Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Präsenzübungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Blatt 4 A
Lösungshinweise

Aufgabe 1: Verwenden Sie **nur** die algebraischen Axiome (d. h. die Körperaxiome), um für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen zu zeigen:

(a) $x \cdot y = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x = 0) \vee (y = 0)$.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass $x \neq 0$, und folgern Sie $y = 0$ oder umgekehrt.

(b) $-x = (-1) \cdot x$.

(c) $-(-x) = x$.

Lösung:

(a) Sei $x \neq 0$. Dann besitzt x das multiplikative Inverse x^{-1} und es folgt

$$y = y \cdot 1 = y \cdot (x \cdot x^{-1}) = (y \cdot x) \cdot x^{-1} = 0 \cdot x^{-1} = 0,$$

wobei wir im dritten Schritt das Assoziativgesetz der Multiplikation und im letzten Schritt die aus der Vorlesung bekannte Tatsache $0 \cdot x = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ verwendet haben.

(b) Es gilt

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0.$$

(c) Es gilt

$$(-x) + (-(-x)) \overset{(ii)}{=} (-x) + (-1) \cdot (-x) = (1 + (-1)) \cdot (-x) = 0 \cdot (-x) = 0.$$

Aufgabe 2: Verwenden Sie **nur** die algebraischen Axiome und die Anordnungsaxiome, um für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die folgenden Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen zu beweisen:

(a) $(x \leq y) \wedge (u \leq v) \quad \Longrightarrow \quad x + u \leq y + v$.

(b) $0 < x \leq y \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{y}$.

(c) $(0 \leq x \leq y) \wedge (0 \leq u \leq v) \quad \Longrightarrow \quad x \cdot u \leq y \cdot v$.

Lösung:

(a) Zweimaliges Ausnutzen der Verträglichkeit von $\le$ mit der Addition auf $\mathbb{R}$ liefert

$$x + u \le y + u \le y + v$$

und damit die Behauptung.

(b) Zunächst stellen wir fest, dass wegen $x > 0$ auch $x^{-1} > 0$ gelten muss. Da insbesondere $x \neq 0$, ist x invertierbar, sodass x^{-1} tatsächlich existiert. Weil x^{-1} damit ebenfalls invertierbar ist, gilt $x^{-1} \neq 0$, d. h. es können nur die beiden Fälle $x^{-1} < 0$ oder $x^{-1} > 0$ eintreten. Wäre nun $x^{-1} < 0$, dann könnten wir daraus aufgrund der Verträglichkeit von $<$ mit der Multiplikation auf $\mathbb{R}$ und wegen $x > 0$ folgern, dass

$$1 = x^{-1}x < 0 \cdot x = 0.$$

Letzteres wiederum würde $-1 > 0$ implizieren und somit, unter erneuter Ausnutzung der Verträglichkeit von $<$ mit der Multiplikation auf $\mathbb{R}$, den Widerspruch

$$-1 = 1 \cdot (-1) < 0 \cdot (-1) = 0$$

liefern; man beachte, dass $-1 > 0$ und $-1 < 0$ nicht gleichzeitig wahr sein können. Folglich muss $x^{-1} > 0$ gelten, wie behauptet.

Wegen der Transitivität von $>$ implizieren $x > 0$ und $y > x$, dass $y > 0$ gilt. Deshalb können wir das obige Argument auch auf y anwenden und schließen, dass y ebenfalls invertierbar sein muss mit $y^{-1} > 0$.

Aus $x \le y$ folgern wir somit aufgrund der Verträglichkeit von $\le$ mit der Multiplikation auf $\mathbb{R}$, dass $1 = x \cdot x^{-1} \le y \cdot x^{-1}$, und daraus schließlich, dass

$$y^{-1} = y^{-1} \cdot 1 \le y^{-1} \cdot (y \cdot x^{-1}) = (y^{-1} \cdot y) \cdot x^{-1} = 1 \cdot x^{-1} = x^{-1}.$$

(c) Zweimaliges Ausnutzen der Verträglichkeit von $\le$ mit der Multiplikation auf $\mathbb{R}$ ergibt

$$x \cdot u \le y \cdot u \le y \cdot v$$

und damit die Behauptung.

Aufgabe 3: Berechnen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen:

(a) $3|x - 2| > 9$

(b) $\dfrac{5}{5x - 1} < \dfrac{3}{3x + 1}$

(c) $-3|x - 4| + 6 > -7 + 2x$

(d) $|x^2 - 3x + 2| < |x + 2|$

Lösung:

(a) Wir haben

$$\begin{aligned} 3|x-2| > 9 \quad &\iff \quad |x-2| > 3 \\ &\iff \quad (x - 2 > 3) \vee (x - 2 < -3) \\ &\iff \quad (x > 5) \vee (x < -1) \\ &\iff \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 5] \end{aligned}$$

und somit die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus [-1, 5] = (-\infty, -1) \cup (5, \infty)$.

