Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Blatt 7
Lösungshinweise

Aufgabe 1 (10 Punkte): Gegeben sei eine reelle Zahl $a > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Hinweis: Unterscheiden Sie die drei Fälle $a > 1$, $a = 1$ und $a < 1$. Überlegen Sie sich, dass Sie den Fall $a < 1$ auf den Fall $a > 1$ zurückführen können.

Lösung: Wie im Hinweis vorgeschlagen, unterscheiden wir die folgenden drei Fälle:

- *Fall 1:* Für $a = 1$ ist die Aussage trivialerweise richtig, denn es gilt $\sqrt[n]{1} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$.
- *Fall 2:* Es sei $a > 1$. Zum Beweis der Behauptung geben wir uns ein $\varepsilon > 0$ vor. Weil die Folge $((1+\varepsilon)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist, finden wir dann ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $(1+\varepsilon)^n > a > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt. Unter Ausnutzung der strengen Monotonie der n-ten Wurzel ergibt sich daraus $1+\varepsilon > \sqrt[n]{a} > 1$ und somit $|\sqrt[n]{a}-1| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Dies zeigt, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für $a > 1$.
- *Fall 3:* Für $a < 1$ können wir die Behauptung auf den *Fall 2* zurückführen, denn mit $0 < a < 1$ haben wir $\frac{1}{a} > 1$ und deshalb $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$ nach der bereits bewiesenen Behauptung im *Fall 2*. Wegen $\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \sqrt[n]{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich daraus mittels der Grenzwertrechenregeln

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Aufgabe 2 (4 + 6 Punkte): Wir definieren eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch die Rekursion

$$a_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Begründen Sie, warum der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls dieser existiert, die positive Lösung a der quadratischen Gleichung $a^2 + a - 1 = 0$ sein muss. Berechnen Sie anschließend den Wert von a.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls dieser existiert, $a \geq 0$ gelten muss. Verwenden Sie hierzu das Resultat aus Aufgabe 3 (a) von Blatt 6.

(b) Zeigen Sie, dass

$$|a_{n+1} - a| \leq \frac{1}{1+a}|a_n - a| \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

und folgern Sie daraus die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Hinweis: Rechnen Sie zunächst nach, dass $a_{n+1} - a = -\frac{a_n - a}{(1+a)(1+a_n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Lösung:

(a) Wir zeigen mittels vollständiger Induktion, dass $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. *Induktionsanfang*: Für $n = 1$ ist dies wegen $a_1 = 1$ offensichtlich richtig. *Induktionsschritt*: Ist $a_n \geq 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits gezeigt, dann gilt $1 + a_n \geq 1 > 0$ und damit aufgrund der Rekursion $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \geq 0$.
Wir nehmen nun an, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und setzen $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Wie im Hinweis vorgeschlagen, liefert uns das Resultat aus Aufgabe 3 (a) von Blatt 6, dass $a \geq 0$ gelten muss.
Ferner liefern uns die Grenzwertrechenregeln unter Verwendung der Rekursion

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+a_n} = \frac{1}{1 + \lim_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{1+a}, \tag{1}$$

und somit $a(1+a) = 1$ bzw. $a^2+a-1 = 0$. Die beiden Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind $a = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$, von denen eine negativ und eine positiv ist. Weil wir bereits wissen, dass $a \geq 0$ gilt, ist die negative Lösung ausgeschlossen. Der Grenzwert a muss demnach die positive Lösung der Gleichung $a^2 + a - 1 = 0$ sein; konkret haben wir also $a = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$.

