Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Präsenzübungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Blatt 1 A
Lösungshinweise

Aufgabe 1: Es seien A, B, C Aussagen. Die Aussagen $A \Leftrightarrow B$ und $A \Leftrightarrow C$ seien wahr, $B \wedge C$ sei falsch. Bestimmen Sie die Wahrheitswerte von A, B und C mithilfe einer Wahrheitstafel.

Lösung: Mithilfe einer Wahrheitstafel "spielen" wir alle möglichen Situationen durch:

$w(A)$	$w(B)$	$w(C)$	$w(A \Leftrightarrow B)$	$w(A \Leftrightarrow C)$	$w(B \wedge C)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**

Die vorgegebenen Wahrheitswerte $w(A \Leftrightarrow B) = 1$ und $w(A \Leftrightarrow C) = 1$ und $w(B \wedge C) = 0$ treten einzig in der letzten Situation auf. Es gilt also $w(A) = w(B) = w(C) = 0$.

Tatsächlich kann man dies auch direkter einsehen. Ist nämlich $B \wedge C$ falsch, muss mindestens eine der beiden Aussagen B und C falsch sein.
Nehmen wir zunächst an, C wäre wahr und B wäre falsch. Dann muss, weil $A \Leftrightarrow B$ wahr ist, auch A falsch sein, was wiederum wegen $A \Leftrightarrow C$ erzwingen würde, dass C falsch ist – ein Widerspruch! Dieser Fall tritt somit nicht ein.
Nehmen wir an, dass C falsch und B wahr wäre, dann muss, weil $A \Leftrightarrow B$ wahr ist, auch A wahr sein, was wiederum wegen $A \Leftrightarrow C$ erzwingen würde, dass C wahr ist. Auch in diesem Fall ergibt sich also ein Widerspruch!
Es bleibt also nur der Fall, dass alle drei Aussagen falsch sind, was zu zeigen war.

Aufgabe 2: Es seien X und Y beliebige Mengen. Zeigen Sie:

$$X \cap Y = X \cup Y \quad \Leftrightarrow \quad X = Y.$$

Lösung:

$\underline{\Rightarrow}$: Es sei $X \cap Y = X \cup Y$. Wir müssen zeigen, dass $X = Y$, also $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq X$. Die Inklusion $X \subseteq Y$ sieht man wie folgt:

$$X \subseteq X \cup Y = X \cap Y \subseteq Y.$$

Die umgekehrte Inklusion folgt genauso durch Vertauschen von X und Y.

$\underline{\Leftarrow}$: Es sei $X = Y$. Dann gilt

$$X \cap Y = X \cap X = X = X \cup X = X \cup Y.$$

Aufgabe 3: Es seien $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und

$$\begin{array}{llll} S_1 = \{\{\emptyset\}, \{X\}, X\}, & S_2 = X, & S_3 = \{X\}, & S_4 = \{X, \{X\}\}, \\ S_5 = \emptyset, & S_6 = \{\emptyset\}, & S_7 = \{\{\emptyset\}\}, & S_8 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}. \end{array}$$

(a) Welche der Mengen $S_1, \ldots, S_8$ ist Element in einer der Mengen $S_1, \ldots, S_8$?

(b) Welche der Mengen $S_1, \ldots, S_8$ ist Teilmenge von einer der Mengen $S_1, \ldots, S_8$?

Lösung:

$$\begin{array}{ll} (a)\ S_2 \in S_1, S_3, S_4, & (b)\ S_3 \subseteq S_1, S_4, \\ S_3 \in S_1, S_4, & S_4 \subseteq S_1, \\ S_5 \in S_6, S_8, & S_5 \subseteq S_1, \ldots, S_8, \\ S_6 \in S_1, S_7, S_8. & S_6 \subseteq S_8, \\ & S_7 \subseteq S_1, S_8. \end{array}$$

Aufgabe 4: Es seien X, Y, Z beliebige Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$

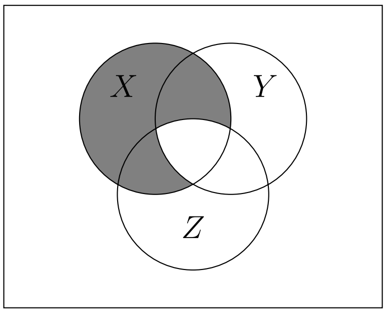
(b) $(X \cup Y) \setminus Z = X \cup (Y \setminus Z)$