(b) Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\}$ rechnen wir nach, dass

$$\frac{3}{3x+1} - \frac{5}{5x-1} = \frac{3(5x-1) - 5(3x+1)}{(3x+1)(5x-1)} = -\frac{8}{(3x+1)(5x-1)}.$$

Die Ungleichung ist für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\}$ also genau dann erfüllt, wenn $(3x+1)(5x-1) < 0$ gilt; dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn

$$\big((3x+1<0) \wedge (5x-1>0)\big) \vee \big((3x+1>0) \wedge (5x-1<0)\big),$$

d. h. wenn

$$\Big(x < -\frac{1}{3} \wedge x > \frac{1}{5}\Big) \vee \Big(x > -\frac{1}{3} \wedge x < \frac{1}{5}\Big),$$

d. h. wenn $x \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{5})$. Die Lösungsmenge der Ungleichung ist also $\mathbb{L} = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{5})$.

(c) Wir betrachten zunächst den Fall $x \geq 4$, dann ist $-3|x-4|+6 > -7+2x$ äquivalent zu der Ungleichung

$$-3(x-4) + 6 > -7 + 2x,$$

aus der wir durch Äquivalenzumformungen $5 > x$ erhalten. Für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Ungleichung gilt somit $\mathbb{L} \cap [4, \infty) = [4, 5)$. Nun betrachten wir den Fall $x < 4$. Dann ist $-3|x-4| + 6 > -7 + 2x$ äquivalent zu der Ungleichung

$$3(x-4) + 6 > -7 + 2x,$$

aus der wir durch Äquivalenzumformungen $x > -1$ erhalten. Für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Ungleichung gilt somit $\mathbb{L} \cap (-\infty, 4) = (-1, 4)$. Zusammenfassend ergibt sich daher

$$\mathbb{L} = \big(\mathbb{L} \cap [4, \infty)\big) \cup \big(\mathbb{L} \cap (-\infty, 4)\big) = [4, 5) \cup (-1, 4) = (-1, 5).$$

(d) Es ist $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, sodass die gegebene Ungleichung geschrieben werden kann als

$$|x-1||x-2| < |x+2|.$$

Wir betrachten nun die Teilintervalle $(-\infty, -2]$, $(-2, 1]$, $(1, 2]$ und $(2, \infty)$.
Ist $x \in (-\infty, 2]$, so ist die Ungleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned} (x-1)(x-2) < -(x+2) \quad &\iff \quad x^2 - 2x + 4 < 0 \\ &\iff \quad (x-1)^2 + 3 < 0, \end{aligned}$$

was offensichtlich nicht erfüllbar ist, d. h. $\mathbb{L} \cap (-\infty, -2] = \emptyset$.
Ist $x \in (-2, 1]$, so ist die Ungleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned} (x-1)(x-2) < x+2 \quad &\iff \quad x^2 - 4x < 0 \\ &\iff \quad (x-2)^2 < 4 \\ &\iff \quad -2 < x - 2 < 2 \\ &\iff \quad 0 < x < 4, \end{aligned}$$

sodass $\mathbb{L} \cap (-2, 1] = (0, 1]$.
Ist $x \in (1, 2]$, so ist die Ungleichung äquivalent zu

$$\begin{aligned} -(x-1)(x-2) < x+2 \quad &\iff \quad -x^2 + 2x - 4 < 0 \\ &\iff \quad x^2 - 2x + 4 > 0 \\ &\iff \quad (x-1)^2 + 3 > 0, \end{aligned}$$

was offensichtlich für alle $x \in (1, 2]$ gilt, d. h. $\mathbb{L} \cap (1, 2] = (1, 2]$.
Ist schließlich $x \in (2, \infty)$, so sehen wir, dass die Ungleichung äquivalent ist zu

$$(x-1)(x-2) < x+2.$$

Wie im bereits diskutierten Fall $x \in (-2, 1]$ sehen wir, dass

$$(x-1)(x-2) < x+2 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < x < 4,$$

d. h. wir haben $\mathbb{L} \cap (2, \infty) = (2, 4)$.
Zusammenfassend ergibt sich deshalb, dass

$$\mathbb{L} = \emptyset \cup (0, 1] \cup (1, 2] \cup (2, 4) = (0, 4).$$