Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Blatt 6
Lösungshinweise

Aufgabe 1 ((3 × 2) + (3 × 3) + (2 × 1) Punkte): Von einer Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x)$ sind die folgenden Wertepaare (x_j, y_j), $j = 0, 1, 2$, bekannt:

j	0	1	2
x_j	0	1	4
y_j	0	1	2

(a) Es bezeichne p_2 das eindeutige Interpolationspolynom vom Grad ≤ 2 mit den Stützstellen x_j und den Werten y_j für $j = 0, 1, 2$.

  (i) Bestimmen Sie p_2 mittels der Lagrangeschen Darstellung.

  (ii) Bestimmen Sie p_2 mittels der Newtonschen Darstellung.

  (iii) Berechnen Sie die Werte $p_2(2)$ und $p_2(3)$ mithilfe des Algorithmus von Neville.

(b) Wir fügen der Wertetabelle den Punkt $(x_3, y_3) = (9, 3)$ hinzu. Es bezeichne p_3 das eindeutige Interpolationspolynom vom Grad ≤ 3 mit den Stützstellen x_j und den Werten y_j für $j = 0, 1, 2, 3$.

  (i) Bestimmen Sie p_3 mittels der Lagrangeschen Darstellung.

  (ii) Bestimmen Sie p_3 mittels der Newtonschen Darstellung.

  (iii) Berechnen Sie die Werte $p_3(2)$ und $p_3(3)$ mithilfe des Algorithmus von Neville.

(c) Tatsächlich ist die Funktion f gegeben durch $f(x) = \sqrt{x}$ für alle $x \in [0,\infty)$. Vergleichen Sie

  (i) die Werte $p_2(2)$ und $p_3(2)$ mit dem exakten Wert $f(2) = \sqrt{2}$ und

  (ii) die Werte $p_2(3)$ und $p_3(3)$ mit dem exakten Wert $f(3) = \sqrt{3}$.

Lösung:

(a) (i) Für $x \in \mathbb{R}$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= 0 \cdot \frac{x-1}{0-1} \cdot \frac{x-4}{0-4} + 1 \cdot \frac{x-0}{1-0} \cdot \frac{x-4}{1-4} + 2 \cdot \frac{x-0}{4-0} \cdot \frac{x-1}{4-1} \\
&= -\frac{1}{3}x(x-4) + \frac{1}{6}x(x-1) \\
&= -\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{6}x
\end{aligned}$$

(ii) Wir berechnen die dividierten Differenzen im folgenden Schema:

$$\begin{array}{c|c|c|c}
x_0 = 0 & y[x_0] = 0 & & \\
& & y[x_0, x_1] = \frac{1-0}{1-0} = 1 & \\
x_1 = 1 & y[x_1] = 1 & & y[x_0, x_1, x_2] = \frac{\frac{1}{3}-1}{4-0} = -\frac{1}{6} \\
& & y[x_1, x_2] = \frac{2-1}{4-1} = \frac{1}{3} & \\
x_2 = 4 & y[x_2] = 2 & &
\end{array}$$

Damit erhalten wir die Newtonsche Darstellung

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= y[x_0] + y[x_0, x_1]x + y[x_0, x_1, x_2]x(x-1) \\
&= x - \frac{1}{6}x(x-1) \\
&= -\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{6}x.
\end{aligned}$$

(iii) Wir berechnen für $x = 2$ die benötigten Größen $p_{j,k}(2)$ mittels des folgenden Schemas:

$$\begin{array}{c|c|c|c}
x_0 = 0 & y_0 = p_{0,0}(2) = 0 & & \\
x_1 = 1 & y_1 = p_{1,0}(2) = 1 & p_{1,1}(2) = 2 & \\
x_2 = 4 & y_2 = p_{2,0}(2) = 2 & p_{2,1}(2) = \frac{4}{3} & p_{2,2}(2) = \frac{5}{3}
\end{array}$$

Die hierin eingetragenen Werte haben wir wie folgt bestimmt (siehe Seite 181 im Skript zur HMI 1 von Prof. Bildhauer):

$$\begin{aligned}
p_{1,1}(2) &= 1 - \frac{1-2}{1-0}(1-0) = 2 \\
p_{2,1}(2) &= 2 - \frac{4-2}{4-1}(2-1) = \frac{4}{3} \\
p_{2,2}(2) &= \frac{4}{3} - \frac{4-2}{4-0}\Big(\frac{4}{3} - 2\Big) = \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

Mit dem Algorithmus von Neville erhalten wir $p_2(2) = p_{2,2}(2) = \frac{5}{3}$.

