Einführung in die Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Michael Bildhauer

Universität des Saarlandes

Teil I

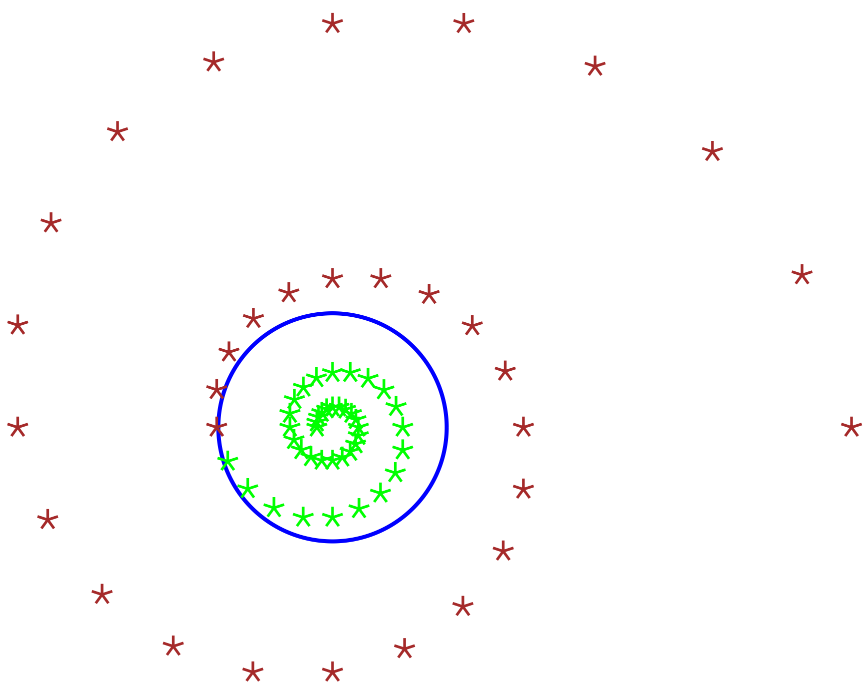
Grundlagen

Grenzwerte

Potenzreihen

Exponentialfunktion & Co.

$\mathbb{R}^n$ $\mathbb{C}$



Universität des Saarlandes

Fachrichtung Mathematik

Preprint Nr. 405

Einführung in die Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Teil I

Michael Bildhauer

Saarbrücken 2020

Fachrichtung Mathematik
Universität des Saarlandes

Preprint No. 405
submitted: 06.04.2020

Einführung in die Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler

Teil I

Michael Bildhauer

Fachrichtung Mathematik
Universität des Saarlandes
Postfach 15 11 50
66041 Saarbrücken
Germany
bibi@math.uni-sb.de

Edited by
Fachrichtung Mathematik
Universität des Saarlandes
Postfach 15 11 50
66041 Saarbrücken
Germany

e-Mail: preprint@math.uni-sb.de
WWW: http://www.math.uni-sb.de/

Vorwort und strukturiertes Inhaltsverzeichnis

Das vorliegende Manuskript begleitet den ersten von vier Teilen im Vorlesungszyklus „Höhere Mathematik für (Naturwissenschaftler und) Ingenieure“ der Fachrichtung Mathematik der Universität des Saarlandes.

Art und Umfang der Darstellung korrespondieren mit jeweils vier Semesterwochenstunden Vorlesungs- und zwei Semesterwochenstunden Übungsbetrieb.

Der inhaltliche Aufbau differiert von der oft bevorzugten semesterweisen Abgrenzung zwischen Teilbereichen wie „Analysis“ oder „Lineare Algebra“ etc.

Stattdessen werden Begriffe und Objekte in möglichst kanonischer Weise dort eingeführt, wo sie sich in die Reihenfolge eines Gesamtkonzepts einfügen.

So eröffnet sich etwa für die Diskussion der komplexen Zahlen, die vielen Studierenden im ersten Semester noch unbekannt sind, die Freiheit, im Vorlesungsverlauf die ersten algebraischen Strukturen voranzustellen, Grenzwerte und insbesondere die Reihendarstellung der reellen Exponentialfunktion zu diskutieren sowie Vektorräume kennen zu lernen, um anschließend am Ende des ersten Semesters all diese Gesichtspunkte in die Darstellung der komplexen Zahlen einfließen zu lassen.

Ein weiteres schönes Beispiel liefert im dritten Teil die gegenseitige Motivation des Studiums von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung und der Spektraltheorie quadratischer Matrizen.

Die Kürze der Zeit ermöglicht es im Gegensatz zum Grundstudium der Mathematik als Hauptfach leider nicht, eine fundierte Beweiskette durch das umfangreiche Material zu präsentieren, zumal die Hörerinnen und Hörer hauptsächlich daran interessiert sind, die mathematischen Zusammenhänge beispielhaft zu begreifen.

Mit „Beispielen“ ist jedoch in der Regel nicht an direkte praktische Fragestellungen aus den Ingenieur- bzw. Naturwissenschaften gedacht. Diese kann eine studiengangsübergreifende Veranstaltung prinzipiell nicht systematisch beinhalten.

Charakteristische Beispiele sollten vielmehr einem völlig anderen Kriterium genügen:

Mathematisch typische Situationen sind abzubilden und der Kern der Problematik sollte erkennbar werden, um zum Verständnis in möglichst vielfältigen Anwendungsbereichen beizutragen.

Sinnvolle Beispiele verstecken sich gerade nicht hinter langen Textaufgaben mit vielen Fachbegriffen aus den Anwendungen.

Zusammenfassend ist als Orientierungshilfe der inhaltlich strukturierte Aufbau der Vorlesungsreihe in den zwei Schaubildern am Ende dieses Vorwortes festgehalten. Die Wahlbereiche „Numerische Mathematik“ und „Funktionentheorie“ des vierten Semesters sind dabei nicht berücksichtigt.

Begleitend zur Vorlesung wird dringend empfohlen, sich mit einem Computeralgebrasystem vertraut zu machen und die vermittelten Grundlagen rechnergestützt einzusetzen.

Dies kann auch in ergänzenden Seminaren in Kleingruppen erlernt werden.

In dem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, dass die Visualisierungen des vorliegenden Manuskripts mithilfe des Computeralgebrasystems „Maple“ erstellt sind.

Die Konzeption des Stoffs basiert auf einer Vielzahl von Quellen, die mehr oder weniger direkt in die Präsentation eingeflossen sind.

Die Lehrbücher [1], [2], [3] und vertiefend [4], [5], [6] wurden dabei bevorzugt zurate gezogen.

Ebenso dienten die Aufgabensammlungen [7], [8] und als studienvorbereitende Referenz [9] als wichtige Quellen.

Weiterführend wurde insbesondere auf [10], [11] und [12] zurückgegriffen.

Als allgemeines Nachschlagewerk ist das Lexikon [13] zu nutzen.

Für alle Zweifelsfälle und als umfangreiche Formelsammlung ist [14] ein maßgeblicher Ratgeber.

Da es sich aber in den angegebenen Referenzen wie auch hier um die Darstellung mathematischen Basiswissens handelt, ist eine 1-1 Zuordnung im Sinne von detaillierten Referenzangaben ein Ding der Unmöglichkeit.

Gleiches gilt für die eingeflossenen Beispiele und Übungsaufgaben.

Es handelt sich um eine Mischung aus eigenen Aufgaben, Vorschlägen von Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern, Anregungen aus der Literatur, Klausuraufgaben etc.

Mein ganz herzlicher Dank geht an alle Kolleginnen und Kollegen der Fachrichtung Mathematik der Universität des Saarlandes, insbesondere an die Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter, die im Laufe der Zeit meine Vorlesung betreut haben und die viele wertvolle Anregungen beigetragen haben.

Ebenso danke ich den Studierenden für die zahlreichen Rückmeldungen, die immer wieder neue Aspekte für den Vorlesungsverlauf und das Manuskript aufgezeigt haben.

Saarbrücken im April 2020 Michael Bildhauer

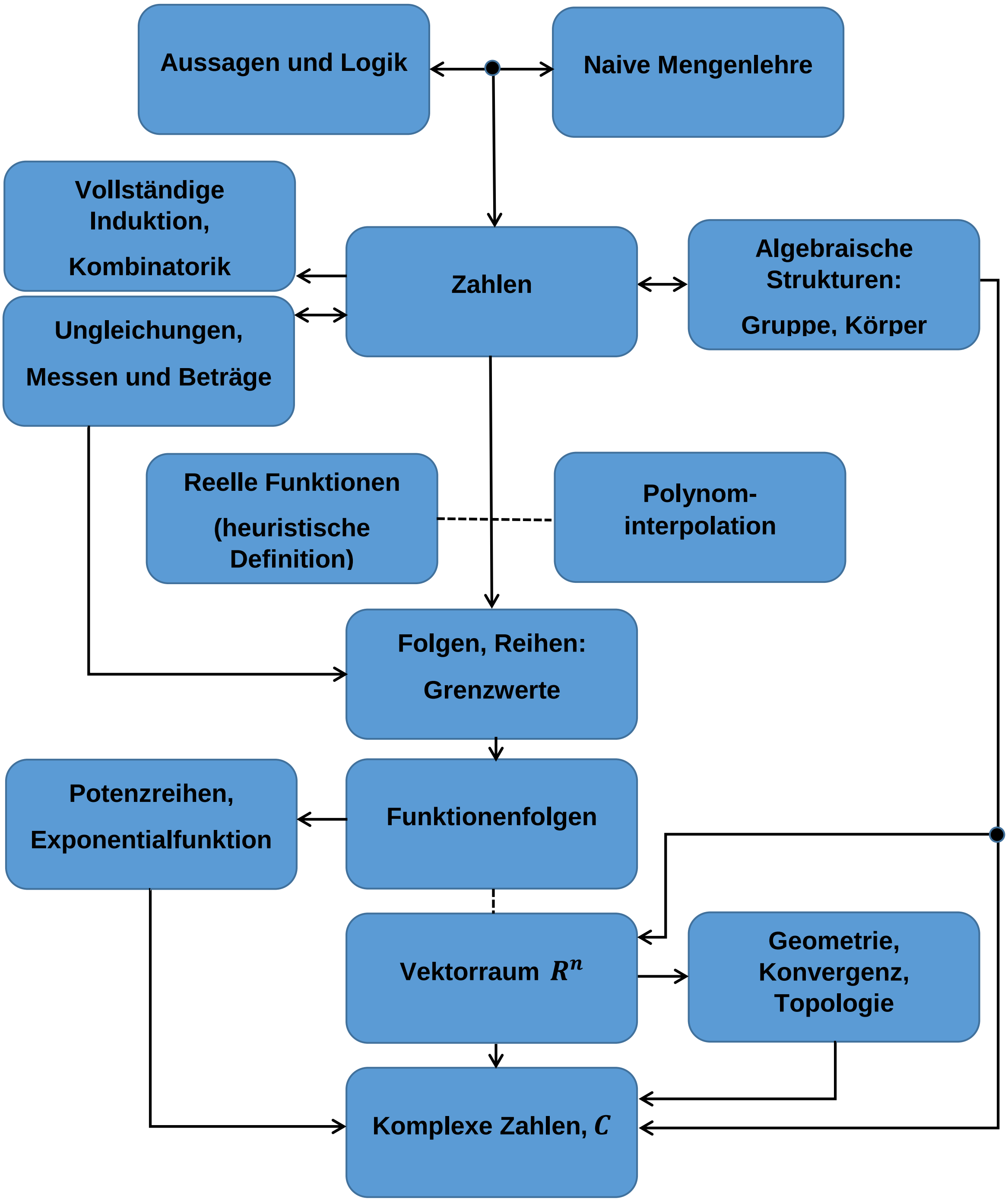


Abbildung 1: Zur Struktur von Teil I.

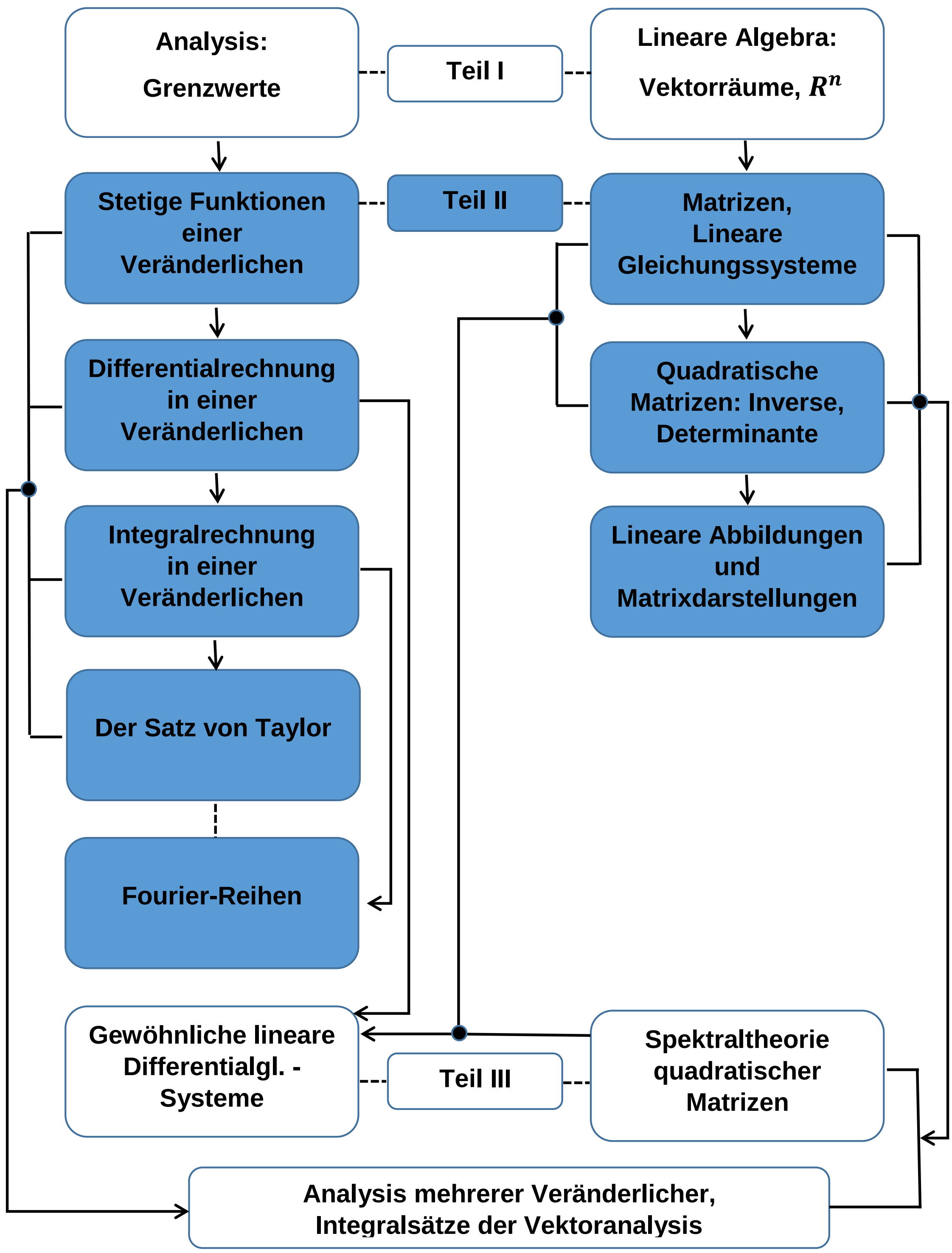


Abbildung 2: Zur Struktur von Teil II und III.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Aussagen und Logik

Gegenstand der Mathematik sind mathematische Aussagen und deren Verifikation bzw. Falsifikation.

Auf eine präzise Diskussion der Aussagenlogik und ihrer Möglichkeiten bzw. Grenzen wird hier verzichtet.

Stattdessen werden einige mehr oder weniger heuristische Bemerkungen zu den logischen Grundregeln und zur mathematischen Sprache vorausgeschickt.

1.1 Heuristische Aussagenlehre (Aussage; Wahrheitswert; Wahrheitstafel; logische Operationen; Quantoren; Beweismethoden)

Schon beim ersten Nachdenken über eine geeignete Formulierung der Aussagenlehre stößt man auf zwei grundsätzliche Probleme.

Erstes Problem. *Was ist ein Satz in der Aussagenlogik?*

Ein Blick ins Lexikon ([13]) definiert eine Aussage als ein „sprachliches Gebilde, das einen Sachverhalt widerspiegelt“, wobei durchaus verschiedene Aussagen für ein und denselben Sachverhalt stehen können.

Ein sprachliches Gebilde ist beispielsweise:

„Wie meist um diese Jahreszeit wird es morgen wohl überwiegend sonnig sein.“

Sätze wie dieser beinhalten vage Formulierungen und Prognosen für die Zukunft. Sie werden bei einer formalen Analyse erhebliche Schwierigkeiten bereiten.

Deutlich weniger Diskussionsbedarf verursachen Sätze wie „2 ist eine natürliche Zahl.“ („$2 \in \mathbb{N}$“).

Zweites Problem. *Vertragen sich intrinsischer und formaler Wahrheitswert miteinander?*

Neben dem sprachlichen Gebilde steht, wie oben angesprochen, ein Sachverhalt, der widergespiegelt wird.

Dies lässt zwei grundsätzlich verschiedene Interpretationen zu:

i) Ein sprachliches Gebilde steht oft an sich für einen Wahrheitswert, der auf allgemeinen Erfahrungen und Konventionen beruht, d.h. es herrscht eine unausgesprochene Übereinkunft, ob ein sprachliches Gebilde wahr oder falsch ist.

Dies ist hier mit dem intrinsischen Wahrheitswert gemeint.

ii) Im zweiten Zugang wird einem sprachlichen Gebilde hingegen ein formaler Wahrheitswert wahr/falsch zugeordnet, der nichts mit dem intrinsischen Wahrheitswert zu tun haben muss.

In der Mathematik umgeht man die gesamte Problematik weitgehend, indem formalisierte Aussagen betrachtet werden, d.h. die Sprache – nämlich die mathematische Sprache – und damit die untersuchten Aussagen sind auf einen konkreten Problemkreis ausgerichtet und geeignet formalisiert:

Mathematische Sachverhalte werden über Definitionen und Symbole in einer präzisen mathematischen Sprache ausgedrückt (wie „$2 \in \mathbb{N}$“) und in einem widerspruchsfreien axiomatischen System analysiert.

Nach dem Gödelschen Unvollständigkeitssatz muss für die Widerspruchsfreiheit allerdings in Kauf genommen werden, dass dabei nicht alle mathematischen Sätze beweisbar sind.

Schließlich haben in der zweiwertigen Logik Aussagen entweder den Wahrheitswert wahr oder den Wahrheitswert falsch. Eine weitere Möglichkeit gibt es nicht („tertium non datur“).

Pragmatische Vorgehensweise.

Zusammenfassend wird hier die folgende pragmatische Vorgehensweise gewählt:

Eine Aussage A ist ein Paar bestehend aus einem mathematisch formalisierten sprachlichen Gebilde und einem Wahrheitswert[1] *der Aussage,*

$$w(A) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \text{„A ist falsch“ }, \\ 1 & \text{für} \quad \text{„A ist wahr“ }. \end{cases}$$

Erste logische Operationen.

Mithilfe von logischen Operationen entsteht aus einigen wenigen Grundaussagen ein komplexes mathematisches Gebäude.

Die einfachste Operation ist die Negation $\neg A$ („nicht A“) einer Aussage,

$$w(\neg A) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \text{„A ist falsch“ }, \\ 0 & \text{für} \quad \text{„A ist wahr“ }. \end{cases}$$

[1] Der Doppelpunkt vor dem Gleichheitszeichen bedeutet, dass die linke Seite durch die rechte Seite definiert wird.

In der Form einer sogenannten Wahrheitstafel lautet die Definition:

$w(A)$	$w(\neg A)$
1	0
0	1

Tabelle 1.1: Wahrheitstafel zur Definition von $\neg A$.

Beispiel. *Die Negation der Aussage A: „2 ist eine natürliche Zahl.“ lautet offensichtlich $\neg A$: „2 ist keine natürliche Zahl.“.*

In dem Beispiel ist A wahr und somit $\neg A$ falsch, wie es in der ersten Zeile der Wahrheitstafel definiert ist.

Die ersten logischen Operationen, die zwei Aussagen miteinander verknüpfen und daraus eine dritte Aussage ableiten, sind die

i) Konjunktion $A \wedge B$ („A und B“) und die

ii) Disjunktion $A \vee B$ („A oder B“ – nicht ausschließendes oder),

die über die Wahrheitstafel in Tabelle 1.2 definiert sind.

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \wedge B)$	$w(A \vee B)$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

Tabelle 1.2: Wahrheitstafel zur Konjunktion und zur Disjunktion.

Beispiel. *Die Aussage*

$$(\text{„}15 \textit{ ist durch } 3 \textit{ teilbar.“}) \wedge (\text{„}\textit{Die Erde ist eine Scheibe.}\text{“})$$

ist falsch, wohingegen folgende Aussage richtig ist:

$$(\text{„}15 \textit{ ist durch } 3 \textit{ teilbar.“}) \vee (\text{„}\textit{Die Erde ist eine Scheibe.}\text{“}) .$$

Implikation und Äquivalenz.

Zu den grundlegenden logischen Operationen gehören weiter die

iii) Implikation $A \Rightarrow B$ (aus „A folgt B“) und die

iv) Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ („A äquivalent zu B“).

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(A \Leftrightarrow B)$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	1

Tabelle 1.3: Wahrheitstafel zur Implikation und zur Äquivalenz.

Bei den in Tabelle 1.3 definierten Operationen ist vor allem zu beachten, dass sich die Implikation vom üblichen Sprachgebrauch „wenn. . . , dann. . . “ unterscheidet, der meist einen zeitlichen oder kausalen Zusammenhang andeutet, was bei der Implikation nicht der Fall ist.

Das bekannteste Beispiel ist:

„Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.“ .

Besser wird diese Implikation charakterisiert durch:

„Wenn es regnet, dann ist die Straße auf jeden Fall nass –
wenn es nicht regnet, dann ist die Straße nass oder auch nicht.“

Hier ist umschrieben, dass die Aussage „Es regnet.“ lediglich eine hinreichende Bedingung für die Aussage „Die Straße ist nass.“ ist.

Ob die Straße tatsächlich vom Regen nass ist, ist nicht Gegenstand der Implikation.

Man beachte ebenso, dass die Implikation $A \Rightarrow B$ für „A falsch“ per definitionem stets wahr ist.

Die Implikation trifft keine Aussage über den Wahrheitswert von B, sondern über die Verknüpfung von A und B via Implikation.

Mit anderen Worten: $w(A \Rightarrow B)$ ist streng von $w(B)$ zu unterscheiden.

Beispiel. *A bezeichne die Aussage „$1 + 1 = 3$“ und B bezeichne die Aussage „Paris liegt an Australiens Küste.“ .*

Dann ist die Implikation $A \Rightarrow B$ per definitionem wahr.

Man kann aber auch intuitiv argumentieren, z.B.:

Aus $1 + 1 = 3$ folgt $0 = 1$, was wiederum für jede reelle Zahl x die Gleichheit $x = 0$ impliziert.

Bezeichnet s den Abstand von Paris zur australischen Küste, so gilt insbesondere $s = 0$ und die Implikation ist gezeigt.

Das Beispiel geht in ähnlicher Formulierung wohl auf Russel zurück.[2]

---

[2]Erwähnt sei auch (im Kontext von Gödels Unvollständigkeitssatz) Russels Antinomie von der Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten.

Kurz zu erläutern bleibt die Äquivalenz, wobei schon zu Beginn dieses Kapitels erwähnt ist, dass verschiedene Aussagen für ein und denselben Sachverhalt stehen können.

Tabelle 1.3 zeigt, dass $w(A \Leftrightarrow B) = 1$ mit der Bedingung $w(A) = w(B)$ gleichzusetzen ist.

Beispiel. *Es gilt:*

$$\begin{aligned} & \text{„}\textit{Es ist vormittags } 5 \textit{ Minuten nach } 8.\text{"} \\ \Leftrightarrow \quad & \text{„}\textit{Es ist } 8.05 \textit{ a.m.}\text{"} \,. \end{aligned}$$

Mehrfache Verknüpfung von Aussagen.

Zur Aufbau eines komplexen logischen Gebäudes werden die grundlegenden Operationen in unterschiedlichen Kombinationen miteinander verknüpft.

Dabei implizieren die Definitionen beispielsweise das Distributivgesetz

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \,.$$

Für einen Beweis und für die Diskussion des sogenannten Assoziativgesetzes sei auf das Übungskapitel 1.2 verwiesen.

Die Regeln von de Morgan werden in Kapitel 2.1 diskutiert, wobei exemplarisch die enge Verbindung zwischen der Aussagenlogik und der Mengenalgebra[3] deutlich wird.

Bemerkung. *In Analogie zu den üblichen „Punkt-" und „Strich-Rechenarten" werden in der Aussagenlogik und in der Mengenalgebra teilweise Varianten einer „Punkt- vor Strich-Regel" vereinbart.*

---

[3]Der Begriff „Mengenalgebra" ist mit unterschiedlichen Bedeutungen belegt. Hier wird er abkürzend als die Lehre von Mengenverknüpfungen verwandt.

Auf diese Vereinbarung wird hier verzichtet und es werden stets Klammern gesetzt, die eine klare Struktur anzeigen und evtl. Missverständnisse sowie vermeidbare Fehler ausschließen sollen.

Variablen in Aussagen.

Eine Aussage kann von veränderlichen Größen (von Variablen) abhängen und heißt dann auch Aussageform.

Eine Aussageform $A(x,y)$ in den Variablen x und y ist beispielsweise

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1 \ .$$

Offensichtlich sind $A(0,2)$ und $A(\sqrt{2},0)$ wahr, $A(1,1)$ ist hingegen falsch.

Für die Arbeit mit Aussageformen werden schließlich abkürzend sogenannte Quantoren eingeführt:

$\forall x : \ A(x)$ „Für alle x gilt $A(x)$.“ ;

$\exists x : \ A(x)$ „Es gibt (wenigstens) ein x, sodass $A(x)$ wahr ist.“ ;

$\exists_1 x : \ A(x)$ „Es gibt genau ein x, sodass $A(x)$ wahr ist.“ .

Beispiele. *Die folgenden Aussagen sind wahr:*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad x^2 \geq 0 \ ;$$

$$\exists x \in \mathbb{R} : \quad x^2 = 2 \ ;$$

$$\exists_1 x \in \mathbb{R} : \quad (x^2 = 2) \wedge (x > 0) \ .$$

Negation von Aussageformen.

Wie Aussagen können auch Aussageformen mit Quantoren negiert bzw. verneint werden.

Im Wesentlichen benötigt man dabei die folgenden Äquivalenzen, deren Gültigkeit recht leicht einzusehen ist.

$$\neg\Big(\forall x :\ A(x)\Big) \ \Leftrightarrow\ \exists x :\ \neg A(x)\ ,$$

$$\neg\Big(\exists x :\ A(x)\Big) \ \Leftrightarrow\ \forall x :\ \neg A(x)\ .$$

Beipiel. *Man betrachte die (wahre) Aussage*

$$\forall t \in \mathbb{R} :\ \Big[\exists s \in \mathbb{R} :\ \big[\exists m \in \mathbb{N}\ \ mit\ \ m = t/s\big]\Big]\ .$$

Die Negation ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} & \exists t \in \mathbb{R} :\ \neg\Big[\exists s \in \mathbb{R} :\ \big[\exists m \in \mathbb{N}\ \text{ mit }\ m = t/s\big]\Big] \\ \Leftrightarrow\ & \exists t \in \mathbb{R} :\ \Big[\forall s \in \mathbb{R} :\ \neg\big[\exists m \in \mathbb{N}\ \text{ mit }\ m = t/s\big]\Big] \\ \Leftrightarrow\ & \exists t \in \mathbb{R} :\ \Big[\forall s \in \mathbb{R} :\ \big[\forall m \in \mathbb{N}\ \text{ gilt }\ m \neq t/s\big]\Big]\ . \end{aligned}$$

Mathematische Sätze und Beweise.

Ein mathematischer Satz ist eine Implikation $A \Rightarrow B$. Hierbei ist A die Voraussetzung und B die Behauptung.

Ein direkter Beweis wird in Form eines Kettenschlusses geführt:

$$A =: A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n = B\ .$$

Beispiel. *Als typisches Beispiel zeigt man leicht, dass das Produkt aus einer geraden und einer ungeraden Zahl stets gerade ist.*[4]

Darauf aufbauend betrachte man als weiteres Beispiel:

Beispiel. *Es sei $p \in \mathbb{N}$, A und B seien die Aussagen*

$$\begin{aligned} A: &\quad \text{„}p^2 \textit{ ist eine gerade Zahl.}\text{“}\,, \\ B: &\quad \text{„}p \textit{ ist eine gerade Zahl.}\text{“}\,. \end{aligned}$$

Satz: $A \Rightarrow B$.

Ein direkter Beweis lautet etwa wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{„}p^2 \textit{ ist eine gerade Zahl.}\text{“} &\Rightarrow \text{„}p(p-1)+p = p^2 \textit{ ist eine gerade Zahl.}\text{“} \\ &\Rightarrow \text{„}p = p^2 - p(p-1) \textit{ ist eine gerade Zahl.}\text{“}\,. \end{aligned}$$

Dabei ist im letzten Schritt berücksichtigt, dass $p \cdot (p-1)$ in jedem Fall das Produkt aus einer geraden und einer ungeraden Zahl ist.

Nach dem einführenden Beispiel liefert dieses Produkt eine gerade Zahl und folglich ist $p^2 - p \cdot (p-1)$ als Differenz gerader Zahlen gerade.

Die zweite Implikation im obigen Beweis ist also ebenfalls richtig und die Beweiskette damit vollständig. □[5]

Dahingegen basiert ein indirekter Beweis auf der Kontraposition

$$\neg B \Rightarrow \neg A\,.$$

[4] Eine gerade Zahl m ist von der Form $m = 2j$ für eine natürliche Zahl j, eine ungerade Zahl n lässt sich mit einer natürlichen Zahl k schreiben als $n = 2k-1$.

[5] „□“ ist das gängige Symbol für „q.e.d“ („quit est demonstrandum“) und bezeichnet das Beweisende.

Die Äquivalenz

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

wird im Übungskapitel 1.2 diskutiert.

Wie effektiv eine indirekte Argumentation sein kann, zeigt die folgende Beweisvariante des Satzes „$A \Rightarrow B$“, A, B wie im letzten Beispiel.

Beispiel. *Ein kurzer indirekter Beweis lautet:*

$$\neg B\text{: „}p\text{ ist eine ungerade Zahl.“} \quad \Rightarrow \quad \neg A\text{: „}p^2\text{ ist eine ungerade Zahl.“}$$

$\square$

Als prominentestes Beispiel wird im Übungskapitel 1.2 mithilfe eines indirekten Beweises gezeigt, dass $\sqrt{2}$ kein Bruch sein kann.

1.2 Übungsaufgaben zu Kapitel 1

Aufgabe 1. Überlegen Sie sich Anwendungsbeispiele für eine mehrwertige Logik.

Aufgabe 2. Eine zusammengesetzte Aussage heißt Tautologie (oder allgemein gültig), wenn sie unabhängig vom Wahrheitswert der eingehenden Einzelaussagen stets wahr ist.

Seien etwa A, B und C Aussagen. Bei welchen der folgenden Aussagen handelt es sich um Tautologien?

i) $\neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$.

ii) $(\neg A \wedge B) \Rightarrow \Big((C \vee B) \Leftrightarrow \big(A \Rightarrow (C \vee B)\big)\Big)$.

Argumentieren Sie anhand von Wahrheitstafeln.

Aufgabe 3.*

i) Überprüfen Sie für drei Aussagen A, B, C anhand einer Wahrheitstafel für $A \wedge (B \vee C)$ und einer für $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ das Distributivgesetz

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

ii) Gibt es ein weiteres Distributivgesetz für Aussagen?

Aufgabe 4.

i) Zeigen Sie für drei Aussagen A, B, C das Assoziativgesetz

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) .$$

ii) Gibt es ein weiteres Assoziativgesetz für Aussagen?

Aufgabe 5.*

i) Es seien A, B, C Aussagen, die Implikationen $(A \Rightarrow B)$ und $(A \Rightarrow C)$ seien richtig, die Implikation $(B \Rightarrow C)$ sei falsch.

Welche Wahrheitswerte haben A, B, C?

ii) Es seien A, B, C Aussagen. Für welche Kombinationen von $w(A)$, $w(B)$, $w(C)$ gilt:

Es ist $w(A \Leftrightarrow B) = 1$, $w(A \Rightarrow C) = 1$ und $w(B \vee C) = 1$.

Aufgabe 6. Man betrachte die Aussagen

$$i) \qquad \exists t \in \mathbb{R} : \quad \Big[\forall s \in \mathbb{R} : \quad [\forall p \in \mathbb{R} \ \text{ gilt } \ s = p + t] \Big] ,$$

$$ii) \qquad \forall s \in \mathbb{R} : \quad \Big[\forall p \in \mathbb{R} : \quad [\exists t \in \mathbb{R} \ \text{ sodass } \ s = p + t] \Big] .$$

Sind die Aussagen wahr oder falsch? Wie lautet die Negation der Aussagen?

Aufgabe 7.* (Indirekter Beweis)

i) Es seien A und B Aussagen.

Verifizieren Sie anhand der einer Wahrheitstafel, dass gilt

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) .$$

ii) Es seien A und B zwei Aussagen. Zeigen Sie:

Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn $A \wedge (\neg B)$ falsch ist – in dieser Form spricht man auch von einem Widerspruchsbeweis.

iii) Zeigen Sie als Anwendung, dass $\sqrt{2}$ keine Bruchzahl sein kann.

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben.

Aufgabe 3.

$i)$ Betrachten Sie dazu die Wahrheitstafeln aus den Tabellen 1.4 und 1.5.

$w(A)$	$w(B)$	$w(C)$	$w(B \vee C)$	$w(A \wedge (B \vee C))$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

Tabelle 1.4: Zu $A \wedge (B \vee C)$.

$w(A)$	$w(B)$	$w(C)$	$w(A \wedge B)$	$w(A \wedge C)$	$w((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Tabelle 1.5: Zu $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$.

ii) Die gesuchte Variante lautet:

$$A \vee \big(B \wedge C\big) = \big(A \vee B\big) \wedge \big(A \vee C\big) \ .$$

Aufgabe 5.

i) Man stellt die Wahrheitstafel nach Tabelle 1.6 auf und findet die markierte Zeile als Lösung, die im Beispiel sogar eindeutig ist.

$w(A)$	$w(B)$	$w(C)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(A \Rightarrow C)$	$w(B \Rightarrow C)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

Tabelle 1.6: Zu Aufgabe 5, *i*).

ii) Die Wahrheitstafel aus Tabelle 1.7 liefert hier zwei mögliche Kombinationen der Wahrheitswerte.

$w(A)$	$w(B)$	$w(C)$	$w(A \Leftrightarrow B)$	$w(A \Rightarrow C)$	$w(B \vee C)$
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	0	0	1	1	0

Tabelle 1.7: Zu Aufgabe 5, *ii*).

Aufgabe 7.

i) Man betrachtet Tabelle 1.8 und folgert aus den letzten beiden Spalten, dass die Aussage $A \Rightarrow B$ immer denselben Wahrheitswert hat wie $\neg B \Rightarrow \neg A$.

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg B)$	$w(\neg A)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(\neg B \Rightarrow \neg A)$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Tabelle 1.8: Zu $\neg B \Rightarrow \neg A$.

ii) Dieser Aufgabenteil ergibt sich aus Tabelle 1.9.

iii) Es sei A die Aussage „$x^2 = 2$“ (A ist wahr als Definition von $\sqrt{2}$) und weiter sei B die Aussage „x ist keine Bruchzahl.“

Damit ist zu zeigen: $A \Rightarrow B$ oder äquivalent dazu $A \wedge (\neg B)$ ist falsch.

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg B)$	$A \wedge (\neg B)$	$A \Rightarrow B$
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1

Tabelle 1.9: Zu $A \wedge (\neg B)$.

Die Aussage $\neg B$ lautet „x ist eine Bruchzahl.“ und evtl. Kürzen führt auf die äquivalente Formulierung:

$$\text{Es existieren teilerfremde } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \text{ mit:} \qquad x = \frac{p}{q}\ .$$

Aus Aussage A folgt dann

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \text{und damit} \quad p^2 = 2q^2\ ,$$

also ist p^2 eine gerade Zahl.

Wie oben bereits gesehen, ist dann auch p gerade, d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $p = 2n$.

Somit ist $4n^2 = p^2 = 2q^2$ und folglich $q^2 = 2n^2$.

Man erkennt, dass q^2 und als Konsequenz wieder q selbst durch 2 teilbar ist.

Ergo sind p und q nicht teilerfremd, $A \wedge (\neg B)$ ist falsch, was zu beweisen war. $\square$

Kapitel 2

Naive Mengenlehre

2.1 Mengen (Venn-Diagramme; Mengenalgebra; kartesisches Produkt; Euklidischer Raum)

Die Mengenlehre ist ein Grundelement der Sprache der Mathematik und geht als „naive“ Mengenlehre (im Gegensatz zur strengen Axiomatik) auf Georg Cantor zurück.

Intuitive Beispiele für Mengen.

Eine Reihe von Beispielen und Mengenschreibweisen sind allgemein vetraut – insbesondere Mengen, die Zahlen enthalten:

i) Natürliche, ganze, rationale, reelle oder komplexe Zahlen:[1]

$$\mathbb{N}\,,\quad \mathbb{Z}\,,\quad \mathbb{Q}\,,\quad \mathbb{R}\,,\quad \mathbb{C}\,.$$

ii) Endliche Mengen als Aufzählung wie die Menge $\{1,2,3,4,5\}$, wobei die Reihenfolge keine Rolle spielt, d.h. beispielsweise

$$\{1,2,3,4,5\} = \{3,1,2,4,5\}\,.$$

[1] Die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ werden an dieser Stelle noch als anschaulich bekannt vorausgesetzt. Eine systematische Einführung folgt in Kürze. Die Menge $\mathbb{C}$ wird ausführlich in Kapitel 11 vorgestellt.

iii) Angedeutete Aufzählungen von Mengen sind beispielsweise

$$\{1, 2, 3, \ldots, 50\} \quad \text{oder} \quad \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N} .$$

Die Bedeutung von „…“ muss sich in dieser Schreibweise unmissverständlich aus dem Kontext erschließen.

iv) Charakterisierung mittels einer gemeinsamen Eigenschaft, etwa:[2]

$$\{n \in \mathbb{N} : \ n \text{ ist Primzahl}\} .$$

v) Die leere Menge $\emptyset$, die kein Element enthält.

Präzisiert wird die Intuition anhand von

Definition 2.1. $\boxed{\text{Menge}}$

Eine Zusammenfassung von wohl bestimmten und wohl unterschiedenen Objekten zu einem Ganzen heißt Menge.

Die Objekte dieser Zusammenfassung heißen Elemente der Menge.

Notation: $x \in A$, *falls* x *Element der Menge* A *ist,* $x \notin A$, *falls* x *nicht Element der Menge* A *ist.*

Inwieweit kann man Mengen vergleichen bzw. mit Mengen operieren?

Zur Veranschaulichung dieser Frage bedient man sich sogenannter Venn-Diagramme (Abbildung 2.1).

[2] Unter einer Primzahl versteht man eine natürliche Zahl $n \geq 2$, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist.

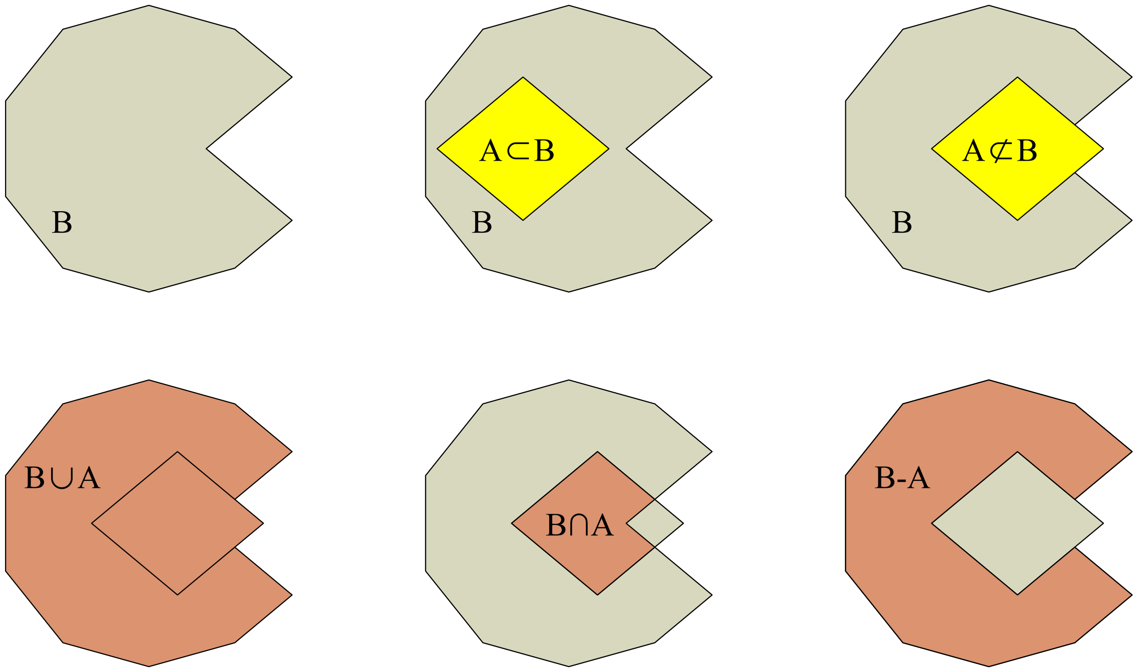


Abbildung 2.1: Venn-Diagramme.

Wie in den ersten drei Skizzen von Abbildung 2.1 angedeutet ist, stehen zwei Vergleichskriterien für gegebene Mengen A, B zur Verfügung:

i) A ist gleich B, d.h.

$$A = B \Leftrightarrow \text{„Die Mengen } A \text{ und } B \text{ haben dieselben Elemente.“ };$$

ii) A ist Teilmenge von B, d.h.

$$A \subset B \Leftrightarrow \text{„Jedes Element von } A \text{ gehört zu } B.\text{“ }.$$

Beispiel. *Es seien*

$$\begin{aligned} A &= \{n \in \mathbb{N} : \ n \geq 3, \ n \textit{ ist ungerade}\} , \\ B &= \{n \in \mathbb{N} : \ n \geq 3, \ n \textit{ ist Primzahl}\} . \end{aligned}$$

Dann gilt $B \subset A$ *und* $A \not\subset B$.[3]

i) *Ist nämlich* $n \in B$*, ist also* n *Primzahl und* $n \geq 3$*, so muss* n *ungerade sein, da* n *sonst durch 2 teilbar und folglich keine Primzahl wäre.*

Wie behauptet erkennt man $n \in A$ *für alle* $n \in B$*, mit anderen Worten* $B \subset A$.

ii) *Um* $A \not\subset B$ *einzusehen, genügt bereits ein Gegenbeispiel:*

Es ist $n = 15 \in A$ *und* $n = 15 \notin B$*. Dies zeigt, dass* A *nicht Teilmenge von* B *sein kann.*

Die Gleichheit von Mengen ist häufig nicht offensichtlich und kann mithilfe der folgenden Äquivalenz überprüft werden:

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B \quad \wedge \quad B \subset A\,.$$

Dieser Weg ist in der Regel für einen „mathematisch sauberen“ Beweis anderen möglichen Varianten vorzuziehen.

Beispiel. *Der Durchmesser eines Halbkreises sei gegeben durch zwei Punkte* A, B*. Es seien*

$$\begin{aligned} D_1 &= \Big\{\textit{Dreiecke } \Delta ABC : C \textit{ liegt auf dem Halbkreis}\Big\}\,, \\ D_2 &= \Big\{\textit{Dreiecke } \Delta ABC : C \textit{ liegt auf dem Halbkreis} \\ &\qquad\qquad \textit{und } \Delta ABC \textit{ hat einen rechten Winkel}\Big\}\,. \end{aligned}$$

Die Inklusion $D_2 \subset D_1$ *ist per definitionem richtig.*

[3] $A \not\subset B$ ist die Negation von $A \subset B$.

Die umgekehrte Inklusion $D_1 \subset D_2$ ist gesondert zu betrachten und nicht trivial. Sie folgt aus dem Satz von Thales und zeigt $D_1 = D_2$.

In den letzten drei Skizzen von Abbildung 2.1 werden die Operationen

i) der Vereinigung

$$A \cup B := \{x : \; x \in A \quad \vee \quad x \in B\} \; ,$$

ii) des Durchschnitts

$$A \cap B := \{x : \; x \in A \quad \wedge \quad x \in B\}$$

iii) und der Differenz

$$A - B := A \setminus B := \{x : \; x \in A \quad \wedge \quad x \notin B\}$$

(des Komplements von B in A) der sogenannten Mengenalgebra vorgestellt.

Sprechweise und Notation.

i) *Zwei Mengen A und B mit $A \cap B = \emptyset$ heißen disjunkt.*

ii) *Sind A_1, A_2, $\dots$, A_n Mengen, so setzt man*

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \; , \qquad \bigcap_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \; .$$

Für elementare Gesetzmäßigkeiten wie das Assoziativ- oder das Distributivgesetz sei auf das Übungskapitel 2.3 verwiesen.

De Morgansche Regeln.

Nun werden exemplarisch die Regeln von de Morgan der Aussagenlogik und der Mengenalgebra diskutiert.

i) Im Kontext der Aussagenlogik lauten diese für zwei gegebene Aussagen A und B wie folgt:

$$\neg(A \vee B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A) \wedge (\neg B)\,,$$

$$\neg(A \wedge B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A) \vee (\neg B)\,.$$

ii) Im Kontext der Mengenalgebra stehen dem für drei Mengen A, B, C die Gleichheiten gegenüber:

$$C - (A \cup B) \;=\; (C - A) \cap (C - B)\,,$$

$$C - (A \cap B) \;=\; (C - A) \cup (C - B)\,.$$

ad *i*) Die oben genannten Äquivalenzen der Aussagen werden mit der Wahrheitstafel aus Tabelle 2.1 belegt.

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg(A \vee B))$	$w((\neg A) \wedge (\neg B))$	$w(\neg(A \wedge B))$	$w((\neg A) \vee (\neg B))$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Tabelle 2.1: Zu den de Morganschen Regeln.

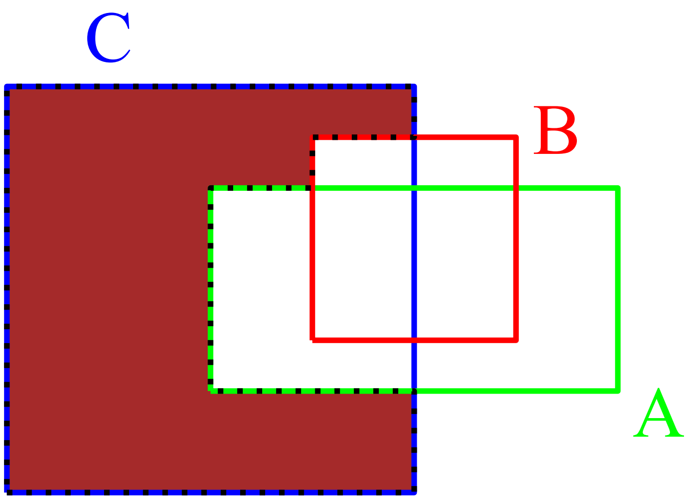


Abbildung 2.2: Die Menge C ohne die Vereinigung von A und B.

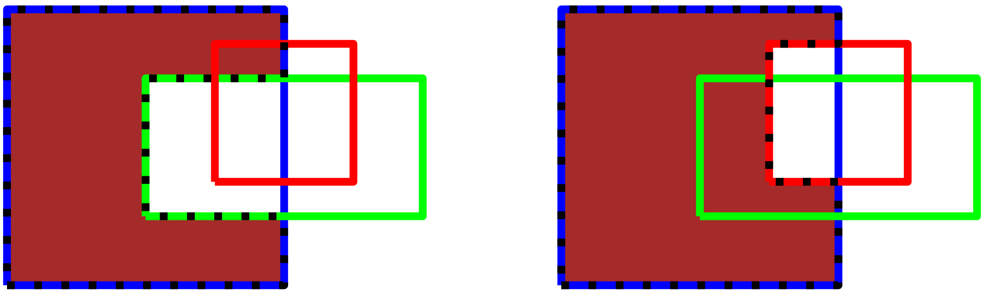


Abbildung 2.3: Links: $C - A$, rechts $C - B$.

ad ii) Exemplarisch wird hier nur die erste Gleichheit diskutiert, die man sich zunächst mithilfe von Venn-Diagrammen veranschaulicht.

Die Abbildungen 2.2 und 2.3 legen die Richtigkeit der Behauptung nahe. Einen Beweis können die Skizzen allerdings nicht ersetzen.

Beweis der ersten de Morganschen Regel.

Es sei zunächst $u \in C - (A \cup B)$. Aus

$$C - (A \cup B) \subset C - A \quad \text{und} \quad C - (A \cup B) \subset C - B$$

folgt unmittelbar

$$u \in (C - A) \cap (C - B) \ ,$$

was die Implikation „$\subset$" der Behauptung belegt.

Es sei nun umgekehrt $u \in (C - A) \cap (C - B)$ angenommen, d.h.

$$(u \in C \text{ und } u \notin A) \ \text{ und } \ (u \in C \text{ und } u \notin B) \ ,$$

$$\text{insbesondere} \quad u \notin A \ \text{ und } \ u \notin B \ , \quad \text{folglich } u \notin A \cup B \ .$$

Gleichzeitig gilt $u \in C$ und die Implikation „$\supset$" ist bewiesen. $\square$

Wie kann der Raum unserer Anschauung geeignet als Menge geschrieben werden?

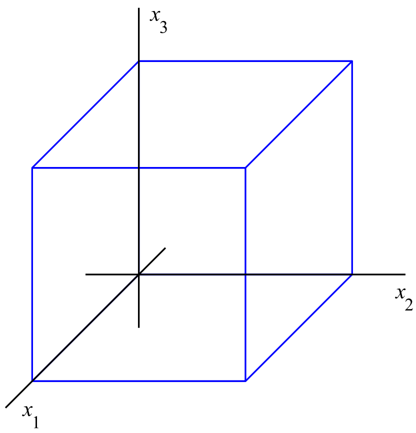


Abbildung 2.4: Ein Würfel im dreidimensionalen Euklidischen Raum.

Ein Punkt des dreidimensionalen Raums, des Euklidischen Raums $\mathbb{R}^3$, wird mithilfe eines geordneten Tupels

$$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z) = \dots$$

charakterisiert, wobei die Eintragungen die Koordinaten[4] in die jeweilige Raumrichtung angeben.

Graphisch veranschaulicht ist dies in Abbildung 2.4. Die Achsen sind nach üblicher Konvention gemäß der „Rechte-Hand-Regel“ angeordnet:

Sie zeigen wie Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand in x_1-, x_2- und x_3-Richtung.

Mit dieser Konvention und der Beschriftung der Achsen kann hier und im Folgenden meist von Richtungspfeilen auf den Achsen abgesehen werden.

Allgemein ist ein Tupel per definitionem ein Element des kartesischen Produkts von Mengen:

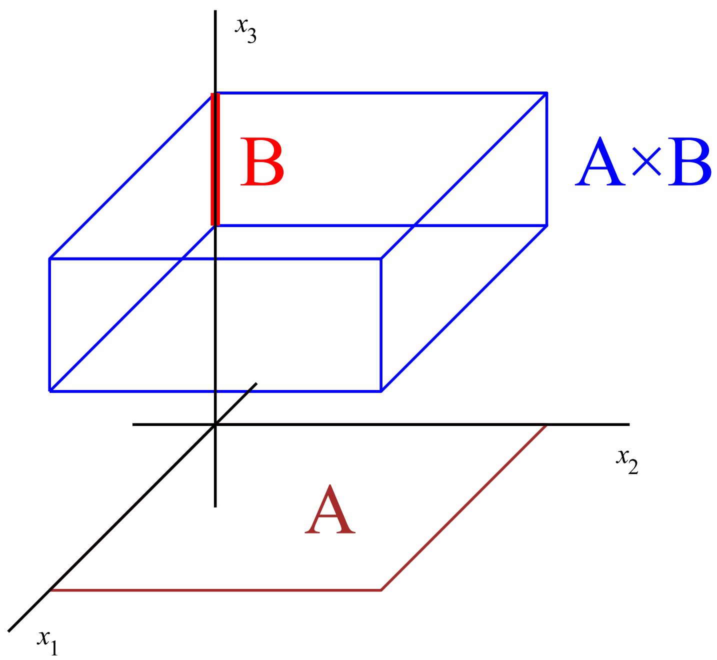


Abbildung 2.5: Veranschaulichung des kartesischen Produktes.

[4]Man spricht nach Descartes auch von kartesischen Koordinaten.

Es seien A und B zwei Mengen. Dann ist (vgl. Abbildung 2.5)

$$A \times B := \big\{(a,b) : \ a \in A \ \ \wedge \ \ b \in B\big\}$$

die Menge aller geordneten Paare.

Vereinbarung und Notation.

i) Man setzt für beliebiges A

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset \ .$$

ii) Sind A_1, A_2, $\ldots$, A_n Mengen, so ist

$$\prod_{k=1}^{n} A_k := A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \ .$$

Dementsprechend ist $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und für beliebiges $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \ mal} = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{R} \ .$$

2.2 Funktionen (Urbild; Bild; Graph; injektiv; surjektiv; bijektiv; Umkehrabbildung; Verkettung)

Zur Beschreibung realer Vorgänge und Zustände in mathematischer Sprache, d.h. zur mathematischen Modellbildung, benötigt man im nächsten Schritt die Begriffe Funktion bzw. Abbildung, die hier gleichbedeutend verwendet werden.

Beispiel. *Betrachtet sei die Temperaturverteilung in einem Raum:*

i) *Jedem Punkt des Raums wird ein bestimmter Temperaturwert zugeordnet.*

ii) *Einem Raumpunkt können dabei nicht zwei unterschiedliche Temperaturwerte zugeordnet werden, wohingegen an verschiedenen Raumpunkten durchaus derselbe Temperaturwert möglich ist.*

Diese Beobachtung beschreibt das Wesen einer Funktion:

Definition 2.2. FUNKTION, ABBILDUNG

i) *Eine Funktion oder Abbildung f von einer Menge A in eine Menge B ordnet jedem Element x aus A genau ein Element y aus B zu.*

Notation: $f: A \to B\,, \quad y = f(x)\,,$

oder äquivalent $f: A \ni x \mapsto f(x) \in B\,.$

ii) *A heißt der Definitionsbereich, B die Zielmenge von f und $y = f(x)$ der Bildpunkt des Urbildpunktes x unter f.*

iii) *Für $\hat{A} \subset A$ heißt*

$$f(\hat{A}) := \left\{f(x):\ x \in \hat{A}\right\} \subset B$$

das Bild von $\hat{A}$ unter f. Im Fall $\hat{A} = A$ schreibt man auch bild (f).

iv) *Für $\hat{B} \subset B$ heißt*

$$f^U(\hat{B}) := \left\{x \in A:\ f(x) \in \hat{B}\right\} \subset A\,.$$

das Urbild von $\hat{B}$ unter f.[5]

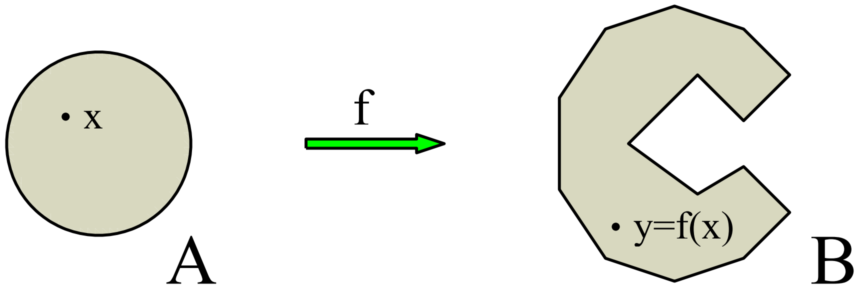


Abbildung 2.6: Eine Abbildung zwischen zwei Mengen.

Bemerkung. *Es ist $f^U(B) = A$, im Allgemeinen aber nicht $f(A) = B$.*

In der Abbildungsvorschrift heißt $x \in A$ das Argument oder die (unabhängige) Variable. Statt x kann jedes andere Symbol die Variable benennen.

Einfache Beispiele. *Die einfachsten Beispiele sind (vgl. Abbildung 2.7)*

i) *die konstante Abbildung $f\colon A \to B$, $f(x) = b$ für alle $x \in A$ mit fixiertem $b \in B$,*

ii) *und die Identität $f\colon A \to A$, $f(x) = x$ für alle $x \in A$.*

Graphische Darstellung einer Funktion.

Die Darstellungsform in Abbildung 2.6 orientiert sich an der Definition einer Funktion als Zuordnung.

[5] Um Verwechslungen mit der Umkehrfunktion zu vermeiden, wird hier das Symbol $f^U(\hat{B})$ anstelle der oft üblichen Notation $f^{-1}(\hat{B})$ verwendet.

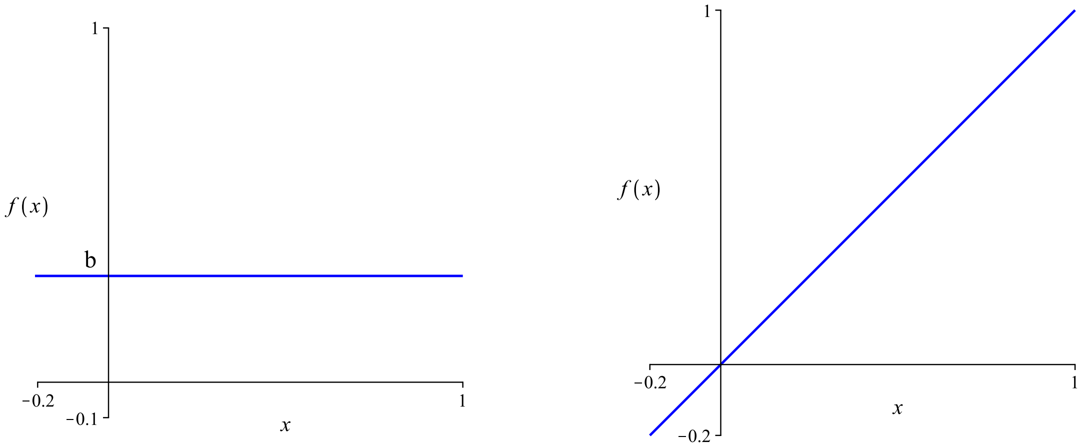


Abbildung 2.7: Konstante Abbildung und Identität im Fall $A = B = \mathbb{R}$.

Die Darstellungsform in Abbildung 2.7 ist statischer Natur und in der Tat wird dort nicht die Funktion sondern deren Graph visualisiert:

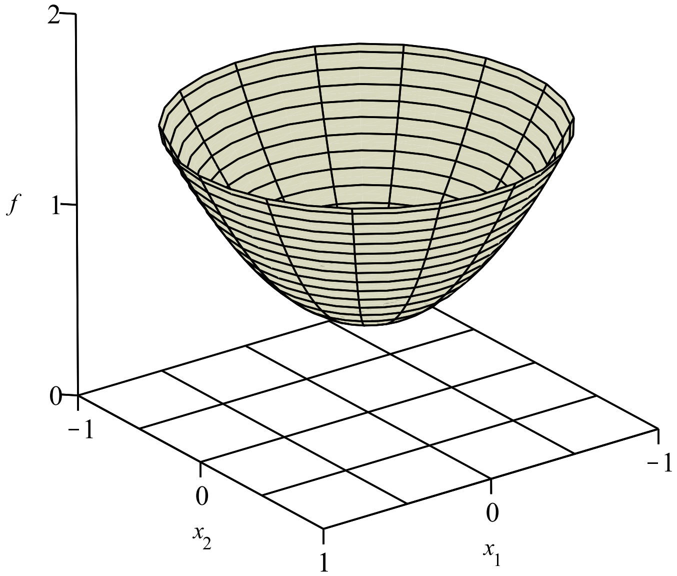


Abbildung 2.8: Der Graph einer Funktion.

Der Graph einer Funktion $f\colon A \to B$ ist die Menge der geordneten Paare

$$\operatorname{graph}(f) := \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset A \times B$$

Bemerkung. *Der Graph ist als Menge nicht mit einer Funktion zu verwechseln.*

Der Graph einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 = A \to \mathbb{R}$ ist in Abbildung 2.8 skizziert. Es handelt sich um eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$.

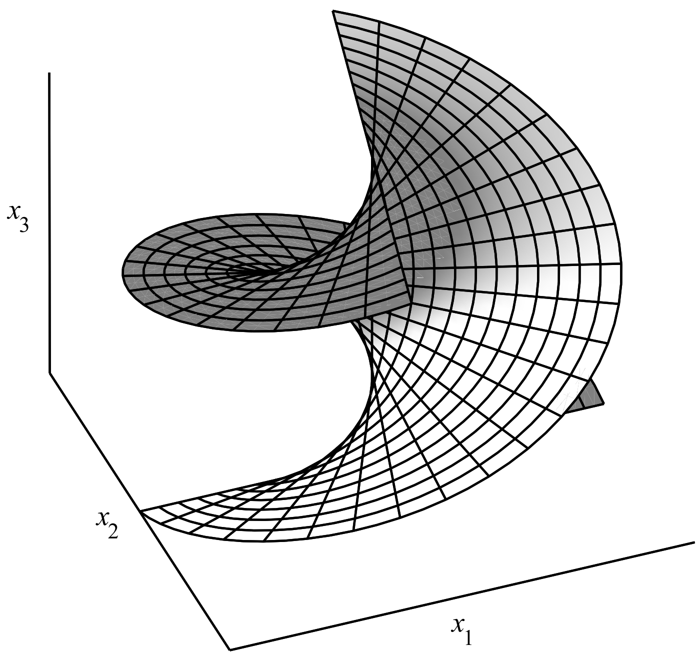


Abbildung 2.9: M_1 ist kein Graph.

Die in der Abbildung 2.9 dargestellte Punktmenge M_1 im $\mathbb{R}^3$ ist kein Graph einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, da es Punkte $(x_1, x_2, x_3) \in M$ und $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \in M$ mit der Eigenschaft $x_1 = \tilde{x}_1$, $x_2 = \tilde{x}_2$ und $x_3 \neq \tilde{x}_3$ gibt.

Die in der Abbildung 2.10 dargestellte Punktmenge M_2 im $\mathbb{R}^3$ ist ebenfalls kein Graph einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

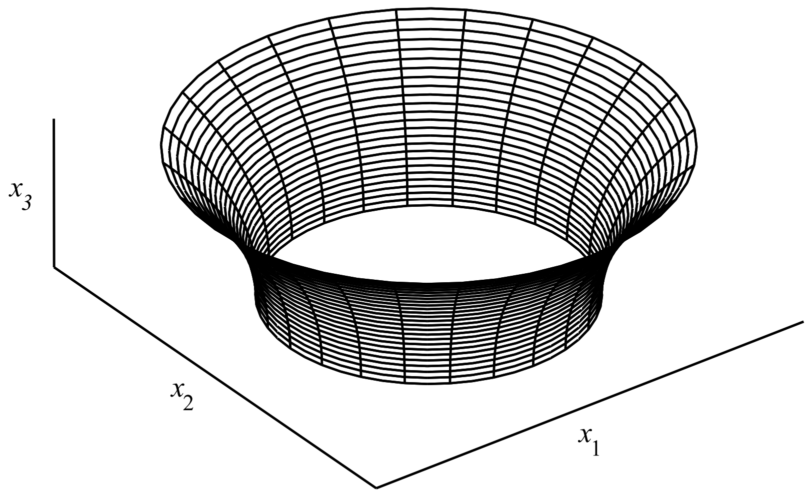


Abbildung 2.10: M_2 ist kein Graph einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, M_2 ist aber Graph einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 - D \to \mathbb{R}$.

Dazu müsste die in der x_1-x_2-Ebene angedeutete Kreisscheibe D zum Definitionsbereich der Funktion gehören.

Die Menge M_2 ist jedoch der Graph einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 - D \to \mathbb{R}$.

Erste charakteristische Eigenschaften einer Abbildung.

Es sei eine illustrierende Liste von Beispielen vorangestellt:

Beispiele.

i) *Die Temperaturverteilung in einem Raum werde, wie bereits oben angedeutet, mithilfe einer Funktion $x \mapsto T(x)$ beschrieben, wobei* *einem Raumpunkt x die Temperatur $T(x)$ zugeordnet werde.*

- ▷ *Herrscht an zwei unterschiedlichen Raumpunkten $x_1 \neq x_2$ die gleiche Temperatur, so gilt $T(x_1) = T(x_2)$.*

ii) *Gegeben sei ein Skatblatt mit 32 Karten. 3 Karten werden nacheinander gezogen und jeweils herausgelegt.*

Diese Ziehung kann als Funktion f beschrieben werden, indem der Menge $A = \{1, 2, 3\}$ (erstes, zweites, drittes Ziehen) die jeweils gezogene Karte zugeordnet wird.

- ▷ *Da keine Karte zweimal gezogen werden kann, wird jeder Zahl aus der Menge $\{1, 2, 3\}$ ein anderes Bild zugeordnet, d.h.:*

  Sind x_1, $x_2 \in A$ und gilt $x_1 \neq x_2$, so folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$.

- ▷ *Weiter beobachtet man, dass nicht alle Karten gezogen werden (lediglich 3 von 32), d.h. nicht jeder mögliche Bildpunkt wird von der Funktion f realisiert.*

iii) *Betrachtet sei die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ mit*

$$f(n) = \begin{cases} 0\ , & \text{falls } n \text{ ungerade}\ , \\ 1\ , & \text{falls } n \text{ gerade}\ . \end{cases}$$

- ▷ *Hier wird z.B. der 1 und der 3 das gleiche Bild (die 0) zugeordnet*

- ▷ *und alle möglichen Bildwerte (0 und 1) werden angenommen.*

iv) Bei einer Veranstaltung mit Platzkarten

▷ *wird jeder Karte ein Platz zugeordnet und umgekehrt.*

Die genannten unterschiedlichen Eigenschaften werden nun systematisiert.

Definition 2.3. ABBILDUNGSEIGENSCHAFTEN

Zu zwei gegebenen Mengen A, B heißt eine Abbildung f von A nach B

i) injektiv, falls aus $x_1, x_2 \in A$ und $x_1 \neq x_2$ folgt: $f(x_1) \neq f(x_2)$;

ii) surjektiv, falls bild $(f) = B$, *falls also jeder Punkt aus B ein Bildpunkt ist;*

iii) bijektiv, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist. In diesem Fall existiert eine Umkehrabbildung $f^{-1}\colon B \to A$, die über die Vorschrift

$$f^{-1}(y) := x \quad \text{für} \quad y = f(x)$$

definiert ist, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} & f^{-1}\big(f(x)\big) = x \quad \text{für alle } x \in A \\ \text{und} \quad & \\ & f\big(f^{-1}(y)\big) = y \quad \text{für alle } y \in B\ . \end{aligned}$$

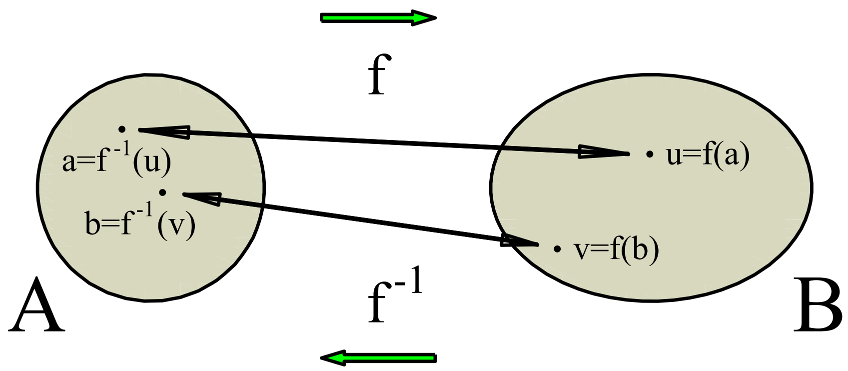


Abbildung 2.11: Zur Umkehrabbildung.

Bemerkungen.

i) *Die Situation ist in Abbildung 2.11 illustriert:*

Einem gegebenen Punkt $x \in A$ wird genau ein Punkt $y = f(x) \in f(A) \subset B$ zugeordnet und aufgrund der Injektivität ist y nicht zusätzlich Bildpunkt eines zweiten Urbildpunktes.

Die Abbildung f^{-1} ordnet dem Punkt y wieder den „Startpunkt“ x zu.

Da die Abbildung f auch surjektiv ist, gilt $f(A) = B$ und die Umkehrabbildung ist folglich auf ganz B definiert.

ii) *Wie das Beispiel $x \mapsto f(x) = x^2$ zeigt, hängen obige Eigenschaften nicht nur von der Abbildungsvorschrift sondern auch vom Definitionsbereich A und von der Zielmenge B der betrachteten Funktion ab.*

Umkehrfunktion einer reellen Funktion.

Im Spezialfall reeller Funktionen von einer Menge $A \subset \mathbb{R}$ in eine Teilmenge der reellen Zahlen[6] kann man die Umkehrfunktion zumindest prinzipiell berechnen:

Gegeben sei eine bijektive Funktion $f\colon \mathbb{R} \supset A \to B \subset \mathbb{R}$ mit Umkehrfunktion $f^{-1}\colon B \to A$.

Man versucht zunächst die Gleichung

$$y = f(x)$$

nach x aufzulösen, d.h. auf die Form

$$x = \text{„Ausdruck, der nur von } y \text{ abhängt“} =: f^{-1}(y)$$

zu bringen und erhält damit die Abbildungsvorschrift der Funktion f^{-1}.

Die formale Vertauschung von x und y liefert dann die gesuchte Abbildungsvorschrift in der üblichen Notation.

Einfaches Beispiel. *Es sei*

$$y = 2x + 4\,, \qquad \textit{folglich} \qquad x = \frac{y}{2} - 2\,.$$

Die Abbildungsvorschrift der Umkehrfunktion lautet

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - 2\,.$$

Probe: In der Tat ist im Beispiel

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}(2x+4) = \frac{2x+4}{2} - 2 = x$$

und analog $f(f^{-1}(x)) = x$ (in der Regel schreibt man $f(f^{-1}(y)) = y$).

[6]Reelle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \supset A \to B \subset \mathbb{R}$ werden in Kapitel 6 ausführlich vorgestellt.

Wie in dem Beispiel (man skizziere $y = 2x + 4$ und $y = (x/2) - 2$ in einem Schaubild) gilt allgemein:

Der Graph von $y = f^{-1}(x)$ entsteht durch Spiegelung des Graphen von $y = f(x)$ an der Winkelhalbierenden (des Graphen der Funktion $y = x$) (vgl. Abbildung 2.12).

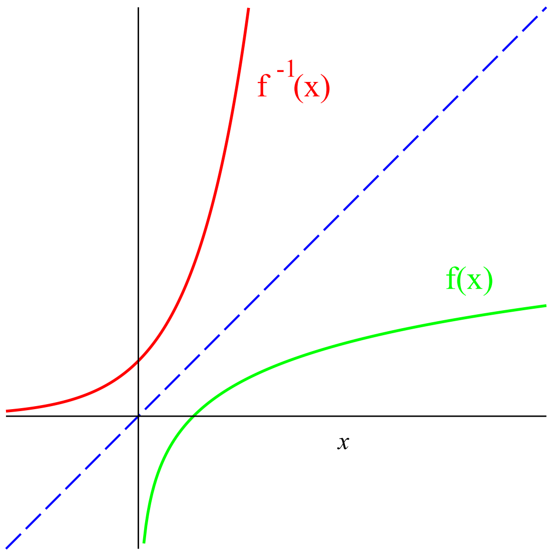


Abbildung 2.12: Zur geometrischen Interpretation der Umkehrfunktion.

Weitere Umkehrfunktionen wie beispielsweise die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen werden in Kapitel 6 vorgestellt.

Komposition von Abbildungen.

