Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Blatt 4
Lösungshinweise

Aufgabe 1 (3 + (3 + 4) Punkte):

(a) Rechnen Sie nach, dass

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 7 - 2|x-6| \leq 2x - 1\} = \mathbb{R}.$$

(b) Bestimmen Sie für die folgenden beiden Ungleichungen jeweils die Lösungsmenge:

$$\big|7 - 2|x-6|\big| \leq 2x - 1 \qquad \text{und} \qquad \big||x^2 - 9| - 1\big| < 2.$$

Lösung:

(a) Zunächst formen wir die Ungleichung $7 - 2|x-6| \leq 2x - 1$ wie folgt um

$$\begin{aligned} 7 - 2|x-6| \leq 2x - 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad 8 - 2|x-6| \leq 2x \\ &\Longleftrightarrow \quad 4 - |x-6| \leq x. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir die Zerlegung $\mathbb{R} = (-\infty, 6] \cup (6, \infty)$ und bestätigen auf jedem dieser Teilintervalle die Gültigkeit der obigen Ungleichung:

- Für $x \in (-\infty, 6]$ ist die Ungleichung $4 - |x-6| \leq x$ äquivalent zu $4 + (x-6) \leq x$, was wiederum äquivalent ist zu der wahren Aussage $-2 \leq 0$. Somit ist jedes $x \in (-\infty, 6]$ eine Lösung der Ungleichung $7 - 2|x-6| \leq 2x - 1$.
- Für $x \in (6, \infty)$ ist die Ungleichung $4 - |x-6| \leq x$ äquivalent zu $4 - (x-6) \leq x$; dies wiederum ist äquivalent zu $5 \leq x$, was wegen $x \in (6, \infty)$ ebenfalls eine wahre Aussage darstellt. Somit ist jedes $x \in (6, \infty)$ eine Lösung der Ungleichung $7 - 2|x-6| \leq 2x - 1$.

Zusammenfassend stellen wir also fest, dass jedes $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $7 - 2|x-6| \leq 2x - 1$ löst, d. h. für die Lösungsmenge gilt wie behauptet

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 7 - 2|x-6| \leq 2x - 1\} = \mathbb{R}.$$

(b) Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $|a| \leq b$ genau dann, wenn $a \leq b$ und $-a \leq b$. Weil nun $7 - 2|x-6| \leq 2x - 1$ nach Aufgabenteil (a) für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, stimmt die Lösungsmenge $\mathbb{L}_1$ der Ungleichung $\big|7 - 2|x-6|\big| \leq 2x - 1$ mit der Lösungsmenge der Ungleichung $-7 + 2|x-6| \leq 2x - 1$ überein.
Um diese zu bestimmen, betrachten wir erneut die Zerlegung $\mathbb{R} = (-\infty, 6] \cup (6, \infty)$.

- Für $x \in (-\infty, 6]$ ist die Ungleichung $-7 + 2|x-6| \leq 2x - 1$ äquivalent zu $-7 - 2(x-6) \leq 2x - 1$, was wir äquivalent umformen können zu $\frac{3}{2} \leq x$; somit haben wir $\mathbb{L}_1 \cap (-\infty, 6] = [\frac{3}{2}, 6]$.
- Für $x \in (6, \infty)$ ist die Ungleichung $-7 + 2|x-6| \leq 2x - 1$ äquivalent zu $-7 + 2(x-6) \leq 2x - 1$, was sich (nach Subtraktion von $2x$ auf beiden Seiten) als äquivalent zu der wahren Aussage $-19 \leq -1$ herausstellt; somit gilt $\mathbb{L}_1 \cap (6, \infty) = (6, \infty)$.

Zusammenfassend erhalten wir schließlich

$$\mathbb{L}_1 = \big(\mathbb{L}_1 \cap (-\infty, 6]\big) \cup \big(\mathbb{L}_1 \cap (6, \infty)\big) = \left[\frac{3}{2}, 6\right] \cup (6, \infty) = \left[\frac{3}{2}, \infty\right).$$

Wir betrachten nun die Ungleichung $\big||x^2 - 9| - 1\big| < 2$ und bezeichnen mit $\mathbb{L}_2$ ihre Lösungsmenge. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\big||x^2-9|-1\big| < 2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \big(-(|x^2-9|-1) < 2\big) \wedge \big(|x^2-9|-1 < 2\big) \\
&\Longleftrightarrow \quad \big(|x^2-9| > -1\big) \wedge \big(|x^2-9| < 3\big) \\
&\Longleftrightarrow \quad |x^2-9| < 3 \\
&\Longleftrightarrow \quad \big(-(x^2-9) < 3\big) \wedge \big(x^2-9 < 3\big) \\
&\Longleftrightarrow \quad \big(x^2 > 6\big) \wedge \big(x^2 < 12\big) \\
&\Longleftrightarrow \quad \big(|x| > \sqrt{6}\big) \wedge \big(|x| < 2\sqrt{3}\big) \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in (-2\sqrt{3}, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, 2\sqrt{3}),
\end{aligned}$$

sodass wir $\mathbb{L}_2 = (-2\sqrt{3}, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, 2\sqrt{3})$ erhalten.