(c) $(X \setminus Y) \cup Y = X$

(d) $X \times (Y \cap Z) = (X \times Y) \cap (X \times Z)$

Lösung:

(a) Diese Aussage ist richtig. Wir veranschaulichen die Situation zunächst mit dem folgenden Venn-Diagramm:

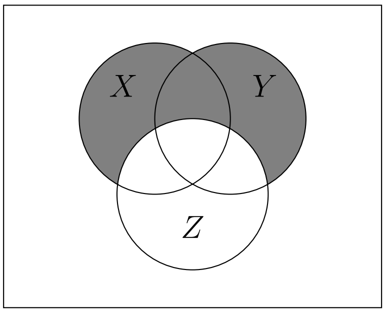


$X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$

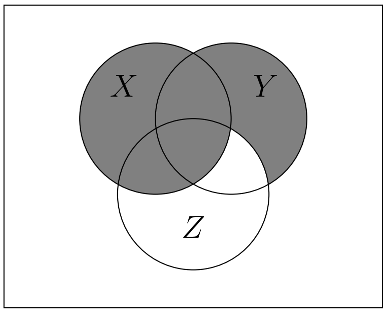
Den Beweis der Aussage führt man wie folgt:

$$
\begin{aligned}
&x \in X \setminus (Y \cap Z) \\
&\Leftrightarrow x \in X \wedge x \notin (Y \cap Z) \\
&\Leftrightarrow x \in X \wedge \big((x \notin Y \vee x \notin Z)\big) \\
&\Leftrightarrow (x \in X \wedge x \notin Y) \vee (x \in X \wedge x \notin Z) \\
&\Leftrightarrow (x \in X \setminus Y) \vee (x \in X \setminus Z) \\
&\Leftrightarrow x \in (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)
\end{aligned}
$$

(b) Diese Aussage ist im Allgemeinen falsch. Wir veranschaulichen die Situation mit den folgenden Venn-Diagrammen:



$(X \cup Y) \setminus Z$



$X \cup (Y \setminus Z)$

Als konkretes Gegenbeispiel wählt man

$$X = \{1\}, \qquad Y = \{1,2\} \qquad \text{und} \qquad Z = \{1,2,3\}.$$

Tatsächlich gilt in diesem Fall

$$(X \cup Y) \setminus Z = \big(\{1\} \cup \{1,2\}\big) \setminus \{1,2,3\} = \{1,2\} \setminus \{1,2,3\} = \emptyset,$$

während

$$X \cup (Y \setminus Z) = \{1\} \cup \big(\{1,2\} \setminus \{1,2,3\}\big) = \{1\} \cup \emptyset = \{1\}.$$

(c) Diese Aussage ist falsch, falls Y keine Teilmenge von X ist. Betrachte hierzu $X = \{1\}$ und $Y = \{1,2\}$. Dann gilt

$$(X - Y) \cup Y = \big(\{1\} \setminus \{1,2\}\big) \cup \{1,2\} = \emptyset \cup \{1,2\} = \{1,2\} \neq X.$$

(d) Diese Aussage ist richtig. Ist $(a,b) \in X \times (Y \cap Z)$, so ist $b \in Y$ und $b \in Z$ und damit $(a,b) \in X \times Y$ und $(a,b) \in X \times Z$.
Ist umgekehrt $(a,b) \in (X \times Y) \cap (X \times Z)$, so gilt einerseits $(a,b) \in X \times Y$, sodass $b \in Y$, und andererseits $(a,b) \in X \times Z$, sodass $b \in Z$. Es folgt also $b \in Y \cap Z$ und damit $(a,b) \in X \times (Y \cap Z)$.

Aufgabe 5: Negieren Sie die folgenden Aussagen.

(a) Der Hausmeister schließt den Hörsaal auf.

(b) Der Professor spricht oder er schreibt an die Tafel.

(c) Keine Aufgabe ist zu schwer.

(d) Ingenieure sind fleißig und unterbezahlt.

(e) Alle Studierenden besuchen jedes Semester genau eine Vorlesung.

Lösung:

(a) Der Hausmeister schließt den Hörsaal nicht auf.

(b) Der Professor spricht nicht und er schreibt nicht an die Tafel.

(c) Es gibt (mindestens) eine Aufgabe, die zu schwer ist.

(d) Es gibt einen Ingenieur, der nicht fleißig oder nicht unterbezahlt ist.

(e) Es gibt einen Studierenden, der in einem Semester keine oder mindestens zwei Vorlesungen besucht hat.