In einem Spezialfall ist oben die Komposition von Abbildungen schon diskutiert:

Sei $f\colon A \to B$ bijektiv mit Umkehrabbildung $f^{-1}\colon B \to A$. Dann ist

$$f^{-1} \circ f : \ A \to A \,, \quad x \mapsto f^{-1}\big(f(x)\big) = x \,.$$

Elementare Beispiele wie Skalierungen, Translationen des Koordinatensystems etc. sind von der Form $f(\lambda x)$ oder $f(x - x_0)$, wobei λ und x_0 feste Parameter bezeichnen.

Hintereinanderschaltungen von Funktionen modellieren jedoch eine weit größere Vielzahl von Sachverhalten und Vorgängen.

Umgekehrt können auch gegebene Probleme oft mithilfe von geeigneten Transformationen entscheidend vereinfacht werden.

Beispiele.

i) *Zu Beginn eines Skat-Spiels geschieht das Folgende:*

  ▷ *Von 32 Karten werden je 10 an die drei Spieler und 2 in den „Skat“ verteilt.*

  ▷ *Bei einem „Alleinspiel“ nimmt ein Spieler die Karten aus dem Skat auf.*

  ▷ *Anschließend legt er zwei beliebige seiner dann 12 Karten wieder verdeckt ab („er drückt die Karten“).*

  Hier werden drei Vorgänge hintereinander ausgeführt, was durch die Verkettung von drei Abbildungen modelliert werden kann.

ii) *Eine Kurve ist eine Abbildung eines Zeitintervalls in den Euklidischen Raum.*

  Durchläuft man den zurückgelegten Weg mit einer anderen Geschwindigkeit, so entspricht das einer Umparametrisierung der Kurve.

  Beschrieben wird dies durch die Komposition mit einer geeigneten Transformation des Zeitparameters.

iii) *Kann eine Rechenmaschine die Operationen $x \mapsto x^2$ und $y \mapsto y + 1$ ausführen, so kann sie durch die Hintereinanderausführung auch*

$x^2 + 1$ *berechnen.*

Auf diese Weise entsteht aus elementaren Operationen ein komplexer Algorithmus.

iv) *Hängt ein zweidimensionales Problem in der Tat nur vom Abstand zum Ursprung ab, d.h. ist das Problem radialsymmetrisch, so erleichtert die Transformation auf sogenannte Polarkoordinaten die Rechnungen erheblich.*

Für die mathematische Beschreibung der genannten Beispiele und für viele weitere Anwendungen benötigt man die folgende Definition:

Definition 2.4. VERKETTUNG VON ABBILDUNGEN

Sind drei Mengen A, B, C sowie zwei Abbildungen f: $A \to B$ und g: $B \to C$ gegeben, so heißt die Abbildung

$$g \circ f : \ A \to C \ , \quad \big(g \circ f\big)(x) := g\big(f(x)\big) \ ,$$

die Hintereinanderausführung, die Verkettung oder die Komposition von f und g.

Beispiel. Es seien

$$g : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ , \quad g(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \quad \text{für alle } \ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ ,$$

$$f : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \quad f(x) = x^2 \quad \text{für alle } \ x \in \mathbb{R} \ .$$

Dann ist $f \circ g$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert über die Beziehung

$$\big(f \circ g\big)(x_1, x_2) = f\big(g(x_1, x_2)\big) = f(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 \ ,$$

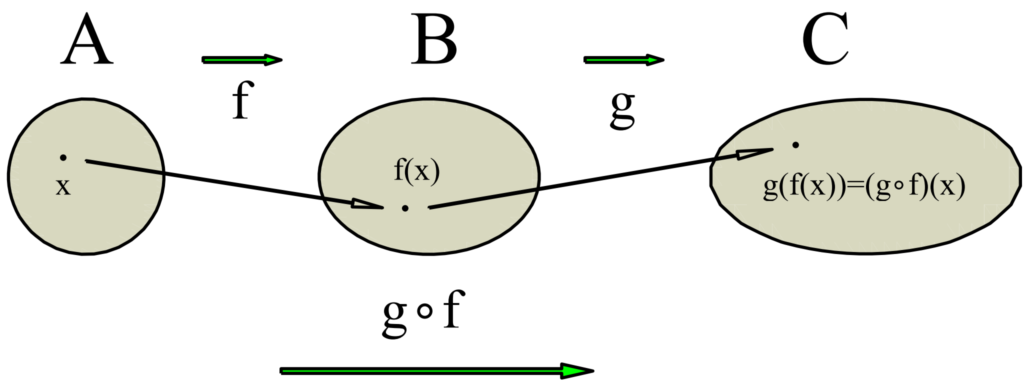


Abbildung 2.13: Zur Verkettung von Abbildungen.

wohingegen die Verknüpfung $g \circ f$ nicht definiert ist.

2.3 Übungsaufgaben zu Kapitel 2

Aufgabe 1. Es seien $A := \{0, 1\}$ und $B := \{1, 3, 5\}$.

Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$i)\ A \subset B\ , \quad ii)\ A \neq B\ , \quad iii)\ \{1\} \in A\ ,$$

$$iv)\ \{(0, 5), (1, 1)\} \subset A \times B\ , \quad v)\ \{1, \{3, 5\}\} \subset B\ .$$

Aufgabe 2. Es sei $A = \{-3, -2, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{3, 4, 5\}$.

Bestimmen Sie

$$A \cap B\ , \quad A \cup B\ , \quad A - B\ , \quad (B - A) \cap C\ , \quad C - (B \cup A) \ \text{ und } \ A \times C\ .$$

Aufgabe 3.* Zu einer gegebenen Menge A ist die Potenzmenge von A per definitionem eine Menge von Mengen, die gegeben ist durch

$$\mathcal{P}(A) := \big\{B :\ B \subset A\big\}\ .$$

Bestimmen Sie $\mathcal{P}(\{4, -2, 2\})$ und $\mathcal{P}(\{-1, 1, \{1\}\})$.

Aufgabe 4.* Es sei $A \subset \mathbb{N}$ die Menge der geraden Zahlen und $B \subset \mathbb{N}$ die Menge der durch 3 teilbaren Zahlen.

Bestimmen Sie die Mengen $A \cap B$ und $B - A$.

Aufgabe 5.* Zeigen Sie $A = B$ für

$$\begin{aligned} A &:= \{\text{Dreiecke } D : D \text{ ist rechtwinklig und beide Katheten haben die Länge } 1\} , \\ B &:= \{\text{Dreiecke } D : D \text{ hat zwei 45 Grad Winkel und die längste Seite hat die Länge } \sqrt{2}\} . \end{aligned}$$

Aufgabe 6. Es seien A, B und C Mengen.

i) * Überlegen Sie sich die folgende Gleichheit mittels eines Venn-Diagramms und geben Sie anschließend einen formalen Beweis:

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) .$$

ii) Verdeutlichen Sie die folgende Beziehung zunächst anhand eines Venn-Diagrammes und geben Sie anschließend einen formalen Beweis:

$$(A \cup B) \cap (C - B) \subset (A \cup C) .$$

Aufgabe 7. Es seien A, B und C Mengen.

i) Zeigen Sie das Distributivgesetz

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) .$$

Gibt es ein weiteres Distributivgesetz für Mengen?

ii) Zeigen Sie das Assoziativgesetz

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) .$$

Gibt es ein weiteres Assoziativgesetz für Mengen?

Aufgabe 8.* Es sei $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq 30$, eine feste Zahl. Von 50 Kugeln in einer Urne seien 30 Kugeln rot und n Kugeln seien aus Holz gefertigt.

Was kann man über die maximale bzw. minimale Zahl der Kugeln aussagen, die sowohl rot sind als auch aus Holz gefertigt sind?

Veranschaulichen Sie das Ergebnis in einer Skizze mit unterschiedlichen Intervallen.

Hinweis. Betrachten Sie die Mengen

$$\begin{aligned} R &:= \{\text{„}\textit{rote Kugeln}\text{“}\} \subset A\,, \qquad H := \{\text{„}\textit{Holzkugeln}\text{“}\} \subset A\,, \\ A &:= \{\text{„}\textit{alle Kugeln in der Urne}\text{“}\} \end{aligned}$$

und finden Sie die maximale bzw. die minimale Anzahl von Elementen aus der Menge $R \cap H$. Verwenden Sie dabei eine Regel von de Morgan.

Aufgabe 9.* Füllen Sie die folgende Tabelle 2.2 für beliebige Mengen A, B und C aus.

Machen Sie sich Ihre Antwort dabei zunächst mithilfe von Venn-Diagrammen klar und geben Sie dann einen formalen Beweis.

---

	richtig	falsch
$\big(A \cap (B \cup C)\big) = \big(A \cup (B \cap C)\big)$		
$\big(A \cup (B \cap C)\big) \subset \big((A \cup B) \cap (A \cup C)\big)$		
$\big(A \cup (B \cap C)\big) \supset \big((A \cup B) \cap (A \cup C)\big)$		
$x \in \big(A \cup (B \cap C)\big) - (B \cap A) \Rightarrow x \in A \cup C$		
$x \in \big(A \cup (B \cap C)\big) - (B \cap A) \Rightarrow x \in B \cup C$		

Tabelle 2.2: Zu Aufgabe 9.

Aufgabe 10. Finden Sie jeweils eine Punktmenge $M \subset [0,1] \times [0,1]$, sodass

i) M Graph einer Funktion ist; *ii)* M nicht Graph einer Funktion ist.

Aufgabe 11. Untersuchen Sie die obigen Beispiele *i)*–*iv)* aus Kapitel 2.2 auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

Aufgabe 12. Für welche A, $B \subset \mathbb{R}$ ist $f\colon A \to B$, $x \mapsto (x-1)^2 + 2$

i) surjektiv aber nicht injektiv; *ii)* injektiv aber nicht surjektiv;

iii) bijektiv; *iv)* weder injektiv noch surjektiv?

Aufgabe 13.*

i) Finden Sie Teilmengen A, B der natürlichen Zahlen, sodass es keine injektive Abbildung $f\colon A \to B$ gibt.

ii) Finden Sie Teilmengen A, B der natürlichen Zahlen, sodass es keine surjektive Abbildung $f\colon A \to B$ gibt.

iii) Es sei $A = \{2n : \ n \in \mathbb{N}\}$. Gibt es eine bijektive Abbildung $A \to \mathbb{N}$?

Aufgabe 14. Ist die Funktion $f \circ g$ bijektiv, falls die Abbildungen g und f gegeben sind durch

$$g : \ \{1,2\} \mapsto \{1,2,3\} \ \text{ mit } \ g(1) = 1 \ , \ \ g(2) = 2 \ ,$$

$$f : \ \{1,2,3\} \mapsto \{1,2\} \ \text{ mit } \ f(1) = 1 \ , \ \ f(2) = 2 \ , \ \ f(3) = 1 \ ?$$

Aufgabe 15. Betrachten Sie die Menge aller 6-elementigen Teilmengen aus $\{1, 2, \ldots, 49\}$

$$\mathcal{M} := \big\{ M \subset \{1, 2, \ldots, 49\} : \ M \text{ hat 6 Elemente} \big\} \ .$$

Drei aufeinander folgende Ziehungen der Lottozahlen (6 aus 49) kann man durch eine Funktion

$$h : \ \mathbb{N} \to \mathcal{M} \times \mathcal{M} \times \mathcal{M} \ , \qquad n \mapsto (M_1, M_2, M_3) \ ,$$

modellieren, wobei M_1 die n-te Ziehung, M_2 die $(n+1)$-te Ziehung und M_3 die $(n+2)$-te Ziehung bezeichnen.

Zudem sei g die Projektion

$$g : \ \mathcal{M} \times \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M} \times \mathcal{M} \ , \qquad (M_1, M_2, M_3) \mapsto (M_1, M_3)$$

und schließlich sei

$$f : \ \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \ , \qquad f(M_1, M_2) = \#(M_1 \cap M_2) \ .$$

Hier bezeichnet $\#A$ die Mächtigkeit einer endlichen Menge A und gibt die Anzahl der Elemente von A an.

Was beschreibt die Funktion $f \circ g \circ h$. Geben Sie deren Bild- und Urbildmenge an.

Aufgabe 16.* Begründen oder widerlegen Sie für zwei Abbildungen $g\colon X \to Y$ und $f\colon Y \to Z$:

i) g, f bijektiv $\Rightarrow f \circ g$ bijektiv ;

ii) $f \circ g$ surjektiv $\Rightarrow f$ surjektiv ;

iii) g injektiv, $f \circ g$ bijektiv $\Rightarrow f$ injektiv .

Augabe 17.* Es seien A, B zwei Mengen und $f\colon A \to B$ eine Abbildung.

Zeigen Sie für C, $D \subset A$ und E, $F \subset B$:

i) $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$.

ii) Die umgekehrte Inklusion aus Teil (a) gilt nicht.

Hinweis. Betrachten Sie dazu Mengen $A = \{0, 1, 2\}$ *und* $B = \{2, 5\}$ *sowie die Funktion* $f\colon A \to B$ *mit* $f(0) = f(1) = 5$, $f(2) = 2$.

iii) $f^U(E \cap F) = f^U(E) \cap f^U(F)$.

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben.

Aufgabe 3. Die Potenzmengen (mit jeweils 2^3 Elementen, vgl. Übungskapitel 3.4) lauten

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \big\{\emptyset, \{4\}, \{-2\}, \{2\}, \{4,-2\}, \{4,2\}, \{-2,2\}, \{4,-2,2\}\big\}\ , \qquad \text{bzw.} \\
\mathcal{P} &= \big\{\emptyset, \{-1\}, \{1\}, \{\{1\}\}, \{-1,1\}, \{-1,\{1\}\}, \{1,\{1\}\}, \{-1,1,\{1\}\}\big\}\ .
\end{aligned}$$

Aufgabe 4. Es seien

$$\begin{aligned}
A &= \{a \in \mathbb{N} :\ a = 2n \ \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\} = \{2,4,6,8,10,12,\dots\}\ , \\
B &= \{b \in \mathbb{N} :\ b = 3m \ \text{ für ein } m \in \mathbb{N}\} = \{3,6,9,12,15,18,\dots\}\ .
\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
A \cap B &= M_1 := \{k \in \mathbb{N} :\ k = 6l \ \text{ für ein } l \in \mathbb{N}\} = \{6,12,18,\dots\}\ , \\
B - A &= M_2 := \{k \in \mathbb{N} :\ k = 6l - 3 \ \text{ für ein } l \in \mathbb{N}\} = \{3,9,15,\dots\}\ .
\end{aligned}$$

Dies soll nun gezeigt werden, ohne direkten Bezug auf die Teilbarkeit durch 6 zu nehmen:

Um die erste Gleichheit zu zeigen, sei $p \in A \cap B$. Per definitionem existieren dann natürliche Zahlen n_1, n_2 mit

$$p = 2n_1 = 3n_2\ , \qquad \text{also} \qquad \mathbb{N} \ni n_1 = \frac{3}{2}n_2 = n_2 + \frac{1}{2}n_2\ .$$

Dies impliziert, dass n_2 gerade sein muss,

$$n_2 = 2l \qquad \text{für ein } \ l \in \mathbb{N}\ , \qquad \text{d.h.} \qquad p = 3n_2 = 6l \in M_1\ .$$

Ist umgekehrt $p \in M_1$, so gilt offensichtlich $p \in A$ und $p \in B$.

Um die zweite Gleichheit zu zeigen, sei nun $p \in B - A$. Wegen $p \in B$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$p = 3n = 2n + n \ .$$

Mit $p \notin A$ muss dementsprechend auch n ungerade sein, weshalb ein $l \in \mathbb{N}$ existiert mit $n = 2l - 1$. Man erkennt

$$p = 3n = 6l - 3 \in M_2 \ .$$

Die umgekehrte Inklusion ist wieder offensichtlich.

Aufgabe 5. Ist $D \in A$, so folgt (da beide Katheten gleiche Länge haben), dass D zwei 45 Grad Winkel haben muss.

Aus dem Satz des Pythagoras (Kathetenlänge 1 ist angenommen) folgt weiter, dass die längste Seite die Länge $\sqrt{2}$ hat, also gilt $A \subset B$.

Ist umgekehrt $D \in B$, so folgt (Winkelsumme im Dreieck ist 180 Grad), dass D rechtwinklig ist.

Die längste Seite ist die Hypotenuse (nach Annahme von der Länge $\sqrt{2}$), die Katheten haben gleiche Länge (zwei 45 Grad Winkel) und nach dem Satz des Pythagoras sind sie von der Länge 1.

Also $B \subset A$ und somit auch $A = B$.

Aufgabe 6. *i*). Sei zunächst $x \in (A - B) \cup (B - A)$, d.h.

$$(x \in A \text{ und } x \notin B) \quad \text{oder} \quad (x \in B \text{ und } x \notin A) \ .$$

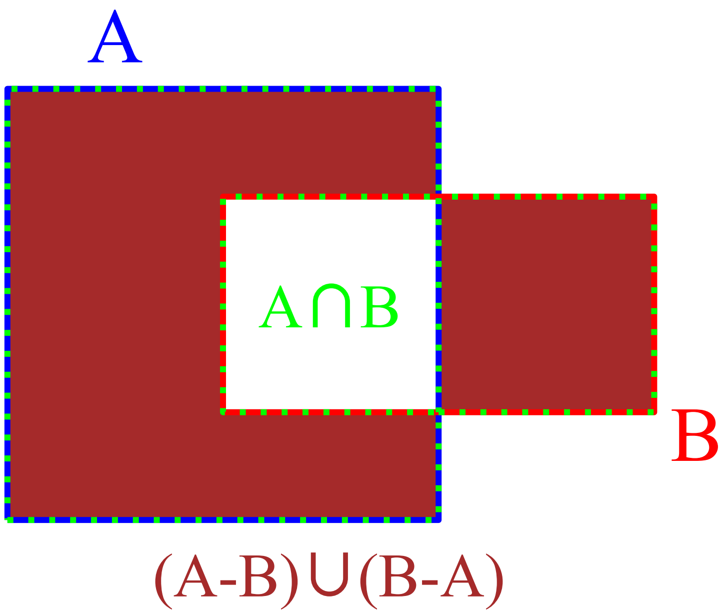


Abbildung 2.14: $(A - B) \cup (B - A)$.

Insbesondere gilt (wegen $A,\, B \subset A \cup B,\ A \cap B \subset A,\, B$)

$$(x \in A \cup B \text{ und } x \notin B) \quad \text{oder} \quad (x \in A \cup B \text{ und } x \notin A)\ , \quad \text{also}$$

$$(x \in A \cup B \text{ und } x \notin (B \cap A)) \quad \text{oder} \quad (x \in A \cup B \text{ und } x \notin (A \cap B))\ .$$

Damit ist die erste Inklusion gezeigt:

$$x \in (A \cup B) - (A \cap B)\ .$$

Sei nun $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$, d.h. (vgl. zweite Regel von de Morgan)

$$(x \in A \text{ oder } x \in B) \quad \text{und} \quad (x \notin A \text{ oder } x \notin B)\ .$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} & x \in A \quad \text{und} \quad (x \notin A \text{ oder } x \notin B) \\ \text{oder:} \quad & x \in B \quad \text{und} \quad (x \notin A \text{ oder } x \notin B)\ . \end{aligned}$$

Wie zu zeigen war, erhält man

$$x \in (A - B) \cup (B - A) . \quad \square$$

Aufgabe 8. Es seien

$$\begin{aligned} R &:= \{\text{„rote Kugeln"}\} \subset A , \quad H := \{\text{„Holzkugeln"}\} \subset A , \\ A &:= \{\text{„alle Kugeln in der Urne"}\} . \end{aligned}$$

Es sei weiter k die abzuschätzende Zahl, d.h. die Zahl der Kugeln in der Urne, die sowohl rot als auch aus Holz gefertigt sind – mit anderen Worten ist k die Anzahl der Elemente aus $R \cap H$.

Die zweite Regel von de Morgan besagt:

$$(A - R) \cup (A - H) = A - (R \cap H)$$

und die Anzahl der Elemente der Menge auf der rechten Seite ist $50 - k$.

Die Anzahl der Elemente aus $A - R$ ist $50 - 30 = 20$, die der Elemente aus $A - H$ ist $50 - n$.

Zur maximalen Anzahl $k_{\max}$ der Elemente aus $R \cap H$:

Sind alle Holzkugeln rot, also

$$A - R \subset A - H , \quad \text{d.h. } H \subset R ,$$

so ist die Anzahl der Elemente auf der linken Seite obiger de Morganscher Regel minimal und

$$50 - n = 50 - k_{\max} , \quad k_{\max} = n .$$

Zur minimalen Anzahl $k_{\min}$ der Elemente aus $R \cap H$:

Gilt die Ungleichung

$$(50 - 30) + (50 - n) \leq 50 \quad \big(\Leftrightarrow \quad 20 \leq n \big) ,$$

so können $A - R$ und $A - H$ disjunkt sein und man hat

$$k_{\min} = 50 - \big[(50 - 30) + (50 - n)\big] = n - 20 .$$

Gilt schließlich $n < 20$, so kann $R \cap H$ leer sein, d.h. $k_{\min} = 0$.

Die Situation kann man sich leicht anhand von Intervallen verdeutlichen:

In Abbildung 2.15 ist die Menge $A = [0, 50]$ blau dargestellt und es ist beispielhaft $n = 27$ gewählt.

Die Menge R entspricht dem Intervall $[0, 30]$, darunter ist zunächst H als das Intervall $[0, 27]$ angedeutet. Man erkennt mit dieser Wahl leicht, dass $k_{\max} = 27$ (grün gepunktet).

Um $k_{\min}$ abzuschätzen, wählt man in der Darstellung $H = [23, 50]$. Schwarz gepunktet erkennt man hier, dass $A - R$ und $A - H$ nun disjunkt sind, im Beispiel liest man ganz unten $k_{\min} = 7$ ab.

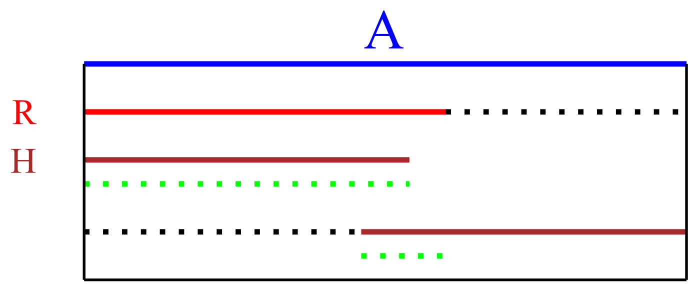


Abbildung 2.15: Abschätzung von $k_{\min}$ und $k_{\max}$.

Aufgabe 9. Die richtigen Antworten sind in Tabelle 2.3 angekreuzt.

	richtig	falsch
$\big(A \cap (B \cup C)\big) = \big(A \cup (B \cap C)\big)$		$\otimes$
$\big(A \cup (B \cap C)\big) \subset \big((A \cup B) \cap (A \cup C)\big)$	$\otimes$	
$\big(A \cup (B \cap C)\big) \supset \big((A \cup B) \cap (A \cup C)\big)$	$\otimes$	
$x \in \big(A \cup (B \cap C)\big) - (B \cap A) \Rightarrow x \in A \cup C$	$\otimes$	
$x \in \big(A \cup (B \cap C)\big) - (B \cap A) \Rightarrow x \in B \cup C$		$\otimes$

Tabelle 2.3: Zu Aufgabe 9.

Aufgabe 13.

i) Setze $A = \{1, 2\}$ und $B = \{1\}$.

Für jede Funktion $f\colon A \to B$ gilt in diesem Fall $f(1) = 1 = f(2)$, sodass f nicht injektiv ist.

ii) Setze $A = \{1\}$ und $B = \{1, 2\}$.

Dann gilt für jede Funktion $f\colon A \to B$ entweder $\operatorname{bild}(f) = \{1\}$ oder $\operatorname{bild}(f) = \{2\}$, sodass f nicht surjektiv ist.

iii) Ja, als Beispiel dient die Abbildung

$$f : \ A \to \mathbb{N}\,, \qquad x \mapsto \frac{n}{2}\,.$$

Aufgabe 16.

i) Man argumentiere mit den Eigenschaften „injektiv“ und „surjektiv“ oder: Die Existenz von f^{-1} und g^{-1} zeigt[7]

$$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = \mathrm{id}\ , \qquad \text{d.h.}\ \ (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}\ .$$

ii) Dies folgt direkt aus $\mathrm{bild}(f \circ g) \subset \mathrm{bild}(f)$.

iii) Man betrachte beispielsweise die injektive Funktion

$$g\colon \{1,2\} \mapsto \{1,2,3\} \qquad \text{mit}\ \ g(1) = 1,\ \ g(2) = 2$$

sowie

$$f\colon \{1,2,3\} \mapsto \{1,2\} \qquad \text{mit}\ \ f(1) = 1,\ \ f(2) = 2,\ \ f(3) = 1.$$

Die Funktion $f \circ g$ ist bijektiv, die Funktion f ist aber nicht injektiv:

$$f \circ g :\ \{1,2\} \to \{1,2\}\ , \qquad (f \circ g)(1) = 1\ , \ \ (f \circ g)(2) = 2\ .$$

Aufgabe 17.

i) Sei zunächst $y \in f(C \cap D)$. Dann existiert per definitionem ein $x \in C \cap D$, sodass $f(x) = y$ gilt.

Es ist insbesondere $x \in C$, also $y \in f(C)$. Ebenso ist $x \in D$, also $y \in f(D)$. Zusammen ergibt sich $y \in f(C) \cap f(D)$.

ii) Als Gegenbeispiel für die umgekehrte Inklusion betrachte man die Mengen $A = \{0,1,2\}$ und $B = \{2,5\}$.

[7]Die sogenannte Identität ordnet als Funktion id: $A \to A$ jedem Element aus A sich selbst zu.

Weiter sei $f\colon A \to B$ definiert via $f(0) = f(1) = 5$, $f(2) = 2$.

Für $C = \{0, 2\}$ und $D = \{1, 2\}$ gilt $C \cap D = \{2\}$, folglich $f(C \cap D) = \{2\}$.

Es ist aber $f(C) = f(D) = \{2, 5\}$ und damit

$$f(C) \cap f(D) = \{2, 5\} \not\subset f(C \cap D)\ .$$

iii) Es ist $x \in f^U(E) \cap f^U(F)$ genau dann, wenn

$$x \in f^U(E) \quad \text{und} \quad x \in f^U(F)\ .$$

Dies wiederum ist genau dann erfüllt, wenn gilt

$$f(x) \in E \quad \text{und} \quad f(x) \in F\ .$$

Das bedeutet per definitionem

$$f(x) \in E \cap F\ ,$$

was schließlich äquivalent ist zu der Formulierung

$$x \in f^U(E \cap F)\ .$$

Kapitel 3

Natürliche und ganze Zahlen, vollständige Induktion und Kombinatorik

3.1 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ (Gruppe; Ordnungsrelation)

Jeder hat eine intuitive Vorstellung von der Menge der natürlichen Zahlen die sich in den Axiomen von Peano widerspiegelt und die im Wesentlichen von der Existenz einer Nachfolgeabbildung geprägt ist.

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3 \dots\}$ ist charakterisiert durch

i) 1 ist eine natürliche Zahl, $1 \in \mathbb{N}$;[1]

ii) zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine nachfolgende natürliche Zahl $(n+1) \in \mathbb{N}$.

Was ist mit der Gleichung $m + z = n$ in $\mathbb{N}$?

Die natürlichen Zahlen sind über die Nachfolgeabbildung mit einer Addition versehen. Zur Lösung von Gleichungen der Form

$$m + z = n \,, \quad m,\ n \in \mathbb{N} \text{ gegeben,} \quad \text{gesucht } z \,,$$

[1]Null ist im Sinne dieser Charakterisierung keine natürliche Zahl. Die Vereinigung der Menge der natürlichen Zahlen mit der Null wird mit $\mathbb{N}_0$ bezeichnet.

reicht dies jedoch bekanntlich nicht aus.

Man benötigt eine Subtraktion, sodass die Menge $\mathbb{N}$ auf die Menge der ganzen Zahlen erweitert werden muss:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} .$$

Die algebraische Struktur der ganzen Zahlen.

Die ganzen Zahlen versehen mit der Addition haben eine besondere Struktur, die man kommutative oder Abelsche Gruppe nennt.

Nicht nur die Menge $\mathbb{Z}$ hat die Struktur einer Gruppe. Zahlreiche weitere Operationen und Objekte gehorchen den gleichen Spielregeln.

Definition 3.1. GRUPPE

Eine Menge $\mathbb{G}$ versehen mit einer Verknüpfung „$\circ$“ heißt Gruppe $(\mathbb{G},\circ)$, falls jedem geordneten Paar von Elementen g_1 und g_2 aus $\mathbb{G}$ ein Element $g_1 \circ g_2$ aus G (Abgeschlossenheit) zuordnet wird, mit:

i) Es gibt genau ein neutrales Element $e \in \mathbb{G}$, sodass für alle $g \in \mathbb{G}$

$$e \circ g = g \circ e = g .$$

ii) Zu jedem $g \in \mathbb{G}$ existiert genau ein inverses Element $\tilde{g} \in \mathbb{G}$ mit

$$g \circ \tilde{g} = \tilde{g} \circ g = e .$$

iii) Für alle g_1, g_2, g_3 aus $\mathbb{G}$ gilt das Assoziativgesetz

$$g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3 .$$

Eine Gruppe heißt kommutativ (oder Abelsch), falls zusätzlich gilt:

Für alle g_1, g_2 aus $\mathbb{G}$ ist

$$g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1 \ .$$

Bemerkung. *Im Fall ($\mathbb{Z}$,+) ist in Definition 3.1 die Menge $\mathbb{G}$ durch $\mathbb{Z}$ und die Verknüpfung „$\circ$“ durch „+“ zu ersetzen.*

- *Das neutrale Element e ist in diesem Fall die 0.*

- *Das inverse Element $\tilde{z}$ einer ganzen Zahl z bzgl. der Addition wird als $-z$ bezeichnet (Schreibweise: $m + (-z) = m - z$).*

- *Die eindeutige Lösung der Gleichung $m + z = n$ ist $z = -m + n$.*

Kurzer Exkurs: Endliche Gruppen als weitere Beispiele.

Eine Gruppe $(\mathbb{G}, \circ)$ heißt endliche Gruppe, sofern die Menge G nur endlich viele Elemente hat (vgl. Definition 4.2), $\mathbb{G} = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Die Verknüpfung kann in diesem Fall mithilfe einer Verknüpfungstabelle definiert werden (vgl. Tabelle 3.1).

Beispiel. *Man betrachte ein Rechteck R mit zwei unterschiedlich langen Seiten.*

Mit der Notation $R = R(1,2,3,4)$, wobei $(1,2,3,4)$ für die Anordnung der A_i, $i = 1, \dots, 4$, nach Abbildung 3.1 steht,

- *lässt das neutrale Element e das Rechteck $R(1,2,3,4)$ unverändert,*

$\circ$	g_1	g_2	$\dots$	g_j	$\dots$	g_n
g_1	$g_1 \circ g_1$	$g_1 \circ g_2$	$\dots$		$\dots$	$g_1 \circ g_n$
$\vdots$						
g_i			$\dots$	$\mathbf{g_i \circ g_j}$	$\dots$	
$\vdots$						
g_n	$g_n \circ g_1$	$\dots$			$\dots$	$g_n \circ g_n$

.

Tabelle 3.1: Eine Verküpfungstabelle.

- ▷ *führt eine Drehung d um 180° Grad auf das deckungsgleiche Rechteck $R(3,4,1,2)$,*

- ▷ *ergibt eine Spiegelung $s^{(1)}$ von $R(1,2,3,4)$ an der Achse s_1 das Rechteck $R(2,1,4,3)$,*

- ▷ *liefert eine Spiegelung $s^{(2)}$ an der Achse s_2 ausgehend von dem Rechteck $R(1,2,3,4)$ das Rechteck $R(4,3,2,1)$.*

Diese vier Operationen bilden zusammen die sogenannte Kleinsche Vierergruppe.

Durch Nachrechnen anhand der Verknüpfungstabelle 3.2 erkennt man, dass es sich um eine Abelsche Gruppe handelt.

$\circ$	e	d	$s^{(1)}$	$s^{(2)}$
e	e	d	$s^{(1)}$	$s^{(2)}$
d	d	e	$s^{(2)}$	$s^{(1)}$
$s^{(1)}$	$s^{(1)}$	$s^{(2)}$	e	d
$s^{(2)}$	$s^{(2)}$	$s^{(1)}$	d	e

.

Tabelle 3.2: Verküpfungstabelle der Kleinschen Vierergruppe.

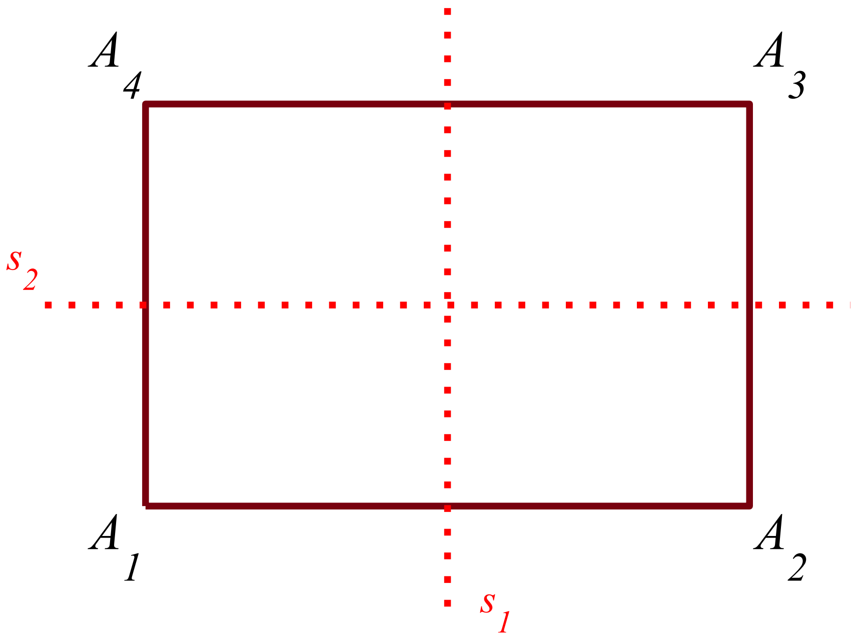


Abbildung 3.1: Zur Kleinschen Vierergruppe.

Weitere Beispiele, auch für nicht-kommutative Gruppen, finden sich im Übungskapitel 3.4.

Zurück zu $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.

Die natürlichen Zahlen (und ebenso die ganzen Zahlen) sind neben der Addition mit einer Multiplikation versehen.

Die Multiplikation kann wie die Addition als Abbildung $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ aufgefasst werden, nämlich als

$$\cdot : \ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (m, n) \mapsto m \cdot n \in \mathbb{N} \,,$$

wobei der „Malpunkt“ meist weggelassen wird.

Es gelten die bekannten Rechenregeln, auf die im Rahmen der Axiomatik der reellen Zahlen eingegangen wird.

Schließlich ist in den natürlichen Zahlen eine sogenannte Ordnungsrelation „<“ definiert, die den Eigenschaften genügt:

i) $n < n+1$ (n kleiner[2] als $n+1$);

ii) je zwei ganze Zahlen m, n sind vergleichbar:

Entweder gilt $m < n$ oder $n < m$ oder $m = n$.

Summen- und Produktzeichen.

Als abkürzende und in der Regel vereinfachende Schreibweise werden häufig das Summen- und das Produktzeichen verwendet.

Mit dieser Schreibweise werden keine neuen Operationen eingeführt.

i) Summenzeichen: Es seien a_1, a_2, ..., a_n Summanden mit Werten in den natürlichen oder ganzen (rationalen, reellen, komplexen) Zahlen.

Dann wird die Summe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \quad \text{lediglich abgekürzt als} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k \, .$$

Man nennt k den Summationsindex und die Menge aller k, über die summiert wird, die Indexmenge.

Der Summationsindex kann umbenannt oder durch einen anderen Ausdruck ersetzt werden, wobei sich die Indexmenge evtl. verändert.

Die Indexmenge muss zudem nicht bei 1 anfangen.

---

[2] „kleiner gleich“, „größer“, „größer gleich“: $m \le n :\Leftrightarrow m < n$ oder $m = n$; $m > n :\Leftrightarrow n < m$; $m \ge n :\Leftrightarrow n \le m$.

Beispiele. *Es gelten die folgenden Gleichheiten*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{l=1}^{n} a_l \ , \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=2}^{n+1} a_{j-1} = \sum_{i=-3}^{n-4} a_{i+4} \ ,$$

$$\sum_{m=0}^{2} b_{2m} = b_0 + b_2 + b_4 \ , \qquad \sum_{m=3}^{5} b_{2m+1} = b_7 + b_9 + b_{11} \ .$$

Im Fall konstanter Summanden ($a_1 = \cdots = a_n = a$) gilt offensichtlich

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ mal}} = na \ .$$

Ebenso offensichtlich sind die Rechenregeln (mit einer Konstanten c)

$$\sum_{k=n}^{m} a_k + \sum_{k=n}^{m} b_k = \sum_{k=n}^{m} (a_k + b_k) \ , \qquad c \sum_{k=n}^{m} a_k = \sum_{k=n}^{m} (c a_k) \ .$$

Auch Doppelsummen können betrachtet werden:

$$\sum_{k=i}^{j} \sum_{l=m}^{n} a_{kl} := \sum_{k=i}^{j} \left[\sum_{l=m}^{n} a_{kl} \right] .$$

Schließlich ist nach Vereinbarung die leere Summe, d.h. die Summe über eine leere Indexmenge, gleich Null, insbesondere

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0 \ , \qquad \text{falls} \ \ m > n \ .$$

ii) Produktzeichen: Es seien a_1, a_2, ..., a_n Faktoren analog zu den Summanden im obigen Exkurs zu Summenzeichen.

Die abkürzende Schreibweise für das Produkt

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ \ldots \ \cdot a_n \quad \text{ist} \quad \prod_{k=1}^{n} a_k \ .$$

Der Produktindex und die Indexmenge werden genauso behandelt wie der Summationsindex und die Indexmenge.

Das leere Produkt ist nach Vereinbarung 1.[3]

Auf dem Wesen der natürlichen Zahlen beruht ein grundlegendes Beweisprinzip:

3.2 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Das fünfte Peanosche Axiom besagt:

„Gehört 1 zu einer Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ und gehört mit jeder natürlichen Zahl n auch automatisch die nachfolgende natürliche Zahl $n+1$ zu A, so umfasst A schon alle natürlichen Zahlen, $A = \mathbb{N}$."

Auf dieser Eigenschaft basiert das Prinzip der vollständigen Induktion.

Wie in Abbildung 3.2 illustriert, erinnert es an eine Reihe von Dominosteinen.

Haben alle Steine den richtigen Abstand und fällt irgendein Stein (etwa der mit der Nummer n) um, so fällt auch der nachfolgende Stein (also der mit der Nummer $n+1$). (Induktionsschluss).

Stößt man den ersten Stein an (Induktionsanfang), so werden daraufhin alle Steine fallen.

[3]Für positive a_i gilt nach Kapitel 9.3 die Gleichheit $\prod_{i \in \mathcal{I}} a_i = \exp(\sum_{i \in \mathcal{I}} \ln(a_i))$ und ist die leere Summe gleich Null, so muss das leere Produkt gleich 1 sein.

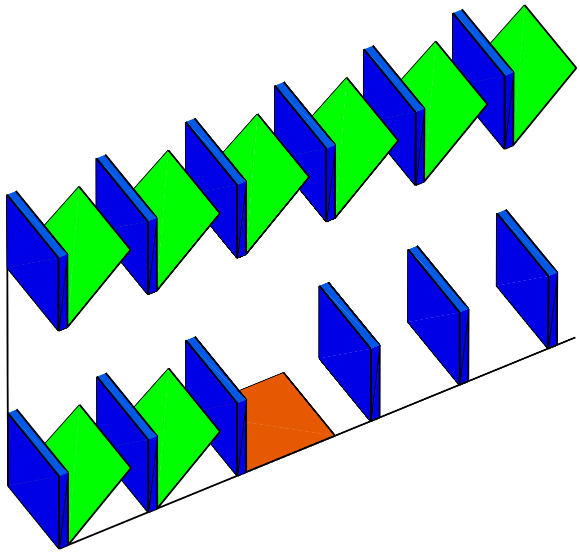


Abbildung 3.2: Die vollständige Induktion funktioniert nach dem Dominoprinzip.

Im unteren Teil der Abbildung 3.2 ist symbolisiert, dass der Induktionsschluss für alle n richtig sein muss. Ansonsten fällt ein Stein ins Leere und alle weiteren bleiben stehen.

Satz 3.1. PRINZIP DER VOLLSTÄNDIGEN INDUKTION

Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$ (meist $n_0 = 1$), $A(n)$, $n \geq n_0$, seien Aussagen und es gelte:

i) Induktionsanfang: Die Aussage $A(n_0)$ ist richtig.

ii) Induktionsschluss: Für jedes beliebige $n \geq n_0$ folgt aus der Annahme, dass $A(n)$ wahr ist, der sogenannten Induktionsannahme, dass dann auch die Aussage $A(n+1)$ wahr ist.

Dann sind alle Aussagen $A(n)$, $n \geq n_0$, wahr.

Beispiel. *Die Behauptung*

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

soll für jedes $n \in \mathbb{N}$ mithilfe vollständiger Induktion gezeigt werden.

Beweis. In der Notation des Satzes 3.1 ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$A(n) : \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \, .$$

Induktionsanfang: Da die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen ist, wird $n_0 = 1$ gewählt.

Die Aussage $A(1)$ ist offensichtlich wahr:

$$\sum_{k=1}^{1} k = \frac{1(1+1)}{2} \, .$$

Induktionsschluss („$A(n) \Rightarrow A(n+1)$“):

Man nehme nun an, dass $A(n)$ für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

Um zu zeigen, dass unter dieser Hypothese (der Induktionsannahme) auch die Annahme $A(n+1)$ wahr ist, wird wie folgt umgeformt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k}_{=n(n+1)/2,\ \text{da } A(n) \text{ nach Annahme wahr ist}} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\Big(\frac{n}{2} + 1\Big) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \, .\end{aligned}$$

Das ist genau die Aussage $A(n+1)$, die – wie hiermit gezeigt – richtig ist, falls $A(n)$ richtig ist, und nach dem Induktionsprinzip ist die Behauptung bewiesen. $\square$

Das wichtigste Beispiel.

Das folgende Beispiel ist sehr einfach zu behandeln. Nichtsdestotrotz ist die Aussage ein fundamentaler Baustein zum Verständnis von Grenzwerten (vgl. Kapitel 8.1).

Satz 3.2. ENDLICHE GEOMETRISCHE REIHE

Es sei $q \in \mathbb{R}$ mit $q \neq 1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \ .$$

Beweis mit vollständiger Induktion. Als Induktionsanfang wird $n_0 = 1$ gewählt und die Gleichheit verifiziert:[4]

$$1 + q = \sum_{k=0}^{1} q^k = (1+q)\,\frac{1-q}{1-q} = \frac{1-q^2}{1-q} \ .$$

Induktionsschluss: Ist die Annahme für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ richtig, so folgt der Induktionsschluss aus

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \ .$$

$\square$

---

[4] Da die Aussage auch für $n = 0$ wahr ist, könnte ebenso $n_0 = 0$ gewählt werden. Formal ist zwar $n_0 = 0$ keine natürliche Zahl, durch Umnummerierung der Aussagen überlegt man sich aber leicht, dass das Prinzip der vollständigen Induktion gültig bleibt.

In den Übungsaufgaben zu diesem Kapitel finden sich zahlreiche weitere Beispiele mit unterschiedlichen Aufgabentypen.

Mithilfe des Beweisprinzips der vollständigen Induktion werden auch die folgenden Aussagen aus der Kombinatorik verifiziert.

3.3 Grundbausteine der Kombinatorik (Binomialkoeffizient; binomischer Lehrsatz; Permutation; Kombination; Urnenmodell)

Die Kombinatorik ist die Lehre des Abzählens und als solche ein wichtiger Bestandteil der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.

Als Vorbereitung für die folgenden Betrachtungen werden zunächst die Begriffe Fakultät und Binomialkoeffizient eingeführt.

Definition 3.2. $\boxed{\text{Fakultät, Binomialkoeffizient}}$

i) Mit n-Fakultät, $n \in \mathbb{N}$, bezeichnet man das Produkt

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \ldots \ \cdot n \,.$$

ii) Die Binomialkoeffizienten „n über m“, $m < n \in \mathbb{N}$, sind definiert als

$$\binom{n}{m} := \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!} \,.$$

iii) Man vereinbart[5] die Notation (l, m, $n \in \mathbb{N}$)

$$0! = 1 \,, \qquad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \,, \qquad \binom{l}{m} = 0 \quad \textit{für } l < m \,.$$

[5]Für $n \in \mathbb{N}$ ist $n!$ rekursiv definiert als $n \cdot (n-1)!$, was für $n = 1$ mit der Wahl $0! = 1$ richtig ist.

Die Binomialkoeffizienten sind zunächst als Brüche definiert. Anhand der folgenden Rekursionsformel erkennt man aber leicht, dass es sich in der Tat um natürliche Zahlen handelt.

Es gilt für $1 \leq m < n$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} \\
&= \frac{n!(n+1-m) + n!m}{m!(n+1-m)!} = \frac{n!(n+1-m+m)}{m!(n+1-m)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!} = \binom{n+1}{m} .
\end{aligned}$$

Auf dieser Rekussionsformel basiert das sogenannte Pascalsche Dreieck (Tabelle 3.3), an dem die Binomialkoeffizienten abgelesen werden können.

					1						$n = 0$
				1		1					$n = 1$
			1		**2**		**1**				$n = 2$
		1		3		**3**		1			$n = 3$
	1		**4**		6		4		1		$n = 4$
1		**5**		10		10		5		1	$n = 5$

Tabelle 3.3: Das Pascalsche Dreieck.

Nach der Rekursionsformel folgt der Aufbau des Pascalschen Dreiecks der einfachen Regel, dass die Summe zweier Eintragungen in einer Zeile die darunter stehende Eintragung ergibt.

Binomischer Lehrsatz.

Ein klassischer Lehrsatz der Mathematik ist die folgende Verallgemeinerung der bekannten binomischen Formeln.

Satz 3.3. DER BINOMISCHE LEHRSATZ

Für alle Zahlen a, b (auch für rationale, reelle oder komplexe Zahlen) und für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \, .$$

Beweis. Vollständige Induktion, siehe Übungskapitel 3.4. □

In den folgenden Betrachtungen zur Kombinatorik sei $n \in \mathbb{N}$ und M eine Menge bestehend aus n Elementen. Dabei wird in der Regel ohne Einschränkung[6] $M = \{1, \ldots, n\}$ angenommen.

Als wesentliche Elemente werden nun vorgestellt: Permutationen mit und ohne Wiederholung sowie Kombinationen mit und ohne Wiederholung.

In den Sätzen 3.4 bis 3.7 wird die Frage beantwortet, wie viele verschiedenen Möglichkeiten die angesprochenen Varianten zulassen.

Als Standardbeispiel dient das Urnenmodell. Das sogenannte Fächermodell wird in Übungskapitel 3.4 vorgestellt.

[6] „Ohne Einschränkung“ o.E. oder „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“ o.B.d.A. bedeutet: Hier geht es nur um eine Vereinfachung in der Notation. Im allgemeinen Fall führen die gleichen Argumente zum Ziel.

3.3.1 Permutationen

Zu $k \in \mathbb{N}$ wird ein k-Tupel von Elementen aus M betrachtet, d.h.

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) \in \underbrace{M \times M \times \dots M}_{k\text{-mal}} .$$

i) Permutationen ohne Wiederholung.

Sind in einem solchen Tupel alle Eintragungen verschieden (insbesondere muss dann $k \leq n$ gelten), so spricht man von einer k-Permutation aus M ohne Wiederholung.

Als Symbol dient für die Menge aller derartigen Permutationen

$$\begin{aligned} \mathrm{Per}_k^n(oW) \ &:= \ \Big\{(a_1, \dots, a_k) : \ a_j \in \{1, \dots, n\}, \ 1 \leq j \leq k, \\ &\qquad a_i \neq a_j \text{ für } 1 \leq i \neq j \leq k\Big\} . \end{aligned}$$

Satz 3.4. $\boxed{\text{Permutationen ohne Wiederholung}}$

Die Mächtigkeit von $Per_k^n(oW)$ ist[7]

$$\# Per_k^n(oW) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) .$$

Beweisidee. Für den ersten Eintrag im betrachteten Tupel gibt es n Wahlmöglichkeiten, für den zweiten verbleiben noch $n-1$ Wahlmöglichkeiten .... □

[7]Zur Erinnerung: Für eine endliche Menge A bezeichnet die Mächtigkeit der Menge die Anzahl der Elemente.

Urnenmodell: Permutation ohne Wiederholung.

In einer Urne befinden sich n nummerierte, ansonsten gleichartige Kugeln. Aus der Urne werden k Kugeln gezogen.

Kommt es bei der Ziehung auf die Reihenfolge an (Modell: Eintragungen in einem Tupel) und werden die gezogenen Kugeln nicht wieder zurückgelegt (Modell: Tupel ohne Wiederholung), so gibt es

$$n(n-1)\dots(n-k+1) \text{ verschiedene Ziehungsmöglichkeiten.}$$

ii) Permutationen mit Wiederholung.

Müssen die Eintragungen in einem Tupel nicht verschieden sein, so spricht man von einer k-Permutation aus M mit Wiederholung.

Die Menge aller derartigen Permutationen bezeichnet das Symbol

$$\mathrm{Per}_k^n(mW) := \big\{(a_1, \dots, a_k) :\ a_j \in \{1, \dots, n\},\ 1 \le j \le k\big\} .$$

Satz 3.5. PERMUTATION MIT WIEDERHOLUNG

Die Mächtigkeit von $Per_k^n(mW)$ ist

$$\# Per_k^n(mW) = n^k .$$

Beweisidee. Hier gibt es für jede der k Eintragungen n Wahlmöglichkeiten. Ein formaler Beweis mittels vollständiger Induktion kann als Übungsaufgabe geführt werden (vgl. Übungskapitel 3.4). □

Urnenmodell: Permutation mit Wiederholung.

Kommt es wie oben auf die Reihenfolge der Ziehungen an und werden die gezogenen Kugeln wieder in die Urne zurückgelegt (Modell: Tupel mit Wiederholung), so gibt es

$$n^k \text{ verschiedene Ziehungsmöglichkeiten.}$$

3.3.2 Kombinationen

Kommt es jedoch nicht auf die Reihenfolge an, so können – wie bei den Lottozahlen – die Elemente eines Tupels aufsteigend der Größe nach angeordnet werden,

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) \in \underbrace{M \times M \times \dots M}_{k\text{-mal}}, \quad 1 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k \le n \, .$$

i) Kombinationen ohne Wiederholung.

Sind in einem solchen der Größe nach geordneten Tupel alle Eintragungen verschieden (wieder muss in diesem Fall $k \le n$ gelten), so spricht man von einer k-Kombination aus M ohne Wiederholung.

Die Notation für die Menge aller derartigen Kombinationen ist

$$\begin{aligned} \mathrm{Kom}_k^n(oW) \;&:=\; \Big\{(a_1, \dots, a_k) : \; a_j \in \{1, \dots, n\}, \; 1 \le j \le k, \\ &\qquad 1 \le a_1 < a_2 < \dots < a_k \le n\Big\} \, . \end{aligned}$$

Man beachte die strikte Ungleichungskette in der Definition, die die Bedingung „ohne Wiederholung“ widerspiegelt.

Satz 3.6. KOMBINATION OHNE WIEDERHOLUNG

Die Mächtigkeit von $Kom_k^n(oW)$ ist

$$\#Kom_k^n(oW)| = \binom{n}{k} .$$

Beweisidee. Man überlegt sich, dass eine k-Kombination aus M ohne Wiederholung genau einer k-elementigen Teilmenge von M entspricht. In dieser Form wird der Satz im Übungskapitel 3.4 diskutiert. □

Urnenmodell: Kombination ohne Wiederholung

Kommt es nicht auf die Reihenfolge der Ziehungen an und werden die gezogenen Kugeln nicht wieder in die Urne zurückgelegt (ohne Wiederholung), so gibt es

$$\binom{n}{k} \text{ verschiedene Ziehungsmöglichkeiten.}$$

ii) Kombinationen mit Wiederholung.

Sind in einem solchen der Größe nach geordneten Tupel nicht notwendig alle Eintragungen verschieden, so spricht man von einer k-Kombination aus M mit Wiederholung.

Hier lautet die Notation

$$\begin{aligned} \mathrm{Kom}_k^n(mW) \ := \ \Big\{&(a_1, \dots, a_k) : \ a_j \in \{1, \dots, n\}, \ 1 \le j \le k, \\ &1 \le a_1 \le a_2 \le \dots \le a_k \le n\Big\} . \end{aligned}$$

Man beachte das „$\leq$“ in der Ungleichungskette, welches die Bedingung „mit Wiederholung“ widerspiegelt.

Satz 3.7. $\boxed{\text{Kombination mit Wiederholung}}$

Die Mächtigkeit von $Kom_k^n(mW)$ ist

$$\# Kom_k^n(mW) = \binom{n+k-1}{k} .$$

Beweisidee. Eine k-Kombination mit Wiederholung wird in eine k-Kombination aus $(n+k-1)$ Elementen ohne Wiederholung transformiert. □

Urnenmodell: Kombination mit Wiederholung.

Kommt es nicht auf die Reihenfolge der Ziehungen an und werden die gezogenen Kugeln wieder in die Urne zurückgelegt (mit Wiederholung), so gibt es

$$\binom{n+k-1}{k} \text{ verschiedene Ziehungsmöglichkeiten.}$$

3.4 Übungsaufgaben zu Kapitel 3

Aufgabe 1. Im $\mathbb{R}^2$ betrachte man die Rotationen um den Nullpunkt (auch Ursprung genannt) mit der üblichen Hintereinanderausführung als Verknüpfung von zwei Rotationen.

i) Handelt es sich um eine kommutative Gruppe?

ii) Wie sieht die Situation im $\mathbb{R}^3$ aus?

Aufgabe 2. Mit der zum Beispiel des Rechtecks analogen Notation wird ein gleichseitiges Dreieck $D(1,2,3)$ von einer Drehung $d^{(1)}$ um 120 Grad, einer Drehung $d^{(2)}$ um 240 Grad und von den Spiegelungen $s^{(i)}$ an den Achsen s_i, $i = 1,\ 2,\ 3$, in ein deckungsgleiches Dreieck überführt (vgl. Abbildung 3.3).

Vervollständigen Sie die Verknüpfungstabelle 3.4, die zeigt, dass es sich um eine nicht-kommutative Gruppe, die sogenannte symmetrische Gruppe S_3 handelt.

$\circ$	e	$d^{(1)}$	$d^{(2)}$	$s^{(1)}$	$s^{(2)}$	$s^{(3)}$
e	e	$d^{(1)}$	$d^{(2)}$	$s^{(1)}$	$s^{(2)}$	$s^{(3)}$
$d^{(1)}$	$d^{(1)}$	$d^{(2)}$	e	$s^{(3)}$		
$d^{(2)}$	$d^{(2)}$	e				
$s^{(1)}$	$s^{(1)}$	$s^{(2)}$				
$s^{(2)}$	$s^{(2)}$					
$s^{(3)}$	$s^{(3)}$					

Tabelle 3.4: Verküpfungstabelle der S_3.

Warum nennt man die Gruppe auch Permutationsgruppe von 3 Elementen?

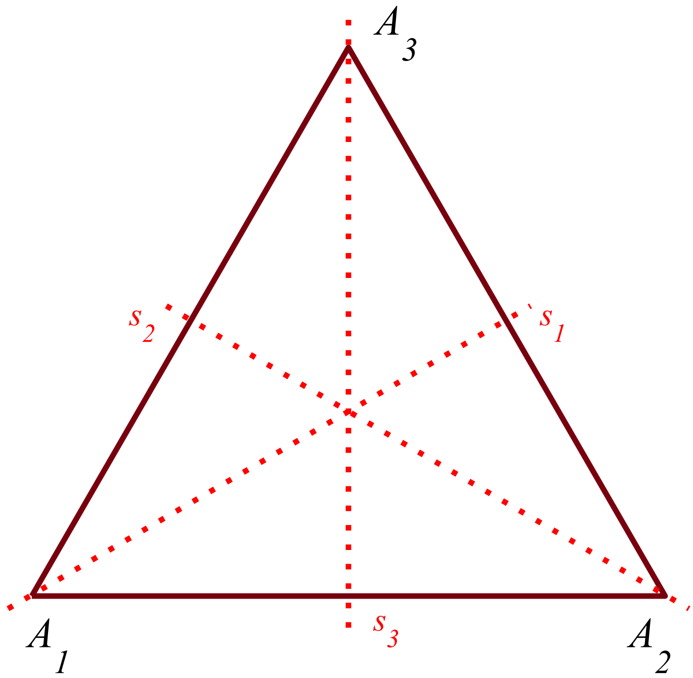


Abbildung 3.3: Zur symmetrischen Gruppe S_3.

Aufgabe 3. Gelten die Gleichheiten

$$\left[\sum_{k=1}^{n} a_k\right] \cdot \left[\sum_{l=1}^{m} b_l\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{l=1}^{m} a_k b_l\right] = \sum_{l=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{n} a_k b_l\right] \ ?$$

Aufgabe 4. Wo steckt der Fehler?

Behauptung. In einem beliebigen n-Tupel sind alle Eintragungen gleich.

Beweis. Vollständige Induktion.

Induktionsanfang ($n_0 = 1$): In einem 1-Tupel sind sicherlich alle Eintragungen gleich.

Induktionsschluss: Es sei $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ ein Tupel mit $(n+1)$ Eintragungen. Dann betrachte man die beiden n-Tupel

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \text{und} \quad (a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}) \ .$$

Nach Induktionsannahme gilt, dass in diesen beiden n-Tupeln jeweils alle Eintragungen gleich sind, das bedeutet

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n \quad \text{und} \quad a_2 = a_3 = \cdots = a_{n+1} \ .$$

Daraus folgt

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a_{n+1} \ ,$$

und die Behauptung ist gezeigt. □

Bemerkung. Demnach sind insbesondere alle natürlichen Zahlen gleich.

Aufgabe 5. Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$ mithilfe vollständiger Induktion:

i) $1 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{n+1}{n+2}$;

iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

Aufgabe 6. Man nennt $k \in \mathbb{N}$ einen Teiler einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$, falls $n = l \cdot k$ für eine weitere natürliche Zahl $l \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 + 2n$ durch 3 teilbar.

Aufgabe 7.* Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

i) Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist gleich n^2, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2 \, .$$

ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k > \frac{n^2}{2} \, .$$

iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gilt

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+1} = \frac{2}{n^2+n} \, .$$

iv) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $3^{n+1} + 2^{3n+1}$ durch 5 teilbar.

v) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, gilt $n^2 \geq 2n + 1$.

Aufgabe 8. Zeigen Sie die Bernoullische Ungleichung:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x > -1$ gilt die Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Aufgabe 9.*

i) Zeigen Sie den binomischen Lehrsatz.

ii) Zeigen Sie mithilfe des binomischen Lehrsatzes für alle fixierten $n \in \mathbb{N}$:

Für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $(m+1)^n - 1$ durch m teilbar.

Aufgabe 10.* Hat $n > 1$ nur sich selbst und 1 als Teiler, so wird n als Primzahl bezeichnet.

Zeigen Sie: Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ist als Produkt von Primzahlen $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ darstellbar:

$$n = \underbrace{p_1 \dots p_1}_{i_1-mal} \underbrace{p_2 \dots p_2}_{i_2-mal} \cdots \underbrace{p_k \dots p_k}_{i_k-mal},$$

Hinweis. Die Behauptung folgt aus der modifizierten Aussage $A(n)$: „Jede natürliche Zahl von 2 bis n lässt sich als Produkt von Primzahlen darstellen".

Aufgabe 11.* Zeigen Sie Satz 3.5.

Aufgabe 12.* Zeigen Sie (Satz 3.6):

Zu einer n-elementigen Menge, $n \in \mathbb{N}$, gibt es für alle $1 \leq k \leq n$

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \quad \text{verschiedene } k\text{-elementige Teilmengen} .$$

Aufgabe 13.* Zeigen Sie, dass eine n-elementige Menge $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ 2^n verschiedene Teilmengen hat, d.h.:

Die Potenzmenge von A hat 2^n Elemente.

Aufgabe 14.* Im Zahlenlotto (ohne Zusatz- Superzahl etc.) sind 6 Zahlen aus „1 bis 49“ zu tippen.

i) Wie viele Möglichkeiten gibt es insgesamt?

ii) Wie viele unterschiedliche Möglichkeiten gibt es, bei einer Ziehung 6 falsche Zahlen getippt zu haben?

Aufgabe 15. In einem Bücherregal sind 5 Plätze frei.

i) Wie viele veschiedene Möglichkeiten gibt es, 5 verschiedene Bücher aufzustellen?

ii) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 gleiche Bücher auf die 5 Plätze zu verteilen?

iii) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 rote, 1 grünes und ein blaues Buch aufzustellen (nur die Farbe zählt)?

Aufgabe 16. Betrachten Sie zu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ein Rennen mit n nummerierten Läufern.

i) Wie viele mögliche Rennergebnisse gibt es insgesamt?

ii) Bei wie vielen möglichen Rennergebnissen belegt der Läufer mit der Nr. 1 den ersten Platz vor dem Läufer mit der Nr. 2 auf dem zweiten Platz?

iii) Wann ist die Anzahl der möglichen Rennergebnisse in den folgenden beiden Szenarien gleich?

- ▷ Der Läufer mit der Nr. 1 gewinnt.
- ▷ Die Läufer mit den Nummern 1 und 2 teilen sich die ersten beiden Plätze.

Aufgabe 17.* Aus 7 Karten mit den Zahlen 1 bis 7 erhält von drei Spielern A, B und C jeder eine Karte.

In wie vielen Möglichkeiten hat Spieler A die Karte mit der Nummer 5

i) und diese ist gleichzeitig höher als die Karten der anderen Spieler;

ii) und mindestens einer der anderen Spieler hat eine höhere Karte?

Aufgabe 18.* (Fächermodelle) Es seien k, $n \in \mathbb{N}$ gegeben.

i) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, k verschiedene Kugeln in n verschiedenen Fächern zu verteilen, falls

(a) Mehrfachbelegungen möglich sind;

(b) Mehrfachbelegungen nicht zugelassen sind ($k \leq n$)?

ii) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, k gleiche Kugeln in n verschiedenen Fächern zu verteilen, falls

(a) Mehrfachbelegungen möglich sind;

(b) Mehrfachbelegungen nicht zugelassen sind ($k \leq n$)?

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben.

Aufgabe 7.

i) Der Induktionsanfang für $n_0 = 1$ ist offensichtlich in Ordnung.

Induktionsschluss: Es ist nach der Induktionsannahme

$$\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = n^2 + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 . \quad \Box$$

ii) Der Induktionsanfang für $n_0 = 1$ kann leicht verifiziert werden.

Induktionsschluss: Es ist nach der Induktionsannahme

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\ &> \frac{n^2}{2} + (n+1) \\ &= \frac{(n^2+2n+1)+1}{2} > \frac{(n+1)^2}{2} . \quad \Box \end{aligned}$$

iii) Der Induktionsanfang ist richtig mit der Wahl $n_0 = 2$.

Induktionsschluss: Es sei $n \geq 2$. Dann ist nach der Induktionsannahme

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^{n+1} \frac{k-1}{k+1} &= \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{(n+1)-1}{(n+1)+1} = \frac{2}{n^2+n} \cdot \frac{n}{n+2} \\ &= \frac{2n}{n(n^2+3n+2)} = \frac{2}{(n+1)^2+(n+1)} . \quad \Box \end{aligned}$$

iv) Da $3^2 + 2^4 = 25$ durch 5 teilbar ist, ist der Induktionsanfang für $n_0 = 1$ gezeigt.

Induktionsschluss: Als Induktionsannahme für beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ sei nun $3^{n+1} + 2^{3n+1}$ durch 5 teilbar. Somit ist wegen

$$\begin{aligned} 3^{(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1} &= 3 \cdot 3^{n+1} + 8 \cdot 2^{3n+1} \\ &= 3 \cdot \Big(3^{n+1} + 2^{3n+1}\Big) + 5 \cdot 2^{3n+1} \end{aligned}$$

auch $3^{(n+1)+1} + 2^{3(n+1)+1}$ durch 5 teilbar, da beide Summanden auf der rechten Seite durch 5 teilbar sind. $\square$

v) Für $n_0 = 3$ rechnet man den Induktionsanfang sofort nach.

Induktionsschluss: Die Aussage gelte nun für ein $n \geq 3$. Dann folgt

$$\begin{aligned} (n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \geq (2n+1) + 2n + 1 \\ &= 2(n+1) + 2n \geq 2(n+1) + 1 \ , \end{aligned}$$

die Aussage $A(n+1)$ folgt also aus der Induktionsannahme und die Behauptung ist bewiesen. $\square$

Aufgabe 9.

i) Induktionsanfang ($n_0 = 1$): Offensichtlich gilt

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1 \ .$$

Induktionsschluss: Die Aussage sei als Induktionsannahme für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ richtig. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \cdot (a+b) \\
&= \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\right] \cdot (a+b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
&= \left[a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k\right] \\
&\quad + \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}\right],
\end{aligned}
$$

wobei im letzten Schritt die Gleichheit

$$
\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} a^{n+1-j} b^j
$$

ausgenutzt und anschließend der Summationsindex wieder in k umbenannt wurde.

Wegen

$$
\binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n+1}{n+1}
$$

und der Rekursionsformel

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

folgt zusammenfassend

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \binom{n+1}{0} a^{n+1-0} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \\
&\quad + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k} b^k \ ,
\end{aligned}$$

d.h. der Induktionsschluss ist ebenfalls richtig. □

ii) Nach dem binomischen Lehrsatz ist

$$\begin{aligned}
(m+1)^n - 1 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} m^k - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} m^k \\
&= m \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} m^{k-1} \ ,
\end{aligned}$$

was offensichtlich durch m teilbar ist. □

Aufgabe 10. Die Aussage

$A(n)$: „Jede natürliche Zahl von 2 bis n lässt sich als Produkt von Primzahlen darstellen“

wird mit vollständiger Induktion verifiziert.

Induktionsanfang ($n_0 = 2$): $2 = 2^1$ ist richtig.

Induktionsschluss: Die Hypothese $A(n)$ sei nun richtig. Zu zeigen ist die Aussage $A(n+1)$.

Dazu unterscheidet man die Fälle „$n+1$ ist Primzahl“ und „$n+1$ ist keine Primzahl“.

Ist $n+1$ eine Primzahl, so ist $A(n+1)$ wegen $n+1 = (n+1)^1$ richtig, da sich nach der Induktionsannahme auch die Zahlen von 2 bis n als Produkt von Primzahlen darstellen lassen.

Ist $n+1$ keine Primzahl, so existieren zwei Zahlen $2 \leq k, l \leq n$ mit $n+1 = k \cdot l$.

Diese beiden Zahlen lassen sich aber nach Induktionsannahme jeweils als das Produkt von Primzahlen schreiben und folglich kann $k \cdot l$ auch als das Produkt von Primzahlen geschrieben werden, was zu zeigen war. $\square$

Aufgabe 11. Es sei $n \in \mathbb{N}$ fixiert.

Der Beweis wird mithilfe einer Induktion nach k geführt.

Induktionsanfang ($k = 1$): Die Aussage „Es gibt n^1 verschiedene 1-Tupel der a_j“ ist offensichtlich richtig.

Induktionsschluss: Es gebe nach Induktionsannahme n^k verschiedene k-Tupel der a_j.

Ein $(k+1)$-Tupel

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1})$$

besteht aus einem k-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ und dem zusätzlichen Feld für a_{k+1}.

Für das k-Tupel gibt es nach Induktionsannahme n^k Möglichkeiten.

Jede dieser Möglichkeiten kann mit n unterschiedlichen Werten für a_{k+1} ergänzt werden, d.h.:

Folglich gibt es n^{k+1} verschiedene $(k+1)$-Tupel der a_j und der Induktionsschluss ist ebenfalls richtig. $\square$

Aufgabe 12. Der Beweis wird mit einer Induktion nach n geführt und o.E. sei wie üblich $M_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Induktionsanfang ($n_0 = 1$): Es gibt wie behauptet

$$\binom{1}{1} \text{ 1-elementige Teilmengen von } \{1\}.$$

Induktionsschluss: Die Annahme sei nun für ein beliebiges aber festes $n \geq 1$ richtig.

Im Fall $k = 1$ ist der Induktionsschluss trivial wegen

$$\binom{n+1}{1} = n + 1 \ .$$

Für beliebiges $2 \leq k \leq n + 1$ betrachtet man

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_1^k &:= \Big\{K \subset M_{n+1}: \ K \text{ hat } k \text{ Elemente und } (n+1) \in K\Big\} , \\
\mathcal{K}_2^k &:= \Big\{K \subset M_{n+1}: \ K \text{ hat } k \text{ Elemente und } (n+1) \notin K\Big\} .
\end{aligned}
$$

Offensichtlich gilt

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_1^k &= \Big\{K \cup \{n+1\}: \ K \subset M_n, \ K \text{ hat } k-1 \text{ Elemente}\Big\} , \\
\mathcal{K}_2^k &= \Big\{K \subset M_n: \ K \text{ hat } k \text{ Elemente}\Big\} .
\end{aligned}
$$

Nach Induktionsannahme gibt es

$$
\binom{n}{k-1} \text{ Mengen in } \mathcal{K}_1^k \quad \text{und} \quad \binom{n}{k} \text{ Mengen in } \mathcal{K}_2^k .
$$

Die bekannte Rekursionsformel liefert die Behauptung. □

Aufgabe 13. Nach Satz 3.6 gibt es für $k \geq 1$

$$
\binom{n}{k} \quad \text{verschiedene } k\text{-elementige Teilmengen} .
$$

Als 0-elementige Teilmenge wird die leere Menge mitgezählt und mithilfe des binomischen Lehrsatzes 3.3 folgt

$$
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = (1+1)^n = 2^n . \quad \square
$$

Aufgabe 14.

i) Aus $\{1, 2, \ldots, 49\}$ gibt es nach Satz 3.6

$$\binom{49}{6} \text{ verschiedene 6-elementige Teilmengen .}$$

ii) Komplett falsch sind (6-elementige Teilmenge aus 43 Zahlen)

$$\binom{43}{6} = 6096454 \text{ Möglichkeiten .}$$

Aufgabe 17. Zunächst beobachtet man, dass es insgesamt 210 Möglichkeiten gibt, je eine Karte an die Spieler zu verteilen (3-Permutation aus $\{1, 2, \ldots, 7\}$ ohne Wiederholung).

Davon hat der Spieler A in 30 Fällen die Karte mit der Nummer 5 (Gesamtzahl geteilt durch sieben bzw. wenn der Spieler A die Karte mit der Nummer 5 hat gibt es für die Spieler B und C noch 6×5 Möglichkeiten).

i) Ist die Karte von Spieler A gleichzeitig höher als die der Spieler B und C, so ist die Verteilung der Karten auf B und C beschrieben durch eine 2-Permutation aus $\{1, 2, \ldots, 4\}$, d.h. es gibt 12 Möglichkeiten.

ii) Nach der Vorbemerkung gibt es $18 = 30 - 12$ Möglichkeiten.

Dies kann man auch explizit über die folgenden Fälle verifizieren:

(a) Sowohl Spieler B als auch Spieler C haben eine Karte aus $\{6, 7\}$: 2 Möglichkeiten.

(b) Spieler B hat die 6 oder die 7, Spieler C eine Karte aus $\{1, 2, \ldots, 4\}$: 8 Möglichkeiten.

(c) Spieler C hat die 6 oder die 7, Spieler B eine Karte aus $\{1, 2, \ldots, 4\}$: 8 Möglichkeiten.

Aufgabe 18.

i) Ordnet man jeder der verschiedenen Kugeln ihr Fach zu, so erhält man eine Beschreibung als k-Permuation aus $\{1, 2, \ldots, n\}$

(a) mit Wiederholung, da Mehrfachbelegungen zulässig sind:

$$n^k \quad \text{Möglichkeiten ;}$$

(b) ohne Wiederholung, da keine Mehrfachbelegungen zulässig sind:

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) \quad \text{Möglichkeiten .}$$

ii) Die belegten Fächer werden in aufsteigender Reihenfolge in ein k-Tupel eingetragen, wobei Mehrfachbelegungen gleichen Einträgen entsprechen.

