Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Präsenzübungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Blatt 6 A
Lösungshinweise

Aufgabe 1:

(a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, so ist die Folge $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(ii) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beide divergent, so ist die Folge $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(iii) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(iv) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist die Folge $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

(b) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Zahlenfolge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Folge $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent ist mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen „Sicherheitsabstand“ zur 0 einhält, d. h., dass es eine reelle Zahl $c > 0$ gibt, sodass $|a_n| \geq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Lösung:

(a) (i) Diese Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegeben sind durch $a_n = 0$ und $b_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent (gegen 0), $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent und $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent (gegen 0) da $a_nb_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Diese Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegeben sind durch $a_n = b_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Diese sind beide divergent, jedoch gilt $a_nb_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sodass die Folge $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(iii) Diese Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegeben sind durch $a_n = (-1)^n$ und $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent (gegen 0), jedoch ist wegen $a_n + b_n = (-1)^n$, weshalb die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent ist.

(iv) Diese Aussage ist wahr. Wir nehmen an, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Weil $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, gibt es ein $C > 0$, sodass $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Weil $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, finden wir ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|b_n| < \frac{\varepsilon}{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt. Folglich haben wir

$$|a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| \leq C\,|b_n| < C\,\frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

Also stellt $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge dar.

(b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ und $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gemäß dem Hinweis gibt es also[1] eine reelle Zahl $c > 0$ mit

$$c \leq |a_n| \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Damit rechnen wir nach

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - a_n}{a_n a}\right| \leq \frac{1}{c|a|}|a_n - a|,$$

und da $a_n \to a$ für $n \to \infty$, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon c|a| \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq N,$$

also

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq N.$$

Aufgabe 2:

(a) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$ gegeben. Folgern Sie aus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0.$$

Hinweis: Nutzen Sie aus, dass die Funktionen $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^\alpha$ für ein beliebiges aber festes $\alpha > 0$ streng monoton wachsend ist.

(b) Finden Sie eine divergente reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft, dass die Folge $(\sin(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

[1] Von der Gültigkeit der im Hinweis behaupteten Aussage überzeugt man sich wie folgt: Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \neq 0$ konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < \frac{|a|}{2}$ für alle $n \geq N$ gilt; insbesondere haben wir also $|a_n| = |(a_n - a) + a| \geq |a| - |a_n - a| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$ für alle $n \geq N$. Wir setzen $c := \min\{\frac{|a|}{2}, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|\}$. Dann ist $c > 0$ und es gilt $c \leq |a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Finden Sie eine konvergente reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft, dass die Folge $(\sin(\frac{1}{a_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

Lösung:

(a) Wir wählen ein festes $\alpha > 0$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Weil $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, finden wir ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{1}{n} < \varepsilon^{1/\alpha}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt. Aufgrund der Monotonie der Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^\alpha$ gilt deshalb $\frac{1}{n^\alpha} = f(\frac{1}{n}) < f(\varepsilon^{1/\alpha}) = \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Somit haben wir gezeigt, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.

(b) Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch $a_n := n\pi$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert ist. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, während die Folge $(\sin(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert, da $\sin(a_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die durch $a_n := \frac{2}{(2n+1)\pi}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert ist. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, also konvergent, während die Folge $(\sin(\frac{1}{a_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, da $\sin(\frac{1}{a_n}) = \sin(\frac{\pi}{2} + n\pi) = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 3: Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte oder begründen Sie, dass der Grenzwert nicht existiert.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{7\sqrt{n}+1}{n}$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+4n+4}{(n+1)(n+2)}$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4 + \frac{n-1}{n+1}}$

Hinweis: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für alle $a > 0$.

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}}$

Hinweis: $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ für $|x| < 1$.

(f) $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-n}$ und $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-n}$

Lösung:

(a) Es gilt

$$\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{n^2 - (n+1)^2}{n(n+1)} = -\frac{2n+1}{n^2+n} = -\frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} \to 0$$

für $n \to \infty$.

(b) Es gilt

$$\frac{7\sqrt{n}+1}{n} = \frac{7}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \to 0$$

für $n \to \infty$.

(c) Für alle $n \geq 3$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{n^2+4n+4}{(n+1)(n+2)} &= \frac{n^2(1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2})}{n^2(1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2})} \\ &= \frac{1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} \\ &\to 1\end{aligned}$$

für $n \to \infty$.

(d) Es gilt

$$\begin{aligned}\Big(4+\frac{n-1}{n+1}\Big)^{1/n} &= \Big(\frac{4(n+1)+n-1}{n+1}\Big)^{1/n}\\ &= \Big(\frac{5n+3}{n+1}\Big)^{1/n}\\ &= \Big(\frac{5+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}\Big)^{1/n},\end{aligned}$$

und aus

$$\underbrace{\Big(\frac{5}{2}\Big)^{1/n}}_{\to 1} \leq \Big(\frac{5+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}}\Big)^{1/n} \leq \underbrace{8^{1/n}}_{\to 1}$$

folgt mit dem Einschließungskriterium, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4+\frac{n-1}{n+1}} = 1.$$

(e) Es gilt

$$\frac{2^n+(-1)^n}{2^{n+1}+(-1)^{n+1}} = \frac{1+\big(-\frac{1}{2}\big)^n}{2-\big(-\frac{1}{2}\big)^n} \to \frac{1}{2}$$

für $n\to\infty$.

(f) Es sei $m\in\mathbb{N}$. Dann gilt

$$1+\frac{1}{m} > 1,$$

sodass

$$\Big(1+\frac{1}{m}\Big)^{-1} < 1$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{m}\Big)^{-n} = 0$$

(geometrische Folge). Die Folge $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ mit $a_m = \lim_{n\to\infty}(1+m^{-1})^{-n}$ ist also konstant 0, sodass

$$\lim_{m\to\infty} a_m = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{m}\Big)^{-n} = 0.$$

Nun sei $n\in\mathbb{N}$. Dann gilt nach den Rechenregeln für konvergente Folgen, dass

$$\lim_{m\to\infty}\Big(1+\frac{1}{m}\Big)^{-n} = \Big(\lim_{m\to\infty}\Big[1+\frac{1}{m}\Big]\Big)^{-n} = 1.$$

Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \lim_{m\to\infty}(1+m^{-1})^{-n}$ ist also konstant 1, sodass

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\Big(1+\frac{1}{m}\Big)^{-n} = 1.$$