Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Klausur zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*

Wintersemester 2020/2021

Freitag, 12. 2. 2021, 10:15 – 12:15 Uhr

Lösungshinweise

Aufgabe 1 (6 + 4 Punkte):

(a) Es seien A, B und C Aussagen. Es gelte

$$w(A \Leftrightarrow B) = 1, \qquad w(A \wedge B) = 0 \qquad \text{und} \qquad w(\neg A \Rightarrow C) = 1.$$

Bestimmen Sie **mithilfe einer (aussagekräftigen) Wahrheitstafel** die Wahrheitswerte von A, B und C.

(b) Eine Studentin besitzt jeweils zwei Bücher zur Mathematik, Physik und Chemie, die sie gerne nebeneinander in ihr Bücherregal stellen möchte. Wie viele Möglichkeiten hat sie, wenn Bücher zum gleichen Fach nebeneinander stehen sollen?

Lösung:

(a) Wir erstellen die folgende Wahrheitstafel:

$w(A)$	$w(B)$	$w(C)$	$w(\neg A)$	$w(A \Leftrightarrow B)$	$w(A \wedge B)$	$w(\neg A \Rightarrow C)$
0	0	0	1	1	0	0
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1

Wir erkennen (siehe zweite Zeile), dass die in der Aufgabenstellung geforderten Wahrheitswerte einzig für $w(A) = 0$, $w(B) = 0$ und $w(C) = 1$ gelten.

(b) **Variante 1: Buch für Buch**
Für das erste Buch gibt es 6 Möglichkeiten, das zweite muss dann das andere zum gleichen Thema sein (1 Möglichkeit). Für das dritte Buch verbleiben 4 Möglichkeiten, das vierte muss dann erneut das andere zum gleichen Thema sein (1 Möglichkeit). Für das fünfte Buch verbleiben 2 Möglichkeiten, das sechste muss dann wiederum das andere zum gleichen Thema sein (1 Möglichkeit). Insgesamt: $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ Möglichkeiten.

Variante 2: Erst Fach, dann Buch

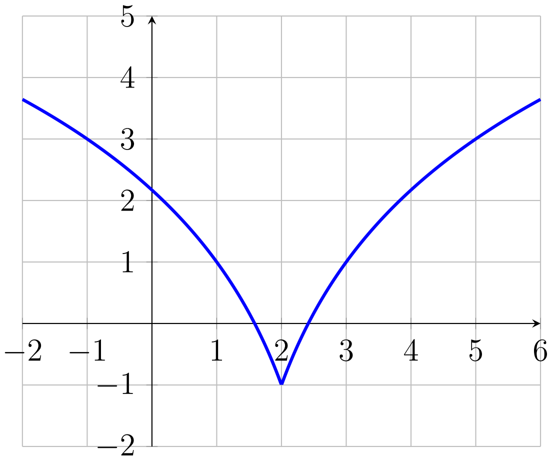
Das Einsortieren der Bücher entsprechend den Vorgaben erfolgt bei dieser Variante in zwei Schritten:

- Zunächst wird die Reihenfolge der Fächer Mathematik, Physik und Chemie festgelegt. Hierbei handelt es sich um eine Permutation einer dreielementigen Menge. Es gibt also $3! = 6$ Möglichkeiten.
- Danach wird in jedem der drei „thematischen Blöcke" die Reihenfolge der beiden jeweiligen Bücher festgelegt. Hierbei handelt es sich in jedem Block um eine Permutation einer zweielementigen Menge, für die es $2! = 2$ Möglichkeiten gibt. Bei drei Blöcken also insgesamt $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten.

Insgesamt gibt es also $6 \cdot 8 = 48$ mögliche Anordnungen der Bücher.

Aufgabe 2 (4 + 6 Punkte): Es bezeichne $\log_2$ den Logarithmus zur Basis 2. Die nachfolgende Grafik zeigt einen Ausschnitt des Graphen der Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 2\log_2(1 + |x-2|) - 1.$$



(a) Geben Sie ein möglichst großes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $4 \in I$ an, auf dem die Funktion f injektiv ist. Beweisen Sie, dass f auf dem von Ihnen bestimmten Intervall I tatsächlich injektiv ist.

(b) Begründen Sie, warum $f : I \to f(I)$ bijektiv ist, und bestimmen Sie anschließend das Bild $f(I)$ sowie die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$.

Lösung:

(a) $I = [2, \infty)$ erfüllt die beiden geforderten Bedingungen: Wir haben $4 \in I$ und f ist auf I injektiv.

