Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Blatt 2
Lösungshinweise

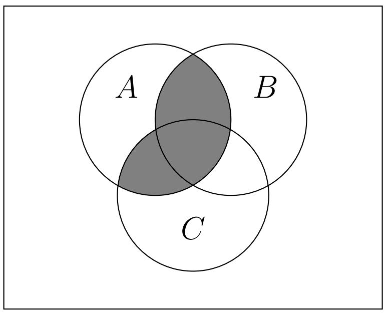
Aufgabe 1 (5 + 5 Punkte): Es seien A, B und C beliebige Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

(b) $A \cap (B \cup C) = A \cup (B \cap C)$.

Zeichnen Sie dabei zunächst geeignete Venn-Diagramme.

Lösung: (a) Diese Aussage ist richtig. Wir veranschaulichen die Situation mit dem folgenden Venn-Diagramm:

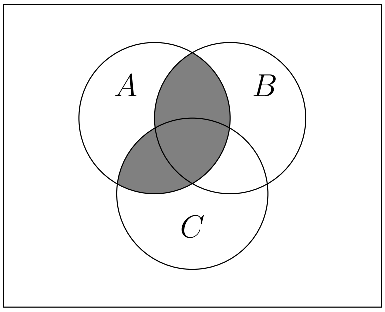


$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

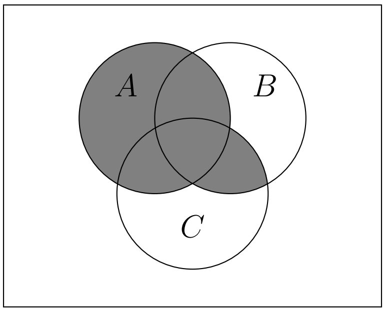
Den formalen Beweis dieser Aussage erbringen wir wie folgt. Es gilt:

$$\begin{aligned}
& x \in A \cap (B \cup C) \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \wedge x \in (B \cup C) \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\
\Leftrightarrow\ & (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \\
\Leftrightarrow\ & x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}$$

(b) Diese Aussage ist im Allgemeinen falsch. Wir veranschaulichen die Situation mit den folgenden Venn-Diagrammen:



$A \cap (B \cup C)$



$A \cup (B \cap C)$

Wir geben ein einfaches Gegenbeispiel: Für die Mengen

$$A = \{1\}, \qquad B = \{1, 2\}, \qquad C = \{1, 2, 3\}.$$

gilt

$$A \cap (B \cup C) = \{1\} \cap (\{1, 2\} \cup \{1, 2, 3\}) = \{1\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1\}$$

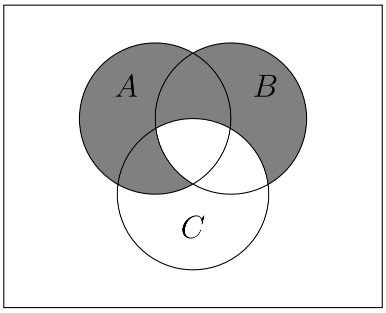
wohingegen

$$A \cup (B \cap C) = \{1\} \cup (\{1, 2\} \cap \{1, 2, 3\}) = \{1\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2\}.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte): Es seien A, B und C beliebige Mengen. Verdeutlichen Sie die folgende Beziehung zunächst anhand eines Venn-Diagramms und geben Sie anschließend einen formalen Beweis:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (B \cap C).$$

Lösung: Gegeben seien drei Mengen A, B und C. Wir stellen die Aussage in dem folgenden Venn-Diagramm dar:



$(A \setminus B) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (B \cap C)$

Den formalen Beweis erbringen wir in zwei Schritten:

"$\subseteq$": Es sei zunächst $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$. Dann ist (genau) eine der folgenden Aussagen wahr:

(1) $x \in A$ und $x \notin B$;
(2) $x \in B$ und $x \notin C$.

Offensichtlich gilt in jedem dieser Fälle $x \in A \cup B$. Falls nun (1) wahr ist, dann gilt $x \notin B$ und insbesondere $x \notin B \setminus C$, also $x \in (A \cup B) \setminus (B \cap C)$. Tritt hingegen der Fall (2) ein, so gilt $x \notin C$ und insbesondere $x \notin B \cap C$, also ebenfalls $x \in (A \cup B) \setminus (B \cap C)$.

"$\supseteq$": Nun sei umgekehrt $x \in (A \cup B) \setminus (B \cap C)$ gegeben. Wir unterscheiden die beiden Fälle $x \in B$ und $x \notin B$. Ist $x \in B$, so muss $x \notin C$ und damit $x \in B \setminus C$ gelten. Ist hingegen $x \notin B$, dann muss wegen $x \in A \cup B$ bereits $x \in A \setminus B$ gelten. Demnach haben wir in jedem der beiden Fälle $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.

