Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Präsenzübungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Blatt 4 B
Lösungshinweise

Aufgabe 1: Wir betrachten das Polynom

$$p(x) := x^3 - 2x^2 - 11x + 12.$$

Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d. h. alle Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $p(x) = 0$, und geben Sie die Faktorisierung von p in Linearfaktoren an.

Lösung: Durch Testeinsetzungen finden wir die Nullstelle $x = 1$. Es muss demnach ein Polynom q zweiten Grades geben, sodass $p(x) = (x-1)q(x)$. Mittels Polynomdivision

$$\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 2x^2 - 11x + 12\big) : \big(x - 1\big) = x^2 - x - 12 \\
\underline{-x^3 \;\; + x^2} \\
\qquad\quad -x^2 - 11x \\
\qquad\qquad \underline{x^2 \quad - x} \\
\qquad\qquad\quad -12x + 12 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{12x - 12} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

bestimmen wir q als $q(x) = x^2 - x - 12$. Um die Faktorisierung von q zu erhalten, formen wir q mittels quadratischer Ergänzung um zu

$$\begin{aligned}
q(x) &= x^2 - x - 12 \\
&= \Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{1}{4} + 12\Big) \\
&= \Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{7}{2}\Big)^2 \\
&= \Big(x - \frac{1}{2} - \frac{7}{2}\Big)\Big(x - \frac{1}{2} + \frac{7}{2}\Big) \\
&= (x-4)(x+3).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die gewünschte Faktorisierung von p, nämlich

$$p(x) = (x-1)q(x) = (x-1)(x-4)(x+3),$$

und lesen hieran die Nullstellen -3, 1 und 4 von p ab.

Aufgabe 2: Mithilfe der natürlichen Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x) = e^x$ definiert man die sogenannten *Hyperbelfunktionen* als

$$\sinh\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{2}\big(e^x - e^{-x}\big) \qquad \text{und} \qquad \cosh\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{2}\big(e^x + e^{-x}\big).$$

Man nennt sinh den *Sinus hyperbolicus* und cosh den *Cosinus hyperbolicus*. Diese Funktionen besitzen Eigenschaften, die denen der trigonometrischen Funktionen sin und cos sehr ähnlich sind. Beispielsweise ist $\cosh^2(y) - \sinh^2(y) = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$ und es gelten für $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ die *Additionstheoreme*

$$\begin{aligned} \sinh(y_1 \pm y_2) &= \sinh(y_1)\cosh(y_2) \pm \cosh(y_1)\sinh(y_2), \\ \cosh(y_1 \pm y_2) &= \cosh(y_1)\cosh(y_2) \pm \sinh(y_1)\sinh(y_2). \end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktion $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und der zugehörigen inversen Funktion $\operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Hinweis: Skizzieren Sie zunächst die Graphen der Funktionen $x \mapsto e^x/2$ und $x \mapsto e^{-x}/2$ und untersuchen Sie anschließend das Verhalten von $\sinh(x)$ für große (kleine) Werte von x.

(b) Zeigen Sie, dass

$$4\sinh^3(y) + 3\sinh(y) - \sinh(3y) = 0 \qquad \text{für alle } y \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Benutzen Sie die genannten Eigenschaften von sinh und cosh, um $\sinh(3y)$ zu berechnen.

(c) Folgern Sie, dass die Zahl $\sinh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arsinh}(2)\right)$ die folgende Gleichung löst:

$$4x^3 + 3x - 2 = 0$$

(d) Folgern Sie, dass

$$\sinh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arsinh}(2)\right) = \frac{1}{2}.$$

Hinweis: Berechnen Sie $(4x^3 + 3x - 2) : (x - \frac{1}{2})$.