(a) Man erkennt eine k-Kombination aus $\{1, 2, \ldots, n\}$ mit Wiederholung und entsprechend gibt es

$$\binom{n+k-1}{k} \quad \text{Möglichkeiten ;}$$

(b) bzw. eine k-Kombination aus $\{1, 2, \ldots, n\}$ ohne Wiederholung und entsprechend gibt es

$$\binom{n}{k} \qquad \text{Möglichkeiten .}$$

Kapitel 4

Rationale Zahlen

4.1 Die rationalen Zahlen (Äquivalenzrelation, Körper, Abzählbarkeit, Dezimalzahlen)

Was ist mit der Gleichung $z \cdot q = w$ in $\mathbb{Z}$?

Eine Gleichung der Form

$$z \cdot q = w \ , \qquad z,\ w \in \mathbb{Z} \ \text{gegeben,} \qquad \text{gesucht} \ \ q \ ,$$

ist in der Menge der ganzen Zahlen im Allgemeinen nicht lösbar, was die Einführung einer Division motiviert.

Mit anderen Worten wird die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen auf die Menge der rationalen Zahlen (auf die Menge der Brüche) erweitert:[1]

$$\mathbb{Q} := \left\{ q = \frac{m}{n} = m \cdot n^{-1},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\} .$$

Warum kann man Brüche kürzen?

Die rationalen Zahlen sind auf diese Weise nur heuristisch eingeführt und es ist nicht offensichtlich, ob ein Bruch nach evtl. Kürzen bzw. Erweitern

[1] Wegen der Bedingung $m \in \mathbb{Z}$ sind auch die Null und negative Brüche eingeschlossen.

das gleiche Objekt geblieben ist.

Exakter kann mit einer sogenannten Äquivalenzrelation „$\sim$“ auf der Menge $\mathbb{Z} \times \big(\mathbb{Z} - \{0\}\big)$ argumentiert werden:[2]

$$(a, b) \sim (c, d) \qquad :\Leftrightarrow \qquad ad = bc\ .$$

Aus der Definition folgt unmittelbar für alle (a, b), (c, d), (e, f) aus $\mathbb{Z} \times \big(\mathbb{Z} - \{0\}\big)$:

i) Reflexivität:

$$(a, b) \sim (a, b);$$

ii) Symmetrie:

$$(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow (c, d) \sim (a, b);$$

iii) Transitivität:

$$\big((a, b) \sim (c, d)\big) \wedge \big((c, d) \sim (e, f)\big) \Rightarrow (a, b) \sim (e, f).$$

Als Äquivalenzklasse $[(a, b)]$ setzt man

$$[(a, b)] := \Big\{(c, d) \in \mathbb{Z} \times \big(\mathbb{Z} - \{0\}\big) :\ (a, b) \sim (c, d)\Big\}\ .$$

Auf diese Art werden (a, b) und (c, d) als ein Objekt identifiziert, falls

$$ad = bc\ , \quad \text{d.h. symbolisiert in der Schreibweise als Bruch} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ .$$

So ist geklärt, wie das Kürzen bzw. Erweitern von Brüchen mathematisch präzisiert werden kann, und man setzt schließlich

[2]Ohne eine Division verwenden zu müssen, entspricht die Definition der heuristischen Vorstellung $a/b = c/d$.

$$\mathbb{Q} := \left\{ q : \ q = \frac{m}{n}, \ m \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N}, \ m \text{ und } n \text{ teilerfremd} \right\}.$$

Die algebraische Struktur der rationalen Zahlen.

Neben der Addition hat in $\mathbb{Q}$ auch die Multiplikation eine Struktureigenschaft:

Als algebraische Struktur sind die rationalen Zahlen versehen mit den beiden Verknüpfungen Addition und Multiplikation ein sogenannter Körper.

Zu beachten ist, dass die Eigenschaften bzgl. der beiden Verknüpfungen nicht nur getrennt voneinander betrachtet werden – zusätzlich ist das Zusammenspiel zwischen Addition und Multiplikation im dritten Punkt der folgenden Definition geregelt.

Definition 4.1. Körper

Eine Menge $\mathbb{K}$ versehen mit zwei Verknüpfungen „+“ und „·“ heißt Körper $(\mathbb{K},+,\cdot)$, falls:

i) $\mathbb{K}$ *ist bzgl. der Addition „+“ eine kommutative Gruppe mit neutralem Element (Nullelement)* 0.

ii) $\mathbb{K} - \{0\}$ *ist bzgl. der Multiplikation „·“ eine kommutative Gruppe mit neutralem Element (Einselement)* 1.

iii) Für alle a, b, c aus $\mathbb{K}$ gilt das Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = \underbrace{a \cdot b + a \cdot c}_{Vereinbarung:\ Punkt-\ vor\ Strichrechnung}.$$

Bemerkungen.

i) *Die Addition rationaler Zahlen unterscheidet sich nicht von der ganzer Zahlen.*

ii) *Bezüglich der Multiplikation ist die Gruppeneigenschaft lediglich auf* $\mathbb{K}-\{0\}$ *erfüllt.*

In einem Körper existiert insbesondere kein multiplikatives Inverses zum Nullelement, welches bzgl. der Addition definiert ist.

Einfacher ausgedrückt: Man darf nicht durch Null teilen.

iii) *Das multiplikativ inverse Element* $\hat{q}$ *einer rationalen Zahl* q *wird mit* $q^{-1} = \frac{1}{q}$ *symbolisiert:*

$$q \cdot q^{-1} = \frac{q}{q} = 1 \ .$$

Zu gegebenen $z \neq 0$, $w \in \mathbb{Z}$ *ist* $q = w/z$ *die eindeutige Lösung der Gleichung* $z \cdot q = w$.

Von besonderer Bedeutung ist im Folgenden die Körperstruktur der reellen und der komplexen Zahlen. Im Übungskapitel 4.2 wird als weiteres Beispiel der Körper aus zwei Elementen vorgestellt.

Die kurze Diskussion der Ordnungsrelation aus Kapitel 3.1 überträgt sich unmittelbar auf $\mathbb{Q}$. Wie das Beispiel der komplexen Zahlen belegen wird, existiert eine solche Anordnung aber nicht in jedem Körper.

$\mathbb{Q}$ als abzählbare Menge.

Jede natürliche Zahl ist auch eine rationale Zahl. Da die Umkehrung falsch ist, enthält $\mathbb{Q}$ mehr Elemente als $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$.

Dennoch ist $\mathbb{Q}$ „nicht qualitativ größer als $\mathbb{N}$“, was mithilfe des Begriffes „abzählbar“ präzisiert wird.

Wie es der Name besagt, kann eine abzählbare Menge durchnummeriert werden, d.h. jedes Element erhält eine eindeutige Nummer und kann anhand dieser Nummer eindeutig identifiziert werden.

Definition 4.2. GLEICHMÄCHTIGE UND ABZÄHLBARE MENGEN

i) *Zwei Mengen A und B heißen gleichmächtig, falls eine bijektive Abbildung φ zwischen diesen Mengen existiert:*

$$\varphi : \ A \to B \,, \qquad \varphi \textit{ ist bijektiv} \,.$$

ii) *Eine Menge B heißt*

(a) *endlich, wenn sie entweder leer ist oder falls dabei $A = \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, gewählt werden kann;*

(b) *abzählbar, falls dabei $A = \mathbb{N}$ gewählt werden kann;*[3]

(c) *höchstens abzählbar, falls die Menge endlich oder abzählbar ist.*

Wie eine solche Abbildung im Fall der rationalen Zahlen aussehen kann (φ ist nicht eindeutig bestimmt), ist in Tabelle 4.1 schematisiert.

Ausgehend von der 0 folgt man der Pfeilen und gibt dabei jedem Bruch eine Nummer.

Bei dieser Prozedur werden jedoch die rot eingefärbten Brüche nicht mitgezählt, da sie bereits als dieselbe rationale Zahl mit einer lediglich

[3] Per definitionem ist eine abzählbare Menge eine unendliche Menge, d.h. sie ist nicht endlich.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\ldots & -2 & \leftarrow & -1 & & 0 & \rightarrow & 1 & & 2 & \rightarrow & 3 & \ldots \\
 & \downarrow & & \uparrow & & & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\
\ldots & -2/2 & & -1/2 & \leftarrow & 0/2 & \leftarrow & 1/2 & & 2/2 & & 3/2 & \ldots \\
 & \downarrow & & & & & & & & \uparrow & & \downarrow & \\
\ldots & -2/3 & \rightarrow & -1/3 & \rightarrow & 0/3 & \rightarrow & 1/3 & \rightarrow & 2/3 & & 3/3 & \ldots \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

Tabelle 4.1: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

anderen Bruchdarstellung vorgekommen sind.

Man vergewissert sich, dass tatsächlich alle Brüche in dem Schema erfasst sind.

Bei dieser Art der Nummerierung der rationalen Zahlen hat nach der Tabelle 4.1 etwa der Bruch $-2/3$ die Nummer 7.

Zusammenhang mit Dezimalzahlen?

Es gilt beispielsweise[4]

$$\frac{1}{2} = 0.5\ , \qquad \frac{1}{3} = 0.333\cdots = 0.\overline{3}\ , \qquad \frac{1}{6} = 0.1\overline{6}\ , \qquad \frac{8}{7} = 1.\overline{142857}\ .$$

Analoges ist auch im Allgemeinen richtig:

Jede rationale Zahl lässt sich als abbrechende[5] oder periodische Dezimalzahl schreiben und umgekehrt stellt jede abbrechende oder periodische Dezimalzahl eine rationale Zahl dar.

In dieser Form sind rationale Zahlen jedoch nicht eindeutig als Dezimalzahl darstellbar, was einfache Beispiele belegen:

[4] Eine systematische Interpretation der Dezimaldarstellung folgt nach der Diskussion von Zahlenreihen.
[5] Ein formales „Auffüllen mit Nullen“ wird hier nicht als periodisch bezeichnet.

$$\frac{1}{2} = 0.5 = 0.4\overline{9}\ , \qquad \frac{9}{20} = 0.45 = 0.44\overline{9}\ .$$

Verlangt man von der Dezimaldarstellung nun zusätzlich, dass sie nicht abbricht, so erhält man die Charakterisierung

$$\mathbb{Q} = \{\text{nicht-abbrechende periodische Dezimalzahlen}\}\ .$$

4.2 Übungsaufgaben zu Kapitel 4

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \text{ ist gerade}$$

definiert auf $\mathbb{Z}$ eine Äquivalenzrelation.

Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen.

Aufgabe 2.* Es sei M die Menge $M = \{0, 1\}$ versehen mit den Verknüpfungen „+“ und „·“, die über folgende Verknüpfungstabellen definiert seien:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{sowie} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} .$$

Verifizieren Sie anhand der Tabellen, dass $(M, +, \cdot)$ ein Körper ist.

Bemerkung. Die Menge M ist die Menge der möglichen Reste bei der Division ganzer Zahlen durch 2.

Man schreibe für eine ganze Zahl z

$$z \mod 2 = \begin{cases} 0 \mod 2 & \text{für } z \text{ gerade}, \\ 1 \mod 2 & \text{für } z \text{ ungerade} \end{cases}$$

und vergleiche diese Operation mit (Kongruenz modulo) den obigen Verknüpfungstabellen.

Aufgabe 3.* In der Menge $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sei die Addition komponentenweise und die Multiplikation wie folgt erklärt:

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1 - x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) .$$

Handelt es sich um einen Körper?[6]

Aufgabe 4.*

i) In $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ sei die Addition komponentenweise und die Multiplikation wie folgt erklärt:

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_1 + 5 x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}^2$ ein Körper ist.

ii) Wird auch $\mathbb{R}^2$ mit diesen Verknüpfungen zum Körper?

Aufgabe 5. (Hilberts Hotel) In einem Hotel mit unendlich vielen Zimmern seien alle Zimmer belegt. Kann ein weiterer Gast aufgenommen werden?

Aufgabe 6.* Zeigen Sie, dass die Vereinigung abzählbarer Mengen abzählbar ist.[7]

---

[6] Tatsächlich ist mit dieser Multiplikation der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ eingeführt (vgl. Kapitel 11).

[7] Es gilt sogar: Die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar.

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben.

Aufgabe 2. Nach den Tabellen

$$\begin{array}{c|cc} + & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \hline \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 \end{array} \qquad \text{sowie} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & \mathbf{1} \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} \end{array}$$

ist beispielsweise

$$1 + 0 = 0 + 1 = 1 \quad \text{und} \quad 1 \cdot 1 = 1 \ .$$

Das additive Inverse der 1 ist wegen

$$1 + 1 = 0$$

die 1 selbst, das multiplikative Inverse der 1 ist ebenfalls die 1, die gleichzeitig das neutrale Element bzgl. der Multiplikation ist.

Auf diese Weise werden sukzessive alle Regeln verifiziert.

Aufgabe 3. Als Nullelement kommt nur $(0, 0)$ und als Einselement nur $(1, 0)$ infrage.

Für $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ ist der Kandidat für das multiplikative Inverse

$$\frac{1}{x_1^2 + x_2^2}(x_1, -x_2) \ .$$

Damit werden alle geforderten Eigenschaften leicht verifiziert.

Aufgabe 4. Der wesentliche Unterschied zur komplexen Multiplikation der vorherigen Aufgabe betrifft die Existenz eines Inversen.

i) Für $(x_1, x_2) \in \mathbb{Q}^2$, $(x_1, x_2) \neq (0,0)$, ist wegen x_1, $x_2 \in \mathbb{Q}$

$$x_1^2 - 5x_2^2 \neq 0$$

und mit

$$(y_1, y_2) := \left(\frac{x_1}{x_1^2 - 5x_2^2}, -\frac{x_2}{x_1^2 - 5x_2^2} \right)$$

ist das Inverse gefunden, wie eine elementare Rechnung zeigt.

ii) Der $\mathbb{R}^2$ kann mit der Multiplikation kein Körper definiert sein:

Es sei beispielsweise

$$(x_1, x_2) = \big(\sqrt{5}, 1\big) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Würde ein dazu inverses Element (y_1, y_2) existieren, so müsste gelten:

$$\sqrt{5}y_1 + 5y_2 = 1 \quad \text{und} \quad \sqrt{5}y_2 + y_1 = 0 \ .$$

Wird die zweite in die erste Gleichung eingesetzt, so hätte man also

$$\sqrt{5}\big(- \sqrt{5}y_2\big) + 5y_2 = 1$$

und damit einen Widerspruch.

Aufgabe 6. Es seien A_1 und A_2, zwei abzählbare Mengen und φ_1, φ_2 bijektive Abbildungen

$$\varphi_1 : \mathbb{N} \to A_1 , \quad \varphi_2 : \mathbb{N} \to A_2 .$$

Um einzusehen, dass $A = A_1 \cup A_2$ abzählbar ist, betrachtet man beispielsweise φ: $\mathbb{N} \to A$,

$$\varphi(n) = \begin{cases} \varphi_1(m) & \text{für} \quad n = 2m - 1 \quad \text{mit einem } m \in \mathbb{N} \quad (n \text{ ungerade}) , \\ \varphi_2(m) & \text{für} \quad n = 2m \quad \text{mit einem } m \in \mathbb{N} \quad (n \text{ gerade}) . \end{cases}$$

Kapitel 5

Reelle Zahlen

5.1 Die reellen Zahlen (Schranken von Mengen; Axiomatik; Anordnung; Vollständigkeit; Überabzählbarkeit und dichte Mengen)

Als typisches Beispiel für die reellen Zahlen dient die kontinuierlich ablaufende Zeit.

Es geht hier aber nicht um die philosophische Frage „Was ist die Zeit?“ sondern darum, welchen grundsätzlichen Gesetzmäßigkeiten die Zeit gehorcht, d.h. nach welchen Spielregeln kann man mit der Zeit operieren?

Diese Spielregeln sollten möglichst

$$i) \text{ knapp}\,, \qquad ii) \text{ vollständig}\,, \qquad iii) \text{ widerspruchsfrei}$$

sein, um anschließend Vorhersagen für die Zukunft abzuleiten.

Man nennt sie Axiome.

Die Axiome sind nicht herzuleiten. Es handelt sich vielmehr um grundlegende Aussagen, die als wahr angenommen werden.

Beispiel. *Man betrachte die Weg- Zeitabhängigkeit des freien Falls, d.h.*

$$Weg = \frac{1}{2} \cdot Erdbeschleunigung \cdot Zeit^2\ .$$

Diese quadratische Gleichung als Modell eines einfachen natürlichen

Vorgangs ist, wie schon im Übungskapitel 1.2 gesehen, nicht auf den Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen zugeschnitten.

Mit dem Beispiel ist deutlich: Geeignete Axiome für die reellen Zahlen müssen mehr als nur die Eigenschaften der rationalen Zahlen widerspiegeln.

Intervalle und Schranken.

Zum Verständnis der folgenden Axiomatik wird an dieser Stelle ein letztes Mal mit der heuristischen Vorstellung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ argumentiert, mit deren Hilfe nun Intervalle eingeführt werden.

Man unterscheidet (a, $b \in \mathbb{R}$ fixiert)

abgeschlossene Intervalle	$[a, b]$	$:=$	$\{x \in \mathbb{R} : \; a \le x \le b\}$,
offene Intervalle	(a, b)	$:=$	$\{x \in \mathbb{R} : \; a < x < b\}$,
halboffene Intervalle	$(a, b]$	$:=$	$\{x \in \mathbb{R} : \; a < x \le b\}$,
	$[a, b)$	$:=$	$\{x \in \mathbb{R} : \; a \le x < b\}$,
verallgemeinerte Intervalle	$[a, \infty)$	$:=$	$\{x \in \mathbb{R} : \; a \le x\}$,
	(a, ∞)	$:=$	$\{x \in \mathbb{R} : \; a < x\}$,
	$(-\infty, b]$	$:=$	$\{x \in \mathbb{R} : \; x \le b\}$,
	$(-\infty, b)$	$:=$	$\{x \in \mathbb{R} : \; x < b\}$.

Anhand der vertrauten Intervallbegriffe wird recht einfach verständlich, wie sogenannte beschränkte Teilmengen der reellen Zahlen charakterisiert sind.

Die aufwendige Notation soll nicht über die einfache geometrische Idee hinwegtäuschen:

Gibt es beispielweise eine obere Schranke einer Menge, so liegen auf dem Zahlenstrahl alle Elemente der Menge „links“ von dieser Schranke und mit dem Supremum wird eine obere Schranke „möglichst nah“ an der Menge gesucht.

Definition 5.1. BESCHRÄNKTE MENGEN

Für eine nicht-leere Teilmenge A der reellen Zahlen heißt

i) *A nach oben beschränkt, falls es eine Konstante $\overline{K} \in \mathbb{R}$ (eine obere Schranke) gibt, sodass*

$$x \leq \overline{K} \quad \text{für alle } x \in A\,;$$

ii) *A nach unten beschränkt, falls es eine Konstante $\underline{K} \in \mathbb{R}$ (eine untere Schranke) gibt, sodass*

$$\underline{K} \leq x \quad \text{für alle } x \in A\,;$$

iii) *A beschränkt, falls A nach oben und nach unten beschränkt ist;*

iv) *im Fall einer nach oben beschränkten Menge die kleinste obere Schranke, d.h. eine obere Schranke $\overline{k} \in \mathbb{R}$ von A mit*

$$\overline{k} \leq \overline{K} \quad \text{für alle oberen Schranken } \overline{K} \text{ von } A\,,$$

das Supremum von A, $\sup A$ – ist $\overline{k} \in A$, so heißt das Supremum auch Maximum, $\max A$;

v) *im Fall einer nach unten beschränkten Menge die größte untere Schranke d.h. eine untere Schranke* $\underline{k} \in \mathbb{R}$ *von* A *mit*

$$\underline{K} \leq \underline{k} \quad \text{für alle unteren Schranken } \underline{K} \text{ von } A \, ,$$

das Infimum von A, $\inf A$ – *ist* $\underline{k} \in A$, *so heißt das Infimum auch Minimum*, $\min A$.

Beispiele.

i) *Das Intervall* $A = [1, 3]$ *ist nach oben beschränkt:*

Z.B. ist $\overline{K}_1 = 5$ *eine obere Schranke, es ist aber auch* $\overline{K}_2 = \pi$ *eine obere Schranke, wohingegen* $\overline{K}_3 = \sqrt{\pi}$ *keine obere Schranke ist.*

Die Menge A *ist auch nach unten beschränkt (z.B. ist* $\underline{K} = 0$ *eine untere Schranke), also ist das Intervall beschränkt.*

Es ist $\sup A = 3 = \max A$ *und* $\inf A = 1 = \min A$.

ii) *Das Intervall* $B = (1, 2)$ *ist ebenfalls nach oben und nach unten beschränkt und somit beschränkt mit* $\sup B = 2$ *und* $\inf B = 1$.

Man erkennt: Das Supremum und das Infimum einer Menge können existieren, obwohl sie selbst nicht zur Menge gehören.

Mit anderen Worten: Maximum und Minimum von B *existieren nicht.*

iii) *Das verallgemeinerte Intervall* $C = (-1, \infty)$ *ist nach unten beschränkt, aber nicht nach oben beschränkt, demnach nicht beschränkt.*

Das Infimum ist -1, *ein Supremum existiert nicht, ein Maximum bzw. ein Minimum existieren ebenfalls nicht.*

Die Axiome der reellen Zahlen.

Nun wird festgelegt, was im Folgenden unter den reellen Zahlen zu verstehen ist.[1] Mit dieser axiomatischen Einführung bekommen auch die bisher gemachten heuristischen Bemerkungen ein solides Fundament.

Axiomatik 5.1. Axiome der reellen Zahlen

Es gibt eine Menge $\mathbb{R}$, genannt die reellen Zahlen, die der folgenden Axiomatik gehorcht.

i) Algebraische Axiome, d.h.:

Die reellen Zahlen sind ein Körper.

ii) Anordnungsaxiome, d.h.:

Es existiert eine Ordnungsrelation „<“ mit den Eigenschaften.

(a) Transitivität, d.h.:

Aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$.

(b) Verträglichkeit mit der Addition, d.h.:

Aus $x < y$ folgt $x + z < y + z$ für alle $z \in \mathbb{R}$.

(c) Verträglichkeit mit der Multiplikation, d.h.:

Aus $x < y$ und $z > 0$ folgt $x \cdot z < y \cdot z$.

iii) Vollständigkeitsaxiom, d.h.:

Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge A der reellen Zahlen besitzt ein Supremum in den reellen Zahlen, $\sup A \in \mathbb{R}$.

---

[1] Die erste systematisch strenge Einführung der reellen Zahlen geht auf Dedekind zurück.

Vergleich mit $\mathbb{Q}$.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind ebenfalls ein angeordneter Körper[2], der aber nicht vollständig ist.

Man betrachte beispielsweise hat die Mengen

$$A_{\mathbb{Q}} = \left\{q \in \mathbb{Q} :\ q^2 < 2\right\}, \qquad A_{\mathbb{R}} = \left\{x \in \mathbb{R} :\ x^2 < 2\right\}.$$

Die Menge $A_{\mathbb{Q}}$ hat keine kleinste obere Schranke in $\mathbb{Q}$. Dahingegen besitzt die Menge $A_{\mathbb{R}}$ die kleinste obere Schranke $\sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$.

Anschaulich sieht man das am Zahlenstrahl[3] (vgl. Abbildung 5.1).

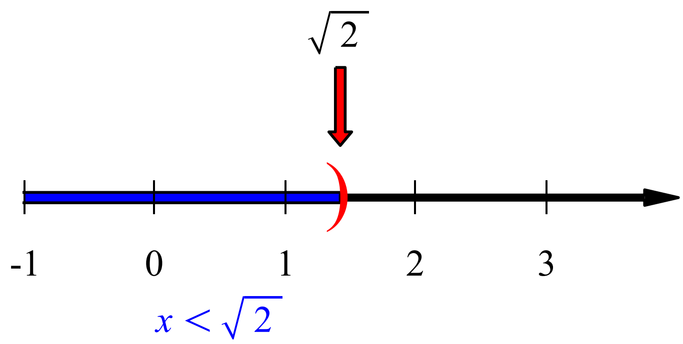


Abbildung 5.1: Zum Vollständigkeitsaxiom.

Mit anderen Worten: Das Vollständigkeitsaxiom schließt die Lücken (im Beispiel $\sqrt{2}$), die $\mathbb{Q}$ auf der Zahlengeraden lässt.

Bei den Lücken handelt es sich aber nicht nur um Wurzeln: Im Vergleich zu $\mathbb{Q}$ umfasst $\mathbb{R}$ auch die transzendenten Zahlen[4], die nicht Lösungen von sogenannten algebraischen Gleichungen[5] sind.

[2]Es handelt sich hier um archimedisch angeordnete Körper, d.h. zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}$) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x < n$ – siehe Übungskapitel 5.3.

[3]Die Richtung des Pfeils auf dem Zahlenstrahl symbolisiert die Anordnungsrelation.

[4]Von Lindemann zeigte etwa die Transzendenz von π.

[5]Eine algebraische Gleichung ist die Nullstellengleichung eines Polynoms. Haben die betrachteten Polynome ganzzahlige Koeffizienten, so heißen die Lösungen (komplexe oder reelle) algebraische Zahlen.

Die reellen Zahlen umfassen die rationalen Zahlen, $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ heißt die Menge der irrationalen Zahlen.

Die Vorstellung, dass der Zahlenstrahl keine „Löcher“ hat, entspricht dem Intervallschachtelungsprinzip, welches aus dem Vollständigkeitsaxiom folgt und dessen Idee in Abbildung 5.2 verdeutlicht ist.

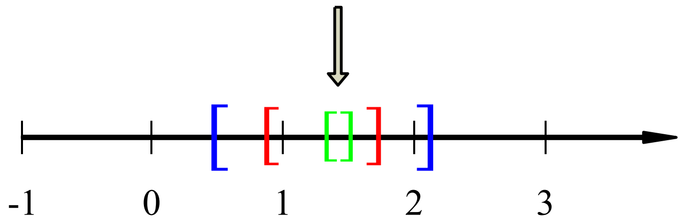


Abbildung 5.2: Zum Intervallschachtelungsprinzip.

Es werden abzählbar viele (siehe Definition 4.2) abgeschlossene Intervalle I_n betrachtet, die sich im Sinne von $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ enthalten.

Werden die Intervalle „für große n beliebig klein“, so existiert genau eine reelle Zahl x im Durchschnitt all dieser Intervalle (vgl. Abbildung 5.2).

Beim Vergleich rationaler und reeller Zahlen führt das Bild des Auffüllens von Lücken in der Zahlengeraden allerdings leicht zu einem Missverständnis bezüglich der Größenverhältnisse.

Die Menge der irrationalen Zahlen ist erheblich größer als die der rationalen Zahlen und dennoch kann man einer irrationalen Zahl mit einem Bruch „beliebig nahe kommen“.

Satz 5.1. ÜBERABZÄHLBARE UND DICHTE MENGEN

i) Die rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$, d.h.:

Sind x, $y \in \mathbb{R}$ beliebig mit $x < y$ gegeben, so gibt es eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $x < q < y$.

ii) Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist überabzählbar, was bedeutet, dass sie nicht höchstens abzählbar im Sinne von Definition 4.2 ist.

Bemerkungen.

i) Einer Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit einem Bruch „beliebig nahekommen“ bedeutet:

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Egal wie klein ε auch sein mag, findet man im Intervall $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ eine rationale Zahl — aus dem Satz folgt das mit der Wahl $y = x + \varepsilon$.

ii) Nach dem zweiten Teil des Satzes ist die Größe der Menge der reellen Zahlen sogar von einer ganz anderen Qualität als die der Brüche.

Man überlege sich, wie man um jede rationale Zahl q ein Intervall der Länge $l(q)$ finden kann, sodass die Vereinigung all dieser Intervalle die reellen Zahlen nicht umfasst.

Zusammenhang mit Dezimalzahlen?

Anschaulich wird die Approximation einer reellen Zahl mithilfe von rationalen Zahlen über die Vorstellung, dass in der Dezimaldarstellung immer mehr Stellen berücksichtigt werden.

Die Interpretation der reellen Zahlen als Dezimalzahlen lautet

$$\mathbb{R} = \Big\{\text{nicht-abbrechende Dezimalzahlen}\Big\} .$$

5.2 Das Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen

(Längenmessung und Abstände; Betragsfunktion)

Für das Rechnen mit Ungleichungen reeller Zahlen gelten die folgenden elementaren Regeln, die aus der Axiomatik 5.1 als Übungsaufgabe (siehe Kapitel 5.3) abgeleitet werden können und die man sich leicht anhand von Beispielen klar machen kann.

Vorsicht. *Bei der Herleitung der Regeln dürfen nur die in Axiomatik 5.1 aufgeführten Eigenschaften benutzt werden und nichts weiter.*

Bei der so trivial aussehenden ersten Eigenschaft der folgenden Regeln ist also formal das Produkt des neutralen Elements bzgl. der Addition mit einem beliebigen Element aus $\mathbb{R}$ zu betrachten und zu zeigen, dass dies stets das neutrale Element bzgl. der Addition ergibt.

Rechenregeln.

Für alle x, $y \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Regeln.

i) $x \cdot 0 = 0$;

ii) $x^2 \geq 0$;

iii) $x \leq y \Rightarrow -x \geq -y$;

iv) $(x \leq y) \wedge (x,\ y > 0) \Rightarrow \dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{y}$;

v) $(x \leq y) \wedge (z \leq 0) \Rightarrow x \cdot z \geq y \cdot z$;

vi) $(x \leq y) \wedge (u \leq v) \Rightarrow x + u \leq y + v$;

vii) $(0 \leq x \leq y) \wedge (0 \leq u \leq v) \Rightarrow x \cdot u \leq y \cdot v$.

Das Messen von Längen und Abständen.

Die geometrische Notwendigkeit, Längen und Abstände zu messen, ist unmittelbar einsichtig.

Die Abstandsfunktion ist gleichzeitig das wesentliche Werkzeug, um „beliebig nahe“ etc. zu quantifizieren, d.h. um Grenzwerte betrachten zu können.

Als Grundlage dient die Betragsfunktion, die in Abbildung 5.3 skizziert ist.

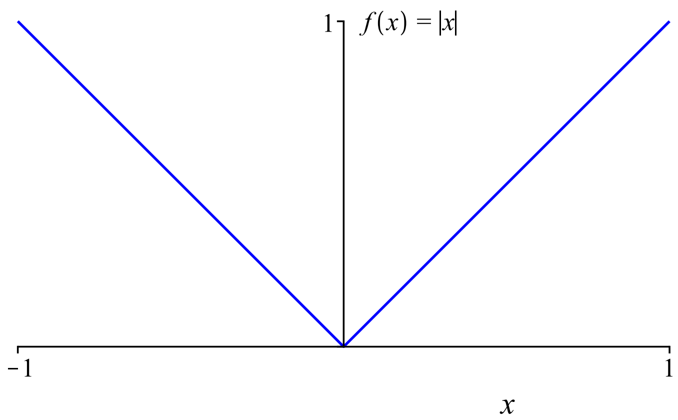


Abbildung 5.3: Die Betragsfunktion.

Definition 5.2. $\boxed{\text{BETRAG}}$

i) Der Betrag (oder Absolutbetrag) einer reellen Zahl x ist definiert als

$$|x| := \begin{cases} x\ , & \textit{falls} \quad x \geq 0\ , \\ -x\ , & \textit{falls} \quad x < 0\ . \end{cases}$$

ii) Der Abstand zweier reeller Zahlen x, y auf dem Zahlenstrahl ist $|x-y|$.

Rechenregeln.

Analog zum Rechnen mit Ungleichungen hat man nun:

Für alle x, $y \in \mathbb{R}$ gilt

- ▷ *i)* $|x| \geq 0$; *ii)* $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; *iii)* $|x \cdot y| = |x||y|$;

- ▷ Dreiecksungleichung:
$$|x + y| \leq |x| + |y| \ ;$$

- ▷ umgekehrte Dreiecksungleichung:
$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y| \ .$$

Beweis. Die Aussagen *i)* - *iii)* sowie die Dreiecksungleichung sind direkt einsichtig.

Zum Beweis der letzten Regel beobachtet man als Folge der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} |x| &= |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \quad \Rightarrow \quad |x| - |y| \leq |x - y| \ , \\ |y| &= |y - x + x| \leq |x - y| + |x| \quad \Rightarrow \quad |y| - |x| \leq |x - y| \ , \end{aligned}$$

d.h. auch die umgekehrte Dreiecksungleichung ist richtig. □

Eine einfache Beispielaufgabe.

Die folgende Menge M soll in Form eines Intervalls oder einer Vereinigung solcher angegeben werden,

$$M = \Big\{x \in \mathbb{R} : \ |x+4| + \big||x| - x\big| - 8 < 0\Big\} \ .$$

Nun ist stets

$$|x| \geq x \quad \text{ und damit } \quad \big||x| - x\big| = |x| - x \ ,$$

es ist also

$$M = \Big\{x \in \mathbb{R} : \ |x+4| + |x| - x - 8 < 0\Big\} \ .$$

Zur weiteren Bearbeitung der Aufgabe wird die Betragsfunktion über Fallunterscheidungen aufgelöst.

Fall 1. $x \geq -4$. In diesem Fall lautet die Ungleichung

$$x + 4 + |x| - x - 8 < 0$$

und eine weitere Fallunterscheidung ist notwendig.

i) $x \leq 0$. Dann gilt für die Elemente aus M

$$x + 4 - 2x - 8 < 0 \ , \quad \text{ d.h. } \quad -x < 4 \ .$$

Also muss $x > -4$ gelten und der erste Beitrag zur Lösungsmenge ist

$$\mathbb{L}_1 = (-4, 0] \ .$$

ii) $x > 0$. Hier folgt aus

$$x + 4 - 8 < 0$$

unmittelbar $x < 4$ und es ist

$$\mathbb{L}_2 = (0, 4) .$$

Fall 2. $x < -4$. In zweiten Fall muss die Ungleichung

$$-x - 4 - 2x - 8 < 0$$

gelten, was äquivalent zu $-3x < 12$ und damit zu $x > -4$ ist, also einen Widerspruch zur Annahme liefert.

Man erkennt: Der Fall $x < -4$ liefert keinen Beitrag zur Lösungsmenge.

Zusammengefasst kann M geschrieben werden als das Intervall

$$M = (-4, 4) .$$

5.3 Übungsaufgaben zu Kapitel 5

Aufgabe 1.* Zeigen Sie den Satz von Archimedes:

Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$x < n \, .$$

Aufgabe 2.* Sind die folgenden Mengen nach oben beschränkt, nach unten beschränkt, beschränkt?

Bestimmen Sie gegebenenfalls das Supremum, das Infimum, das Maximum und das Minimum der Mengen.

$$\begin{aligned}
M_1 &= (a,b) \cup (b,c] \, , \quad a < b < c \in \mathbb{R} \, , \qquad M_2 = \left\{ (-1)^n \frac{1}{n} + n : \; n \in \mathbb{N} \right\} , \\
M_3 &= \left\{ x \in \mathbb{R} - \{0\} : \; \frac{1}{x} > \frac{1}{x^2} \right\} , \qquad M_4 = \left\{ x \in \mathbb{R} - \{0\} : \; \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x^2} \right\} , \\
M_5 &= \{ x \in \mathbb{R} : \; |x+1| > |2-x| \} \, , \\
M_6 &= \left\{ f(x) := \exp(x) : x \in \mathbb{R} \right\} , \\
M_7 &= \left\{ f(x) := \exp(x) : x \in [-1,1] \right\} , \\
M_8 &= \left\{ f(x) := \sin(1/x) : \; 0 < x < 1 \right\} .
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.* Zeigen Sie die Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen.

Aufgabe 4.

i) Es sei $a \geq 1$. Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{a} \leq x \leq a$ gilt

$$x + \frac{1}{x} \leq a + \frac{1}{a} \ .$$

Hinweis. Äquivalent formuliert:

$$x - a \leq \frac{1}{a} - \frac{1}{x} \ .$$

ii) Zeigen Sie für a, $b \geq 0$ die Ungleichung für das geometrische Mittel $\sqrt{ab}$ und das arithmetische Mittel $(a+b)/2$:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \ .$$

iii) Es seien a, $b \in \mathbb{R}$ und

$$\max\{a,b\} := \begin{cases} a \ , & \text{falls} \quad a \geq b \ , \\ b \ , & \text{falls} \quad a < b \ , \end{cases} \qquad \min\{a,b\} := \begin{cases} b \ , & \text{falls} \quad a \geq b \ , \\ a \ , & \text{falls} \quad a < b \ . \end{cases}$$

Zeigen Sie die Gleichheit

$$\max\{a,b\} = \frac{1}{2}\big(a + b + |a-b|\big) \ .$$

Wie lautet die analoge Gleichheit für das Minimum zweier Zahlen?

Aufgabe 5.*

i) (a) Zeigen Sie:

$$\{x \in \mathbb{R} :\ 5 - 3|x-6| \leq 3x - 7\} = \mathbb{R} \ .$$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\big|5 - 3|x-6|\big| \leq 3x - 7 \ .$$

ii) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$x - |2x+4| > 1 - |x-2| \ .$$

iii) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\big||x^2-4| - 1\big| < 2 \ .$$

Aufgabe 6. Skizzieren Sie im $\mathbb{R}^2$ die Menge

$$M := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x-2| \leq |y-x+3|\big\} \ .$$

Hinweis. Skizzieren Sie zunächst die Mengen

$$A_1 := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 2\big\} \ , \qquad A_2 := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y - x + 3 \geq 0\big\}$$

und skizzieren Sie die Lösungsmenge in $A_1 \cap A_2$. Gehen Sie dann sukzessive vor.

Aufgabe 7.

i) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{|1-x|}{|x|} \geq x - 1 \ ?$$

ii) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$|x+2| + |x-2| > x^2 + 1 \ .$$

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben.

Aufgabe 1. Wäre der Satz falsch, so gäbe es eine reelle Zahl x mit

$$n \leq x \quad \text{für alle} \;\; n \in \mathbb{N} \, .$$

Damit wäre die Menge $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt und da $\mathbb{N}$ nicht leer ist, gäbe es nach dem Vollständigkeitsaxiom eine kleinste obere Schranke

$$\overline{k} := \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R} \, .$$

Da $\overline{k}$ die kleinste obere Schranke ist, ist $\overline{k} - 1$ keine obere Schranke und folglich existiert ein $m \in \mathbb{N}$, sodass

$$\overline{k} - 1 < m \quad \text{und damit} \quad \overline{k} < m + 1 \, .$$

Wegen $m + 1 \in \mathbb{N}$ widerspricht das der Eigenschaft „obere Schranke".

Aufgabe 2. Eine tabellarische Aufstellung der richtigen Antworten findet sich in Tabelle 5.1.

Aufgabe 3. Exemplarisch seien nur die erste und die dritte Regel bewiesen:

i) Die Null ist das neutrale Element der Addition, und aus dem Distributivgesetz folgt

$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0 \, .$$

Das inverse Element bzgl. der Addition zu $x \cdot 0$ ist $-x \cdot 0$ und man erhält mit dem Assoziativgesetz:

M	oben	unten	beschr.	sup	max	inf	min
M_1	j	j	j	c	c	a	-
M_2	n	j	n	-	-	0	0
M_3	n	j	n	-	-	1	-
M_4	j	n	n	1	1	-	-
M_5	n	j	n	-	-	1/2	-
M_6	n	j	n	-	-	0	-
M_7	j	j	j	e	e	e^{-1}	e^{-1}
M_8	j	j	j	1	1	-1	-1

Tabelle 5.1: Zu Aufgabe 2.

$$0 = x \cdot 0 - x \cdot 0 = (x \cdot 0 + x \cdot 0) - x \cdot 0 = x \cdot 0 + (x \cdot 0 - x \cdot 0) = x \cdot 0 \ .$$

iii) Gilt in der Voraussetzung die Gleichheit, so ist die Aussage richtig.

Es sei also $x < y$. Aus dem Anordnungsaxiom (b) folgt (Assoziativität und Kommutativität beachten):

$$\begin{aligned} -y &= (x - x) - y = x + (-x - y) < y + (-x - y) \\ &= y + (-y - x) = (y - y) - x = -x \ , \end{aligned}$$

also die Behauptung. Die weiteren Regeln sind ähnlich zu zeigen. □

Aufgabe 5.

i) (a) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$5 - 3|x - 6| \leq 3x - 7 \Leftrightarrow 4 - x \leq |x - 6| \ .$$

Für $x \geq 6$ impliziert $10 < 2x$ die Ungleichung.

Im Fall $x < 6$ ist die Ungleichung wegen $4 < 6$ ebenfalls richtig und insgesamt folgt

$$\big\{x \in \mathbb{R}:\ 5 - 3|x-6| \leq 3x - 7\big\} = \mathbb{R}\ .$$

(b) **Fall 1.** Ist

$$5 - 3|x-6| \geq 0\ ,$$

so ist die betrachtete Ungleichung nach $i)$ erfüllt, also im Fall

$$-\frac{5}{3} \leq x - 6 \leq \frac{5}{3} \quad \text{bzw.} \quad x \in \mathbb{L}_1 = \left[\frac{13}{3}, \frac{23}{3}\right]\ .$$

Fall 2. Ist $x \notin \mathbb{L}_1$ und $x > 6$, so lautet die Ungleichung

$$3(x-6) - 5 \leq 3x - 7$$

und ist immer richtig, d.h. für

$$x \in \mathbb{L}_2 = \left(\frac{23}{3}, \infty\right)\ .$$

Für $x < 6$ führt

$$3(6-x) - 5 \leq 3x - 7 \quad \text{auf} \quad x \in \mathbb{L}_3 = \left[\frac{10}{3}, \frac{13}{3}\right)$$

und die Lösungsmenge ist

$$\mathbb{L} = \left[\frac{10}{3}, \infty\right)\ .$$

ii) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x - |2x+4| > 1 - |x-2| \Leftrightarrow |x-2| > 1 - x + |2x+4| \; .$$

Fall 1. $x \geq 2$. In diesem Fall wird die Behauptung zu

$$x - 2 > 1 - x + 2x + 4 = 5 + x \Leftrightarrow -2 > 5 \; ,$$

dieser Fall liefert also keinen Beitrag.

Fall 2. $2 > x \geq -2$. Nun ist zu betrachten:

$$2 - x > 1 - x + 2x + 4 = x + 5 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{2} \; ,$$

der Beitrag zur Lösungsmenge ist $\mathbb{L}_1 = [-2, -\frac{3}{2})$.

Fall 3. Für $-2 > x$ erhält man

$$2 - x > 1 - x - 2x - 4 = -3x - 3 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{2} \; .$$

Hier ist der Beitrag zur Lösungsmange $\mathbb{L}_2 = (-\frac{5}{2}, -2)$.

Insgesamt ergibt sich

$$\{x \in \mathbb{R} : \; x - |2x+4| > 1 - |x-2|\} = \Big(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2} \Big) \; .$$

iii) **Fall 1.** Für $x \in [-2, 2]$ gilt die Äquivalenz

$$\big||x^2 - 4| - 1\big| = |3 - x^2| < 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in [-2, -1) \cap (1, 2] \; .$$

Fall 2. Für $x < -2$ und $x > 2$ ist

$$\big||x^2-4|-1\big| = |x^2-5| < 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in (-\sqrt{7},-2) \cap (2,\sqrt{7}) \ .$$

Als Lösungsmenge ergibt sich

$$\mathbb{L} = (-\sqrt{7},-1) \cup (1,\sqrt{7}) \ .$$

Kapitel 6

Einige reelle Funktionen

In diesem Abschnitt werden einige spezielle reelle[1] Funktionen auf der Basis des mathematischen „Allgemeinwissens“ vorgestellt. Die Hintergründe werden in den folgenden Kapiteln nachgereicht.

Die konstante Abbildung und die Identität sind bereits in Abbildung 2.7 dargestellt, eine Gerade $f(x) = ax + b$, a, $b \in \mathbb{R}$ fixiert, ist die erste natürliche Verallgemeinerung der Identität.

6.1 Potenzfunktionen und enge Verwandte (gerade, ungerade Funktion; Null- Polstelle)

i) Potenzfunktionen mit positiven ganzzahligen Exponenten.

(a) Die Funktion[2] $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x^2$ (vgl. rot dargestellte Funktion in Abbildung 6.1), wächst quadratisch und der Graph ist eine Parabel.

Es existiert genau eine Nullstelle, d.h. es existiert genau ein x_0 mit $f(x_0) = 0$, nämlich der Punkt $x_0 = 0$.

Die Funktion ist gerade, d.h. $f(-x) = f(x)$.

(b) Von kubischem Wachstum ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, mit ebenfalls genau der einen Nullstelle $x_0 = 0$ (vgl. blau dargestellte Funktion in Abbildung 6.1)

[1] Ohne die Einschränkung auf Funktionen $f\colon \mathbb{R} \supset A \to B \subset \mathbb{R}$ sind die meisten der hier diskutierten Begriffe nicht definiert.

[2] $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} :\ x > 0\}$, $\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} :\ x \geq 0\}$

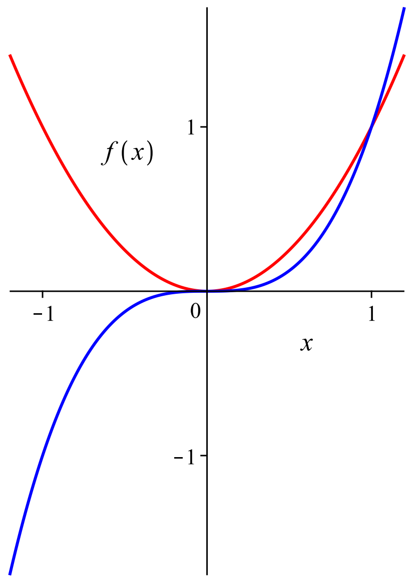


Abbildung 6.1: Die Funktionen $f(x) = x^2$ und $f(x) = x^3$.

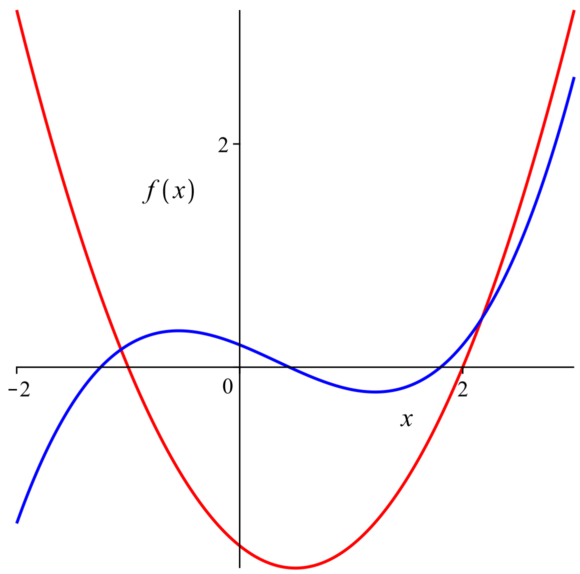


Abbildung 6.2: Ein Polynom zweiten Grades und ein Polynom dritten Grades.

Die Funktion ist ungerade, d.h. $f(-x) = -f(x)$.

(c) Die Funktion $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ fixiert, ist für gerades n eng verwandt mit Fall (a), für ungerades n mit Fall (b).

ii) Polynome.

Eine Funktion $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ , \qquad n \in \mathbb{N} \ ,$$

für fixierte Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, heißt Polynom oder ganzrationale Funktion. Das Polynom ist vom Grad n, falls $a_n \neq 0$.

Potenzfunktionen mit positiven ganzzahligen Exponenten sind als Spezialfall inbegriffen.

Ein Polynom vom Grad n hat maximal n Nullstellen in $\mathbb{R}$.

iii) Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten.

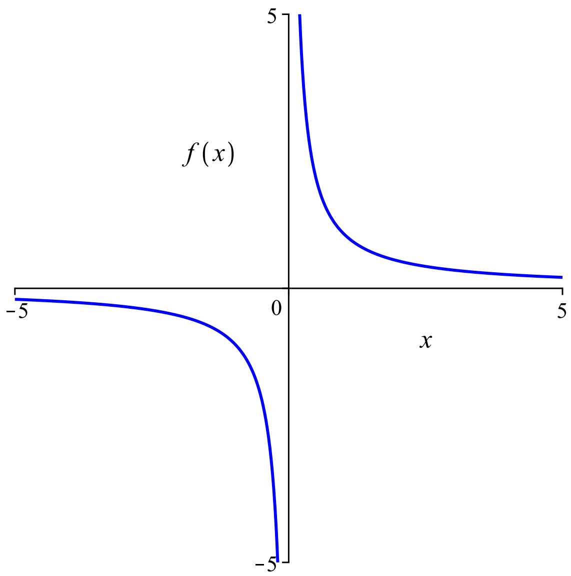


Abbildung 6.3: Die Funktion $f(x) = 1/x$.

Eine Potenzfunktion $f\colon \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ mit negativem ganzzahligen Exponenten kann geschrieben werden als

$$f(x) = x^{-n} := \frac{1}{x^n} \ , \qquad x \neq 0 \ , \qquad n \in \mathbb{N} \ .$$

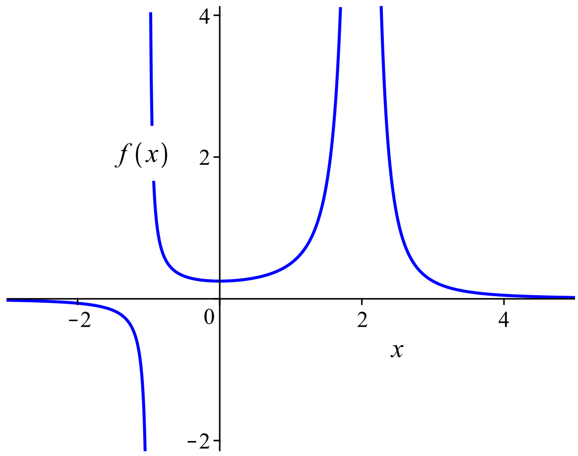


Abbildung 6.4: Eine gebrochen-rationale Funktion.

Besonders relevante Punkte sind hier die Nullstellen des Nenners, in denen die Funktion nicht definiert ist und in deren Nähe der Betrag der Funktion beliebig groß wird (siehe Abbildung 6.3).

Diese Punkte heißen Polstellen[3] der Funktion f.

iv) Gebrochen-rationale Funktionen.

Eine gebrochen-rationale Funktion ist mit Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ von der Form

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} .$$

Als Definitionsbereich sind die reellen Zahlen ohne die Nullstellen von q zu wählen.

Nach einer Polynomdivision (siehe Übungskapitel 6.5) bleibt der Fall[4]

$$\text{grad } p < \text{grad } q$$

[3]Der Begriff Polstelle wird nur bei Funktionen mit polynomialem Verhalten des Nenners in der Nähe einer Nullstelle verwandt.

[4]Mit grad p wird der Grad eines Polynoms bezeichnet.

zu diskutieren, wobei wieder den Polstellen besondere Aufmerksamkeit zu widmen ist.

v) Wurzelfunktionen.

(a) Als Funktion von $\mathbb{R}_0^+$ nach $\mathbb{R}_0^+$ ist die Funktion $f(x) = x^2$ bijektiv (vgl. Übungskapitel 2.3) und nach Definition 2.3 existiert eine Umkehrfunktion, die Quadratwurzel, $f^{-1}\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$,

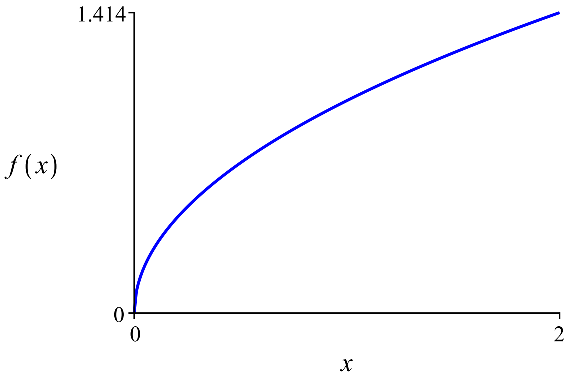


Abbildung 6.5: Die Quadratwurzel.

$$f^{-1}(x) =: \sqrt{x} =: x^{\frac{1}{2}} \ .$$

Die Rechtfertigung für die Schreibweise $x^{1/2}$ wird in Kürze deutlich.

(b) Die Funktion $f(x) = x^3$ ist als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ bijektiv und die Bezeichnung für die Umkehrfunktion, die dritte Wurzel, lautet

$$f^{-1}(x) =: \sqrt[3]{x} =: x^{\frac{1}{3}} \ .$$

(c) Ist $n \in \mathbb{N}$ fixiert, so wird für gerades n die Funktion $\sqrt[n]{x} =: x^{1/n}$ (n^{te} Wurzel) analog zu Fall (a) definiert, für ungerades n dient Fall (b) als Vorlage.

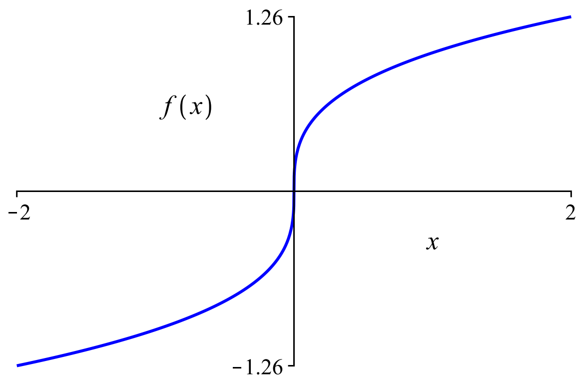


Abbildung 6.6: Die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

6.2 Exponentialfunktion und Logarithmus (Monotonie; Schranken von Funktionen)

i) Die Exponentialfunktion[5].

Ist beispielsweise die Zahl 2^n noch kanonisch definiert,

$$2^n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{n \text{ mal}} ,$$

so bleibt unklar, welcher Wert etwa dem Ausdruck $2^{\sqrt{\pi}}$ zugeordnet werden soll.

Einen Hinweis erhält man aus der folgenden Beobachtung:

Sind n, $m \in \mathbb{N}$ gegeben, so gilt

$$2^{n+m} = 2^n \cdot 2^m .$$

Das Verhalten der Exponentialfunktion $e^x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ (vgl. Abbildung 6.7, die Eulersche Zahl $e = 2.71828182845\dots$ wird später exakt eingeführt) leitet sich im Wesentlichen aus einer analogen sogenannten

[5]Die Exponentialfunktion wird später präzise als Potenzreihe definiert.

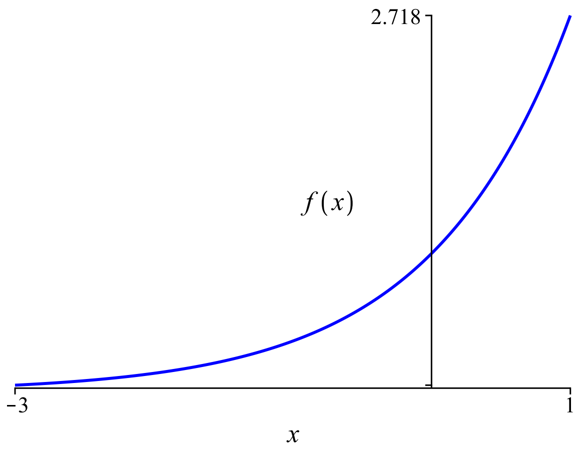


Abbildung 6.7: Die Exponentialfunktion.

Funktionalgleichung[6] ab:

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \qquad \text{für alle } \; x,\; y \in \mathbb{R} \; .$$

Zudem gilt $e^0 = 1$ und, wie die Notation suggeriert,

$$e^x = \underbrace{e \cdot e \cdot \dots \cdot e}_{x \text{ mal}} , \qquad \text{falls } \; x \in \mathbb{N} \; .$$

Die Funktion ist monoton wachsend, d.h.:

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \; .$$

Tatsächlich gilt für $x < y$ sogar $f(x) < f(y)$, was als strenge Monotonie (in diesem Fall streng monoton wachsend) bezeichnet wird.

Weiter ist die Exponentialfunktion f: $A = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = e^x$ nach unten beschränkt:

[6] Die Exponentialfunktion ist die einzige stetige Funktion f, die diese Funktionalgleichung zusammen mit der Normierungsbedingung $f(1) = e$ erfüllt.

Es existiert eine untere Schranke $\underline{M} \in \mathbb{R}$ für die Menge bild(f) (vgl. Definition 5.1):

$$\underline{M} \leq y \quad \text{für alle } \ y \in \{f(x) : \ x \in A\} \ .$$

Im Fall der Exponentialfunktion kann jedes $\underline{M} \leq 0$ als untere Schranke gewählt werden.

Analog zum Sprachgebrauch aus Definition 5.1 heißt die größte untere Schranke das Infimum von f,

$$\inf_{x \in A} f(x) \ , \qquad \text{d.h.} \ \ \inf_{x \in \mathbb{R}} e^x = 0 \ .$$

Falls bei einer nach unten beschränkten Funktion $f\colon A \to \mathbb{R}$ auch ein Punkt $x_0 \in A$ existiert mit

$$f(x_0) = \inf_{x \in A} f(x) \ ,$$

so heißt ein solcher Punkt (evtl. gibt es mehrere) x_0 ein Minimierer oder eine Minimalstelle von f und das Infimum wird zum Minimum

$$f(x_0) = \inf_{x \in A} f(x) =: \min_{x \in A} f(x) \ .$$

Offensichtlich besitzt die Exponentialfunktion zwar ein Infimum aber kein Minimum.

Die Begriffe und Notationen nach oben beschränkt, obere Schranke, kleinste obere Schranke, Supremum von f, $\sup_{x \in A} f(x)$, Maximierer, Maximum, $\max\limits_{x \in A} f(x)$ sind analog definiert.

ii) Die allgemeine Exponentialfunktion.

Für fixiertes $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, bezeichnet die Funktion a^x die allgemeine Exponentialfunktion.

Für $a = 1$ ist die Funktion konstant 1, für $a \neq 1$ ist eine Fallunterscheidung notwendig.

(a) Der Fall $a > 1$.

In diesem Fall verhält sich die Funktion qualitativ wie die Exponentialfunktion, wobei nun

$$a^x = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{x \text{ mal}}, \qquad \text{falls } \ x \in \mathbb{N} \,.$$

(b) Der Fall $a < 1$.

Formal ist die Definition die gleiche wie im Fall (a). Man überlege sich aber, warum das qualitative Verhalten jetzt in Abbildung 6.8 wiedergegeben wird.

Die Funktion ist im Fall $a < 1$ monoton fallend, d.h.

$$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \,.$$

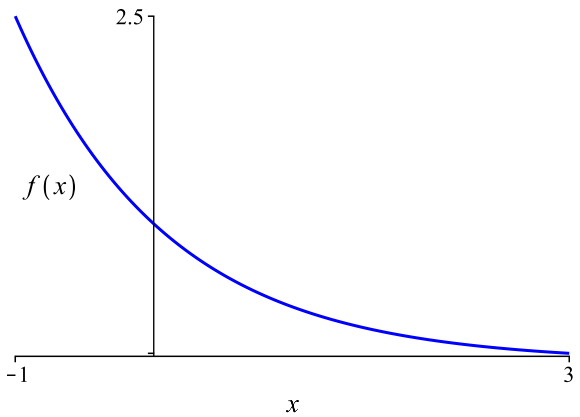


Abbildung 6.8: Beispiel einer allgemeinen Exponentialfunktion für $0 < a < 1$.

Wieder gilt auch die strenge Monotonie: Aus $x < y$ folgt $f(x) > f(y)$, die Funktion ist streng monoton fallend.

iii) Der natürliche Logarithmus.

Die Umkehrfunktion der bijektiven Exponentialfunktion $e^x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$,

$$\ln : \ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

heißt natürlicher Logarithmus (vgl. Abbildung 6.9 und Abbildung 2.12).

Die elementaren Rechenregeln (insbesondere die Funktionalgleichung des Logarithmus) folgen aus denen der Exponentialfunktion und werden im Übungskapitel 6.5 diskutiert.

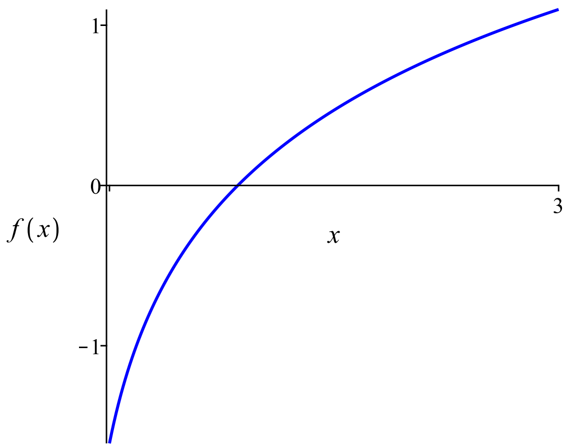


Abbildung 6.9: Der natürliche Logarithmus.

iv) Der Logarithmus zur Basis a.

Die allgemeine Exponentialfunktion $a^x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist für $0 < a$, $a \neq 1$, $a \in \mathbb{R}$ fixiert, eine bijektive Funktion.

Die Umkehrfunktion heißt Logarithmus zur Basis a,

$$\log_a : \ \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} .$$

Wieder ist im Fall $0 < a < 1$ das qualitative Verhalten anders als im Fall $a > 1$ (vgl. Abbildung 6.10).

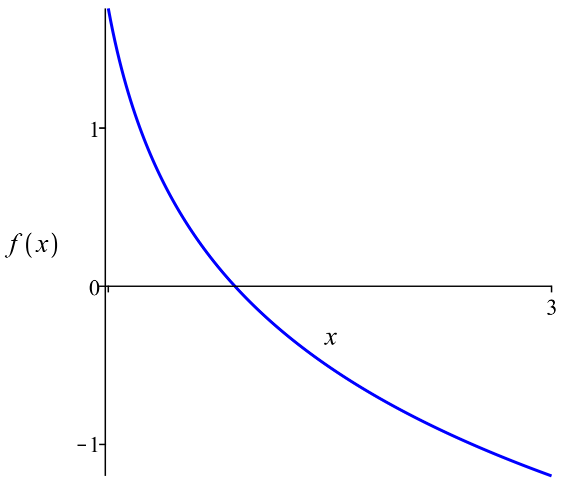


Abbildung 6.10: Beispiel eines Logarithmuses zur Basis $0 < a < 1$.

Die Umrechnung zwischen Logarithmen mit unterschiedlichen Basen $a > 0$, $b > 0$, a, $b \neq 1$ genügt der Regel (vgl. Übungskapitel 6.5)

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \, .$$

6.3 Trigonometrische Funktionen (Einheitskreis; Bogenmaß; periodische Funktion; Additionstheoreme; Hauptzweig)

i) Der Sinus und der Kosinus.

Elementargeometrisch werden der Sinus und der Kosinus über den sogenannten Einheitskreis definiert (vgl. Abbildung 6.11).

Ein Einheitsvektor (Länge 1) $\underline{\mathbf{c}}$ in der Ebene (im $\mathbb{R}^2$), der mit der x_1-Achse den orientierten Winkel α einschließt, wird, wie in der Abbildung angedeutet, in die Summe von zwei achsenparallelen orthogonalen Vektoren $\underline{\mathbf{c}}_1$ und $\underline{\mathbf{c}}_2$ zerlegt[7].

Werden die Längen von $\underline{\mathbf{c}}_1$, $\underline{\mathbf{c}}_2$ mit c_1, c_2 bezeichnet, so definiert man

$$\sin(\alpha) := c_2 \qquad (\text{„Gegenkathete durch Hypotenuse“})$$

[7]Hier wird mit der intuitiven Vorstellung eines Kräfteparallelogramms argumentiert.

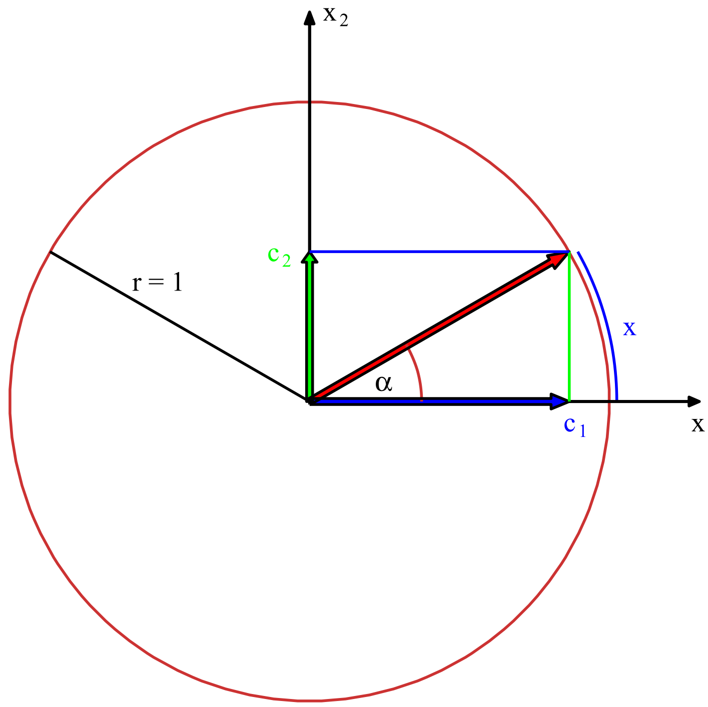


Abbildung 6.11: Zur Definition von Sinus und Kosinus am Einheitskreis.

und

$$\cos(\alpha) := c_1 \qquad (\text{„Ankathete durch Hypotenuse”})\ .$$

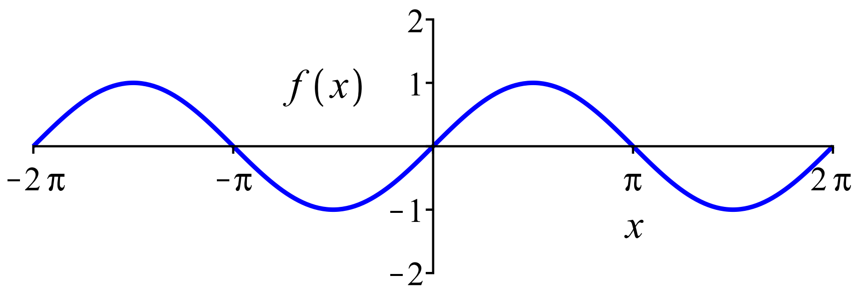


Abbildung 6.12: Der Sinus.

Dabei wird der Winkel in der Regel im Bogenmaß x gemessen. Das ist die (orientierte) Länge des in Abbildung 6.11 blau markierten Kreisbogens.

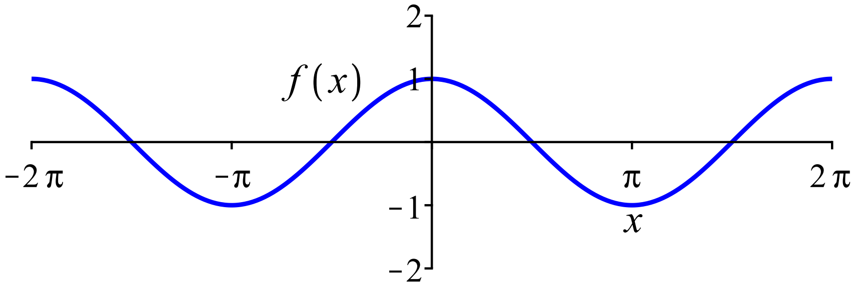


Abbildung 6.13: Der Kosinus.

Die Umrechnung vom Bogenmaß x in die zugehörige Gradzahl α erfolgt mittels[8]

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{\alpha}{360^\circ} \ .$$

Die Definition der trigonometrischen Funktionen impliziert unmittelbar für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad \text{und} \quad \cos(-x) = \cos(x)$$

sowie die 2π-Periodizität

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x) \ , \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \ .$$

Dabei heißt eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodisch mit der Periode $T > 0$, $T \in \mathbb{R}$, falls

$$f(x + T) = f(x) \quad \text{für alle} \ \ x \in \mathbb{R} \ .$$

Der Satz des Pythagoras am Einheitskreis

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad \text{für alle} \ \ x \in \mathbb{R}$$

[8]Die Zahl π ist definiert als die eindeutig bestimmte reelle Zahl mit $\cos(\pi/2) = 0$ und $0 < \pi/2 < 2$.

folgt ebenfalls unmittelbar aus der Definition.

Sehr hilfreich für konkrete Rechnungen sind die Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)\ , \\ \cos(x \pm y) &= \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)\ , \\ 2\sin(x)\cos(x) &= \sin(2x)\ . \end{aligned}$$

Eine Folgerung aus den Additionstheoremen ist beispielsweise

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\ .$$

ii) Der Tangens.

Der Tangens ist außerhalb der Nullstellen des Kosinus als Quotient

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

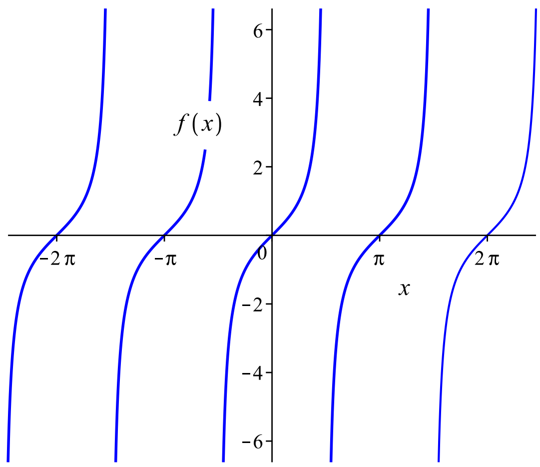


Abbildung 6.14: Der Tangens.

definiert, d.h. als Abbildung

$$\tan: \ \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R} \, .$$

Es handelt sich um eine ungerade Funktion der Periode π, wie obige Additionstheoreme belegen.

iii) Der Arcussinus und der Arcuskosinus.

Die Einschränkungen des Sinus und des Kosinus als Funktionen

$$\sin: \ \big[-\pi/2, \pi/2\big] \to [-1,1] \, , \qquad \cos: \ [0,\pi] \to [-1,1]$$

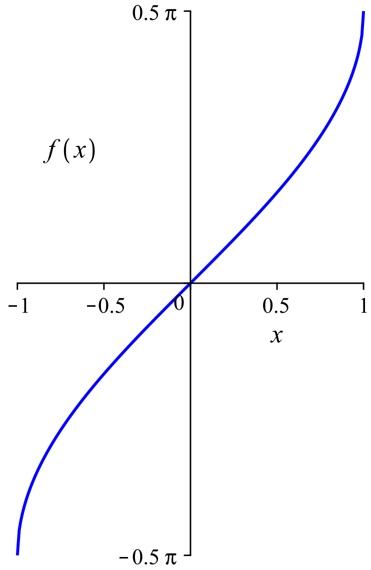


Abbildung 6.15: Der Arcussinus.

sind bijektive Funktionen.

Diese Einschränkungen heißen Hauptzweig des Sinus bzw. Hauptzweig des Kosinus.

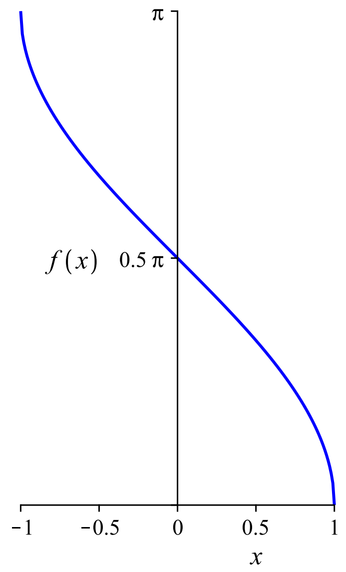


Abbildung 6.16: Der Arcuskosinus.

Die Umkehrfunktionen

$$\arcsin : \ [-1,1] \to \Big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big] \qquad \text{und} \qquad \arccos : \ [-1,1] \to [0,\pi]$$

heißen Arcussinus bzw. Arcuskosinus.

Das qualitative Verhalten der Funktionen ist in den Abbildungen 6.15 und 6.16 wiedergegeben.

iv) Der Arcustangens.

