Matrix beginnen wir hier; im Folgenden untersuchen wir dann alle möglichen Kombinationen der bereits bekannten Differenzialoperatoren Gradient, Divergenz und Rotation. Dabei stoßen wir insbesondere auf den Laplace-Operator, der für große Teile der Physik absolut grundlegend ist.

1.2.1 Die Hesse-Matrix

Was man unter einer zweiten partiellen Ableitung versteht, sollte anschaulich klar sein; beispielsweise ist für ein skalares Feld in der Ebene

$$\partial_x (\partial_y f(x, y)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial_y f(x + \Delta x, y) - \partial_y f(x, y)}{\Delta x}.$$

Dafür schreibt man oft auch

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Bei einem skalaren Feld in n Dimensionen gibt es offensichtlich n^2 verschiedene Möglichkeiten, wie man es zweimal partiell ableiten kann. Es ist naheliegend, all diese Ableitungen in einer Matrix zusammenzufassen, wieder beispielhaft für ein skalares Feld in der Ebene:

$$\begin{pmatrix} \partial_x (\partial_x f(x, y)) & \partial_x (\partial_y f(x, y)) \\ \partial_y (\partial_x f(x, y)) & \partial_y (\partial_y f(x, y)) \end{pmatrix}.$$

Diese nennt man die *Hesse-Matrix* von f , nach dem deutschen Mathematiker *Ludwig Otto Hesse* (1811–1874, eventuell bereits aus der Schule bekannt von der Hesse'schen Normalform). Eigentlich ist dies sogar ein *Matrixfeld*, da das Ergebnis im Allgemeinen ja wieder von \mathbf{r} abhängt, das wird aber praktisch nie dazugesagt. Mir ist dafür keine allgemein übliche Bezeichnung bekannt (man findet in manchen Büchern z. B. Hess_f); ich schreibe \mathbf{H}_f .

Definition: Hesse-Matrix

Existieren für ein skalares Feld $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ alle partiellen zweiten Ableitungen, so definieren wir die Hesse-Matrix bzw. das Matrixfeld durch

$$(\mathbf{H}_f)_{jk} := \partial_j (\partial_k f(\mathbf{r})) \quad 1 \leq j, k \leq n. \quad (1.31)$$

Beispiel 1.9

Für $f(x, y) = x^2 y + x y^2$ mit $\partial_x f = 2xy + y^2$ und $\partial_y f = x^2 + 2xy$ (vgl. Beispiel 1.1) ist

$$\begin{aligned} \partial_x (\partial_x f(x, y)) &= 2y, \\ \partial_x (\partial_y f(x, y)) &= 2x + 2y, \\ \partial_y (\partial_x f(x, y)) &= 2x + 2y, \\ \partial_y (\partial_y f(x, y)) &= 2x. \end{aligned}$$

Also ist die Hesse-Matrix

$$\mathbf{H}_f = 2 \begin{pmatrix} y & x + y \\ x + y & x \end{pmatrix}.$$

Man kann sich vorstellen, dass man die Hesse-Matrix durch Anwendung eines Matrix-Differenzialoperators auf f erhält, nämlich (hier wieder beispielhaft nur für $n = 2$)

$$\begin{pmatrix} \partial_x \partial_x & \partial_x \partial_y \\ \partial_y \partial_x & \partial_y \partial_y \end{pmatrix}.$$

Dies ist identisch zum dyadischen Produkt des Nabla-Operators mit sich selbst, $\nabla \otimes \nabla = \nabla \nabla^\top$. Anders gesagt: Die Hesse-Matrix eines skalaren Feldes erhält man, indem man zweimal nacheinander den Gradienten nimmt – beim ersten Mal erhält man ein Vektorfeld, und bei diesem Vektorfeld bildet man dann wieder jeweils den Gradienten der einzelnen Komponenten. Da ∇ wie ein Vektor transformiert, folgt daraus sofort, dass das Hesse-Matrixfeld ein Tensorfeld zweiter Stufe ist.

In Beispiel 1.9 fällt auf, dass $\partial_x (\partial_y f)$ und $\partial_y (\partial_x f)$ übereinstimmen (und deshalb die Hesse-Matrix symmetrisch ist). Dies ist kein Zufall, sondern ein Beispiel für einen allgemeinen Satz, der meist nach dem deutschen Mathematiker *Hermann Amandus Schwarz* (1843–1921) benannt ist (man findet aber auch die Bezeichnungen „Satz von Clairaut“ oder „Young-Theorem“):

Satz von Schwarz

Ist ein skalares Feld f zweimal stetig partiell differenzierbar, dann ist die Reihenfolge der Ableitungen egal, man kann die Ableitungsoperatoren vertauschen:

$$\partial_j (\partial_k f(\mathbf{r})) = \partial_k (\partial_j f(\mathbf{r})); \quad (1.32)$$

Entsprechendes gilt auch für alle höheren Ableitungen. Daraus folgt sofort: Die Hesse-Matrix ist symmetrisch.

Für den Beweis schaue man in ein Mathe-Buch.

In den allermeisten realistischen Situationen in der Physik sind die betrachteten Felder zweimal (meist sogar unendlich oft) stetig partiell differenzierbar; deshalb wird die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen in der Physik eigentlich immer stillschweigend vorausgesetzt.

1.2.2 Der Laplace-Operator

Die Hesse-Matrix entspricht dem zweimaligen Bilden des Gradienten; dies macht aus einem skalaren Feld f ein deutlich komplizierteres Tensorfeld. Es wäre natürlich schön, wenn die zweite Ableitung eines skalaren Feldes wieder ein skalares Feld wäre. Schauen wir uns die drei bekannten Differenzialoperatoren an, so wird dies offensichtlich dann erfüllt, wenn man zunächst den Gradienten nimmt und danach die Divergenz,

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = (\nabla \circ \nabla) f.$$

Diese zweite Ableitung braucht man so häufig, dass sie einen eigenen Namen hat: Man spricht vom *Laplace-Operator* Δ (nach dem französischen Mathematiker, Physiker und Astronomen *Pierre-Simon Laplace*, 1749–1827, der nicht nur zu Differenzialgleichungen wichtige Beiträge leistete, sondern unter anderem auch wegen seiner Arbeiten zur Wahrscheinlichkeitsrechnung bekannt ist).

Insbesondere in kartesischen Koordinaten folgt, wie man leicht nachrechnet:

$$\Delta\phi := \operatorname{div} \mathbf{grad} \phi = \nabla^2 \phi = \left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 \right) \phi = \sum_{j=1}^3 \partial_j^2 \phi. \quad (1.33)$$

Dies stimmt übrigens mit der Spur der Hesse-Matrix von ϕ überein. Man verliert also bei der Bildung dieser zweiten Ableitung anscheinend viele Informationen (keine der „gemischten“ zweiten Ableitungen kommen vor). Dennoch ist dies in der Physik von überragender Bedeutung: Der Laplace-Operator taucht nicht nur in der Elektrodynamik auf (Poisson- und Laplace-Gleichung, elektromagnetische Wellengleichung), sondern auch in der Akustik (mechanische Wellengleichung), in der Thermodynamik (Wärmeleitungsgleichung) und in der Grundgleichung der Quantenmechanik (Schrödinger-Gleichung im Ortsraum).

Beispiele 1.10

- Für $f(\mathbf{r}) = x^3 y^2 z + x y^3 z^2 + x^2 y z^3 = x y z (x^2 y + y^2 z + x z^2)$ erhalten wir

$$\partial_x^2 f = 6x y^2 z + 2y z^3; \quad \partial_y^2 f = 2x^3 z + 6x y z^2; \quad \partial_z^2 f = 2x y^3 + 6x^2 y z$$

und damit

$$\Delta f = 6x y z (x + y + z) + 2(y z^3 + x^3 z + x y^3).$$

- Den oft benötigten Spezialfall eines skalaren Feldes, das nur von r abhängt, erhalten wir durch Kombination von (1.24) mit (1.11):

$$\begin{aligned} \Delta f(r) &= \operatorname{div} \mathbf{grad} f(r) = \operatorname{div} (f'(r) \mathbf{e}_r) = \operatorname{div} \left(\frac{f'(r)}{r} \mathbf{r} \right) \\ &= r \frac{d}{dr} \frac{f'(r)}{r} + 3 \frac{f'(r)}{r} = f''(r) + 2 \frac{f'(r)}{r}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Im Unterschied zu kartesischen Koordinaten ist also hier *nicht* einfach $\Delta f(r) = \partial_r^2 f(r)$! Den allgemeinen Fall des Laplace-Operators in krummlinigen Koordinatensystemen werden wir erst in Abschn. 3.1 besprechen.

- Da $\mathbf{grad} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r$ ist und wir in Abschn. 1.1.4 bereits gezeigt hatten, dass die Divergenz eines solchen Vektorfeldes für $r > 0$ verschwindet, folgt sofort

$$\Delta \frac{1}{r} = 0 \quad (r > 0).$$

1.2.3 Andere Kombinationen der Differenzialoperatoren

Wir haben drei Differenzialoperatoren zur Verfügung (Gradient, Divergenz, Rotation); wenn wir damit zweite Ableitungen bilden wollen, so gibt es also prinzipiell neun mögliche Kombinationen. Zwei davon ($\mathbf{grad} \otimes \mathbf{grad} = \mathbf{H}$ und $\text{div} \mathbf{grad} = \Delta$) haben wir bereits besprochen; die restlichen sieben handeln wir nur kurz ab, da sie von weit geringerer Bedeutung sind.

- Betrachten wir zunächst $\text{div} \text{div}$ und $\mathbf{rot} \text{div}$. Nehmen wir die Divergenz von einem Vektorfeld, so erhalten wir ein Skalarfeld. Davon können wir dann natürlich nicht nochmals die Divergenz nehmen oder die Rotation berechnen – diese beiden Kombinationen scheinen also unmöglich zu sein. Man könnte sie möglich machen, indem man die Divergenz eines Tensorfelds zweiter Stufe (also eines „Matrixfelds“) nimmt: Man würde dann ein Vektorfeld erhalten, und auf dieses könnte man dann ja wieder div oder \mathbf{rot} anwenden. Mir ist aber keine sinnvolle Anwendung dazu bekannt.
- Ein ähnliches Problem haben wir mit $\mathbf{grad} \mathbf{rot}$: Die Rotation eines Vektorfeldes ergibt wieder ein Vektorfeld; nehmen wir davon dann den Gradienten, so erhalten wir ein Tensorfeld zweiter Stufe. Auch hier ist mir keine praktische Anwendung bekannt.
- Durch explizite Rechnung kann man schnell zeigen (Aufgabe 1.11!), dass bei jedem Vektorfeld \mathbf{K} und bei jedem Skalarfeld f gilt:

$$\text{div} \mathbf{rot} \mathbf{K} = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{rot} \mathbf{grad} f(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad (1.35)$$

Es bleiben nur zwei nicht-triviale Kombinationen, die eine gewisse Bedeutung haben: $\mathbf{rot} \mathbf{rot}$ und $\mathbf{grad} \text{div}$. Beide machen offensichtlich aus einem Vektorfeld wieder ein Vektorfeld, was in vielen Anwendungen in der Elektrodynamik durchaus sinnvoll ist (beispielsweise bei der Herleitung der Wellengleichung). Rechnen wir

Ersteres explizit komponentenweise aus:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{rot\,rot\,K})_i &= \sum_{j,k,\ell,m=1}^3 \epsilon_{ijk} \partial_j (\mathbf{rot\,K})_k = \sum_{j,k,\ell,m=1}^3 \epsilon_{ijk} \partial_j \epsilon_{k\ell m} \partial_\ell K_m \\
 &= \sum_{j,k,\ell,m=1}^3 \epsilon_{kij} \epsilon_{k\ell m} \partial_j \partial_\ell K_m = \sum_{j,\ell,m=1}^3 (\delta_{i\ell} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{j\ell}) \partial_j \partial_\ell K_m \\
 &= \sum_{j=1}^3 \partial_i \partial_j K_j - \sum_{j=1}^3 \partial_j \partial_j K_i = \partial_i \operatorname{div} \mathbf{K} - \Delta K_i.
 \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt dies die wichtige Formel

$$\mathbf{rot\,rot\,K} = \mathbf{grad\,div\,K} - \Delta \mathbf{K}. \quad (1.36)$$

Diesen Zusammenhang werden wir (außer bei der Wellengleichung, siehe oben) auch bei der Herleitung des Laplace-Operators in krummlinigen Koordinatensystemen brauchen.

Schreibt man (1.36) mittels des Nabla-Operators,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{K}) = \nabla (\nabla \circ \mathbf{K}) - (\nabla \circ \nabla) \mathbf{K},$$

so sieht man, dass dies letztlich nichts anderes als die „bac-cab“-Regel für doppelte Vektorprodukte ist. Trotzdem ist es sinnvoll, sich die Regel nochmals ausführlich herzuleiten, da ja, wie mehrfach erwähnt, beim Skalar- und Vektorprodukt mit dem Nabla-Operator die üblichen (Anti-)Kommutativgesetze nicht anwendbar sind: Die Reihenfolge ist wesentlich, und man kann deshalb nicht direkt sagen, an welcher Stelle in der „bac-cab“-Formel jeweils ∇ bzw. \mathbf{K} stehen muss.

Beispiele 1.11

- Ist das skalare Feld $f(\mathbf{r})$ eine Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta f = 0$, so ist $\mathbf{grad\,f}$ ein quellen- und wirbelfreies Vektorfeld: Ersteres wegen $\operatorname{div} \mathbf{grad\,f} = \Delta f = 0$, Letzteres wegen $\mathbf{rot\,grad\,f} = 0$.
-

$$\mathbf{grad\,div\,e}_r = \mathbf{grad\,\frac{2}{r}} = \mathbf{e}_r \frac{d}{dr} \frac{2}{r} = -\frac{2}{r^2} \mathbf{e}_r;$$

andererseits ist

$$\mathbf{grad\,div\,e}_r = \mathbf{rot\,rot\,e}_r + \Delta \mathbf{e}_r = \Delta \mathbf{e}_r,$$

da ja die Rotation von \mathbf{e}_r verschwindet. Damit folgt

$$\Delta \mathbf{e}_r = -\frac{2}{r^2} \mathbf{e}_r,$$

ein Ergebnis, das man durch direkte Anwendung des Laplace-Operators nur recht schwierig erhalten würde.

1.3 Anwendungen: Taylor-Reihen und Extremwerte

Bei den ersten Ableitungen ist noch relativ einsichtig, dass man diese als Physiker braucht; wir hatten dazu schon einige Beispiele angesprochen (Gradient: Richtung der stärksten Änderung eines skalaren Feldes, insbesondere Kraft aus potenzieller Energie berechnen; Divergenz: Quellen eines Vektorfeldes, insbesondere Ladungsdichte aus elektrischer Feldstärke berechnen; Rotation: Wirbel eines Vektorfeldes). Die zweiten und erst recht die höheren Ableitungen sind dagegen anscheinend von eher untergeordneter Bedeutung.

In diesem Abschnitt sprechen wir einige Anwendungsbeispiele an; in Abschn. 3.3 werden wir auch nochmals darauf zurückkommen und den Zusammenhang mit „Stammfunktionen“ (Potenzialen) von Vektorfeldern besprechen.

1.3.1 Taylor-Reihen

In vielen Situationen in der Physik ist es nötig, mit Näherungen zu arbeiten, wenn ein Problem nicht exakt lösbar ist. Bei Funktionen einer Variablen erhält man viele praktische Näherungsformeln mittels der Taylor-Entwicklung (vgl. Anhang). Dies kann man auch auf Felder erweitern.

Betrachten wir zunächst die Entwicklung bis zur zweiten Ordnung. Bei Funktionen von zwei Variablen nutzt man aus, dass $x' = 1$ und $(\frac{1}{2}x^2)'' = 1$ ist; deshalb gilt

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + \frac{1}{2} f''(x_0) (\Delta x)^2.$$

Haben wir dagegen ein Feld $f(\mathbf{r})$, so ist die lineare Näherung gegeben mittels der Richtungsableitung (vgl. Abschn. 1.1.3),

$$f(\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}) \approx f(\mathbf{r}_0) + \Delta \mathbf{r} \circ \mathbf{grad} f(\mathbf{r}_0).$$

Die zweite Ableitung ist durch die Hesse-Matrix gegeben. Um daraus auch wieder einen Skalar zu erhalten, ist es naheliegend, damit eine „quadratische Form“ zu bilden (vgl. Vorlesungen zur linearen Algebra). Wir setzen als Entwicklung bis zur

zweiten Ordnung (quadratische Näherung) also an:

$$f(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) \approx f(\mathbf{r}_0) + \Delta\mathbf{r} \circ \mathbf{grad} f(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{r}^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{r}_0) \Delta\mathbf{r}; \quad (1.37)$$

der Faktor $1/2$ wurde dabei in Analogie zur Taylor-Reihe einer Funktion einer Variablen eingesetzt. Man rechnet leicht nach (das war eine Aufforderung!), dass für die quadratische Form, die man aus einer beliebigen konstanten Matrix \mathbf{A} bildet, gilt

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{r}^\top \mathbf{A} \mathbf{r} \implies \mathbf{H}_f = \mathbf{A};$$

deshalb stimmen in (1.37) in der Tat sowohl die Funktionswerte als auch die ersten und zweiten Ableitungen auf beiden Seiten überein.

Eine alternative Darstellung erhalten wir, wenn wir sowohl die Richtungsableitung als auch die quadratische Form explizit komponentenweise ausschreiben:

$$f(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) \approx f(\mathbf{r}_0) + \sum_{j=1}^3 \Delta x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \Delta x_j \Delta x_k \frac{\partial^2 f}{\partial_j \partial_k}(\mathbf{r}_0).$$

Da die Ableitungsoperatoren nur auf f wirken sollen, aber nicht auf die Δx_j , können wir den letzten Summanden also schreiben als

$$\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \Delta x_j \partial_j \Delta x_k \partial_k f = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^3 \Delta x_j \partial_j \right)^2 f = \frac{1}{2} (\Delta\mathbf{r} \circ \nabla)^2 f. \quad (1.38)$$

Beispiel 1.12

Sehr häufig in der Physik (Elektrodynamik, aber auch Kontinuumsmechanik) benötigt man eine Näherung für ein skalares Feld der Form

$$f(\mathbf{r}) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^n$$

mit einem konstanten Vektor \mathbf{r}_0 und einem reellen Exponenten (oft $n = -1$); dabei soll $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}_0|$ sein. In den meisten Anwendungen genügt eine Entwicklung bis zur zweiten Ordnung. Wir beschränken uns hier der Übersichtlichkeit halber auf $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$.

Zunächst ist

$$f(\mathbf{r}) = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{n/2}$$

und damit

$$\begin{aligned}\partial_x f &= n(x - x_0) [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{n/2-1}, \\ \partial_y f &= n(y - y_0) [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{n/2-1},\end{aligned}$$

also

$$\mathbf{grad} f = n|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{n-2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Weiter folgt

$$\begin{aligned}\partial_x^2 f &= n [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{n/2-1} \\ &\quad + n(n-2)(x - x_0)^2 [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{n/2-2}, \\ \partial_y^2 f &= n [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{n/2-1} \\ &\quad + n(n-2)(y - y_0)^2 [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{n/2-2}, \\ \partial_x \partial_y f &= \partial_y \partial_x f \\ &= n(n-2)(x - x_0)(y - y_0) [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{n/2-2},\end{aligned}$$

also

$$\mathbf{H}_f = n|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{n-2}\mathbf{I} + n(n-2)|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{n-4}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \otimes (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Wegen $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}_0|$ werten wir die Funktion und die Ableitungen nun bei $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ aus,

$$\begin{aligned}f|_{\mathbf{r}_0=\mathbf{0}} &= r^n, \\ \mathbf{grad} f|_{\mathbf{r}_0=\mathbf{0}} &= nr^{n-2}\mathbf{r}, \\ \mathbf{H}_f|_{\mathbf{r}_0=\mathbf{0}} &= nr^{n-2}\mathbf{I} + n(n-2)r^{n-4}\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die quadratische Näherung für kleine \mathbf{r}_0 ,

$$\begin{aligned}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^n &\approx r^n - nr^{n-2}(\mathbf{r} \circ \mathbf{r}_0) + \frac{1}{2}\mathbf{r}_0^\top (nr^{n-2}\mathbf{I} + n(n-2)r^{n-4}\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})\mathbf{r}_0 \\ &= r^n - nr^{n-1}(\mathbf{e}_r \circ \mathbf{r}_0) + \frac{n}{2}r^{n-2}\mathbf{r}_0^2 + \frac{n(n-2)}{2}r^{n-2}(\mathbf{e}_r \circ \mathbf{r}_0)^2.\end{aligned}$$

Diese Rechnung ist relativ unübersichtlich. Zum Glück kann man dasselbe Ergebnis mit einigen zusätzlichen Tricks unter Verwendung der quadratischen Näherung für eine Funktion von nur einer Variablen erhalten. Dafür schreiben wir zunächst

$$\begin{aligned}f(\mathbf{r}) &= \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \circ (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}^n = (r^2 - 2(\mathbf{r} \circ \mathbf{r}_0) + r_0^2)^{n/2} \\ &= r^n \left(1 - 2\frac{r_0 \cos \alpha}{r} + \frac{r_0^2}{r^2} \right)^{n/2},\end{aligned}$$

wobei α der Winkel zwischen \mathbf{r} und \mathbf{r}_0 ist. Wir setzen dann abkürzend $R := r_0/r$; also haben wir

$$f(\mathbf{r}) = r^n g(R) \quad \text{mit } g(R) \equiv (1 - 2R \cos \alpha + R^2)^{n/2}.$$

Da nach Voraussetzung $r \gg r_0$ sein soll, folgt $R \ll 1$ und damit auch

$$|-2R \cos \alpha + R^2| \ll 1$$

für alle Werte von α . Setzen wir nun noch abkürzend $x := -2R \cos \alpha + R^2$ und $N := n/2$, so können wir eine bekannte Näherungsformel verwenden (vgl. Anhang),

$$(1+x)^N \approx 1 + Nx + \frac{N(N-1)}{2}x^2.$$

Damit folgt zunächst

$$\begin{aligned} g(R) &\approx 1 + \frac{n}{2}(-2R \cos \alpha + R^2) + \frac{n(n-2)}{8}(-2R \cos \alpha + R^2)^2 \\ &\approx 1 - nR \cos \alpha + \frac{n}{2}R^2 + \frac{n(n-2)}{2}R^2 \cos^2 \alpha, \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt die Klammern aufgelöst und nur Terme bis maximal R^2 behalten haben (wir wollen ja nur bis zur quadratischen Näherung gehen!). Setzen wir nun die Abkürzung von oben wieder ein, so ist schließlich

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}) &\approx r^n \left(1 - n \frac{r_0}{r} \cos \alpha + \frac{n}{2} \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 + \frac{n(n-2)}{2} \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \cos^2 \alpha \right) \\ &= r^n - n r^{n-1} (\mathbf{e}_r \circ \mathbf{r}_0) + \frac{n}{2} r^{n-2} r_0^2 + \frac{n(n-2)}{2} r^{n-2} (\mathbf{e}_r \circ \mathbf{r}_0)^2, \end{aligned}$$

in völliger Übereinstimmung mit dem Ergebnis oben.

Insbesondere im häufig auftretenden Fall $n = -1$ haben wir

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{e}_r \circ \mathbf{r}_0}{r^2} + \frac{3(\mathbf{e}_r \circ \mathbf{r}_0)^2 - r_0^2}{2r^3}. \quad (1.39)$$

Mehr als die quadratische Näherung benötigt man in der Physik nur selten; der Vollständigkeit halber soll dies hier aber auch kurz besprochen werden.

Schaut man sich (1.38) an, so ist die Verallgemeinerung von (1.37) auf beliebig hohe Ableitungen naheliegend (und wird hier nicht bewiesen),

$$f(\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}) \approx \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} (\Delta \mathbf{r} \circ \nabla)^n f(\mathbf{r}_0). \quad (1.40)$$

Fasst man die Summe vor $f(\mathbf{r}_0)$ insgesamt als einen Differenzialoperator auf, so fällt auf, dass dies genau der Näherung für die Exponentialfunktion bis zur Ordnung N entspricht. Denken wir uns also auch bei Differenzialoperatoren die Exponentialfunktion durch ihre Reihe definiert, so können wir schreiben:

$$f(\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}) = \exp(\Delta \mathbf{r} \circ \nabla) f(\mathbf{r}_0).$$

Man sagt auch, dass der Gradient eine räumliche Verschiebung „erzeugt“; dies ist insbesondere in der Quantenmechanik wichtig, wo der Gradient (in der Ortsdarstellung) bis auf Vorfaktoren der Impulsoperator ist. Hier muss aber explizit darauf hingewiesen werden, dass das nur funktioniert, wenn die partiellen Ableitungen auch wirklich alle vertauschbar sind!

In Mathematik-Vorlesungen wird dies oft deutlich komplizierter notiert: Man definiert zunächst für ein Tripel $n = (n_x, n_y, n_z)$ natürlicher Zahlen den Betrag durch $|n| := n_x + n_y + n_z$ und die Fakultät durch $n! := n_x! \cdot n_y! \cdot n_z!$. Außerdem sei

$$\partial^n f := \partial_x^{n_x} \partial_y^{n_y} \partial_z^{n_z} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}^n := x^{n_x} y^{n_y} z^{n_z}.$$

Dann gilt:

$$f(\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}) = \sum_{|n|=0}^N \frac{1}{n!} \partial^n f(\mathbf{r}_0) (\Delta \mathbf{r})^n + R(\Delta \mathbf{r}),$$

wobei für das Restglied gilt

$$\lim \frac{R(\Delta \mathbf{r})}{|\Delta \mathbf{r}|^N} \rightarrow 0 \quad \text{für } \Delta \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}.$$

Dass diese Darstellung mit der obigen (1.40) übereinstimmt, darf man gerne selbst versuchen nachzurechnen – oder besser: Man schaut sich einen Beweis in einem Mathe-Buch an.

Eine Verallgemeinerung dieser Ergebnisse auf einen Raum beliebiger Dimension n sollte offensichtlich sein. Auch die Übertragung der Überlegungen auf den Fall eines Vektorfeldes statt eines skalaren Feldes ist nicht grundsätzlich schwierig. Die Notation wird dann allerdings noch ein wenig unübersichtlicher, und die Anschauung versagt schon bei niedrigen Ordnungen – bereits die erste Ableitung wird dann ja durch eine Matrix (nämlich \mathbf{J}) beschrieben, die zweite Ableitung ist also ein Objekt mit drei Indizes.

1.3.2 Extremwerte

Aus der Schulmathematik weiß man, dass die zweite Ableitung einer Funktion von einer Variablen die Krümmung des Graphen beschreibt und damit Auskunft über die Art eines Extrempunktes geben kann. Bei skalaren Feldern ist dies ähnlich, aber deutlich komplizierter, da die zweite Ableitung ja eine Matrix ist. (Bei Vektorfeldern ergibt es keinen Sinn, von Extremwerten zu sprechen, da man Vektoren ja nicht der Größe nach sortieren kann.)

Allerdings handelt es sich bei der Hesse-Matrix um einen einfachen Spezialfall: Laut dem Satz von Schwarz ist \mathbf{H} ja symmetrisch. Wir wissen aber, dass symmetrische Matrizen immer diagonalisierbar sind, mit reellen Eigenwerten und Eigenvektoren, die orthonormal gewählt werden können. (Wer das nicht weiß, schaut in den Anhang – oder besucht Vorlesungen zur linearen Algebra.)

Im Folgenden diskutieren wir der Übersichtlichkeit halber nur Felder in der Ebene; den drei- oder höherdimensionalen Fall erhält man als leichte Verallgemeinerung. Nennen wir die orthonormierten Eigenvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, so können wir schreiben

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta x_1 \mathbf{e}_1 + \Delta x_2 \mathbf{e}_2.$$

Außerdem kürzen wir die ersten Richtungsableitungen des Feldes ab,

$$\mathbf{e}_1 \circ \nabla f(\mathbf{r}_0) =: m_1; \quad \mathbf{e}_2 \circ \nabla f(\mathbf{r}_0) =: m_2.$$

Bezeichnen wir die Eigenwerte der Hesse-Matrix bei \mathbf{r}_0 mit λ_1, λ_2 , so folgt

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{r}_0) \Delta \mathbf{r} = \lambda_1 \Delta x_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \Delta x_2 \mathbf{e}_2,$$

und wegen der Orthogonalität ist dann

$$\Delta \mathbf{r}^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{r}_0) \Delta \mathbf{r} = \lambda_1 (\Delta x_1)^2 + \lambda_2 (\Delta x_2)^2.$$

Deshalb kann die quadratische Näherung (1.37) eines skalaren Feldes f in zwei Dimensionen einfach mit einer Summe zweier quadratischer Funktionen g, h von jeweils nur einer Variablen geschrieben werden,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}) &\approx f(\mathbf{r}_0) + m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \frac{1}{2} \lambda_1 (\Delta x_1)^2 + \frac{1}{2} \lambda_2 (\Delta x_2)^2 \\ &\equiv f(\mathbf{r}_0) + g(\Delta x_1) + h(\Delta x_2). \end{aligned}$$

Einen Punkt \mathbf{r}_0 mit $\mathbf{grad} f(\mathbf{r}_0) = \mathbf{0}$ bezeichnet man als *stationären* oder *kritischen* Punkt. (Die erste Bezeichnung stammt daher, dass sich bei kleinen Änderungen von \mathbf{r} der Funktionswert $f(\mathbf{r})$ kaum ändert, die Funktion dort also „stationär“ ist.) Dies entspricht den „Punkten mit waagrechter Tangente“ der Schulmathematik. In solchen Punkten haben wir einfach

$$f(\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}) \approx f(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{2} \lambda_1 (\Delta x_1)^2 + \frac{1}{2} \lambda_2 (\Delta x_2)^2;$$

wie sich f in der Umgebung von \mathbf{r}_0 verhält, hängt also nur noch von den Eigenwerten der Hesse-Matrix ab! Man sieht sofort, dass gilt:

- Sind beide Eigenwerte positiv ($\mathbf{H}_f(\mathbf{r}_0)$ heißt dann *positiv definit*), so ist f in der Umgebung von \mathbf{r}_0 überall größer als bei \mathbf{r}_0 selbst, also hat man dort einen Tiefpunkt.
- Sind beide Eigenwerte negativ ($\mathbf{H}_f(\mathbf{r}_0)$ heißt dann *negativ definit*), so ist f in der Umgebung von \mathbf{r}_0 überall kleiner als bei \mathbf{r}_0 selbst, also hat man dort einen Hochpunkt.
- Ist $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 < 0$ ($\mathbf{H}_f(\mathbf{r}_0)$ heißt dann *indefinit*), so wird f größer, wenn man in Richtung \mathbf{e}_1 geht, aber kleiner, wenn man in der dazu senkrechten Richtung \mathbf{e}_2 geht. Da dies genau die Form eines (Reit-, aber auch Berg-)Sattels beschreibt, spricht man in diesem Fall (und natürlich auch im umgedrehten Fall $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 > 0$) von einem *Sattelpunkt*.
- Es kann auch passieren, dass ein Eigenwert oder sogar beide gleich null sind (auch dann heißt $\mathbf{H}_f(\mathbf{r}_0)$ indefinit). In diesem Fall ist zunächst keine Aussage möglich, welcher der drei Arten von Punkten vorliegt – oder auch keiner davon. Man muss dann höhere Ableitungen betrachten oder testweise die Funktionswerte einiger Punkte in der Nähe berechnen.

Beispiel 1.13

Eine Ladungsverteilung habe die folgende Dichte:

$$\rho(x, y) = \rho_0 \exp\left(-\frac{xy}{x_0 y_0}\right) \quad (1.41)$$

mit $\rho_0, x_0, y_0 > 0$. Gibt es einen Punkt, an dem die Ladungsdichte am höchsten oder am geringsten ist?

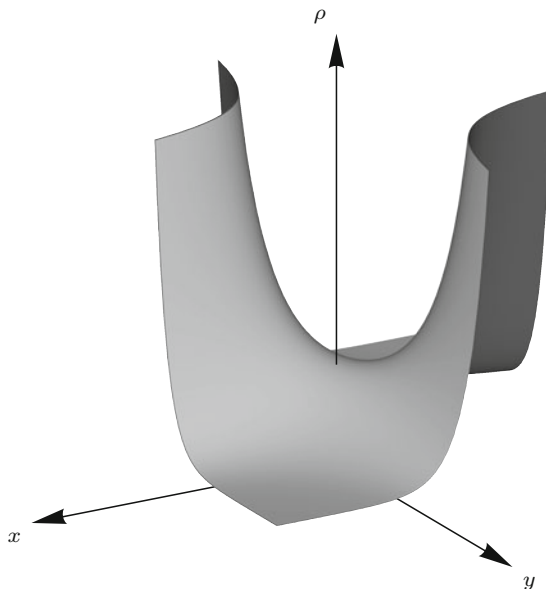
Wir berechnen zunächst die Ableitungen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} f &= -\frac{\rho_0}{x_0 y_0} \exp\left(-\frac{xy}{x_0 y_0}\right) \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \\ \mathbf{H}_f &= \frac{\rho_0}{x_0^2 y_0^2} \exp\left(-\frac{xy}{x_0 y_0}\right) \begin{pmatrix} y^2 & xy \\ xy & x^2 \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{\rho_0}{x_0 y_0} \exp\left(-\frac{xy}{x_0 y_0}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Gradient verschwindet offensichtlich nur für $x = y = 0$, also ist der Ursprung der einzige kritische Punkt. Dort ist die Hesse-Matrix aber einfach

$$\mathbf{H}_f = -\frac{\rho_0}{x_0 y_0} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abb. 1.5 Graph zur Ladungsdichte aus Beispiel 1.13; man sieht, dass über dem Ursprung ein Sattelpunkt vorliegt



Die Eigenwerte dieser Matrix berechnet man leicht zu

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{\rho_0}{x_0 y_0}.$$

Ein Eigenwert ist positiv, der andere negativ – also liegt über dem Ursprung ein Sattelpunkt vor (siehe auch den in Abb. 1.5 dargestellten Graphen). Damit gibt es keinen Punkt, in dem die Ladungsdichte am höchsten oder am geringsten wäre.

Zusammenfassung

- Unter der *partiellen Ableitung* $\partial_i f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}$ einer Funktion f von mehreren Variablen x_1, \dots, x_n nach der Variablen x_i ($1 \leq i \leq n$) versteht man den Grenzwert

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i},$$

d. h., man leitet wie gewohnt nach der Variablen x_i ab und betrachtet alle anderen Variablen dabei als Konstanten. Dies gibt an, wie schnell sich f in Richtung von x_i ändert.

- Der *Nabla-Operator* ist der Vektor, der aus den Ableitungsoperatoren bezüglich der drei räumlichen (kartesischen) Koordinaten besteht,

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

- Die *Richtungsableitung* eines Feldes f in Richtung eines Einheitsvektors \mathbf{e} gibt an, wie sich das Feld in Richtung von \mathbf{e} ändert, und ist gegeben durch

$$\partial_{\mathbf{e}} f := \mathbf{e} \circ \nabla f.$$

- In der Physik versteht man unter der *totalen Ableitung* eines Feldes f , das implizit über die Koordinaten und eventuell auch zusätzlich explizit von einem Parameter (meist der Zeit t) abhängt, nach diesem Parameter den Ausdruck

$$\frac{df}{dt} := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{r}(t + \Delta t), t + \Delta t) - f(\mathbf{r}, t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} \circ \nabla f + \frac{\partial f}{\partial t};$$

in der Mathematik bedeutet „totale Ableitung“ etwas ein wenig anderes, aber Verwandtes (siehe Kapiteltext).

- Die *Divergenz* eines Vektorfeldes \mathbf{j} ist ein Maß für seine Quellen (und Senken). Sie ist definiert als

$$\operatorname{div} \mathbf{j} := \nabla \circ \mathbf{j};$$

für die zeitliche Änderung der Dichte ρ der zugehörigen fließenden Größe gilt die *Kontinuitätsgleichung*

$$\dot{\rho} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

- Die *Rotation* eines Vektorfeldes \mathbf{j} ist ein Maß für seine Wirbel und ist definiert als

$$\operatorname{rot} \mathbf{j} := \nabla \times \mathbf{j}.$$

- Die *Jacobi-Matrix* eines Vektorfeldes \mathbf{K} besteht aus seinen partiellen Ableitungen nach den drei räumlichen (kartesischen) Koordinaten,

$$\mathbf{J}_{\mathbf{K}} := \begin{pmatrix} \frac{\partial K_x}{\partial x} & \frac{\partial K_x}{\partial y} & \frac{\partial K_x}{\partial z} \\ \frac{\partial K_y}{\partial x} & \frac{\partial K_y}{\partial y} & \frac{\partial K_y}{\partial z} \\ \frac{\partial K_z}{\partial x} & \frac{\partial K_z}{\partial y} & \frac{\partial K_z}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

- Für die Vektor-Differenzialoperatoren gibt es zahlreiche Rechen-, insbesondere Produktregeln; vgl. Abschn. 1.1.6.
- Die *Hesse-Matrix* eines skalaren Feldes f besteht aus seinen partiellen zweiten Ableitungen nach den drei räumlichen (kartesischen) Koordinaten,

$$\mathbf{H}_f := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}.$$

Nach dem Satz von Schwarz sind die partiellen Ableitungen vertauschbar; die Hesse-Matrix ist somit symmetrisch.

- Die Spur der Hesse-Matrix bezeichnet man als die Anwendung des *Laplace-Operators* auf das Feld f ,

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \equiv \operatorname{div} \mathbf{grad} f.$$

- Andere wichtige Beziehungen für die zweiten Ableitungen von Feldern sind

$$\mathbf{rot} \mathbf{grad} f = \mathbf{0}; \quad \operatorname{div} \mathbf{rot} f = 0; \quad \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{K} = \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{K} - \Delta \mathbf{K}.$$

- Für ein skalares Feld f lautet die Taylor-Reihe bis zur zweiten Ordnung (quadratische Näherung)

$$f(\mathbf{r}_0 + \Delta \mathbf{r}) \approx f(\mathbf{r}_0) + \Delta \mathbf{r} \circ \mathbf{grad} f(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{r}^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{r}_0) \Delta \mathbf{r}.$$

- Bei einem skalaren Feld f heißen die Stellen, bei denen der Gradient verschwindet, *stationäre/kritische Punkte*. Sind dort alle Eigenwerte der Hesse-Matrix positiv, so hat f dort ein lokales Minimum; sind alle Eigenwerte negativ, ein lokales Maximum.

1.4 Aufgaben

1.1 Von reellen Funktionen einer Variablen ist bekannt, dass aus „differenzierbar“ immer auch „stetig“ folgt. Bei partieller Differenzierbarkeit von Feldern ist dies nicht mehr zwangsläufig so, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- (a) Zeige: f ist in $(0, 0)$ nicht stetig. (*Tipp:* Verwende einen Weg abseits der Koordinatenachsen.)
- (b) Zeige durch explizite Berechnung der beiden Grenzwerte: Die beiden partiellen Ableitungen von f in $(0, 0)$ existieren dennoch.

Lösung

- (a) Auf der x - und der y -Achse ist jeweils überall $f(x, y) = 0$; nähert man sich $(0, 0)$ entlang dieser Achsen, so ist also $\lim_{r \rightarrow 0} f(\mathbf{r}) = 0 = f(\mathbf{0})$, d. h., auf diesen Wegen ist f stetig. Betrachten wir dagegen einen allgemeinen radialen Weg $(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ mit konstantem $\varphi \notin \{0; \pi/2; \pi; 3\pi/2\}$, so ist

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \varphi \cdot r \sin \varphi}{(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)^2} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} = +\infty. \end{aligned}$$

(Es genügt natürlich auch, einen speziellen Weg zu betrachten, z. B. den mit $\varphi = \pi/4$, also $x = y$.) Da dies offensichtlich $\neq f(\mathbf{0})$ ist, folgt, dass f in $\mathbf{0}$ nicht stetig ist.

- (b) Zunächst die partielle Ableitung nach x :

$$\partial_x f(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x}.$$

Da aber $f(\Delta x, 0) = 0$ gilt für alle $\Delta x \in \mathbb{R}$, folgt $\partial_x f(0, 0) = 0$; ebenso ergibt sich $\partial_y f(0, 0) = 0$. Obwohl f in $(0, 0)$ nicht stetig ist, existieren also trotzdem beide partiellen Ableitungen.

Man überlegt sich leicht, dass f in $(0, 0)$ aber nicht *total* differenzierbar ist (im mathematischen Sinne): Versucht man eine lineare Näherung mittels des Gradienten, so wäre

$$f(\Delta \mathbf{r}) = f(0, 0) + \Delta \mathbf{r} \circ \mathbf{grad} f = 0 + \Delta \mathbf{r} \circ \mathbf{0} = 0$$

für alle $|\Delta \mathbf{r}| \ll 1$, was sicher nicht stimmt – wir haben in (a) ja gesehen, dass für die meisten radialen Wege $f(\Delta \mathbf{r}) \rightarrow \infty$ gilt für $\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0$.

In der mathematischen Literatur wird gezeigt, dass gilt: Ist f *total* differenzierbar in einem Punkt \mathbf{r} , so ist f dort auch stetig. Nach dem in Abschn. 1.19 Gesagten folgt also auch: Ist f *stetig* partiell differenzierbar in einem Punkt \mathbf{r} , so ist f dort auch stetig.

1.2 Zeige: Die Einheitsvektoren in Zylinder- und Kugelkoordinaten (vgl. Anhang) erhält man auch, indem man den Ortsvektor \mathbf{r} nach der entsprechenden Koordinate partiell ableitet und diese Vektoren dann normiert.

Lösung

Zunächst ist der Ortsvektor in Zylinderkoordinaten

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

Die partiellen Ableitungen nach den Koordinaten sind

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varrho} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\varrho \sin \varphi \\ \varrho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der erste und dritte Vektor sind bereits normiert und stimmen in der Tat mit \mathbf{e}_ϱ bzw. \mathbf{e}_z überein. Der zweite Vektor hat die Norm

$$\sqrt{\varrho^2 \sin^2 \varphi + \varrho^2 \cos^2 \varphi} = \varrho;$$

teilt man noch dadurch, so erhält man tatsächlich \mathbf{e}_φ .

In Kugelkoordinaten haben wir dagegen

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

und damit

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} r \cos \vartheta \cos \varphi \\ r \cos \vartheta \sin \varphi \\ -r \sin \vartheta \end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hier ist nur der erste Vektor bereits normiert und identisch zu \mathbf{e}_r . Die Norm des zweiten Vektors ist r , die des dritten $r \sin \vartheta$, wie man schnell nachrechnet. Nach Normierung dieser beiden Vektoren erhalten wir also wirklich \mathbf{e}_ϑ und \mathbf{e}_φ .

1.3 Berechne folgende Gradienten:

- grad** r , **grad** ϑ , **grad** φ (in kartesischen und in Kugelkoordinaten),
- grad** $(\mathbf{a} \circ \mathbf{r})$ mit einem konstanten Vektor \mathbf{a} in Kugelkoordinaten (wähle dabei das Koordinatensystem sinnvoll – warum ist das erlaubt?).

Lösung

(a) Mit (1.13) erhalten wir in Kugelkoordinaten sofort

$$\mathbf{grad} r = \mathbf{e}_r; \quad \mathbf{grad} \vartheta = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\vartheta; \quad \mathbf{grad} \varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \mathbf{e}_\varphi,$$

und mit (1.11) ergibt sich auch in kartesischen Koordinaten sofort $\mathbf{grad} r = \mathbf{e}_r$.

Beim Rest müssen wir „etwas“ mehr rechnen.

Zunächst haben wir für $z > 0$

$$\vartheta = \arctan \frac{\varrho}{z} = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z},$$

für $z < 0$ gilt dagegen

$$\vartheta = \pi + \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

In beiden Fällen sind die partiellen Ableitungen natürlich identisch:

$$\begin{aligned} \partial_x \vartheta &= \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right)^2} \cdot \frac{x}{z \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{xz}{r^2 \varrho} = \frac{\cos \vartheta \cos \varphi}{r}, \\ \partial_y \vartheta &= \dots = \frac{\cos \vartheta \sin \varphi}{r}, \\ \partial_z \vartheta &= \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right)^2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z^2} \right) = -\frac{\varrho}{r^2} = -\frac{\sin \vartheta}{r}. \end{aligned}$$

Damit folgt wie oben

$$\mathbf{grad} \vartheta = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\vartheta.$$

Außerdem ist

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x},$$

(zumindest für $x, y > 0$, in allen anderen Fällen läuft die Rechnung praktisch genauso, vgl. oben bei ϑ), also folgt

$$\begin{aligned} \partial_x \varphi &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{\varrho^2} = -\frac{\sin \varphi}{r \sin \vartheta}, \\ \partial_y \varphi &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{\varrho^2} = \frac{\cos \varphi}{r \sin \vartheta}, \\ \partial_z \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Wieder folgt dasselbe Ergebnis wie oben,

$$\mathbf{grad} \varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \mathbf{e}_\varphi.$$

- (b) $\mathbf{a} \circ \mathbf{r}$ ist ein Skalar und damit von der Lage des Koordinatensystems unabhängig. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass \mathbf{a} in z -Richtung zeigt; dann ist $\mathbf{a} \circ \mathbf{r} = a r \cos \vartheta$. Deshalb folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}(\mathbf{a} \circ \mathbf{r}) &= a \mathbf{e}_r \frac{\partial r}{\partial r} \cos \vartheta + a \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial \cos \vartheta}{\partial \vartheta} = a \mathbf{e}_r \cos \vartheta - a \mathbf{e}_\vartheta \sin \vartheta \\ &= a \mathbf{e}_z = \mathbf{a}, \end{aligned}$$

wie wir im Kapiteltext bereits in kartesischen Koordinaten gezeigt hatten.

1.4 Berechne jeweils die Divergenz aller Einheitsvektoren in Zylinder- und Kugelkoordinaten. (*Tipp*: Drücke sie zunächst mittels der kartesischen Koordinaten aus.)

Lösung

In Zylinderkoordinaten haben wir

$$\mathbf{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} \\ \frac{y}{r} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit

$$\partial_x \frac{x}{\varrho} = \frac{\varrho - x \partial_x \varrho}{\varrho^2} = \frac{\varrho - x \frac{x}{r}}{r^2} = \frac{y^2}{\varrho^3}$$

und entsprechend $\partial_y \frac{y}{\varrho} = \frac{x^2}{\varrho^3}$ folgt

$$\operatorname{div} \mathbf{e}_\varrho = \frac{y^2 + x^2}{\varrho^3} = \frac{1}{\varrho}.$$

Dabei wurde verwendet, dass laut Kapiteltext $\partial_i r = \frac{x_i}{r}$ gilt, woraus sofort eine analoge Beziehung für ϱ statt r folgt. (Allerdings gilt natürlich $\partial_z \varrho = 0$.)

Weiter ist

$$\mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{r} \\ \frac{x}{r} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\partial_x \frac{y}{r} = -\frac{y}{r^2} \partial_x r = -\frac{xy}{r^3}, \quad \partial_y \frac{x}{r} = -\frac{xy}{r^3},$$

woraus sofort

$$\operatorname{div} \mathbf{e}_\varphi = 0$$

folgt. Dass außerdem auch $\operatorname{div} \mathbf{e}_z = 0$ ist, ist trivial. (Das ist zwar ein ungern gehörter Spruch von Dozenten, aber hier stimmt's wirklich!)

In Kugelkoordinaten haben wir $\operatorname{div} \mathbf{e}_r = \frac{2}{r}$ bereits im Kapiteltext berechnet. \mathbf{e}_φ in Kugelkoordinaten stimmt mit dem entsprechenden Einheitsvektor in Zylinderkoordinaten überein, das ist also auch schon erledigt. Es bleibt noch

$$\mathbf{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}.$$

Mit

$$\cos \vartheta = \frac{z}{r}; \quad \sin \vartheta = \frac{\varrho}{r}$$

können wir dies schreiben als

$$\mathbf{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \frac{xz}{r\varrho} \\ \frac{yz}{r\varrho} \\ -\frac{\varrho}{r} \end{pmatrix}.$$

Die einzelnen partiellen Ableitungen sind

$$\begin{aligned} \partial_x \frac{xz}{r\varrho} &= z \partial_x \frac{x}{r\varrho} = z \frac{r\varrho - x \partial_x (r\varrho)}{r^2 \varrho^2} = z \frac{r\varrho - x \frac{x}{r} \varrho - x r \frac{x}{\varrho}}{r^2 \varrho^2} \\ &= z \frac{r^2 \varrho^2 - x^2 \varrho^2 - x^2 r^2}{r^3 \varrho^3}, \\ \partial_y \frac{yz}{r\varrho} &= z \frac{r^2 \varrho^2 - y^2 \varrho^2 - y^2 r^2}{r^3 \varrho^3}, \\ &= \partial_z \frac{\varrho}{r} = -\frac{\varrho}{r^2} \partial_z r = -\frac{\varrho z}{r^3}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\operatorname{div} \mathbf{e}_\vartheta = \frac{z}{r^3 \varrho^3} (r^2 \varrho^2 - x^2 \varrho^2 - x^2 r^2 + r^2 \varrho^2 - y^2 \varrho^2 - y^2 r^2 + \varrho^4).$$

Da $\varrho^4 - x^2 \varrho^2 - y^2 \varrho^2 = \varrho^2 (\varrho^2 - x^2 - y^2) = 0$ ist und ebenso $r^2 \varrho^2 - x^2 r^2 - y^2 r^2 = 0$, bleibt schließlich

$$\operatorname{div} \mathbf{e}_\vartheta = \frac{z}{r^3 \varrho^3} \cdot r^2 \varrho^2 = \frac{z}{r\varrho} = \frac{r \cos \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} = \frac{\cot \vartheta}{r}.$$

Dieses Ergebnis kann man *viel* leichter erhalten, wenn man die Divergenz von vornherein in Kugelkoordinaten ausdrückt; vgl. Abschn. 3.1.

1.5 Beweise die Produktregeln (1.29). (Tipp: Rechne in Komponenten.)

Lösung

Die Produktregel für den Gradienten folgt sofort aus der Produktregel für die partiellen Ableitungen,

$$\partial_j (\phi \psi) = (\partial_j \phi) \psi + \phi (\partial_j \psi),$$

da ja $\mathbf{grad} = \sum_{j=1}^3 \mathbf{e}_j \partial_j$ ist.

Auch die Regel für $\text{div}(\phi \mathbf{A})$ beweist man leicht mittels der Produktregel für die partiellen Ableitungen,

$$\begin{aligned} \text{div}(\phi \mathbf{A}) &= \sum_{j=1}^3 \partial_j (\phi \mathbf{A})_j = \sum_{j=1}^3 [A_j (\partial_j \phi) + \phi \partial_j A_j] \\ &= (\mathbf{grad} \phi) \circ \mathbf{A} + \phi \text{div} \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Ähnlich folgt

$$\begin{aligned} (\mathbf{rot}(\phi \mathbf{A}))_j &= \sum_{k,\ell=1}^3 \epsilon_{jk\ell} \partial_k (\phi \mathbf{A})_\ell = \sum_{j=1}^3 [\epsilon_{jk\ell} (\partial_k \phi) A_\ell + \phi \epsilon_{jk\ell} \partial_k A_\ell] \\ &= ((\mathbf{grad} \phi) \times \mathbf{A})_j + (\phi \mathbf{rot} \mathbf{A})_j \end{aligned}$$

und damit

$$\mathbf{rot}(\phi \mathbf{A}) = (\mathbf{grad} \phi) \times \mathbf{A} + \phi \mathbf{rot} \mathbf{A}.$$

Die Divergenz eines Vektorprodukts wird schon etwas unübersichtlicher,

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \sum_{j=1}^3 \partial_j (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_j = \sum_{j,k,\ell=1}^3 \partial_j \epsilon_{jk\ell} A_k B_\ell \\ &= \sum_{j,k,\ell=1}^3 (\epsilon_{jk\ell} B_\ell \partial_j A_k + \epsilon_{jk\ell} A_k \partial_j B_\ell). \end{aligned}$$

Nun wird in beiden Summanden das Verhalten des ϵ -Tensors unter Permutationen der Indizes ausgenutzt,

$$\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \sum_{j,k,\ell=1}^3 (\epsilon_{\ell jk} B_\ell \partial_j A_k - \epsilon_{k j\ell} A_k \partial_j B_\ell).$$

Dies führt auf

$$\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \sum_{\ell=1}^3 B_\ell (\mathbf{rot} \mathbf{A})_\ell - \sum_{k=1}^3 A_k (\mathbf{rot} \mathbf{B})_k = \mathbf{B} \circ \mathbf{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \circ \mathbf{rot} \mathbf{B}.$$

Die Rotation eines Vektorprodukts wird nochmals etwas komplizierter,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_j &= \sum_{k,\ell=1}^3 \epsilon_{jk\ell} \partial_k (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_\ell = \sum_{k,\ell,m,n=1}^3 \epsilon_{jk\ell} \partial_k \epsilon_{\ell mn} A_m B_n \\
 &= \sum_{k,\ell,m,n=1}^3 \epsilon_{\ell jk} \epsilon_{\ell mn} ((\partial_k A_m) B_n + A_m (\partial_k B_n)) \\
 &= \sum_{k,m,n=1}^3 (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) ((\partial_k A_m) B_n + A_m (\partial_k B_n)) \\
 &= \sum_{k=1}^3 ((\partial_k A_j) B_k + A_j (\partial_k B_k) - (\partial_k A_k) B_j - A_k (\partial_k B_j)) \\
 &= (\mathbf{B} \circ \nabla) A_j + A_j \operatorname{div} \mathbf{B} - B_j \operatorname{div} \mathbf{A} - (\mathbf{A} \circ \nabla) B_j,
 \end{aligned}$$

woraus sofort die Behauptung folgt.

Beim Gradienten eines Skalarprodukt ist es günstiger, auf der rechten Seite anzufangen:

$$\begin{aligned}
 &[(\mathbf{B} \circ \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{B} \times \mathbf{rot} \mathbf{A} + (\mathbf{A} \circ \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{rot} \mathbf{B}]_j \\
 &= \sum_{k=1}^3 [B_k \partial_k A_j + A_k \partial_k B_j] + \sum_{k,\ell=1}^3 [\epsilon_{jk\ell} B_k (\mathbf{rot} \mathbf{A})_\ell + \epsilon_{jk\ell} A_k (\mathbf{rot} \mathbf{B})_\ell] \\
 &= \sum_{k=1}^3 \partial_k (A_j B_k) + \sum_{k,\ell,m,n=1}^3 [\epsilon_{jk\ell} B_k \epsilon_{\ell mn} \partial_m A_n + \epsilon_{jk\ell} A_k \epsilon_{\ell mn} \partial_m B_n] \\
 &= \sum_{k=1}^3 \partial_k (A_j B_k) + \sum_{k,\ell,m,n=1}^3 \epsilon_{\ell jk} \epsilon_{\ell mn} \partial_m (A_n B_k) \\
 &= \sum_{k=1}^3 \partial_k (A_j B_k) + \sum_{k,m,n=1}^3 (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) \partial_m (A_n B_k) \\
 &= \sum_{k=1}^3 \partial_k (A_j B_k) + \sum_{k=1}^3 [\partial_j (A_k B_k) - \partial_k (A_j B_k)] = \partial_j \sum_{k=1}^3 (A_k B_k) = \partial_j (\mathbf{A} \circ \mathbf{B});
 \end{aligned}$$

damit ist auch diese Produktregel bewiesen.

1.6 \mathbf{A} und \mathbf{B} seien beide quellen- und wirbelfrei. Welche Quellen und Wirbel hat $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$?

Lösung

Wegen $\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \circ \mathbf{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \circ \mathbf{rot} \mathbf{B}$ und der vorausgesetzten Wirbelfreiheit folgt sofort $\operatorname{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$, d. h., $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ist quellenfrei.

Aus $\mathbf{rot}(A \times B) = (B \circ \nabla)A - B \operatorname{div} A - (A \circ \nabla)B - A \operatorname{div} B$ folgt mit der vorausgesetzten Quellenfreiheit aber nur

$$\mathbf{rot}(A \times B) = (B \circ \nabla)A - (A \circ \nabla)B;$$

das Feld $A \times B$ hat also im Allgemeinen Wirbel (außer die beiden Richtungsableitungen bzw. zumindest ihre Differenz verschwinden ebenfalls).

1.7 Berechne den Gradienten von

- (a) $f(r) = \frac{e^{-kr}}{r}$ mit konstantem Skalar k ,
 (b) $f(r) = \frac{a \circ r}{r^3}$ mit konstantem Vektor a .

Lösung

- (a) Mit der Regel $\mathbf{grad} f(r) = e_r \frac{df}{dr}$ aus dem Kapiteltext erhalten wir leicht

$$\mathbf{grad} \frac{e^{-kr}}{r} = e_r \frac{-k e^{-kr} \cdot r - e^{-kr} \cdot 1}{r^2} = -\frac{(kr + 1)e^{-kr}}{r^2} e_r.$$

- (b) Mit der Produktregel für \mathbf{grad} haben wir zunächst

$$\mathbf{grad} \frac{a \circ r}{r^3} = (\mathbf{grad}(a \circ r)) \frac{1}{r^3} + (a \circ r) \mathbf{grad} \frac{1}{r^3}.$$

Dass $\mathbf{grad}(a \circ r) = a$ ist, hatten wir schon im Kapiteltext gesehen und nochmals in Aufgabe 1.3. Im zweiten Summanden nutzen wir wieder die Regel für $\mathbf{grad} f(r)$ aus. Damit erhalten wir

$$\mathbf{grad} \frac{a \circ r}{r^3} = a \frac{1}{r^3} - (a \circ r) e_r \frac{3}{r^4} = \frac{a - 3(a \circ e_r) e_r}{r^3}.$$

1.8 Ermittle die Jacobi-Matrix für das Vektorfeld $K(r) = \omega \times r$ mit konstantem Vektor ω .

Lösung

Ausführlich geschrieben ist

$$K(r) = \begin{pmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix}.$$

Damit folgt leicht

$$J_K = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix},$$

also eine antisymmetrische Matrix, die genau dem Winkelgeschwindigkeitsvektor ω entspricht. (Das hätte man sich nach den Bemerkungen in Abschn. 1.1.5 auch gleich denken können.)

1.9 Wie muss die Funktion $f(r)$ gewählt werden, damit das Vektorfeld $\mathbf{K}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r}$ quellenfrei ist?

Lösung

Aus dem Kapiteltext wissen wir bereits, dass

$$\operatorname{div} \mathbf{K}(\mathbf{r}) = r f'(r) + 3f(r)$$

ist, vgl. (1.24). Damit \mathbf{K} quellenfrei ist, muss somit

$$f'(r) = -\frac{3}{r} f(r)$$

gelten. Die Ableitung von f erhält man also, indem man f mit einer Konstanten multipliziert und durch die Variable teilt. Dies ist das typische Verhalten einer Potenzfunktion; wir setzen deshalb an: $f(r) = ar^n$. Eingesetzt in die Differenzialgleichung folgt

$$nar^{n-1} = -3ar^{n-1},$$

also $n = -3$. Es folgt, dass das Vektorfeld die Form

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = a \frac{\mathbf{r}}{r^3} = a \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$$

haben muss – genau das typische Verhalten der Gravitations- und der elektrostatischen Kraft. (Dies haben wir umgekehrt im Kapiteltext bereits gezeigt; hier sehen wir nun, dass dies das einzige quellenfreie radiale Feld ist.)

1.10 Berechne für

$$(a) \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} f_1(y, z) \\ f_2(x, z) \\ f_3(x, y) \end{pmatrix} \quad (b) \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(y) \\ g_3(z) \end{pmatrix}$$

mit beliebigen Funktionen f_j von jeweils zwei bzw. g_j von jeweils einer Variablen die Quellen und Wirbel.

Lösung

- (a) Wegen $\partial_x f_1 = 0$ und entsprechend für die anderen Komponenten folgt hier $\operatorname{div} \mathbf{K} = 0$; das Feld ist quellenfrei. Es hat aber Wirbel, da

$$\operatorname{rot} \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \partial_y f_3 - \partial_z f_2 \\ \partial_z f_1 - \partial_x f_3 \\ \partial_x f_2 - \partial_y f_1 \end{pmatrix}$$

im Allgemeinen nicht verschwindet.

- (b) Im Allgemeinen ist \mathbf{K} nicht quellenfrei, $\operatorname{div} \mathbf{K} = \partial_x g_1 + \partial_y g_2 + \partial_z g_3 \neq 0$. Dagegen ist $\operatorname{rot} \mathbf{K} = \mathbf{0}$; das Feld ist also wirbelfrei.

1.11 Zeige: (a) Für beliebige skalare Felder ist $\mathbf{rot grad} f = 0$, (b) für beliebige Vektorfelder ist $\text{div } \mathbf{rot K} = 0$. (Beachte: „Beliebig“ bedeutet hier, dass wir wie üblich in der Physik voraussetzen, dass die Felder genügend oft stetig partiell differenzierbar sind!)

Lösung

(a) Mit $(\mathbf{grad} f)_\ell = \partial_\ell f$ folgt

$$(\mathbf{rot grad} f)_j = \sum_{k,\ell=1}^3 \epsilon_{j k \ell} \partial_k \partial_\ell f.$$

Wegen der vorausgesetzten stetigen Differenzierbarkeit sind die partiellen Ableitungen vertauschbar (Satz von Schwarz). Also ist auch

$$\begin{aligned} (\mathbf{rot grad} f)_j &= \sum_{j,k,\ell=1}^3 \epsilon_{j k \ell} \partial_\ell \partial_k f = - \sum_{j,k,\ell=1}^3 \epsilon_{j \ell k} \partial_\ell \partial_k f \\ &= - \sum_{j,k,\ell=1}^3 \epsilon_{j k \ell} \partial_\ell \partial_k f = -(\mathbf{rot grad} f)_j, \end{aligned}$$

wobei wir die Antisymmetrie des ϵ -Tensors ausgenutzt und danach die Indizes umbenannt haben. Es folgt sofort, dass $(\mathbf{rot grad} f)_j = 0$ sein muss.

(b) Mit

$$(\mathbf{rot K})_j = \sum_{k,\ell=1}^3 \epsilon_{j k \ell} \partial_k K_\ell$$

folgt

$$\text{div } \mathbf{rot K} = \sum_{j=1}^3 \partial_j (\mathbf{rot K})_j = \sum_{j,k,\ell=1}^3 \epsilon_{j k \ell} \partial_j \partial_k K_\ell.$$

Nun kann man genauso wie in (a) argumentieren, dass dies identisch zu $-\text{div } \mathbf{rot K}$ ist und damit gleich null sein muss.

Man könnte übrigens auch versucht sein, einfach zu sagen: „Allgemein gilt doch für jeden Vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, also sollte auch $\nabla \times \nabla = \mathbf{0}$ sein.“ Allerdings ignoriert dies, dass ∇ ein Ableitungsoperator ist und auf das, was rechts davon steht, wirkt. Außerdem verpasst man dabei die wichtige mathematische Voraussetzung der stetigen partiellen Differenzierbarkeit. Letztlich hat man bei dieser Argumentation einfach Glück gehabt – mathematisch sauber ist das nicht (selbst nicht für Physiker-Verhältnisse!).

1.12 Drücke $\Delta(fg)$ durch Ableitungen der skalaren Felder f und g aus.

Lösung

Zunächst besagt die Produktregel für den Gradienten $\mathbf{grad}(fg) = (\mathbf{grad} f)g + f(\mathbf{grad} g)$. Davon müssen wir nun noch die Divergenz nehmen und dabei wieder die entsprechende Produktregel beachten. Dies ergibt

$$\begin{aligned}\Delta(fg) &= \operatorname{div} \mathbf{grad}(fg) = \operatorname{div} [(\mathbf{grad} f)g + f(\mathbf{grad} g)] \\ &= (\operatorname{div} \mathbf{grad} f)g + (\mathbf{grad} f) \circ (\mathbf{grad} g) + (\mathbf{grad} f) \circ (\mathbf{grad} g) + f(\operatorname{div} \mathbf{grad} g) \\ &= g\Delta f + 2(\nabla f) \circ (\nabla g) + f\Delta g.\end{aligned}$$

1.13 Ermittle die Taylor-Reihe für $f(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{a} \circ \mathbf{r}}$ mit konstantem \mathbf{a} um $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ bis zur zweiten Ordnung (quadratische Näherung) sowohl unter Anwendung der in Abschn. 1.3.1 besprochenen Methoden als auch, indem du $f(\mathbf{r})$ als Funktion von nur einer Variablen betrachtest.

Lösung

Offensichtlich ist $f(\mathbf{0}) = 1$. Wegen $\mathbf{grad}(\mathbf{a} \circ \mathbf{r})$ und der Kettenregel ist dann zunächst

$$\mathbf{grad} f(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r}) = i\mathbf{a} f(\mathbf{r}) \implies \mathbf{grad} f(\mathbf{0}) = i\mathbf{a}.$$

Da die Hesse-Matrix letztlich einfach die Anwendung von $\nabla \otimes \nabla$ auf f ist, folgt sofort

$$H_f(\mathbf{r}) = -(\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) f(\mathbf{r}) \implies H_f(\mathbf{0}) = -(\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}).$$

Die quadratische Näherung ist somit gegeben durch

$$f(\mathbf{r}) \approx 1 + i\mathbf{a} \circ \mathbf{r} - \frac{1}{2} \mathbf{r}^\top (\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) \mathbf{r} = 1 + i\mathbf{a} \circ \mathbf{r} - \frac{1}{2} (\mathbf{a} \circ \mathbf{r})^2.$$

Andererseits könnten wir auch einfach abkürzend $x := i\mathbf{a} \circ \mathbf{r}$ setzen und die bekannte quadratische Näherung der Exponentialfunktion verwenden,

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

Dies führt offensichtlich zum selben Ergebnis.

1.14 Ermittle die lokalen Extremwerte der folgenden skalaren Felder:

- (a) $f(x, y) = 2x^3 - y^3 - 3x^2 + 1,5y^2 + 4$,
- (b) $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2$.

Lösung

- (a) Man berechnet schnell den Gradienten und die Hesse-Matrix,

$$\mathbf{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x^2 - 6x \\ -3y^2 + 3y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x - 6 & 0 \\ 0 & -6y + 3 \end{pmatrix}.$$

Aus der Bedingung $\mathbf{grad} f = \mathbf{0}$ für stationäre Punkte erhalten wir $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, also insgesamt vier Punkte. Werten wir dort jeweils die Hesse-Matrix aus,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_f(0, 0) &= \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, & \mathbf{H}_f(1, 0) &= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{H}_f(0, 1) &= \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, & \mathbf{H}_f(1, 1) &= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte können wir hier sofort ablesen, da die Matrizen ja diagonal sind. Bei den Punkten $(0, 0)$ und $(1, 1)$ ist jeweils ein Eigenwert positiv, der andere negativ; dort haben wir also Sattelpunkte. Bei $(1, 0)$ ist die Matrix positiv definit, d. h., es liegt ein lokales Minimum vor mit dem Wert $f(1, 0) = 3$; bei $(0, 1)$ ist die Matrix dagegen negativ definit, wir haben also das lokale Maximum $f(0, 1) = 4,5$.

- (b) Hier ist zunächst

$$\mathbf{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Bedingung $\mathbf{grad} f = \mathbf{0}$ liefert hier ein lineares Gleichungssystem für x und y , bei dem man schnell sieht, dass die einzige Lösung $x = y = 0$ ist – nur beim Ursprung haben wir einen stationären Punkt. Die Eigenwertgleichung für die Hesse-Matrix führt dann auf

$$(3 - \lambda)^2 - 4 = 0,$$

was die beiden Lösungen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$ hat. Die Hesse-Matrix ist also positiv definit; damit haben wir im Ursprung das lokale Minimum $f(0, 0) = 0$.

Integrale – unendliche Summen in der Ebene und im Raum

2

In Kap. 1 haben wir gesehen, wie man im \mathbb{R}^3 verschiedene Arten von Ableitungen berechnen kann. Bereits aus der Schule ist bekannt, dass die Umkehrung des Ableitens das Integrieren („Aufleiten“) ist. Dementsprechend schauen wir uns in diesem Kapitel Integrale für Funktionen mehrerer Variablen an.

Wir fangen hier mit dem Wegintegral an, das eventuell bereits aus der Mechanik bekannt ist – in dem Fall betrachtet diesen Abschnitt als Wiederholung. In aufsteigender Schwierigkeit besprechen wir dann Flächenintegrale in der Ebene, Volumenintegrale und schließlich Flächenintegrale im Raum. Letztlich führt man all diese Integrale auf (Produkte von) eindimensionale(n) Integrale(n) zurück. Alle Definitionen und Berechnungen werden hier anschaulich motiviert, und es wird jeweils nur knapp angedeutet, wie man dies mathematisch sauberer definieren müsste.

Den Abschluss dieses Kapitels bildet eine kurze Erläuterung des mathematischen Begriffs des Lebesgue-Integrals. Für die meisten Physiker ist dies zwar nicht wirklich wesentlich – aber zumindest mathematisch Interessierte sollten es sich einmal durchlesen, um die Hintergründe zu diesem Kapitel besser zu verstehen.

2.1 Wegintegrale

Eine Kurve in der Ebene oder im Raum kann dadurch beschrieben werden, dass der Ortsvektor von einem Parameter abhängt; wie üblich setzen wir voraus, dass diese Abhängigkeit genügend „gutartig“ ist. (Es genügt, wenn die Funktion zumindest stückweise „glatt“, d. h. stetig differenzierbar ist.) Insbesondere bei einer Bahnkurve eines Teilchens wählt man als Parameter meist die Zeit t , also $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Hat man statt der Zeit einen anderen Parameter, so läuft die Rechnung natürlich völlig analog.

Will man nun beispielsweise die Arbeit wissen, die ein Kraftfeld $\mathbf{K}(\mathbf{r})$ an dem Teilchen verrichtet, während es auf dieser Bahn fliegt, so teilt man sich die Bahn in infinitesimale Wegstücke $d\mathbf{r}$ auf (vgl. Abb. 2.1). Man berechnet nun zunächst für jedes dieser Wegstücke die (ebenfalls infinitesimale) Arbeit, also $dW = \mathbf{K}(\mathbf{r}) \circ d\mathbf{r}$,

Abb. 2.1 Um ein Integral einer Größe längs einer Kurve zu berechnen, denkt man sich diese in infinitesimale Wegstücke $d\mathbf{r}$ aufgeteilt



und summiert dann alle auf. Dies schreibt man kurz als das Integral

$$\int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{K}(\mathbf{r}) \circ d\mathbf{r},$$

wobei \mathbf{r}_a bzw. \mathbf{r}_b die Ortsvektoren der Anfangs- bzw. Endpunkte der Bahn sind, und bezeichnet es als das *Wegintegral* über \mathbf{K} von \mathbf{r}_a nach \mathbf{r}_b . Andere übliche Bezeichnungen sind hier auch „Kurvenintegral“ oder „Linienintegral“, manche Autoren schreiben auch „Pfadintegral“ – Letzteres ist aber eigentlich etwas anderes!

Nochmals mathematisch etwas sauberer definiert: Wir nähern die Bahnkurve von \mathbf{r}_a bis \mathbf{r}_b an durch einen jeweils stückweise geraden Weg, der durch die Vektoren $\Delta\mathbf{r}_j$ beschrieben wird mit $1 \leq j \leq n$ (die nicht notwendigerweise alle gleich lang sein müssen). Es gilt also: Es gibt Punkte mit Ortsvektoren $\mathbf{r}_1 \equiv \mathbf{r}_a, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_{n+1} \equiv \mathbf{r}_b$ auf der Kurve, sodass $\Delta\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_a, \Delta\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2, \dots, \Delta\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_b - \mathbf{r}_n$ ist. Dann definieren wir

$$\int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{K}(\mathbf{r}) \circ d\mathbf{r} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mathbf{K}(\mathbf{r}_j) \circ \Delta\mathbf{r}_j, \quad (2.1)$$

wobei im Grenzwert unendlich vieler Punkte die Längen *aller* $\Delta\mathbf{r}_i$ gegen null gehen sollen. (Dass dieser Grenzwert überhaupt existiert, setzen wir als Physiker mal wieder stillschweigend voraus.)

Ist die Bahnkurve geschlossen, sind also Anfangs- und Endpunkt identisch, so schreibt man meist

$$\oint \mathbf{K}(\mathbf{r}) \circ d\mathbf{r}$$

und nennt dies ein *geschlossenes* Wegintegral oder auch die *Zirkulation* von \mathbf{K} , manchmal auch die „Wirbelstärke“. (Der Grund für letztere Bezeichnung wird erst beim Satz von Stokes in Abschn. 3.2 klar werden.)

Zur konkreten Berechnung des Integrals nutzt man meist die Abhängigkeit vom Parameter aus, hier also

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}dt = \mathbf{v}(t)dt.$$

Dies ist völlig analog zur Integration durch Substitution bei eindimensionalen Integralen; eine genauere mathematische Begründung sparen wir uns deshalb hier. Damit wird das Integral zu

$$\int_{\mathbf{r}_a}^{\mathbf{r}_b} \mathbf{K}(\mathbf{r}) \circ d\mathbf{r} \equiv \int_{t_a}^{t_b} \mathbf{K}(\mathbf{r}(t)) \circ \mathbf{v}(t) dt,$$

wobei t_a bzw. t_b die Zeitpunkte sind, zu denen sich das Teilchen am Anfangs- bzw. Endpunkt der Bahn befindet. Somit ist das Wegintegral auf ein gewöhnliches eindimensionales Integral zurückgeführt. Dies kann man im speziellen Beispiel hier auch ganz physikalisch anschaulich verstehen: $\mathbf{K}(\mathbf{r}(t)) \circ \mathbf{v}$ ist die momentane Leistung zur Zeit t , und das Zeitintegral über die Leistung ergibt natürlich die gesamte Arbeit.

Beispiele 2.1

- Wir betrachten einen zweidimensionalen harmonischen Oszillator, die Kraft sei also gegeben durch $\mathbf{K}(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r}$ mit $k > 0$ und $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$. Ein Körper der Masse m bewege sich in diesem Kraftfeld auf der elliptischen Bahnkurve, die durch

$$x(t) = a \cos(\omega t), \quad y(t) = b \sin(\omega t)$$

beschrieben wird, mit $a, b > 0$ und $\omega = \sqrt{k/m}$. Dann ist

$$\mathbf{K}(x(t), y(t)) = -k \begin{pmatrix} a \cos(\omega t) \\ b \sin(\omega t) \end{pmatrix},$$

und

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} -a\omega \sin(\omega t) \\ b\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Für die insgesamt verrichtete Arbeit bei einem Umlauf ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}\oint \mathbf{K} \circ d\mathbf{r} &= -k\omega \int_0^T dt \begin{pmatrix} a \cos(\omega t) \\ b \sin(\omega t) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -a \sin(\omega t) \\ b \cos(\omega t) \end{pmatrix} \\ &= -k\omega (b^2 - a^2) \int_0^{2\pi/\omega} dt \sin(\omega t) \cos(\omega t) = 0.\end{aligned}$$

- Im Kraftfeld $\mathbf{K}(\mathbf{r}) = \frac{k}{r^3} \mathbf{r}$ mit $k > 0$ und $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ bewege sich ein Teilchen der Masse m mit konstanter Geschwindigkeit vom Betrag v vom Punkt $(1, 2, 3)$ zum Punkt $(2, 5, 4)$. Der Geschwindigkeitsvektor ist deshalb

$$\mathbf{v} = \frac{v}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und die Bahnkurve kann geschrieben werden als

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{vt}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq t \leq 1$. Damit ist

$$\begin{aligned}r = |\mathbf{r}| &= \sqrt{\left(1 + \frac{vt}{\sqrt{11}}\right)^2 + \left(2 + \frac{3vt}{\sqrt{11}}\right)^2 + \left(3 + \frac{vt}{\sqrt{11}}\right)^2} \\ &= \sqrt{14 + \frac{20vt}{\sqrt{11}} + v^2 t^2},\end{aligned}$$

woraus sich für die Kraft in Abhängigkeit der Zeit

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}(t)) = \frac{k}{\sqrt{14 + \frac{20vt}{\sqrt{11}} + v^2 t^2}^3} \begin{pmatrix} 1 + \frac{vt}{\sqrt{11}} \\ 2 + \frac{3vt}{\sqrt{11}} \\ 3 + \frac{vt}{\sqrt{11}} \end{pmatrix}$$

ergibt. Für die verrichtete Arbeit folgt

$$\begin{aligned}
 \int_{(1,2,3)}^{(2,5,4)} \mathbf{K} \circ d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{K} \circ \mathbf{v} \, dt = k \int_0^1 \frac{\frac{10v}{\sqrt{11}} + v^2 t}{\sqrt{14 + \frac{20vt}{\sqrt{11}} + v^2 t^2}}^3 dt \\
 &= kv \int_0^1 \frac{\frac{10}{\sqrt{11}v} + t}{\sqrt{\left(t + \frac{10}{\sqrt{11}v}\right)^2 + \frac{54}{11v^2}}}^3 dt \\
 &= kv \int_{10/\sqrt{11}v}^{1+10/\sqrt{11}v} \frac{u}{\sqrt{u^2 + \frac{54}{11v^2}}}^3 du \\
 &= -kv \left[\frac{1}{\sqrt{u^2 + \frac{54}{11v^2}}} \right]_{10/\sqrt{11}v}^{1+10/\sqrt{11}v} \\
 &= kv^2 \left[\frac{1}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{20}{\sqrt{11}}v + 15}} \right].
 \end{aligned}$$

Hat man keine direkte Parameterdarstellung der Kurve, so kann man das Integral auch anders berechnen (was aber im Allgemeinen deutlich umständlicher ist): Man schreibt sich letztlich nur das Skalarprodukt ausführlich hin,

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{K}(\mathbf{r}) \circ d\mathbf{r} &= \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (K_x(\mathbf{r})dx + K_y(\mathbf{r})dy + K_z(\mathbf{r})dz) \\
 &= \int_{x_1}^{x_2} K_x(x, y(x), z(x))dx + \int_{y_1}^{y_2} K_y(x(y), y, z(y))dy \\
 &\quad + \int_{z_1}^{z_2} K_z(x(z), y(z), z)dz.
 \end{aligned}$$

Dass dies mathematisch tatsächlich funktioniert, kann man nachprüfen, indem man auf die Definition (2.1) des Integrals als Grenzwert zurückgeht; wieder verzichten wir darauf, die Details anzugeben.

Bei der konkreten Berechnung muss man insbesondere darauf achten, dass die Koordinaten, über die jeweils gerade nicht integriert wird, im Allgemeinen von der

Integrationsvariable abhängen. Dies ist nur dann nicht der Fall, wenn der Integrationsweg genau parallel zu einer Koordinatenachse verläuft; insbesondere für solche Integrale bietet sich diese Rechenmethode also an.

Beispiele 2.2

Das Kraftfeld sei nun gegeben durch

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 2xy \\ z - 4y^2 \\ 3xyz \end{pmatrix}.$$

- Wir bewegen uns entlang der bzw. parallel zu den Koordinatenachsen vom Ursprung zum Punkt $(1, 1, 1)$: erst entlang der x -Achse (also ist zunächst $y = z = 0$), dann parallel der y -Achse ($x = 1, z = 0$) und schließlich parallel zur z -Achse ($x = y = 1$). Die verrichtete Arbeit ist deshalb

$$\begin{aligned} \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \mathbf{K} \circ d\mathbf{r} &= \int_0^1 K_x(x, 0, 0) dx + \int_0^1 K_y(1, y, 0) dy + \int_0^1 K_z(1, 1, z) dz \\ &= \int_0^1 0 dx - \int_0^1 y^2 dy + \int_0^1 3z dz = 0 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

- Wieder bewegen wir uns vom Ursprung zum Punkt $(1, 1, 1)$, diesmal aber auf einem Parabelstück, das durch

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq t \leq 1$ parametrisiert ist. Einerseits folgt mit

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}(\mathbf{r}(t)) = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ -3t^2 \\ 3t^4 \end{pmatrix}$$

dann für die Arbeit

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \mathbf{K} \circ d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{K}(\mathbf{r}(t)) \circ \mathbf{v} dt = \int_0^1 (-t^2 + 6t^5) dt = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

Andererseits ist hier $x = y = \sqrt{z}$ und $z = x^2 = y^2$. Damit folgt

$$\begin{aligned}K_x(x, y(x), z(x)) &= 2x^2, \\K_y(x(y), y, z(y)) &= -3y^2, \\K_z(x(z), y(z), z) &= 3z^2;\end{aligned}$$

also ergibt sich auch so die Arbeit zu

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \mathbf{K} \circ d\mathbf{r} = \int_0^1 2x^2 dx - \int_0^1 3y^2 dy + \int_0^1 3z^2 dz = \frac{2}{3} - 1 + 1 = \frac{2}{3}.$$

Auffällig ist hier, dass wir auf verschiedenen Wegen durch das Kraftfeld unterschiedliche Mengen an Arbeit benötigen, obwohl Anfangs- und Endpunkt jeweils dieselben sind. Auf die Frage, unter welchen Bedingungen die Arbeit (bzw. Wegintegrale allgemein) wegunabhängig ist, werden wir erst in Abschn. 3.3 genauer eingehen.

Abschließend sei noch erwähnt, dass man völlig analog auch andere Arten von Wegintegralen wie z. B.

$$\int \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad \text{oder} \quad \int \mathbf{A}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{r}$$

definieren kann – die man dann auch analog auswertet. Insbesondere ein Integral der zweiten Art tritt bei der Berechnung von Magnetfeldern mittels des Gesetzes von Biot-Savart auf, wie man in Büchern zur Elektrodynamik nachlesen kann.

Verwendet man allerdings krummlinige Koordinaten und stellt $d\mathbf{r}$ bzw. $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{r}$ mit den entsprechenden Einheitsvektoren dar, so ist nun allerdings darauf zu achten, dass die Einheitsvektoren selbst auch von den Koordinaten abhängen!

Beispiel 2.3

Wir betrachten die konstante Funktion $f(\varrho, \varphi) = 1$ und integrieren sie entlang einer Kreislinie mit Radius ϱ_0 um den Ursprung. Dann ist

$$d\mathbf{r} = \varrho_0 e_\varphi d\varphi = \varrho_0 \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} d\varphi$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_{\text{Kreis}} f(\varrho, \varphi) d\mathbf{r} &= \varrho_0 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} d\varphi \\ &= \varrho_0 \left[\begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \right]_0^{2\pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also das auf den ersten Blick verblüffende Ergebnis, dass das Integral über eine Funktion, die überall positiv ist, verschwindet. Das kommt aber letztlich einfach davon, dass wir alle $d\mathbf{r}$ aufsummieren – und diese bilden ja insgesamt eine Kreislinie, d. h. eine geschlossene Vektorkette.

2.2 Flächenintegrale in der Ebene

Oft betrachtet man Funktionen, die von beiden Raumkoordinaten in der Ebene abhängen, beispielsweise die Flächenladungsdichte $\sigma(x, y)$ einer Figur in der x - y -Ebene.

Falls σ konstant ist und die Figur den Flächeninhalt F hat, so erhält man die gesamte Ladung Q natürlich einfach als das Produkt σF . Im Allgemeinen wird σ allerdings nicht konstant sein. Dann kann man folgendermaßen vorgehen: Man teilt sich die Figur in kleine Flächenstücke ΔF auf (vgl. Abb. 2.2). Diese Flächenstücke kann man sich auch infinitesimal klein vorstellen, also ΔF durch dF ersetzen – wobei aber *alle* Abmessungen infinitesimal klein sein müssen, nicht nur eine davon. Man berechnet nun für jedes der Flächenstücke die (ebenfalls infinitesimale) Ladung, also $dQ = \sigma(x, y) dF$, und summiert dann alle Ladungen auf. Dies schreibt man kurz als das Integral

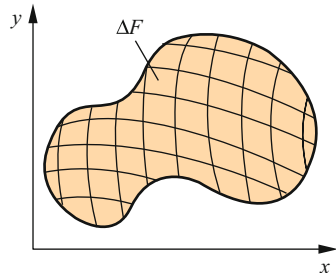
$$\int \sigma(x, y) dF.$$

Das Ergebnis dieser Rechnung kann man sich auch anschaulich grafisch vorstellen: Für $\sigma > 0$ schließt der Graph mit der x - y -Ebene einen Körper ein; das Integral ergibt das Volumen dieses Körpers.

Wieder formulieren wir dies mathematisch zumindest noch ein wenig sauberer: Wir nähern die Figur an durch Vielecke mit Flächeninhalten ΔF_j , $1 \leq j \leq n$ (die nicht notwendigerweise alle gleich groß sein müssen). In jedem Vieleck wählen wir jeweils einen Punkt mit Ortsvektor \mathbf{r}_j . Dann definieren wir

$$\int \sigma(x, y) dF := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sigma(x_j, y_j) \Delta F_j, \quad (2.2)$$

Abb. 2.2 Um das Integral einer Größe über eine ebene Figur zu berechnen, denkt man sich diese in kleine Flächenstücke ΔF aufgeteilt. Der Einfachheit halber sind hier Vierecke dargestellt, prinzipiell könnte man aber Vielecke beliebiger Form verwenden



wobei im Grenzwert unendlich vieler Vielecke *alle* deren Abmessungen gegen null gehen sollen. (Wieder setzen wir die Existenz des Grenzwertes stillschweigend voraus.) Statt dF schreibt man hier oft auch d^2r oder d^2x , um klarzumachen, dass hier über zwei Koordinaten integriert wird.

In kartesischen Koordinaten ist die Auswertung dieses Flächenintegrals prinzipiell einfach: Als infinitesimale Flächenstücke verwendet man Rechtecke, deren Seiten parallel zu den Achsen liegen, mit den infinitesimalen Seitenlängen dx und dy . Man hat also das Doppelintegral

$$\int \sigma(x, y) dx dy$$

zu berechnen (oft schreibt man hier zur Verdeutlichung auch zwei Integralzeichen, $\int \int$). Intuitiv ist eigentlich schon klar, wie das zu berechnen ist: Die Funktion σ muss zunächst bezüglich x „aufgeleitet“ werden, wobei man y als Konstante betrachtet; wie üblich werden dann die Integrationsgrenzen eingesetzt („oben minus unten“). Das Ergebnis wird anschließend bezüglich y „aufgeleitet“, und wieder setzt man abschließend die Integrationsgrenzen ein. (Man spricht hier manchmal auch von „iterierten“ Integralen.)