Ebenso werten wir für $x = 3$ das folgende Schema aus:

$$\begin{array}{c|c|c|c}
x_0 = 0 & y_0 = p_{0,0}(3) = 0 & & \\
x_1 = 1 & y_1 = p_{1,0}(3) = 1 & p_{1,1}(3) = 3 & \\
x_2 = 4 & y_2 = p_{2,0}(3) = 2 & p_{2,1}(3) = \frac{5}{3} & p_{2,2}(3) = 2
\end{array}$$

Hierbei haben wir folgende Nebenrechnungen durchgeführt:

$$\begin{aligned}
p_{1,1}(3) &= 1 - \frac{1-3}{1-0}(1-0) = 3 \\
p_{2,1}(3) &= 2 - \frac{4-3}{4-1}(2-1) = \frac{5}{3} \\
p_{2,2}(3) &= \frac{5}{3} - \frac{4-3}{4-0}\Big(\frac{5}{3} - 3\Big) = 2
\end{aligned}$$

Mit dem Algorithmus von Neville erhalten wir $p_2(3) = p_{2,2}(3) = 2$.

(b) (i) Für $x \in \mathbb{R}$ berechnen wir

$$\begin{aligned} p_3(x) &= 0 \cdot \frac{x-1}{0-1} \cdot \frac{x-4}{0-4} \cdot \frac{x-9}{0-9} + 1 \cdot \frac{x-0}{1-0} \cdot \frac{x-4}{1-4} \cdot \frac{x-9}{1-9} \\ &\quad + 2 \cdot \frac{x-0}{4-0} \cdot \frac{x-1}{4-1} \cdot \frac{x-9}{4-9} + 3 \cdot \frac{x-0}{9-0} \cdot \frac{x-1}{9-1} \cdot \frac{x-4}{9-4} \\ &= \frac{1}{24}x(x-4)(x-9) - \frac{1}{30}x(x-1)(x-9) + \frac{1}{120}x(x-1)(x-4) \\ &= \frac{1}{60}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{37}{30}x \end{aligned}$$

(ii) Wir ergänzen unser Schema aus Aufgabenteil (a) (i) wie folgt:

$$\begin{array}{r|l|l|l|l} x_0 = 0 & y[x_0] = 0 & & & \\ & & y[x_0,x_1] = 1 & & \\ x_1 = 1 & y[x_1] = 1 & & y[x_0,x_1,x_2] = -\frac{1}{6} & \\ & & y[x_1,x_2] = \frac{1}{3} & & y[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{1}{60} \\ x_2 = 4 & y[x_2] = 2 & & y[x_1,x_2,x_3] = -\frac{1}{60} & \\ & & y[x_2,x_3] = \frac{1}{5} & & \\ x_3 = 9 & y[x_3] = 3 & & & \end{array}$$

Damit erhalten wir die Newtonsche Darstellung

$$\begin{aligned} p_3(x) &= p_2(x) + y[x_0,x_1,x_2,x_3]x(x-1)(x-4) \\ &= \Big(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{6}x\Big) + \frac{1}{60}(x^3 - 5x^2 + 4x) \\ &= \frac{1}{60}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{37}{30}x. \end{aligned}$$

(iii) Wir ergänzen unser Schema für $x = 2$ aus Aufgabenteil (a) (ii):

$$\begin{array}{r|l|l|l|l} x_0 = 0 & y_0 = p_{0,0}(2) = 0 & & & \\ x_1 = 1 & y_1 = p_{1,0}(2) = 1 & p_{1,1}(2) = 2 & & \\ x_2 = 4 & y_2 = p_{2,0}(2) = 2 & p_{2,1}(2) = \frac{4}{3} & p_{2,2}(2) = \frac{5}{3} & \\ x_3 = 9 & y_3 = p_{3,0}(2) = 3 & p_{3,1}(2) = \frac{8}{5} & p_{3,2}(2) = \frac{41}{30} & p_{3,3}(2) = \frac{8}{5} \end{array}$$

Die Werte der letzten Zeile wurden dabei wie folgt bestimmt:

$$\begin{aligned} p_{3,1}(2) &= 3 - \frac{9-2}{9-4}(3-2) = \frac{8}{5} \\ p_{3,2}(2) &= \frac{8}{5} - \frac{9-2}{9-1}\Big(\frac{8}{5} - \frac{4}{3}\Big) = \frac{41}{30} \\ p_{3,3}(2) &= \frac{41}{30} - \frac{9-2}{9-0}\Big(\frac{41}{30} - \frac{5}{3}\Big) = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

Mit dem Algorithmus von Neville erhalten wir $p_3(2) = p_{3,3}(2) = \frac{8}{5}$.

