Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Präsenzübungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Blatt 10 B
Lösungshinweise

Aufgabe 1: Es seien

$$\mathbf{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Orthonormalbasis $(\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)}, \mathbf{w}^{(3)}, \mathbf{w}^{(4)})$ von $\mathbb{R}^4$ mit der Eigenschaft

$$\operatorname{Spann}(\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)}, \mathbf{w}^{(3)}) = \operatorname{Spann}(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}).$$

Lösung: Es sei $V = \operatorname{Spann}(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)})$. Zunächst bestimmen wir $\dim V$. Hierzu seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Dann folgt aus der zweiten Gleichung $\alpha = -\gamma$. Einsetzen in die vierte Gleichung liefert $\beta = 0$, sodass wegen der dritten Gleichung $\gamma = 0$ und damit $\alpha = 0$. Die drei Vektoren sind also linear unabhängig und damit ist $\dim V = 3$.
Nun konstruieren wir mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren eine Orthonormalbasis von V. Es sei

$$\mathbf{w}^{(1)} = \frac{\mathbf{v}^{(1)}}{\|\mathbf{v}^{(1)}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Außerdem seien

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{w}}^{(2)} &= \mathbf{v}^{(2)} - \langle \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{w}^{(1)} \rangle \mathbf{w}^{(1)} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und

$$\mathbf{w}^{(2)} = \frac{\tilde{\mathbf{w}}^{(2)}}{\|\tilde{\mathbf{w}}^{(2)}\|} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

sowie

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{w}}^{(3)} &= \mathbf{v}^{(3)} - \langle \mathbf{v}^{(3)}, \mathbf{w}^{(1)} \rangle \mathbf{w}^{(1)} - \langle \mathbf{v}^{(3)}, \mathbf{w}^{(2)} \rangle \mathbf{w}^{(2)} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{18} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{9} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und

$$\mathbf{w}^{(3)} = \frac{\tilde{\mathbf{w}}^{(3)}}{\|\tilde{\mathbf{w}}^{(3)}\|} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist $(\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)}, \mathbf{w}^{(3)})$ eine Orthonormalbasis für V. Nun berechnen wir das orthogonale Komplement $V^\perp$. Es ist $\mathbf{x} \in V^\perp$ genau dann wenn $\langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = 0$ für alle $\mathbf{v} \in V$, d. h.

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{w}^{(1)} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}^{(2)} \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}^{(3)} \rangle = 0,$$

also

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_4 &= 0 && (1)\\ -x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 && (2)\\ -3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 &= 0. && (3) \end{aligned}$$

Aus Gleichung (2) folgt $x_2 = 4x_3 + x_4$. Einsetzen in Gleichung (3) liefert $-3x_1 + 21x_3 + 6x_4 = 0$, also $x_1 = 7x_3 + 2x_4$. Setzen wir dies wiederum in Gleichung (1) ein, so erhalten wir $18x_3 + 6x_4 = 0$, also $x_4 = -3x_3$ und damit $x_1 = x_3$ und $x_2 = x_3$. Ein Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ ist also genau dann Element von $V^\perp$, wenn er von der Form

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \\ -3x_3 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R},$$

ist.
Setzen wir

$$\tilde{\mathbf{w}}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}^{(4)} = \frac{\tilde{\mathbf{w}}^{(4)}}{\|\tilde{\mathbf{w}}^{(4)}\|} = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

so sind die Vektoren $\mathbf{w}^{(1)}$, $\mathbf{w}^{(2)}$, $\mathbf{w}^{(3)}$ und $\mathbf{w}^{(4)}$ linear unabhängig[1] und per Konstruktion ist $(\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)}, \mathbf{w}^{(3)}, \mathbf{w}^{(4)})$ eine Orthonormalbasis für $\mathbb{R}^4$.

Definition: Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Ist $(\mathbf{v}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in V, so sagen wir, dass die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \mathbf{v}^{(k)}$

- *konvergiert*, falls die Folge $(\mathbf{s}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ der durch $\mathbf{s}^{(m)} := \sum_{k=1}^m \mathbf{v}^{(k)}$ für $m \in \mathbb{N}$ definierten Partialsummen in V bezüglich $\|\cdot\|$ konvergiert. Wir schreiben dann

$$\sum_{k=1}^\infty \mathbf{v}^{(k)} := \lim_{m\to\infty} \mathbf{s}^{(m)}.$$

- *absolut konvergiert*, falls die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \|\mathbf{v}^{(k)}\|$ (als Reihe reeller Zahlen) konvergiert.