Begründen wir aber lieber noch kurz, warum das so funktioniert. Gehen wir auf die Definition (2.2) des Flächenintegrals als Grenzwert zurück, so haben wir

$$\begin{aligned} \int \sigma(x, y) dF &= \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \sigma(x_j, y_k) \Delta F_{jk} \\ &= \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \sigma(x_j, y_k) \Delta x_j \Delta y_k. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Die Rechtecke sind nun mit zwei Indizes durchnummeriert (einen für jede Koordinatenrichtung), und ihre Längen und Breiten haben wir mit Δx_j bzw. Δy_k bezeichnet. Das kann man umschreiben zu

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sigma(x_j, y_k) \Delta x_j \right) \Delta y_k.$$

Der Ausdruck in den Klammern ist aber definitionsgemäß nichts anderes als das Riemann-Integral von $\sigma(x, y)$ bezüglich x , wobei y jeweils konstant auf dem Wert y_k gehalten wird,

$$\int \sigma(x, y) dF = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \left(\int \sigma(x, y_k) dx \right) \Delta y_k.$$

Die übrige Summation und Grenzwertbildung ist dann genau die Riemann-Integration bezüglich y . Damit ist die Behauptung gezeigt. (Zwar etwas „hand-waving“, aber für Physiker-Zwecke genau genug. ;-))

Es liegt auch nahe, die Integrationsreihenfolge zu vertauschen (also zuerst nach y aufzuleiten und dann nach x). Das funktioniert tatsächlich, wenn der Integrand in beiden Variablen stetig ist – was aber natürlich in konkreten physikalischen Anwendungen praktisch immer der Fall sein wird.

Wer das alles genauer wissen möchte, der sei wie üblich auf Bücher bzw. Vorlesungen zur Analysis III verwiesen; dort sind diese Aussagen als „Satz von Fubini“ bekannt (nach dem italienischen Mathematiker *Guido Fubini*, 1879–1943, der das erstmals streng bewies).

Beispiel 2.4

Wir betrachten die Flächenladungsdichte $\sigma(x, y) = x^y$ auf dem Rechteck $0 \leq x \leq 1, a \leq y \leq b$ mit $a > 0$. Die Gesamtladung ergibt sich dann aus dem Doppelintegral

$$Q = \int_0^1 dx \int_a^b dy x^y.$$

Das innere Integral ist leicht auszuwerten; es bleibt also zu berechnen

$$\int_0^1 dx \frac{x^b - x^a}{\ln x}.$$

Dieses Integral kann man allerdings nicht direkt analytisch auswerten.

Im Bereich des Integrals ist der Integrand aber stetig (nur bei $x = y = 0$ wäre er unstetig, dieser Punkt ist aber außerhalb des Integrationsbereichs), also können wir die Integrationsreihenfolge vertauschen:

$$Q = \int_0^1 dx \int_a^b dy x^y = \int_a^b dy \int_0^1 dx x^y.$$

Wieder kann das innere Integral leicht ausgewertet werden; es bleibt

$$Q = \int_a^b dy \frac{1}{y+1}.$$

Das übrige Integral ist nun aber auch einfach; wir erhalten letztlich

$$Q = \ln \frac{1+b}{1+a}.$$

Oft hängen die Integrationsgrenzen des einen Integrals allerdings von denen des anderen ab, da die Fläche, über die integriert wird, von „krummen“ Linien begrenzt wird. In solchen Fällen sucht man zunächst Gleichungen, die die Begrenzungslinien beschreiben, und gewinnt daraus die Integrationsgrenzen.

Beispiele 2.5

- Die Flächenladungsdichte in einem Dreieck mit den Eckpunkten $A(2; 1)$, $B(5; 2)$ und $C(3; 4)$ sei durch $\sigma(x, y) = xy$ gegeben; gesucht ist die gesamte Ladung, also das Integral von σ über das Dreieck. Die Kanten dieses Dreiecks können beispielsweise beschrieben werden durch

$$[AB] : y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, \quad 2 \leq x \leq 5,$$

$$[BC] : y = -x + 7, \quad 3 \leq x \leq 5,$$

$$[AC] : y = 3x - 5, \quad 2 \leq x \leq 3.$$

Wir integrieren nun zunächst über y , dann über x . Die Grenzen des y -Integrals hängen allerdings nun davon ab, bei welchem x -Wert man sich jeweils gerade befindet. Insbesondere wird der Integrationsbereich für $2 \leq x \leq 3$ von den Kanten $[AB]$ und $[AC]$ begrenzt, für $3 \leq x \leq 5$ dagegen von $[AB]$ und $[BC]$ (vgl. Abb. 2.3). Im ersten Bereich muss somit $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \leq y \leq 3x - 5$ gelten, im zweiten dagegen $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \leq y \leq -x + 7$. Damit ist das gesuchte Integral gegeben durch

$$\int_{\text{Dreieck}} xy \, dF = \int_2^3 dx \int_{\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}^{3x-5} dy \, xy + \int_3^5 dx \int_{\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}^{-x+7} dy \, xy.$$

Bei den y -Integralen ist das x jeweils ein konstanter Faktor, kann also vor das Integral gezogen werden. Damit haben wir zunächst

$$\int_{\text{Dreieck}} xy \, dF = \int_2^3 dx \, x \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}^{3x-5} + \int_3^5 dx \, x \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}^{-x+7},$$

was nach Einsetzen der Grenzen und Zusammenfassen zu

$$\begin{aligned} \int_{\text{Dreieck}} xy \, dF &= \frac{1}{9} \int_2^3 dx [40x^3 - 136x^2 + 112x] \\ &\quad + \frac{1}{9} \int_3^5 dx [4x^3 - 64x^2 + 220x] \end{aligned}$$

wird. Die beiden übrigen x -Integrale sind zwar etwas mühselig, aber letztlich trivial. Am Schluss ergibt sich

$$Q = \int_{\text{Dreieck}} xy \, dF = \frac{1}{9} \cdot \frac{206}{3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{640}{3} = \frac{94}{3}. \quad (2.4)$$

- Wir betrachten eine Kreisscheibe in der x - y -Ebene mit Radius ϱ_0 um den Ursprung. Die Kreisscheibe wird außen von der Kreislinie begrenzt, die durch $x^2 + y^2 = \varrho_0^2$ beschrieben werden kann. Lassen wir x von $-\varrho_0$ bis ϱ_0 laufen, so kann y also für jeden beliebigen, aber festen Wert von x nur jeweils zwischen $-\sqrt{\varrho_0^2 - x^2}$ und $\sqrt{\varrho_0^2 - x^2}$ liegen (vgl. Abb. 2.4). Integrieren wir die einfache konstante Funktion $f(x, y) = 1$ über diese Kreisscheibe:

$$\begin{aligned} \int_{x^2+y^2 \leq \varrho_0^2} 1 \, dF &= \int_{-\varrho_0}^{\varrho_0} dx \int_{-\sqrt{\varrho_0^2-x^2}}^{\sqrt{\varrho_0^2-x^2}} 1 \, dy = \int_{-\varrho_0}^{\varrho_0} dx [y]_{-\sqrt{\varrho_0^2-x^2}}^{\sqrt{\varrho_0^2-x^2}} \\ &= 2 \int_{-\varrho_0}^{\varrho_0} dx \sqrt{\varrho_0^2 - x^2} = 4\varrho_0^2 \int_0^1 \sqrt{1-u^2} \, du. \end{aligned}$$

Das Integral über u kann man z. B. mithilfe der Substitution $u = \sin \alpha$ berechnen. Damit wird $\sqrt{1 - u^2} = \cos \alpha$ und $du = \cos \alpha \, d\alpha$, also

$$\begin{aligned} \int_{x^2+y^2 \leq \varrho_0^2} 1 \, dF &= 4\varrho_0^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha \, d\alpha = 2\varrho_0^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2\alpha)) \, d\alpha \\ &= 2\varrho_0^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi\varrho_0^2. \end{aligned}$$

Dies ist natürlich genau der Flächeninhalt der Kreisscheibe.

Abb. 2.3 Zum Integral über ein Dreieck in Beispiel 2.5: Das linke Teildreieck wird in y -Richtung von den Strecken $[AB]$ und $[AC]$ begrenzt, das rechte von $[AB]$ und $[BC]$

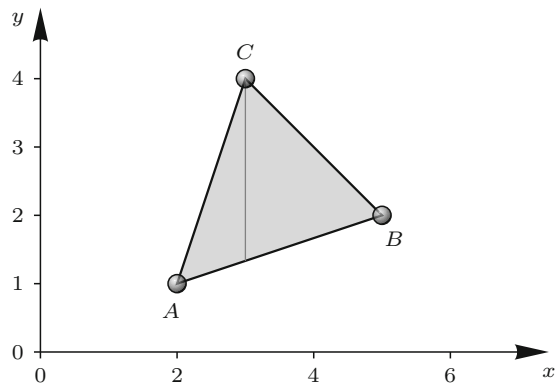
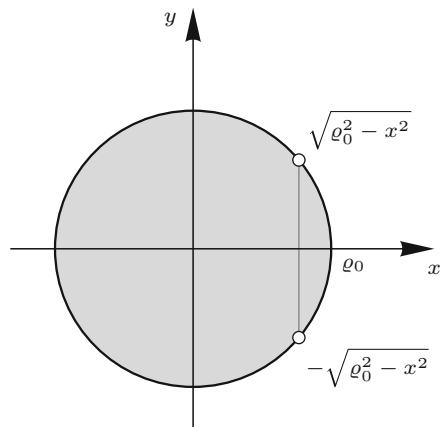


Abb. 2.4 Zum Integral über eine Kreisscheibe in Beispiel 2.5: Bei jeweils einem festen x -Wert kann y nur zwischen $-\sqrt{\varrho_0^2 - x^2}$ und $\sqrt{\varrho_0^2 - x^2}$ liegen



Besonders einfach wird es nur, falls σ ein Produkt aus zwei Funktionen f und g ist, die jeweils nur von x bzw. nur von y abhängen, und außerdem die Integrationsgrenzen nicht voneinander abhängen; dann ist schlicht das Produkt von zwei Integralen zu berechnen:

$$\int f(x)g(y) \, dx \, dy = \int f(x) \, dx \cdot \int g(y) \, dy. \quad (2.5)$$

Zur Begründung verwenden wir die Darstellung (2.3) des Flächenintegrals als Grenzwert, wobei schon ausgenutzt wurde, dass die Flächenstücke Rechtecke sind, deren Seiten jeweils parallel zu den Achsen liegen. Setzen wir darin $\sigma(x_j, y_k) = f(x_j)g(y_k)$, so können wir die Doppelsumme einfach als Produkt zweier Summen schreiben (Grundlagen der Algebra: Das Produkt zweier Summen erhält man, indem man jeden Summanden der einen Summe mit jedem Summanden der anderen multipliziert!),

$$\int f(x)g(y) \, dF = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(x_j) \Delta x_j \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m g(y_k) \Delta y_k.$$

Mit der üblichen Definition des Riemann-Integrals für Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folgt dann sofort die Behauptung.

Beispiel 2.6

Wir integrieren die Funktion $f(x, y) = xy$ über das Quadrat mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$:

$$\int xy \, dF = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \, xy = \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \, x = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

bzw.

$$\int xy \, dF = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \, xy = \int_0^1 x \, dx \cdot \int_0^1 y \, dy = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 \cdot \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Die Formel (2.5) kann man prinzipiell aber auch andersherum verwenden, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 2.7: Uneigentliches Integral über die Gauß'sche Glockenkurve

In vielen Bereichen der Physik, aber auch in der Stochastik benötigt man die Fläche unter der Gauß'schen Glockenkurve, beschrieben durch die Funktion

$$f(x) = e^{-x^2},$$

die sich in beiden Richtungen bis ins Unendliche erstreckt, also

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Für deren Berechnung verwendet man einen ziemlich genialen Trick (wie auch immer man darauf gekommen ist – mir ist nicht bekannt, von wem das ursprünglich stammt): Statt der Fläche selbst berechnet man deren Quadrat,

$$F^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right).$$

Die Integrale in beiden Faktoren sind bestimmte Integrale, ergeben also einfach eine von x unabhängige Zahl – deshalb kann man die Integrationsvariable im zweiten Integral auch einfach umbenennen,

$$F^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \right).$$

Mit (2.5) können wir dies nun aber auch zu einem Doppelintegral zusammenfassen,

$$F^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} = \int_{x-y\text{-Ebene}} e^{-x^2-y^2} dF.$$

Der Integrand $e^{-x^2-y^2} = e^{-\varrho^2}$ beschreibt in einem x - y - z -Koordinatensystem eine Fläche, die entsteht, wenn man den Graphen der Gauß-Kurve um die z -Achse rotieren lässt. Das Quadrat des Inhalts der Fläche unter der Gauß-Kurve stimmt somit mit dem Volumen des Körpers überein, der durch diese Fläche und die x - y -Ebene begrenzt wird!

Dieses Volumen ist aber identisch zum Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man die Fläche zwischen dem Graphen der Umkehrfunktion

$$f^{-1}(x) = \sqrt{-\ln x} \quad \text{mit } 0 \leq x \leq 1$$

und der x -Achse um die x -Achse rotieren lässt. Wir haben also letztlich:

$$F^2 = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{-\ln x} \right)^2 dx = -\pi \int_0^1 \ln x dx = \pi [x - x \ln x]_0^1 = \pi,$$

und daraus folgt das reichlich überraschende Ergebnis

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Sowohl bei der Kreisscheibe in Beispiel 2.5 als auch hier in Beispiel 2.7 sieht man, dass es oft sinnvoller ist, statt der kartesischen Koordinaten andere zu verwenden – hier bieten sich natürlich ebene Polarkoordinaten an. Ersetzt man $dx dy$ aber einfach durch $d\rho d\varphi$, so erhält man Blödsinn. (Dass das so nicht stimmen kann, sieht man schon daran, dass das Produkt $d\rho d\varphi$ die Dimension einer Länge hat statt die einer Fläche!)

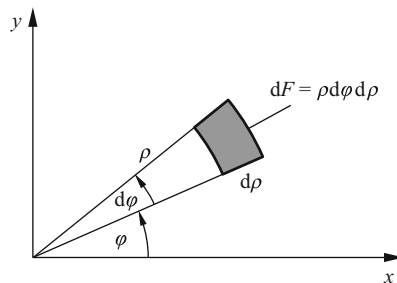
An Abb. 2.5 kann man ablesen, dass in ebenen Polarkoordinaten das infinitesimale Flächenelement stattdessen gegeben ist durch $dF = d\rho \rho d\varphi$. Statt die Abbildung zu verwenden, kann man sich dies auch rechnerisch herleiten: Man rechnet das Flächenintegrationsmaß von einem Koordinatensystem in das andere um, indem man die sogenannte *Funktionaldeterminante* verwendet,

$$dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} \right| d\rho d\varphi.$$

Da diese letztlich einfach die Determinante der Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

Abb. 2.5 Das infinitesimale Flächenelement in ebenen Polarkoordinaten kann man sich vorstellen als ein Rechteck mit den Seitenlängen $d\rho$ und $\rho d\varphi$



ist, nennt man sie oft auch *Jacobi-Determinante*. Man überprüft leicht, dass sich damit ebenfalls $dx \, dy = \varrho \, d\varrho \, d\varphi$ ergibt.

Begründen wir dies mathematisch noch ein wenig genauer und allgemeiner: Seien u, v zwei beliebige Koordinaten, im Allgemeinen krummlinig. Die kartesischen Koordinaten hängen von diesen ab, sind also Funktionen $x(u, v)$ und $y(u, v)$.

Wir betrachten nun ein infinitesimales Viereck, dessen Eckpunkte beschrieben werden durch die Koordinaten (u, v) , $(u + du, v)$, $(u + du, v + dv)$ und $(u, v + dv)$. Wie eben schon im speziellen Beispiel der ebenen Polarkoordinaten ist der Flächeninhalt dieses Vierecks *nicht* einfach gegeben durch $du \cdot dv$, sondern wir müssen erst mal die x - und y -Werte der Eckpunkte berechnen und können dann in diesen üblichen kartesischen Koordinaten den Flächeninhalt ausrechnen.

In den kartesischen Koordinaten können sich die Koordinaten der Eckpunkte auch nur infinitesimal voneinander unterscheiden, sie sind also gegeben durch (x, y) , $(x + dx_u, y + dy_u)$, $(x + dx_u + dx_v, y + dy_u + dy_v)$ und $(x + dx_v, y + dy_v)$, wobei der Index an den Differenzialen jeweils angibt, durch Änderung welcher der beiden Koordinaten u bzw. v sich die Koordinate x bzw. y ändert. Für die infinitesimale Änderung von x durch die infinitesimale Änderung von u können wir schreiben (Taylor!)

$$dx_u \equiv x(u + du, v) - x(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u} du$$

und ebenso für du_y , dv_x und dv_y .

Sind die Koordinaten u, v rechtwinklig, so ergibt sich auch in kartesischen Koordinaten ein infinitesimales Rechteck, ansonsten ein infinitesimales Parallelogramm. Selbst wenn man ein Rechteck hat, liegt dieses aber schräg im x - y -Koordinatensystem, man kann also *nicht* einfach $dF = (dx_u + dx_v) \cdot (dy_u + dy_v)$ oder Ähnliches rechnen!

Das Parallelogramm wird von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} dx_u \\ dy_u \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} dx_v \\ dy_v \end{pmatrix}$$

aufgespannt, sein Flächeninhalt ist somit gegeben durch

$$dF = \begin{pmatrix} dx_u \\ dy_u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} dx_v \\ dy_v \end{pmatrix} = dx_u dy_v - dy_u dx_v.$$

Setzen wir die Differenziale ein, so bleibt also schließlich tatsächlich

$$dF = \frac{\partial x}{\partial u} du \frac{\partial y}{\partial v} dv - \frac{\partial y}{\partial u} du \frac{\partial x}{\partial v} dv = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du \, dv. \quad (2.6)$$

Beispiele 2.8

- Das Integral über die Kreisscheibe ist nun sehr einfach,

$$\begin{aligned} \int_{x^2+y^2 \leq \varrho_0^2} 1 \, dx \, dy &= \int_0^{\varrho_0} \int_0^{2\pi} 1 \, \varrho \, d\varrho \, d\varphi = \int_0^{\varrho_0} \varrho \, d\varrho \cdot \int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \varrho_0^2 \cdot 2\pi = \pi \varrho_0^2, \end{aligned}$$

wobei wieder (2.5) verwendet wurde, nur eben hier für die beiden Variablen ϱ und φ statt für x und y .

- Auch das Integral über die Gauß-Kurve geht nun etwas einfacher. Wir hatten ja begründet, dass

$$F^2 = \int_{x-y\text{-Ebene}} e^{-x^2-y^2} dF$$

gilt. In ebenen Polarkoordinaten wird dies zu

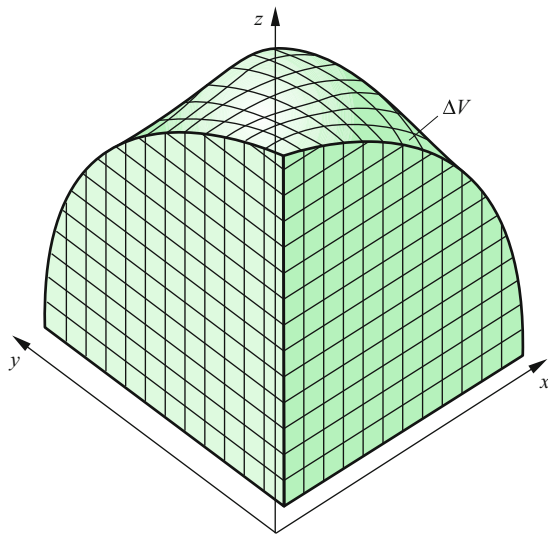
$$\begin{aligned} F^2 &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\varrho^2} \varrho \, d\varrho \, d\varphi = \int_0^\infty \varrho e^{-\varrho^2} d\varrho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-u} du \cdot 2\pi = \pi, \end{aligned}$$

auch hier unter Verwendung von (2.5).

2.3 Volumenintegrale

Oft betrachtet man auch Funktionen, die von allen drei Raumkoordinaten abhängen, beispielsweise die Ladungsdichte $\rho(x, y, z)$ eines Körpers. Die Argumentation läuft hier völlig analog zu den Flächenintegralen in der Ebene: Für konstantes ρ erhält man die gesamte Ladung wieder einfach als Produkt aus ρ und dem Volumen V . Ist ρ nicht konstant, so teilt man sich den Körper in kleine Volumenstücke ΔV (vgl. Abb. 2.6) bzw. gleich infinitesimale kleine Volumina dV ein – wobei *alle* Abmessungen der Volumina infinitesimal klein sein sollen, nicht nur eine davon.

Abb. 2.6 Um eine Größe über einen Körper zu integrieren, denkt man sich diesen in kleine Volumina ΔV aufgeteilt. Der Einfachheit halber sind hier Würfel dargestellt, prinzipiell könnte man aber Polyeder beliebiger Form verwenden



Dann hat man das Integral

$$\int \rho(x, y, z) dV.$$

Wieder geben wir zumindest kurz eine mathematisch sauberere Definition an, die hier fast wortwörtlich identisch zu den Flächenintegralen in der Ebene ist: Wir nähern den Körper an durch Polyeder mit Rauminhalten ΔV_j , $1 \leq j \leq n$ (die nicht notwendigerweise alle gleich groß sein müssen). In jedem Polyeder wählen wir jeweils einen Punkt mit Ortsvektor \mathbf{r}_j . Dann definieren wir

$$\int \rho(x, y, z) dV := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \rho(x_j, y_j, z_j) \Delta V_j, \quad (2.7)$$

wobei im Grenzwert unendlich vieler Polyeder *alle* deren Abmessungen gegen null gehen sollen. (Wieder setzen wir die Existenz des Grenzwertes stillschweigend voraus.) Auch hier sind statt dV die alternativen Schreibweisen d^3r oder d^3x üblich, um klar zu machen, dass hier über drei Koordinaten integriert wird.

In kartesischen Koordinaten benutzt man infinitesimale Quader und hat dann das Dreifachintegral

$$\int \rho(x, y, z) dx dy dz$$

zu berechnen (wobei man manchmal auch drei Integralzeichen schreibt, \iiint). Wie bei den ebenen Flächenintegralen begründet man, dass dies „einfach“ bedeutet, dass man nacheinander nach allen drei Variablen integrieren muss (wobei die Integrationsreihenfolge vertauschbar ist, wenn der Integrand bezüglich aller Variablen stetig ist). Und auch hier ist wieder darauf zu achten, dass die Integrationsgrenzen eines Integrals im Allgemeinen jeweils von denen der beiden anderen abhängen; und wieder ist die Rechnung dann besonders einfach, wenn ρ ein Produkt aus drei Funktionen $f(x)$, $g(y)$ und $h(z)$ ist und die Grenzen nicht voneinander abhängen.

Beispiele 2.9

- Wir integrieren das skalare Feld $f(x, y, z) = xyz$ über den Würfel mit Seitenlänge eins im ersten Oktanten, dessen Seitenflächen parallel zu den Koordinatenebenen liegen und dessen eine Ecke der Ursprung ist,

$$\begin{aligned} \int_{\text{Einheitswürfel}} xyz \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \, xyz \\ &= \int_0^1 x \, dx \cdot \int_0^1 y \, dy \cdot \int_0^1 z \, dz \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

- In einer dreiseitigen Pyramide mit den Eckpunkten $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 6)$ und $D(0; 0; 0)$ (vgl. Abb. 2.7) sei die Ladungsdichte durch $\rho(x, y, z) = xyz$ gegeben. Gesucht ist die Gesamtladung der Pyramide, also das Volumenintegral über ρ .

Nehmen wir als äußerstes Integral das über x . Aus den Punkten A und D sehen wir, dass $0 \leq x \leq 2$ gelten muss. Bewegen wir uns nun von der x -Achse nach rechts, bis wir auf die Kante der Pyramide stoßen, die in der x - y -Ebene liegt, also $[AB]$. Diese kann beschrieben werden durch $y = -1,5x + 3$ mit $0 \leq x \leq 2$; also muss beim Integral $0 \leq y \leq -1,5x + 3$ gelten. Bewegt man sich schließlich bei festem x und y vom Dreieck ABD aus nach oben, so stößt man auf die Seitenfläche ABC der Pyramide. Diese kann beschrieben werden durch $z = 6 - 3x + 2y$, also haben wir im Inneren der Pyramide $0 \leq z \leq 6 - 3x + 2y$.

Damit sind die Integrationsgrenzen gefunden, und wir können berechnen:

$$\begin{aligned}
 \int_{\text{Pyramide}} \rho(x, y, z) \, dV &= \int_0^2 dx \int_0^{-1,5x+3} dy \int_0^{6-3x-2y} dz \, xyz \\
 &= \int_0^2 dx \, x \int_0^{-1,5x+3} dy \, y \int_0^{6-3x-2y} dz \, z \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 dx \, x \int_0^{-1,5x+3} dy \, y (6-3x-2y)^2.
 \end{aligned}$$

Betrachten wir nun erst mal nur das Integral über y , sonst wird es wirklich zu unübersichtlich. Hier könnte man die Klammer auflösen; einfacher wird es aber mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{-1,5x+3} dy \, y (6-3x-2y)^2 &= \left[-\frac{1}{6} y (6-3x-2y)^3 \right]_0^{-1,5x+3} \\
 &\quad + \frac{1}{6} \int_0^{-1,5x+3} (6-3x-2y)^3 dy \\
 &= 0 + \frac{1}{6} \cdot \left[-\frac{1}{8} (6-3x-2y)^4 \right]_0^{-1,5x+3} \\
 &= \frac{27}{16} (x-2)^4.
 \end{aligned}$$

Also haben wir noch

$$\int_{\text{Pyramide}} \rho(x, y, z) \, dV = \frac{27}{32} \int_0^2 dx \, x (x-2)^4$$

zu berechnen. Das geht wieder mit partieller Integration relativ schnell; das Endergebnis ist schließlich

$$Q = \int_{\text{Pyramide}} \rho(x, y, z) \, dV = \frac{9}{5}.$$

- Wir integrieren die Funktion $f(x, y, z) = 1$ über eine Kugel mit Radius r_0 um den Ursprung. Dabei lassen wir z von $-r_0$ bis r_0 laufen und müssen bei den beiden anderen Koordinaten jeweils darauf achten, dass insgesamt $x^2 + y^2 + z^2 \leq r_0^2$ gelten muss; deswegen sind die Integrationsgrenzen bei y und z komplizierter. Anschaulich gesehen zerlegen wir die Kugel von unten nach oben in infinitesimal hohe Zylinder, also letztlich Kreisscheiben mit jeweiligem Radius $\varrho_0 = \sqrt{r_0^2 - z^2}$, berechnen jeweils deren Flächeninhalt (vgl. die Berechnung des Kreisscheibeninhalts in Beispiel 2.5 und Abb. 2.8) und addieren schließlich alles auf:

$$\begin{aligned}
 \int_{\text{Kugel}} 1 \, dx \, dy \, dz &= \int_{-r_0}^{r_0} dz \int_{-\sqrt{r_0^2 - z^2}}^{\sqrt{r_0^2 - z^2}} dy \int_{-\sqrt{r_0^2 - y^2 - z^2}}^{\sqrt{r_0^2 - y^2 - z^2}} dx \, 1 \\
 &= \int_{-r_0}^{r_0} dz \int_{-\sqrt{r_0^2 - z^2}}^{\sqrt{r_0^2 - z^2}} dy \, 2\sqrt{r_0^2 - z^2 - y^2} \\
 &= 2 \int_0^{r_0} dz \, \pi (r_0^2 - z^2) = 2\pi \cdot \frac{2}{3} r_0^3 = \frac{4}{3} \pi r_0^3.
 \end{aligned}$$

Dies ist natürlich genau das Kugelvolumen.

Statt der kartesischen Koordinaten kann man auch wieder andere verwenden, beispielsweise Zylinder- oder Kugelkoordinaten. Die entsprechenden infinitesimalen Volumenelemente erhält man aus den Abb. 2.9 und 2.10 bezüglich jeweils aller drei Variablen:

$$dx \, dy \, dz = \varrho \, d\varrho \, d\varphi \, dz \quad \text{bzw.} \quad = r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = -r^2 dr \, d\cos \vartheta \, d\varphi. \quad (2.8)$$

Ähnlich wie bei den Flächenintegralen in der Ebene begründet man, dass die Volumenelemente alternativ auch mittels Jacobi-Determinanten umgerechnet werden können:

$$dV = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du \, dv \, dw.$$

(Statt des Flächeninhalts eines infinitesimalen Parallelogramms muss hier das Volumen eines infinitesimalen Parallelepiped/Spats berechnet werden, was ja wieder auf eine Determinante führt.)

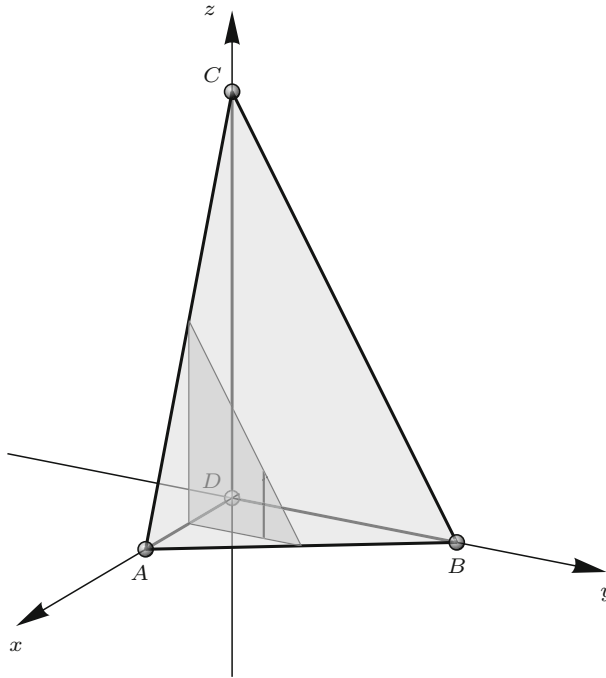


Abb. 2.7 Zum Integral über die Pyramide in Beispiel 2.9: Bei jeweils einem festen Wert von x können Punkte in der x - y -Ebene nur y -Koordinaten zwischen der x -Achse und der Kante $[AB]$ haben. Bei einem festen Wert von x und y können Punkte dann nur z -Koordinaten zwischen der x - y -Ebene und der Seitenfläche ABC haben

Speziell bei den Kugelkoordinaten fasst man die Winkelintegrale oft zusammen:

$$d\Omega := \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = -d \cos \vartheta \, d\varphi. \quad (2.9)$$

Das Minuszeichen irritiert hier sicher zunächst – es verschwindet aber wieder, wenn man sich die Integrationsgrenzen anschaut: Für ϑ läuft das Integral von 0 bis π , für $\cos \vartheta$ von 1 bis -1 . Man kann das Minuszeichen also einfach benutzen, um die Integrationsrichtung für $\cos \vartheta$ umzudrehen, sodass das Integral dann von -1 bis 1 läuft, wie gewohnt von der kleineren zur größeren Zahl. Oft kürzt man hier auch noch ab und substituiert z. B. $u = \cos \vartheta$.

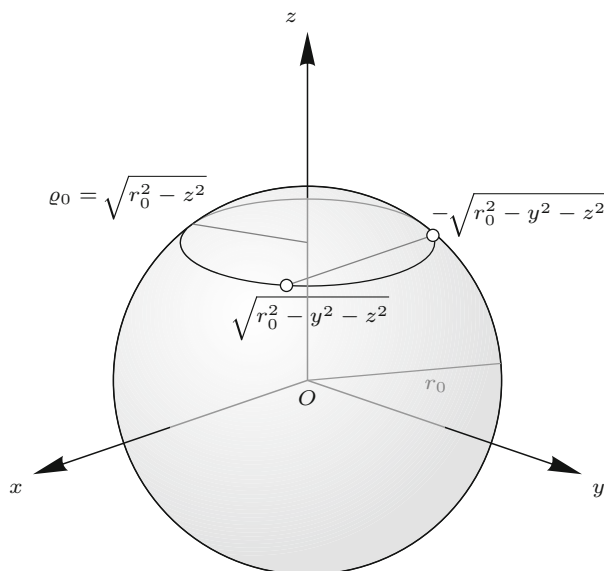


Abb. 2.8 Zum Integral über die Kugel in Beispiel 2.9: Wir denken uns die Kugel in (infinitesimale dünne) Zylinder, also letztlich Kreisscheiben zerlegt, und addieren diese auf, integrieren also in z -Richtung von $-r_0$ bis r_0 . Eine Kreisscheibe bei festem z hat dann den Radius $\varrho_0 = \sqrt{r_0^2 - z^2}$; ihr Flächeninhalt wird wie in Beispiel 2.5 bzw. elementargeometrisch berechnet

Abb. 2.9 Das infinitesimale Volumenelement in Zylinderkoordinaten kann man sich vorstellen als einen Quader mit den Kantenlängen $d\rho$, $\rho d\varphi$ und dz

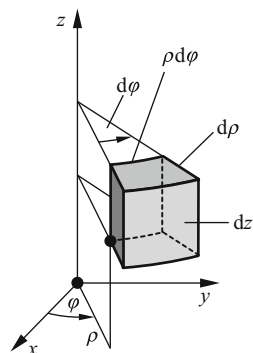
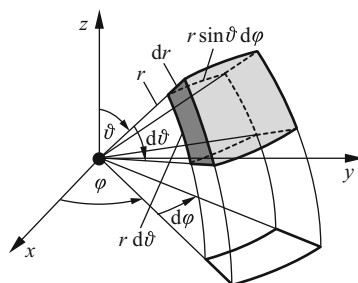


Abb. 2.10 Das infinitesimale Volumenelement in Kugelkoordinaten kann man sich vorstellen als einen Quader mit den Kantenlängen dr , $r d\vartheta$ und $r \sin \vartheta d\varphi$



Beispiel 2.10

Das Kugelvolumen berechnet sich nun sehr einfach:

$$\begin{aligned}
 \int_{\text{Kugel}} 1 \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{r_0} dr \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \, 1 \cdot r^2 \sin \vartheta \\
 &= \int_0^{r_0} r^2 \, dr \cdot \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \cdot \int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi \\
 &= \int_0^{r_0} r^2 \, dr \cdot \int_{-1}^1 du \cdot \int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi = \frac{1}{3} r_0^3 \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4\pi}{3} r_0^3.
 \end{aligned}$$

Dabei wird mal wieder verwendet, dass man ein mehrfaches Integral als Produkt von einzelnen Integralen schreiben kann, wenn der Integrand ein Produkt von Funktionen ist, die jeweils nur von einer Integrationsvariable abhängen.

Abschließend sei noch erwähnt, dass man selbstverständlich auch Volumenintegrale (und ebene Flächenintegrale) über vektor- bzw. allgemein tensorwertige Funktionen berechnen kann. Diese sind einfach dadurch definiert, dass man jede kartesische (!) Komponente des Vektors bzw. Tensors einzeln integriert. Ein Anwendungsbeispiel aus der Elektrostatik sind die Dipol- und Quadrupolmomente einer Ladungsverteilung,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p} &\equiv \int \rho(\mathbf{r}) \, \mathbf{r} \, dV, \\
 \mathbf{Q} &\equiv \int \rho(\mathbf{r}) \, (3\mathbf{r}\mathbf{r}^\top - r^2\mathbf{I}) \, dV,
 \end{aligned}$$

die in Vorlesungen zur Elektrodynamik meist ausführlich diskutiert werden.

Wieder sei aber darauf hingewiesen, dass man bei vektorwertigen Integranden und Verwendung krummliniger Koordinaten darauf achten muss, dass auch die Koordinateneinheitsvektoren ihrerseits von den Koordinaten abhängen – vgl. Beispiel 2.3.

2.4 Flächenintegrale im Raum

Wie in Abschn. 1.1.4 schon angesprochen, gibt die Stromdichte \mathbf{j} an, wie Ladung (oder auch anderes, z. B. Masse oder Energie) durch den Raum strömt. Verläuft eine Strömung senkrecht durch eine ebene Fläche F und ist die Stromdichte auf dieser

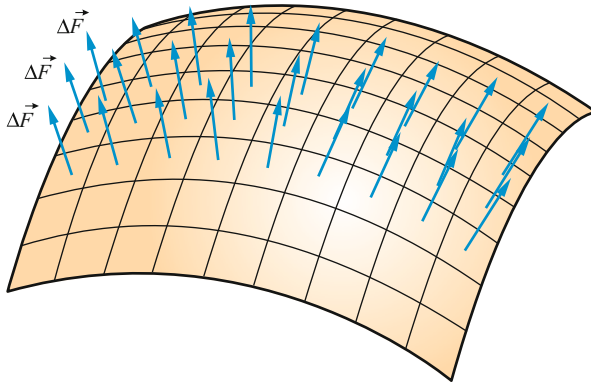


Abb. 2.11 Um eine Größe über eine gekrümmte Fläche zu integrieren, denkt man sich diese in kleine ebene Flächenstücke aufgeteilt und betrachtet die Normalenvektoren $\Delta \mathbf{F}$, deren Betrag jeweils gleich dem Inhalt der Flächenstücke ist. Der Einfachheit halber sind hier Vierecke dargestellt, prinzipiell könnte man aber Vielecke beliebiger Form verwenden

Fläche konstant, so nennt man

$$\Phi = |\mathbf{j}| \cdot F$$

den gesamten Fluss der betreffenden physikalischen Größe durch diese Fläche. Speziell im elektrischen Fall gibt Φ also an, wie viel Ladung pro Zeiteinheit durch die Fläche strömt, und ist deshalb einfach identisch mit der Stromstärke I ; im Falle allgemeiner Vektorfelder ist aber die Bezeichnung Φ üblich.

Ist \mathbf{j} nicht senkrecht zur ebenen Fläche, aber konstant, so ist allgemeiner

$$\Phi = \mathbf{j} \circ \mathbf{F},$$

wobei \mathbf{F} ein Vektor ist, der senkrecht zur Fläche steht und dessen Beitrag gleich dem Flächeninhalt F ist, also $\mathbf{F} = F \mathbf{n}$ mit einem Normaleneinheitsvektor \mathbf{n} .

Noch allgemeiner: Ist \mathbf{j} nicht auf der gesamten Fläche konstant und/oder ist die Fläche gekrümmt und deswegen \mathbf{n} nicht konstant, so teilt man sich die Fläche in kleine, lokal näherungsweise ebene Stücke ein, die jeweils den Flächenvektor $\Delta \mathbf{F}$ haben (vgl. Abb. 2.11); für infinitesimal kleine Flächen hat man also infinitesimale Flächenvektoren $d\mathbf{F}$. (Dabei gilt wieder, dass *alle* Abmessungen der Flächen infinitesimal klein sein müssen.)

Eine Fläche, bei der dies möglich ist, nennt man auch *glatt*; in physikalisch relevanten Anwendungen klappt das praktisch immer. Außerdem muss man voraussetzen, dass die Fläche auch wirklich zwei unterschiedliche Seiten hat, also *orientierbar* ist – beispielsweise bei einem Möbius-Band funktioniert das nicht.

Für jede Teilfläche berechnet man dann den (infinitesimalen) Fluss, also $d\Phi = \mathbf{j} \circ d\mathbf{F}$, und summiert alles auf. Dies schreibt man kurz als das Integral

$$\int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \circ d\mathbf{F}.$$

Wie üblich geben wir auch hier noch eine Formulierung, die mathematisch etwas sauberer ist; wieder ist sie fast identisch zu Flächenintegralen in der Ebene: Wir nähern die Fläche an durch ebene Vielecke mit Flächeninhalten ΔF_j (die nicht notwendigerweise alle gleich groß sein müssen) und Normalenvektoren \mathbf{n}_j , $1 \leq j \leq n$. In jedem Vieleck wählen wir jeweils einen Punkt mit Ortsvektor \mathbf{r}_j . Dann definieren wir

$$\int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \circ d\mathbf{F} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mathbf{j}(\mathbf{r}_j) \circ F_j \mathbf{n}_j, \quad (2.10)$$

wobei im Grenzwert unendlich vieler Vielecke *alle* deren Abmessungen gegen null gehen sollen. (Wie üblich: Die Existenz des Grenzwertes wird stillschweigend vorausgesetzt.)

Hat man eine geschlossene Fläche, die also die Oberfläche eines Körpers bildet, so schreibt man stattdessen meist

$$\oint_{\partial V} \mathbf{j}(\mathbf{r}) \circ d\mathbf{F},$$

wobei der Index ∂V andeutet, dass man über die Randfläche eines Volumens V integriert. Hier ist die übliche Konvention, dass $d\mathbf{F}$ überall nach außen zeigt.

In einfachen Fällen, z. B. Zylindermantelfläche oder Kugeloberfläche, kann man $d\mathbf{F}$ praktisch sofort angeben (siehe unten in (2.11)). Im Allgemeinen wird man es aber erst ausrechnen müssen.

Der Grundgedanke dabei ist, dass man die Punkte auf einer Fläche (vorausgesetzt, sie ist „glatt“ genug) differenzierbar in Abhängigkeit von zwei Parametern darstellen kann; nennen wir sie λ und μ , also: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\lambda, \mu)$. Leitet man nun \mathbf{r} jeweils partiell nach den Parametern ab, so erhält man zwei Vektoren, die beide tangential zur Fläche sind (und nicht parallel zueinander); multipliziert man mit $d\lambda$ bzw. $d\mu$, so erhält man entsprechend zwei infinitesimale tangentielle Vektoren. Diese beiden Vektoren spannen dann an jedem Punkt ein infinitesimales Parallelogramm auf. Dessen Flächeninhalt ergibt sich aus dem Betrag des Kreuzprodukts der beiden Vektoren, und dieses Kreuzprodukt steht dann natürlich auch senkrecht zur Oberfläche. Also haben wir:

$$d\mathbf{F} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mu} \right) d\lambda d\mu.$$

Damit sind räumliche Flächenintegrale wieder auf Doppelintegrale über zwei reelle Variablen zurückgeführt.

Beispiel 2.11

Eine Fläche sei parametrisiert durch

$$x = \sin \lambda, \quad y = \sin \mu, \quad z = \lambda^2 + \mu^2$$

mit $-\pi/2 \leq \lambda, \mu \leq \pi/2$. Der Fluss des Vektorfelds

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{j_0}{r_0} \mathbf{r}$$

mit reellen Konstanten j_0, r_0 durch diese Fläche ist gesucht.

Wir berechnen zunächst

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} \cos \lambda \\ 0 \\ 2\lambda \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \mu \\ 2\mu \end{pmatrix}.$$

Damit ist das infinitesimale Flächenelement

$$\mathbf{dF} = \begin{pmatrix} -2\lambda \cos \mu \\ -2\mu \cos \lambda \\ \cos \lambda \cos \mu \end{pmatrix} d\lambda d\mu,$$

und der infinitesimale Fluss ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \mathbf{j} \circ \mathbf{dF} &= \frac{j_0}{r_0} (-2\lambda \cos \mu \cdot x - 2\mu \cos \lambda \cdot y + \cos \lambda \cos \mu \cdot z) d\lambda d\mu \\ &= \frac{j_0}{r_0} (-2\lambda \sin \lambda \cos \mu - 2\mu \cos \lambda \sin \mu + \cos \lambda \cos \mu (\lambda^2 + \mu^2)) \\ &\quad d\lambda d\mu. \end{aligned}$$

Der gesamte Fluss ist dann

$$\begin{aligned} \int \mathbf{j} \circ \mathbf{dF} &= \frac{j_0}{r_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\mu (-2\lambda \sin \lambda \cos \mu - 2\mu \cos \lambda \sin \mu \\ &\quad + \cos \lambda \cos \mu (\lambda^2 + \mu^2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{j_0}{r_0} \left[-2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \lambda \sin \lambda \, d\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \mu \, d\mu \right. \\
&\quad - 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \lambda \, d\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mu \sin \mu \, d\mu \\
&\quad + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \lambda^2 \cos \lambda \, d\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \mu \, d\mu \\
&\quad \left. + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \lambda \, d\lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mu^2 \cos \mu \, d\mu \right].
\end{aligned}$$

Alle einzelnen Integrale können entweder direkt oder mit partieller Integration leicht berechnet werden. Schließlich bleibt

$$\int \mathbf{j} \circ d\mathbf{F} = \frac{j_0}{r_0} (-8 - 8 + (\pi^2 - 8) + (\pi^2 - 8)) = \frac{2j_0}{r_0} (\pi^2 - 16).$$

Insbesondere für eine Zylindermantelfläche (Radius ϱ_0) und eine Kugeloberfläche (Radius r_0) berechnet man leicht (macht mal!):

$$\begin{aligned}
d\mathbf{F} &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right) d\varphi \, dz = \varrho_0 \mathbf{e}_\varrho \, d\varphi \, dz \quad \text{bzw.} \\
d\mathbf{F} &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right) d\vartheta \, d\varphi = r_0^2 \sin \vartheta \, \mathbf{e}_r \, d\vartheta \, d\varphi = -r_0^2 \mathbf{e}_r \, d\Omega. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Dies kann man sich auch mittels der Abb. 2.9 und 2.10 anschaulich klarmachen.

Beispiele 2.12

- Wir wollen den Fluss des Vektorfelds $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = j_0 \frac{R^2}{r^2} \mathbf{e}_r$ mit reellen Konstanten j_0, R durch die Oberfläche einer Kugel mit Radius r_0 um den Ursprung berechnen. Mit dem infinitesimalen Flächenelement aus (2.11) haben wir sofort den infinitesimalen Fluss

$$\mathbf{j}|_{r=r_0} \circ d\mathbf{F} = j_0 \frac{R^2}{r_0^2} \mathbf{e}_r \circ r_0^2 \sin \vartheta \, \mathbf{e}_r \, d\vartheta \, d\varphi = j_0 R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Der gesamte Fluss ist also

$$\oint_{\text{Kugeloberfl.}} \mathbf{j} \circ d\mathbf{F} = j_0 R^2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R^2 j_0.$$

Dieses Ergebnis hätte man natürlich auch leicht ohne Integralrechnung erhalten können: Da \mathbf{j} auf der Kugeloberfläche konstant ist, ergibt sich der gesamte Fluss einfach aus dem Produkt dieser konstanten Flussdichte $j_0 \frac{R^2}{r_0^2}$ und der Kugeloberfläche $4\pi r_0^2$.

- Wir betrachten die Oberfläche von einem Teilstück eines Paraboloids, das beschrieben wird durch

$$z = a(x^2 + y^2)$$

mit $a > 0$ und $0 \leq z \leq z_0$. Wegen $\varrho^2 = x^2 + y^2$ und damit $z = a\varrho^2$ ist diese Fläche zylindersymmetrisch. Es empfiehlt sich also die Verwendung von Zylinderkoordinaten; als Parameter verwenden wir dementsprechend ϱ und φ :

$$\mathbf{r}(\varrho, \varphi) = \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \\ a\varrho^2 \end{pmatrix}.$$

Das infinitesimale Flächenelement ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varrho} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right) d\varrho \, d\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 2a\varrho \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\varrho \sin \varphi \\ \varrho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varrho \, d\varphi \\ &= \begin{pmatrix} -2a\varrho^2 \cos \varphi \\ -2a\varrho^2 \sin \varphi \\ \varrho \end{pmatrix} d\varrho \, d\varphi. \end{aligned}$$

Zur Abwechslung berechnen wir diesmal nicht den Fluss eines Vektorfelds durch diese Oberfläche, sondern nur den Inhalt der Oberfläche. Dafür verwenden wir entsprechend den infinitesimalen Flächeninhalt, also den Betrag von $d\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned} dF &= \sqrt{(-2a\varrho^2 \cos \varphi)^2 + (-2a\varrho^2 \sin \varphi)^2 + \varrho^2} d\varrho \, d\varphi \\ &= \varrho \sqrt{4a^2\varrho^2 + 1} d\varrho \, d\varphi. \end{aligned}$$

Die gesamte Oberfläche ergibt sich dann durch Integration, wobei wir noch berücksichtigen müssen, dass $z \leq z_0$ und damit $\varrho \leq \sqrt{z_0/a}$ sein soll:

$$\begin{aligned}
 F &= \int dF = \int_0^{\sqrt{z_0/a}} d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \varrho \sqrt{4a^2\varrho^2 + 1} \\
 &= 2\pi \int_0^{\sqrt{z_0/a}} \varrho \sqrt{4a^2\varrho^2 + 1} d\varrho = \frac{\pi}{4a^2} \int_0^{4z_0a} \sqrt{u+1} du \\
 &= \frac{\pi}{6a^2} \left[\sqrt{4z_0a+1}^3 - 1 \right].
 \end{aligned}$$

Alternativ kann man Oberflächenintegrale manchmal auch berechnen, indem man sich die Fläche auf die x - y -Ebene projiziert denkt. Betrachten wir ein infinitesimales Flächenelement $d\mathbf{F}$, dessen Projektion auf die x - y -Ebene ein Rechteck mit den Seitenlängen dx , dy ist und das um den Winkel α gegen die x - y -Ebene geneigt ist. Wie man sich leicht überlegt, besteht dann der Zusammenhang

$$|d\mathbf{F}| = \frac{dx dy}{|\cos \alpha|}$$

zwischen dem Flächenelement und seiner Projektion. Andererseits schließt $d\mathbf{F}$ dann auch genau den Winkel α mit \mathbf{e}_z ein. Also ist

$$|d\mathbf{F}| = \frac{dx dy}{|\mathbf{n} \circ \mathbf{e}_z|},$$

mit einem Normaleneinheitsvektor in Richtung von $d\mathbf{F}$, d. h. $d\mathbf{F} = |d\mathbf{F}| \mathbf{n}$. Damit folgt insgesamt

$$\int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \circ d\mathbf{F} = \int \frac{\mathbf{j} \circ \mathbf{n}}{|\mathbf{n} \circ \mathbf{e}_z|} dx dy. \quad (2.12)$$

Für die konkrete Berechnung fehlt noch der Normaleneinheitsvektor. Dazu erinnern wir uns an Abschn. 1.1.2 zurück: Dort hatten wir argumentiert, dass der Gradient immer senkrecht auf Äquipotenzialflächen eines skalaren Feldes steht. Können wir die Oberfläche also durch eine Gleichung der Form $\phi(x, y, z) = \text{const}$ ausdrücken, so haben wir einfach $\mathbf{n} \propto \mathbf{grad} \phi$. Der Proportionalitätsfaktor ist hier allerdings irrelevant, da er sich im Bruch in (2.12) herauskürzt – wir können also einfach direkt $\mathbf{grad} \phi$ verwenden.

Beispiel 2.13

Wir betrachten das Vektorfeld $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{j_0}{\varrho_0}(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y)$ mit reellen Konstanten j_0, ϱ_0 und wollen den Fluss durch eine Halbkugeloberfläche mit Radius r_0 um den Ursprung berechnen, die sich im oberen Halbraum ($z \geq 0$) befindet.

Die Oberfläche der Halbkugel wird beschrieben durch $z = \sqrt{r_0^2 - x^2 - y^2}$ mit $x^2 + y^2 \leq r_0^2$. Definieren wir also $\phi(x, y, z) := z - \sqrt{r_0^2 - x^2 - y^2}$, so ist die Halbkugeloberfläche genau die Äquipotenzialfläche $\phi = 0$. Damit erhalten wir

$$\mathbf{n} = \text{grad } \phi = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{r_0^2 - x^2 - y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{r_0^2 - x^2 - y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

und daraus wiederum

$$\mathbf{j} \circ \mathbf{n} = \frac{j_0}{\varrho_0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{r_0^2 - x^2 - y^2}}, \quad |\mathbf{n} \circ \mathbf{e}_z| = 1.$$

Somit ist der Fluss gegeben durch

$$\int_{\text{Halbkugel}} \mathbf{j} \circ \mathbf{dF} = \int_{\text{Kreis}} dx dy \frac{j_0}{\varrho_0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{r_0^2 - x^2 - y^2}}.$$

Das Integral ist in ebenen Polarkoordinaten nun deutlich einfacher auszuwerten,

$$\begin{aligned} \int_{\text{Halbkugel}} \mathbf{j} \circ \mathbf{dF} &= \int_0^{r_0} \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{j_0}{\varrho_0} \frac{\varrho^2}{\sqrt{r_0^2 - \varrho^2}} \\ &= \frac{2\pi j_0}{\varrho_0 r_0} \int_0^{r_0} \frac{\varrho^3}{\sqrt{1 - (\varrho/r_0)^2}} d\varrho \\ &= \frac{\pi j_0 r_0^3}{\varrho_0} \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u}} du = \frac{4\pi j_0 r_0^3}{3\varrho_0}. \end{aligned}$$

Auch hier sei abschließend erwähnt, dass es natürlich auch andere Formen von Oberflächenintegralen gibt,

$$\int \psi(\mathbf{r}) \mathbf{dF} \quad \text{oder} \quad \int \mathbf{A}(\mathbf{r}) \times \mathbf{dF}.$$

Diese sind völlig analog definiert, und auch die Berechnung verläuft praktisch genauso.

2.5 Was sind eigentlich Lebesgue-Integrale?

Als Physiker kennt man oft nur die Integraldefinition von Riemann, meist schon aus der Schule (siehe Anhang). Mit dieser Definition gibt es jedoch einige Probleme, sodass Mathematiker auch erweiterte Integraldefinitionen verwenden. Für dieses Kapitel ist insbesondere das *Lebesgue-Integral* wichtig, benannt nach dem französischen Mathematiker *Henri Léon Lebesgue* (1875–1941), der es zwischen 1899 und 1902 entdeckte, während er als Gymnasiallehrer arbeitete.

Die konkrete Berechnung von Integralen ändert sich durch diese erweiterte Definition in allen für Physiker praktisch relevanten Fällen nicht. Dieser Abschnitt kann also fast problemlos übersprungen werden und ist vor allem für diejenigen Leser empfehlenswert, die ein wenig mehr an den mathematischen Hintergründen interessiert sind. Manche Lehrbücher zur theoretischen Physik verwenden hier erklärte Begriffe wie „Integrationsmaß“ oder „Menge vom Maß null“ allerdings sogar explizit; auch in den folgenden Kapiteln wird dies an einigen (wenigen) Stellen erwähnt.

Bereits für Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Riemann'sche Integraldefinition nicht immer sinnvoll – man kann Funktionen konstruieren, für die dieses Integral nicht definiert ist. Ein bekanntes Beispiel ist die *Dirichlet-Funktion*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases},$$

nach dem deutschen Mathematiker *Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet* (1805–1859). Da das Infimum dieser Funktion in jedem Intervall gleich 0 ist und das Supremum gleich 1, konvergieren hier alle Riemann'schen Untersummen gegen 0, dagegen alle Obersummen gegen 1. Da die Riemann'sche Integraldefinition aber verlangt, dass alle Grenzwerte gleich sein sollen, ist diese Funktion also nicht Riemann-integrierbar.

Ein weiteres Problem taucht bei Integralen von Feldern auf: Hier decken endliche Zerlegungen der Definitionsmenge diese meist noch nicht einmal vollständig ab – im Gegensatz zu Funktionen, die auf reellen Intervallen definiert sind (Letztere kann man durch endliche Zerlegungen in Intervalle natürlich immer abdecken). In der folgenden Darstellung beschränken wir uns überall auf Felder, die auf \mathbb{R}^2 definiert sind; Verallgemeinerungen auf höhere Dimensionen oder andere Vektorräume wie beispielsweise den \mathbb{C}^2 sollten klar sein.

Betrachten wir beispielsweise ein Feld, das auf einer Kreisscheibe der x - y -Ebene definiert ist, so können wir diese Kreisscheibe nicht mit endlich vielen Polygonen abdecken. Wollen wir das Integral dieser Funktion über die Kreisscheibe definieren, so sind also eigentlich zwei Grenzübergänge gleichzeitig nötig: Erstens muss die Polygon-Zerlegung gegen die Kreisscheibe konvergieren, und zweitens muss die Summe der Prismen, die man über diesen Polygonen errichtet, gegen das

Volumen des Körpers zwischen dem Funktionsgraphen und der Kreisscheibe konvergieren.

Die Lebesgue'sche Integraldefinition löst beide dieser Probleme (und erweitert den Integralbegriff sogar noch stärker, als wir hier besprechen). Sie beruht im Wesentlichen auf zwei Grundideen: Einerseits wird nicht mehr die Definitionsmenge der Funktion in beliebig kleine Teile zerlegt, sondern die Wertemenge, und andererseits wird einfach vorausgesetzt, dass wir den Flächeninhalt (fast) beliebiger Teilmengen des \mathbb{R}^2 bereits kennen.

„Fast beliebig“ bedeutet hier anschaulich, dass wir nur alle „geometrisch relevanten“ Teilmengen betrachten; mathematisch exakt spricht man hier von der „Borel'schen σ -Algebra“ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (benannt nach dem französischen Mathematiker und Politiker *Félix Édouard Justin Émile Borel*, 1871–1956, der sie 1898 erstmals verwendete). Dies ist eine Teilmenge der Potenzmenge von \mathbb{R}^2 , die beispielsweise alle abgeschlossenen, alle offenen und alle kompakten Teilmengen von \mathbb{R}^2 enthält, außerdem auch alle halboffenen Rechtecke (z. B. $(1; 2] \times [-1; 3)$), alle Mengen, die nur aus einem Punkt bestehen, alle endlichen und abzählbar unendlichen Teilmengen und alle endlichen und abzählbar unendlichen Vereinigungen und Schnitte von allen bisher erwähnten Teilmengen sowie auch alle Komplemente dazu.

Eine Funktion λ (bei allgemeineren Mengen oft auch μ), die jeder Menge aus $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ eine nicht-negative reelle Zahl oder ∞ zuordnet, nennt man nun ein *Maß*, wenn zusätzlich $\lambda(\emptyset) = 0$ gilt und für jede Folge A_n von disjunkten Mengen $\lambda(\cup A_n) = \sum_n \lambda(A_n)$ gilt.

Ordnet dieses Maß insbesondere jedem abgeschlossenen Rechteck die Zahl zu, die man auch anschaulich als seinen Flächeninhalt bezeichnen würde,

$$\lambda([a_x; b_x] \times [a_y; b_y]) = (b_x - a_x) \cdot (b_y - a_y),$$

so nennt man es ein *Lebesgue-Borel-Maß*. Das Maß einer Menge, die nur einen Punkt enthält, ist damit offensichtlich gleich null. Mit der allgemeinen Maß-Definition folgt dann sofort, dass alle Mengen, die nur abzählbar viele Punkte enthalten, ebenfalls das Maß null haben.

Fügt man zu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ nun noch alle Mengen A hinzu, die „zwischen“ zwei Borel-Mengen liegen, die dasselbe Maß haben (also $B_1 \subset A \subset B_2$ mit $\lambda(B_1) = \lambda(B_2)$) und definiert deren Maß durch $\lambda(A) := \lambda(B_1) \equiv \lambda(B_2)$, so hat man endlich das sogenannte *Lebesgue-Maß* auf \mathbb{R}^2 . Alle Teilmengen von \mathbb{R}^2 , für die λ definiert ist, heißen dann „Lebesgue-messbar“.

Nach diesen mathematischen Vorarbeiten können wir nun schließlich anschaulich erklären, wie das Lebesgue-Integral definiert ist. Wie oben schon angedeutet, deckt man die Wertemenge W eines Feldes $f : D \rightarrow W$ mit $D \subset \mathbb{R}^2$, $W \subset \mathbb{R}$ durch abgeschlossene Intervalle I_j , $1 \leq j \leq n$ ab. Alle Punkte aus D , die auf Werte in I_j abgebildet werden, also $f^{-1}(I_j)$, bilden dann in praktisch allen relevanten Anwendungen jeweils eine Lebesgue-messbare Figur, und $F_j := \lambda(f^{-1}(I_j))$ ist der Flächeninhalt dieser Figur. (Anschaulich gesprochen projiziert man jeweils die Teile des Funktionsgraphen, die z -Werte im jeweiligen Intervall haben, auf die x -

y -Ebene.) Wählen wir in jedem Intervall einen Wert z_j , so erhalten wir mit

$$\sum_j F_j \cdot z_j = \sum_{j=1}^n \lambda(f^{-1}(I_j)) \cdot z_j$$

somit eine Abschätzung für das Volumen des Körpers zwischen dem Funktionsgraphen und D . Ganz analog zum Riemann-Integral ist nun das Lebesgue-Integral von f über D definiert als der Grenzwert dieser Summe für $n \rightarrow \infty$. Mathematiker verwenden dafür dann auch oft die Schreibweise (oder ähnliche)

$$\int_D f \, d\lambda(F)$$

und sprechen von einem *Integrationsmaß*.

Beispiel 2.14

Wir betrachten das Feld

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Der Funktionsgraph schließt mit der x - y -Ebene einen Teil eines nach unten geöffneten Paraboloids ein.

Wir teilen nun den Wertebereich $[0; 1]$ von f in fünf Intervalle ein: $I_1 = [0; 0, 2]$, $I_2 = [0, 2; 0, 4]$, $I_3 = [0, 4; 0, 6]$, $I_4 = [0, 6; 0, 8]$ und $I_5 = [0, 8; 1]$. Wegen der Rotationssymmetrie um die z -Achse ist das Urbild (also die Projektion in die x - y -Ebene) von $[0, 8; 1]$ ein Kreis mit Radius $\varrho = \sqrt{0, 2}$ um den Ursprung in der x - y -Ebene. Die Urbilder aller anderen Intervalle sind jeweils Kreisringe; beispielsweise ergibt sich für $[0, 6; 0, 8]$ ein Kreisring mit Innenradius $\sqrt{0, 2}$ und Außenradius $\sqrt{0, 4}$ (vgl. Abb. 2.12).

Das Lebesgue-Maß des Kreises und der Kreisringe ist nun einfach gleich dem üblichen Flächeninhalt. Wir haben also

$$\begin{aligned} F_1 &= \lambda(f^{-1}(I_1)) = \pi \sqrt{0, 2}^2 = 0, 2\pi, \\ F_2 &= \lambda(f^{-1}(I_2)) = \pi \sqrt{0, 4}^2 - \pi \sqrt{0, 2}^2 = 0, 2\pi, \\ &\dots \end{aligned}$$

(In diesem speziellen Beispiel haben also alle Urbilder sogar denselben Flächeninhalt.)

Wählen wir außerdem noch für die Höhen der jeweiligen Teilkörper (hier: ein Zylinder und vier Zylinderringe), in die wir den gesuchten Körper zerlegen, Werte aus den jeweiligen Intervallen, also beispielsweise $z_1 = 0, 1$,

$z_2 = 0,3$ usw., dann erhalten wir als Abschätzung für das Volumen

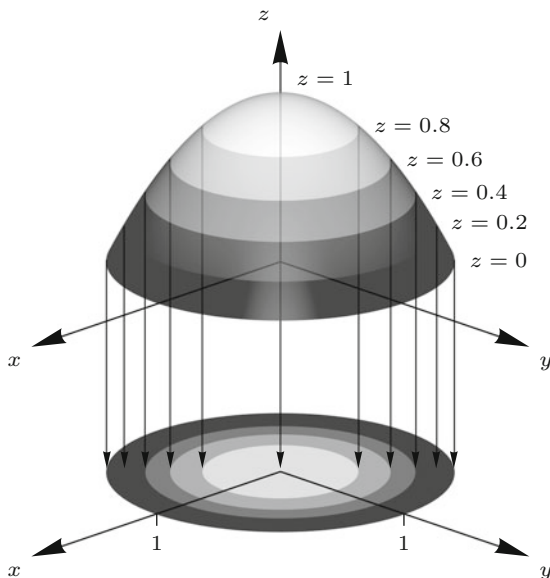
$$V \approx 0,2\pi \cdot 0,1 + 0,2\pi \cdot 0,3 + 0,2\pi \cdot 0,5 + 0,2\pi \cdot 0,7 + 0,2\pi \cdot 0,9 = 0,5\pi.$$

Diese Abschätzung stimmt hier sogar mit dem exakten Wert überein, wie man leicht unter Verwendung von Zylinderkoordinaten nachrechnet (macht mal!).

Aus der Definition folgt auch, dass Funktionen, die sich nur auf Mengen vom Lebesgue-Maß null unterscheiden (also z. B. nur bei abzählbar vielen Punkten verschiedene Werte annehmen), dasselbe Lebesgue-Integral haben. Da sich die Dirichlet-Funktion nur auf einer Menge vom Maß null (nämlich bei allen rationalen Zahlen) von der Funktion $f : x \mapsto 0$ unterscheidet, folgt sofort, dass das Lebesgue-Integral von f gleich null ist. Diese Funktion ist somit Lebesgue-integrierbar, obwohl sie nicht Riemann-integrierbar ist.

Abschließend möchte ich noch erwähnen, dass es auch Teilmengen von \mathbb{R}^2 gibt, die nicht Lebesgue-messbar sind – obwohl die Definition oben ja schon sehr allgemein klingt. Solche Mengen kann man sich aber praktisch nicht mehr anschaulich vorstellen. Die Existenz von nicht messbaren Mengen im \mathbb{R}^3 ist übrigens auch die Grundlage für das „Banach-Tarski-Paradoxon“: Man kann eine Kugel in Teile zerlegen, die neu zusammengefügt *zwei* Kugeln mit demselben Radius ergeben! (Diese Teile haben aber eben keine Form, die man sich irgendwie vorstellen könnte, und

Abb. 2.12 Zur Lebesgue-Integration, siehe Beispiel 2.14: Die z -Achse wird in Intervalle eingeteilt, und zu jedem Teil des Funktionsgraphen wird jeweils das Urbild genommen – der Graph wird also auf die x - y -Ebene projiziert



kein messbares Volumen.) Wer an Details interessiert ist, der schaue in Bücher zur Analysis III bzw. besuche entsprechende Vorlesungen.

Zusammenfassung

- Um ein Vektorfeld \mathbf{K} entlang eines Weges zu integrieren, denkt man sich den Weg in infinitesimal kleine Teilstücke $d\mathbf{r}$ zerlegt und addiert diese unendlich vielen Beiträge alle auf. Dies ergibt das Wegintegral

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{K} \circ d\mathbf{r};$$

bei geschlossenen Wegen schreibt man

$$\oint \mathbf{K} \circ d\mathbf{r}.$$

Für die konkrete Berechnung parametrisiert man den Weg, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\lambda)$, und berechnet dann mit den üblichen Methoden das Integral

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathbf{K} \circ \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} d\lambda.$$

- Um ein skalares Feld $f(x, y)$ über eine Fläche in der x - y -Ebene zu integrieren, denkt man sich die Fläche in infinitesimal kleine Vielecke mit Flächeninhalten dF zerlegt und addiert diese unendlich vielen Beiträge alle auf. Dies ergibt das Flächenintegral

$$\int_F f(x, y) dF.$$

Wählt man insbesondere $f(x, y) = 1$, so erhält man einfach den Inhalt der Fläche.

Für die konkrete Berechnung schreibt man dF in geeigneten Koordinaten (z. B. in kartesischen Koordinaten: $dx dy$; in ebenen Polarkoordinaten: $\varrho d\varrho d\varphi$). Die Umrechnung zwischen verschiedenen Koordinaten erfolgt dabei mittels der Jacobi-Determinante,

$$du dv = \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right| dx dy.$$

Man hat dann ein doppeltes („iteriertes“) Integral zu berechnen, z. B.

$$\int dx \int dy f(x, y).$$

Dies bedeutet, dass man f zunächst nach y „aufleitet“ (wobei man x als Konstante betrachtet) und die Grenzen einsetzt; das Ergebnis muss man dann nochmals nach x aufleiten und wieder die entsprechenden Grenzen einsetzen. Dabei werden im Allgemeinen die Grenzen des inneren Integrals von der Variable des äußeren abhängen. Wenn der Integrand bezüglich beider Variablen stetig ist, kann man die Integrationsreihenfolge auch vertauschen.

Wenn der Integrand ein Produkt zweier Funktionen g, h ist, die nur von einer Variablen abhängen, und die Grenzen des inneren Integrals nicht von der Variable des äußeren abhängen, zerfällt das Doppelintegral in ein Produkt zweier eindimensionaler Integrale,

$$\int g(x) dx \cdot \int h(y) dy.$$

- Um ein skalares Feld $f(x, y, z)$ über einen Körper zu integrieren, denkt man sich den Körper in infinitesimal kleine Polyeder mit Rauminhalten dV zerlegt und addiert diese unendlich vielen Beiträge alle auf. Dies ergibt das Volumenintegral

$$\int_V f(x, y, z) dV.$$

Wählt man insbesondere $f(x, y, z) = 1$, so erhält man einfach den Rauminhalt der Körper.

Die konkrete Berechnung läuft praktisch genauso wie bei Flächenintegralen in der Ebene ab, nur eben jeweils mit einer Variablen mehr. Auch das oben Gesagte zur Umrechnung zwischen verschiedenen Koordinaten, zu den iterierten Integralen und zum Zerfallen in ein Produkt von eindimensionalen Integralen gilt entsprechend. In kartesischen Koordinaten gilt dabei $dV = dx dy dz$, in Zylinderkoordinaten $dV = \varrho d\varrho d\varphi dz$ und in Kugelkoordinaten $dV = r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$. Letzteres kann man auch schreiben als $-r^2 dr d\cos \vartheta d\varphi$ (das Minuszeichen dreht dabei einfach die Reihenfolge der Integrationsgrenzen um) bzw. abgekürzt als $r^2 dr d\Omega$ mit dem infinitesimalen Raumwinkelement $d\Omega$.

- Um den Fluss eines Vektorfeldes \mathbf{j} durch eine (im Allgemeinen gekrümmte) Fläche im Raum zu berechnen, denkt man sich die Fläche in infinitesimal kleine, lokal näherungsweise ebene Vielecke mit Flächeninhalten dF und Normaleneinheitsvektoren \mathbf{n} zerlegt; für das Produkt $\mathbf{n} dF$

schreibt man kurz \mathbf{dF} . Addiert man diese unendlich vielen Beiträge auf, so ergibt sich das Flächenintegral

$$\int \mathbf{j} \circ \mathbf{dF}.$$

Handelt es sich um eine geschlossene Fläche (also die Oberfläche eines Körpers), so schreibt man

$$\oint \mathbf{j} \circ \mathbf{dF}.$$

Für die Berechnung parametrisiert man sich die Fläche, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\lambda, \mu)$; dann gilt:

$$\mathbf{dF} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mu} d\lambda d\mu.$$

Man erhält wieder ein doppeltes iteriertes Integral; zur konkreten Berechnung, zum Umrechnen von Koordinaten usw. siehe oben beim ebenen Flächenintegral. Insbesondere bei einer Zylindermantelfläche hat man $\mathbf{dF} = \varrho d\varphi dz \mathbf{e}_\varrho$, bei einer Kugeloberfläche $\mathbf{dF} = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \mathbf{e}_r = r^2 d\Omega \mathbf{e}_r$.

Alternativ kann man sich in manchen Fällen die Fläche auch in die x - y -Ebene projiziert denken. Kann man sie als Äquipotenzialfläche eines Feldes ϕ schreiben, so gilt dann:

$$\int \mathbf{j} \circ \mathbf{dF} = \int \frac{\mathbf{j} \circ \mathbf{grad} \phi}{|\mathbf{e}_z \circ \mathbf{grad} \phi|} dx dy.$$

2.6 Aufgaben

2.1 Berechne folgende Wegintegrale:

- Das Vektorfeld $\mathbf{K} = xy\mathbf{e}_x - 2x^2\mathbf{e}_y$ sei gegeben, der Weg verlaufe von $(0, 0)$ nach $(1, 3)$ auf der Parabel, die durch $y = 3x^2$ beschrieben wird.
- Ein Körper bewege sich auf der Bahn, die durch $x(t) = t^2 + 1$, $y(t) = t$, $z(t) = t^3$ beschrieben wird, mit $0 \leq t \leq 1$, durch das Feld $\mathbf{K} = y\mathbf{e}_x + z^2\mathbf{e}_x + xy\mathbf{e}_z$.
- $\int xy^2z^3 d\mathbf{r}$ für den Weg aus (b).
- $\int \mathbf{K} \times d\mathbf{r}$ für das Vektorfeld \mathbf{K} aus (a) und den Weg aus (b).
- $\mathbf{K} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ mit einem konstanten Vektor $\boldsymbol{\omega}$; der Weg sei ein Kreis um den Ursprung mit Radius ϱ_0 in der Ebene senkrecht zu $\boldsymbol{\omega}$, der gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Die Rechnung wird durch eine geeignete Koordinatenwahl hier sehr vereinfacht.

Lösung

- (a) Wir verwenden $\mathbf{K} \circ d\mathbf{r} = xy \, dx - 2x^2 dy$, wobei $0 \leq x \leq 1$ gilt und $0 \leq y \leq 3$. Beim x -Integral ist zu beachten, dass $y = 3x^2$ ist, beim y -Integral dann umgekehrt $x = \sqrt{y/3}$. Damit ist

$$\int \mathbf{K} \circ d\mathbf{r} = \int_0^1 xy \, dx - \int_0^3 2x^2 dy = \int_0^1 3x^3 \, dx - \int_0^3 \frac{2}{3}y \, dy = \frac{3}{4} - 3 = -\frac{9}{4}.$$

- (b) Hier ist es sinnvoller, mit der Parametrisierung des Weges zu rechnen. Wir haben

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{K}(\mathbf{r}(t)) = \begin{pmatrix} t \\ t^6 \\ t^3 + t \end{pmatrix},$$

also folgt

$$\int \mathbf{K} \circ d\mathbf{r} = \int_0^1 (2t^2 + t^6 + (3t^5 + 3t^3)) \, dt = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{25}{12}.$$

- (c) Zunächst ist $xy^2z^3 = (t^2 + 1) \cdot t^2 \cdot t^9 = t^{13} + t^{11}$. Mit $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ aus (b) haben wir dann das vektorwertige Integral

$$\int xy^2z^3 \, d\mathbf{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2(t^{14} + t^{12}) \\ t^{13} + t^{11} \\ 3(t^{15} + t^{13}) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \frac{56}{195} \\ \frac{13}{84} \\ \frac{45}{112} \end{pmatrix}.$$

- (d) Zunächst ist $\mathbf{K}(\mathbf{r}(t)) = (t^3 + t)\mathbf{e}_x - 2t^4 - 4t^2 - 2\mathbf{e}_y$. Wieder mit $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ aus (b) folgt hier das vektorwertige Integral

$$\begin{aligned} \int \mathbf{K} \times d\mathbf{r} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t^3 + t \\ -2t^4 - 4t^2 - 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 \begin{pmatrix} -6t^6 - 12t^4 - 6t^2 \\ -3t^4 - 3t^3 \\ 4t^5 + 9t^3 + 5t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} -\frac{184}{35} \\ -\frac{27}{20} \\ \frac{65}{12} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- (e) Wir legen das Koordinatensystem so, dass $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$ ist, mit $\omega > 0$. Dann ist $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \omega \mathbf{e}_z \times (\varrho \mathbf{e}_\varrho + z \mathbf{e}_z) = \omega \varrho \mathbf{e}_\varphi$. Die Kreisbahn können wir dann parametrisieren als $\mathbf{r}(t) = \varrho_0 \mathbf{e}_\varphi$ mit $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Also ist

$$\oint (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \circ d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \omega \varrho_0 \mathbf{e}_\varphi \circ \varrho_0 \mathbf{e}_\varphi \, d\varphi = 2\pi \omega \varrho_0^2.$$

2.2 Berechne die folgenden ebenen Flächenintegrale:

- (a) Berechne die Gesamtladung (2.4) des Dreiecks aus Beispiel 2.5, indem du zuerst über x , dann über y integrierst.
- (b) Die Ladungsdichte in einem Kreis mit Radius ϱ_0 um den Ursprung sei gegeben durch $\sigma(x, y) = x^2 y$; gesucht ist die Gesamtladung. Verwende sowohl kartesische als auch ebene Polarkoordinaten.
- (c) Wie (b), aber mit $\sigma(x, y) = |x|y^2$.

Lösung

- (a) Wir zerlegen das Dreieck wieder in zwei Teile: Das Teildreieck mit $1 \leq y \leq 2$ wird von $[AC]$ und $[AB]$ begrenzt, das mit $2 \leq y \leq 4$ von $[AC]$ und $[BC]$. Die Gleichungen der Strecken stellen wir nun jeweils um nach x ,

$$\begin{aligned} [AB] : x &= 3y - 1, & 1 \leq y \leq 2, \\ [BC] : x &= -y + 7, & 2 \leq y \leq 4, \\ [AC] : x &= \frac{1}{3}y + \frac{5}{3}, & 1 \leq y \leq 4. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\int_{\text{Dreieck}} xy \, dF = \int_1^2 dy \int_{\frac{1}{3}y + \frac{5}{3}}^{3y-1} dx \, xy + \int_2^4 dy \int_{\frac{1}{3}y + \frac{5}{3}}^{-y+7} dx \, xy.$$

Das y ist nun bei den inneren x -Integralen jeweils ein konstanter Faktor und kann vorgezogen werden. Nach Ausführen der x -Integrale, Einsetzen der Grenzen und Zusammenfassen bleibt dann zunächst

$$\begin{aligned} \int_{\text{Dreieck}} xy \, dF &= \frac{1}{9} \int_1^2 dy [40y^3 - 32y^2 - 8y] \\ &\quad + \frac{1}{9} \int_2^4 dy [4y^3 - 68y^2 + 208y]. \end{aligned}$$

Die restliche Rechnung ist wieder zwar mühselig, aber eigentlich trivial. Am Schluss ergibt sich hier

$$Q = \int_{\text{Dreieck}} xy \, dF = \frac{1}{9} \cdot \frac{190}{3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{656}{3} = \frac{94}{3}, \quad (2.13)$$

also wieder (2.4).

(b) Zunächst rechnen wir in kartesischen Koordinaten:

$$\int_{\text{Kreis}} \sigma \, dF = \int_{-\varrho_0}^{\varrho_0} dx \, x^2 \int_{-\sqrt{\varrho_0^2 - x^2}}^{\sqrt{\varrho_0^2 - x^2}} dy \, y.$$

Das sieht zwar etwas kompliziert aus, ist aber letztlich trivial: Das y -Integral ist symmetrisch zu 0, und der Integrand ist eine ungerade Funktion. Damit verschwindet dieses Integral einfach, die Gesamtladung ist hier also $Q = 0$.

In ebenen Polarkoordinaten haben wir $\sigma = \varrho^3 \cos \varphi \sin \varphi$ und damit

$$\int_{\text{Kreis}} \sigma \, dF = \int_0^{\varrho_0} \varrho \, d\varrho \, \varrho^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \sin \varphi.$$

Hier verschwindet nun das φ -Integral, wir erhalten also wieder $Q = 0$.

(c) In kartesischen Koordinaten ist

$$\begin{aligned} Q &= \int_{\text{Kreis}} \sigma \, dF = \int_{-\varrho_0}^{\varrho_0} dx \, |x| \int_{-\sqrt{\varrho_0^2 - x^2}}^{\sqrt{\varrho_0^2 - x^2}} dy \, y^2 = \frac{2}{3} \int_{-\varrho_0}^{\varrho_0} dx \, |x| \sqrt{\varrho_0^2 - x^2}^3 \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\varrho_0} dx \, x \sqrt{\varrho_0^2 - x^2}^3 = \frac{4}{3} \left[-\frac{1}{5} \sqrt{\varrho_0^2 - x^2}^5 \right]_0^{\varrho_0} = \frac{4}{15} \varrho_0^5. \end{aligned}$$

In ebenen Polarkoordinaten haben wir dagegen

$$Q = \int_{\text{Kreis}} \sigma \, dF = \int_0^{\varrho_0} \varrho \, d\varrho \, \varrho^3 \int_0^{2\pi} d\varphi |\cos \varphi| \sin^2 \varphi.$$

Dieses Doppelintegral zerfällt in ein Produkt von zwei einzelnen Integralen. Das Integral über ϱ ergibt sofort $\varrho_0^5/5$, das φ -Integral können wir schreiben als

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \sin^2 \varphi \, d\varphi.$$

Beispielsweise mit der Substitution $u = \sin \varphi$ erhält man dafür dann $\frac{4}{3}$. Auch hier ist das Endergebnis also $Q = \frac{4}{15} \varrho_0^5$.

2.3 Berechne die Jacobi-Determinanten für folgende Umrechnungen:

- (a) von ebenen kartesischen in ebene Polarkoordinaten,
- (b) von ebenen kartesischen in ebene elliptische Koordinaten ψ, φ (dabei ist $x = f \cosh \psi \cos \varphi, y = f \sinh \psi \sin \varphi$ mit konstantem $f > 0$),
- (c) von räumlichen kartesischen in Zylinderkoordinaten,
- (d) von räumlichen kartesischen in Kugelkoordinaten.

Lösung

- (a) Die Jacobi-Matrix erhält man mit den partiellen Ableitungen,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varrho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \varrho \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Die Determinante davon ist dann einfach

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\varrho, \varphi)} = \varrho.$$

- (b) Die Jacobi-Matrix ist hier

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \psi} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \psi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \sinh \psi \cos \varphi & -f \cosh \psi \sin \varphi \\ f \cosh \psi \sin \varphi & f \sinh \psi \cos \varphi \end{pmatrix},$$

also folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(\psi, \varphi)} &= f^2(\sinh^2 \psi \cos^2 \varphi + \cosh^2 \psi \sin^2 \varphi) \\ &= f^2(\sinh^2 \psi - \sinh^2 \psi \sin^2 \varphi + \cosh^2 \psi \sin^2 \varphi) \\ &= f^2(\sinh^2 \psi + \sin^2 \varphi). \end{aligned}$$

- (c) Die Rechnung verläuft hier sehr ähnlich wie in (a) – wir haben ja nur zusätzlich die z -Koordinate, die in beiden Koordinatensystemen aber identisch ist. Deshalb ist die Jacobi-Matrix einfach

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \varrho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und es folgt

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varrho, \varphi, z)} = \varrho.$$

(d) Hier ist

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Berechnung der Determinante ist nun etwas aufwendiger; das Endergebnis ist

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} = r^2 \sin \vartheta.$$

2.4 Berechne folgende Volumenintegrale:

- $f(\mathbf{r}) = 1$ über einen Zylinder mit Radius ϱ_0 und Höhe h , sowohl in kartesischen als auch in Zylinderkoordinaten. Wähle das Koordinatensystem dafür geeignet und interpretiere das Ergebnis.
- $f(\mathbf{r}) = 1$ und $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ über das Teilstück eines Paraboloids, das von $z = a(x^2 + y^2)$ mit $a > 0$ und $z = z_0 > 0$ begrenzt wird (vgl. die Oberflächenberechnung in Beispiel 2.12.) Teile am Schluss das zweite Integral durch das erste und interpretiere die Ergebnisse.
- $f(\mathbf{r}) = r^n$ über den Körper, der von den Kugelflächen mit Radius r_1 und $r_2 > r_1$ um den Ursprung begrenzt wird. Unter welchen Voraussetzungen existiert jeweils der Grenzwert $r_1 \rightarrow 0$ bzw. $r_2 \rightarrow \infty$?
- Gesamtladung eines Atomkerns mit der sich bis ins Unendliche erstreckenden Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 \frac{r_0^6}{r^6 + r_0^6}$.
- $f(\mathbf{r}) = 1$ über den zylindersymmetrischen Körper, dessen Oberfläche durch $r(\vartheta) = r_0 \cdot (3 \cos^2 \vartheta - 1)$ mit $r_0 > 0$ beschrieben wird.

Lösung

- Wir wählen das Koordinatensystem so, dass die Symmetrieachse des Zylinders die z -Achse ist und er sich dort von $z = 0$ bis $z = h$ erstreckt. Dann ist zunächst in kartesischen Koordinaten

$$\int_{\text{Zylinder}} 1 \, dV = \int_{-\varrho_0}^{\varrho_0} dx \int_{-\sqrt{\varrho_0^2 - x^2}}^{\sqrt{\varrho_0^2 - x^2}} dy \int_0^h dz.$$

Die x - und y -Integrale ergeben mal wieder einfach den Inhalt einer Kreisfläche, $\pi \varrho_0^2$. Die z -Integration kann man als einzelnen Faktor abspalten; sie ergibt offensichtlich h . Also ist insgesamt

$$\int_{\text{Zylinder}} 1 \, dV = \pi \varrho_0^2 h,$$

was natürlich das Volumen des Zylinders ist.

In Zylinderkoordinaten läuft die Rechnung noch einfacher,

$$\int_{\text{Zylinder}} 1 \, dV = \int_0^{\varrho_0} \varrho \, d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz = \frac{1}{2} \varrho_0^2 \cdot 2\pi \cdot h = \pi \varrho_0^2 h.$$

- (b) Wegen der Rotationssymmetrie des Problems verwenden wir Zylinderkoordinaten. In diesen gilt $a\varrho^2 \leq z \leq z_0$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. ϱ muss natürlich ≥ 0 sein; da außerdem aber auch $a\varrho^2 \leq z_0$ gilt, folgt $\varrho \leq \sqrt{z_0/a}$. Damit ist

$$\int_{\text{Paraboloid}} 1 \, dV = \int_0^{\sqrt{z_0/a}} \varrho \, d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a\varrho^2}^{z_0} dz.$$

Die φ - und z -Integrationen sind sofort ausführbar,

$$\int_{\text{Paraboloid}} 1 \, dV = 2\pi \int_0^{\sqrt{z_0/a}} (z_0\varrho - a\varrho^3) d\varrho.$$

Auch das ϱ -Integral ist einfach; das Endergebnis ist

$$\int_{\text{Paraboloid}} 1 \, dV = \frac{\pi z_0^2}{2a}.$$

Dies ist das Volumen des Paraboloids.

Außerdem ist

$$\int_{\text{Paraboloid}} \mathbf{r} \, dV = \int_0^{\sqrt{z_0/a}} \varrho \, d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a\varrho^2}^{z_0} dz (\varrho \mathbf{e}_\varrho + z \mathbf{e}_z).$$

Das Integral von \mathbf{e}_ϱ über $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ verschwindet aber einfach, da ja die Komponenten dieses Einheitsvektors $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ sind. Der Einheitsvektor \mathbf{e}_z ist dagegen von φ unabhängig, sodass in diesem Fall die Integration einfach 2π ergibt. Somit ist

$$\begin{aligned} \int_{\text{Paraboloid}} \mathbf{r} \, dV &= 2\pi \mathbf{e}_z \int_0^{\sqrt{z_0/a}} \varrho \, d\varrho \int_{a\varrho^2}^{z_0} dz \, z \\ &= \pi \mathbf{e}_z \int_0^{\sqrt{z_0/a}} (z_0^2\varrho - a^2\varrho^5) d\varrho = \frac{\pi z_0^3}{3a} \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\frac{\int_{\text{Paraboloid}} \mathbf{r} \, dV}{\int_{\text{Paraboloid}} 1 \, dV} = \frac{2z_0}{3} \mathbf{e}_z.$$

Setzt man eine konstante Massendichte voraus, so gibt dies den Schwerpunkt des Paraboloids an.