Die Injektivität beweist man wie folgt: Sind $x_1, x_2 \in I$, dann gilt

$$\begin{aligned}
& & f(x_1) &= f(x_2) & \\
&\iff & 2\log_2(1+|x_1-2|)-1 &= 2\log_2(1+|x_2-2|)-1 & &\text{(nach Definition von } f\text{)}\\
&\iff & \log_2(1+|x_1-2|) &= \log_2(1+|x_2-2|) & \\
&\iff & 1+|x_1-2| &= 1+|x_2-2| & &\text{(da } \log_2 \text{ injektiv)}\\
&\iff & |x_1-2| &= |x_2-2| & \\
&\iff & x_1-2 &= x_2-2 & &\text{(wegen } x_1,x_2 \in I\text{)}\\
&\iff & x_1 &= x_2. &
\end{aligned}$$

(b) Nach (a) ist $f : I \to \mathbb{R}$ und damit insbesondere $f : I \to f(I)$ injektiv. Nach Definition von $f(I)$ ist die Abbildung $f : I \to f(I)$ zudem surjektiv. Zusammenfassend ergibt sich, dass $f : I \to f(I)$ injektiv und surjektiv, also bijektiv ist.
Der gezeigte Ausschnitt des Graphen legt die Vermutung nahe, dass $f(I) = [-1, \infty)$. Dies bestätigen wir wie folgt: Weil $\log_2(a) \geq 0$ für alle $a \in [1, \infty)$ gilt, haben wir $f(x) = 2\log_2(1 + |x-2|) - 1 \geq -1$ für alle $x \in I$, d. h. $f(I) \subseteq [-1, \infty)$. Sind umgekehrt $y \in [-1, \infty)$ und $x \in I$ gegeben, dann haben wir

$$
\begin{aligned}
& & y &= f(x) & & \\
&\iff & y &= 2\log_2(1+|x-2|) - 1 & & \text{(nach Definition von } f\text{)} \\
&\iff & \frac{1}{2}(y+1) &= \log_2(1+|x-2|) & & \\
&\iff & 2^{\frac{1}{2}(y+1)} &= 1 + |x-2| & & (\text{da } 2^{\log_2(a)} = a \text{ für } a \in [0,\infty)) \\
&\iff & 2^{\frac{1}{2}(y+1)} - 1 &= |x-2| & & \\
&\iff & 2^{\frac{1}{2}(y+1)} - 1 &= x - 2 & & (\text{wegen } x \in I) \\
&\iff & 2^{\frac{1}{2}(y+1)} + 1 &= x. & &
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Monotonie der Exponentialfunktion gilt $2^{\frac{1}{2}(y+1)} + 1 \geq 2^0 + 1 = 2$ und damit $x = 2^{\frac{1}{2}(y+1)} + 1 \in I$ für alle $y \in [-1, \infty)$, also nach obiger Äquivalenz $y = f(x)$. Demnach ist auch $[-1, \infty) \subseteq f(I)$.
Zusammenfassend ergibt sich $f(I) = [-1, \infty)$ sowie die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \; [-1, \infty) \longrightarrow [2, \infty), \quad y \longmapsto 2^{\frac{1}{2}(y+1)} + 1.$$

Aufgabe 3 (8 + 2 Punkte):

(a) Beweisen Sie **mittels vollständiger Induktion**, dass

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2.$$

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

Lösung:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ betrachten wir die Aussage

$$A(n) : \qquad \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

Induktionsanfang: Die Aussage $A(2)$ ist wahr, denn es gilt

$$\prod_{k=2}^{2} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2 \cdot 2}.$$

Induktionsschritt: Wir nehmen an (*Induktionsvoraussetzung*), dass die Aussage $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ richtig ist. Damit rechnen wir nun nach, dass auch die Aussage $A(n+1)$ (*Induktionsbehauptung*) wahr ist. Hierzu gehen wir wie folgt vor:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n+1}\Big(1-\frac{1}{k^2}\Big) &= \Big(\prod_{k=2}^{n}\Big(1-\frac{1}{k^2}\Big)\Big)\Big(1-\frac{1}{(n+1)^2}\Big) \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \frac{n+1}{2n}\Big(1-\frac{1}{(n+1)^2}\Big) \\
&= \frac{n+1}{2n}\,\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2} \\
&= \frac{n+1}{2n}\,\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \\
&= \frac{n+2}{2(n+1)} \\
&= \frac{(n+1)+1}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage $A(n)$ somit für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

(b) Wir verwenden die Formel aus Aufgabenteil (a). Demnach gilt gemäß den Grenzwertrechenregeln

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\Big(1-\frac{1}{k^2}\Big) &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{n}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\lim_{n\to\infty}1}_{=1}+\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}_{=0}\Big) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (4 + 3 + 3 Punkte): Gegeben sei das Polynom

$$p(x) := x^3 - 5x^2 - 4x + 20.$$

(a) Berechnen Sie **mithilfe des Horner-Schemas** die Werte von p an den beiden Stellen $x = 1$ und $x = 2$.