Analog ist der Arcustangens als Umkehrfunktion des Hauptzweigs des Tangens (tan: $(-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$) definiert:

$$\arctan : \ \mathbb{R} \to \big(-\pi/2, \pi/2\big) \ .$$

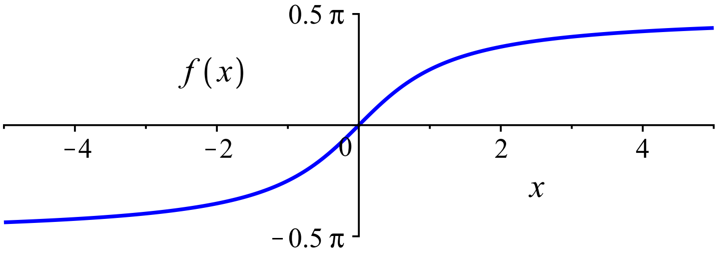


Abbildung 6.17: Der Arcustangens.

6.4 Hyperbelfunktionen

Die in den Abbildungen 6.18, 6.19, 6.20 dargestellten Hyperbelfunktionen

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,, \qquad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \qquad \tanh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

sowie deren Inverse werden in den Übungen diskutiert.

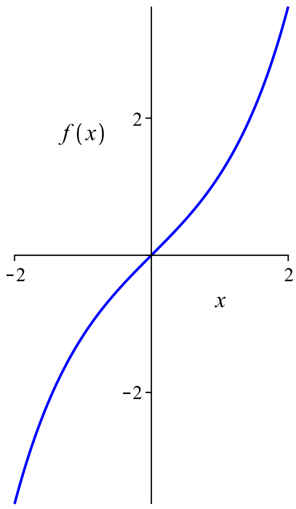


Abbildung 6.18: Der Sinus hyperbolicus.

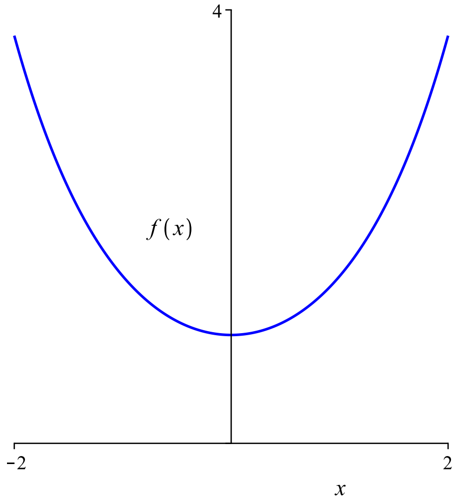


Abbildung 6.19: Der Kosinus hyperbolicus.

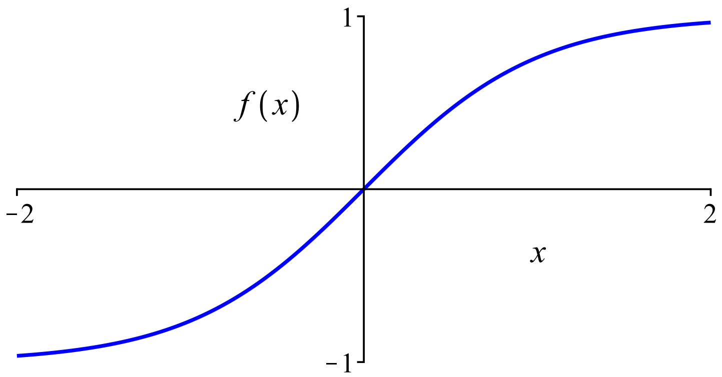


Abbildung 6.20: Der Tangens hyperbolicus.

6.5 Übungsaufgaben zu Kapitel 6

Aufgabe 1.* Polynomdivision und Linearfaktoren.

i) Sind $p(x)$ und $q(x)$ Polynome mit grad $p \geq$ grad $q \geq 1$, so gibt es eindeutig bestimmte Polynome $r(x)$, $s(x)$, grad $r <$ grad q, mit

$$p(x) = q(x) \cdot s(x) + r(x) \ ,$$

d.h. es ist

$$\frac{p(x)}{q(x)} = s(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \ , \qquad \text{grad}\, r < \text{grad}\, q \ .$$

Bestimmen Sie diese Zerlegung im Fall

$$p(x) = 2x^4 + 2x^3 - x + 1 \ , \qquad q(x) = x^2 - 2x + 1 \ .$$

ii) Ist x_0 eine Nullstelle von $p(x)$ und wählt man $q(x) = x - x_0$, so kann $q(x)$ als Linearfaktor abgespalten werden, d.h.:

$r(x) = 0$, $p(x) = s(x)(x - x_0)$ und der Grad von s ist dabei um eines geringer als der von p.

Spalten Sie von den folgenden Polynomen einen Linearfaktor ab und untersuchen Sie, ob von dem verbleibenden Polynom jeweils wieder ein Linearfaktor abgespalten werden kann:

(a) $p(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 4$;

(b) $p(x) = 2x^3 - 10x^2 + 6x + 18$.

Aufgabe 2. Horner-Schema zur Auswertung von Polynomen.

Für reelle Koeffizienten a_0, a_1, ..., a_n betrachte man das Polynom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \ .$$

i) Man berechne (ausmultiplizieren)

$$a_0 + (x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + x(\dots))))) \ .$$

ii) * Für ein festes x werden nun b_0, b_1, ..., b_{n-1} rekursiv definiert:

$$b_{n-1} = a_n \ , \quad b_{k-1} = a_k + x b_k \ , \quad k = n-1, \dots, 1$$

und mit folgendem Schema berechnet:

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ + & & x b_{n-1} & \dots & x b_1 & x b_0 \\ \hline x & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_0 & p(x) \end{array} \ .$$

Hier entsteht in den Spalten durch Summation der Koeffizient mit dem nächst kleineren Index. Dieser wird mit x multipliziert und in die nächste Spalte eingetragen ....

Als Ergebnis liefert $p(x)$ den Wert des Polynoms an der Stelle x.

Man berechne mithilfe des Horner-Schemas $p(2)$ für

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3 \ .$$

Aufgabe 3.

i) Es sei $a > 0$ fixiert, $a \neq 1$. Leiten Sie für x, $y > 0$, $t \in \mathbb{R}$ die Logarithmengesetze aus den korrespondierenden Eigenschaften der Exponentialfunktion ab.

(a) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$;

(b) $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$;

(c) $\log_a x^t = t \log_a(x)$.

ii) Zeigen Sie (a, b, $x > 0$, a, $b \neq 1$):

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \ .$$

Hinweis zur Erinnerung: Die Exponentialfunktion erfüllt die Funktionalgleichung

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

für alle x, $y \in \mathbb{R}$ *und die allgemeine Exponentialfunktion ist per definitionem gegeben durch*

$$a^x := \exp(x \cdot \ln(a)) \ .$$

Aufgabe 4.

i) Folgern Sie aus den Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen

$$\cos(x) = -\sin(x - \pi/2) = \sin(\pi/2 - x) \quad \text{für alle } \ x \in \mathbb{R} \ .$$

ii) Betrachten Sie die Umkehrfunktionen arcsin: $[-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ und arccos: $[-1, 1] \to [0, \pi]$ der Hauptzweige des Sinus und des Kosinus.

Folgern Sie aus *i*)

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x) \quad \text{für alle} \;\; x \in [-1, 1] \; ,$$

Hinweis. Verifizieren Sie $f^{-1}(f(x)) = x$ und achten Sie darauf, dass Sie im Definitionsbereich der Hauptzweige argumentieren.

Aufgabe 5.

i) Zeigen Sie für alle x, $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y) \; , \\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) \; , \\ \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= 1 \; , \\ \tanh(x+y) &= \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x)\tanh(y)} \; . \end{aligned}$$

ii) Skizzieren Sie die inversen Hyperbelfunktionen arsinh (x), arcosh (x), artanh (x) (Areasinus hyperbolicus, Areakosinus hyperbolicus, Areatangens hyperbolicus).

Aufgabe 6.

i) (a) Definieren und skizzieren Sie die Kotangensfunktion cot.

(b) Skizzieren Sie die inverse Funktion Arcuskotangens arccot auf ihrem Definitionsbereich.

ii) (a) Definieren und skizzieren Sie die Funktion Kotangens hyperbolicus coth.

(b) Skizzieren Sie die inverse Funktion arcoth (Areakotangens hyperbolicus) auf ihrem Definitionsbereich.

Aufgabe 7.

i) Zeigen Sie für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

(a) Ist f streng monoton wachsend (fallend), so ist f nicht periodisch.

(b) Ist f gerade und monoton wachsend (fallend), so ist f konstant.

(c) Ist f ungerade und nach oben beschränkt, so ist f auch nach unten beschränkt.

ii) (a) Finden Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \operatorname{bild}(f)$, die bijektiv, streng monoton wachsend und beschränkt ist. Bestimmen Sie das Supremum und das Infimum.

(b) Kann eine streng monoton wachsende Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ihr Maximum bzw. Minimum annehmen?

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben.

Aufgabe 1.

i) Es ist

$$
\begin{array}{rlcl}
 & (2x^4 + 2x^3 + 0 \cdot x^2 - x + 1) : (x^2 - 2x + 1) & = & \mathbf{2x^2} + \mathbf{6x} + \mathbf{10} \\
 & & & +\text{Rest}\ , \\
- & \underline{\mathbf{2x^4 - 4x^3 + 2x^2}} & & \\
 & \quad 6x^3 \ - 2x^2 \ \ - x \ + 1 & & \\
- & \quad \underline{\mathbf{6x^3 - 12x^2 + 6x}} & & \\
 & \qquad \mathbf{10x^2 - 7x \ \ + 1} & & \\
- & \qquad \mathbf{10x^2 - 20x + 10} & &
\end{array}
$$

und man erhält

$$\text{Rest} = \frac{\mathbf{13x - 9}}{x^2 - 2x + 1}\ .$$

Durch Multiplikation der rechten Seite mit $x^2 - 2x + 1$ kann leicht die Probe gemacht werden.

ii) (a) Es ist z.B. $x_0 = 2$ Nullstelle von $p(x)$ und

$$
\begin{array}{rlcl}
 & (x^3 - 2x^2 + 2x - 4) : (x - 2) & = & x^2 + 2\ , \\
- & \underline{x^3 - 2x^2} & & \\
 & \qquad 2x - 4 & & \\
- & \qquad \underline{2x - 4} & & \\
 & \qquad\quad 0 & &
\end{array}
$$

wobei das Ergebnis wieder durch eine Probe bestätigt wird. Es gilt also

$$p(x) = (x - 2) \cdot (x^2 + 2)\ ,$$

wobei $x^2 + 2$ irreduzibel ist.

(b) Hier kann man die Nullstelle $x_0 = -1$ von $p(x)$ raten:

$$
\begin{array}{rl}
 & (2x^3 - 10x^2 + 6x + 18) : (x+1) \quad = \quad 2x^2 - 12x + 18 \ . \\
- & \underline{2x^3 + 2x^2} \\
 & \quad -12x^2 + 6x \\
- & \quad \underline{-12x^2 - 12x} \\
 & \qquad\qquad 18x + 18 \\
- & \qquad\qquad \underline{18x + 18} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Wieder bestätigt eine Probe das Ergebnis. In diesem Fall hat man

$$p(x) = (x+1) \cdot (2x^2 - 12x + 18) = 2(x+1)(x-3)^2 \ .$$

Aufgabe 2. *ii*) Nach dem Schema

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & 1 & 3 \\
+ & & 2 & -2 & -2 \\
\hline
x = 2 & 1 & -1 & -1 & \color{red}{1}
\end{array} \ .
$$

ist $p(2) = 1$.

Kapitel 7

Polynominterpolation

7.1 Polynominterpolation (Darstellung nach Lagrange und Newton; dividierte Differenzen; Algorithmus von Neville)

Die Polynominterpolation ist ein Teil der angewandten und numerischen Mathematik und wird in den Abschnitten zur numerischen Differentiation und Integration eine große Rolle spielen.

Die wesentliche Motivation zum Studium der Polynominterpolation in den experimentellen Wissenschaften ist die Auswertung von Messreihen.

Eine Größe y hänge über eine unbekannte Gesetzmäßigkeit $y = f(x)$, beispielsweise über ein gesuchtes Materialgesetz, von der Variablen x ab.

Diese unbekannte Gesetzmäßigkeit soll mithilfe eines Experimentes möglichst gut approximiert werden.

Dazu werden für eine Anzahl von Punkten x_i die zugehörigen Werte y_i gemessen und die Datenpaare (x_i, y_i) mit einer möglichst „einfachen" Funktion verbunden (interpoliert).

Im Fall von zwei Datenpaaren ist es nahe liegend, die beiden Messpunkte mit einer Geraden (einem Polynom vom Grad 1) zu verbinden und analog wird man es im Fall von $(n + 1)$ Datenpaaren mit einem Polynom vom Grad n versuchen (vgl. Abbildung 7.1).

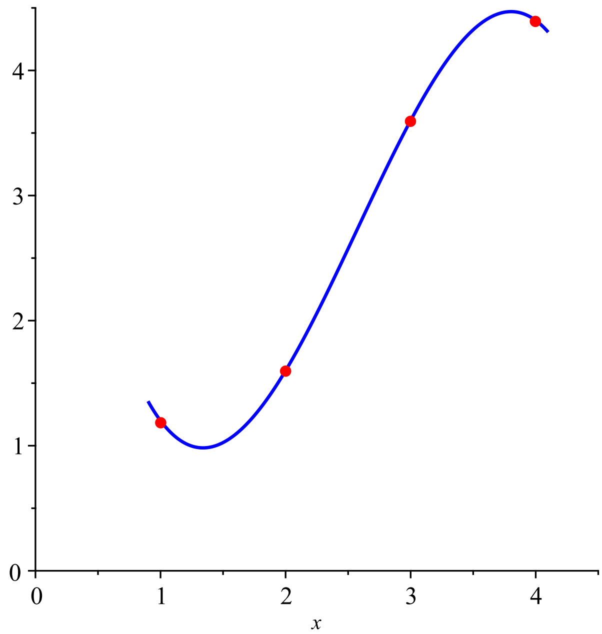


Abbildung 7.1: Eine Messreihe mit 4 Datenpaaren – Interpolationspolynom vom Grad 3.

Interpolationsaufgabe von Lagrange.

Gegeben seien zu $n \in \mathbb{N}$

$(n+1)$ paarweise verschiedene Stützstellen $x_0,\ x_1, \dots,\ x_n$,

$(n+1)$ Werte $y_0,\ y_1, \dots,\ y_n$.

Gesucht ist ein Polynom p_n von möglichst kleinem Grad, sodass

$$p_n(x_i) = y_i \quad \text{für alle } i = 0,\ 1, \dots,\ n\ . \tag{$*$}$$

Satz 7.1. $\boxed{\text{Lagrangesche Darstellung}}$

Es gibt genau ein Polynom $p_n(x)$ vom Grad kleiner als oder gleich n, welches den Gleichungen $(*)$ genügt,

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \cdot L_j(x) \quad \textit{mit} \;\; L_j(x) := \prod_{k=0,\, k\neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \,.$$

Die Art der Darstellung des eindeutig bestimmten Interpolationspolynoms heißt die Lagrangesche Darstellung.

Die Polynome $L_j^n(x)$, $0 \leq j \leq n$, heißen Lagrange-Polynome.

Beweis. Der Beweis wird in Kapitel 7.2 als Übungsaufgabe besprochen. □

---

j	0	1	2	3
x_j	-2	-1	1	2
y_j	1	3	-3	2

Tabelle 7.1: Daten einer Interpolationsaufgabe.

Beispielaufgabe. *Die Daten der Interpolationsaufgabe seien wie in Tabelle 7.1 gegeben und die konkrete Aufgabe bestehe darin, den Wert $p_3(0)$ des Interpolationspolynoms $p_3(x)$ zu bestimmen.*

Zur Lösung der Aufgabe erstellt man aus den Daten die Tabelle 7.2 und berechnet nach Satz 7.1

$$p_3(0) = 1 \cdot \Big(-\frac{1}{6}\Big) + 3 \cdot \frac{2}{3} + (-3) \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \Big(-\frac{1}{6}\Big) = -\frac{1}{2} \,.$$

Das Interpolationspolynom selbst,

j	$L_j(x)$	$L_j(0)$
0	$\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(-1)\cdot(-3)\cdot(-4)}$	$-\frac{1}{6}$
1	$\frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{1\cdot(-2)\cdot(-3)}$	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{3\cdot 2\cdot(-1)}$	$\frac{2}{3}$
3	$\frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{4\cdot 3\cdot 1}$	$-\frac{1}{6}$

Tabelle 7.2: Schema zur Lösung der Interpolationsaufgabe nach Lagrange.

$$\begin{aligned} p_3(x) &= -\frac{1}{12}(x+1)(x-1)(x-2) + \frac{1}{2}(x+2)(x-1)(x-2) \\ &\quad +\frac{1}{2}(x+2)(x+1)(x-2) + \frac{1}{6}(x+2)(x+1)(x-1)\ , \end{aligned}$$

ist in Abbildung 7.2 dargestellt.

Möchte man nun die Messreihe durch ein Datenpaar (x_{n+1}, y_{n+1}) ergänzen, so stellt man fest, dass nicht auf die bisherigen Ergebnisse zurückgeriffen werden kann.

Es ist eine komplette Neuberechnung notwendig ist – Zusatzmessungen können nicht in ein bestehendes Schema integriert werden.

Gibt es eine geeignetere Darstellungsweise von p_n?

Es stellt sich die Frage, ob es eine „geschicktere“ Darstellung desselben (eindeutig bestimmten!) Interpolationspolynoms gibt, die auf ein Schema

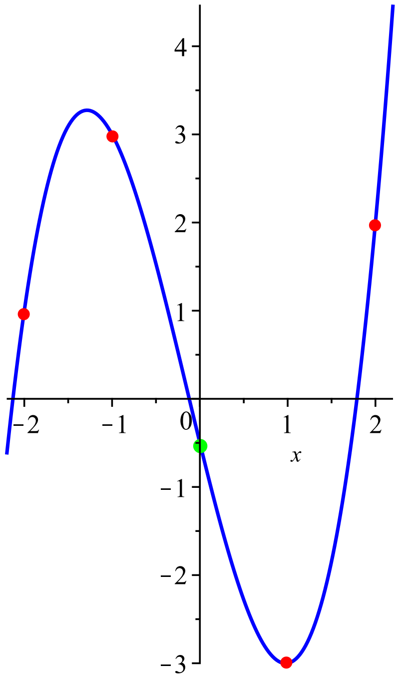


Abbildung 7.2: Das Interpolationspolynom der Beispielaufgabe.

führt, welches bei der Hinzunahme eines Datenpaares auf den vorherigen Berechnungen aufbaut.

Für fixiertes $n \in \mathbb{N}$ und $(n+1)$ Datenpaare aus Stützstellen und Werten werden dazu zunächst die sogenannten Newtonschen Basisfunktionen eingeführt:

$$N_0^{(n)}(x) :\equiv 1 \; , \quad N_j^{(n)}(x) := \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k) \; , \quad j = 1, \; 2, \; \ldots, \; n \; .$$

Ziel des gesuchten Schemas ist es, reelle Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ so zu konstruieren, dass das Interpolationspolynom geschrieben werden kann als

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot N_j^{(n)}(x) \; .$$

Definition 7.1. DIVIDIERTE DIFFERENZEN

Sukzessive werden die dividierten Differenzen definiert über

$$y[x_j] := y_j \ , \quad j = 0,\ 1,\ \dots,\ n,$$

und für $j = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1,\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ n-j$*:*

$$y[x_j, \dots, x_{j+k}] := \frac{y[x_{j+1}, \dots, x_{j+k}] - y[x_j, \dots x_{j+k-1}]}{x_{j+k} - x_j} \ .$$

x_0	$y[x_0] = y_0$				
		$\mathbf{y[x_0, x_1]}$			
x_1	$y[x_1] = y_1$		$\mathbf{y[x_0, x_1, x_2]}$		
		$\mathbf{y[x_1, x_2]}$			
x_2	$y[x_2] = y_2$		$y[x_1, x_2, x_3]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$y[x_0, x_1, \dots, x_n]$
x_{n-2}	$y[x_{n-2}] = y_{n-2}$		$y[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}]$		
		$y[x_{n-2}, x_{n-1}]$			
x_{n-1}	$y[x_{n-1}] = y_{n-1}$		$y[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
		$y[x_{n-1}, x_n]$			
x_n	$y[x_n] = y_n$				

Tabelle 7.3: Schema zur Berechnung der dividierten Differenzen in der Newtonschen Darstellung.

Die dividierten Differenzen können tatsächlich sukzessive berechnet werden. Die schematische Vorgehensweise verdeutlicht Tabelle 7.3.

Hierbei ergibt sich die Spalte mit der Nummer $l+1$ wie folgt:

Zwei übereinander stehende Eintragungen aus Spalte l werden subtrahiert (Vorzeichen beachten) und das Ergebnis wird durch die entsprechende Argumentdifferenz dividiert.

Es sei nun $0 \leq j \leq n$, $0 \leq k \leq n-j$ und es bezeichne $p_{j,j+k}$ das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom vom Grad $\leq k$ zu den Datenpaaren (x_j, y_j), (x_{j+1}, y_{j+1}), ..., (x_{j+k}, y_{j+k}).

Insbesondere ist in dieser Notation $p_{0,n}$ das gesuchte Interpolationspolynom p_n.

Satz 7.2. NEWTONSCHE DARSTELLUNG

i) Für $0 \leq j \leq j+k \leq n$ *ist*

$$\begin{aligned} p_{j,j+k} &= y[x_j] + y[x_j, x_{j+1}] \cdot (x - x_j) + \dots \\ &\quad + y[x_j, \dots, x_{j+k}](x - x_j) \dots (x - x_{j+k-1}) \, . \end{aligned}$$

ii) Folglich ist die Newtonsche Darstellung des eindeutig bestimmten Interpolationspolynoms

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y[x_0, \dots, x_j] \cdot N_j^{(n)}(x) \, .$$

Beweis. Satz 7.2 wird mithilfe einer Induktion nach k und einer Indexverschiebung bewiesen. □

Beobachtungen.

i) *Die gesuchten Koeffizienten der Newtonschen Darstellung stehen oben in jeder Spalte des Schemas.*

ii) *Beim Hinzufügen eines neuen Datenpaares muss im Schema nur eine zusätzliche Schrägzeile berechnet werden.*

Beispielaufgabe. *Zu den Daten aus Tabelle 7.1 soll* $p_3(0)$ *nun mittels der Newtonschen Darstellung berechnet werden.*

Im konkreten Beispiel ergänzt Tabelle 7.4 die Tabelle 7.3 nach links, um die Argumentdifferenzen vor Augen zu haben.

In der ersten Spalte steht der Wert $x_3 - x_0$, in der zweiten findet man die Werte $x_{j+2} - x_j$, $j = 0, 1$, in der dritten $x_{j+1} - x_j$, $j = 0, 1, 2$.

			$x_0 = -2$	$y[x_0] = 1$			
		1			$y[x_0, x_1] = 2$		
	3		$x_1 = -1$	$y[x_1] = 3$		$y[x_0, x_1, x_2] = -\frac{5}{3}$	
4		2			$y[x_1, x_2] = -3$		$y[x_0, \ldots] = \frac{13}{12}$
	3		$x_2 = 1$	$y[x_2] = -3$		$y[x_1, x_2, x_3] = \frac{8}{3}$	
		1			$y[x_2, x_3] = 5$		
			$x_3 = 2$	$y[x_3] = 2$			

Tabelle 7.4: Schema zur Lösung der Interpolationsaufgabe nach Newton.

Aus dem Schema ergibt sich

$$\begin{aligned} p_3(x) &= 1 + 2 \cdot (x+2) - \frac{5}{3} \cdot (x+2) \cdot (x+1) \\ &\quad + \frac{13}{12} \cdot (x+2) \cdot (x+1) \cdot (x-1) \ , \\ p_3(0) &= -\frac{1}{2} \ . \end{aligned}$$

Ein weiteres Schema.

Benötigt man wie in den obigen Beispielaufgaben nur den Wert des Interpolationspolynoms an einer fixierten Stelle und nicht eine komplette Darstellung des Polynoms, so ist der Algorithmus von Neville vorzuziehen.

Hier werden rekursiv die Größen

$$p_{j,0}(x) := y_j \ , \quad j = 0, \ 1, \dots \ , n,$$

und für $k \leq j \leq n$, $k = 1, \dots, n$,

$$p_{j,k}(x) := p_{j,k-1}(x) - \frac{x_j - x}{x_j - x_{j-k}} \Big[p_{j,k-1}(x) - p_{j-1,k-1}(x) \Big]$$

bestimmt, sodass $p_n(x) = p_{n,n}(x)$ der gesuchte Funktionswert an der fixierten Stelle x ist.

Beispielaufgabe. *Die sukzessive Berechnung wird in Tabelle 7.5 wieder anhand des obigen Beispiels mit den Daten aus Tabelle 7.1 vorgeführt.*

Für praktische Zwecke wird dabei das Schema Zeile für Zeile von oben nach unten aufgefüllt. Man berechnet etwa

$$p_{2,1}(0) = -3 - \frac{1-0}{1-(-1)} \big[-3 - 3 \big] = 0 \ .$$

x_j	y_j	$\mathbf{k=1}$	$k=2$	$k=3$
$x_0=-2$	$y_0=p_{0,0}(0)=1$			
$x_1=-1$	$y_1=\mathbf{p_{1,0}(0)}=3$	$p_{\mathbf{1},\mathbf{1}}(0)=5$		
$x_2=1$	$y_2=\mathbf{p_{2,0}(0)}=-3$	$\mathbf{p_{2,1}(0)}=0$	$p_{2,2}(0)=\frac{5}{3}$	
$x_3=2$	$y_3=p_{3,0}(0)=2$	$p_{\mathbf{3},\mathbf{1}}(0)=-8$	$p_{3,2}(0)=-\frac{8}{3}$	$p_{3,3}(0)=-\frac{1}{2}$

Tabelle 7.5: Schema zum Algorithmus von Neville.

Beobachtung. *Wieder ist beim Hinzufügen eines neuen Messpunktes nur eine Schrägzeile zu ergänzen.*

Problem bei der Polynominterpolation: Oszillationen.

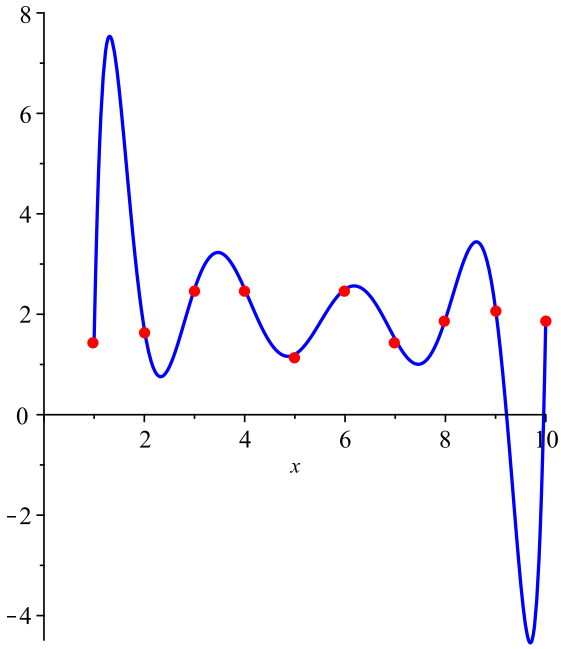


Abbildung 7.3: Interpolationspolynom mit starken Oszillationen.

Ein wesentlicher Vorteil der Polynominterpolation ist die geschlossene Form, in der die interpolierende Funktion (in diesem Fall das Polynom) angegeben werden kann.

Liegen jedoch sehr viele Datenpaare (z.B. 10 und mehr) vor, so arbeitet man mit Polynomen, die eine entsprechend hohe Ordnung haben und daher sehr stark oszillieren können.

Obwohl die Datenpaare selbst genau getroffen werden, ist die „Güte der Approximation“ der gesuchten Gesetzmäßigkeit evtl. recht schlecht, wie in Abbildung 7.3 deutlich wird.

Alternative: Splines.

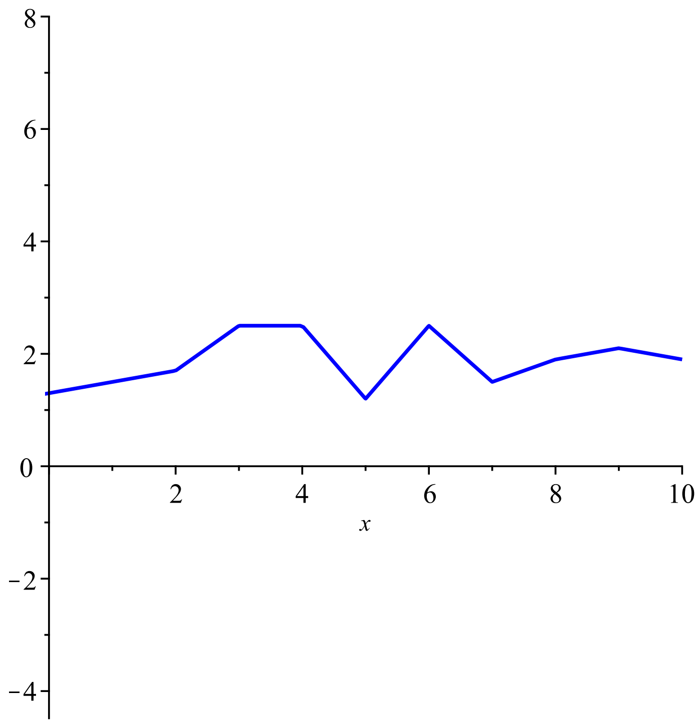


Abbildung 7.4: Approximation mit Splines der Ordnung 1.

Eine Alternative im Falle vieler Datenpaare bieten sogenannte Splines.

Sind x_0, x_1, ..., x_n wieder die Stützstellen des Problems (auch Knoten genannt), jetzt mit $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, so konstruiert man auf $[x_i, x_{i+1}]$ die zu den Knoten gehörende Spline-Funktion der Ordnung $k \geq 1$.

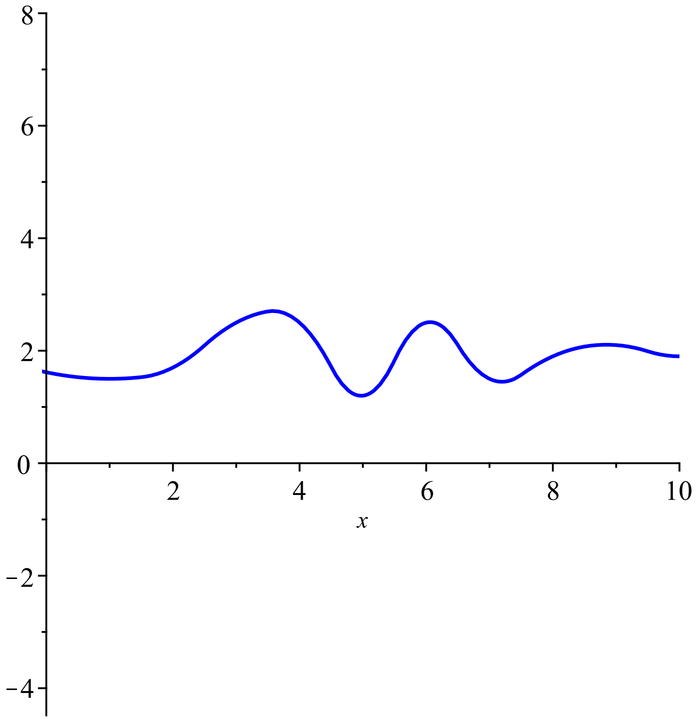


Abbildung 7.5: Approximation mit Splines der Ordnung 2.

D.h.: Es wird eine Funktion $s_k(x)$ konstruiert mit den Eigenschaften:

i) $s_k(x)$ ist eine „glatte“ Funktion (keine „Sprünge“ und für $k \geq 2$ keine „Knickstellen“, genauer gesagt: s_k ist $(k-1)$ mal stetig differenzierbar);

ii) $s_k(x)$ ist auf allen Teilintervallen $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$, ein Polynom höchstens k-ten Grades;

iii) s_k ist interpolierende Spline-Funktion zu gegebenen Werten y_0, y_1, $\ldots$, y_n, mit anderen Worten:

$$s_k(x_i) = y_i \quad \text{für alle } \ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n\ .$$

Dabei kann in der Praxis häufig mit Spline-Funktionen niedriger Ordnung gearbeitet werden, etwa $k \leq 3$.

Die Spline-Approximationen aus den Abbildung 7.4 und 7.5 basieren auf denselben Daten wie die Polynominterpolation aus Abbildung 7.3. Man erkennt deutlich das Abnehmen der Oszillationen.

7.2 Übungsaufgaben zu Kapitel 7

Aufgabe 1.*

i) Es sei $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ fixiert. Berechnen Sie für alle $l = 0, 1, 2, \dots n$,

$$L_j(x_l) = \prod_{k=0,\, k\neq j}^{n} \frac{x_l - x_k}{x_j - x_k} \,.$$

ii) Zeigen Sie Satz 7.1.

Aufgabe 2. Gegeben sei die Wertetabelle

j	0	1	2
x_j	-1	1	2
y_j	-1	1	5

,

$p_2(x)$ sei das Interpolationspolynom zu den Daten (x_j, y_j), $0 \le j \le 2$.

i) (a) Berechnen Sie $p_2(x)$ mittels der Lagrangeschen Darstellung.

(b) Fügen Sie der Wertetabelle den Punkt $(x_3, y_3) = (0, 1)$ hinzu und bearbeiten Sie die Aufgabe erneut (d.h. berechnen Sie $p_3(x)$ mittels der Lagrangeschen Darstellung).

ii) (a) Berechnen Sie $p_2(x)$ mittels der Newtonschen Darstellung.

(b) Fügen Sie der Wertetabelle den Punkt $(x_3, y_3) = (0, 1)$ hinzu und bearbeiten Sie die Aufgabe erneut (d.h. berechnen Sie $p_3(x)$ mittels der Newtonschen Darstellung).

iii) (a) Berechnen Sie $p_2(-2)$ mittels des Algorithmus von Neville.

(b) Fügen Sie der Wertetabelle den Punkt $(x_3, y_3) = (0, 1)$ hinzu und bearbeiten Sie die Aufgabe erneut (d.h. berechnen Sie $p_3(-2)$ mittels des Algorithmus von Neville).

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben.

Aufgabe 1.

i) Es sei j wie oben fixiert. Ist $l = j$, so gilt

$$L_j(x_l) := \prod_{k=0,\, k\neq j}^{n} \frac{x_l - x_k}{x_j - x_k} = \prod_{k=0,\, k\neq j}^{n} \frac{x_j - x_k}{x_j - x_k} = 1 \; .$$

Ist $l \neq j$, so gilt

$$\begin{aligned} L_j(x_l) &:= \prod_{k=0,\, k\neq j}^{n} \frac{x_l - x_k}{x_j - x_k} \\ &= \left[\prod_{k=0,\, k\neq j,\, k\neq l}^{n} \frac{x_l - x_k}{x_j - x_k} \right] \cdot \frac{x_l - x_{k=l}}{x_j - x_{k=l}} = 0 \; . \end{aligned}$$

ii) Man fixiere eine Stützstelle x_l, d.h. ein $l \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Dann ist nach Aufgabenteil *i*)

$$L_l(x_l) = 1 \; , \qquad L_j(x_l) = 0 \qquad \text{für } \; j = 0, 1 \ldots, n \; , \quad j \neq l \; .$$

Also folgt

$$p_n(x_l) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x_l) = y_l$$

und es handelt sich tatsächlich um eine Lösung der Interpolationsaufgabe.

Falls es eine weitere Lösung $q_n(x)$, d.h. ein Polynom vom Grad $\leq n$, der Interpolationsaufgabe gibt, so gilt

$$p_n(x_i) - q_n(x_i) = y_i - y_i = 0 \quad \text{für } \; i = 0, \ldots, n \; .$$

Folglich ist $p_n(x) - q_n(x)$ ein Polynom vom Grad maximal n mit $(n+1)$ Nullstellen.

Das ist aber nur möglich, falls $p_n(x)$ identisch gleich $q_n(x)$ ist. $\square$

Kapitel 8

Folgen und Reihen

Den Grundstein aller modernen Naturwissenschaften legten Newton und Leibniz, als sie unabhängig voneinander die Infinitesimalrechnung, die mathematische Lehre vom „unendlich Kleinen“ bzw. „unendlich Großen“ entwickelten.

Die Infinitesimalrechnung kann auch als das Studium von Grenzwerten bezeichnet werden. Zusammen mit den vielfältigen Verzweigungen und Anwendungen spricht man von der Analysis, einem zentralem Gebiet der Mathematik.

Grenzwerte definierten unzählige Begriffe etwa aus den Naturwissenschaften, der Technik und der Geometrie: Momentangeschwindigkeiten, Wachstumsraten, aber auch Spannungs- Verzerrungsrelationen in neuen Materialien, Temperaturgradienten oder geometrische Größen wie Krümmungen können als Beispiele herangezogen werden.

Im Zeitalter der Digitalisierung basieren fundamentale Betrachtungen nach wie vor auf dem Studium von Grenzwerten – man denke etwa an die Frage nach der Konvergenz von Algorithmen.

Selbst bei der so elementar anmutenden Diskussion rationaler Zahlen als Dezimalzahlen in Kapitel 4.1 liefert der Grenzwert einer geometrischen Reihe (vgl. Kapitel 8.1) erst die geeignete Interpretation einer periodischen Dezimalzahl.

Auf eine recht intuitive Weise werden Grenzwerte nun mithilfe von Folgen eingeführt.

8.1 Reelle Zahlenfolgen (Konvergenz; Divergenz; Konvergenzkriterien; Teilfolgen; Satz von Bolzano-Weierstraß)

Beispiel. *Ein Kapital* $K_0 > 0$ *sei zu einem festen Jahreszinsfuß* $0 < p < 1$ *ein Jahr lang verzinst.*

Nach diesem Jahr beläuft sich das Kapital auf

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0(1+p) && \textit{bei jährlicher Verzinsung ;} \\ K_2 &= K_0\left(1+\frac{p}{2}\right)^2 && \textit{bei halbjährlicher Verzinsung ;} \\ K_4 &= K_0\left(1+\frac{p}{4}\right)^4 && \textit{bei vierteljährlicher Verzinsung .} \end{aligned}$$

Um das Verhalten bis hin zu einer kontinuierlichen Verzinsung zu quantifizieren, betrachtet man die Folge reeller Zahlen

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N} .$$

Dabei ist evident, dass die Folge monoton wächst (halbjährliche Verzinsung ist günstiger als jährliche etc.) und beschränkt ist (die Bank hat nur endliche Reserven).

Das Beispiel vermittelt die vage Vorstellung einer Folge als Aneinanderreihung von „unendlich“ vielen Objekten (hier reellen Zahlen)

$$a_1 \, , \quad a_2 \, , \quad \dots , \quad a_n \, , \quad a_{n+1} \, , \dots \quad ,$$

wobei sich die Frage stellt, ob und, falls ja, in welchem Sinne die Folge gegen einen Grenzwert konvergiert.

Was ist überhaupt eine Folge?

Definition 8.1. $\boxed{\text{FOLGE}}$

Es sei $A \neq \emptyset$ eine Menge.

Eine Folge in A ist eine Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to A$[1], die jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Element $f(n) = a_n \in A$, das n^{te} Glied der Folge, zuordnet.

Notation: $\{a_n\}$ oder aufzählend $a_1, a_2, a_3, \ldots$ oder $a_n = \ldots$ oder $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... .

Ist $A = \mathbb{R}$ bzw. $A = \mathbb{C}$, so spricht man von einer reellen bzw. komplexen Zahlenfolge.

$$\begin{array}{cccccccc} & \mathbb{N} & & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ f: & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots \\ & A & & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots \end{array}$$

Abbildung 8.1: Eine Folge ist eine Abbildung.

Beispiele.

i) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = 1/n$. *Dann ist* $\{a_n\} = \{1/n\}$.

ii) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = n$. *Dann ist* $\{a_n\} = \{n\}$.

iii) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = a$, $a \in \mathbb{R}$ *fixiert. Dann ist* $\{a_n\} = \{a\}$ *eine konstante Folge.*

[1]Statt $\mathbb{N}$ kann eine andere abzählbare Indexmenge gewählt werden.

iv) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = (-1)^{n+1}$. *Hier handelt es sich um eine sogenannte alternierende Folge von der Form* $a_1, -a_2, a_3, -a_4, \ldots, a_i \geq 0$ *für alle* $i \in \mathbb{N}$.

Folgen in anderen Mengen.

Von besonderer Bedeutung sind auch sogenannte Funktionenfolgen, d.h. A ist eine Menge von Funktionen.

Der ausführlichen Diskussion in Kapitel 9.1 sei hier ein einfaches Beispiel vorangestellt.

Beispiel. *Es sei*

$$A = \big\{p : \ p \text{ ist ein reelles Polynom } \mathbb{R} \to \mathbb{R}\big\} .$$

Dann ist die Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to A\,, \qquad f(n) = p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad p_n(x) = x^n \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,,$$

eine Funktionenfolge im Raum der Polynome, $\{a_n\} = \{p_n\} =: \{x^n\}$.

Rekursiv definierte Folgen.

Bei einer rekursiv definierten Folge berechnen sich die Folgenglieder aus dem Vorgänger oder aus mehreren vorherigen Folgengliedern.

Beispiel. *Eine der bekanntesten rekursiv definierten Folgen ist die der Fibonaccizahlen.*

Hier ist ein Folgenglied definiert als die Summe der beiden vorherigen.[2]

Rekursionsanfang: $a_0 := 0,\ a_1 := 1\ .$

Rekursionsvorschrift: $a_n := a_{n-1} + a_{n-2}\ ,\quad n \geq 2\ .$

Die Folge lautet: $0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \ldots\ .$

Als Vorstellung wird oft ein Kaninchenpaar herangezogen, welches sich in einem geschlossenen Gehege befinde.

Die Frage lautet: Wie viele Kaninchenpaare gibt es z.B. nach einem Jahr, wenn jedes Paar jeden Monat zwei Junge zeugt, welche sich ihrerseits vom zweiten Monat an vermehren?

Anschauliche Vorstellung einer konvergenten Folge.

Bis auf weiteres werden nun reelle Zahlenfolgen betrachtet, auch wenn dies nicht explizit erwähnt ist.

Während bei endlichen Tupeln in der Regel jeder Eintrag relevant ist, spielt es bei Folgen, die auch als eine Art von „unendlichen Tupeln“ interpretiert werden können, lediglich eine untergeordnete Rolle, wie sich endlich viele Folgenglieder verhalten.[3]

Zu analysieren ist die Folge „für große n“, d.h. es interessiert nur, ob und wie eine Folge konvergiert.

Zur Veranschaulichung des Konvergenzbegriffes betrachte man die Folge $\{1/n\}$, die nach der intuitiven Vorstellung gegen 0 konvergiert.

Das bedeutet, dass die Folgenglieder a_n der 0 beliebig nahe kommen, wenn man im Folgenindex n nur weit genug nach vorne schreitet.

[2] Der Quotient der Folgenglieder konvergiert im Grenzwert gegen das Verhältnis des sogenannten goldenen Schnittes.

[3] Eine Ausnahme bilden rekursiv definierte Folgen, deren Verhalten i.A. von den Startwerten abhängt.

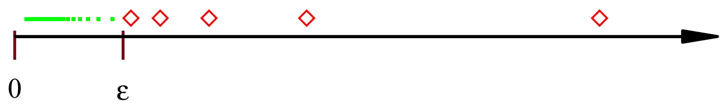


Abbildung 8.2: Bei diesem ε sind ab $n = 6$ alle Folgenglieder näher bei 0 als ε.

Befindet man sich auf dem Zahlenstrahl also in irgendeinem festen Abstand $\varepsilon > 0$ von der 0 entfernt, dann werden beim Durchlaufen der Folge die Folgenglieder irgendwann (d.h. ab einem gewissen Index abhängig von ε) näher bei der 0 sein als man selbst, wie es in Abbildung 8.2 skizziert ist.

Mit anderen Worten: „Ein Betrachter im festen Abstand $\varepsilon > 0$ vom Grenzwert 0 wird irgendwann von der Folge $\{1/n\}$ auf ihrem Weg zum Grenzwert überholt und irgendwann entfernen sich selbst keine vereinzelten Folgenglieder wieder weiter zurück als der Betrachter“.

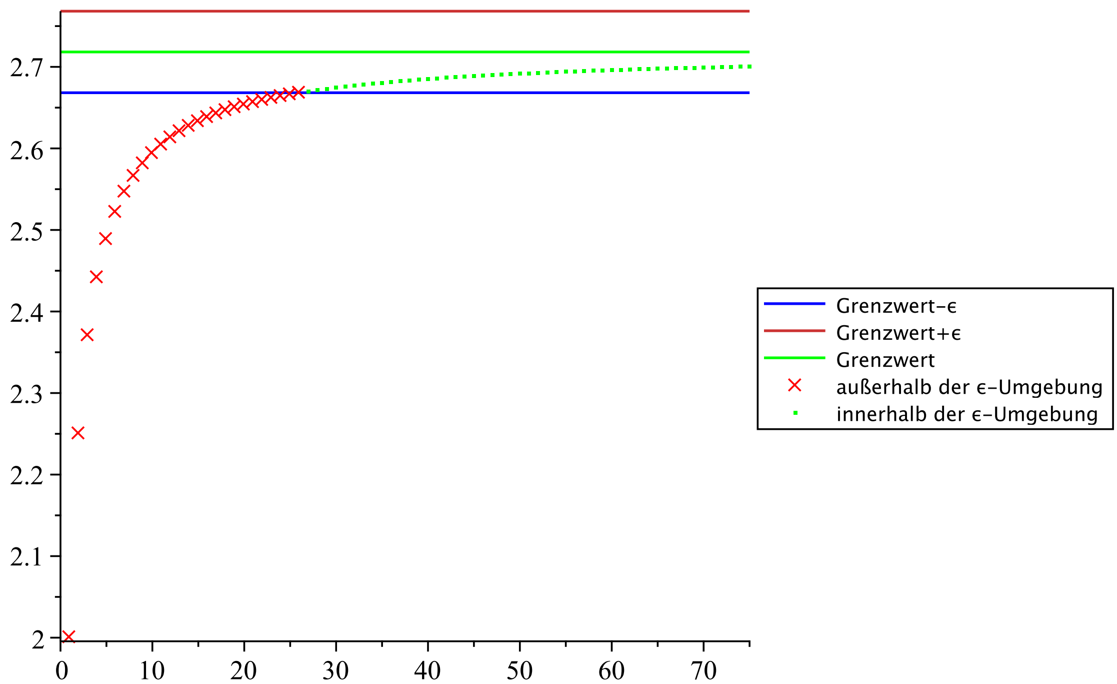


Abbildung 8.3: Hier ist der Graph einer konvergenten Folge dargestellt.

Gemäß der Definition einer Folge als Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ wird nun die Konvergenz anhand des Graphen veranschaulicht:

Bezeichnet a den Grenzwert einer Folge (sofern existent) und ist eine (beliebig kleine) „Fehlertoleranz“ $\varepsilon > 0$ gegeben, so befinden sich alle Punkte auf dem Graphen im „ε-Schlauch“ um den Grenzwert, falls nur n hinreichend groß ist. Dies ist in Abbildung 8.3 illustriert.

Konvergenz reeller Zahlenfolgen.

Präzisiert werden die vorangehenden Betrachtungen in:

Definition 8.2. KONVERGENZ VON ZAHLENFOLGEN

Eine Folge $\{a_n\}$ heißt konvergent, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, sodass:

Zu jedem (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ existiert eine (meist von ε abhängende) Zahl $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon)\ .$$

Dann heißt a der Grenzwert oder Limes der Folge und man schreibt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \to a \text{ für } n \to \infty\ .$$

Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent.

In Definition 8.2 ist von „dem“ Grenzwert die Rede, was bereits suggeriert, dass nicht zwei unterschiedliche Zahlen Grenzwert ein und derselben Folge sein können.

Tatsächlich gilt:

Satz 8.1. Eindeutigkeit des Grenzwertes

Der Grenzwert einer konvergenten Zahlenfolge ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Der Beweis erfolgt recht leicht durch Widerspruch (siehe Übungskapitel 8.3). □

Standardbeispiel einer konvergenten Folge.

Betrachtet sei die Folge $\{1/n\}$ mit dem vermuteten Grenzwert $a = 0$ – Sprechweise: Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt Nullfolge.

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ (man stelle sich ε sehr klein vor) wähle man eine „hinreichend große" natürliche Zahl $N = N(\varepsilon)$, wobei „hinreichend groß" in diesem Beispiel recht leicht präzisiert werden kann:[4]

$$N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon} .$$

Für alle $n \geq N(\varepsilon)$ folgt:

$$|1/n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N(\varepsilon)} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

und nach Definition 8.2 konvergiert die Folge tatsächlich gegen 0.

Nachweis der Konvergenz über die Definition.

Anhand des obigen Beispiels erkennt man zwei wesentliche Punkte, die bei der Überprüfung auf Definition 8.2 zu beachten sind:

[4]Zur Erinnerung: Die reellen Zahlen sind nach Kapitel 5 archimedisch angeordnet.

i) Um die Konvergenz einer Folge zu zeigen, ist es sehr hilfreich, sich im Vorfeld einen geeigneten Kandidaten für den Grenzwert zu überlegen.

ii) Wie groß $N(\varepsilon)$ tatsächlich zu wählen ist, wird meist erst im Verlauf der Rechnung deutlich.

Ist die Rechnung einmal gemacht, so wird eine geeignete Wahl von $N(\varepsilon)$ oft „wie vom Himmel gefallen" an den Beginn eines systematischen Nachweises der Definition gesetzt.

Beispiel. *Es sei* $0 < q < 1$ *fixiert.*

Betrachtet sei die Folge $\{a_n\}$ *(vgl. Kapitel 3.2)*

$$a_n := \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \textit{mit vermutetem Grenzwert} \quad a := \frac{1}{1-q} \ .$$

Zum Nachweis sei $\varepsilon > 0$ *gegeben und man wählt eine natürliche Zahl* $N(\varepsilon)$ *mit der Eigenschaft*

$$\mathbb{N} \ni N(\varepsilon) > \begin{cases} 1 \ , & \textit{falls} \ \ \varepsilon \geq (1-q)^{-1} \ , \\ \log_q \big(\varepsilon(1-q)\big) \ , & \textit{falls} \ \ \varepsilon < (1-q)^{-1} \ . \end{cases}$$

Eine solche Wahl von $N(\varepsilon)$ *mag an dieser Stelle noch willkürlich erscheinen, sie ist jedoch das Ergebnis der folgenden Nebenrechnung:*

Die Funktion $\log_q(x)$ *ist für* $0 < q < 1$ *nach Kapitel 6.2 streng monoton fallend, was zu der Äquivalenz*[5] *führt:*

[5] Im Fall $\varepsilon(1-q) \geq 1$ gilt die Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$. In diesem Fall gilt $\log_q \big(\varepsilon(1-q)\big) < 0$.

$$\left|a_n - \frac{1}{1-q}\right| = \left|\frac{1-q^{n+1}-1}{1-q}\right| = \frac{q^{n+1}}{1-q} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad q^{n+1} < \varepsilon(1-q) \quad \Leftrightarrow \quad (n+1) > \log_q\big(\varepsilon(1-q)\big)$$

$$\Leftrightarrow \quad n > \log_q\big(\varepsilon(1-q)\big) - 1 \, .$$

Zur Vereinfachung wird die rechte Seite noch um 1 vergrößert, und wie oben geschehen wird $N(\varepsilon)$ gewählt.

Im letzten Schritt kann Definition 8.2 formal verifiziert werden, wozu man sich einer Fallunterscheidung bedient ($\varepsilon > 0$ fixiert):

Fall 1. *Es sei $\varepsilon \geq (1-q)^{-1}$. Dann gilt wegen $q < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\left|a_n - \frac{1}{1-q}\right| = \frac{q^{n+1}}{1-q} < \frac{1}{1-q} \leq \varepsilon \, .$$

Fall 2. *Es sei nun $\varepsilon < (1-q)^{-1}$, $N(\varepsilon)$ eine natürliche Zahl,*

$$N(\varepsilon) > \log_q\big(\varepsilon(1-q)\big) > 0 \quad \textit{und} \quad n \geq N(\varepsilon) \, .$$

Wegen $0 < q < 1$ erhält man $q^{n+1} = qq^n \leq qq^{N(\varepsilon)}$ und folglich

$$\left|a_n - \frac{1}{1-q}\right| = q\,\frac{q^n}{1-q} < q\,\frac{q^{\log_q\left(\varepsilon(1-q)\right)}}{1-q} = q\,\varepsilon < \varepsilon \, .$$

Beide Fälle zusammen zeigen die Gültigkeit von Definition 8.2, die Folge konvergiert gegen den Grenzwert $1/(1-q)$.

Standardbeispiel einer divergenten Folge.

Im Gegensatz zu den obigen beiden konvergenten Folgen sei nun die Folge $\{n\}$ betrachtet, von der keine Konvergenz erwartet wird.

Divergenz heißt per definitionem „nicht konvergent“, sodass Definition 8.2 zu verneinen ist.

Dies geschieht, wie in Kapitel 1.1 beschrieben, indem unter Beibehaltung der Reihenfolge der Quantor „$\forall$“ durch „$\exists$“ ersetzt wird und vice versa:

Divergenz bedeutet demnach:

Für alle $a \in \mathbb{R}$ existiert ein $\varepsilon = \varepsilon(a) > 0$, sodass für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $n = n(N) \geq N$ existiert mit

$$|a_n - a| \geq \varepsilon \ .$$

Für die Folge $\{n\}$ kann für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ z.B. $\varepsilon = 1$ gewählt werden.

Dann existiert für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$, beispielsweise $n > \max\{N, a+1\}$, sodass

$$|a_n - a| = |n - a| \geq 1 = \varepsilon \ .$$

Tatsächlich divergiert die Folge demnach im Sinne von Definition 8.2.

Notwendige Voraussetzung für Konvergenz.

Die Betrachtungen zur Divergenz der Folge $\{n\}$ liefern gleichzeitig eine notwendige Bedingung zur Konvergenz von Folgen, nämlich die Beschränktheit.[6]

[6] Da eine Folge als Funktion definiert ist, sind die Begriffe Beschränktheit und Monotonie formal bereits eingeführt.

Analog zur Beschränktheit von Mengen und Funktionen heißt dabei eine Folge nach oben beschränkt (nach unten beschränkt), wenn es ein $\overline{K} \in \mathbb{R}$ ($\underline{K} \in \mathbb{R}$) gibt mit

$$a_n \leq \overline{K} \quad (\underline{K} \leq a_n) \quad \text{für alle } \; n \in \mathbb{N} \,.$$

Eine Folge heißt beschränkt, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist, was bedeutet: Es existiert ein $K \in \mathbb{R}$ mit

$$|a_n| \leq K \quad \text{für alle } \; n \in \mathbb{N} \,.$$

Dann gilt, wie die Verallgemeinerung des obigen Beispiels beweist:

Satz 8.2. NOTWENDIGE KONVERGENZBEDINGUNG

Jede konvergente reelle Zahlenfolge ist beschränkt.

Vorsicht. Satz 8.2 gibt eine notwendige Bedingung im Gegensatz zu einer hinreichenden Bedingung:

Aus der Beschränktheit folgt nicht die Konvergenz!

Das einfachste Beispiel hierzu ist die beschränkte und divergente (siehe Übungskapitel 8.3) Folge $\{(-1)^{n+1}\}$.

Beschränktheit und Monotonie.

Beschränktheit alleine liefert wie gesehen nicht die Konvergenz einer Folge.

Die intuitive Vorstellung besagt hingegen, dass eine monoton wachsende und gleichzeitig nach oben beschränkte Folge konvergieren sollte.

Dabei heißt eine Folge $\{a_n\}$ monoton wachsend (monoton fallend), falls

$$a_n \le a_{n+1} \;\; (a_n \ge a_{n+1}) \quad \text{für alle } \; n \in \mathbb{N} \, .$$

Gilt die strikte Ungleichung „<" („>"), so heißt die Folge streng monoton wachsend (streng monoton fallend).

Die Intuition wird mit dem folgenden Satz bestätigt.

Satz 8.3. Satz von der monotonen Folge

Eine monoton wachsende reelle Zahlenfolge ist genau dann konvergent, wenn sie nach oben beschränkt ist.

Eine monoton fallende reelle Zahlenfolge ist genau dann konvergent, wenn sie nach unten beschränkt ist.

Die Eulersche Zahl.

Satz 8.3 beantwortet die eingangs dieses Kapitels gestellte Frage nach der Konvergenz von $\{a_n\}$,

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{für alle } \; n \in \mathbb{N} \, .$$

Wie bereits angedeutet und wie im Übungskapitel 8.3 ausführlich besprochen, ist die Folge monoton wachsend und nach oben beschränkt, weshalb Satz 8.3 die Konvergenz liefert – die Folge ist in der Tat in Abbildung 8.3 dargestellt und der Grenzwert heißt die Eulersche Zahl

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \, .$$

Mithilfe von Satz 8.3 kann auch die Konvergenz der Folge $\{\tilde{a}_n\}$,

$$\tilde{a}_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \qquad \text{für alle } \ n \in \mathbb{N} \ ,$$

gezeigt werden. Der Grenzwert wird vom Satz nicht geliefert. Eine nähere Analyse zeigt aber, dass auch diese Folge gegen die Zahl e konvergiert.

Zum Rechnen mit Folgen.

Wie alle obigen Beispiele belegen, kann es sehr aufwendig sein, die Konvergenz von Folgen mithilfe der Definition 8.2 zu belegen.

Deshalb ist es umso nützlicher, aus bekannten Konvergenzen direkt die Konvergenz weiterer Folgen ableiten zu können.

Satz 8.4. RECHENREGELN FÜR FOLGEN

Es seien $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ zwei konvergente Folgen mit

$$\lim_{n\to\infty} a_n =: a \ , \qquad \lim_{n\to\infty} b_n =: b \ .$$

Dann gilt:

i) Ist $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $a \leq b$.

ii) Die Folgen $\{|a_n|\}$, $\{k \cdot a_n\}$ für eine Konstante $k \in \mathbb{R}$, $\{a_n \pm b_n\}$ und $\{a_n \cdot b_n\}$ konvergieren mit

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} |a_n| &= |a| \ , \\ \lim_{n\to\infty} k \cdot a_n &= k \cdot a \ , \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) \;=\; a \pm b \;,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n \;=\; a \cdot b \;.$$

Ist $b \neq 0$ und gilt $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert auch die Folge $\{a_n/b_n\}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \;.$$

iii) *(Einschließungskriterium) Ist $\{c_n\}$ eine weitere Folge, ist $a = b$ und*

$$a_n \le c_n \le b_n \quad \textit{für alle } \; n \in \mathbb{N} \;,$$

so konvergiert auch $\{c_n\}$ mit Grenzwert $c = a = b$.

Beweis. Exemplarisch wird hier i) und die Konvergenz der Produktfolge bewiesen:

ad i) Es sei $a_n \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wäre $a > b$, so gäbe es ε mit $0 < \varepsilon < (a-b)/2$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß hätte man aufgrund der Konvergenz der Folgen

$$|a - a_n| < \varepsilon \qquad \text{sowie} \qquad |b - b_n| < \varepsilon \;.$$

Das impliziert aber wegen $a_n - b_n \le 0$

$$2\varepsilon < a - b = (a - a_n) + (a_n - b_n) + (b_n - b) \le |a - a_n| + |b - b_n| < 2\varepsilon \;,$$

also einen Widerspruch – am Beweis erkennt man, dass auch aus $a_n < b_n$ lediglich $a \le b$ und nicht die strikte Ungleichung folgt.

Zur Konvergenz der Produktfolge. Die Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ sind nach Voraussetzung konvergent und nach Satz 8.2 insbesondere beschränkt, d.h. es existiert ein $K \in \mathbb{R}$, sodass

$$|a_n| \le K \ , \qquad |b_n| \le K \ .$$

Nach *i)* gilt auch für die Grenzwerte

$$|a| \le K \ , \qquad |b| \le K \ .$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ sei jetzt $N(\varepsilon)$ hinreichend groß – wie unten präzisiert wird – und $n \ge N(\varepsilon)$. Die Dreiecksungleichung impliziert

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &\le |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \\ &\le |a_n - a||b_n| + |a||b_n - b| \ . \end{aligned}$$

Wegen der Konvergenz der Folgen $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ existiert weiter ein $\tilde{N}(\varepsilon)$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon/2K \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \varepsilon/2K \quad \text{für } \ n \ge \tilde{N}(\varepsilon) \ .$$

Wählt man nun $N(\varepsilon) > \tilde{N}(\varepsilon)$, so ist für alle $n \ge N(\varepsilon)$ gezeigt:

$$|a_n b_n - ab| < \frac{\varepsilon}{2K} K + \frac{\varepsilon}{2K} K = \varepsilon \ .$$

Die Konvergenz der Folge ist damit bewiesen. □

Bemerkungen.

i) *Die Aussagen des Satzes bleiben richtig, falls die Voraussetzungen nur für alle $n \ge n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ fixiert, erfüllt sind.*

ii) *Vorsicht: Aus der Konvergenz von $\{a_n + b_n\}$ folgt nicht die Konvergenz von $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$.*

Ist etwa $a_n := n + 1/n$ und $b_n := -n + 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\{a_n + b_n\} = \{2/n\}$ konvergent, die Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ sind aber divergent.

Anwendungsbeipiele der Rechenregeln.

i) Ist $\{a_n\} = \{1/n\}$, so ist $\{b_n\} = \{1/n^2\} = \{1/n \cdot 1/n\}$ als Produkt konvergenter Folgen ebenfalls konvergent und da $\{a_n\}$ eine Nullfolge ist, gilt dies auch für die Folge $\{b_n\}$.

Aus $1/n^2 \leq 1/n^{3/2} \leq 1/n$ folgt nach dem Einschließungskriterium, dass die Folge $\{1/n^{3/2}\}$ gegen Null konvergiert.

Auf diese Weise können viele Grenzwerte aus der Kenntnis konvergenter Folgen ermittelt werden, ohne unmittelbar Bezug auf die Definition nehmen zu müssen.

ii) Aus dem bisher Bekannten ergibt sich ebenso

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n+1}{(n+7)(n+2)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2(1+\frac{9}{n}+\frac{14}{n^2})} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{9}{n}+\frac{14}{n^2}} = 3\,.\end{aligned}$$

Man beachte, dass Satz 8.4 auf der linken Seite der Gleichung keine Anwendung findet, da weder der Grenzwert des Zählers noch der Grenzwert des Nenners existieren.

Dementsprechend kann Satz 8.4 erst nach dem Kürzen angewandt werden.

iii) Im vorherigen Beispiel waren die höchsten Exponenten von n im Zähler und im Nenner gleich.

Nun betrachte man

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{n+7}{n^2+2n+3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1+\frac{7}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}} \\ &= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{7}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}\right) \\ &= 0 \cdot 1 = 0\,. \end{aligned}$$

Wieder ist zunächst eine Darstellung zu finden, sodass die einzelnen Grenzwerte existieren.

iv) Im nächsten Beispiel ist schließlich der höchste Exponent im Zähler größer als der höchte Exponent im Nenner, was die Divergenz der Folge vermuten lässt.

Tatsächlich gilt für alle $n \geq 3$

$$\begin{aligned} a_n := \frac{n^3+4n+4}{(n+1)(n+2)} &= \frac{n^3(1+\frac{4}{n^2}+\frac{4}{n^3})}{n^2(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})} \\ &= n \cdot \frac{1+\frac{4}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} \\ &\geq n \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}} \geq \frac{1}{3} n\,. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde dabei ausgenutzt, dass für $n \geq 3$ gilt

$$1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2} \leq 3\,.$$

Also ist die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt und somit divergent.

Weitere Beispiele wichtiger Folgen.

Ohne Beweis sei hier angegeben:

i) Die Folge $\{1/n^\alpha\}$, $\alpha > 0$ fixiert, ist eine Nullfolge.

ii) Die Folge $\{n^\alpha\}$, $\alpha > 0$ fixiert, divergiert.

iii) Ist $x \in \mathbb{R}$ fixiert, so gilt für die geometrische Folge $\{x^n\}$ (vgl. Übungskapitel 8.3):

(a) Für $|x| < 1$ ist die Folge konvergent mit $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

(b) Für $x = 1$ ist die Folge konvergent mit $\lim_{n\to\infty} x^n = 1$.

(c) Für $|x| > 1$ und für $x = -1$ ist die Folge divergent.

iv) Es sei $x \in \mathbb{R}$ fixiert. Die für alle $n \in \mathbb{N}$ durch

$$a_n := \frac{x^n}{n!}$$

definierte Folge ist eine Nullfolge.

v) (a) Für fixiertes $a > 0$ ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

(b) Wie im Übungskapitel 8.3 gezeigt wird, ist sogar

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \, .$$

Ein „Trick“ für rekursiv definierte Folgen.

Betrachtet sei die rekursiv definierte Folge

$$a_1 = 1 \, , \qquad a_{n+1} = a_n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) \, , \qquad n \in \mathbb{N} \, .$$

Falls die Folge gegen einen Grenzwert a konvergiert, so gilt

$$a_{n+1} = a_n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) \overset{n\to\infty}{\to} \frac{a}{2} \, .$$

Wenn a_n gegen a konvergiert, so aber auch a_{n+1} und man erhält

$$a \overset{n\to\infty}{\leftarrow} a_{n+1} = a_n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) \overset{n\to\infty}{\to} \frac{a}{2} \, .$$

Demnach gilt für einen potentiellen Grenzwert in diesem Beispiel $a = a/2$ und der einzig mögliche Grenzwert ist $a = 0$.

Das Argument funktioniert aber nur, falls die Folge konvergiert, was zu zeigen bleibt:

Hier ist der Satz von der monotonen Folge ein wichtiges Hilfsmittel:

Es ist $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, und

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n} < 1 \, , \qquad \text{d.h. } \; a_{n+1} < a_n \, .$$

Das bedeutet, die Folge ist monoton fallend und nach unten beschränkt, nach Satz 8.3 also konvergent.

Da nun die Konvergenz bewiesen ist, ist $a = 0$ tatsächlich der Grenzwert.

Vorsicht. *Ohne die Konvergenz der Folge zu beweisen, darf in der rekursiven Vorschrift nicht zur Grenze übergegangen werden.*

Ist beispielsweise

$$a_1 = 1 \,, \quad a_{n+1} = 1 - a_n \,, \qquad n \in \mathbb{N} \,,$$

so ergäbe der gleichzeitige Übergang zum Grenzwert

$$a = 1 - a \,, \quad \text{d.h. } a = \frac{1}{2} \,.$$

Die Folge lautet aber $1, 0, 1, 0, \ldots$ *und ist offensichtlich nicht konvergent.*

Das Beispiel zeigt ebenso, dass der Grenzwert einer rekursiv definierten Folge von den Anfangsgliedern abhängen kann.

Mit der gleichen Rekursionsvorschrift wie oben liefert der Startwert $a_1 = 1/2$ eine konstante Folge.

Cauchy-Folgen.

Bevor in Satz 8.5 konvergente Folgen äquivalent zur Definition 8.2 charakterisiert werden, wird zur Motivation ein weiteres Beispiel einer rekursiv definierten Folge eingefügt, in welchem der Übergang zum Grenzwert in der Rekursionsvorschrift keine Information liefert.

Beispiel. *(Arithmetisches Mittel) Es sei*

$$a_1 = 1 \ , \qquad a_2 = \frac{1}{2} \ , \qquad a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) \ , \qquad n \in \mathbb{N} \ ,$$

d.h. a_{n+2} ist das arithmetische Mittel der beiden Vorgänger.

Auch wenn die Folge gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, so liefert der Grenzübergang in der Rekursionsvorschrift keine Information:

$$a = \frac{1}{2}(a + a) \ .$$

Im dem Beispiel ist auch die Frage nach der Konvergenz nicht so einfach wie in den bisherigen Beispielen zu beantworten:

Die Folge ist nicht monoton und Satz 8.3 findet hier keine Anwendung.

Die Folge der arithmetischen Mittel ist jedoch eine sogenannte Cauchy-Folge (siehe Übungskapitel 8.3) und als solche konvergent.

Satz 8.5. KRITERIUM VON CAUCHY

Eine reelle Zahlenfolge $\{a_n\}$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist, d.h.:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{für alle } \ n, \ m \geq N(\varepsilon) \ .$$

Teilfolgen und Häufungspunkte.

Wie bereits zu Beginn dieses Abschnittes gesehen, ist die Folge

$$\{(-1)\}^n \quad \text{oder anders ausgedrückt die Folge} \quad 1, \ -1, \ 1, \ \ldots$$

divergent – es existiert kein Grenzwert und dennoch sind die Werte 1 und -1 sicherlich charakteristisch für diese spezielle Folge.

Mit anderen Worten: Falls ein Grenzwert existiert, so ist dieser eindeutig bestimmt. Es können jedoch mehrere sogenannte Häufungspunkte einer Folge existieren.

Diese sind keine Grenzwerte der gesamten ursprünglichen Folge sondern lediglich eines Teils der Folge im Sinne von:

Definition 8.3. TEILFOLGE

Eine Folge $\{\tilde{a}_j\}$ heißt Teilfolge von $\{a_n\}$, wenn es eine streng monoton wachsende Folge $\{n_j\}$ natürlicher Zahlen gibt, sodass

$$\tilde{a}_j = a_{n_j} \quad \textit{für alle } \; j \in \mathbb{N} \, .$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 & \mathbb{N} & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\
\tilde{f}: & \mathbb{N} & n_1 = 2 & n_2 = 4 & n_3 = 7 & n_4 = 9 & \dots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\
 & A & \tilde{a}_1 = a_2 & \tilde{a}_2 = a_4 & \tilde{a}_3 = a_7 & \tilde{a}_4 = a_9 & \dots
\end{array}$$

Abbildung 8.4: Beispiel zum Begriff der Teilfolge.

Beispiel. *Für $\{a_n\} = \{(-1)\}^n$ betrachte man die Folgen*

i) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$, *d.h.* $\{n_j\} = \{j+1\}$;

ii) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. $m \mapsto 2m-1$, *d.h.* $\{m_j\} = \{2j-1\}$.

Es ergibt sich

i) $\{a_{n_j}\} = \{(-1)^{j+1}\}$, *diese Teilfolge divergiert;*

ii) $\{a_{m_j}\} = \{(-1)^{2j-1}\}$, *diese Teilfolge konvergiert.*

Auswahl von besonderen Teilfolgen.

Das Beispiel legt die Frage nahe, ob und unter welchen Bedingungen eine besondere, d.h. eine konvergente Teilfolge ausgewählt werden kann.

Als wesentlich erweist sich die Beschränktheit einer Folge im Sinne von

Satz 8.6. Satz von Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte reelle Zahlenfolge enthält eine konvergente Teilfolge.

Hat eine gegebene Folge mehrere konvergente Teilfolgen, so setzt man:

Definition 8.4. Limes superior und Limes inferior

Die Grenzwerte konvergenter Teilfolgen einer gegebenen Folge $\{a_n\}$ heißen Häufungspunkte der Folge.[7]

Der größte Häufungspunkt einer nach oben beschränkten Folge heißt Limes superior, Notation:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \ .$$

[7]Die formalen Grenzwerte „$-\infty$“ und „$+\infty$“ werden hier nicht betrachtet.

Der kleinste Häufungspunkt einer nach unten beschränkten Folge heißt Limes inferior, Notation:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \ .$$

Bemerkung. *Man erkennt sofort, dass für eine konvergente Folge $\{a_n\}$ die Gleichheit gilt:*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n \ .$$

8.2 Reelle Zahlenreihen (Konvergenz; Divergenz; g-adische Ziffern-darstellung; Konvergenzkriterien; absolute Konvergenz)

Bei reellen Zahlenreihen handelt es sich um eine spezielle Form von reellen Zahlenfolgen, bei der sogenannte Partialsummen einer gegebenen Folge selbst als Folge aufgefasst werden.

Ein typisches Beispiel zur Motivation geht schon auf die Antike zurück:

Beispiel[8].