Ebenso ergänzen unser Schema für $x = 3$ aus Aufgabenteil (a) (ii):

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c}
x_0 = 0 & y_0 = p_{0,0}(3) = 0 & & & \\
x_1 = 1 & y_1 = p_{1,0}(3) = 1 & p_{1,1}(3) = 3 & & \\
x_2 = 4 & y_2 = p_{2,0}(3) = 2 & p_{2,1}(3) = \frac{5}{3} & p_{2,2}(3) = 2 & \\
x_3 = 9 & y_3 = p_{3,0}(3) = 3 & p_{3,1}(3) = \frac{9}{5} & p_{3,2}(3) = \frac{17}{10} & p_{3,3}(3) = \frac{19}{10}
\end{array}
$$

Hierbei haben wir die Werte der letzten Zeile wie folgt bestimmt:

$$
\begin{aligned}
p_{3,1}(3) &= 3 - \frac{9-3}{9-4}(3-2) = \frac{9}{5} \\
p_{3,2}(3) &= \frac{9}{5} - \frac{9-3}{9-1}\left(\frac{9}{5} - \frac{5}{3}\right) = \frac{17}{10} \\
p_{3,3}(3) &= \frac{17}{10} - \frac{9-3}{9-0}\left(\frac{17}{10} - 2\right) = \frac{19}{10}
\end{aligned}
$$

Mit dem Algorithmus von Neville erhalten wir $p_3(3) = p_{3,3}(3) = \frac{19}{10}$.

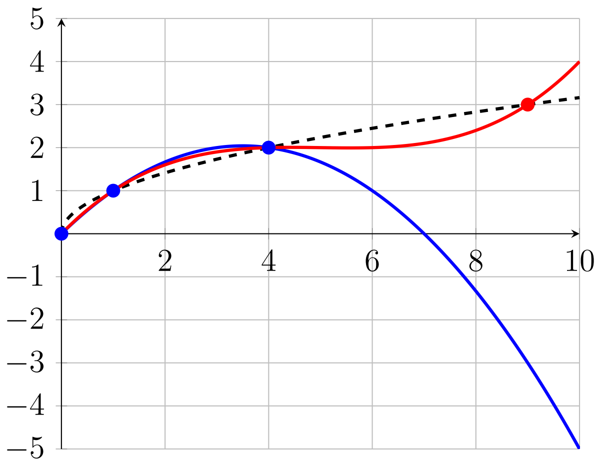
(c) (i) Wir haben in Aufgabenteil (a) $p_2(2) = \frac{5}{3}$ und in Aufgabenteil (b) $p_3(2) = \frac{8}{5}$ bestimmt. Wir erhalten

$$\left|p_2(2) - \sqrt{2}\right| < 0.253 \qquad \text{und} \qquad \left|p_3(2) - \sqrt{2}\right| < 0.186.$$

(ii) Wir haben in Aufgabenteil (a) $p_3(3) = 2$ und in Aufgabenteil (b) $p_3(3) = \frac{19}{10}$ bestimmt. Wir erhalten

$$\left|p_2(3) - \sqrt{3}\right| < 0.268 \qquad \text{und} \qquad \left|p_3(3) - \sqrt{3}\right| < 0.168.$$

Wir veranschaulichen die Situation mit dem folgenden Schaubild. Dargestellt sind die Funktion f (gestrichelt) sowie die Polynome p_2 (blau) und p_3 (rot).



Aufgabe 2 (2 + 4 + 3 Punkte): In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \tag{1}$$

Hierzu betrachten wir die durch $a_n := \sqrt[n]{n} - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Zeigen Sie, dass $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Verifizieren Sie mithilfe des binomischen Lehrsatzes, dass

$$n = (1 + a_n)^n \geq 1 + \binom{n}{2} a_n^2 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2$$

gilt, und folgern Sie, dass $a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

(c) Beweisen Sie unter Verwendung der Ergebnisse aus den Aufgabenteilen (a) und (b), dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert, und folgern Sie daraus (1).

Lösung:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ können wir aufgrund der Monotonie der n-ten Wurzel $\sqrt[n]{\cdot} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ aus $n \geq 1$ folgern, dass $\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n]{1} = 1$ gilt. Es ergibt sich damit wie behauptet $a_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ haben wir $1 + a_n = \sqrt[n]{n}$ und deshalb $(1 + a_n)^n = n$ nach Definition der n-ten Wurzel. Dies zeigt die erste Gleichheit. Für die zweite Gleichheit nutzen wir den binomischen Lehrsatz aus. Demnach gilt

$$(1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil $a_n \geq 0$ nach Aufgabenteil (a), können wir im Fall $n \geq 2$ die Summe nach unten gegen die beiden Summanden für $k = 0$ und $k = 2$ abschätzen, d. h.