(c)

$$\begin{aligned} \int r^n \, dV &= \int_{r_1}^{r_2} r^2 \, dr \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \, r^n = \int_{r_1}^{r_2} r^{2+n} \, dr \int d\Omega \\ &= 4\pi \cdot \begin{cases} \frac{r_2^{n+3} - r_1^{n+3}}{n+3} & n \neq -3 \\ \ln \frac{r_2}{r_1} & n = -3 \end{cases}. \end{aligned}$$

Offensichtlich existiert der Grenzwert $r_1 \rightarrow 0$ nur für $n > -3$, der Grenzwert $r_2 \rightarrow \infty$ dagegen für $n < -3$. (Die Zahl 3 resultiert letztlich natürlich genau daher, dass der Raum eben drei Dimensionen hat.)

(d)

$$\begin{aligned} Q &= \int \rho(\mathbf{r}) \, dV = \int_0^\infty r^2 \, dr \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \, \rho_0 \frac{r_0^6}{r^6 + r_0^6} \\ &= \rho_0 \int_0^\infty \frac{r^2}{(r/r_0)^6 + 1} \, dr \int d\Omega = \frac{4\pi r_0^3}{3} \rho_0 \int_0^\infty \frac{1}{u^2 + 1} \, du \\ &= \frac{4\pi r_0^3}{3} \rho_0 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi^2 r_0^3}{3} \rho_0; \end{aligned}$$

dabei wurde $u = (r/r_0)^3$ substituiert.

(e)

$$\begin{aligned} \int 1 \, dV &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{r_0 \cdot (3 \cos^2 \vartheta - 1)} r^2 \, dr \\ &= \frac{2\pi r_0^3}{3} \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta (3 \cos^2 \vartheta - 1)^3 = \frac{2\pi r_0^3}{3} \int_{-1}^1 (3u^2 - 1)^3 \, du, \end{aligned}$$

wobei $u = \cos \vartheta$ substituiert wurde. Das Integral über u ist nun zwar noch ein wenig aufwendig, aber eigentlich mal wieder recht trivial. Das Endergebnis ist

$$\int 1 \, dV = \frac{64\pi r_0^3}{105}.$$

2.5 Berechne folgende räumlichen Flächenintegrale:

- Fluss des Vektorfelds $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = z\mathbf{e}_x - 2y\mathbf{e}_y + 3x\mathbf{e}_z$ durch ein Dreieck mit den Eckpunkten $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$ und $C(0; 0; 6)$. Verwende dabei beide Methoden (Projektion auf die x - y -Ebene bzw. Parametrisierung des Dreiecks).
- Fluss des Vektorfelds $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = yz\mathbf{e}_x + xz\mathbf{e}_y + xy\mathbf{e}_z$ durch eine Kugeloberfläche um den Ursprung mit Radius r_0 und durch die Oberfläche des Würfels mit $0 \leq x, y, z \leq L$.
- $\int f(\mathbf{r})\mathbf{dF}$, also der vektorielle Fluss des skalaren Feldes $f(\mathbf{r}) = xyz$, durch die beiden Oberflächen aus (b).
- $\oint \mathbf{r} \times \mathbf{dF}$, jeweils für die Oberfläche eines Zylinders (Radius ϱ_0 , Höhe h , rotationssymmetrisch zur z -Achse und spiegelsymmetrisch zur x - y -Ebene) und einer Kugel mit Radius r_0 um den Ursprung.
- Oberflächeninhalt eines Rotationsellipsoids mit Achsen a, a, b ; unterscheide dabei die Fälle $a < b$ und $a > b$. (Tipp: Die Oberfläche kann beschrieben werden durch $x^2/a^2 + y^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$. Es empfiehlt sich, die drei kartesischen Koordinaten ähnlich wie bei den Kugelkoordinaten durch die Winkel ϑ und φ auszudrücken – nur muss man eben a bzw. b statt r verwenden.)

Lösung

- Der Normalenvektor der Fläche ist hier konstant; wir können ihn einfach aus dem Kreuzprodukt zweier Verbindungsvektoren der Eckpunkte berechnen,

$$\mathbf{n} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung der Ebene durch die Punkte A , B und C ist damit $18x + 12y + 6z - 36 = 0$, woraus

$$z = 6 - 3x - 2y$$

folgt. Damit ist

$$\mathbf{j} \circ \mathbf{n} = 18z - 24y + 18x = 108 - 36x - 60y \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_z \circ \mathbf{n} = 6.$$

Projiziert man das Dreieck auf die x - y -Ebene, so ergibt sich ein Dreieck, das von der x - und der y -Achse sowie der Strecke $[AB]$ begrenzt wird. Letztere wird beschrieben durch $y = -1,5x + 3$ mit $0 \leq x \leq 2$. Somit ist zu berechnen:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{j} \circ \mathbf{dF} &= \int_0^2 dx \int_0^{-1,5x+3} dy \frac{108 - 36x - 60y}{6} \\ &= \int_0^2 dx [(18 - 6x)y - 5y^2]_0^{-1,5x+3} = \int_0^2 dx [-2,25x^2 + 9] = 12. \end{aligned}$$

Alternativ kann man das Dreieck auch beispielsweise folgendermaßen parametrisieren:

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \mu(\mathbf{c} - \mathbf{a}),$$

also

$$x = 2 - 2\lambda - 2\mu, \quad y = 3\lambda, \quad z = 6\mu,$$

mit $\lambda, \mu \geq 0$ und $\lambda + \mu \leq 1$. Damit haben wir

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} = \mathbf{b} - \mathbf{a}; \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mu} = \mathbf{c} - \mathbf{a} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mu} = \mathbf{n}$$

mit dem Normalenvektor \mathbf{n} von oben und

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}(\lambda, \mu)) = 6\mu \mathbf{e}_x - 6\lambda \mathbf{e}_y + (6 - 6\lambda - 6\mu) \mathbf{e}_z.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int \mathbf{j} \circ d\mathbf{F} &= \int_0^1 d\lambda \int_0^{1-\lambda} d\mu \begin{pmatrix} 6\mu \\ -6\lambda \\ 6 - 6\lambda - 6\mu \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= \int_0^1 d\lambda \int_0^{1-\lambda} d\mu (36 - 108\lambda + 72\mu) \\ &= \int_0^1 d\lambda (144\lambda^2 - 216\lambda + 72) = 12. \end{aligned}$$

- (b) Den Fluss durch die Kugeloberfläche berechnen wir natürlich am einfachsten in Kugelkoordinaten. In diesen ist

$$\mathbf{j} = r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_x + r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_y + r^2 \sin^2 \vartheta \cos \varphi \sin \varphi \mathbf{e}_z$$

und

$$d\mathbf{F} = r^2 \sin \vartheta \mathbf{e}_r d\vartheta d\varphi.$$

Berücksichtigen wir außerdem noch, dass auf der Kugeloberfläche offensichtlich $r = r_0$ ist, und berechnen die Skalarprodukte von $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ mit \mathbf{e}_r , so bleibt

$$\oint_{\text{Kugel}} \mathbf{j} \circ d\mathbf{F} = 3r_0^4 \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi.$$

Bereits das Integral über φ verschwindet aber (das sieht man z. B. schnell, wenn man $\sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \sin(2\varphi)$ schreibt) – also ist der gesamte Fluss dieses Feldes durch die Kugeloberfläche identisch null.

Beim Würfel haben wir sechs Teilflächen,

- $x = 0, 0 \leq y, z \leq L$ und $x = L, 0 \leq y, z \leq L$,
- $y = 0, 0 \leq x, z \leq L$ und $y = L, 0 \leq x, z \leq L$,
- $z = 0, 0 \leq x, y \leq L$ und $z = L, 0 \leq x, y \leq L$.

Wie im Kapiteltext bereits gesagt, zeigt der Normalenvektor konventionsgemäß immer nach außen, ist auf den sechs Flächen also der Reihe nach gegeben durch $-\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_x, -\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_y, -\mathbf{e}_z$ bzw. \mathbf{e}_z . Das Feld ist auf diesen Flächen jeweils

- $\mathbf{j} = yz\mathbf{e}_x$ bzw. $\mathbf{j} = yz\mathbf{e}_x + Lz\mathbf{e}_y + Ly\mathbf{e}_z$,
- $\mathbf{j} = xz\mathbf{e}_y$ bzw. $\mathbf{j} = Lz\mathbf{e}_x + xz\mathbf{e}_y + xL\mathbf{e}_z$,
- $\mathbf{j} = xy\mathbf{e}_z$ bzw. $\mathbf{j} = yL\mathbf{e}_x + xL\mathbf{e}_y + xy\mathbf{e}_z$.

Für die Integranden $\mathbf{j} \circ \mathbf{dF}$ auf den sechs Teilflächen folgt damit

- $-yz \, dy \, dz$ bzw. $yz \, dy \, dz$,
- $-xz \, dx \, dz$ bzw. $xz \, dx \, dz$,
- $-xy \, dx \, dy$ bzw. $xy \, dx \, dy$.

Insgesamt ist also

$$\begin{aligned} \int_{\text{Würfel}} \mathbf{j} \circ \mathbf{dF} &= - \int_0^L dy \int_0^L dz \, yz + \int_0^L dy \int_0^L dz \, yz - \int_0^L dx \int_0^L dz \, xz \\ &\quad + \int_0^L dx \int_0^L dz \, xz - \int_0^L dx \int_0^L dy \, xy + \int_0^L dx \int_0^L dy \, xy = 0; \end{aligned}$$

auch dieser Fluss verschwindet.

(c) Zunächst ist in Kugelkoordinaten

$$f(\mathbf{r}) = r^3 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi,$$

und wir können natürlich sofort wieder $r = r_0$ setzen. Nehmen wir noch die explizite Form von \mathbf{dF} aus (b) und von \mathbf{e}_r , so haben wir folgendes vektorwertiges Integral zu berechnen:

$$\oint_{\text{Kugel}} xyz \, \mathbf{dF} = r_0^3 \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} \sin^3 \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cos^2 \varphi \\ \sin^3 \vartheta \cos \vartheta \sin^2 \varphi \cos \varphi \\ \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Auch hier verschwinden bereits alle Integrale über φ , sodass wir insgesamt

$$\oint xyz \, \mathbf{dF} = \mathbf{0}$$

erhalten.

Beim Würfel verschwindet auf drei der Teilflächen bereits der komplette Integrand; wir müssen nur noch die drei Flächen betrachten, auf denen $x = L$

bzw. $y = L$ bzw. $z = L$ ist. Mit den Teilergebnissen aus (b) haben wir dann insgesamt

$$\oint_{\text{Würfel}} xyz \, d\mathbf{F} = L \int_0^L dy \int_0^L dz \, yz \, \mathbf{e}_x + L \int_0^L dx \int_0^L dz \, xz \, \mathbf{e}_y \\ + L \int_0^L dx \int_0^L dy \, xy \, \mathbf{e}_z = \frac{L^5}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (d) Die Zylinderoberfläche besteht aus der Mantelfläche ($\varrho = \varrho_0$ und $-h/2 \leq z \leq h/2$) und den Grund- und Deckflächen ($0 \leq \varrho \leq \varrho_0$ und $z = -h/2$ bzw. $z = h/2$). Auf der Mantelfläche ist $\mathbf{r} = \varrho_0 \mathbf{e}_\varrho + z \mathbf{e}_z$ und $d\mathbf{F} = \varrho_0 d\varphi dz \mathbf{e}_\varphi$, auf der Grundfläche ist dagegen $\mathbf{r} = \varrho \mathbf{e}_\varrho - h/2 \mathbf{e}_z$ und $d\mathbf{F} = -\varrho d\varrho d\varphi \mathbf{e}_z$, auf der Deckfläche identisch bis auf das Vorzeichen bei \mathbf{e}_z . Damit sind die drei Integranden $\mathbf{r} \times d\mathbf{F}$ jeweils gegeben durch

- $z \varrho_0 d\varphi dz \mathbf{e}_\varphi$,
- $\varrho^2 d\varrho d\varphi \mathbf{e}_\varphi$,
- $-\varrho^2 d\varrho d\varphi \mathbf{e}_\varphi$.

Addieren wir alle drei Teilintegrale, so heben sich die Beiträge von Grund- und Deckfläche gegenseitig weg. Es bleibt, das Integral über die Mantelfläche zu berechnen:

$$\oint_{\text{Zylinder}} \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-h/2}^{h/2} dz \, z \varrho_0 \mathbf{e}_\varphi.$$

Dieses Integral ist aber gleich aus zwei Gründen identisch null: Einerseits ist der z -Integrand eine ungerade Funktion, und andererseits verschwindet das φ -Integral über \mathbf{e}_φ .

Bei der Kugel ist $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r = r_0 \mathbf{e}_r$ und $d\mathbf{F} = r^2 d\Omega \mathbf{e}_r$. Deshalb verschwindet bereits der Integrand $\mathbf{r} \times d\mathbf{F}$, und somit ist auch hier das Integral gleich null.

- (e) Wie im Tipp schon angedeutet, ist hier folgende Parametrisierung sinnvoll:

$$x = a \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = a \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = b \cos \vartheta,$$

wobei wie bei Kugelkoordinaten $0 \leq \vartheta \leq \pi$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ der Polar- und der Azimutalwinkel sind. Man rechnet schnell nach, dass damit tatsächlich

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

erfüllt ist, diese Parametrisierung also wirklich die Oberfläche des Rotationsellipsoids beschreibt.

Damit erhalten wir

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} a \cos \vartheta \cos \varphi \\ a \cos \vartheta \sin \varphi \\ -b \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -a \sin \vartheta \sin \varphi \\ a \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daraus

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} ab \sin^2 \vartheta \cos \varphi \\ ab \sin^2 \vartheta \sin \varphi \\ a^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} dF &= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right| d\vartheta d\varphi = \sqrt{a^2 b^2 \sin^4 \vartheta + a^4 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta} d\vartheta d\varphi \\ &= ab \sin \vartheta \sqrt{1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \cos^2 \vartheta} d\vartheta d\varphi. \end{aligned}$$

Der gesamte Oberflächeninhalt ist deshalb

$$\begin{aligned} F &= \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi ab \sin \vartheta \sqrt{1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) \cos^2 \vartheta} \\ &= 4\pi ab \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 \right) u^2} du, \end{aligned}$$

wobei die φ -Integration sofort ausgeführt, dann $u = \cos \vartheta$ substituiert und schließlich noch die Symmetrie des Integranden ausgenutzt wurde.

Betrachten wir nun zunächst den Fall $a < b$. Dafür ist

$$-1 \leq \frac{a^2}{b^2} - 1 \leq 0,$$

und wir können $\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} \cdot u = \sin x$ substituieren. Das führt auf

$$\begin{aligned} F &= \frac{4\pi ab}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}} \int_0^{\arcsin\left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}\right)} \cos^2 x \, dx \\ &= \frac{2\pi ab}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}} \int_0^{\arcsin\left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}\right)} (1 + \cos(2x)) \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\pi ab}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}} \left[x + \frac{1}{2} \sin(2x) \right]_0^{\arcsin\left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}\right)} \\
&= \frac{2\pi ab}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}} \left[x + \sin(x) \sqrt{1 - \sin^2 x} \right]_0^{\arcsin\left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}\right)}.
\end{aligned}$$

Nach Einsetzen der Grenzen bleibt somit

$$F = 2\pi ab \left[\frac{\arcsin\left(\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}\right)}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}} + \frac{a}{b} \right].$$

Den Fall $a > b$ berechnet man sehr ähnlich, nur verwendet man nun die Substitution $\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} \cdot u = \sinh x$. Das Endergebnis ist dann

$$F = 2\pi ab \left[\frac{\operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}\right)}{\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}} + \frac{a}{b} \right].$$

Zusammenhänge – Integralsätze und Potenziale

3

Zwischen Ableitung und Integral gibt es im Eindimensionalen bekanntlich einen engen Zusammenhang, den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. Im Dreidimensionalen kann man dies nicht nur auf eine Weise verallgemeinern, sondern gleich auf mehrere verschiedene – was (unter anderem) natürlich daran liegt, dass es nun eben unterschiedliche Arten von Ableitungen gibt (Gradient, Divergenz, Rotation) und auch verschiedene Sorten von Integralen (Weg-, Oberflächen-, Volumenintegral).

In Abschn. 3.1 werden wir uns zunächst anschauen, wie man Divergenz und Rotation auch mittels Integralen darstellen kann. Dies wird es uns ermöglichen, diese Differenzialoperatoren (und auch den Laplace-Operator) nun auch endlich in krummlinigen Koordinatensystemen anzugeben; für den Gradienten hatten wir das ja bereits in Kap. 1 gemacht.

Direkt darauf aufbauend werden wir in Abschn. 3.2 dann die wichtigen Integralsätze von Gauß und Stokes kennenlernen, die eben letztlich dreidimensionale Verallgemeinerungen des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung sind.

Abschließend besprechen wir einen weiteren wichtigen Zusammenhang zwischen Ableitungen und Integralen, den es bei eindimensionalen Funktionen nicht gibt: In Abschn. 3.3 werden wir sehen, dass für die Existenz gewisser Arten von Stammfunktionen für Felder im Dreidimensionalen das Verschwinden von bestimmten Ableitungen nötig ist – aber selbst diese Forderung ist noch nicht ganz ausreichend.

Da dieses Kapitel den Abschluss der Vektoranalysis bildet, finden sich für die historisch Interessierten am Schluss noch einige Anmerkungen zur Geschichte der Vektorrechnung und -analysis.

3.1 Darstellungen der Differenzialoperatoren mit Integralen – und in krummlinigen Koordinaten

Bereits in Kap. 1 wurde versprochen, dass in Kap. 3 auch Divergenz und Rotation in krummlinigen Koordinaten angegeben werden, was für viele Rechnungen enorm praktisch ist. Hier werden wir dies nun endlich tatsächlich durchführen.

Es wäre naheliegend, beispielsweise in Zylinderkoordinaten völlig analog zu den kartesischen Koordinaten zu definieren

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{\partial j_\varrho}{\partial \varrho} + \frac{\partial j_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial j_z}{\partial z}.$$

Dies ergibt aber für ein gegebenes Vektorfeld \mathbf{j} , im Gegensatz zur Definition mit kartesischen Koordinaten, *kein* skalares Feld. (Sprich: Das so definierte $\operatorname{div} \mathbf{j}$ wäre unter Drehungen nicht invariant.) Und, schlimmer noch: Der zweite Summand hat eine andere Einheit als die anderen beiden, also kann man die drei Summanden sowieso nicht addieren! Wir müssen also offensichtlich anders vorgehen.

Als Grundlage für die Definition der Differenzialoperatoren ist letztlich immer eine skalare Darstellung sinnvoll, da dann die ortsabhängigen Koordinateneinheitsvektoren nicht auftreten – wodurch die Rechnung deutlich vereinfacht wird. Die im Folgenden diskutierten Darstellungen verwenden Integrale. Das erscheint zwar zunächst reichlich widersinnig, weil man ja eigentlich Ableitungen haben will, wir werden aber dann in Abschn. 3.2 sehen, dass dies letztlich weitreichende Aussagen über Zusammenhänge zwischen Integralen und Ableitungen ermöglicht.

3.1.1 Erst mal die Divergenz ...

Erinnern wir uns daran, wie wir in Kap. 1 überhaupt zur Definition der Divergenz kamen: Wir haben uns angeschaut, wie sich die Ladung Q in einem räumlichen Gebiet mit Volumen ΔV und mittlerer Dichte $\bar{\rho}$ zeitlich ändert. Dies geschieht, wie diskutiert, wegen des Stromflusses I durch die Oberfläche, mit der lokalen Stromdichte \mathbf{j} ; als Formel ausgedrückt:

$$\partial_t Q = -I \quad \Longrightarrow \quad \Delta V \cdot \partial_t \bar{\rho} = - \oint_{\partial V} \mathbf{j} \circ \mathbf{dF}.$$

Daraus folgt sofort

$$\partial_t \bar{\rho} = - \frac{1}{\Delta V} \oint_{\partial V} \mathbf{j} \circ \mathbf{dF}.$$

Für $\Delta V \rightarrow 0$ können wir $\bar{\rho}$ durch die lokale Dichte ρ ersetzen. Verwenden wir außerdem noch die Kontinuitätsgleichung (1.22), so erhalten wir:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\partial V} \mathbf{j} \circ d\mathbf{F}. \quad (3.1)$$

Dies können wir nun als alternative Definition der Divergenz betrachten, in der überhaupt keine partiellen Ableitungen mehr auftauchen. Deshalb könnte man so die Divergenz auch an Punkten definieren, wo \mathbf{j} eigentlich gar nicht differenzierbar ist.

Beispiel 3.1

Wir wollen die Divergenz von \mathbf{r} berechnen. Dazu betrachten wir eine Kugel mit Radius r_0 um den Punkt \mathbf{r} .

Der Ortsvektor eines beliebigen Punktes auf der Oberfläche dieser Kugel ist dann gegeben durch $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + r_0 \mathbf{e}'_r(\vartheta', \varphi')$ mit $0 \leq \vartheta' \leq \pi$, $0 \leq \varphi' \leq 2\pi$, und der infinitesimale Flächenvektor ist $d\mathbf{F}' = r_0^2 \mathbf{e}'_r \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi'$. (Die Notation mit den Strichen wurde hier gewählt, um Verwechslungen mit den Koordinaten von \mathbf{r} zu vermeiden – dieser Vektor wird im Integral ja festgehalten, weil dies genau die Stelle angibt, an der wir die Ableitung berechnen wollen.) Das Volumen ist dagegen natürlich einfach $\Delta V = \frac{4\pi}{3} r_0^3$.

Also haben wir

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{3}{4\pi r_0^3} \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' \int_0^{2\pi} d\varphi' (\mathbf{r} + r_0 \mathbf{e}'_r(\vartheta', \varphi')) \circ r_0^2 \mathbf{e}'_r.$$

Multiplizieren wir die Klammer aus, so haben wir zwei Integrale zu berechnen. Zunächst ist

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \mathbf{r} \circ r_0^2 \mathbf{e}'_r \\ &= r_0^2 r \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' \int_0^{2\pi} d\varphi' (\sin \vartheta \cos \varphi \sin \vartheta' \cos \varphi' + \sin \vartheta \sin \varphi \sin \vartheta' \sin \varphi' \\ & \quad + \cos \vartheta \cos \vartheta'). \end{aligned}$$

Die ersten beiden Summanden verschwinden hier aber bereits, wenn man sie über φ' integriert, der dritte Summand verschwindet schließlich beim Integrieren über ϑ' . Also liefert dieses erste Integral keinen Beitrag, und es bleibt nur noch

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{r} &= \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{3}{4\pi r_0^3} \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' \int_0^{2\pi} d\varphi' (r_0 \mathbf{e}'_r(\vartheta', \varphi')) \circ r_0^2 \mathbf{e}'_r \\ &= \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{3}{4\pi} \int_0^\pi \sin \vartheta' d\vartheta' \int_0^{2\pi} d\varphi' 1 = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \frac{3}{4\pi} \cdot 4\pi = 3, \end{aligned} \quad (3.2)$$

was genau mit unserem Ergebnis in Kap. 1 übereinstimmt.

Dort wurde es zwar *viel* schneller und einfacher erhalten – hier jetzt aber, ohne dass wir irgendwo explizit eine Ableitung berechnet hätten. Außerdem ist das Ergebnis hier nun eben auch unabhängig von der Koordinatenwahl: Wir haben für die Integration zwar Kugelkoordinaten verwendet, ihr dürft aber gerne selbst nachrechnen, dass sich beispielsweise mit kartesischen Koordinaten genau dasselbe ergibt. (Viel Spaß!) Zusätzlich kann man auch nachprüfen, dass man mit der Wahl eines anderen Körpers statt einer Kugel wieder auf das gleiche Ergebnis kommt (Aufgabe 3.1).

Da die Darstellung (3.1) vom Koordinatensystem unabhängig ist, kann man sie sinnvoll einsetzen, um die Divergenz in beliebigen (auch krummlinigen) Koordinatensystemen zu berechnen. Wählt man das betrachtete Volumen z. B. als Quader mit Kanten parallel zu den kartesischen Koordinatenachsen, so kann man aus dieser Formel die bekannte Darstellung der Divergenz in kartesischen Koordinaten reproduzieren. (Das dürft ihr gerne kurz selbst nachrechnen!)

In Zylinderkoordinaten wählen wir dagegen einen kleinen quaderähnlichen Körper, allerdings nun mit den Kanten parallel zu den Koordinateneinheitsvektoren der Zylinderkoordinaten. Zunächst folgt für das Volumen in niedrigster Ordnung

$$\Delta V = \Delta \varrho \cdot \varrho \Delta \varphi \cdot \Delta z;$$

vgl. Abb. 2.9, wobei hier allerdings zunächst jeweils Δ statt d für die Koordinatendifferenzen geschrieben wird. Beim Oberflächenintegral müssen wir über alle sechs Flächen des Quaders integrieren. Da jeweils gegenüberliegende Flächen Normalenvektoren haben, die entgegengesetzt zueinander sind, liefern diese jeweils Beiträge mit entgegengesetztem Vorzeichen. Schauen wir uns beispielsweise die beiden Flächen mit jeweils konstantem Abstand zur z -Achse an. Die eine liegt bei ϱ , die andere bei $\varrho + \Delta\varrho$, und sie haben die Kantenlängen Δz und $\varrho \Delta\varphi$ bzw.

$(\varrho + \Delta\varrho) \Delta\varphi$. Der Flächenvektor ist deshalb

$$\Delta \mathbf{F} = -\varrho \mathbf{e}_\varrho \Delta\varphi \Delta z \quad \text{bzw.} \quad + (\varrho + \Delta\varrho) \mathbf{e}_\varrho \Delta\varphi \Delta z.$$

Damit liefern diese beiden Flächen den Beitrag

$$\left[j_\varrho(\varrho + \Delta\varrho, \bar{\varphi}, \bar{z})(\varrho + \Delta\varrho) - j_\varrho(\varrho, \bar{\varphi}, \bar{z})\varrho \right] \Delta\varphi \Delta z$$

zum Integral, wobei $\bar{\varphi}$ und \bar{z} geeignet gewählte Werte auf den Flächen sind. (Mittelwertsatz der Integralrechnung!) Entwickelt man dies für kleine $\Delta\varrho$, so bleibt

$$\frac{\partial (\varrho j_\varrho)}{\partial \varrho}(\varrho, \bar{\varphi}, \bar{z}) \Delta\varrho \Delta\varphi \Delta z$$

bzw. geteilt durch den Vorfaktor ΔV nur noch

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial (\varrho j_\varrho)}{\partial \varrho}(\varrho, \bar{\varphi}, \bar{z}).$$

Mit den übrigen vier Flächen verfährt man ebenso und führt schließlich den Limes $\Delta V \rightarrow 0$ durch; dann kann man $\bar{\varphi}$ durch φ ersetzen usw. Nach einiger länglicher, aber nicht grundsätzlich schwieriger Rechnerei (macht mal!) bleibt

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial (\varrho j_\varrho)}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial j_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial j_z}{\partial z}. \quad (3.3)$$

In Kugelkoordinaten läuft die Rechnung ähnlich, ist aber noch aufwendiger. Man erhält schließlich (viel Spaß beim Nachrechnen!)

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 j_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta j_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial j_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (3.4)$$

Beispiel 3.2

- Wir betrachten ein radiales Feld, das nur vom Radius abhängt, also $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r}$. Dann ist $j_r = rf(r)$ und $j_\vartheta = j_\varphi = 0$, und mit (3.4) haben wir

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^3 f(r))}{\partial r} = \frac{1}{r^2} (3r^2 f(r) + r^3 f'(r)) = 3f(r) + rf'(r),$$

in völliger Übereinstimmung mit (1.24). Insbesondere folgt auch wieder $\operatorname{div} \mathbf{r} = 3$, $\operatorname{div} \mathbf{e}_r = \frac{2}{r}$ und $\operatorname{div} \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} = 0$.

- Wir berechnen auch noch die Divergenz der beiden anderen Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten,

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{e}_\vartheta &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot 1)}{\partial \vartheta} = \frac{\cot \vartheta}{r}, \\ \operatorname{div} \mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial 1}{\partial \varphi} = 0,\end{aligned}$$

in völliger Übereinstimmung mit den Ergebnissen in Aufgabe 1.4 – aber mit einer *deutlich* kürzeren Rechnung!

3.1.2 ... dann die Rotation ...

Auch für die Rotation kann man eine Integraldarstellung finden – allerdings leider nicht direkt aus physikalisch anschaulichen Argumenten, sondern nur mit einigen mathematischen Trickereien.

Wir schauen uns zunächst (3.1) nochmals genauer an: Links steht die Divergenz, also eine Summe von drei Ableitungen jeweils einer Komponente von \mathbf{j} nach der jeweiligen Koordinate. Wir wollen die Rotation haben, also einen Vektor, dessen Komponenten jeweils eine Differenz aus zwei Ableitungen von Komponenten von \mathbf{j} nach jeweils anderen Koordinaten sind.

Der Schritt von drei Ableitungen zu zwei ist sehr leicht – wir überlegen uns einfach, dass die Argumentation, die auf (3.1) geführt hat, auch in zwei Dimensionen funktioniert. Es ist also

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\partial F} \mathbf{j} \circ \mathbf{n} \, dr,$$

wobei hier über den Rand einer Fläche ΔF integriert wird, sprich: Rechts steht nun ein geschlossenes Wegintegral. Allerdings ist der Einheitsvektor \mathbf{n} nicht, wie in Wegintegralen üblich, tangential zum Weg, sondern senkrecht zur vom Weg eingeschlossenen Fläche.

Versuchen wir dies in ein normales Wegintegral umzuschreiben. Zunächst haben wir natürlich die Bedingungen $|\mathbf{n}| = 1$ und $\mathbf{n} \circ d\mathbf{r} = 0$ mit $d\mathbf{r} = dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y$ tangential zum Weg; außerdem soll der Weg wie üblich im mathematisch positiven Sinne durchlaufen werden. Daraus können wir uns leicht herleiten, dass $\mathbf{n} \, dr =$

$dy \mathbf{e}_x - dx \mathbf{e}_y$ sein muss, also

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\partial F} (j_x dy - j_y dx)$$

gilt.

Das ist leider noch nicht so ganz, was wir wollten ... Links steht immer noch eine Summe von Ableitungen der Komponenten von \mathbf{j} nach der jeweiligen Koordinate, dafür steht rechts jetzt eine Differenz von Produkten der Komponenten von \mathbf{j} mit der jeweils anderen Koordinate – also eigentlich genau umgekehrt, wie wir es brauchen!

Dem können wir aber sehr leicht abhelfen: Wir ersetzen einfach \mathbf{j} durch ein Vektorfeld \mathbf{A} mit $A_x = -j_y$ und $A_y = j_x$; dann haben wir nämlich:

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\partial F} (A_y dy + A_x dx).$$

Links erkennen wir nun tatsächlich die z -Komponente von $\mathbf{rot} \mathbf{A}$, rechts das übliche Wegintegral über den geschlossenen Weg, der die Fläche einschließt.

Da wir aber infinitesimal kleine Flächen betrachten, können wir diese immer als eben annähern. Der Integrand ist ein Skalar, also unter Drehungen invariant – wir können uns das Koordinatensystem deshalb immer so hindrehen, dass diese infinitesimale Fläche in der x - y -Ebene liegt. Damit folgt allgemein für beliebige ausgerichtete Flächen:

$$\mathbf{n} \circ \mathbf{rot} \mathbf{A} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\partial F} \mathbf{A} \circ d\mathbf{r}, \quad (3.5)$$

wobei \mathbf{n} nun ein Normaleneinheitsvektor der Fläche ist. Beachte: Aus unserer Herleitung folgt, dass \mathbf{n} immer so orientiert sein muss, dass die durch \mathbf{n} vorgegebene Achse vom Weg in mathematisch positiver Richtung umlaufen wird!

Beispiel 3.3

Wir betrachten wie bereits in Kap. 1 das einfache Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ mit dem konstanten Vektor $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$. Dann ist

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \omega (-y \mathbf{e}_x + x \mathbf{e}_y).$$

Außerdem wählen wir $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ und als Fläche ein Quadrat mit Seitenlänge $2a$ mit Seitenkanten parallel zur x - und y -Achse, sodass der Punkt mit Ortsvektor \mathbf{r} genau der Mittelpunkt ist. Dann ist natürlich $\Delta F = 4a^2$, und der Rand der Fläche besteht aus vier Strecken, die wir folgendermaßen parametrisieren können:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + x' \mathbf{e}_x + a \mathbf{e}_y & -a \leq x' \leq a, \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - a \mathbf{e}_x + y' \mathbf{e}_y & -a \leq y' \leq a, \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + x' \mathbf{e}_x - a \mathbf{e}_y & -a \leq x' \leq a, \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + a \mathbf{e}_x + y' \mathbf{e}_y & -a \leq y' \leq a. \end{aligned}$$

Wie bereits in Beispiel 3.1 wurde hier wieder die Schreibweise mit den Strichen gewählt, da \mathbf{r} ja konstant gehalten werden soll – an dieser Stelle möchten wir die Rotation berechnen.

Auf diesen vier Strecken haben wir dann die Feldstärken und die infinitesimalen Wegelemente

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}') &= \omega \left(-(y+a) \mathbf{e}_x + (x+x') \mathbf{e}_y \right), & \mathbf{dr}' &= \mathbf{e}_x dx', \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}') &= \omega \left(-(y+y') \mathbf{e}_x + (x-a) \mathbf{e}_y \right), & \mathbf{dr}' &= \mathbf{e}_y dy', \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}') &= \omega \left(-(y-a) \mathbf{e}_x + (x+x') \mathbf{e}_y \right), & \mathbf{dr}' &= \mathbf{e}_x dx', \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}') &= \omega \left(-(y+y') \mathbf{e}_x + (x+a) \mathbf{e}_y \right), & \mathbf{dr}' &= \mathbf{e}_y dy'. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{A} \circ \mathbf{dr}' &= -\omega \int_a^{-a} (y+a) dx' + \omega \int_a^{-a} (x-a) dy' \\ &\quad - \omega \int_{-a}^a (y-a) dx' + \omega \int_{-a}^a (x+a) dy' \\ &= 2\omega a \int_{-a}^a dx' + 2\omega a \int_{-a}^a dy' = 8\omega a^2, \end{aligned}$$

also

$$\mathbf{n} \circ \mathbf{rot} \mathbf{A} = (\mathbf{rot} \mathbf{A})_z = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{4a^2} \cdot 8\omega a^2 = 2\omega, \quad (3.6)$$

in völliger Übereinstimmung mit dem Ergebnis in Kap. 1. Die anderen beiden Komponenten dürft ihr in Aufgabe 3.2 selbst berechnen.

Damit können wir jetzt auch die Rotation in krummlinigen Koordinatensystemen angeben. Betrachten wir beispielsweise die z -Komponente der Rotation in Zylinderkoordinaten. Dafür wählen wir $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$; die Fläche und damit der geschlossene Weg muss also senkrecht zu einer Fläche mit konstantem z verlaufen. Wir betrachten dann ein Viereck, dessen sehr kleine Seiten parallel zu \mathbf{e}_ϱ und \mathbf{e}_φ sind. Die Seitenlängen sind $\Delta\varrho$ und $\varrho\Delta\varphi$ bzw. $(\varrho + \Delta\varrho)\Delta\varphi$ (vgl. Abb. 2.9), der Flächeninhalt ist deshalb in niedrigster Ordnung $\Delta F = \varrho\Delta\varphi\Delta\varrho$. Das Wegintegral besteht aus vier Beiträgen, bei denen jeweils zwei das entgegengesetzte Vorzeichen haben, weil ja auf gegenüberliegenden Seiten jeweils $d\mathbf{r}$ entgegengesetzt ist. Die beiden Seiten in Richtung von \mathbf{e}_φ liefern deshalb mithilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung den folgenden Beitrag zum Wegintegral,

$$A_\varphi(\varrho + \Delta\varrho, \bar{\varphi}, z)(\varrho + \Delta\varrho)\Delta\varphi - A_\varphi(\varrho, \bar{\varphi}, z)\varrho\Delta\varphi \approx \frac{\partial(\varrho A_\varphi)}{\partial\varrho}(\varrho, \bar{\varphi}, z)\Delta\varrho\Delta\varphi,$$

mit einem geeigneten gewählten $\bar{\varphi}$ auf den beiden Wegstücken. Die beiden anderen Wegstücke ergeben dagegen

$$-\frac{\partial A_\varrho}{\partial\varphi}(\bar{\varrho}, \varphi, z)\Delta\varrho\Delta\varphi,$$

wiederum mit einem passend gewählten $\bar{\varrho}$ auf den Wegstücken. Teilen wir noch durch ΔF und nehmen den Limes $\Delta F \rightarrow 0$, so können wir $\bar{\varphi}$ wieder durch φ ersetzen usw. Es bleibt schließlich

$$(\mathbf{rot} \mathbf{A})_z = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial(\varrho A_\varphi)}{\partial\varrho} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial A_\varrho}{\partial\varphi}. \quad (3.7)$$

Ähnliche Rechnungen (macht mal!) führen auf

$$\begin{aligned} (\mathbf{rot} \mathbf{A})_\varrho &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \\ (\mathbf{rot} \mathbf{A})_\varphi &= \frac{\partial A_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\varrho}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

In Kugelkoordinaten rechnet man wieder völlig äquivalent, aber deutlich aufwendiger. Es ergibt sich (nachrechnen!):

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{rot} \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta A_\varphi)}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi}, \\
 (\mathbf{rot} \mathbf{A})_\vartheta &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r}, \\
 (\mathbf{rot} \mathbf{A})_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta}.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Beispiele 3.4

- Wir betrachten nochmals $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ mit dem konstanten Vektor $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$, also $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \omega \varrho \mathbf{e}_z$. Mit (3.7) und (3.8) folgt dann schnell

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{rot} \mathbf{A})_z &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial (\varrho \cdot \omega \varrho)}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial 0}{\partial \varphi} = 2\omega, \\
 (\mathbf{rot} \mathbf{A})_\varrho &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial 0}{\partial \varphi} - \frac{\partial (\omega \varrho)}{\partial z} = 0, \\
 (\mathbf{rot} \mathbf{A})_\varphi &= \frac{\partial 0}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial \varrho} = 0,
 \end{aligned}$$

also insgesamt

$$\mathbf{rot} \mathbf{A} = 2\boldsymbol{\omega},$$

wieder in völliger Übereinstimmung mit Kap. 1.

- Außerdem hatten wir in Kap. 1 auch die Rotation eines allgemeinen Vektorfeldes $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r} = rf(r)\mathbf{e}_r$ betrachtet. Mit (3.9) folgt dafür

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{rot} \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot 0)}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial 0}{\partial \varphi} = 0, \\
 (\mathbf{rot} \mathbf{A})_\vartheta &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (rf(r))}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot 0)}{\partial r} = 0, \\
 (\mathbf{rot} \mathbf{A})_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot 0)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial (rf(r))}{\partial \vartheta} = 0;
 \end{aligned}$$

auch hier reproduzieren wir also wieder das bereits erhaltene Ergebnis

$$\mathbf{rot} \mathbf{A} = \mathbf{0}.$$

3.1.3 ... und schließlich noch der Laplace-Operator

Abschließend schauen wir uns noch an, wie man den Laplace-Operator in krummlinigen Koordinaten ausdrückt; dies ist in der Elektrodynamik (und auch in vielen anderen Gebieten der Physik wie der Quantenmechanik und Hydrodynamik) oft sehr brauchbar. Dafür verwenden wir die eben in Abschn. 3.1.1 hergeleiteten Formeln für die Divergenz und die früheren Ergebnisse aus Abschn. 1.1.2 für den Gradienten. Die entstehenden Terme kann man oft auf verschiedene äquivalente Weisen ausdrücken; bei Rechnungen sollte man immer darauf achten, welche Form jeweils dem Problem am besten angemessen ist.

In Zylinderkoordinaten ergibt sich

$$\Delta = \Delta_\varrho + \frac{1}{\varrho^2} \Delta_\varphi + \Delta_z$$

mit

$$\begin{aligned}\Delta_\varrho \phi &= \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho (\varrho \partial_\varrho \phi) = \partial_\varrho^2 \phi + \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho \phi, \\ \Delta_\varphi \phi &= \partial_\varphi^2 \phi, \\ \Delta_z \phi &= \partial_z^2 \phi.\end{aligned}\tag{3.10}$$

In Kugelkoordinaten ergibt sich dagegen

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_\vartheta + \frac{1}{r^2} \Delta_\varphi =: \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_\Omega$$

mit

$$\begin{aligned}\Delta_r \phi &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \phi) = \partial_r^2 \phi + \frac{2}{r} \partial_r \phi = \frac{1}{r} \partial_r^2 (r \phi), \\ \Delta_\vartheta \phi &= \frac{1}{\sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \partial_\vartheta \phi) = \partial_\vartheta^2 \phi + \frac{\cot \vartheta}{r^2} \partial_\vartheta \phi, \\ \Delta_\varphi \phi &= \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \partial_\varphi^2 \phi.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Beides sollte man selbst im Detail nachrechnen!

Beispiele 3.5

- In kartesischen Koordinaten hat man

$$\Delta r^2 = \partial_x^2 x^2 + \partial_y^2 y^2 + \partial_z^2 z^2 = 6.$$

In Zylinderkoordinaten ist dies

$$\Delta r^2 = \Delta_\varrho \varrho^2 + \Delta_z z^2 = \partial_\varrho^2 \varrho^2 + \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho \varrho^2 + \partial_z^2 z^2 = 6,$$

in Kugelkoordinaten dagegen

$$\Delta r^2 = \Delta_r r^2 = \partial_r^2 r^2 + \frac{2}{r} \partial_r r^2 = 6.$$

- Mit einer anderen Darstellung von Δ_r berechnet man sehr schnell und einfach

$$\Delta \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \partial_r^2 \left(r \cdot \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} \partial_r^2 1 = 0 \quad (r > 0),$$

was wir ja auch bereits in Abschn. 1.2.2 gezeigt hatten.

Bleibt man in kartesischen Koordinaten, so kann man den Laplace-Operator ohne Probleme auch auf Vektorfelder anwenden; es gilt dann einfach für die Komponenten $(\Delta \mathbf{A})_i = \Delta A_i$. In krummlinigen Koordinatensystemen stimmt das aber leider nicht mehr, weil dort ja die Koordinateneinheitsvektoren auch vom Ort abhängen; in $\Delta \mathbf{A}$ wirkt der Laplace-Operator deshalb nicht nur auf die Komponenten von \mathbf{A} , sondern auch auf die Einheitsvektoren. Man geht deshalb einen kleinen Umweg: Aus dem wichtigen Zusammenhang (1.36), den wir in Kap. 1 hergeleitet hatten, haben wir sofort

$$\Delta \mathbf{A} = \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \mathbf{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Damit kann man nun die Formeln für Gradient, Divergenz und Rotation in krummlinigen Koordinaten benutzen. Beispielsweise folgt in Kugelkoordinaten

$$(\Delta \mathbf{A})_r = \Delta A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta A_\vartheta) - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \partial_\varphi A_\varphi.$$

Selbst für den sehr einfachen Spezialfall $A_\vartheta = A_\varphi = 0$ und $A_r(\mathbf{r}) = A_r(r)$ gilt also *nicht* einfach $(\Delta \mathbf{A})_r = \Delta A_r$ und auch nicht $(\Delta \mathbf{A})_r = \partial_r^2 A_r$! Da man diese Formeln nicht so häufig braucht, werden hier allerdings nicht alle aufgezählt; Interessierte seien auf mathematische Formelsammlungen verwiesen.

Schließlich noch ein Hinweis: Auch alle anderen hier hergeleiteten Formeln für den Gradienten, die Divergenz, die Rotation und den Laplace-Operator in krummlinigen Koordinatensystemen finden sich in zahlreichen mathematischen Tabellenwerken. Man braucht das also sicher nicht alles auswendig zu lernen, sondern schlägt es meist bei Bedarf nach! Die wenigen Operatoren wie z. B. Δ_r , die man wirklich häufig benötigt, hat man ohnehin mit der Zeit fast automatisch im Kopf.

3.2 Die Krönung der Vektoranalysis: Die Integralsätze von Gauß und Stokes

Bei eindimensionalen Integralen stellt der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung die Verbindung zwischen dem Ab- und dem Aufleiten her. Es ist recht naheliegend, diesen Satz auf den Gradienten und das Wegintegral zu verallgemeinern,

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathbf{dr} \circ \mathbf{grad} f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_2) - f(\mathbf{r}_1) \quad \text{und} \quad \mathbf{grad} \int_{r_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{K}(\mathbf{r}') \circ \mathbf{dr}' = \mathbf{K}(\mathbf{r}).$$

Dabei gibt es allerdings einige mathematische Feinheiten zu beachten (und es gibt zusätzliche interessante Zusammenhänge zur Rotation), die wir ausführlich erst in Abschn. 3.3 besprechen werden.

Statt des Gradienten gibt es aber natürlich auch noch die Divergenz und die Rotation – und bei beiden hatten wir in Abschn. 3.1 ja sowieso schon Zusammenhänge zwischen den Ableitungsoperatoren und Integralen gefunden. Dies können wir nun verwenden, um auch für diese beiden Operatoren Verallgemeinerungen des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung zu finden – die Integralsätze von Gauß und Stokes. Außerdem besprechen wir noch die wichtigen Integralsätze von Green, die letztlich einfach Verallgemeinerungen des bekannten Verfahrens der partiellen Integration sind.

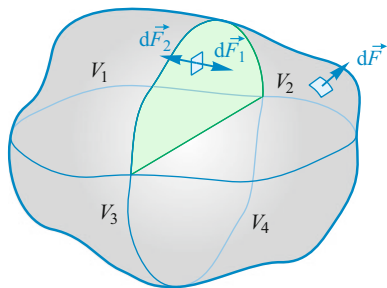
3.2.1 Der Gauß'sche Integralsatz: Quellen und Flüsse

Betrachten wir zunächst nochmals (3.1) – diese Formel stellt ja schon einen Bezug zwischen dem Differenzialoperator div und einem Volumenintegral her. Daraus können wir folgern, dass

$$\text{div} \mathbf{j} \cdot \Delta V \approx \oint_{\partial V} \mathbf{j} \circ \mathbf{dF}$$

ist, wobei die Näherung umso besser ist, je kleiner ΔV ist.

Abb. 3.1 Ein Volumen V stelle man sich in (kleine) Teilvolumina V_i aufgeteilt vor. Dann heben sich die Oberflächenintegrale über die Trennflächen der Volumina jeweils gegenseitig weg (vgl. Text)



Ein größeres Volumen stellen wir uns nun zusammengesetzt aus lauter kleinen Teilvolumina der Größe ΔV vor. Betrachten wir dann zwei nebeneinanderliegende Teilvolumina, z. B. die in Abb. 3.1 markierten V_1 und V_2 . Sie haben eine Fläche gemeinsam – da aber der Normalenvektor der Flächen definitionsgemäß immer nach außen zeigt, haben die Beiträge der beiden infinitesimalen Flächenelemente zum Oberflächenintegral jeweils das entgegengesetzte Vorzeichen. Addieren wir die Oberflächenintegrale, so heben sich diese beiden Beiträge also gegenseitig weg, und es bleibt nur das Integral über die Oberfläche des Gesamtkörpers:

$$\oint_{\partial V_1} \mathbf{j} \circ d\mathbf{F} + \oint_{\partial V_2} \mathbf{j} \circ d\mathbf{F} = \oint_{\partial(V_1+V_2)} \mathbf{j} \circ d\mathbf{F}$$

Fahren wir so fort, so haben wir schließlich für das gesamte Volumen:

$$\sum_i \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta V \approx \oint_{\partial V} \mathbf{j} \circ d\mathbf{F}.$$

Die linke Seite stellt aber nun für $\Delta V \rightarrow 0$ genau das Volumenintegral über $\operatorname{div} \mathbf{j}$ dar. Es folgt also

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}) dV = \oint_{\partial V} \mathbf{j} \circ d\mathbf{F}. \quad (3.12)$$

Dieses Ergebnis heißt der *Integralsatz von Gauß* – oder auch: „Satz von Gauß-Ostrogradski“ (nach dem sehr bekannten deutschen Mathematiker, Physiker und Astronomen *Johann Carl Friedrich Gauß*, 1777–1855, und dem kaum bekannten ukrainisch-russischen Mathematiker *Michail Wassiljewitsch Ostrogradski*, 1801–1862, der den Satz 1831 unabhängig von Gauß bewies) oder „Divergenzsatz“.

Die Aussage des Satzes ist physikalisch eigentlich ziemlich offensichtlich: Wenn etwas aus einem Volumen hinausströmt, dann muss es innen Quellen dafür geben.

Summiert (integriert) man über die Stärken der Quellen, so muss sich dasselbe ergeben, wie wenn man den gesamten Fluss aus dem Gebiet heraus aufsummiert (integriert). Genau diese physikalische Argumentation hatten wir ja bereits bei der Herleitung von (3.1) verwendet, und eigentlich auch schon bei der Definition der Divergenz in Abschn. 1.1.4.

Damit der Satz gilt, muss man mathematisch einiges über das betrachtete Volumen und das Vektorfeld voraussetzen, das aber (wie üblich) in konkreten physikalischen Anwendungssituationen eigentlich sowieso immer erfüllt ist. Der Vollständigkeit halber erwähne ich es hier kurz: Das Volumen muss kompakt sein, die Oberfläche zumindest stückweise glatt und das Vektorfeld stetig differenzierbar.

Ansonsten kann das betrachtete Volumen praktisch beliebig geformt sein – es kann z. B. auch Löcher haben (beispielsweise kann es sich um einen Torus handeln), und es muss noch nicht einmal zusammenhängend sein (beispielsweise kann es auch aus zwei Kugeln bestehen, die keine Schnittmenge haben).

Beispiele 3.6

- Betrachten wir das Vektorfeld $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = x^2 z \mathbf{e}_z$, so ist zunächst $\operatorname{div} \mathbf{j} = x^2$. Integrieren wir diese Quellenstärke über eine Kugel um den Ursprung mit Radius r_0 ,

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} \, dV &= \int_0^{r_0} r^2 dr \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \, r^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \\ &= \int_0^{r_0} r^4 dr \int_{-1}^1 (1 - u^2) du \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi \\ &= \frac{1}{5} r_0^5 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi = \frac{4\pi}{15} r_0^5. \end{aligned}$$

Andererseits ist der Fluss von \mathbf{j} durch die Oberfläche dieser Kugel:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} \mathbf{j} \circ d\mathbf{F} &= \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \, r_0^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi \cdot r_0 \cos \vartheta \mathbf{e}_z \circ r_0^2 \mathbf{e}_r \\ &= r_0^5 \int_0^\pi \sin^3 \vartheta \cos^2 \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= r_0^5 \int_{-1}^1 (u^2 - u^4) du \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \\
&= r_0^5 \cdot \frac{4}{15} \cdot \pi = \frac{4\pi}{15} r_0^5,
\end{aligned}$$

in völliger Übereinstimmung mit dem Volumenintegral über die Quellen. Anstatt nur spezielle Beispiele durchzurechnen, können wir aber auch allgemeine Aussagen treffen, wie die beiden folgenden.

- Für ein beliebiges Vektorfeld \mathbf{j} folgt immer

$$\oint_{\partial V} \mathbf{rot} \mathbf{j} \circ d\mathbf{F} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{rot} \mathbf{j} dV = \int_V 0 dV = 0,$$

der gesamte Fluss der Wirbel durch jede geschlossene Oberfläche verschwindet also immer. Anschaulich heißt dies, dass die Wirbel immer entweder komplett innerhalb des betrachteten Volumens verlaufen müssen, oder es müssen eben genauso viele Wirbel in das Volumen hineintreten, wie an einer anderen Stelle jeweils herauskommen.

- Verschwindet ein Vektorfeld auf dem Rand eines Volumens, so muss seine gesamte Quellenstärke (Summe aus allen Quellen und Senken) innerhalb des Volumens ebenfalls gleich null sein,

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV = \oint_{\partial V} \mathbf{j} \circ d\mathbf{F} = \oint_{\partial V} \mathbf{0} \circ d\mathbf{F} = 0.$$

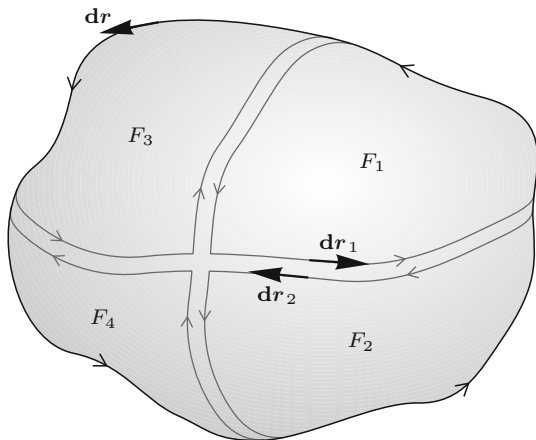
Verallgemeinernd: Wenn man ein Vektorfeld betrachtet, das „im Unendlichen“ verschwindet, d. h. $\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{0}$ für $r \rightarrow \infty$, so muss die Summe aus allen Quellen und Senken im kompletten Raum gleich null sein. Diese Argumentation wird in der Elektrodynamik häufig verwendet.

Man kann den Gauß'schen Satz auf zahlreiche Weisen verallgemeinern: Beispielsweise gilt er entsprechend abgewandelt auch in anderen Dimensionen. Insbesondere in einer Dimension reduziert er sich schlicht wieder auf den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, da dann das „Volumen“ schlicht das Intervall ist, über das man integriert, der Rand dieses „Volumens“ aus den beiden Randpunkten besteht und die Divergenz die normale Ableitung ist.

Außerdem man kann den Satz auch auf andere, ähnliche Integrale anwenden:

$$\int_V \mathbf{grad} \phi dV = \oint_{\partial V} \phi d\mathbf{F} \quad \text{bzw.} \quad \int_V \mathbf{rot} \mathbf{A} dV = \oint_{\partial V} d\mathbf{F} \times \mathbf{A}; \quad (3.13)$$

Abb. 3.2 Eine Fläche F stelle man sich in (kleine) Teilflächen F_i aufgeteilt vor. Dann heben sich die Wegintegrale über die Trennlinien der Flächen jeweils gegenseitig weg (vgl. Text)



begründen dürft ihr das selbstständig in Aufgabe 3.6. In kartesischen Koordinaten kann man somit allgemein schreiben

$$\int_V dV \partial_i \dots = \oint_{\partial V} dF_i \dots, \quad (3.14)$$

wobei auf beiden Seiten für \dots jeweils dasselbe einzusetzen ist (z. B. eben j_i , ϕ oder $\epsilon_{ijk} A_j$; gegebenenfalls ist noch zu summieren).

3.2.2 Der Stokes'sche Integralsatz: Zirkulation und Wirbel

Völlig äquivalent wie in Abschn. 3.2.1 können wir auch aus (3.5) einen Integralsatz herleiten: Es gilt

$$(\mathbf{n} \circ \mathbf{rot} \mathbf{A}) \Delta F \approx \oint_{\partial F} \mathbf{A} \circ d\mathbf{r},$$

wobei die Näherung umso besser ist, je kleiner ΔF ist.

Eine größere Fläche können wir uns aber wiederum zusammengesetzt aus kleinen Teilflächen vorstellen. Betrachten wir zwei benachbarte Teilflächen (z. B. F_1 und F_2 in Abb. 3.2; dabei müssen die beiden Flächennormalenvektoren nicht gleichgerichtet sein), so sind die Tangentialvektoren im Wegintegral aber auf dem gemeinsamen Wegstück entgegengesetzt. Addieren wir beide Wegintegrale, so heben sich die Beiträge der infinitesimalen Flächenstücke also jeweils gegenseitig weg, und es

bleibt das Wegintegral über den Rand der Gesamtfläche:

$$\oint_{\partial F_1} \mathbf{A} \circ d\mathbf{r} + \oint_{\partial F_2} \mathbf{A} \circ d\mathbf{r} = \oint_{\partial(F_1+F_2)} \mathbf{A} \circ d\mathbf{r}.$$

Addieren wir die Beiträge aller Teilflächen auf, so erhalten wir für $\Delta F \rightarrow 0$ das Integral über die Fläche, über deren Rand das Wegintegral läuft:

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{A} \circ d\mathbf{F} = \oint_{\partial F} \mathbf{A} \circ d\mathbf{r}. \quad (3.15)$$

Dies ist als der (*klassische*) *Integralsatz von Stokes* bekannt (nach dem irischen Mathematiker und Physiker *Sir George Gabriel Stokes*, 1819–1903) – oder auch: „Satz von Kelvin-Stokes“ (nach dem britischen Physiker *William Thomson, 1. Baron Kelvin*, 1824–1907, der heute eher für seine Beiträge zur Thermodynamik bekannt ist) oder „Rotationssatz“. Dabei muss $d\mathbf{F}$ stets so orientiert sein, dass die durch diesen Vektor vorgegebene Achse vom Weg ∂F in mathematisch positiver Richtung umlaufen wird (vgl. den Hinweis zu (3.5)).

Es sei nochmals explizit darauf hingewiesen, dass der Weg *nicht* in einer Ebene liegen muss, und selbst dann, wenn er das tut, muss die betrachtete Fläche in (3.15) nicht in derselben Ebene liegen: Wir können praktisch beliebige „gewölbte“ Flächen betrachten und insbesondere die Fläche auch praktisch beliebig verformen, solange sich dadurch nur ihr Rand nicht ändert!

Vorausgesetzt wird letztlich nur, dass die Fläche eine eindeutige Randkurve hat und dass das Wegintegral die Normalenvektoren dieser Fläche in mathematisch positiver Richtung umläuft. Nicht-orientierbare Flächen wie beispielsweise Möbius-Bänder sind damit also ausgeschlossen! (Allerdings sind solche Flächen in physikalischen Anwendungen wohl eher unbedeutend ...) Auch darf sich der Weg nicht selbst überschneiden – was er bei physikalisch sinnvollen Flächen aber wohl sowieso nicht tun wird.

Auch die sonstigen mathematischen Voraussetzungen sind für Physiker eigentlich immer erfüllt, also nenne ich sie wieder nur kurz der Vollständigkeit halber: \mathbf{A} muss stetig differenzierbar und die Fläche muss regulär sein, d. h. im Wesentlichen, man kann sie mit differenzierbaren Funktionen parametrisieren.

Beispiel 3.7

Wir betrachten das Vektorfeld und die Dreiecksfläche aus Aufgabe 2.5a. Die Rotation dieses Feldes ist einfach gegeben durch

$$\operatorname{rot} \mathbf{j} = -2\mathbf{e}_y,$$

und mit der Parametrisierung aus der Aufgabe ist dann das Flächenintegral

$$\begin{aligned}\int \mathbf{rot} \mathbf{j} \circ d\mathbf{F} &= \int_0^1 d\lambda \int_0^{1-\lambda} d\mu \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &= -24 \int_0^1 d\lambda \int_0^{1-\lambda} d\mu = -12.\end{aligned}$$

Der Rand der Fläche besteht aus den Dreiecksseiten $[AB]$, $[BC]$ und $[CA]$. Durchläuft man die drei Punkte A , B , C in dieser Reihenfolge, so wird auch der in Aufgabe 2.5a verwendete Normalenvektor in mathematisch positiver Richtung umlaufen. Parametrisierungen für diese drei Strecken sind gegeben durch

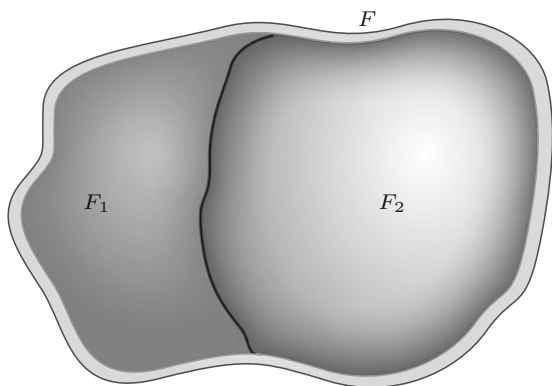
$$\begin{aligned}[AB] : \mathbf{x}(t) &= (2 - 2t)\mathbf{e}_x + 3t\mathbf{e}_y, \\ [BC] : \mathbf{x}(t) &= (3 - 3t)\mathbf{e}_y + 6t\mathbf{e}_z, \\ [CA] : \mathbf{x}(t) &= 2t\mathbf{e}_x + (6 - 6t)\mathbf{e}_z,\end{aligned}$$

mit jeweils $0 \leq t \leq 1$. Das geschlossene Wegintegral ist also insgesamt:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial F} \mathbf{j} \circ d\mathbf{r} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -6t \\ 6 - 6t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &\quad + \int_0^1 \begin{pmatrix} 6t \\ -6 + 6t \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} dt \\ &\quad + \int_0^1 \begin{pmatrix} 6 - 6t \\ 0 \\ 6t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 (-84t + 30) dt = -12,\end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit dem Flächenintegral über $\mathbf{rot} \mathbf{j}$.

Abb. 3.3 Zu Beispiel 3.8:
Statt über eine Fläche F_1 zu integrieren, können wir über eine Fläche F_2 mit derselben Randlinie integrieren plus eine *geschlossene* Fläche F , die sich aus beiden zusammensetzt (mit umgekehrtem Normalenvektor); der letztere Beitrag verschwindet



Beispiel 3.8: Fluss durch geschlossene Fläche und Verformbarkeit der Flächen

Wieder ist es sinnvoll, außer konkreten Rechenbeispielen auch allgemeine Aussagen zu betrachten.

Schauen wir uns zunächst nochmals, wie schon beim Gauß'schen Satz, den Fluss der Rotation eines Vektorfeldes durch eine *geschlossene* Fläche an. Anschaulich ist klar, dass eine geschlossene Fläche keinen Rand hat, das Wegintegral im Stoke'schen Satz also verschwindet. Alternativ kann man sich vorstellen, dass eine geschlossene Fläche aus einer offenen entsteht, indem man den Rand zu einem einzigen Punkt „zusammenzieht“ – und das Integral einer Funktion über einen einzigen Punkt verschwindet natürlich. (In der Sprache des Lebesgue-Integrals ist dies eine „Menge vom Maß null“.) Also folgt wie beim Gauß'schen Satz

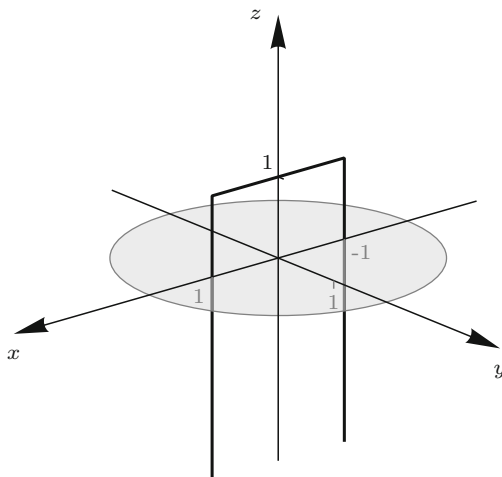
$$\oint \text{rot } \mathbf{j} \circ d\mathbf{F} = 0.$$

Damit können wir auch nochmals begründen, dass man die betrachtete Fläche im Stoke'schen Satz beliebig verformen kann (vorausgesetzt, der Rand ändert sich dadurch nicht): Integrieren über eine Fläche F_1 ist dasselbe wie Integrieren über eine Fläche F_2 plus Integrieren über eine *geschlossene* Fläche, die sich zusammensetzt aus F_1 mit umgekehrtem Normalenvektor und F_2 (vgl. Abb. 3.3). Das Integral über die geschlossene Fläche verschwindet aber, wie wir eben begründet haben – also ist das Integral über F_1 gleich dem über F_2 .

Beispiel 3.9

Aus der Verformbarkeit der Fläche können wir folgern: Sobald $\text{rot } \mathbf{A}$ auf *irgendeiner* Fläche, deren Rand ein vorgegebener Weg ist, verschwindet, ist auch das Wegintegral gleich null. Außerdem muss dann auch das Flächenin-

Abb. 3.4 Zu Beispiel 3.9:
Nur auf den dargestellten
Strecken ist $\text{rot } \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$. Wie
im Text argumentiert wird,
muss dann der Fluss von
 $\text{rot } \mathbf{A}$ durch die dargestellte
Kreisscheibe verschwinden



tegral über alle anderen Flächen, die denselben Rand haben, verschwinden, selbst wenn auf diesen nicht überall $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{0}$ ist.

Betrachten wir beispielsweise eine Situation, in der $\text{rot } \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ nur in folgenden Bereichen gilt: Halbgerade mit $x = 1$, $y = 0$ und $z \leq 1$, Strecke mit $-1 \leq x \leq 1$, $y = 0$ und $z = 1$ und Halbgerade mit $x = -1$, $y = 0$ und $z \leq 1$ (vgl. Abb. 3.4). Wir betrachten dann als Weg eine Kreislinie mit Radius $r = 2$ in der x - y -Ebene um den Ursprung. Dann muss das Wegintegral $\oint \mathbf{A} \circ d\mathbf{r}$ verschwinden – denn diese Kreislinie können wir beispielsweise als Randlinie einer Halbkugel mit Radius $r = 2$ um den Ursprung im Halbraum $z \leq 0$ ansehen, und auf der Oberfläche dieser Halbkugel gilt nach Voraussetzung überall $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{0}$. Betrachten wir stattdessen die Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius $r = 2$ in der x - y -Ebene, so verschwindet $\text{rot } \mathbf{A}$ zwar nicht überall auf dieser Oberfläche (bei $x = 1$ und $x = -1$ ist ja nach Voraussetzung $\text{rot } \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$), aber dennoch muss das Flächenintegral gleich null sein – eben weil wir diese Kreisscheibe in die Oberfläche der Halbkugel umformen können.

Gilt dagegen beispielsweise $\text{rot } \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ auf der gesamten z -Achse, so können wir *keine* Fläche finden, deren Rand diese Kreislinie und auf der überall $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{0}$ ist. In diesem Fall können wir also *nicht* folgern, dass das Wegintegral verschwinden muss. Ähnliches gilt natürlich auch, wenn es Bereiche gibt, in denen $\text{rot } \mathbf{A}$ gar nicht definiert ist.

Die oben angegebene Formel (3.15) ist übrigens nur die „Physiker-Version“ des Satzes von Stokes – allerdings ist sie ziemlich dicht dran an der ursprünglichen Version von Stokes. Was Mathematiker heute unter dem „Satz von Stokes“ verste-

hen, ist ein *sehr* viel allgemeineres Resultat, das die Sprache der Differenzialformen verwendet.

Zwei wichtige Abwandlungen des Satzes seien auch noch genannt:

$$\int_F \mathbf{dF} \times \mathbf{grad} \phi = \oint_{\partial F} \phi \mathbf{dr} \quad \text{bzw.} \quad \int_F (\mathbf{dF} \times \nabla) \times \mathbf{B} = \oint_{\partial F} \mathbf{dr} \times \mathbf{B}; \quad (3.16)$$

begründen dürfte ihr das wieder selbst in Aufgabe 3.6. In kartesischen Koordinaten kann man also allgemein schreiben

$$\sum_{k,\ell=1}^3 \int_F \epsilon_{jk\ell} dF_k \partial_\ell \dots = \oint_{\partial F} dx_j \dots, \quad (3.17)$$

wobei auf beiden Seiten für ... wiederum jeweils dasselbe einzusetzen ist.

3.2.3 Die Integralformeln von Green

Den Gauß'schen (und auch den Stokes'schen) Integralsatz kann man, wie vom Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung bekannt, zusammen mit Produktregeln zur partiellen Integration benutzen. Mit

$$\operatorname{div} (\phi \mathbf{A}) = (\mathbf{grad} \phi) \circ \mathbf{A} + \phi \operatorname{div} \mathbf{A}$$

und

$$\int_V \operatorname{div} (\phi \mathbf{A}) dV = \oint_{\partial V} (\phi \mathbf{A}) \circ \mathbf{dF}$$

folgt beispielsweise

$$\int_V \phi \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \oint_{\partial V} (\phi \mathbf{A}) \circ \mathbf{dF} - \int_V \mathbf{A} \circ \mathbf{grad} \phi dV.$$

Solche partiellen Integrationen werden in der Physik oft verwendet. Sehr häufig argumentiert man dann auch noch, dass die „Randterme“ (hier: das Oberflächenintegral) verschwinden, weil (mindestens) eines der Felder auf dem Rand gleich null ist oder, falls der Rand „im Unendlichen“ liegt, gegen null geht.

Falls \mathbf{A} als Gradient eines skalaren Feldes ψ darstellbar ist, folgt aus diesem Ergebnis sofort der *erste Green'sche Satz* (auch: erste(s) Green'sche(s) Formel/Identität/Theorem; von vielen Autoren auch als zweiter Satz bezeichnet!):

$$\int_V [\phi \Delta \psi + (\mathbf{grad} \phi) \circ (\mathbf{grad} \psi)] dV = \oint_{\partial V} \phi \partial_n \psi dF, \quad (3.18)$$

wobei für $\mathbf{dF} \circ \mathbf{grad} \psi$ hier noch abkürzend die „Normalableitung“ $\partial_n \psi$, multipliziert mit dem skalaren Flächenelement dF , geschrieben wurde.

Ähnlich erhält man mit partieller Integration beider Summanden den *zweiten Green'schen Satz* (wieder: auch Formel, Identität usw., von vielen Autoren auch als erster Satz bezeichnet):

$$\int_V [\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi] dV = \oint_{\partial V} [\phi \partial_n \psi - \psi \partial_n \phi] dF. \quad (3.19)$$

Dieser Satz ist in der Potenzialtheorie von großer Bedeutung (vgl. die Behandlung von Randwertproblemen in Büchern zur Elektrodynamik, beispielsweise Feuerbacher (2016)). Wie auch die Sätze von Gauß und Stokes ist er aber z. B. ebenfalls für die Hydrodynamik wichtig und auch in der reinen Mathematik, beispielsweise in der komplexen Funktionalanalysis und beim Lösen von Integralgleichungen.

Beide Sätze sind nach dem britischen Mathematiker und Physiker *George Green* (1793–1841) benannt, der sie ohne Kenntnis des Gauß'schen Satzes direkt durch komponentenweise partielle Integration bewies.

3.3 Potenziale – „Stammfunktionen“ für Vektorfelder

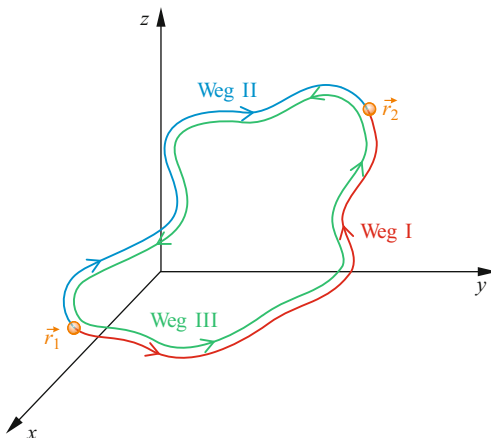
Im vorherigen Abschnitt haben wir besprochen, wie man bei mehrdimensionalen Integralen in gewissem Sinne partiell integriert, d. h. zumindest eines der Integrale loswird, indem man Erweiterungen des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung verwendet. Bei beiden Integralsätzen geht es allerdings immer um *bestimmte* Integrale (vorgegebene, feste Volumina bzw. Flächen). Schon aus der Schule ist der Begriff des unbestimmten Integrals bzw. der Stammfunktion bekannt. In diesem Abschnitt werden wir uns nun dementsprechend anschauen, wie es bei Vektorfeldern mit Stammfunktionen aussieht.

Wir werden sehen, dass es im Gegensatz zum eindimensionalen Fall *nicht* immer möglich ist, eine eindeutige Stammfunktion anzugeben, selbst wenn der Startpunkt der Integration schon festgelegt ist. Es sind gleich zwei zusätzliche Voraussetzungen nötig: erstens, dass jeweils gewisse Ableitungen verschwinden, und zweitens hat sogar die Gestalt der Definitionsmenge selbst einen wichtigen Einfluss.

3.3.1 Skalares Potenzial, Wegunabhängigkeit und Wirbelfreiheit – alles hängt zusammen

Wir untersuchen hier, wie eingangs schon erwähnt, die Frage: Existiert für ein Vektorfeld \mathbf{E} immer ein skalares Feld ϕ , sodass $\mathbf{E} = \mathbf{grad} \phi$ ist? Falls ein solches Feld existiert, so nennt man es das (*skalare*) *Potenzial* zu \mathbf{E} .

Abb. 3.5 Von \mathbf{r}_1 nach \mathbf{r}_2 führen zwei Wege (I und II). Diese beiden Wege können durch die Addition eines geschlossenen Weges (III) ineinander überführt werden. Das Integral über diesen geschlossenen Weg III verschwindet; deshalb ergeben die Integrale über die Wege I bzw. II jeweils denselben Wert



Falls ein skalares Potenzial existiert, so kann man Wegintegrale über \mathbf{E} immer damit ausdrücken:

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \circ d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{grad} \phi \circ d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\phi = \phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_1), \quad (3.20)$$

da ja in linearer Näherung $d\phi = \mathbf{grad} \phi \circ d\mathbf{r}$ gilt.

Es folgt, dass der Wert des Wegintegrals dann nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt, aber nicht davon, wie genau der Weg vom einen Punkt zum anderen verläuft. Insbesondere gilt für jeden *geschlossenen* Weg:

$$\oint \mathbf{E} \circ d\mathbf{r} = 0. \quad (3.21)$$

Umgekehrt kann man sich leicht überlegen, dass aus dem Verschwinden von allen geschlossenen Wegintegralen die Wegunabhängigkeit von beliebigen Wegintegralen folgt (vgl. Abb. 3.5). Ein Vektorfeld, bei dem dies gilt, bezeichnet man als *konservativ*.

Setzen wir nun andererseits voraus, dass alle Wegintegrale über ein Vektorfeld \mathbf{E} vom Weg unabhängig sind, und definieren

$$\phi(\mathbf{r}) := \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \circ d\mathbf{r}' \quad (3.22)$$

mit einem beliebig gewählten Startpunkt \mathbf{r}_0 – eine andere Wahl des Startpunkts ändert ϕ nur um eine Konstante. Betrachten wir dann die Änderung von ϕ bei einer

kleinen Verschiebung des Ortes \mathbf{r} :

$$\phi(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \circ d\mathbf{r}' - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \circ d\mathbf{r}' = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \circ d\mathbf{r}'.$$

Aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt, dass die rechte Seite gleich $\mathbf{E}(\bar{\mathbf{r}}) \circ \Delta\mathbf{r}$ ist mit einem passend gewählten $\bar{\mathbf{r}}$. Andererseits können wir die linke Seite Taylor-entwickeln zu $\Delta\mathbf{r} \circ \mathbf{grad} \phi$. Für $\Delta\mathbf{r} \rightarrow 0$ folgt deshalb

$$\mathbf{grad} \phi(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (3.23)$$

d. h., konservative Vektorfelder können immer als Gradient eines skalaren Potentials geschrieben werden.

Insgesamt haben wir schon mal gezeigt, dass die Wegunabhängigkeit von Wegintegralen und das Verschwinden von geschlossenen Wegintegralen über ein Vektorfeld völlig äquivalent dazu sind, dass das Feld als Gradient eines Potentials geschrieben werden kann. (Und das sollte eigentlich aus der Mechanik bekannt sein!) Die Formeln (3.20) und (3.23) zusammen mit (3.22) bilden, neben den Integralsätzen von Gauß und Stokes, damit eine weitere Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung – die aber eben nur für konservative Vektorfelder gilt.

Aus der Wegunabhängigkeit folgt wegen $\mathbf{rot} \mathbf{grad} \phi = \mathbf{0}$ (vgl. (1.35)) somit auch sofort $\mathbf{rot} \mathbf{E} = 0$. Umgekehrt können wir fragen, ob aus $\mathbf{rot} \mathbf{E} = 0$ in einem Bereich folgt, dass dort ein skalares Potenzial existiert – oder eben nun auch, ob daraus folgt, dass dort Wegintegrale wegunabhängig sind bzw. geschlossene Wegintegrale verschwinden. Das ist leider im Allgemeinen aber nicht so, wie man beispielsweise am Feld

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\varrho}$$

sieht. Mit den Formeln für die Rotation in Zylinderkoordinaten rechnet man leicht nach, dass

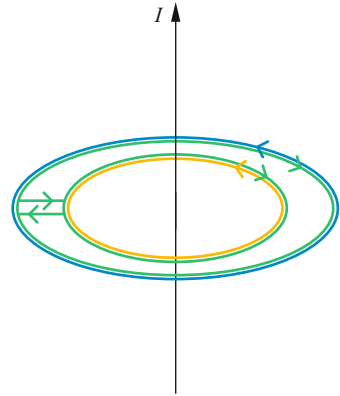
$$\mathbf{rot} \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

gilt – allerdings nur außerhalb der z -Achse ($\varrho \neq 0$), denn auf der z -Achse selbst ($\varrho = 0$) ist \mathbf{A} ja nicht definiert! Betrachten wir nun als geschlossenen Integrationsweg einen Kreis mit beliebigem Radius ϱ_0 um die z -Achse. Dafür ist

$$\oint \mathbf{A}(\mathbf{r}) \circ d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\varrho_0} \circ \varrho_0 \mathbf{e}_\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi;$$

obwohl die Rotation von \mathbf{A} im kompletten Bereich, durch den der geschlossene Weg verläuft, verschwindet, ergibt das Integral also einen Wert ungleich null!

Abb. 3.6 Durch Addition eines geschlossenen Weges (*grün*) kann man einen Kreis (*gelb*), welcher die z -Achse umschließt, in einen anderen (*blau*) umformen. (Die beiden kurzen parallelen Stücke des *grünen* Weges sollen andeuten, dass ein und dieselbe Strecke hier in beide Richtungen durchlaufen wird.)



Dies gilt allerdings für *jeden* Kreis, der die z -Achse einschließt. Also ist zumindest für alle diese geschlossenen Wege das Ergebnis des Integrals vom Weg unabhängig – wenn auch nicht gleich null. Das heißt aber auch, dass das Integral über jeden (ebenfalls geschlossenen) Weg, der einen dieser Kreise in einen anderen umformt (vgl. Abb. 3.6) verschwindet!

Es gibt also in diesem Beispiel geschlossene Wege, bei denen das Integral verschwindet, und solche, bei denen es dies nicht tut. Schaut man sich genauer an, wie diese Wege verlaufen, so stellt man fest: Bei Wegen, welche die z -Achse umschließen, verschwindet das Integral nicht; die anderen Wege, bei denen das Integral verschwindet, umschließen die z -Achse dagegen nicht (noch genauer: Der Wert des Integrals hängt nur davon ab, wie oft die z -Achse umschlungen wird). Letztere Wege kann man wiederum ineinander verformen, indem man weitere geschlossene Wege „addiert“, die alle die z -Achse nicht umschließen, auf denen das Integral also verschwindet.

Alle Wege, welche die z -Achse nicht umschließen, kann man stetig auf einen einzigen Punkt „zusammenziehen“ – und das Integral über einen einzigen Punkt muss natürlich verschwinden. Wege, welche die z -Achse nicht einschließen, kann man dagegen nicht stetig auf einen Punkt zusammenziehen – dafür müsste ein Weg die z -Achse kreuzen, und dort ist A und damit das Integral ja nicht definiert!

Deswegen definiert man: Ein Gebiet heißt *einfach zusammenhängend*, wenn man in ihm jeden geschlossenen Weg stetig auf einen Punkt zusammenziehen kann. (Unter einem *Gebiet* versteht man dabei eine offene, nichtleere und zusammenhängende Teilmenge des \mathbb{R}^3 oder allgemeiner \mathbb{R}^n .) Äquivalent dazu ist: Für je zwei Punkte im Gebiet gibt es mindestens einen Weg, der die beiden Punkte verbindet, und alle Wege, welche die beiden Punkte verbinden, können stetig ineinander verformt werden. Beispielsweise ist der dreidimensionale Raum, wie wir eben diskutiert haben, nicht mehr einfach zusammenhängend, wenn man die z -Achse ausnimmt; wenn man dagegen nur einen einzelnen Punkt ausnimmt, so ist das verbleibende Gebiet immer noch einfach zusammenhängend.

Wir haben also gesehen: Ist ein Gebiet *nicht* einfach zusammenhängend, so folgt in ihm aus $\mathbf{rot} \mathbf{A} = 0$ *nicht*, dass geschlossene Wegintegrale verschwinden – also existiert dann auch kein (eindeutiges) skalares Potenzial für \mathbf{A} . Umgekehrt können wir folgern: Ist ein Vektorfeld \mathbf{E} auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet des \mathbb{R}^3 wirbelfrei, $\mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$, so verschwinden alle Flächenintegrale über $\mathbf{rot} \mathbf{E}$ in diesem Gebiet. Wegen des Satzes von Stokes verschwinden dann auch alle geschlossenen Wegintegrale über \mathbf{E} in diesem Gebiet – und wie wir schon gezeigt hatten, bedeutet dies, dass ein eindeutig definiertes skalares Potenzial existiert. (Das Gebiet muss dabei einfach zusammenhängend sein, damit Integrale über die Flächen, die von beliebigen geschlossenen Wegen eingeschlossen werden, überhaupt definiert sind.)

Da in diesem Abschnitt viele äquivalente Eigenschaften von \mathbf{E} diskutiert wurden, nochmals zusammenfassend:

- Wenn in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathbf{rot} \mathbf{E} = 0$ gilt (das Vektorfeld ist wirbelfrei), dann existiert in diesem Gebiet ein skalares Potenzial ϕ mit $\mathbf{grad} \phi = \mathbf{E}$, Wegintegrale über \mathbf{E} sind vom Weg unabhängig bzw. geschlossene Wegintegrale über \mathbf{E} verschwinden (das Vektorfeld ist konservativ).
- Wenn ein skalares Potenzial für \mathbf{E} existiert, dann sind Wegintegrale vom Weg unabhängig bzw. geschlossene Wegintegrale verschwinden (konservativ), und $\mathbf{rot} \mathbf{E} = 0$ gilt (wirbelfrei). Der einfache Zusammenhang des Gebiets muss hier nicht vorausgesetzt werden!
- Wenn Wegintegrale vom Weg unabhängig sind bzw. geschlossene Wegintegrale verschwinden (konservativ), dann existiert ein skalares Potenzial, und $\mathbf{rot} \mathbf{E} = 0$ gilt (wirbelfrei). Auch hier ist der einfache Zusammenhang nicht vorauszusetzen.

Abschließend sei noch angemerkt, dass andere Arten von Wegintegralen wie

$$\int \psi(\mathbf{r}) \, d\mathbf{r} \quad \text{oder} \quad \int \mathbf{A}(\mathbf{r}) \times d\mathbf{r}$$

nur dann vom Weg unabhängig sind, wenn der Integrand konstant ist; den (kurzen) Beweis dürft ihr in Aufgabe 3.11 selbst durchführen.

Beispiele 3.10

- Ein Beispiel, bei dem *kein* Potenzial existiert (weil das betrachtete Gebiet nicht einfach zusammenhängend ist), wurde oben bereits vorgerechnet.

- Das Vektorfeld $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$ ist auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ definiert, also in einem einfach zusammenhängenden Gebiet. Außerdem ist dort überall $\mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$, vgl. Kap. 1. Also muss ein Potenzial $\phi(\mathbf{r})$ existieren mit $\mathbf{E} = \mathbf{grad} \phi$. Aus der expliziten Form von \mathbf{grad} in Kugelkoordinaten und der Tatsache, dass \mathbf{E} rein radial ist, folgt, dass ϕ nur von r abhängen kann. Wir erhalten die Differenzialgleichung $\frac{d}{dr}\phi(r) = \frac{1}{r^2}$, die offensichtlich durch $\phi(r) = -\frac{1}{r} + \text{const}$ gelöst wird. Andersherum könnte man auch direkt

$$\phi(\mathbf{r}) := \int_{r_0}^r \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \circ d\mathbf{r}$$

berechnen. Da $\mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$ gilt, ist dieses Integral wegunabhängig, und wir können einen besonders einfachen Weg wählen, beispielsweise den folgenden: Zunächst bewegen wir uns bei konstantem $r = r_0$, also auf einer Kugeloberfläche, von ϑ_0, φ_0 zu ϑ, φ . Auf diesem Wegstück gilt $\mathbf{e}_r \circ d\mathbf{r} = 0$, es trägt also nichts zum Integral bei. Dann bewegen wir uns bei konstantem ϑ, φ radial nach außen. Also ist

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{r_0}^r \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \circ \mathbf{e}_r dr = \int_{r_0}^r \frac{1}{r^2} dr = -\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0}.$$

Da $\frac{1}{r_0}$ ein konstanter Summand ist, stimmt das mit unserem obigen Ergebnis überein.

- Das Vektorfeld $\mathbf{K}(\mathbf{r}) = y^3 \mathbf{e}_x + (3xy^2 + z^2) \mathbf{e}_y + 2yz \mathbf{e}_z$ ist auf ganz \mathbb{R}^3 definiert, also auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet, und es gilt $\mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$, wie ihr schnell nachrechnet. Wir berechnen ϕ , indem wir uns der Reihe nach parallel zu den drei Achsen von \mathbf{r}_0 nach \mathbf{r} bewegen,

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{K} \circ d\mathbf{r} \\ &= \int_{(x_0; y_0; z_0)}^{(x; y_0; z_0)} \mathbf{K} \circ \mathbf{e}_x dx' + \int_{(x; y_0; z_0)}^{(x; y; z_0)} \mathbf{K} \circ \mathbf{e}_y dy' + \int_{(x; y; z_0)}^{(x; y; z)} \mathbf{K} \circ \mathbf{e}_z dz' \\ &= \int_{(x_0; y_0; z_0)}^{(x; y_0; z_0)} y_0^3 dx + \int_{(x; y_0; z_0)}^{(x; y; z_0)} (3xy'^2 + z_0^2) dy' + \int_{(x; y; z_0)}^{(x; y; z)} 2yz' dz' \\ &= y_0^3(x - x_0) + x(y^3 - y_0^3) + z_0^2(y - y_0) + y(z^2 - z_0^2) \\ &= xy^3 + yz^2 - y_0^3x_0 - z_0^2y_0. \end{aligned}$$

Andererseits können wir ϕ auch wieder durch Lösen der entsprechenden partiellen Differenzialgleichungen bestimmen: Aus $(\mathbf{grad} \phi)_x = K_x$ haben wir zunächst $\partial_x \phi = y^3$, also ist $\phi = xy^3 + C$. Im Gegensatz zu eindimensionalen Problemen ist C hier aber nicht zwingend konstant, sondern kann noch von den beiden anderen Variablen abhängen, $C = C(y, z)$! Deshalb folgt $(\mathbf{grad} \phi)_y = 3xy^2 + \partial_y C$. Dies muss gleich $K_y = 3xy^2 + z^2$ sein, also folgt $\partial_y C = z^2$ und damit $C(y, z) = yz^2 + D(z)$ und $\phi = 3xy^2 + yz^2 + D(z)$. Daraus erhalten wir wiederum $(\mathbf{grad} \phi)_z = 2yz + \partial_z D = K_z = 2yz$, also ist $\partial_z D = 0$, sprich: Dies ist nun wirklich eine Konstante. Insgesamt ergibt sich

$$\phi(\mathbf{r}) = 3xy^2 + yz^2 + \text{const},$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis aus dem Integral oben.