(b) Es bezeichne a die positive Lösung der Gleichung $a^2+a-1 = 0$, d. h. $a = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$. Wie im Hinweis vorgeschlagen, rechnen wir zunächst nach, dass

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a &= \frac{1}{1+a_n} - a && \text{(gemäß der Rekursion)} \\ &= \frac{1}{1+a_n} - \frac{1}{1+a} && \text{(nach (1))} \\ &= \frac{(1+a) - (1+a_n)}{(1+a)(1+a_n)} \\ &= -\frac{a_n - a}{(1+a)(1+a_n)} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Daraus folgern wir, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|a_{n+1} - a| = \frac{|a_n - a|}{(1+a)(1+a_n)} \leq \frac{1}{1+a}|a_n - a|, \tag{2}$$

wobei wir im letzten Schritt unser Resultat aus Aufgabenteil (a) ausgenutzt haben, wonach $a_n \geq 0$ und somit $\frac{1}{1+a_n} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir behaupten nun, dass

$$|a_n - a| \leq \left(\frac{1}{1+a}\right)^{n-1} |1 - a| \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Dies zeigen wir abermals mit vollständiger Induktion. *Induktionsanfang*: Für $n = 1$ ist die Aussage wegen $a_1 = 1$ offensichtlich wahr. *Induktionsschritt*: Wir nehmen an, dass die behauptete Abschätzung für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig ist. Mit dieser Induktionsvoraussetzung rechnen wir nach, dass

$$|a_{n+1} - a| \overset{(2)}{\leq} \frac{1}{1+a}|a_n - a| \overset{\text{I.V.}}{\leq} \frac{1}{1+a}\left(\frac{1}{1+a}\right)^{n-1}|1-a| = \left(\frac{1}{1+a}\right)^{(n+1)-1}|1-a|$$

gilt, womit die Gültigkeit der behaupteten Abschätzung für $n+1$ bewiesen ist.
Schließlich verwenden wir (3), um die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nachzuweisen. Hierzu geben wir uns ein $\varepsilon > 0$ vor. Weil $a > 0$ und somit $\frac{1}{1+a} < 1$ gilt, ist $((\frac{1}{1+a})^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Es gibt daher ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$\left(\frac{1}{1+a}\right)^{n-1} < \frac{\varepsilon}{|1-a|} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq N$$

gilt. Gemäß der zuvor bewiesenen Abschätzung (3) haben wir somit

$$|a_n - a| \leq \left(\frac{1}{1+a}\right)^{n-1}|1-a| < \frac{\varepsilon}{|1-a|}\,|1-a| = \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Dies zeigt, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Aufgabe 3 (8 Punkte): Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

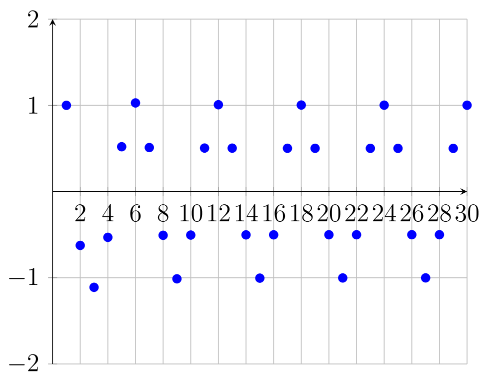
Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, und bestimmen Sie anschließend alle Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \qquad \text{und} \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Lösung: Da bekanntlich $|\cos(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und ferner $0 < 1 + \frac{1}{n^2} \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, haben wir

$$|a_n| = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left|\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right| \leq 2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h. die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist (nach oben und unten) beschränkt.



Wir betrachten nun die sechs Teilfolgen $(a_{6(k-1)+\ell})_{k\in\mathbb{N}}$ für $\ell \in \{1,2,\ldots,6\}$. Mittels der Definition der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmen wir für $\ell \in \{1,2,\ldots,6\}$ und $k \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned}
a_{6(k-1)+\ell} &= \left(1+\frac{1}{(6(k-1)+\ell)^2}\right)\cos\left(\left(6(k-1)+\ell\right)\frac{\pi}{3}\right)\\
&= \left(1+\frac{1}{(6(k-1)+\ell)^2}\right)\cos\left(2(k-1)\pi+\ell\frac{\pi}{3}\right)\\
&= \left(1+\frac{1}{(6(k-1)+\ell)^2}\right)\cos\left(\ell\frac{\pi}{3}\right)\\
&\overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \cos\left(\ell\frac{\pi}{3}\right).
\end{aligned}$$

Die Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind somit $\cos\left(\ell\frac{\pi}{3}\right)$ für $\ell = 1,\ldots,6$; weil nun