▷ *Eine Person A bewege sich mit einer Geschwindigkeit von $2\ m/s$.*

▷ *In einer Entfernung von $10\ m$ vor sich sieht A eine zweite Person B, die sich mit $1\ m/s$ nach vorne bewegt.*

▷ *Bezeichnet t_0 die Zeit des Überholvorgangs und ist s_0 die bis dahin von A zurückgelegte Strecke, so gilt nach der Gesetzmäßigkeit*

$$\text{„}Weg = Geschwindigkeit \cdot Zeit\text{“}$$

für die Person A bzw. die Person B:

[8] Vgl. „Achilles und die Schildkröte“ – ein Paradoxon nach Zenon von Elea.

$$t_0 = \frac{s_0}{2\ m/s} = \frac{s_0 - 10\ m}{1\ m/s}\ .$$

▷ *Dementsprechend hat A nach 20 m den Vorsprung von B aufgeholt.*

Das Paradoxon lautet:

▷ *Wenn A die 10 m zurückgelegt hat, die B Vorsprung hatte, dann ist B um 5 m weitergekommen und hat somit wiederum Vorsprung.*

▷ *Nachdem A den Vorsprung von 5 m aufgeholt hat, ist B um 2.5 m weitergekommen und hat immer noch Vorsprung.*

▷ *Nachdem A den Vorsprung von 2.5 m aufgeholt hat, ...*

▷ *Also kann die Person A die Person B niemals überholen?*

Die Idee zur Auflösung dieses scheinbaren Widerspruchs führt unmittelbar auf eine reelle Zahlenreihe:

Die Person B hat zunächst 10 m Vorsprung, dann immer noch 5 m, dann wieder 2.5 m, dann ... .

Insgesamt ergibt sich

$$10\ m + 5\ m + 2.5\ m + 1.25\ m + \cdots = 10\ m \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots\right)\ .$$

In Kapitel 9.1 ist

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

als einführendes Beispiel zur Definition des Grenzwertes gerechnet:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = 2 \; .$$

Das bedeutet im obigen Kontext

$$10\ m + 5\ m + 2.5\ m + 1.25\ m + \cdots = 20\ m \; .$$

Tatsächlich gibt es deshalb keinen Widerspruch. Vielmehr wird die bis zum Überholvorgang zurückgelegte Strecke mithilfe der sogenannten geometrischen Reihe berechnet.

Reihen und Partialsummen

Bei Reihen handelt es sich um eine spezielle Art von Folgen, definiert via

Definition 8.5. Reihe

i) *Ist $\{a_n\}$ eine reelle Zahlenfolge, so heißt die Folge $\{s_k\}$,*

$$s_k := \sum_{n=1}^{k} a_n \quad \textit{für alle} \;\; k \in \mathbb{N} \; ,$$

eine (unendliche) Reihe, s_k heißt die k^{te} Partialsumme.

ii) Eine Reihe heißt konvergent, wenn die Folge der Partialsummen gegen einen Grenzwert $s \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Konvergiert die Reihe nicht, so heißt sie divergent.

Die Symbole

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

werden dabei in doppelter Bedeutung gebraucht:

▷ Einerseits bezeichnen sie die Reihe, d.h. die Folge der Partialsummen.

▷ Konvergiert die Reihe gegen $s \in \mathbb{R}$, so stehen sie andererseits für diesen Grenzwert

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s = \lim_{k \to \infty} s_k \ .$$

Bemerkungen.

i) Eine Reihe ist keine „unendliche Summe" – „unendliche Summen" sind kein definiertes mathematisches Objekt.

Reihen als Folgen von Partialsummen sind hingegen wohl definiert.

ii) Völlig analog wird für einen Startindex $m \in \mathbb{Z}$ definiert:

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n \ .$$

iii) Die Bezeichnung des Summationsindexes spielt wie üblich keine Rolle.

Da Reihen als Folgen definiert sind, gelten die Aussagen aus Kapitel 8.1 in der entsprechenden Notation, z.B.

Korollar 8.1. SUMME VON REIHEN

Es seinen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergente reelle Zahlenreihen.

Dann ist auch für alle α, $\beta \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n)$$

konvergent mit

$$s = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ .$$

Die geometrische Reihe.

Das Beispiel der geometrischen Reihe ist bereits mehrfach angesprochen.

In der Notation von Definition 8.5 ist dabei für fixiertes $x \in \mathbb{R}$

$$a_n = x^n \ , \quad n \in \mathbb{N}_0 \ , \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k \ .$$

- ▷ Nach den Ausführungen in Kapitel 8.1,
- ▷ wegen der Unbeschränktheit der Folge $\{s_n\}$ für $|x| > 1$ und für $x = 1$
- ▷ und wegen $\{s_n\} = 1, 0, 1, 0, \ldots$ im Fall $x = -1$ gilt:

Satz 8.7. GEOMETRISCHE REIHE

i) Die geometrische Reihe konvergiert für $|x| < 1$ und es ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \ .$$

ii) Für $|x| \geq 1$ divergiert die Reihe.

Anwendung: g-adische Zifferndarstellung.

Die g-adische Zifferndarstellung einer reellen Zahl x lautet

$$x = n + x_0 \ , \quad n \in \mathbb{N}_0 \ , \quad 0 \leq x_0 < 1 \ ,$$

wobei negative Zahlen zusätzlich mit dem Vorzeichen „$-$" markiert sind.

Der ganze Anteil von x ist in dieser Darstellung mit n abgespalten und wird als endliche Summe ($k \in \mathbb{N}_0$) geschrieben:

$$n = \sum_{j=0}^{k} r_j \cdot g^j \ , \qquad r_j \in \{0, 1, 2, \ldots, g-1\} \ .$$

Die r_j heißen die Ziffern, $g \in \mathbb{N}$ die Basis und $k+1$ (falls $r_k \neq 0$) die Stellenzahl.

Im Fall $g = 2$ spricht man von der Dualdarstellung (Ziffern 0, 1), für $g = 10$ erhält man die Dezimaldarstellung, $g = 16$ entspricht der Hexadezimaldarstellung.

So ergibt sich die Zifferndarstellung von 10 im Dualsystem

$$10 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

und man schreibt symbolisch 1010.

Der Anteil x_0 wird als (unendliche) Reihe geschrieben (Schreibweise: $0.s_1 s_2 s_3 \ldots$):

$$\boxed{x_0 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j \cdot g^{-j} \ , \qquad s_j \in \{0, 1, 2, \ldots, g-1\} \ .}$$

Im Folgenden wird o.E. stets die Dezimaldarstellung einer reellen Zahl betrachtet – die Umrechnung in andere Systeme ist oben angedeutet.

In den Kapiteln 4.1 und 5.1 ist bereits festgehalten:

Die Darstellung einer rationalen Zahl ist als nicht-abbrechend periodische Dezimalzahl eindeutig realisiert, die einer reellen Zahl als nicht-abbrechende Dezimalzahl.

Dabei ist beispielsweise $0.\overline{3}$ als geometrische Reihe zu interpretieren:

$$\begin{aligned}
0.\overline{3} \ &:= \ \sum_{j=1}^{\infty} 3 \cdot 10^{-j} \ = \ 3 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} (10^{-1})^j \\
&= \ \boxed{3 \cdot \left[\left[\sum_{j=0}^{\infty} (10^{-1})^j \right] - 1 \right] \ = \ 3 \cdot \left[\frac{1}{1 - 10^{-1}} - 1 \right]} \\
&= \ 3 \cdot \frac{1}{9} \ = \ \frac{1}{3} \ .
\end{aligned}$$

In der zweiten Gleichung kann dabei die 3 herausgezogen werden, da die geometrische Reihe mit $q = 10^{-1} < 1$ konvergent ist (vgl. Korollar 8.1).

An dieser Stelle sei nochmals auf die Bemerkungen zur Eindeutigkeit der Darstellung aus Sektion 4.1 erinnert:

Die Darstellung von 1 als $0.\overline{9}$ ist gerechtfertigt durch die Gleichheit (analoge Rechnung wie oben)

$$0.\overline{9} = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1 \; .$$

Konvergenzkriterien.

Nur bei sehr wenigen Reihen kann wie im Fall der geometrischen Reihe explizit der Grenzwert bestimmt werden.

Tatsächlich geht es meist auch nicht um die Berechnung eines Grenzwertes sondern um die Frage, ob dieser überhaupt existiert.

Insbesondere ist man an Kriterien mit Aussagen über die Konvergenz von Reihen interessiert.

Kann mithilfe solcher Kriterien die Existenz eines Grenzwertes belegt werden, so definiert dieser – auch wenn er nicht explizit ausgerechnet werden kann – häufig relevante Größen.

Ein erstes Beispiel dieser Art ist die Definition der Eulerschen Zahl in der letzten Sektion:

Die Eulersche Zahl ist nicht als Grenzwert einer Folge ausgerechnet, sie ist als Grenzwert der Folge $\{(1 + 1/n)^n\}$ definiert.

Analog werden im nächsten Kapitel viele elementare Funktionen als Grenzwerte konvergenter Funktionenreihen definiert.

Zu den wichtigsten Konvergenzkriterien gehören:

$i)$ Anwendung des Satzes 8.3 von der monotonen Folge auf Reihen.

Satz 8.8. Satz von der monotonen Folge II

Es sei $\{a_j\}$ *eine Folge mit nicht-negativen Gliedern* a_j, $a_j \geq 0$ *für alle* $j \in \mathbb{N}$.

Die reelle Zahlenreihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *ist genau dann konvergent, wenn es eine Zahl* $K > 0$ *gibt mit*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \leq K \quad \text{für alle } \ n \in \mathbb{N} \, .$$

$ii)$ Cauchys Konvergenzkriterium für Reihen und notwendige Konvergenzbedingung.

Satz 8.9. Kriterium von Cauchy II

Eine reelle Zahlenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *gibt, sodass*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon \quad \text{für alle } \ n \geq N(\varepsilon) \, , \quad \text{für alle } \ p \geq 1 \, .$$

Korollar 8.2. Notwendige Bedingung

Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert, so bilden ihre Glieder* a_n *eine Nullfolge.*

Die Umkehrung gilt jedoch nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel. *Die harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

divergiert nach Satz 8.9, da für die Partialsummen gilt

$$\begin{aligned} s_{2k} - s_k &= \sum_{n=1}^{2k} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} \\ &\geq k \cdot \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

iii) Konvergenzkriterium von Leibniz.

Die Situation ändert sich, wenn die Folgenglieder der harmonischen Reihe mit einem alternierenden Vorzeichen versehen sind:

Nach dem folgenden Satz 8.10 konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} .$$

Satz 8.10. Kriterium von Leibniz

Ist $\{a_n\}$ eine monotone Nullfolge, so konvergiert die alternierende Reihe $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$.

Bemerkung. *Monotone Nullfolge impliziert:*

- ▷ *Die Folge ist monoton fallend und* $a_n \geq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *oder*
- ▷ *die Folge ist monoton wachsend und* $a_n \leq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Anhand der harmonischen Reihe ist die Bedeutung des Begriffes absolute Konvergenz evident:

Definition 8.6. ABSOLUTE KONVERGENZ

Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, *so heißt die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut konvergent.*

Man erkennt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ konvergent aber nicht absolut konvergent ist.

Umgekehrt sind aber absolut konvergente Reihen stets konvergent.

Bemerkungen.

(a) *Nur bei absolut konvergenten Reihen dürfen die Glieder umsortiert werden, ansonsten darf die Reihenfolge der Glieder nicht vertauscht werden (vgl. Übungskapitel 8.3).*

(b) *Für absolut konvergente Reihen gilt*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \, .$$

iv) Majorantenkriterium.

In den meisten Fällen wird die Konvergenz einer Reihe über einen Vergleich mit einer bekannten Reihe gezeigt.

Satz 8.11. MAJORANTEN- MINORANTENKRITERIUM

Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $b_n \geq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, *eine reelle Zahlenreihe.*

(a) *Die reelle Zahlenreihe* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergiere und sei eine Majorante von* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *d.h. es gebe einen Index* $n_0 \in \mathbb{N}$, *sodass*

$$|a_n| \leq b_n \quad \text{für alle } \ n \geq n_0 \ .$$

Dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut.*

(b) *Die reelle Zahlenreihe* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergiere und sei eine Minorante von* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *d.h. es gebe einen Index* $n_0 \in \mathbb{N}$, *sodass*

$$b_n \leq a_n \quad \text{für alle } \ n \geq n_0 \ .$$

Dann divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beispiele.

(a) *Für eine Folge* $\{a_n\}$ *gelte* $|a_n| \leq 3/2^n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann konvergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) *Für eine Folge* $\{a_n\}$ *gelte* $a_n \geq 1/n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann divergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$v)$ Quotienten- und Wurzelkriterium.

Auf einen Vergleich mit der geometrischen Reihe über das Majoranten- bzw. Minorantenkriterium lassen sich die beiden folgenden Kriterien zurückführen:

Satz 8.12. QUOTIENTEN- UND WURZELKRITERIUM

Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine reelle Zahlenfolge (mit* $a_n \neq 0$ *für alle* $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, *im Falle des Quotientenkriteriums).*

Die Reihe ist absolut konvergent (und damit konvergent), wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist.

(a) Es existieren ein $0 < q < 1$ *und ein* $N \in \mathbb{N}$ *derart, dass*

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1 \quad \text{für alle } n \geq N .$$

(b) Es existieren ein $0 < q < 1$ *und ein* $N \in \mathbb{N}$ *derart, dass*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \quad \text{für alle } n \geq N .$$

Die Reihe ist divergent, falls ein $N \in \mathbb{N}$ *existiert, sodass für alle* $n \geq N$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \quad \text{oder im Falle des Wurzelkriteriums} \quad \sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 .$$

Bemerkung. *Im Fall* $q = 1$ *liefern weder das Quotienten noch das Wurzelkriterium eine Aussage.*

Zur Überprüfung der Voraussetzungen ist oft die folgende Variante recht nützlich:

Korollar 8.3. QUOTIENTEN- UND WURZELKRITERIUM

Existiert mit den Bezeichnungen aus Satz 8.12 der Grenzwert

$$\hat{q} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \textit{oder} \quad \hat{q} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,,$$

so hat man für $\hat{q} < 1$ absolute Konvergenz, für $\hat{q} > 1$ Divergenz und für $\hat{q} = 1$ keine Aussage.

Beispiele.

(a) *Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

absolut, wie die oben gezeigte Monotonie von $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ zeigt:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{2}\,.$$

(b) *Betrachtet sei nun die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, d.h. $a_n = 1/n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Hier gibt es kein festes $q < 1$ mit $|a_{n+1}/a_n| \leq q$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und das Quotientenkriterium liefert keine Aussage:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^2\,.$$

vi) Mithilfe des sogenannten Cauchyschen Vedichtungskriterium kann aber gezeigt werden:

Satz 8.13. STANDARD-VERGLEICHSBEISPIEL

(a) Für alle $\alpha > 1$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \, .$$

(b) für alle $\alpha \leq 1$ divergiert diese Reihe.

Dieses Beispiel hilft sehr häufig bei der Suche nach konvergenten Majoranten bzw. divergenten Minoranten.

8.3 Übungsaufgaben zu Kapitel 8

Aufgabe 1.* Zeigen Sie Satz 8.1.

Aufgabe 2.* Betrachten Sie die folgenden reellen Zahlenfolgen $\{a_n\}$ und finden Sie jeweils ein $a \in \mathbb{R}$ und, wie in Definition 8.2 gefordert, zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ derart, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N(\varepsilon)$.

i) $a_n = \dfrac{n - \frac{1}{n}}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

ii) $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3.*

i) Zeigen Sie mithilfe der Definition die Divergenz der Folge $\left\{(-1)^{n+1}\right\}$.

ii) Konvergiert oder divergiert die Folge

$$\left\{(-1)^{n^2+2n-1} + \frac{1}{n}\right\} ?$$

Aufgabe 4.*

i) Existieren die folgenden Grenzwerte? Falls ja, so berechnen Sie diese:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - \frac{1}{n^2} - \sqrt{n}}{n^{5/2} - n^2}$,

(b) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n+1}+\frac{\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{\sqrt{n}}-n^2}{n^3+2n^4}\right]$,

(c) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+1}{\frac{n^3+1}{n}}$.

ii) Welche der Folgen ist beschränkt, welche unbeschränkt?

Aufgabe 5. Existieren die folgenden Grenzwerte? Falls ja, so berechnen Sie diese.

i) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4+\frac{n-1}{n+1}}$,

ii) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+(-1)^n}{2^{n+1}+(-1)^{n+1}}$,

iii) $\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{m}\right]^{-n}\right]$,

iv) $\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty}\left[1+\frac{1}{m}\right]^{-n}\right]$.

Aufgabe 6.

i) * Existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\ ?$$

ii) Betrachten Sie zwei Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$, $0 \le b_n < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie die Folge $\{c_n\}$,

$$c_n = \sqrt{a_n} - \sqrt{b_n} \quad \text{für alle } \; n \in \mathbb{N} \; .$$

Berechnen Sie, falls existent, $\lim_{n\to\infty} c_n$ für

(a) $a_n = n + 1, \quad b_n = n \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

(b) $a_n = n^2 + 1, \quad b_n = n \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 7. Zeigen Sie:

Ist $\{a_n\}$ eine beschränkte Folge und $\{b_n\}$ eine Nullfolge, so ist die Folge $\{a_n b_n\}$ eine Nullfolge.

Aufgabe 8.* Betrachten Sie die Folge $\{a_n\}$,

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{für alle } \; n \in \mathbb{N} \; .$$

Zeigen Sie:

i) Die Folge ist monoton wachsend.

Hinweis. Folgern Sie zunächst aus der Bernoullischen Ungleichung (Übungskapitel 3.4)

$$\left[1 - \frac{1}{n^2}\right]^n > \frac{n-1}{n}$$

und zeigen Sie damit $a_{n-1} < a_n$*,* $n \geq 2$*.*

ii) Die Folge ist beschränkt.

Hinweis. Benutzen Sie nach i) $a_n \leq a_{2n}$ *und die Bernoullische Ungleichung in der Form*

$$\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{2n+1} \ .$$

iii) Die Folge ist konvergent.

Aufgabe 9.* Untersuchen Sie die geometrische Folge $\{x^n\}$ auf Konvergenz bzw. Divergenz.

Hinweis. Betrachten Sie die Funktion $h := |x|^{-1} - 1$ *und verwenden Sie die Bernoullische Ungleichung* $(1+h)^n \geq 1 + nh$*.*

Aufgabe 10.* Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \ .$$

Hinweis. Betrachten Sie die Funktion $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$ *und wenden Sie den binomischen Lehrsatz auf* $(1+h_n)^n$ *an.*

Aufgabe 11.

i) Betrachten Sie die rekursiv definierte reelle Zahlenfolge $\{a_n\}$,

$$a_1 = \sqrt{2}\ , \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}\ , \qquad n = 1,\ 2, \dots\ .$$

Ist die Folge monoton wachsend oder fallend, ist sie beschränkt, konvergiert sie, und wenn ja, gegen welchen Grenzwert?

ii) * Betrachten Sie die rekursiv definierte reelle Zahlenfolge $\{a_n\}$,

$$a_1 = 1\ , \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}\ , \qquad n = 1,\ 2, \dots\ .$$

Ist die Folge monoton wachsend oder fallend, ist sie beschränkt, konvergiert sie, und wenn ja, gegen welchen Grenzwert?

Aufgabe 12.* Betrachten Sie die Folge $\{a_n\}$ mit

$$a_1 = 1\ , \qquad a_2 = \frac{1}{2}\ , \qquad a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n)\ , \qquad n \in \mathbb{N}\ .$$

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$|a_{n+1} - a_n| = 2^{-n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\ .$$

Ist die Folge eine Cauchy-Folge?

Aufgabe 13.

i) Es sei $\{a_n\}$ eine konvergente reelle Zahlenfolge.

Zeigen Sie

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \ .$$

ii) Bestimmen Sie, falls existent,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1} \ .$$

iii) Bestimmen Sie, falls existent, $\liminf_{n\to\infty}$ and $\limsup_{n\to\infty}$ von $\{a_n\}$,

$$a_n = ((-1)^{n+1}(-1)^n) + (-1)^n \quad \text{für alle } \ n \in \mathbb{N} \ .$$

iv) (a) Finden Sie eine beschränkte Folge mit den drei Häufungspunkten -8, 22, 23.

(b) Finden Sie eine unbeschränkte Folge mit diesen drei Häufungspunkten.

(c) Gibt es eine monotone Folge mit diesen drei Häufungspunkten?

(d) Handelt es sich bei Ihren Beispielen um Cauchy-Folgen?

Aufgabe 14.* Warum kann die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k+1}$$

nicht wie folgt umgeordnet werden, obwohl alle Glieder der „unendlichen Summe“ auf der linken Seite der Gleichung auch in der „unendlichen Summe“ auf der rechten Seite der Gleichung vorkommen und vive versa?

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k+1} &= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\pm\dots \\
&= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\Big(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\Big)-\frac{1}{6} \\
&\quad +\Big(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\Big)-\frac{1}{8}+\dots \\
&\quad +\Big(\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+3}+\dots\frac{1}{2^{n+1}-1}\Big)-\frac{1}{2n+2} \\
&\quad +\dots\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 15. Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{17^n}\,,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\,,\qquad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\pm\dots\,,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n\,.$$

Aufgabe 16. Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l(l+1)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{l=1}^{n}\Big(\frac{1}{l}-\frac{1}{l+1}\Big)\right]=\dots\,.$$

Aufgabe 17. Es seien $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ Folgen positiver reeller Zahlen mit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c>0\,.$$

i) Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert.

Hinweis. Benutzen Sie die Definition einer konvergenten Folge und das Majorantenkriterium.

ii) Finden Sie ein Beispiel, dass eine analoge Aussage für $c = 0$ falsch ist.

Aufgabe 18. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

i) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}\,,$$

ii) $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+k+1}\,,$$

iii) $$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{3}}\,,$$

iv) $$\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} + \frac{27}{256} + \frac{81}{1024} + \dots\,,$$

v) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)\,,$$

vi) $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{4^k}\,,$$

vii) $$\sum_{j=3}^{\infty} \frac{j+2}{j^2-4}\,,$$

viii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-9k-10}{10k} \right)^{k}$,

ix) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)$,

x) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{k+1}{k^2-k-2}$,

xi) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{(1+a)^n}$, $\quad a \in \mathbb{R}$ fixiert ,

xii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

xiii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} 5^{-n}$,

xiv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n-2}}{3^{4+2n}}$.

Aufgabe 19.*

i) Fixiert sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + k^{\alpha}} \ ?$$

ii) Fixiert sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\alpha}}{1+k^2} \ ?$$

Aufgabe 20.

i) Es sei $0 < q < 1$. Berechnen Sie $\sum_{\mathbf{k=1}}^{\infty} q^k$.

ii) Betrachten Sie eine monoton wachsende Folge $\{q_n\}$, $q_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, derart, dass $q_n \to 1/4$ für $n \to \infty$.

Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (q_n)^k \right]^n \ ?$$

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben.

Aufgabe 1. Der Beweis wird per Widerspruch geführt, d.h. es sei angenommen, dass zu einer gegebenen Folge $\{a_n\}$ zwei reelle Zahlen a, $\hat{a}$, $a \neq \hat{a}$ existieren mit

$$a_n \to a \quad \text{und} \quad a_n \to \hat{a} \quad \text{für } \ n \to \infty \ .$$

Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ sowohl ein $N_a(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } \ n \geq N_a(\varepsilon)$$

als auch ein $N_{\hat{a}}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - \hat{a}| < \varepsilon \quad \text{für alle } \ n \geq N_{\hat{a}}(\varepsilon) \ .$$

Ist nun

$$n > \max\{N_a(\varepsilon), N_{\hat{a}}(\varepsilon)\} := \begin{cases} N_a \ , & \text{falls } \ N_a \geq N_{\hat{a}} \ , \\ N_{\hat{a}} \ , & \text{falls } \ N_a \leq N_{\hat{a}} \ , \end{cases}$$

so gilt nach der Dreiecksungleichung

$$|a - \hat{a}| = |a - a_n + a_n - \hat{a}| \leq |a_n - a| + |a_n - \hat{a}| \leq 2\varepsilon \ .$$

Es sind aber a und $\hat{a}$ zwei reelle Zahlen mit festem Abstand $|a - \hat{a}|$.

Wählt man ε so klein, dass $2\varepsilon < |a - \hat{a}|$ (z.B. $\varepsilon = |a - \hat{a}|/3$), so erhält man einen Widerspruch, also ist zwingend $a = \hat{a}$. $\square$

Aufgabe 2.

i) Es sei $a = 1$ und weiter sei $\varepsilon > 0$ fixiert. Dann ist

$$\begin{aligned}|a_n - a| &= \left|\frac{n - \frac{1}{n}}{n+1} - 1\right| = 1 - \frac{n - \frac{1}{n}}{n+1}\\ &= 1 - \frac{\frac{n^2-1}{n}}{n+1} = 1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} < \varepsilon\end{aligned}$$

für alle $n \geq N$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$, d.h. man wähle

$$\mathbb{N} \ni N = N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon} .$$

ii) Es sei $a = 1$ und weiter sei $\varepsilon > 0$ fixiert. Dann ist für alle $n \geq N$

$$\begin{aligned}|a_n - a| &= \left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| = 1 - \frac{n^2}{n^2+1}\\ &= \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{N^2+1} < \varepsilon ,\end{aligned}$$

wobei $N = N(\varepsilon)$ im Fall $\varepsilon < 1$ gemäß der folgenden Ungleichung gewählt werde:

$$N \geq \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} .$$

Im Fall $\varepsilon > 1$ ist die Abschätzung trivial für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig.

Aufgabe 3.

i) Man betrachte ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$ und wähle $\varepsilon = 1/2$.

Fall 1. Es sei $a \geq 0$. Für alle $N \in \mathbb{N}$ und für gerades $n > N$ folgt

$$|(-1)^{n+1} - a| = |-1 - a| \geq 1 > \varepsilon \ .$$

Fall 2. Es sei $a < 0$. Für alle $N \in \mathbb{N}$ und für ungerades $n > N$ folgt

$$|(-1)^{n+1} - a| = |1 - a| \geq 1 > \varepsilon \ .$$

ii) Man beachte, dass n^2 gerade ist, falls n gerade ist, und n^2 ungerade ist, falls n ungerade ist.

Da $2n - 1$ stets ungerade ist, folgt die Divergenz analog zu *i*).

Aufgabe 4.

i) (a) Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - \frac{1}{n^2} - \sqrt{n}}{n^{\frac{5}{2}} - n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-\frac{1}{2}} - n^{-\frac{9}{2}} - n^{-2}}{1 - n^{-\frac{1}{2}}} = 0 \ ,$$

wobei beachtet ist, dass alle einzelnen Grenzwerte existieren, dass der Zähler gegen 0 und dass der Nenner gegen 1 konvergiert.

(b) Man beobachtet zunächst

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

und schließt weiter

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{\sqrt{n}} - n^2}{n^3 + 2n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{n^4\sqrt{n}} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n} + 2} = \frac{1}{4} \; .$$

Insgesamt ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{\sqrt{n}} - n^2}{n^3 + 2n^4} \right] = \frac{5}{4} \; .$$

(c) Anhand der Ungleichungen

$$n^3 + 1 < 2n^3 \quad \text{und} \quad n^5 + n > n^5$$

erkennt man die Unbeschränktheit und damit die Divergenz:

$$\frac{n^4+1}{\frac{n^3+1}{n}} = \frac{n^5+n}{n^3+1} > \frac{n^5}{2n^3} = \frac{n^2}{2} \; .$$

ii) Die ersten beiden Folgen sind konvergent und damit beschränkt, die dritte Folge ist, wie bereits erwähnt, unbeschränkt.

Aufgabe 6.

i) Nach dem Einschließungskriterium ist die Folge eine Nullfolge:

$$\begin{aligned} 0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} \; . \end{aligned}$$

Aufgabe 8.

i) Es sei $n \geq 2$. Dann ist

$$a_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} .$$

Die Bernoullische Ungleichung aus Kapitel 3.4 besagt mit der Wahl $x = -1/n^2$

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} ,$$

woraus sich

$$\frac{n-1}{n} < \left(\frac{n+1}{n}\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

ergibt, also

$$a_{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1-n} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = a_n .$$

Damit ist die Monotonie gezeigt. □

ii) Wegen der bereits gezeigten Monotonie gilt

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{2n}} .$$

Nun wird die Bernoullische Ungleichung in der Form

$$\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{2n+1}$$

angewandt. Man erhält wegen $2n + 1 < 2(n + 1)$

$$0 < a_n \leq \frac{1}{\left(1 - \frac{n}{2n+1}\right)^2} = \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^2 \leq 4$$

und damit die Beschränktheit der Folge. □

iii) Der Satz von der monotonen Folge impliziert die Konvergenz.

Aufgabe 9.

i) Ist $x = 0$ oder $x = 1$, so handelt es sich um eine konstante Folge, die Folge ist konvergent.

ii) Ist $x = -1$, so divergiert die Folge.

iii) Ist $0 < |x| < 1$, so ist $|x|^{-1} > 1$, also $h := |x|^{-1} - 1 > 0$ und $|x| = (1 + h)^{-1}$.

Die Bernoullische Ungleichung,

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh \quad \text{für } \ h > -1\ ,$$

liefert zu $\varepsilon > 0$ und $N(\varepsilon) = 1/(h\varepsilon)$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$

$$|a_n - 0| = |x^n| = (1 + h)^{-n} \leq \frac{1}{1 + nh} < \frac{1}{nh} = \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{n} < \varepsilon\ ,$$

die Folge konvergiert also gegen 0.

iv) Im Fall $|x| > 1$ kann die Folge nach Satz 8.2 nicht konvergieren.

Aufgabe 10. Man setze $h_n := \sqrt[n]{n} - 1$, d.h. insbesondere $h_n \geq 0$. Potenzieren und der binomische Lehrsatz führen auf

$$n = (1 + h_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_n^k \ .$$

In dieser Gleichheit werden alle Terme bis auf den mit der Nummer $k = 2$ weggelassen, woraus sich für alle $n \geq 2$

$$n \geq \binom{n}{2} h_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} h_n^2$$

ergibt, d.h.

$$h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \overset{n \to \infty}{\to} 0$$

und die Behauptung ist gezeigt. □

Aufgabe 11. ii) Man argumentiere „wie üblich“ oder zeige $\{a_n\} = \{1/n\}$.

Aufgabe 12. Induktionsanfang ($n = 1$): Es ist

$$|a_2 - a_1| = \frac{1}{2} = 2^{-1}.$$

Induktionsschluss: Für $n \in \mathbb{N}$ sei $|a_{n+1} - a_n| = 2^{-n}$. Dann ist

$$\begin{aligned} |a_{n+2} - a_{n+1}| &= \left|\frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) - a_{n+1}\right| = \left|\frac{1}{2}(a_n - a_{n+1})\right| \\ &= \frac{1}{2}2^{-n} = 2^{-(n+1)} \,. \end{aligned}$$

Aus (o.E. sei $p > m$)

$$\begin{aligned} |a_p - a_m| &= |a_p - a_{p-1} + a_{p-1} - \cdots + a_{m+1} - a_m| \\ &\leq |a_p - a_{p-1}| + |a_{p-1} - a_{p-2}| + \cdots + |a_{m+1} - a_m| \\ &\leq \sum_{k=0}^{p-m-1} 2^{-(m+k)} \\ &= 2^{-m} \sum_{k=0}^{p-m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \frac{1}{2}2^{-m} \end{aligned}$$

(siehe Übungskapitel 3.4) folgt, dass $\{a_n\}$ eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 14. Wäre die Umordnung zulässig, so wäre die Reihe wegen

$$\left(\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}-1}\right) > 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4}$$

divergent. Nach dem Kriterium von Leibniz konvergiert sie jedoch.

Aufgabe 19.

i) (a) Für $0 < \alpha \le 1$ und $k \in \mathbb{N}$ ist $k^\alpha \le k$, d.h. $k + k^\alpha \le 2k$ und deshalb für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k + k^\alpha} \ge \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \; .$$

Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe divergiert die Reihe nach dem Minorantenkriterium.

(b) Ist $\alpha > 1$ und $k \in \mathbb{N}$, so ist wegen $k + k^\alpha > k^\alpha$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + k^\alpha} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \; .$$

Wegen der Konvergenz der rechten Seite konvergiert die Reihe nach dem Majorantenkriterium.

ii) (a) Es ist $1/(1 + k^2) < 1/k^2$, d.h. für $0 < \alpha < 1$ konvergiert die Reihe wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^\alpha}{1 + k^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2-\alpha}}$$

nach dem Majorantenkriterium.

(b) Für $\alpha \ge 1$ und $k \in \mathbb{N}$ ist

$$1 + k^2 \le 2k^2 \quad \text{und} \quad k^\alpha \ge k \; ,$$

d.h. für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{k^\alpha}{1+k^2} \geq \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{2k^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \ .$$

Aus dem Minorantenkriterium folgt die Divergenz der Reihe.

Kapitel 9

Funktionenfolgen, Potenzreihen, Exponentialfunktion

Der in Definition 8.1 eingeführte Begriff einer Folge ist nicht auf die Betrachtung reeller Zahlen eingeschränkt.

Es sei an das einführende Beispiel aus Kapitel 8.1 erinnert, in dem die Funktionenfolge $\{a_n\} = \{p_n\}$,

$$p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} , \quad p_n(x) = x^n \text{ für alle } x \in \mathbb{R} ,$$

bestehend aus den Polynomen p_n bereits kurz vorgestellt ist.

Als Spezialfall von Funktionenfolgen können wiederum Funktionenreihen betrachtet werden, deren wichtigste Vertreter sogenannte Potenzreihen sind.

Die mittlerweile vertraute geometrische Reihe kann auch in diesem Zusammenhang als Motivation dienen:

Für fixiertes $x_0 \in \mathbb{R}$ werde die Funktionenfolge $\{s_n\}$ betrachtet,

$$s_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} , \quad s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (x - x_0)^k \text{ für alle } x \in \mathbb{R} , \quad n \in \mathbb{N} .$$

Für ein festes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < 1$ konvergiert $\{s_n(x)\}$ bekanntlich und es stellt sich die Frage, wie im Sinne von Funktionen $(x_0 - 1, x_0 + 1) \to \mathbb{R}$

die Konvergenz

$$s_n \overset{n\to\infty}{\to} s\ , \qquad s(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (x-x_0)^k = \frac{1}{1-(x-x_0)}$$

zu interpretieren ist und ob eine solche Vorgehensweise auf weitere Beispiele verallgemeinert werden kann.

Dies führt in Kapitel 9.3 schließlich auf die Definition der Exponentialfunktion und verwandter Funktionen.

Später werden Potenzreihen auch als sogenannte Taylor-Reihen von großer Bedeutung sein, wobei Funktionen „in Termen ihrer Ableitungen entwickelt werden“.

Eine weitere Reihenentwicklung von Funktionen ist die Fourier-Reihe, die beispielsweise Signale in Grund- und Oberschwingungen zerlegt (harmonische Analyse).

9.1 Funktionenfolgen und Funktionenreihen (punktweise und gleichmäßige Konvergenz)

Im Folgenden seien $f_n \colon \mathbb{R} \supset U \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, reelle Funktionen, die nach Definition 8.1 eine Funktionenfolge $\{f_n\}$ bilden.

Für jedes feste $x \in U$ entsteht eine reelle Zahlenfolge $\{f_n(x)\}$, die nach Kapitel 8.1 auf mögliche Konvergenz untersucht werden kann.

So kann der erste Konvergenzbegriff dieses Kapitels definiert werden.

Definition 9.1. Punktweise Konvergenz

Eine Funktionenfolge $\{f_n\}$ wie oben gegeben heißt punktweise konvergent, wenn die reelle Zahlenfolge $\{f_n(x)\}$ für jedes $x \in U$ konvergiert.

Die Grenzfunktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ ist im Fall einer punktweise konvergenten Funktionenfolge für jedes $x \in U$ definiert durch die Vorschrift

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,.$$

Beispiele.

i) Es sei $U = (0,1)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in U$ sei wie in Abbildung 9.1 skizziert

$$f_n(x) = \frac{x}{n}\,.$$

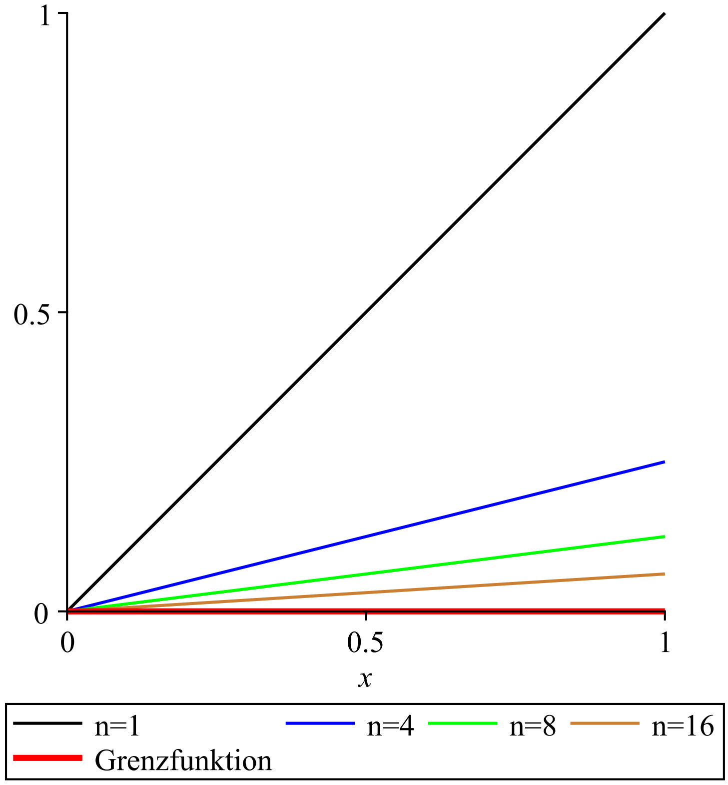


Abbildung 9.1: Funktionenfolgen, erstes Beispiel.

Für fixiertes $x \in U$ ist im Beispiel die Folge $\{f_n(x)\} = \{x/n\}$ zu untersuchen:

Diese reelle Zahlenfolge konvergiert im Grenzwert $n \to \infty$ für jedes *fixierte $x \in U$ gegen Null.*

Demnach konvergiert die Funktionenfolge $\{f_n\}$ punktweise gegen die Grenzfunktion[1] $f \equiv 0$*:*

$$f : U \to \mathbb{R} , \qquad f(x) = 0 \text{ für alle } x \in U .$$

ii) *Wieder sei $U = (0,1)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in U$ sei nun wie in Abbildung 9.2 angedeutet*

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - n \cdot x & \text{für } 0 < x < 1/n , \\ 0 & \text{für } 1/n \leq x < 1 . \end{cases}$$

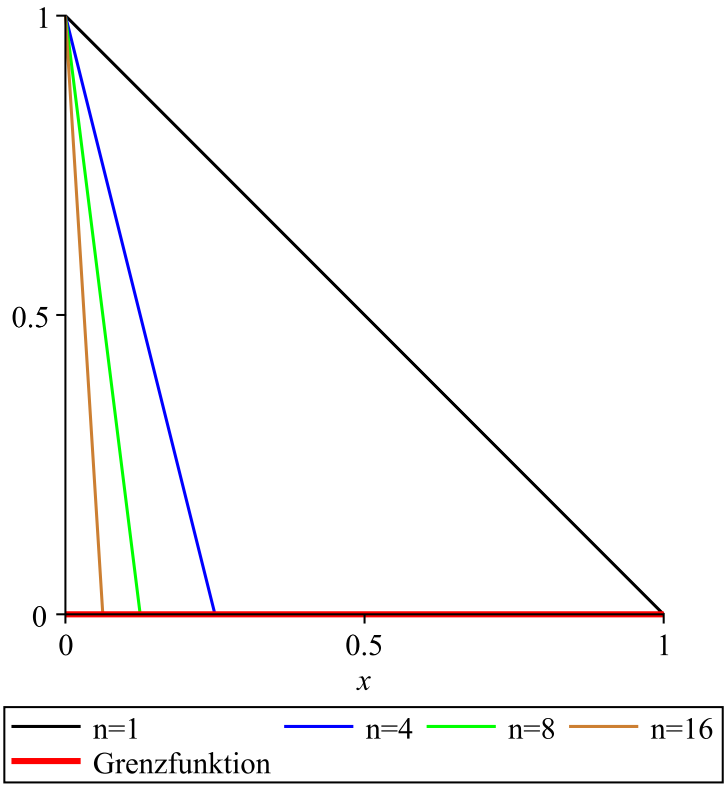


Abbildung 9.2: Funktionenfolgen, zweites Beispiel.

Für fixiertes $x \in U$ gilt hier für die Zahlenfolge $\{f_n(x)\}$:

[1] $f \equiv 0$ bedeutet $f(x) = 0$ für alle x aus dem Definitionsbereich.

Ist $n \geq \frac{1}{x}$, so ist $f_n(x) = 0$, d.h. insbesondere für jedes fixierte $x \in U$

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 \ .$$

Die Zahlenfolge $\{f_n(x)\}$ konvergiert für alle $x \in U$ gegen Null.

Damit ist wie im ersten Beispiel die punktweise Konvergenz der Funktionenfolge $\{f_n\}$ gegen die Grenzfunktion $f \colon U \to \mathbb{R}$, $f \equiv 0$ gezeigt.

Variable Konvergenzgeschwindigkeit.

Im zweiten Beispiel betrachte man etwa den Punkt $x_1 = 0.1 \in U$ und zum Vergleich den Punkt $x_2 = 0.9 \in U$.

Die Folge $\{f_n(x_2)\}$ ist bereits ab dem zweiten Folgenglied identisch Null, für die Folge $\{f_n(x_1)\}$ gilt dies erst ab dem zehnten Folgenglied.

Mit anderen Worten konvergiert die relle Zahlenfolge $\{f_n(x)\}$ für verschiedene $x \in U$ mit unterschiedlicher „Geschwindigkeit“ – Geschwindigkeit gemessen im Voranschreiten des Folgenindex, um innerhalb einer gegebenen Fehlertoleranz zum Grenzwert zu liegen.

Im Beispiel ist die Situation sogar so, dass die Konvergenzgeschwindigkeit kleiner als je beliebige positive Konstante wird, wenn x nur nahe genug bei der Null liegt. Es gibt keine „Mindestgeschwindigkeit für die Konvergenz“.

Liegt umgekehrt – wie im ersten Beispiel – für alle $x \in U$ die Konvergenzgeschwindigkeit der Zahlenfolgen $\{f_n(x)\}$ oberhalb einer gemeinsamen Minimalgeschwindigkeit, so wird der Abstand zur Grenzfunktion gleichmäßig klein.

Das „Messinstrument“ für gleichmäßige Abstände ist die sogenannte Supremumsnorm, wobei stets beschränkte Funktionen betrachtet werden:

Man definiert[2]

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in U} |f(x)| \ .$$

Bzgl. dieser Norm berechnet sich der Abstand zweier Funktionen auf U zu

$$\|f-g\|_\infty := \sup_{x\in U} |f(x)-g(x)| \ .$$

Auch wenn der Definitionsbereich hier nicht explizit in der Notation $\|\cdot\|_\infty$ symbolisiert ist, hängt diese Norm ganz entscheidend von U ab.

Beispiel. *Sind f, g: $U=[0,1]\to\mathbb{R}$ gegeben durch*

$$f(x) = x \quad \textit{und} \quad g(x) = x^2 \quad \textit{für alle } \ x\in[0,1] \ ,$$

so gilt für alle $x \in [0,1]$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \ ,$$

also wegen $x > x^2$

$$|x-x^2| \leq \frac{1}{4}$$

und Gleichheit gilt für $x = 1/2$.

Damit ist als Supremumsnorm berechnet:

$$\|f-g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |x-x^2| = \frac{1}{4} \ .$$

---

[2]Der Begriff „Norm“ wird systematisch in Definition 10.5 eingeführt.

Die geometrische Vorstellung der Abstandsmessung.

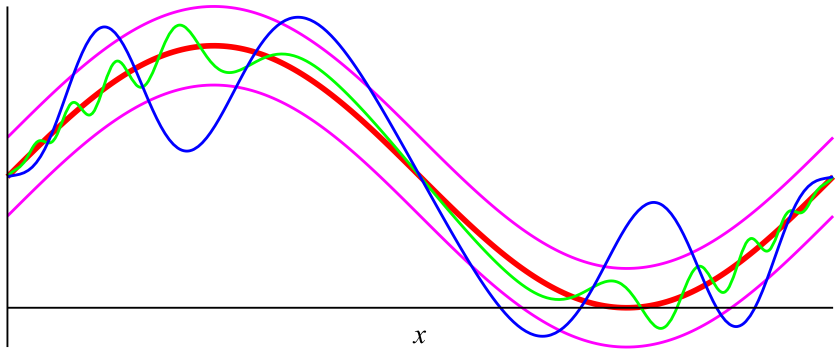


Abbildung 9.3: Zum Abstand von Funktionen.

Man betrachte die in Abbildung 9.3 rot dargestellte Funktion f sowie einen „Schlauch“ mit Durchmesser 2ε um diese Funktion (magenta).

Die blau eingefärbte Funktion g verläuft nicht innerhalb dieses Schlauches,

$$\|g - f\|_\infty > \varepsilon \ .$$

Die grün gekennzeichnete Funktion h verläuft hingegen durchgehend innerhalb des Schlauches mit

$$\|h - f\|_\infty < \varepsilon \ .$$

Etwas anders formuliert betrachtet man die Differenz zweier Funktionen für einen festen Punkt x im Definitionsbereich und lässt dann den Punkt durch den gesamten Definitionsbereich wandern.

Die Differenz zur Funktion f ist für die in Abbildung 9.3 dargestellten Funktionen g und h in Abbildung 9.4 skizziert.

Mit diesen einführenden geometrischen Betrachtungen kann nun ein weiterer Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen eingeführt werden.

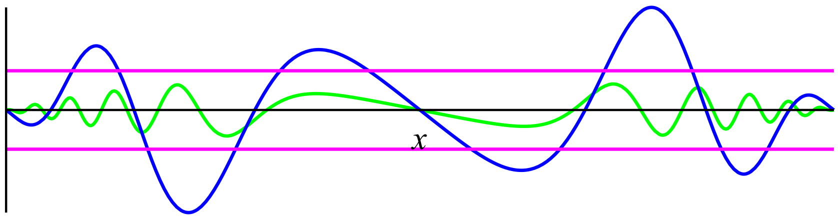


Abbildung 9.4: Die Differenz zur Grenzfunktion.

Gleichmäßige Konvergenz.

Definition 9.2. Gleichmässige Konvergenz

Es sei $U \subset \mathbb{R}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \colon U \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

Die Funktionenfolge $\{f_n\}$ heißt gleichmäßig konvergent gegen eine (beschränkte) Grenzfunktion $f \colon U \to \mathbb{R}$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \ .$$

Notation:

$$f_n \rightrightarrows f \qquad \textit{für } \ n \to \infty \ .$$

Zurück zu den Beispielen.

i) *In ersten Beispiel ist*

$$\sup_{x\in U} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(0,1)} \left| \frac{x}{n} - 0 \right| \le \frac{1}{n} \stackrel{n\to\infty}{\to} 0$$

und die Folge konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

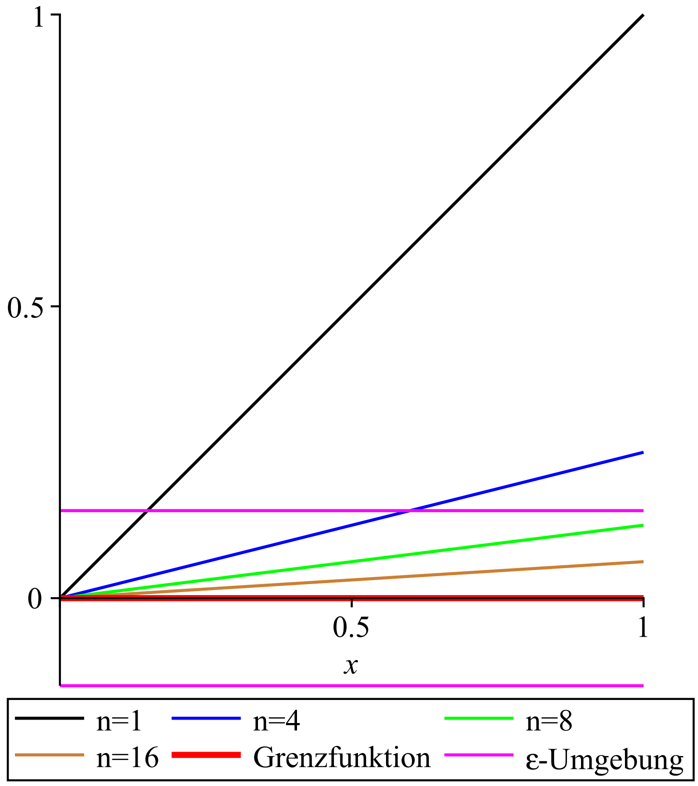


Abbildung 9.5: Gleichmäßige Konvergenz im ersten Beispiel: Zu jedem $\varepsilon > 0$ liegt für hinreichend großes n die Funktion f_n im „ε-Schlauch“ um die Grenzfunktion.

ii) *Im zweiten Beispiel fixiere man ein beliebiges* $0 < a < 1$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ *ist*

$$\begin{aligned} \|f_n(x) - f(x)\|_\infty &= \sup_{x \in U} |f_n(x) - 0| \\ &> |f_n((1-a)/n) - 0| = a\ . \end{aligned}$$

Die Funktionenfolge konvergiert nicht gleichmäßig (vgl. Abbildung 9.6).

Weitere Beispiele werden im Übungskapitel 9.4 illustriert.

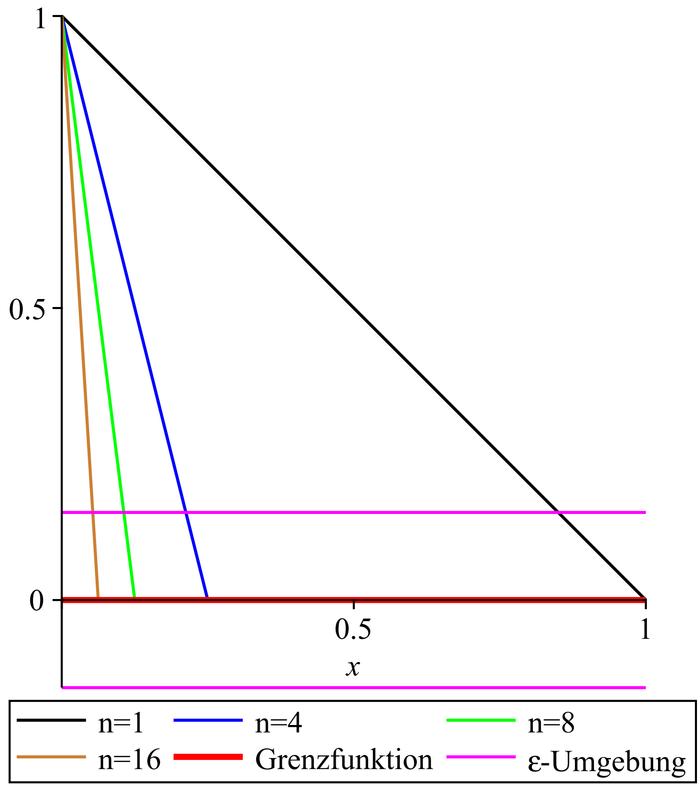


Abbildung 9.6: Keine gleichmäßige Konvergenz im zweiten Beispiel: Die Funktionen f_n liegen nicht im „ε-Schlauch" um die Grenzfunktion.

Abschließend sei betont, dass eine gleichmäßig konvergente Funktionenfolge automatisch auch punktweise konvergent sein muss (siehe Übungskapitel 9.4).

Nach dem letzten Beispiel ist die Umkehrung aber falsch.

Analoges für Funktionenreihen.

Mit einer Funktionenfolge $\{f_n\}$, $f_n \colon \mathbb{R} \supset U \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, sind für festes $x \in U$ analog zu Paragraph 8.2 die Partialsummen[3]

[3]Im Hinblick auf die Diskussion von Potenzreihen in den folgenden Kapiteln wird hier in der Regel $\mathbb{N}_0$ statt $\mathbb{N}$ als Indexmenge betrachtet.

$$s_k(x) := \sum_{n=0}^{k} f_n(x) \ , \qquad k \in \mathbb{N}_0 \ ,$$

punktweise definiert, genau wie es zu Beginn dieses Kapitels anhand der geometrischen Reihe motiviert ist.

Die Partialsummen dienen für alle $k \in \mathbb{N}_0$ auch als Abbildungsvorschrift für Funktionen $s_k \colon U \to \mathbb{R}$.

- ▷ Wie oben betrachtet man nun einerseits für jedes fixierte $x \in U$ die reelle Zahlenfolge $\{s_k(x)\}$.

- ▷ Andererseits kann $\{s_k\}$, $s_k \colon U \to \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, als Funktionenfolge interpretiert werden.

Definition 9.3. $\boxed{\text{Konvergenzen von Funktionenreihen}}$

Es sei $U \subset \mathbb{R}$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_n \colon U \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ ist die Funktionenfolge $\{s_k\}$, $s_k \colon U \to \mathbb{R}$, der Partialsummen und heißt dementsprechend

i) *punktweise konvergent, wenn die Folge $\{s_k\}$ punktweise gegen eine (beschränkte) Grenzfunktion $s \colon U \to \mathbb{R}$ konvergiert:*

$$s(x) = \lim_{k\to\infty} s_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \textit{für alle} \ \ x \in U \ ;$$

ii) *gleichmäßig konvergent, wenn die Folge $\{s_k\}$ gleichmäßig konvergiert:*

$$s_k = \sum_{n=0}^{k} f_n \rightrightarrows s \quad \textit{für} \ \ k \to \infty \ ;$$

iii) *absolut gleichmäßig konvergent, wenn die reelle Zahlenreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty$ *konvergiert.*

9.2 Potenzreihen (Konvergenzradius; Konvergenzintervall)

Potenzreihen sind besonders wichtige Vertreter von Funktionenreihen.

Es handelt sich um Funktionenreihen mit einer speziellen Struktur, die der Definition der wichtigsten „elementaren Funktionen“ zugrunde liegt.

Ein Beispiel ist zu Beginn dieses Kapitels bereits über die geometrische Reihe eingeführt, die im Konvergenzbereich als Funktion von x lautet

$$s(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (x - x_0)^n \,, \qquad x_0 \in \mathbb{R} \text{ fixiert} .$$

Nach Satz 8.7 konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < 1$, sie divergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| \geq 1$, d.h. das symmetrische Intervall um den Entwicklungspunkt x_0,

$$I = (x_0 - 1, x_0 + 1) \,,$$

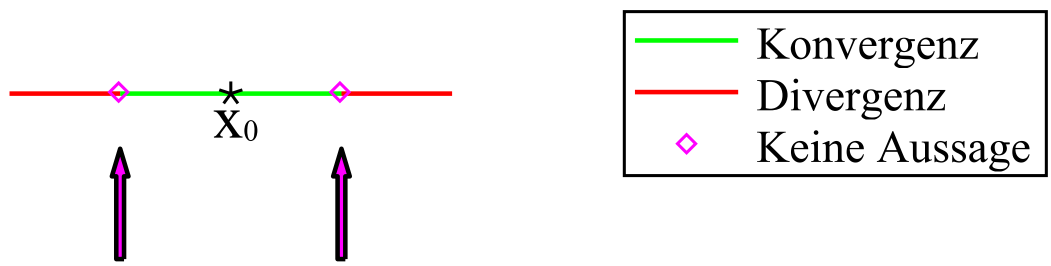


Abbildung 9.7: Zum Konvergenzverhalten der geometrischen Reihe.

ist der Definitionsbereich der Funktion s.

Dabei ist das Konvergenzverhalten in den Randpunkten mit $|x - x_0| = 1$ nicht evident und muss gesondert untersucht werden (vgl. Abbildung 9.7).

In Verallgemeinerung dieses Beispiels wird definiert:

Definition 9.4. POTENZREIHEN

Eine Potenzreihe um den (fixierten) Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ mit den Koeffizienten $a_n \in \mathbb{R}$ ist eine Funktionenreihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n .$$

Verhalten sich Potenzreihen im Allgemeinen qualitativ ähnlich?

Die positive Antwort gibt Satz 9.1.

Satz 9.1. KONVERGENZVERHALTEN VON POTENZREIHEN

Zu einem fixierten Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ und zu gegebenen Koeffizienten $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sei eine Potenzreihe gegeben:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n .$$

Dann gibt es eine reelle Zahl $\rho \geq 0$, sodass:

i) Im Fall $\rho = 0$ konvergiert die Reihe nur im Punkt $x = x_0$, im (formalen) Fall $\rho = \infty$ konvergiert sie für alle $x \in \mathbb{R}$.

ii) Ist $0 < \rho < \infty$, so konvergiert die Potenzreihe punktweise für alle $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ – sie konvergiert absolut gleichmäßig in jedem *abgeschlossenen Teilintervall von $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$.*

iii) Ist $0 < \rho < \infty$, so divergiert die Potenzreihe außerhalb des abgeschlossenen Intervalls $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$.

iv) Die Zahl ρ heißt der Konvergenzradius der Potenzreihe, das Intervall $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ (für $\rho > 0$) das Konvergenzintervall.

v) Mit der formalen Vereinbarung $\frac{1}{0} := \infty$, $\frac{1}{\infty} := 0$ gilt die Formel von Cauchy-Hadamard

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\ .$$

Bemerkung. *Die Randpunkte des Konvergenzintervalls sind wie im Beispiel der geometrischen Reihe gesondert zu untersuchen.*

Hier liefert der Satz keine Aussagen über Konvergenz oder Divergenz der Reihe.

Im Gegensatz zur Formel von Cauchy-Hadanard ist das folgende Korollar in Analogie zum Quotientenkriterium nur unter den genannten Einschränkungen anwendbar.

Korollar 9.1. KONVERGENZRADIUS UND QUOTIENTENKRITERIUM

Mit obiger Notation gelte $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ und für ein $n_0 \in \mathbb{N}$.

Dann ist, falls der Grenzwert existiert,

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|\ .$$

Bemerkungen.

i) *In den obigen Formeln ist bereits die Struktur einer Potenzreihe berücksichtigt, d.h. einzusetzen sind die Koeffizienten ohne die Potenzen* $(x - x_0)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

ii) *Zur Überprüfung der Konvergenz in einem festen Punkt* $x \in \mathbb{R}$ *können auch die Kriterien aus Kapitel 8.2 auf die reelle Zahlenfolge* $\{b_n\}$,

$$b_n := a_n \cdot (x - x_0)^n \ ,$$

angewandt werden.

Findet man auf diese Weise ein $x \in \mathbb{R}$, *für welches die Potenzreihe konvergiert, so folgt aus Satz 9.1 unmittelbar* $\rho \geq |x - x_0|$.

Beispiele.

i) *Für die geometrische Reihe ergibt sich nach der Formel von Cauchy-Hadamard wie bereits bekannt* $\rho = 1$.

ii) *Man betrachte die Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ .$$

Anstelle der Formel von Cauchy-Hadamard kann nach obiger Bemerkung beispielsweise für jedes fixierte $x \in \mathbb{R}$ *(o.E.* $x \neq 0$*) das Quotientenkriterium aus Satz 8.12 angewandt werden.*

Es ist mit $b_n := x^n/n!$

$$\left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \frac{|x|^{n+1} n!}{(n+1)! |x|^n} = \frac{|x|}{n+1} < \frac{1}{2}$$

für alle $n > N$, *falls* $N > 2|x| - 1$.

Demnach konvergiert die Reihe für jedes fixierte $x \in \mathbb{R}$ (d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$) absolut.

Da die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, gilt in Satz 9.1 die formale Alternative i) mit $\rho = \infty$.

iii) *Für alle geraden $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = 1$ und für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = 1/n$.*

Die Formel von Cauchy-Hadamard liefert $\rho = 1$, Korollar 9.1 ist hingegen nicht anwendbar.

Weitere typische Beispiele werden im Übungskapitel 9.4 besprochen.

9.3 Die Exponentialfunktion (Cauchy-Produkt; Logarithmus; allgemeine Exponentialfunktion)

Nach dem letzten Beispiel ist wohl definiert:

Definition 9.5. EXPONENTIALFUNKTION

Die durch die Potenzreihe

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

definierte Funktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *heißt Exponentialfunktion.*

In Kapitel 8.1 ist die Eulersche Zahl als

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

eingeführt. An dieser Stelle sei an die Identität

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

erinnert (vgl. die Diskussion der Eulerschen Zahl in Kapitel 8.1).

Trotz dieser Gleichheit ist die Beziehung zwischen der oben definierten Funktion $\exp(x)$ und der in Kapitel 6.2 kurz vorgestellten (aber nicht definierten) Funktion e^x noch keineswegs geklärt.

Der Schlüssel zum Verständnis ist die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.

Die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.

Die Frage nach der Gültigkeit der Funktionalgleichung kann nicht ohne die Frage nach dem Produkt von Reihen beantwortet werden.

Dazu betrachte man zwei absolut konvergente reelle Zahlenreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Das Cauchy-Produkt der beiden Reihen ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}\right) \\ &= a_0 \cdot b_0 + (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0) \\ &\quad +(a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0) \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

und insbesondere ist die Reihe auf der rechten Seite absolut konvergent.

Satz 9.2. FUNKTIONALGLEICHUNG VON exp

Für alle x, $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \ .$$

Beweis. Die absolute Konvergenz aller vorkommenden Reihen ist bereits gezeigt.

Das Cauchy-Produkt der Reihen und der binomische Lehrsatz 3.3 liefern

$$\begin{aligned}
\exp(x) \cdot \exp(y) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k \cdot y^{n-k}}{k! \cdot (n-k)!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n \\
&= \exp(x+y) \ ,
\end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Aus der Funktionalgleichung folgt als Anwendung beispielsweise

$$\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(x + (-x)) = \exp(0) = 1 \ ,$$

d.h. es gilt

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \ .$$

Mithilfe der Definition, der Funktionalgleichung und der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe kann weiter gezeigt werden, dass die Exponentialfunktion

$$\exp : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

eine streng monoton wachsende, bijektive Funktion ist.

Der natürliche Logarithmus als Umkehrfunktion.

Da die Exponentialfunktion bijektiv ist, existiert ihre Umkehrfunktion.

Auch wenn die Funktionen $\exp(x)$ und e^x noch nicht miteinander identifiziert sind, wird für die Umkehrfunktionen bereits dasselbe Symbol verwendet.

Definition 9.6. NATÜRLICHER LOGARITHMUS

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp$*:* $\mathbb{R} \to (0, \infty)$ *heißt natürlicher Logarithmus,*

$$\ln : \ (0, \infty) \to \mathbb{R} \ , \qquad x \mapsto \ln(x) \ .$$

Eigenschaften.

i) Nach Definition gilt $\exp\big(\ln(x)\big) = x$ *für alle* $x > 0$ *und* $\ln\big(\exp(x)\big) = x$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$*.*

ii) *Es gilt* $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$, $\ln(x)$ *ist streng monoton wachsend.*

iii) *Aus Satz 9.2 folgt für alle positiven* x, y

$$\exp\big(\ln(x\cdot y)\big) = x\cdot y = \exp\big(\ln(x)\big)\cdot\exp\big(\ln(y)\big) = \exp\big(\ln(x)+\ln(y)\big)\ ,$$

also die Funktionalgleichung des Logarithmus

$$\ln(x\cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$$

sowie die Gleichheiten

$$\ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)\ ,\quad \ln(1/x) = -\ln(x)\ .$$

Die allgemeine Exponentialfunktion.

Eine allgemeine Exponentialfunktion a^x, $a > 0$ fixiert, sollte nach dem bisher Gesagten der Eigenschaft

$$\ln\big(a^x\big) = x\ln(a)$$

genügen, was die folgende Definition motiviert.

Definition 9.7. $\boxed{\text{ALLGEMEINE EXPONENTIALFUNKTION}}$

Die allgemeine Exponentialfunktion zu einer fixierten Basis $a > 0$ *ist definiert als*

$$f:\ \mathbb{R} \to (0,\infty)\ ,\qquad f(x) := a^x := \exp\big(x\cdot\ln(a)\big)\ .$$

Ist $a \neq 1$, so ist diese Funktion bijektiv und es existiert eine Umkehrfunktion, die Logarithmus zur Basis a heißt,

$$\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \log_a(x) .$$

Eigenschaften.

i) Es folgen unmittelbar die Regeln ($n \in \mathbb{N}$)

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y , \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} , \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y} , \quad a^0 = 1 , \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n\text{-mal}} .$$

Insbesondere beinhaltet die Definition die anschauliche Definition einer Potenz mit natürlichem Exponenten.

ii) $a^{1/n}$ stimmt mit der bekannten n-ten Wurzel $\sqrt[n]{a}$ überein:

$$\begin{aligned}
(a^{1/n})^n &= \exp\Big(n \cdot \ln\big(a^{1/n}\big)\Big) = \exp\Big(n \cdot \ln\Big(\exp\big[(1/n) \cdot \ln(a)\big]\Big)\Big) \\
&= \exp\Big(\ln\Big(\exp^n\big[(1/n) \cdot \ln(a)\big]\Big)\Big) \\
&= \exp\Big(\ln\Big(\exp\big[\ln(a)\big]\Big)\Big) \\
&= \exp\big(\ln(a)\big) = a .
\end{aligned}$$

iii) Es gilt $\exp(x) = e^x$, da

$$e^x = \exp(x \cdot \ln(e)) = \exp(x \cdot \ln(\exp(1))) = \exp(x) .$$

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass mit der Einführung der Exponentialfunktion als Potenzreihe tatsächlich eine wohl definierte

Abbildungsvorschrift gefunden ist, auf deren Basis alle in Kapitel 6.2 heuristisch diskutierten Eigenschaften verifiziert sind.

Was in der heuristischen Einführung jedoch völlig verborgen bleibt, ist der Zusammenhang mit den trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus sowie die Hyperbelfunktionen Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus.

Trigonometrische und Hyperbelfunktionen als Potenzreihen.

Den genannten Zusammenhang erahnt man an dieser Stelle anhand der folgenden Definitionen:

$$
\begin{aligned}
\sin(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \,, \\
\cos(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \,, \\
\sinh(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \,, \\
\cosh(x) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \,.
\end{aligned}
$$

Die enge Verwandtschaft mit der Exponentialfunktion und der Vergleich der trigonometrischen Funktionen mit den elementargeometrisch eingeführten (vgl. Kapitel 6.3) wird aber erst im Komplexen wirklich offensichtlich, sodass an dieser Stelle lediglich auf die Diskussion komplexer Potenzreihen verwiesen wird.

9.4 Übungsaufgaben zu Kapitel 9

Aufgabe 1.* Zeigen Sie: Gleichmäßige Konvergenz einer Folge $\{f_n\}$ gegen eine Grenzfunktion f impliziert punktweise Konvergenz gegen f.

Aufgabe 2.* Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei

i) $f_n\colon [0, 1/2] \to \mathbb{R},\ f_n(x) := x^n$,

ii) $g_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g_n(x) := (1 + x^{2n})^{-1}$,

iii) $h_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h_n(x) := \dfrac{(nx)^2}{1 + (nx)^4}$.

Sind die Folgen punktweise konvergent? Falls ja, wie lautet der Grenzwert? Sind die Folgen gleichmäßig konvergent?

Aufgabe 3. Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien

i) $f_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R},\ g_n(x) := \dfrac{x + \frac{x}{n}}{1 + \frac{x^2}{n^2}}$,

ii) $g_n\colon [0, \infty) \to \mathbb{R},\ h_n(x) := \dfrac{x + \frac{x}{n}}{1 + \frac{x^2}{n^2}}$.

Sind die Folgen punktweise konvergent? Falls ja, wie lautet der Grenzwert? Sind die Folgen gleichmäßig konvergent?

Hinweis zu ii). Berechnen Sie $h_n(n)$.

Aufgabe 4.* Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren jeweils die Potenzreihen

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(x-1)^n\ , \qquad ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-1)^n\ , \qquad iii)\ \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n\ ?$$

Aufgabe 5.

i) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Potenzreihen konvergieren.

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}(x-1)^n\ , \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2+1)2^n}(x+11)^n\ ,$$

$$\text{(c)} \quad \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{1+\frac{1}{n}}(x-1)^n\ , \qquad \text{(d)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n 3^{n-1}(x-3)^n\ .$$

ii) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Reihen konvergieren.

$$\text{(e)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(x-3)^{3n}\ , \qquad \text{(f)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n/2}} \binom{2n}{n} x^{2n}\ .$$

Aufgabe 6.* Für eine reelle Zahlenfolge $\{a_n\}$ setzt man (anlog der Fall „$-\infty$“):

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Zu jedem } M > 0 \text{ existiert ein } N \in \mathbb{N}, \text{ sodass } M < a_n \text{ für alle } n > N.$$

i) Es sei $k \in \mathbb{N}_0$ fixiert. Zeigen Sie für eine reelle Zahlenfolge $\{x_n\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ (o.E. $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$):

(a) $\exp(x_n) > \dfrac{x_n^{k+1}}{(k+1)!}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{-k} \exp(x_n) = \infty$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{k} \exp(-x_n) = 0$.

ii) Zeigen Sie: Für alle $\alpha > 0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0$.

iii) Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n}$?

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben.

Aufgabe 2.

i) Es ist

$$\sup_{x\in[0,1/2]} |f_n(x) - 0| = 2^{-n} \stackrel{n\to\infty}{\to} 0 ,$$

die Folge konvergiert punktweise und gleichmäßig gegen die Funktion $f \equiv 0$ (vgl. Abbildung 9.8).

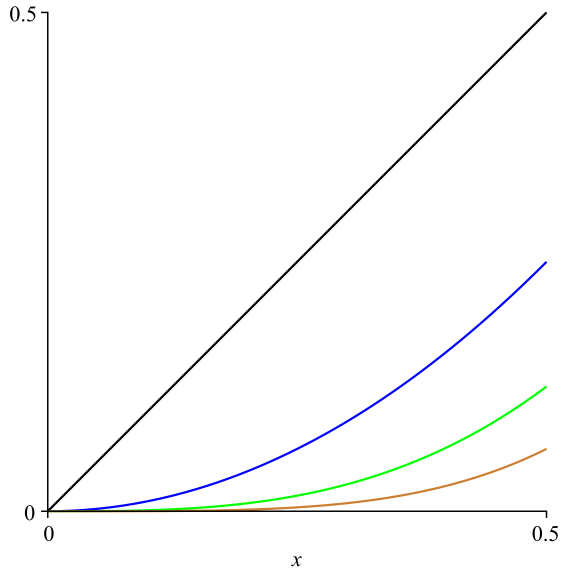


Abbildung 9.8: Die Funktionen $f_n(x)$.

ii) Für $-1 < x < 1$ gilt $x^{2n} \stackrel{n\to\infty}{\to} 0$ und folglich

$$g_n(x) = \frac{1}{1+x^{2n}} \stackrel{n\to\infty}{\to} 1 .$$

Für $x = \pm 1$ ist $g_n(x) = 1/2$ und für $|x| > 1$ gilt

$$g_n(x) \stackrel{n\to\infty}{\to 0} .$$

Die Folge ist punktweise konvergent mit Grenzwert (vgl. Abbildung 9.9)

$$g(x) = \begin{cases} 1\ , & \text{falls} \quad |x| < 1\ , \\ 1/2\ , & \text{falls} \quad |x| = 1\ , \\ 0\ , & \text{falls} \quad |x| > 1\ . \end{cases}$$

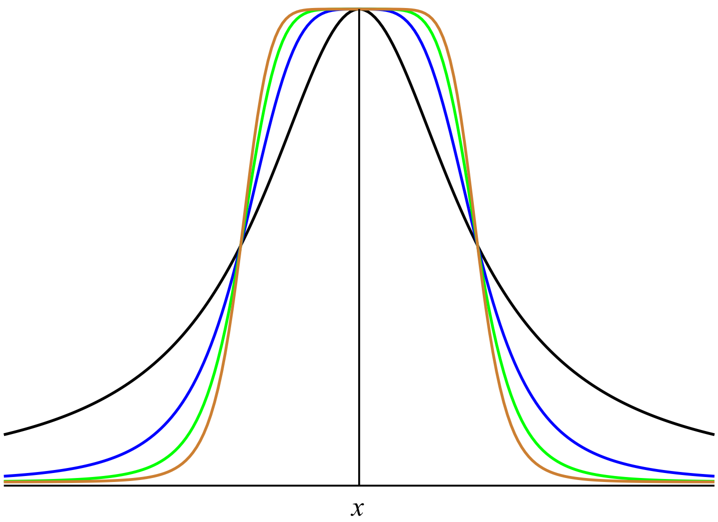


Abbildung 9.9: Die Funktionen $g_n(x)$.

