Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Präsenzübungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Blatt 10 A
Lösungshinweise

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ gelten.

(a) $\langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2$

(b) $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\big(\sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big) + \|\mathbf{y}\|^2$
(verallgemeinerter Satz des Pythagoras bzw. verallgemeinerter Kosinussatz)

(c) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$
(Polarisationsformel)

(d) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2$
(Parallelogramm-Gleichung)

Lösung: Wir benutzen die Rechenregeln aus Definition 10.6 im Skript von Herrn Prof. Dr. Bildhauer sowie die Beziehung $\|\mathbf{v}\| = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle^{\frac{1}{2}}$ für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle \underbrace{-\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle}_{=0} - \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2.
\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle \\
&= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle \\
&= \|\mathbf{x}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \|\mathbf{y}\|^2,
\end{aligned}$$

womit die erste der behaupteten Identitäten bewiesen ist. Weil wir nach Definition des Schnittwinkels $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\big(\sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})\big)$ umschreiben können, erhalten wir daraus die zweite Identität

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2.$$

(c) Indem wir die Formel aus Teil (b) auf $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ bzw. $\mathbf{x}$ und $-\mathbf{y}$ anwenden, erhalten wir

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \tag{1}$$

und

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, -\mathbf{y}\rangle + \|-\mathbf{y}\|^2 \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \|\mathbf{y}\|^2, \end{aligned} \tag{2}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass $\langle \mathbf{x}, -\mathbf{y}\rangle = -\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ und $\|-\mathbf{y}\| = \|\mathbf{y}\|$ gilt. Subtraktion der ersten dieser Gleichungen (1) von der zweiten (2) liefert schließlich die behauptete Formel

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle.$$

(d) Addieren wir die Identitäten (1) und (2) aus Aufgabenteil (b), so ergibt sich wie gewünscht

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2.$$

Aufgabe 2: Betrachten Sie den aus der Vorlesung bekannten $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$V := \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R}\}$$

aller reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ mit den punktweise definierten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$.

(a) Für $m \in \mathbb{N}$ seien m paarweise verschiedene Zahlen $s_1, ..., s_m \in [0,1]$ gegeben. Wir definieren Funktionen $f_1, \dots, f_m : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f_j(x) := \begin{cases} 1, & \text{wenn } x = s_j, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für $j = 1, \dots, m$. Zeigen Sie, dass $f_1, \dots, f_m \in V$ linear unabhängig sind.

(b) Was kann man über die Dimension des Vektorraumes V aussagen?

(c) Ist durch $\langle f, g\rangle := f(0)g(0)$ ein Skalarprodukt auf V definiert?

Lösung:

(a) Seien $s_1, \dots, s_m \in [0,1]$ paarweise verschieden. Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ gegeben, sodass

$$\lambda_1 \cdot f_1 + \dots + \lambda_m \cdot f_m = \mathbf{0},$$

wobei der Nullvektor $\mathbf{0} \in V$ nichts anderes als die Nullfunktion $\mathbf{0} : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$ ist. Da Addition $+$ und Skalarmultiplikation $\cdot$ punktweise definiert sind, ergibt die obige Relation

$$\lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_m f_m(x) = \big(\lambda_1 \cdot f_1 + \dots + \lambda_m \cdot f_m\big)(x) = \mathbf{0}(x) = 0 \tag{3}$$

für alle $x \in [0,1]$.
Wir fixieren $1 \le j \le m$ und wenden (3) auf $x = s_j$ an; dies liefert

$$\lambda_1 f_1(s_j) + \cdots + \lambda_m f_m(s_j) = 0.$$

Weil $s_1, \ldots, s_m \in [0,1]$ paarweise verschieden sind, haben wir

$$f_i(s_j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases} \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, m.$$

Somit schließen wir, dass

$$\lambda_j = \lambda_j f_j(s_j) = \lambda_1 f_1(s_j) + \cdots + \lambda_m f_m(s_j) = 0.$$

Da dies für $j = 1, \ldots, m$ gilt, folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$, d. h. $f_1, \ldots, f_m$ sind linear unabhängig.

(b) Sei $m \in \mathbb{N}$. Nach Teil (b) sind die zu den Zahlen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{m} \in [0,1]$ assoziierten Funktionen $f_1, \ldots, f_m$ linear unabhängig. Da $m \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben war, besitzt V beliebig große Familien linear unabhängiger Vektoren. Damit ist V nicht endlichdimensional.

(c) Die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}, \quad (f,g) \longmapsto f(0)g(0)$$

definiert kein Skalarprodukt auf V, denn der Vektor

$$f \colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

ist ungleich dem Nullvektor, aber es gilt

$$\langle f, f \rangle = f(0)f(0) = 0.$$