$$(1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n^k \geq 1 + \binom{n}{2} a_n^2.$$

Zusammenfassend beweist dies die erste der in (b) behaupteten Abschätzungen. Für eine feste natürliche Zahl $n \geq 2$ lösen wir nun die Ungleichung $n \geq 1 + \binom{n}{2} a_n^2$ nach a_n auf. Hierzu beachten wir, dass $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ und $\frac{n(n-1)}{2} \geq 1 > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
& n && \geq 1 + \binom{n}{2} a_n^2 \\
\iff\ & n - 1 && \geq \binom{n}{2} a_n^2 \\
\iff\ & n - 1 && \geq \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \\
\iff\ & \frac{2}{n} && \geq a_n^2 \\
\iff\ & \sqrt{\frac{2}{n}} && \geq a_n
\end{aligned}$$

(c) Kombinieren wir die Ergebnisse der Aufgabenteile (a) und (b), so sehen wir, dass

$$0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2.$$

Weil $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{n}} = 0$, folgt nun aus dem Einschließungssatz, dass auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sein muss mit dem Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Die Grenzwertrechenregeln erlauben uns schließlich den Nachweis von (1). In der Tat gilt wegen $\sqrt[n]{n} = a_n + 1$ wie behauptet

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} 1 = 0 + 1 = 1.$$

Aufgabe 3 (5 + 2 Punkte): Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, die gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(a) Zeigen Sie: Erfüllt die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Bedingung, dass $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $x \geq 0$.

(b) Gilt (a) auch für strikte Ungleichungen, d. h. folgt aus $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $x > 0$ sein muss? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

Lösung:

(a) Wir nehmen an, dass entgegen der Behauptung $x < 0$ gelten würde, und führen dies zu einem Widerspruch. Hierfür gehen wir wie folgt vor. Wir setzen $\varepsilon := \frac{|x|}{2} > 0$ und schließen aus der Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x, dass es zu ε ein $N \in \mathbb{N}$ geben muss, sodass $|x_n - x| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt. Es ergibt sich

$$x_n = (x_n - x) + x = (x_n - x) - |x| \leq |x_n - x| - |x| < \varepsilon - |x| = -\frac{|x|}{2} < 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Dies steht jedoch im Widerspruch zu der Voraussetzung, wonach $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Aufgrund dieses Widerspruchs war unsere Annahme $x < 0$ falsch, d. h. es gilt wie behauptet $x \geq 0$.

(b) Wie die gegen 0 konvergente Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ zeigt, ist die Aussage (a) für strikte Ungleichungen im Allgemeinen falsch.

Aufgabe 4 (2 + 2 + 3 Punkte): Wir betrachten die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegeben sind durch

$$a_n := \frac{6n^3 + 4n + 1}{3n(2n+1)^2}, \qquad b_n := \frac{1 + (-1)^n n(n+1)}{2n^2} \qquad \text{und} \qquad c_n := n\Big(\sqrt{1 + \tfrac{1}{n}} - 1\Big).$$

Welche dieser Folgen sind konvergent? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Hinweis: Zur Untersuchung der Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Identität $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y$ nützlich, die für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y > 0$ gilt.

Lösung:

(a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$, denn

$$a_n = \frac{6n^3 + 4n + 1}{3n(2n+1)^2} = \frac{6 + 4\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}{3(2 + \frac{1}{n})^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{6}{3 \cdot 2^2} = \frac{1}{2}.$$

(b) Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent. Um dies einzusehen, berechnen wir zunächst

$$b_n = \frac{1+(-1)^n n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + (-1)^n \cdot \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + (-1)^n \cdot \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

und somit

$$\frac{b_n - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)} = (-1)^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wäre $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, sagen wir gegen ein $b \in \mathbb{R}$, so würden die Grenzwertrechenregeln erzwingen, dass

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 2b.$$

Wir wissen jedoch, dass die alternierende Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent ist. Folglich kann $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent sein.

(c) Mit dem Hinweis (angewendet auf $x = 1+\frac{1}{n}$ und $y = 1$) rechnen wir nach, dass

$$c_n = \frac{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{n\left((1+\frac{1}{n})-1\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

Weil für alle $n \in \mathbb{N}$

$$1 \leq 1+\frac{1}{n} \leq 1+\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n} = \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$$

gilt, ergibt die Monotonie der Wurzelfunktion $\sqrt{\cdot} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, dass

$$1 \leq \sqrt{1+\frac{1}{n}} \leq 1+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Einschließungssatz liefert damit, dass $\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1$. Schließlich wenden wir die Grenzwertrechenregeln an und sehen, dass die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}.$$