Aufgabe 2 (5 × 2 Punkte): Sind die folgenden Mengen nach oben beschränkt, nach unten beschränkt, beschränkt? Falls ja, bestimmen Sie das Supremum und das Infimum sowie, falls existent, das Maximum und das Minimum der Mengen.

$$\begin{aligned}
M_1 &= (a, b) \cup (b, c] \qquad \text{für } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ mit } a < b < c \\
M_2 &= \left\{ (-1)^n \frac{1}{n^2} + n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \\
M_3 &= \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \;\middle|\; \frac{1}{x} > \frac{1}{x^4} \right\} \\
M_4 &= \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \;\middle|\; \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x^4} \right\} \\
M_5 &= \big\{ x \in \mathbb{R} \;\big|\; |x+3| > |x-2| \big\}
\end{aligned}$$

Lösung:

- Die Menge M_1 ist als Vereinigung beschränkter Intervalle nach oben und nach unten beschränkt, also beschränkt. Es gilt

$$\inf M_1 = a, \quad \sup M_1 = \max M_1 = c,$$

ein Minimum von M_1 existiert nicht (das Infimum a ist nicht Element von M_1).

- Die Menge M_2 ist nicht nach oben beschränkt, also auch nicht beschränkt, da die unbeschränkte Menge
$$\left\{ \frac{1}{4m^2} + 2m \;\middle|\; m \in \mathbb{N} \right\}$$
eine Teilmenge von M_2 ist. Außerdem gilt für alle $n \in \mathbb{N}$
$$(-1)^n \frac{1}{n^2} + n \geq -\frac{1}{n^2} + n \geq n - 1 \geq 0,$$
sodass M_2 nach unten beschränkt ist durch 0. Weil ferner $(-1)^1 \frac{1}{1^2} + 1 = 0$ gilt, erhalten wir
$$\inf M_2 = \min M_2 = 0.$$
- Weil $x^4 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ist $\frac{1}{x} > \frac{1}{x^4}$ äquivalent zu $x^3 > 1$ (Multiplikation bzw. Division mit x^4 erhält die Ungleichung!) und dies wiederum zu $x > 1$, sodass $M_3 = (1, \infty)$. Also ist M_3 nicht nach oben beschränkt, also auch nicht beschränkt, aber nach unten beschränkt mit $\inf M_3 = 1$. Das Infimum 1 ist jedoch kein Element von M_3, sodass kein Minimum existiert.
- Es ist $M_4 = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \setminus M_3 = (-\infty, 0) \cup (0, 1]$. Damit ist M_4 nicht nach unten beschränkt, also auch nicht beschränkt, aber nach oben beschränkt mit
$$\sup M_4 = \max M_4 = 1.$$
- Die Menge M_5 ist die Lösungsmenge der Ungleichung
$$|x + 3| > |x - 2|.$$
Wir betrachten die Zerlegung $\mathbb{R} = (-\infty, -3) \cup [-3, 2) \cup [2, \infty)$:
  - Für $x \in (-\infty, -3)$ ist die Ungleichung äquivalent zu $-(x + 3) > -(x - 2)$, was sich (nach Addition von x auf beiden Seiten) als falsche Aussage $-3 > 2$ herausstellt; somit ist $M_5 \cap (-\infty, -3) = \emptyset$.
  - Für $x \in [-3, 2)$ ist die Ungleichung äquivalent zu $x + 3 > -(x - 2)$, was wiederum zu $x > -\frac{1}{2}$ äquivalent ist; somit haben wir $M_5 \cap [-3, 2) = (-\frac{1}{2}, 2)$.
  - Schließlich, für $x \in [2, \infty)$, stellt sich die Ungleichung als äquivalent zu $x + 3 > x - 2$ heraus, was (nach Subtraktion von x auf beiden Seiten) die wahre Aussage $3 > -2$ ergibt; somit haben wir $M_5 \cap [2, \infty) = [2, \infty)$.

  Zusammenfassend ergibt sich also $M_5 = \emptyset \cup (-\frac{1}{2}, 2) \cup [2, \infty) = (-\frac{1}{2}, \infty)$.
  Also ist M_5 nicht nach oben beschränkt, also auch nicht beschränkt, aber nach unten beschränkt mit $\inf M_5 = -\frac{1}{2}$. Das Infimum $-\frac{1}{2}$ liegt jedoch nicht in M_5, sodass kein Minimum existiert.

Aufgabe 3 (6 + 4 Punkte):

(a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die *Bernoullische Ungleichung*: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ gilt
$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

(b) Geben Sie für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ einen direkten Beweis der Bernoullischen Ungleichung mithilfe des binomischen Lehrsatzes.