Lösung:

(a) Aus der Definition

$$\sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2}$$

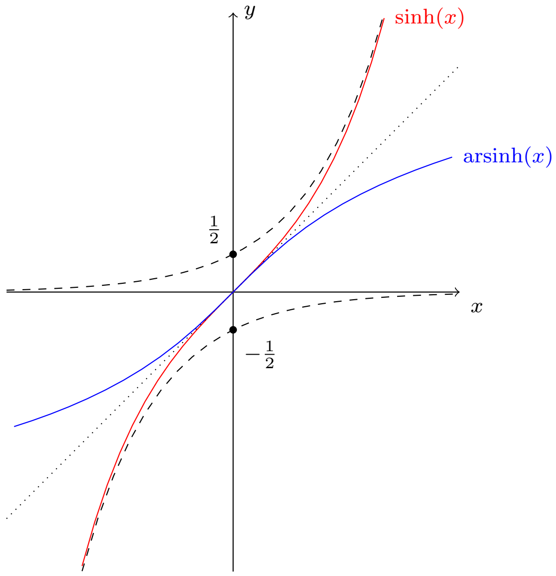
folgt $|\sinh(x) - \mathrm{e}^x/2| \to 0$ für $x \to \infty$ und $|\sinh(x) + \mathrm{e}^{-x}/2| \to 0$ für $x \to -\infty$, sodass der Graph der Funktion $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sich für große bzw. kleine Werte dem Graphen von $x \mapsto \mathrm{e}^x/2$ bzw. $x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}/2$ annähert. Den Graphen der Umkehrfunktion $\operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erhalten wir durch Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden.

(b) Es sei $y \in \mathbb{R}$. Dann gilt aufgrund der Additionstheoreme

$$\sinh(2y) = \sinh(y + y) = \sinh(y)\cosh(y) + \cosh(y)\sinh(y) = 2\sinh(y)\cosh(y)$$

sowie

$$\cosh(2y) = \cosh(y + y) = \cosh(y)\cosh(y) + \sinh(y)\sinh(y) = \cosh^2(y) + \sinh^2(y).$$



Erneute Anwendung des Additionstheorems für sinh liefert sodann

$$\begin{aligned}\sinh(3y) &= \sinh(2y+y)\\ &= \sinh(2y)\cosh(y) + \cosh(2y)\sinh(y)\\ &= 2\sinh(y)\cosh^2(y) + \big(\cosh^2(y) + \sinh^2(y)\big)\sinh(y)\\ &= 3\sinh(y)\cosh^2(y) + \sinh^3(y)\end{aligned}$$

und unter Ausnutzung der Relation $\cosh^2(y) = 1 + \sinh^2(y)$ schließlich

$$\begin{aligned}&= 3\sinh(y)\big(1+\sinh^2(y)\big) + \sinh^3(y)\\ &= 4\sinh^3(y) + 3\sinh(y).\end{aligned}$$

(c) Wir setzen

$$y := \frac{1}{3}\operatorname{arsinh}(2) \qquad \text{und} \qquad x := \sinh(y) = \sinh\Big(\frac{1}{3}\operatorname{arsinh}(2)\Big).$$

Wenden wir die Identität aus Teil (b) auf y an, so ergibt sich wegen $\sinh(3y) = \sinh(\operatorname{arsinh}(2)) = 2$ wie gewünscht, dass

$$4x^3 + 3x - 2 = 0.$$

(d) Durch Polynomdivision erhalten wir

$$\begin{array}{rrrrl}
\big(\;4x^3 & & +3x & -2\big) & : \big(x-\tfrac{1}{2}\big) = 4x^2+2x+4\\
\underline{-\,4x^3} & \underline{+\,2x^2} & & & \\
 & 2x^2 & +3x & & \\
 & \underline{-\,2x^2} & \underline{+\,x} & & \\
 & & 4x & -2 & \\
 & & \underline{-\,4x} & \underline{+\,2} & \\
 & & & 0 &
\end{array}$$

und es hat

$$4x^2 + 2x + 4 = 4\left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}\right)$$

keine reelle Nullstelle. Somit ist $x = \frac{1}{2}$ die einzige reelle Nullstelle des Polynoms $4x^3 + 3x - 2$ ist. Weil laut Teil (c)

$$x = \sinh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arsinh}(2)\right)$$

eine reelle Nullstelle von $4x^3 + 3x - 2$ ist, folgt

$$\sinh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arsinh}(2)\right) = \frac{1}{2}.$$