- Das Vektorfeld $\mathbf{K}(\mathbf{r}) = -y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y$ ist zwar auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet \mathbb{R}^3 definiert, es gilt aber $\mathbf{rot} \mathbf{K} = 2\mathbf{e}_z \neq \mathbf{0}$. Damit sind Wegintegrale *nicht* unabhängig vom Weg, also können wir uns nicht einfach einen beliebigen Weg aussuchen, um ϕ per Integration zu bestimmen. Auch das Lösen der partiellen Differenzialgleichungen $\mathbf{grad} \phi = \mathbf{K}$ funktioniert nicht: Aus $(\mathbf{grad} \phi)_x = K_x = -y$ erhalten wir $\phi = -xy + C(y, z)$ und daraus dann $(\mathbf{grad} \phi)_y = -x + \partial_y C$. Damit dies gleich K_y ist, müsste $\partial_y C = 2x$ sein. Das steht aber im Widerspruch dazu, dass C nur von y und z abhängen darf.
- Nach diesen speziellen Beispielen treffen wir noch eine allgemeine Aussage, die eigentlich auch schon aus der Mechanik bekannt sein sollte. In einem einfach zusammenhängenden Gebiet herrsche ein konservatives Kraftfeld $\mathbf{K}(\mathbf{r})$, d. h. $\mathbf{rot} \mathbf{K} = \mathbf{0}$. Daraus folgt die Existenz einer potenziellen Energie $E_{\text{pot}}(\mathbf{r})$ (oft auch $V(\mathbf{r})$ geschrieben), sodass $\mathbf{K}(\mathbf{r}) = -\mathbf{grad} E_{\text{pot}}(\mathbf{r})$ gilt. Mit dem zweiten Newton'schen Gesetz $\mathbf{K} = m\ddot{\mathbf{x}}$ für einen Körper der Masse m auf einer Bahnkurve $\mathbf{x}(t)$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}(\mathbf{x}(t)) - E_{\text{pot}}(\mathbf{x}(t_0)) &= - \int_{\mathbf{x}(t_0)}^{\mathbf{x}(t)} \mathbf{K} \circ d\mathbf{r} = -m \int_{\mathbf{x}(t_0)}^{\mathbf{x}(t)} \ddot{\mathbf{x}} \circ d\mathbf{r} \\ &= -m \int_{t_0}^t \ddot{\mathbf{x}} \circ \dot{\mathbf{x}} dt = -m \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{x}}^2 dt \\ &= \left[-\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 \right]_{t_0}^t. \end{aligned}$$

Der Term in den eckigen Klammern ist nun aber einfach die negative kinetische Energie; also folgt insgesamt

$$E_{\text{pot}}(t) + E_{\text{kin}}(t) = E_{\text{pot}}(t_0) + E_{\text{kin}}(t_0).$$

Damit ist gezeigt, dass bei der Bewegung eines Körper in einem konservativen Kraftfeld die Gesamtenergie (potenzielle plus kinetische) erhalten bleibt. Der Grund dafür ist letztlich, dass man in einem konservativen Kraftfeld die potenzielle Energie genau so *definieren* kann, dass ihre Änderung immer genau gleich der negativen Änderung der kinetischen Energie ist. Ist das Kraftfeld dagegen nicht konservativ, so ist es eben nicht möglich, eine solche passende potenzielle Energie zu definieren – deshalb kann man dann nicht mehr von der Erhaltung der Gesamtenergie sprechen.

3.3.2 Bei Quellenfreiheit gibt's dagegen ein Vektorpotenzial

In Abschn. 3.3.1 hatten wir einen wichtigen Teil der Diskussion auf der bekannten allgemeinen Beziehung $\text{rot grad } \phi = \mathbf{0}$ aufgebaut. Bekanntlich gilt aber außerdem auch allgemein für alle Vektorfelder $\text{div rot } \mathbf{A} = 0$. Damit kommen wir nun zur naheliegenden Frage: Existiert für ein Vektorfeld \mathbf{B} mit $\text{div } \mathbf{B} = 0$ immer ein Vektorfeld \mathbf{A} , sodass $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ ist? Falls ein solches Feld existiert, so nennt man es das *Vektorpotenzial* zu \mathbf{B} .

Ähnlich wie beim skalaren Potenzial stellt sich heraus, dass die Existenz eines eindeutigen Vektorpotenzials im Allgemeinen nicht immer gewährleistet ist. Wir beschränken uns hier allerdings darauf, die für die Elektrodynamik wesentlichen Ergebnisse anzugeben: Ist \mathbf{B} im ganzen Raum definiert und gilt überall $\text{div } \mathbf{B} = 0$, so existiert ein Vektorpotenzial \mathbf{A} für \mathbf{B} . Falls \mathbf{B} nicht überall definiert oder nicht überall stetig differenzierbar ist, so folgt aus der Quellenfreiheit nur, dass zumindest lokal ein passendes \mathbf{A} existiert.

Schon rein nach Konstruktion (es soll ja $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ gelten) ist ein solches Vektorpotenzial sicher nie ein konservatives Feld. Außerdem ist es noch weniger eindeutig definiert als das skalare Potenzial: Zu jenem kann man ja immer eine beliebige Konstante addieren – zu \mathbf{A} kann man dagegen sogar den Gradienten eines beliebigen skalaren Feldes χ addieren! Man rechnet schnell nach, dass sich dadurch $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ nicht ändert,

$$\text{rot } (\mathbf{A} + \text{grad } \chi) = \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot grad } \chi = \text{rot } \mathbf{A}.$$

Es gibt mehrere Möglichkeiten, zu einem gegebenen quellenfreien Vektorfeld \mathbf{B} ein Vektorpotenzial zu berechnen. Eine Möglichkeit ist es, zu versuchen, die drei partiellen Differenzialgleichungen $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ direkt zu lösen. Da \mathbf{A} nicht eindeutig ist, kann man dabei beispielsweise den einfachen Ansatz $A_z = 0$ machen, was die

Rechnung deutlich vereinfacht: Es bleiben dann nur noch die Gleichungen

$$-\partial_z A_y = B_x, \quad \partial_z A_x = B_y, \quad \partial_x A_y - \partial_y A_x = B_z$$

zu erfüllen. Die ersten beiden dieser Differenzialgleichungen können wir direkt aufintegrieren,

$$A_x(x, y, z) = \int_{z_0}^z B_y(x, y, z') dz' + C(x, y),$$

$$A_y(x, y, z) = - \int_{z_0}^z B_x(x, y, z') dz' + D(x, y).$$

Setzen wir diese beiden Lösungen in die dritte Differenzialgleichung ein, so folgt die Bedingung

$$- \int_{z_0}^z (\partial_x B_x + \partial_y B_y) dz' + \partial_x D - \partial_y C = B_z.$$

Das sieht reichlich kompliziert aus – aber wir sollten uns daran erinnern, dass wir die Bedingung der Quellenfreiheit noch gar nicht verwendet haben! Aus $\text{div } \mathbf{B} = 0$ folgt natürlich sofort, dass der Integrand einfach $-\partial_z B_z$ ist. Dann kann die Integration direkt ausgeführt werden, und wir erhalten die Bedingung

$$B_z(x, y, z) - B_z(x, y, z_0) + \partial_x D - \partial_y C = B_z(x, y, z),$$

also

$$\partial_x D(x, y) - \partial_y C(x, y) = B_z(x, y, z_0).$$

Diese Differenzialgleichung für die beiden Funktionen C, D hat offensichtlich viele Lösungsmöglichkeiten. Wählen wir der Einfachheit halber $D \equiv 0$, so folgt

$$C(x, y) = - \int_{y_0}^y B_z(x, y', z_0) dy';$$

insgesamt haben wir also dann das Vektorpotenzial

$$A_x(x, y, z) = \int_{z_0}^z B_y(x, y, z') dz' - \int_{y_0}^y B_z(x, y', z_0) dy',$$

$$A_y(x, y, z) = - \int_{z_0}^z B_x(x, y, z') dz',$$

$$A_z(x, y, z) = 0. \tag{3.24}$$

Eine andere Möglichkeit zur Berechnung eines möglichen Vektorpotenzials ist folgende Formel:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_0^1 \mathbf{B}(\alpha \mathbf{r}) \times \alpha \mathbf{r} \, d\alpha. \quad (3.25)$$

Wie man darauf kommt, kann ich leider nicht sagen – aber dass die Formel stimmt, können wir mithilfe der letzten der Produktregeln (1.29) recht schnell beweisen:

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} \, \mathbf{A} &= \int_0^1 \mathbf{rot} \, (\mathbf{B}(\alpha \mathbf{r}) \times \alpha \mathbf{r}) \, d\alpha \\ &= \int_0^1 \alpha ([\mathbf{r} \circ \nabla] \mathbf{B}(\alpha \mathbf{r}) - \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{B}(\alpha \mathbf{r}) - [\mathbf{B}(\alpha \mathbf{r}) \circ \nabla] \mathbf{r} + \mathbf{B}(\alpha \mathbf{r}) \operatorname{div} \mathbf{r}) \, d\alpha \\ &= \int_0^1 \alpha ([\mathbf{r} \circ \nabla] \mathbf{B}(\alpha \mathbf{r}) - \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{B}(\alpha \mathbf{r}) - \mathbf{B}(\alpha \mathbf{r}) + 3\mathbf{B}(\alpha \mathbf{r})) \, d\alpha \\ &= \int_0^1 \alpha ([\mathbf{r} \circ \nabla] \mathbf{B}(\alpha \mathbf{r}) + 2\mathbf{B}(\alpha \mathbf{r})) \, d\alpha, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt auch noch die Quellenfreiheit von \mathbf{B} ausgenutzt wurde.

Da aber $\frac{\partial}{\partial x_i} = \alpha \frac{\partial}{\partial(\alpha x_i)}$ ist, können wir dies auch schreiben als

$$\mathbf{rot} \, \mathbf{A} = \int_0^1 (\alpha^2 [\mathbf{r} \circ \nabla_{(\alpha \mathbf{r})}] \mathbf{B}(\alpha \mathbf{r}) + 2\alpha \mathbf{B}(\alpha \mathbf{r})) \, d\alpha,$$

und deshalb können wir den Integranden mithilfe der Produkt- und Kettenregel zusammenfassen,

$$\mathbf{rot} \, \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_0^1 \frac{d}{d\alpha} (\alpha^2 \mathbf{B}(\alpha \mathbf{r})) \, d\alpha = [\alpha^2 \mathbf{B}(\alpha \mathbf{r})]_0^1 = \mathbf{B}(\mathbf{r}).$$

Damit ist bewiesen, dass (3.25) tatsächlich ein mögliches Vektorpotenzial für ein gegebenes Vektorfeld \mathbf{B} liefert.

Eine dritte Möglichkeit, bei gegebenem \mathbf{B} (oder genauer eigentlich gegebenem $\mathbf{rot} \, \mathbf{B} \propto \mathbf{j}$) ein mögliches Vektorpotenzial zu berechnen, wird in Vorlesungen

zur Elektrodynamik besprochen. (Dabei wird eine sogenannte Green'sche Funktion verwendet.)

Beispiel 3.11

Zum quellenfreien Vektorfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = y \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_y + x \mathbf{e}_z$ sei ein Vektorpotenzial gesucht. Wir verwenden zunächst (3.25):

$$A_x(x, y, z) = \int_{z_0}^z z \, dz' - \int_{y_0}^y x \, dy' = \frac{1}{2} (z^2 - z_0^2) - x(y - y_0),$$

$$A_y(x, y, z) = - \int_{z_0}^z y \, dz' = -y(z - z_0),$$

$$A_z(x, y, z) = 0,$$

mit beliebig gewähltem Anfangspunkt (x_0, y_0, z_0) . Wählen wir insbesondere den Ursprung, so haben wir $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{2}z^2 - xy\right) \mathbf{e}_x - yz \mathbf{e}_y$.

Aus (3.25) erhalten wir dagegen das Vektorpotenzial

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'(\mathbf{r}) &= \int_0^1 (\alpha y \mathbf{e}_x + \alpha z \mathbf{e}_y + \alpha x \mathbf{e}_z) \times (\alpha x \mathbf{e}_x + \alpha y \mathbf{e}_y + \alpha z \mathbf{e}_z) \, d\alpha \\ &= \int_0^1 \alpha^2 ((z^2 - xy) \mathbf{e}_x + (x^2 - yz) \mathbf{e}_y + (y^2 - xz) \mathbf{e}_z) \, d\alpha \\ &= \frac{1}{3} ((z^2 - xy) \mathbf{e}_x + (x^2 - yz) \mathbf{e}_y + (y^2 - xz) \mathbf{e}_z). \end{aligned}$$

Dieses \mathbf{A}' stimmt offensichtlich nicht mit dem obigen Ergebnis \mathbf{A} überein – muss es ja aber auch gar nicht, denn wir hatten ja schon argumentiert, dass sich zwei Vektorpotenziale zum selben quellenfreien Vektorfeld um den Gradienten eines skalaren Feldes unterscheiden können!

Wir sollten also noch zeigen, dass es ein Feld χ gibt, sodass $\mathbf{A}' - \mathbf{A} = \mathbf{grad} \chi$ ist, d. h.

$$\partial_x \chi = -\frac{1}{6}z^2 + \frac{2}{3}xy, \quad \partial_y \chi = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}yz, \quad \partial_z \chi = \frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{3}xz.$$

Diese partiellen Differenzialgleichungen kann man wie in Abschn. 3.3.1 lösen (macht mal!) und findet schließlich tatsächlich, dass solche Felder χ existieren,

$$\chi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{6}xz^2 + \frac{1}{3}x^2y + \frac{1}{3}y^2z + \text{const.}$$

Abschließend sei noch angemerkt, dass es einen engen Zusammenhang zwischen dem Vektorpotenzial zum magnetischen Feld und dem Impuls eines Teilchens in einem magnetischen Feld gibt – genauso, wie es einen engen Zusammenhang zwischen dem skalaren elektrischen Potenzial und der Energie eines Teilchens im elektrischen Feld gibt. Für Details siehe Vorlesungen zur Elektrodynamik und zur Quantenmechanik.

3.3.3 Zugabe: Das Helmholtz-Theorem

Abschließend stellt sich noch eine andere Frage: Was ist denn, wenn ein Vektorfeld weder quellen- noch wirbelfrei ist? Gibt es dann keine „Stammfunktion“ – im Sinne eines skalaren oder Vektorpotenzials? Diese Frage ist für die Elektrodynamik zwar nicht direkt wesentlich (dort kann man eigentlich immer Vektorfelder finden, die quellen- oder wirbelfrei sind), aber in anderen Bereichen der Physik wie der Hydrodynamik durchaus wichtig. Deshalb soll hier zumindest ohne Beweis (und ohne Beispiele) das Ergebnis angegeben werden; der Beweis kann z. B. in Großmann (2000) nachgelesen werden:

Ist ein Vektorfeld V in einem einfach zusammenhängenden Gebiet stetig differenzierbar und verschwindet es für $r \rightarrow \infty$ schnell genug (genauer: gilt $rV \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$), kann man es als Summe eines quellen- und eines wirbelfreien Feldes darstellen:

$$V(r) = V_{\text{qf}}(r) + V_{\text{wf}}(r)$$

mit

$$\operatorname{div} V_{\text{qf}}(r) = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} V_{\text{wf}}(r) = 0.$$

Nach den Abschn. 3.3.1 und 3.3.2 existiert also ein skalares Potenzial ϕ und ein Vektorpotenzial A , sodass

$$V(r) = \operatorname{grad} \phi(r) + \operatorname{rot} A(r).$$

Diese Aussage wird der *Fundamentalsatz der Vektoranalysis* genannt, oder auch *Helmholtz-Theorem* oder (*Stokes-)**Helmholtz-Zerlegung* (nach dem bereits bekannten Stokes, der den Satz 1849 erstmals im Wesentlichen bewies, und dem deutschen Physiker und Physiologen *Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz*, 1821–1894, der den Beweis 1859 vervollständigte).

3.4 Historische Anmerkungen zur Vektoranalysis

Die Vektoranalysis, wie sie in den vorhergehenden Kapiteln dargestellt wurde (und selbst die Rechnung mit konstanten Vektoren!), ist noch gar nicht so alt: Sie wurde erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts entwickelt. Ursprünglich wurden alle Sätze (auch von Gauß und Stokes) in kartesischen Koordinaten und mithilfe von Winkeln zu den Koordinatenachsen formuliert. Selbst Einstein sprach zwar in seiner

berühmten Arbeit „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“ im Jahre 1905 von Vektoren, schrieb die Gleichungen aber immer noch nur komponentenweise hin!

Ein erster Schritt hin zur Vektorrechnung kam 1843: die Erfindung (bzw. Entdeckung) der *Quaternionen* durch den irischen Mathematiker und Physiker *Sir William Rowan Hamilton* (1805–1865; sicher bekannt aus der Mechanik, wo viel nach ihm benannt wurde: Hamilton-Funktion, Hamilton-Prinzip und Hamilton'sche Gleichungen). Diese sind so etwas wie eine vierdimensionale Verallgemeinerung der komplexen Zahlen, mit drei verschiedenen „komplexen Einheiten“. Sie waren einige Jahrzehnte lang recht beliebt – allerdings eher unter Mathematikern als unter Physikern, da sie nicht direkt physikalischen Größen entsprechen. Heutzutage verwendet sie fast kein Physiker mehr.

Damit wurden erstmals mehrere Zahlen in einem einzelnen Objekt zusammengefasst. (Ein Vorreiter waren natürlich die komplexen Zahlen selbst, die man ja auch als Zusammenfassung von zwei reellen Zahlen zu einer Größe sehen kann – was aber auch erst Hamilton so ausformulierte.) Für den „Realteil“ der Quaternionen (eine einzelne Zahl) bzw. den „Imaginärteil“ (drei Zahlen) prägte Hamilton die Begriffe *Skalar* bzw. *Vektor*. Außerdem treten bei der Multiplikation zweier Quaternionen, deren Skalarmeil verschwindet, bereits Terme auf, die im Wesentlichen dem modernen Skalar- bzw. Vektorprodukt entsprechen. Es waren also eigentlich schon alle wichtigen Elemente der Vektorrechnung vorhanden.

Trotzdem dauerte es noch bis in die 1890er-Jahre, bis die Vektoranalysis in der heutigen Form entstand. Der deutsche Mathematiker und Sprachwissenschaftler *Hermann Günther Graßmann* (1809–1877) leistete zwar bereits ab 1846 wichtige Vorarbeiten und betrachtete wohl auch als Erster Vektorräume beliebiger Dimension – diese wurden allerdings jahrzehntelang weitgehend ignoriert. (Online ist sein Hauptwerk dazu, die *Lineale Ausdehnungslehre*, frei erhältlich, siehe Graßmann (1878).)

Die Entwicklung der Vektoranalysis bestand dann letztlich hauptsächlich darin, aus der Quaternionentheorie Überflüssiges auszusondern und die Schreibweisen sinnvoll abzuwandeln. Die wichtigsten Arbeiten dazu veröffentlichten der britische Mathematiker und Physiker *Oliver Heaviside* (1850–1925, heutzutage völlig unerdient praktisch nur noch für die Stufenfunktion bekannt) und der US-amerikanische Physiker *Josiah Willard Gibbs* (1839–1903; heute kennt man ihn vor allem für seine Beiträge zur Thermodynamik). Graßmann trug nur indirekt bei, da er gezeigt hatte, dass man Vektoren und ihre Produkte auch unabhängig von den Quaternionen definieren kann.

Dass die Vektoranalysis, ja das ganze Konzept der Vektoren, erst im Laufe des 19. Jahrhunderts erfunden wurde, obwohl Descartes bereits im 17. Jahrhundert die Grundlagen der analytischen Geometrie schuf, erscheint erstaunlich. Die Gründe dafür und ein sehr lesenswerter Überblick zur geschichtlichen Entwicklung sind in Crowe (1994) dargestellt. Ein Hauptgrund war wohl, dass man bei (dreidimensionalen) Vektoren, im Gegensatz zu den damals bekannten mathematischen Größen wie den reellen und komplexen Zahlen (und auch den Quaternionen), Probleme damit hat, ein Produkt sinnvoll zu definieren. Einerseits sind zwei Produkte nötig statt nur einem, und andererseits gelten einige von sonstigen Produkten bekannte Rechenge-

setze nicht: Beim Skalarprodukt kann man kein Assoziativgesetz formulieren, beim Vektorprodukt gilt gar weder das Kommutativ- noch das Assoziativgesetz.

Zum Schluss sei noch angemerkt, dass auch alle in Abschn. 3.2 präsentierten Sätze von den Personen, nach denen sie benannt sind, in dieser Form eigentlich von ihnen nie veröffentlicht wurden – sie wurden erst durch andere Mathematiker, die teilweise deutlich später lebten, in die heute bekannte Form gebracht. Beispielsweise in Katz (1979) findet man einen interessanten geschichtlichen Überblick dazu.

Besonders extrem war es beim Satz von Stokes: Vorgeschlagen wurde diese Formel erstmals von Kelvin in einem Brief an Stokes im Jahre 1850. Stokes stellte diesen Satz dann 1854 als Prüfungsaufgabe für den sogenannten Smith-Preis an der Universität Cambridge. (An dieser Prüfung nahm damals unter anderem auch Maxwell teil!) Erst 1861 wurde erstmals ein Beweis für den Satz veröffentlicht, durch den deutschen Mathematiker *Hermann Hankel* (1839–1873, heute vor allem für die Hankel-Funktionen bekannt, eine Abwandlung der Bessel-Funktionen – vgl. Kap. 5.) Obwohl Stokes selbst also eigentlich nichts dazu beitrug, ist der Satz heute nach ihm benannt!

Zusammenfassung

- Mithilfe der Integraldarstellungen (3.1) bzw. (3.5) der Divergenz und der Rotation kann man Darstellungen der Divergenz, Rotation und schließlich auch des Laplace-Operators in krummlinigen Koordinatensystemen ableiten. Insbesondere in Zylinder- und Kugelkoordinaten sind diese Formeln durch (3.3), (3.4), (3.7), (3.8), (3.9), (3.10) und (3.11) gegeben. Wie schon im Kapiteltext bemerkt: Es lohnt sich eher nicht, diese Formeln alle auswendig zu lernen – bei Bedarf schlägt man sie in Formelsammlungen nach. Einige Spezialfälle, insbesondere für Funktionen, die nur von r abhängen, wären aber brauchbar zu wissen.
- Der *Gauß'sche Integralsatz* stellt einen Zusammenhang her zwischen dem Volumenintegral über die Quellen eines Vektorfeldes und dessen Fluss durch die Oberfläche,

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{j} \, dV = \oint_{\partial V} \mathbf{j} \circ d\mathbf{F}.$$

- Der *Stoke'sche Integralsatz* stellt einen Zusammenhang her zwischen dem geschlossenen Wegintegral (der Zirkulation) über ein Vektorfeld und dem Fluss der Wirbel dieses Feldes durch eine beliebige Fläche, deren Rand dieser Weg ist,

$$\oint_{\partial F} \mathbf{A} \circ d\mathbf{r} = \int_F \operatorname{rot} \mathbf{A} \circ d\mathbf{F}.$$

- Mittels partieller Integration erhält man aus dem Gauß'schen Integralsatz die beiden Integralformeln von Green, deren Nummerierung in der Literatur uneinheitlich ist,

$$\int_V [\phi \Delta \psi + (\mathbf{grad} \phi) \circ (\mathbf{grad} \psi)] dV = \oint_{\partial V} \phi \partial_n \psi dF,$$

$$\int_V [\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi] dV = \oint_{\partial V} [\phi \partial_n \psi - \psi \partial_n \phi] dF.$$

- Ist ein Vektorfeld \mathbf{E} auf ganz \mathbb{R}^3 definiert und wirbelfrei, so existiert ein *skalares Potenzial* ϕ mit $\mathbf{E} = \mathbf{grad} \phi$. Dieses skalare Potenzial ist allerdings nicht eindeutig: Man kann eine beliebige Konstante zu ϕ addieren, ohne dadurch \mathbf{E} zu ändern. Eine Möglichkeit, um ϕ zu berechnen, ist durch

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \circ d\mathbf{r}'$$

gegeben; die Wahl des Anfangspunkts \mathbf{r}_0 entspricht dabei der Wahl des konstanten Summanden. Wegintegrale über \mathbf{E} sind dann unabhängig vom genauen Verlauf des Weges (also nur abhängig vom Anfangs- und Endpunkt), geschlossene Wegintegrale verschwinden.

- Ist ein Vektorfeld \mathbf{E} nur auf einer Teilmenge des \mathbb{R}^3 definiert, so existiert nur dann ein (bis auf die Wahl des Anfangspunkts) eindeutiges skalares Potenzial, wenn die Teilmenge ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist. Für Details sei hier auf die Zusammenfassung in Abschn. 3.3.1 verwiesen.
- Ist ein Vektorfeld \mathbf{B} auf ganz \mathbb{R}^3 definiert und quellenfrei, so existiert ein *Vektorpotenzial* \mathbf{A} mit $\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$. Dieses Vektorpotenzial ist allerdings nicht eindeutig: Man kann den Gradienten eines beliebigen skalaren Felds zu \mathbf{A} addieren, ohne dadurch \mathbf{B} zu ändern. Eine Möglichkeit, um \mathbf{A} zu berechnen, ist durch

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int_0^1 \mathbf{B}(\alpha \mathbf{r}) \times \alpha \mathbf{r} d\alpha$$

gegeben; eine andere (weniger wichtige) Möglichkeit ist (3.24).

3.5 Aufgaben

3.1 Leite das Ergebnis (3.2) her, indem du über die Oberfläche eines Würfels mit Seitenlänge $2a$ integrierst, dessen Mittelpunkt \mathbf{r} ist und dessen Kanten parallel zu den Koordinatenachsen sind.

Lösung

Die sechs Seitenflächen des Würfels können wir parametrisieren durch

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y + a\mathbf{e}_z & -a \leq x', y' \leq a, \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + x'\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y - a\mathbf{e}_z & -a \leq x', y' \leq a, \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + x'\mathbf{e}_x + a\mathbf{e}_y + z'\mathbf{e}_z & -a \leq x', z' \leq a, \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + x'\mathbf{e}_x - a\mathbf{e}_y + z'\mathbf{e}_z & -a \leq x', z' \leq a, \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + a\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y + z'\mathbf{e}_z & -a \leq y', z' \leq a, \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - a\mathbf{e}_x + y'\mathbf{e}_y + z'\mathbf{e}_z & -a \leq y', z' \leq a. \end{aligned}$$

Die infinitesimalen Flächenvektoren $d\mathbf{F}$ sind jeweils gegeben durch $\mathbf{e}_z dx' dy'$, $-\mathbf{e}_z dx' dy'$, $\mathbf{e}_y dx' dz'$, $-\mathbf{e}_y dx' dz'$, $\mathbf{e}_x dy' dz'$ und $-\mathbf{e}_x dy' dz'$. Damit ist insgesamt

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{r}' \circ d\mathbf{F}' &= \int_{-a}^a dx' \int_{-a}^a dy' (z + a) - \int_{-a}^a dx' \int_{-a}^a dy' (z - a) \\ &\quad + \int_{-a}^a dx' \int_{-a}^a dz' (y + a) - \int_{-a}^a dx' \int_{-a}^a dz' (y - a) \\ &\quad + \int_{-a}^a dy' \int_{-a}^a dz' (x + a) - \int_{-a}^a dy' \int_{-a}^a dz' (x - a) \\ &= 2a \left(\int_{-a}^a dx' \int_{-a}^a dy' + \int_{-a}^a dx' \int_{-a}^a dz' + \int_{-a}^a dy' \int_{-a}^a dz' \right) \\ &= 24a^3. \end{aligned}$$

Andererseits ist natürlich $\Delta V = 9a^3$. Damit folgt

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{8a^3} \cdot 24a^3 = 3,$$

in völliger Übereinstimmung mit der Rechnung mithilfe der Kugeloberfläche – und natürlich auch mit der direkten Berechnung mittels partieller Ableitungen.

3.2 Berechne analog zur Herleitung von (3.6) auch die anderen beiden Komponenten der Rotation für das Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{r}$.

Lösung

Wir wählen zunächst $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$ und als Fläche ein Quadrat mit Seitenlänge $2a$ mit Seitenkanten parallel zur y - und z -Achse, sodass der Punkt mit Ortsvektor \mathbf{r} genau der Mittelpunkt ist. Wieder ist $\Delta F = 4a^2$, und der Rand der Fläche besteht aus vier Strecken, die wir nun folgendermaßen parametrisieren können:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + y' \mathbf{e}_y + a \mathbf{e}_z & -a \leq y' \leq a, \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - a \mathbf{e}_y + z' \mathbf{e}_z & -a \leq z' \leq a, \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + y' \mathbf{e}_y - a \mathbf{e}_z & -a \leq y' \leq a, \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + a \mathbf{e}_y + z' \mathbf{e}_z & -a \leq z' \leq a. \end{aligned}$$

Auf diesen vier Strecken haben wir dann die Feldstärken und die infinitesimalen Wegelemente

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}') &= \omega \left(-(y + y') \mathbf{e}_x + x \mathbf{e}_y \right), & \mathbf{dr}' &= \mathbf{e}_y dy', \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}') &= \omega \left(-(y - a) \mathbf{e}_x + x \mathbf{e}_y \right), & \mathbf{dr}' &= \mathbf{e}_z dz', \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}') &= \omega \left(-(y + y') \mathbf{e}_x + x \mathbf{e}_y \right), & \mathbf{dr}' &= \mathbf{e}_y dy', \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}') &= \omega \left(-(y + a) \mathbf{e}_x + x \mathbf{e}_y \right), & \mathbf{dr}' &= \mathbf{e}_z dz'. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\oint \mathbf{A} \circ \mathbf{dr}' = \omega \int_a^{-a} x dy' + \omega \int_a^{-a} 0 dz' + \omega \int_{-a}^a x dy' + \omega \int_{-a}^a 0 dz' = 0,$$

also

$$\mathbf{n} \circ \mathbf{rot} \mathbf{A} = (\mathbf{rot} \mathbf{A})_x = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{4a^2} \cdot 0 = 0.$$

Völlig analog zeigt man auch $(\mathbf{rot} \mathbf{A})_y = 0$; insgesamt folgt also $\mathbf{rot} \mathbf{A} = 2\omega \mathbf{e}_z$, in völliger Übereinstimmung mit dem Ergebnis, das man auch mittels partieller Ableitungen erhält.

3.3

- (a) Was ergibt sich aus der Integraldarstellung (3.1) der Divergenz, wenn das Vektorfeld gegeben ist durch $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} f(\mathbf{r})$ mit einem konstanten Vektor \mathbf{a} und einem skalaren Feld f ? Was ergibt sich für $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ mit einem Vektorfeld \mathbf{A} ? (Tipp: Verwende die Produktregeln aus Abschn. 1.1.6).
- (b) Beweise analog zu (a) folgende Formeln:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{grad} f = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \oint_{\partial F} f(\mathbf{r}) \mathbf{dr}, \quad (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{B} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \oint_{\partial F} \mathbf{dr} \times \mathbf{B},$$

wobei \mathbf{n} jeweils senkrecht auf der betrachteten Fläche ΔF steht und vom Weg in mathematisch positiver Richtung umlaufen wird.

Lösung

(a) Eingesetzt (3.1) haben wir zunächst

$$\operatorname{div}(\mathbf{a} f(\mathbf{r})) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \oint_{\partial V} \mathbf{a} f \circ d\mathbf{F}.$$

Links wenden wir eine der Produktregeln der Vektoranalysis ab, rechts nutzen wir aus, dass wir den konstanten Vektor \mathbf{a} vor das Integral und den Grenzwert ziehen können,

$$\mathbf{a} \circ \operatorname{grad} f(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \circ \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \oint_{\partial V} f d\mathbf{F}.$$

Da \mathbf{a} beliebig ist, können wir der Reihe nach \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y und \mathbf{e}_z einsetzen und sehen damit, dass alle Komponenten des Gradienten jeweils einzeln durch einen entsprechenden Grenzwert bestimmt sind. Insgesamt folgt also die Integraldarstellung

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \oint_{\partial V} f d\mathbf{F},$$

die allerdings für eine konkrete Berechnung des Gradienten in krummlinigen Koordinaten nicht gut geeignet ist: In $d\mathbf{F}$ auf der rechten Seite müsste man die Ortsabhängigkeit der Einheitsvektoren berücksichtigen.

Setzen wir dagegen $\mathbf{j} = \mathbf{a} \times \mathbf{A}$ ein, so haben wir zunächst

$$\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{A}(\mathbf{r})) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \oint_{\partial V} (\mathbf{a} \times \mathbf{A}) \circ d\mathbf{F}.$$

Links verwenden wir wieder eine Produktregel, rechts die Vertauschbarkeit der Vektoren in einem Spatprodukt. Dann erhalten wir

$$-\mathbf{a} \circ \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = - \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \oint_{\partial V} (d\mathbf{F} \times \mathbf{A}) \circ \mathbf{a} = -\mathbf{a} \circ \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \oint_{\partial V} (d\mathbf{F} \times \mathbf{A}),$$

wobei wir noch ausgenutzt haben, dass das Skalarprodukt kommutativ ist, und den konstanten Vektor wieder herausgezogen haben. Somit folgt insgesamt eine Darstellung der Rotation als geschlossenes Oberflächenintegral,

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \oint_{\partial V} (d\mathbf{F} \times \mathbf{A}),$$

die aber aus denselben Gründen wie oben nicht brauchbar ist, um daraus eine Darstellung in krummlinigen Koordinaten abzuleiten.

- (b) Wir verwenden analog zu (a) den Ansatz $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} f(\mathbf{r})$ mit konstantem \mathbf{a} , setzen diesmal aber in (3.5) ein,

$$\mathbf{n} \circ \mathbf{rot}(\mathbf{a} f(\mathbf{r})) = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\partial F} \mathbf{a} f \circ d\mathbf{r}.$$

Mit einer der Produktregeln folgt

$$\mathbf{n} \circ (\mathbf{grad} f(\mathbf{r}) \times \mathbf{a}) = \mathbf{a} \circ \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\partial F} f d\mathbf{r},$$

und wieder mit der Vertauschbarkeit von Vektoren im Spatprodukt ergibt sich

$$\mathbf{a} \circ (\mathbf{n} \times \mathbf{grad} f(\mathbf{r})) = \mathbf{a} \circ \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\partial F} f d\mathbf{r},$$

also eine Darstellung des Gradienten mittels eines geschlossenen Wegintegrals,

$$\mathbf{n} \times \mathbf{grad} f(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\partial F} f d\mathbf{r}.$$

Mit $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$ in (3.5) folgt dagegen

$$\mathbf{n} \circ \mathbf{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\partial F} (\mathbf{a} \times \mathbf{B}) \circ d\mathbf{r},$$

also

$$\mathbf{n} \circ (-[\mathbf{a} \circ \nabla] \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \mathbf{a} [\nabla \circ \mathbf{B}(\mathbf{r})]) = -\mathbf{a} \circ \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\partial F} d\mathbf{r} \times \mathbf{B}.$$

Mit „bac-cab“ können wir die linke Seite zusammenfassen,

$$\mathbf{n} \circ (\nabla \times [\mathbf{a} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})]) = -\mathbf{a} \circ \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\partial F} d\mathbf{r} \times \mathbf{B},$$

da \mathbf{a} ja konstant ist. Wieder mit der Vertauschbarkeit im Spatprodukt erhalten wir dann

$$(\mathbf{n} \times \nabla) \circ (\mathbf{a} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) = -\mathbf{a} \circ \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\partial F} d\mathbf{r} \times \mathbf{B}$$

und mit der Antikommutativität des Vektorprodukts

$$-(\mathbf{n} \times \nabla) \circ (\mathbf{B}(\mathbf{r}) \times \mathbf{a}) = -\mathbf{a} \circ \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\partial F} d\mathbf{r} \times \mathbf{B}.$$

Nochmals mit der Vertauschbarkeit im Spatprodukt folgt schließlich

$$-\mathbf{a} \circ ([\mathbf{n} \times \nabla] \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) = -\mathbf{a} \circ \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\partial F} d\mathbf{r} \times \mathbf{B}$$

und daraus die Behauptung.

3.4 Berechne für die Koordinateneinheitsvektoren in Zylinder- und in Kugelkoordinaten jeweils die Divergenz (vgl. Aufgabe 1.4) und die Rotation.

Lösung

Zunächst ist in Zylinderkoordinaten natürlich $\operatorname{div} \mathbf{e}_z = 0$ und $\operatorname{rot} \mathbf{e}_z = \mathbf{0}$ – wie schon in Aufgabe 1.4 angemerkt: Das ist trivial! Außerdem haben wir mit (3.3):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{e}_\varrho &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial (\varrho \cdot 1)}{\partial \varrho} = \frac{1}{\varrho}, \\ \operatorname{div} \mathbf{e}_\vartheta &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial 1}{\partial \vartheta} = 0. \end{aligned}$$

Mit (3.4) folgt außerdem

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{e}_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \cdot 1)}{\partial r} = \frac{2}{r}, \\ \operatorname{div} \mathbf{e}_\vartheta &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot 1)}{\partial \vartheta} = \frac{\cot \vartheta}{r}. \end{aligned}$$

Dies stimmt alles mit den Ergebnissen aus Aufgabe 1.4 überein.

Nun kommen wir zur Rotation. Mit (3.7) und (3.8) folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{e}_\varrho &= \frac{\partial 1}{\partial z} \mathbf{e}_\varphi - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial 1}{\partial \varphi} \mathbf{e}_z = \mathbf{0}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial (\varrho \cdot 1)}{\partial \varrho} \mathbf{e}_z - \frac{\partial 1}{\partial z} \mathbf{e}_\varrho = \frac{1}{\varrho} \mathbf{e}_z; \end{aligned}$$

mit (3.9) dagegen

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{e}_r &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial 1}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\vartheta - \frac{1}{r} \frac{\partial 1}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{0}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{e}_\vartheta &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot 1)}{\partial r} \mathbf{e}_\varphi - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial 1}{\partial \varphi} \mathbf{e}_r = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\varphi, \\ \operatorname{rot} \mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial (\sin \vartheta \cdot 1)}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot 1)}{\partial r} \mathbf{e}_\vartheta = \frac{\cot \vartheta}{r} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \mathbf{e}_\vartheta. \end{aligned}$$

3.5 Berechne $\Delta (x^2 y^2 z^2)$ in kartesischen, Zylinder- und Kugelkoordinaten.

Lösung

In kartesischen Koordinaten ist

$$\partial_x^2 (x^2 y^2 z^2) = 2y^2 z^2, \quad \partial_y^2 (x^2 y^2 z^2) = 2x^2 z^2, \quad \partial_z^2 (x^2 y^2 z^2) = 2x^2 y^2$$

und somit

$$\Delta (x^2 y^2 z^2) = 2 (y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2).$$

In Zylinderkoordinaten ist zunächst $x^2 y^2 z^2 = \varrho^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi z^2$. Mit (3.10) folgt

$$\Delta_\varrho (x^2 y^2 z^2) = \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho (\varrho \partial_\varrho \varrho^4) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi z^2 = 16 \varrho^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi z^2,$$

$$\Delta_\varphi (x^2 y^2 z^2) = \varrho^4 z^2 \partial_\varphi^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = 2 \varrho^4 (\sin^4 \varphi - 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \cos^4 \varphi) z^2$$

$$\Delta_\varphi (x^2 y^2 z^2) = \varrho^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \partial_z^2 z^2 = 2 \varrho^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$$

und damit

$$\begin{aligned} \Delta (x^2 y^2 z^2) &= 2 \varrho^2 (\sin^4 \varphi + 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \cos^4 \varphi) z^2 + 2 \varrho^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \\ &= 2 \varrho^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^2 z^2 + 2 \varrho^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \\ &= 2 \varrho^2 z^2 + 2 \varrho^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi, \end{aligned}$$

was wieder auf $2 (y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2)$ führt.

In Kugelkoordinaten haben wir dagegen

$$x^2 y^2 z^2 = r^6 \sin^4 \vartheta \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi$$

und damit

$$\begin{aligned} \Delta_r (x^2 y^2 z^2) &= \frac{1}{r} \partial_r^2 (r \cdot r^6) \sin^4 \vartheta \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \\ &= 42 r^4 \sin^4 \vartheta \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_\vartheta (x^2 y^2 z^2) &= r^6 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \partial_\vartheta \sin^4 \vartheta \cos^2 \vartheta) \\ &= r^6 (16 \sin^2 \vartheta \cos^4 \vartheta - 24 \sin^4 \vartheta \cos^2 \vartheta + 2 \sin^6 \vartheta) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_\varphi (x^2 y^2 z^2) &= r^6 \sin^4 \vartheta \cos^2 \vartheta \cdot \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \partial_\varphi^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \\ &= 2 r^6 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta (\sin^4 \varphi - 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \cos^4 \varphi) \end{aligned}$$

und damit insgesamt

$$\begin{aligned} \Delta (x^2 y^2 z^2) &= r^4 \sin^2 \vartheta (18 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta + 16 \cos^4 \vartheta \\ &\quad + 2 \sin^4 \vartheta - 12 \cos^2 \vartheta) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \\ &\quad + 2 r^4 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi). \end{aligned}$$

Mit $18 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta = 18 \cos^2 \vartheta - 18 \cos^4 \vartheta$ vereinfacht sich dies zunächst zu

$$\begin{aligned} \Delta(x^2 y^2 z^2) &= r^4 \sin^2 \vartheta (18 \cos^2 \vartheta - 2 \cos^4 \vartheta \\ &\quad + 2 \sin^4 \vartheta - 12 \cos^2 \vartheta) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \\ &\quad + 2 r^4 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi). \end{aligned}$$

Mit

$$\sin^4 \vartheta - \cos^4 \vartheta = (\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta) \cdot (\sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta) = \sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta$$

bleibt dann noch

$$\begin{aligned} \Delta(x^2 y^2 z^2) &= r^4 \sin^2 \vartheta (4 \cos^2 \vartheta + 2 \sin^2 \vartheta) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \\ &\quad + 2 r^4 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) \\ &= 2 r^4 \sin^4 \vartheta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \\ &\quad + 2 r^4 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta (\sin^4 \varphi + 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \cos^4 \varphi) \\ &= 2 (r^4 \sin^4 \vartheta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + r^4 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta) \\ &= 2 (\varrho^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \varrho^2 z^2) \end{aligned}$$

und damit wieder $2(y^2 z^2 + x^2 z^2 + x^2 y^2)$.

3.6 Begründe die Formeln (3.13) und (3.16). (*Tipp:* Verwende Aufgabe 3.3.)

Lösung

Es gibt hier zwei mögliche Begründungen, die ich beide nicht im Detail ausführe, da prinzipiell klar sein sollte, wie man es formulieren könnte.

- Entweder setzt man, wie in Aufgabe 3.3, in den Gauß'schen bzw. Stoke'schen Satz jeweils $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}\phi(\mathbf{r})$ oder $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ bzw. $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}\phi(\mathbf{r})$ oder $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$ ein, jeweils mit konstantem Vektor \mathbf{a} , und vereinfacht die entstehenden Ausdrücke dann.
- Oder man geht von den Integraldarstellungen, die man in Aufgabe 3.3 erhalten hatte, aus und argumentiert dann genauso wie bei der Herleitung des Gauß'schen bzw. des Stoke'schen Satzes: Einen Körper kann man sich aus unendlich vielen infinitesimal kleinen Volumina zusammengesetzt vorstellen, eine Fläche aus unendlich vielen infinitesimal kleinen Teilflächen. Addiert man alles auf, so heben sich an den Grenzflächen bzw. den Grenzlinien die Beiträge der Oberflächenintegrale bzw. der geschlossenen Wegintegrale jeweils gegenseitig weg, sodass am Schluss jeweils nur noch das Integral über die äußere Oberfläche bzw. den äußeren Weg übrigbleibt.

3.7 Berechne den Fluss des Vektorfelds $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ durch die Oberfläche

- (a) eines Würfels mit Kantenlänge $2a$, dessen Mittelpunkt der Ursprung ist und dessen Kanten parallel zu den Koordinatenachsen sind, und
- (b) einer Kugel um den Ursprung mit Radius r_0 .

Vergleiche mit dem Ergebnis, das du mithilfe des Gauß'schen Satzes (3.12) erhältst. Welche allgemeine Aussage zum Fluss von \mathbf{r} durch eine geschlossene Oberfläche ist also möglich?

Lösung

- (a) Die Rechnung verläuft praktisch genauso wie in Aufgabe 3.1, nur einfacher, weil hier der Mittelpunkt ja einfach der Ursprung ist. Wir erhalten somit

$$\oint_{\partial \text{Würfel}} \mathbf{r} \circ d\mathbf{F} = 24a^3.$$

Aus dem Gauß'schen Satz folgt dagegen deutlich leichter dasselbe Ergebnis,

$$\oint_{\partial \text{Würfel}} \mathbf{r} \circ d\mathbf{F} = \int_{\text{Würfel}} \operatorname{div} \mathbf{r} \, dV = 3 \int_{\text{Würfel}} dV = 3 \cdot (2a)^3 = 24a^3.$$

- (b) Das Oberflächenintegral ist hier leicht,

$$\oint_{\partial \text{Kugel}} \mathbf{r} \circ d\mathbf{F} = \int r_0 \mathbf{e}_r \circ r_0^2 \mathbf{e}_r \, d\Omega = 4\pi r_0^3.$$

Mit dem Gauß'schen Satz ist es aber auch diesmal noch etwas einfacher,

$$\oint_{\partial \text{Kugel}} \mathbf{r} \circ d\mathbf{F} = \int_{\text{Kugel}} \operatorname{div} \mathbf{r} \, dV = 3 \int_{\text{Kugel}} dV = 3 \cdot \frac{4\pi}{3} r_0^3 = 4\pi r_0^3.$$

Mit dem Gauß'schen Satz folgt sogar allgemein, dass der Fluss dieses Vektorfelds durch die Oberfläche *jedes* Körpers gleich dem Dreifachen seines Volumens ist – völlig unabhängig von der Form des Körpers und seiner Lage im Raum!

3.8 Berechne den Fluss von $\mathbf{rot} \mathbf{A}$ mit dem Vektorfeld $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \omega \mathbf{e}_z \times \mathbf{r} = \omega \varrho \mathbf{e}_\varphi$ durch

- (a) eine Kreisscheibe in der x - y -Ebene um den Ursprung mit Radius r_0 (Normalenvektor nach oben) und
- (b) die Halbkugel um den Ursprung mit Radius r_0 im oberen Halbraum (Normalenvektor nach außen).

Vergleiche mit dem Ergebnis, das du mithilfe des Stoke'schen Satzes (3.15) erhältst.

Lösung

Zunächst ist $\mathbf{rot} \mathbf{A} = 2\omega \mathbf{e}_z$, wie wir schon mehrfach gezeigt haben. Damit ist der Fluss:

(a)

$$\int_{\text{Kreisscheibe}} \mathbf{rot} \mathbf{A} \circ d\mathbf{F} = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} 2\omega \mathbf{e}_z \circ r \, dr \, d\varphi \mathbf{e}_z = 2\pi\omega r_0^2,$$

(b)

$$\begin{aligned} \int_{\text{Halbkugel}} \mathbf{rot} \mathbf{A} \circ d\mathbf{F} &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 2\omega \mathbf{e}_z \circ r_0^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \mathbf{e}_r \\ &= 2\omega \cdot 2\pi r_0^2 \cdot \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta \\ &= 2\omega \cdot 2\pi r_0^2 \cdot \int_0^1 u \, du = 2\pi\omega r_0^2. \end{aligned}$$

Dass die Ergebnisse in (a) und (b) identisch sind, war übrigens schon aus dem Kapiteltext zu erwarten: Kreisscheibe und Halbkugel haben ja dieselbe Randlinie, und man kann die eine Fläche in die andere umformen.

Die Randlinie ist natürlich in beiden Fällen die Kreislinie in der x - y -Ebene um den Ursprung mit Radius r . Mit dem Stoke'schen Satz folgt:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{rot} \mathbf{A} \circ d\mathbf{F} &= \oint_{\text{Kreislinie}} \mathbf{A} \circ d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \omega r_0 \mathbf{e}_\varphi \circ r_0 \mathbf{e}_\varphi \, d\varphi \\ &= \omega r_0^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\omega r_0^2, \end{aligned}$$

in völliger Übereinstimmung mit den oben berechneten Flüssen.

3.9 Gegeben ist das (auf ganz \mathbb{R}^3) definierte Vektorfeld

$$\mathbf{E}(x, y, z) = (\cos(x)z + e^{2y}) \mathbf{e}_x + (2xe^{2y} + z) \mathbf{e}_y + (\sin(x) + y) \mathbf{e}_z.$$

Zeige, dass $\mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$ ist, und ermittle ein skalares Potenzial ϕ zu diesem Vektorfeld

- (a) durch direktes Lösen der partiellen Differenzialgleichungen und
- (b) durch Berechnen eines passenden Wegintegrals.

Lösung

Man berechnet schnell

$$\begin{aligned}(\mathbf{rot} \mathbf{E})_x &= \frac{\partial (\sin(x) + y)}{\partial y} - \frac{\partial (2xe^{2y} + z)}{\partial z} = 0, \\(\mathbf{rot} \mathbf{E})_y &= \frac{\partial (\cos(x)z + e^{2y})}{\partial z} - \frac{\partial (\sin(x) + y)}{\partial x} = 0, \\(\mathbf{rot} \mathbf{E})_z &= \frac{\partial (2xe^{2y} + z)}{\partial x} - \frac{\partial (\cos(x)z + e^{2y})}{\partial y} = 0.\end{aligned}$$

(a) Wir haben zunächst

$$\partial_x \phi(x, y, z) = \cos(x)z + e^{2y},$$

also

$$\phi(x, y, z) = \sin(x)z + xe^{2y} + f(y, z).$$

Aus

$$\partial_y \phi(x, y, z) = 2xe^{2y} + z$$

folgt dann

$$\partial_y f(y, z) = 2xe^{2y},$$

also $f(y, z) = yz + g(z)$ und damit

$$\phi(x, y, z) = \sin(x)z + xe^{2y} + yz + g(z).$$

Mit

$$\partial_z \phi(x, y, z) = \sin(x) + y$$

ergibt sich dann $\partial_z g(z) = 0$, also $g(z) = \text{const}$ und damit schließlich

$$\phi(x, y, z) = \sin(x)z + xe^{2y} + yz + \text{const}.$$

(b) Der Anfangspunkt ist beliebig wählbar (bei einem anderen Anfangspunkt ändert sich ϕ ja nur um eine Konstante) und der Weg ebenfalls (wegen $\mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$). Wir können für das Wegintegral deshalb beispielsweise einfach drei Strecken parallel zu den Achsen wählen, von $\mathbf{0}$ zu \mathbf{r} :

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z) &= \int_0^x \mathbf{E}(x', 0, 0) \circ \mathbf{e}_x dx' + \int_0^y \mathbf{E}(x, y', 0) \circ \mathbf{e}_y dy' \\&\quad + \int_0^z \mathbf{E}(x, y, z') \circ \mathbf{e}_z dz' \\&= \int_0^x 1 dx' + \int_0^y 2xe^{2y'} dy' + \int_0^z (\sin(x) + y) dz' \\&= x + (xe^{2y} - x) + \sin(x)z + yz = \sin(x)z + xe^{2y} + yz,\end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis in (a).

3.10 Gegeben ist das Vektorfeld

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \begin{cases} B_0 \mathbf{e}_z & \varrho \leq \varrho_0 \\ \mathbf{0} & \varrho > \varrho_0 \end{cases}.$$

Zeige, dass $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ ist, und ermittle ein Vektorpotenzial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ zu \mathbf{B} mittels (3.25).

Lösung

$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ folgt mit der Formel für die Divergenz in Zylinderkoordinaten sofort daraus, dass \mathbf{B} nur in z -Richtung zeigt, aber von z unabhängig ist.

Bei der Berechnung von \mathbf{A} haben wir zunächst für $\varrho \leq \varrho_0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \int_0^1 B_0 \mathbf{e}_z \times \alpha \mathbf{r} \, d\alpha \\ &= B_0 \varrho \mathbf{e}_\varphi \int_0^1 \alpha \, d\alpha = \frac{1}{2} B_0 \varrho \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned}$$

Wenn wir das Parameterintegral für $\varrho > \varrho_0$ berechnen, müssen wir allerdings darauf achten, für welche Werte von α gilt, dass $\alpha \mathbf{r}$ noch im Bereich mit $\varrho \leq \varrho_0$ liegt – denn nur dort ist ja $\mathbf{B}(\alpha \mathbf{r}) \neq \mathbf{0}$. Dies ist aber leicht zu ermitteln: Die radiale Komponente von $\alpha \mathbf{r}$ ist ja einfach durch $\alpha \varrho$ gegeben, also muss $\alpha \varrho \leq \varrho_0$ gelten und damit $\alpha \leq \varrho_0/\varrho$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \int_0^{\varrho_0/\varrho} B_0 \mathbf{e}_z \times \alpha \mathbf{r} \, d\alpha = B_0 \varrho \mathbf{e}_\varphi \int_0^{\varrho_0/\varrho} \alpha \, d\alpha \\ &= B_0 \varrho \mathbf{e}_\varphi \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\varrho_0}{\varrho} \right) = \frac{1}{2} B_0 \frac{\varrho_0^2}{\varrho} \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned}$$

Zusammengefasst ist

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} B_0 \mathbf{e}_\varphi \begin{cases} \varrho & \varrho \leq \varrho_0 \\ \frac{\varrho_0^2}{\varrho} & \varrho > \varrho_0 \end{cases}.$$

3.11 Zeige: Wegintegrale der Form

$$\int_{r_0}^r \phi(\mathbf{r}') \, d\mathbf{r}' \quad \text{bzw.} \quad \int_{r_0}^r \mathbf{A}(\mathbf{r}') \times d\mathbf{r}'$$

sind (in einem einfach zusammenhängenden Gebiet) nur dann vom Weg unabhängig, wenn ϕ bzw. \mathbf{A} konstant sind. (*Tipp:* Verwende die Ergebnisse aus Abschn. 3.3.1 und gehe analog zu Aufgabe 3.3 vor.)

Lösung

Analog zu Aufgabe 3.3 setzen wir zunächst $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}\phi(\mathbf{r})$ mit einem konstanten Vektor \mathbf{a} . Aus Abschn. 3.3.1 wissen wir, dass

$$\int_{r_0}^r \mathbf{E}(\mathbf{r}') \circ d\mathbf{r}'$$

nur dann vom Weg unabhängig ist, wenn $\mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$ ist. Also folgt:

$$\int_{r_0}^r \mathbf{a}\phi(\mathbf{r}') \circ d\mathbf{r}' = \mathbf{a} \circ \int_{r_0}^r \phi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

ist nur dann vom Weg unabhängig, wenn überall $\mathbf{rot}(\mathbf{a}\phi) = \mathbf{0}$ ist. Letzteres können wir mit einer der Produktregeln aber umschreiben zu $\mathbf{grad} \phi \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Wenn das Wegintegral über ϕ vom Weg unabhängig wäre, dann müsste natürlich auch

$$\mathbf{a} \circ \int_{r_0}^r \phi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

für *alle* konstanten Vektoren \mathbf{a} vom Weg unabhängig sein. Also müsste für *alle* \mathbf{a} gelten, dass überall $\mathbf{grad} \phi \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ ist. Das kann aber natürlich nur dann sein, wenn überall $\mathbf{grad} \phi = \mathbf{0}$ ist – sprich: ϕ ist konstant.

Setzen wir stattdessen $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$, so können wir ganz analog argumentieren: Wäre das Integral

$$\int_{r_0}^r d\mathbf{r}' \times \mathbf{A}(\mathbf{r}')$$

wegunabhängig, dann müssten auch alle Integrale

$$\mathbf{a} \circ \int_{r_0}^r \mathbf{A}(\mathbf{r}') \times d\mathbf{r}' = \int_{r_0}^r (\mathbf{a} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}')) \circ d\mathbf{r}'$$

wegunabhängig sein. Dafür müsste aber überall $\mathbf{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{A}) = \mathbf{0}$ für alle \mathbf{a} sein, woraus $-(\mathbf{a} \circ \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{a}(\nabla \circ \mathbf{A}) = \mathbf{0}$ folgt. Hier sieht man nicht ganz so leicht, dass dies nur klappt, wenn \mathbf{A} konstant ist, aber man kann ja z. B. für \mathbf{a} kartesische Einheitsvektoren einsetzen. Mit $\mathbf{a} = \mathbf{e}_x$ folgt beispielsweise

$$\partial_x \mathbf{A} = (\operatorname{div} \mathbf{A})\mathbf{e}_x;$$

aus der x -Komponente dieser Gleichung ergibt sich dann $\partial_y A_y + \partial_z A_z = 0$ und $\partial_x A_y = \partial_x A_z = 0$. Verwendet man die anderen beiden Einheitsvektoren, so erhält man $\partial_x A_x + \partial_z A_z = 0$ und $\partial_y A_x = \partial_y A_z = 0$ bzw. $\partial_x A_x + \partial_z A_z = 0$ und $\partial_z A_x = \partial_z A_y = 0$. Daraus folgt dann letztlich, dass alle partiellen Ableitungen verschwinden – sprich: A ist konstant.

Fourier-Analyse – unendliche Summen von Schwingungen

4

Elektrische Stromkreise werden oft zur Verarbeitung elektrischer Signale verwendet, beispielsweise Hoch-, Tief- und Bandpässe, oder auch Differenzier- und Integrierglieder. Die Berechnung der Ausgangssignale ist besonders einfach, wenn man am Eingang (komplexe) harmonische Signale anlegt, da die in den Gleichungen auftretenden Ableitungen und Integrale dann einfach eine Multiplikation des Signals mit einem konstanten Faktor bewirken. Aus demselben Grund sind solche Funktionen auch in der Mathematik wichtig: Mit diesen als Ansatz kann man lineare Differenzialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienzen auf lineare Gleichungssysteme reduzieren – wie ihr eventuell schon in einer Analysis-Vorlesung gelernt habt.

Allerdings sind die allermeisten realen elektrischen Signale natürlich nicht harmonisch. Deshalb ist es naheliegend, zu versuchen, beliebige Signale durch die harmonischen Funktionen auszudrücken. Die grundlegenden Ideen dazu wurden von dem französischen Mathematiker und Physiker *Jean Baptiste Joseph Fourier* (1768–1830) in den Jahren von 1807 bis 1822 erarbeitet, damals allerdings im Zuge von Untersuchungen zur Wärmeleitung. Manchem Leser sind sie eventuell bereits aus der Mechanik bekannt, wo man das beim Thema „Schwingungen“ oft schon bespricht. Weitere Anwendungen finden sich beispielsweise in der Akustik (Schwingungen von Musikinstrumenten), dem Bauingenieurwesen (Schwingungen von Brücken und Gebäuden), der Optik (spezielle Lichtsignale), der Medizin (Analyse von Elektroenzephalogrammen) und vielem mehr, außerdem natürlich in der Mathematik beim Lösen von linearen Differenzialgleichungssystemen.

4.1 Fourier-Reihen

Da die harmonischen Funktionen alle periodisch sind, beginnen wir mit der Diskussion eines periodischen Signals $f(t)$. Außerdem beschränken wir uns zunächst auf reelle Funktionen. Wie so oft ist ein Ansatz mit komplexen Exponentialfunktionen zwar rechnerisch einfacher, aber dennoch hat auch die Verwendung reeller harmo-

nischer Funktionen ihre Vorteile: So können wir beispielsweise erst mal nur gerade Funktionen $f(t)$ betrachten.

4.1.1 Fourier-Reihen für gerade Funktionen

Hat $f(t)$ die Periode T , so haben wir scheinbar nur die gerade harmonische Funktion $g_1(t) = \cos(\omega t)$ mit $\omega = 2\pi/T$ zur Verfügung. Aus dieser Funktion allein kann man aber natürlich nicht beliebige periodische Funktionen zusammensetzen.

Zunächst sollte man sich deshalb klarmachen, dass dies eben nicht die einzige gerade harmonische Funktion mit der Periode T ist: Jede Funktion $g_j(t) = \cos(j\omega t)$ mit $j \in \mathbb{N}^*$ hat dieselbe Periode! (Und außerdem jeweils auch die kürzere Periode $T = 2\pi/(j\omega)$ – das ist hier aber irrelevant.) Zusätzlich sind auch alle konstanten Funktionen harmonisch und periodisch mit beliebiger Periode. Da solche Funktionen ebenso wie die Kosinusfunktionen gerade sind und man $1 = \cos(0 \cdot \omega t)$ schreiben kann, wählen wir für Letzteres die Bezeichnung $g_0(t)$. Unser Ansatz ist damit zunächst

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j g_j(t) = a_0 \cdot 1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\omega t) \quad (4.1)$$

mit zu bestimmenden reellen Konstanten a_j .

Der Ansatz erinnert ein wenig an eine Taylor-Reihe – nur werden in der Reihenentwicklung hier eben die harmonischen, geraden Kosinusfunktionen verwendet statt Potenzfunktionen. Naheliegender wäre es also, wie bei der Taylor-Reihe anzusetzen, dass beide Seiten in allen Ableitungen an einer Stelle übereinstimmen sollen.

Viele in der Elektrotechnik verwendeten Signale sind allerdings nicht differenzierbar oder sogar nicht einmal stetig – man denke an Rechteckimpulse oder Sägezahnspannungen (zumindest in ihrer idealisierten mathematischen Form, die in der Realität so eigentlich nicht auftritt). Deshalb benutzt man hier eine andere Rechenmethode: Integrieren statt Ableiten – das klappt ja auch bei unstetigen Funktionen.

Zunächst bemerken wir, dass, wenn die Funktionen links und rechts in (4.1) übereinstimmen, die Integrale beider Seiten natürlich auch übereinstimmen müssen:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} a_0 dt + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} a_j \cos(j\omega t) dt,$$

wobei wir (naheliegender) über eine Periode integrieren und diese Periode symmetrisch zu null wählen, damit wir im Folgenden die Symmetrie ausnutzen können. Die Integrale über die Kosinusfunktionen verschwinden aber, sodass schließlich nur bleibt

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt.$$

Damit hätten wir schon mal den ersten Koeffizienten berechnet – von unendlich vielen ...

Dass alle anderen Beiträge der Reihe verschwinden, liegt natürlich daran, dass die Kosinusfunktionen in einer Periode jeweils gleiche positive und negative Beiträge liefern. Damit ein Term der Reihe nicht verschwindet, muss also vermieden werden, dass negative Beiträge zum Integral auftreten – was am einfachsten durch Quadrieren erreicht werden kann. Die ganze Reihe zu quadrieren ist allerdings offensichtlich nicht sinnvoll; stattdessen multiplizieren wir Gleichung (4.1) vor dem Integrieren einfach mit $\cos(k\omega t)$, wobei k eine beliebige, aber feste natürliche Zahl ist. Der Summand k der Reihe wird dann zu $a_k \cos^2(k\omega t)$ und liefert damit nur noch einen positiven Beitrag zum Integral, alle anderen Summanden zu $a_j a_k \cos(j\omega t) \cos(k\omega t)$, was weiterhin positive und negative Beiträge liefert. Genauer zeigt man relativ leicht (nachrechnen! *Tipp*: zweimalige partielle Integration)

$$\int_{-T/2}^{T/2} g_j(t) g_k(t) dt = \frac{T}{2} \delta_{jk} \quad \text{für } j, k \in \mathbb{N}^*.$$

Damit folgt sofort:

$$a_j = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) g_j(t) dt \quad \text{für } j \in \mathbb{N}^*.$$

Das Ziel ist also erreicht: In der Reihendarstellung (4.1) sind alle Koeffizienten bestimmt.

4.1.2 Vollständige Fourier-Reihe

Es bleibt noch, die Einschränkung auf gerade Funktionen aufzuheben – indem wir außer den Kosinus- auch Sinusfunktionen verwenden. Außerdem wählen wir nun, abweichend zu oben, $g_0(t) = 1/\sqrt{2}$, da sich mit dieser Wahl die Formeln in (4.4) vereinheitlichen. Eine vollständige Fourier-Reihe ist damit

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j g_j(t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j h_j(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\omega t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(j\omega t) \quad (4.2)$$

mit den Funktionen

$$g_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad g_j(t) = \cos(j\omega t); \quad h_j(t) = \sin(j\omega t) \quad (4.3)$$

für alle $j \in \mathbb{N}^*$. Wegen

$$\begin{aligned}\int_{-T/2}^{T/2} g_j(t) g_k(t) dt &= \frac{T}{2} \delta_{jk}, \\ \int_{-T/2}^{T/2} h_j(t) h_k(t) dt &= \frac{T}{2} \delta_{jk}, \\ \int_{-T/2}^{T/2} g_j(t) h_k(t) dt &= 0\end{aligned}$$

ergeben sich die Koeffizienten dieser doppelten Reihe aus

$$\begin{aligned}a_j &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) g_j(t) dt \text{ für } j \in \mathbb{N} \quad \text{und} \\ b_j &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) h_j(t) dt \text{ für } j \in \mathbb{N}^*.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Beides sollte man nachrechnen – insbesondere auch den Spezialfall a_0 ! Bei Letzterem sollte man auch bemerken, dass er einfach $\sqrt{2}$ -mal dem Mittelwert von $f(t)$ über eine Periode ist.

Die Menge $\{a_j; b_j\}$ der Koeffizienten bzw. ihre Beträge, also die Amplituden der einzelnen harmonischen Funktionen, nennt man das *Fourier-Spektrum* der Funktion f . Die Berechnung dieser Koeffizienten bezeichnet man oft als *Fourier-Analyse* der Funktion, das Zusammensetzen der Funktion aus den einzelnen harmonischen Schwingungen entsprechend als *Fourier-Synthese*. (Und aus der Definition sieht man übrigens sofort, dass die Koeffizienten alle dieselbe Einheit haben wie die Funktion f .)

Das ist eigentlich schon die komplette Theorie der Fourier-Reihen. Zwei wichtige Anmerkungen sind aber noch zu machen:

- Wegen der Periodizität der Funktionen kann man die Integrale auch von c bis $c + T$ laufen lassen mit einer beliebig gewählten reellen Konstante c , ohne etwas an den Ergebnissen zu ändern; dies ist in manchen Rechnungen von Vorteil.
- Aus dem Ansatz (4.2) folgt zwar, dass die Koeffizienten die Gestalt (4.4) haben müssen. Umgekehrt folgt aber *nicht*, dass eine Reihe, wie sie auf der rechten Seite von (4.2) steht, mit Koeffizienten der Gestalt (4.4), wirklich die Funktion

$f(t)$ reproduziert! Anders gesagt: Es ist nicht immer gewährleistet, dass die Reihe auf der rechten Seite konvergiert – und wenn doch, dann konvergiert sie nicht unbedingt in jedem Punkt gegen $f(t)$. Weiter unten werden wir in Beispiel 4.2 näher darauf eingehen.

Beispiel 4.1: „Parabelschwingung“

Betrachten wir als erstes Beispiel eine Folge von nach unten geöffneten Parabeln:

$$x(t) = -\frac{1}{2}at^2 + vt \quad \text{mit} \quad 0 \leq t \leq \frac{2v}{a} \quad \text{und} \quad a, v > 0 \quad (4.5)$$

und periodisch fortgesetzt mit $T = 2v/a$ (vgl. Abb. 4.1). Als elektrisches Signal kommt so etwas zwar wohl eher selten vor – aber in der Mechanik kann man sich darunter beispielsweise einen Ball vorstellen, der ungedämpft immer wieder auf- und abhüpft.

Berechnen wir dafür die Fourier-Koeffizienten. Da $x(t)$ im Intervall $[0; T]$ gegeben ist, bietet sich auch eine Integration von 0 bis T an – d. h., wir wählen $c = 0$. Zunächst a_0 :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T \left(-\frac{1}{2}at^2 + vt \right) \frac{1}{\sqrt{2}} dt \\ &= \frac{a}{v} \left(-\frac{a}{2\sqrt{2}} \int_0^{2v/a} t^2 dt + \frac{v}{\sqrt{2}} \int_0^{2v/a} t dt \right) \\ &= \frac{a}{v} \left(-\frac{4v^3}{3a^2\sqrt{2}} + \frac{2v^3}{a^2\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{2}v^2}{3a}. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten a_j mit $j > 0$ sind ein klein wenig komplizierter. Mit $\omega = 2\pi/T = a\pi/v$ haben wir:

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{2}{T} \int_0^T \left(-\frac{1}{2}at^2 + vt \right) \cos(ja\pi t/v) dt \\ &= \frac{a}{v} \left(-\frac{v^3}{2j^3a^2\pi^3} \int_0^{2j\pi} u^2 \cos(u) du + \frac{v^3}{j^2a^2\pi^2} \int_0^{2j\pi} u \cos(u) du \right). \end{aligned}$$

Mit partiellen Integrationen folgt

$$a_j = -\frac{v^2}{2j^3a\pi^3} \cdot 4j\pi + \frac{v^2}{j^2a\pi^2} \cdot 0 = -\frac{2v^2}{j^2a\pi^2}.$$

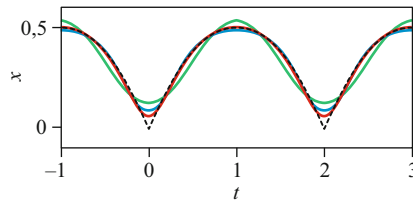


Abb. 4.1 Die in Beispiel 4.1 diskutierte „Parabelschwingung“ für $a = v = 1$ (gestrichelte Linie) und zugehörige Partialsummen der Fourier-Reihe mit den ersten ein bzw. zwei bzw. drei Summanden (grün bzw. blau bzw. rot)

Es bleiben noch die Koeffizienten b_j . Bevor wir wild drauflosrechnen, überlegen wir aber besser erst kurz: $f(t)$ ist nach Konstruktion eine gerade Funktion, die Sinusfunktionen sind dagegen alle ungerade. Alle Integrale über $f(t)$ mal eine Sinusfunktion müssen deshalb verschwinden, d. h., wir haben $b_j = 0$ für alle j ! (Wer’s nicht glaubt, rechnet es gerne nach – wieder mit partiellen Integrationen.) Damit ist die Fourier-Reihe für unsere Parabelschwingung insgesamt

$$x(t) = \frac{v^2}{a} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos(ja\pi t/v)}{j^2} \right).$$

Für $a = v = 1$ sind $f(t)$ und die Partialsummen der Reihe bis $j = 1$ bzw. 2 bzw. 3 in Abb. 4.1 dargestellt. Wir sehen, dass sich bereits für $j = 3$ an den meisten Stellen eine sehr gute Näherung ergibt – nur an den Nullstellen passt es nicht so gut. Wenn man höhere Summanden dazu nimmt, so zeigt sich, dass die Reihe an diesen Stellen nur recht langsam konvergiert. Dies ist typisch für Stellen, an denen die Funktion, die in eine Fourier-Reihe entwickelt wird, nicht differenzierbar ist.

Beispiel 4.2: Rechteckpulse

Das zweite Beispiel sieht sogar einfacher aus als das erste: Wir betrachten ein Spannungssignal, das für die Hälfte der Periode den Wert $-U_0$ hat und für die zweite Hälfte den Wert U_0 , also

$$U(t) = U_0 [-\Theta(-t)\Theta(t + T/2) + \Theta(t)\Theta(T/2 - t)] \quad \text{für } -T/2 \leq t \leq T/2$$

und periodisch fortgesetzt. Die Rechnungen sind entsprechend auch einfacher; da die Funktion ungerade ist, verschwinden alle Koeffizienten a_j , und

es bleibt schließlich nur (nachrechnen!)

$$b_j = \frac{2U_0}{j\pi} [1 - \cos(j\pi)] = \frac{2U_0}{j\pi} [1 - (-1)^j].$$

Es folgt sofort, dass die b_j nur für ungerade j nicht verschwinden (was letztlich daran liegt, dass die Graphen der Funktionen $\sin(j\omega t)$ für gerade j zum Punkt $(T/4; 0)$ symmetrisch sind, für ungerade j dagegen nicht):

$$b_j = \begin{cases} \frac{4U_0}{j\pi} & j = 2k + 1 \\ 0 & j = 2k \end{cases} \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}.$$

Damit ist die Fourier-Reihe

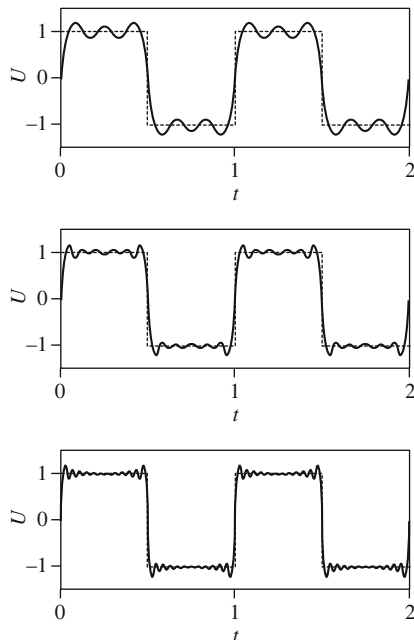
$$U(t) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1) \cdot 2\pi t/T)}{2k+1}.$$

Für $U_0 = T = 1$ sind $f(t)$ und die Partialsummen der Reihe bis $k = 3$ bzw. 6 bzw. 12 in Abb. 4.2 dargestellt. Die Näherung ist hier offensichtlich deutlich schlechter als im ersten Beispiel: Selbst wenn man recht viele Summanden mitnimmt, hat man immer noch recht große Abweichungen. Dies gilt insbesondere an den Unstetigkeitsstellen; hier sind die Partialsummen der Reihe jeweils deutlich zu groß bzw. zu klein. Wenn man höhere Summanden dazu nimmt, so sieht man, dass diese sogenannten *Über-* bzw. *Unterschwinger* weiterhin erhalten bleiben – d. h., an den Unstetigkeitsstellen der Funktion konvergiert die Fourier-Reihe anscheinend nicht!

Über- und Unterschwinger treten nicht nur in diesem speziellen Beispiel auf, sondern allgemein an allen Unstetigkeitsstellen; dies ist als *Gibbs'sches Phänomen* bekannt (nach dem bereits erwähnten Josiah Willard Gibbs, welcher es 1898 veröffentlichte – die bereits 1848 dazu publizierten Arbeiten des englischen Mathematikers *Henry Wilbraham*, 1825–1883, fanden dagegen keine Beachtung).

Mathematisch ausgedrückt: Die Fourier-Reihe einer Funktion konvergiert zwar punktweise, aber im Allgemeinen nur „fast überall“ auch wirklich gegen die Funktion, d. h., an abzählbar vielen Stellen (genau an den Unstetigkeitsstellen) konvergiert die Reihe eben nicht gegen die Funktion – sondern gegen den Mittelwert der Grenzwerte von links und rechts, sofern diese existieren. Vorausgesetzt wird hierbei nur, dass f *quadratintegrabel* ist, d. h., dass das Integral von f^2 bzw. bei komplexen Funktionen $|f|^2$ über eine Periode endlich ist. Da abzählbar viele Punkte eine Men-

Abb. 4.2 Die in Beispiel 4.2 diskutierten Rechteckpulse für $U_0 = T = 1$ (jeweils gestrichelte Linie) und zugehörige Partialsummen der Fourier-Reihe mit den ersten drei bzw. sechs bzw. zwölf Summanden (von oben nach unten, jeweils durchgezogene Linie)



ge vom Maß null sind, folgt für die Partialsummen

$$f_n(t) = \sum_{j=0}^n a_j g_j(t) + \sum_{j=1}^n b_j h_j(t),$$

dass

$$\int_c^{c+T} |f(t) - f_n(t)|^2 dt \rightarrow 0$$

gilt, wenn man Lebesgue-Integrale verwendet (vgl. Abschn. 2.5); dies nennt man *Konvergenz im quadratischen Mittel*.

Ist f dagegen stetig differenzierbar, so konvergieren die Partialsummen nicht nur punktweise überall, sondern sogar gleichmäßig, d. h. überall „gleich schnell“, gegen f .

4.1.3 Andere Schreibweisen

Abschließend muss noch erwähnt werden, dass neben dem oben gezeigten Ansatz noch andere üblich sind: Erstens kann man bei den Funktionen (4.3) die Vorfaktoren auch anders wählen; insbesondere wird oft $g_0(t) = 1$ gesetzt, oder für alle Funktionen werden andere Vorfaktoren benutzt. Damit ändern sich zwar die Koeffizienten, aber die Fourier-Reihe selbst bleibt letztlich dieselbe.

Andererseits werden oft auch andere Grundfunktionen verwendet. Üblich sind insbesondere die *Amplituden-Phasen-Darstellung*

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \sin(j\omega t + \varphi_j) \quad (4.6)$$

mit reellen Koeffizienten A_j und Phasenverschiebungen $0 \leq \varphi_j < 2\pi$ und die *Exponentialdarstellung* mit

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ij\omega t}, \quad (4.7)$$

in der die Koeffizienten c_j im Allgemeinen komplex sind und mit

$$c_j = \frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(t) e^{-ij\omega t} dt \quad (4.8)$$

berechnet werden (auch hier werden oft andere Vorfaktoren verwendet).

In dieser Darstellung ist zu beachten, dass über alle *ganzen* Zahlen j summiert wird, also auch über negative Frequenzen! Die genaue Begründung dafür findet sich in Aufgabe 4.3, wo die Umrechnung der verschiedenen Darstellungen ineinander diskutiert wird. Aber anschaulich kann man es auch so verstehen: Bei den trigonometrischen Funktionen gilt $\cos(-j\omega t) = \cos(j\omega t)$ und $\sin(-j\omega t) = -\sin(j\omega t)$; die Funktionen zu negativen Frequenzen liefern also nichts Neues, sondern sind direkt durch die zu positiven Frequenzen darstellbar (sie sind linear abhängig). Zwischen $e^{ij\omega t}$ und $e^{-ij\omega t}$ besteht dagegen kein so einfacher Zusammenhang – deswegen muss man jeweils beide verwenden.

Beispiel 4.2, fortgesetzt

Wir betrachten dasselbe Spannungssignal wie oben in Beispiel 4.2:

$$U(t) = U_0 [\Theta(t)\Theta(T/2 - t) - \Theta(t - T/2)\Theta(T - t)] \quad \text{für } 0 \leq t \leq T$$

und periodisch fortgesetzt. Nun verwenden wir aber die Exponentialdarstellung. Dies hat einen offensichtlichen Nachteil: Wir können hier nicht mehr mit Symmetrieargumenten begründen, dass ein Teil der Koeffizienten verschwindet. Die Berechnung der Koeffizienten ist aber trotzdem eher noch einfacher; es ergibt sich (nachrechnen!)

$$c_j = \frac{U_0}{i j \pi} [1 - (-1)^j] = \frac{U_0}{i j \pi} \cdot \begin{cases} 2 & j = 2k + 1 \\ 0 & j = 2k \end{cases} \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Die Exponentialfunktion mit komplexem Argument wird hier einfach mit der bekannten Regel für Exponentialfunktionen mit reellem Argument integriert. Näheres zur Integration komplexer Funktionen werden wir in Kap. 6 besprechen.

Damit ist die Fourier-Reihe

$$U(t) = \frac{2U_0}{i\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2k+1) \cdot 2\pi t / T}}{2k + 1}.$$

Dieses Spannungssignal legen wir nun über einen Widerstand der Größe R an einen Kondensator der Kapazität C an. Dabei wählen wir $T = 2\tau = 2RC$, d. h., der Kondensator wird zunächst für die Dauer einer Zeitkonstanten τ in der einen Richtung aufgeladen bzw. entladen, danach genauso lang in der anderen Richtung.

Schon aus der Schule weiß man hoffentlich, dass die Summe der Spannungen U_R am Widerstand und U_C am Kondensator gleich groß sein muss wie die anliegende Spannung und dass $U_R = RI = R\dot{Q}$ sowie $U_C = Q/C$ gilt. Legen wir eine komplexe harmonische Spannung $U_\omega(t) = U_0 e^{i\omega t}$ an, so haben wir also

$$R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = U_0 e^{i\omega t}.$$

Als periodische Lösung dieser Differenzialgleichung erhält man leicht

$$Q_\omega(t) = \frac{CU_0}{1 + i\omega\tau} e^{i\omega t} = \frac{C}{1 + i\omega\tau} U_\omega(t).$$

Mit

$$\omega = (2k + 1) \frac{2\pi}{T} = (2k + 1) \frac{\pi}{\tau}$$

wird dies zu

$$Q_k(t) = \frac{C}{1 + i(2k + 1)\pi} U_k(t).$$

Aus der Fourier-Reihe für $U(t)$ oben erhalten wir (da die Differenzialgleichung linear ist) also sofort die Fourier-Reihe für die Ladung:

$$Q(t) = \frac{2CU_0}{i\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + i(2k + 1)\pi} \frac{e^{i(2k+1)\cdot\pi t/\tau}}{2k + 1}. \quad (4.9)$$

In Aufgabe 4.2 wird gezeigt, dass dies tatsächlich die periodische Auf- und Entladung des Kondensators beschreibt.

4.2 Fourier-Integrale – erst mal nur in einer Dimension

Kein reales Signal ist natürlich jemals wirklich streng periodisch – schon allein deswegen, weil alle realen Signale endlich sind. Die Endlichkeit eines Signals ist allerdings nicht prinzipiell ein Problem für die Fourier-Analyse: Wir können uns das Signal ja einfach periodisch bis ins Unendliche fortgesetzt denken und dann mit dieser Periode, die der Dauer des Signals entspricht, die Fourier-Reihe aufstellen. Die Fourier-Reihe stimmt dann allerdings nur innerhalb der Zeitdauer des Signals mit diesem überein – für alle anderen Zeiten, zu denen das Signal verschwindet, zeigt die Reihe eine Periodizität, die in Wirklichkeit nicht vorhanden ist. Das ist zwar unschön, aber nicht prinzipiell störend.

Wirkliche Probleme machen scheinbar nur unendlich lange Signale. (Mal wieder: So etwas existiert in der Realität natürlich streng genommen nicht, ist in vielen Fällen aber eine sinnvolle Näherung.) Allerdings können wir auch in diesem Fall dieselbe Idee anwenden: Wir nehmen „einfach“ die Dauer des Signals, hier also „unendlich“, als die Periodenlänge an. Wie im Folgenden gezeigt wird, führt dies dazu, dass die Summation der Fourier-Reihe durch eine Integration ersetzt werden muss.

4.2.1 Leiten wir's her

Wir gehen aus von der Relation (4.8) für die Koeffizienten der Exponential-Fourier-Reihe – beim Fourier-Integral verwendet man fast ausschließlich die Exponentialdarstellung, da dies meist die Rechnungen deutlich einfacher macht. Darin setzen wir $c = -T/2$, also

$$c_j = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ij\omega t} dt.$$

Für $T \rightarrow \infty$ geht dies im Allgemeinen gegen null: Die Funktion $f(t)$ wird ja als quadratintegrabel vorausgesetzt; daher ist das Integral über $f(t)$ selbst von $-\infty$ bis $+\infty$ im Allgemeinen endlich. Der Exponentialfaktor hat den Betrag eins, also sollte auch das Integral über $f(t)$ mal den Exponentialfaktor endlich sein. Da aber im Vorfaktor durch T geteilt wird, folgt dann insgesamt $c_j \rightarrow 0$.

Außerdem geht $\omega = 2\pi/T$ ebenfalls gegen null. Wir betrachten deshalb im Folgenden

$$\tilde{c}_j := \frac{c_j}{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ij\omega t} dt,$$

was für $T \rightarrow \infty$ nicht verschwinden sollte. Die Fourier-Reihe (4.7) schreiben wir dementsprechend um zu

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \omega \tilde{c}_j e^{ij\omega t}.$$

Hier wird über unendlich viele Frequenzen $\omega_j := j\omega$ summiert, deren Abstand zueinander

$$\Delta\omega = \omega_{j+1} - \omega_j = \omega$$

ist. Es folgt

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_j e^{i\omega_j t} \Delta\omega \quad \text{mit}$$

$$\tilde{c}_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_j t} dt.$$

Für $T \rightarrow \infty$ gilt $\Delta\omega \rightarrow 0$, und aus der Summe über j wird ein Integral über ω_j . Statt einzelner Koeffizienten \tilde{c}_j für jedes j haben wir dann eine (im Allgemeinen komplexe) Funktion von ω_j . Diese bezeichnet man oft mit \tilde{f} ; wie üblich werden aber auch viele andere Schreibweisen verwendet.

Damit haben wir eigentlich schon alles zusammen – der Rest sind reine Formalitäten: Eine übliche Konvention ist es, den Vorfaktor $1/2\pi$ gleichmäßig auf beide Formeln zu verteilen. Außerdem ist es zumindest in der Physik Standard, die Vorzeichen in den Exponentialfaktoren genau umgedreht zu wählen wie oben. Und schließlich ist es natürlich sinnvoll, einfach ω für die Integrationsvariable zu schreiben statt ω_j . Insgesamt haben wir also

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad \text{mit}$$

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (4.10)$$

Die Funktion $\tilde{f}(\omega)$ nennt man die *Fourier-Transformierte* von $f(t)$ – und umgekehrt; oder man bezeichnet $f(t)$ ausführlicher als die „Fourier-Rücktransformierte“ von $\tilde{f}(\omega)$. Ganz analog zur Fourier-Reihe spricht man auch bei der Berechnung von $\tilde{f}(\omega)$ oft von der *Fourier-Analyse* von $f(t)$. (Und aus der Definition sieht man hier sofort, dass die Einheit von \tilde{f} diejenige von f multipliziert mit der Zeiteinheit ist.)

Der folgende Kasten stellt einige wichtige Formeln für Fourier-Integrale zusammen. Zu beachten ist außerdem (vgl. unsere Herleitung), dass man wie bei der Fourier-Reihe im Allgemeinen voraussetzen muss, dass die zu transformierende Funktion quadratintegrabel ist. Einige Ausnahmen werden in Beispiel 4.5 diskutiert.