Aber für jedes $n \in \mathbb{N}$ wähle man z.B.

$$0 < x = \left(\frac{1}{3}\right)^{1/(2n)} < 1\ ,$$

sodass

$$|g_n(x) - g(x)| = \left| \frac{1}{1 + \left[(1/3)^{1/2n}\right]^{2n}} - 1 \right| = \frac{1}{4}\ ,$$

d.h. es gilt

$$\|g_n(x) - g(x)\|_\infty \not\to 0 \quad \text{für } n \to \infty \ .$$

Die Funktionenfolge ist nicht gleichmäßig konvergent.

iii) Die Folge konvergiert punktweise gegen $h \equiv 0$:

Ist nämlich $x = 0$, so ist $h_n(x) = h_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $x \neq 0$ fixiert, so gilt

$$\frac{(nx)^2}{1 + (nx)^4} = \frac{\frac{1}{n^2}x^2}{\frac{1}{n^4} + x^4} \stackrel{n\to\infty}{\to} 0 \ .$$

Die Folge ist aber nicht gleichmäßig konvergent (siehe Abbildung 9.10), da für alle $n \in \mathbb{N}$

$$h_n(1/n) = \frac{1}{2} \ .$$

Aufgabe 4. In allen drei Beispielen ist

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \ .$$

Folglich konvergieren die Reihen für alle $x \in (0, 2)$, für $x < 0$ und für $x > 2$ divergieren die Reihen.

Zu untersuchen bleibt das Verhalten in den Punkten $x = 0$ und $x = 2$:

i) (a) Randpunkt $x = 0$: Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(0-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(-1)^n$$

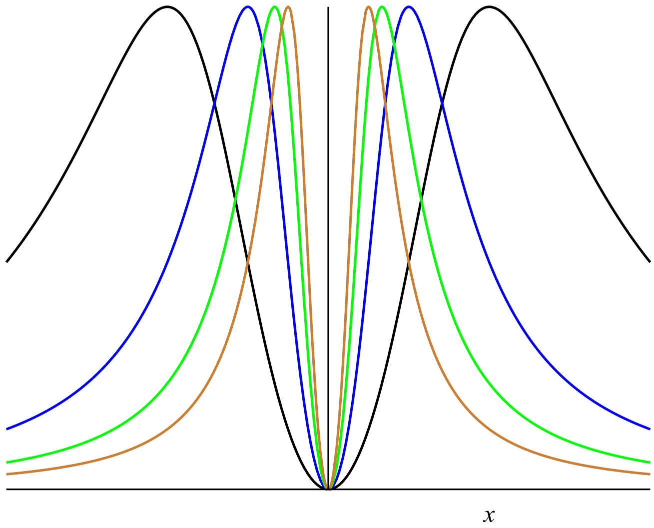


Abbildung 9.10: Die Funktionen $h_n(x)$.

konvergiert nach dem Kriterium von Leibniz (Satz 8.10) bzw. wegen der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ nach dem Majorantenkriterium (Satz 8.11).

(b) Randpunkt $x = 2$: Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(2-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergiert ebenfalls nach dem Majorantenkriterium.

ii) (a) Randpunkt $x = 0$: Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(0-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(-1)^n$$

konvergiert nach dem Kriterium von Leibniz (Satz 8.10).

(b) Randpunkt $x = 2$: Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(2-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ist die bekannte divergente harmonische Reihe.

iii) (a) Randpunkt $x = 0$: Die Folgenglieder der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(0-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n$$

sind keine Nullfolge. Somit kann die Reihe nach dem Kriterium von Cauchy II (vgl. Korollar 8.2) nicht konvergieren.

(b) Randpunkt $x = 2$: Die Folgenglieder der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(2-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n$$

bilden ebenfalls keine Nullfolge, die Reihe divergiert.

Aufgabe 6. Es sei $k \in \mathbb{N}_0$.

i) (a) Für $x \in [0, \infty)$ gilt $x^k/k! \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, sodass

$$\exp(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} \frac{x^j}{j!} \geq \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \ .$$

(b) Aus Teil (a) folgt

$$x_n^{-k}\exp(x_n) > x_n^{-k} \cdot \frac{x_n^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{x_n}{(k+1)!} \overset{n\to\infty}{\to} \infty \ ,$$

sodass

$$\lim_{n\to\infty} x_n^{-k}\exp(x_n) = \infty \ .$$

(c) Aus Teil (a) folgt weiter für $n \to \infty$

$$0 \leq x_n^k \exp(-x_n) = \frac{x_n^k}{\exp(x_n)} \leq \frac{(k+1)!}{x_n} \to 0 \ ,$$

sodass nach dem Einschließungskriterium

$$\lim_{n\to\infty} x_n^k \exp(-x_n) = 0 \ .$$

ii) Da $\exp\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ bijektiv ist, gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in \mathbb{R}$ mit $\exp(x_n) = n$.

Es gilt dabei

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \ .$$

Da nämlich $\exp\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ monoton wachsend ist, ist die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls monoton wachsend.

Wäre nun $\{x_n\}$ nach oben beschränkt, etwa $x_n \leq K$ für ein $K > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$, so folgte

$$n = e^{x_n} \leq e^K$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch zur Unbeschränktheit der Folge $\{n\}$.

Die Eigenschaft „$\{x_n\}$ ist nicht nach oben beschränkt“ bedeutet mit anderen Worten:

Zu $M > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $M < x_N$ und da $\{x_n\}$ monoton wachsend ist, folgt

$$M < x_n \quad \text{für alle } n \geq N , \quad \text{d.h. } \lim_{n\to\infty} x_n = \infty .$$

Mit diesen Vorbereitungen kann (a) angewandt werden und die Abschätzung

$$0 \leq \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = \frac{\ln(e^{x_n})}{e^{\alpha x_n}} \leq \frac{x_n}{\frac{\alpha^2 x_n^2}{2}} = \frac{2}{\alpha^2 x_n}$$

liefert zusammen mit dem Einschließungskriterium

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = 0 .$$

iii) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt wieder nach (a)

$$0 \leq \frac{n}{2^n} = \frac{n}{\exp(n \cdot \ln(2))} \leq \frac{n}{\frac{n^2 \cdot \ln^2(2)}{2}} = \frac{2}{n \cdot \ln^2(2)} ,$$

sodass (ebenfalls wieder nach dem Einschließungskriterium)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0 .$$

Kapitel 10

Der $\mathbb{R}^n$

Realistische Modelle in Naturwissenschaft und Technik beschränken sich in der Regel nicht auf eine eindimensionale Diskussion.

Selbst wenn Vorgänge im dreidimensionalen Raum unserer Anschauung beschrieben werden sollen, ist die Anzahl der unabhängigen Variablen meist deutlich größer – man denke etwa an N Massenpunkte im dreidimensionalen Euklidischen Raum, deren mathematische Modellierung bzgl. kartesischer Ortskoordinaten im $\mathbb{R}^{3N}$ erfolgt.

Deshalb werden an dieser Stelle einige fundamentale Eigenschaften des $\mathbb{R}^n$ vorgestellt:

Es handelt sich um einen sogenannten Vektorraum, in welchem zudem Längen und Winkel gemessen werden können und in dem ein Konvergenzbegriff in natürlicher Weise definiert ist.

Statt offener oder abgeschlossener Intervalle werden nun offene bzw. abgeschlossene Kugeln betrachtet.

10.1 Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ (Vektorraum; Funktionenraum; lineare Abhängigkeit; Dimension; Basis)

Frage: Was ist eigentlich ein Vektor?

Unter einem (freien) Vektor im $\mathbb{R}^n$ stellt man sich eine gerichtete Größe (einen Pfeil) vor (als typisches Beispiel eine Kraft im $\mathbb{R}^3$), die durch ihre

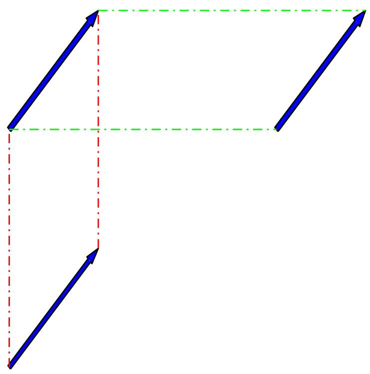


Abbildung 10.1: Parallelverschiebung freier Vektoren.

Länge und durch ihre Richtung gekennzeichnet ist.

Freie Vektoren, die durch eine Parallelverschiebung ineinander überführt werden können, werden als gleich angesehen (vgl. Abbildung 10.1).

Dementsprechend kann ein Vektor so verschoben werden, dass sein Anfangspunkt im Koordinatenursprung, dem Nullpunkt, liegt.

Dann ist ein Vektor im $\mathbb{R}^n$ durch die Lage seines Endpunktes, d.h. durch dessen Koordinaten (oder Komponenten), charakterisiert.

Mit anderen Worten: Es handelt sich um ein Element $\underline{\mathbf{x}}$ des kartesischen Produkts

$$\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n\text{-mal}} ,$$

wobei $\underline{\mathbf{x}}$ in der Regel als Spaltenvektor (geordnetes n-Tupel) geschrieben wird:

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} , \qquad x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in \mathbb{R} .$$

Die Komponenten werden geometrisch durch die Projektionen auf die

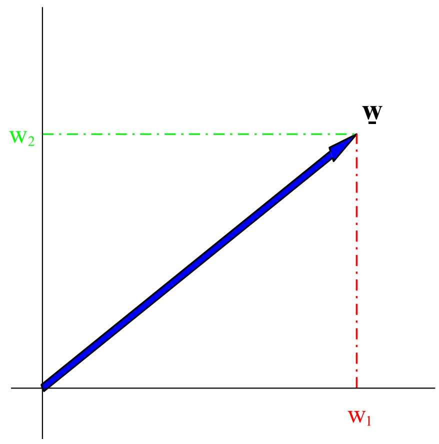


Abbildung 10.2: Der Vektor $\underline{\mathbf{w}}$ mit den Komponenten w_1, w_2 im $\mathbb{R}^2$.

Koordinatenachsen beschrieben (siehe Abbildung 10.2).

Anschaulich werden Vektoren in einem Kräfteparallelogramm addiert (vgl. Abbildung 10.3).

Ebenso können Vektoren durch die Multiplikation mit einem Skalar (nicht zu verwechseln mit dem Begriff Skalarmultiplikation) gestreckt oder gestaucht werden.

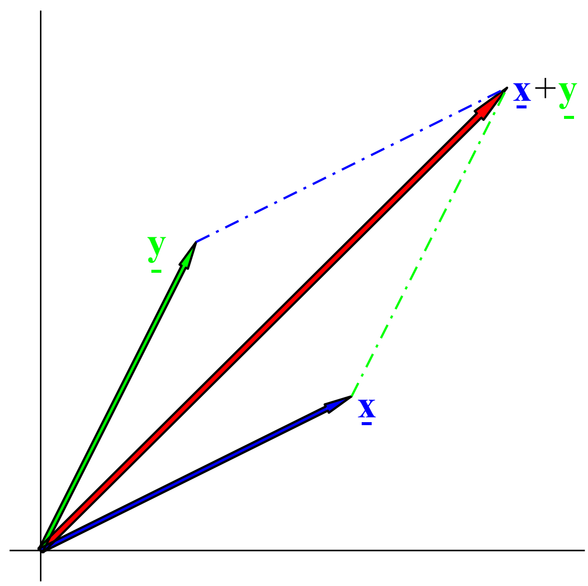


Abbildung 10.3: Ein Kräfteparallelogramm.

Es ist dabei ($\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$)

$$c\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ \vdots \\ cx_n \end{pmatrix}, \quad -\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Antwort: Ein Vektor ist ein Element eines Vektorraums.

Die oben angedeuteten Struktureigenschaften charakterisieren sogenannte Vektorräume, die auch lineare Räume genannt werden.

Axiomatisch werden diese Eigenschaften als Vektorraumaxiome in der folgenden Definition festgehalten, die insbesondere das Zusammenspiel zwischen Vektoren und Skalaren regelt.

Trotz der Allgemeinheit der Definition, beschränken sich die nachfolgenden Betrachtungen in der Regel auf den Vektorraum $\mathbb{R}^n$.

Zu beachten ist in der Definition, dass das Symbol „+“ zwei verschiedene Bedeutungen hat, obwohl das gleiche Symbol verwendet wird:

Die Addition $\underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{w}}$ zweier Vektoren aus der Menge V ist zu unterscheiden von der Addition $\lambda + \mu$ zweier Elemente aus dem Körper $\mathbb{K}$.

Ebenso sind Ausdrücke wie $\lambda\underline{\mathbf{v}}$ und $\lambda\mu$ zu unterscheiden.

Definition 10.1. VEKTORRAUM

Es sei $\mathbb{K}$ *ein Körper (z.B.* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *oder später* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*) und* V *eine Menge.*

Ferner existiere eine Addition „+“,

$$+ : \; V \times V \to V \; , \qquad (\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}}) \mapsto \underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{w}} \; ,$$

und es existiere eine Multiplikation mit Skalaren „·“,

$$\cdot : \; \mathbb{K} \times V \to V \; , \qquad (\lambda, \underline{\mathbf{v}}) \mapsto \lambda \, \underline{\mathbf{v}} \; ,$$

sodass gelte:

i) *(V,+) ist eine kommutative Gruppe (mit neutralen Element* $\underline{\mathbf{0}}$ *und inversem Element* $-\underline{\mathbf{v}}$*).*

ii) *Es gilt (*λ*,* $\mu \in \mathbb{K}$*,* $\underline{\mathbf{v}}$*,* $\underline{\mathbf{w}} \in V$*)*

   (a) $1 \cdot \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{v}}$ *;*

   (b) $(\lambda \, \mu) \, \underline{\mathbf{v}} = \lambda \, (\mu \, \underline{\mathbf{v}})$ *(Assoziativgesetz) ;*

   (c) $(\lambda + \mu) \, \underline{\mathbf{v}} = (\lambda \, \underline{\mathbf{v}}) + (\mu \, \underline{\mathbf{v}})$ *(Distributivgesetz) ;*

   (d) $\lambda \, (\underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{w}}) = (\lambda \, \underline{\mathbf{v}}) + (\lambda \underline{\mathbf{w}})$ *(Distributivgesetz) .*

Dann heißt $(V, \mathbb{K}, +, +, \cdot, \cdot)$ *ein Vektorraum oder linearer Raum über dem Körper* $\mathbb{K}$*.*

Die Elemente eines Vektorraums heißen Vektoren.

Beispiele.

i) *Der $\mathbb{R}^n$ ist wie bereits angedeutet ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

ii) *Auf den ersten Blick wirken Funktionenräume als Vektorräume ungewöhnlich.*

Die Vektorraumstruktur ist jedoch sehr einfach zu verifizieren (vgl. Übungskapitel 10.5).

Als einfachstes Beispiel betrachte man den Raum der Polynome vom Grad $\leq n$ über dem Körper der reellen Zahlen:

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) := \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k : \; a_k \in \mathbb{R} \;\; \textit{für alle} \;\; k = 0, 1, \dots, n \right\} .$$

Gerade in der angewandten Analysis ist der Umgang mit der Vektorraumstrukur von Funktionenräumen nicht wegzudenken.

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren.

Abbildung 10.3 legt es nahe, dass zum konstruktiven Aufbau eines Vektorraums nicht alle Vektoren benötigt werden.

Ein Vektor $\underline{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^n$ (die Formulierungen beziehen sich, wie bereits erwähnt, meist auf den Fall $V = \mathbb{R}^n$) heißt Linearkombination von k Vektoren $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$, ..., $\underline{\mathbf{v}}^{(k)}$ im $\mathbb{R}^n$, falls er als Summe von Vielfachen der $\underline{\mathbf{v}}^{(i)}$ geschrieben werden kann:

$$\underline{\mathbf{w}} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{\mathbf{v}}^{(i)}$$

für Skalare λ_1, λ_2, ..., $\lambda_k \in \mathbb{R}$.

Anschaulich gesprochen kann $\underline{\mathbf{w}}$ durch ein Kräfteparallelogramm aus Vielfachen der $\underline{\mathbf{v}}^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, k$, konstruiert werden.

Die Linearkombination heißt trivial, falls alle λ_i gleich Null sind.

Es gibt aber durchaus nicht-triviale Linearkombinationen, die den Nullvektor erzeugen.

Erste Beispiele.

i) *Im $\mathbb{R}^3$ seien die folgenden drei Vektoren gegeben:*

$$\underline{\mathbf{e}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{e}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{e}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(a) *Offensichtlich kann der Vektor $\underline{\mathbf{e}}^{(3)}$ (analog $\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{e}}^{(2)}$) nicht als Linearkombination von $\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{e}}^{(2)}$ geschrieben werden, da für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\lambda_1 \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\mathbf{e}}^{(2)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \underline{\mathbf{e}}^{(3)} .$$

(b) *Man erkennt in dem Beispiel, dass der Nullvektor $\underline{\mathbf{0}}$ nur mit der Wahl $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ als Linearkombination von $\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{e}}^{(2)}$, $\underline{\mathbf{e}}^{(3)}$ geschrieben werden kann (d.h. als triviale Linearkombination):*

$$\underline{\mathbf{0}} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \underline{\mathbf{e}}^{(i)} \Leftrightarrow \lambda_i = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3 .$$

ii) *Nun seien folgende Vektoren gegeben:*

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(a) Hier gilt beispielsweise

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \underline{\mathbf{v}}^{(3)} - \underline{\mathbf{v}}^{(2)} .$$

(b) Der Nullvektor kann geschrieben werden als

$$\underline{\mathbf{0}} = \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \underline{\mathbf{v}}^{(2)} - \underline{\mathbf{v}}^{(3)} .$$

Ein Vergleich zwischen Bedingungen der obigen Form (a) und (b) ist im Übungskapitel 10.5 vorgestellt.

Als Definition ist die folgende Formulierung zu wählen:

Definition 10.2. LINEARE UNABHÄNGIGKEIT

i) Die Vektoren $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$, $\dots$, $\underline{\mathbf{v}}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ heißen linear unabhängig, falls aus dem Ansatz

$$\underline{\mathbf{0}} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{\mathbf{v}}^{(i)}$$

zwingend folgt, dass alle λ_i verschwinden, d.h.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0 .$$

ii) Andernfalls heißen die Vektoren linear abhängig.

Bemerkung. *Plakativ gesprochen bedeutet lineare Unabhängigkeit:*

▷ *Man „dreht sich mit linear unabhängigen Vektoren nicht im Kreis“.*

▷ *Mit jedem neuen Anteil in der Linearkombination wird ein Schritt in eine „neue Dimension“ gemacht (vgl. Abbildung 10.4).*

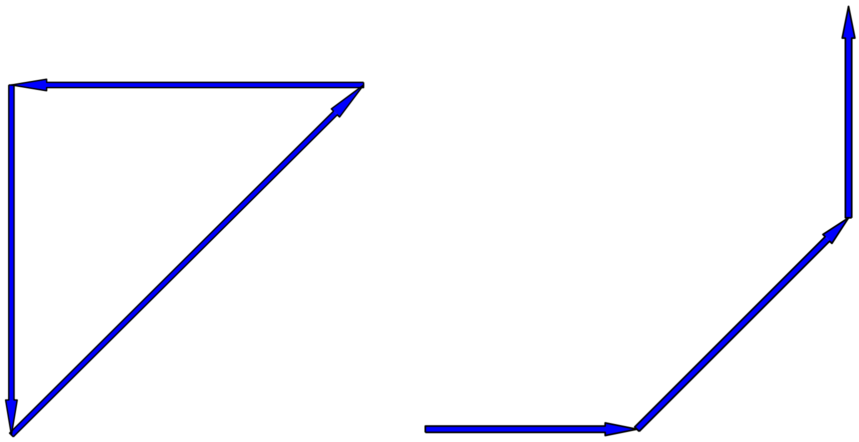


Abbildung 10.4: Zur Vorstellung linear abhängig versus linear unabhängig.

Beispiele.

i) *Betrachtet sei der $\mathbb{R}^2$ mit den Vektoren*

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Aus der Gleichheit

$$1\underline{\mathbf{v}}^{(1)} + (-1)\underline{\mathbf{v}}^{(2)} + (-2)\underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \underline{\mathbf{0}}$$

folgt, dass die Vektoren linear abhängig sind.

ii) *Zwei Vektoren $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ im $\mathbb{R}^n$, $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)} \neq \underline{\mathbf{0}}$, sind genau dann linear abhängig, wenn der eine Vielfache des anderen ist (vgl. Übungskapitel 10.5).*

iii) *Sind die Vektoren*

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$ *gegeben, so gilt*

$$\underline{\mathbf{0}} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0\,, \;\; \lambda_2 = 0$$

$$\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = 0\,,$$

was die lineare Unabhängigkeit der Vektoren beweist.

iv) *Der Raum der Polynome vom Grad* $\leq n$ *über* $\mathbb{R}$ *sollte von den Monomen* $1, x, \ldots x^n$ *„aufgespannt“ werden.*

In der Tat sind etwa im Raum der Polynome vom Grad ≤ 2

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} := p(x) :\equiv 1 \quad \textit{und} \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} := q(x) := x \;\; \textit{für alle} \;\; x \in \mathbb{R}$$

linear unabhängig. Aus

$$\lambda_1 p(x) + \lambda_2 q(x) = \underline{\mathbf{0}} \;\; (= r(x) \equiv 0)$$

folgt nämlich

$$\lambda_1 + \lambda_2 x = 0 \quad \textit{für alle} \;\; x \in \mathbb{R}\,,$$

also wieder $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Wie behauptet sind die beiden Polynome linear unabhängig.

Bauelemente des $\mathbb{R}^n$.

Im $\mathbb{R}^n$ betrachte man die Vektoren

$$\underline{\mathbf{e}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{e}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \underline{\mathbf{e}}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist leicht nachzuprüfen, dass diese n Vektoren linear unabhängig sind.

Andererseits kann als Übung gezeigt werden, dass es im $\mathbb{R}^n$ keine $n+1$ linear unabhängige Vektoren geben kann.

Das motiviert

Definition 10.3. DIMENSION, BASIS

i) *Die maximale Zahl linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraums V heißt die Dimension des Vektorraumes,* $\dim V$.

ii) *Es sei $n \in \mathbb{N}$ die Dimension eines Vektorraums V.*

Dann heißt jedes n-Tupel $\left(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(n)}\right)$ von linear unabhängigen Vektoren aus V eine Basis von V.

Korollar 10.1. DIMENSION DES $\mathbb{R}^n$

Es ist $\dim \mathbb{R}^n = n$ und die obige Basis $\left(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)}, \dots, \underline{\mathbf{e}}^{(n)}\right)$ des $\mathbb{R}^n$ heißt die kanonische Basis oder die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.

Beweisidee. Eine Linearkombination von $n+1$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$ führt auf n Gleichungen in λ_1, λ_2, $\dots$, λ_n, λ_{n+1}. $\square$

Beispiel. *Die Vektoren*

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

bilden eine Basis $\left(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)}\right)$ des $\mathbb{R}^3$.

Darstellung eines Vektors bzgl. einer gegebenen Basis.

Per definitionem gilt für einen beliebigen Vektor $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ und die kanonische Basis $\left(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)}, \dots, \underline{\mathbf{e}}^{(n)}\right)$ des $\mathbb{R}^n$:

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\underline{\mathbf{e}}^{(1)} + x_2\underline{\mathbf{e}}^{(2)} + \dots x_n\underline{\mathbf{e}}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} x_i\underline{\mathbf{e}}^{(i)} ,$$

d.h. jeder Vektor $\underline{\mathbf{x}}$ ist eine eindeutig bestimmte Linearkombination der Basisvektoren $\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{e}}^{(2)}$, $\dots$, $\underline{\mathbf{e}}^{(n)}$.

Gleiches gilt für beliebige Basen (vgl. Übungskapitel 10.5):

Ist $\left(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(n)}\right)$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$, so existieren zu jedem $\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$ eindeutig bestimmte Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\underline{\mathbf{v}} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underline{\mathbf{v}}^{(k)} .$$

Diese Koeffizienten heißen Koordinaten von $\underline{\mathbf{v}}$ bzgl. der Basis $\left(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(n)}\right)$.

Beispiel. *Im $\mathbb{R}^3$ seien wieder*

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 .$$

Dann hat jeder Vektor $\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ die eindeutige Darstellung bzgl. der Basis $\left(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)}\right)$:

$$\underline{\mathbf{x}} = (x_1 - x_2)\underline{\mathbf{v}}^{(1)} + (x_2 - x_3)\underline{\mathbf{v}}^{(2)} + x_3 \underline{\mathbf{v}}^{(3)} .$$

Unteräume des $\mathbb{R}^n$.

Unterräume sind Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die selbst als Vektorraum angesehen werden können.

Geometrisch sind die bekanntesten Beispiele Ebenen bzw. Geraden im $\mathbb{R}^3$, die den Ursprung enthalten.

Beispiel. *Im* $\mathbb{R}^3$ *betrachte man die Vektoren*

$$\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die in Abbildung 10.5 dargestellte Ebene im $\mathbb{R}^3$*.*

$$E = \{\alpha\underline{\mathbf{v}} + \beta\underline{\mathbf{w}} : \ \alpha, \ \beta \in \mathbb{R}\} \ .$$

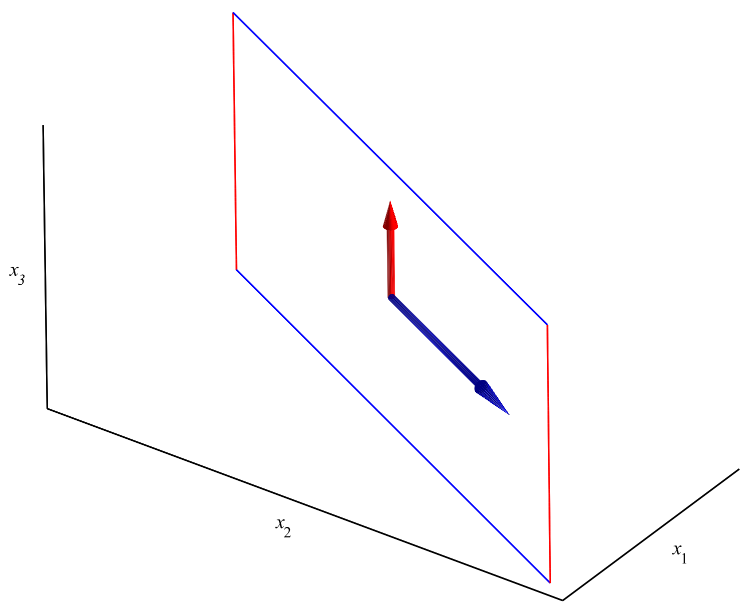


Abbildung 10.5: Die Ebene E.

Dieses kurze Beispiel motiviert die folgende Definition 10.4.

Definition 10.4. UNTERRAUM

Ist V *ein Vektorraum und ist* $U \subset V$ *eine Teilmenge von* V*, die selbst ein Vektorraum ist, so heißt* U *Unterraum von* V*.*

Da U Teilmenge eines Vektorraums ist, übertragen sich viele Eigenschaften von V auf U und die Vektorraumstruktur von U folgt, sofern U abgeschlossen bzgl. der Multiplikation mit einem Skalar und abgeschlossen bzgl. der Vektoraddition ist (vgl. Übungskapitel 10.5).

Erzeugung von Unterräumen im $\mathbb{R}^n$.

Gegeben seien k Vektoren $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$, $\dots$, $\underline{\mathbf{v}}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$.

Dann ist ihre lineare Hülle

$$L := \text{Spann}\left(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \dots, \underline{\mathbf{v}}^{(k)}\right) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underline{\mathbf{v}}^{(i)} : \ \alpha_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, \ 2, \ \dots, \ k \right\}$$

ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$, genannt der von den $\underline{\mathbf{v}}^{(i)}$ aufgespannte Unterraum.

Wie in jedem Unterraum gilt

$$\underline{\mathbf{0}} \in L \; , \qquad 0 \le \dim L \le n \; ,$$

und offensichtlich ist[1]

$$\dim L = 0 \;\Leftrightarrow\; L = \{\underline{\mathbf{0}}\} \; , \qquad \dim L = n \;\Leftrightarrow\; L = \mathbb{R}^n \; .$$

Beispiel. *Es sei $n = 2$ und*

$$L = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \ \alpha \in \mathbb{R} \right\} .$$

In diesem Beispiel ist L die „x_1“-Achse im $\mathbb{R}^2$.

[1] Man beachte, dass der Nullvektor per definitionem linear abhängig ist.

10.2 Die Geometrie des $\mathbb{R}^n$ (Norm; Skalarprodukt; Cauchy-Schwarzsche Ungleichung; Kosinus; orthogonal; orthonormal; Kronecker-Symbol; Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren; orthogonale Projektion; Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$; Hessesche Normalform)

10.2.1 Norm und Skalarprodukt

Im Vektorraum $\mathbb{R}^n$ können – wie es der anschaulichen Vorstellung im $\mathbb{R}^3$ entspricht – Längen und Winkel gemessen werden.

Dies geschieht mithilfe der Euklidischen Norm bzw. des Euklidischen Skalarprodukts.

Dementsprechend wird der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ versehen mit dem Euklidischen Skalarprodukt auch der Euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ genannt, was manchmal durch die Schreibweise $\mathbb{E}^n$ verdeutlicht wird.

Wie werden Längen gemessen?

Drei charakteristische Eigenschaften sind unabdingbar, wenn eine Größe $\|\underline{\mathbf{x}}\|$ in sinnvoller Weise als Länge eines Vektors interpretiert werden soll.

i) Die Länge eines Vektors ist immer größer als oder gleich Null und nur der Nullvektor selbst hat die Länge Null.

ii) Wird ein Vektor um einen Faktor gestreckt oder gestaucht, so ändert sich die Länge um den Betrag dieses Faktors.

iii) Anhand des Kräfteparallelogramms (vgl. Abbildung 10.3) ist ersichtlich, dass in einem Dreieck die direkte Verbindung die kürzeste ist, d.h. die Länge des Vektors $\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}$ ist kleiner oder gleich der Summe aus den Längen von $\underline{\mathbf{x}}$ und $\underline{\mathbf{y}}$.

Die präzise Definition lautet:

Definition 10.5. $\boxed{\text{Norm}}$

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\|\cdot\|$ eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}\,, \qquad \underline{\mathbf{x}} \mapsto \|\underline{\mathbf{x}}\|\,.$$

Die Abbildung heißt Norm auf V, falls für alle $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}} \in V$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

i) $\|\underline{\mathbf{x}}\| \geq 0$ *und* $\|\underline{\mathbf{x}}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$ *;*

ii) $\|\lambda \underline{\mathbf{x}}\| = |\lambda|\, \|\underline{\mathbf{x}}\|$ *;*

iii) *(Dreiecksungleichung)* $\|\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}\| \leq \|\underline{\mathbf{x}}\| + \|\underline{\mathbf{y}}\|$ *.*

Wie im Übungskapitel 10.5 gezeigt, gibt es unterschiedliche Normen im $\mathbb{R}^n$.

Die wichtigste ist die Euklidische Norm[2], die im Fall $n = 3$ der Längenmessung unserer Anschauung im $\mathbb{R}^3$ entspricht:

$$\|\underline{\mathbf{x}}\|_2 := \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Big)^{\frac{1}{2}} =: \|\underline{\mathbf{x}}\|\,.$$

Falls nicht explizit anders erwähnt, wird im Folgenden stets die Euklidische Norm betrachtet, weshalb der Index 2 in der Regel weggelassen ist.

---

[2]Zum Beweis der Normeigenschaften sei auf Satz 10.1 und Folgerung verwiesen.

Wie werden Winkel gemessen?

Wesentlich für eine Winkelmessung ist, dass die Euklidische Norm von einem sogenannten Skalarprodukt induziert ist.

Ein Skalarprodukt (auch inneres Produkt genannt) ordnet zwei Vektoren eine Zahl zu (hier eine reelle Zahl) und gehorcht folgenden Regeln:

Definition 10.6. SKALARPRODUKT

Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R} , \quad (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) \mapsto \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle ,$$

heißt Skalarprodukt, wenn für alle $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}}$, $\underline{\mathbf{z}} \in V$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

i) $\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle = \langle \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}} \rangle$ *(Kommutativgesetz) ;*

ii) $\langle \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{z}} \rangle = \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{z}} \rangle + \langle \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{z}} \rangle$ *(Distributivgesetz) ;*

iii) $\lambda \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle = \langle \lambda \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle = \langle \underline{\mathbf{x}}, \lambda \underline{\mathbf{y}} \rangle$ *(Assoziativgesetz) ;*

iv) $\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}} \rangle > 0$ *(positive Definitheit) .*

Notation. Gebräuchlich ist auch die Notation $\underline{\mathbf{x}} \cdot \underline{\mathbf{y}}$ für das Skalarprodukt.

Zunächst ist unklar, ob z.B. im $\mathbb{R}^n$ überhaupt ein Skalarprodukt existiert – es wird sich aber zeigen, dass durch die Vorschrift

$$\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j , \quad \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n ,$$

tatsächlich eine Abbildung mit den obigen Eigenschaften, das Euklidische Skalarprodukt, definiert ist.

Andere Skalarprodukte werden hier nicht betrachtet.

Wichtige Beobachtung. *Die Euklidische Norm und das Euklidische Skalarprodukt verbindet die Gleichung*

$$\|\underline{\mathbf{x}}\| = \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}} \rangle^{\frac{1}{2}} \quad \textit{für alle } \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n .$$

Ein wesentliches Werkzeug zur weiteren Diskussion der Geometrie des $\mathbb{R}^n$ liefert Satz 10.1.

Satz 10.1. Cauchy- Schwarzsche Ungleichung

Für alle $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle| \leq \|\underline{\mathbf{x}}\| \, \|\underline{\mathbf{y}}\| .$$

Beweis. Gegeben seien $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ (o.E. $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}} \neq \underline{\mathbf{0}}$).

Dann gilt für beliebige α, $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
& \langle \alpha\underline{\mathbf{x}} + \beta\underline{\mathbf{y}}, \alpha\underline{\mathbf{x}} + \beta\underline{\mathbf{y}} \rangle \geq 0 \\
\Rightarrow \quad & \alpha^2 \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}} \rangle + \beta^2 \langle \underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle + 2\alpha\beta \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle \geq 0 \\
\Rightarrow \quad & \alpha^2 \|\underline{\mathbf{x}}\|^2 + \beta^2 \|\underline{\mathbf{y}}\|^2 \geq -2\alpha\beta \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle .
\end{aligned}$$

Wird nun $\alpha := \|\underline{\mathbf{y}}\|$ und $\beta := \mp\|\underline{\mathbf{x}}\|$ gewählt, so ergibt sich die Behauptung aus

$$2\|\underline{\mathbf{x}}\|^2\|\underline{\mathbf{y}}\|^2 \geq \pm 2\|\underline{\mathbf{x}}\|\|\underline{\mathbf{y}}\|\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}\rangle \quad \text{also} \quad \|\underline{\mathbf{x}}\|\|\underline{\mathbf{y}}\| \geq \pm\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}\rangle \ .$$

□

Folgerung. *Die Cauchy- Schwarzsche Ungleichung impliziert für alle* $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ *die Dreiecksungleichung:*

$$\begin{aligned} \|\underline{\mathbf{x}}+\underline{\mathbf{y}}\|^2 &= \langle \underline{\mathbf{x}}+\underline{\mathbf{y}}, \underline{\mathbf{x}}+\underline{\mathbf{y}}\rangle = \|\underline{\mathbf{x}}\|^2 + \|\underline{\mathbf{y}}\|^2 + 2\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}\rangle \\ &\leq \|\underline{\mathbf{x}}\|^2 + \|\underline{\mathbf{y}}\|^2 + 2\|\underline{\mathbf{x}}\|\|\underline{\mathbf{y}}\| = \big(\|\underline{\mathbf{x}}\| + \|\underline{\mathbf{y}}\|\big)^2 \ . \end{aligned}$$

Damit ist nun gezeigt, dass die Euklidische Norm tatsächlich eine Norm im Sinne von Definition 10.5 ist.

Der Kosinus definiert über Vektoren.

Nach diesen Vorbereitungen kann über den Kosinus der Winkel zwischen zwei Vektoren gemessen werden, indem man für alle $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$

$$\cos(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) := \frac{\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}\rangle}{\|\underline{\mathbf{x}}\|\|\underline{\mathbf{y}}\|}$$

definiert, wobei die Cauchy- Schwarzsche Ungleichung impliziert:

$$-1 \leq \cos(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) \leq 1 \ .$$

Bemerkung. *Analog kann in beliebigen Vektorräumen mit einem Skalarprodukt ein Winkel zwischen zwei Vektoren erklärt werden – auch in geeigneten Funktionenräumen.*

Vergleich mit der elementargeometrischen Definition.

Ist der Kosinus zwischen zwei Vektoren sinnvoll definiert, so darf die Definition nicht der elementargeometrischen aus Kapitel 6.3 widersprechen.

Um sich davon zu überzeugen, betrachte man Abbildung 6.11 und berechne den Winkel zwischen den beiden Vektoren ($\lambda > 0$ fixiert)

$$\underline{\mathbf{v}} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} .$$

Im Szenario aus Abbildung 6.11 gilt c_1, $c_2 > 0$ und

$$\langle \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{c}} \rangle = \lambda c_1 + 0 c_2 = \lambda c_1 .$$

Für die Euklidischen Normen gilt (zur Erinnerung: $r = 1$)

$$\|\underline{\mathbf{v}}\| = \sqrt{\lambda^2 + 0^2} = \lambda , \qquad \|\underline{\mathbf{c}}\| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = 1$$

und in Übereinstimmung der beiden Definitionen folgt

$$\cos(\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{c}}) = \frac{\langle \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{c}} \rangle}{\|\underline{\mathbf{v}}\| \|\underline{\mathbf{c}}\|} = \frac{\lambda c_1}{\lambda} = c_1 .$$

Orthogonalität von Vektoren.

Mit dem Kosinus ist der Winkel zwischen zwei Vektoren definiert und als Spezialfall ist definiert, wann zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

Zwei Vektoren $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$ (allgemein in einem Vektorraum, der mit einem Skalarprodukt versehen ist) heißen orthogonal, falls

$$\langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle = 0 .$$

Beispiel. *Man betrachte die Standardbasis* $\big(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)}, \dots, \underline{\mathbf{e}}^{(n)}\big)$ *des* $\mathbb{R}^n$.

Diese Basisvektoren haben die Länge 1 *und stehen senkrecht aufeinander, d.h. für alle* i, $j = 1, 2, \dots, n$ *ist* (δ_{ij} *heißt Kronecker-Symbol*)

$$\langle \underline{\mathbf{e}}^{(i)}, \underline{\mathbf{e}}^{(j)} \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j\ , \\ 0 & \text{für } i \neq j\ . \end{cases}$$

Die Darstellung von Vektoren bzgl. einer solchen Basis ist offensichtlich deutlich einfacher als die bzgl. einer beliebigen Basis. Es gilt:

Satz 10.2. ORTHONORMALBASIS

Es seien $\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)}, \dots, \underline{\mathbf{f}}^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ *und für alle* i, $j = 1, 2, \dots, n$ *gelte*

$$\langle \underline{\mathbf{f}}^{(i)}, \underline{\mathbf{f}}^{(j)} \rangle = \delta_{ij}\ .$$

i) Dann ist $\big(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)}, \dots, \underline{\mathbf{f}}^{(n)}\big)$ *eine Basis des* $\mathbb{R}^n$ *und jede derartige Basis heißt Orthonormalbasis (ONB) des* $\mathbb{R}^n$.

ii) Jeder Vektor $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ *ist bzgl. der Basis* $\big(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)}, \dots, \underline{\mathbf{f}}^{(n)}\big)$ *eindeutig dargestellt als Linearkombination*

$$\underline{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^{n} \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{f}}^{(k)} \rangle \underline{\mathbf{f}}^{(k)}\ .$$

Beweisidee.

i) Man multipliziere $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{\mathbf{f}}^{(i)} = \underline{\mathbf{0}}$ skalar mit $\underline{\mathbf{f}}^{(k)}$.

ii) Man multipliziere $\underline{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{\mathbf{f}}^{(i)}$ skalar mit $\underline{\mathbf{f}}^{(k)}$. $\square$

Beispiel. *Die Vektoren*

$$\underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

stehen senkrecht aufeinander.

Nach der Normierung auf die Länge 1,

$$\underline{\mathbf{f}}^{(1)} = \frac{1}{\|\underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(1)}\|} \underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{f}}^{(2)} = \frac{1}{\|\underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(2)}\|} \underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

ergibt sich die Orthonormalbasis $(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)})$ *des* $\mathbb{R}^2$.

Es ist beispielsweise

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \underline{\mathbf{f}}^{(2)} \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}} \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\mathbf{f}}^{(2)} , \end{aligned}$$

was leicht mit einer Probe verifiziert werden kann.

Wie kann eine ONB explizit konstruiert werden?

Im $\mathbb{R}^n$ ist mit $\big(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)}, \dots, \underline{\mathbf{e}}^{(n)}\big)$ die kanonische Basis als Standard gegeben.

In Teil III wird jedoch ausführlich diskutiert (Stichwort Hauptachsentransformation), dass beispielsweise Symmetrien eines Problems oft besser in einer anderen ONB widergespiegelt werden.

Zudem möchte man auch in Unterräumen des $\mathbb{R}^n$ möglichst einfach mit einer ONB des Unterraums arbeiten.

Ein konstruktives Verfahren zur Bestimmung einer solchen Basis ist das sogenannte Gram- Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren.

Es seien hierzu $1 \leq m \leq n$ linear unabhängige Vektoren $\underline{\mathbf{g}}^{(1)}, \underline{\mathbf{g}}^{(2)}, \dots, \underline{\mathbf{g}}^{(m)}$ im $\mathbb{R}^n$ gegeben und es sei

$$U := \text{Spann}\left(\underline{\mathbf{g}}^{(1)}, \dots, \underline{\mathbf{g}}^{(m)}\right) .$$

Beispiel. *Es sei $m = n = 2$,*

$$\underline{\mathbf{g}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{g}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Um ausgehend von $\underline{\mathbf{g}}^{(1)}$ eine ONB des aufgespannten Raums (in diesem Fall des ganzen $\mathbb{R}^2$) zu finden, wird zunächst der Vektor $\underline{\mathbf{g}}^{(1)}$ auf die Länge 1 normiert:

$$\underline{\mathbf{f}}^{(1)} := \frac{1}{\|\underline{\mathbf{g}}^{(1)}\|} \underline{\mathbf{g}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Anschließend wird aus $\underline{\mathbf{g}}^{(2)}$ ein zu $\underline{\mathbf{f}}^{(1)}$ senkrechter Vektor konstruiert, indem man von $\underline{\mathbf{g}}^{(2)}$ den Anteil abzieht, der schon im von $\underline{\mathbf{f}}^{(1)}$ aufgespannten Raum liegt:

Man zieht die orthogonale Projektion von $\underline{\mathbf{g}}^{(2)}$ auf den von $\underline{\mathbf{f}}^{(1)}$ aufgespannten Teilraum ab.

Anzumerken ist, dass ein Anteil in die orthogonale Richtung verbleiben muss, da $\underline{\mathbf{g}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{g}}^{(2)}$ nach Voraussetzung linear unabhängig sind.

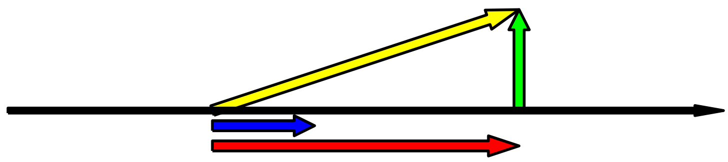


Abbildung 10.6: Zur orthogonalen Projektion von $\underline{\mathbf{g}}^{(2)}$ auf Spann($\underline{\mathbf{f}}^{(1)}$).

Die orthogonale Projektion von $\underline{\mathbf{g}}^{(2)}$ *(in Abbildung 10.6 gelb dargestellt) auf den von* $\underline{\mathbf{f}}^{(1)}$ *(blau) aufgespannten Teilraum (vgl. Abbildung 10.6, dort mit dem schwarzen Pfeil angedeutet) ist aber (rot)*

$$\langle \underline{\mathbf{g}}^{(2)}, \underline{\mathbf{f}}^{(1)} \rangle \, \underline{\mathbf{f}}^{(1)} \ ,$$

es verbleibt (in der Abbildung grün dargestellt):

$$\underline{\mathbf{g}}^{(2)} - \langle \underline{\mathbf{g}}^{(2)}, \underline{\mathbf{f}}^{(1)} \rangle \, \underline{\mathbf{f}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Dieser Vektor hat in dem speziellen Beispiel bereits die Länge 1*, ansonsten wäre er noch entsprechend zu normieren.*

Bemerkungen.

i) *Im obigen besonders einfachen Beispiel ist die Standardbasis entstanden. Rechnet man das Beispiel etwa mit der Wahl*

$$\underline{\mathbf{g}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ ,$$

so wird man auf eine andere Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ *geführt.*

ii) *Wie bereits erwähnt, funktioniert das Gram- Schmidtsche Verfahren nicht nur im Fall $m = n$.*

Im allgemeinen Fall wird wie folgt vorgegangen:

Es sei $1 \leq m \leq n$ und $\underline{\mathbf{g}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{g}}^{(2)}$, $\dots$, $\underline{\mathbf{g}}^{(m)}$ seien linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^n$.

i) Zunächst wird gesetzt:

$$\underline{\mathbf{f}}^{(1)} := \frac{1}{\|\underline{\mathbf{g}}^{(1)}\|}\, \underline{\mathbf{g}}^{(1)} \ .$$

ii) Anschließend betrachtet man den Vektor

$$\underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(2)} := \underline{\mathbf{g}}^{(2)} - \langle \underline{\mathbf{g}}^{(2)}, \underline{\mathbf{f}}^{(1)} \rangle \underline{\mathbf{f}}^{(1)}$$

und normiert diesen auf die Länge 1, d.h.

$$\underline{\mathbf{f}}^{(2)} := \frac{1}{\|\underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(2)}\|}\, \underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(2)} \ .$$

iii) Analog wird

$$\underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(3)} := \underline{\mathbf{g}}^{(3)} - \langle \underline{\mathbf{g}}^{(3)}, \underline{\mathbf{f}}^{(1)} \rangle \underline{\mathbf{f}}^{(1)} - \langle \underline{\mathbf{g}}^{(3)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)} \rangle \underline{\mathbf{f}}^{(2)}$$

gesetzt und anschließend normiert:

$$\underline{\mathbf{f}}^{(3)} := \frac{1}{\|\underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(3)}\|}\, \underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(3)} \ .$$

iv) Sind nun für ein $2 \le k \le m$ die Vektoren $\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)}, \dots, \underline{\mathbf{f}}^{(k-1)}$ wie oben konstruiert, so wird

$$\tilde{\underline{\mathbf{f}}}^{(k)} := \underline{\mathbf{g}}^{(k)} - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \underline{\mathbf{g}}^{(k)}, \underline{\mathbf{f}}^{(i)} \rangle \underline{\mathbf{f}}^{(i)}$$

berechnet und wieder normiert:

$$\underline{\mathbf{f}}^{(k)} := \frac{1}{\|\tilde{\underline{\mathbf{f}}}^{(k)}\|} \tilde{\underline{\mathbf{f}}}^{(k)} .$$

Insgesamt ist ein Orthonormalsystem aus m Vektoren entstanden, mit anderen Worten eine ONB von

$$U = \text{Spann}\left(\underline{\mathbf{g}}^{(1)}, \underline{\mathbf{g}}^{(2)}, \dots, \underline{\mathbf{g}}^{(m)}\right) .$$

Beispiel. *Es sei* U *im* $\mathbb{R}^3$ *der Unterraum* $\text{Spann}\big(\underline{\mathbf{g}}^{(1)}, \underline{\mathbf{g}}^{(2)}\big)$,

$$\underline{\mathbf{g}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \underline{\mathbf{g}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Man wählt nach obigem Rezept zunächst

$$\underline{\mathbf{f}}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Anschließend wird gesetzt:

$$\tilde{\underline{\mathbf{f}}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und man erhält

$$\underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} ,$$

bzw. nach der Normierung von $\underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(2)}$ *folgende ONB von* U*:*

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

10.2.2 Bemerkungen zur analytischen Geometrie

Geraden im $\mathbb{R}^n$.

Bekanntlich ist eine Gerade g eine Punktmenge, die bereits durch die Kenntnis von zwei Punkten auf der Geraden vollständig bestimmt ist.

Liegen zwei verschiedene Punkte $\underline{\mathbf{x}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{x}}^{(2)} \in \mathbb{R}^n$ auf der Geraden g und ist $\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{x}}^{(2)} - \underline{\mathbf{x}}^{(1)}$, so lautet eine Parameterdarstellung der Geraden:

$$g = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \ \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}}^{(1)} + t\underline{\mathbf{v}}, \ t \in \mathbb{R} \right\} .$$

Dabei kann man sich t als die Zeit und $\underline{\mathbf{v}}$ als die Geschwindigkeit vorstellen, mit der die Gerade durchlaufen wird.

Da die Geschwindigkeit ein Vektor ist, gibt $\underline{\mathbf{v}}$ insbesondere die Richtung der Geraden vor, $\underline{\mathbf{v}}$ heißt ein Richtungsvektor der Geraden.

Beispiel. *Betrachtet sei die Gerade g im $\mathbb{R}^2$, die für a, $b \in \mathbb{R}$ festgelegt ist durch die beiden Punkte*

$$\underline{\mathbf{x}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{x}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ a+b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 .$$

Dann gilt für alle $\underline{\mathbf{x}} \in g$

$$x_1 = t \ , \quad x_2 = b + ta \qquad \textit{für ein} \ \ t \in \mathbb{R} \ ,$$

d.h. als Funktionsvorschrift $x_2 = f(x_1)$ ergibt sich die bekannte Darstellung

$$x_2 = ax_1 + b \ .$$

Bemerkung. *Eindimensionale Unterräume des $\mathbb{R}^n$ sind stets Geraden.*

Da der Nullvektor in jedem Unterraum liegen muss, Geraden aber nicht durch den Nullpunkt verlaufen müssen, gilt die Umkehrung nicht.

Geraden, die nicht durch den Ursprung verlaufen, sind affin lineare Räume, d.h. es handelt sich um „verschobene eindimensionale Unterräume“.

Zur Analyse von Ebenen im $\mathbb{R}^3$ sind noch einige Begriffsbildungen vorauszuschicken.

Orthogonales Komplement.

Wie in den Übungen zu diesem Kapitel gezeigt wird, liefert die folgende Definition stets einen Unterraum, auch wenn U selbst kein Unterraum ist.

Definition 10.7. ORTHOGONALES KOMPLEMENT

Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge, so heißt

$$U^\perp := \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \ \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}} \rangle = 0 \ \ \textit{für alle} \ \ \underline{\mathbf{u}} \in U \right\}$$

das orthogonale Komplement von U.

Beispiel. *Es sei $n = 3$,*

$$\underline{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad U = \{\underline{\mathbf{N}}\} \ .$$

$U^\perp$ ist die Ebene durch den Nullpunkt senkrecht zum Vektor $\underline{\mathbf{N}}$:

$$U^\perp = \left\{ \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \right\} .$$

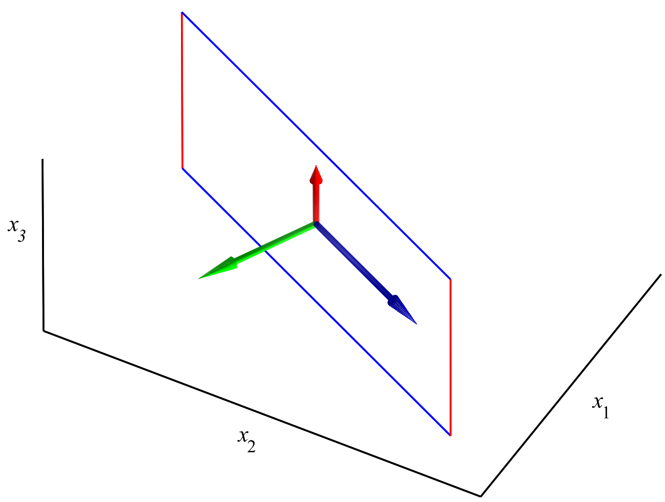


Abbildung 10.7: Das orthogonale Komplement des Vektors $\underline{\mathbf{N}}$.

In $U^\perp$ liegen beispielsweise die linear unabhängigen Vektoren

$$\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Sie spannen die Ebene $U^\perp$ auf (vgl. Abbildung 10.7).

Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$.

Vorsicht. *Im $\mathbb{R}^n$, $n \neq 3$, gibt es kein Analogon zum Vektorprodukt.*

Wie im letzten Beispiel deutlich gemacht ist, kann eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ einerseits durch zwei Richtungsvektoren gegeben sein und andererseits als senkrecht zu einem Normalenvektor interpretiert werden (jeweils mit der Angabe eines Aufpunkts).

Dies gibt dem Vektorprodukt eine besondere geometrische Bedeutung als Operation, die zwei linear unabhängigen Vektoren einen dazu senkrechten Vektor (in Normalenrichtung) zuordnet (vgl. Abbildung 10.8).

Wie üblich bezeichne $\big(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)}, \underline{\mathbf{e}}^{(3)}\big)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$.

Definition 10.8. VEKTORPRODUKT

Das Vektorprodukt „$\times$" im $\mathbb{R}^3$ ist die Abbildung, die allen $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^3$ einen weiteren Vektor im $\mathbb{R}^3$ zuordnet,

$$\underline{\mathbf{x}} \times \underline{\mathbf{y}} := \underline{\mathbf{e}}^{(1)} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \underline{\mathbf{e}}^{(2)} \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \underline{\mathbf{e}}^{(3)} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} .$$

Dabei bezeichnet für alle a, b, c, $d \in \mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc .$$

Eigenschaften und Rechenregeln.

Das Vektorprodukt ist bestimmt durch die folgenden drei Eigenschaften.

i) $\|\underline{\mathbf{x}} \times \underline{\mathbf{y}}\| = \|\underline{\mathbf{x}}\| \, \|\underline{\mathbf{y}}\| \, |\sin(\varphi)|$, wobei φ den von $\underline{\mathbf{x}}$ und $\underline{\mathbf{y}}$ eingeschlossenen Winkel bezeichne, d.h.:

Der Betrag des Vektorprodukts liefert den Flächeninhalt des von $\underline{\mathbf{x}}$

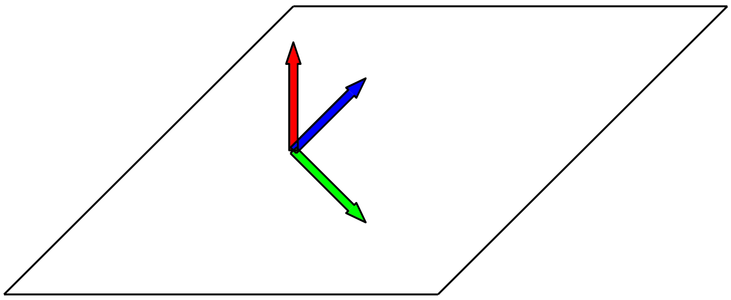


Abbildung 10.8: Das Vektorprodukt $\underline{\mathbf{x}} \times \underline{\mathbf{y}}$ von $\underline{\mathbf{x}}$ und $\underline{\mathbf{y}}$.

und $\underline{\mathbf{y}}$ aufgespannten Parallelogramms.

Insbesondere ist $\underline{\mathbf{x}} \times \underline{\mathbf{y}}$ genau dann Null, wenn $\underline{\mathbf{x}}$ und $\underline{\mathbf{y}}$ linear abhängig sind.

ii) $\underline{\mathbf{x}} \times \underline{\mathbf{y}}$ steht senkrecht auf $\underline{\mathbf{x}}$ und $\underline{\mathbf{y}}$.

iii) Es gilt die „Rechte-Hand-Regel“:

Zeigt der Daumen der rechten Hand in Richtung von $\underline{\mathbf{x}}$, der Zeigefinger in Richtung von $\underline{\mathbf{y}}$, so zeigt der Mittelfinger senkrecht dazu in Richtung von $\underline{\mathbf{x}} \times \underline{\mathbf{y}}$ (vgl. Abbildung 10.8).

Bemerkung. *Das orientierte Volumen*[3] *des von $\underline{\mathbf{a}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{a}}^{(2)}$ und $\underline{\mathbf{a}}^{(3)}$ im $\mathbb{R}^3$ aufgespannten Spats (vgl. Abbildung 10.9) berechnet sich zu*

$$[\underline{\mathbf{a}}^{(1)}, \underline{\mathbf{a}}^{(2)}, \underline{\mathbf{a}}^{(3)}] := \langle \underline{\mathbf{a}}^{(1)} \times \underline{\mathbf{a}}^{(2)}, \underline{\mathbf{a}}^{(3)} \rangle \ .$$

Diese Größe heißt das Spatprodukt der Vektoren $\underline{\mathbf{a}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{a}}^{(2)}$, $\underline{\mathbf{a}}^{(3)} \in \mathbb{R}^3$.

Die wichtigsten Rechenregeln für das Vektorprodukt lauten:

[3] Je nach der Orientierung der Vektoren ändert sich das Vorzeichen.

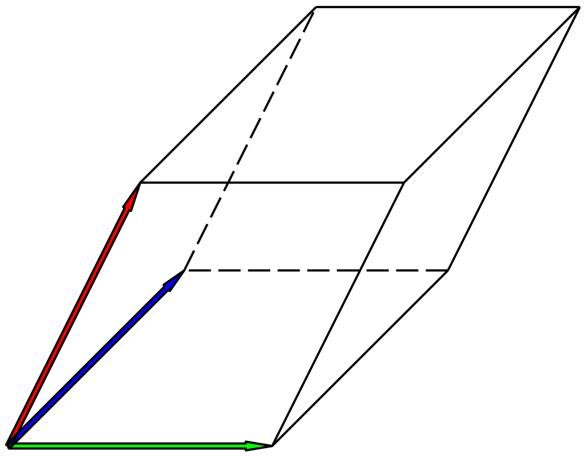


Abbildung 10.9: Ein Spat im $\mathbb{R}^3$.

Für alle $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}}$, $\underline{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^3$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

i) $\underline{\mathbf{x}} \times \underline{\mathbf{y}} = -(\underline{\mathbf{y}} \times \underline{\mathbf{x}})$;

ii) $(\lambda\underline{\mathbf{x}}) \times \underline{\mathbf{y}} = \lambda(\underline{\mathbf{x}} \times \underline{\mathbf{y}})$;

iii) $\underline{\mathbf{x}} \times (\underline{\mathbf{y}} + \underline{\mathbf{z}}) = \underline{\mathbf{x}} \times \underline{\mathbf{y}} + \underline{\mathbf{x}} \times \underline{\mathbf{z}}$.

Vorsicht. *Das Vektorprodukt ist im Allgemeinen nicht assoziativ, d.h. im Allgemeinen gilt*

$$\underline{\mathbf{x}} \times (\underline{\mathbf{y}} \times \underline{\mathbf{z}}) \neq (\underline{\mathbf{x}} \times \underline{\mathbf{y}}) \times \underline{\mathbf{z}} ,$$

wie man am Entwicklungssatz erkennt (siehe Übungskapitel 10.5):

$$\underline{\mathbf{x}} \times (\underline{\mathbf{y}} \times \underline{\mathbf{z}}) = \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{z}} \rangle \underline{\mathbf{y}} - \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle \underline{\mathbf{z}} .$$

Zurück zu Ebenen im $\mathbb{R}^3$: Ebenen durch den Ursprung.

Es gibt zwei Herangehensweisen:

i) Analog zu einer Geraden, die durch den Ursprung verläuft, ist eine Parameterdarstellung einer Ebene E im $\mathbb{R}^3$, die durch den Ursprung verläuft, durch zwei linear unabhängige Richtungsvektoren $\underline{\mathbf{v}}$, $\underline{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^3$ bestimmt:

$$E = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ \underline{\mathbf{x}} = \alpha \underline{\mathbf{v}} + \beta \underline{\mathbf{w}}, \ \alpha, \ \beta \in \mathbb{R} \right\} .$$

Diese Darstellung als Unterraum wurde bereits in Kapitel 10.1 (siehe Definition 10.4 und Abbildung 10.5) diskutiert.

Die Richtungsvektoren, die eine gegebene Ebene aufspannen, sind eine Basis des Unterraums E und als solche natürlich nicht eindeutig bestimmt.

ii) Wie in Definition 10.7 und in Abbildung 10.7 deutlich wird, kann eine Ebene durch den Ursprung ebenso als eine Menge (in diesem Fall ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$) der Form

$$\{\underline{\mathbf{N}}\}^\perp , \qquad \underline{\mathbf{N}} \neq \underline{\mathbf{0}} ,$$

interpretiert werden, d.h. als der Raum aller Vektoren $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$, die senkrecht auf einem Normalenvektor $\underline{\mathbf{N}}$ stehen.

Auch $\underline{\mathbf{N}}$ ist nicht eindeutig bestimmt, da jedes Vielfache $\lambda \underline{\mathbf{N}}$, $\lambda \neq 0$, ebenso ein Normalenvektor an dieselbe Ebene ist .

Beide Interpretationen sind äquivalent:

Ergänzt man etwa $\underline{\mathbf{N}}$ zu einer Orthogonalbasis[4] des $\mathbb{R}^3$ so sind die weiteren Basisvektoren linear unabhängige Richtungsvektoren der Ebene.

Sind umgekehrt $\underline{\mathbf{v}}$ und $\underline{\mathbf{w}}$ linear unabhängige Richtungsvektoren einer Ebene, so ist ein Normalenvektor gefunden, indem man setzt

$$\underline{\mathbf{N}} := \underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{w}} .$$

Ebenen im $\mathbb{R}^3$: Der allgemeine Fall.

Hier sehen die Herangehensweisen wie folgt aus:

i) Eine Ebene, die nicht notwendig durch den Ursprung verläuft, ist etwa durch drei nicht kollineare Punkte (liegen nicht auf einer Geraden) $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{b}}$, $\underline{\mathbf{c}}$ auf der Ebene bestimmt.

Mit $\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{c}} - \underline{\mathbf{a}}$ (diese Vektoren sind linear unabhängig, da drei nicht kollineare Punkte gewählt sind) ist diese Ebene gegeben durch die Parameterdarstellung (vgl. Abbildung 10.10)

$$E = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{a}} + \alpha \underline{\mathbf{v}} + \beta \underline{\mathbf{w}}, \ \alpha, \ \beta \in \mathbb{R} \right\} .$$

Es handelt sich nicht mehr um einen zweidimensionalen Unterraum, sondern um einen zweidimensionalen affinen Raum (vgl. die Diskussion von Geraden im $\mathbb{R}^n$).

ii) Wieder ist mit $\underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{w}}$ ein Normalenvektor an die Ebene bestimmt, dessen Vorzeichen und Länge noch variiert werden können.

Zunächst wird die Länge auf 1 normiert, d.h. man setzt

[4] Wegen $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ muss zunächst ein von $\underline{\mathbf{N}}$ linear unabhängiger Vektor existieren, ebenso muss ein weiterer von diesen beiden linear unabhängiger Vektor existieren und mit dem Gram- Schmidtschen Verfahren für den Startvektor $\underline{\mathbf{N}}$ ist sogar eine entsprechende ONB gefunden.

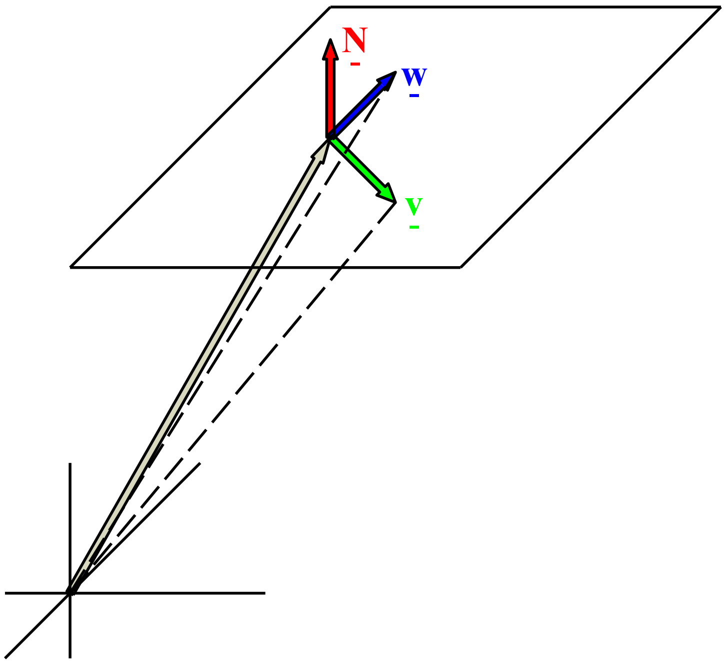


Abbildung 10.10: Eine Ebene durch drei Punkte.

$$\underline{\mathbf{N}} = \pm \frac{\underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{w}}}{\|\underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{w}}\|} \ , \qquad \text{sodass} \qquad \|\underline{\mathbf{N}}\| = 1 \ .$$

War die Ebene durch den Ursprung noch durch $\langle \underline{\mathbf{N}}, \underline{\mathbf{x}} \rangle = 0$ gekennzeichnet, so bewirkt die Verschiebung im allgemeinen Fall

$$E = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ \langle \underline{\mathbf{N}}, \underline{\mathbf{x}} \rangle - p = 0 \right\} \ .$$

Wird das Vorzeichen von N wird dabei so gewählt, dass $p \geq 0$, so spricht man von der Hesseschen Normalform der Ebene.

Bemerkung. *Der Abstand d eines beliebigen Punktes $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ zu einer Ebene errechnet sich aus der Hesseschen Normalform zu*

$$d = |\langle \underline{\mathbf{N}}, \underline{\mathbf{x}}^{(0)} \rangle - p| \ .$$

Beispiel. *Eine Ebene sei festgelegt durch die Punkte*

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Normal zu den Richtungsvektoren $\underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{c}} - \underline{\mathbf{a}}$ *und bereits auf die Länge* 1 *normiert findet man*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{N}} .$$

Wegen $\langle \underline{\mathbf{N}}, \underline{\mathbf{a}} \rangle = 1 = p$ *ist dabei auch schon das richtige Vorzeichen gewählt.*

Die Normalform ist gegeben durch die Gleichung

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \underline{\mathbf{x}} \right\rangle - 1 = 0 .$$

Bemerkungen.

i) *Schneiden sich zwei ungleiche Ebenen im* $\mathbb{R}^3$*, so erhält man eine Gerade im* $\mathbb{R}^3$*, die auch interpretiert werden kann als Lösung eines Gleichungssystems der Form*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 . \end{aligned}$$

ii) *Geraden im $\mathbb{R}^2$ können ebenso auf eine Hessesche Normalform gebracht werden, d.h. man findet $\underline{\mathbf{n}} \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\underline{\mathbf{n}}\| = 1$ und ein $p \geq 0$, sodass die Gerade definiert ist über*

$$\langle \underline{\mathbf{n}}, \underline{\mathbf{x}} \rangle - p = 0 \ .$$

10.3 Folgen im $\mathbb{R}^n$ (Übertragung des Konvergenzbegriffes)

In Definition 8.1 ist bereits der Begriff einer Folge $\{\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\}$ von Vektoren $\underline{\mathbf{x}}^{(k)}$ im $\mathbb{R}^n$ enthalten.

Man stelle sich beispielsweise die Folge $\{\underline{\mathbf{x}}(t_k)\}$ der Ortskoordinaten eines Massenpunktes im $\mathbb{R}^3$ zu einer Folge von Zeitpunkten $\{t_k\}$ vor.

Der Konvergenzbegriff für reelle Zahlenfolgen ist in den Abbildungen 8.2 und 8.3 veranschaulicht. Die natürliche Vorstellung im höherdimensionalen Fall ist in Abbildung 10.11 dargestellt.

Die „Annäherung“ an einen Grenzwert wird im Fall reeller Zahlen durch die Betragsfunktion $|\cdot|$ gemessen, wohingegen im $\mathbb{R}^n$ der Abstand durch die Euklidische Norm bestimmt wird, d.h.:

In der Definition 8.2 ist der Betrag durch die Euklidische Norm zu ersetzen.

Definition 10.9. $\boxed{\text{KONVERGENZ IM } \mathbb{R}^n}$

Für fixiertes $n \geq 1$ sei $\{\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$.

Die Folge heißt konvergent, wenn es ein $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ gibt, sodass gilt:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine (meist von ε abhängende) Zahl $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\|\underline{\mathbf{x}}^{(k)} - \underline{\mathbf{x}}\| < \varepsilon \quad \text{für alle } \ k \geq N(\varepsilon) \ .$$

Dann heißt $\underline{\mathbf{x}}$ der Grenzwert oder Limes der Folge und man schreibt

$$\lim_{k\to\infty} \underline{\mathbf{x}}^{(k)} = \underline{\mathbf{x}} \quad \textit{oder} \quad \underline{\mathbf{x}}^{(k)} \to \underline{\mathbf{x}} \ \textit{für} \ k \to \infty \ .$$

Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent.

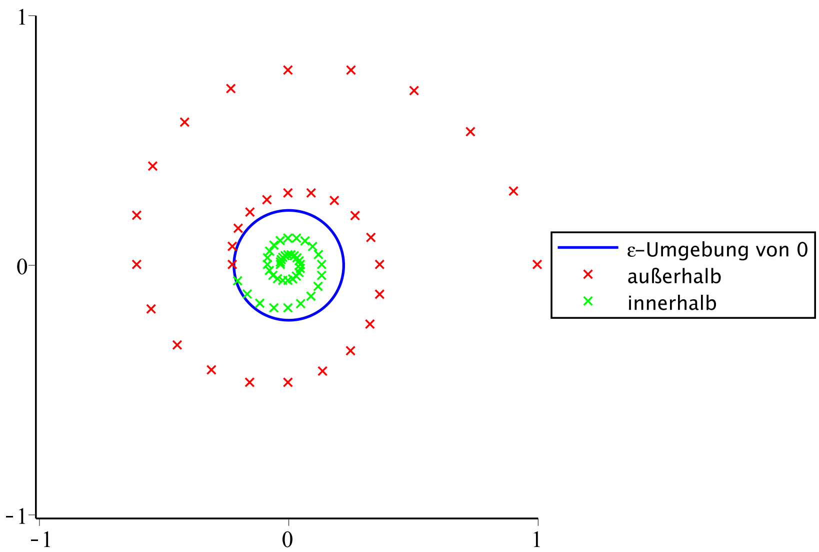


Abbildung 10.11: Zum Konvergenzbegriff im $\mathbb{R}^n$.

Beispiele ergeben sich unmittelbar aus dem folgenden Satz, der die Situation auf die Betrachtung reeller Zahlenfolgen zurückführt.

Satz 10.3. KOMPONENTENWEISE KONVERGENZ

Es seien $\underline{\mathbf{x}}^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$ *und* $\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Die Folge $\{\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\}$ *ist genau dann konvergent gegen* $\underline{\mathbf{x}}$*, falls*

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i \quad \textit{für jedes feste } i \ , \quad i = 1, \ \ldots, \ n \ .$$

Beweisidee. Im Übungskapitel 10.5 werden $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_2$ gegeneinander abgeschätzt. $\square$

Bemerkung. *Mit anderen Worten:* $\lim_{k\to\infty} \underline{\mathbf{x}}^{(k)} = \underline{\mathbf{x}}$ *genau dann, wenn komponentenweise Konvergenz (für alle Komponenten!) vorliegt.*

Demnach können Grenzwertbetrachtungen für Folgen $\{\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\}$ *im* $\mathbb{R}^n$ *komplett auf die Diskussion aus Paragraph 8.1 reduziert werden, indem jede Komponente einzeln diskutiert wird.*

Beispiele.

i) Es sei $n = 3$ und

$$\underline{\mathbf{x}}^{(k)} = \begin{pmatrix} \frac{2k^3+1}{k^3+2k-1} \\ \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \\ \frac{k!}{k^k} \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } \ k \in \mathbb{N}\ .$$

Die Folge $\{\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\}$ konvergiert gegen $\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ e \\ 0 \end{pmatrix}$.

ii) Ist für $n = 2$ und für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\underline{\mathbf{x}}^{(k)} = \begin{pmatrix} 1/k \\ k \end{pmatrix} ,$$

so divergiert die Folge $\{\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\}$.