(b) Finden Sie **mittels Polynomdivision** ein Polynom q, sodass $p(x) = q(x)(x-2)$.

(c) Bestimmen Sie $\{x \in \mathbb{R} \mid p(x) = 0\}$.

Lösung:

(a) Für $x = 1$ erstellen wir das Horner-Schema

	1	−5	−4	20
+		1	−4	−8
1	1	−4	−8	**12**

und lesen an der markierten Stelle ab, dass $p(1) = 12$.

Für $x = 2$ erstellen wir das Horner-Schema

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -5 & -4 & 20 \\ + & & 2 & -6 & -20 \\ \hline 2 & 1 & -3 & -10 & \mathbf{0} \end{array}$$

und lesen an der markierten Stelle ab, dass $p(2) = 0$.

(b) Mithilfe der Polynomdivision

$$\begin{array}{l} \big(\;\; x^3 - 5x^2 \;\; - 4x + 20\big) : (x-2) = x^2 - 3x - 10 \\ \underline{-\,x^3 + 2x^2} \\ \qquad\;\; \underline{- 3x^2 \;\; - 4x} \\ \qquad\;\;\;\; 3x^2 \;\; - 6x \\ \qquad\qquad\quad \underline{- 10x + 20} \\ \qquad\qquad\qquad 10x - 20 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\; 0 \end{array}$$

erhalten wir, dass mit

$$q(x) = x^2 - 3x - 10$$

die gewünschte Faktorisierung $p(x) = q(x)(x-2)$ gilt.

(c) **Variante 1: quadratische Ergänzung**
Mittels quadratischer Ergänzung zerlegen wir das Polynom q aus Aufgabenteil (b) wie folgt:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 10 &= \left(x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 10 \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 10 \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} \\ &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \\ &= \left(x - \frac{3}{2} - \frac{7}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} + \frac{7}{2}\right) \\ &= (x-5)(x+2) \end{aligned}$$

Mit der Faktorisierung aus (b) erhalten wir damit

$$p(x) = q(x)(x-2) = (x+2)(x-2)(x-5)$$

als Faktorisierung von p, an der wir die Nullstellen -2, 2 und 5 ablesen. Also gilt

$$\{x \in \mathbb{R} \mid p(x) = 0\} = \{-2, 2, 5\}.$$

Variante 2: erneute Polynomdivision
Beispielsweise durch geschicktes Raten findet man $x = -2$ oder $x = 5$ als Nullstelle von q (die damit eine weitere Nullstelle von p ist) und bestimmt die jeweils fehlende Nullstelle von q (und p) als Nullstelle des Linearfaktors, der sich durch die Polynomdivision

$$
\begin{array}{rl}
\big(\quad x^2 - 3x - 10\big) : \big(x+2\big) = x - 5 & \\
\underline{-\,x^2 - 2x\qquad} & \\
-\,5x - 10 & \\
\underline{5x + 10} & \\
0 &
\end{array}
$$

bzw.

$$
\begin{array}{rl}
\big(\quad x^2 - 3x - 10\big) : \big(x-5\big) = x + 2 & \\
\underline{-\,x^2 + 5x\qquad} & \\
2x - 10 & \\
\underline{-\,2x + 10} & \\
0 &
\end{array}
$$

ergibt. Somit erhält man ebenfalls

$$\{x \in \mathbb{R} \mid p(x) = 0\} = \{-2, 2, 5\}.$$

Aufgabe 5 (5 + 5 Punkte): Gegeben sei die folgende Wertetabelle:

j	0	1	2
x_j	-1	0	1
y_j	-2	-1	1

Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p_2 zu den Stützstellen x_j und den Werten y_j für $j = 0, 1, 2$ mittels

(a) der Lagrangeschen Darstellung und

(b) der Newtonschen Darstellung.