Wichtige Eigenschaften der Fourier-Transformation

- Aus der Definition folgt sofort, dass das Fourier-Integral linear ist, also für alle transformierbaren Funktionen f , g und Zahlen α , β gilt:

$$\widetilde{\alpha f + \beta g} = \alpha \tilde{f} + \beta \tilde{g}.$$

- Ebenso sieht man leicht, dass eine Verschiebung der Funktion $g(t) = f(t + a)$ bei der Fourier-Transformierten eine Multiplikation mit einem reinen Phasenfaktor bewirkt:

$$\tilde{g}(\omega) = e^{i\omega a} \tilde{f}(\omega).$$

- Genauso einfach folgt, dass die Fourier-Transformierte der Ableitung einer Funktion gleich einem Produkt der Fourier-Transformierten der Funktion mit der negativen imaginären Kreisfrequenz ist:

$$\widetilde{f'}(\omega) = -i\omega \tilde{f}(\omega).$$

- Transformiert man das komplex Konjugierte einer Funktion, so ändert sich das Vorzeichen der Frequenz:

$$\widetilde{f^*}(\omega) = \tilde{f}(-\omega);$$

für reelle Funktionen folgt also, dass die Fourier-Transformierte immer eine gerade Funktion ist,

$$\tilde{f}(\omega) = \tilde{f}(-\omega).$$

- Die Fourier-Transformierte eines Produkts zweier Funktionen ergibt eine sogenannte *Faltung* der Transformierten:

$$\widetilde{(f \cdot g)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\omega') \tilde{f}(\omega - \omega') d\omega'.$$

- Es gilt der *Satz von Plancherel* (nach dem schweizerischen Mathematiker *Michel Plancherel*, 1885–1967, der ihn 1910 bewies – na ja, zumindest so etwas Ähnliches, das hier ist mal wieder nur die „abgespeckte“ Version für Physiker):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Siehe dazu auch Aufgabe 4.6.

4.2.2 Ein paar Beispiele

Die konkrete Berechnung der Fourier-Transformierten ist oft recht einfach – letztlich sind ja „nur“ Integrale auszuwerten. Trotzdem sind einige Beispiele hier sicher sinnvoll.

Beispiel 4.3: Rechteckpuls

Fangen wir ganz einfach an – mit einem Spannungssignal, das nur zwischen $-T/2$ und $T/2$ den konstanten Wert U_0 hat und ansonsten verschwindet:

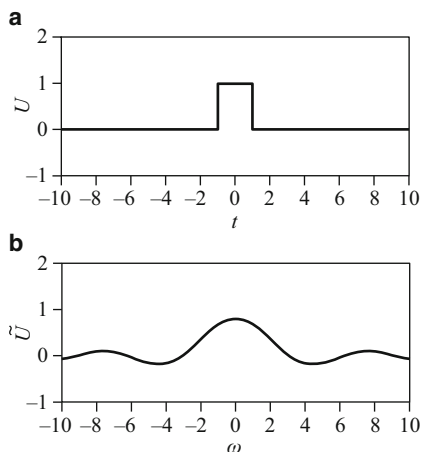
$$U(t) = U_0 \Theta(t + T/2) \Theta(T/2 - t).$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} U_0 e^{i\omega t} dt = \frac{U_0}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{i\omega t}}{i\omega} \right]_{-T/2}^{T/2} \\ &= \frac{U_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\omega T/2} - e^{-i\omega T/2}}{i\omega} = U_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega}. \end{aligned}$$

Wie bereits bei den Fourier-Reihen in Exponentialdarstellung führen wir die komplexen Integrale hier genauso aus wie im Reellen, und wieder sei auf Kap. 6 verwiesen. Das Ergebnis sieht formal sehr ähnlich aus wie bei der Fourier-Reihe zu den periodischen Rechteckpulsen in Beispiel 4.2. Sowohl die Funktion als auch ihre Fourier-Transformierte sind in Abb. 4.3 dargestellt.

Abb. 4.3 Ein Rechteck-Puls (a) und seine Fourier-Transformierte (b). Für die Rechnung und die Funktionsterme siehe Beispiel 4.3; hier wurde $U_0 = 1$ und $T = 2$ gewählt



Beispiel 4.4: Gauß-Kurve

Ein weiteres wichtiges Standardsignal, das in vielen Anwendungen und Rechnungen benutzt wird, ist eine Gauß'sche Glockenkurve:

$$U(t) = U_0 e^{-(t/t_0)^2}.$$

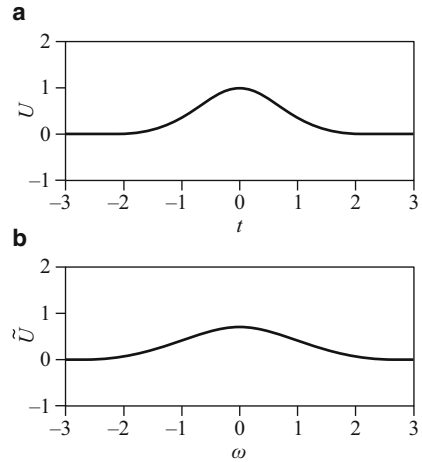
Die Fourier-Transformierte davon ist

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\omega) &= \frac{U_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t/t_0)^2} e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{U_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{t_0^2} [t^2 - i\omega t t_0^2]\right) dt \\ &= \frac{U_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{t_0^2} \left[(t - i\omega t_0^2/2)^2 + \omega^2 t_0^4/4\right]\right) dt \\ &= \frac{U_0 t_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\omega t_0/2)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau, \end{aligned}$$

wobei im Exponenten erst quadratisch ergänzt und dann

$$\tau = \frac{t - i\omega t_0^2/2}{t_0}$$

Abb. 4.4 Eine Gauß'sche Glockenkurve (a) und ihre Fourier-Transformierte (b). Für die Rechnung und die Funktionsterme siehe Beispiel 4.4; hier wurde $U_0 = t_0 = 1$ gewählt



substituiert wurde. Das übrige Integral ergibt nun einfach $\sqrt{\pi}$, wie wir bereits in Kap. 2 gezeigt haben. Das Endresultat ist deshalb

$$\tilde{U}(\omega) = \frac{U_0 t_0}{\sqrt{2}} e^{-(\omega t_0/2)^2}.$$

Nun sehen wir auch, warum die Gauß'sche Glockenkurve ein so interessantes Signal ist: Ihre Fourier-Transformierte ist wieder eine Gauß'sche Glockenkurve! Diese Funktion ist also in gewissem Sinne invariant unter der Fourier-Transformation. Sowohl die Funktion als auch ihre Fourier-Transformierte sind in Abb. 4.4 dargestellt.

Beispiel 4.5: Delta-Puls

In vielen Rechnungen braucht man auch die Fourier-Transformierte einer Delta-Funktion (wer diese „Funktion“ noch nicht kennt, der sollte spätestens jetzt kurz mal in den Anhang schauen):

$$\tilde{\delta}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

also eine Konstante. Durch Rücktransformation folgt die wichtige Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega = 2\pi \delta(t). \quad (4.11)$$

Sowohl die Delta-Funktion selbst als auch ihre Fourier-Transformierte bzw. allgemein konstante Funktionen sind Beispiele dafür, dass die zu transformierende Funktion nicht unbedingt quadratintegrabel sein muss. (Allerdings ist δ ja streng genommen sowieso keine Funktion.)

Man sollte aber bemerken, dass das uneigentliche Integral in (4.11) selbst für $t \neq 0$ gar nicht definiert ist (der Integrand oszilliert ja, also konvergiert das Integral nicht) und sicher nicht null ergibt, wie es eigentlich sollte. Diesem Problem kann man abhelfen, indem man das uneigentliche Integral anders als üblich definiert; genauer wird das in Schwindt (2013) diskutiert. Normalerweise funktioniert die Formel aber in praktisch allen Rechnungen, auch ohne dass man sich Gedanken über die genaue Definition machen muss.

Bei allen drei Beispielen fällt auf, dass die Fourier-Transformierte umso „breiter“ wird, je „schmäler“ die ursprüngliche Funktion ist: Beim Rechteckpuls hat der ursprüngliche Funktionsgraph die Breite T , der zentrale Peak der Fourier-Transformierten (von der ersten negativen zur ersten positiven Nullstelle) dagegen die Breite $2\pi/T$. Bei der Gauß-Kurve ist t_0 ein Maß für die Breite der ursprünglichen Kurve; entsprechend hat die transformierte Kurve die Breite $2/t_0$. Und schließlich hat ein Delta-Puls, dessen Breite null ist, als Fourier-Transformierte eine konstante Funktion, deren Breite unendlich groß ist. Das ist nicht nur auf diese Beispiele beschränkt, sondern allgemein so – beweisen werden wir das aber erst in Aufgabe 5.1.

4.3 Räumliche Fourier-Analyse

In allen bisherigen Herleitungen und Beispielen haben wir nur Funktionen von der Zeit betrachtet (Schwingungen, Spannungssignale und Ähnliches). Aber auch bei Funktionen, die von den räumlichen Koordinaten abhängen, ist die Verwendung der Fourier-Transformation oft sinnvoll: Bei räumlich periodischen Strukturen, beispielsweise Kristallgittern, aber auch bei Wellen, Dünen usw. kann man Fourier-Reihen benutzen; zur Untersuchung von nicht-periodischen räumlichen Strukturen braucht man wieder Fourier-Integrale.

Beides ist, wie bei der zeitlichen Fourier-Analyse, auch wiederum hilfreich beim Lösen von Differenzialgleichungen; in Abschn. 4.3.2 gibt es ein konkretes Beispiel dazu. Wir beschränken uns hier auf die Diskussion der Fourier-Integrale, da diese für die Elektrodynamik deutlich wichtiger sind als die räumlichen Fourier-Reihen.

4.3.1 Allgemeiner Formalismus – und Beispiele

Zunächst schauen wir's uns eindimensional an. Wir ersetzen die Zeit t durch die Koordinate x und die Kreisfrequenz ω entsprechend durch die (Kreis-)Wellenzahl

$k_x = 2\pi/\lambda$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k_x) e^{-ik_x x} dk_x,$$

$$\tilde{f}(k_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ik_x x} dx.$$

Bei der räumlichen Fourier-Transformation ist in der Physik allerdings wieder die andere Vorzeichenkonvention in den Exponenten üblich. (Den Grund dafür sieht man, wenn man sich die mathematische Beschreibung von Wellen anschaut, beispielsweise in Feuerbacher (2017).) Erweitern wir dies nun auf alle drei Koordinaten, so haben wir

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z},$$

$$\tilde{f}(k_x, k_y, k_z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz f(\mathbf{r}) e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z}$$

also zusammengefasst

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int d^3k \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad \text{mit}$$

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int d^3x f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (4.12)$$

Je nach Koordinatensystem ist das Dreifachintegral unterschiedlich schwierig auszuwerten, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel 4.6: In kartesischen Koordinaten

Wir betrachten erst mal die Funktion

$$f(\mathbf{r}) = y e^{-z^2}.$$

Dann zerfällt das räumliche Fourier-Integral in kartesischen Koordinaten in drei einzelne Integrale:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int d^3x f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_x x} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-ik_y y} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} e^{-ik_z z} dz.\end{aligned}$$

Das erste Integral ergibt mit (4.11) eine Delta-Funktion, das dritte ist die Fourier-Transformierte einer Gauß-Kurve, die wir ja auch bereits berechnet haben; also folgt

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \sqrt{2\pi} \delta(k_x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-(k_z/2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-ik_y y} dy.$$

Beim y -Integral bemerken wir, dass sich der Vorfaktor y durch Ableiten der Exponentialfunktion ergibt, also

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\mathbf{k}) &= \delta(k_x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-(k_z/2)^2} \cdot \frac{1}{-i} \frac{d}{dk_y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_y y} dy \\ &= \delta(k_x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-(k_z/2)^2} \cdot i \frac{d}{dk_y} 2\pi \delta(k_y) \\ &= \sqrt{2\pi} i \delta(k_x) \delta'(k_y) e^{-(k_z/2)^2}.\end{aligned}$$

Beispiel 4.7: Ebene Polarkoordinaten und Bessel-Funktionen

Betrachten wir die Funktion

$$f(\varrho) = \Theta(\varrho_0 - \varrho),$$

die eine Kreisscheibe mit Radius ϱ_0 in der x - y -Ebene um den Ursprung beschreibt. Die Fourier-Transformierte davon ist

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2\pi} \int \Theta(\varrho_0 - \varrho) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^2x \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\varrho_0} \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-ik_\varrho \varrho \cos \varphi} \\ &= \frac{1}{2\pi k_\varrho^2} \int_0^{k_\varrho \varrho_0} u du \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-iu \cos \varphi},\end{aligned}$$

wobei wir die Symmetrie ausgenutzt haben, um das Koordinatensystem so zu drehen, dass \mathbf{k} in x -Richtung zeigt, und anschließend passend substituiert haben. Dieses Doppelintegral sieht eigentlich nicht so schwer aus – leider kann man es aber nicht mittels der elementaren Funktionen ausdrücken. Wie man einer Formelsammlung oder Mathematiksoftware entnimmt, ergibt sich zunächst für das Winkelintegral

$$\tilde{f}(k_\varrho) = \frac{1}{k_\varrho^2} \int_0^{k_\varrho \varrho_0} u J_0(u) du$$

mit der sogenannten Bessel-Funktion erster Art und nullter Ordnung J_0 . Auch das übrige Radiusintegral kann mittels Formelsammlung oder Software ausgeführt werden; schließlich bleibt

$$\tilde{f}(k_\varrho) = \frac{\varrho_0 J_1(k_\varrho \varrho_0)}{k_\varrho},$$

wobei J_1 nun die sogenannte Bessel-Funktion erster Art und erster Ordnung ist. Zur Veranschaulichung sind die Funktion und ihre Fourier-Transformierte in Abb. 4.5 dargestellt.

Dieses Beispiel mag reichlich künstlich konstruiert erscheinen – aber das Ergebnis ist beispielsweise wichtig für die abbildende Optik: Es beschreibt die Lichtbeugung an kreisförmigen Öffnungen, die bei praktisch jedem Teleskop und Mikroskop auftritt. Außerdem ist das schon mal ein kleiner Vorgeschmack auf die zahlreichen speziellen Funktionen, die in der Elektrodynamik und der Quantenmechanik eine große Rolle spielen. In Kap. 5 werden die Bessel-Funktionen genauer besprochen.

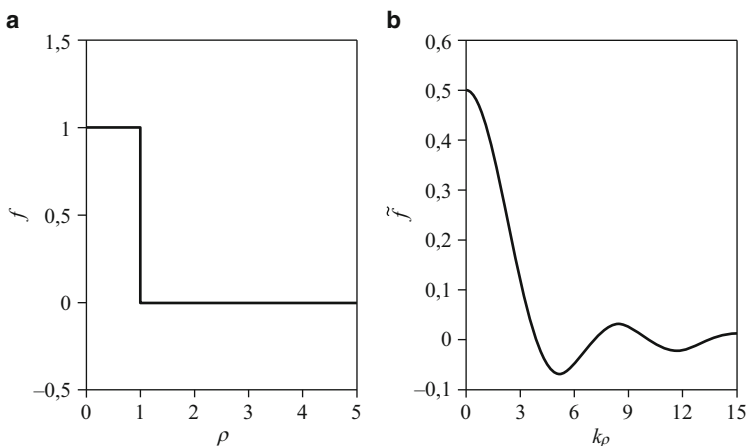


Abb. 4.5 **a** Ursprüngliche Funktion (Kreisscheibe) in Abhängigkeit von ϱ , **b** ihre Fourier-Transformierte in Abhängigkeit von k_ϱ des Wellenvektors. Für die Rechnung und die Funktions-terme siehe Beispiel 4.7; hier wurde $\varrho_0 = 1$ gewählt

Beispiel 4.8: Kugelkoordinaten und Yukawa-Potenzial

Wir betrachten die Funktion

$$\phi(r) = q \frac{e^{-cr}}{r}.$$

Diese Funktion divergiert zwar für $r \rightarrow 0$, wegen des Faktors r^2 im infinitesimalen Volumenelement der Kugelkoordinaten ist sie aber trotzdem quadratintegabel.

Für $c = 0$ ist dies natürlich schlicht das Potenzial einer Punktladung der Stärke q ; für $c \neq 0$ ergibt sich ein sogenanntes *Yukawa-Potenzial* (nach dem japanischen Physiker *Hideki Yukawa*, 1907–1981, der es 1935 veröffentlichte), das in Kern- und Elementarteilchenphysik sehr wichtig ist. Für Interessierte: Es beschreibt das Potenzial, das entsteht, wenn das Austauschteilchen der Wechselwirkung – im Gegensatz zu den Photonen bei der elektromagnetischen Wechselwirkung – eine Ruhemasse hat.

Mit (4.12) ist die Fourier-Transformierte davon

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}) = q \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int d^3x \frac{e^{-cr}}{r} e^{-i\mathbf{k} \circ \mathbf{r}}.$$

Gehen wir zu Kugelkoordinaten über, wobei wir das Koordinatensystem für die Integration so legen, dass \mathbf{k} in z -Richtung zeigt (was möglich ist, weil ϕ

sphärisch symmetrisch ist), so folgt

$$\begin{aligned}
 \tilde{\phi}(\mathbf{k}) &= \frac{q}{\sqrt{2\pi}^3} \int_0^\infty r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d\cos\vartheta \frac{e^{-cr}}{r} e^{-ikr \cos\vartheta} \\
 &= \frac{q}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty r^2 dr \frac{e^{-cr}}{r} \left[\frac{e^{-ikr \cos\vartheta}}{-ikr} \right]_{\cos\vartheta=-1}^{\cos\vartheta=1} \\
 &= \frac{2q}{\sqrt{2\pi} k} \int_0^\infty dr e^{-cr} \sin(kr). \tag{4.13}
 \end{aligned}$$

Das verbleibende Radiusintegral kann entweder mithilfe zweimaliger partieller Integration gelöst werden, oder indem man die Sinusfunktion wieder mittels komplexer Exponentialfaktoren ausdrückt. Das Endresultat ist

$$\tilde{\phi}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q}{c^2 + k^2}.$$

Damit folgt für das Potenzial die Darstellung

$$\phi(r) = q \frac{e^{-cr}}{r} = \frac{q}{2\pi^2} \int d^3k \frac{e^{ik \circ r}}{c^2 + k^2}.$$

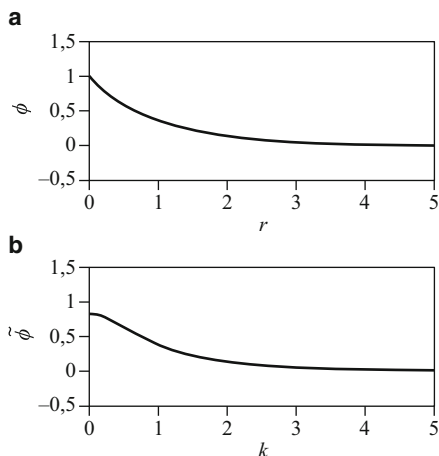
Für $c \rightarrow 0$ hat dies den endlichen Grenzwert

$$\phi(r) = \frac{q}{r} = \frac{q}{2\pi^2} \int d^3k \frac{e^{ik \circ r}}{k^2};$$

setzt man dagegen vor Ausführen des Radiusintegrals $c = 0$, so konvergiert das Integral (4.13) nicht! Der „Umweg“ mit $c \neq 0$ ist also nötig, um die Fourier-Transformierte des Coulomb-Potenzials zu erhalten.

Wir bemerken außerdem das interessante Resultat, dass die Fourier-Transformierte der Funktion hier, die nur vom Radius $r = |\mathbf{r}|$ abhängt, ihrerseits auch nur vom Betrag des Wellenvektors $k = |\mathbf{k}|$ abhängt; dass dies immer so ist, wird in Aufgabe 4.6 gezeigt. Sowohl die Funktion als auch ihre Fourier-Transformierte sind in Abb. 4.6 dargestellt.

Abb. 4.6 Yukawa-Potenzial (a) in Abhängigkeit vom Abstand r zur Quelle des Potenzials und seine Fourier-Transformierte (b) in Abhängigkeit vom Betrag k des Wellenvektors. Für die Rechnung und die Funktions-terme siehe Beispiel 4.8; hier wurde $q = c = 1$ gewählt



4.3.2 Lösen wir die Poisson-Gleichung!

Umgekehrt können wir nun das Coulomb-Potenzial direkt aus der Poisson-Gleichung für eine Punktladung im Ursprung,

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -4\pi q\delta(\mathbf{r}), \quad (4.14)$$

berechnen. (Wem diese Gleichung bzw. das verwendete Einheitensystem komplett unbekannt ist, der sollte beispielsweise in Feuerbacher (2016) nachlesen.)

Wir beginnen mit dem Fourier-Ansatz

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int d^3k \tilde{\phi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

und wenden darauf den Laplace-Operator an:

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int d^3k \tilde{\phi}(\mathbf{k}) \Delta e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int d^3k \tilde{\phi}(\mathbf{k}) k^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.$$

Auf der rechten Seite der Poisson-Gleichung (4.14) nutzen wir die Fourier-Darstellung (4.11) der Delta-Funktion, verallgemeinert auf drei räumliche Koordinaten:

$$-4\pi q\delta(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi q}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.$$

Setzen wir nun beides in die Poisson-Gleichung (4.14) ein, so haben wir

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int d^3k \tilde{\phi}(\mathbf{k}) k^2 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = -\frac{4\pi q}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}},$$

woraus

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q}{k^2}$$

folgt. Dies stimmt mit dem Ergebnis aus Beispiel 4.8 überein – also sind wir im Prinzip fertig. Wir können die Fourier-Rücktransformierte aber auch nochmals direkt ausrechnen:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int d^3k \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{q}{k^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \\ &= \frac{q}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \int_0^{2\pi} d\varphi_k \int_{-1}^1 d\cos\vartheta_k e^{ikr \cos\vartheta_k} \\ &= \frac{q}{\pi} \int_0^\infty dk \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr} = \frac{2q}{\pi r} \int_0^\infty du \frac{\sin(u)}{u}. \end{aligned}$$

Da das letzte Integral einen Faktor $\pi/2$ liefert (siehe mal wieder Formelsammlungen oder Mathematiksoftware), ergibt sich schließlich tatsächlich das Coulomb-Potenzial

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r}.$$

Wie man dieses Ergebnis erhalten kann, ohne den Wert des letzten Integrals zu kennen, werden wir uns in Kap. 6 anschauen.

Zusammenfassung

- Jede periodische, quadratintegrale Funktion $f(t)$ mit der Periode T kann als Fourier-Reihe dargestellt werden:

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j g_j(t) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j h_j(t)$$

mit den Funktionen

$$g_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad g_j(t) = \cos(j\omega t); \quad h_j(t) = \sin(j\omega t)$$

und den Koeffizienten

$$a_j = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) g_j(t) dt \quad \text{für } j \in \mathbb{N} \quad \text{und}$$

$$b_j = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) h_j(t) dt \quad \text{für } j \in \mathbb{N}^*,$$

wobei c beliebig gewählt werden kann. Ist die Funktion nicht periodisch, so wird sie durch diese Reihe nur im Intervall $[c; c+T]$ richtig dargestellt.

- Die Reihe konvergiert im Allgemeinen nicht gleichmäßig (und an Unstetigkeitsstellen noch nicht einmal punktweise), sondern nur im quadratischen Mittel, d. h., für die Partialsummen

$$f_n(t) = \sum_{j=0}^n a_j g_j(t) + \sum_{j=1}^n b_j h_j(t)$$

gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^{c+T} |f(t) - f_n(t)|^2 dt \rightarrow 0.$$

- Eine wichtige alternative Darstellung ist

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ij\omega t},$$

mit den Koeffizienten c_j

$$c_j = \frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(t) e^{-ij\omega t} dt.$$

- Ist die Funktion $f(t)$ nicht periodisch, so kann man für sie stattdessen ein Fourier-Integral angeben,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

mit

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt.$$

- Für Funktionen $f(\mathbf{r})$, die vom Ort abhängen, ist die entsprechende räumliche Fourier-Transformation

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3k,$$

mit

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3r.$$

4.4 Aufgaben

4.1 Ermittle die Fourier-Reihe (4.2) für die Funktion

$$f(t) = \left(\frac{2t}{T}\right)^3 - \frac{2t}{T} \quad \text{mit} \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

und periodisch fortgesetzt mit der (reellen) Periode T .

Lösung

Da die Funktion ungerade ist, verschwinden alle Koeffizienten a_j in (4.4). Für die restlichen Koeffizienten haben wir (mit $c = -T/2$)

$$\begin{aligned} b_j &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left(\left(\frac{2t}{T}\right)^3 - \frac{2t}{T} \right) \sin\left(j \cdot \frac{2\pi t}{T}\right) dt \\ &= \int_{-1}^1 (x^3 - x) \sin(j\pi x) dx. \end{aligned}$$

Die Integrale sind alle relativ einfach mit partieller Integration lösbar; es ergibt sich

$$b_j = \frac{12(-1)^j}{(j\pi)^3}.$$

Die Fourier-Reihe ist also

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{12}{\pi^3} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^3} \sin\left(j \cdot \frac{2\pi t}{T}\right) \\ &= -\frac{12}{\pi^3} \left[\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - \frac{1}{8} \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) + \frac{1}{27} \sin\left(\frac{6\pi t}{T}\right) \right] + \dots \end{aligned}$$

Mit einem Funktionsplotter kann man sich davon überzeugen, dass schon die ersten drei Summanden eine sehr gute Näherung liefern.

4.2 Ein Kondensator der Kapazität C wird immer abwechselnd über einen Widerstand R jeweils für die Zeitdauer $\tau = RC$ an eine Spannungsquelle mit $U = U_0$ bzw. $U = -U_0$ gelegt; insbesondere bei $t = 0$ beginne gerade ein Zeitabschnitt mit $U = U_0$.

- (a) Begründe, dass die Ladung auf dem Kondensator in Abhängigkeit von der Zeit gegeben ist durch

$$Q(t) = CU_0 \cdot \begin{cases} 1 - \frac{2}{1+e^{-1}} e^{-t/\tau} & 0 \leq t \leq \tau \\ -1 + \frac{2}{1+e^{-1}} e^{-(t-\tau)/\tau} & \tau \leq t \leq 2\tau \end{cases}.$$

- (b) Entwickle $Q(t)$ in eine Fourier-Reihe in exponentieller Darstellung und vergleiche mit dem Ergebnis (4.9) im Kapiteltext.

Lösung

- (a) Ab $t = 0$ liegt die Spannung $U = U_0$ an, also gilt für die Ladung auf dem Kondensator

$$Q(t) = CU_0 - k_1 e^{-t/\tau};$$

ab $t = \tau$ liegt dagegen $U = -U_0$ an, also gilt

$$Q(t) = -CU_0 + k_2 e^{-(t-\tau)/\tau}$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten $k_{1,2}$. Zunächst muss $Q(t)$ bei $t = \tau$ stetig sein; dies ergibt

$$CU_0 - k_1 e^{-1} = -CU_0 + k_2.$$

Außerdem muss wegen der Periodizität $Q(0) = Q(2\tau)$ gelten; daraus folgt

$$CU_0 - k_1 = -CU_0 + k_2 e^{-1}.$$

Aus diesem linearen Gleichungssystem für k_1 und k_2 erhalten wir leicht

$$k_1 = k_2 = \frac{2CU_0}{1 + e^{-1}}$$

und damit das angegebene Ergebnis für $Q(t)$.

- (b) Die Fourier-Koeffizienten sind laut (4.8):

$$c_j = \frac{CU_0}{2\tau} \left[\int_0^\tau \left(1 - \frac{2}{1+e^{-1}} e^{-t/\tau} \right) e^{-ij\pi t/\tau} dt + \int_\tau^{2\tau} \left(-1 + \frac{2}{1+e^{-1}} e^{-(t-\tau)/\tau} \right) e^{-ij\pi t/\tau} dt \right],$$

wobei $\omega = 2\pi/T = \pi/\tau$ gleich eingesetzt und $c = 0$ gewählt wurde. Ersetzen wir nun zunächst im ersten Integral $x = t/\tau$, im zweiten $x = (t - \tau)/\tau$, dann haben wir

$$c_j = \frac{CU_0}{2} \left[\int_0^1 \left(1 - \frac{2}{1+e^{-1}} e^{-x} \right) e^{-ij\pi x} dx - \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{1+e^{-1}} e^{-x} \right) e^{-ij\pi x} e^{-ij\pi} dx \right].$$

Mit $e^{-ij\pi} = (-1)^j$ vereinfacht sich dies zu

$$c_j = \frac{CU_0}{2} (1 - (-1)^j) \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{1+e^{-1}} e^{-x} \right) e^{-ij\pi x} dx.$$

Für gerade j ist also $c_j = 0$. Beschränken wir uns im Folgenden deshalb auf ungerade $j = 2k + 1$ mit $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} c_{2k+1} &= CU_0 \left[\int_0^1 e^{-i(2k+1)\pi x} dx - \frac{2}{1+e^{-1}} \int_0^1 e^{-i(2k+1)\pi+1)x} dx \right] \\ &= CU_0 \left[\frac{e^{-i(2k+1)\pi} - 1}{-i(2k+1)\pi} - \frac{2}{1+e^{-1}} \frac{e^{-i(2k+1)\pi+1} - 1}{-i(2k+1)\pi+1} \right] \\ &= 2CU_0 \left[\frac{1}{i(2k+1)\pi} - \frac{1}{1+e^{-1}} \frac{e^{-1} + 1}{i(2k+1)\pi+1} \right] \\ &= \frac{2CU_0}{i\pi} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{(2k+1)\pi - i} [(2k+1)\pi - i - (2k+1)\pi] \\ &= \frac{2CU_0}{i\pi} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{i(2k+1)\pi+1}. \end{aligned}$$

Die Fourier-Reihe ist damit

$$Q(t) = \frac{2CU_0}{i\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{i(2k+1)\pi+1} \frac{e^{i(2k+1)\pi t/\tau}}{2k-1},$$

in völliger Übereinstimmung mit dem Ergebnis (4.9) im Kapiteltext.

4.3 Im Kapiteltext wurden verschiedene Darstellungen für die Fourier-Reihe angegeben: mit trigonometrischen Funktionen (4.2), die Amplituden-Phasen-Darstellung (4.6) und die Exponentialdarstellung (4.7). Finde jeweils den Zusammenhang

- (a) zwischen den Koeffizienten a_j , b_j und A_j , φ_j bzw.
- (b) zwischen den Koeffizienten a_j , b_j und c_j .

Lösung

- (a) Mit dem Additionstheorem für den Sinus wird (4.6) zu

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} A_j (\sin(j\omega t) \cos \varphi_j + \cos(j\omega t) \sin \varphi_j) \\ &= A_0 \sin \varphi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \sin \varphi_j \cos(j\omega t) + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos \varphi_j \sin(j\omega t). \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit der Darstellung (4.2), wobei die Funktionen g_j und h_j in (4.3) gegeben sind, erhalten wir

$$\frac{a_0}{\sqrt{2}} = A_0 \sin \varphi_0; \quad a_j = A_j \sin \varphi_j; \quad b_j = A_j \cos \varphi_j.$$

Der Zusammenhang zwischen den a_j und b_j einerseits und den A_j und φ_j andererseits ist damit eindeutig, da $0 \leq \varphi_j < 2\pi$ vorausgesetzt wurde; nur für A_0 und φ_0 hat man bei vorgegebenem a_0 unendlich viele Möglichkeiten. Insbesondere für $\varphi_0 = \pi/4$ oder $= 3\pi/4$ ist $a_0 = A_0$.

- (b) Hier kann man in beiden Richtungen vorgehen: Entweder die komplexe Exponentialfunktion mittels der Euler'schen Formel durch Sinus- und Kosinusfunktionen ausdrücken; oder umgekehrt die Sinus- und Kosinusfunktionen durch die komplexen Exponentialfunktionen. Wir wählen den zweiten Weg (warum, werden wir am Schluss sehen):

$$\cos(j\omega t) = \frac{e^{ij\omega t} + e^{-ij\omega t}}{2}; \quad \sin(j\omega t) = \frac{e^{ij\omega t} - e^{-ij\omega t}}{2i}.$$

Damit wird (4.2) zu

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{e^{ij\omega t} + e^{-ij\omega t}}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \frac{e^{ij\omega t} - e^{-ij\omega t}}{2i} \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j - i b_j}{2} e^{ij\omega t} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j + i b_j}{2} e^{-ij\omega t} \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j - i b_j}{2} e^{ij\omega t} + \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{a_{-j} + i b_{-j}}{2} e^{ij\omega t}. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{\sqrt{2}}, \\ c_j &= \frac{a_j - i b_j}{2} \quad \text{für } j > 0 \quad \text{und} \\ c_j &= \frac{a_{-j} + i b_{-j}}{2} \quad \text{für } j < 0 \end{aligned}$$

erhalten wir daraus die Fourier-Reihe (4.7) in Exponentialdarstellung. Hier sehen wir nun direkt, dass in dieser Darstellung auch negative Frequenzen auftreten müssen.

4.4 Ermittle die Fourier-Transformierte \tilde{f} für

- (a) einen endlichen Sinus-Wellenzug:

$$U(t) = \begin{cases} U_0 \sin(\omega_0 t) & \text{für } -\tau/2 \leq t \leq \tau/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $\tau > 0$ bzw.

- (b) eine exponentiell gedämpfte Schwingung, die bei $t = 0$ anfängt:

$$x(t) = \begin{cases} x_0 \cos(\omega_0 t) e^{-dt} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

mit dem Dämpfungsfaktor $d > 0$.

Welche Konsequenzen ergeben sich aus diesen beiden Beispielen für die technische Übertragung von Sinussignalen?

Lösung

- (a) Nach (4.10) haben wir

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\omega) &= \frac{U_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \sin(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{U_0}{2\sqrt{2\pi} i} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} (e^{i(\omega_0 - \omega)t} - e^{-i(\omega_0 + \omega)t}) dt \\ &= \frac{U_0}{2\sqrt{2\pi} i} \left[\frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t}}{i(\omega_0 - \omega)} - \frac{e^{-i(\omega_0 + \omega)t}}{-i(\omega_0 + \omega)} \right]_{-\tau/2}^{\tau/2} \\ &= \frac{U_0}{\sqrt{2\pi} i} \left[\frac{\sin((\omega - \omega_0)\tau/2)}{\omega - \omega_0} - \frac{\sin((\omega + \omega_0)\tau/2)}{\omega + \omega_0} \right]. \end{aligned}$$

Diese Funktion hat zwei ausgeprägte Peaks (die umso schmaler werden, je größer τ ist); diese sind aber nicht direkt bei $\pm\omega_0$, sondern nur in der Nähe davon.

(b) Hier ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}(\omega) &= \frac{x_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \cos(\omega_0 t) e^{-dt} e^{-i\omega t} dt \\
 &= \frac{x_0}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (e^{-(-i\omega_0 + i\omega + d)t} + e^{-(i\omega_0 + i\omega + d)t}) dt \\
 &= \frac{x_0}{2\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-(-i\omega_0 + i\omega + d)t}}{i\omega_0 - i\omega - d} + \frac{e^{-(i\omega_0 + i\omega + d)t}}{-(i\omega_0 + i\omega + d)} \right]_0^{\infty} \\
 &= \frac{x_0}{2\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{d + i(\omega - \omega_0)} + \frac{1}{d + i(\omega + \omega_0)} \right] \\
 &= \frac{x_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{d + i\omega}{d^2 + \omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega d}.
 \end{aligned}$$

Das Betragsquadrat dieser Funktion hat ein Maximum bei $\sqrt{d^2 + \omega_0^2}$, also bei nicht zu starker Dämpfung in der Nähe von ω_0 .

Obwohl die Sinus- bzw. Kosinusschwingung selbst jeweils nur eine eindeutige Kreisfrequenz hat, ist sie also wegen der Endlichkeit (und der Dämpfung) jeweils aus unendlich vielen Frequenzen zusammengesetzt. Das hat natürlich Bedeutung für die Übertragung realer Signale, die ja immer endlich sind: Um das Signal möglichst wenig zu verfälschen, muss die Übertragungsvorrichtung so aufgebaut sein, dass nicht nur die eigentliche Frequenz übertragen werden kann, sondern auch möglichst viele dieser unendlich vielen anderen.

4.5 Stellt man für eine periodische Funktion sowohl die Fourier-Reihe in Exponentialdarstellung als auch die Fourier-Transformierte auf und vergleicht beide, so erhält man den interessanten Zusammenhang

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = 2\pi \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi j);$$

dies ist die diskrete Verallgemeinerung der Formel (4.11). Leite dies her mittels der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T/2 \\ 0 & T/2 \leq t < T \end{cases},$$

mit der Periode T fortgesetzt („Gitter“). Zur besseren Vergleichbarkeit sollte in den Exponenten der Fourier-Reihe hier die entgegengesetzte Vorzeichenkonvention zu sonst benutzt werden!

Lösung

Zunächst die Fourier-Reihe. Die Koeffizienzen sind (mit umgekehrter Vorzeichenkonvention)

$$c_j = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} e^{ij2\pi t/T} dt = \frac{e^{ij\pi} - 1}{2ij\pi}.$$

Damit haben wir

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ij\pi} - 1}{j} e^{-ij \cdot 2\pi t/T}.$$

Für die Fourier-Transformierte stellen wir $f(t)$ erst mal anders dar:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Theta(t - kT) \cdot \Theta(T/2 + kT - t).$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \Theta(t + kT) \cdot \Theta(T/2 + kT - t) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{kT}^{T/2+kT} e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi} i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega T} \frac{e^{i\omega T/2} - 1}{\omega}, \end{aligned}$$

also

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega T/2} - 1}{\omega} e^{-i\omega t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega T} d\omega.$$

Beide Ausdrücke für $f(t)$ müssen gleich sein; es folgt

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ij\pi} - 1}{j} e^{-ij \cdot 2\pi t/T} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega T/2} - 1}{\omega} e^{-i\omega t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega T} d\omega.$$

Damit sich der Ausdruck links ergibt, dürfen zum Integral rechts also nur die diskreten Frequenzen

$$\omega_j = j \frac{2\pi}{T}$$

beitragen, d. h., es muss

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega T} = \frac{2\pi}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - j \frac{2\pi}{T}\right)$$

sein. Mit $\delta(cx) = \delta(x)/|c|$ für jede reelle Konstante c wird dies zu

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega T} = 2\pi \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(\omega T - 2\pi j).$$

Setzen wir dann noch abkürzend $x := \omega T$, so bleibt die behauptete Beziehung.

4.6 Zeige folgende Eigenschaften der Fourier-Transformation:

- (a) Wenn $f(t)$ eine reelle gerade Funktion ist, dann ist die Transformierte $\tilde{f}(\omega)$ rein reell; wenn f ungerade reell ist, dann ist \tilde{f} rein imaginär.
- (b) Wenn $f(\mathbf{r})$ nur von $r = |\mathbf{r}|$ abhängt, dann hängt $\tilde{f}(\mathbf{k})$ nur von $k = |\mathbf{k}|$ ab.
- (c) Die Faltungsformel für die Transformierte eines Produkts:

$$\widetilde{(f \cdot g)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\omega') \tilde{f}(\omega - \omega') d\omega'.$$

- (d) Den Satz von Plancherel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

- (e) Und schließlich noch die Beziehung

$$\int |\dot{f}(t)|^2 dt = \int \omega^2 |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Lösung

- (a) Die Fourier-Transformierte ist

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt.$$

Teilen wir dies zunächst in die beiden Integrale über die negativen und die positiven Frequenzen auf und ersetzen im ersten Integral dann t durch $-t$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 f(t) e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} f(-t) e^{-i\omega t} dt + \int_0^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \right). \end{aligned}$$

Für eine gerade Funktion ist $f(-t) = f(t)$, sodass wir dies zusammenfassen können zu

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt,$$

was für eine reelle Funktion $f(t)$ offensichtlich rein reell ist. Für eine ungerade Funktion mit $f(-t) = -f(t)$ folgt dagegen

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt,$$

was offensichtlich rein imaginär ist.

- (b) Die räumliche Fourier-Transformierte ist

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int f(r) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3x.$$

Legen wir das Koordinatensystem so, dass \mathbf{k} in z -Richtung zeigt (was wegen der sphärischen Symmetrie möglich ist), und gehen zu Kugelkoordinaten über, so ist dies

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_0^{\infty} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta f(r) e^{-ikr \cos \vartheta},$$

was offensichtlich nur noch von $k = |\mathbf{k}|$ abhängt. Man kann die Winkelintegrale aber noch auswerten:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} r^2 dr f(r) \left[\frac{e^{ikru}}{ikr} \right]_{u=-1}^{u=1} = \frac{2}{\sqrt{2\pi} k} \int_0^{\infty} r \sin(kr) f(r) dr.$$

- (c) Am besten fängt man hier auf der rechten Seite an und setzt erst mal die expliziten Ausdrücke für die Fourier-Transformierten ein:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \tilde{g}(\omega') \tilde{f}(\omega - \omega') \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt g(t) e^{i\omega' t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') e^{i(\omega - \omega')t'} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int_{-\infty}^{\infty} dt g(t) \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') e^{i\omega t'} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' e^{i\omega'(t-t')}. \end{aligned}$$

Die ω' -Integration erkennen wir als die Fourier-Darstellung (4.11) der Delta-Funktion; damit haben wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \tilde{g}(\omega') \tilde{f}(\omega - \omega') &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt g(t) \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') e^{i\omega t'} \delta(t - t') \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt g(t) f(t) e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt die t' -Integration mittels der Delta-Funktion ausgeführt wurde. Das noch übrige Integral ist aber nun genau die Fourier-Transformierte von $f \cdot g$; dies war zu zeigen.

- (d) Wir setzen für $f(t)$ und $f^*(t)$ jeweils die Fourier-Transformierte ein; dabei müssen wir darauf achten, in den beiden Faktoren verschiedene Integrationsvariablen zu verwenden und auch die Exponentialfunktion komplex zu konjugieren:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \tilde{f}^*(\omega') e^{-i\omega' t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \tilde{f}^*(\omega') \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - \omega')t}. \end{aligned}$$

Das t -Integral liefert nun wieder eine Delta-Funktion, sodass wir anschließend die ω' -Integration sofort ausführen können:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \tilde{f}^*(\omega') \delta(\omega - \omega') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) \tilde{f}^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Das war zu zeigen.

- (e) Die Rechnung läuft sehr ähnlich wie in Teil (d), es sind nur zusätzlich die zeitlichen Ableitungen zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{f}(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \tilde{f}^*(\omega') e^{-i\omega' t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega i\omega \tilde{f}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' (-i)\omega' \tilde{f}^*(\omega') \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - \omega')t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \omega \tilde{f}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \, \omega' \tilde{f}^*(\omega') \delta(\omega - \omega') \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \omega \tilde{f}(\omega) \cdot \omega \tilde{f}^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega.
\end{aligned}$$

4.7 Berechne die räumliche Fourier-Transformierte für die folgenden Funktionen.

(a)

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} -V_0 & r \leq r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases}$$

mit reellen Konstanten $V_0, r_0 > 0$. (Dies bezeichnet man auch als einen „sphärischen Potenzialtopf“.)

(b) Eine räumliche Gauß-Kurve:

$$f(\mathbf{r}) = A e^{-(r/r_0)^2}$$

mit reellen Konstanten A und $r_0 > 0$.

Lösung

(a) Wir könnten die Fourier-Transformation ausführlich ansetzen – aber verwenden wir doch lieber das Ergebnis aus Aufgabe 4.6b und setzen dort ein:

$$\begin{aligned}
\tilde{V}(k) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi} k} \int_0^{r_0} r \sin(kr) (-V_0) dr \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{V_0}{k} \left(\left[-\frac{r}{k} \cos(kr) \right]_0^{r_0} + \frac{1}{k} \int_0^{r_0} \cos(kr) dr \right) \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{V_0}{k} \left(-\frac{r_0}{k} \cos(kr_0) + \frac{1}{k^2} \sin(kr_0) \right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} V_0 \frac{k r_0 \cos(kr_0) - \sin(kr_0)}{k^3}.
\end{aligned}$$

(b) Auch hier verwenden wir das Ergebnis aus Aufgabe 4.6b, verwenden für die Sinusfunktion aber gleich ihre komplexe Exponentialdarstellung:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(k) &= \frac{A}{\sqrt{2\pi} ik} \int_0^{\infty} r e^{-(r/r_0)^2} (e^{ikr} - e^{-ikr}) dr \\
&= \frac{A}{\sqrt{2\pi} ik} \left(\int_0^{\infty} r e^{-(r/r_0)^2} e^{ikr} dr - \int_0^{\infty} r e^{-(r/r_0)^2} e^{-ikr} dr \right).
\end{aligned}$$

Im zweiten Integral ersetzen wir nun r durch $-r$ und fassen dann wieder zusammen:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(k) &= \frac{A}{\sqrt{2\pi} ik} \left(\int_0^\infty r e^{-(r/r_0)^2} e^{ikr} dr + \int_{-\infty}^0 r e^{-(r/r_0)^2} e^{ikr} dr \right) \\ &= \frac{A}{\sqrt{2\pi} ik} \int_{-\infty}^\infty r e^{-(r/r_0)^2} e^{ikr} dr.\end{aligned}$$

Jetzt geht's weiter wie im Kapiteltext bei der Fourier-Transformation der Gauß-Kurve – wir ergänzen im Exponenten quadratisch und substituieren dann passend:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(k) &= \frac{A}{\sqrt{2\pi} ik} \int_{-\infty}^\infty r \exp\left(-\frac{1}{r_0^2} [r^2 - ikrr_0^2]\right) dr \\ &= \frac{A}{\sqrt{2\pi} ik} \int_{-\infty}^\infty r \exp\left(-\frac{1}{r_0^2} \left[r - \frac{ikr_0^2}{2}\right]^2 - \frac{k^2 r_0^2}{4}\right) dr \\ &= \frac{A r_0}{\sqrt{2\pi} ik} e^{-(kr_0/2)^2} \int_{-\infty}^\infty \left(ur_0 + \frac{ikr_0^2}{2}\right) e^{-u^2} du.\end{aligned}$$

Der erste Summand ist ungerade, und somit verschwindet das Integral darüber. Der zweite Summand liefert schließlich

$$\tilde{f}(k) = \frac{A r_0^3}{2\sqrt{2\pi}} e^{-(kr_0/2)^2} \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} du = \frac{A r_0^3}{2\sqrt{2}} e^{-(kr_0/2)^2}.$$

Was sind denn vollständige Funktionensysteme?

5

In Kap. 4 hatten wir gesehen, wie man beliebige periodische Funktionen als (unendliche) Linearkombinationen von Sinus- und Kosinusfunktionen schreiben kann. Oft hat man aber Funktionen, die nicht periodisch sind. Dann kann man zwar, wie ebenfalls bereits in Kap. 4 dargestellt, stattdessen ein Fourier-Integral verwenden – aber das ist sicher in vielen Fällen nicht einfach berechenbar. Außerdem hat eine Reihenentwicklung den Vorteil, dass man sie nach einigen Summanden abbrechen kann und damit eine beliebig gute Näherung erhält.

Eine naheliegende Frage ist also: Kann man eine ähnliche Reihenentwicklung wie bei der Fourier-Reihe auch mit anderen Funktionen durchführen? Diese Frage klingt erst mal nur rein mathematisch interessant; wir werden aber in diesem Kapitel sehen, dass solch eine Entwicklung auch in der Elektrodynamik für viele Problemstellungen hilfreich sein kann. Weitere Anwendungen finden sich beispielsweise in Feuerbacher (2016). Extrem wichtig werden die hier diskutierten Ergebnisse dann in der Quantenmechanik, wo man meist auch noch einmal genauer darauf eingeht.

In Abschn. 5.1 besprechen wir den Formalismus zunächst auf relativ abstraktem Niveau. In Abschn. 5.2 kommen wir dann zwar zu einem konkreten, ausführlichen Beispiel – aber auch nur aus der Mathematik, nicht aus der Physik. Erst nachdem wir in Abschn. 5.3 noch einige zusätzliche mathematische Hilfsmittel zum Lösen von partiellen Differenzialgleichungen erarbeitet haben, können wir uns schließlich in Abschn. 5.4 anschauen, wofür man das alles in der Elektrodynamik brauchen kann.

Im gesamten Kapitel wird versucht, eher anschaulich zu argumentieren als mathematisch sauber. Wer's genauer wissen will, dem seien Bücher zur Funktionalanalysis oder zur Quantenmechanik empfohlen; besonders ausführlich und trotzdem gut verständlich wird das Thema beispielsweise in Schwindt (2013) behandelt. Trotzdem ist dies wohl das abstrakteste Kapitel im ganzen Buch. Ich kann allerdings jedem nur empfehlen: Beißt euch durch – diese Themen sind sehr wichtig für die theoretische Physik!

5.1 Erst mal der allgemeine Formalismus

Hier wird alles zunächst relativ abstrakt aussehen – das ist aber leider nötig, wenn man das Folgende richtig verstehen will. Und wenn man genau hinschaut, ist eigentlich auch schon viel in anderen Zusammenhängen bekannt . . .

5.1.1 Worum geht's?

Fassen wir mal kurz zusammen: Was ist eigentlich gesucht? Wir wollen eine (unendliche) Menge von Funktionen f_k haben, sodass man jede „interessierende“ Funktion f als Linearkombination von ihnen darstellen kann (man sagt auch: „nach ihnen entwickeln“), sprich: Es soll Koeffizienten a_k geben, sodass die Reihe

$$\sum_k a_k f_k(x)$$

gegen f konvergiert – zumindest im quadratischen Mittel. Im Folgenden gehen wir im Interesse der Allgemeinheit davon aus, dass f und f_k komplexwertige Funktionen sind. Die Koeffizienten a_k sind dann komplexe Zahlen, und die Konvergenz im quadratischen Mittel bedeutet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=0}^n a_k f_k(x) \right|^2 dx = 0,$$

wobei das Integrationsintervall $[a; b]$ je nach konkreter gewünschter Anwendung gewählt wird. (Bei den Fourier-Reihen wurde beispielsweise immer über eine Periode integriert.) Ein Funktionensystem f_k , bei dem dies möglich ist, nennt man *vollständig*.

Außerdem sollte, wie bei den Fourier-Reihen, für die Funktionen

$$\int_a^b f_j^*(x) f_k(x) dx = \delta_{jk} \quad (5.1)$$

gelten. Daraus ergibt sich dann, wiederum wie bei den Fourier-Reihen, dass man die Koeffizienten mittels

$$a_k = \int_a^b f^*(x) f_k(x) dx \quad (5.2)$$

berechnen kann.

Im Prinzip ist das schon der komplette Formalismus – auch wenn natürlich einiges noch mathematisch zu präzisieren ist.

5.1.2 Ein anderer Blickwinkel ist hilfreich

Auch wenn man es auf den ersten Blick nicht sieht: Eigentlich kennen wir das alles größtenteils schon aus der linearen Algebra! Insbesondere die Entwicklung

$$f(x) = \sum_k a_k f_k(x)$$

sieht doch fast genauso aus wie die Darstellung eines Vektors \mathbf{v} bezüglich einer Basis \mathbf{b}_k :

$$\mathbf{v} = \sum_k a_k \mathbf{b}_k.$$

Es ist deshalb hilfreich, wenn man sich Funktionen als Vektoren mit (überabzählbar vielen) Komponenten vorstellt. (Im mathematischen Sinne bilden ja beispielsweise die quadratintegriblen Funktionen sowieso einen Vektorraum.) Natürlich hat man in der linearen Algebra normalerweise endliche Vektorräume, also endlich viele Basisvektoren, wohingegen wir es hier mit einer unendlichen Menge von Funktionen f_k zu tun haben. Das führt zwar zu einigen zusätzlichen Komplikationen, aber an den grundsätzlichen Ideen ändert sich dadurch fast nichts.

Überlegen wir also mal: Wenn wir von Vektoren \mathbf{b}_k reden statt von Funktionen $f_k(x)$ – was entspricht dann der Beziehung (5.1) oben? Nun, in dieser Formel werden jeweils die Funktionswerte von f_j^* und f_k an derselben Stelle miteinander multipliziert und dann alles integriert, sprich: aufaddiert. Bei Vektoren entspricht dies: Wir multiplizieren jeweils dieselben Komponenten miteinander und addieren alles auf,

$$\sum_a b_{j,a} b_{k,a} = \delta_{jk}.$$

Was hier links steht, ist aber nichts anderes als das (Standard-)Skalarprodukt der beiden Vektoren \mathbf{b}_j und \mathbf{b}_k – und die Formel sagt aus, dass die Basisvektoren \mathbf{b}_k orthonormal sind.

Es liegt also nahe, auch für Funktionen g und h ein Skalarprodukt zu definieren, passend zu (5.1), durch

$$\langle g, h \rangle := \int_a^b g^*(x) h(x) dx.$$

Für dieses Skalarprodukt verwenden wir dabei die in der Mathematik übliche Schreibweise $\langle \dots, \dots \rangle$. Damit wird (5.1) einfach zu

$$\langle f_j, f_k \rangle = \delta_{jk}$$

und die Formel (5.2) für die Entwicklungskoeffizienten einer Funktion f zu

$$a_k = \langle f_k, f \rangle.$$

Für f hat man dann die Reihendarstellung

$$f(x) = \sum_k \langle f_k, f \rangle f_k(x). \quad (5.3)$$

Das ist alles völlig analog zu entsprechenden Formeln in der linearen Algebra für die Entwicklung eines Vektors nach einer orthonormalen Basis. Entsprechend nennt man auch ein Funktionensystem, für das (5.1) gilt, ein *Orthonormalsystem*.

Definieren wir außerdem noch, wieder analog zur linearen Algebra, die Norm einer Funktion f durch

$$\|f\|^2 := \langle f, f \rangle \equiv \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

Offensichtlich ergibt dies nur für quadratintegrale Funktionen Sinn. Damit können wir dann die Bedingung der Konvergenz im quadratischen Mittel schreiben als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \sum_{k=0}^n a_k f_k\| = 0. \quad (5.4)$$

Dies ist letztlich auch der Hauptunterschied zur Darstellung eines Vektors bezüglich einer Basis in einem endlichdimensionalen Vektorraum: Bei einer solchen Darstellung braucht man nur eine endliche Summe, und die Summe ergibt den Vektor exakt. Hier dagegen benötigt man im Allgemeinen eine unendliche Reihe, und selbst diese konvergiert nicht immer exakt gegen die darzustellende Funktion, sondern eben nur im quadratischen Mittel.

Ein System f_k von Funktionen, bei dem (5.4) für jede quadratintegrale Funktion gilt, heißt *vollständig*. Ist das System außerdem orthonormal, so spricht man – sehr naheliegend – von einem *vollständigen Orthonormalsystem*. Wie wir im Folgenden (und erst recht in der Quantenmechanik!) sehen werden, sind solche vollständigen Orthonormalsysteme von großer Bedeutung in der Physik.

Die Vollständigkeit kann man übrigens auch folgendermaßen darstellen:

$$\sum_k f_k^*(x') f_k(x) = \delta(x' - x),$$

wobei diese Gleichung im Sinne der Distributionen gilt, d. h., man muss beide Seiten eigentlich mit einer Funktion $f(x')$ multiplizieren und dann integrieren. Dies führt auf

$$\sum_k f_k(x) \int_a^b f_k^*(x') f(x') dx' = \int_a^b \delta(x' - x) f(x') dx',$$

also

$$\sum_k \langle f_k, f \rangle f_k(x) = f(x),$$

womit wir wieder die Reihendarstellung (5.3) haben.

Abschließend sei hier noch erwähnt, dass man (wie in der linearen Algebra) je nach gewünschter Anwendung das Skalarprodukt auch anders definieren kann. Insbesondere benutzt man manchmal eine sogenannte *Gewichtsfunktion* ρ , welche dafür sorgt, dass manche Bereiche des Intervalls stärker berücksichtigt werden als andere:

$$\langle g, h \rangle = \int_a^b g^*(x) h(x) \rho(x) dx.$$

5.1.3 Wie rechnet man's konkret?

Bisher ist ja alles schön und gut – aber ziemlich abstrakt. Wo nimmt man denn eigentlich dieses vollständige Orthonormalsystem her?

Auch hier hilft es, in die lineare Algebra zu schauen: Von dort kennt man bereits ein Verfahren, um aus einer beliebigen Basis eine orthogonale Basis zu erhalten, nämlich das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren. Zur Erinnerung: Als ersten Vektor des neuen Systems nimmt man dabei den ersten Vektor des ursprünglichen. Bei allen folgenden Vektoren muss man dann jeweils die Anteile, die parallel zu allen vorhergehenden Vektoren sind, abziehen. Da dann schließlich keiner der Vektoren mehr Anteile enthält, die parallel zu einem der anderen Vektoren wären, folgt, dass sie alle zueinander orthogonal sind.

Bei Funktionensystemen funktioniert es prinzipiell ganz genauso: Wir starten mit einem System g_0, g_1, \dots von unendlich vielen Funktionen und definieren erst mal ein zur Problemstellung passendes Skalarprodukt. Wählen wir dann

$$\begin{aligned} f_0(x) &:= g_0(x), \\ f_1(x) &:= g_1(x) - \frac{\langle g_1, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} f_0(x), \\ f_2(x) &:= g_2(x) - \frac{\langle g_2, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} f_0(x) - \frac{\langle g_2, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} f_1(x) \end{aligned} \quad (5.5)$$

usw., so folgt, dass die Funktionen f_k bezüglich des gewählten Skalarprodukts orthogonal zueinander sind. (Für f_0 , f_1 und f_2 kann man dies leicht nachrechnen!) Abschließend normiert man die Funktionen noch, indem man einfach jeweils durch ihre Norm teilt.

Das einzige Problem ist, dass wir eigentlich unendlich viele Funktionen brauchen, damit das System vollständig ist. Allerdings genügt es oft, die Reihenentwicklung nach wenigen Summanden abubrechen, um eine gute Näherung zu erhalten – also müssen wir in der Praxis meist nur die ersten paar Funktionen orthogonalisieren.

Außerdem gibt es noch andere Verfahren, um zumindest prinzipiell das komplette Orthonormalsystem zu erhalten; eines davon werden wir in Abschn. 5.3 diskutieren.

5.2 Ein wichtiges, aber einfaches Beispiel: Die Legendre-Polynome

Wie eben geschildert, kann man ein Orthonormalsystem gewinnen, indem man mit einem beliebigen Funktionensystem beginnt und dieses orthonormiert. Die einfachst mögliche Wahl für das ursprüngliche Funktionensystem ist, die Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten zu verwenden – die ja auch in Taylor-Reihen auftreten. Für diese Funktionen müssen wir nun nur noch ein passendes Skalarprodukt wählen, und es kann los gehen.

Oben wurde bereits erwähnt, dass prinzipiell verschiedene Skalarprodukte möglich sind, beispielsweise durch Wahl einer Gewichtsfunktion ρ . Auch hier betrachten wir nur den einfachst möglichen Fall des Standardskalarprodukts mit $\rho \equiv 1$.

Unsere gewählten Funktionen müssen aber quadratintegrierbar sein – also können wir in diesem Skalarprodukt nur über ein endliches Intervall integrieren. Wieder treffen wir eine möglichst einfache Wahl. Am einfachsten wäre wohl das Intervall $[0; 1]$; wir wählen hier aber $[-1; 1]$, also

$$\langle g, h \rangle = \int_{-1}^1 g(x)h(x)dx.$$

Die komplexe Konjugation sparen wir uns hier, da wir ja rein reelle Funktionen verwenden.

Das damit entstehende orthonormale Funktionensystem besteht natürlich aus Polynomen; nach ihrem Entdecker heißen sie *Legendre-Polynome*. (Der französische Mathematiker *Adrien-Marie Legendre*, 1752–1833, ist wohl bereits aus der theoretischen Mechanik bekannt, wo die Legendre-Transformation eine wichtige Rolle spielt.)

5.2.1 Rechnen wir ein paar Funktionen konkret aus

Wir starten, wie oben gesagt, mit dem Funktionensystem $g_k(x) = x^k, k \in \mathbb{N}$. Nach dem Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren ist dann $f_0(x) = g_0(x) = 1$.

Für f_1 brauchen wir

$$\begin{aligned}\langle g_1, f_0 \rangle &= \int_{-1}^1 x \cdot 1 \, dx = 0 \\ \langle f_0, f_0 \rangle &= \int_{-1}^1 1 \cdot 1 \, dx = 2.\end{aligned}$$

Die erste Gleichung sagt uns, dass g_1 und f_0 bereits orthogonal zueinander sind. Also können wir direkt $f_1(x) = g_1(x) = x$ wählen.

Weiter geht's mit f_2 . Dafür wird die Rechnung schon etwas aufwendiger:

$$\begin{aligned}\langle g_2, f_0 \rangle &= \int_{-1}^1 x^2 \cdot 1 \, dx = \frac{2}{3} \\ \langle g_2, f_1 \rangle &= \int_{-1}^1 x^2 \cdot x \, dx = 0 \\ \langle f_1, f_1 \rangle &= \int_{-1}^1 x \cdot x \, dx = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

g_2 ist also bereits orthogonal zu f_1 , aber eben nicht zu f_0 . Der zu f_0 parallele Beitrag muss somit abgezogen werden, vgl. die allgemeinen Formeln (5.5):

$$f_2(x) = g_2(x) - \frac{\langle g_2, f_0 \rangle}{\langle f_0, f_0 \rangle} f_0(x) = x^2 - \frac{2/3}{2} \cdot 1 = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Eine machen wir noch. Wir brauchen zusätzlich

$$\langle g_3, f_0 \rangle = \int_{-1}^1 x^3 \cdot 1 \, dx = 0$$

$$\langle g_3, f_1 \rangle = \int_{-1}^1 x^3 \cdot x \, dx = \frac{2}{5}$$

$$\langle g_3, f_2 \rangle = \int_{-1}^1 x^3 \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \, dx = 0$$

$$\langle f_2, f_2 \rangle = \int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \, dx = \dots = \frac{1}{15}.$$

g_3 ist also orthogonal zu f_0 und zu f_2 , aber nicht zu f_1 . Deshalb ist

$$f_3(x) = g_3(x) - \frac{\langle g_3, f_1 \rangle}{\langle f_1, f_1 \rangle} f_1(x) = x^3 - \frac{2/5}{2/3} \cdot x = x^3 - \frac{3}{5}x.$$

Der nächste Schritt ist natürlich noch aufwendiger; als Übung kann man nachrechnen, dass sich ergibt:

$$f_4(x) = x^4 - \frac{30}{35}x^2 + \frac{3}{35}.$$

Die Funktionen f_k mit $k = 0, \dots, 4$ sind nun alle orthogonal zueinander (im Sinne des hier definierten Skalarprodukts). Um ein Orthonormalsystem zu erhalten, müssen wir sie nun noch normieren. Die ersten paar Normen haben wir oben bereits ausgerechnet:

$$\|f_0\| = \sqrt{\langle f_0, f_0 \rangle} = \sqrt{2},$$

$$\|f_1\| = \sqrt{\langle f_1, f_1 \rangle} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

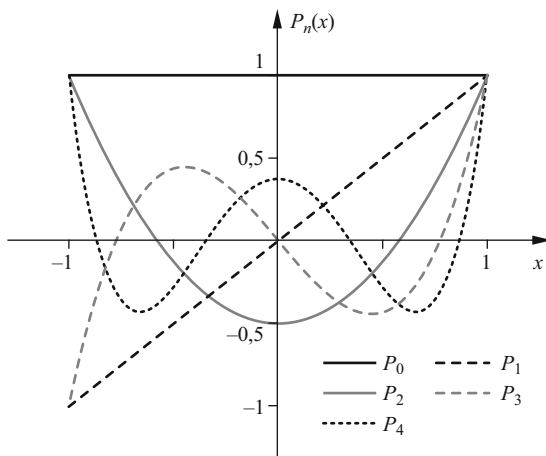
$$\|f_2\| = \sqrt{\langle f_2, f_2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{15}}.$$

Bezeichnen wir die orthonormierten Funktionen mit \tilde{f}_k , so ist also

$$\tilde{f}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \tilde{f}_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x; \quad \tilde{f}_2(x) = \sqrt{15} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

Die restlichen Funktionen \tilde{f}_3 und \tilde{f}_4 sparen wir uns hier – denn in der Literatur ist sowieso eine andere Konvention gebräuchlich! Man fordert nämlich statt der üblichen Normierung, dass die Polynome für $x = 1$ alle den Wert 1 haben sollen; die

Abb. 5.1 Graphen der ersten fünf Legendre-Polynome; für die Funktionsterme siehe (5.6)



dann entstehenden Funktionen heißen *Legendre-Polynome* und werden meist mit P_k bezeichnet. Einen besonderen Grund scheint es für diese Forderung nicht zu geben; letztlich liegt es wohl einfach daran, wie Legendre die Polynome ursprünglich mal definiert hat. Außerdem werden damit andere wichtige Formeln wie beispielsweise (5.12) einfacher.

Mit unseren Ergebnissen von oben folgt

$$\begin{aligned}
 P_0(x) = 1 &\implies \langle P_0, P_0 \rangle = 2, \\
 P_1(x) = x &\implies \langle P_1, P_1 \rangle = \frac{2}{3}, \\
 P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) &\implies \langle P_2, P_2 \rangle = \frac{2}{5}, \\
 P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) &\implies \langle P_3, P_3 \rangle = \frac{2}{7}, \\
 P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) &\implies \langle P_4, P_4 \rangle = \frac{2}{9}. \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

Dabei werden die Vorfaktoren der Klammern so gewählt, dass die Koeffizienten in den Klammern alle ganzzahlig sind. Die Funktionsgraphen dazu sind in Abb. 5.1 dargestellt.

Bei der Berechnung der Koeffizienten muss man die geänderte Normierung der Funktionen natürlich berücksichtigen! Beispielsweise gilt

$$a_2 = \frac{5}{2} \langle P_2, f \rangle$$

und entsprechend für die anderen Polynome.

Beispiel 5.1: Entwicklung der Sinusfunktion

Die grundlegende Motivation in diesem Kapitel war ja, dass wir beliebige (quadratintegrale) Funktionen nach einem System von Funktionen entwickeln, d. h. als im quadratischen Mittel konvergierende Reihe darstellen wollen. Schauen wir uns also mal ein konkretes Beispiel dafür an. Nehmen wir die Sinusfunktion bzw., damit wir im gewählten Intervall genau eine halbe Periode haben,

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

Dazu berechnen wir nun die ersten paar Koeffizienten der Reihenentwicklung. Vor Beginn der Rechnung denken wir aber kurz nach: f ist eine ungerade Funktion. Integriert man das Produkt von f mit einer geraden Funktion von -1 bis 1 , so verschwindet das Integral also. Deshalb ist

$$a_0 = a_2 = a_4 = 0.$$

Es bleiben noch die zwei Koeffizienten a_1 und a_3 zu berechnen:

$$a_1 = \frac{3}{2} \langle P_1, f \rangle = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 x \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx,$$

$$a_3 = \frac{7}{2} \langle P_3, f \rangle = \frac{7}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx.$$

Dabei wurden die in (5.6) angegebenen Normen der Legendre-Polynome berücksichtigt.

Wir berechnen zunächst mit partieller Integration die beiden folgenden Integrale mit Potenzfunktionen:

$$\int_{-1}^1 x \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{8}{\pi^2},$$

$$\int_{-1}^1 x^3 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{24}{\pi^2} - \frac{192}{\pi^4}.$$

Damit ergibt sich

$$a_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{\pi^2} = \frac{12}{\pi^2},$$

$$a_3 = \frac{7}{2} \left[\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{24}{\pi^2} - \frac{192}{\pi^4} \right) - \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{\pi^2} \right] = \frac{168}{\pi^2} - \frac{1680}{\pi^4}.$$

Die Entwicklung der Sinusfunktion bis zur vierten Ordnung in den Legendre-Polynomen ist also

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) &\approx a_1 P_1(x) + a_3 P_3(x) = \frac{12}{\pi^2}x + \left(\frac{168}{\pi^2} - \frac{1680}{\pi^4}\right) \cdot \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ &= \left(-\frac{240}{\pi^2} + \frac{2520}{\pi^4}\right)x + \left(\frac{420}{\pi^2} - \frac{4200}{\pi^4}\right)x^3.\end{aligned}$$

Vergleiche dies mit der Taylor-Reihe um den Ursprung:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \approx \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi^3}{48}x^3.$$

Die Taylor-Reihe sieht hier deutlich einfacher aus – und auch ihre Berechnung geht viel schneller. Trotzdem lohnt es sich, die Entwicklung nach Legendre-Polynomen zu verwenden – wie man in Abb. 5.2 sieht: Geht man nur bis zur ersten Ordnung, so ist die Taylor-Reihe, zumindest nahe des Ursprungs, eindeutig die bessere Näherung. Aber bereits in der hier berechneten dritten Ordnung ist dann schon die Entwicklung nach Legendre-Polynomen deutlich besser – man sieht praktisch keinen Unterschied mehr zur Sinusfunktion!

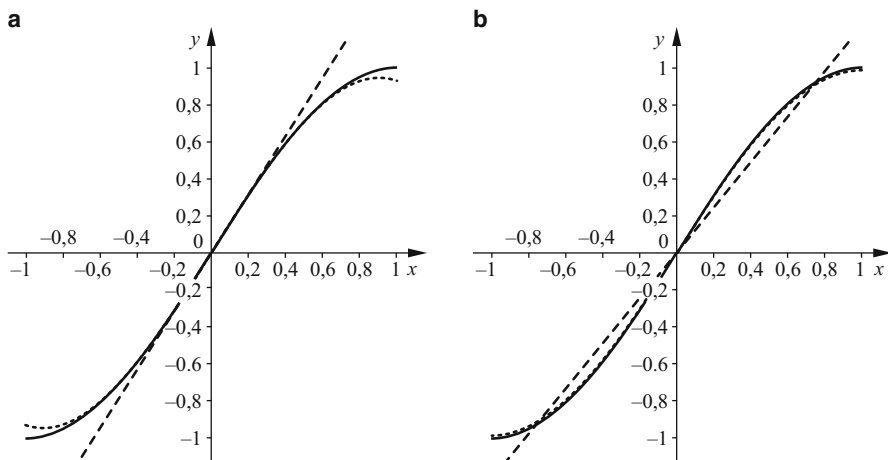


Abb. 5.2 Annäherung einer Sinuskurve (durchgezogene Linie) durch eine Taylor-Reihe (a) bzw. durch eine Entwicklung nach Legendre-Polynomen (b). Die gestrichelte Linie stellt dabei jeweils die niedrigste Ordnung der Entwicklung dar, die gepunktete Linie die nächsthöhere Ordnung

Beispiel 5.2: Entwicklung einer Funktion, bei der die Taylor-Reihe versagt

Ihre wahre Stärke zeigt die Entwicklung nach Legendre-Polynomen erst, wenn man Funktionen betrachtet, die nicht differenzierbar sind – oder die zwar differenzierbar sind, aber für welche die Taylor-Reihe trotzdem nicht gegen die Funktion konvergiert.

Ein Standardbeispiel dafür, das man in vielen Analysis-Büchern findet, ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}. \quad (5.7)$$

In den Büchern wird vorgerechnet, dass diese Funktion in $x = 0$ zwar unendlich oft differenzierbar ist – ihre Taylor-Reihe ist aber identisch null, also sicher nicht gleich f ! (Man könnte die Funktion natürlich stattdessen um eine Stelle $x_0 \neq 0$ Taylor-entwickeln; im Gegensatz zu f wäre diese Taylor-Reihe, wenn man sie im Endlichen abbricht, aber keine gerade Funktion.)

Da die Funktion im Intervall $[-1; 1]$ quadratintegrabel ist, können wir sie nach Legendre-Polynomen entwickeln. Wir gehen nun bis zur sechsten Ordnung; $P_6(x)$ kann man mathematischen Formelsammlungen entnehmen und wird deshalb hier nicht explizit angegeben. Da f gerade ist, verschwinden a_1, a_3 und a_5 , und wir müssen nur noch a_0, a_2, a_4 und a_6 berechnen.

Die nötigen Integrale sind allerdings nur numerisch auswertbar. Man erhält:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_0(x) f(x) dx \approx 0,08907, \\ a_2 &= \frac{5}{2} \int_{-1}^1 P_2(x) f(x) dx \approx 0,25164, \\ a_4 &= \frac{9}{2} \int_{-1}^1 P_4(x) f(x) dx \approx 0,06710, \\ a_6 &= \frac{13}{2} \int_{-1}^1 P_6(x) f(x) dx \approx -0,04776. \end{aligned}$$

Die Entwicklung bis zur sechsten Ordnung ist damit

$$\begin{aligned} f(x) &\approx a_0 P_0(x) + a_2 P_2(x) + a_4 P_4(x) + a_6 P_6(x) \\ &\approx 0,00334 - 0,18759x^2 + 1,23384x^4 - 0,68954x^6. \end{aligned}$$

Die Graphen von f und der Reihenentwicklungen bis zur zweiten, vierten und sechsten Ordnung sind in Abb. 5.3 dargestellt. In niedrigen Ordnungen

ist die Näherung zwar noch relativ schlecht, aber die Entwicklung bis zur sechsten Ordnung bietet allmählich eine ziemlich gute Annäherung an f .

Mithilfe der Legendre-Polynome haben wir also geschafft, was mit der Taylor-Entwicklung nicht funktioniert: Wir haben f durch ein (gerades) Polynom angenähert.

An beiden Beispielen sieht man auch noch einen wichtigen Unterschied zwischen der Taylor-Entwicklung und der nach Legendre-Polynomen. Beides ist zwar letztlich eine Annäherung beliebiger Funktionen durch Polynome – aber bei Ersterer ist das Ziel, dass die Reihe in der Umgebung einer Stelle möglichst gut mit der Funktion übereinstimmt, bei Letzterer soll die Entwicklung dagegen in einem ganzen Intervall eine möglichst gute Annäherung sein. Letzteres bedeutet genau die Konvergenz der Normen der Funktionen, also die Konvergenz im quadratischen Mittel.

5.2.2 Allgemeine Eigenschaften und wichtige Formeln

Zu den Legendre-Polynomen existiert eine sehr reichhaltige mathematische Literatur; wir stellen hier nur einige Ergebnisse zusammen, die auch für Physiker hin und wieder brauchbar sind.

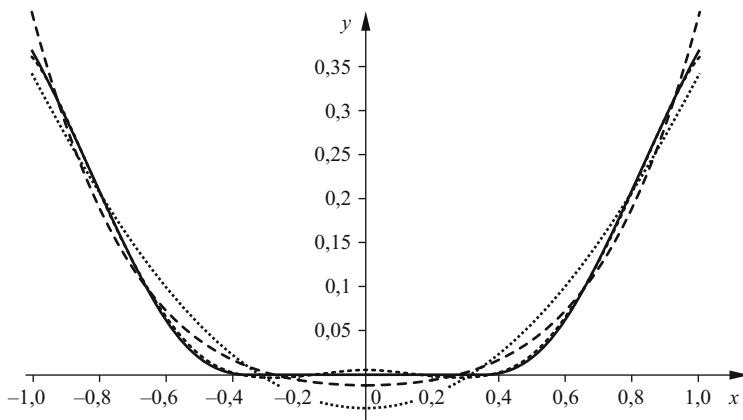


Abb. 5.3 Annäherung der komplizierteren Exponentialfunktion (5.7) (durchgezogene Linie) durch eine Entwicklung nach Legendre-Polynomen, jeweils bis zur zweiten (gepunktet) bzw. vierten (gestrichelt) bzw. sechsten Ordnung (kurze Striche)

Übersicht: Wichtige Formeln zu den Legendre-Polynomen

- Auffällig ist, dass die bisher berechneten Polynome zu geradem bzw. ungeradem Index jeweils alle gerade bzw. ungerade Funktionen sind. Man kann leicht induktiv zeigen, dass dies für jedes weitere Polynom auch gilt. (Letztlich muss man nur verwenden, dass das Integral über eine ungerade Funktion von -1 bis 1 immer verschwindet.) Aus dieser Symmetrie der Legendre-Polynome folgt dann sofort, dass $P_k(-1) = (-1)^k$ gilt und $P_{2k+1}(0) = 0$.
- Man kann eine explizite Formel für alle Legendre-Polynome angeben:

$$P_k(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^j \frac{(2k-2j)!}{(k-j)!(k-2j)!j!2^k} x^{k-2j}, \quad (5.8)$$

wobei $\lfloor \dots \rfloor$ die Abrundung auf die nächste ganze Zahl bezeichnet.

- Die Orthogonalitätsbeziehung zwischen den Polynomen ist allgemein

$$\langle P_k, P_j \rangle = \frac{2}{2k+1} \delta_{kj}; \quad (5.9)$$

deswegen ergeben sich die Koeffizienten in der Reihenentwicklung von f aus

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \langle P_k, f \rangle. \quad (5.10)$$

- Vom französischen Mathematiker *Benjamin Olinde Rodrigues* (1795–1851) stammt folgende relativ einfache Darstellung der Legendre-Polynome:

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k. \quad (5.11)$$

- Außerdem gibt es bei den Legendre-Funktionen, wie auch bei vielen anderen vollständigen Funktionensystemen, eine sogenannte *erzeugende Funktion*. (Allgemein versteht man unter der erzeugenden Funktion f einer Reihe a_n die formale Potenzreihe $f(z) = \sum_n a_n z^n$, die nicht notwendigerweise konvergieren muss.) Speziell bei den Legendre-Polynomen gilt für alle $x \in [-1; 1]$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) z^k. \quad (5.12)$$

Dass man bei den Legendre-Polynomen das Intervall $[-1; 1]$ verwendet, liegt historisch übrigens daran, dass Legendre eigentlich gar nicht die Funktionen $P_k(x)$

verwendet hat, sondern $P_k(\cos \alpha)$ – und der Kosinus nimmt natürlich nur Werte zwischen -1 und 1 an. Letztlich ist dies darin begründet, dass Legendre eine sogenannte Multipolentwicklung des Gravitationspotenzials für zylindersymmetrische Probleme durchführte, in der diese Funktionen automatisch auftauchen (im Wesentlichen ergibt sich genau die Formel (5.12)). Beispielsweise in Feuerbacher (2016) wird näher darauf eingegangen.

5.3 Noch mehr mathematische Hilfsmittel: Selbstadjungierte Differenzialoperatoren und Separationsansatz

Bisher kennen wir den allgemeinen Formalismus zu vollständigen Funktionensystemen – aber noch kein wirklich brauchbares Verfahren, um solch ein System komplett zu konstruieren. Die Gram-Schmidt-Orthogonalisierung müsste ja eigentlich für unendlich viele Funktionen durchgeführt werden, was nicht so ganz praktikabel ist. Außerdem braucht man dafür erst mal einen Satz von Funktionen, den man dann orthonormiert; wie man diese Funktionen günstig auswählt, ist aber auch alles andere als offensichtlich.

In diesem Abschnitt werden wir uns daher zunächst ein weiteres, häufig benutztes Verfahren anschauen, mit dem man ein orthogonales Funktionensystem erhalten kann. Danach gehen wir dann endlich wieder in die Elektrodynamik zurück und diskutieren den Zusammenhang dieser Ideen zum Lösen der Laplace-Gleichung.

5.3.1 Selbstadjungierte Differenzialoperatoren – klingt komplizierter, als es ist

Um auf das zweite Verfahren zu kommen, wie man vollständige Orthogonalsysteme erhalten kann, ist es wieder günstig, die bereits angesprochene Analogie zwischen Funktionen und Vektoren auszunutzen. Diese Analogie treiben wir nun noch ein wenig weiter und beziehen Matrizen mit ein: Die Multiplikation einer Matrix A mit einem Vektor v ist in Komponenten ausgeschrieben:

$$(Av)_j = \sum_k A_{jk} v_k.$$

Der dazu analoge Ausdruck bei Funktionen wäre

$$\int A(x, x') f(x') dx'. \quad (5.13)$$

Als konkretes Beispiel dafür kann man sich an die Fourier-Transformation (4.10) erinnern; dort hatten wir t statt x' , ω statt x und $A(\omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega t}$. Wesentlich ist hier eigentlich nur, dass (5.13) eine *lineare* Abbildung von Funktionen beschreibt.

Im Gegensatz zu Vektoren gibt es bei Funktionen noch andere Möglichkeiten für lineare Abbildungen – beispielsweise Ableitungen bzw. allgemeiner die Anwendung von Differenzialoperatoren. In gewissem Sinne kann man aber auch die Ableitung einer Funktion in der Form (5.13) schreiben und hat damit wieder ein Analogon zur Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor: Wie man leicht mittels partieller Integration nachrechnet, ist

$$\int \left(\frac{d}{dx} \delta(x' - x) \right) f(x') dx' = - \int \left(\frac{d}{dx'} \delta(x' - x) \right) f(x') dx' = \frac{d}{dx} f'(x).$$

Setzt man

$$A(x, x') := \frac{d}{dx} \delta(x' - x),$$

so hat man also die Ableitung von f , wie behauptet, wieder in der Form ausgedrückt. (Allerdings ist $A(x, x')$ hier streng genommen nicht wirklich eine Funktion von zwei Variablen, sondern eine Distribution, und nur unter einem Integral überhaupt sinnvoll definiert.)

Wie soll uns das alles aber eigentlich weiterhelfen? Nun, aus der linearen Algebra ist (hoffentlich) bekannt, dass symmetrische bzw. hermitesche Matrizen (oder genauer: lineare Abbildungen) immer orthogonale Eigenvektoren haben, die eine Basis des Vektorraums bilden! Dabei versteht man unter einem Eigenvektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ einer Matrix \mathbf{A} einen Vektor, für den eine Zahl λ existiert, sodass

$$\mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

ist; λ heißt dann der Eigenwert (vgl. den Anhang). Genau das versuchen wir hier nun zu verallgemeinern.

Zunächst erinnern wir uns daran, wie symmetrische bzw. hermitesche lineare Abbildungen in der linearen Algebra eigentlich definiert sind. Man kann diese Eigenschaft der Matrix \mathbf{A} zwar auch direkt ansehen (symmetrisch: $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$; hermitesch: $\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^\top)^* = \mathbf{A}$), aber brauchbarer ist hier die abstrakte Definition: Eine lineare Abbildung heißt symmetrisch, wenn für die zugehörige Matrix \mathbf{A} und alle Vektoren \mathbf{u}, \mathbf{v}

$$\mathbf{u} \circ (\mathbf{A} \mathbf{v}) = (\mathbf{A} \mathbf{u}) \circ \mathbf{v}$$

gilt; Entsprechendes gilt bei komplexen Vektorräumen und hermiteschen Abbildungen. Statt des Standardskalarprodukts kann man natürlich auch allgemeinere benutzen, sodass wir besser gleich schreiben

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{A} \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{A} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Die Verallgemeinerung auf Funktionen und Differenzialoperatoren sollte nun offensichtlich sein: Gibt es zu einem Differenzialoperator D eine Funktion f und eine

Zahl λ , sodass

$$Df = \lambda f$$

gilt, so nennt man f eine Eigenfunktion zu D und λ den zugehörigen Eigenwert. Ein Differenzialoperator D heißt „hermitesch“, wenn bezüglich eines Skalarprodukts für alle Funktionen g und h

$$\langle g, Dh \rangle = \langle Dg, h \rangle.$$

gilt. Meist nennt man den Differenzialoperator allerdings dann eher *selbstadjungiert*. Die beiden Begriffe bedeuten aber eigentlich nicht genau dasselbe (letztlich kommt es auf die Definitionsmengen der Operatoren an). Wer den genauen Unterschied wissen will, sei mal wieder auf Bücher zur Funktionalanalysis oder zur Quantenmechanik verwiesen; hier ist er nicht wesentlich.

Ebenfalls in solchen Büchern findet man den Beweis für den folgenden Satz: Alle Eigenfunktionen zu einem selbstadjungierten Differenzialoperator zu verschiedenen Eigenwerten sind jeweils orthogonal zueinander; gehören mehrere Eigenfunktionen zum selben Eigenwert, so können auch diese orthogonal zueinander gewählt werden. Die Eigenfunktionen bilden dann ein vollständiges Orthogonalsystem.

Damit haben wir die Grundidee, um vollständige orthogonale Funktionensysteme zu finden: Wir müssen „nur“ einen selbstadjungierten Differenzialoperator wählen und dessen Eigenfunktionen bestimmen. Die Wahl eines Funktionensystems, das dann orthogonalisiert wird, entfällt damit. Es bleibt allerdings natürlich immer noch, einen jeweils zum Problem passenden selbstadjungierten Differenzialoperator zu wählen! Dass dieser sich aus der Problemstellung oft automatisch ergibt, werden wir in Abschn. 5.3.2 diskutieren.

Nach dieser mal wieder sehr abstrakten Einführung sind einige Beispiele sicher hilfreich.

Beispiel 5.3: Trigonometrische Funktionen

Ein vollständiges orthogonales Funktionensystem kennen wir ja bereits aus Kap. 4: die Sinus- und Kosinusfunktionen. Beschränken wir uns auf ein endliches Intervall, beispielsweise eine Periode (wie bei der Fourier-Reihe ja üblich), so sind diese Funktionen auch quadratintegrabel. Das passende Skalarprodukt ist einfach

$$\langle g, h \rangle = \int_0^T g(t)h(t) dt,$$

wobei g und h periodische Funktionen mit der Periodenlänge T sind. Das vollständige orthogonale Funktionensystem ist dann wie bekannt gegeben durch

$$g_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad g_j(t) = \cos(j\omega t); \quad h_j(t) = \sin(j\omega t)$$

mit $\omega = 2\pi/T$. (Da man hier eigentlich zwei Systeme von Funktionen hat, spricht man manchmal auch von einem „bi-orthogonalen System“.)

All diese Funktionen sind nun tatsächlich Eigenfunktionen eines selbstadjungierten Differenzialoperators – nämlich einfach des Operators der zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} g_0(t) &= \frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 = 0 \cdot g_0(t), \\ \frac{d^2}{dt^2} g_j(t) &= \frac{d^2}{dt^2} \cos(j\omega t) = -j^2 \omega^2 \cos(j\omega t) = -j^2 \omega^2 g_j(t), \\ \frac{d^2}{dt^2} h_j(t) &= \frac{d^2}{dt^2} \sin(j\omega t) = -j^2 \omega^2 \sin(j\omega t) = -j^2 \omega^2 h_j(t). \end{aligned}$$

Dass dieser Differenzialoperator selbstadjungiert ist, kann man relativ einfach nachrechnen. Zunächst ist mit einer partiellen Integration

$$\begin{aligned} \langle g, Dh \rangle &\equiv \int_0^T g(t) \left(\frac{d^2}{dt^2} h(t) \right) dt \\ &= \left[g(t) \left(\frac{d}{dt} h(t) \right) \right]_0^T - \int_0^T \left(\frac{d}{dt} g(t) \right) \left(\frac{d}{dt} h(t) \right) dt. \end{aligned}$$

Der erste Summand verschwindet aber nun wegen der geforderten Periodizität von g und h . Den zweiten Summanden integrieren wir nochmals partiell und erhalten

$$\begin{aligned} \langle g, Dh \rangle &= - \left[\left(\frac{d}{dt} g(t) \right) h(t) \right]_0^T + \int_0^T \left(\frac{d^2}{dt^2} g(t) \right) h(t) dt \\ &= \int_0^T \left(\frac{d^2}{dt^2} g(t) \right) h(t) dt; \end{aligned}$$

wieder verschwindet der erste Summand wegen der Periodizität. Es bleibt also schließlich

$$\langle g, Dh \rangle = \langle Dg, h \rangle$$

– was zu zeigen war.

