Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Präsenzübungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Blatt 1 B
Lösungshinweise

Aufgabe 1:

(a) Es seien A, B und C beliebige Mengen. Zeigen Sie, dass

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C) \qquad \text{und} \qquad (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$$

(b) Es seien A_1, A_2 und B_1, B_2 beliebige Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie:

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$$
$$(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$$

Lösung: (a) Wir zeigen zunächst, dass $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (A \cup B) \times C \quad &\iff \quad x \in A \cup B \wedge y \in C \\
&\iff \quad (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C \\
&\iff \quad (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C) \\
&\iff \quad (x,y) \in A \times C \vee (x,y) \in B \times C \\
&\iff \quad (x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C)
\end{aligned}$$

Analog zeigen wir, dass $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (A \cap B) \times C \quad &\iff \quad x \in A \cap B \wedge y \in C \\
&\iff \quad (x \in A \wedge x \in B) \wedge y \in C \\
&\iff \quad (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in C) \\
&\iff \quad (x,y) \in A \times C \wedge (x,y) \in B \times C \\
&\iff \quad (x,y) \in (A \times C) \cap (B \times C)
\end{aligned}$$

(b) Die Identität $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$ ist richtig. Dies sehen wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
(x,y) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \quad &\iff \quad (x,y) \in A_1 \times B_1 \wedge (x,y) \in A_2 \times B_2 \\
&\iff \quad (x \in A_1 \wedge y \in B_1) \wedge (x \in A_2 \wedge y \in B_2) \\
&\iff \quad (x \in A_1 \wedge x \in A_2) \wedge (y \in B_1 \wedge y \in B_2) \\
&\iff \quad (x \in A_1 \cap A_2) \wedge (y \in B_1 \cap B_2) \\
&\iff \quad (x,y) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)
\end{aligned}$$

Die Aussage $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$ hingegen ist im Allgemeinen falsch. Als konkretes Gegenbeispiel wählen wir

$$A_1 = B_1 = [-1, 0] \qquad \text{und} \qquad A_2 = B_2 = [0, 1].$$

Dann ist nämlich

$$(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = ([-1, 0] \times [-1, 0]) \cup ([0, 1] \times [0, 1]),$$

wohingegen

$$(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) = [-1, 1] \times [-1, 1].$$

Es gilt jedoch immer die Inklusion $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \subseteq (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$.

Aufgabe 2: Es seien

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{\text{Hund}, \text{Katze}, \text{Maus}\}, \quad C = \{a, b, c, d\}, \quad D = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

(a) Wie viele Abbildungen $A \to B$ gibt es? Wie viele davon sind injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?

(b) Wie viele Abbildungen $A \to C$ gibt es? Wie viele davon sind injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?

(c) Wie viele Abbildungen $C \to B$ gibt es? Wie viele davon sind injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?

(d) Gibt es eine Bijektion $D \to \mathbb{N}$?

Lösung: Wir bemerken zunächst: Eine injektive Abbildung zwischen zwei gleichmächtigen endlichen Mengen ist automatisch surjektiv und damit bijektiv (evtl. als Zusatz in der Präsenzübung).

(a) Es gibt $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$ Abbildungen $A \to B$. Davon sind $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ Stück injektiv/surjektiv/bijektiv.

(b) Es gibt $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3 = 48$ Abbildungen $A \to C$. Davon sind $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Stück injektiv. Eine surjektive/bijektive Abbildung $A \to C$ kann es nicht geben, da A weniger Elemente als C hat.

(c) Es gibt $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$ Abbildungen $C \to B$. Davon sind $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 36$ Stück surjektiv. Eine injektive/bijektive Abbildung $C \to B$ kann es nicht geben, da C mehr Elemente als B hat.

(d) Eine Bijektion $D \to \mathbb{N}$ ist gegeben durch die Vorschrift $m \mapsto m/2$ (nachrechnen!).

Aufgabe 3: Es seien A und B beliebige Mengen, $X_1, X_2 \subseteq A$, $Y_1, Y_2 \subseteq B$ und $f\colon A \to B$ eine Abbildung. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$.

(b) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.

(c) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

(d) $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.

Hinweis: Für Teilmengen $X \subseteq A$ und $Y \subseteq B$ bezeichnen wir mit $f(X) := \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq B$ das Bild von X unter der Abbildung f und mit $f^{-1}(Y) := \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \subseteq A$ das Urbild von Y unter der Abbildung f.

Lösung: (a) Hier gilt lediglich die Teilmengenbeziehung

$$f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2),$$

wie folgendes Gegenbeispiel zeigt. Es seien $A = B = \mathbb{Z}$, $f(n) = n^2$, $X_1 = \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $X_2 = -\mathbb{N}_0 = \{-n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Dann ist

$$f(X_1) = f(X_2) = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$$

aber

$$f(X_1 \cap X_2) = f(\{0\}) = \{0\}.$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} f(X_1 \cup X_2) &= \{f(x) \mid x \in X_1 \cup X_2\} \\ &= \{f(x) \mid x \in X_1\} \cup \{f(x) \mid x \in X_2\} \\ &= f(X_1) \cup f(X_2). \end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) &= \{x \in A \mid f(x) \in Y_1 \cap Y_2\} \\ &= \{x \in A \mid f(x) \in Y_1\} \cap \{x \in A \mid f(x) \in Y_2\} \\ &= f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2). \end{aligned}$$

(d) Es gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) &= \{x \in A \mid f(x) \in Y_1 \cup Y_2\} \\ &= \{x \in A \mid f(x) \in Y_1\} \cup \{x \in A \mid f(x) \in Y_2\} \\ &= f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2). \end{aligned}$$

Aufgabe 4: Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv/surjektiv/bijektiv? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrabbildung.

(a) $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (n, m) \mapsto n + m,$

(b) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \dfrac{1 + 2x}{3x - 1},$

(c) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto n + 1,$

(d) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad n \mapsto n + 1,$

(e) $f\colon (0, \infty) \to (0, \infty), \quad x \mapsto \dfrac{1}{x^2}.$

Lösung: (a) Für alle $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gilt $f(n, m) = f(m, n)$, sodass f nicht injektiv ist. Außerdem ist $1 \notin f(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, sodass f auch nicht surjektiv ist.

(b) Bemerke zunächst, dass
$$f(x) = \frac{2}{3} + \frac{5}{3(3x-1)}$$
für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$. Nun seien $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$ mit $f(x) = f(y)$, also
$$\frac{5}{3(3x-1)} = \frac{5}{3(3y-1)} \Leftrightarrow 3x - 1 = 3y - 1 \Leftrightarrow x = y,$$
sodass f injektiv ist. Außerdem ist $5/3(3x-1) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$, sodass $2/3 \notin f(\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\})$ und damit ist f nicht surjektiv.

(c) Die Funktion f ist offensichtlich injektiv, wegen $1 \notin f(\mathbb{N})$ aber nicht surjektiv.

(d) Die Funktion f ist offensichtlich injektiv, und für $n \in \mathbb{Z}$ gilt $f(n-1) = n$, sodass f bijektiv mit Umkehrabbildung $m \mapsto m - 1$ ist.

(e) Für $x, y \in (0, \infty)$ gilt
$$x^2 = y^2 \Leftrightarrow |x| = |y| \Leftrightarrow x = y,$$
sodass f injektiv ist. Außerdem gilt $f(1/\sqrt{x}) = x$, sodass f bijektiv mit Umkehrabbildung $y \mapsto 1/\sqrt{y}$ ist.
(Alternativ: f ist auf $(0, \infty)$ streng monoton fallend).