Lösung:

(a) Für $x \in \mathbb{R}$ bestimmen wir zunächst die Lagrange-Polynome

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{x-0}{-1-0} \cdot \frac{x-1}{-1-1} = \frac{1}{2}x(x-1) &&= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x,\\
L_1(x) &= \frac{x+1}{0+1} \cdot \frac{x-1}{0-1} = -\,(x+1)(x-1) &&= -\,x^2 + 1,\\
L_2(x) &= \frac{x+1}{1+1} \cdot \frac{x-0}{1-0} = \frac{1}{2}(x+1)x &&= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x
\end{aligned}
$$

und damit $p_2(x)$ in der Lagrangeschen Darstellung

$$
\begin{aligned}
p_2(x) &= (-2) \cdot L_0(x) + (-1) \cdot L_1(x) + 1 \cdot L_2(x)\\
&= (-x^2 + x) + (x^2 - 1) + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right)\\
&= \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 1.
\end{aligned}
$$

(b) Wir berechnen mittels des folgenden Schemas die dividierten Differenzen:

$$
\begin{array}{c|c|c|c}
x_0 = -1 & y[x_0] = -2 & & \\
 & & y[x_0, x_1] = \frac{-1-(-2)}{0-(-1)} = 1 & \\
x_1 = 0 & y[x_1] = -1 & & y[x_0, x_1, x_2] = \frac{2-1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \\
 & & y[x_1, x_2] = \frac{1-(-1)}{1-0} = 2 & \\
x_2 = 1 & y[x_2] = 1 & &
\end{array}
$$

Damit erhalten wir die Newtonsche Darstellung

$$
\begin{aligned}
p_2(x) &= y[x_0] + y[x_0, x_1](x+1) + y[x_0, x_1, x_2](x+1)x \\
&= -2 + (x+1) + \frac{1}{2}(x+1)x \\
&= \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 1.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6 (5 + 5 Punkte): Wir betrachten die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegeben sind durch

$$
a_n := \frac{(-1)^n n(n+3)}{5+2n^2} \qquad \text{und} \qquad b_n := \sqrt{9n^2+1} - 3n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.
$$

Untersuchen Sie die beiden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Lösung:

- *Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.*

  Ansatz 1: Hilfsfolge
  Wir betrachten die Folge $(\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die definiert ist durch

  $$
  \tilde{a}_n := \frac{n(n+3)}{5+2n^2} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.
  $$

  Diese ist konvergent mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \tilde{a}_n = \frac{1}{2}$, denn

  $$
  \tilde{a}_n = \frac{n(n+3)}{5+2n^2} = \frac{1+\frac{3}{n}}{\frac{5}{n^2}+2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2},
  $$

  und besitzt ausschließlich von 0 verschiedene Folgenglieder. Offensichtlich gilt $a_n = (-1)^n \tilde{a}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
  Wäre die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent (mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$), so wäre nach den Grenzwertrechenregeln auch die Folge $(\frac{a_n}{\tilde{a}_n})_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent (mit Grenzwert $2a$). Von der alternierenden Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ wissen wir jedoch, dass sie divergiert. Dieser Widerspruch zeigt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

  Ansatz 2: konvergente Teilfolgen
  Wir wissen, dass für eine konvergente Folge auch jede Teilfolge konvergent gegen den gleichen Grenzwert ist. Wir betrachten die beiden Teilfolgen $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$. Wegen

  $$
  a_n = (-1)^n \frac{n(n+3)}{5+2n^2} = (-1)^n \frac{1+\frac{3}{n}}{\frac{5}{n^2}+2} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}
  $$

gilt

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = -\lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{3}{2k-1}}{\frac{5}{(2k-1)^2}+2} = -\frac{1}{2}$$

und

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{3}{2k}}{\frac{5}{(2k)^2}+2} = \frac{1}{2}.$$

Weil diese beiden Grenzwerte verschieden sind, muss $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent sein.

- *Die Folge* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist konvergent mit Grenzwert* 0.