Alternativ: Wir setzen $X := A \cup B \cup C$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&(A \cup B) \setminus (B \cap C) \\
&= (A \cup B) \cap \big(X \setminus (B \cap C)\big) \\
&= (A \cup B) \cap \big((X \setminus B) \cup (X \setminus C)\big) \\
&= \big((A \cup B) \cap (X \setminus B)\big) \cup \big((A \cup B) \cap (X \setminus C)\big) \\
&= \Big(\underbrace{\big(A \cap (X \setminus B)\big)}_{=A\setminus B} \cup \underbrace{\big(B \cap (X \setminus B)\big)}_{=\emptyset}\Big) \cup \Big(\underbrace{\big(A \cap (X \setminus C)\big)}_{A\setminus C} \cup \underbrace{\big(B \cap (X \setminus C)\big)}_{=B\setminus C}\Big) \\
&= (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \\
&= (A \setminus B) \cup (B \setminus C),
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass

$$A \setminus C \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus C).$$

Dies wiederum ergibt sich aus der Zerlegung $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, denn damit ist

$$\begin{aligned}
A \setminus C &= A \cap (X \setminus C) \\
&= \big((A \setminus B) \cup (A \cap B)\big) \cap (X \setminus C) \\
&= \underbrace{\big((A \setminus B) \cap (X \setminus C)\big)}_{\subseteq A\setminus B} \cup \underbrace{\big((A \cap B) \cap (X \setminus C)\big)}_{\subseteq B\cap(X\setminus C)=B\setminus C} \\
&= (A \setminus B) \cup (B \setminus C).
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (4 × 1 + 3 × 2 Punkte):

(a) Wie betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 3 - (x-1)^2.$$

Finden Sie jeweils Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$, sodass f eine Abbildung $f : A \to B$ liefert, die

(i) surjektiv aber nicht injektiv ist;
(ii) injektiv aber nicht surjektiv ist;
(iii) bijektiv ist;
(iv) weder injektiv noch surjektiv ist.

(b) Es seien $g\colon X \to Y$ und $f\colon Y \to Z$ Abbildungen. Begründen oder widerlegen Sie:

(i) g, f bijektiv $\quad\Longrightarrow\quad f \circ g$ bijektiv;
(ii) $f \circ g$ surjektiv $\quad\Longrightarrow\quad f$ surjektiv;
(iii) g injektiv, $f \circ g$ bijektiv $\quad\Longrightarrow\quad f$ injektiv.

Lösung: (a) Die nachfolgend angegebenen Mengen A und B erfüllen die jeweils gestellten Bedingungen:

(i) $A = \mathbb{R}$, $B = (-\infty, 3]$.
(ii) $A = [1, \infty)$, $B = \mathbb{R}$.
(iii) $A = [1, \infty)$, $B = (-\infty, 3]$.
(iv) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$.

(b) Hier argumentieren wir wie folgt:

(i) Man argumentiere mit den Eigenschaften „injektiv” und „surjektiv” oder wegen der Existenz von f^{-1} und g^{-1}

$$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = \mathrm{id}, \quad \text{d. h.} \quad (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

(ii) Dies folgt direkt aus $\mathrm{Bild}(f \circ g) \subset \mathrm{Bild}(f)$.

(iii) Man betrachte beispielsweise die injektive Funktion

$$g\colon \{1, 2\} \to \{1, 2, 3\} \qquad \text{mit } g(1) = 1,\ g(2) = 2$$

sowie

$$f\colon \{1, 2, 3\} \to \{1, 2\} \qquad \text{mit } f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(3) = 1.$$

Es ist

$$f \circ g\colon \{1, 2\} \to \{1, 2\}, \quad (f \circ g)(1) = 1, \quad (f \circ g)(2) = 2,$$

bijektiv, die Funktion f ist aber nicht injektiv.

Aufgabe 4 (3 + 3 + 4 Punkte): Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

(a) Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist gleich n^2, d. h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2.$$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+1} = \frac{2}{n^2 + n}.$$

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $8^n - 1$ durch 7 teilbar.

Lösung: (a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Aussage

$$A(n)\colon \qquad \sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2.$$

Induktionsanfang: Es gilt

$$\sum_{i=1}^{1} (2i - 1) = 2 - 1 = 1 = 1^2,$$

sodass die Aussage $A(1)$ richtig ist.
Induktionsschluss: Wir machen die *Induktionsannahme*, dass die Aussage $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist; es gelte also $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$. Damit rechnen wir nach, dass

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) + \big(2(n+1)-1\big) \overset{\text{I.A.}}{=} n^2+2(n+1)-1 = n^2+2n+1 = (n+1)^2,$$

d. h. die Aussage $A(n+1)$ ist ebenfalls wahr; wir haben also die Gültigkeit der Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ bewiesen.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ betrachten wir die Aussage

$$A(n): \qquad \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+1} = \frac{2}{n^2+n}.$$

Induktionsanfang: Es gilt

$$\prod_{k=2}^{2} \frac{k-1}{k+1} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{2}{2^2+2},$$

sodass die Aussage $A(2)$ richtig ist.
Induktionsschluss: Wir machen die *Induktionsannahme*, dass die Aussage $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ wahr ist; es gelte also $\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+1} = \frac{2}{n^2+n}$. Damit verifizieren wir die Gültigkeit von $A(n+1)$, nämlich

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n+1} \frac{k-1}{k+1} &= \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{(n+1)-1}{(n+1)+1} \\ &\overset{\text{I.A.}}{=} \frac{2}{n^2+n} \cdot \frac{n}{n+2} \\ &= \frac{2n}{n(n^2+3n+2)} = \frac{2}{(n+1)^2+(n+1)}.\end{aligned}$$

Wir haben somit die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ beweisen.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ wahr.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Aussage

$$A(n): \qquad 7 \mid 8^n - 1.$$

Induktionsanfang: Da $8^1 - 1 = 7$ ist durch 7 teilbar, d. h. die Aussage $A(1)$ ist wahr.
Induktionsschluss: Wir machen die *Induktionsannahme*, dass $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr ist; die Zahl $8^n - 1$ sei also durch 7 teilbar. Somit ist wegen

$$8^{n+1} - 1 = 8 \cdot 8^n - 1 = 7 \cdot 8^n + (8^n - 1)$$

auch $8^{n+1} - 1$ durch 7 teilbar, d. h. auch $A(n+1)$ ist wahr. Wir haben also die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ verifiziert.
Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.