Übrigens kann man auch das Fourier-Integral als eine Entwicklung nach einem vollständigen Funktionensystem betrachten – den komplexen Exponentialfunktionen

$$f_{\omega}(t) = e^{-i\omega t}$$

mit $\omega \in \mathbb{R}$. Dies ist nun allerdings ein *überabzählbares* System von Funktionen, was zu mehreren Komplikationen führt: Zunächst muss die Orthonormalitätsbeziehung (5.1) ersetzt werden durch

$$\int_a^b f_{\omega}^*(x) f_{\omega'}(x) dx = \delta(\omega - \omega') \quad (5.14)$$

mit der Delta-Funktion statt dem Kronecker-Delta. Außerdem bilden die Funktionen $f_{\omega}(t)$ zwar immer noch ein vollständiges Orthogonalsystem, d. h., man kann jede quadratintegrale Funktion nach ihnen entwickeln – aber diese Funktionen selbst sind nun nicht mehr quadratintegrabel! In den Begriffen der linearen Algebra: Die Basisvektoren des Vektorraums gehören gar nicht selbst zum Vektorraum! Man spricht hier auch von einer „Pseudo-Basis“; für weitergehende Details sei auch hier wieder auf Schwindt (2013) verwiesen.

Nach dieser Abschweifung nun aber zurück zu einem zweiten einfachen Beispiel.

Beispiel 5.4: Legendre-Polynome

Die Legendre-Polynome, die wir in Abschn. 5.2 kennengelernt haben, sind (nach Konstruktion!) ebenfalls ein orthogonales Funktionensystem, dieses allerdings bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle g, h \rangle = \int_{-1}^1 g(x) h(x) dx.$$

Außerdem sind alle Legendre-Polynome Lösungen der folgenden *Legendre-Differenzialgleichung*:

$$(1 - x^2) f''(x) - 2x f'(x) + n(n + 1) f(x) = 0,$$

wie man beispielsweise aus der expliziten Darstellung (5.8) oder auch mit der Rodrigues-Formel (5.11) nachweisen kann. (Andersherum kann man die explizite Darstellung übrigens auch erhalten, indem man die Differenzialgleichung mittels eines Potenzreihenansatzes löst.) Mit anderen Worten: Alle Legendre-Polynome sind Eigenfunktionen zum Differenzialoperator

$$D = (1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} = \frac{d}{dx} (1 - x^2) \frac{d}{dx},$$

wobei der Eigenwert des Polynoms P_n jeweils $-n(n+1)$ ist. Dass die zweite Darstellung des Differenzialoperators äquivalent zur ersten ist, folgt dabei einfach mit der Produktregel.

Es bleibt zu zeigen, dass dieser Differenzialoperator selbstadjungiert ist. Die Rechnung verläuft im Wesentlichen wie in Beispiel 5.3 mittels zweimaliger partieller Integration:

$$\begin{aligned}
 \langle g, Dh \rangle &\equiv \int_{-1}^1 g(x) \left(\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d}{dx} h(x) \right) \right) dx \\
 &= \left[g(x) \left((1-x^2) \frac{d}{dx} h(x) \right) \right]_{-1}^1 \\
 &\quad - \int_{-1}^1 \left(\frac{d}{dx} g(x) \right) \left((1-x^2) \frac{d}{dx} h(x) \right) dx \\
 &= 0 - \int_{-1}^1 \left((1-x^2) \frac{d}{dx} g(x) \right) \left(\frac{d}{dx} h(x) \right) dx \\
 &= - \left[\left((1-x^2) \frac{d}{dx} g(x) \right) h(x) \right]_{-1}^1 \\
 &\quad + \int_{-1}^1 \left(\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d}{dx} g(x) \right) \right) h(x) dx \\
 &= -0 + \int_{-1}^1 \left(\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d}{dx} g(x) \right) \right) h(x) dx \equiv \langle Dg, h \rangle.
 \end{aligned}$$

Wieder verschwinden die Randterme, wie man leicht sieht.

Abschließend sei noch angemerkt, dass Differenzialgleichungen zweiter Ordnung ja eigentlich immer zwei Klassen von linear unabhängigen Lösungen haben. In Beispiel 5.3 ist das offensichtlich: Es sind die Sinus- und die Kosinusfunktionen. In Beispiel 5.4 haben wir aber mit den Legendre-Polynomen nur eine Klasse von Lösungen. Außer diesen gibt es tatsächlich noch eine zweite Klasse von Lösungen der Legendre-Differenzialgleichung. Diese sind aber keine Polynome mehr; man nennt sie *Legendre-Funktionen zweiter Art*. In der Physik sind sie von weit geringerer Bedeutung als die Legendre-Polynome und werden deshalb hier nicht näher diskutiert. Interessierte seien auf die mathematische Literatur verwiesen; ein physikalisches Anwendungsbeispiel (das Potenzial eines polarisierten Ellipsoids) findet sich in Bartelmann et al. (2014).

5.3.2 Separationsansatz – ein kompliziertes Problem auf einfachere reduzieren

Rein mathematisch hat sich das Problem, vollständige Funktionensysteme zu finden, nun reduziert auf partielle Integrationen (um die Selbstadjungiertheit des Differenzialoperators zu zeigen) und das Lösen einer Eigenwertgleichung des Differenzialoperators, also einer Differenzialgleichung. Auf Letzteres gehen wir nun näher ein.

In der Elektrodynamik, aber auch in vielen anderen Gebieten der Physik, hat man es oft sogar mit partiellen Differenzialgleichungen zu tun. Es sei nur an die Poisson-Gleichung (4.14) der Elektrostatik erinnert, in welcher der Differenzialoperator der Laplace-Operator ist. Dieser ist zwar selbstadjungiert, wenn man das naheliegende Skalarprodukt

$$\langle g, h \rangle = \int g^*(\mathbf{r})h(\mathbf{r}) dV$$

für quadratintegrale Funktionen g und h verwendet (wie man in kartesischen Koordinaten leicht nachrechnet), aber die Poisson-Gleichung ist eine inhomogene Differenzialgleichung, keine Eigenwertgleichung – also hilft die Idee der vollständigen Funktionensysteme hier nicht direkt bei der Lösung. Die Laplace-Gleichung $\Delta\phi = 0$ ist dagegen zwar homogen, aber der einzig mögliche Eigenwert ist hier null – auch das bringt uns noch nicht so richtig weiter.

Dennoch stößt man beim Lösen der Laplace-Gleichung fast automatisch auf Eigenwertgleichungen, wenn man einen zusätzlichen passenden Trick benutzt. Diesen erläutern wir hier zunächst an einem einfachen Beispiel, bevor wir dann in Abschn. 5.4 die physikalisch wichtigen Kugel- und Zylinderkoordinaten diskutieren. Die wesentliche Idee ist es, die Laplace-Gleichung aufzuteilen (zu „separieren“) in mehrere gewöhnliche Differenzialgleichungen für jede einzelne Koordinate; deshalb nennt man dies einen *Separationsansatz*. (Manchmal spricht man auch von „Trennung der Variablen“; das bezeichnet aber ja eigentlich schon ein anderes Verfahren zum Lösen von gewöhnlichen Differenzialgleichungen.) Dieser Trick funktioniert für viele lineare partielle Differenzialgleichungen – und liefert im Allgemeinen Eigenwertgleichungen.

Beispiel 5.5: Laplace-Gleichung in der Ebene, kartesisch

Wir suchen die Lösungen der Gleichung

$$\Delta\phi(x, y) \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi = 0.$$

Als Ansatz wählen wir nun, dass man die Funktion ϕ als Produkt einer Funktion schreiben kann, die nur von x , und einer, die nur von y abhängt:

$$\phi(x, y) = g(x)h(y).$$

Damit erhalten wir sicher nicht die allgemeinst mögliche Lösung der Differenzialgleichung, aber uns soll zunächst mal eine spezielle Lösung genügen.

Eingesetzt in die Laplace-Gleichung folgt

$$\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} h(y) + g(x) \frac{\partial^2 h(y)}{\partial y^2} \phi = 0,$$

da beide Ableitungsoperatoren ja jeweils nur auf eine der Variablen wirken, die andere Funktion also jeweils als eine Konstante betrachtet werden kann. Teilen wir durch $g(x)$ und $h(y)$, so wird dies zu

$$\frac{\partial_x^2 g(x)}{g(x)} + \frac{\partial_y^2 h(y)}{h(y)} = 0.$$

Nun kommt der wesentliche Trick: Der erste Summand hängt nur noch von x ab, der zweite aber nur noch von y . Dass sich beide für *alle* Werte von x und y gegenseitig wegheben, kann deshalb nur dann erfüllt sein, wenn beide Summanden konstant sind! Nennen wir die Konstante C , so muss also gelten

$$\frac{\partial_x^2 g(x)}{g(x)} = C \quad \text{und} \quad \frac{\partial_y^2 h(y)}{h(y)} = -C.$$

Damit bleiben die beiden gewöhnlichen (!) Differenzialgleichungen

$$\frac{d^2}{dx^2} g(x) = C g(x) \quad \text{und} \quad \frac{d^2}{dy^2} h(y) = -C h(y)$$

zu lösen – und dies sind nun tatsächlich Eigenwertgleichungen!

Die Lösungen dazu sind natürlich bekannt – wir müssen allerdings auf das Vorzeichen von C achten. Betrachten wir zunächst den Spezialfall $C = 0$; dafür haben wir die Lösungen

$$g(x) = g_1 + g_2 x \quad \text{und} \quad h(y) = h_1 + h_2 y.$$

Ist $C > 0$, so schreiben wir $C = a^2$ mit $a \in \mathbb{R}^+$. Dann sind die Lösungen

$$g(x) = g_1 \cosh(ax) + g_2 \sinh(ax) \quad \text{und} \\ h(y) = h_1 \cos(ay) + h_2 \sin(ay);$$

man könnte bei g auch einfach reelle Exponentialfunktionen verwenden, dann sehen sich die Lösungen für g und h aber nicht so schön ähnlich. Für $C < 0$ schreiben wir dagegen $C = -a^2$ und erhalten

$$g(x) = g_1 \cos(ax) + g_2 \sin(ax) \quad \text{und} \\ h(y) = h_1 \cosh(ay) + h_2 \sinh(ay).$$

Das sind ziemlich viele verschiedene Lösungen ... Versuchen wir mal, uns etwas einzuschränken, um ein wenig mehr Übersicht über die Möglichkeiten zu gewinnen.

Fordern wir beispielsweise zusätzlich, dass $\phi(x, y)$ eine in x und in y ungerade Funktion ist, so bleiben nur noch die folgenden Lösungen übrig:

- $C = 0$: $g(x) = g_2 x$ und $h(y) = h_2 y$,
- $C = a^2 > 0$: $g(x) = g_2 \sinh(ax)$ und $h(y) = h_2 \sin(ay)$,
- $C = -a^2 < 0$: $g(x) = g_2 \sin(ax)$ und $h(y) = h_2 \sinh(ay)$.

Noch weiter einschränken können wir die Vielzahl der Lösungen beispielsweise durch die Randbedingung, dass $\phi(\pm 1, y) = 0$ sein soll. Daraus folgt sofort $g(\pm 1) = 0$; da von allen möglichen obigen Lösungen aber nur die Sinusfunktionen Nullstellen bei $x \neq 0$ haben, folgt $g(x) = g_1 \sin(ax)$. Deshalb kann h nur von der Form $h(y) = h \sinh(ay)$ sein. Aus $g(\pm 1) = 0$ folgt außerdem

$$\sin(\pm a) = 0,$$

also

$$a = n\pi$$

mit $n \in \mathbb{N}^*$. Zusammengefasst haben wir unter den zusätzlich geforderten Bedingungen insgesamt folgende Lösungen der Laplace-Gleichung in zwei Dimensionen:

$$\phi_n(x, y) = f_n \sin(n\pi x) \sinh(n\pi y);$$

dabei wurden die beiden Konstanten g_2 und h_2 zu einer zusammengefasst. Aus der Linearität der Laplace-Gleichung folgt außerdem, dass eine beliebige Linearkombination von Lösungen, also

$$\phi(x, y) = \sum_n f_n \sin(n\pi x) \sinh(n\pi y),$$

wiederum eine Lösung der Laplace-Gleichung ist – unter den hier gestellten zusätzlichen Bedingungen. Es bleibt die Frage: Sind dies *alle* möglichen Lösungen?

Die Antwort lautet Ja: Wir wissen ja bereits, dass die Sinusfunktionen ein *vollständiges* Funktionensystem bilden (unter den Voraussetzungen, dass die Funktion ungerade ist und an den Rändern verschwindet – wie wir oben gefordert hatten). Also kann man jede Funktion von x als Linearkombination der Sinusfunktionen schreiben. Daraus können wir folgern, dass die hier gefundene Lösung, die ja (jeweils für jedes feste y) tatsächlich eine Linearkombination der Sinusfunktionen ist, auch wirklich die allgemeinst mögliche Lösung der Laplace-Gleichung in zwei Dimensionen ist – unter den gewählten zusätzlichen Bedingungen.

Haben wir dagegen keine zusätzlichen Bedingungen an das Potenzial, so brauchen wir alle sechs oben aufgeführten Funktionsklassen. Verwenden wir Exponentialfunktionen statt der hyperbolischen (letztlich, um eine bessere Vergleichbarkeit zum Ergebnis in Zylinderkoordinaten zu haben, vgl. Abschn. 5.4), so kann das Potenzial allgemein geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = & (\Phi_1 + \Phi_2 x) \cdot (\Phi_3 + \Phi_4 y) + \int_0^\infty [\phi_1(a)e^{ax} + \phi_2(a)e^{-ax}] \quad (5.15) \\ & \cdot [\phi_3(a) \cos(ay) + \phi_4(a) \sin(ay)] da \\ & + \int_0^\infty [\phi_5(a) \cos(ax) + \phi_6(a) \sin(ax)] \\ & \cdot [\phi_7(a)e^{ay} + \phi_8(a)e^{-ay}] da \end{aligned}$$

mit beliebigen Konstanten Φ_1 bis Φ_4 und Funktionen $\phi_1(a)$ bis $\phi_8(a)$. Wieder folgt aus der Vollständigkeit der verwendeten Funktionen (die sich wiederum letztlich daraus ergibt, dass sie alle Eigenfunktionen des selbstadjungierten Differenzialoperators ∂_x^2 bzw. ∂_y^2 sind), dass dies auch wirklich alle möglichen Lösungen sind.

5.4 Für Physiker wichtige Funktionensysteme

Wir tragen nun alles neue Wissen aus den vorhergehenden Abschnitten zusammen und werden sehen, wie wir damit die Laplace-Gleichung in Kugel- und in Zylinderkoordinaten allgemein lösen können. Dabei werden wir ähnlich vorgehen wie beim Lösen der Laplace-Gleichung für zwei kartesische Koordinaten – die hier auftretenden Funktionen sind aber leider deutlich komplizierter: Bei den Kugelkoordinaten werden wir die in der theoretischen Physik extrem wichtigen Kugelflächenfunktionen kennenlernen, bei den Zylinderkoordinaten dagegen auf die ebenfalls wichtigen Bessel-Funktionen stoßen.

Da in diesem Kapitel immer wieder auf die „reichhaltige mathematische Literatur“ verwiesen wird, seien hier auch ein paar konkrete Quellen genannt: Standardwerke sind beispielsweise Abramowitz und Stegun (1972) und Gradshteyn und Ryzhik (2000). Noch leichter findet man heutzutage natürlich im Internet viele Informationen, beispielsweise in der „Digital Library of Mathematical Functions“ des amerikanischen National Institutes of Standards and Technology (<http://dlmf.nist.gov/>) oder bei „Wolfram Mathworld“ (<http://mathworld.wolfram.com/>), die eng mit dem Computeralgebrasystem „Mathematica“ assoziiert ist.

5.4.1 Sehr wichtig: Kugelflächenfunktionen

Oft ist man daran interessiert, wie das Potenzial außerhalb einer Ladungsverteilung vom Abstand r zur Ladungsverteilung abhängt. Es liegt also nahe, die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten zu suchen. (Vorwarnung: Obwohl wir nicht alles bis ins Detail besprechen, wird das hier eine ziemliche Recherei; Zähne zusammenbeißen und durchhalten!)

Die Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten ist (vgl. (3.11)); für den Radialanteil verwenden wir dabei die kürzeste der drei angegebenen Formen)

$$\Delta\phi = \Delta_r\phi + \frac{1}{r^2}\Delta_\Omega\phi = \frac{1}{r}\partial_r^2(r\phi) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\left(\sin\vartheta\partial_\vartheta(\sin\vartheta\partial_\vartheta\phi) + \partial_\varphi^2\phi\right) = 0.$$

Wir haben drei Variablen; naheliegend wäre also, ϕ als Produkt von drei Funktionen jeweils einer der Variablen anzusetzen. Darauf wird es am Schluss letztlich auch hinauslaufen; gehen wir aber lieber erst mal etwas langsamer vor und machen zunächst den Ansatz $\phi(r, \vartheta, \varphi) = R(r)Y(\vartheta, \varphi)$. (Die Funktionen hier R und Y zu nennen, ist Konvention.) Setzen wir diesen Ansatz in die Laplace-Gleichung ein und separieren, so bleibt

$$\frac{r^2\Delta_r R(r)}{R(r)} + \frac{\Delta_\Omega Y(\vartheta, \varphi)}{Y(\vartheta, \varphi)} = 0.$$

Wie man an der expliziten Gestalt von Δ_r und Δ_Ω oben sieht, hängt der erste Summand nun nur noch von r ab und der zweite nur noch von den Winkeln. Also muss

$$\frac{r^2\Delta_r R(r)}{R(r)} = C \quad \text{und} \quad \frac{\Delta_\Omega Y(\vartheta, \varphi)}{Y(\vartheta, \varphi)} = -C$$

gelten bzw.

$$r^2\Delta_r R(r) = CR(r) \quad \text{und} \quad \Delta_\Omega Y(\vartheta, \varphi) = -CY(\vartheta, \varphi),$$

mit einer zunächst noch beliebigen Konstanten C . Wir haben also mal wieder zwei Eigenwertgleichungen; in Aufgabe 5.5 wird gezeigt, dass zumindest Δ_Ω auch selbstadjungiert sind. Beschäftigen wir uns hier „nur“ mit dem Lösen dieser Differenzialgleichungen.

Die Radialgleichung ist ausführlich geschrieben

$$r \frac{d^2}{dr^2}(rR(r)) = CR(r).$$

Um uns das Leben zu vereinfachen, kürzen wir erst mal den Ausdruck in der Klammer ab: $u(r) := rR(r)$. (Dabei ist es wieder die übliche Konvention, dies u zu nennen.) Dann haben wir

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2}u(r) = Cu(r).$$

Wenn man die gesuchte Funktion u zweimal ableitet und das Ergebnis mit r^2 multipliziert, soll sich eine Konstante mal die ursprüngliche Funktion ergeben. Von allen bekannten Grundfunktionen passt dieses Verhalten eigentlich nur auf die Potenzfunktionen. Der Ansatz

$$u = r^{\ell+1}$$

(der Buchstabe ℓ und die addierte eins wieder: Konvention!) führt auf

$$r^2 \frac{d}{dr^2} u(r) = (\ell + 1)\ell u(r);$$

also ist $u(r) = r^{\ell+1}$ tatsächlich für beliebiges $\ell \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differenzialgleichung. Da wir hier eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung haben, sollte auch noch eine zweite, linear unabhängige Lösung zum selben Wert von C existieren. Setzen wir für diese ebenfalls eine Potenzfunktion an, also $u(r) = r^n$, so folgt

$$C = (\ell + 1)\ell = n(n - 1).$$

Man rechnet leicht nach, dass diese Gleichung die Lösungen $n = \ell + 1$ (die haben wir schon) und $n = -\ell$ (das ist die gesuchte zweite Lösung) hat. Es folgt, dass die allgemeine Lösung der Radialgleichung zum Eigenwert $C = (\ell + 1)\ell$ geschrieben werden kann als

$$R_\ell(r) = \frac{u(r)}{r} = R_{1\ell} r^\ell + R_{2\ell} r^{-\ell-1}$$

mit beliebigen Konstanten $R_{1\ell}$ und $R_{2\ell}$. Da R_ℓ und $R_{-\ell-1}$ jeweils denselben Eigenwert und dieselbe Darstellung haben, genügt es, sich im Folgenden auf $\ell \geq 0$ zu beschränken.

Kommen wir zur Differenzialgleichung für Y und setzen das Ergebnis für C gleich mal ein. Ausführlich haben wir dann

$$\frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left(\sin \vartheta \partial_{\vartheta} (\sin \vartheta \partial_{\vartheta} Y_\ell(\vartheta, \varphi)) + \partial_\varphi^2 Y_\ell(\vartheta, \varphi) \right) = -\ell(\ell + 1) Y_\ell(\vartheta, \varphi),$$

wobei wir durch den Index berücksichtigen, dass die Lösung Y sicher von ℓ abhängt. Das sieht erst mal reichlich unangenehm aus!

Ein klein wenig vereinfachen können wir's, indem wir weiter separieren. Dabei berücksichtigen wir gleich, dass der φ -Differenzialoperator einfach die zweite Ableitung ist. Die Eigenfunktionen dazu kennen wir schon: trigonometrische und Hyperbel- oder (komplexe) Exponentialfunktionen. Außerdem sollte Y in φ natürlich periodisch sein; damit bleiben nur trigonometrische Funktionen oder Exponentialfunktionen mit rein imaginärem Argument. Konvention ist es hier, die Exponentialfunktionen zu verwenden und die noch offene Konstante m zu nennen. Wir setzen also an:

$$Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = X_{\ell m}(\vartheta) \Phi_m(\varphi) = X_{\ell m}(\vartheta) e^{im\varphi};$$

die Funktionen Y und X haben nun als zweiten Index auch noch m . Außerdem ist zu beachten, dass m wegen der Periodizität $Y(\vartheta, \varphi + 2\pi) = Y(\vartheta, \varphi)$ keine beliebige reelle Zahl sein kann, sondern nur eine ganze Zahl. (Lösen wir die Laplace-Gleichung nicht im ganzen Raum, sondern nur in einem eingeschränkten Volumen, so kann die Forderung, dass Y in φ periodisch sein muss, manchmal entfallen, und es ergeben sich zusätzliche Lösungen! Insbesondere für $m = 0$ haben wir dann neben $\Phi(\varphi) = e^0 = 1$ auch noch die Lösung $\Phi(\varphi) = \varphi$.)

Setzen wir diesen Ansatz ein und vereinfachen, so bleibt noch, die (komplizierte – aber gewöhnliche!) Differenzialgleichung

$$\frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} X_{\ell m}(\vartheta) \right) - m^2 X_{\ell m}(\vartheta) \right) = -\ell(\ell + 1) X_{\ell m}(\vartheta)$$

zu lösen. Als nächsten Schritt versuchen wir die Terme $\sin \vartheta$ loszuwerden. Dafür erinnern wir uns daran, dass es beim Integrieren in Kugelkoordinaten oft sinnvoll ist, das Raumwinkelement als $d \cos \vartheta d\varphi$ zu schreiben statt als $\sin \vartheta d\vartheta d\varphi$; es ist also naheliegend, X als Funktion von $x := \cos \vartheta$ auszudrücken statt direkt als Funktion von ϑ :

$$X_{\ell m}(\vartheta) =: P_{\ell}^m(x)$$

(P : Konvention!). Dann ist zunächst

$$\frac{d}{d\vartheta} X_{\ell m}(\vartheta) = \frac{d}{dx} P_{\ell}^m \cdot \frac{dx}{d\vartheta} = -\sin \vartheta \frac{d}{dx} P_{\ell}^m,$$

also

$$\sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} = -\sin^2 \vartheta \frac{d}{dx} = (x^2 - 1) \frac{d}{dx}.$$

Die Differenzialgleichung kann damit vereinfacht werden zu

$$\frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{d}{dx} P_{\ell}^m(x) \right) - \frac{m^2}{1 - x^2} P_{\ell}^m(x) = -\ell(\ell + 1) P_{\ell}^m(x).$$

Uff. Diese Differenzialgleichung sieht zwar immer noch schwierig aus, aber doch allmählich beherrschbar.

Jetzt macht es sich bezahlt, in diesem Kapitel bisher gut aufgepasst zu haben: Diese Differenzialgleichung kennen wir doch fast schon! Der Differenzialoperator vorne trat nämlich exakt genauso bereits bei den Legendre-Polynomen auf – und auch der Eigenwert rechts passt zu den Legendre-Polynomen. Nur der Term mit m stört noch. Aber zumindest für $m = 0$, also für die Differenzialgleichung

$$\frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{d}{dx} P_{\ell}^0(x) \right) = -\ell(\ell + 1) P_{\ell}^0(x),$$

haben wir die Lösungen bereits: $P_{\ell}^0(x)$ sind schlicht die Legendre-Polynome. Wir haben hier also eine komplizierte Differenzialgleichung auf eine einfachere, bereits

bekannte zurückgeführt. Das braucht man in der Physik öfter mal; die „Kunst“ dabei ist, herauszufinden, auf welche bekannte Differenzialgleichung die gegebene reduziert werden kann, und wie man das am besten macht.

Das Lösen der Differenzialgleichung für $m \neq 0$ tun wir uns jetzt nicht auch noch an. Wen's interessiert: Man findet die Rechnung in der mathematischen Literatur, aber auch in einigen Lehrbüchern zur Elektrodynamik bzw. Quantenmechanik, beispielsweise in Bartelmann et al. (2014).

Letztlich ergibt sich, dass die Differenzialgleichung nur Lösungen für $m = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell - 1, \ell$ hat – woraus folgt, dass ℓ eine natürliche Zahl sein muss, da m ja ganz ist. Die Lösungsfunktionen sind für $m \neq 0$ keine Polynome nur in x mehr, sondern in $x = \cos \vartheta$ und $\sqrt{1 - x^2} = \sin \vartheta$; sie heißen *zugeordnete Legendre-Funktionen*. Explizit berechnen kann man sie für $m > 0$ beispielsweise folgendermaßen:

$$\begin{aligned} P_\ell^m(x) &= (-1)^m \sqrt{1 - x^2}^m \frac{d^m}{dx^m} P_\ell^0(x), \quad \text{also} \\ P_\ell^m(\cos \vartheta) &= (\sin \vartheta)^m \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \right)^m P_\ell^0(\cos \vartheta). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Außerdem ist

$$P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} P_\ell^m(x).$$

(Vorsicht: In der Literatur gibt es hier verschiedene Vorzeichenkonventionen!)

Suchen wir nun die kompletten Lösungen der Winkel-Differenzialgleichung zusammen:

$$Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = X_{\ell m}(\vartheta) \Phi_m(\varphi) \propto P_\ell^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

ist eine Eigenfunktion von Δ_Ω zum Eigenwert $-\ell(\ell + 1)$. (Wir haben hier zunächst nur \propto statt $=$ geschrieben, weil man die Lösungen ja noch mit einem beliebigen Faktor multiplizieren kann.)

Da Δ_Ω selbstadjungiert ist, wie oben schon erwähnt, folgt, dass die $Y_{\ell m}$ ein vollständiges orthogonales Funktionensystem bilden. Dies gilt bezüglich des naheliegenden Skalarprodukts: Wir integrieren über den Raumwinkel,

$$\langle g, h \rangle := \int g^*(\vartheta, \varphi) h(\vartheta, \varphi) d\Omega.$$

Wollen wir ein *orthonormales* Funktionensystem, so müssen wir die $Y_{\ell m}$ bezüglich dieses Skalarprodukts normieren. Das ist noch mal eine ziemliche Rechnerei; Interessierte seien wieder auf die mathematische Literatur verwiesen. Das Endergebnis ist auch alles andere als hübsch:

$$Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_\ell^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} =: N_{\ell m} P_\ell^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}. \quad (5.17)$$

Diese Funktionen bilden nun ein vollständiges orthonormales Funktionensystem auf der Einheitskugeloberfläche. Deshalb nennt man sie *Kugelflächenfunktionen* (im Englischen: *spherical harmonics*).

Wie bereits bei den Legendre-Funktionen gilt: Zu den Kugelflächenfunktionen gibt es eine *sehr* reichhaltige mathematische Literatur. Also keine Sorge: Man muss beispielsweise den Normierungsfaktor $N_{\ell m}$ nicht auswendig lernen, den schlägt man bei Bedarf nach! Die grundsätzliche Struktur „zugeordnete Legendre-Funktion von $\cos \vartheta$ mal $e^{im\varphi}$ “ sollte aber bekannt sein, und auch, welche Werte ℓ und m annehmen können.

Außerdem sollte man sich die folgenden wesentlichen Beziehungen merken:

Die Kugelflächenfunktionen sind orthonormal,

$$\int Y_{\ell m}^*(\vartheta, \varphi) Y_{\ell' m'}(\vartheta, \varphi) d\Omega = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}, \quad (5.18)$$

und bilden ein vollständiges Funktionensystem,

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi') Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = \delta(\cos \vartheta' - \cos \vartheta) \delta(\varphi' - \varphi). \quad (5.19)$$

Man kann also jede quadratintegrale Funktion, die vom Polar- und Azimutwinkel abhängt, nach ihnen entwickeln,

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} f_{\ell m} Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi), \quad (5.20)$$

mit Koeffizienten

$$f_{\ell m} = \int Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi') f(\vartheta', \varphi') d\Omega'. \quad (5.21)$$

Um das alles ein bisschen weniger abstrakt zu machen, sind in Abb. 5.4 einige Kugelflächenfunktionen grafisch dargestellt und in Tab. 5.1 einige Funktionsterme konkret angegeben. Dort sieht man auch, dass die Funktionen eigentlich gar nicht so schlimm sind, wie es anhand der ganzen kompliziert aussehenden Formeln in diesem Abschnitt wirkt: Letztlich sind sie alle aus den relativ einfachen Funktionen $\sin \vartheta$, $\cos \vartheta$ und $e^{im\varphi}$ zusammengesetzt – nur der Normierungsfaktor sieht ein wenig unangenehm aus.

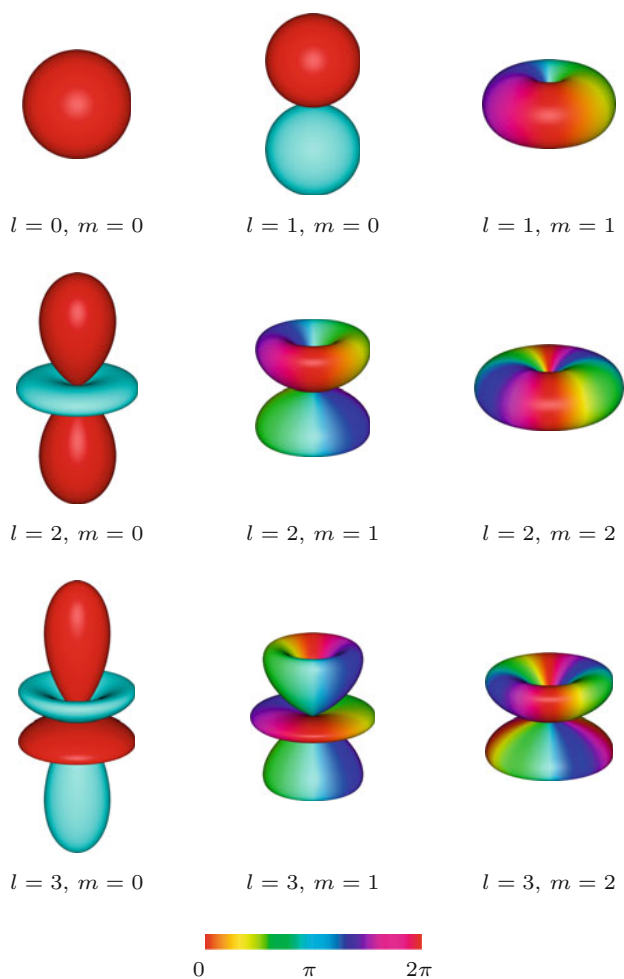


Abb. 5.4 Polardarstellung einiger Kugelflächenfunktionen: Der Betrag $|Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)|$ ist jeweils in der durch ϑ und φ vorgegebenen Richtung aufgetragen; die farbliche Kodierung gibt die Phase dieser komplexen Funktionen an. Falls die Formen euch aus der Chemie bekannt vorkommen – das liegt daran, dass diese Funktionen genau die Form der „Orbitale“ eines Wasserstoffatoms beschreiben; siehe Vorlesungen oder Bücher zur Quantenmechanik

Tab. 5.1 Die ersten neun Kugelflächenfunktionen

	$\ell = 0$	$\ell = 1$	$\ell = 2$
$m = -2$			$\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \vartheta e^{-2i\varphi}$
$m = -1$		$\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{-i\varphi}$	$\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{-i\varphi}$
$m = 0$	$\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta$	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1)$
$m = 1$		$-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{i\varphi}$	$-\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \vartheta \cos \vartheta e^{i\varphi}$
$m = 2$			$\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \vartheta e^{2i\varphi}$

Zusammengefasst haben wir nun die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten:

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (R_{1\ell m} r^{\ell} + R_{2\ell m} r^{-\ell-1}) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \quad (5.22)$$

mit Konstanten $R_{1\ell m}$ und $R_{2\ell m}$.

Beispiel 5.6: Elektrostatisches Potenzial einer Ladungsverteilung

Betrachten wir eine Ladungsverteilung mit Gesamtladung q und Dipolmoment \mathbf{p} . In Büchern zur Elektrodynamik (z. B. Feuerbacher (2016)) lernt man, dass das elektrostatische Potenzial in großem Abstand von der Ladungsverteilung dann im Allgemeinen gut angenähert werden kann durch

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\mathbf{e}_r \circ \mathbf{p}}{r^2}.$$

Für $\mathbf{p} = p \mathbf{e}_z$ und damit $\mathbf{e}_r \circ \mathbf{p} = p \cos \vartheta$ können wir dies nun schreiben als

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \sqrt{4\pi} q r^{-1} Y_{00}(\vartheta, \varphi) + \sqrt{\frac{4\pi}{3}} p r^{-2} Y_{10}(\vartheta, \varphi),$$

für $\mathbf{p} = p \mathbf{e}_x$ und damit $\mathbf{e}_r \circ \mathbf{p} = p \sin \vartheta \cos \varphi$ dagegen als

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \sqrt{4\pi} q r^{-1} Y_{00}(\vartheta, \varphi) + \sqrt{\frac{2\pi}{3}} p r^{-2} (Y_{1-1}(\vartheta, \varphi) - Y_{11}(\vartheta, \varphi));$$

in beiden Fällen hat man also in der Tat eine Entwicklung der Form (5.22).

Abschließend sei noch angemerkt, dass die Bezeichnungen für die Indizes aus der Quantenmechanik stammen: ℓ hängt mit dem Drehimpuls L zusammen, und m heißt dort die „magnetische Quantenzahl“.

5.4.2 Auch wichtig: Bessel-Funktionen

In der Physik hat man es auch öfter mal mit zylindersymmetrischen Problemen zu tun; also sollten wir uns auch die Lösungen der Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten anschauen. (Im Spezialfall, dass das Problem zusätzlich gegenüber Verschiebungen in z -Richtung invariant, also effektiv zweidimensional ist, reduzieren sich die Zylinderkoordinaten auf ebene Polarkoordinaten; diesen Fall dürft ihr in Aufgabe 5.4 selbst untersuchen.) Wie im vorhergehenden Abschnitt gilt auch hier: Es wird eine ziemliche Rechnerei – aber die Endergebnisse sind relativ wichtig, und man sollte versuchen, möglichst alle Schritte zu verstehen.

Die Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten ist (vgl. (3.10)):

$$\Delta\phi(\varrho, \varphi, z) = \Delta_\varrho\phi + \frac{1}{\varrho^2}\Delta_\varphi\phi + \Delta_z\phi = \partial_\varrho^2\phi + \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho\phi + \frac{1}{\varrho^2}\partial_\varphi^2\phi + \partial_z^2\phi = 0.$$

Wieder machen wir einen Separationsansatz, und wie bei den Kugelkoordinaten können wir die Abhängigkeit von φ sofort angeben: Es muss eine 2π -periodische Eigenfunktion zum Differenzialoperator ∂_φ^2 sein, sprich: wieder $e^{im\varphi}$ mit ganzzahligem m . (Und wieder gilt: Sucht man die Lösung nur in einem eingeschränkten Raumgebiet, so kann die Forderung der Periodizität auch entfallen, und es gibt mehr Lösungen.) Also ist unser Ansatz

$$\phi(\varrho, \varphi, z) = R(\varrho)Z(z)e^{im\varphi}.$$

Eingesetzt in die Laplace-Gleichung führt dies zunächst auf

$$Z(z)\Delta_\varrho R(\varrho) - \frac{m^2}{\varrho^2}R(\varrho)Z(z) + R(\varrho)\partial_z^2 Z(z) = 0,$$

nach Separieren der Variablen also

$$\frac{\Delta_\varrho R(\varrho)}{R(\varrho)} - \frac{m^2}{\varrho^2} + \frac{\partial_z^2 Z(z)}{Z(z)} = 0.$$

Der erste und zweite Summand hängen nur noch von ϱ ab, der dritte nur noch von z ; also muss gelten

$$\frac{\Delta_\varrho R(\varrho)}{R(\varrho)} - \frac{m^2}{\varrho^2} = C \quad \text{und} \quad \frac{\partial_z^2 Z(z)}{Z(z)} = -C.$$

Wie bei dem zweidimensionalen Problem in kartesischen Koordinaten ist es wieder sinnvoll, verschiedene Vorzeichen von C zu unterscheiden. Wir diskutieren hier

nur $C < 0$ genauer und geben die Ergebnisse für $C > 0$ am Schluss an; $C = 0$ wird in Aufgabe 5.4 behandelt.

Für $C < 0$ können wir schreiben $C = -a^2$ mit einem reellen, positiven Parameter a ; wie man leicht sieht, hat dieser die Dimension einer inversen Länge. Wir haben also nun ausführlich

$$\frac{d^2}{d\varrho^2}R(\varrho) + \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho}R(\varrho) - \frac{m^2}{\varrho^2}R(\varrho) = -a^2R(\varrho) \quad \text{und} \quad \frac{d^2}{dz^2}Z(z) = a^2Z(z).$$

Für Z haben wir offensichtlich die Lösungen $Z(z) = e^{\pm az}$ (bzw. Hyperbelfunktionen). Die erste Differenzialgleichung können wir dagegen umschreiben zu

$$\varrho^2 R''_{ma}(\varrho) + \varrho R'_{ma}(\varrho) + (a^2\varrho^2 - m^2) R_{ma}(\varrho) = 0,$$

wobei wir die Abhängigkeit der Lösungsfunktionen R von den beiden Parametern wieder als Indizes geschrieben haben. Außerdem gehen wir noch zur dimensionslosen Größe $x := a\varrho$ über. Für die Funktion $J_m(x) := R(a\varrho)$ folgt dann

$$x^2 J''_m(x) + x J'_m(x) + (x^2 - m^2) J_m(x) = 0. \quad (5.23)$$

Dies ist nun wieder eine sehr bekannte Differenzialgleichung – zumindest unter Mathematikern. Nach dem deutschen Astronomen, Mathematiker, Geodäten und Physiker *Friedrich Wilhelm Bessel* (1784–1846; auch berühmt dafür, dass es ihm erstmals gelang, eine Fixstern-Parallaxe zu messen) heißt sie die *Bessel'sche Differenzialgleichung* und ihre Lösungen entsprechend *Bessel-Funktionen*.

Prinzipiell gibt es Bessel-Funktionen zu jedem reellen Wert von m . Aus dem Winkelanteil der Lösung der Laplace-Gleichung folgt ja aber, dass m hier ganzzahlig sein muss. Die Bessel-Funktionen zu ganzzahligem m nennt man auch *zylindrische Bessel-Funktionen* oder gleich *Zylinderfunktionen*, da sie beim Lösen von zylindrischen Problemen ständig auftauchen. Und mal wieder gilt: Es gibt dazu eine *sehr* reichhaltige mathematische Literatur; wir beschränken uns hier auf einige wenige Formeln, die man als Physiker öfter mal gebrauchen kann.

Zunächst die schlechte Nachricht: Im Gegensatz zu anderen grundlegenden Funktionen wie den Legendre-Polynomen und den Kugelflächenfunktionen sind die zylindrischen Bessel-Funktionen *nicht* geschlossen durch die bekannten Grundfunktionen (rationale, trigonometrische und Exponentialfunktionen und deren Umkehrfunktionen) darstellbar. Man *definiert* sich also eben „einfach“ neue Funktionen $J_m(x)$ als Lösungen der Bessel'schen Differenzialgleichung. Dies mag zunächst sehr ungewohnt erscheinen – aber letztlich sind ja beispielsweise auch die trigonometrischen Funktionen nicht direkt anschaulich (als Polynome oder Ähnliches) darstellbar, sondern nur durch ihre Eigenschaften definiert.

Man kann die zylindrischen Bessel-Funktionen aber zumindest als Potenzreihe darstellen (ohne Beweis):

$$J_m(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(m+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \quad (5.24)$$

Aus dieser Potenzreihendarstellung liest man sofort ab, dass sich die zylindrischen Bessel-Funktionen für $x \rightarrow 0$ wie x^m verhalten, also endlich sind. Man kann zeigen, dass für $x \rightarrow \infty$ dagegen gilt:

$$J_m(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (5.25)$$

Wie die trigonometrischen sind deshalb auch die Bessel-Funktionen oszillierend und haben unendlich viele Nullstellen; im Gegensatz zu ersteren gilt für sie aber $J_m(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$.

Oft wichtig ist auch die Integraldarstellung

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(mt - x \sin t)} dt; \quad (5.26)$$

dies haben wir bereits in Kap. 4 bei der Fourier-Transformation der Kreisscheibe verwendet. Die andere dort verwendete Integralbeziehung zwischen den Bessel-Funktionen J_0 und J_1 folgt aus der allgemeinen Formel

$$J_m(x) = x^m \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^m J_0(x). \quad (5.27)$$

Durch Einsetzen in die Bessel'sche Differenzialgleichung (5.23) kann man nachprüfen, dass dies tatsächlich jeweils Lösungen zum Wert m sind.

Für allgemeines reelles m sind J_m und J_{-m} linear unabhängige Lösungen – für ganzzahliges m gilt dies aber nicht mehr. Eine zweite, linear unabhängige Lösung der Bessel-Differenzialgleichung kann man dann folgendermaßen bestimmen:

$$N_m(x) := \frac{1}{\pi} \lim_{\mu \rightarrow m} \left(\frac{\partial J_\mu(x)}{\partial \mu} - (-1)^m \frac{\partial J_{-\mu}(x)}{\partial \mu} \right). \quad (5.28)$$

Diese Funktionen bezeichnet man als Neumann-Funktionen (nach dem deutschen Mathematiker *Carl Gottfried Neumann*, 1832–1925, nach dem auch gewisse Randbedingungen für Lösungen von Differenzialgleichungen benannt sind), Weber-Funktionen (nach dem deutschen Physiker *Wilhelm Eduard Weber*, 1804–1891, dessen Namen man von der SI-Einheit des magnetischen Flusses kennt) oder auch Bessel-Funktionen zweiter Art oder Gattung – wobei die Bessel-Funktionen erster Art oder Gattung eben die J_m sind. Die Neumann-Funktionen werden oft auch mit Y_m bezeichnet.

Im Gegensatz zu den J_m ist bei den Neumann-Funktionen keine einfache Darstellung als Potenzreihe mehr möglich. Man sollte sich aber zumindest merken, dass sie für $x \rightarrow 0$ divergieren (für $m = 0$ wie $\ln x$, für $m > 0$ wie $-x^{-m}$) und für $x \rightarrow \infty$ wiederum oszillierend gegen null gehen,

$$N_m(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (5.29)$$

Damit haben wir nun alle Lösungen der Laplace-Gleichung für $C = -a^2 < 0$. Für $C = a^2 > 0$ ergeben sich für Z trigonometrische Funktionen und für R eine sehr ähnliche Differenzialgleichung wie oben; es ist nur das eine Vorzeichen bei der Multiplikation von R mit ϱ^2 umgedreht:

$$\varrho^2 R''_{ma}(\varrho) + \varrho R'_{ma}(\varrho) + (-a^2 \varrho^2 - m^2) R_{ma}(\varrho) = 0.$$

Deshalb ist es naheliegend, hier nun $x := ia\varrho$ zu setzen; wie man leicht nachrechnet, führt dies wieder genau auf die Bessel'sche Differenzialgleichung (5.23). Die Lösungen der Differenzialgleichung hier sind also schlicht Bessel-Funktionen mit rein imaginärem Argument. Diese nennt man meist *modifizierte* Bessel-Funktionen (wieder: erster und zweiter Art) und bezeichnet sie mit I_m und K_m . Insbesondere die K_m werden manchmal auch *Macdonald-Funktionen* genannt (nach dem schottischen Mathematiker *Hector Munro Macdonald*, 1865–1935; keine Verwandtschaft zu den Gründern der Fastfood-Kette).

Wie die Funktionen J_m verhalten sich auch die I_m für $x \rightarrow 0$ wie x^m , und wie die Y_m divergieren auch die K_m für $x \rightarrow 0$ (für $m = 0$ wie $-\ln x$, für $m > 0$ wie x^{-m}). Das Verhalten für $x \rightarrow \infty$ ist dagegen grundlegend anders: Statt zu oszillieren, zeigen sie eine(n) exponentielle(n) Anstieg bzw. Abnahme,

$$\begin{aligned} I_m(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^x, \\ K_m(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}. \end{aligned}$$

Dies ist mal wieder völlig analog zu den trigonometrischen Funktionen: Betrachtet man diese für rein imaginäres Argument, so bekommt man ja die Hyperbelfunktionen, die sich für $x \rightarrow \infty$ ebenfalls exponentiell verhalten.

Damit man sich ein wenig mehr unter diesen vier Funktionstypen vorstellen kann, sind einige ihrer Graphen in Abb. 5.5 dargestellt. Alle vier findet man auch in den meisten Mathematik-Softwaresystemen; außerdem sind sie in manchen Formelsammlungen tabelliert.

Nun sind wir endlich so weit, dass wir die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten angeben können:

$$\begin{aligned} \phi(\varrho, \varphi, z) & \tag{5.30} \\ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} da & \left([\phi_{1m}(a)J_m(a\varrho) + \phi_{2m}(a)N_m(a\varrho)] [\phi_3(a)e^{az} + \phi_4(a)e^{-az}] \right. \\ & \left. + [\phi_{5m}(a)I_m(a\varrho) + \phi_{6m}(a)K_m(a\varrho)] [\phi_7(a)\cos(az) + \phi_8(a)\sin(az)] \right) e^{im\varphi}, \end{aligned}$$

mit beliebigen Koeffizientenfunktionen ϕ_{1m} bis ϕ_8 . Ähnlich wie bei der zweidimensionalen kartesischen Lösung (5.15) besteht die Lösung also aus zwei Summanden, wobei beide jeweils ein Produkt aus einer oszillierenden und einer exponentiellen

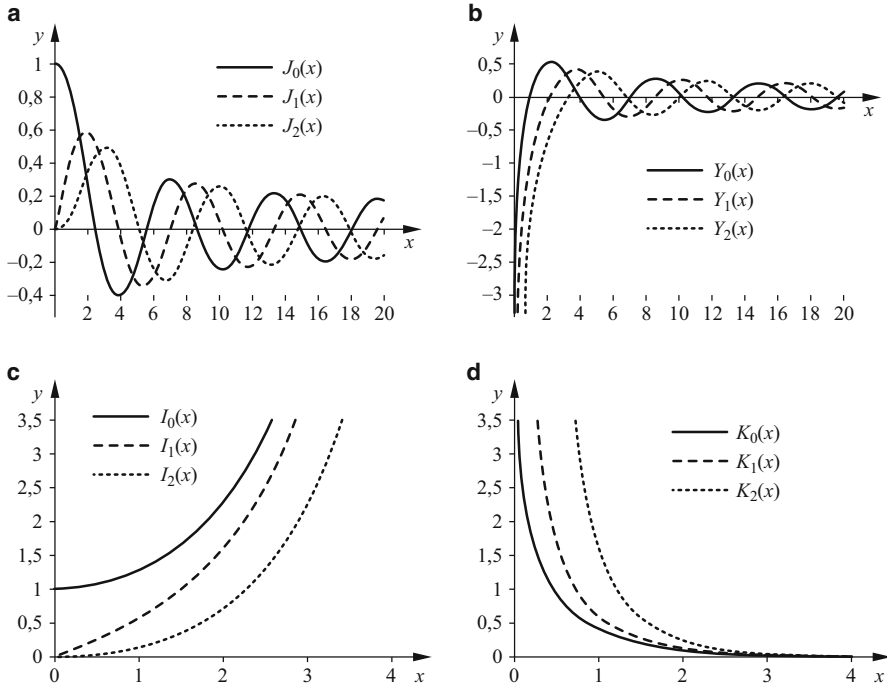


Abb. 5.5 Graphen der (zylindrischen) Bessel-Funktionen erster (a) und zweiter (b) Art und der modifizierten (zylindrischen) Bessel-Funktionen erster (c) und zweiter (d) Art, jeweils in den ersten drei Ordnungen

Funktion enthalten. Den Fall $a = 0$ im Integral muss man allerdings eigentlich extra betrachten – dieser ergibt einen Beitrag zu ϕ , der von z unabhängig ist, entsprechend einer Lösung in ebenen Polarkoordinaten. (Wie bereits erwähnt, wird dieser Fall in Aufgabe 5.4 besprochen.) Außerdem ist dann natürlich auch $Z(z) = z$ möglich!

Dass dies wirklich die allgemeinste mögliche Lösung ist, können wir wieder einfach damit begründen, dass hier nach einem vollständigen orthogonalen Funktionensystem entwickelt wird. Dabei müssen wir aber vorsichtig sein: Da der Differenzialoperator in der Bessel'schen Differenzialgleichung nicht selbstadjungiert ist, sind Bessel-Funktionen $J_m(x)$ zu unterschiedlichen Werten von m nicht orthogonal zueinander. Wie in Aufgabe 5.6 diskutiert wird, sind aber für jeden festen Wert von m die Funktionen $J_m(a\rho)$ zu verschiedenen Werten von a orthogonal zueinander. Genauer gilt

$$\int_0^\infty \rho \cdot J_m(a\rho) \cdot J_m(a'\rho) d\rho = \frac{\delta(a - a')}{a}. \quad (5.31)$$

Da die Winkelfunktionen $e^{im\varphi}$ zu verschiedenen m orthogonal zueinander sind, haben wir mit den Produkten $J_m(a\rho)e^{im\varphi}$ insgesamt dann allerdings auch jeweils für festes a ein bezüglich m orthogonales Funktionensystem gefunden.

Verglichen mit der Lösung in Kugelkoordinaten fällt auf, dass wir in (5.31) für jedes m jeweils ein *überabzählbares* orthogonales Funktionensystem haben – und deshalb integrieren müssen. Die Kugelflächenfunktionen sind dagegen ein abzählbares System, deshalb reicht dort eine Summation aus. Dies liegt letztlich daran, dass in Kugelkoordinaten zwei der Koordinaten (die Winkel ϑ und φ) nur Werte in einem endlichen Intervall annehmen, bei den Zylinderkoordinaten dagegen nur der Azimutalwinkel φ .

Nur in Problemstellungen, in denen die ρ - oder die z -Koordinate auf ein endliches Intervall eingeschränkt wird (was in konkreten Problemstellungen der Elektrodynamik sehr oft der Fall ist), ist dann auch für diese Richtungen jeweils eine Summation ausreichend. Dies ist ganz analog zur Fourier-Entwicklung: Beschränkt man sich auf ein endliches Intervall bzw. eine periodische Funktion, so genügt eine Fourier-Reihe mit einer Summation von abzählbar vielen Funktionen; entwickelt man dagegen eine Funktion, die auf ganz \mathbb{R} definiert und nicht periodisch ist, so braucht man das Fourier-Integral mit überabzählbar vielen Basisfunktionen.

Ist insbesondere die ρ -Richtung auf das Intervall $[0; \rho_0]$ eingeschränkt und sollen die Funktionen bei ρ_0 verschwinden („Dirichlet-Randbedingung“), so hat man als zusätzliche Bedingung $J_m(a\rho_0) = 0$. Die Variable a kann deshalb keine beliebigen Werte mehr annehmen, sondern es ist nur

$$a_j = \frac{x_{m,j}}{\rho_0}$$

möglich, wobei $x_{m,j}$ die j -te Nullstelle der Bessel-Funktion J_m bezeichnet. Die Nullstellen werden dabei der Größe nach durchnummeriert; konkrete Werte findet man in mathematischen Tabellenwerken und mathematischer Software. Soll dagegen die Ableitung bei ρ_0 verschwinden („Neumann-Randbedingung“), so sind für die $x_{m,j}$ eben die Nullstellen der Ableitungen der J_m zu verwenden. Das Integral über a in (5.30) wird in beiden Fällen dann jeweils durch eine Summe über die Nullstellen ersetzt.

Dies ist wieder völlig analog zur Fourier-Reihe auf dem Intervall $[0; t_0]$: Die dabei verwendeten Funktionen sind $\cos(2\pi nt/t_0)$ und $\sin(2\pi nt/t_0)$ mit $n \in \mathbb{N}$ – und $2\pi n$ sind ja die Nullstellen der Sinus- und der Ableitung der Kosinusfunktionen. Die Reihenentwicklung nach Bessel-Funktionen heißt wegen dieser formalen Ähnlichkeit deshalb auch *Fourier-Bessel-Reihe*. Analoges gilt für die Bessel-Funktionen zweiter Art (die hier den Kosinusfunktionen entsprechen); die modifizierten Bessel-Funktionen haben dagegen keine (I_0 und alle K_m) oder nur eine einzige Nullstelle (alle I_m mit $m > 0$) und sind deshalb für diese Arten von Randbedingungen nicht geeignet – analog zu den reellen Exponentialfunktionen.

Die Orthogonalitätsrelation sieht aber nun deutlich komplizierter aus:

$$\int_0^{\varrho_0} \varrho \cdot J_m(a_j \varrho) \cdot J_m(a_k \varrho) d\varrho = \frac{\varrho_0^2}{2} (J_{m+1}(a_j \varrho_0))^2 \delta_{jk}. \quad (5.32)$$

Die Normierungsfaktoren in den Orthogonalitätsbeziehungen (5.31) und (5.32) kann man mithilfe der Bessel'schen Differenzialgleichung herleiten; wie üblich sei hier auf die mathematische Literatur verwiesen.

Beispiel 5.7: Elektrostatisches Potenzial in einem Hohlzylinder

Ein Hohlzylinder mit Radius ϱ_0 , dessen Achse die z -Achse ist, erstrecke sich von $z = 0$ bis $z = L > 0$. Grund- und Deckfläche sind geerdet; die Mantelflächen der beiden Halbzylinder liegen auf unterschiedlichen Potenzialen ϕ_1 und ϕ_2 , d. h., es ist dort folgendes Potenzial vorgegeben:

$$\phi(\varrho_0, \varphi, z) = \begin{cases} \phi_1 & 0 \leq \varphi < \pi \\ \phi_2 & \pi \leq \varphi < 2\pi \end{cases}.$$

Dann ergibt sich für das Potenzial im Inneren (für die genaue Rechnung siehe Feuerbacher (2016)):

$$\phi(\varrho, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{2n+1,m} I_m((2n+1)\pi\varrho/L) \sin((2n+1)\pi z/L) e^{im\varphi}$$

mit Koeffizienten

$$A_{2n+1,m} = \frac{4i(\phi_2 - \phi_1)}{(2n+1)m\pi^2 I_m((2n+1)\pi\varrho_0/L)}.$$

Man hat also, wie behauptet, eine Entwicklung der Form (5.30). Da ϱ auf das Intervall $[0; \varrho_0]$ und z auf das Intervall $[0; L]$ eingeschränkt ist, tritt hier nur eine Summation auf statt eines Integrals.

Zusammenfassung

- Für quadratintegrale Funktionen g und h , die auf einem Intervall I definiert sind, kann man ein Skalarprodukt definieren durch

$$\langle g, h \rangle := \int_I g^*(x)h(x) dx.$$

- Ein System von Funktionen f_j heißt vollständig auf einem Intervall I , wenn man alle quadratintegralen Funktionen f auf dem Intervall nach ihnen entwickeln kann, d. h., es gibt eine Reihendarstellung

$$\sum_j a_j f_j(x),$$

mit

$$a_j = \langle f_j, f \rangle,$$

die im quadratischen Mittel gegen f konvergiert. Gilt für die Funktionen des Systems zusätzlich

$$\langle f_j, f_k \rangle = n_j \delta_{jk},$$

mit Konstanten n_j , so heißt das Funktionensystem orthogonal, speziell für $n_j = 1$ orthonormal.

- Ein Differenzialoperator D heißt bezüglich eines Skalarprodukts selbstadjungiert, wenn

$$\langle g, Dh \rangle = \langle Dg, h \rangle$$

gilt. Die Eigenfunktionen eines selbstadjungierten Differenzialoperators, also die Funktionen f_j , für die

$$Df_j(x) = \lambda_j f_j(x)$$

gilt mit Eigenwerten λ_j , bilden bezüglich dieses Skalarprodukts ein vollständiges orthogonales System.

- Alle obigen Aussagen gelten entsprechend auch für Funktionen von mehreren Variablen.
- Zum Lösen von partiellen linearen Differenzialgleichungen kann man oft einen Separationsansatz verwenden, d. h., man schreibt die gesuchte Lösung als ein Produkt aus Funktionen, die nur von jeweils einer der Variablen abhängen. Kann man dann die Abhängigkeit von jeweils einer Variable auf jeweils einer Seite der Gleichung isolieren, so müssen die beiden Terme konstant sein, woraus man gewöhnliche Differenzialgleichungen erhält. In vielen Fällen ist diese gewöhnliche Differenzialgleichung eine Eigenwertgleichung mit einem selbstadjungierten Differenzialoperator, sodass man als Lösung ein vollständiges orthogonales Funktionensystem erhält.
- Das Lösen der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten führt für die Winkelvariablen auf die Kugelflächenfunktionen

$$Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = N_{\ell m} P_{\ell}^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi},$$

die ein vollständiges Orthonormalsystem auf der Kugeloberfläche bilden. Dabei sind die $N_{\ell m}$ Normierungsfaktoren und die P_{ℓ}^m zugeordnete Legendre-Funktionen, insbesondere für $m = 0$ die Legendre-Polynome.

- Das Lösen der Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten führt für die radiale Variable ϱ auf die (zylindrischen) Bessel-Funktionen $J_m(a\varrho)$, $N_m(a\varrho)$, $I_m(a\varrho)$ und $K_m(a\varrho)$, die für jedes feste m , aber unterschiedliche a , jeweils ein vollständiges Orthogonalsystem bilden. Ist der Bereich von ϱ nicht eingeschränkt, so kann a eine beliebige positive reelle Zahl sein; gilt dagegen $\varrho \in [0; \varrho_0]$, so sind für a nur diskrete Werte möglich.

5.5 Aufgaben

5.1 Mit der Mathematik aus diesem Kapitel sind wir nun so weit, eine Behauptung aus Kap. 4 zu beweisen, nämlich dass die Breite der Fourier-Transformation einer Funktion umso größer ist, je kleiner die Breite der Funktion selbst ist. Wir beschränken uns auf den einfachen Fall, dass beide Funktionen symmetrisch zur y -Achse oder zum Ursprung sind; außerdem soll f reell und normiert sein. (Ansonsten ist der Beweis konzeptuell ähnlich, aber rechnerisch komplizierter.) Die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} t |f(t)|^2 dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega$$

verschwinden dann (warum?). Definieren wir nun die Breiten durch

$$(\Delta t)^2 := \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt,$$

$$(\Delta \omega)^2 := \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega,$$

(vgl. die Definition der Varianz einer kontinuierlichen Zufallsgröße in der Statistik!), so gilt

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{2}.$$

Beweise dies mithilfe von Ergebnissen aus Aufgabe 4.6 und des Standardskalarprodukts

$$\langle g, h \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(t) h(t) dt.$$

(*Tipp*: Verwende die Schwarz'sche Ungleichung. Diese sollte aus der linearen Algebra bekannt sein – ansonsten in der mathematischen Literatur nachlesen!)

In der Quantenmechanik führt übrigens im Prinzip dieselbe Rechnung auf die Heisenberg'sche Unschärferelation.

Lösung

Zunächst kann man mithilfe von 4.6 auch schreiben:

$$(\Delta\omega)^2 = \int |\dot{f}(t)|^2 dt.$$

Wir haben also

$$(\Delta t)^2 = \|tf\|^2 \quad \text{und} \quad (\Delta\omega)^2 = \|\dot{f}\|^2.$$

Die Schwarz'sche Ungleichung (die für *jedes* Skalarprodukt gilt!), besagt nun

$$\|tf\|^2 \cdot \|\dot{f}\|^2 \geq |\langle tf, \dot{f} \rangle|^2.$$

Berechnen wir das Skalarprodukt auf der rechten Seite:

$$\begin{aligned} \langle tf, \dot{f} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} tf^*(t) \dot{f}(t) dt \\ &= [tf^*(t) f(t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} (tf^*(t)) f(t) dt \\ &= 0 - \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) f(t) dt - \int_{-\infty}^{\infty} t f^*(t) f(t) dt. \end{aligned}$$

(Die Randwerte verschwinden dabei wie üblich, da f ja quadratintegrabel sein muss; damit Δt definiert ist, muss sogar tf quadratintegrabel sein!) Wegen der vorausgesetzten Normiertheit ergibt das erste Integral eins; das zweite Integral ist identisch zum ursprünglichen Skalarprodukt, da f reell sein soll. Also ist

$$2\langle tf, \dot{f} \rangle = 2 \int_{-\infty}^{\infty} tf^*(t) \dot{f}(t) dt = -1.$$

Die Schwarz'sche Ungleichung liefert also

$$(\Delta t)^2 \cdot (\Delta\omega)^2 \geq (-1/2)^2$$

und damit das zu zeigende Ergebnis.

5.2 Eine Funktion f habe bezüglich eines orthonormalen Funktionensystems f_k die Darstellung

$$f(x) = \sum_k a_k f_k(x)$$

mit komplexen Koeffizienten a_k . Die Norm der Funktion sei wie üblich über das passende (komplexe) Skalarprodukt definiert. Zeige, dass dann gilt:

$$||f||^2 = \sum_k |a_k|^2.$$

(Tipp: Verwende die Sesquilinearität des Skalarprodukts.)

Dies ist völlig analog zur Berechnung des Betrags eines endlichdimensionalen Vektors aus seinen Komponenten bezüglich einer orthonormalen Basis und ist als *Parseval'sche Gleichung* bekannt, nach dem französischen Mathematiker *Marc-Antoine Parseval des Chênes* (1755–1836), der sie 1799 veröffentlichte – allerdings ohne Beweis, da er sie für offensichtlich hielt.

Lösung

Nach Definition der Norm ist

$$||f||^2 = \langle f, f \rangle = \left\langle \sum_k a_k f_k, \sum_j a_j f_j \right\rangle,$$

wobei die gegebene Entwicklung nach den f_k eingesetzt wurde. Dabei muss man aber daran denken, dass die beiden Summen unabhängig voneinander sind; deswegen muss man unterschiedliche Summationsindizes verwenden!

Nun benutzen wir die Sesquilinearität eines komplexen Skalarprodukts (beachte: Wie es genau definiert ist, ist dafür völlig irrelevant!):

$$\begin{aligned} \langle a f + b g, h \rangle &= a^* \langle f, h \rangle + b^* \langle g, h \rangle \quad \text{und} \\ \langle f, a g + b h \rangle &= a \langle f, g \rangle + b \langle f, h \rangle. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$||f||^2 = \sum_{k,j} a_k^* a_j \langle f_k, f_j \rangle.$$

Mit der Orthonormalität der f_k wird dies zu

$$||f||^2 = \sum_{k,j} a_k^* a_j \delta_{kj} = \sum_k a_k^* a_k = \sum_k |a_k|^2.$$

Was zu zeigen war.

5.3 Wir suchen ein reelles, vollständiges *Orthonormalsystem* auf dem halboffenen, unendlichen Intervall $[0; \infty)$ für das Standardskalarprodukt

$$\langle g, h \rangle = \int_0^\infty g(x)h(x) \, dx.$$

Mit Polynomen allein klappt das natürlich nicht (warum?). Stattdessen nehmen wir als Ansatz

$$f_n(x) = x^n e^{-x/2}$$

mit $n \in \mathbb{N}$; der Faktor $1/2$ ist dabei mal wieder reine Konvention, deren Sinn im Laufe der Rechnung klar werden wird.

- Ermittle mit dem Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren die ersten drei Funktionen L_0 , L_1 und L_2 dieses Systems. (Es ergeben sich Produkte aus Polynomen und $e^{-x/2}$; Erstere heißen *Laguerre-Polynome* und sind insbesondere in der Quantenmechanik wichtig, beispielsweise beim Wasserstoffatom und bei der Bewegung eines geladenen Teilchens in einem konstanten Magnetfeld.)
- Wie müsste man den Gewichtungsfaktor $\rho(x)$ im Skalarprodukt wählen, damit die Polynome allein bereits ein vollständiges Orthonormalsystem bilden?
- Zeige: Die drei berechneten Funktionen sind Eigenfunktionen zum Differenzialoperator

$$D := \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} \right) - \frac{x}{4},$$

und gib den jeweiligen Eigenwert an.

- Zeige: Bezüglich des eingangs definierten Skalarprodukts ist dieser Differenzialoperator selbstadjungiert.

Lösung

Zunächst zur Frage in Klammern: Polynome allein können wir nicht verwenden, weil Integrale über diese auf dem verwendeten Intervall divergieren, die Funktionen also nicht normierbar wären.

- Beginnen wir mit L_0 . Dafür müssen wir $f_0(x) = x^0 e^{-x/2} = e^{-x/2}$ nur normieren, wofür wir zunächst die Norm berechnen:

$$\|f_0\|^2 = \int_0^\infty (f_0(x))^2 dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1.$$

f_0 ist also bereits normiert – und hier sehen wir schon den Sinn der Konvention, im Exponenten einen Faktor $1/2$ zu verwenden! Wir haben damit schlicht $L_0(x) = f_0(x) = e^{-x/2}$.

Nach dem Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren müssen wir als Nächstes von f_1 den Anteil abziehen, der parallel zu L_0 ist:

$$\tilde{f}_1(x) = f_1(x) - \frac{\langle f_1, L_0 \rangle}{\langle L_0, L_0 \rangle} L_0(x) = f_1(x) - \langle f_1, L_0 \rangle L_0(x);$$

dabei wurde verwendet, dass L_0 normiert ist. Mit

$$\langle f_1, L_0 \rangle = \int_0^{\infty} x^1 e^{-x/2} \cdot e^{-x/2} dx = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1$$

erhalten wir

$$\tilde{f}_1(x) = x e^{-x/2} - 1 \cdot e^{-x/2} = (x-1)e^{-x/2}.$$

Hier wird die Berechnung der Norm schon aufwendiger:

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_1\|^2 &= \int_0^{\infty} \left(\tilde{f}_1(x) \right)^2 dx \\ &= \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx - 2 \int_0^{\infty} x e^{-x} dx + \int_0^{\infty} e^{-x} dx \\ &= 2! - 2 \cdot 1! + 0! = 1. \end{aligned}$$

Dabei wurde die Formel

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$$

verwendet, die man in Formelsammlungen findet (oft unter dem Stichwort „Gamma-Funktion“) oder einfach selbst kurz per Induktion herleitet. Auch \tilde{f}_1 ist also bereits normiert, und wir können direkt $L_1(x) = \tilde{f}_1(x) = (x-1)e^{-x/2}$ setzen. (Anmerkung: In der Literatur zu den Laguerre-Polynomen wird hier meist das entgegengesetzte Vorzeichen verwendet.)

Weiter geht's. Wir müssen berechnen:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_2(x) &= f_2(x) - \frac{\langle f_2, L_0 \rangle}{\langle L_0, L_0 \rangle} L_0(x) - \frac{\langle f_2, L_1 \rangle}{\langle L_1, L_1 \rangle} L_1(x) \\ &= f_2(x) - \langle f_2, L_0 \rangle L_0(x) - \langle f_2, L_1 \rangle L_1(x). \end{aligned}$$

Dafür brauchen wir

$$\begin{aligned} \langle f_2, L_0 \rangle &= \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 2, \\ \langle f_2, L_1 \rangle &= \int_0^{\infty} x^2 (x-1) e^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} dx - \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx \\ &= 3! - 2! = 4. \end{aligned}$$

Also ist

$$\tilde{f}_2(x) = x^2 e^{-x/2} - 2e^{-x/2} - 4(x-1)e^{-x/2} = (x^2 - 4x + 2)e^{-x/2}.$$

Mit

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_2\|^2 &= \int_0^\infty \left(\tilde{f}_2(x)\right)^2 dx \\ &= \int_0^\infty x^4 e^{-x} dx + 16 \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx + 4 \int_0^\infty e^{-x} dx \\ &\quad - 8 \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx + 4 \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx - 16 \int_0^\infty x e^{-x} dx \\ &= 4! + 16 \cdot 2 + 4 - 8 \cdot 3! + 4 \cdot 2 - 16 = 4 \end{aligned}$$

folgt schließlich

$$L_2(x) = \frac{1}{2} \tilde{f}_2(x) = \frac{1}{2} (x^2 - 4x + 2) e^{-x/2}.$$

- (b) Aus der Form der berechneten Integrale sollte offensichtlich sein, dass man $\rho(x) = e^{-x}$ wählen müsste.
- (c) Hier muss man nur ableiten können; die Zwischenschritte werden deshalb nicht explizit angegeben. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} DL_0(x) &= \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} e^{-x/2} \right) - \frac{x}{4} e^{-x/2} = \dots = -\frac{1}{2} e^{-x/2} = -\frac{1}{2} L_0(x), \\ DL_1(x) &= \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} (x-1) e^{-x/2} \right) - \frac{x}{4} (x-1) e^{-x/2} \\ &= \dots = -\frac{3}{2} (x-1) e^{-x/2} = -\frac{3}{2} L_1(x), \\ DL_2(x) &= \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} \frac{1}{2} (x^2 - 4x + 2) e^{-x/2} \right) - \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{2} (x^2 - 4x + 2) e^{-x/2} \\ &= \dots = -\frac{5}{4} (x^2 - 4x + 2) e^{-x/2} = -\frac{5}{2} L_2(x). \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also $-1/2$, $-3/2$ und $-5/2$.

- (d) Zunächst ist klar, dass für beliebige quadratintegrale Funktionen g und h , für die das Integral existiert, immer

$$\int_0^\infty g(x) \left(\frac{x}{4} h(x) \right) dx = \int_0^\infty \left(\frac{x}{4} g(x) \right) h(x) dx$$

ist. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass der Differenzialoperator

$$\bar{D} = \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} \right)$$

selbstadjungiert ist. Betrachten wir das Skalarprodukt $\langle g, \bar{D}h \rangle$ und integrieren partiell:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(x) \bar{D}h(x) dx &= \int_0^\infty g(x) \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} h(x) \right) dx \\ &= \left[g(x) \left(x \frac{d}{dx} h(x) \right) \right]_0^\infty - \int_0^\infty \left(\frac{d}{dx} g(x) \right) \left(x \frac{d}{dx} h(x) \right) dx. \end{aligned}$$

Der Randterm verschwindet wie üblich: Für $x \rightarrow \infty$ muss $g(x) \rightarrow 0$ gelten, da g sonst nicht quadratintegrabel wäre; deshalb muss auch $xg(x)$ für $x \rightarrow 0$ verschwinden. Im übrigen Integral können wir nochmals partiell integrieren:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g(x) \bar{D}h(x) dx &= - \int_0^\infty \left(x \frac{d}{dx} g(x) \right) \left(\frac{d}{dx} h(x) \right) dx \\ &= - \left[\left(x \frac{d}{dx} g(x) \right) h(x) \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} g(x) \right) h(x) dx. \end{aligned}$$

Wieder verschwindet der Randterm; es bleibt

$$\int_0^\infty g(x) \bar{D}h(x) dx = \int_0^\infty h(x) \bar{D}g(x) dx,$$

also

$$\langle g, \bar{D}h \rangle = \langle \bar{D}g, h \rangle.$$

Dies war zu zeigen.

5.4 Finde die allgemeine in φ periodische Lösung der Laplace-Gleichung in ebenen Polarkoordinaten mithilfe eines Separationsansatzes. Beachte insbesondere auch die Lösungen, die von φ unabhängig sind. (Tipp für die radiale Gleichung: Überlege dir zunächst, welche der Grundfunktionen hier Lösungen sein könnten.)

Lösung

Der Laplace-Operator in ebenen Polarkoordinaten ist identisch mit dem in Zylinderkoordinaten – nur die Ableitungen nach z fallen weg. Wir haben also zu lösen:

$$\Delta \phi(\varrho, \varphi) = \Delta_\varrho \phi + \frac{1}{\varrho^2} \Delta_\varphi \phi = \partial_\varrho^2 \phi + \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho \phi + \frac{1}{\varrho^2} \partial_\varphi^2 \phi = 0.$$

Genau wie in Kugel- und Zylinderkoordinaten suchen wir zunächst die Eigenfunktionen zu ∂_φ^2 . Und genauso wie dort folgt wegen der geforderten Periodizität, dass die einzig möglichen Lösungen $e^{im\varphi}$ mit ganzzahligem m sind. (Wird keine Periodizität gefordert, so ist $m \in \mathbb{C}$ möglich, also auch reelle Exponentialfunktionen; speziell für $m = 0$ ergeben sich auch lineare Funktionen.)

Mit dem Separationsansatz

$$\phi(\varrho, \varphi) = R_m(\varrho)e^{im\varphi}$$

ergibt sich für R_m die gewöhnliche Differenzialgleichung

$$\frac{d^2}{d\varrho^2} R_m + \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} R_m - \frac{m^2}{\varrho^2} R_m = 0.$$

Wie bereits bei der Lösung der Radialgleichung in Kugelkoordinaten sehen wir schnell, dass von den Grundfunktionen eigentlich nur eine einzige Sorte diese Differenzialgleichung erfüllen kann, nämlich die Potenzfunktionen. Der Ansatz $R_m(\varrho) = \varrho^n$ führt auf die Gleichung

$$n(n-1) + n - m^2 = 0,$$

was die Lösungen $n = \pm m$ hat. Damit sind anscheinend schon alle Lösungen gefunden.

Wie im Aufgabentext erwähnt, muss man bei den von φ unabhängigen Lösungen, also denen mit $m = 0$, aber aufpassen: Dafür hätte man ja nur die eine Lösung $R_0(\varrho) = \varrho^0 = 1$; da dies hier eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung ist, muss es aber noch eine zweite, linear unabhängige Lösung geben. Diese ist relativ leicht zu finden: Für $m = 0$ haben wir die Differenzialgleichung

$$\frac{d^2}{d\varrho^2} R_0 + \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} R_0 = 0.$$

Setzen wir $\tilde{R} := R'_0$, so bleibt die Differenzialgleichung erster Ordnung

$$\tilde{R}' + \frac{\tilde{R}}{\varrho} = 0,$$

die mit Trennen der Variablen und Integration sofort gelöst werden kann:

$$\tilde{R}(\varrho) = \frac{C}{\varrho}$$

mit einer Integrationskonstante C . Mit einer weiteren Integration erhält man dann

$$R_0(\varrho) = D + C \ln \varrho$$

mit einer weiteren Integrationskonstante D . Dieser erste Summand entspricht aber einfach der schon bekannten Lösung $R_0 = 1$; der zweite Summand enthält die gesuchte zweite Funktion, $\ln \varrho$.

Die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung in ebenen Polarkoordinaten ist also bei vorausgesetzter Periodizität in φ

$$\phi(\varrho, \varphi) = R_{01} + R_{02} \ln \varrho + \sum_{m=-\infty; m \neq 0}^{\infty} (R_{m1} \varrho^m + R_{m2} \varrho^{-m}) e^{im\varphi} \quad (5.33)$$

mit Konstanten R_{m1} und R_{m2} . Dass dies wirklich die allgemeinst mögliche Lösung ist, folgt wieder aus der Vollständigkeit des Funktionensystems $e^{im\varphi}$.

Im Vergleich zur Lösung in kartesischen Koordinaten (5.15) ist das Ergebnis hier deutlich einfacher. Dies liegt vor allem daran, dass im Gegensatz zu den Koordinaten x und y der Winkel φ nur Werte in einem endlichen Intervall annehmen kann.

Interessant ist übrigens noch der Vergleich zu einem bekannten Potenzialproblem der Elektrostatik: der in Einführungsvorlesungen meist besprochene Zylinderkondensator. Da die Problemstellung dort von z und φ unabhängig ist, kommen nur die Lösungen mit $m = 0$ infrage – und tatsächlich ist das Potenzial des Zylinderkondensators linear in $\ln \varrho$.

5.5 Zeige, dass der Winkelanteil Δ_Ω des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle g, h \rangle = \int g^*(\vartheta, \varphi) h(\vartheta, \varphi) d\Omega$$

selbstadjungiert ist. g und h seien dabei in φ periodisch.

Lösung

Im Folgenden setzen wir immer stillschweigend voraus, dass die Funktionen so gewählt sind, dass alle Integrale existieren.

Der Differenzialoperator ist gegeben durch

$$\Delta_\Omega = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \partial_\varphi^2.$$

Betrachten wir zunächst den zweiten Summanden:

$$\begin{aligned} \int g^*(\vartheta, \varphi) \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \partial_\varphi^2 h(\vartheta, \varphi) d\Omega &= \int_0^\pi d\vartheta \frac{1}{\sin \vartheta} \int_0^{2\pi} d\varphi g^*(\vartheta, \varphi) \partial_\varphi^2 h(\vartheta, \varphi) \\ &= \int_0^\pi d\vartheta \frac{1}{\sin \vartheta} [g^*(\vartheta, \varphi) \partial_\varphi h(\vartheta, \varphi)]_0^{2\pi} \\ &\quad - \int_0^\pi d\vartheta \frac{1}{\sin \vartheta} \int_0^{2\pi} d\varphi (\partial_\varphi g^*(\vartheta, \varphi)) (\partial_\varphi h(\vartheta, \varphi)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0 - \int_0^\pi d\vartheta \frac{1}{\sin \vartheta} [(\partial_\varphi g^*(\vartheta, \varphi)) h(\vartheta, \varphi)]_0^\pi \\
&\quad + \int_0^\pi d\vartheta \frac{1}{\sin \vartheta} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\partial_\varphi^2 g^*(\vartheta, \varphi) \right) h(\vartheta, \varphi) \\
&= -0 + \int \left(\frac{1}{\sin^2 \vartheta} \partial_\varphi^2 g^*(\vartheta, \varphi) \right) h(\vartheta, \varphi) d\Omega.
\end{aligned}$$

Die Randterme verschwinden wegen der Periodizität von g und h . Letztlich hat diese Rechnung nur mal wieder gezeigt, dass der Operator der zweiten Ableitung selbstadjungiert ist.

Nun zum ersten Summanden. Das auszuwertende Skalarprodukt ist

$$\begin{aligned}
&\int g^*(\vartheta, \varphi) \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} h(\vartheta, \varphi) \right) d\Omega \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta g^*(\vartheta, \varphi) \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} h(\vartheta, \varphi) \right) \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[g^*(\vartheta, \varphi) \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} h(\vartheta, \varphi) \right) \right]_0^\pi \\
&\quad - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} g^*(\vartheta, \varphi) \right) \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} h(\vartheta, \varphi) \right) \\
&= 0 - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} g^*(\vartheta, \varphi) \right) \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} h(\vartheta, \varphi) \right) \\
&= - \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} g^*(\vartheta, \varphi) \right) h(\vartheta, \varphi) \right]_0^\pi \\
&\quad + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} g^*(\vartheta, \varphi) \right) h(\vartheta, \varphi) \\
&= \int \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} g^*(\vartheta, \varphi) \right) h(\vartheta, \varphi) d\Omega.
\end{aligned}$$

Passt. (Dass die Randterme hier verschwinden, sollte offensichtlich sein.)

Alternativ könnte man auch $x = \cos \vartheta$ substituieren und hätte dann im Wesentlichen den Legendre-Differenzialoperator – von dem wir schon wissen, dass er selbstadjungiert ist.

5.6 Wir betrachten den Raum der quadratintegriblen Funktionen auf $[0; \infty)$, die bei $x = 0$ verschwinden, und zeigen, wie man mit Bessel-Funktionen dafür ein orthogonales Funktionensystem konstruiert:

- (a) Zeige: Für jedes feste $m \in \mathbb{Z}$ sind die Funktionen $f_k^{(m)}(x) = \sqrt{x} J_m(kx)$ für alle $k \in \mathbb{R}^+$ jeweils Eigenfunktionen zum Differenzialoperator

$$D := \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1/4 - m^2}{x^2}.$$

Was sind die Eigenwerte?

- (b) Begründe: Bezüglich des Standardskalarprodukts ist dieser Differenzialoperator selbstadjungiert. Setze dabei voraus, dass alle auftretenden Integrale wohldefiniert sind. Wenn wir andererseits nur Funktionen auf dem Intervall $[0; c]$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ betrachten: Auf welche Werte muss man dann k einschränken, damit der Operator auf dem Funktionenraum, der von den f_k aufgespannt wird, selbstadjungiert ist?
- (c) Begründe damit: Für jedes feste m ist

$$\langle g, h \rangle := \int_0^\infty x \cdot J_m(kx) \cdot J_m(k'x) dx = N(k) \delta(k - k')$$

mit einem Normierungsfaktor $N(k)$, den man dem Kapiteltext entnehmen kann.

- (d) Es sei nun für festes m eine Funktion auf $[0; \infty)$ bezüglich der $J_m(kx)$ entwickelt,

$$f(x) = \int_0^\infty \tilde{f}(k) J_m(kx) dk.$$

Wie kann man $\tilde{f}(k)$ berechnen?

Lösung

- (a) Zunächst setzen wir abkürzend $y := kx$. Die Bessel'sche Differenzialgleichung kann für $J_m(y)$ dann geschrieben werden als

$$\frac{d^2}{dy^2} J_m(y) + \frac{1}{y} \frac{d}{dy} J_m(y) - \frac{m^2}{y^2} J_m(y) = -J_m(y).$$

Setzen wir $y = kx$ wieder ein und multiplizieren mit k^2 , so bleibt

$$\frac{d^2}{dx^2} J_m(kx) + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} J_m(kx) - \frac{m^2}{x^2} J_m(kx) = -k^2 J_m(kx).$$

Nun betrachten wir, wie im Aufgabentext vorgegeben, die Funktionen $f_k^{(m)}(x) = \sqrt{x} J_m(kx)$. Damit ist $J_m(kx) = \frac{1}{\sqrt{x}} f_k^{(m)}(x)$, also

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} J_m(kx) &= -\frac{1}{2x^{3/2}} f_k^{(m)}(x) + \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{d}{dx} f_k^{(m)}(x), \\ \frac{d^2}{dx^2} J_m(kx) &= \frac{3}{4x^{5/2}} f_k^{(m)}(x) - \frac{1}{x^{3/2}} \frac{d}{dx} f_k^{(m)}(x) + \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{d^2}{dx^2} f_k^{(m)}(x).\end{aligned}$$

Setzen wir dies alles in die Differenzialgleichung für $J_m(kx)$ oben ein und fassen zusammen, so bleibt

$$\frac{1/4 - m^2}{x^2} \frac{1}{\sqrt{x}} f_k^{(m)}(x) + \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{d^2}{dx^2} f_k^{(m)}(x) = -k^2 \frac{1}{\sqrt{x}} f_k^{(m)}(x).$$

Multiplizieren wir noch mit \sqrt{x} , so kann dies geschrieben werden als

$$D f_k^{(m)}(x) = -k^2 f_k^{(m)}(x),$$

also eine Eigenwertgleichung für die Funktionen $f_k^{(m)}(x)$ mit Eigenwerten $-k^2$. Dies war zu zeigen.

- (b) Dem zweiten Summanden in D sieht man sofort an, dass er selbstadjungiert ist. Der erste Summand ist der Operator der zweiten Ableitung – und von dem wissen wir sowieso schon, dass er selbstadjungiert ist. Wer's nochmal nachrechnen will – die Rechnung läuft wie üblich: zweimaliges partielles Integrieren und begründen, dass die Randterme jeweils verschwinden. Bei $x = 0$ hatten wir dies explizit für alle Funktionen des Raums gefordert; dass die Funktionen für $x \rightarrow \infty$ verschwinden müssen, folgt daraus, dass sie quadratintegrabel sein sollen.

Betrachten wir dagegen nur das Intervall $[0; c]$, so bleiben beim partiellen Integrieren folgende Randterme übrig:

$$-\left[g(x) \frac{d}{dx} h(x) \right]_{x=c} + \left[h(x) \frac{d}{dx} g(x) \right]_{x=c}.$$

Dies verschwindet, wenn g und h oder ihre Ableitungen bei $x = c$ gleich null sind. Setzt man die Funktionen $f_k^{(m)}(x)$ ein, so folgt nach einigen Zwischenschritten, dass $J_m(kc)$ oder $J'_m(kc)$ gleich null sein muss (die Summanden mit Ableitungen der Wurzel heben sich gegenseitig weg) – d. h., kc muss eine Nullstelle der Bessel-Funktion selbst oder ihrer Ableitung sein. Da die Funktionen nur abzählbar viele Nullstellen haben, können wir auf dem endlichen Intervall $[0; c]$ alle quadratintegrablen Funktionen, die bzw. deren Ableitungen am Rand verschwinden, in eine Reihe mit den Bessel-Funktionen $J_m(k_j x)$ oder $J'_m(k_j x)$ entwickeln, mit $k_j = x_j/c$ und x_j einer Nullstelle von J_m bzw. J'_m .