  Für alle $n \in \mathbb{N}$ berechnen wir

$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt{9n^2+1} - 3n \\ &= \frac{(\sqrt{9n^2+1}-3n)(\sqrt{9n^2+1}+3n)}{\sqrt{9n^2+1}+3n} \\ &= \frac{(9n^2+1)-(3n)^2}{\sqrt{9n^2+1}+3n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{9n^2+1}+3n}, \end{aligned}$$

  womit wir sehen, dass

$$0 \le b_n \le \frac{1}{3n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

  Weil $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, liefert uns der Einschachtelungssatz, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist mit $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Aufgabe 7 (10 Punkte): Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n+1}(x-1)^n$$

konvergent? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Es handelt sich hierbei um die Potenzreihe mit der durch

$$a_n := \frac{2^{-n}}{n+1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

definierten Koeffizientenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.
Mithilfe der Formel von Cauchy-Hadamard berechnen wir nun den Konvergenzradius ρ dieser Potenzreihe. Zunächst stellen wir fest, dass

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{2^{-n}}{n+1}} = \frac{1}{2\sqrt[n]{n+1}} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Weil $1 \le n+1 \le 2n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, liefert uns die Monotonie der n-ten Wurzel

$$1 \le \sqrt[n]{n+1} \le \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da ferner

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} = \Big(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}\Big)\Big(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\Big) = 1 \cdot 1 = 1,$$

liefert uns der Einschachtelungssatz, dass auch

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1.$$

Folglich haben wir

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}} = \frac{1}{2}$$

und deshalb

$$\rho = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}} = 2.$$

Aus der Theorie der Potenzreihen wissen wir damit, dass unsere Potenzreihe auf $(1-2, 1+2) = (-1,3)$ konvergiert und auf $\mathbb{R} \setminus [-1,3]$ divergiert. Zu klären bleibt somit nur die Konvergenz in den Randpunkten des Konvergenzintervalls $x = -1$ und $x = 3$.

Für $x = -1$ vereinfacht sich die Potenzreihe gemäß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n+1}((-1)-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

zur alternierenden harmonischen Reihe, die nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert.

Für $x = 3$ vereinfacht sich die Potenzreihe gemäß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n+1}(3-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

zur harmonischen Reihe, von der wir aus der Vorlesung wissen, dass diese divergiert.

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n+1}(x-1)^n$ konvergiert also genau für $x \in [-1,3)$.

Aufgabe 8 (5 + 5 Punkte): In $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die Vektoren

$$\mathbf{v}^{(1)} := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}^{(2)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{v}^{(3)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Sind die Vektoren $\mathbf{v}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(2)}$ und $\mathbf{v}^{(3)}$ linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Bestimmen Sie **mittels des Gram-Schmidt-Verfahrens** eine Orthonormalbasis von $V := \mathrm{Spann}(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)})$.

Lösung:

(a) Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$\lambda_1 \mathbf{v}^{(1)} + \lambda_2 \mathbf{v}^{(2)} + \lambda_3 \mathbf{v}^{(3)} = \mathbf{0}$$

gegeben. Konkret bedeutet dies

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

was sich in äquivalenter Form als das folgende Gleichungssystem schreiben lässt:

$$\lambda_1 = 0 \tag{1}$$
$$-2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \tag{2}$$
$$-\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \tag{3}$$
$$\lambda_3 = 0 \tag{4}$$

Aus (1) und (4) folgt direkt $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_3 = 0$. Einsetzen in (2) bzw. (3) liefert unmittelbar $\lambda_2 = 0$.
Demnach sind die Vektoren $\mathbf{v}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(2)}$ und $\mathbf{v}^{(3)}$ linear unabhängig.

(b) Aus der $(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)})$ konstruieren wir uns eine Orthonormalbasis $(\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)}, \mathbf{w}^{(3)})$ von V wie folgt: Wir setzen zunächst

$$\tilde{\mathbf{w}}^{(1)} := \mathbf{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{w}^{(1)} := \frac{\tilde{\mathbf{w}}^{(1)}}{\|\tilde{\mathbf{w}}^{(1)}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}}^{(2)} &:= \mathbf{v}^{(2)} - \langle \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{w}^{(1)} \rangle \mathbf{w}^{(1)} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=-2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\mathbf{w}^{(2)} := \frac{\tilde{\mathbf{w}}^{(2)}}{\|\tilde{\mathbf{w}}^{(2)}\|} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Schließlich definieren wir

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}}^{(3)} &:= \mathbf{v}^{(3)} - \langle \mathbf{v}^{(3)}, \mathbf{w}^{(1)} \rangle \mathbf{w}^{(1)} - \langle \mathbf{v}^{(3)}, \mathbf{w}^{(2)} \rangle \mathbf{w}^{(2)} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=0} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{30} \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=-5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\mathbf{w}^{(3)} := \frac{\tilde{\mathbf{w}}^{(3)}}{\|\tilde{\mathbf{w}}^{(3)}\|} = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$