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}, \quad \cos(\pi) = -1,$$
$$\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \cos(2\pi) = 1,$$

sind dies die vier Werte $\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$. Insbesondere sehen wir, dass

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -1 \qquad \text{und} \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Aufgabe 4 (8 × 1,5 Punkte): Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und entscheiden Sie jeweils, ob sogar absolute Konvergenz vorliegt.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-1}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left((-1)^n+2^{-n}\right)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)^{-n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+4^n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}5^{-n}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{3n-1}}{3^{5+2n}}$

Hinweis zu (g): Sie dürfen *ohne Beweis* verwenden, dass $(2n)! \leq 4^n(n!)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. (Auch wenn Sie keinen Beweis dafür geben müssen, merken wir dennoch an, dass sich diese Aussage wie in Zusatzaufgabe 1 (c) des Zusatzblatts mit vollständiger Induktion beweisen lässt.)

Lösung:

(a) Da die Summanden einer konvergenten Reihe eine Nullfolge bilden, kann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-1}$ nicht konvergent (und insbesondere nicht absolut konvergent) sein, weil die Folge $\left((-1)^n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nur keine Nullfolge darstellt, sondern sogar divergent ist. Tatsächlich haben wir $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-1} = 1 \neq 0$, weshalb die bekannte Divergenz der alternierenden Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß den Grenzwertrechenregeln die Divergenz der Folge $\left((-1)^n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ erzwingt.

(b) Da die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (als alternierende harmonische Reihe) und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 2^{-n}$ (nach dem Majorantenkriterium durch Vergleich mit der konvergenten geometrischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$) beide konvergent sind, konvergiert nach den Rechenregeln für Reihen auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\big((-1)^n + 2^{-n}\big) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 2^{-n}.$$

Allerdings haben wir $\left|\frac{1}{n}\big((-1)^n + 2^{-n}\big)\right| \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ eine divergente Minorante für $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n}\big((-1)^n + 2^{-n}\big)\right|$ darstellt; folglich ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\big((-1)^n + 2^{-n}\big)$ konvergent, jedoch nicht absolut konvergent.

(c) Wegen $\frac{n+1}{n^2+1} \geq \frac{n+1}{n^2+2n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, stellt die (verschobene) harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ eine divergente Minorante für die zu untersuchende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$ dar. Diese muss somit ebenfalls divergent sein, ist also nicht konvergent und erst recht nicht absolut konvergent.

(d) Wegen $\left(3 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \leq 3^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, stellt die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}$ eine konvergente Majorante für die zu untersuchende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$ dar, die somit ebenfalls konvergieren muss und sogar absolut konvergent ist.

(e) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegeben ist durch $a_n := \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ stellt eine monoton fallende Nullfolge dar. Nach dem Leibnizkriterium ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$ konvergent. Wegen $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{1+\sqrt{n}} = |(-1)^n a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, stellt die (verschobene) harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ eine divergente Minorante zu $\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n a_n\right|$ dar, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$ nicht absolut konvergent sein kann.

(f) Offensichtlich gilt $n \leq 2^n$ und deshalb $\frac{n}{n+4^n} \leq \frac{n}{4^n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir sehen also, dass die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ eine konvergente Majorante für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+4^n}$ darstellt, die somit absolut konvergent und daher insbesondere konvergent sein muss.

(g) Gemäß der Definition des Binomialkoeffizieten und unter Verwendung der im Hinweis angegebenen Abschätzung haben wir $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \leq 4^n$ und deshalb $\binom{2n}{n} 5^{-n} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ konvergiert, folgt mit dem Majorantenkriterium, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} 5^{-n}$ absolut konvergent und insbesondere konvergent ist.

(h) Für $n \in \mathbb{N}_0$ rechnen wir nach, dass $\frac{2^{3n-1}}{3^{5+2n}} = \frac{2^{-1}}{3^5}\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^n = \frac{1}{486}\left(\frac{8}{9}\right)^n$. Demnach liefert die (skalierte) geometrische Reihe $\frac{1}{486}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n$ eine konvergente Majorante für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n-1}}{3^{5+2n}}$, die somit absolut konvergent und insbesondere konvergent sein muss.