- (c) Da D bezüglich des Standardskalarprodukts selbstadjungiert ist, folgt, dass die Funktionen $f_k^{(m)}(x)$ bezüglich dieses Skalarprodukts orthogonal sind:

$$\int_0^{\infty} f_k^{(m)}(x) f_{k'}^{(m)}(x) dx = 0 \quad \text{für } k \neq k'.$$

Setzen wir die explizite Gestalt der $f_k^{(m)}$ ein, so folgt

$$\int_0^{\infty} x J_m(kx) J_m(k'x) dx = 0 \quad \text{für } k \neq k'.$$

Da $k \in \mathbb{R}^+$ völlig beliebig ist, haben wir hier ein *überabzählbares* Orthogonalsystem – vgl. das Fourier-Integral! Das impliziert aber auch, dass

$$\int_0^{\infty} x J_m(kx) J_m(k'x) dx = N(k) \delta(k - k')$$

ist. Aus dem Kapiteltext, Gleichung (5.31), können wir entnehmen, dass $N(k) = 1/k$ gilt.

- (d) Wir multiplizieren die Darstellung von f mit x und mit $J_m(k'x)$ und integrieren über x :

$$\int_0^{\infty} x f(x) J_m(k'x) dx = \int_0^{\infty} dk \int_0^{\infty} dx x \tilde{f}(k) J_m(kx) J_m(k'x).$$

Dann nutzen wir die Orthogonalität aus:

$$\int_0^{\infty} x f(x) J_m(k'x) dx = \int_0^{\infty} \tilde{f}(k) N(k) \delta(k - k') dk.$$

Und integrieren schließlich noch über k :

$$\int_0^{\infty} x f(x) J_m(k'x) dx = \tilde{f}(k') N(k').$$

Mit $N(k') = 1/k'$ folgt, wenn wir noch k' durch k ersetzen,

$$\tilde{f}(k) = k \int_0^{\infty} x f(x) J_m(kx) dx.$$

Bis auf die zusätzlichen Faktoren x und k ist dies mal wieder völlig analog zum Fourier-Integral.

Wozu brauchen wir die komplexe Funktionentheorie?

6

In Kap. 4 haben wir bei der Berechnung von Fourier-Koeffizienten und -Transformierten öfters Integrale über komplexe Funktionen berechnen müssen. Dort haben wir die Integrale einfach wie bei reellen Funktionen behandelt. In diesem Kapitel werden wir uns nun im Detail anschauen, welche Besonderheiten sich bei Integralen über komplexe Funktionen ergeben.

Dabei verallgemeinern wir gleich noch ein wenig: Nun sollen nicht nur die Funktionswerte komplex sein, sondern auch die Argumente der Funktionen, d. h., wir betrachten Funktionen, die einer komplexen Zahl jeweils eine andere zuordnen:

$$f : z \mapsto f(z) \quad \text{mit } z \in \mathbb{C} \text{ und } f(z) \in \mathbb{C}.$$

Im Folgenden werden wir uns dann auf differenzierbare Funktionen beschränken – wobei noch zu klären sein wird, was das hier genau bedeutet. Insbesondere werden wir sehen, dass bei solchen Funktionen die Differenziation und die Integration deutlich enger miteinander zusammenhängen als bei reellen Funktionen einer Variable. (Was auch nicht verwunderlich ist, denn solche komplexen Funktionen entsprechen ja (zweidimensionalen) Vektorfeldern – und dass es bei diesen zahlreiche Zusammenhänge zwischen Ableitung und Integral gibt, haben wir bereits in Kap. 3 gesehen.)

Das Teilgebiet der Mathematik, das sich mit solchen Funktionen befasst, heißt *Funktionentheorie* (als ob es nur komplexe Funktionen gäbe ... der Name ist wohl nur historisch zu begründen); manchmal spricht man auch von der *komplexen Analysis*. In diesem Kapitel können wir nur auf die absoluten Grundlagen eingehen. Interessierte Leser seien auf die sehr reichhaltige Literatur zu diesem Thema verwiesen; mir hat beispielsweise Freitag und Busam (2006) gut gefallen.

6.1 Holomorphe Funktionen – und der Integralsatz von Cauchy

Als Physiker setzt man meistens voraus, dass die Funktionen, die man verwendet, differenzierbar sind. Bei komplexen Funktionen ist das prinzipiell genauso definiert wie bei den reellen: Eine Funktion ist differenzierbar bei z_0 , wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (6.1)$$

existiert. Man nennt die Funktion dann *holomorph* in z_0 , in älterer Literatur manchmal auch „regulär“. Ist f für jede komplexe Zahl holomorph, so heißt die Funktion *ganz*.

In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass im Gegensatz zu reellen Funktionen einer Variable die Bedingung (6.1) zu deutlich mehr Einschränkungen führt – sich aber andererseits aus der Differenzierbarkeit viel weitreichendere Schlussfolgerungen ergeben als bei reellen Funktionen. Bereits hier können wir aber bemerken: Aus der Definition folgt sofort, analog zu den Beweisen im Reellen, dass für komplex differenzierbare Funktionen die bekannten Ableitungsregeln gelten, insbesondere die Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel. Ist eine aus dem Reellen bekannte Funktion komplex differenzierbar, so ergibt sich deshalb bei der Ableitungsfunktion derselbe Funktionsterm wie im Reellen.

6.1.1 Die Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen

Im Gegensatz zu reellen Funktionen gibt es hier unendlich viele Richtungen, aus denen man sich an den Punkt z_0 annähern kann. Dies ist weitgehend analog zu reellen Funktionen von zwei reellen Variablen, und ganz ähnlich wie bei jenen genügt es letztlich auch bei den komplexen Funktionen, wenn man sich auf zwei linear unabhängige Richtungen beschränkt. Genauer gilt: Wenn der Grenzwert (6.1) sowohl für rein reelle Δz als auch für rein imaginäre Δz existiert und beide Grenzwerte übereinstimmen, so ist f differenzierbar bei z_0 . Für den Beweis sei auf Bücher zur Funktionentheorie verwiesen.

Schreiben wir die komplexe Zahl z ausführlich als $x + iy$ und die komplexe Funktion $f(z)$ als $u(x, y) + iv(x, y)$, so haben wir also die Bedingung

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) + iv(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i\Delta y}. \end{aligned}$$

Wenn beide Grenzwerte existieren, so bedeutet dies, dass u und v partiell nach x und y differenzierbar sind; damit erhalten wir

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{1}{i} \left[\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} + i \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \right].$$

Betrachten wir Real- und Imaginärteil dieser Gleichung einzeln, so folgen die *Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (6.2)$$

Diese beiden Bedingungen sind äquivalent zur Forderung, dass der Grenzwert (6.1) existiert, also dazu, dass f bei z_0 differenzierbar ist. Benannt sind sie nach dem französischen Mathematiker *Augustin-Louis Cauchy*, 1789–1857, der viele bedeutende Beiträge zur Analysis und insbesondere zur komplexen Funktionentheorie leistete (wie wir auch in Abschn. 6.1.3 sehen werden), und dem deutschen Mathematiker *Georg Friedrich Bernhard Riemann*, 1826–1866, der auch in vielen anderen Gebieten der Mathematik wie der Zahlentheorie und der Differenzialgeometrie grundlegende Resultate erzielte.

Ein anderer Blickwinkel kann auch hier für das Verständnis hilfreich sein: Betrachten wir f als reelle, vektorwertige Funktion der beiden Variablen x und y , so ist die Jacobi-Matrix von f gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix},$$

mit den Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen also

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

Man überlegt sich leicht, dass die Multiplikation einer Matrix von solcher Form

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

mit einem Vektor $(x, y)^\top$ auf dasselbe Ergebnis führt wie die Multiplikation der komplexen Zahl $a + ib$ mit der komplexen Zahl $x + iy$, wenn man wie üblich den \mathbb{R}^2 mit dem Körper der komplexen Zahlen identifiziert. Die Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen bedeuten also nichts anderes, als dass die Jacobi-Matrix von f einer komplexen Zahl entspricht.

Außerdem wäre noch anzumerken, dass die Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen auch als

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (6.3)$$

geschrieben werden können. Macht man sich klar, dass die zu f komplex konjugierte Funktion die Darstellung $f^*(x, y) = u(x, y) - iv(x, y)$ hat, was im \mathbb{R}^2 einfach $(u, -v)^\top$ entspricht, so sind die Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen also äquivalent zu

$$\operatorname{div} f^* = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} f^* = 0.$$

(Hier werden die Divergenz und Rotation für reelle Funktionen zweier Variablen ganz analog zu denen für Funktionen von drei Variablen berechnet – man muss nur beachten, dass die Rotation nun einen Skalar ergibt statt eines Vektors.) Holomorphe Funktionen sind also solche, bei denen die komplex konjugierte Funktion, betrachtet als reelles Vektorfeld zweier reeller Variablen, quellen- und wirbelfrei ist.

6.1.2 Beispiele und Gegenbeispiele

Nach dem vorhergehenden sehr theoretischen Abschnitt wird es Zeit, dass wir uns einige konkrete Funktionen näher anschauen.

- Als erstes, nahezu triviales Beispiel betrachten wir die konstanten Funktionen $f(z) = c \in \mathbb{C}$. Dafür folgt $u = \operatorname{Re} c$ und $v = \operatorname{Im} c$ und damit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Die Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen sind offensichtlich an jedem Punkt erfüllt. f ist damit überall holomorph und, da sie auch für alle komplexen Zahlen definiert ist, ganz.

- Fast genauso trivial ist die identische Abbildung $f(z) = z$. Hier ist $u(x, y) = x$ und $v(x, y) = y$, also

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

womit auch hier die Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen erfüllt sind. Wieder folgt, dass f überall holomorph und sogar ganz ist.

- Mit der Produktregel und vollständiger Induktion können wir nun wie im Reellen leicht begründen, dass alle Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten, also $f(z) = c \cdot z^n$ mit $c \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$, überall holomorph und damit ganz sind.
- Mit der Summenregel folgt dann, dass alle Polynomfunktionen (ganzrationalen Funktionen) überall holomorph und damit ganz sind.
- Daraus ergibt sich wiederum, dass alle Funktionen, die man in einem Gebiet der komplexen Zahlenebene in eine Potenzreihe entwickeln kann, dort holomorph sind. Beispielsweise ist die komplexe Exponentialfunktion, die wie im Reellen definiert ist als

$$e^z := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!},$$

holomorph. Man kann zeigen, dass diese Potenzreihe in ganz \mathbb{C} konvergiert; also ist die komplexe Exponentialfunktion ganz.

- Allmählich könnte man den Eindruck gewinnen, dass alle aus dem Reellen bekannten Grundfunktionen ganz sind. Ein einfaches Gegenbeispiel dazu ist die Funktion $f(z) = 1/z$: Diese ist zwar in ihrem kompletten Definitionsbereich $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph, was sofort mit der Quotientenregel folgt – aber eben offensichtlich nicht für jede komplexe Zahl definiert, also nicht ganz. Da jede gebrochenrationale Funktion im Komplexen Definitionslücken hat (weil ihr Nenner ein nicht-konstantes Polynom ist und damit laut dem Fundamentalsatz der Algebra mindestens eine Nullstelle hat), sind zwar alle gebrochenrationalen Funktionen in ihrem Definitionsbereich holomorph, aber keine ist ganz. In Abschn. 6.2 werden wir solche Funktionen genauer diskutieren.
- Eine weitere Grundfunktion im Reellen ist die Betragsfunktion. Bereits aus der Schule sollte bekannt sein, dass diese Funktion bei $x = 0$ nicht (reell) differenzierbar ist. Im Komplexen haben wir $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dies ergibt natürlich immer ein rein reelles Ergebnis; also ist $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $v(x, y) = 0$. Damit folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Für $z = 0$ sind die Ableitungen von u nicht definiert, also ist $f(z) = |z|$ dort nicht differenzierbar – wie im Reellen. Für alle $z \neq 0$ ist dagegen immer mindestens eine der Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen nicht erfüllt; im Gegensatz zum Reellen folgt also, dass im Komplexen die Betragsfunktion nirgends differenzierbar ist!

Abschließend sei angemerkt, dass sich bei weiteren reellen Grundfunktionen wie den Wurzel- und Logarithmusfunktionen bereits Probleme damit ergeben, sie überhaupt eindeutig im Komplexen zu definieren. Dies führt auf sogenannte „Verzweigungsschnitte“ und „Riemann'sche Flächen“; Interessierte seien auf die mathematische Literatur verwiesen. Wir werden in Abschn. 6.3 und Aufgabe 6.5 nur kurz auf die Nicht-Eindeutigkeit eingehen.

6.1.3 Der Cauchy'sche Integralsatz

Der vorhergehende Abschnitt hat sehr deutlich gezeigt, dass die Forderung nach komplexer Differenzierbarkeit weit einschränkender ist als die entsprechende Forderung im Reellen. Hier werden wir nun sehen, dass sich damit aber auch, wieder im Gegensatz zum Reellen, eine wichtige Aussage über Integrale treffen lässt. Eine weitere bedeutende Eigenschaft holomorpher Funktionen wird erst in Abschn. 6.2 besprochen.

Erinnern wir uns kurz zurück: Die Holomorphie ist äquivalent dazu, dass f^* , als reelle, vektorwertige Funktion zweier reeller Variablen betrachtet, quellen- und

wirbelfrei ist. Für reelle, vektorwertige Funktionen dreier reeller Variablen, die wirbelfrei sind, kennen wir aber eine wichtige Aussage über Wegintegrale: Integriert man solche Funktionen über einen geschlossenen Weg, der auf einen Punkt zusammengezogen werden kann, so ergibt sich immer null (vgl. Abschn. 3.3). Völlig äquivalent gilt bei holomorphen Funktionen der *Cauchy'sche Integralsatz*

$$\oint f(z) \, dz = 0,$$

sofern der Weg auf einen Punkt zusammengezogen werden kann. Die Definition und die Auswertung von Wegintegralen sind ebenfalls praktisch identisch wie bei den reellen Vektorfunktionen (vgl. Abschn. 2.1). Der Beweis dazu läuft ähnlich wie bei den wirbelfreien reellen Funktionen; mal wieder seien Interessierte auf die mathematische Literatur verwiesen. Außerdem folgert man auch, wie im Reellen, dass diese Aussage äquivalent ist zu: Der Wert eines Wegintegrals

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) \, dz$$

ist unabhängig vom genauen Verlauf des Weges – solange dieser nur vollständig in einem einfach zusammenhängenden Gebiet verläuft, in dem f holomorph ist. Insbesondere gilt der Satz für alle ganzen Funktionen in der kompletten komplexen Ebene.

Beispiele und Gegenbeispiele 6.1

Betrachten wir zunächst das Integral

$$\int_{-1}^1 z^2 \, dz.$$

Da $f(z) = z^2$ eine ganze Funktion ist, muss der Wert dieses Integrals vom Weg unabhängig sein. Wir können beispielsweise die gerade Verbindungslinie der beiden komplexen Zahlen -1 und 1 entlang der reellen Achse betrachten, also den Weg mit $z = x \in [-1; 1] \subset \mathbb{R}$ parametrisieren. Dann ergibt sich natürlich

$$\int_{-1}^1 z^2 \, dz = \int_{-1}^1 x^2 \, dx = \frac{2}{3}.$$

Andererseits könnten wir die beiden komplexen Zahlen z. B. auch durch einen Halbkreis mit Radius eins um den Ursprung verbinden, der in der oberen

komplexen Halbebene verläuft. Wir haben dann die Parametrisierung $z = e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in [0; \pi]$, wobei wir aber noch auf die Richtung des Integrationsweges achten müssen:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 z^2 dz &= \int_{\pi}^0 (e^{i\varphi})^2 e^{i\varphi} i d\varphi = -i \int_0^{\pi} e^{3i\varphi} d\varphi \\ &= \frac{-i}{3i} [e^{3i\varphi}]_0^{\pi} = -\frac{1}{3} [-1 - 1] = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

(Dabei haben wir verwendet, dass wegen $(e^z)' = e^z$ auch im Komplexen die natürliche Exponentialfunktion eine Stammfunktion von sich selbst ist.) Lassen wir den Halbkreis dagegen unten herum verlaufen, so ist $\varphi \in [\pi; 2\pi]$, und es folgt

$$\int_{-1}^1 z^2 dz = \dots = \frac{i}{3i} [e^{3i\varphi}]_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{3} [1 + 1] = \frac{2}{3}.$$

Zumindest für diese drei Wege ergibt das Wegintegral also tatsächlich exakt dasselbe Ergebnis – obwohl sie völlig unterschiedlich verlaufen.

Außerdem muss bei dieser Funktion das Integral über jeden geschlossenen Weg verschwinden. Betrachten wir beispielsweise einen Kreis um den Ursprung mit Radius eins, der im mathematisch positiven Sinn, d. h. gegen den Uhrzeigersinn, durchlaufen wird. Diesen können wir parametrisieren durch $z = e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in [0; 2\pi]$. Damit erhalten wir

$$\oint z^2 dz = \dots = \frac{i}{3i} [e^{3i\varphi}]_0^{2\pi} = \frac{1}{3} [1 - 1] = 0.$$

Passt. Einfacher hätten wir dieses Ergebnis übrigens erhalten, wenn wir uns einfach überlegt hätten, dass das Integral über den oberen Halbkreis $-2/3$ liefert, weil dieser nun anders herum durchlaufen wird als in der Rechnung oben, und der Halbkreis unten herum $+2/3$, da er immer noch in derselben Richtung durchlaufen wird. Insgesamt ergibt sich also offensichtlich null.

Andererseits können wir uns auch die Funktion $f(z) = 1/z$ anschauen. Diese ist zwar holomorph, aber eben nur in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Deshalb liefern nicht alle Wegintegrale dasselbe Ergebnis. Betrachten wir wieder ein Integral von -1 bis 1 . Diesmal können wir nicht entlang der reellen Achse laufen, da die Funktion im Ursprung ja nicht definiert ist. Wir können aber wieder einen Halbkreis oben herum betrachten:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{z} dz = \int_{\pi}^0 e^{-i\varphi} e^{i\varphi} i d\varphi = -i \int_0^{\pi} d\varphi = -\pi i$$

und einen unten herum:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{z} dz = \int_{\pi}^{2\pi} e^{-i\varphi} e^{i\varphi} i d\varphi = i \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi = +\pi i.$$

Es ergeben sich tatsächlich zwei unterschiedliche Ergebnisse. Daraus können wir nun auch sofort folgern, dass wir für ein geschlossenes Wegintegral über diese Funktion, das entlang eines Kreises um den Ursprung mit Radius eins im mathematisch positiven Sinn verläuft, $\pi i + \pi i = 2\pi i$ erhalten. Dieses Ergebnis wird in Abschn. 6.2 noch sehr wichtig werden.

6.2 Meromorphe Funktionen – und der Residuensatz

Leider ist lange nicht jede Funktion, die man als Physiker braucht, holomorph. Einerseits gibt es Funktionen, die zwar auf allen komplexen Zahlen definiert, aber nicht überall differenzierbar sind (siehe die Beispiele in Abschn. 6.1.2), andererseits sind viele Funktionen noch nicht einmal auf allen komplexen Zahlen definiert – man denke nur an das einfache Beispiel $f(z) = 1/z$. Unter gewissen Bedingungen kann man aber zu Integralen über Funktionen der letzteren Art sogar deutlich mehr sagen als über die der ersteren.

6.2.1 Arten von Definitionslücken

Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf komplexe Funktionen f mit *isolierten* Definitionslücken, d. h. Definitionslücken z_0 , für welche eine Umgebung existiert, sodass f in der ganzen Umgebung, bis eben auf z_0 selbst, holomorph ist.

Bereits aus der Schule ist (hoffentlich) bekannt, dass eine Definitionslücke eine Polstelle sein kann, aber auch (stetig) (be)hebbar. Es gibt aber noch eine dritte Möglichkeit, über die man in der Schule normalerweise nicht spricht. Die genauen Definitionen sind: Eine isolierte Definitionslücke heißt

- *hebbar*, wenn $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C}$ gilt (Beispiele: $f(z) = z/z$ oder auch $f(z) = \frac{\sin(z)}{e^z - 1}$, jeweils bei $z_0 = 0$),
- *Pol(stelle)*, wenn $|f(z)| \rightarrow \infty$ für $z \rightarrow z_0$. Äquivalent dazu ist: Die Funktion $1/f$ hat die Nullstelle z_0 ,
- *wesentliche Singularität*, wenn sie weder hebbar noch Pol ist (Beispiel: $f(z) = e^{1/z}$ bei $z = 0$).

Pole kann man noch nach ihrer *Ordnung* unterscheiden: Diese ist definiert als die Vielfachheit der Nullstelle von $g = 1/f$. Dabei hat eine Funktion g genau dann

eine Nullstelle z_0 der Vielfachheit n , wenn

$$g(z_0) = g'(z_0) = \dots = g^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad g^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

(Beispiele: Bei $z_0 = 0$ hat $f(z) = 1/z$ einen Pol erster Ordnung, weil $g(z) = z$ offensichtlich dort eine einfache Nullstelle hat; $f(z) = \frac{1}{e^z - 1 - z}$ hat dagegen einen Pol zweiter Ordnung, weil $g(z) = e^z - 1 - z$ dort eine doppelte Nullstelle hat, wie man schnell nachrechnet.)

Unter einer *meromorphen* Funktion versteht man nun eine komplexe Funktion f , die höchstens isolierte Definitionslücken hat, die alle entweder hebbar oder Pole sind, aber sonst überall holomorph ist. Von den Beispielen oben sind also $f(z) = z/z$, $f(z) = \frac{\sin(z)}{e^z - 1}$, $f(z) = 1/z$ und $f(z) = \frac{1}{e^z - 1 - z}$ alle meromorph, $f(z) = e^{1/z}$ dagegen nicht. Allgemein gilt:

- Jede holomorphe Funktion ist meromorph. (Beachte in der Definition oben die Formulierung „höchstens“!)
- Ist f meromorph oder sogar holomorph, so ist $1/f$ im Allgemeinen meromorph – holomorph nur dann, wenn f keine Nullstellen hat.
- Jede Summe, Differenz, jedes Produkt und jeder Quotient von meromorphen Funktionen ist wieder meromorph; insbesondere ist jede rationale Funktion meromorph.

Wichtig ist hier, dass die Definitionslücken isoliert sein müssen, d. h., sie dürfen weder am Rand des Definitionsbereichs liegen noch gehäuft auftreten. Beispielsweise häufen sich bei der Funktion $f(z) = 1/\sin(1/z)$ die Definitionslücken für $z \rightarrow 0$ – diese Funktion ist also nicht meromorph.

Abschließend sei noch angemerkt, dass einige der Beispiele hier sehr konstruiert aussehen und man denken könnte, dass solche Funktionen in realen Anwendungen in der Physik sowieso nicht auftreten. Da läge man aber falsch: Beispielsweise der in der statistischen Physik wichtige Boltzmann-Faktor $e^{-E/k_B T}$ hat als Funktion der absoluten Temperatur T eine wesentliche Singularität bei $T = 0$.

6.2.2 Die Cauchy'sche Integralformel und der Residuensatz

Wie wir bereits in Beispiel 6.1 (Wegintegral über $f(z) = 1/z$ auf einem Kreis um den Ursprung) gesehen haben, verschwinden geschlossene Wegintegrale bei meromorphen Funktionen im Allgemeinen nicht. Dasselbe gilt natürlich, wenn der Pol nicht bei $z_0 = 0$ liegt, sondern irgendwo anders. Beispielsweise erhalten wir für jede Konstante $r \in \mathbb{C}$, wenn wir wieder auf einem Kreis integrieren, dessen Mittelpunkt diesmal aber z_0 ist,

$$\oint \frac{r}{z - z_0} dz = 2\pi i r. \quad (6.4)$$

Wir können uns nun überlegen, dass dieses Ergebnis nicht nur für das Kreisintegral folgt, sondern für *jeden* Weg, der den Pol z_0 im mathematisch positiven Sinn

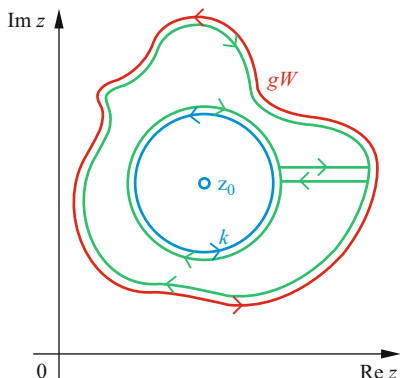


Abb. 6.1 Jedes Integral über einen geschlossenen Weg (gW ; rot) um eine Polstelle z_0 kann man durch Addition eines Integrals über einen anderen geschlossenen Weg ($grün$) in ein Kreisintegral um z_0 ($blau$) umformen. (Die beiden kurzen parallelen Stücke des *grünen* Weges hat man sich dabei so vorzustellen, dass ein und dieselbe Strecke an dieser Stelle vor- und rückwärts durchlaufen wird; die beiden Beiträge heben sich gegenseitig weg.) Vergleiche dazu auch Abb. 3.6!

genau einmal umschließt: Jeden solchen Weg kann man durch Addition von ein oder mehreren geschlossenen Wegen, die auf einen Punkt zusammenziehbar sind, in den Kreis umformen (siehe Abb. 6.1 und auch die Diskussion in Abschn. 3.3). Da das Integral über diese geschlossenen Wege laut dem Cauchy'schen Integralsatz aber verschwindet, haben alle geschlossenen Wege, welche den Pol im mathematisch positiven Sinn einmal umschließen, denselben Wert (für zwei Beispiele siehe Aufgabe 6.3).

Auch dieses Resultat kann man mit einem ähnlichen vergleichen, das man eventuell schon von reellen Funktionen mit mehreren reellen Variablen kennt: Betrachten wir das magnetische Feld eines unendlich langen, unendlich dünnen geraden Drahtes entlang der z -Achse, der von einem Strom der Stärke I durchflossen wird,

$$\mathbf{B}(\varrho) = \frac{2I/c}{\varrho} \mathbf{e}_\varphi.$$

Diese Funktion hat einen Pol erster Ordnung bei $\varrho = 0$. Andererseits ist laut dem Ampere'schen Gesetz

$$\oint \mathbf{B} \circ d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} I,$$

wenn wir auf einem beliebigen Weg um die z -Achse integrieren. Mit $r = 2I/c$ ist die Analogie zur obigen komplexen Integration fast perfekt – bis auf den Faktor i , der aber einfach daher kommt, dass die zweite Koordinate der komplexen Zahlenebene eben imaginär ist. Allerdings sollte man sich von diesem Beispiel nicht verleiten lassen zu denken, Integrale in der komplexen Ebene wären generell dasselbe wie Wegintegrale in der reellen Ebene (bis auf den Faktor i) – nur bei einer Polstelle erster Ordnung stimmt das Ergebnis praktisch überein!

Man kann nun mit (6.4) leicht eine wichtige Eigenschaft holomorpher Funktionen begründen. Wenn $f(z)$ eine in einem Gebiet G holomorphe Funktion ist, dann gilt für ein beliebig gewähltes $z_0 \in G$

$$\oint \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint g(z) dz + \oint \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz,$$

wobei $g(z)$ die stetige Fortsetzung von

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

bezeichnet. Da dieser Term nur eine hebbare Definitionslücke bei z_0 hat und sonst holomorph ist, folgt, dass g holomorph in ganz G ist (die stetige Fortsetzung ist genau gegeben durch $f'(z_0)$) – und damit verschwindet das erste Integral. Im zweiten Integral ist $f(z_0)$ konstant, und wir können unser Ergebnis (6.4) verwenden. Deshalb folgt schließlich die *Cauchy'sche Integralformel*:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0).$$

Damit kann man dann wiederum beweisen (letztlich einfach, indem man beide Seiten beliebig oft nach z_0 ableitet): Ist eine Funktion holomorph, also einmal komplex differenzierbar, so ist sie automatisch unendlich oft komplex differenzierbar. Man kann also jede Funktion, die in einem Gebiet G holomorph ist, in eine Taylor-Reihe, also eine Potenzreihe, um jeden Punkt im Inneren von G entwickeln. (Es wäre natürlich noch zu begründen, dass diese Taylor-Reihe konvergiert, und zwar auch wirklich gegen $f \dots$)

Eine Funktion, die man lokal in eine Potenzreihe entwickeln kann, nennt man *analytisch*. Wir haben hier also begründet: Jede holomorphe Funktion ist analytisch. Umgekehrt ist jede analytische Funktion aber auch holomorph, da man konvergente Potenzreihen ja komplex differenzieren kann. Im Komplexen sind die beiden Eigenschaften „holomorph“ und „analytisch“ somit völlig äquivalent.

Die Zahl r in $f(z) = \frac{r}{z - z_0}$ nennt man das *Residuum* des Pols; anschaulich gesprochen ist das Residuum also so etwas wie die „Stärke“ eines Pols erster Ordnung. Allgemein ist das Residuum einer Funktion bei einem Pol z_0 definiert als

$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz, \quad (6.5)$$

wobei γ ein Weg ist, der z_0 im mathematisch positiven Sinne genau einmal umschließt. Für $f(z) = \frac{r}{z - z_0}$ ergibt dies offensichtlich wieder r .

Die Definition ist natürlich völlig äquivalent dazu, dass für jede meromorphe Funktion, die nur einen Pol erster Ordnung in z_0 hat,

$$\oint f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_0} f(z)$$

gilt, wenn der Weg den Pol genau einmal im mathematisch positiven Sinne umschließt. Etwas verallgemeinert ergibt sich

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{ind}_{\gamma}(z_0) \operatorname{Res}_{z_0} f(z),$$

wobei die *Windungszahl* $\operatorname{ind}_{\gamma}(z_0)$ angibt, wie oft der Weg γ den Pol z_0 umschließt. Verläuft der Weg im mathematisch negativen Sinne (gegen den Uhrzeigersinn), so ist die Windungszahl negativ; wird der Pol von dem Weg überhaupt nicht umschlossen, so ist sie null.

Verallgemeinert man diese Aussage weiter auf Funktionen mit mehreren Polen erster Ordnung, so folgt der *Residuensatz*:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_0} \operatorname{ind}_{\gamma}(z_0) \operatorname{Res}_{z_0} f(z),$$

wobei die Summe über alle Pole erster Ordnung läuft. Weil die Windungszahl für alle Pole, die von γ nicht eingeschlossen werden, verschwindet, tragen aber nur Pole, die von γ auch wirklich umlaufen werden, zum Integral bei.

Den Beweis dieses Satzes findet man in der mathematischen Literatur; die Grundidee ist wieder mal: Man addiert geschickt geschlossene Wege, die sich auf Punkte zusammenziehen lassen und damit zum Wert des Integrals nicht beitragen. Damit kann die Integration über den gesamten Weg umgeschrieben werden in eine Summe von Wegintegralen, bei denen die Wege nur jeweils einen Pol einschließen; für diese kann dann die Definition des Residuums eingesetzt werden.

6.2.3 Die Laurent-Reihe – und Berechnen von Residuen

Mit dem Residuensatz haben wir eine schöne allgemeine Aussage gewonnen: Der Wert eines geschlossenen Wegintegrals hängt nur von den Residuen der Pole ab, welche vom Weg eingeschlossen werden. Allerdings ist das noch nicht richtig hilfreich zum konkreten Berechnen von Integralen, da die Residuen ihrerseits ja auch wieder nur mittels geschlossener Wegintegrale definiert sind. Zum Glück gibt es aber auch noch eine andere Methode, um Residuen zu berechnen.

Betrachten wir hierfür zunächst wieder eine meromorphe Funktion f mit nur einem Pol z_0 erster Ordnung. Nach Definition ist f in einer Umgebung von z_0 holomorph. Die Funktion g mit $g(z) := (z - z_0)f(z)$ ist dann in derselben Umgebung ebenfalls holomorph; wie man sich leicht überlegt, ist bei g die Definitionslücke z_0 nun aber hebbbar. Definieren wir die Fortsetzung von g durch

$$\tilde{g}(z) := \begin{cases} g(z) & z \neq z_0 \\ \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) & z = z_0 \end{cases},$$

so folgt, dass \tilde{g} nun in derselben Umgebung wie f und g holomorph ist – aber im Gegensatz zu f und g nun auch bei z_0 !

Man kann \tilde{g} deshalb in eine Potenzreihe um z_0 entwickeln,

$$\tilde{g}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n.$$

Für alle $z \neq z_0$ ist aber $\tilde{g}(z) = g(z) = (z - z_0)f(z)$; damit folgt für alle $z \neq z_0$ für f die Entwicklung

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j (z - z_0)^{j-1} = \sum_{j=-1}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$$

mit $a_j := b_{j+1}$. Im Gegensatz zu analytischen Funktionen tritt in der Potenzreihenentwicklung von f also auch die Potenz -1 auf.

Verallgemeinert kann man zeigen: Hat eine meromorphe Funktion f einen Pol z_0 der Ordnung n , so kann man sie in eine Potenzreihe um z_0 entwickeln, in der neben den üblichen natürlichen Exponenten auch alle ganzzahligen negativen Exponenten bis $-n$ auftreten,

$$f(z) = \sum_{j=-n}^{\infty} a_j (z - z_0)^j.$$

Dies nennt man eine *Laurent-Reihe* von f (nach dem französischen Mathematiker *Pierre Alphonse Laurent*, 1813–1854, der die Konvergenz solcher Reihen untersuchte); sie ist die Verallgemeinerung der Taylor-Reihe auf meromorphe Funktionen. Und wie bei Taylor-Reihen gilt natürlich, dass die Summation nicht zwingend bis ∞ laufen muss – bei allen rationalen Funktionen hat man hier nur eine endliche Summe von Potenzen. (Für Funktionen mit wesentlichen Singularitäten, die also nicht meromorph sind, gibt es übrigens auch Laurent-Reihen; diese „beginnen“ dann allerdings bei $-\infty$. Eine wesentliche Singularität kann man sich also vorstellen als einen Pol der Ordnung ∞ .)

Das hilft uns nun bei den Residuen! Denn mit der Laurent-Reihe haben wir die Berechnung des Residuums einer beliebigen meromorphen Funktion darauf redu-

ziert, die Residuen von Potenzfunktionen zu berechnen:

$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint f(z) \, dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=-n}^{\infty} a_j \oint (z - z_0)^j \, dz.$$

Der Integrationsweg schließt, wie üblich, z_0 einmal im mathematisch positiven Sinn ein – und wir hatten ja bereits begründet, dass die genaue Form des Weges irrelevant ist, man also z. B. einfach einen Einheitskreis verwenden kann. Wie man damit leicht nachrechnet, gilt

$$\oint (z - z_0)^j \, dz = 0 \quad \text{für } j \neq -1;$$

für $j = -1$ haben wir bereits das bekannte Ergebnis $2\pi i$.

Dass ausgerechnet -1 hier ein Sonderfall ist, sollte übrigens nicht allzu verwunderlich sein: Im Prinzip kennt man das bereits von reellen Integralen! Dort ist ja die Stammfunktion fast jeder Potenzfunktion wiederum eine Potenzfunktion, und nur die Funktion x^{-1} nimmt eine Sonderrolle ein – deren Stammfunktion ist der natürliche Logarithmus. (Auch damit könnte man übrigens das Ergebnis hier begründen – man muss dabei allerdings zusätzlich berücksichtigen, dass im Gegensatz zu den Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten der Logarithmus im Komplexen nicht eindeutig definiert ist.)

Mit den obigen Ergebnissen folgt nun

$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=-n}^{\infty} a_j \cdot 2\pi i \delta_{j,-1} = a_{-1},$$

das Residuum eines Pols z_0 einer meromorphen Funktion f ist einfach gleich dem Koeffizienten zur Potenz -1 in der Laurent-Reihe von f um z_0 ! Um das Residuum zu erhalten, müssen wir also nur diesen Koeffizienten irgendwie aus der Laurent-Reihe „herausholen“.

Ist z_0 nur ein Pol erster Ordnung, hat die Laurent-Reihe also die Form

$$f(z) = \sum_{j=-1}^{\infty} a_j (z - z_0)^j = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j,$$

so geht das leicht: Es gilt

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = a_{-1} + \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^{j+1} = a_{-1},$$

womit sofort

$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \quad (6.6)$$

folgt. Hat man einen Pol z_0 höherer Ordnung n (das kommt in physikalischen Berechnungen aber eher selten vor), so sieht die Formel deutlich komplizierter aus:

$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) \equiv a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)]. \quad (6.7)$$

Rechnet mal selbst nach, dass das zum richtigen Ergebnis führt!

Ist der Pol der Ordnung $n > 1$ „rein“, d. h., alle Koeffizienten a_j mit negativem $j \neq n$ verschwinden, so verschwindet auch das Residuum.

Beispiel 6.2

Die meromorphe Funktion

$$f(z) = \frac{2z^2 - 3z - 1}{(z - 1)^3}$$

hat einen Pol dritter Ordnung $z_0 = 1$. Also ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_1 f(z) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [(z - 1)^3 f(z)] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [2z^2 - 3z + 1] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} 4 = 2. \end{aligned}$$

Andererseits kann man f auch schreiben als

$$f(z) = \frac{2}{z - 1} + \frac{1}{(z - 1)^2} + \frac{-2}{(z - 1)^3}$$

(nachrechnen!), d. h., wir haben $a_{-1} = 2$ in der Laurent-Reihe von f um $z_0 = 1$. Wie behauptet, ist somit $\operatorname{Res} f = a_{-1}$.

6.2.4 Wozu brauchen wir das eigentlich alles?

In der Physik ist es eigentlich eher selten üblich, Funktionen auf Wegen in der komplexen Ebene zu integrieren – außer eben auf einem speziellen Weg: der reellen Achse. Trotzdem können sowohl der Cauchy'sche Integralsatz als auch der Residuensatz sehr praktisch sein, um Integrale auszurechnen: Mit dem Ersteren können wir den Integrationsweg oft geeignet verformen und/oder verschieben und mit dem Letzteren dann den Wert des Wegintegrals auswerten. Voraussetzen muss man natürlich, dass der Integrand meromorph ist; in sehr vielen physikalisch wichtigen Fragestellungen ist das aber der Fall.

Es bleibt die Frage: Wo hat man in der Physik denn ein Integral über einen *geschlossenen* Weg in der komplexen Ebene? Ein solcher ist ja nötig, um den Residuensatz anwenden zu können! Wir brauchen also noch einen zusätzlichen Trick.

Dieser besteht darin, dass man den üblichen Integrationsweg entlang der reellen Achse durch Addition eines zusätzlichen Weges schließt. Da die reelle Achse sich von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt, muss man den Weg „im Unendlichen“ schließen. Wie man das genau macht, ist in vielen Fällen relativ unwichtig; üblich und oft praktisch ist es aber, einen „unendlich großen“ Halbkreis zu verwenden, je nach konkreter Rechnung entweder in der oberen oder der unteren komplexen Halbebene. Außerdem muss man noch sicherstellen, dass das Integral der interessierenden Funktion über diesen Halbkreis verschwindet – dann nämlich ist das Integral der Funktion entlang der reellen Achse gleich dem Integral über den geschlossenen Weg, der entlang der reellen Achse von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft und entlang des Halbkreises zurück nach $-\infty$. Und den Wert dieses geschlossenen Wegintegrals kann man schließlich mit dem Residuensatz erhalten.

Mathematisch etwas exakter formuliert: Gesucht ist der Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx,$$

wobei f , auf \mathbb{C} fortgesetzt, meromorph ist. Gilt nun auf einem Halbkreis H_k um den Ursprung mit Radius R , dass

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{H_k} f(z) dz = 0$$

ist, so folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{gW} f(z) dz = \pm 2\pi i \sum_{z_0} \text{Res}_{z_0} f(z),$$

wobei der geschlossene Weg gW eben aus dem Halbkreis und dem Stück auf der reellen Achse besteht und das Vorzeichen je nach Lage des Halbkreises zu wählen ist: Liegt er in der oberen Halbebene (siehe Abb. 6.2), so wird der Weg gW im

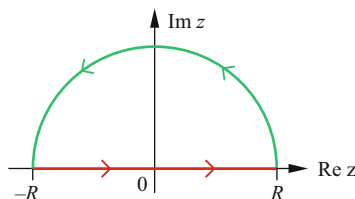


Abb. 6.2 Zum Integral längs der reellen Achse (rot) von $-R$ bis R wird ein Integral entlang eines Halbkreises in der oberen komplexen Halbebene (Hk, grün) addiert; so erhält man einen geschlossenen Integrationsweg (gW; siehe Text)

mathematisch positiven Sinn durchlaufen, also braucht man $+$; liegt er in der unteren Halbebene, so ist das negative Vorzeichen zu verwenden. Summieren muss man dabei über die Residuen aller Pole in der jeweiligen Halbebene.

Beispiel 6.3: Einfaches Integral im Reellen

Wir betrachten das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx.$$

Dessen Wert kann leicht berechnet werden, wenn man sich klarmacht, dass der Integrand die Ableitung des Arkustangens ist; das Ergebnis ist einfach π (nachrechnen!).

Andererseits hat die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z + i)(z - i)}$$

mit $z \in \mathbb{C}$ die beiden Pole erster Ordnung $\pm i$ und ist ansonsten holomorph – insgesamt somit meromorph. Deshalb kann man versuchen, dieses Integral mit der oben dargestellten Methode zu berechnen. Dazu müssen wir aber noch begründen, dass das Halbkreisintegral auch wirklich verschwindet. Wir setzen dafür $z = Re^{i\varphi}$ mit $0 \leq \varphi \leq \pi$ für den Halbkreis in der oberen Halbebene und $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ in der unteren, betrachten also

$$f(Re^{i\varphi}) = \frac{1}{R^2 e^{2i\varphi} + 1}.$$

Für jeden Wert von φ geht dieser Ausdruck sicher gegen null, wenn R gegen ∞ geht. Also verschwindet das Integral auf beiden Halbkreisen. Betrachten wir im Folgenden beide Möglichkeiten und kürzen den geschlossenen Weg dabei mit gWo bzw. gWu ab und die Halbebenen mit Ho bzw. Hu .

- Halbkreis oben herum:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{gWo} \frac{1}{z^2 + 1} dz = +2\pi i \sum_{z_0 \in Ho} \text{Res}_{z_0} \frac{1}{z^2 + 1}.$$

In der oberen Halbebene hat f nur den Pol erster Ordnung $z_0 = i$. Dessen Residuum ist

$$\text{Res}_i \frac{1}{z^2 + 1} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z - i)}{(z + i)(z - i)} = \frac{1}{2i}.$$

Damit bleibt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = +2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$$

- Halbkreis unten herum:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{gWu} \frac{1}{z^2 + 1} dz = -2\pi i \sum_{z_0 \in Hu} \text{Res}_{z_0} \frac{1}{z^2 + 1}.$$

Mit

$$\text{Res}_{-i} \frac{1}{z^2 + 1} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{(z + i)}{(z + i)(z - i)} = \frac{1}{-2i}.$$

Damit bleibt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = -2\pi i \cdot \frac{1}{-2i} = \pi.$$

Passt.

Beispiel 6.4: Potenzial einer Punktladung mit Fourier – nochmals

In Abschn. 4.3.2 hatten wir das Potenzial einer Punktladung berechnet, indem wir die Poisson-Gleichung mithilfe einer Fourier-Transformation gelöst haben. Am Schluss der Rechnung gab es dort noch das Problem, dass man den Wert des Integrals

$$\int_0^{\infty} du \frac{\sin(u)}{u}$$

kennen musste. Versuchen wir die Rechnung von dort nun nochmals – diesmal aber mithilfe des Residuensatzes.

Als Zwischenschritt hatten wir dort

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \int_0^{2\pi} d\varphi_k \int_{-1}^1 d\cos\vartheta_k e^{ikr \cos\vartheta_k}.$$

Als Funktion von k hat der Integrand hier allerdings gar keinen Pol. Wir wenden deshalb noch den zusätzlichen Trick an, den wir bereits in Kap. 4 angesprochen hatten: Statt des Coulomb-Potenzials betrachten wir ein Yukawa-Potenzial, sodass das Integral zu

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \int_0^{2\pi} d\varphi_k \int_{-1}^1 d\cos\vartheta_k \frac{k^2}{k^2 + c^2} e^{ikr \cos\vartheta_k}$$

wird; am Schluss der Rechnung können wir dann einfach den Limes $c \rightarrow 0$ nehmen. Nun hat der Integrand als Funktion von k die Pole $\pm ic$ erster Ordnung, die außerhalb der reellen Achse liegen.

Führen wir die Winkelintegrale aus, so bleibt zunächst

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{i\pi r} \int_0^\infty dk \frac{k}{k^2 + c^2} [e^{ikr} - e^{-ikr}].$$

Teilen wir das Integral auf in zwei Integrale über die beiden Summanden und gehen im zweiten Summanden von k zu $-k$ über, so kann man dies wieder zusammenfassen zu

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{i\pi r} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{k}{k^2 + c^2} e^{ikr}.$$

Wir haben also abermals ein Integral entlang der reellen Achse über eine meromorphe Funktion mit Polen außerhalb der reellen Achse und können es zu einem geschlossenen Wegintegral umschreiben:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{i\pi r} \oint dz \frac{z}{z^2 + c^2} e^{irz}.$$

Diesmal müssen wir aber aufpassen, welchen Halbkreis wir zum Schließen des Integrationsweges verwenden! Setzen wir $z = Re^{i\varphi}$, so haben wir den Integranden

$$\frac{Re^{i\varphi}}{R^2 e^{2i\varphi} + c^2} \exp(irRe^{i\varphi}) = \frac{Re^{i(\varphi+rR \cos \varphi)}}{R^2 e^{2i\varphi} + c^2} e^{-rR \sin \varphi}.$$

Der Bruch geht für $R \rightarrow \infty$ sicher gegen null – aber der Exponentialfaktor dahinter kann Probleme machen: Auf dem oberen Halbkreis ist $\sin \varphi \geq 0$, also ist dort der Exponent negativ, und der Exponentialfaktor geht gegen null. Andererseits ist auf dem unteren Halbkreis $\sin \varphi \leq 0$; damit divergiert der Exponentialfaktor dort für $R \rightarrow \infty$! Hier *müssen* wir den Integrationsweg also in der oberen Halbebene schließen.

Damit haben wir nur den Pol $z = +ic$ erster Ordnung zu betrachten, mit dem Residuum

$$\text{Res}_{ic} \frac{z}{z^2 + c^2} e^{irz} = \lim_{z \rightarrow ic} \frac{(z - ic)z}{(z + ic)(z - ic)} e^{irz} = \frac{1}{2} e^{-cr}.$$

Für das Potenzial folgt

$$\phi(r) = \frac{q}{i\pi r} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{2} e^{-cr} = \frac{q}{r} e^{-cr},$$

was in der Tat genau das Yukawa-Potenzial ist – und sich für $c \rightarrow 0$ auf das Coulomb-Potenzial reduziert. Fertig.

6.3 Komplexe Potenziale – und konforme Abbildungen

Die komplexe Funktionentheorie kann auch für zweidimensionale Potenzialprobleme sehr hilfreich sein – also solche, bei denen nur das Potenzial in einer Ebene interessiert, oder es invariant ist unter Verschiebung in einer Richtung.

6.3.1 Komplexe Potenziale

Haben wir nur zwei Dimensionen, so liegt es nahe, diese mit der reellen und der imaginären Richtung der Gauß'schen Zahlenebene zu identifizieren. Betrachten wir nun eine holomorphe Funktion $\Phi(z) \equiv \phi(x, y) + i\psi(x, y)$. Elektrostatische Potenziale erfüllen bekanntlich die Poisson- bzw. im ladungsfreien Raum die Laplace-Gleichung; schauen wir uns also an, wie der Laplace-Operator auf Φ wirkt:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi(z) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\phi(x, y) + i\psi(x, y)) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Mit den Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen folgt

$$\Delta\Phi(z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) + i \left(-\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial\phi}{\partial x} \right).$$

Die Reihenfolge der partiellen Ableitungen ist aber vertauschbar:

$$\Delta\Phi(z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) + i \left(-\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) = 0.$$

Real- und Imaginärteil von Φ lösen also beide getrennt schon die Laplace-Gleichung; beide können wir deshalb als zweidimensionales Potenzial im Außenraum einer Ladungsverteilung betrachten. Funktionen f mit $\Delta f = 0$ nennt man übrigens allgemein *harmonisch*, die Funktion Φ bezeichnet man hier als *komplexes Potenzial*.

Die oben verwendeten Bezeichnungen legen nahe, dass wir im Folgenden den Realteil von Φ als Potenzial betrachten. Was können wir uns dann aber unter dem Imaginärteil ψ vorstellen? Diesen können wir nicht einfach zu null wählen – denn er ist durch die Wahl des Realteils ϕ wegen der Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen bis auf einen konstanten Summanden eindeutig bestimmt! (ψ nennt man auch *konjugiert harmonisch* zu ϕ .)

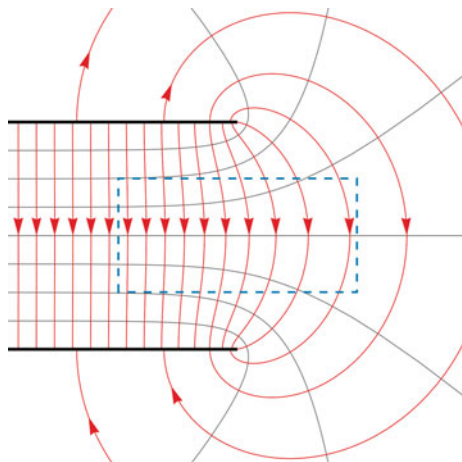
Zur Interpretation von ψ schauen wir uns mal an, wie Linien mit konstantem ϕ (also Äquipotenziallinien) bzw. mit konstantem ψ relativ zueinander verlaufen. Dazu erinnern wir uns daran, dass der Gradient einer skalaren Funktion senkrecht auf den Flächen bzw. hier eben nun Linien steht, auf denen die Funktion konstant ist. Betrachten wir deswegen

$$\mathbf{grad} \phi(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{grad} \psi(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} \end{pmatrix},$$

wobei wieder die Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen verwendet wurden. Nun sieht man sofort, dass $\mathbf{grad} \phi \circ \mathbf{grad} \psi = 0$ ist – sprich: Die Linien mit konstantem ψ stehen senkrecht auf den Äquipotenziallinien. Damit ist die physikalische Interpretation klar: Die Linien mit $\psi = \text{const}$ beschreiben die elektrischen Feldlinien! (Der Wert von ψ selbst hat allerdings keine direkte physikalische Bedeutung, insbesondere ist es *nicht* die Feldstärke.)

Wenn man am konkreten Verlauf der Äquipotenzial- oder Feldlinien interessiert ist, so ist es oft sinnvoll, statt $\Phi(z)$ die Umkehrfunktion $z(\Phi)$ zu betrachten. Setzt man in diese beispielsweise einen konkreten Wert für Φ ein, den man aus einem vorgegebenen Wert für ϕ berechnet, so hat man aus dem Real- und Imaginärteil von z sofort eine Parameterdarstellung der Äquipotenziallinie mit diesem Wert von ϕ .

Abb. 6.3 Das elektrische Feld und das elektrostatische Potenzial am Rand eines Plattenkondensators; zur Bedeutung der gestrichelten Hilfslinie siehe Beispiel 6.5



Beispiel 6.5: Rand eines Plattenkondensators

Wir betrachten das komplexe Potenzial mit

$$z = \frac{d}{\pi} \left(\frac{\pi \Phi}{\phi_0} + e^{\pi \Phi / \phi_0} + 1 \right).$$

Die Äquipotenzial- und Feldlinien sind in Abb. 6.3 dargestellt. Wir sehen insbesondere, dass die Äquipotenziallinien mit $\phi = \pm \phi_0$ sich von $x = -\infty$ bis $x = 0$ bei $y = \pm d$ erstrecken; zwischen beiden Linien verlaufen die Feldlinien für $x \rightarrow -\infty$ parallel. Wir haben hier also zwei endliche „Platten“ auf jeweils konstantem Potenzial mit homogenem elektrischem Feld dazwischen – sprich: einen Plattenkondensator.

Im Gegensatz zum unendlich großen Plattenkondensator (den man als idealisierte Näherung meist bereits in der Schule kennenlernt) betrachten wir hier aber das Feld auch an einem der Ränder – in der negativen x -Richtung und senkrecht zur komplexen Ebene denken wir uns den Kondensator allerdings immer noch unendlich groß.

Dass das elektrische Feld nicht einfach bis zum Rand homogen bleiben und dann dort abrupt enden kann, sieht man übrigens leicht ein, wenn man das geschlossene Wegintegral $\oint \mathbf{E} \circ d\mathbf{r}$ auf dem gestrichelt markierten Weg betrachtet, das in der Elektrostatik ja verschwinden muss.

6.3.2 Holomorphe Funktionen als konforme Abbildungen

Im Folgenden werden wir sehen, dass holomorphe Funktionen ein gutes Hilfsmittel sein können, um zweidimensionale Dirichlet'sche Randwertprobleme zu lösen (al-

so das Potenzial in der ganzen Ebene zu finden, wenn es auf Randlinien vorgegeben ist). Dafür müssen wir uns erst aber noch eine wichtige Eigenschaft holomorpher Funktionen anschauen. Dazu betrachten wir hier eine holomorphe Funktion als eine Abbildung eines Gebietes der komplexen Zahlenebene auf ein im Allgemeinen anderes Gebiet dieser Ebene. (Dass wirklich jeweils Gebiete, also nicht-leere, offene, zusammenhängende Teilmengen, jeweils wieder auf Gebiete abgebildet werden, müsste man eigentlich noch zeigen.)

Ist f holomorph an einem Punkt z_0 , so ist f (nach Definition!) dort in eine Taylor-Reihe entwickelbar. Also ist

$$f(z) \approx f'(z_0) \cdot (z - z_0) + f(z_0) = |f'(z_0)| e^{i \arg f'(z_0)} \cdot (z - z_0) + f(z_0).$$

Diese Näherung gilt umso besser, je näher z an z_0 liegt. Daraus können wir die lokale Wirkung von f ablesen: Der Verbindungsvektor $z - z_0$ wird um den Winkel $\arg f'(z_0)$ gedreht und um den Faktor $|f'(z_0)|$ gestreckt; anschließend wird der Punkt um $f(z_0)$ verschoben. Für alle z_0 mit $f'(z_0) \neq 0$ beschreibt jede holomorphe Funktion f lokal (!) also eine *Drehstreckung* mit anschließender Verschiebung.

Liegen nun zwei Punkte z_1 und z_2 sehr dicht beieinander und bei z_0 , so werden beide Vektoren $z_1 - z_0$ und $z_2 - z_0$ um praktisch denselben Winkel gedreht und denselben Faktor gestreckt (und beide Punkte praktisch genauso verschoben). Deshalb bleibt bei der Anwendung der Funktion f der Winkel zwischen $z_1 - z_0$ und $z_2 - z_0$ erhalten. Abbildungen, die (lokal) winkelerhaltend sind, nennt man *konforme Abbildungen*; wir haben somit gezeigt: Jede holomorphe Funktion mit $f'(z) \neq 0$ ist eine konforme Abbildung.

Wozu brauchen wir das in der Physik? Nun, stellen wir uns vor, dass wir ein einfaches Dirichlet'sches Randwertproblem bereits gelöst haben und dann die Lösung eines komplizierteren Problems suchen. Dies können wir jetzt folgendermaßen machen: Wir suchen uns „einfach“ eine konforme Abbildung, welche die Linien mit vorgegebenem Potenzial des einfachen Randwertproblems auf die entsprechenden Linien des komplizierteren abbilden. Da die Feldlinien immer senkrecht auf den Linien mit vorgegebenem Potenzial stehen und konforme Abbildungen winkelerhaltend sind, folgt, dass die Feldlinien des einfachen Problems dann auch auf die Feldlinien des komplizierteren abgebildet werden, und ebenso die Äquipotenziallinien des einfachen Problems auf die des komplizierteren. Damit ist das kompliziertere Randwertproblem dann auch gelöst.

Beispiel 6.6: Zylinderkondensator

Wir gehen aus von dem einfachen Randwertproblem $\phi = +\phi_0$ für $x = +d$ und $\phi = 0$ für $x = 0$, sprich: Wir betrachten einen zweidimensionalen Schnitt durch einen unendlich großen Plattenkondensator. Die Feldlinien sind dann Geraden parallel zur x -Achse, die Äquipotenziallinien Geraden parallel zur y -Achse. Genauer: Wir haben $\phi(x, y) = \phi_0 x/d$ für $0 \leq x \leq d$. Mithilfe der Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen können wir dies auf ein

komplexes Potenzial erweitern; wie man leicht nachrechnet, muss $\psi(x, y) = \phi_0 y/d$ sein. Mit $z = x + iy$ folgt insgesamt also einfach $\Phi(z) = \phi_0 z/d$ bzw. $z(\Phi) = d \Phi/\phi_0$.

Nun suchen wir das Potenzial bei einem Zylinderkondensator, dessen Achse senkrecht zur komplexen Ebene steht und durch den Ursprung verläuft. Die Randbedingungen seien $\phi = 0$ für $\varrho = \varrho_1$ und $\phi = +\phi_0$ für $\varrho = \varrho_2$.

Wir brauchen also eine konforme Abbildung, welche die beiden Geraden $x = 0$ bzw. $x = d$ auf die beiden Kreise mit $\varrho = \varrho_{1,2}$ um den Ursprung abbildet. Dazu erinnern wir uns zunächst daran, dass die Parameterdarstellung eines Kreises mit Radius ϱ_0 um den Ursprung in der komplexen Ebene gegeben ist durch

$$z = \varrho_0 e^{i\varphi}$$

mit $-\pi < \varphi \leq \pi$, was wir auch schreiben können als

$$z = e^{\lambda + i\varphi}$$

mit $\lambda = \ln \varrho_0$. Damit haben's wir ja schon fast: Die Exponentialfunktion bildet alle komplexen Zahlen mit jeweils konstantem Realteil λ auf einen Kreis um den Ursprung mit Radius e^λ ab. Nun müssen wir nur noch λ als Funktion von ϕ so wählen, dass die Randbedingungen erfüllt sind. Wie man leicht nachrechnet, ist das für

$$\lambda = \frac{\phi}{\phi_0} \cdot \ln \frac{\varrho_2}{\varrho_1} + \ln \varrho_1$$

der Fall – wir haben einfach linear zwischen den Rändern interpoliert.

Würden wir nun dieses λ oben einsetzen, so hätten wir aber keine holomorphe Funktion von Φ . Ersetzen wir also schließlich noch ϕ durch Φ , so bleibt

$$z = \exp \left[\frac{\Phi}{\phi_0} \cdot \ln \frac{\varrho_2}{\varrho_1} + \ln \varrho_1 \right].$$

Damit haben wir das gesuchte Potenzial eigentlich gefunden – es bleibt noch, dies nach Φ aufzulösen und den Realteil zu nehmen.

Offensichtlich muss man auf beiden Seiten den natürlichen Logarithmus nehmen. Rechts ist das einfach; links muss man noch etwas aufpassen: Wie bereits erwähnt, ist der Logarithmus im Komplexen nicht eindeutig. Das liegt einfach daran, dass die komplexe Exponentialfunktion nicht injektiv ist; beispielsweise gilt ja $e^0 = e^{2\pi i} = 1$. Wir verwenden hier den sogenannten „Hauptzweig“ Ln des Logarithmus, der gegeben ist durch

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i \arg(z) = \ln \varrho + i \arg(z)$$

mit $-\pi < \arg(z) \leq \pi$; die anderen Zweige unterscheiden sich davon nur durch Addition von ganzzahligen Vielfachen von $2\pi i$. Damit folgt

$$\ln \varrho + i \arg(z) = \frac{\Phi}{\phi_0} \cdot \ln \frac{\varrho_2}{\varrho_1} + \ln \varrho_1,$$

also

$$\ln \varrho = \frac{\phi}{\phi_0} \cdot \ln \frac{\varrho_2}{\varrho_1} + \ln \varrho_1 \quad \text{und} \quad \arg(z) = \frac{\psi}{\phi_0} \cdot \ln \frac{\varrho_2}{\varrho_1}.$$

Für das Potenzial des Zylinderkondensators ergibt sich damit schließlich

$$\phi(\varrho) = \phi_0 \frac{\ln \frac{\varrho}{\varrho_1}}{\ln \frac{\varrho_2}{\varrho_1}}$$

– in Übereinstimmung mit der $\ln \varrho$ -Abhängigkeit, die man auch mit anderen Methoden erhält (üblicherweise mit dem Gauß'schen Satz; siehe beispielsweise Feuerbacher (2016)).

Abschließend schauen wir uns noch die Linien mit konstantem ψ an. Aus unserem Ergebnis folgt sofort, dass dies die Linien mit konstantem $\arg(z)$ sind, also Strahlen, die vom Ursprung bzw. der z -Achse aus nach außen zeigen. Dies ist in völliger Übereinstimmung mit dem bekannten Verlauf der Feldlinien im Zylinderkondensator.

Zusammenfassung

- Eine komplexe Funktion $f: \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ heißt holomorph, wenn sie komplex differenzierbar ist. Dies kann beispielsweise mit den Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen überprüft werden,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

wobei $z = x + iy$ ist und $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Funktionen, die in ganz \mathbb{C} holomorph sind, heißen ganz.

- Jede holomorphe Funktion ist unendlich oft differenzierbar, (lokal) als Potenzreihe darstellbar und damit analytisch.
- Für Funktionen, die in einem einfach zusammenhängenden Gebiet von \mathbb{C} holomorph sind, gilt der Cauchy'sche Integralsatz

$$\oint f(z) dz = 0.$$

Daraus folgt, dass Integrale von einem Punkt der komplexen Ebene zu einem anderen vom Weg unabhängig sind.

- Komplexe Funktionen, die nur isolierte Polstellen haben und ansonsten holomorph sind, heißen meromorph.
- Für meromorphe Funktionen gilt der Residuensatz

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_0} \text{ind}_{\gamma}(z_0) \text{Res}_{z_0} f(z),$$

wobei die Summe über alle Pole erster Ordnung läuft und $\text{ind}_{\gamma}(z_0)$ angibt, wie oft und in welcher Richtung der Pol z_0 jeweils vom Integrationsweg γ umlaufen wird. Das Residuum eines Pols erster Ordnung kann dabei berechnet werden mit

$$\text{Res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z);$$

für Polstellen höherer Ordnung siehe bei Bedarf (6.7).

- Zur Berechnung von Integralen schließt man den Integrationsweg längs der reellen Achse oft durch einen Halbkreis „im Unendlichen“. Dabei muss man darauf achten, dass der Beitrag des Halbkreises zum Integral verschwindet; je nach Integrand erreicht man dies, indem man den Halbkreis in der oberen oder unteren komplexen Halbebene wählt.
- Definiert man

$$\Phi(x, y) := \phi(x, y) + i\psi(x, y),$$

wobei ϕ ein Potenzial in der Ebene ist und ψ so gewählt wird („harmonisch konjugiert“ zu ϕ), dass Φ holomorph ist, so nennt man Φ ein komplexes Potenzial. Die Linien mit konstantem ψ stehen dann senkrecht zu den Äquipotenziallinien, beschreiben also die Feldlinien.

- Jede holomorphe Funktion f mit $f'(z_0) \neq 0$ ist bei z_0 jeweils lokal eine konforme Abbildung, d.h., sie ist dort winkelerhaltend. Konforme Abbildungen können verwendet werden, um ein zweidimensionales Potenzialproblem auf ein anderes abzubilden.

6.4 Aufgaben

6.1 Begründe:

- Die Funktionen $\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ und $\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$ sind ganz.
- Begründe, dass eine nicht-konstante Funktion f mit $\text{Re } f(z) \equiv 0$ oder $\text{Im } f(z) \equiv 0$ nicht überall holomorph sein kann.

Lösung

- (a) Man könnte hier mit den Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen drauflosrechnen; einfacher geht's aber so: Im Kapiteltext wurde bereits begründet, dass e^z eine holomorphe Funktion ist. Da $e^{-z} = 1/e^z$ ein Quotient von zwei holomorphen Funktionen ist, folgt, dass auch e^{-z} überall dort holomorph ist, wo der Term definiert ist. Da außerdem e^z keine Nullstelle hat, ist e^{-z} für alle $z \in \mathbb{C}$ definiert und damit ganz. \cosh und \sinh sind dann als Summen von Vielfachen von ganzen Funktionen ebenfalls ganz.

Da man

$$\cos(z) = \cosh(iz) \quad \text{und} \quad \sin(z) = -i \sinh(iz)$$

schreiben kann, folgt, dass auch \cos und \sin ganze Funktionen sind.

- (b) Dies geht nun mit den Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen am schnellsten. Sei zunächst $u(z) = \operatorname{Re} f(z) \equiv 0$. Dann ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0,$$

aber, weil f als nicht konstant vorausgesetzt wurde, gibt es Punkte mit

$$\frac{\partial v}{\partial y} \neq 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial v}{\partial x} \neq 0.$$

Dort ist also

$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \neq \frac{\partial v}{\partial x},$$

und damit ist f dort nicht holomorph. Den Fall $v(z) = 0$ begründet man ebenso.

Insbesondere sind also die Funktionen $f(z) = \operatorname{Re} z$ und $f(z) = \operatorname{Im} z$ nicht holomorph und, wie bereits im Kapiteltext gezeigt, $f(z) = |z|$ auch nicht.

6.2 Berechne das Wegintegral der Funktion $f(z) = z^2$ von $z = -1$ nach $z = 1$ auf einem Weg, der

- (a) zunächst parallel zur imaginären Achse bis $z = -1 + ia$ verläuft, dann parallel zur reellen Achse bis $1 + ia$ und schließlich parallel zur imaginären Achse bis $z = 1$ (Rechteck), bzw.
- (b) zunächst gerade bis $z = ia$ verläuft und von dort gerade bis $z = 1$ (gleichschenkliges Dreieck).

Dabei ist jeweils $a \in \mathbb{R}^+$ beliebig. (Zur Kontrolle: Laut Kapiteltext muss sich jeweils $2/3$ ergeben.)

Lösung

- (a) Auf dem ersten Wegstück haben wir $z = -1 + iy$ mit $0 \leq y \leq a$, also $dz = i dy$, auf dem zweiten $z = x + ia$ mit $-1 \leq x \leq 1$, also $dz = dx$, und auf dem letzten $z = 1 + iy$ mit $0 \leq y \leq a$. Beachten wir noch die Integrationsrichtungen, so ergibt sich

$$\int_{-1}^1 z^2 dz = \int_0^a (-1 + iy)^2 i dy + \int_{-1}^1 (x + ia)^2 dx - \int_0^a (1 + iy)^2 i dy.$$

Löst man die Klammern auf, so kann man das erste und das letzte Integral zusammenfassen und das mittlere Integral aufteilen:

$$\int_{-1}^1 z^2 dz = 4 \int_0^a y dy + \int_{-1}^1 x^2 dx + 2ia \int_{-1}^1 x dx - a^2 \int_{-1}^1 dx.$$

Alle Integrale sind nun trivial ausführbar; insbesondere das vorletzte verschwindet einfach, da der Integrand ungerade ist. Es bleibt

$$\int_{-1}^1 z^2 dz = 2a^2 + \frac{2}{3} + 0 - 2a^2 = \frac{2}{3}.$$

Passt.

- (b) Auf dem ersten Wegstück haben wir $z = -1 + u + iau$ mit $0 \leq u \leq 1$, also $dz = (1 + ia)du$, auf dem zweiten $z = ia + u - iau$ mit $0 \leq u \leq 1$, also $dz = (1 - ia)du$. Damit ist

$$\int_{-1}^1 z^2 dz = \int_0^1 (-1 + (1 + ia)u)^2 (1 + ia) du + \int_0^1 (ia + (1 - ia)u)^2 (1 - ia) du.$$

Nach Auflösen der Klammern und Zusammenfassen bleibt

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 z^2 dz &= \int_0^1 [1 - a^2 + ia + ia^3 + 2(-1 - ia + 3a^2 - ia^3)u + (2 - 6a^2)u^2] du \\ &= 1 - a^2 + ia + ia^3 + (-1 - ia + 3a^2 - ia^3) + \frac{1}{3}(2 - 6a^2) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Wieder: Passt.

6.3 Berechne das geschlossene Wegintegral der Funktion $f(z) = 1/z$ auf einem Weg, der

- zunächst parallel zur reellen Achse von $z = a + ib$ bis $z = -a + ib$ verläuft, dann parallel zur imaginären Achse bis $z = -a - ib$, dann wieder parallel zur reellen Achse bis $z = a - ib$ und schließlich parallel zur imaginären Achse zurück bis $z = a + ib$ (Rechteck), bzw.
- zunächst gerade von $z = a$ bis $z = ib$, von dort gerade bis $z = -a$, dann gerade bis $z = -ib$ und schließlich gerade zurück bis $z = a$ (Raute).

Dabei sind jeweils $a, b \in \mathbb{R}^+$ beliebig. *Tipp:* Erst die Integrale geschickt zusammenfassen, dann auswerten! (Zur Kontrolle: Laut Kapiteltext muss sich jeweils $2\pi i$ ergeben.)

Lösung

- Die Parametrisierungen sind ähnlich wie in Aufgabe 6.2a. Damit ist

$$\begin{aligned}
 \oint \frac{1}{z} dz &= - \int_{-a}^a \frac{dx}{x + ib} - \int_{-b}^b \frac{i dy}{-a + iy} + \int_{-a}^a \frac{dx}{x - ib} + \int_{-b}^b \frac{i dy}{a + iy} \\
 &= 2ib \int_{-a}^a \frac{1}{x^2 + b^2} dx + 2ia \int_{-b}^b \frac{1}{y^2 + a^2} dy \\
 &= 2i \int_{-1}^1 \frac{1}{u^2 + 1} du + 2i \int_{-1}^1 \frac{1}{u^2 + 1} du \\
 &= 4i [\arctan u]_{-1}^1 = 4i \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi i.
 \end{aligned}$$

Passt.

- Hier sind die Parametrisierungen ähnlich wie in Aufgabe 6.2b, und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \oint \frac{1}{z} dz &= \int_0^1 \frac{(-a + ib) du}{a - au + ibu} - \int_0^1 \frac{(a + ib) du}{-a + au + ibu} \\
 &\quad + \int_0^1 \frac{(a - ib) du}{-a + au - ibu} - \int_0^1 \frac{(-a - ib) du}{a - au - ibu} \\
 &= 2 \int_0^1 \frac{(a + ib) du}{a - (a + ib)u} - 2 \int_0^1 \frac{(a - ib) du}{a - (a - ib)u}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^1 \frac{2iab}{a^2 - 2a^2u + (a^2 + b^2)u^2} du \\
&= 4i \int_{-a/b}^{b/a} \frac{1}{v^2 + 1} dv,
\end{aligned}$$

wobei im Nenner mal wieder quadratisch ergänzt und dann geeignet substituiert wurde. Es bleibt schließlich

$$\oint \frac{1}{z} dz = 4i [\arctan v]_{-a/b}^{b/a} = 4i \left[\arctan \frac{b}{a} + \operatorname{arccot} \frac{b}{a} \right] = 4i \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi i;$$

hier wurde noch die Symmetrie des Arkustangens verwendet und $\arctan(1/x) = \operatorname{arccot}(x)$. Wieder: Passt.

6.4 Berechne die Fourier-Transformierte von

$$f(x) = \frac{c}{t^4 + t_0^4}$$

mit Konstanten $c \in \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}^+$. Verwende dafür einen passend gewählten „im Unendlichen“ geschlossenen Weg und den Residuensatz; beachte dabei das Vorzeichen von ω !

Lösung

Nach Definition der Fourier-Transformation in Kap. 4 ist

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{t^4 + t_0^4} e^{i\omega t} dt$$

zu berechnen. Betrachten wir den Integranden als Funktion von $t \in \mathbb{C}$, so hat er die vier Pole erster Ordnung

$$\begin{aligned}
t_1 &= t_0 e^{i\pi/4} = \frac{t_0}{\sqrt{2}}(1 + i), & t_2 &= t_0 e^{3i\pi/4} = \frac{t_0}{\sqrt{2}}(-1 + i), \\
t_3 &= t_0 e^{5i\pi/4} = \frac{t_0}{\sqrt{2}}(-1 - i), & t_4 &= t_0 e^{7i\pi/4} = \frac{t_0}{\sqrt{2}}(1 - i)
\end{aligned}$$

und ist ansonsten holomorph, insgesamt also meromorph. Um das Integral zu berechnen, schließen wir den Integrationsweg wieder durch einen Halbkreis mit Radius R um den Ursprung.

Ob der Exponentialfaktor für $R \rightarrow \infty$ divergiert oder gegen null geht, hängt nun aber vom Vorzeichen von ω ab. Für $\omega \geq 0$ müssen wir den Halbkreis deshalb in der

oberen Halbebene schließen, für $\omega \leq 0$ dagegen in der unteren – vgl. die Rechnung zum Yukawa-Potenzial im Kapiteltext.

Betrachten wir zunächst $\omega \geq 0$. Dann brauchen wir nur die Residuen bei t_1 und t_2 :

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{t_1} \frac{c}{t^4 + t_0^4} e^{i\omega t} &= \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{c(t - t_1)}{(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)(t - t_4)} e^{i\omega t} \\ &= \frac{c}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)(t_1 - t_4)} e^{i\omega t_1} = \frac{\sqrt{2}^3 c}{8i(1 + i)t_0^3} e^{(i-1)\omega t_0/\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

entsprechend folgt

$$\operatorname{Res}_{t_2} \frac{c}{t^4 + t_0^4} e^{i\omega t} = \frac{\sqrt{2}^3 c}{8i(1 - i)t_0^3} e^{(-i-1)\omega t_0/\sqrt{2}}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint_{gW_o} \frac{c}{t^4 + t_0^4} e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2\pi i \cdot \left[\operatorname{Res}_{t_1} \frac{c}{t^4 + t_0^4} e^{i\omega t} + \operatorname{Res}_{t_2} \frac{c}{t^4 + t_0^4} e^{i\omega t} \right] \\ &= \sqrt{2\pi} i \cdot \frac{\sqrt{2}^3 c}{8it_0^3} \left[\frac{e^{(i-1)\omega t_0/\sqrt{2}}}{1 + i} + \frac{e^{(-i-1)\omega t_0/\sqrt{2}}}{1 - i} \right] \\ &= \frac{\sqrt{\pi} c}{2t_0^3} e^{-\omega t_0/\sqrt{2}} \frac{(1 - i)e^{i\omega t_0/\sqrt{2}} + (1 + i)e^{-i\omega t_0/\sqrt{2}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{\pi} c}{2t_0^3} e^{-\omega t_0/\sqrt{2}} \left[\cos(\omega t_0/\sqrt{2}) + \sin(\omega t_0/\sqrt{2}) \right]. \end{aligned}$$

Für $\omega \leq 0$ läuft die Rechnung fast genauso, nur einige Vorzeichen sind anders. Insbesondere ist auch darauf zu achten, dass der Weg nun im mathematisch negativen Sinn durchlaufen wird. Man erhält schließlich

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{\sqrt{\pi} c}{2t_0^3} e^{\omega t_0/\sqrt{2}} \left[\cos(\omega t_0/\sqrt{2}) - \sin(\omega t_0/\sqrt{2}) \right],$$

zusammengefasst also

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\omega) &= \frac{\sqrt{\pi} c}{2t_0^3} e^{-|\omega|t_0/\sqrt{2}} \left[\cos(|\omega|t_0/\sqrt{2}) + \sin(|\omega|t_0/\sqrt{2}) \right] \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{c}{t_0^3} e^{-|\omega|t_0/\sqrt{2}} \sin\left(\frac{|\omega|t_0}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

6.5

- (a) Gib das komplexe Potenzial Φ für das reelle Potenzial

$$\phi(\varphi) = \phi_1 + \frac{\phi_2 - \phi_1}{\pi} \varphi$$

mit $0 \leq \varphi \leq \pi$ an und diskutierte den Verlauf der elektrischen Feldlinien. (*Tipp:* Das reelle Potenzial hängt nur vom Winkel in der komplexen Ebene ab – und die entsprechende Funktion kam schon im Kapiteltext vor!)

- (b) Finde eine konforme Abbildung, welche das Gebiet

$$\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} | \operatorname{Im} z \geq 0\}$$

(obere Halbebene) auf das Gebiet

$$\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} | \operatorname{Re} z \geq 0 \text{ und } \operatorname{Im} z \geq 0\}$$

(erster Quadrant) abbildet. (*Tipp:* Überlege, welche Funktion 1 auf 1 und -1 auf i abbildet.)

- (c) Mathematische Zusatzfragen: Warum muss man bei den beiden Gebieten jeweils $z = 0$ ausschließen? Wie kann es sein, dass durch diese Abbildung die positive x -Achse auf die positive x -Achse und die negative x -Achse auf die positive imaginäre Achse abgebildet wird, also anscheinend ein 180° -Winkel auf einen 90° -Winkel, obwohl eine konforme Abbildung doch winkeltreu sein sollte?
- (d) Finde mithilfe des Ergebnisses in (b) eine konforme Abbildung, welche das Gebiet $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} | \operatorname{Im} z \geq 0\}$ auf das Gebiet $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} | \operatorname{Im} z \geq |\operatorname{Re} z|\}$ abbildet.
- (e) Verwende die konforme Abbildung aus (d) und das komplexe Potenzial aus (a), um das folgende Randwertproblem zu lösen: $\phi = \phi_1$ für $\varphi = \pi/4$, $\phi = \phi_2$ für $\varphi = 3\pi/4$. Dabei ist nur die Lösung im Bereich $\pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4$ gesucht.

Lösung

- (a) Der Winkel φ entspricht in der komplexen Ebene einfach $\arg(z)$. Wie wir im Kapiteltext gesehen haben, ist dies aber genau der Imaginärteil des Hauptzweiges des komplexen Logarithmus', d. h., wir haben

$$\operatorname{Re} \Phi(z) = \phi(z) = \phi_1 + \frac{\phi_2 - \phi_1}{\pi} \operatorname{Im} \operatorname{Ln} z,$$

und somit muss

$$\Phi(z) = \phi_1 - i \frac{\phi_2 - \phi_1}{\pi} \operatorname{Ln} z$$

gelten. Damit ist

$$\psi(z) = \operatorname{Im} \Phi(z) = \phi_1 - i \frac{\phi_2 - \phi_1}{\pi} \ln |z|.$$

$\psi(z)$ ist also konstant für konstantes $|z|$, d. h., die Feldlinien sind Kreise (bzw. wegen der Einschränkung des Winkels eigentlich nur Halbkreise) um den Ursprung.

- (b) Die gesuchte Abbildung ist $f(z) = \sqrt{z}$.

Allerdings muss man streng genommen hier auch ein wenig vorsichtig sein: Da $f(z) = z^2$ nicht injektiv ist (es gilt ja $(-z)^2 = z^2$), ist die Quadratwurzel nicht eindeutig definiert. Im Reellen legt man fest, dass das Ergebnis der Quadratwurzel nicht-negativ sein soll; im Komplexen ist die Definition nicht so klar. Üblich ist es, den *Hauptzweig* der Quadratwurzel so zu definieren, dass das Ergebnis in der rechten Halbebene oder auf der positiven imaginären Achse liegt:

$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{i \arg(z)/2},$$

wobei wie beim Hauptzweig des Logarithmus (siehe Kapiteltext) $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ gelten soll.

- (c) $z = 0$ muss man ausschließen, weil f dort nicht differenzierbar ist, also nicht holomorph, also keine konforme Abbildung. Dies beantwortet auch gleich die zweite Frage: Der 180° - bzw. der 90° -Winkel ist jeweils bei $z = 0$. Da die Abbildung dort nicht konform ist, muss der Winkel dort auch nicht erhalten bleiben.
- (d) Das gesuchte Gebiet ist die Viertelebene, die oberhalb des Graphen der Funktion $y = |x|$ liegt (mit $y = \operatorname{Im} z$, $x = \operatorname{Re} z$). Dieses Gebiet erhalten wir aus dem ersten Quadranten, also dem Ergebnis in (a), indem wir um 45° nach links drehen. Die gesuchte Abbildung ist also $f(z) = \sqrt{|z|} e^{i(\arg(z)/2 + \pi/4)}$.
- (e) Zunächst bemerken wir, dass beim reellen Potenzial in (a) gilt: $\phi = \phi_1$ für $\varphi = 0$, $\phi = \phi_2$ für $\varphi = \pi$. Die konforme Abbildung aus (d) bildet diese Randbedingungen genau auf die nun gesuchten Randbedingungen ab. Laut Kapiteltext müssen wir diese konforme Abbildung also nun auf das komplexe Potenzial aus (a) anwenden.

Bilden wir zunächst die Umkehrfunktion:

$$z = \exp\left(i\pi \frac{\Phi - \phi_1}{\phi_2 - \phi_1}\right) = \exp\left(-\pi \frac{\psi}{\phi_2 - \phi_1}\right) \cdot \exp\left(i\pi \frac{\phi - \phi_1}{\phi_2 - \phi_1}\right),$$

also

$$|z| = \exp\left(-\pi \frac{\psi}{\phi_2 - \phi_1}\right) \quad \text{und} \quad \arg(z) = \pi \frac{\phi - \phi_1}{\phi_2 - \phi_1}.$$

Darauf wenden wir die konforme Abbildung aus (c) an:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{\exp\left(-\pi \frac{\psi}{\phi_2 - \phi_1}\right)} \cdot \exp\left(i \left[\pi \frac{\phi - \phi_1}{\phi_2 - \phi_1} / 2 + \pi/4 \right]\right) \\ &= \exp\left(i \left[\frac{\pi}{2} \frac{\Phi - \phi_1}{\phi_2 - \phi_1} + \frac{\pi}{4} \right]\right). \end{aligned}$$

Und schließlich lösen wir wieder nach Φ auf:

$$\Phi(z) = \phi_1 + \frac{2(\phi_2 - \phi_1)}{\pi} \left(-i \operatorname{Ln} z - \frac{\pi}{4} \right).$$

Das übliche reelle Potenzial erhalten wir als Realteil davon:

$$\phi(z) = \phi_1 + \frac{2(\phi_2 - \phi_1)}{\pi} \left(\arg(z) - \frac{\pi}{4} \right),$$

also

$$\phi(\varphi) = \phi_1 + \frac{2(\phi_2 - \phi_1)}{\pi} \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right).$$

Anhang Mathematische Grundlagen

A

In diesem Anhang soll grundlegendes Wissen über Vektoren, Differenzial- und Integralrechnung kurz zusammengestellt werden. Vieles davon sollte euch bereits aus der Schule bekannt sein, der Rest aus den vorherigen Semestern (Vorlesungen zur Mechanik und/oder zur experimentellen Elektrodynamik, teilweise vielleicht auch aus Analysis I oder Lineare Algebra I).

A.1 Vektoren und Matrizen

Was Vektoren im \mathbb{R}^3 sind und wie man mit ihnen rechnet, lernt man größtenteils bereits für das Abitur; ebenso bringt man aus der Schule meist zumindest ein wenig Wissen über Matrizen mit. Diese Grundlagen werden hier deshalb nicht ausführlich wiederholt, sondern es wird nur kurz auf einige wichtige Schreibweisen und Formeln eingegangen, die teilweise auch schon etwas über den Schulstoff hinausgehen. Tensoren sowie Eigenwerte und -vektoren lernen dagegen die meisten wohl erst am Anfang des Studiums kennen; deshalb werden diese ein wenig ausführlicher besprochen.

A.1.1 Grundwissen

Im Folgenden stehen $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$ für (Spalten-)Vektoren mit reellen Einträgen, \mathbf{A}, \dots für Matrizen, a_j bzw. A_{jk} für deren Komponenten und j, \dots, m für natürliche Zahlen.

Vektoraddition, skalare Multiplikation, der Betrag eines Vektors, Einheitsvektoren sowie das Skalar- und Vektorprodukt (auch als Punkt- bzw. Kreuzprodukt oder inneres bzw. äußeres Produkt bezeichnet) und die grundlegenden Rechenregeln werden als bekannt vorausgesetzt. Außerdem lernt man normalerweise bereits im ersten Semester die Schreibweise des Skalarprodukts mit dem „Kronecker-

Symbol“,

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \sum_{j,k=1}^n \delta_{jk} a_j b_k \quad \text{mit} \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}, \quad (\text{A.1})$$

sowie die Schreibweise des Vektorprodukts (das es bekanntlich nur im \mathbb{R}^3 gibt) mit dem „Epsilon-Tensor“/„Levi-Civita-Symbol“,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_j = \sum_{k,\ell=1}^3 \epsilon_{jkl} a_k b_\ell \quad (\text{A.2})$$

mit

$$\epsilon_{jkl} = \begin{cases} 1 & jkl \text{ ist gerade Permutation von } 123 \\ -1 & jkl \text{ ist ungerade Permutation von } 123 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (\text{A.3})$$

Diese Symbole sind übrigens benannt nach dem deutschen Mathematiker *Leopold Kronecker* (1823–1891) bzw. dem italienischen Mathematiker *Tullio Levi-Civita* (1873–1941).

Außerdem sei noch das sogenannte „dyadische Produkt“ zweier Vektoren erwähnt, das wohl nicht allgemein bekannt ist. Bei diesem transponiert man den einen Spaltenvektor und multipliziert dann den anderen Spaltenvektor mit dem entstandenen Zeilenvektor im üblichen Sinne der Matrixmultiplikation; das Ergebnis ist eine Matrix. (Zur Erinnerung: „Transponieren“ bedeutet bei einer Matrix allgemein das Spiegeln an der Hauptdiagonalen, d. h., Zeilen werden zu Spalten und umgekehrt.)

Beispiel A.1

Für die Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b}^\top = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bei den Rechenregeln sei insbesondere an das Antikommutativgesetz beim Vektorprodukt erinnert,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \quad (\text{A.4})$$

sowie an die Graßmann-Identität (Physikern meist als „bac-cab“ bekannt):

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \circ \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}). \quad (\text{A.5})$$

Benannt ist Letztere nach Hermann Günther Graßmann, dem Begründer der Vektorrechnung (siehe Abschn. 3.4). Das Antikommutativgesetz entspricht der Antisymmetrie des Levi-Cevita-Symbols unter Vertauschung zweier Indizes; die Graßmann-Identität kann auch mittels Levi-Civita- und Kronecker-Symbolen geschrieben werden:

$$\sum_{j=1}^3 \epsilon_{jkt} \epsilon_{jmn} = \delta_{km} \delta_{\ell n} - \delta_{kn} \delta_{\ell m}. \quad (\text{A.6})$$

Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ multipliziert man mit einem Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, indem man im Prinzip das Skalarprodukt jeder Zeile der Matrix mit dem Vektor nimmt; formelmäßig:

$$(\mathbf{A}\mathbf{x})_j = \sum_{k=1}^m A_{jk} x_k. \quad (\text{A.7})$$

Die Determinante einer quadratischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kann man allgemein mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz berechnen. Die Entwicklung nach der k -ten Spalte ($1 \leq k \leq n$) ist gegeben durch

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+k} A_{jk} \cdot \det \mathbf{A}_{(jk)}, \quad (\text{A.8})$$

wobei $\mathbf{A}_{(jk)}$ jeweils die Matrix bezeichnet, die aus \mathbf{A} entsteht, wenn man die Zeile j und die Spalte k streicht. Eine analoge Formel gibt es für die Entwicklung nach einer Zeile. Insbesondere für $n = 3$ kann man die Determinante auch mittels der Regel von Sarrus (benannt nach dem französischen Mathematiker *Pierre Frédéric Sarrus*, 1798–1861) berechnen, die man in den meisten Formelsammlungen findet und eventuell auch schon aus der Schule kennt.

