Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Präsenzübungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Blatt 8 B
Lösungshinweise

Aufgabe 1: Wir betrachten die Funktion

$$f:\ (-\infty,1) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Unser Ziel ist es, die Potenzreihendarstellung von f um den Punkt 0 zu bestimmen. Konkret wollen wir zeigen, dass

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} x^n \qquad \text{für alle } x \in (-1,1) \tag{1}$$

gilt. Hierzu gehen wir wie folgt vor:

(a) Berechnen Sie mittels des Quotientenkriteriums den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} x^n$$

(b) Beweisen Sie mithilfe des Cauchy-Produkts für Reihen, dass für alle $x \in (-1,1)$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} x^n\right)^2 = \frac{1}{1-x}.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} = 4^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(c) Folgern Sie die Gültigkeit von (1).

Hinweis: Untersuchen Sie die Fälle $x \geq 0$ und $x < 0$ getrennt. Nutzen Sie im Fall $x < 0$ die Monotonie der Folge $(\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ aus.

Lösung:

(a) Wir betrachten die durch $a_n := \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$ für $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ haben wir

$$\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\,\frac{(2(n+1))!4^n(n!)^2}{4^{n+1}((n+1)!)^2(2n)!} = |x|\,\frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2} = |x|\,\frac{2+\frac{1}{n}}{2(1+\frac{1}{n})} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} |x|,$$

womit uns das Quotientenkriterium liefert, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} x^n$ für $|x| < 1$ konvergiert und für $|x| > 1$ divergiert. Folglich ist $\rho = 1$ der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} x^n$.

(b) Für $x \in (-1, 1)$ ist die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut konvergent. Das Cauchy-Produkt dieser Reihe mit sich selbst ist also

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} (a_k x^k)(a_{n-k} x^{n-k})\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\Big) x^n,$$

wobei nach der im Hinweis angegebenen Formel

$$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Somit ist das oben berechnete Cauchy-Produkt nichts anderes als die geometrische Reihe, d. h.

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

(c) Wir zeigen zunächst, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \geq 0$ für alle $x \in (-1, 1)$ gilt. Für $x \in [0, 1)$ ist dies offensichtlich. Für $x \in (-1, 0)$ müssen wir hingegen genauer abschätzen, um $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \geq 0$ zu beweisen (wobei der folgende Beweis auch im Fall $x \geq 0$ funktioniert). Hierzu nutzen wir die (absolute) Konvergenz der Reihe aus, um diese gemäß[1]

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{m=0}^{\infty} (a_{2m} x^{2m} + a_{2m+1} x^{2m+1}) = \sum_{m=0}^{\infty} (a_{2m} + x a_{2m+1}) x^{2m}$$

umschreiben zu können. Weil $x^{2m} \geq 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$, genügt es also zu zeigen, dass $a_{2m} + x a_{2m+1} \geq a_{2m} - a_{2m+1} \geq 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt. Hierzu überlegen wir uns, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist. In der Tat sehen wir wie in (a), dass

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2(n+1))!4^n(n!)^2}{4^{n+1}((n+1)!)^2(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2} \leq 1$$

und somit $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.
Folglich ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \geq 0$ für alle $x \in (-1, 1)$, weshalb sich die Gültigkeit von (1) durch Anwenden der Quadratwurzel auf die in (b) bewiesene Identität ergibt.

Aufgabe 2: Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$. Wir nennen

- eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ *beschränkt*, falls es eine reelle Zahl $M \geq 0$ gibt, sodass $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in U$ gilt.

[1] Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe reeller Zahlen, dann ist definitionsgemäß die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ihrer Partialsummen $s_k := \sum_{n=0}^{k} a_n$ konvergent. Insbesondere konvergiert die Teilfolge $(s_{2\ell+1})_{\ell\in\mathbb{N}_0}$ gegen den gleichen Grenzwert, wobei $s_{2\ell+1} = \sum_{n=0}^{2\ell+1} a_n = \sum_{m=0}^{\ell} (a_{2m} + a_{2m+1})$ für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$. Weil dies gerade die Folge der Partialsummen der Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} (a_{2m} + a_{2m+1})$ ist, sehen wir, dass auch die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} (a_{2m} + a_{2m+1})$ konvergiert und dass $\sum_{m=0}^{\infty} (a_{2m} + a_{2m+1}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ gilt.

- eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : U \to \mathbb{R}$ *gleichmäßig* beschränkt, falls es eine reelle Zahl $M \geq 0$ gibt, sodass $|f_n(x)| \leq M$ für alle $x \in U$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Es sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von beschränkten Funktionen $f_n : U \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass die Grenzfunktion f beschränkt und die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt sind.

Lösung:

(i) Wir zeigen zunächst, dass f beschränkt sein muss. Hierzu gehen wir wie folgt vor. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf U gegen f konvergiert, finden wir zu $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $|f(x) - f_n(x)| < 1$ für alle $x \in U$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt; insbesondere haben wir also $|f(x) - f_N(x)| < 1$ für alle $x \in U$. Da f_N nach Voraussetzung beschränkt ist, gibt es eine reelle Zahl $M \geq 0$, sodass $|f_N(x)| \leq M$ für alle $x \in U$ gilt. Mit der Dreiecksungleichung ergibt sich deshalb, dass

$$|f(x)| \leq |(f(x) - f_N(x)) + f_N(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| < 1 + M$$

für alle $x \in U$. Folglich ist f auf U beschränkt.

(ii) Da f nach (i) beschränkt ist, gibt es eine reelle Zahl $M \geq 0$ (nämlich $1 + M$ in der Notation von (i), was wir der Einfachheit halber hier zu M umbenennen), sodass $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in U$ gilt. Wie in (i) finden wir wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|f(x) - f_n(x)| < 1$ für alle $x \in U$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ erfüllt ist. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ erhalten wir wieder mit der Dreiecksungleichung, dass

$$|f_n(x)| = |(f_n(x) - f(x)) + f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \leq 1 + M$$

für alle $x \in U$ gilt. Für $n = 1, \ldots, N-1$ gibt es, da die Funktion f_n nach Voraussetzung beschränkt ist, eine reelle Zahl $M_n \geq 0$, sodass $|f_n(x)| \leq M_n$ für alle $x \in U$. Wir setzen nun

$$\tilde{M} := \max\{M_1, \ldots, M_{N-1}, M+1\}.$$

Dann gilt $|f_n(x)| \leq \tilde{M}$ für alle $x \in U$ und jedes $n \in \mathbb{N}$, d. h. die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gleichmäßig beschränkt.