10.4 Eigenschaften von Mengen im $\mathbb{R}^n$ (beschränkte, offene, abgeschlossene und kompakte Mengen im $\mathbb{R}^n$)

Analysiert man Funktionen einer Veränderlichen (z.B. der Zeit), so ist der Definitionsbereich meist ein beschränktes/offenes/abgeschlossenes

Intervall.

Im $\mathbb{R}^n$ ist die Situation nicht so einfach, weshalb nun besondere (topologische) Eigenschaften von Mengen im $\mathbb{R}^n$ vorgestellt werden.

Beschränkte Mengen.

Da im $\mathbb{R}^n$ keine Ordnungsrelation „$<$“ im Sinne der Axiomatik 5.1 existiert, ergeben die Begriffe „nach oben beschränkt“ und „nach unten beschränkt“ aus Definition 5.1 keinen Sinn.

Die Beschränktheit einer Menge im $\mathbb{R}^n$ kann aber mit Hilfe der Euklidischen Norm definiert werden.

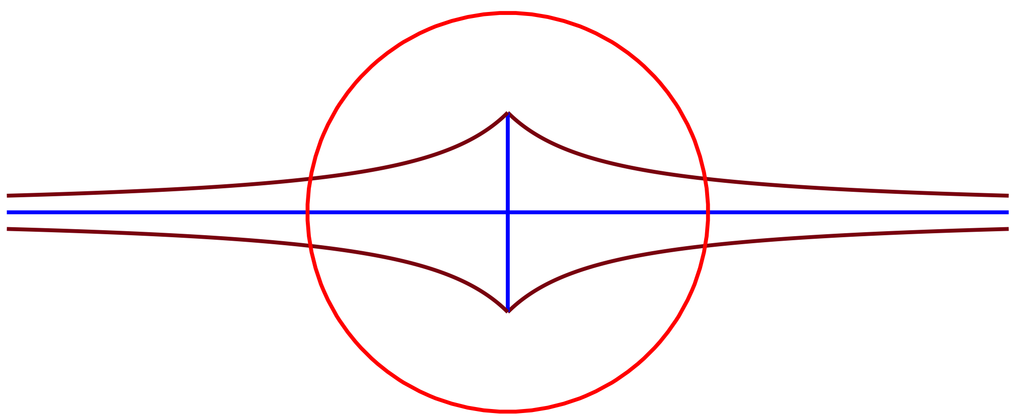


Abbildung 10.12: Diese Menge kann in keiner Kreisscheibe eingesperrt werden.

Die Vorstellung dabei ist, wie in den Abbildungen 10.12 und 10.13 illustriert, dass eine beschränkte Menge in einer Kreisscheibe (im $\mathbb{R}^2$) oder einer Kugel (im $\mathbb{R}^n$) enthalten ist (zur Erinnerung: Eine beschränkte Menge reeller Zahlen ist per definitionem in einem Intervall $[-k, k]$ enthalten).

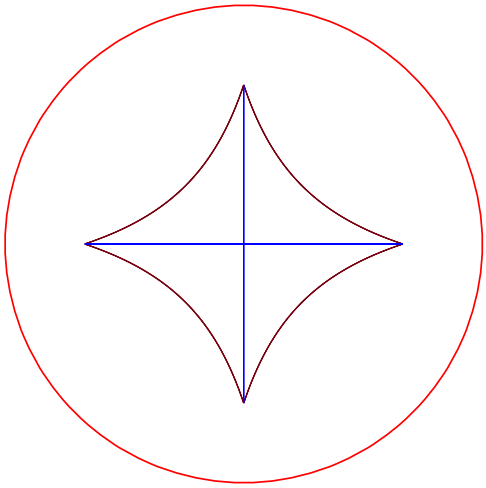


Abbildung 10.13: Diese Menge ist in einer Kreisscheibe eingesperrt.

Definition 10.10. BESCHRÄNKTE MENGEN IM $\mathbb{R}^n$

Eine Menge U von Elementen des $\mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$, heißt beschränkt, wenn es eine reelle Zahl $M \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\|\underline{\mathbf{x}}\| \leq M \quad \textit{für alle} \ \underline{\mathbf{x}} \in U \ .$$

Beispiele. *Die Menge*

$$U_: = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} \leq 1 \right\}$$

ist beschränkt, nicht beschränkt ist hingegen die Menge

$$U_2 := \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 \geq x_2 \right\} .$$

Offene und abgeschlossene Mengen.

Unter einer ε-Umgebung, $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$, von $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ versteht man die Menge

$$B_\varepsilon\big(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}\big) := \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \ \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}^{(0)}\| < \varepsilon \right\} .$$

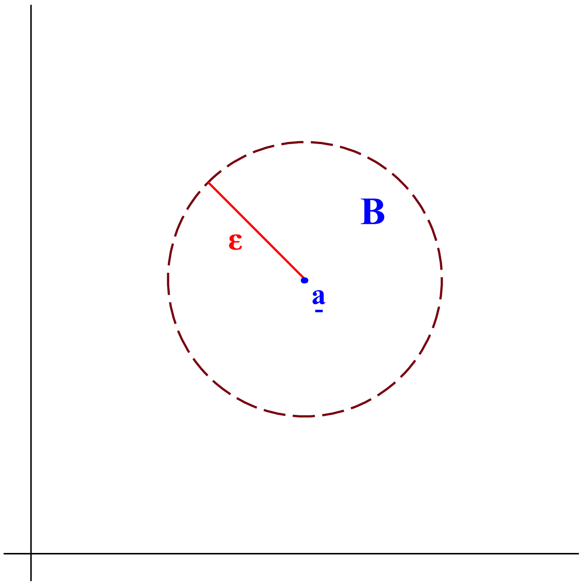


Abbildung 10.14: ε-Umgebung $B = B_\varepsilon(\underline{\mathbf{a}})$ von $\underline{\mathbf{a}}$.

In den reellen Zahlen $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ handelt es sich um das Intervall $(x^{(0)} - \varepsilon, x^{(0)} + \varepsilon)$, im $\mathbb{R}^2$ spricht man von einer (offenen) Kreisscheibe vom Radius ε und im $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, von einer (offenen) Kugel vom Radius ε um den Punkt $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$ (vgl. Abbildung 10.14).

In Verallgemeinerung des Spezialfalls $n = 1$ werden nun mithilfe des Umgebungsbegriffes zwei Arten von Mengen charakterisiert.

Definition 10.11. OFFENE UND ABGESCHLOSSENE MENGEN

i) Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls mit jedem $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in U$ auch eine ε-Umgebung von $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$ ganz in U liegt.

ii) Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt abgeschlossen, falls $\mathbb{R}^n - U$ offen ist.

Beispiel. *Zu fixiertem $r > 0$ und $\underline{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^n$ betrachte man die Kugel $B_r(\underline{\mathbf{a}})$ vom Radius r um den Punkt $\underline{\mathbf{a}}$ (oben als r-Umgebung von $\underline{\mathbf{a}}$ bezeichnet).*

Ist $\underline{\mathbf{b}} \in B_r(\underline{\mathbf{a}})$ *ein beliebiger Punkt in der Kugel, so gilt*

$$\|\underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{a}}\| < r \;, \qquad d.h. \qquad \|\underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{a}}\| = r - \gamma$$

mit einer reellen Zahl $0 < \gamma < r$*.*

Nach der Dreiecksungleichung gilt für alle $\underline{\mathbf{x}} \in B_{\gamma/2}(\underline{\mathbf{b}})$*:*

$$\|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{a}}\| \leq \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{b}}\| + \|\underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{a}}\| < \frac{\gamma}{2} + r - \gamma < r$$

und folglich

$$B_{\gamma/2}(\underline{\mathbf{b}}) \subset B_r(\underline{\mathbf{a}}) \; .$$

Demnach ist mit $B_{\gamma/2}(\underline{\mathbf{b}})$ *eine Umgebung gefunden, die ganz in* $B_r(\underline{\mathbf{a}})$ *liegt,* $B_r(\underline{\mathbf{a}})$ *ist eine offene Menge.*

Weitere Beispiele werden im Übungskapitel 10.5 besprochen (vgl. auch die Abbildungen 10.15 , 10.16 und 10.17).

Charakterisierung von Punkten.

Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ gegeben, so können alle Punkte des $\mathbb{R}^n$ bzgl. U im folgenden Sinne charakterisiert werden:

Entweder ist $\underline{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^n$ ein innerer Punkt von U, d.h.

es gibt eine ε-Umgebung $B_\varepsilon(\underline{\mathbf{a}}) \subset U$,

oder $\underline{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^n$ ist ein äußerer Punkt von U, d.h.

es gibt eine ε-Umgebung $B_\varepsilon(\underline{\mathbf{a}}) \subset \mathbb{R}^n - U$,

oder $\underline{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^n$ ist ein Randpunkt von U, d.h.

$\underline{\mathbf{a}}$ ist weder ein innerer noch ein äußerer Punkt.

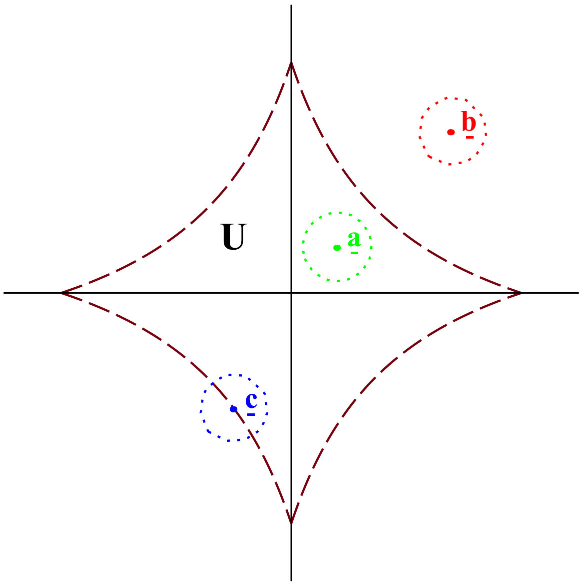


Abbildung 10.15: Die skizzierte Menge U (die gestrichelte Linie gehört nicht zur Menge) ist offen, **a** ist ein innerer Punkt, **b** ist ein äußerer Punkt und **c** ist ein Randpunkt der Menge U.

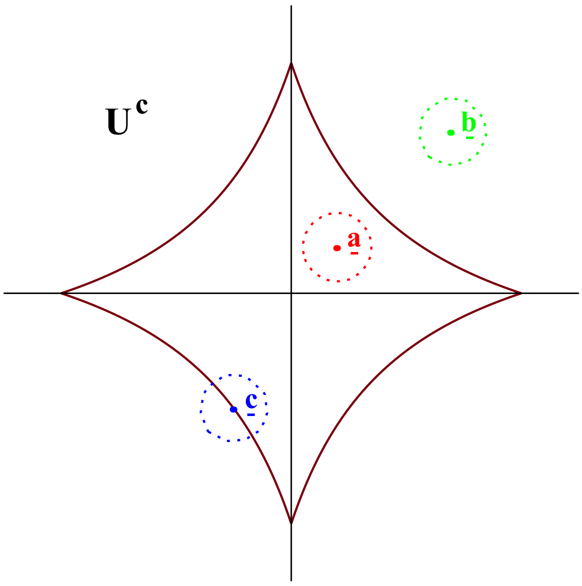


Abbildung 10.16: Die skizzierte Menge $U^c := \mathbb{R}^n - U$ (die gestrichelte Linie gehört zur Menge, vgl. Abbildung 10.15) ist abgeschlossen, **a** ist ein äußerer Punkt, **b** ist ein innerer Punkt und **c** ist ein Randpunkt der Menge U^c.

Die geometrische Vorstellung hierzu ist in den Abbildungen 10.15 und 10.16 angedeutet.

Man setzt

$$
\begin{aligned}
U^0 &:= \big\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \ \underline{\mathbf{x}} \text{ ist innerer Punkt von } U\big\} && (\text{Inneres von } U)\,, \\
U^{ext} &:= \big\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \ \underline{\mathbf{x}} \text{ ist äußerer Punkt von } U\big\} && (\text{Äußeres von } U)\,, \\
\partial U &:= \big\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \ \underline{\mathbf{x}} \text{ ist Randpunkt von } U\big\} && (\text{Rand von } U)\,, \\
\overline{U} &:= M \cup \partial M && (\text{Abschluss von } U)\,.
\end{aligned}
$$

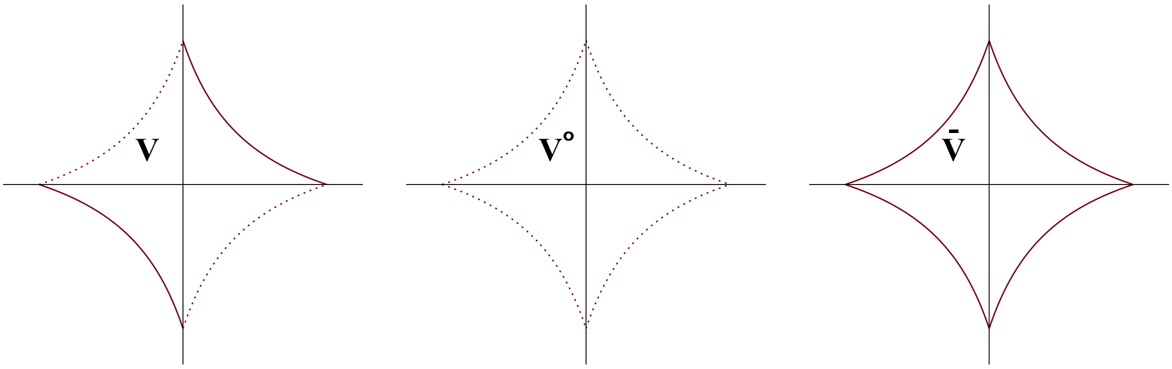


Abbildung 10.17: Gehören in der Skizze gestrichelte Linien nicht zur Menge, durchgezogene zur Menge, so ist V weder offen noch abgeschlossen, V° ist das Innere der Menge V und $\overline{V}$ ist der Abschluss der Menge V.

Was geschieht bei Vereinigungen bzw. beim Durchschnitt?

Beispiel.

i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei

$$U_n := \{x \in \mathbb{R} : \ 1/n < x < 1\}\,.$$

Die Mengen U_n sind offen und es ist

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = (0,1)\ .$$

Die abzählbare (unendliche) Vereinigung[5] der offenen Mengen U_n ist wieder offen.

ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei nun

$$U_n := \{x \in \mathbb{R} :\ -1/n < x < 1/n\}\ .$$

Auch hier sind die Mengen U_n offen und man beobachtet für festes $1 < N \in \mathbb{N}$

$$\bigcap_{n=1}^{N} U_n = (-1/N, 1/N)\ .$$

Der endliche Durchschnitt der offenen Mengen ist offen, der abzählbar (unendliche) Durchschnitt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$$

der offenen Mengen U_n ist jedoch nicht offen.

iii) Bei abgeschlossenen Mengen ist die Situation genau umgekehrt.

Wie in den Beispielen motiviert, kann bewiesen werden:

[5] $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n :\Leftrightarrow x \in U_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$; analog: $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n :\Leftrightarrow x \in U_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Satz 10.4. VEREINIGUNG UND DURCHSCHNITT

i) *Die Vereinigung eines beliebigen Systems offener Mengen ist offen.*

ii) *Der Durchschnitt eines endlichen Systems offener Mengen ist offen.*

iii) *Der Durchschnitt eines beliebigen Systems abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

iv) *Die Vereinigung eines endlichen Systems abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

Häufungspunkte und Kompaktheit.

Ähnlich wie für Folgen (vgl. Definition 8.4) sind auch Häufungspunkte für Mengen definiert.[6]

Dabei muss ein Häufungspunkt nicht notwendigerweise zur Menge gehören, die Menge kommt ihm nur beliebig nahe.

Beispielsweise sind die Randpunkte einer ε-Umgebung Häufungspunkte – ebenso wie die inneren Punkte.

Definition 10.12. HÄUFUNGSPUNKT

Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ und $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, so heißt $\underline{\mathbf{x}}$ Häufungspunkt der Menge U, falls in jeder Umgebung von $\underline{\mathbf{x}}$ ein Punkt von U liegt, der von $\underline{\mathbf{x}}$ verschieden ist.

Eng verbunden mit dem Begriff Häufungspunkt ist der Begriff Kompaktheit als zentraler Baustein der Analysis.

[6] Man beachte aber: Eine konstante Folge hat den konstanten Wert als Häufungspunkt, was nicht einem Häufungspunkt im Sinne von Definition 10.12 entspricht.

Definition 10.13. KOMPAKTHEIT

Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt kompakt, falls sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Aus der Definition der Kompaktheit wird die Verbindung mit Häufungspunkten noch nicht deutlich.

Es gilt jedoch folgender fundamentale Satz, der in dieser Form nur für endlichdimensionale Vektorräume richtig ist.

Satz 10.5. FOLGENKOMPAKTHEIT

Es sei U eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent:

i) *U ist kompakt.*

ii) *Jede unendliche Teilmenge von U hat einen Häufungspunkt, der in U liegt.*

iii) *Aus jeder Folge mit Werten in U kann eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in U ausgewählt werden (Folgenkompaktheit).*

Bemerkung. *Ebenfalls äquivalent zur Kompaktheit ist:*

Aus jeder sogenannten Überdeckung von U mit offenen Mengen lassen sich endlich viele dieser Mengen auswählen, sodass U von ihnen überdeckt wird (U hat die Heine-Borel-Eigenschaft)

10.5 Übungsaufgaben zu Kapitel 10

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Menge der Polynome vom Grad $\leq n$,

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) := \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k : \ a_k \in \mathbb{R} \ \text{für alle} \ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n \right\},$$

mit der Addition $(p+q)(x) := p(x) + q(x)$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 2.

i) * Welche Forderungen aus Definition 10.1 müssen verifiziert werden, um zu zeigen, dass eine Teilmenge U eines Vektorraums V ein Unterraum von V ist?

ii) Prüfen Sie, ob es sich um Vektorräume handelt:

(a) $U_1 := \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 \geq 0 \right\}$;

(b) $U_2 := \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ x_1^2 + x_2^2 < x_3^2 \right\}$;

(c) $U_3 := \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$;

(d) $U_4 := \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 - x_2 = 1 \right\}$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für beliebiges $M \subset \mathbb{R}^n$ die Menge $M^\perp$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 4.* Vervollständigen Sie Tabelle 10.1.

Vektorraum?	richtig	falsch
$\left\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 :\ \underline{\mathbf{x}} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}\right\}$		
$\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 = 0 \text{ und } x_2 = x_3\}$		
$\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 + x_2 + x_3 \le 0\}$		
$\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 + x_2 + x_3^2 = 0\}^\perp$		
$\left\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 :\ \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 1\right\}$		
$\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 :\ \|\underline{\mathbf{x}}\| = 0\}$		

Tabelle 10.1: Zu Aufgabe 4.

Aufgabe 5.

i) Sind die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig:

(a) $\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};$

(b) $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$?

Kann man den Vektor $\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$ der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$ als Linearkombination von $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ schreiben?

ii) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden.

Finden Sie dann zu einem beliebigen (fixierten) Vektor

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

die eindeutig bestimmten Koeffizienten λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\underline{\mathbf{x}} = \lambda_1 \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\mathbf{v}}^{(2)} \ .$$

iii) Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ und $a \neq 1$ fixiert. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Finden Sie dann zu einem beliebigen

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

die eindeutig bestimmten Koeffizienten λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\underline{\mathbf{x}} = \lambda_1 \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\mathbf{v}}^{(2)} + \lambda_3 \underline{\mathbf{v}}^{(3)} \ .$$

Aufgabe 6.

i) Es seien $\underline{\mathbf{w}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{w}}^{(2)} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{\mathbf{w}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{w}}^{(2)} \neq \underline{\mathbf{0}}$.

Zeigen Sie: $\underline{\mathbf{w}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{w}}^{(2)}$ sind genau dann linear unabhängig, wenn

$$\underline{\mathbf{w}}^{(2)} = \lambda \underline{\mathbf{w}}^{(1)} \quad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R} .$$

ii) Es seien $\underline{\mathbf{u}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{u}}^{(2)}$, $\dots$,$\underline{\mathbf{u}}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, $3 \leq k \leq n$, $\underline{\mathbf{u}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{u}}^{(2)}$, $\dots$, $\underline{\mathbf{u}}^{(k)} \neq \underline{\mathbf{0}}$.

(a) Sind $\underline{\mathbf{u}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{u}}^{(2)}$, $\dots$, $\underline{\mathbf{u}}^{(k)}$ linear unabhängig, falls sich $\underline{\mathbf{u}}^{(k)}$ nicht als Linearkombination von $\underline{\mathbf{u}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{u}}^{(2)}$, $\dots$, $\underline{\mathbf{u}}^{(k-1)}$ darstellen lässt?

(b) Zeigen Sie: Sind $\underline{\mathbf{u}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{u}}^{(2)}$, $\dots$, $\underline{\mathbf{u}}^{(k)}$ linear abhängig, so existieren mindestens zwei $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, sodass sich der Vektor $\underline{\mathbf{u}}^{(i)}$ als Linearkombination der anderen Vektoren darstellen lässt.

Aufgabe 7.* Es sei $\mathcal{V} = \big(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \dots \underline{\mathbf{v}}^{(n)}\big)$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

i) Zeigen Sie: Zu jedem $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ gibt es Koordinaten α_1, $\dots$, $\alpha_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\underline{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{\mathbf{v}}^{(i)} .$$

ii) Zeigen Sie, dass die Koordinaten aus *i)* eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 8.

i) Zeigen Sie: Sind $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, linear abhängig und nimmt man einen weiteren Vektor hinzu, so ist das erweiterte System linear abhängig.

ii) Zeigen Sie: Sind $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $2 \le k \in \mathbb{N}$, linear unabhängig und nimmt man einen Vektor aus dieser Familie heraus, so sind die verbleibenden Vektoren linear unabhängig.

iii) Zeigen Sie in einem Vektorraum V: Der Nullvektor $\underline{\mathbf{0}}$ ist linear abhängig und ist $\underline{\mathbf{v}} \neq \underline{\mathbf{0}}$, so ist $\underline{\mathbf{v}}$ linear unabhängig.

Aufgabe 9. Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ beträgt der Winkel zwischen den folgenden Vektoren genau 90°?

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 10.*

i) Zeigen Sie, dass jeweils eine Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ definiert ist:

$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} , \quad \underline{\mathbf{x}} \mapsto \sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} , \quad \underline{\mathbf{x}} \mapsto \max\big\{|x_1|, \ldots, |x_n|\big\} .$$

ii) Finden Sie Konstanten c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$c_1 \|\underline{\mathbf{x}}\|_\infty \leq \|\underline{\mathbf{x}}\|_2 \leq c_2 \|\underline{\mathbf{x}}\|_\infty \quad \text{für alle } \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \, .$$

iii) Skizzieren Sie für die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^2$ jeweils die Menge

$$\left\{ \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^2 : \ \|\underline{\mathbf{v}}\| = 1 \right\} .$$

Aufgabe 11. Im $\mathbb{R}^3$ seien

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Weiterhin seinen U_1, U_2 die Mengen $U_1 = \{\underline{\mathbf{v}}^{(1)}\}$, $U_2 = \{\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}\}$.

Bestimmen Sie $U_1^\perp$, $U_2^\perp$, und fertigen Sie eine Skizze an.

Aufgabe 12.* Es sei

$$M = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ \underline{\mathbf{x}} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \ 1 \leq \lambda \leq 2 \right\} .$$

i) Ist M ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$?

ii) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $M^\perp$.

iii) Bestimmen Sie $(M^\perp)^\perp$.

iv) Bestimmen Sie $\big((M^\perp)^\perp\big)^\perp$.

Aufgabe 13. Ergänzen Sie die Vektoren

$$\underline{\mathbf{f}}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{f}}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{f}}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$ und bestimmen Sie das orthogonale Komplement von $\{\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)}, \underline{\mathbf{f}}^{(3)}\}$.

Aufgabe 14.

i) Welche Dimension hat der von

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(4)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Teilraum

$$U = \text{Spann}\left(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)}, \underline{\mathbf{v}}^{(4)}\right) \subset \mathbb{R}^4\ ?$$

Geben Sie zwei unterschiedliche Basen von U an.

ii) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

iii) Ergänzen Sie die Orthonormalbasis von U aus *ii*) zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$ und geben Sie $U^\perp$ an.

Aufgabe 15.* Betrachten Sie im $\mathbb{R}^4$ den Vektor

$$\underline{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie den Unterraum $V = \big\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^4 : \ \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{N}} \rangle = 0 \big\}$ des $\mathbb{R}^4$.

i) Bestimmen Sie die Dimension von V und geben Sie eine Orthonormalbasis von V an.

ii) Bestimmen Sie $V^\perp$.

Aufgabe 16.

i) Zeigen Sie (durch elementare Rechnung) den Entwicklungssatz

$$\underline{\mathbf{x}} \times (\underline{\mathbf{y}} \times \underline{\mathbf{z}}) = \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{z}} \rangle \underline{\mathbf{y}} - \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \rangle \underline{\mathbf{z}} \ .$$

ii) Im $\mathbb{R}^3$ seien $\underline{\mathbf{a}} \neq \underline{\mathbf{0}}$, $\underline{\mathbf{c}} \neq \underline{\mathbf{0}}$ und die Vektoren $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{c}}$ seien linear unabhängig.

Für welche Vektoren $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\underline{\mathbf{a}} \times (\underline{\mathbf{b}} \times \underline{\mathbf{c}}) = (\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}) \times \underline{\mathbf{c}}\ ?$$

Aufgabe 17. Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und der Punkt} \qquad \underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Weiter sei E die Ebene, die von $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ aufgespannt wird und den Punkt $\underline{\mathbf{a}}$ enthält.

Geben Sie eine Parameterdarstellung und die Hessesche Normalform von E an.

Aufgabe 18.

i) Gegeben seien die Punkte

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der durch $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{b}}$, $\underline{\mathbf{c}}$ verlaufenden Ebene. Fertigen Sie eine Skizze an.

ii) Im $\mathbb{R}^2$ sei eine Gerade in Hessescher Normalform gegeben durch

$$\langle \underline{\mathbf{n}}, \underline{\mathbf{x}} \rangle - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \, , \qquad \underline{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \, .$$

Stellen Sie die Gerade in der Form $x_2 = f(x_1) = ax_1 + b$ dar und skizzieren Sie die Gerade inkl. der Normalen.

Aufgabe 19.* Gegeben seien im $\mathbb{R}^3$ die Gerade

$$g = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \quad x_2 = 1 - x_1 \, , \quad x_3 = 0 \right\} \quad \text{und der Punkt} \quad \underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \, .$$

Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E im $\mathbb{R}^3$, die $\underline{\mathbf{a}}$ und die Gerade g enthält.

Aufgabe 20.* Betrachten Sie die Teilmengen des $\mathbb{R}^2$:

$$A := \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \, 1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 3 \} \, , \qquad B := \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \, x_1 > 0 \} \, .$$

Skizzieren Sie die Mengen A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $B - A$ und kreuzen Sie in der folgenden Tabelle 10.2 die richtigen Möglichleiten an.

Bemerkung. Der Eintrag „nichts“ bedeutet, dass die Menge weder beschränkt noch offen noch abgeschlossen noch kompakt ist; es können durchaus verschiedene Eigenschaften gleichzeitig zutreffen.

---

	beschänkt	offen	abgeschlossen	kompakt	„nichts“
A					
B					
$A \cap B$					
$A \cup B$					
$A - B$					
$B - A$					

Tabelle 10.2: Zu Aufgabe 20.

Aufgabe 21. Zeigen Sie:

i) Die leere Menge und der $\mathbb{R}^n$ selbst sind die einzigen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die zugleich offen und abgeschlossen sind.

ii) Das Innere einer Menge ist offen, der Abschluss einer Menge ist abgeschlossen.

Aufgabe 22. Zeigen Sie für die Vereinigung bzw. den Durchschnitt:

i) Die Vereinigung $U \cup V$ zweier beschränkter Mengen U, V im $\mathbb{R}^n$ ist beschränkt.

ii) Die Durchschnitt $U \cap V$ zweier offener Mengen U, V im $\mathbb{R}^n$ ist offen.

iii) Die Vereinigung $U \cup V$ zweier abgeschlossener Mengen U, V im $\mathbb{R}^n$ ist abgeschlossen.

Aufgabe 23. Betrachten Sie die Menge

$$M = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

i) Zeigen Sie: M ist nicht offen.

ii) Ist $\mathbb{R}^2 - M$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^2$?

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben.

Aufgabe 2. Man verifiziert lediglich für alle $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}} \in U$ und für alle $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\lambda\underline{\mathbf{x}} \in U \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}} \in U \ ,$$

d.h. die Abgeschlossenheit von U bzgl. der Addition und bzgl. der Multiplikation mit Skalaren.

Insbesondere gehören das neutrale Element und zu jedem $\underline{\mathbf{x}} \in U$ das Inverse ebenfalls zu U,

$$\underline{\mathbf{0}} = 0\underline{\mathbf{x}} \in U \quad \text{und} \quad -\underline{\mathbf{x}} = (-1)\underline{\mathbf{x}} \in U \ .$$

Die weiteren Gruppeneigenschaften sowie das Assoziativ- und die Distributivgesetze aus Definition 10.1, *ii*), übertragen sich aus denen für V.

Aufgabe 4. *i*). Tabelle 10.3 enthält die richtigen Antworten.

Vektorraum?	richtig	falsch
$\left\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ \underline{\mathbf{x}} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \lambda, \ \mu \in \mathbb{R}\right\}$	$\otimes$	
$\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 = 0 \ \text{und} \ x_2 = x_3\}$	$\otimes$	
$\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 + x_3 \le 0\}$		$\otimes$
$\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 + x_3^2 = 0\}^\perp$	$\otimes$	
$\left\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 1\right\}$		$\otimes$
$\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ \|\underline{\mathbf{x}}\| = 0\}$	$\otimes$	

Tabelle 10.3: Zu Aufgabe 4.

Aufgabe 7.

i) Da $\mathcal{V}$ nach Voraussetzung eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist und da $\dim \mathbb{R}^n = n$, existert im $\mathbb{R}^n$ kein weiterer von $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \ldots, \underline{\mathbf{v}}^{(n)}$ linear unabhängiger Vektor.

Also gibt es zu jedem $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, nicht alle gleich Null, mit

$$\lambda_1 \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\mathbf{v}}^{(3)} + \ldots \lambda_n \underline{\mathbf{v}}^{(n)} + \lambda \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}} \; .$$

Wäre $\lambda = 0$, so wären wegen der linearen Unabhängigkeit der $\underline{\mathbf{v}}^{(i)}$ alle λ_i, $i = 1, \ldots, n$, ebenfalls Null, was einen Widerspruch ergäbe.

Also folgt

$$\underline{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{\mathbf{v}}^{(i)} \quad \text{mit } \alpha_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda} \; .$$

ii) Aus den beiden Darstellungen

$$\underline{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{\mathbf{v}}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \underline{\mathbf{v}}^{(i)}$$

folgt unmittelbar

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \underline{\mathbf{v}}^{(i)} = \underline{\mathbf{0}} \; .$$

Die lineare Unabhängigkeit der $\underline{\mathbf{v}}^{(i)}$ impliziert somit für alle $i = 1, \ldots, n$: $\alpha_i = \beta_i$.

Aufgabe 10.

i) Zur Norm $\|\cdot\|_1$:

(a) Aus $|x| \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ folgt für alle $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \|\underline{\mathbf{x}}\|_1 &= \sum_{j=1}^{n} |x_j| \geq 0 \, ; \\ \|\underline{\mathbf{x}}\|_1 = 0 &\Leftrightarrow |x_j| = 0 \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, n \\ &\Leftrightarrow x_j = 0 \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, n \\ &\Leftrightarrow \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}} \, . \end{aligned}$$

(b) Ist $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\begin{aligned} \|\lambda \underline{\mathbf{x}}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |\lambda x_j| &= \sum_{j=1}^{n} |\lambda||x_j| = |\lambda| \sum_{j=1}^{n} |x_j| \\ &= |\lambda| \|\underline{\mathbf{x}}\|_1 \, . \end{aligned}$$

(c) Sind $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$, so folgt aus der Dreiecksungleichung in $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \|\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}\|_1 &= \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^{n} \big(|x_j| + |y_j|\big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} |x_j| + \sum_{j=1}^{n} |y_j| = \|\underline{\mathbf{x}}\|_1 + \|\underline{\mathbf{y}}\|_1 \, . \end{aligned}$$

Also ist $\|\cdot\|_1 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Norm. $\square$

Zur Norm $\|\cdot\|_\infty$:

(a) Für alle $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} \|\underline{\mathbf{x}}\|_\infty &= \max\left\{|x_1|,\ \ldots,\ |x_n|\right\} \geq 0\,; \\ \|\underline{\mathbf{x}}\|_\infty = 0 &\Leftrightarrow \max\left\{|x_1|,\ \ldots,\ |x_n|\right\} = 0 \\ &\Leftrightarrow |x_j| = 0 \quad \text{für alle } \ j = 1,\ \ldots,\ n \\ &\Leftrightarrow x_j = 0 \quad \text{für alle } \ j = 1,\ \ldots,\ n \\ &\Leftrightarrow \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}\,. \end{aligned}$$

(b) Sind $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\begin{aligned} \|\lambda\underline{\mathbf{x}}\|_\infty &= \max\left\{|\lambda x_1|,\ \ldots,\ |\lambda x_n|\right\} = \max\left\{|\lambda||x_1|,\ \ldots,\ |\lambda||x_n|\right\} \\ &= |\lambda| \max\left\{|x_1|,\ \ldots,\ |x_n|\right\} = |\lambda|\|\underline{\mathbf{x}}\|_\infty\,. \end{aligned}$$

(c) Sind $\underline{\mathbf{x}}$, $\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$, so folgt aus

$$|x_j+y_j| \leq |x_j|+|y_j| \leq \max\left\{|x_1|,\ \ldots,\ |x_n|\right\}+\max\left\{|y_1|,\ \ldots,\ |y_n|\right\}$$

durch Übergang zum Maximum über alle $j = 1,\ \ldots,\ n$ auf der linken Seite

$$\begin{aligned} \|\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{y}}\|_\infty &= \max\left\{|x_1 + y_1|, \ldots, |x_n + y_n|\right\} \\ &\leq \max\left\{|x_1|,\ \ldots,\ |x_n|\right\} + \max\left\{|y_1|,\ \ldots,\ |y_n|\right\}\,. \end{aligned}$$

Also ist $\|\cdot\|_\infty \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Norm. $\square$

ii) Für $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned}
\|\underline{\mathbf{x}}\|_2 &= \left[\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{j=1}^{n} \Big(\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}\Big)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \Big[n\|\underline{\mathbf{x}}\|_\infty^2\Big]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}\|\underline{\mathbf{x}}\|_\infty \ ,
\end{aligned}$$

$$\|\underline{\mathbf{x}}\|_\infty^2 = \Big(\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}\Big)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \ ,$$

sodass

$$c_1\|\underline{\mathbf{x}}\|_\infty \leq \|\underline{\mathbf{x}}\|_2 \leq c_2\|\underline{\mathbf{x}}\|_\infty$$

mit $c_1 = 1$ und $c_2 = \sqrt{n}$.

iii) Die Mengen sind in Abbildung 10.18 dargestellt.

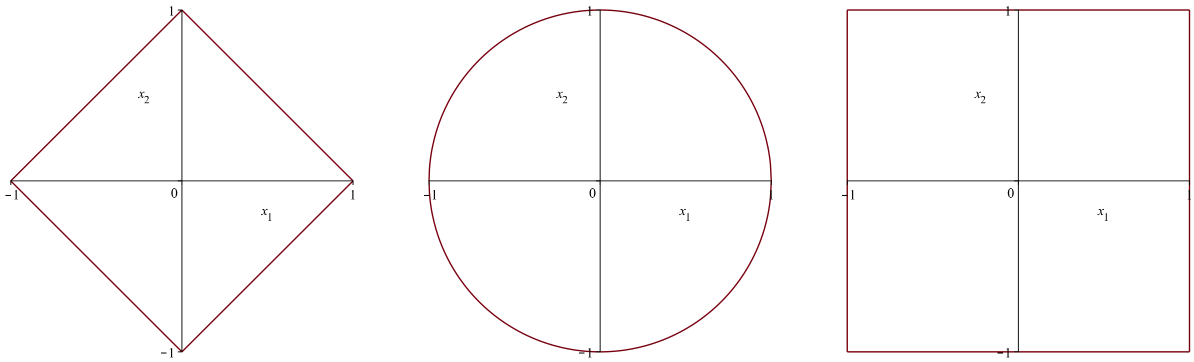


Abbildung 10.18: $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ und $\| \cdot \|_\infty$.

Aufgabe 12.

i) M ist kein Unterraum des $\mathbb{R}^3$.

ii) Man erkennt unmittelbar

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in M^\perp \,, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in M^\perp \,.$$

Als Orthonormalbasis von $M^\perp$ erhält man nach dem Verfahren von Gram-Schmidt beipielsweise

$$\underline{\mathbf{f}}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \,, \qquad \underline{\mathbf{f}}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \,.$$

iii) Nach Konstruktion gilt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \underline{\mathbf{f}}^{(1)} \,, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \underline{\mathbf{f}}^{(2)} \,.$$

Somit ist

$$(M^\perp)^\perp = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \; t \in \mathbb{R} \right\} .$$

iv) Es gilt $\big((M^\perp)^\perp\big)^\perp = M^\perp$.

Aufgabe 15.

i) Der Vektor $\underline{\mathbf{N}}$ selbst liegt offensichtlich nicht in V, d.h. $\dim V \le 3$.

Die Vektoren

$$\underline{\mathbf{g}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{g}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{g}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

liegen hingegen in V und sind linear unabhängig. Demnach ist die Dimension genau 3.

Das Gram- Schmidtsche Verfahren liefert die Orthonormalbasis

$$\underline{\mathbf{f}}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{f}}^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{f}}^{(3)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

ii) $V^{\perp}$ ist ein Unterraum der Dimension 1 und es gilt $\underline{\mathbf{N}} \in V^{\perp}$, d.h.

$$V^{\perp} = \left\{ t\underline{\mathbf{N}} : t \in \mathbb{R} \right\} .$$

Aufgabe 19. Außer $\underline{\mathbf{a}}$ enthält die Ebene z.B. noch die Punkte

$$\underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Zwei Richtungsvektoren sind

$$\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und man berechnet

$$\underline{\mathbf{v}} \times \underline{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{a}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} = p > 0 \, .$$

Die Hessesche Normalform lautet (Probe)

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{x}} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0 \, .$$

Aufgabe 20. Die richtigen Antworten sind in Tabelle 10.4 angekreuzt.

	beschänkt	offen	abgeschlossen	kompakt	„nichts”
A	$\otimes$		$\otimes$	$\otimes$	
B		$\otimes$			
$A \cap B$	$\otimes$				
$A \cup B$					$\otimes$
$A - B$	$\otimes$		$\otimes$	$\otimes$	
$B - A$		$\otimes$			

Tabelle 10.4: Zu Aufgabe 20.

Kapitel 11

Komplexe Zahlen

11.1 Einführung der komplexen Zahlen (der Körper der komplexen Zahlen; erste Eigenschaften)

In welchem Sinne ist die Gleichung $x^2 = -1$ lösbar?

Das Studium von Gleichungen 2^{ten} und 3^{ten} Grades führt im 16^{ten} Jahrhundert zur Einführung der komplexen Zahlen und geht u.a. auf Cardono und Bombelli zurück.

Euler etabliert schließlich 1777 die imaginäre Einheit mit dem Symbol i, d.h. es gilt (in gewissem Sinne)

$$i^2 = -1 \ .$$

Eine Standardanwendung in der Elektrotechnik ist beispielsweise ein komplexer Ansatz zur Beschreibung eines Wechselstromkreises (Frequenz ω) mit Spule (Induktivität L) und Ohmschen Widerstand R in Reihenschaltung, der den komplexen Wechselstromwiderstand (die Impedanz) liefert:

$$R^* = R + i\omega L \ .$$

Da die Gleichung $x^2 = -1$ auf der „eindimensionalen Zahlengeraden“ nicht lösbar ist, liegt es nahe, als Erweiterung eine Zahlenebene zu betrachten, die die reellen Zahlen als eine Koordinatenachse enthält.

In dieser Zahlenebene muss insbesondere eine neue Multiplikation eingeführt werden, wobei auf der reellen Achse die bekannten Rechenregeln ihre Gültigkeit behalten sollen.

Eine vorläufige Definition.

Ein Paar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ schreibe man als

$$x + iy \,, \qquad x,\ y \in \mathbb{R} \,.$$

Hier bezeichne i eine Lösung der Gleichung

$$i^2 = -1 \,.$$

Die geometrische Deutung in der sogenannten Gaußschen Zahlenebene folgt in Kürze.

Es heißt x der Realteil und y der Imaginärteil der komplexen Zahl

$$z = x + iy \,, \qquad x =: \mathrm{Re}\, z \,, \qquad y =: \mathrm{Im}\, z \,.$$

Der Realteil und der Imaginärteil einer komplexen Zahl sind wie bei einem geordneten Paar unabhängig voneinander zu betrachten, d.h.

$$x + iy = u + iv \qquad \Leftrightarrow \qquad x = u \;\text{ und }\; y = v \,.$$

In der obigen Schreibweise ist

$$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v)$$

und aus $i^2 = -1$ folgt formal

$$(x + iy) \cdot (u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu) \,.$$

Beispiel. *Es ist*

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{1}{5}(2+3i+i^2) = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \,.$$

Im obigen Sinne ist die Menge der komplexen Zahlen definiert als

$$\mathbb{C} := \{x + iy : \; x,\; y \in \mathbb{R}\} \,.$$

Mit dem bisher skizzierten Ansatz bleibt jedoch völlig unklar, um welches Objekt es sich bei der imaginären Einheit handeln soll und was die Multiplikation dieses Objektes mit sich selbst ($i^2 = -1$) tatsächlich bedeuten soll.

Nebenbei bemerkt, kann i auch als nicht als DIE Lösung der Gleichung $z^2 = -1$ definiert werden, da $(-i)$ die Gleichung ebenso lösen würde und es könnte noch weitere Lösungen geben.

Was sind komplexe Zahlen tatsächlich?

Man betrachte die Menge $\mathbb{R}^2$ der Paare (a, b) reeller Zahlen.

Erinnerung. *In den Übungen zu Kapitel 4 ist bereits ausgeführt:*

i) *Der $\mathbb{R}^2$ ist eine kommutative Gruppe bzgl. der üblichen komponentenweise Addition*

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \,.$$

ii) *Eine Multiplikation ist definiert mittels*

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \,.$$

iii) Diese Multiplikation ist assoziativ und kommutativ.

iv) Es existiert ein neutrales Element, nämlich $(1,0)$*:*

$$(a,b)\cdot(1,0) = (a,b)\ .$$

v) Ist $(a,b)\neq(0,0)$*, so ist*

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

das eindeutig bestimmte multiplikative inverse Element:

$$(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) = (1,0)\ .$$

Zusammen mit dem Distributivgesetz folgt

Definition 11.1. Komplexe Zahlen

Der $\mathbb{R}^2$ *mit der oben definierten Addition und Multiplikation ist ein Körper.*

Er heißt der Körper der komplexen Zahlen und wird mit $\mathbb{C}$ *bezeichnet.*

Bemerkungen.

i) Einerseits können die komplexen Zahlen per definitionem mit dem $\mathbb{R}^2$ *identifiziert werden (vgl. Abbildung 11.1 und Abbildung 11.2).*

Damit sind insbesondere konvergente Folgen, offene und abgeschlossene Mengen etc. definiert.

Zusätzlich ist eine Multiplikation erklärt, die $\mathbb{C}$ *zu einem Körper macht.*

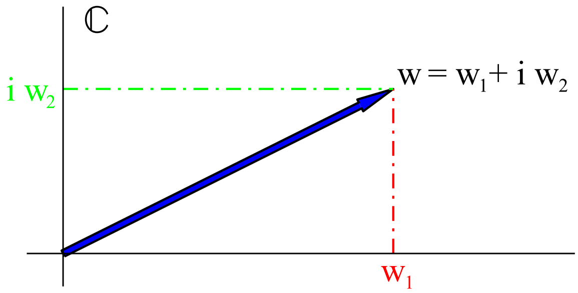


Abbildung 11.1: Die Gaußsche Zahlenebene.

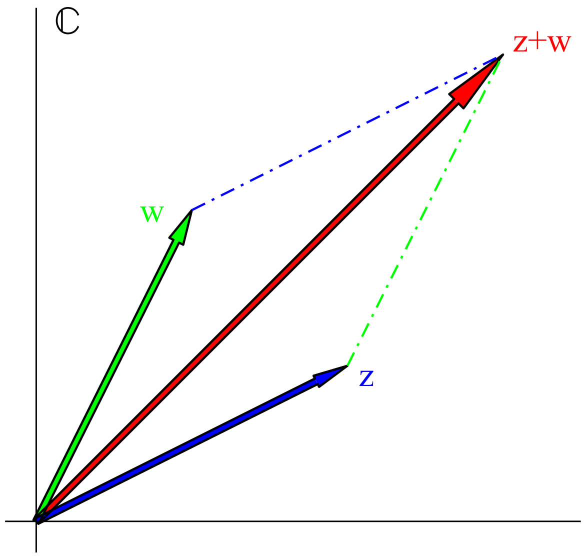


Abbildung 11.2: Kräfteparallelogramm zur Addition komplexer Zahlen.

ii) *Eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ identifiziert man mit dem Paar $(a, 0) \in \mathbb{C}$,*

$$a \cong (a, 0) \ .$$

Diese Identifikation ist verträglich mit den Multiplikationen in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, da für alle a, $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(a, 0) \cdot (c, 0) = (ac, 0) \cong ac \ .$$

Damit lässt sich jede komplexe Zahl darstellen in der Form (a, $b \in \mathbb{R}$)

$$(a,b) = (a,0) + \underbrace{(b,0)\cdot(0,1)}_{(0,b)} = a + b(0,1)\ .$$

Mit der Abkürzung $(0,1) =: i$ *(imaginäre Einheit) gilt folglich*

$$(a,b) = a + ib$$

und wegen der Identität

$$i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$$

ist mit $\mathbb{C}$ *ein Körper konstruiert, der den Körper der reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ *enthält und in dem die Gleichung* $z^2 = -1$ *lösbar ist, nämlich mit* i *und* $-i$ *(vgl. Diskussion der Einheitswurzeln in Kapitel 11.3).*

Zu beachten ist, dass $i^2 = i \cdot i$ *bzgl. der komplexen Multiplikation definiert ist.*

iii) *Formal wird mit komplexen Zahlen (unter Berücksichtigung von* $i^2 = -1$*) ebenso gerechnet wie mit reellen (s.o.).*

So berechnet man als weiteres Beispiel

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i\cdot i} = \frac{i}{-1} = -i\ .$$

Bezeichnungen und erste Eigenschaften.

Ohne den Anspruch auf Vollständigkeit sei hier kurz aufgelistet:

i) Komplexe Zahlen werden häufig mit z oder w bezeichnet.

ii) Wie bereits erwähnt, wird z in der Regel als $z = x + iy$, x, $y \in \mathbb{R}$, dargestellt.

Es heißt $x =: \mathrm{Re}\, z$ der Realteil der komplexen Zahl z, $y =: \mathrm{Im}\, z$ der Imaginärteil .

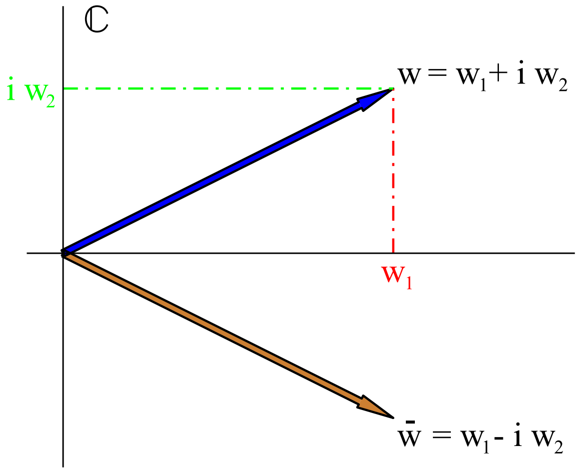


Abbildung 11.3: Zur konjugiert komplexen Zahl.

iii) Die Zahl $\bar{z} := x - iy$ heißt die zu $z = x + iy$ konjugiert komplexe Zahl (vgl. Abbildung 11.3) und hat die Eigenschaft

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R} \,.$$

iv) In Übereinstimmung mit der Euklidischen Norm im $\mathbb{R}^2$ heißt

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

der Betrag (oder die Norm) der komplexen Zahl $z = x + iy$.

v) Die multiplikativ inverse Zahl berechnet sich zu (s.o.)

$$\frac{1}{z} := z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}\,, \qquad z \neq 0\,.$$

vi) Die folgenden Rechenregeln sind als Übung leicht zu verifizieren:

(a) $\bar{\bar{z}} = z\,, \quad \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}\,, \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}\,;$

(b) $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z+\bar{z})\,, \quad \mathrm{Im}\, z \;=\; \frac{1}{2i}(z-\bar{z})\,;$

(c) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}\,;$

(d) $|z| \geq 0\,, \quad |z| = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 0\,;$

(e) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|\,;$

(f) Dreiecksungleichung: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|\,.$

11.2 Potenzreihen im Komplexen **(Konvergenzradius; Konvergenzkreis; Exponentialfunktion; trigonometrische Funktionen; Hyperbelfunktionen)**

Grob gesprochen kann bis auf eine Ausnahme im Körper der komplexen Zahlen genauso gerechnet werden wie im Reellen.

Die Ausnahme ist: In $\mathbb{C}$ gibt es keine Ordnungsrelation „$<$" im Sinne der Axiomatik aus Kapitel 5.1.

Allerdings ist der Betrag einer komplexen Zahl reell und die Beträge von komplexen Zahlen können mit „$<$" verglichen werden.

Mit anderen Worten: $|z| < |w|$ ist auch im Komplexen definiert, wohingegen $z < w$ im Komplexen nicht erklärt ist.

Ersetzt man beispielsweise in Kapitel 8 die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ durch die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, und tauscht man dabei die Betragsfunktion im Reellen gegen die komplexe Betragsfunktion, so bleiben alle Definitionen und Sätze gleich, sofern nicht komplexe Zahlen durch „<“ miteinander verglichen werden (vgl. Übungskapitel 11.5) müssten.

Beispiele.

i) *Die Definition 8.2 kann unmittelbar auf den Fall komplexer Zahlenfolgen übertragen werden. Man erhält genau Definition 10.9 für* $n = 2$.

ii) *Die komplexe geometrische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ *(vgl. Satz 8.7) ist konvergent für* $|z| < 1$ *mit*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \ .$$

Für $|z| \geq 1$ *divergiert die Reihe, wobei auch im Komplexen die Punkte mit* $|z| = 1$ *gesondert untersucht werden müssen.*

iii) *Das Konvergenzkriterium von Leibniz (Satz 8.10) ist nicht auf den komplexen Fall übertragbar.*

Definition und Konvergenzverhalten komplexer Potenzreihen.

Ebenfalls völlig analog zur reellen Situation ist eine komplexe Potenzreihe eine Reihe der Form

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ .$$

Die $a_n \in \mathbb{C}$ sind die Koeffizienten, $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt der Entwicklungspunkt.

Das komplexe Analogon zu Satz 9.1 lautet nun (vgl. Abbildung 11.4):

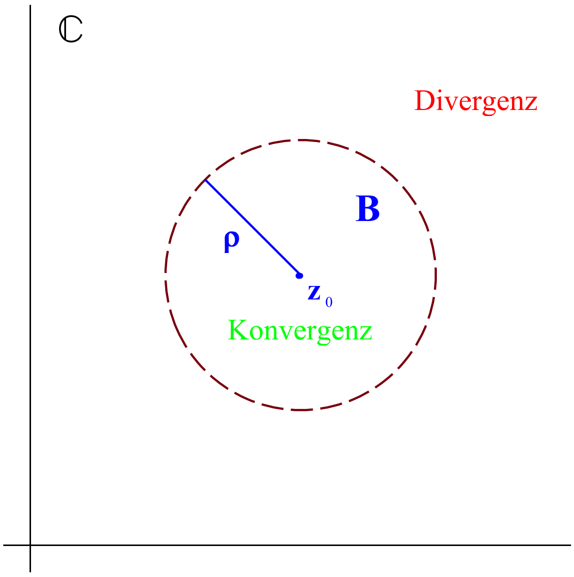


Abbildung 11.4: Zum Konvergenzverhalten einer komplexen Potenzreihe: In der offenen Kreisscheibe liegt Konvergenz vor, der (punktierte) Rand ist genau zu analysieren, außerhalb der abgeschlossenen Kreisscheibe divergiert die Reihe.

Satz 11.1. KONVERGENZ KOMPLEXER POTENZREIHEN

Zu einem fixierten Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und zu gegebenen Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, sei eine Potenzreihe gegeben:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \ .$$

Dann gibt es eine reelle Zahl $\rho \geq 0$, sodass:

i) Im Fall $\rho = 0$ konvergiert die Reihe nur im Punkt $z = z_0$, im (formalen) Fall $\rho = \infty$ konvergiert sie für alle $z \in \mathbb{C}$.

ii) Ist $0 < \rho < \infty$, so konvergiert die Potenzreihe punktweise auf

$$B_\rho(z_0) := \left\{ z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < \rho \right\} \ .$$

Sie konvergiert absolut gleichmäßig auf jeder Kreisscheibe $B_r(z_0)$ mit $0 < r < \rho$.

iii) *Ist $0 < \rho < \infty$, so divergiert die Potenzreihe für alle z aus der Menge*

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| > \rho\right\} .$$

iv) *Die Zahl ρ heißt der Konvergenzradius der Potenzreihe, $B_\rho(z_0)$ (für $\rho > 0$) heißt der Konvergenzkreis.*

v) *Mit der formalen Vereinbarung $\frac{1}{0} := \infty$, $\frac{1}{\infty} := 0$ gilt die Formel von Cauchy-Hadamard*

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} .$$

Wie ist exp im Komplexen definiert?

Die Exponentialfunktion ist im Reellen als die Potenzreihe

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

definiert. Dies soll nun so verallgemeinert werden, dass die Exponentialfunktion auch als Funktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert ist, wobei im Spezialfall $z \in \mathbb{R}$ beide Definitionen übereinstimmen sollen.

Da die reelle Exponentialfunktion als Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, zeigt Satz 11.1 die Konvergenz der natürlichen Verallgemeinerung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad \text{für alle } \ z \in \mathbb{C} ,$$

d.h. es ist ein geeigneter Kandidat gefunden.

Die Frage nach anderen möglichen Kandidaten verneint der sogenannte Identitätssatz für Potenzreihen.

Aus diesem folgt u.a., dass zwei Potenzreihen, die auf $\mathbb{R}$ übereinstimmen, notwendigerweise schon gleich sind.

Insbesondere gibt es nur die obige Möglichkeit, die reelle Exponentialfunktion zu einer Potenzreihe $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fortzusetzen.

Gleiches gilt für die trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus sowie die Hyperbelfunktionen Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus.

Als Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ erhält man:

$$
\begin{aligned}
\exp(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n , \\
\sin(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} , \\
\cos(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} , \\
\sinh(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} , \\
\cosh(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n} .
\end{aligned}
$$

11.3 Die Gaußsche Zahlenebene (Eulersche Formeln; Polarkoordinaten; geometrische Interpretation der komplexen Multiplikation; Einheitswurzeln)

Die komplexen Zahlen sind in Definition 11.1 als reelle Zahlenpaare versehen mit einer Körperstruktur eingeführt, wobei der Begriff Gaußsche Zahlenebene bereits gefallen ist.

Um die Geometrie der Gaußschen Zahlenebene zu verstehen, werden nun mithilfe der Exponentialfunktion Polarkoordinaten diskutiert.

Eulersche Formeln und Polarkoordinaten.

In der Reihendarstellung des Sinus bzw. des Kosinus kann $(-1)^n$ durch $(i^2)^n$ ersetzt werden, d.h.

$$\begin{aligned} i\sin(z) &= i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(iz)^{2n+1} , \\ \cos(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(iz)^{2n} \end{aligned}$$

und es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ (die Summe der Reihen auf der rechten Seite ergibt $\exp(iz)$)

$$\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z) . \tag{1}$$

Ersetzt man weiter in (1) z durch $-z$ und beachtet, dass per definitionem $\cos(-z) = \cos(z)$, $\sin(-z) = -\sin(z)$, so folgt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(-iz) = \cos(z) - i\sin(z) .$$

Zusammen ergeben sich die Eulerschen Formeln

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \frac{1}{2}\Big(\exp(iz)+\exp(-iz)\Big)\ ,\\ \sin(z) &= \frac{1}{2i}\Big(\exp(iz)-\exp(-iz)\Big)\ .\end{aligned}$$

Da die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion auch im Komplexen gilt, folgt unmittelbar

$$\sin^2(z)+\cos^2(z)=1 \quad \text{für alle } \ z\in\mathbb{C}\ . \tag{2}$$

Man beobachtet nun, indem speziell $z=t$, $t\in\mathbb{R}$, in (1) gewählt wird:

$$e^{it} := \exp(it) = \cos(t) + i\sin(t)\ . \tag{3}$$

Identifiziert man komplexe Zahlen wieder mit dem $\mathbb{R}^2$, so bedeutet (3)

$$e^{it} \cong \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}\ , \tag{4}$$

d.h. die Funktion e^{it}: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durchläuft in Abhängigkeit von t die Einheitskreislinie im $\mathbb{R}^2$ (vgl. Abbildung 6.11).[1]

Folgerung. *Die rechte Seite von (4) als Definition der trigonometrischen Funktionen über Potenzreihen ist mit der elementargeometrischen Definition verträglich.*

Ist schließlich $z=x+iy$, x, $y\in\mathbb{R}$, so folgt nach (3) aus (1)

$$\exp(z) = \exp(x)\exp(iy) = \exp(x)\big(\cos(y)+i\sin(y)\big)\ . \tag{5}$$

[1] Die Funktionen $\cos(t)$ und $\sin(t)$ sind bisher noch nicht mit den bekannten trigonometrischen Funktionen identifiziert. Tatsächlich liegt aber e^{it} wegen (2) für alle $t\in\mathbb{R}$ auf der Einheitskreislinie und die Periodizität folgt aus $e^{2\pi i}=1$: Wegen der Funktionalgleichung ist nämlich $e^{z+2k\pi i}=e^z\cdot(e^{2\pi i})^k=e^z$.

Vorsicht.

i) *Die Darstellung (5) zeigt, dass die komplexe Exponentialfunktion nicht bijektiv sein kann (siehe Fußnote*[1]*).*

ii) *Die Eulerschen Formeln zeigen weiter, dass der komplexe Sinus und der komplexe Kosinus nicht beschränkt sein können.*

Aus (3) bzw. (4) folgt, dass jede komplexe Zahl $z \neq 0$ geschrieben werden kann als

$$z = re^{i\varphi} = r\big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big) , \quad 0 < r , \ \varphi \in \mathbb{R} .$$

Hierbei ist $r = |z|$ die Länge des blau dargestellten Vektors in Abbildung 11.1 und $\varphi =: \arg z$ der Winkel im Bogenmaß, der mit der reellen Achse eingeschlossen wird.

φ heißt ein (man beachte die Periodizität der reellen trigonometrischen Funktionen) Argument von z.

Mit dieser Darstellung in Polarkoordinaten kann auch die Multiplikation komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene geometrisch interpretiert werden:

Ist $w = |w|e^{i\varphi}$ und $z = |z|e^{i\psi}$, so gilt

$$wz = |w||z|e^{i(\varphi+\psi)} = |w||z|\big(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\big) ,$$

d.h. bei der komplexen Mulitiplikation werden die Beträge multipliziert und die Argumente addiert.

Beispiel. *In Abbildung 11.5 wird*

$$z_1 = \frac{1}{2}(1+i) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4} \quad \textit{(rot symbolisiert)}$$

mit der komplexen Zahl

$$z_2 = (-1 + i) = \sqrt{2} e^{i3\pi/4} \qquad \textit{(grün symbolisiert)}$$

multipliziert und das Ergebnis ist (blau dargestellt) die Zahl $-1 = e^{i\pi}$.

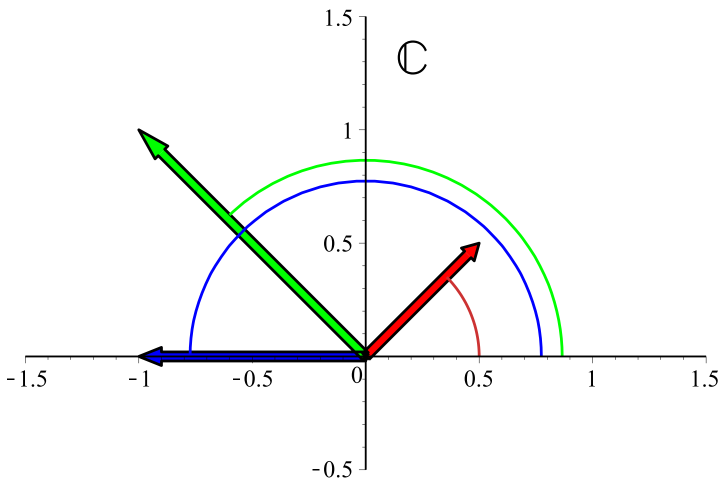


Abbildung 11.5: Zur Multiplikation in der Gaußschen Zahlenebene.

Einheitswurzeln.

Die Gleichung $z^2 = 1$ hat die zwei reellen Lösungen $z_0 = 1$ und $z_1 = -1$ und auch eine komplexe Rechnung liefert keine weiteren Lösungen.

Die Gleichung $z^3 = 1$ wiederum hat im Reellen nur die Lösung $z_0 = 1$.

Hier liefern Polarkoordinaten in der Gaußschen Zahlenebene unmittelbar weitere komplexe Lösungen – sind nämlich

$$z_0 = e^{i0} = 1 \,, \qquad z_1 = e^{i(0 + \frac{2\pi}{3})} \,, \qquad z_2 = e^{i(0 + \frac{4\pi}{3})} \,,$$

so gilt (siehe Abbildung 11.6)

$$z_0^3 = z_1^3 = z_2^3 = 1 \; .$$

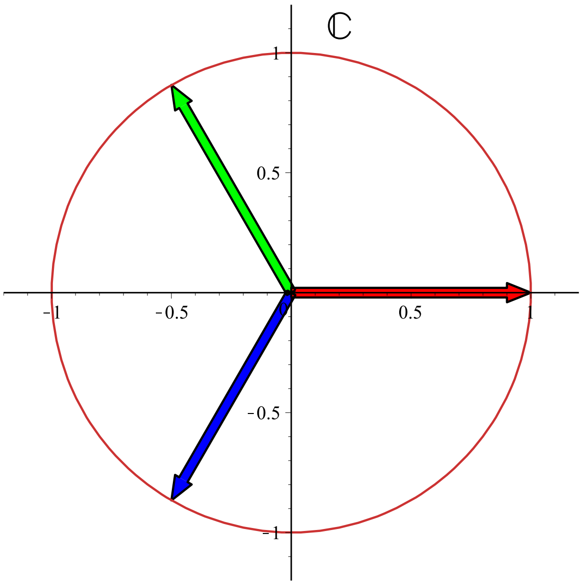


Abbildung 11.6: Die drei Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$.

Man beachte, dass die Fortführung

$$z_3 = e^{i(0+\frac{6\pi}{3})} = e^{i(0+2\pi)} \; , \qquad z_4 = e^{i(0+\frac{8\pi}{3})} = e^{i(\frac{2\pi}{3}+2\pi)} \; , \qquad \ldots$$

aufgrund der Periodizität von e^{it} wieder auf z_0, z_1 und z_2 führt. Es gibt genau diese drei Lösungen.

Allgemein ist festzuhalten: Es gibt genau n verschiedene komplexe Zahlen $z_0, \ldots, z_{n-1}$, die der Gleichung $z^n = 1$ genügen.

Sie heißen Einheitswurzeln und berechnen sich zu

$$z_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}} \; , \qquad k = 0, \; 1, \; \ldots, \; n-1 \; .$$

11.4 Der Fundamentalsatz der Algebra (Zerlegung in Linearfaktoren)

Wie oben gesehen, hat die Gleichung $z^n - 1 = 0$ genau n komplexe Lösungen.

Die allgemeine Frage nach der Lösbarkeit algebraischer Gleichungen beliebigen Grades in $\mathbb{C}$ beantwortet der so genannte Fundamentalsatz der Algebra.

Satz 11.2. $\boxed{\text{Fundamentalsatz der Algebra}}$

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$p_n(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

ein Polynom n^{ten} Grades ($a_n \neq 0$) mit komplexen Koeffizienten $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$.

Dann hat das Polynom p_n mindestens eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h. $p_n(\lambda) = 0$.

Man nennt den Körper der komplexen Zahlen algebraisch abgeschlossen.

Mithilfe von Satz 11.2 kann ein Polynom sukzessive in Linearfaktoren zerlegt werden:

Ist nämlich λ eine Nullstelle von p_n, so ist nach einer Polynomdivision $p_n(z) = (z - \lambda)p_{n-1}(z)$, wobei p_{n-1} ein Polynom vom Grad $n - 1$ ist, welches im Fall $n \geq 2$ nach Satz 11.2 wieder eine Nullstelle hat (nicht notwendig verschieden von der ersten).

Man erhält schließlich

$$p_n(z) = a_n (z - \lambda_1)^{k_1} (z - \lambda_2)^{k_2} \ldots (z - \lambda_r)^{k_r} \ .$$

Dabei ist

$$\mathbb{N} \ni r \leq n \,, \qquad k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$$

und für $i = 1, \ldots, r$ sind die λ_i die Nullstellen von $p_n(z)$ mit der Vielfachheit k_i.

Werden die Nullstellen mit ihrer Vielfachheit gezählt, so hat $p_n(z)$ genau n Nullstellen (nicht notwendig verschieden) in $\mathbb{C}$.

Das folgende Korollar ist ein wichtiger Spezialfall mit großer Relevanz beispielsweise für die Diskussion gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Korollar 11.1. POLYNOME IN $\mathbb{C}$ MIT REELLEN KOEFFIZIENTEN

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$p_n(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

ein Polynom n^{ten} Grades ($a_n \neq 0$) mit reellen Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$.

Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p_n, so ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\bar{\lambda}$ eine Nullstelle von p_n.

Beweis. Siehe Übungskapitel 11.5. $\square$

11.5 Übungsaufgaben zu Kapitel 11

Aufgabe 1. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Zahlen

$$i)\ (i+4)+(7-3i)\ , \quad ii)\ (1+i)(1-i)\ , \quad iii)\ (\sqrt{2}-i)(1+i)^2\ ,$$

$$iv)\ \frac{1}{i}\ , \quad v)\ \frac{1+i}{1-i}\ , \quad vi)\ \frac{(2+1)(3-2i)(1+2i)}{(1-i)^2}\ .$$

Aufgabe 2. Rechnen Sie die Eigenschaften *vi*), Kapitel 11.1, zu Betrag und Konjugation nach.

Aufgabe 3. Untersuchen Sie, welche Definitionen und Sätze aus Kapitel 8 auf den komplexen Fall übertragbar sind.

Aufgabe 4. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \cosh(iz) &= \cos(z)\ , & \cosh(z) &= \cos(iz)\ , \\ \sinh(iz) &= i\sin(z)\ , & \sinh(z) &= -i\sin(iz)\ . \end{aligned}$$

Aufgabe 5.

i) Bestimmen Sie den Betrag und das Argument in $[0, 2\pi)$ von

$$1+i\ , \quad (1-i)^2 \quad \text{und} \quad e^{-i\frac{\pi}{2}}\ .$$

ii) Lösen Sie die Gleichung $z^2 - 8 = -4iz$ mithilfe einer quadratischen Ergänzung.

Aufgabe 6.* Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4 = i$ und veranschaulichen Sie das Ergebnis in der Gaußschen Zahlenebene.

Aufgabe 7.* Zeigen Sie Korollar 11.1.

Aufgabe 8.* (Klausuraufgabe Teil II)

i) Lösen Sie die Gleichung $9z^2 + 2iz = 26/9$ mithilfe einer quadratischen Ergänzung.

ii) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = 8(1+i)/\sqrt{2}$ und veranschaulichen Sie das Ergebnis in der Gaußschen Zahlenebene.

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben.

Aufgabe 6. Es ist $i = e^{i\pi/2}$, folglich sind

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{8}}\ , \quad z_1 = e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2})}\ , \qquad z_2 = e^{i(\frac{\pi}{8}+\pi)}\ , \qquad z_3 = e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{2})}$$

die vier Lösungen der Gleichung (siehe Abbildung 11.7).

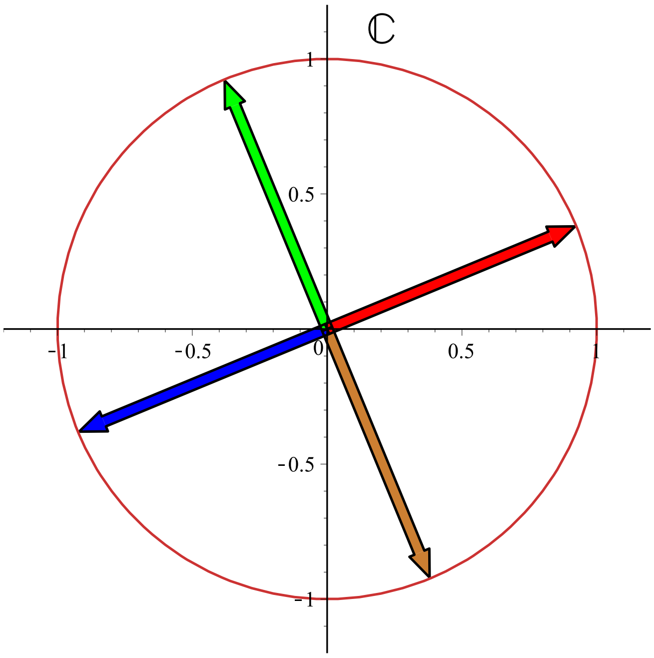


Abbildung 11.7: Die vier Lösungen der Gleichung $z^4 = i$.

Aufgabe 7. Für ein Polynom mit reellen Koeffizienten gilt:

Ist

$$p_n(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

und gilt $a_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, n$, so folgt wegen $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ und $\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w}$

$$0 = \overline{p_n(\lambda)} = a_n \bar{\lambda}^n + a_{n-1} \bar{\lambda}^{n-1} + \cdots + a_1 \bar{\lambda} + a_0 = p_n(\bar{\lambda}) \ .$$

Demnach ist mit λ auch $\bar{\lambda}$ eine Nullstelle von p_n. □

Aufgabe 8.