Aufgabe 2:

(a) Es sei $(\mathbf{x}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$, für die die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \mathbf{x}^{(k)}$ absolut konvergiert. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \mathbf{x}^{(k)}$ konvergiert.

---

[1] Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ gegeben, sodass $\lambda_1\mathbf{w}^{(1)} + \lambda_2\mathbf{w}^{(2)} + \lambda_3\mathbf{w}^{(3)} + \lambda_4\mathbf{w}^{(4)} = \mathbf{0}$. Wegen $\mathbf{w}^{(4)} \in V^\perp$ sehen wir damit, dass

$$\lambda_4 = \lambda_4\langle \mathbf{w}^{(4)}, \mathbf{w}^{(4)}\rangle = \langle \lambda_1\mathbf{w}^{(1)} + \lambda_2\mathbf{w}^{(2)} + \lambda_3\mathbf{w}^{(3)} + \lambda_4\mathbf{w}^{(4)}, \mathbf{w}^{(4)}\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{w}^{(4)}\rangle = 0,$$

weshalb $\lambda_1\mathbf{w}^{(1)} + \lambda_2\mathbf{w}^{(2)} + \lambda_3\mathbf{w}^{(3)} = \mathbf{0}$ gelten muss. Weil $\mathbf{w}^{(1)}$, $\mathbf{w}^{(2)}$ und $\mathbf{w}^{(3)}$ linear unabhängig sind, folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

(b) Gegeben seien $q \in (-1,1)$ und $\varphi \in [0,2\pi)$. Wir betrachten die Folge $(\mathbf{x}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^2$, die gegeben ist durch

$$\mathbf{x}^{(k)} := q^{k-1}\begin{pmatrix}\cos((k-1)\varphi)\\ \sin((k-1)\varphi)\end{pmatrix} \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}^{(k)}$ konvergiert.

(c) In der Situation von (b) betrachten wir nun speziell $q = \frac{1}{2}$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Veranschaulichen Sie $\mathbf{s}^{(1)}, \ldots, \mathbf{s}^{(5)}$ in einem Koordinatensystem. Berechnen Sie anschließend den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}^{(k)}$.

Lösung:

(a) Für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}^{(k)}$ bezeichnen wir mit $(\mathbf{s}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ die Folge der zugehörigen Partialsummen, d. h. $\mathbf{s}^{(m)} := \sum_{k=1}^{m} \mathbf{x}^{(k)}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wir schreiben

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{s}^{(m)} = \begin{pmatrix} s_1^{(m)} \\ \vdots \\ s_n^{(m)} \end{pmatrix}.$$

Für $j = 1, \ldots, n$ haben wir deshalb

$$s_j^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} x_j^{(k)} \qquad \text{für alle } m \in \mathbb{N},$$

sodass $(s_j^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ die Folge der Partialsummen der j-ten Komponentenfolge $(x_j^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(\mathbf{x}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ darstellt.

- *Schritt 1:* Wir fixieren $j \in \{1, \ldots, n\}$. Da $|x_j^{(k)}| \leq \|\mathbf{x}^{(k)}\|$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, liefert das Majorantenkriterium, dass mit $\sum_{k=1}^{\infty} \|\mathbf{x}^{(k)}\|$ auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |x_j^{(k)}|$ konvergent sein muss, d. h. die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_j^{(k)}$ ist absolut konvergent.
- *Schritt 2:* Aus der Vorlesung wissen wir, dass absolut konvergente Reihen reeller Zahlen konvergieren. Nach Schritt 1 ist somit jede der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} x_j^{(k)}$ für $j = 1, \ldots, n$ konvergent.
- *Schritt 3:* Definitionsgemäß sind Reihen reeller Zahlen konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen konvergiert. Aus Schritt 2 ergibt sich daher, dass jede der Folgen $(s_j^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ für $j = 1, \ldots, n$ konvergent ist mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_j^{(k)} = \lim_{m\to\infty} s_j^{(m)}.$$

- *Schritt 4:* Aus der Vorlesung ist bekannt, dass Folgen in $\mathbb{R}^n$ genau dann konvergent sind, wenn jede ihrer Komponentenfolgen konvergiert, und dass ihr Grenzwert in diesem Fall gerade der Vektor der Grenzwerte der Komponentenfolgen ist. Folglich ist nach unserem Resultat aus Schritt 3 auch die Folge $(\mathbf{s}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ konvergent und es gilt

