Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Präsenzübungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Blatt 9 A
Lösungshinweise

Aufgabe 1: Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit den Verknüpfungen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *Unterraum von V*, falls U versehen mit den auf U eingeschränkten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ zu einem Vektorraum wird.
Überzeugen Sie sich, dass eine Teilmenge $U \subseteq V$ genau dann ein Unterraum von V ist, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

(i) $\mathbf{0} \in U$

(ii) $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{v} + \mathbf{w} \in U$

(iii) $\mathbf{v} \in U, \alpha \in \mathbb{K} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \cdot \mathbf{v} \in U$

Lösung: Wir rufen uns die definierenden Eigenschaften eines Vektorraums in Erinnerung; siehe Definition 10.1 im Skript von Herrn Prof. Dr. Bildhauer. Damit sehen wir:

$\Rightarrow$: Ist $U \subset V$ ein Unterraum, so sind die Bedingungen (i), (ii) und (iii) offenbar erfüllt.

$\Leftarrow$: Seien die Bedingungen (i), (ii) und (iii) für $U \subseteq V$ vorausgesetzt. Zunächst stellen wir fest, dass sich die Verknüpfungen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{K} \times V \to K$ aufgrund von (ii) und (iii) zu wohldefinierten Abbildungen $+ : U \times U \to U$ und $\cdot : \mathbb{K} \times U \to U$ einschränken lassen. Wir zeigen nun, dass U ein Unterraum ist, indem wir für U versehen mit den so eingeschränkten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ die Bedingungen aus Definition 10.1 verifizieren:

- **$(U, +)$ ist eine kommutative Gruppe:**
  Aus Eigenschaft (iii) folgt $-\mathbf{u} = (-1) \cdot \mathbf{u} \in U$ für alle $\mathbf{u} \in U$. Da $\mathbf{0} \in U$ nach Eigenschaft (i) erfüllt ist und $(V, +)$ eine kommutative Gruppe ist, gilt dies auch für $(U, +)$ (die Rechenregeln *vererben* sich).
- **Es gelten die Assoziativ- und Distributivgesetze:**
  Da $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ für alle $\mathbf{v} \in V$, gilt auch $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ für alle $\mathbf{u} \in U \subseteq V$. Ebenso gilt $(\lambda\mu) \cdot \mathbf{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{u})$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $\mathbf{u} \in U \subseteq V$. Sind $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, so folgen wegen $U \subseteq V$ die Eigenschaften

  $$(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{u} = \lambda \cdot \mathbf{u} + \mu \cdot \mathbf{u} \qquad \text{und} \qquad \lambda \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{u} + \lambda \cdot \mathbf{v}$$

  ebenso aus den entsprechenden Assoziativ- und Distributivgesetzen für V.

Aufgabe 2:

(a) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig?

(b) Ist die Menge

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$?

Lösung:

(a) Zunächst bemerken wir, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $t = 1$ und

$$\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

für $t = 2$. Für diese Werte von t sind die drei Vektoren also trivialerweise linear abhängig.

Wir zeigen nun, dass die drei Vektoren für alle anderen Werte von t linear unabhängig sind. Es sei also $t \in \mathbb{R} \backslash \{1, 2\}$ fest gewählt. Wir nehmen an, dass $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ die Bedingung

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erfüllen. Wir erhalten daraus das lineare Gleichungssystem

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \tag{1}$$
$$\alpha + 2\beta + t\gamma = 0 \tag{2}$$
$$\alpha + 4\beta + t^2\gamma = 0. \tag{3}$$

Aus Gleichung (1) folgt $\alpha = -\beta - \gamma$ und Einsetzen in Gleichung (2) ergibt $\beta + (t - 1)\gamma = 0$, also $\beta = (1 - t)\gamma$ und somit $\alpha = -\beta - \gamma = (t - 2)\gamma$. Einsetzen beider Ergebnisse in Gleichung (3) liefert schließlich

$$(t-2)\gamma + 4(1-t)\gamma + t^2\gamma = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t^2 - 3t + 2)\gamma = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(t-1)(t-2)}_{\neq 0}\gamma = 0,$$

sodass $\gamma = 0$ und damit $\beta = \alpha = 0$ folgt. Die drei Vektoren sind daher für jede Wahl von $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ linear unabhängig.

Zusammenfassend sehen wir, dass die gegebenen Vektoren genau dann linear unabhängig sind, wenn $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

(b) Wegen $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin M$ stellt M nach dem in Aufgabe 1 formulierten Kriterium keinen Unterraum von $\mathbb{R}^3$ dar.

Aufgabe 3: Es seien $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie mit Hilfe der Vektorraumaxiome, dass die folgenden Aussagen für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und alle $\mathbf{v} \in V$ gelten.

