Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Präsenzübungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Blatt 2 A
Lösungshinweise

Aufgabe 1: Es seien A, B und C beliebige Mengen und $g\colon A \to B$, $f\colon B \to C$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Ist $f \circ g$ injektiv, so ist g injektiv.

(b) Sind f und $f \circ g$ bijektiv, so ist g bijektiv.

Lösung: (a) Es seien $x, y \in A$ mit $g(x) = g(y)$. Dann gilt auch $f(g(x)) = f(g(y))$ und da nach Voraussetzung $f \circ g$ injektiv ist, folgt $x = y$, sodass g injektiv ist.

(b) Sind f und $f \circ g$ bijektiv, so existieren definitionsgemäß Umkehrabbildungen

$$f^{-1}\colon C \to B, \quad (f \circ g)^{-1}\colon C \to A$$

mit $f^{-1}(f(b)) = b$ für alle $b \in B$ und $(f \circ g)^{-1}((f \circ g)(a)) = a$ für alle $a \in A$. Es ist also

$$g(a) = f^{-1}(f(g(a))) = \big(f^{-1} \circ (f \circ g)\big)(a),$$

sodass g umkehrbar (und damit bijektiv) ist mit

$$g^{-1}(b) = \big((f \circ g)^{-1} \circ f\big)(b).$$

Aufgabe 2: Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

(a) $n! \geq 2^n$ für alle $n \geq 4$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \binom{k}{2} = \binom{n}{3}$ für alle $n \geq 3$.

(c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (**Hinweis:** Es gilt $2ab \leq a^2 + b^2$ für alle $a, b \geq 0$.)

(e) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $7^{2n-1} - 5^{2n-1} + 4$ durch 6 teilbar.

Lösung: (a) Es sei $A(n)$ die Aussage

$$n! \geq 2^n.$$

Induktionsanfang: (Beweis von $A(4)$)
Es ist

$$4! = 24 \geq 16 = 2^4,$$

sodass $A(4)$ richtig ist.
Induktionsschritt: ($A(n) \Rightarrow A(n+1)$)
Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$. Wir beweisen, dass die **Induktionsvoraussetzung**

$$A(n)\colon \quad n! \geq 2^n$$

die **Induktionsbehauptung**

$$A(n+1)\colon \quad (n+1)! \geq 2^{n+1}$$

impliziert. Es gilt

$$(n+1)! = (n+1)n! \overset{I.V.}{\geq} \underbrace{(n+1)}_{\geq 5} 2^n \geq 2^{n+1}.$$

Damit ist $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gezeigt.

(b) Es sei $A(n)$ die Aussage

$$\sum_{k=2}^{n-1} \binom{k}{2} = \binom{n}{3}.$$

Induktionsanfang: (Beweis von $A(3)$)
Es ist

$$\sum_{k=2}^{2} \binom{k}{2} = \binom{2}{2} = 1 = \binom{3}{3},$$

sodass $A(3)$ richtig ist.
Induktionsschritt: ($A(n) \Rightarrow A(n+1)$)
Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Wir beweisen, dass die **Induktionsvoraussetzung**

$$A(n)\colon \quad \sum_{k=2}^{n-1} \binom{k}{2} = \binom{n}{3}$$

die **Induktionsbehauptung**

$$A(n+1)\colon \quad \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$$

impliziert. Mit der aus der Vorlesung bekannten Rekursionsformel

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

erhalten wir

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \sum_{k=2}^{n-1} \binom{k}{2} + \binom{n}{2} \overset{I.V.}{=} \binom{n}{3} + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}.$$

Damit ist $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gezeigt.

(c) Es sei $A(n)$ die Aussage

$$\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Induktionsanfang: (Beweis von $A(1)$)
Es ist

$$\prod_{k=1}^{1}(2k-1) = 1 = \frac{2}{2} = \frac{(2\cdot 1)!}{2^1 \cdot 1!}$$

sodass $A(1)$ richtig ist.
Induktionsschritt: $(A(n) \Rightarrow A(n+1))$
Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir beweisen, dass die **Induktionsvoraussetzung**

$$A(n)\colon \quad \prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

die **Induktionsbehauptung**

$$A(n+1)\colon \quad \prod_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \frac{(2(n+1))!}{2^{n+1}(n+1)!}$$

impliziert. Es gilt

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \prod_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot(2n+1) \\
&= \frac{(2n)!}{2^n n!}\cdot(2n+1) \qquad \text{(I.V.)} \\
&= \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{2^n n!(2n+2)} \\
&= \frac{(2(n+1))!}{2^{n+1}(n+1)!}.
\end{aligned}$$

Damit ist $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gezeigt.

(d) Es sei $A(n)$ die Aussage

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}.$$

Induktionsanfang: (Beweis von $A(1)$)
Es ist

$$\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{1} = 1 < 2 = 2\sqrt{1}$$

sodass $A(1)$ richtig ist.
Induktionsschritt: $(A(n) \Rightarrow A(n+1))$
Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir beweisen, dass die **Induktionsvoraussetzung**

$$A(n)\colon \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$$

die **Induktionsbehauptung**

$$A(n+1): \quad \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n+1}$$

impliziert. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&< 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} && \text{(I.V.)} \\
&= \frac{2\sqrt{n}\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}} \\
&\leq \frac{n+n+1+1}{\sqrt{n+1}} && \text{(Hinweis)} \\
&= \frac{2(n+1)}{\sqrt{n+1}} \\
&= 2\sqrt{n+1}.
\end{aligned}$$

Damit ist $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gezeigt.

(e) Es sei $A(n)$ die Aussage

$$6 \mid 7^{2n-1} - 5^{2n-1} + 4.$$

Induktionsanfang: (Beweis von $A(1)$)
Es ist

$$7^1 - 5^1 + 4 = 6$$

durch 6 teilbar, sodass $A(1)$ richtig ist.
Induktionsschritt: ($A(n) \Rightarrow A(n+1)$)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir beweisen, dass die **Induktionsvoraussetzung**

$$A(n): \quad 6 \mid 7^{2n-1} - 5^{2n-1} + 4$$

die **Induktionsbehauptung**

$$A(n+1): \quad 6 \mid 7^{2n+1} - 5^{2n+1} + 4$$

impliziert. Es gilt

$$\begin{aligned}
7^{2n+1} - 5^{2n+1} + 4 &= 49 \cdot 7^{2n-1} - 25 \cdot 5^{2n-1} + 4 \\
&= 49 \cdot (7^{2n-1} - 5^{2n-1} + 4) + (49-25) \cdot 5^{2n-1} - (49-1) \cdot 4 \\
&= 49 \cdot (7^{2n-1} - 5^{2n-1} + 4) + 24 \cdot (5^{2n-1} - 8).
\end{aligned}$$

Da 24 durch 6 teilbar ist und nach Induktionsvoraussetzung $7^{2n-1} - 5^{2n-1} + 4$ durch 6 teilbar ist, folgt dass auch $7^{2n+1} - 5^{2n+1} + 4$ durch 6 teilbar ist. Damit ist $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ gezeigt.