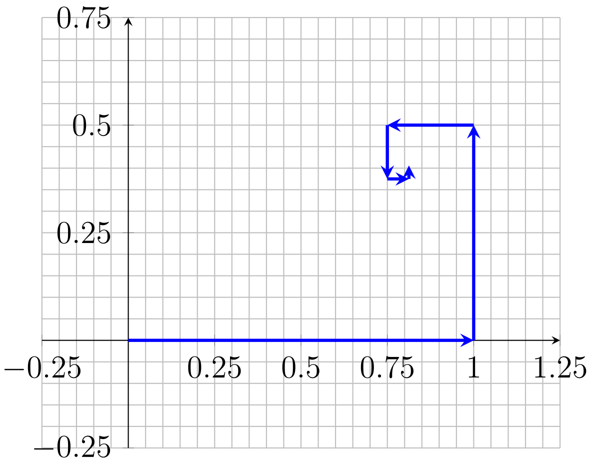
$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{s}^{(m)} = \begin{pmatrix} \lim_{m\to\infty} s_1^{(m)} \\ \vdots \\ \lim_{m\to\infty} s_n^{(m)} \end{pmatrix}.$$

- *Schritt 5:* Weil die Folge $(\mathbf{s}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ der Partialsummen der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{x}^{(k)}$ konvergiert, ist nach unserer Definition die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{x}^{(k)}$ konvergent in $\mathbb{R}^n$ und es gilt
$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{x}^{(k)} = \lim_{m\to\infty}\mathbf{s}^{(m)}.$$

Damit haben wir nicht nur die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{x}^{(k)}$ nachgewiesen, sondern sehen auch, dass
$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{x}^{(k)} = \lim_{m\to\infty}\mathbf{s}^{(m)} = \begin{pmatrix}\lim_{m\to\infty} s_1^{(m)}\\ \vdots \\ \lim_{m\to\infty} s_n^{(m)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{\infty} x_1^{(k)}\\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{\infty} x_j^{(k)}\end{pmatrix}.$$

(b) Nach (a) genügt der Nachweis, dass $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{x}^{(k)}$ absolut konvergent ist. Weil
$$\|\mathbf{x}^{(k)}\| = |q|^{k-1}\left\|\begin{pmatrix}\cos((k-1)\varphi)\\ \sin((k-1)\varphi)\end{pmatrix}\right\| = |q|^k\underbrace{\sqrt{\cos^2((k-1)\varphi)+\sin^2((k-1)\varphi)}}_{=1} = |q|^k$$
für alle $k\in\mathbb{N}$, folgt dies aus der Tatsache, dass die geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}|q|^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}|q|^k$ für $|q|<1$ konvergiert.

(c) In dem nachfolgenden Koordinatensystem sind die Vektoren $\mathbf{x}^{(1)},\dots,\mathbf{x}^{(5)}$ so eingezeichnet, dass die Spitze von $\mathbf{x}^{(j)}$ auf den Punkt zeigt, auf den auch die Spitze des Vektors $\mathbf{s}^{(j)}$ zeigt, wenn dieser im Ursprung des Koordinatensystems angesetzt wird.



Weil $\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{x}^{(k)}$ konvergiert, können wir die Reihe umschreiben als
$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{x}^{(k)} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\mathbf{x}^{(4\ell+1)}+\mathbf{x}^{(4\ell+2)}+\mathbf{x}^{(4\ell+3)}+\mathbf{x}^{(4\ell+4)}\right).$$

Für alle $\ell\in\mathbb{N}_0$ gilt nun
$$\mathbf{x}^{(4\ell+1)} = \frac{1}{2^{4\ell}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\qquad \mathbf{x}^{(4\ell+2)} = \frac{1}{2^{4\ell+1}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$
$$\mathbf{x}^{(4\ell+3)} = \frac{1}{2^{4\ell+2}}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\qquad\text{und}\qquad \mathbf{x}^{(4\ell+3)} = \frac{1}{2^{4\ell+3}}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}.$$

Deshalb ergibt sich

$$\mathbf{x}^{(4\ell+1)} + \mathbf{x}^{(4\ell+2)} + \mathbf{x}^{(4\ell+3)} + \mathbf{x}^{(4\ell+4)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{4\ell}} - \frac{1}{2^{4\ell+2}} \\ \frac{1}{2^{4\ell+1}} - \frac{1}{2^{4\ell+3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{4\ell+3}} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Mithilfe der Formel für die geometrische Reihe erhalten wir somit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \frac{1}{8} \Big(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{16^\ell} \Big) \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$