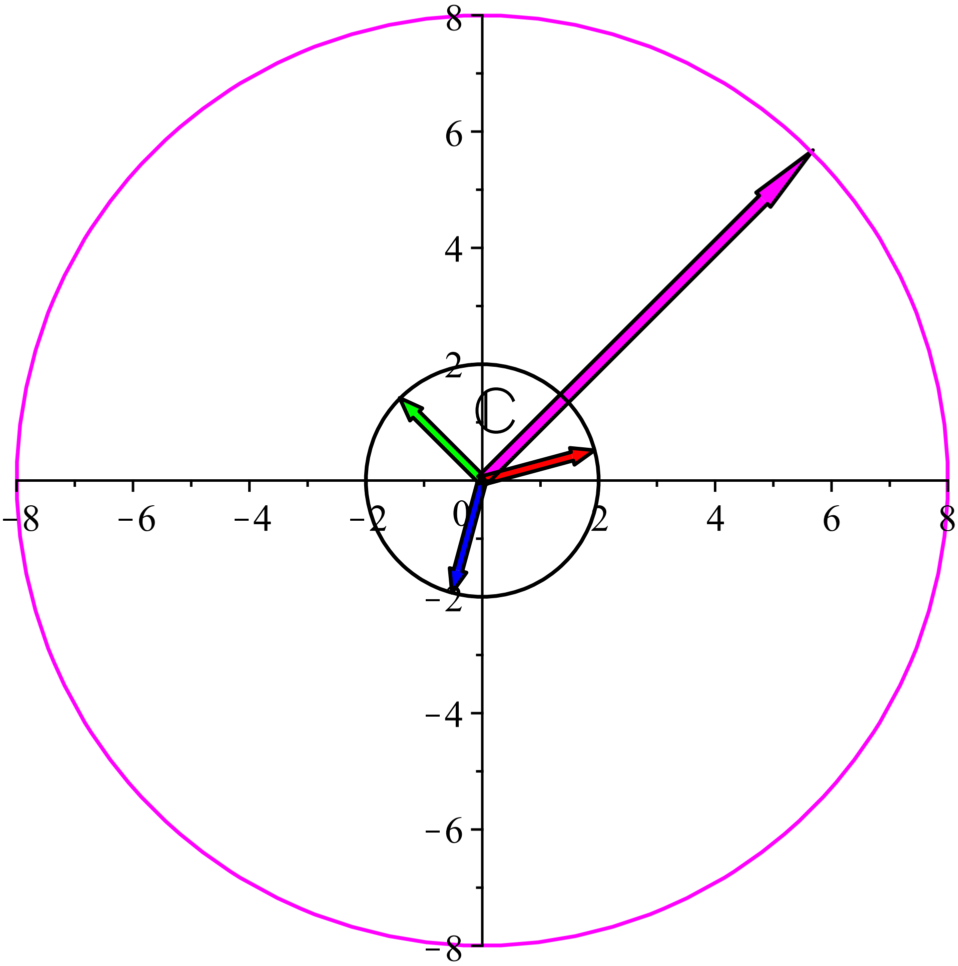


Abbildung 11.8: Zur Lösung von $z^3 = (1+i)8/\sqrt{2}$.

i) Es gilt

$$9z^2 + 2iz = \left(3z + \frac{i}{3}\right)^2 + \frac{1}{9} \ ,$$

d.h. die Gleichung ist äquivalent zu

$$\left(3z + \frac{i}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

mit den beiden Lösungen

$$z_1 = \frac{5}{9} - \frac{i}{9}\,, \qquad z_2 = -\frac{5}{9} - \frac{i}{9}\,.$$

ii) Es ist

$$z^3 = \frac{8}{\sqrt{2}}(1+i) = 8e^{i\frac{\pi}{4}}\,.$$

Diese Gleichung ist erfüllt von (Probe!)

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{12}}\,, \qquad z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}\,, \qquad z_3 = 2e^{i\frac{17\pi}{12}}\,.$$

Die Situation in der Gaußschen Zahlenebene ist in Abbildung 11.8 verdeutlicht.

Anhang

Lineare Gleichungssysteme: Gaußsches Eliminationsverfahren

A.1 Das Verfahren (elementare Zeilen- und Spaltenumformungen)

Bei der Bearbeitung konkreter Problemstellungen in allen Anwendungsbereichen der Mathematik begegnet man immer wieder linearen Gleichungssystemen, deren Beherrschung in der Regel vorausgesetzt wird.

Auch zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit von Vektoren (vgl. Kapitel 10.1) sind lineare Gleichungssysteme zu betrachten.

In diesem Anhang wird das sogenannte Gaußsche Eliminationsverfahren (oder der Gaußsche Algorithmus) als Handwerkszeug zur expliziten Lösung linearer Gleichungssysteme vorgestellt.

Die Idee und die Durchführung des Verfahrens ist recht einfach, wohingegen eine mathematisch „saubere“ Formulierung eher technisch aussieht, ohne tiefere Einsichten zu bringen.[1]

Deshalb rücken hier charakteristische Beispiele in den Vordergrund.

Die Existenz und Eindeutigkeitsfrage für Lösungen linearer Gleichungssysteme wird noch nicht systematisch untersucht, da diese im Verlauf der Diskussion von Matrizen in natürlicher Weise beantwortet werden kann.

---

[1]Numerische Aspekte wie eine geeignete Pivotsuche sind an anderer Stelle zu diskutieren.

Ein lineares Gleichungssystem.

Es seien n, $m \in \mathbb{N}$ und $n \leq m$ fixiert.

Ein lineares Gleichungssystem aus n Gleichungen in m Unbekannten (d.h. gesuchten Größen) x_1, x_2, $\dots$, x_m sieht wie folgt aus:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \cdots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \cdots + a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \cdots + a_{nm}x_m & = & b_n \, . \end{array}$$

Dabei sind für $1 \leq i \leq n$ und für $1 \leq j \leq m$ die $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (die Koeffizienten) und die $b_i \in \mathbb{R}$ (die rechte Seite) gegeben.

Beispiele.

i) 3 Gleichungen in 3 Unbekannten:

(a) Man betrachte die Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 3 \, , \end{array}$$

(b) sowie für fixiertes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & \lambda \, . \end{array}$$

ii) 2 *Gleichungen in* 4 *Unbekannten:*

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & & & = & 2\,. \end{array}$$

Schematische Darstellung.

Zur systematischen Behandlung eines linearen Gleichungssystems werden die Koeffizienten und die rechte Seite schematisch abgeordnet:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)\,.$$

In den Beispielen sieht das wie folgt aus:

i) 3 Gleichungen in 3 Unbekannten:

$$(a):\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)\,,\qquad (b):\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \lambda \end{array}\right)\,,$$

ii) 2 Gleichungen in 4 Unbekannten:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)\,.$$

Ein solches Schema soll nun durch gewisse Umformungen in eine Gestalt gebracht werden, der man die Lösungsmenge entnehmen kann.

Elementare Zeilenumformungen.

Die Lösungsmenge (d.h. die Menge aller möglichen Lösungen) eines linearen Gleichungssystems ändert sich sicherlich nicht, wenn

i) die Reihenfolge der Gleichungen geändert wird, d.h. wenn

zwei Zeilen vertauscht werden;

ii) das Vielfache einer Gleichung betrachtet wird, d.h. wenn

eine Zeile mit $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert wird;

iii) eine Gleichung bzw. deren Vielfaches zu einer anderen Gleichung addiert wird, d.h. wenn

das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addiert wird.

Bemerkung. *Elementare Zeilenumformungen beziehen sich natürlich ebenso auf die rechte Seite: Die Operationen sind auch auf die entsprechenden b_i anzuwenden.*

Ziel.

Durch elementare Zeilenumformungen soll das Schema – falls möglich – in die gesuchte Gestalt gebracht werden, die sogenannte Zeilenstufenform.

Bemerkung. *Die Wahl, die Anzahl und die Reihenfolge der elementaren Zeilenumformungen auf dem Weg zum Ziel ist nicht eindeutig.*

Wie bereits erwähnt, erklärt sich die gesuchte Zeilenstufenform schnell anhand der Beispiele – sie sieht allgemein wie folgt aus:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
1 & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1(r-1)} & \tilde{a}_{1r} & \tilde{a}_{1(r+1)} & \dots & \tilde{a}_{1m} & \tilde{b}_1 \\
0 & 1 & \dots & \tilde{a}_{2(r-1)} & \tilde{a}_{2r} & \tilde{a}_{2(r+1)} & \dots & \tilde{a}_{2m} & \tilde{b}_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \tilde{a}_{r(r+1)} & \dots & \tilde{a}_{rm} & \tilde{b}_r \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \tilde{b}_{r+2} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_n
\end{array}\right) .$$

Zur Lösung der Beispiele.

i) (a) Aus dem Schema

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 2 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 1 & 3
\end{array}\right)$$

wird durch Vertauschung der zweiten und dritten Zeile

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 2 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 3 \\
1 & 0 & 1 & 2
\end{array}\right) .$$

Wird von der dritten Zeile die erste Zeile abgezogen, so folgt im nächsten Schritt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) .$$

Nun kann das Zweifache der zweiten Zeile zur dritten Zeile addiert und das Ergebnis durch zwei geteilt werden. Man erhält

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 \end{array}\right) .$$

In dieser Form kann durch Rückwärtseinsetzen sukzessive von unten nach oben vorgegangen werden. Man liest ab:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{7}{2} , \\ x_2 &= 3 - x_3 = -\frac{1}{2} , \\ x_1 &= 1 - 2x_2 - x_3 = -\frac{3}{2} . \end{aligned}$$

Abschließend bestätigt eine Probe die Rechnungen.

Bemerkung. *Das Rückwärtseinsetzen kann wie folgt als Zeilenumformungen geschrieben werden:*

Wird von der zweiten Zeile die dritte abgezogen, so ergibt das

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 \end{array}\right) .$$

Wird schließlich von der ersten Zeile das Zweifache der zweiten Zeile und die dritte Zeile abgezogen, so hat man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 \end{array}\right)$$

und anhand der Diagonalgestalt auf der linken Seite kann die Lösung direkt abgelesen werden.

(b) Im Schema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \lambda \end{array}\right)$$

zieht man beispielsweise von der dritten die zweite und die erste Zeile ab:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 2 \end{array}\right).$$

Hier wird bereits deutlich, dass das System für $\lambda \neq 2$ nicht lösbar ist.

Es sei also $\lambda = 2$. Dann ergeben die Subtraktion der zweiten Zeile von der ersten und die Division durch 2 die finale Form

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Anhand dieser Form ist zu erkennen, dass x_3 beliebig gewählt werden kann. Man schreibt beispielsweise

$$x_3 = t \quad \text{für beliebiges } \ t \in \mathbb{R}$$

und man erkennt

$$x_2 = 0 \quad \text{sowie} \quad x_1 = 1 - t\ .$$

Wieder kann das Ergebnis mittels einer Probe verifiziert werden.

Bemerkung. *Wie in diesem Beispiel folgt aus der allgemeinen Zeilenstufenform eines linearen Gleichungssystems:*

Ist $\tilde{b}_k \neq 0$ für ein $r+1 \leq k \leq n$, so ist das Gleichungssystem nicht lösbar.

ii) Im letzten Beispiel transformiert sich

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

nach der Subtraktion der zweiten Zeile von der ersten und nach der anschließenden Division durch 2 auf

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1 \end{array}\right)\ .$$

Sowohl x_4 als auch x_3 können beliebig gewählt werden:

$$\begin{aligned} x_4 &= t \quad \text{für beliebiges } t \in \mathbb{R}\ , \\ x_3 &= s \quad \text{für beliebiges } s \in \mathbb{R}\ , \end{aligned}$$

d.h. für beliebige s, $t \in \mathbb{R}$ (Probe!)

$$x_2 = -1 - \frac{t}{2}\ , \qquad x_1 = 2 - s\ .$$

Elementare Spaltenumformungen.

Nicht immer ist es möglich, durch elementare Zeilenumformungen ein Schema in Zeilenstufenform zu produzieren.

Beispiel. *Das Schema zum Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_3 &= 2 \end{aligned}$$

lautet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) .$$

Um formal eine Zeilenstufenform zu erhalten, müssen die zweite und die dritte Spalte vertauscht werden.

Vorsicht. *Ein Vertauschung von Spalten bedeutet eine Umnummerierung der gesuchten x_i.*

Aber auch in obiger Form können die Lösungen sukzessive abgelesen werden. Es ist

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 \,, \\ x_2 &= t \qquad\qquad \text{für beliebiges } \ t \in \mathbb{R} \,, \\ x_1 &= -1 - t \,. \end{aligned}$$

A.2 Übungsaufgaben zum Anhang

Aufgabe 1. Bestimmen Sie mithilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens alle Lösungen (falls existent) der Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 2\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= \lambda\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \text{ fixiert.} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.* Bestimmen Sie mithilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens alle Lösungen (falls existent) der Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 8x_2 + x_3 &= -8\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 + \alpha x_4 &= \beta\,, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ fixiert.} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.* Bringen Sie das Schema

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

durch elementare Zeilenumformungen auf die Gestalt

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 1 & 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{array}\right) ,$$

wobei die c_{ij}, $1 \leq i, j \leq 3$, reelle Konstanten bezeichnen.

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben.

Aufgabe 2.

i) Hier werden beispielsweise die folgenden Umformungen durchgeführt

$$\text{(a) } [II \rightsquigarrow II - 2I]\,, \qquad [III \rightsquigarrow III + I]\,,$$

$$\text{(b) } \Big[III \rightsquigarrow \tfrac{1}{6}(III - 4II)\Big]\,,$$

$$\text{(c) } \Big[I \rightsquigarrow \tfrac{1}{2}(I - III)\Big]\,, \qquad \Big[II \rightsquigarrow \tfrac{1}{2}(II + III)\Big]\;:$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 8 & 1 & -8 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 8 & 2 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{6} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{12} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{6} \end{array}\right)\,,$$

sodass $x_1 = \frac{11}{12}$, $x_2 = -\frac{11}{12}$ und $x_3 = \frac{7}{6}$.

ii) Für α, $\beta \in \mathbb{R}$ gilt mit den Umformungen

$$\text{(a) } \Big[II \rightsquigarrow II - \frac{1}{2}I\Big]\,, \qquad \text{(b) } \Big[III \rightsquigarrow III - \frac{2}{3}II\Big]\;:$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right)\,.$$

Fall 1. $\alpha \neq \frac{3}{4}$. Hier ergibt sich nach

$$\text{(a)}\ \left[\frac{4}{4\alpha-3}\Big(IV \rightsquigarrow IV - \frac{3}{4}III\Big)\right], \quad \text{(b)}\ \left[III \rightsquigarrow \frac{3}{4}(III - IV)\right],$$

$$\text{(c)}\ \left[II \rightsquigarrow \frac{2}{3}(II - III)\right], \quad \text{(d)}\ \left[I \rightsquigarrow \frac{1}{2}(I - II)\right]\ :$$

$$\cdots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4\beta}{4\alpha-3} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3\beta}{4\alpha-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4\beta}{4\alpha-3} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2\beta}{4\alpha-3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3\beta}{4\alpha-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4\beta}{4\alpha-3} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta}{4\alpha-3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2\beta}{4\alpha-3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3\beta}{4\alpha-3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4\beta}{4\alpha-3} \end{array}\right),$$

sodass man eine eindeutige Lösung findet, mit anderen Worten ist die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{\beta}{4\alpha-3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Fall 2. $\alpha = \frac{3}{4}$ und $\beta \neq 0$. Dann besitzt das Gleichungssystem keine Lösung, wie man bereits nach den Umformungen zu Beginn der Aufgabe erkennt.

Fall 3. $\alpha = \frac{3}{4}$ und $\beta = 0$. Im letzten Fall folgt (wieder nach den Umformungen zu Beginn der Aufgabe), dass $x_4 = t \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden kann und Rückwärtseinsetzen liefert

$$x_3 = -\frac{3}{4}t\,, \qquad x_2 = \frac{1}{2}t\,, \qquad x_1 = -\frac{1}{4}t\,; \qquad \mathbb{L} = \left\{ t \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 3. Das Schema wird umgeformt mit den Schritten:

$$(i)\ \left[III \to \frac{1}{2}(III - I)\right], \qquad \left[II \to -\frac{1}{3}(II - 2I)\right],$$

$$(ii)\ \left[I \to I - III\right], \qquad (iii)\ \left[I \to I - 2II\right], \qquad \text{d.h.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Anhang

Maschinenzahlen

B.1 Maschinenzahlen (Festkommadarstellung; Gleitkommadarstellung; relativer Rundungsfehler; Maschinengenauigkeit; Rundungsabbildung; Maschinenoperationen)

Für das rein analytische Studium mathematischer Probleme spielt die Art der Darstellung von Zahlen (vgl. auch die in Kapitel 8.2 skizzierte g-adische Zifferndarstellung) meist keine Rolle, da die Darstellung den Wert stets exakt repräsentiert.

Das ändert sich etwa in der numerischen Mathematik durch den Einsatz von Rechenmaschinen (Computern), was aus unterschiedlichen Gründen hilfreich oder gar unerlässlich sein kann.

Beispiele.

i) *Die exakte Lösung eines Problems existiert zwar, kann aber nicht explizit berechnet werden – man denke z.B. an Fragen der Art:*

- *Wie lautet der exakte Wert von*

$$\int_0^{10} e^{t^2}\,\mathrm{d}t\ ?$$

- *Wie lautet die (eindeutige) Lösung des Anfangswertproblems*

$$y'(t) = t \cdot e^{\sin(y(t))}\,, \qquad y(0) = 0\ ?$$

ii) *Die exakte Lösung eines Problems kann zwar prinzipiell bestimmt werden, der Aufwand ist jedoch zu groß.*

Hier dient beispielsweise die Suche nach der Lösung eines linearen Gleichungssystems mit 1000 *Unbekannten (oder mehr) und* 1000 *Gleichungen (oder mehr) als typisches Beispiel.*

Entscheidend bei numerischen Methoden der angewandten Mathematik ist die Genauigkeit einer numerischen Rechnung.

Hierbei berücksichtigt der Gesamtfehler:

i) Modellfehler, d.h.

(a) Idealisierungsfehler (ein physikalischer Sachverhalt muss in ein mathematisches Modell „übersetzt“ werden, wobei oft Vereinfachungen (z.B. Linearisierungen) notwendig sind, um das Modell aufstellen und behandeln zu können);

(b) Datenfehler (die Daten des Modells sind etwa aufgrund ungenauer Kenntnis von Materialeigenschaften bzw. aufgrund fehlerhafter Messwerte ebenfalls fehlerhaft).

ii) numerische Fehler, d.h.

(a) Diskretisierungsfehler (kontinuierliche Prozesse müssen in Rechenmaschinen durch diskrete ersetzt werden);

(b) Abbruchsfehler (unendliche Algorithmen werden nach endlich vielen Schritten abgebrochen);

(c) Rundungsfehler (ein Computer kann nur endlich viele Zahlen darstellen).

In diesem Anhang geht es um die Darstellung von Zahlen in einer Maschine und den daraus resultierenden Rundungsfehler.

Die Darstellung erfolgt in der Regel binär mit den Ziffern 0 und 1 (vgl. Kapitel 8.2), was sich jedoch für die nachfolgenden Betrachtungen nicht grundsätzlich von der Darstellung im Dezimalsystem unterscheidet.

Deshalb wird im Folgenden o.E. im Dezimalsystem argumentiert.

Zahlenverwaltung in der Maschine.

Zur Realisierung in einer Maschine stehen für eine reelle Zahl endlich viele Stellen zur Verfügung – einen Augenblick lang sei zunächst angenommen, dass die Anzahl der Stellen tatsächlich für eine exakte Darstellung ausreicht.

Die Stellen werden auf zwei verschiedene Arten verwaltet:

i) Festkommadarstellung. Hier ist die Anzahl der Stellen vor und nach dem Komma fixiert.

Stehen etwa drei Vor- und fünf Nachkommastellen zur Verfügung, so erhält man folgende Festkommadarstellungen:

$$\begin{aligned} 27.3025 &\to 027|30250\,; \\ 0.103 &\to 000|10300\,. \end{aligned}$$

ii) Gleitkommadarstellung. Diese ist effizienter und in der Regel vorzuziehen.

Sie basiert darauf, dass eine reelle Zahl x in der Form

$$x = a \cdot 10^E \ , \quad a \in \mathbb{R} \ , \ \ |a| < 1 \ , \ \ E \in \mathbb{Z} \ ,$$

geschrieben werden kann. Dabei heißt a die Mantisse, E der Exponent.

Es ist beispielsweise

$$x = 27.3025 = 0.273025 \cdot 10^2 = 0.00273025 \cdot 10^4 \ .$$

Die Darstellung ist in dieser Form noch nicht eindeutig und man geht zur normalisierten Gleitkommadarstellung über.

Für $x \neq 0$ fordert man dabei

$$|a| \geq 10^{-1} \ .$$

Mit dieser Forderung ist für $x \neq 0$ die Eindeutigkeit der Darstellung gewährleistet.

Für $x = 0$ ist $a = 0$ und E beliebig.

Im Folgenden wird stets von der Darstellung einer Zahl in normalisierter Gleitkommadarstellung ausgegangen.

Maschinenzahlen und Rundungsabbildung.

Nun wird die konkrete Situation auf einer Rechenanlage mit ihren Einschränkungen für die Menge der exakt darstellbaren Zahlen betrachtet.

Abhängig von der Maschine stehen (t, $s \in \mathbb{N}$)

$$\begin{array}{l} t \text{ Ziffern} \quad \text{und} \quad 1 \text{ Vorzeichen für } a\,, \\ s \text{ Ziffern} \quad \text{und} \quad 1 \text{ Vorzeichen für } E \end{array}$$

bei der Darstellung einer Zahl zur Verfügung.

Dadurch ist nur eine endliche Menge reeller Zahlen auf der Maschine exakt darstellbar. Sie heißt die Menge der Maschinenzahlen $A = A(t, s)$.

Alle anderen Zahlen werden fehlerhaft dargestellt, es kommt zu Rundungsfehlern.

Bemerkung. *Die Menge der Maschinenzahlen hängt über die Parameter t und s von der konkret betrachteten Rechenanlage ab.*

Da $A(t, s)$ eine endliche Menge ist, gibt es die Größen

$$\begin{array}{rl} c_{max}: & \text{größte exakt darstellbare Zahl}\,, \\ c_{min}: & \text{kleinste exakt darstellbare Zahl}\,. \end{array}$$

Ebenso kann man sich der Null nicht beliebig gut mit positiven (oder negativen) Maschinenzahlen nähern:

Es gibt (in normalisierter Gleitkommadarstellung)

$$\begin{array}{rl} c_{+,min}: & \text{kleinste positive Maschinenzahl}\,, \\ c_{-,max}: & \text{größte negative Maschinenzahl}\,. \end{array}$$

Mit diesen Größen ist die Menge der Zahlen definiert, die in sinnvoller Weise gerundet werden können:

$$D := [c_{min}, c_{-,max}] \cup \{0\} \cup [c_{+,min}, c_{max}] \ .$$

Bemerkungen.

i) *Zu beachten ist, dass es sich hier um kontinuierliche Intervalle und nicht um Teilmengen der Maschinenzahlen handelt.*

ii) *Rundung „in sinnvoller Weise“ bedeutet konkret:*

Man kann x eine Maschinenzahl „in relativer Nähe“ zuordnen und den relativen Rundungsfehler kontrollieren.

Dies ist für $x \notin D$ nicht möglich.

Beispielsweise müßte man jedes $x > c_{max}$ auf c_{max} abrunden, was ein sinnvolles Rechnen unmöglich macht.

iii) *Muss eine Rechenanlage bei einer Operation den Bereich D verlassen, so kommt es in der Regel zum Abbruch des Verfahrens verbunden mit der Meldung „Error“ (siehe Beispiel „Exponentenüberlauf“).*

Es sei also $x \in D$, $x = a \cdot 10^E$, und o.E. sei $x > 0$ (Vorzeichen bleiben bei der Rundung in D erhalten, $x = 0$ wird exakt dargestellt).

Die Mantisse

$$a = 0.a_1a_2a_3 \ldots a_t a_{t+1} \ldots \qquad (a_1 \neq 0)$$

wird rechnerintern realisiert als

$$\tilde{a} = \begin{cases} 0.a_1a_2a_3 \ldots a_t \ , & \text{falls} \ \ 0 \le a_{t+1} \le 4 \ , \\ 0.a_1a_2a_3 \ldots a_t + 10^{-t} \ , & \text{falls} \ \ 5 \le a_{t+1} \le 9 \ . \end{cases}$$

Dies führt zur Umwandlung einer reellen Zahl aus D in eine Maschinenzahl durch die Rundungsabbildung rd,

$$\mathrm{rd}:\ D \to A(t,s)\,, \qquad x \mapsto \mathrm{rd}(x) \ := \begin{cases} \tilde{a}\cdot 10^{E} & \text{für} \ \ \tilde{a} < 1\,, \\ 0.1 \cdot 10^{E+1} & \text{für} \ \ \tilde{a} = 1\,, \end{cases}$$

$$= \ x \cdot (1+\varepsilon_x)\,, \qquad \varepsilon_x := \frac{\mathrm{rd}(x) - x}{x}\,.$$

Der relative Fehler ist dabei abgeschätzt durch (siehe Übungskapitel B.2)

$$|\varepsilon_x| = \left| \frac{\mathrm{rd}(x) - x}{x} \right| \le 5 \cdot 10^{-t} =: \mathrm{eps}\,,$$

eps heißt die Maschinengenauigkeit.

Beispiel. *Ist $x \notin D$, so kann es, wie oben bereits angedeutet, zum Exponentenüberlauf oder zum Exponentenunterlauf kommen.*

Ist etwa $t = 4$, $s = 2$ und

$$x = 0.99998 \cdot 10^{99}\,,$$

so wäre die Rundung

$$\tilde{x} = 0.1000 \cdot 10^{100}\,.$$

Dies ist jedoch keine Maschinenzahl mehr, wodurch es zum Abbruch des Verfahrens kommt.

Maschinenoperationen.

Auch die elementaren Rechenoperationen $+$, $-$, $\cdot$, $/$ können nicht exakt ausgeführt werden, obwohl maschinenintern zunächst mit erhöhter Stellenzahl gerechnet wird.

Das Ergebnis der internen Rechnung ist jedoch als Maschinenzahl auszugeben.

Beispiel. *Ist* $t = 3$*,* $s = 1$*,* $x = 0.106 \cdot 10^2$ *und* $y = 0.612 \cdot 10^0$*, so ist*

$$x + y = 0.11212 \cdot 10^2$$

und (als Maschinenzahl)

$$\mathrm{rd}(x + y) = 0.112 \cdot 10^2 \ .$$

Diese Maschinenzahl ist das Ergebnis der Maschinenoperation $\oplus$

$$x \oplus y := \mathrm{rd}(x + y) = (x + y)(1 + \varepsilon)$$

mit einem $\varepsilon = \varepsilon(x, y) > 0$*, sodass* $|\varepsilon| < \mathrm{eps}$*.*

Analog sind die Maschinenoperationen $\ominus$, $\odot$, $\oslash$ definiert.

Vorsicht. *Wie in Übungskapitel B.2 diskutiert wird, gelten für Maschinenoperationen die üblichen Rechengesetze nicht mehr.*

B.2 Übungsaufgaben zum Anhang

Aufgabe 1.

i) Bestimmen Sie c_{max}, c_{min}, $c_{+,min}$, $c_{-,max}$.

ii) * Zeigen Sie für alle $x \in D$

$$\left|\frac{\mathrm{rd}(x) - x}{x}\right| \leq 5 \cdot 10^{-t} \ .$$

Aufgabe 2.*

i) Zeigen Sie: Die Maschinengenauigkeit ist äquivalent charakterisiert durch

$$\mathrm{eps} = \min\{x \in A :\ x > 0,\ 1 \oplus x > 1\} \ .$$

ii) Folgern Sie für $\mathrm{eps}/2 \leq x < \mathrm{eps}$

$$(1 \oplus x) \oplus x \neq 1 \oplus (x \oplus x) \ .$$

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben.

Aufgabe 1. *ii*) Es ist mit der obigen Notation

$$\left|\frac{\mathrm{rd}(x) - x}{x}\right| = \left|\frac{\tilde{a} - a}{a}\right|$$

und es gilt

$$|\tilde{a} - a| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-t} = 5 \cdot 10^{-t-1} \ .$$

Wegen $|a| \geq 10^{-1}$ folgt

$$\left|\frac{\tilde{a} - a}{a}\right| \leq 5 \cdot 10^{-t-1} \cdot 10^{1} = 5 \cdot 10^{-t} \ .$$

Aufgabe 2.

i) Für $0 < x \in A(t,s)$ (o.E. $x < 1$) ist

$$x = 0.a_1 a_2 \dots a_t \cdot 10^{-r} \qquad \text{mit einem Exponenten } \ r \geq 0$$

und mit $a_1 > 0$ (normalisierte Gleitpunktdarstellung). Das ergibt die Darstellung

$$1 + x = 0.\underbrace{100\dots0}_{r+1 \text{ Stellen}} a_1 a_2 \cdots a_{t-1} a_t \cdot 10^{1} \ .$$

Ist $r + 1 > t$, so folgt unmittelbar

$$1 \oplus x = \mathrm{rd}(1 + x) = 1 \ .$$

Ist $r+1<t$, so folgt

$$1 \oplus x > 1\ .$$

Ist $r+1=t$, so ist

$$1 \oplus x > 1 \ \text{ für } a_1 \geq 5 \quad \text{ und } \quad 1 \oplus x = 1 \ \text{ für } a_1 \leq 4\ .$$

Somit ist

$$\min\{x \in A:\ x>0,\ 1 \oplus x > 1\} = 0.50\ldots 0 \cdot 10^{-t+1} = \text{eps}\ .$$

ii) Für eps$/2 \leq x < \varepsilon$ folgt aus dem ersten Teil der Aufgabe

$$(1 \oplus x) \oplus x = 1 \oplus x = 1\ .$$

Wegen $x+x \geq$ eps folgt aus dem ersten Teil der Aufgabe aber auch

$$1 \oplus (x \oplus x) > 1\ .$$

Anhang

Beispielklausuren zum Vorlesungsstoff

Zur Rekapitulation des Gesamtstoffes und zu einer möglichen Prüfungsvorbereitung werden in diesem Anhang zwei Klausuren vergangener Semester zusammen mit Lösungshinweisen vorgestellt.

Bedingt durch den zeitlichen Versatz des vorlesungsbegleitenden Übungsbetriebs, ist die Diskussion komplexer Zahlen Bestandteil der Klausuren des jeweiligen Folgesemesters.

C.1 Die erste Klausur

C.1.1 Aufgabenstellung

Aufgabe 1.

i) Es seien A, B, C Mengen.

Verdeutlichen Sie die folgende Beziehung zunächst anhand eines Venn-Diagramms und geben Sie anschließend einen formalen Beweis:

$$(A - B) \cup (B - C) = (A \cup B) - (B \cap C) .$$

ii) Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

(a) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} .$$

(b) $5^n - 1$ ist durch 4 teilbar.

iii) Für einen überbuchten Flug können nur noch 3 Tickets ausgestellt werden, 10 verbleibende Passagiere möchten aber mit einem der Tickets fliegen.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, drei Passagiere auszuwählen,

(a) wenn alle Tickets gleich sind;

(b) wenn die drei Tickets unterschiedlich sind?

Aufgabe 2.

i) Existieren die folgenden Grenzwerte und falls ja, berechnen Sie diese:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 - 3n^2}{3n^2 - 1} \ , \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\, \frac{n^4+1}{\frac{1}{2}n^4 + 1} \ .$$

ii) Betrachten Sie die reelle Zahlenfolge $\{a_n\}$,

$$a_n = \frac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \ .$$

Finden Sie ein $a \in \mathbb{R}$ und zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ derart, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N(\varepsilon)$.

iii) Betrachten Sie die rekursiv definierte Folge $\{a_n\}$ mit

$$a_1 := 1 \ , \qquad a_{n+1} := \frac{1+a_n}{2+a_n} \ .$$

Ist die Folge nach unten beschränkt? Ist die Folge monoton fallend? Konvergiert die Folge? Falls ja, bestimmen Sie den Grenzwert.

Hinweis. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad a_n > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \ .$$

iv) Konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{1+\frac{1}{k}}$?

v) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}(x+1)^n$?

Aufgabe 3.

i) Es seien a, $b \in \mathbb{R}$ fixiert. Betrachten Sie im $\mathbb{R}^3$ die Vektoren

$$\underline{\mathbf{u}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \underline{\mathbf{u}}^{(2)} = \begin{pmatrix} b \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \underline{\mathbf{u}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Bestimmen Sie die Dimension von:

$$\text{Spann}\left(\underline{\mathbf{u}}^{(1)}, \underline{\mathbf{u}}^{(2)}\right) \ , \qquad \text{Spann}\left(\underline{\mathbf{u}}^{(1)}, \underline{\mathbf{u}}^{(3)}\right) \ .$$

Bestimmen Sie für $a = 2$ die Dimension von Spann $\left(\underline{\mathbf{u}}^{(1)}, \underline{\mathbf{u}}^{(2)}, \underline{\mathbf{u}}^{(3)}\right)$.

ii) Betrachten Sie im $\mathbb{R}^4$ den Vektor

$$\underline{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sowie den Unterraum $V = \{\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^4 : \langle \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{N}} \rangle = 0\}$ des $\mathbb{R}^4$.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren in V liegen:

$$\underline{\mathbf{g}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{g}}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Dimension von V und geben Sie eine Orthonormalbasis von V an.

(b) Bestimmen Sie $V^\perp$.

Aufgabe 4.

i) Es sei $M = \{1, 2, \dots, 10\} \subset \mathbb{N}$ und zu fixiertem $n \in \mathbb{N}$ sei $N = \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$.

Gibt es eine surjektive Abbildung $f \colon M \to N$?

ii) Zeigen Sie:

$$\Big\{x \in \mathbb{R} : |x-2| + \big|2 - |x-2|\big| < 1\Big\} = \emptyset .$$

iii) Gegeben sei die Wertetabelle

j	0	1	2
x_j	1	3	4
y_j	-2	2	7

und es sei $p_2(x)$ das Interpolationspolynom zu den Stützstellen x_j mit den Werten y_j, $0 \le j \le 2$.

Berechnen Sie $p_2(x)$ und $p_2(2)$ mittels der Lagrangeschen Darstellung.

iv) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Weiter sei E die Ebene, die von $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$ aufgespannt wird und den Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthält.

Geben Sie eine Parameterdarstellung von E und die Hessesche Normalform von E an.

v) Ist die Menge $U = \left\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x_1 < x_2\right\}$ beschränkt?

C.1.2 Lösungshinweise

Aufgabe 1.

i) Betrachtet seien drei Mengen A, B und C wie im oberen Teil von Abbildung C.1 angedeutet.

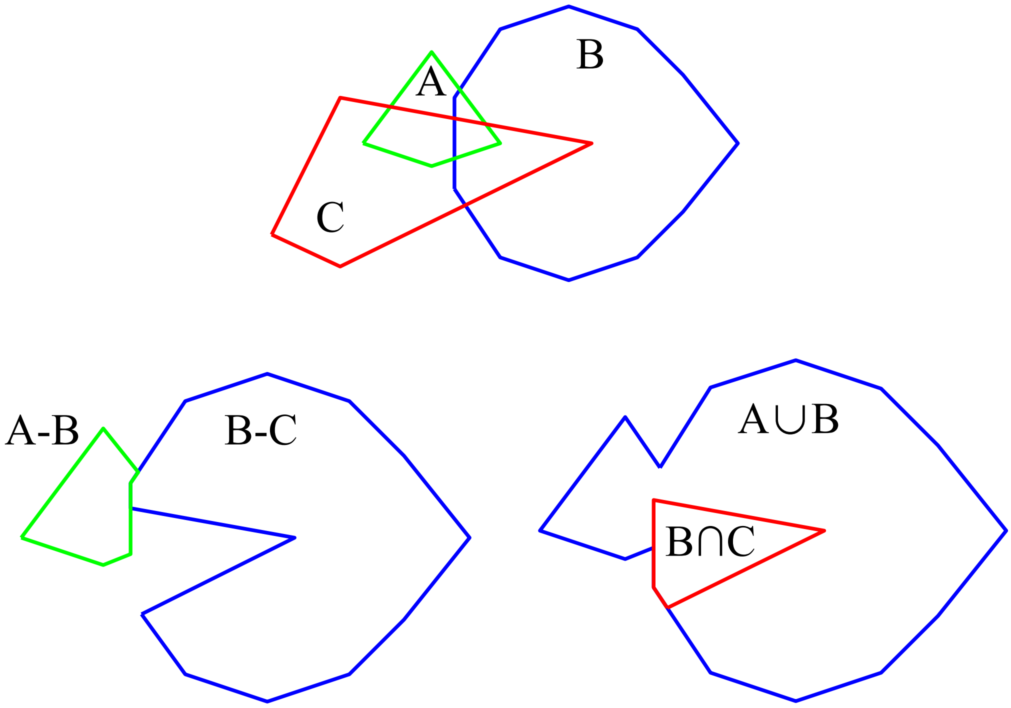


Abbildung C.1: Venn-Diagramme zu Aufgabe 1, *i*).

„⊂“: Zunächst sei $x \in (A - B) \cup (B - C)$, d.h.

$$\Big(x \in A \;\text{ und }\; x \notin B\Big) \quad \text{oder} \quad \Big(x \in B \;\text{ und }\; x \notin C\Big)\,.$$

Offensichtlich ist insbesondere $x \in A \cup B$.

Ist $x \in B$, so folgt aus der Annahme $x \in (A - B) \cup (B - C)$ unmittelbar $x \in B - C$, folglich $x \notin C$ und speziell $x \notin B \cap C$.

Ist $x \notin B$, so folgt direkt $x \notin B \cap C$.

Insgesamt impliziert die Annahme also das gewünschte Resultat

$x \in (A \cup B) - (B \cap C)$.

„$\supset$“: Nun sei umgekehrt $x \in (A \cup B) - (B \cap C)$ angenommen, d.h.

$$\Big(x \in A \ \text{ oder } \ x \in B\Big) \quad \text{ und } \quad x \notin B \cap C \ .$$

Die Eigenschaft $x \notin B \cap C$ impliziert im Fall $x \in B$ direkt $x \notin C$ und als Konsequenz $x \in B - C$.

Andererseits impliziert im Fall $x \notin B$ die Annahme $x \in A \cup B$ die Beziehung $x \in A - B$.

Man erhält hier $x \in (A - B) \cup (B - C)$ und zusammen mit dem ersten Teil ist die Gleichheit gezeigt. $\square$

ii) (a) Der Induktionsanfang für $n_0 = 1$ ergibt sich mit

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1+1} \ .$$

Für den Induktionsschluss sei nun für beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

angenommen. Es folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

und der Induktionsschluss ist gezeigt. $\square$

(b) Da $5^1 - 1 = 4$ durch 4 teilbar ist, ist der Induktionsanfang für $n_0 = 1$ gezeigt.

Als Induktionsannahme für beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ sei nun $5^n - 1$ durch 4 teilbar.

Somit ist wegen

$$5^{n+1} - 1 = 5 \cdot 5^n - 1 = 4 \cdot 5^n + 5^n - 1$$

auch $5^{n+1} - 1$ durch 4 teilbar und der Induktionsschluss ist verifiziert. $\square$

iii) (a) Es handelt sich um eine 3-elementige Teilmenge von $\{1, \ldots, 10\}$, für die nach Satz 3.6 gilt

$$|\mathrm{Kom}_3^{10}(oW)| = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{10!}{7!\, 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120 \ .$$

(b) Dieser Fall kann als 3-Permutation ohne Wiederholung aus $\{1, \ldots, 10\}$ interpretiert werden und Satz 3.4 liefert als Anzahl der Möglichkeiten

$$|\mathrm{Per}_3^{10}(oW)| = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720 \ .$$

Aufgabe 2.

i) (a) Es gilt

$$n^4 - 3n^2 > \frac{1}{2}n^4 \ \text{ für alle } \ n \geq 3 \quad \text{und} \quad 3n^2 - 1 < 3n^2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, folglich für alle $n \geq 3$

$$\frac{n^4 - 3n^2}{3n^2 - 1} > \frac{1}{2} n^4 \frac{1}{3n^2} = \frac{1}{6} n^2 \ .$$

Die Folge ist unbeschränkt und damit divergent.

(b) Es existieren die Grenzwerte

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{n^4 + 1}{\frac{1}{2} n^4 + 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{n^4}} = 2 \ .$$

Mit dem Produkt konvergenter Folgen existiert der Grenzwert des Produktes:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} \, \frac{n^4 + 1}{\frac{1}{2} n^4 + 1} = 2 \ .$$

ii) Es sei $a = 2$ und weiter sei $\varepsilon > 0$ fixiert. Dann ist

$$|a_n - a| = \left| \frac{2\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n}} - 2 \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ mit $\frac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon$, d.h. man wähle

$$\mathbb{N} \ni N = N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon^2} \ .$$

iii) Aus $a_1 > 0$ und der Definition der a_n folgt unmittelbar $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge ist wohl definiert und nach unten beschränkt.

Falls die Folge gegen einen Grenzwert $a \geq 0$ konvergiert, so muss gelten

$$a = \frac{1+a}{2+a}\,, \qquad \text{also} \qquad a^2 + a - 1 = 0\;.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

und $a \geq 0$ liefert schließlich den einzigen Kandidaten

$$a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\;.$$

Um die Konvergenz der Folge zu zeigen, beobachtet man die Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &> \frac{-1+\sqrt{5}}{2} && \Leftrightarrow \\
\frac{1+a_n}{2+a_n} &> \frac{-1+\sqrt{5}}{2} && \Leftrightarrow \\
2 + 2a_n &> -2 + 2\sqrt{5} + a_n\big(-1+\sqrt{5}\big) && \Leftrightarrow \\
a_n\big(3-\sqrt{5}\big) &> -4 + 2\sqrt{5} && \Leftrightarrow \\
a_n &> 2\frac{-2+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = 2\frac{\big(-2+\sqrt{5}\big)\big(3+\sqrt{5}\big)}{4} && \Leftrightarrow \\
a_n &> \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\;.
\end{aligned}$$

Wegen $a_1 = 1$ ist damit auch $(-1+\sqrt{5})/2$ eine untere Schranke für die Folge $\{a_n\}$.

Es gilt weiter für $a_n \geq 0$

$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n}{2 + a_n} < a_n \quad \Leftrightarrow \quad a_n^2 + a_n - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_n \geq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} .$$

Wie bereits gezeigt, ist dies für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig, die Folge ist monoton fallend und nach dem Satz von der monotonen Folge konvergent.

iv) Es gilt für alle $k \geq 1$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{k}} \geq \frac{1}{2} , \qquad \text{d.h. die Folge} \ \left\{(-1)^k \frac{1}{1 + \frac{1}{k}}\right\}$$

ist keine Nullfolge, die Reihe divergiert.

v) Nach der Formel von Cauchy-Hadamard gilt für den Konvergenzradius

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n 2^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot 2} = \frac{1}{2} ,$$

woraus die Konvergenz der Potenzreihe auf $(-3, 1)$ folgt.

Randpunkt $x = 1$: In diesem Punkt ist die Reihe als harmonische Reihe divergent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} .$$

Randpunkt $x = -3$: In diesem Punkt konvergiert die Reihe nach dem Kriterium von Leibniz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} .$$

Insgesamt folgt die Konvergenz der Potenzreihe auf $[-3, 1)$, auf $\mathbb{R} - [-3, 1)$ divergiert die Reihe.

Aufgabe 3.

i) Um die Dimension von Spann $\left(\underline{\mathbf{u}}^{(1)}, \underline{\mathbf{u}}^{(2)}\right)$ zu berechnen, beachtet man, dass

$$\lambda_1 \underline{\mathbf{u}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\mathbf{u}}^{(2)} = \underline{\mathbf{0}}$$

die folgenden Gleichungen impliziert:

$$\lambda_1 = -\lambda_2 \quad \text{und} \quad (b-1)\lambda_2 = 0 = (2-a)\lambda_2 \; .$$

Ist $b \neq 1$, so folgt $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$ und die gesuchte Dimension ist 2.

Gleiches gilt für $a \neq 2$.

Ist $a = 2$ und $b = 1$, so gilt

$$\underline{\mathbf{u}}^{(1)} = \underline{\mathbf{u}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die gesuchte Dimension ist 1.

Zur Berechnung der Dimension von Spann $\left(\underline{\mathbf{u}}^{(1)}, \underline{\mathbf{u}}^{(3)}\right)$ beobachtet man, dass aus

$$\lambda_1 \underline{\mathbf{u}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\mathbf{u}}^{(3)} = \underline{\mathbf{0}}$$

stets $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ folgt, die Dimension ist 2.

Schließlich sei $a = 2$ und

$$\lambda_1 \underline{\mathbf{u}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\mathbf{u}}^{(3)} + \lambda_3 \underline{\mathbf{u}}^{(3)} = \underline{\mathbf{0}} \ .$$

Dies führt auf

$$\lambda_1 = -\lambda_2 \ , \qquad (b-1)\lambda_2 = 0 \ , \qquad \lambda_3 = 0 \ .$$

Im Fall $b \neq 1$ müssen λ_1, λ_2 und λ_3 gleich Null sein, die gesuchte Dimension ist 3.

Im Fall $b = 1$ ist $\underline{\mathbf{u}}^{(1)} = \underline{\mathbf{u}}^{(2)}$ und da $\underline{\mathbf{u}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{u}}^{(3)}$ linear unabhängig sind, ist die Dimension 2.

ii) (a) Per definitionem ist $\underline{\mathbf{v}} \in V$ genau dann, wenn

$$v_1 + 2v_2 + v_3 = 0 \ ,$$

was für $\underline{\mathbf{g}}^{(1)}$ und $\underline{\mathbf{g}}^{(2)}$ direkt verifiziert werden kann.

Aus $\underline{\mathbf{N}} \notin V$ ergibt sich unmittelbar $\dim V \leq 3$.

Schließlich betrachte man beispielsweise

$$\underline{\mathbf{g}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in V \ .$$

Mit dieser Wahl folgt aus

$$\lambda_1 \underline{\mathbf{g}}^{(1)} + \lambda_2 \underline{\mathbf{g}}^{(2)} + \lambda_3 \underline{\mathbf{g}}^{(3)} = \underline{\mathbf{0}}$$

das Gleichungssystem

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 0\ ,\quad \lambda_2 = 0\ ,\quad \lambda_1 + \lambda_2 = 0\ ,\quad \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

und damit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Das zeigt die lineare Unabhängigkeit von $\underline{\mathbf{g}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{g}}^{(2)}$, $\underline{\mathbf{g}}^{(3)} \in V$ und $\dim V = 3$.

Zur Bestimmung einer Orthonormalbasis von V setzt man nach dem Gram- Schmidtschen Verfahren z.B. zunächst

$$\underline{\mathbf{f}}^{(1)} := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\tilde{\underline{\mathbf{f}}}^{(2)} := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\tilde{\underline{\mathbf{f}}}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{f}}^{(2)} := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Im dritten Schritt wird konstruiert:

$$\tilde{\underline{\mathbf{f}}}^{(3)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$- \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Man berechnet

$$\underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1/4 \\ 1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix} ,$$

$$\underline{\mathbf{f}}^{(3)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} ,$$

Zusammen ist eine Orthonormalbasis $(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)}, \underline{\mathbf{f}}^{(3)})$ gefunden, was leicht durch eine Probe verifiziert werden kann.

(b) $V^{\perp}$ ist ein eindimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^4$ und per definitionem gilt

$$V^{\perp} = \left\{\underline{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^4 : \ \underline{\mathbf{w}} = t\underline{\mathbf{N}}, \ t \in \mathbb{R}\right\} .$$

Aufgabe 4.

i) Die Eigenschaft „surjektiv“ bedeutet

$$\mathrm{bild}(f) = N = \{1, 2, \dots, n\} .$$

Ist $n \leq 10$, so betrachte man beispielsweise eine Abbildung f mit $f(k) = k$ für $k = 1, \dots, n$ und mit beliebigem $f(k) \in N$ für $k = n+1, \dots, 10$.

Diese ist surjektiv.

Im Fall $n > 10$ beobachtet man, dass das Bild von f (also das Bild von M unter f) maximal 10 Elemente haben kann.

Das Bild einer surjektiven Abbildung hätte im Widerspruch dazu $n > 10$ Elemente, d.h. es gibt in diesem Fall keine surjektive Abbildung.

ii) Man kann direkt mit den Äquivalenzen

$$\begin{aligned} & |x-2| + \big|2 - |x-2|\big| < 1 \\ \Leftrightarrow\quad & \big|2 - |x-2|\big| < 1 - |x-2| \\ \Leftrightarrow\quad & -1 + |x-2| < 2 - |x-2| < 1 - |x-2| \end{aligned}$$

argumentieren, die auf einen Widerspruch und damit auf die leere Menge als Lösungsmenge führen.

Alternativ bietet sich eine Fallunterscheidung an:

Fall 1. $x \geq 2$. Dann ist

$$|x-2| + \big|2 - |x-2|\big| = x - 2 + |2 - x + 2| = x - 2 + |4 - x| \, .$$

Fall 1a. $2 \leq x \leq 4$. Wegen

$$x - 2 + |4 - x| = 2 > 1$$

liefert dieser Fall keinen Beitrag zur Lösungsmenge.

Fall 1b. $4 < x$. Auch dieser Fall führt aufgrund von

$$x - 2 + |4 - x| = 2x - 6 > 2$$

zu einem Widerspruch.

Fall 2. $x < 2$. Nun ist

$$|x-2| + \big|2 - |x-2|\big| = 2 - x + |2 - (2-x)| = 2 - x + |x| \ .$$

Fall 2a. $0 \le x < 2$. Die Ungleichung

$$2 - x + |x| = 2 > 1$$

kann nicht erfüllt sein.

Fall 2b. $x < 0$. Der Beweis wird vollständig mit der Abschätzung

$$2 - x + |x| = 2 - 2x > 2 \ . \quad \square$$

iii) In der Darstellung nach Lagrange ist nach Tabelle C.1

j	$L_j(x)$		
0	$\dfrac{(x-3)(x-4)}{(1-3)(1-4)}$	$=$	$\dfrac{1}{6}(x^2 - 7x + 12)$
1	$\dfrac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)}$	$=$	$-\dfrac{1}{2}(x^2 - 5x + 4)$
2	$\dfrac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-3)}$	$=$	$\dfrac{1}{3}(x^2 - 4x + 3)$

Tabelle C.1: Schema zur Lösung der Interpolationsaufgabe nach Lagrange.

$$p_2(x) = \sum_{j=0}^{2} y_j \cdot L_j(x)$$

$$= -\frac{1}{3}[x^2 - 7x + 12] + -[x^2 - 5x + 4] + \frac{7}{3}[x^2 - 4x + 3] \ ,$$

$$\begin{aligned} p_2(x) &= x^2\left[-\frac{2}{6}-\frac{6}{6}+\frac{14}{6}\right]+x\left[\frac{14}{6}+\frac{30}{6}-\frac{56}{6}\right] \\ &\quad -\frac{24}{6}-\frac{24}{6}+\frac{42}{6} \\ &= x^2-2x-1\ . \end{aligned}$$

Eine Probe anhand der Daten bestätigt das Ergebnis.

Einfaches Einsetzen ergibt $p_2(2) = -1$ ohne weitere Rechnung.

iv) Als Parameterdarstellung der Ebene ergibt sich unmittelbar aus der Aufgabenstellung

$$E:\left\{\underline{\mathbf{x}}\in\mathbb{R}^3:\ \underline{\mathbf{x}}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}.$$

Zur Konstruktion der Hesseschen Normalform sei

$$\underline{\mathbf{N}}=\pm\frac{\underline{\mathbf{v}}^{(1)}\times\underline{\mathbf{v}}^{(2)}}{\|\underline{\mathbf{v}}^{(1)}\times\underline{\mathbf{v}}^{(2)}\|}=\pm\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\ ,$$

wobei das Vorzeichen noch geeignet zu wählen ist. Wegen

$$\underline{\mathbf{N}}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(-1)=\mp\frac{1}{\sqrt{6}}$$

ergibt sich die richtige Normierung

$$\underline{\mathbf{N}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und die Hessesche Normalform lautet

$$E = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ \langle \underline{\mathbf{N}}, \underline{\mathbf{x}} \rangle - \frac{1}{\sqrt{6}} = 0 \right\} ,$$

was leicht durch eine Probe belegt werden kann.

$v)$ Es sei ein beliebiges $0 < M \in \mathbb{R}$ fixiert. Wählt man beispielsweise

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} M \\ 2M \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 ,$$

so folgt $\underline{\mathbf{x}} \in U$ und $\|\underline{\mathbf{x}}\| > M$. Somit ist U nicht beschränkt.

C.2 Die zweite Klausur

C.2.1 Aufgabenstellung

Aufgabe 1.

$i)$ Es seien A, B und C Aussagen. Die Implikation $A \Rightarrow B$ sei richtig, die Negation $\neg B$ sei richtig und die Implikation $C \Rightarrow A$ sei falsch.

Verifizieren Sie die Wahrheitswerte von A, B und C anhand einer Wahrheitstafel.

Ist die Disjunktion $B \vee C$ richtig?

ii) Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 - n$ durch 3 teilbar.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{2^k} = 4 - \frac{n+3}{2^n} \ .$$

iii) Bei einer Produktumfrage füllen Sie einen Fragebogen mit fünf Fragen zu einem vorgestellten Produkt aus, wobei Sie jeweils mit „gut“, „schlecht“ oder „keine Angabe“ antworten können.

(a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, den Bogen auszufüllen?

(b) Das Produkt gilt von Ihnen insgesamt als „gut“ bewertet, wenn Sie mindestens drei der Fragen mit „gut“ beantworten.

Wie viele Möglichkeiten haben Sie, das Produkt mit „gut“ zu bewerten?

Aufgabe 2.

i) Existieren die folgenden Grenzwerte und falls ja, berechnen Sie diese:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - \frac{1}{n^2}}{n^{5/2} + (-1)^n n^2} \ , \qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^2}{1+n} + \frac{n^3}{1-n^2} \right] \ .$$

ii) Betrachten Sie die reelle Zahlenfolge $\{a_n\}$,

$$a_n = \frac{n + \frac{1}{2}\sqrt{n}}{n - \frac{1}{2}\sqrt{n}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\ .$$

Finden Sie ein $a \in \mathbb{R}$ und zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ derart, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n > N(\varepsilon)$.

iii) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{(a)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{1 + \sqrt{k}}\ , \qquad \text{(b)} \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k + 2^k}\ .$$

iv) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe

$$\text{(a)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} 2^{-n} (x+3)^n\ , \qquad \text{(b)} \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!}\ ?$$

Aufgabe 3. Im $\mathbb{R}^4$ seien

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ , \ \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ , \ \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ , \ \underline{\mathbf{v}}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{aligned} U &:= \operatorname{Spann}\big(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}\big)\ , \quad V := \operatorname{Spann}\big(\underline{\mathbf{v}}^{(3)}, \underline{\mathbf{v}}^{(4)}\big)\ , \\ W &:= \operatorname{Spann}\big(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)}, \underline{\mathbf{v}}^{(4)}\big)\ . \end{aligned}$$

i) Es bezeichne $\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$ den ersten kanonischen Basisvektor des $\mathbb{R}^4$. Gilt $\underline{\mathbf{e}}^{(1)} \in V$?

ii) Bestimmen Sie $\dim W$.

iii) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von W.

iv) Bestimmen Sie $U \cap V$.

v) Ist $W - U$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$?

Aufgabe 4.

i) Geben Sie die folgende Menge reeller Zahlen in Form eines Intervalls oder einer Vereinigung solcher an:

$$\Big\{x \in \mathbb{R} :\ |x-4| + \big|2 - |x-2|\big| < 1\Big\}\ .$$

ii) Gegeben sei die Wertetabelle

j	0	1	2
x_j	1	3	4
y_j	-2	2	7

und es sei $p_2(x)$ das Interpolationspolynom zu den Stützstellen x_j mit den Werten y_j, $0 \le j \le 2$.

Berechnen Sie $p_2(x)$ und $p_2(2)$ mittels der Newtonschen Darstellung (dividierte Differenzen).

iii) Im $\mathbb{R}^3$ seien die Gerade

$$G = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \quad x_2 = 1 + x_1 \ , \quad x_3 = 1 - x_1\}$$

und der Punkt $\underline{\mathbf{a}}$ gegeben,

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Ebene E im $\mathbb{R}^3$, die $\underline{\mathbf{a}}$ und G enthält. Machen Sie eine Probe.

iv) Betrachten Sie die Teilmengen des $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} A &:= \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq (x_1^2/4) + x_2^2 \leq 2\} \ , \\ B &:= \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 > x_1\} \, . \end{aligned}$$

Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle C.2 die richtigen Möglichleiten an.

Bemerkung. Der Eintrag „nichts“ bedeutet, dass die Menge weder beschränkt noch offen noch abgeschlossen noch kompakt ist; es können durchaus verschiedene Eigenschaften gleichzeitig zutreffen.

C.2.2 Lösungshinweise

Aufgabe 1.

i) Die gegebenen Wahrheitswerte von $A \Rightarrow B$, $\neg B$ und $C \Rightarrow A$ führen auf die rot markierte Zeile in der Wahrheitstafel C.3.

	beschränkt	offen	abgeschlossen	kompakt	„nichts“
A					
B					
$A \cap B$					
$A \cup B$					
$B - A$					
∂A					

Tabelle C.2: Tabelle zu Aufgabe 4, *iv*).

$w(A)$	$w(B)$	$w(C)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(\neg B)$	$w(C \Rightarrow A)$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**
0	0	0	1	1	1

Tabelle C.3: Wahrheitstafel zu Aufgabe 1, *i*).

Man liest ab, dass A falsch, B falsch und C richtig ist. Folglich ist $B \vee C$ richtig.

ii) (a) Für $n_0 = 1$ ist offensichtlich $1^3 - 1$ durch 3 teilbar und der Induktionsanfang ist richtig.

Als Induktionsannahme für beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ sei nun $n^3 - n$ durch 3 teilbar, woraus folgt:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\ &= (n^3 - n) + 3(n^2 + n)\ .\end{aligned}$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist nach Annahme durch 3 teilbar, der zweite per definitionem.

Damit ist auch der Induktionsschluss verifiziert. $\square$

(b) Der Induktionsanfang für $n = 1$ ist offensichtlich richtig:

$$1 + \frac{2}{2} = 4 - \frac{4}{2}\ .$$

Die Induktionsannahme (für beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{2^k} = 4 - \frac{n+3}{2^n}$$

führt auf den gewünschten Induktionsschluss

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \frac{k+1}{2^k} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{2^k} + \frac{n+2}{2^{n+1}} = 4 - \frac{n+3}{2^n} + \frac{n+2}{2^{n+1}} \\ &= 4 - \left[\frac{2n+6-n-2}{2^{n+1}}\right] \\ &= 4 - \frac{n+4}{2^{n+1}} = 4 - \frac{(n+1)+3}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

und die Behauptung ist gezeigt. $\square$

iii) (a) Es handelt sich um ein 5-Tupel aus einer dreielementigen Menge.

Für diese Permutationen mit Wiederholung nach Satz 3.5

$$|\mathrm{Per}_5^3(mW)| = 3^5$$

verschiedene Möglichkeiten.

(b) Mindestens drei Fragen mit „gut“ bewertet heißt, dass entweder genau drei Fragen oder genau vier Fragen oder alle Fragen mit „gut“ bewertet sind.

Die mit „gut“ bewerteten Fragen werden durch 3- bzw. 4- bzw. 5-elementige Teilmengen der fünf Fragen beschrieben – Kombinationen ohne Wiederholung.

Man beachte weiter, dass es für die nicht mit „gut“ bewerteten Fragen jeweils noch die zwei Antwortvarianten „schlecht“ bzw. „keine Angabe“ gibt.

Satz 3.6 liefert zusammen mit dieser Beobachtung als Anzahl verschiedener Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} &4 \cdot |\mathrm{Kom}_3^5(oW)| + 2 \cdot |\mathrm{Kom}_4^5(oW)| + |\mathrm{Kom}_5^5(oW)| \\ &\qquad = 4 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 51 \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 2.

i) (a) Es gilt für $n \to \infty$

$$\frac{n^2 - \frac{1}{n^2}}{n^{5/2} + (-1)^n n^2} = \frac{n^{-1/2} - n^{-9/2}}{1 + (-1)^n n^{-1/2}} \to 0 \ .$$

(b) Aufgrund der Gleichheit

$$\begin{aligned}\frac{n^2}{1+n}+\frac{n^3}{1-n^2} &= \frac{n^2}{1+n}+\frac{n^3}{(1+n)(1-n)}\\ &= \frac{n^2(1-n)+n^3}{(1+n)(1-n)}\\ &= \frac{n^2}{1-n^2}=\frac{1}{\frac{1}{n^2}-1}\end{aligned}$$

erkennt man

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2}{1+n}+\frac{n^3}{1-n^2}\right]=-1\ .$$

ii) Es sei $a=1$ und weiter sei $\varepsilon>0$ fixiert. Dann ist

$$\begin{aligned}|a_n-a| &= \left|\frac{n+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n-\frac{1}{2}\sqrt{n}}-1\right| = \frac{n+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n-\frac{1}{2}\sqrt{n}}-1\\ &= \frac{n+\frac{1}{2}\sqrt{n}-n+\frac{1}{2}\sqrt{n}}{n-\frac{1}{2}\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{n-\frac{1}{2}\sqrt{n}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}-\frac{1}{2}}<\varepsilon\end{aligned}$$

für alle $n\geq N$, wobei $N=N(\varepsilon)$ gemäß der Ungleichung

$$N\geq\left[\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{2}\right]^2$$

gewählt werden kann.

iii) (a) Offensichtlich gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{1+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{1+\sqrt{k}} \ ,$$

die Folge $\{1/(1+\sqrt{k})\}$ ist monoton fallend und das Kriterium von Leibniz liefert die Konvergenz der Reihe.

(b) Man schätzt z.B. wie folgt ab:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+2^k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} \ ,$$

wobei die Konvergenz der Reihe auf der rechten Seite etwa aus dem Wurzel- oder dem Quotientenkriterium folgt.

Die Konvergenz der ursprünglichen Reihe ergibt sich aus dem Majorantenkriterium.

iv) (a) Es gilt

$$\frac{1}{\rho} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{n+1} \ 2^{-n}} = \frac{1}{2}$$

und nach der Formel von Cauchy-Hadamard konvergiert die Potenzreihe auf $(-5,-1)$.

Randpunkt $x=-1$: In diesem Punkt ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} 2^{-n} 2^n$$

zu betrachten.

Da die Folge $\{n^2/(n+1)\}$ keine Nullfolge ist, divergiert die Reihe.

Randpunkt $x = -5$: Nun betrachtet man die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} 2^{-n} (-2)^n \ .$$

Auch hier ist die Folge $\{(-1)^n n^2/(n+1)\}$ keine Nullfolge und die Reihe divergiert.

Die Potenzreihe konvergiert also genau auf $(-5, -1)$, ansonsten divergiert sie.

(b) Um die Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$ einzusehen, kann man einerseits wie bei der Einführung der Exponentialfunktion den Quotienten

$$\left| \frac{\frac{(x+2)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(x+2)^n}{n!}} \right| = \frac{|x+2|}{n+1}$$

betrachten.

Andererseits folgt die Aussage auch direkt aus

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n!} = \exp(x+2) \quad \text{für alle } \ x \in \mathbb{R} \ .$$

Aufgabe 3.

i) Aus (λ, $\mu \in \mathbb{R}$)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

würde $\mu = 1$ sowie $\mu = 0$ folgen, also gilt $\underline{\mathbf{e}}^{(1)} \notin V$.

ii) Es gilt

$$2\underline{\mathbf{v}}^{(1)} - \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \underline{\mathbf{v}}^{(4)} ,$$

d.h. die Vektoren $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(3)}$, $\underline{\mathbf{v}}^{(4)}$ sind nicht linear unabhängig, $\dim W \leq 3$.

Aus dem Ansatz

$$\lambda_1\underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \lambda_2\underline{\mathbf{v}}^{(2)} + \lambda_3\underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \underline{\mathbf{0}}$$

folgt jedoch

$$0 = \lambda_1 + \lambda_2 , \qquad 0\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 , \qquad 0 = \lambda_1$$

und damit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, die drei Vektoren sind linear unabhängig, $\dim W = 3$.

iii) Zur Bestimmung einer Orthonormalbasis von W setzt man nach dem Gram- Schmidtschen Verfahren etwa

$$\underline{\mathbf{f}}^{(1)} := \frac{\underline{\mathbf{v}}^{(1)}}{\|\underline{\mathbf{v}}^{(1)}\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Weiter setzt man

$$\underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(2)} := \underline{\mathbf{v}}^{(2)} - \langle\underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{f}}^{(1)}\rangle\underline{\mathbf{f}}^{(1)} ,$$

$$
\begin{aligned}
\underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \\
\underline{\mathbf{f}}^{(2)} &:= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Schließlich wird definiert

$$
\begin{aligned}
\underline{\tilde{\mathbf{f}}}^{(3)} &:= \underline{\mathbf{v}}^{(3)} - \langle \underline{\mathbf{v}}^{(3)}, \underline{\mathbf{f}}^{(1)} \rangle \underline{\mathbf{f}}^{(1)} - \langle \underline{\mathbf{v}}^{(3)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)} \rangle \underline{\mathbf{f}}^{(2)} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\quad - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

und anschließend normiert:

$$\underline{\mathbf{f}}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Damit ist eine Orthonormalbasis $(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)}, \underline{\mathbf{f}}^{(3)})$ von W ist gefunden, was eine Probe belegt.

iv) Ist $\underline{\mathbf{x}} \in U \cap V$, so gilt mit geeigneten λ, μ, $\overline{\lambda}$, $\overline{\mu} \in \mathbb{R}$

$$\underline{\mathbf{x}} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \overline{\mu} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Man erhält das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda + \mu &= \overline{\mu} \, , \\ \lambda + \mu &= \overline{\lambda} + \overline{\mu} \, , \qquad \text{insbesondere } \overline{\lambda} = 0 \, , \\ \lambda &= 2\overline{\mu} \, , \end{aligned}$$

d.h. mit der Notation $\overline{\mu} = t$, $\lambda = 2t$, $\mu = -t$

$$\underline{\mathbf{x}} = t \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} , \quad t \in \mathbb{R} .$$

v) Anhand von $\underline{\mathbf{0}} \in W$ und $\underline{\mathbf{0}} \in U$ erkennt man $\underline{\mathbf{0}} \notin W - U$, sodass es sich nicht um einen Unterraum handeln kann.

Aufgabe 4.

i) Man betrachte die folgende Fallunterscheidung:

Fall 1. $x \geq 4$. Dann ist

$$\begin{aligned} |x-4| + \big|2 - |x-2|\big| &= x - 4 + |2 - x + 2| = x - 4 + |4 - x| \\ &= x - 4 + x - 4 = 2x - 8 < 1 \ , \end{aligned}$$

sofern $x < 9/2$ und man setzt $I_1 := [4, 9/2)$.

Fall 2. $x < 4$. Nun ist

$$|x-4| + \big|2 - |x-2|\big| = 4 - x + \big|2 - |x-2|\big| \ .$$

Fall 2a. $x \geq 2$. In diesem Fall erhält man

$$4 - x + \big|2 - |x-2|\big| = 4 - x + |2 - x + 2| = 8 - 2x < 1 \ ,$$

sofern $x > 7/2$, man setzt nun $I_2 := (7/2, 4)$.

Fall 2b. $x < 2$. Hier ist

$$4 - x + \big|2 - |x-2|\big| = 4 - x + |x| \geq 4 - x > 4 - 2 = 2 \ ,$$

d.h. es gibt keinen Beitrag zur gesuchten Lösungsmenge

$$I = I_1 \cup I_2 = (7/2, 9/2) \ .$$

ii) In der Newtonschen Darstellung liefert das Schema aus Tabelle C.4

$$\begin{aligned} p_2(x) &= -2 + 2(x-1) + (x-1)(x-3) = x^2 - 2x - 1 \; , \\ p_2(2) &= -1 \; . \end{aligned}$$

		$x_0 = 1$	$y[x_0] = -2$		
	2			$y[x_0, x_1] = 2$	
3		$x_1 = 3$	$y[x_1] = 2$		$y[x_0, x_1, x_2] = 1$
	1			$y[x_1, x_2] = 5$	
		$x_2 = 4$	$y[x_2] = 7$		

Tabelle C.4: Schema zur Lösung der Interpolationsaufgabe nach Newton.

iii) Mit der Wahl $x_1 = 0$ bzw. $x_2 = 0$ findet man gleichfalls in der Ebene

$$\underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Als Richtungsvektoren wählt man beispielsweise

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \underline{\mathbf{a}} - \underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ,$$

für den Normalenvektor wird berechnet

$$\underline{\mathbf{N}} = \pm \frac{\underline{\mathbf{v}}^{(1)} \times \underline{\mathbf{v}}^{(2)}}{\|\underline{\mathbf{v}}^{(1)} \times \underline{\mathbf{v}}^{(2)}\|} = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} ,$$

$$\langle \underline{\mathbf{N}}, \underline{\mathbf{a}} \rangle = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\, 2 = \pm\sqrt{2}\,.$$

Die richtige Wahl des Vorzeichens liefert die Hessesche Normalform

$$E = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 :\ \langle \underline{\mathbf{N}}, \underline{\mathbf{x}} \rangle - \sqrt{2} = 0 \right\}, \qquad \underline{\mathbf{N}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als Probe hat man neben $a \in E$ auch die Beziehung für $\underline{\mathbf{x}} \in G$:

$$\langle \underline{\mathbf{N}}, \underline{\mathbf{x}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_2 + x_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + x_1 + 1 - x_1) = \sqrt{2}\,.$$

iv) Die Abbildung C.2 illustrirert die Eintragungen in Tabelle C.5.

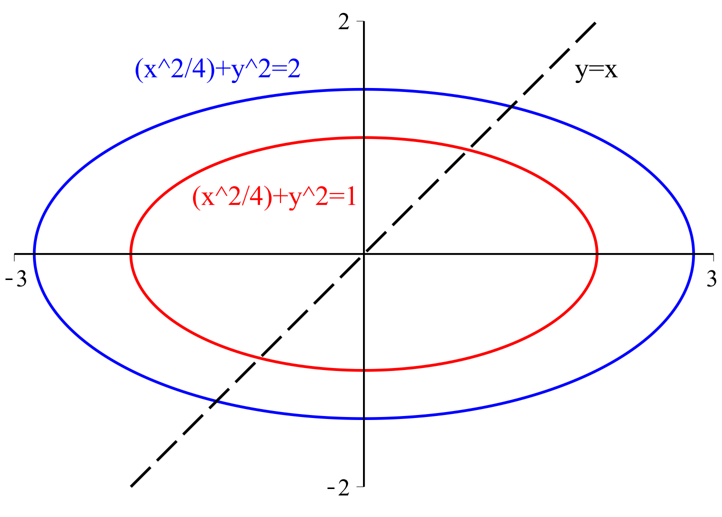


Abbildung C.2: Aufgabe 4, *iv*): Skizze zur Definition von A und B.

	beschränkt	offen	abgeschlossen	kompakt	„nichts“
A	$\otimes$		$\otimes$	$\otimes$	
B		$\otimes$			
$A \cap B$	$\otimes$				
$A \cup B$					$\otimes$
$B - A$		$\otimes$			
∂A	$\otimes$		$\otimes$	$\otimes$	

Tabelle C.5: Lösung Aufgabe 4, *iv*).

Literaturverzeichnis

[1] Bärwolff, G. *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure.* Springer Spektrum, 3. Auflage. Springer, 2017.

[2] Ansorge, R., Oberle, H.J., Rothe, K., Sonar, T. *Mathematik für Ingenieure 1 & 2.* 4., erweiterte Auflage. Wiley, 2010.

[3] Arens, T., Hettlich, F., Karpfinger, C., Kockelkorn, U., Lichtenegger, K., Stachel, H. *Mathematik.* Springer Sprektrum, 4. Auflage. Springer, 2018.

[4] Burg, K., Haf, H., Wille, F., Meister, A. *Höhere Mathematik für Ingenieure Band 1: Analysis.* 11. Auflage. Springer-Vieweg, 2017.

[5] Burg, K., Haf, H., Wille, F., Meister, A. *Höhere Mathematik für Ingenieure Band 2: Lineare Algebra.* 7. Auflage. Springer-Vieweg, 2012.

[6] Burg, K., Haf, H., Wille, F., Meister, A. *Höhere Mathematik für Ingenieure Band 3: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Distributionen, Integraltransformationen.* 6. Auflage. Springer-Vieweg, 2013.

[7] Ansorge, R., Oberle, H.J., Rothe, K., Sonar, Th. *Aufgaben und Lösungen zu Mathematik für Ingenieure 1 u. 2.* 4., erweiterte Auflage. Wiley, 2010.

[8] Arens, T., Hettlich, F., Karpfinger, C., Kockelkorn, U., Lichtenegger, K., Stachel, H. *Arbeitsbuch Mathematik.* Springer Sprektrum, 4. Auflage. Springer, 2018.

[9] Beutelspacher, A. *Mathe-Basics zum Studienbeginn.* Springer Spektrum, 2., überarbeitete Auflage. Springer, 2016.

[10] Hildebrandt, S. *Analysis 1.* 2., korrigierte Auflage. Springer, 2006.

[11] Fischer, G. *Lineare Algebra.* Springer Spektrum, 18., aktualisierte Auflage. Springer, 2014.

[12] Henze, N. *Stochastik für Einsteiger*. Springer Spektrum, 11., überarbeitete Auflage. Springer, 2017.

[13] Walz, G. (Hrsg.). *Lexikon der Mathematik*. Springer Spektrum, 2. Auflage. Springer, 2017.

[14] Zeidler, E. (Hrsg.). *Springer-Taschenbuch der Mathematik*. Springer Spektrum, 3., neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Springer, 2013.

Index

Personenverzeichnis

Symbolverzeichnis

Interpolationspolynom

Kombinatorik

Maschinenzahlen

Mengen