(a) $\alpha \cdot \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(b) $\alpha \cdot (-\mathbf{v}) = (-\alpha) \cdot \mathbf{v} = -(\alpha \cdot \mathbf{v})$.

Lösung: Wir beziehen uns im Folgenden auf die Nummerierung der Vektorraumaxiome in Definition 10.1 im Skript von Herrn Prof. Dr. Bildhauer.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot \mathbf{0} &= \alpha \cdot \mathbf{0} + \mathbf{0} && \text{Definition 10.1 (i)} \\
&= \alpha \cdot \mathbf{0} + (\alpha \cdot \mathbf{0} + (-(\alpha \cdot \mathbf{0}))) && \text{Definition 10.1 (i)} \\
&= (\alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0}) + (-(\alpha \cdot \mathbf{0})) && \text{Definition 10.1 (i)} \\
&= \alpha \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) + (-(\alpha \cdot \mathbf{0})) && \text{Definition 10.1 (ii) (d)} \\
&= \alpha \cdot \mathbf{0} + (-(\alpha \cdot \mathbf{0})) && \text{Definition 10.1 (i)} \\
&= \mathbf{0} && \text{Definition 10.1 (i)}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
0 \cdot \mathbf{v} &= 0 \cdot \mathbf{v} + \mathbf{0} && \text{Definition 10.1 (i)} \\
&= 0 \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{v} + (-\mathbf{v})) && \text{Definition 10.1 (i)} \\
&= 0 \cdot \mathbf{v} + (1 \cdot \mathbf{v} + (-\mathbf{v})) && \text{Definition 10.1 (ii) (a)} \\
&= (0 \cdot \mathbf{v} + 1 \cdot \mathbf{v}) + (-\mathbf{v}) && \text{Definition 10.1 (i)} \\
&= (0 + 1) \cdot \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) && \text{Definition 10.1 (ii) (d)} \\
&= 1 \cdot \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) && \text{0 ist neutrales Element der Addition in } \mathbb{K} \\
&= \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) && \text{Definition 10.1 (ii) (a)} \\
&= \mathbf{0} && \text{Definition 10.1 (i)}
\end{aligned}$$

und damit

$$\alpha \cdot \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (-\mathbf{v}) &= \alpha \cdot (-\mathbf{v}) + \mathbf{0} && \text{Definition 10.1 (i)} \\
&= \alpha \cdot (-\mathbf{v}) + (\alpha \cdot \mathbf{v} + (-(\alpha \cdot \mathbf{v}))) && \text{Definition 10.1 (i)} \\
&= (\alpha \cdot (-\mathbf{v}) + \alpha \cdot \mathbf{v}) + (-(\alpha \cdot \mathbf{v})) && \text{Definition 10.1 (i)} \\
&= \alpha \cdot ((-\mathbf{v}) + \mathbf{v}) + (-(\alpha \cdot \mathbf{v})) && \text{Definition 10.1 (ii) (d))} \\
&= \alpha \cdot \mathbf{0} + (-(\alpha \cdot \mathbf{v})) && \text{Definition 10.1 (i)} \\
&= \mathbf{0} + (-(\alpha \cdot \mathbf{v})) && \text{Aufgabenteil (a)} \\
&= -(\alpha \cdot \mathbf{v}) && \text{Definition 10.1 (i)}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
(-\alpha) \cdot \mathbf{v} &= (-\alpha) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{0} && \text{Definition 10.1 (i)} \\
&= (-\alpha) \cdot \mathbf{v} + (\alpha \cdot \mathbf{v} + (-(\alpha \cdot \mathbf{v}))) && \text{Definition 10.1 (i)} \\
&= ((-\alpha) \cdot \mathbf{v} + \alpha \cdot \mathbf{v}) + (-(\alpha \cdot \mathbf{v})) && \text{Definition 10.1 (i)} \\
&= ((-\alpha) + \alpha) \cdot \mathbf{v} + (-(\alpha \cdot \mathbf{v})) && \text{Definition 10.1 (ii) (c)} \\
&= 0 \cdot \mathbf{v} + (-(\alpha \cdot \mathbf{v})) && \text{additives Inverses in } \mathbb{K} \\
&= \mathbf{0} + (-(\alpha \cdot \mathbf{v})) && \text{Aufgabenteil (a)} \\
&= -(\alpha \cdot \mathbf{v}) && \text{Definition 10.1 (i)}
\end{aligned}$$

und damit

$$\alpha \cdot (-\mathbf{v}) = (-\alpha) \cdot \mathbf{v} = -(\alpha \cdot \mathbf{v}).$$