Lösung:

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ die folgende Aussage:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad x \geq -1 \quad \Longrightarrow \quad (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Der *Induktionsanfang* $A(1)$ ist klar, da $(1+x)^1 = 1 + x = 1 + 1 \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ gilt.
Für den *Induktionsschritt* $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ machen wir die *Induktionsannahme*, dass $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits bewiesen ist, und verifizieren damit die *Induktionsbehauptung* $A(n+1)$. Hierzu überlegen wir uns, dass für alle reellen Zahlen $x \geq -1$

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= \underbrace{(1+x)}_{\geq 0}(1+x)^n \\ &\geq (1+x)(1+nx) \qquad \text{wegen } A(n) \\ &= 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + (n+1)x \end{aligned}$$

gilt, womit die Gültigkeit von $A(n+1)$ bewiesen ist.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Aussage $A(n)$ damit für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

(b) Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ erhalten wir mithilfe des binomischen Lehrsatzes

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} x + \underbrace{\binom{n}{2} x^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^n}_{\geq 0} \geq 1 + nx,$$

wobei wir verwendet haben, dass $\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!} = 1$ und $\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$.

Aufgabe 4 (2 + 3 + 5 Punkte): Wir betrachten die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, d. h. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) := \{A \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *überabzählbar* ist (d. h. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist nicht höchstens abzählbar unendlich). In der Vorlesung wurde bereits gezeigt, dass die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen überabzählbar ist. Diesen Beweis wollen wir imitieren. Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

(a) Begründen Sie, warum $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ keine endliche Menge sein kann.

(b) Zu jedem $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ assoziieren wir eine Funktion $f_A : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ durch die Vorschrift

$$f_A(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n \in A \\ 0, & \text{falls } n \notin A \end{cases}.$$

Erstellen Sie für jede der beiden Mengen $A = \{1,5,6\}$ und $A = \{n \mid n \text{ gerade}\}$ eine (aussagekräftige) Wertetabelle für die jeweilige Funktion f_A. Überlegen Sie sich anschließend, dass es umgekehrt zu jeder Funktion $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ eine Menge $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gibt, sodass $f = f_A$.

(c) Nehmen Sie an, dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ abzählbar ist, d. h. es gibt eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Konstruieren Sie mithilfe von Aufgabenteil (b) ein „Diagonalelement“ $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, welches garantiert nicht im Bild von φ auftaucht.

Lösung:

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gehört die Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ zu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Somit enthält $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ eine nicht-endliche Teilmenge, kann also selbst nicht endlich sein.

(b) Wir erstellen die Wertetabellen für $n \in \{1, 2, \dots, 10\}$. Für $A = \{1, 5, 6\}$ haben wir

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_A(n)$	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0

und für $A = \{n \mid n \text{ gerade}\}$ ergibt sich

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_A(n)$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

.

Für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ betrachten wir das Urbild $A := f^{-1}(\{1\}) \subseteq \mathbb{N}$. Also haben wir $f(n) = 1$ für alle $n \in A$ und ferner, weil f sonst nur den Wert 0 annehmen kann, auch $f(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus A$. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} f(n) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } n \in A \\ 0, & \text{falls } n \notin A \end{cases} \\ &= f_A(n) \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, also $f = f_A$. Wir sehen damit, dass Elemente von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ in Bijektion zu der Menge $\{f \mid f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}\}$ stehen:

$$\begin{aligned} \psi : \ \mathcal{P}(\mathbb{N}) &\longrightarrow \big\{f \bigm| f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}\big\} \\ A &\longmapsto f_A \\ f^{-1}(A) &\longleftarrow\!\shortmid f \end{aligned}$$

(c) Es sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ eine Bijektion. Wir setzen $A_n := \varphi(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und betrachten die zugehörigen Funktionen $f_{A_n} : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$. Wir imitieren nun das Diagonalargument aus dem Beweis der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$. Hierzu definieren wir eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ durch die Vorschrift

- $f(n) := 1$, falls $f_{A_n}(n) = 0$ und
- $f(n) := 0$, falls $f_{A_n}(n) = 1$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Die so konstruierte Funktion kann mit keiner der Funktionen f_{A_n}, $n \in \mathbb{N}$ übereinstimmen, weil f mindestens an der Stelle n einen anderen Wert als f_{A_n} annimmt. Somit taucht f nicht in der Liste $\{f_{A_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ auf.
Setzen wir $A := f^{-1}(\{1\})$, so ist $f = f_A$ nach (b), und weil f nicht in der Liste $\{f_{A_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ auftaucht, kann auch A nicht in der Liste $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ auftauchen. Somit ist $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ nicht im Bild von φ enthalten, was einen Widerspruch zur Bijektivität von φ darstellt. Demnach kann $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nicht abzählbar und nach (a) auch nicht endlich sein, ist also überabzählbar.

Bemerkung: Man beachte, dass A nach obiger Konstruktion gegeben ist durch $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin A_n\}$. Diese Menge kann man direkt (d. h. ohne den Weg über die assoziierten Funktionen f_{A_n}) aus den gegebenen Mengen A_n definieren und dann nachweisen, dass A nicht in der Liste $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ auftaucht. Auf diese Weise übersieht man jedoch die Analogie zum Beweis der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$.