A.1.2 (Dreh-)Matrizen und Tensoren

Matrizen $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, für die

$$\mathbf{D}\mathbf{D}^\top = \mathbf{D}^\top \mathbf{D} = \mathbf{I} \quad (\text{A.9})$$

gilt, heißen *orthogonal* (da ihre Zeilen bzw. Spalten jeweils senkrecht aufeinander stehen). Dabei bezeichnet \top die Transposition, und \mathbf{I} ist die Einheitsmatrix (Einsen auf der Hauptdiagonalen, alle anderen Einträge sind Nullen). Sie bilden die sogenannte „orthogonale Gruppe“ $O(n)$. Alle Matrizen in $O(n)$, bei denen zusätzlich $\det \mathbf{D} = 1$ gilt, bilden eine Untergruppe, die „spezielle orthogonale Gruppe“ $SO(n)$.

In der Physik sind diese Gruppen von großer Bedeutung, da die Matrizen in $SO(n)$ Drehungen im \mathbb{R}^n beschreiben. Genauer gilt: Ist $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ der Ortsvektor eines Punktes, so gibt es zu jeder Matrix $\mathbf{D} \in SO(n)$ eine Drehachse und einen

Drehwinkel, sodass $\mathbf{r}' = \mathbf{D}\mathbf{r}$ der Ortsvektor des Punktes ist, der sich nach dieser Drehung ergibt. Die Gruppe $O(N)$ enthält zusätzlich auch noch sogenannte Paritätstransformationen / Raumspiegelungen, d. h. Punktspiegelungen am Ursprung.

Da sich viele andere Vektoren unter Drehung genauso verhalten, beispielsweise Geschwindigkeitsvektoren \mathbf{v} ,

$$\mathbf{v}' = \mathbf{D}\mathbf{v}, \quad (\text{A.10})$$

führt man eine neue Bezeichnung ein: Alle n -Tupel von reellen Zahlen, die sich unter Drehungen genauso verhalten wie der Ortsvektor, nennt man Vektoren *im physikalischen Sinn*. Die letzten drei Worte werden praktisch immer weggelassen – man sollte sich aber klarmachen, dass ein Vektor im physikalischen Sinn eben wirklich etwas anderes bedeutet als ein Vektor im mathematischen Sinn!

In der Mathematik ist ein „Vektor“ letztlich einfach eine Bezeichnung für ein Element eines Vektorraums – also kann man dort beispielsweise auch Funktionen als Vektoren bezeichnen. In der Physik werden deutlich weniger Objekte als Vektoren bezeichnet: Man stellt die beiden zusätzlichen Forderungen, dass man nur ein Tupel von reellen (oder komplexen) Zahlen hat, und eben auch, dass sich dieses Tupel unter Drehungen so verhalten muss wie der Ortsvektor. Ein Gegenbeispiel wäre eine Liste von Mengenangaben verschiedener Produkte, die ein Unternehmen auf Lager hat – auch eine solche Liste bildet ein n -Tupel, dieses Tupel ändert sich unter Drehungen des Raums aber überhaupt nicht, und damit ist es kein Vektor im physikalischen Sinn.

Außerdem ist noch zu erwähnen, dass physikalische Vektoren, die unter einer Raumspiegelung *nicht* ihr Vorzeichen ändern (im Gegensatz zum Ortsvektor), als *Pseudovektoren* oder auch „axiale Vektoren“ bezeichnet werden. Die letztere Bezeichnung stammt daher, dass solche Vektoren typischerweise eine Achse festlegen: Beispielsweise ist der Vektor $\boldsymbol{\omega}$ der Winkelgeschwindigkeit ein Pseudovektor, und seine Richtung legt die Drehachse und -richtung fest.

Alternativ spricht man hier oft auch von *Tensoren erster Stufe*. Diese Bezeichnung legt nahe, dass es auch Tensoren zweiter und höherer Stufe geben sollte. Ein Beispiel dafür hat man wahrscheinlich schon in der Mechanik kennengelernt: den Trägheitstensor $\boldsymbol{\Theta}$ (hier sind je nach Buch bzw. Dozent viele verschiedene Bezeichnungen üblich). Dieser taucht beispielsweise im Zusammenhang zwischen Drehimpuls \mathbf{L} und Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ auf,

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\omega}, \quad (\text{A.11})$$

wobei $\mathbf{L}, \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ und $\boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist. Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit sind Vektoren im physikalischen Sinne (na ja, die Winkelgeschwindigkeit ist eigentlich ein Pseudovektor, siehe oben, das ist hier aber unwichtig), also gilt bei einer Drehung

$$\mathbf{L}' = \mathbf{D}\mathbf{L}; \quad \boldsymbol{\omega}' = \mathbf{D}\boldsymbol{\omega}. \quad (\text{A.12})$$

Somit ist

$$\mathbf{L}' = \mathbf{D}(\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{D}\boldsymbol{\Theta}\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{D}\boldsymbol{\Theta}\mathbf{D}^\top \mathbf{D}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{D}\boldsymbol{\Theta}\mathbf{D}^\top \boldsymbol{\omega}', \quad (\text{A.13})$$

wobei eine Einheitsmatrix eingefügt und die Orthogonalität der Drehmatrix ausgenutzt wurde. Damit folgt für das Transformationsverhalten des Trägheitstensors

$$\boldsymbol{\Theta}' = \mathbf{D} \boldsymbol{\Theta} \mathbf{D}^\top, \quad (\text{A.14})$$

man benötigt für die Transformation die Drehmatrix hier also doppelt.

Schaut man sich das Verhalten der Komponenten unter Drehungen an, so wird die Parallele noch deutlicher. Für die Komponenten des Ortsvektors gilt

$$r'_j = \sum_{k=1}^3 D_{jk} r_k, \quad (\text{A.15})$$

für die Komponenten des Trägheitstensors folgt dagegen

$$\Theta'_{jk} = \sum_{\ell,m=1}^3 D_{j\ell} \Theta_{\ell m} (\mathbf{D}^\top)_{mk} = \sum_{\ell,m=1}^3 D_{j\ell} D_{km} \Theta_{\ell m}. \quad (\text{A.16})$$

Beim Trägheitstensor transformiert sich also jeder der beiden Indizes genau wie der eine Index beim Ortsvektor: Es wird jeweils mit den Komponenten der Drehmatrix multipliziert und dann aufaddiert. (Dabei ist auf die Indexstellung bei den Komponenten der Drehmatrix zu achten: Jeweils der erste, also der Zeilenindex, wird festgehalten; über den zweiten, also den Spaltenindex, wird summiert.) Genau deshalb heißt der Trägheitstensor ein Tensor *zweiter Stufe*.

Allgemein definiert man: Hat man eine physikalische Größe, die durch ein mathematisches Objekt $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n \times \dots \times n}$ mit z Indizes beschrieben wird, und transformiert sich diese Größe bei Drehungen bezüglich jedes Indexes wie der Ortsvektor, also

$$T'_{j_1 j_2 \dots j_z} = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_z=1}^n D_{j_1 k_1} D_{j_2 k_2} \dots D_{j_z k_z} T'_{k_1 k_2 \dots k_z}, \quad (\text{A.17})$$

so ist \mathbf{T} ein *Tensor der Stufe z* . Insbesondere heißt ein Tensor der Stufe 0, also ein Objekt, das sich unter Drehungen überhaupt nicht ändert, ein *Skalar*.

Beachtet man zusätzlich noch, ob das Objekt unter Raumspiegelungen sein Vorzeichen ändert oder nicht, erhält man auch noch Pseudotensoren und Pseudoskalare. (Ein bekanntes Beispiel für einen Pseudotensor der Stufe drei ist übrigens das Levi-Civita-Symbol.)

In manchen Lehrbüchern wird der Begriff „Tensor“ sogar noch allgemeiner definiert: Ein Tensor ist eine multilineare Abbildung von z Vektoren des \mathbb{R}^3 (oder nochmals allgemeiner: des \mathbb{R}^n) auf die reellen Zahlen. Man kann sich überlegen, dass unsere oben definierten Tensoren (mathematisches Objekt mit z Indizes, das sich auf bestimmte Weise transformiert) letztlich einfach Darstellungen dieser allgemeiner definierten Tensoren bezüglich einer jeweils fest gewählten Basis sind. Ein Beispiel kennt man vielleicht schon aus Vorlesungen zur linearen Algebra: Eine bilineare Abbildung von zwei Vektoren des \mathbb{R}^n auf die reellen Zahlen kann man bezüglich einer fest gewählten Basis immer als eine Matrix darstellen. Ausführlich wird dies beispielsweise in Bartelmann et al. (2014) dargestellt.

A.1.3 Eigenwerte und -vektoren

Existiert bei einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ein Vektor $v \neq 0$ und eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass

$$Av = \lambda v \quad (\text{A.18})$$

ist, so heißt λ ein *Eigenwert* und v ein *Eigenvektor* von A . (Völlig analog ist dies auch im Komplexen definiert.) Das können wir umstellen zu

$$(A - \lambda E)v = 0, \quad (\text{A.19})$$

und diese Gleichung hat genau dann nicht-triviale Lösungen (also $v \neq 0$), wenn die Spalten der Matrix $A - \lambda E$ linear abhängig sind. Also muss gelten:

$$\det(A - \lambda E) = 0. \quad (\text{A.20})$$

Dies führt auf eine algebraische Gleichung vom Grad n , welche man die *charakteristische Gleichung* oder manchmal auch „Säkulargleichung“ nennt.

Besonders einfach ist es bei symmetrischen Matrizen, also solchen, für die $A^T = A$ gilt. (Im Komplexen entspricht dies hermiteschen Matrizen, also solchen, für die $(A^T)^* = A$ gilt.) Diese haben immer n (nicht notwendigerweise verschiedene) reelle Eigenwerte, und die zugehörigen Eigenvektoren bilden, wenn man sie normiert wählt, eine orthonormale Basis des \mathbb{R}^n .

Beispiel A.2

Gesucht sind die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.21})$$

Wir stellen zunächst die charakteristische Gleichung auf:

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \implies \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0. \quad (\text{A.22})$$

Diese Gleichung hat die Lösungen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$. Für den ersten Eigenvektor muss deshalb gelten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} v_1 = -v_1 \implies v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.23})$$

für den zweiten dagegen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} v_2 = 3v_2 \implies v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (\text{A.24})$$

dabei haben wir die Eigenvektoren gleich normiert.

A.2 Krummlinige Koordinatensysteme

Viele Rechnungen, besonders bei Problemen mit einer passenden Symmetrie, funktionieren einfacher, wenn man statt kartesischer Koordinaten sogenannte krummlinige verwendet. Auch dies sollte normalerweise bereits aus dem ersten Semester bekannt sein, wird hier also auch nur relativ kurz wiederholt.

A.2.1 Ebene Polarkoordinaten

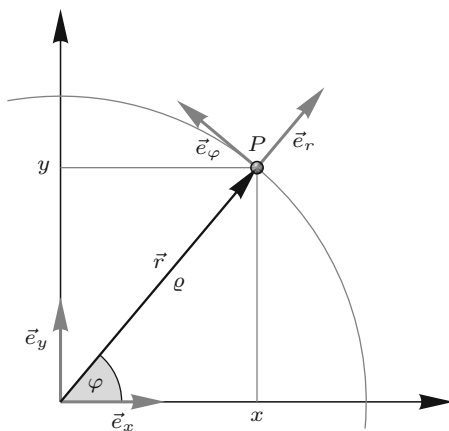
Bei zweidimensionalen Problemen bieten sich oft *ebene Polarkoordinaten* an: Statt der kartesischen Koordinaten x und y benutzt man den Abstand ϱ des Punktes $P(x; y)$ zum Ursprung und den Winkel φ , den eine Verbindungslinie von P zum Ursprung mit der x -Achse einschließt (im Allgemeinen im Bogenmaß, $0 \leq \varphi < 2\pi$). Damit gilt (siehe Abb. A.1)

$$x = \varrho \cos \varphi \quad \text{und} \quad y = \varrho \sin \varphi. \quad (\text{A.25})$$

Umgekehrt ist offensichtlich $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Den Zusammenhang von φ mit x und y kann man dagegen nicht so einfach direkt angeben: Für $0 \leq \varphi < \pi/2$ ist $\varphi = \arctan(y/x)$; in den anderen drei Winkelbereichen muss man wegen der Definition des Arkustangens noch π bzw. 2π addieren. Übrigens verwendet man genau diese Koordinaten natürlich auch bei der Polardarstellung einer komplexen Zahl, siehe Abschn. A.5.

Die Koordinateneinheitsvektoren zeigen jeweils in Richtung der Veränderung von ϱ bzw. von φ . Diese Richtungen hängen aber nun davon ab, wo man sich befindet – die Einheitsvektoren sind also jetzt ortsabhängig. Zunächst können wir an

Abb. A.1 Ebene Polarkoordinaten. Gezeigt sind die beiden Koordinaten ϱ und φ für einen Punkt P und die Einheitsvektoren an dieser Stelle; zum Vergleich auch die bekannten kartesischen Koordinaten



jedem Punkt einen Einheitsvektor finden, der von dort aus in Richtung von zunehmenden r zeigt, also radial nach außen, direkt vom Ursprung weg. Dafür nutzen wir einfach aus, dass die Ortsvektoren von Punkten genau solche Vektoren sind – wir müssen den allgemeinen Ortsvektor

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

also nur noch normieren und erhalten somit den radialen Einheitsvektor

$$\mathbf{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (\text{A.27})$$

Der jeweils zweite Einheitsvektor an jedem Punkt sollte jeweils senkrecht auf \mathbf{e}_r stehen, also tangential zu einer Kreislinie um den Ursprung durch diesen Punkt (vgl. Abb. A.1). Man kann sich leicht mittels etwas Trigonometrie überlegen, dass

$$\mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

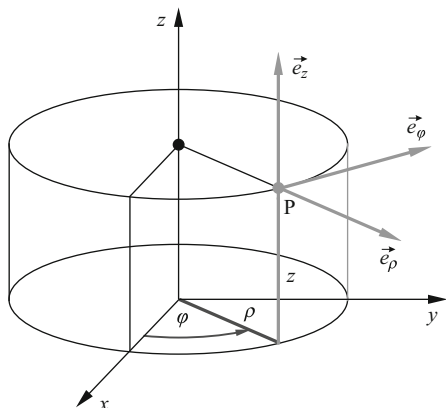
gelten muss – und dieser Vektor zeigt tatsächlich in die Richtung von zunehmenden φ . (Alternativ kann man dies auch aus den Bedingungen $\mathbf{e}_r \circ \mathbf{e}_\varphi = 0$ und $|\mathbf{e}_\varphi| = 1$ herleiten.) Man spricht hier häufig von der *azimutalen* Richtung.

A.2.2 Zylinderkoordinaten

Eine naheliegende Verallgemeinerung der ebenen Polarkoordinaten ist es, einfach noch die z -Achse hinzuzunehmen. Die Koordinaten sind also ϱ und φ wie oben, dazu kommt z . Diese Koordinaten eignen sich offensichtlich insbesondere für zylindersymmetrische Probleme und heißen dementsprechend *Zylinderkoordinaten*. Die Koordinateneinheitsvektoren sind dann

$$\mathbf{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.29})$$

Abb. A.2 Zylinderkoordinaten. Dargestellt sind die drei Koordinaten ϱ , φ und z eines Punktes P und die Einheitsvektoren dort



Die drei Vektoren (radial, azimuthal und *axial*) bilden in dieser Reihenfolge an jedem Punkt ein orthonormales Rechtssystem (nachrechnen!).

Zu beachten ist allerdings, dass ϱ nun den Abstand eines Punktes zur z -Achse angibt, nicht zum Ursprung. Der Abstand zum Ursprung ist, wie man sich anhand von Abb. A.2 leicht klarmacht, $r = \sqrt{\varrho^2 + z^2}$.

A.2.3 Kugelkoordinaten

Für kugelsymmetrische Probleme bietet sich dagegen eine andere Verallgemeinerung der ebenen Polarkoordinaten an: Zusätzlich zum Winkel φ , welcher in Zylinderkoordinaten ja die Orientierung von \mathbf{r} zur x - z -Ebene angibt, führen wir noch einen weiteren Winkel ϑ an, welcher die Orientierung zur positiven z -Achse angibt. Wie man Abb. A.3 entnehmen kann, entspricht φ (auch hier oft der *Azimuthalwinkel* genannt) den Längengraden auf der Erdkugel, ϑ dagegen den Breitengraden – mit dem Unterschied, dass Breitengrade vom Äquator aus gezählt werden, ϑ dagegen vom „Nordpol“ aus (deshalb heißt er auch der *Polarwinkel*). Dies bezeichnet man (naheliegender) als *Kugelkoordinaten* oder auch *sphärische Polarkoordinaten*.

An Abb. A.3 kann man ablesen, dass $\varrho = r \sin \vartheta$ gilt (anschaulich: Zu den Polen hin wird der Radius eines Schnittkreises der Kugel immer kleiner). Damit und mit den Formeln von den Zylinderkoordinaten folgt

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi; \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi; \quad z = r \cos \vartheta. \quad (\text{A.30})$$

Umgekehrt ist natürlich $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; der Zusammenhang der Winkel mit den kartesischen Koordinaten ist wieder nicht ganz so einfach – vgl. die ebenen Polarkoordinaten.

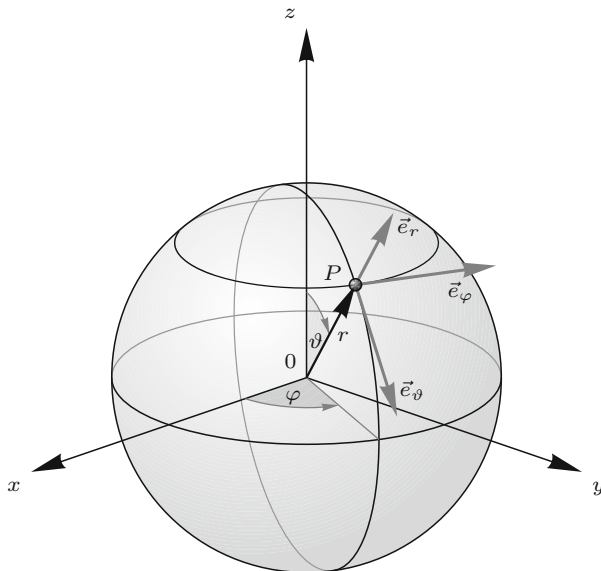


Abb. A.3 Kugelkoordinaten. Dargestellt sind die drei Koordinaten r , ϑ und φ eines Punktes P und die Einheitsvektoren dort

Beispiel A.3

Beim Punkt $P(1,25\sqrt{6}; -1,25\sqrt{6}; -2,5)$ berechnen wir für den Betrag des Ortsvektors schnell $r = |\mathbf{r}| = 5$. Aus der z -Koordinate erhalten wir dann $\cos \vartheta = -0,5$ und somit $\vartheta = \frac{2\pi}{3}$. Aus den x - und y -Koordinaten folgt damit schließlich $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, woraus sich $\varphi = \frac{7\pi}{4}$ ergibt.

Den Einheitsvektor in radialer Richtung erhält man wieder einfach, indem man den Ortsvektor eines beliebigen Punktes normiert; der azimutale Einheitsvektor ist derselbe wie bereits in ebenen Polarkoordinaten und in Zylinderkoordinaten. Nur beim polaren Einheitsvektor ist noch etwas Rechenaufwand nötig. Zunächst kann man sich mittels Trigonometrie leicht überlegen, dass speziell in der x - z -Ebene

$$\mathbf{e}_{\vartheta}|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ 0 \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix} \quad (\text{A.31})$$

gelten muss. Den Einheitsvektor in einer beliebigen Ebene durch die z -Achse erhält man hieraus dann mittels einer Drehung dieses Vektors um die z -Achse. (Alternativ kann man \mathbf{e}_{ϑ} auch aus den Bedingungen $\mathbf{e}_r \circ \mathbf{e}_{\vartheta} = \mathbf{e}_{\vartheta} \circ \mathbf{e}_{\varphi} = 0$ und $|\mathbf{e}_{\vartheta}| = 1$

herleiten.) Insgesamt folgt

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.32})$$

A.3 Differenzialrechnung

Das Ableiten kennt wohl jeder aus der Schule, und meist hat man es im ersten Semester auch nochmals ausführlich durchgesprochen. Trotzdem werden hier die grundlegenden Definitionen alle aufgeführt, da ein großer Teil dieses Buches darauf aufbaut und man deshalb ein sehr sicheres Fundament braucht. Insbesondere auch Abschn. A.3.3 ist für die Elektrodynamik eine absolute Grundvoraussetzung.

A.3.1 Grundwissen

Die Ableitung einer Funktion $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an einer Stelle $x_0 \in]a; b[$ ist bekanntlich definiert als Grenzwert des Differenzenquotienten,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (\text{A.33})$$

(Statt Δx schreibt man hier oft auch h .) Anschaulich heißt dies, dass die Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0 sich als Grenzwert der Steigungen aller Sekanten ergibt, die den Graphen bei x_0 schneiden. Oft drückt man dies auch als *Differenzialquotienten* aus,

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0), \quad (\text{A.34})$$

oder man schreibt die Ableitung als die Wirkung des *Differenzialoperators* $\frac{d}{dx}$ auf die Funktion,

$$f' = \frac{d}{dx} f. \quad (\text{A.35})$$

Der Strich als Ableitungszeichen ist insbesondere bei Funktionen, die von x oder einer anderen räumlichen Koordinate abhängen, üblich. Bei Funktionen, die von der Zeit abhängen, ist dagegen ein Punkt über dem Funktionssymbol gebräuchlich,

$$\dot{x}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}. \quad (\text{A.36})$$

Der Punkt als Ableitungszeichen wurde übrigens bereits vom allseits bekannten englischen Mathematiker und Physiker *Sir Isaac Newton* (1643–1727) bei der Erfindung der Differenzialrechnung eingeführt, etwa im Jahr 1666, der Strich stammt dagegen erst aus dem Jahr 1797, vom italienischen Mathematiker und Astronomen *Joseph-Louis de Lagrange* (1736–1813, bekannt für die Lagrange-Funktion). Die Schreibweise als Differenzialquotient wurde dagegen vom deutschen Universalgelehrten *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716), dem größten Konkurrenten von Newton, etwa 1675 erfunden.

In Sachzusammenhängen, insbesondere in der Physik, gibt die zeitliche Ableitung einer Größe zu einem Zeitpunkt ihre momentane Änderungsrate an, also wie schnell sie sich genau in diesem Moment verändert. Beispielsweise ist bei einem sich bewegenden Punktteilchen die momentane Geschwindigkeit die zeitliche Ableitung der Position, $v(t) = \dot{x}(t)$, da ja die Geschwindigkeit angibt, wie schnell sich die Position ändert.

Wenn der Grenzwert (A.33) existiert, so heißt f bei x_0 differenzierbar; wenn die Ableitungsfunktion an dieser Stelle außerdem stetig ist, heißt f dort stetig differenzierbar. Dies wird bei fast allen physikalisch relevanten Funktionen erfüllt sein und wird praktisch immer stillschweigend vorausgesetzt. Nicht-differenzierbare Funktionen kommen in der Physik zwar hin und wieder vor (Beispiel: Heaviside'sche Stufenfunktion, siehe Abschn. A.4.5); Funktionen, die an einer Stelle zwar differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar sind, sehen allerdings recht bizarr aus und haben keine mir bekannten sinnvollen Anwendungen. Ein konkretes Beispiel ist die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (\text{A.37})$$

an der Stelle $x_0 = 0$.

Existiert für die Ableitungsfunktion bei x_0 wiederum ein Grenzwert der Form (A.33), so heißt sie zweimal differenzierbar; für die zweite Ableitung schreibt man $f''(x_0)$ bzw. $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$ bzw. $\ddot{x}(t_0)$. Ist die zweite Ableitungsfunktion außerdem stetig, so heißt f zweimal stetig differenzierbar. Entsprechendes gilt für höhere Ableitungen; die n -te Ableitung schreibt man oft auch als $f^{(n)}(x_0)$, wobei $f^{(0)}$ dann einfach die Funktion f selbst bezeichnet.

Statt bei jeder Funktion immer wieder die Ableitung mittels des Grenzwertes (A.33) zu berechnen, verwendet man natürlich im Allgemeinen Ableitungsregeln. Aus der Schule (oder spätestens dem ersten Semester) bekannt sein sollten die Summen-, Faktor-, Produkt-, Quotienten-, Ketten- und Umkehrregel, ebenso die Ableitungen der Grundfunktionen (Potenz-, Exponential- und trigonometrische Funktionen).

Beispiele A.4

- Summen-, Faktor- und Kettenregel, Ableitungen von Potenz-, Exponential- und trigonometrischen Funktionen:

$$\left(4x^3 - \frac{3}{x^2} + 0,5e^{3x} - \sin(\pi x)\right)' = 12x^2 + \frac{6}{x^3} + 1,5e^{3x} - \pi \cos(\pi x)$$

- Produktregel:

$$(x^2 \sin(x))' = 2x \sin(x) + x^2 \cos(x)$$

- Quotientenregel:

$$\left(\frac{\cos(x)}{x^2}\right)' = \frac{-x \sin(x) + 2 \cos(x)}{x^3}$$

- Umkehrregel: Die Umkehrfunktion zu $f(x) = \tan(x)$ ist $f^{-1}(x) = \arctan(x)$, und $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$; deshalb ist

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

A.3.2 Differenzialrechnung für vektorwertige Funktionen

Die Ableitung vektorwertiger Funktionen $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist völlig äquivalent zu (A.33) definiert. Beschreibt $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ beispielsweise die Position eines Partikels zur Zeit t im Raum (also seine Bahnkurve), so erhält man den Vektor der Momentangeschwindigkeit aus

$$\mathbf{v}(t_0) = \dot{\mathbf{x}}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{x}(t_0)}{\Delta t}. \quad (\text{A.38})$$

Aus den Rechenregeln für Vektoren folgt sofort, dass man einfach jede (kartesische) Komponente einzeln ableitet.

Man macht sich leicht klar, dass $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0)$ immer einen Vektor beschreibt, der eine Sekante an die Bahnkurve ist; deshalb liegt der Vektor, der sich hier als Grenzwert ergibt, immer tangential zur Bahnkurve, völlig analog zum eindimensionalen Fall.

Ein Punktteilchen bewege sich auf einer Bahnkurve, die durch

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 4t + 5 \ln(2t) \\ 4e^{-2t} \\ 2 \sin(\pi t) \end{pmatrix} \quad (\text{A.39})$$

mit $t \geq 0$ beschrieben wird. Die Momentangeschwindigkeit ist dann

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} 6t - 4 + \frac{5}{t} \\ -8e^{-2t} \\ 2\pi \cos(\pi t) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.40})$$

A.3.3 Funktionen annähern mittels Taylor-Summen bzw. -Reihen

In der Schule lernt man meist bereits, dass man eine Funktion in der Umgebung einer Stelle x_0 durch die Tangente an ihren Graphen annähern kann. (Darauf beruhen letztlich ja nicht nur die Definition der Ableitung, sondern auch Rechenverfahren wie beispielsweise das Newton-Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung von Nullstellen oder die Regeln von de l'Hospital.) Dabei nutzt man aus, dass die Tangente an dieser Stelle mit dem Graphen nicht nur einen Punkt, sondern auch die Steigung dort gemeinsam hat, d. h., sowohl die Funktionswerte selbst als auch die Werte der ersten Ableitung stimmen überein.

Will man die Funktion an einer Stelle noch genauer annähern, so verwendet man statt der Tangente (die ja durch eine ganzrationale Funktion ersten Grades beschrieben wird) die Graphen ganzrationaler Funktion höheren Grades und fordert, dass auch entsprechend mehr Ableitungen übereinstimmen sollen. Beispielsweise könnte man eine Funktion an einer Stelle x_0 durch eine quadratische Funktion annähern, ihren Graphen also durch eine Parabel:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx a_0 + a_1 \Delta x + a_2 (\Delta x)^2. \quad (\text{A.41})$$

Die Koeffizienten der quadratischen Funktion erhält man aus der Bedingung, dass sowohl die Funktionswerte als auch die erste und zweite Ableitung auf beiden Seiten übereinstimmen sollen; damit ist

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x + \frac{f''(x_0)}{2} (\Delta x)^2. \quad (\text{A.42})$$

Allgemein kann man leicht zeigen, dass bei einer Näherung von f durch eine ganzrationale Funktion vom Grad n gelten muss

$$f(x_0 + \Delta x) \approx \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (\Delta x)^j. \quad (\text{A.43})$$

In Mathematik-Vorlesungen untersucht man, unter welchen Voraussetzungen man diese Summe in eine unendliche Reihe umschreiben kann und für welche x -Werte diese Reihe dann auch wirklich gegen f konvergiert (welchen „Konvergenzradius“ die Reihe hat). Dazu schaut man sich die „Restglieder“ an (was letztlich einfach der bei einer Annäherung bis zum Grad n noch übrige Unterschied ist) und muss zeigen, dass diese gegen null gehen. Es ergibt sich dann eine sogenannte *Taylor-Reihe* für die Funktion; insbesondere für $x_0 = 0$ spricht man manchmal auch von einer *Maclaurin'schen Reihe*. (Benannt sind diese nach den britischen Mathematikern *Brook Taylor*, 1685–1731, bzw. *Colin Maclaurin*, 1698–1746.)

Wir verzichten hier auf solche detaillierten Untersuchungen; für die Physik sind meist sowieso nur Näherungen bis zum Grad zwei oder höchstens drei ausreichend – vorausgesetzt, man weicht nicht allzu sehr von x_0 ab, in der Sprache der Physiker: $|x - x_0| \ll 1$. Einige daraus folgende, oft gebrauchte Näherungsformeln (sinnvoll für $|x| \ll 1$) sind im Folgenden zusammengestellt.

$$(1+x)^n \approx 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \quad (n \in \mathbb{R}), \quad (\text{A.44})$$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3,$$

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3,$$

$$\sin(x) \approx x - \frac{1}{6}x^3,$$

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x^2.$$

Beispielsweise für die Funktion $f(x) = e^{-1/x^2}$ kann man dagegen *keine* Taylor-Näherung um $x_0 = 0$ angeben – die zugehörige Taylor-Reihe konvergiert zwar, aber gegen null statt gegen $f(x)$.

Aus den Rechenregeln für Vektoren folgt schließlich, dass man für vektorwertige Funktionen völlig äquivalente Näherungsformeln aufstellen kann,

$$\mathbf{x}(t_0 + \Delta t) \approx \sum_{j=0}^n \frac{\mathbf{x}^{(j)}(t_0)}{j!} (\Delta t)^j. \quad (\text{A.45})$$

A.4 Integralrechnung

Hier gilt Analoges wie bei der Differenzialrechnung: Eigentlich sollten alle Inhalte dieses Abschnitts bereits bekannt sein. Im Interesse eines sicheren Fundaments werden aber trotzdem alle wichtigen Grundlagen nochmals wiederholt und zusammengestellt.

A.4.1 Grundwissen zum (Riemann-)Integral

Eine wichtige (aber bei Weitem nicht die einzige, siehe Abschn. A.4.4) Motivation für die Entwicklung des Integralbegriffs ist der Wunsch, den Flächeninhalt von Figuren zu berechnen, die von den Graphen beliebiger Funktionen $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ begrenzt werden. Ein Standardbeispiel bei der Einführung des Integrals ist die Berechnung des Inhalts der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ (Normalparabel) zwischen $x = 0$ und $x = 1$ mit der x -Achse eingeschlossen wird.

Die Grundidee ist, diesen Flächeninhalt mittels n Rechtecken (gleicher Breite) anzunähern. Dabei können die Rechtecke beispielsweise alle unter dem Graphen liegen oder alle darüber hinausragen. Die Höhen der Rechtecke ergeben sich dabei natürlich aus den Funktionswerten am linken bzw. rechten Rand. (Im Allgemeinen verwendet man für die Höhen der Rechtecke jeweils das Infimum bzw. das Supremum der Funktion im jeweiligen Intervall.) Für den Fall $n = 8$ und das oben erwähnte Beispiel ist dies in Abb. A.4 dargestellt. Dieser Zugang zum Integral, den man meist bereits in der Schule kennenlernt, geht auf den französischen Mathematiker *Jean Gaston Darboux* (1842–1917) zurück.

Ist man allgemein am Inhalt der Fläche interessiert, die der Graph einer Funktion f (mit $f(x) \geq 0$) mit der x -Achse zwischen $x = a$ und $x = b$ mit $b > a$ einschließt, verwendet man wieder n Rechtecke, die aber auch variable Breiten Δx_j ($1 \leq j \leq n$) haben können, für die Näherung. Bezeichnen wir jeweils eine Stelle

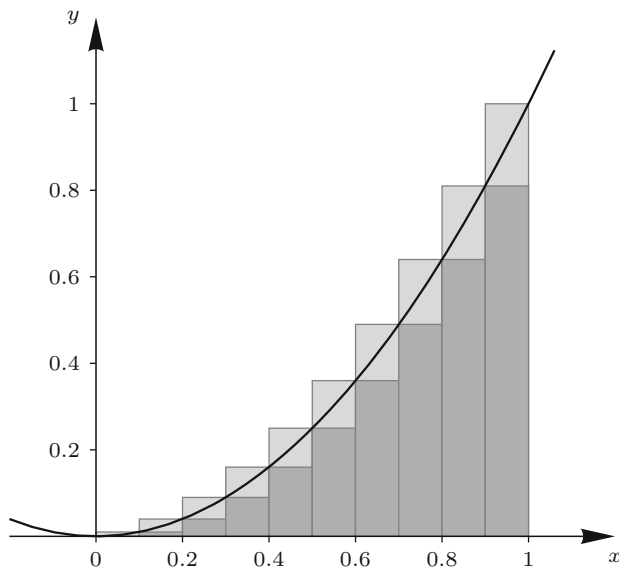


Abb. A.4 Zum Riemann-Integral: Die x -Achse wird in Intervalle eingeteilt, und über diesen werden Rechtecke errichtet, die alle unter dem Graphen liegen bzw. alle darüber hinausragen

im Rechteck j mit x_j , so gilt also für den Flächeninhalt

$$A \approx \sum_{j=1}^n f(x_j) \cdot \Delta x_j. \quad (\text{A.46})$$

Wir unterscheiden dabei nicht mehr extra die Fälle, dass die Rechtecke jeweils alle komplett unter dem Graphen oder komplett darüber liegen – bei jedem Rechteck kann nun ein Teil darunter und ein Teil darüber liegen. Diese Verallgemeinerung stammt vom deutschen Mathematiker Georg Riemann, und nach ihm ist dieser Integralbegriff heute dann auch allgemein benannt. (Ansonsten ist er vor allem für seine bahnbrechenden Beiträge zur nicht-euklidischen Geometrie bekannt, und für die Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen – siehe Kap. 6.)

Anschaulich ist zu erwarten, dass man den Flächeninhalt *exakt* erhält, wenn man die Anzahl der Rechtecke unendlich groß macht, wobei die Breiten *aller* Rechtecke gegen null gehen. Statt dem Summenzeichen schreibt man dann ein Integralzeichen \int (ein langgezogenes S wie „Summe“), statt den Δx_j schreibt man dx . (Wie bereits bei der Differenzialrechnung soll dies eine „unendliche kleine“ Differenz von x -Werten andeuten, also „unendlich schmale“ Rechtecke.) Genauer:

Existieren die Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(x_j) \cdot \Delta x_j \quad (\text{A.47})$$

für eine beliebige Wahl der Rechteckbreiten Δx_j (mit $\max_j \Delta x_j \rightarrow 0$) und der Stützstellen x_j jeweils innerhalb der Rechtecke j , und stimmen alle diese Grenzwerte überein, so nennt man das Ergebnis das *bestimmte (Riemann-) Integral* über f von a bis b und schreibt dafür

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (\text{A.48})$$

Die Funktion f heißt dann in $[a; b]$ *integabel/integrierbar*; man nennt die Funktion hier auch den *Integranden*. x heißt die *Integrationsvariable*, a bzw. b die untere bzw. obere *Integrationsgrenze*.

Praktisch alle für Physiker relevanten Funktionen sind (Riemann-)integabel; insbesondere gilt dies für alle stetigen Funktionen und sogar für alle Funktionen, die nur fast überall stetig sind (also nur an höchstens abzählbar unendlichen Stellen unstetig). Funktionen, die nicht integabel sind, sehen meist eher bizarr aus (insbesondere kann man ihre Graphen nicht sinnvoll zeichnen) und sind meines Wissens von keinem praktischen Interesse. Als Beispiel wäre hier die „Dirichlet-Funktion“ zu nennen, siehe Abschn. 2.5.

Für Funktionen, die nicht nur auf einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ definiert sind, kann man die Integraldefinition unter bestimmten Umständen erweitern: Man spricht von einem *uneigentlichen Integral 1. Art*, wenn eine Funktion f auf $[a; \infty[$ definiert ist und der Grenzwert

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [F(x)]_a^b$$

existiert (wobei man sich als Physiker meist spart, extra den Limes hinzuschreiben, sondern einfach direkt ∞ in die Stammfunktion „einsetzt“). Völlig Entsprechendes gilt, wenn f auf $] - \infty; b]$ definiert ist. Falls f sogar auf ganz \mathbb{R} definiert ist, muss man beide Grenzwerte einzeln berechnen. Ein *uneigentliches Integral 2. Art* liegt dagegen vor, wenn f auf $]a; b]$ definiert ist, für $x \rightarrow a$ zwar divergiert, der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow a} \int_x^b f(x') dx' = \lim_{x \rightarrow a} [F(x')]_x^b$$

aber existiert; Entsprechendes gilt, wenn f auf $[a; b[$ definiert ist und für $x \rightarrow b$ divergiert. Ist f in $[a; b] \setminus \{x_0\}$ definiert und divergiert für $x \rightarrow x_0$, so müssen beide Grenzwerte (von links und von rechts) einzeln und nacheinander berechnet werden. Unter dem *Hauptwert* des Integrals in solchen Fällen versteht man dagegen den Grenzwert

$$P \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{x_0 - \epsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \epsilon}^b f(x) dx \right),$$

hier nähert man sich also aus beiden Richtungen gleichzeitig und „gleich schnell“ an die Definitionslücke an.

A.4.2 Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Die Berechnung von Integralen nach der Definition (A.47) ist sehr mühselig, und nur bei den einfachsten Funktionen (z. B. bei ganzrationalen) kann man damit überhaupt ein exaktes Ergebnis erhalten. Zum Glück gibt es bekanntlich einen allgemeinen Satz, der die Integration einer Funktion mit der Ableitung in Zusammenhang bringt, eben den *Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung*:

Ist f in $[a; b]$ stetig und ist $x \in [a; b]$, so gilt

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(x') dx' \right) = f(x). \quad (\text{A.49})$$

Den Ausdruck

$$\int_a^x f(x') dx'$$

kürzt man dabei oft mit $F_a(x)$ ab und nennt das eine *Integralfunktion* von f . Damit lautet der Hauptsatz kurz formuliert einfach

$$F'_a(x) = f(x).$$

Durch Ableiten einer Integralfunktion ergibt sich also der Integrand; es folgt: Umgekehrt kann man eine Integralfunktion durch „Aufleiten“ des Integranden erhalten. (Das Wort „Aufleiten“ ist bei vielen Dozenten unbeliebt, ich finde es aber sehr anschaulich und sehe nicht, was dagegen sprechen sollte.)

Allerdings ergibt sich beim Aufleiten immer noch ein zunächst unbekannter konstanter reeller Summand (denn konstante Summanden fallen beim Ableiten ja weg). Beispielsweise folgt aus $f(x) = x$, dass $F_a(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$ sein muss mit $C \in \mathbb{R}$. Diesen Summanden kann man aus der offensichtlichen Bedingung, dass

$$F_a(a) = \int_a^a f(x') dx' = 0$$

sein muss, bestimmen; im Beispiel ergibt sich $F_a(x) = x^2 - a^2$.

Allgemein nennt man eine Funktion F mit der Eigenschaft, dass $F' = f$ ist, eine *Stammfunktion* von f . Die Menge aller Stammfunktionen nennt man das *unbestimmte Integral* und schreibt symbolisch dafür

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Vorsicht: Auch wenn sich die Definition bzw. Eigenschaften von Integral- und Stammfunktion sehr ähnlich sehen, ist das nicht ganz dasselbe: Jede Integralfunktion ist eine Stammfunktion – aber nicht jede Stammfunktion ist auch eine Integralfunktion! Beispielsweise kann man allgemein zeigen, dass alle Integralfunktionen von $f(x) = x$ die Form $F_a(x) = x^2 - a^2$ haben müssen. $F(x) = x^2 + 1$ kann also beispielsweise keine Integralfunktion von f sein; trotzdem ist es eine Stammfunktion.

Da sich verschiedene Stammfunktionen nur um einen konstanten Summanden unterscheiden, gilt sicher für jede Integralfunktion von f , wenn man eine feste Stammfunktion F gewählt hat,

$$F_a(x) = \int_a^x f(x') dx' = F(x) + C.$$

Nutzt man wieder die Bedingung $F_a(a) = 0$, so folgt $C = -F(a)$; also gilt allgemein mit einer *beliebigen* Stammfunktion F :

$$F_a(x) = \int_a^x f(x') dx' = F(x) - F(a).$$

Für die Differenz schreibt man meist kurz $[F(x')]_a^x$, lies: „ $F(x')$ ausgewertet in den Grenzen von a bis x “. Damit folgt schließlich für bestimmte Integrale die grundlegende Formel

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a), \quad (\text{A.50})$$

die man *ständig* verwendet.

A.4.3 Berechnen von Integralen

Das „einzige“ übrige Problem bei der Integralrechnung ist es, zu einer gegebenen Funktion f mindestens eine Stammfunktion F zu finden. Bei einfachen Funktionen (ganzrationalen, Exponential- und trigonometrischen Funktionen) geht dies sehr einfach durch Umkehrung der entsprechenden Ableitungsregeln; bei zusammengesetzten Funktionen braucht man weitere Rechenregeln (Summen- und Faktorregel Partialbruchzerlegung, partielle Integration, Integration durch Substitution). Dies alles sollte aus der Schule oder spätestens dem ersten Semester bekannt sein.

Bei komplizierteren Funktionen kann das Integrieren beliebig schwierig werden, und bei vielen Funktionen, die eigentlich einfach aussehen, ist es sogar schlicht unmöglich, für die Stammfunktion einen Term anzugeben. In solchen Fällen helfen nur noch numerische Integrationsverfahren, um das Ergebnis zumindest näherungsweise zu bestimmen.

Beispiele A.5

- Grundfunktionen, Summen- und Faktorregel:

$$\int \left(4x^2 + \frac{1}{x} + e^{0,5x} + \cos(\pi x) \right) dx = \frac{4}{3}x^3 + \ln|x| + 2e^{0,5x} + \frac{\sin(\pi x)}{\pi} + C$$

- Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2 - 1} dx &= \int \frac{1}{(x+1)(x-1)} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} (\ln|x-1| - \ln|x+1|) + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C\end{aligned}$$

- Partielle Integration:

$$\begin{aligned}\int x \cos(x) dx &= x \sin(x) - \int \sin(x) dx = x \sin(x) + \cos(x) + C, \\ \int \ln(x) dx &= \int 1 \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - x + C\end{aligned}$$

- Integration mit Substitution:

$$\int 2x e^{-x^2} dx = - \int e^u du = -e^u + C = -e^{-x^2} + C \quad \text{mit } u = -x^2$$

- Beispielsweise für die Funktionen mit den Termen e^{-x^2} („Gauß'sche Glockenkurve“), $\frac{\sin(x)}{x}$ und $\frac{1}{\ln(x)}$ kann man keine Stammfunktion in geschlossener Form angeben. Man wertet Integrale über diese Funktionen numerisch aus und definiert damit neue Funktionen (die sogenannte „Fehlerfunktion“, den „Integralsinus“ und den „Integrallogarithmus“).

Aus der Definition (A.47) des Integrals und den Rechenregeln für Vektoren folgt schließlich sofort, dass man bei vektorwertigen Funktionen einfach jede (kartesische) Komponente einzeln integrieren kann,

$$\int \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \int x(t) dt \\ \int y(t) dt \\ \int z(t) dt \end{pmatrix}. \quad (\text{A.51})$$

A.4.4 Interpretation

Aus der Schule bringen viele die Vorstellung mit „Ein Integral *ist* ein Flächeninhalt A “, und auch die obige Herleitung und Definition legen dies natürlich sehr nahe. Das ist so aber leider nicht ganz richtig – oder zumindest nicht vollständig. Einerseits ist zu berücksichtigen, dass man für $f(x) < 0$ aus (A.47) ein negatives Ergebnis erhält; falls ein Teil des Funktionsgraphen unter der x -Achse liegt, so

ergibt sich also (für $b > a$)

$$\int_a^b f(x)dx = A_{\text{oben}} - A_{\text{unten}};$$

für $b < a$ ist es genau umgekehrt. Ein Integral liefert also eher so etwas wie einen „orientierten Flächeninhalt“ oder eine „Flächenbilanz“.

Aber auch diese Interpretation greift zu kurz. An der Definition (A.47) sieht man direkt, dass ein Integral so etwas wie eine unendliche Summe über lauter unendlich kleine Einzelteile ist. Das ist für physikalische Anwendungen oft eine brauchbare Auffassung des Integrals. Beispielsweise ergibt sich bei einer *konstanten* Kraft F in Richtung des Weges s die verrichtete Arbeit W einfach als $W = Fs$. Ist die Kraft dagegen nicht konstant, so denkt man sich den Weg in sehr viele kleine Wegstücke Δs_j zerlegt, auf denen die Kraft zumindest näherungsweise konstant gleich F_j ist, und hat dann $W \approx \sum_j F_j \Delta s_j$. Im Grenzwert unendlich vieler, unendlich kleiner Wegstücke ergibt sich schließlich für die verrichtete Arbeit zwischen der Anfangs- und der Endposition s_1 bzw. s_2

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F(s)ds. \quad (\text{A.52})$$

Da natürlich $f(t)$ eine Stammfunktion von $\dot{f}(t)$ ist, folgt aus dem Hauptsatz auch sofort

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{f}(t)dt = f(t_2) - f(t_1). \quad (\text{A.53})$$

Daraus gewinnt man eine weitere wichtige Interpretation des Integrals: Beschreibt f die Abhängigkeit einer Größe von der Zeit, so ist ja $\dot{f}(t)$ die momentane Änderungsrate von f . Umgekehrt ergibt sich also aus dem Integral über eine Änderungsrate die gesamte *Änderung* einer Größe in diesem Zeitintervall.

Beispielsweise gibt $v(t)$ an, wie schnell sich der Ort $x(t)$ eines Partikelchens mit der Zeit ändert, $\dot{x}(t) = v(t)$. Deshalb ist das Integral über $v(t)$ gleich der Änderung der Orte des Teilchens im Zeitintervall:

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = x(t_2) - x(t_1) = \Delta x.$$

Dasselbe hätte man auch erhalten, wenn man (wie oben beim Zusammenhang zwischen Kraft und Arbeit) die gesamte Positionsänderung zunächst als Summe der Produkte von kleinen Zeitabschnitten mit der jeweiligen Momentangeschwindigkeit annähert und dann die Anzahl der Zeitabschnitte gegen unendlich gehen lässt (und ihre Länge gegen null).

Solche Anwendungen des Integrals sind in der Physik von überragender Bedeutung – dass man damit auch Flächeninhalte ausrechnen kann, wie man in der Schule ausführlich geübt hat, ist ganz nett zu wissen, aber nicht gerade wichtig. (In beiden Fällen kann man die interessierende Größe natürlich auch als Fläche in einem entsprechenden Diagramm *darstellen* – das ist aber für die physikalische Interpretation reichlich irrelevant.)

A.4.5 Die Delta-„Funktion“ und die Theta-Funktion

In der Elektrodynamik betrachtet man oft vereinfachend Punktladungen q . In die Maxwell-Gleichungen in differenzieller Form geht allerdings die Ladungsdichte ein. Für eine punktförmige Ladung ist die Ladungsdichte überall gleich null – außer am Ort der Punktladung selbst: Dort ist sie gegeben durch $\rho = q/V = \infty$, da ja $V = 0$ ist. Beschränken wir uns auf eine Dimension, so müsste die Ladungsdichte also eine Funktion sein mit den Eigenschaften

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \\ \infty & x = x_0 \end{cases}.$$

Dass man eine solche Funktion nicht sinnvoll definieren kann, sollte offensichtlich sein. Eine genauere Überlegung (siehe z. B. Feuerbacher (2016)) zeigt allerdings einerseits, dass man sich solch eine Funktion zumindest in gewissem Sinne als Grenzwert von gewissen Funktionenfolgen vorstellen kann, und andererseits, dass es letztlich genügt, wenn die Ladungsdichte folgende Eigenschaft hat:

$$\int \rho(x) f(x) dx = q f(x_0)$$

für alle Funktionen $f(x)$, die gewisse (schwache) Eigenschaften erfüllen. Deshalb definiert man die sogenannte *Dirac'sche Delta-Funktion* (nach dem britischen Physiker und Nobelpreisträger *Paul Adrien Maurice Dirac*, 1902–1984) genau durch diese gewünschte Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0).$$

Die Delta-„Funktion“ ist damit eine sogenannte *Distribution*; wieder sei auf Feuerbacher (2016) verwiesen.

Aus dieser Definition kann man sich leicht folgende weitere Eigenschaften überlegen:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx &= f(x_0), \\ f(x)\delta(x - x_0) &= f(x_0)\delta(x - x_0), \\ \delta(cx) &= \frac{1}{|c|}\delta(x), \\ \delta(f(x)) &= \sum_j \frac{1}{|f'(x_j)|}\delta(x - x_j),\end{aligned}$$

wobei in der letzten Formel die x_j die einfachen Nullstellen von f sind.

Definiert man außerdem durch

$$\Theta(x) := \int_{-\infty}^x \delta(x') dx'$$

eine Integralfunktion zur Delta-Funktion, so folgt sofort

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases};$$

der Wert bei $x = 0$ wird je nach Autor unterschiedlich festgelegt (0, 1, $\frac{1}{2}$ oder anderes), ist letztlich aber für die meisten Anwendungen schlicht irrelevant. Diese *Theta-Funktion* wird aus offensichtlichem Grund oft auch *Stufenfunktion* genannt, oder *Heaviside-Funktion* (nach dem in Kap. 3 erwähnten Oliver Heaviside).

A.5 Komplexe Zahlen

Hier wird nur ein kurzer Überblick gegeben; im Idealfall kennt man die komplexen Zahlen bereits aus Vorlesungen beispielsweise zur Analysis I.

A.5.1 Definition und Grundbegriffe

Im \mathbb{R}^3 gibt es bekanntlich außer dem Skalarprodukt (das natürlich einen Skalar liefert) auch noch das Vektor-/Kreuzprodukt, das einen (Pseudo-)Vektor ergibt. Im \mathbb{R}^2 führt dagegen eine analoge Definition auf einen (Pseudo-)Skalar statt auf einen Vektor. Außerdem ist das Kreuzprodukt bekanntlich anti-kommutativ. Es liegt also nahe, nach einer neuen Art von Produkt zu suchen, die einerseits wiederum auf einen Vektor führt (zumindest im mathematischen Sinne) und andererseits auch kommutativ ist. Nach etwas Basteln stellt man fest, dass diese Forderungen bei-

spielsweise erfüllt werden von

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{pmatrix}. \quad (\text{A.54})$$

Man überzeugt sich schnell davon, dass dieses Produkt kommutativ, assoziativ und distributiv ist.

Zwei Spezialfälle sind hier besonders interessant. Betrachten wir zunächst die Vektoren, deren zweite Komponente verschwindet. Man rechnet schnell nach, dass

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ac \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw. allgemeiner} \\ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ac \\ ad \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gilt – solche Vektoren verhalten sich bei dieser neuen Multiplikation also genau wie reelle Zahlen (und bei der Addition sowieso, wie aus der üblichen Regel der Vektoraddition sofort folgt). Deshalb schreibt man abkürzend

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \equiv a + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren, deren erste Komponente verschwindet, verhalten sich dagegen überraschend anders:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -bd \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{insbesondere} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Definieren wir abkürzend $i := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, so können wir einen Vektor aus \mathbb{R}^2 also kurz schreiben als

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \equiv a + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv a + ib,$$

und wir haben dann das interessante Ergebnis

$$i^2 = -1. \quad (\text{A.55})$$

Dadurch, dass wir mit *Paaren* von reellen Zahlen rechnen statt nur mit einzelnen, finden wir also eine neue Art von „Zahlen“, deren Quadrat nun auch negativ sein

kann! Man nennt dies die *komplexen Zahlen* \mathbb{C} ; einzelne komplexe Zahlen werden meistens mit z bezeichnet. In konkreten Rechnungen ignoriert man meist, dass dies eigentlich Paare von reellen Zahlen sind. (Wer sich mit Zahlentheorie beschäftigt hat, der weiß, dass die Definition beispielsweise der rationalen Zahlen aus den ganzen Zahlen ganz ähnlich die Identifikation von Zahlenpaaren mit einzelnen Zahlen einer neuen Art mit sich bringt.)

Stellt man sich eine komplexe Zahl als Vektor im \mathbb{R}^2 vor, so spricht man oft von der *Gauß'schen Zahlenebene*. Die erste Komponente a (die x -Koordinate in der Gauß'schen Zahlenebene) heißt dabei der *Realteil* der komplexen Zahlen, $\operatorname{Re} z$, die zweite Komponente (die y -Koordinate) der *Imaginärteil*, $\operatorname{Im} z$. Entsprechend nennt man komplexe Zahlen mit $a = 0$ auch oft (*rein*) *imaginäre Zahlen*.

A.5.2 Rechenregeln

Aus der bekannten üblichen Regel zur Vektoraddition haben wir sofort

$$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + (b + d)i.$$

Das Produkt (A.54) komplexer Zahlen können wir nun kurz schreiben als

$$z_1 z_2 = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + (ad + bc)i;$$

dies können wir ohne Rückgriff auf die allgemeine Definition der Multiplikation leicht nachrechnen, indem wir nur (A.55) und die üblichen Rechengesetze für das Multiplizieren von reellen Zahlen verwenden.

Wie bereits erwähnt, gelten für dieses Produkt das Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz. Das neutrale Element der Multiplikation ist $1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; das inverse Element zu einer gegebenen komplexen Zahl $z = a + ib$ ist

$$z^{-1} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2},$$

wie man schnell nachrechnet. Den Zähler dieses Bruchs, also die komplexe Zahl $a - ib$, nennt man die zu z *komplexe konjugierte Zahl* z^* . Den Nenner kann man dann auch schreiben als

$$a^2 + b^2 = zz^* = z^*z.$$

Der *Betrag* einer komplexen Zahl ist der Betrag, also die Länge, des Vektors im \mathbb{R}^2 , sprich: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Man hat somit den wichtigen Zusammenhang

$$|z|^2 = zz^* = z^*z$$

zwischen dem Betragsquadrat einer komplexen Zahl und ihrem Produkt mit der zu ihr komplex konjugierten Zahl.

A.5.3 Euler'sche Formel und Polardarstellung

Beschäftigt man sich mit Funktionen von komplexen Zahlen, so ergeben sich zahlreiche neue, wichtige Erkenntnisse. Das meiste davon wird in Kap. 6 besprochen; insbesondere die komplexe Exponentialfunktion ist aber so wichtig, dass sie hier bei den Grundlagen diskutiert werden muss.

Wir definieren die Exponentialfunktion für komplexe Argumente mittels ihrer Taylor-/Potenzreihe,

$$e^z := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!};$$

den Beweis, dass diese Reihe tatsächlich für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, überlassen wir den Mathematikern.

Insbesondere der Spezialfall, dass z eine rein imaginäre Zahl ist, liefert einen sehr überraschenden Zusammenhang. Schreiben wir die Reihe für diesen Fall ausführlich hin,

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2 x^2}{2} + \frac{i^3 x^3}{6} + \frac{i^4 x^4}{24} + \frac{i^5 x^5}{120} \dots$$

Mit (A.55) folgt, dass alle Summanden mit geraden Potenzen von x rein reell sind, alle Summanden mit ungeraden Potenzen rein imaginär. Fassen wir also zusammen,

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots\right).$$

Die beiden einzelnen Potenzreihen sollten euch aber nun bekannt vorkommen – das sind genau die Taylor-Reihen der Cosinus- und der Sinusfunktion! (Und das gilt auch dann noch, wenn man alle unendlich vielen Reihenglieder mitnimmt – überzeugt euch selbst davon!) Wir haben also die *Euler'sche Formel* bewiesen,

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x). \quad (\text{A.56})$$

Zwei wichtige Folgerungen daraus sind einerseits die *Euler'sche Identität*,

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

oft als „schönste Formel der Mathematik“ bezeichnet, und andererseits die Tatsache, dass alle komplexen Zahlen der Form e^{ix} mit $x \in \mathbb{R}$ den Betrag eins haben,

$$|e^{ix}| = |\cos(x) + i \sin(x)| = \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)} = 1. \quad (\text{A.57})$$

Aus (A.56) und (A.57) folgt schließlich die wichtige *Polardarstellung* einer komplexen Zahl: Mit $r := |z|$ können wir jede komplexe Zahl schreiben als

$$z = r e^{i\varphi},$$

mit $0 \leq \varphi < 2\pi$. Dies ist letztlich nichts anderes als die Darstellung eines Vektors aus dem \mathbb{R}^2 in ebenen Polarkoordinaten, siehe Abschn. A.2.1. Den Winkel bezeichnet man oft auch als das *Argument* der komplexen Zahl, $\varphi = \arg z$.

A.6 Felder

In der Mechanik hat man es meistens nur mit vektorwertigen Funktionen einer Variable zu tun, z. B. ist die Bahnkurve $\mathbf{x}(t)$ eines Partikels eine Funktion, die jeder Zeit $t \in \mathbb{R}$ einen Ortsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ zuordnet. An einigen Stellen bekommt man es aber selbst dort schon mit Funktionen zu tun, die umgekehrt einem Vektor eine reelle Zahl zuordnen. Beispielsweise hängt die potenzielle Energie W_{pot} des Partikels im Allgemeinen vom Ort \mathbf{x} ab, an dem es sich befindet – dies ist also eine Funktion, die jedem Ortsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ eine Zahl $W_{\text{pot}} \in \mathbb{R}$ zuordnet. Betrachtet man dagegen die im Allgemeinen ortsabhängige Kraft \mathbf{K} , die auf das Teilchen wirkt, so hat man sogar eine Funktion, die jedem Ortsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ einen jeweils anderen Vektor $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^3$ zuordnet.

A.6.1 Begriff

Allgemein nennt man in der Physik Funktionen, die jedem Ortsvektor etwas zuordnen, *Felder*. Diese Funktionen können zusätzlich auch von der Zeit abhängen, z. B. $W_{\text{pot}} = W_{\text{pot}}(\mathbf{x}, t)$ oder $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{x}, t)$.

Wie bereits in Abschn. A.1.2 unterscheidet man Felder nach ihrem Verhalten unter Drehungen. Dabei ist aber zu berücksichtigen, dass nicht nur das Feld selbst sich bei einer Drehung ändert, sondern jeweils auch der Ortsvektor! Beispielsweise gilt für ein Kraftfeld bzw. allgemein ein Vektorfeld

$$\mathbf{K}'(\mathbf{x}') = \mathbf{D} \mathbf{K}(\mathbf{x})$$

mit der Drehmatrix \mathbf{D} ; neben der Umrechnung von \mathbf{K} selbst muss man dabei auch berücksichtigen, dass $\mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{x}'$ ist.

Beispiel A.6

Wir betrachten das Kraftfeld $\mathbf{K} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathbf{K}(x, y) = \begin{pmatrix} a(x^2 + y^2) \\ 2bxy \end{pmatrix}$$

mit reellen Konstanten a, b und die Drehmatrix für eine Drehung um 90° ,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \iff \mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist zunächst

$$\mathbf{K}'(x, y) = \mathbf{D} \mathbf{K}(x, y) = \begin{pmatrix} -2bxy \\ a(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$

Nun müssen aber auch noch die Ortskoordinaten umgerechnet werden:

$$x = y'; \quad y = -x',$$

woraus $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ und $2xy = -2x'y'$ folgt. Damit ergibt sich für das „gedrehte“ Kraftfeld insgesamt

$$\mathbf{K}'(x', y') = \begin{pmatrix} 2bx'y' \\ a(x'^2 + y'^2) \end{pmatrix}.$$

Allgemein definiert man: Hat man eine Funktion, die jedem Ortsvektor \mathbf{x} eine physikalische Größe zuordnet, die durch ein mathematisches Objekt $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n \times \dots \times n}$ mit z Indizes beschrieben wird, und transformiert sich diese Funktion bei Drehungen bezüglich jedes Indexes wie der Ortsvektor, also

$$T'_{j_1 j_2 \dots j_z}(\mathbf{x}') = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_z=1}^n D_{j_1 k_1} D_{j_2 k_2} \dots D_{j_z k_z} T_{k_1 k_2 \dots k_z}(\mathbf{x}), \quad (\text{A.58})$$

so heißt $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ ein *Tensorfeld der Stufe* z . Insbesondere ist ein Tensorfeld der Stufe 0 ein *skalares Feld*. Bezieht man zusätzlich auch wieder das Verhalten unter Raumspiegelungen mit ein, erhält man außerdem noch Pseudotensorfelder.

In der Mechanik von Punktteilchen ist mir kein Beispiel eines Tensorfeldes zweiter Stufe bekannt; in der Elektrodynamik (und auch der Kontinuumsmechanik) kann so etwas aber durchaus auftreten – beispielsweise ist in einem inhomogenen, anisotropen Medium die relative Dielektrizitätskonstante ϵ_r nicht (wie wohl aus der Schule bekannt) eine reine Zahl, sondern eben ein Tensorfeld zweiter Stufe, also anschaulich eine 3×3 -Matrix, deren Einträge jeweils von \mathbf{x} abhängen.

A.6.2 Stetigkeit

In der Schule lernt man häufig die „Bleistiftdefinition“ der Stetigkeit: Eine Funktion ist stetig (an einer Stelle x_0), wenn man ihren Graphen (bei x_0) mit dem Bleistift durchzeichnen kann, ohne abzusetzen. Diese Definition ist für allgemeine Felder offensichtlich schlecht brauchbar – im einfachen Fall eines Feldes $\phi(x, y)$ kann man den Graphen vielleicht gerade noch zeichnen (als eine Art „Hügellandschaft“), aber in allen anderen Fällen ist das praktisch unmöglich.

Wir müssen also auf die abstraktere Definition zurückgreifen, die man hoffentlich bereits an der Schule, ansonsten sicher irgendwann in vorigen Semestern gelernt hat: Eine Funktion $f : D \mapsto \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}$ heißt stetig bei $x_0 \in D$, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

gilt.

Völlig äquivalent ist Stetigkeit auch für Felder definiert: Beispielsweise heißt ein skalaras Feld $\phi : D \mapsto \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^3$ stetig am Ort $\mathbf{x}_0 \in D$, wenn

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}_0).$$

Die Konvergenz einer Folge von Vektoren ist dabei ebenfalls völlig äquivalent wie bei Zahlenfolgen definiert: $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ bedeutet, dass sich \mathbf{x} immer mehr an \mathbf{x}_0 annähert, d. h., wenn wir eine Folge \mathbf{x}_n betrachten, so finden wir für jedes vorgegebene $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0| < \epsilon$ für alle $n \geq N$ gilt.

Im Gegensatz zu Funktionen einer Variablen kann man sich dem Punkt \mathbf{x}_0 nun aber aus unendlich vielen Richtungen annähern – und natürlich müssen die Grenzwerte für alle diese Wege übereinstimmen (sonst ist der Grenzwert an dieser Stelle ja gar nicht eindeutig definiert!).

Beispiel A.7

Betrachten wir die Funktion

$$f(x, y) = x^y, \quad D_f = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \setminus \{(0, 0)\}$$

und nähern uns dem Ursprung $(0, 0)$ einmal entlang der positiven x -Achse, das andere Mal entlang der positiven y -Achse an. Wir erhalten

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

bzw.

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} 0^y = \lim_{y \rightarrow 0^+} 0 = 0.$$

Beide Grenzwerte existieren zwar, sind aber unterschiedlich. Deshalb existiert der Grenzwert von f bei $(0, 0)$ nicht.

Mit der Definition

$$f(x, y) = \begin{cases} x^y & (x, y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \setminus \{(0, 0)\} \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

wäre f in der Variable x bei $(0, 0)$ stetig, aber nicht in der Variable y . Umgekehrt wäre mit

$$f(x, y) = \begin{cases} x^y & (x, y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

f in y bei $(0, 0)$ stetig, aber nicht in x . Man kann f also nicht stetig in $(0, 0)$ fortsetzen.

In Mathematik-Vorlesungen (Analysis II) wird an dieser Stelle (und bei der Differenzierbarkeit) meist ein großer Aufwand betrieben, um die Mengen, auf denen f definiert ist, auch wirklich so allgemein wie nötig und möglich zu beschreiben (Stichworte: offene Umgebungen, Kompaktheit usw.). Da in der Physik die Felder aber meistens sowieso auf dem gesamten Ortsraum oder zumindest sehr „gutartigen“ Teilmengen davon definiert sind (beispielsweise der komplette Raum ohne den Ursprung oder ohne die z -Achse), ist es für unsere Zwecke unnötig, darauf genauer einzugehen.

Literatur

- Abramowitz, M., Stegun, I.A.: Handbook of Mathematical Functions. Dover, New York (1972)
- Bartelmann, M., Feuerbacher, B., Krüger, T., Lüst, D., Rebhan, A., Wipf, A.: Theoretische Physik. Springer, Heidelberg (2014)
- Boas, M.L.: Mathematical Methods in the Physical Sciences, 3. Aufl. Wiley India, New Delhi (2009)
- Crowe, M.J.: A History of Vector Analysis. Dover Publications, New York (1994). Zusammenfassung online: https://www.math.ucdavis.edu/~temple/MAT21D/SUPPLEMENTARY-ARTICLES/Crowe_History-of-Vectors.pdf.
- Feuerbacher, B.: Tutorium Elektrodynamik: Elektro- und Magnetostatik. Springer, Heidelberg (2016)
- Feuerbacher, B.: Tutorium Elektrodynamik und Relativitätstheorie. Springer, Heidelberg (2017)
- Freitag, E., Busam, R.: Funktionentheorie 1. Springer, Heidelberg. (2006)
- Gradshteyn, I.S., Ryzhik, I.M.: Tables of Integrals, Series and Products. Academic Press, San Diego (2000)
- Graßmann, H.: Die Ausdehnungslehre von 1844 oder Die lineale Ausdehnungslehre, 2. Aufl. Verlag von Otto Wigang, Leipzig. (1878). Online: https://www.uni-potsdam.de/u/philosophie/grassmann/Werke/Hermann/Ausdehnungslehre_1878.pdf
- Großmann, S.: Mathematischer Einführungskurs für die Physik. Teubner, Stuttgart (2000)
- Katz, V.J.: The History of Stokes' Theorem. Math. Mag. **52**(3), 146–156 (1979). Online: https://sites.math.washington.edu/~morrow/335_17/history%20of%20stokes%20thm.pdf
- Schwindt, J.-M.: Tutorium Quantenmechanik. Springer, Heidelberg (2013)

Sachverzeichnis

A

Abbildung
konforme, 264
Ableitung, 287
für vektorwertige Funktionen, 289
partielle, 2
Richtungs-, 7
analytische Funktion, 253
axiale Vektoren, 280

B

bac-cab, 278
Bessel, Friedrich Wilhelm, 223
Bessel-Funktion, 171
erster Art, 223
modifizierte, 225
zweiter Art, 224
zylindrische, 223
Borel, Félix Édouard Justin Émile, 84

C

Cauchy, Augustin-Louis, 245
Cauchy-Riemann'sche
Differenzialgleichungen, 245
Cauchy'sche Integralformel, 253
Cauchy'scher Integralsatz, 248
charakteristische Gleichung, 282
Coulomb-Potenzial, 175, 260
curl, 19

D

Darboux, Jean Gaston, 292
Definitionslücke
hebbare, 250
isolierte, 250
Pol, 250
Delta-Funktion, 299

Determinante, 279
Funktional-, 66
Jacobi-, 67, 93
Differenzialgleichung
Bessel'sche, 223
Cauchy-Riemann'sche, 245
Legendre-, 209
Differenzialoperator, 287
selbstadjungierter, 207
Dirac, Adrien Maurice, 299
Dirichlet, Johann Peter Gustav Lejeune, 83
Dirichlet-Funktion, 83
div rot, 27
Divergenz, 17
in Kugelkoordinaten, 107
in Zylinderkoordinaten, 107
Integraldarstellung der, 105
Rechenregeln, 22
Divergenzsatz, 116
Doppelintegral, 59
Drehmatrix, 280
dyadisches Produkt, 278

E
ebene Polarkoordinaten, 283
Eigenvektor, 282
Eigenwert, 282
einfach zusammenhängend, 128
Einheitsvektoren
in Kugelkoordinaten, 39, 287
in Zylinderkoordinaten, 39, 284
Entwicklungssatz
Laplace'scher, 279
Epsilon-Tensor, 278
erster Green'scher Satz, 124
erzeugende Funktion der Legendre-Polynome,
204

Extremwerte

von skalaren Feldern, 34

F

Faltung, 165

Feld, 304

skalares, 305

stetiges, 305

Tensor-, 305

Vektor-, 304

Flächenelement

ebene Polarkoordinaten, 67

Kugelkoordinaten, 79

Zylinderkoordinaten, 79

Flächenintegral

ebenes, 58

räumliches, 75

Formel von Rodrigues, 204

Fourier, Jean Baptiste Joseph, 153

Fourier-Analyse, 156, 165

räumliche, 169

Fourier-Bessel-Reihe, 227

Fourier-Integral, 163

räumliches, 169

Fourier-Reihe, 155

Amplituden-Phasen-Darstellung, 161

Exponentialdarstellung, 161

Parabelschwingung, 157

Rechteckpulse, 158

Umrechnung der Darstellungen, 180

Fourier-Spektrum, 156

Fourier-Synthese, 156

Fourier-Transformation

Breite, 230

Eigenschaften, 165

Fourier-Transformierte, 165

Delta-Funktion, 168

Gauß'sche Glockenkurve, 167, 168

Rechteckpuls, 166

Fubini, Guido, 60

Fundamentalsatz der Vektoranalysis, 136

Funktion

analytische, 253

Bessel-, 171

Bessel-, erster Art, 223

Bessel-, modifizierte, 225

Bessel-, zweiter Art, 224

Bessel-, zylindrische, 223

Delta-, 299

Dirichlet-, 83

erzeugende der Legendre-Polynome, 204

ganze, 244

holomorphe, 244

Kugelflächen-, 219

Legendre-, zugeordnete, 218

Legendre-, zweiter Art, 210

Macdonald-, 225

meromorphe, 251

Theta-, 300

Zylinder-, 223

Funktionaldeterminante, 66

Funktionensystem

vollständiges, 195

Funktionentheorie, 243

G

ganze Funktion, 244

Gauß, Johann Carl Friedrich, 116

Gauß'sche Glockenkurve

Fourier-Transformierte, 167

Integral über, 65

Gauß'scher Integralsatz, 116

Gebiet, 128

Gewichtsfunktion, 195

Gibbs, Josiah Willard, 137

Gibbs'sches Phänomen, 159

glatte Fläche, 76

Gleichung

charakteristische, 282

Kontinuitäts-, 17

Laplace-

Lösungen der, in der Ebene, 211

Lösungen der, in Kugelkoordinaten, 221

Lösungen der, in Polarkoordinaten, 236

Lösungen der, in Zylinderkoordinaten, 225

Parseval'sche, 232

Poisson-, 175

grad div, 27

Gradient, 6, 7

in Kugelkoordinaten, 11

in Zylinderkoordinaten, 10

Rechenregeln, 22

Gram-Schmidt'sches

Orthogonalisierungsverfahren, 195

Graßmann, Hermann Günther, 137

Graßmann-Identität, 278

Green, George, 125

Green'scher Satz

erster, 124

zweiter, 125

H

Hamilton, Sir William Rowan, 137

Hankel, Hermann, 138

Hauptsatz der Differenzial- und
Integralrechnung, 294
Heaviside, Oliver, 137
Heaviside-Funktion, 300
hebbare Definitionslücke, 250
Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand von,
136
Helmholtz-Theorem, 136
Hesse, Ludwig Otto, 24
Hesse-Matrix, 24
holomorphe Funktion, 244

I

Integral
Doppel-, 59
Flächen-
ebenes, 58
räumliches, 75
Fourier-, 163
im Unendlichen schließen, 259
iteriertes, 59
Kurven-, 52
Lebesgue-, 83
Linien-, 52
Riemann-, 292
unbestimmtes, 295
Volumen-, 68
Weg-, 51, 52
Integralformel
Cauchy'sche, 253
Integralfunktion, 295
Integralsatz
Cauchy'scher, 248
von Gauß, 116
von Stokes, 120
Integrationsmaß, 85
isolierte Definitionslücke, 250

J

Jacobi, Carl Gustav Jacob, 9
Jacobi-Determinante, 67, 93
Jacobi-Matrix, 9

K

komplexe Analysis, 243
komplexe Zahlen
Grundbegriffe, 300
Polardarstellung, 303
Rechenregeln, 302
komplexes Potenzial, 262
konforme Abbildung, 264
konservatives Vektorfeld, 126
Kontinuitätsgleichung, 17
Konvergenz

im quadratischen Mittel, 160, 194
Koordinaten
Kugel-, 285
Polar-
ebene, 283
sphärische, 285
Zylinder-, 284
Kronecker, Leopold, 278
Kronecker-Symbol, 278
Kugelflächenfunktion, 219
Kugelkoordinaten, 285
Kurvenintegral, 52

L

Lagrange, Joseph-Louis de, 288
Laguerre-Polynom, 233
Laplace, Pierre-Simon, 26
Laplace-Gleichung
Lösungen der, in der Ebene, 211
Lösungen der, in Kugelkoordinaten, 221
Lösungen der, in Polarkoordinaten, 236
Lösungen der, in Zylinderkoordinaten, 225
Laplace-Operator, 26
in Kugelkoordinaten, 113
in Zylinderkoordinaten, 113
Laplace'scher Entwicklungssatz, 279
Laurent, Pierre Alphonse, 255
Laurent-Reihe, 254
Lebesgue, Henri Leon, 83
Lebesgue-Integral, 83
Legendre, Adrien-Marie, 197
Legendre-Differenzialgleichung, 209
Legendre-Funktion
zugeordnete, 218
zweiter Art, 210
Legendre-Polynom, 196, 209
Eigenschaften, 203
erzeugende Funktion, 204
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 288
Levi-Civita, Tullio, 278
Levi-Civita-Symbol, 278
Linienintegral, 52

M

Macdonald, Hector Munro, 225
Macdonald-Funktion, 225
Maclaurin, Colin, 291
Matrix
Dreh-, 280
hermitesche, 282
Hesse-, 24
Jacobi-, 9
orthogonale, 279

symmetrische, 282
 Mehrfachintegral
 als Produkt, 64
 meromorphe Funktion, 251
 modifizierte Bessel-Funktion, 225

N

Nabla-Operator, 8
 Rechenregeln, 22
 Neumann, Carl Gottfried, 224
 Newton, Sir Isaac, 288

O

Ordnung einer Polstelle, 250
 orientierbare Fläche, 76
 orthogonale Matrix, 279
 Orthogonalisierungsverfahren
 Gram-Schmidt'sches, 195
 Orthonormalsystem, 194
 vollständiges, 195
 Ostrogradski, Michail Wassiljewitsch, 116

P

Parseval des Chênes, Marc-Antoine, 232
 Parseval'sche Gleichung, 232
 partielle Ableitung, 2
 Plancherel
 Satz von, 166
 Plancherel, Michel, 166
 Plattenkondensator, 265
 Rand eines, 264
 Poisson-Gleichung, 175
 Polarkoordinaten
 ebene, 283
 sphärische, 285
 Polstelle, 250
 Ordnung einer, 250
 Polynom
 Laguerre-, 233
 Legendre-, 196, 209
 Eigenschaften, 203
 Potenzial
 Coulomb-, 175, 260
 komplexes, 262
 skalares, 125
 Vektor-, 132
 Yukawa-, 173, 260
 Produktregeln
 der Vektoranalysis, 22
 Pseudoskalar, 281
 Pseudotensor, 281
 Pseudovektoren, 280

Q

quadratintegrabel, 159
 Quaternionen, 8, 137

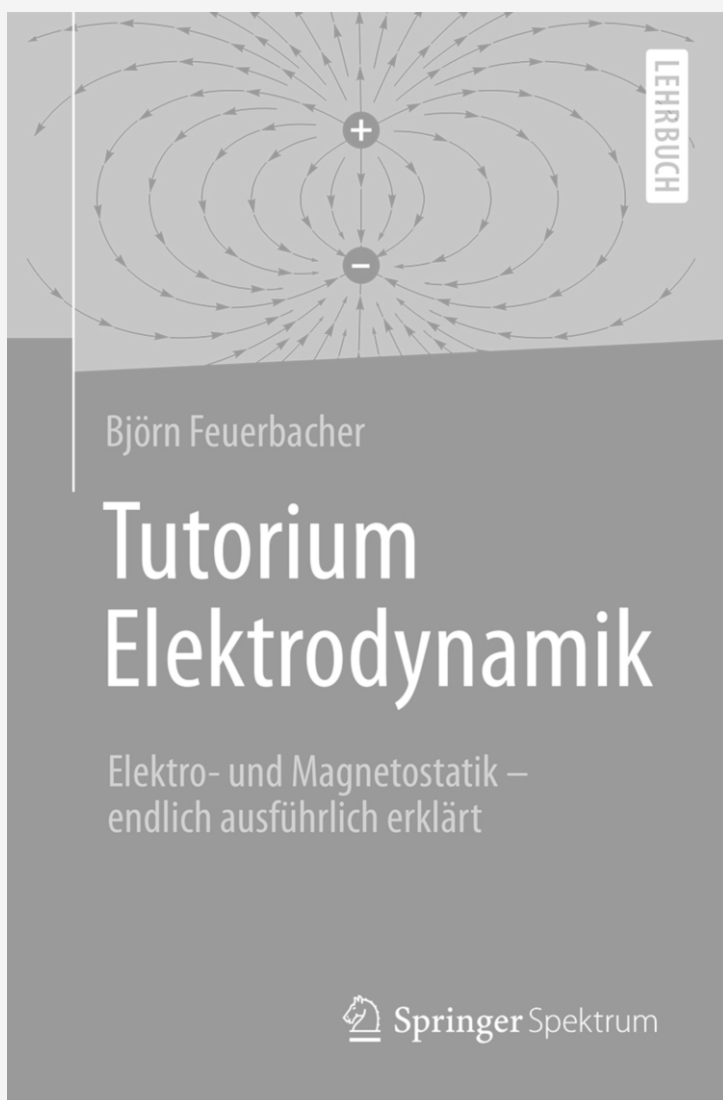
R

Raumwinkelement in Kugelkoordinaten, 73
 Regel von Sarrus, 279
 Reihe
 Fourier-, 155
 Fourier-Bessel-, 227
 Laurent-, 254
 Taylor-, 290
 Residuensatz, 254
 Residuum, 253, 257
 Richtungsableitung, 7
 Riemann, Georg Friedrich Bernhard, 245
 Riemann-Integral, 292
 Rodrigues
 Formel von, 204
 Rodrigues, Benjamin Olinde, 204
 rot grad, 27
 rot rot, 27
 Rotation, 19
 in Kugelkoordinaten, 112
 in Zylinderkoordinaten, 111
 Integraldarstellung der, 109
 Rechenregeln, 22
 Rotationssatz, 120

S

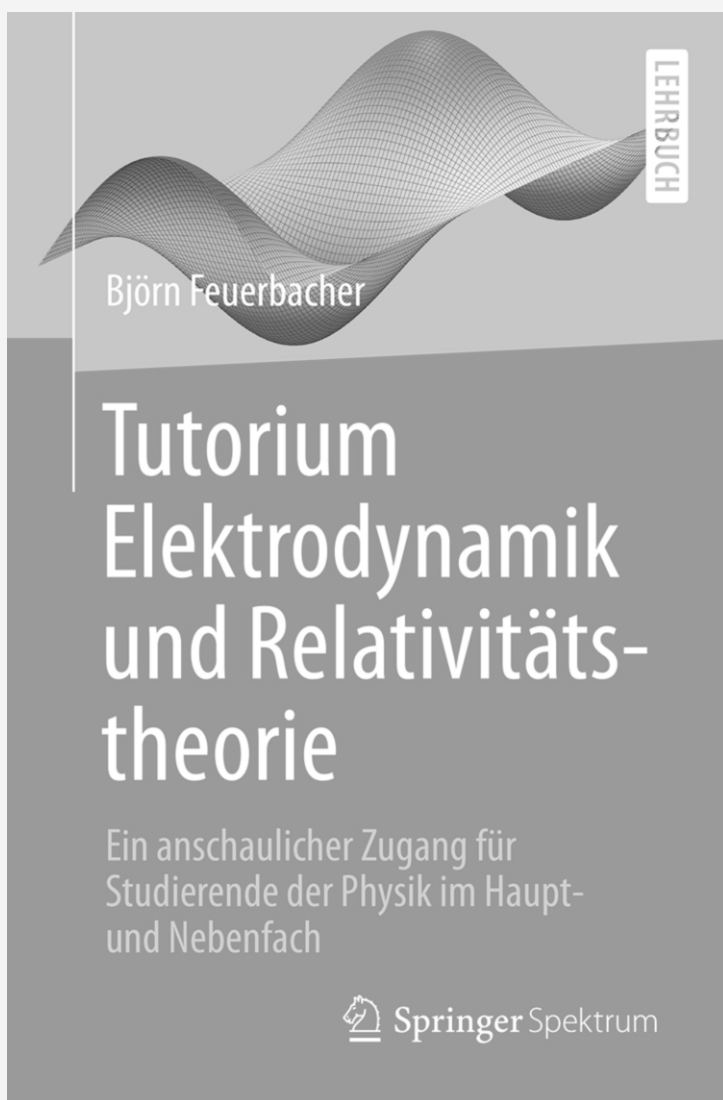
Säkulargleichung, 282
 Sarrus
 Regel von, 279
 Sarrus, Pierre Frederic, 279
 Satz
 Green'scher
 erster, 124
 zweiter, 125
 von Clairaut, 25
 von Fubini, 60
 von Gauß-Ostrogradski, 116
 von Kelvin-Stokes, 120
 von Plancherel, 166
 von Schwarz, 25
 Schwarz, Hermann Amandus, 25
 Schwarz, Satz von, 25
 selbstadjungierter Differenzialoperator, 207
 Separationsansatz, 211
 Singularität
 wesentliche, 250
 Skalar, 281
 skalares Feld, 305
 skalares Potenzial, 125

- Skalarprodukt, 278
 - für Funktionen, 193
- Smith, William Robertson, 8
- sphärische Polarkoordinaten, 285
- spherical harmonics, 219
- Stammfunktion, 295
- Stokes, Sir George Gabriel, 120
- Stokes-Helmholtz-Zerlegung, 136
- Stokes'scher Integralsatz, 120
- Stufenfunktion, 300
- T**
- Tait, Peter Guthrie, 8
- Taylor, Brook, 291
- Taylor-Reihe, 290
 - für skalare Felder, 29
- Tensor
 - Definition, 281
 - Epsilon-, 278
- Tensorfeld, 305
- Theta-Funktion, 300
- Thomson, William, 1. Baron Kelvin, 120
- totale Ableitung
 - für Mathematiker, 13
 - für Physiker, 14
- U**
- Überschwinger, 159
- unbestimmtes Integral, 295
- Unterschwinger, 159
- V**
- Vektoren
 - axiale, 280
 - Grundwissen, 277
 - im physikalischen Sinn, 280
 - Pseudo-, 280
- Vektorfeld, 304
 - konservatives, 126
- Vektorpotenzial, 132
- Vektorprodukt, 278
- vollständiges Funktionensystem, 195
- vollständiges Orthonormalsystem, 195
- Vollständigkeit, 195
- Volumenelement
 - Kugelkoordinaten, 72
 - Zylinderkoordinaten, 72
- Volumenintegral, 68
- W**
- Weber, Wilhelm Eduard, 224
- Wegintegral, 51
 - vom Weg unabhängiges, 129
- wesentliche Singularität, 250
- Wilbraham, Henry, 159
- Windungszahl, 254
- Y**
- Young-Theorem, 25
- Yukawa, Hideki, 173
- Yukawa-Potenzial, 173, 260
- Z**
- Zirkulation, 52
- zugeordnete Legendre-Funktion, 218
- zweiter Green'scher Satz, 125
- Zylinderfunktion, 223
- Zylinderkondensator, 265
- Zylinderkoordinaten, 284



Jetzt im Springer-Shop bestellen:
springer.com/978-3-662-49028-0





Jetzt im Springer-Shop bestellen:
springer.com/978-3-662-54554-6





Willkommen zu den Springer Alerts

Jetzt
anmelden!

- Unser Neuerscheinungs-Service für Sie:
aktuell *** kostenlos *** passgenau *** flexibel

Springer veröffentlicht mehr als 5.500 wissenschaftliche Bücher jährlich in gedruckter Form. Mehr als 2.200 englischsprachige Zeitschriften und mehr als 120.000 eBooks und Referenzwerke sind auf unserer Online Plattform SpringerLink verfügbar. Seit seiner Gründung 1842 arbeitet Springer weltweit mit den hervorragendsten und anerkanntesten Wissenschaftlern zusammen, eine Partnerschaft, die auf Offenheit und gegenseitigem Vertrauen beruht.

Die SpringerAlerts sind der beste Weg, um über Neuentwicklungen im eigenen Fachgebiet auf dem Laufenden zu sein. Sie sind der/die Erste, der/der über neu erschienene Bücher informiert ist oder das Inhaltsverzeichnis des neuesten Zeitschriftenheftes erhält. Unser Service ist kostenlos, schnell und vor allem flexibel. Passen Sie die SpringerAlerts genau an Ihre Interessen und Ihren Bedarf an, um nur diejenigen Information zu erhalten, die Sie wirklich benötigen.

Mehr Infos unter: springer.com/alert