Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Blatt 1
Lösungshinweise

Aufgabe 1 (1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 Punkte): Berechnen bzw. vereinfachen Sie:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4},\qquad \frac{1}{3}+\frac{1}{6},\qquad \frac{\frac{6}{5}}{\frac{12}{15}},\qquad \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\cdot\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right]^{-1},\qquad \frac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x}}},\qquad \frac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x}}}}.$$

Lösung: Wir berechnen direkt

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}=\frac{2\cdot 9}{3\cdot 4}=\frac{3}{2},\qquad \frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\qquad \frac{\frac{6}{5}}{\frac{12}{15}}=\frac{6}{5}\cdot\frac{15}{12}=\frac{6\cdot 15}{5\cdot 12}=\frac{3}{2}.$$

Ferner

$$\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]\cdot\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right]^{-1}=\left[\frac{3}{6}-\frac{2}{6}\right]\cdot\left[\frac{4}{12}-\frac{3}{12}\right]^{-1}=\frac{1}{6}\cdot\left[\frac{1}{12}\right]^{-1}=\frac{1}{6}\cdot 12=2.$$

Schließlich berechnen wir

$$\frac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x}}}=\frac{1}{x+\cfrac{x}{x^2+1}}=\frac{x^2+1}{x(x^2+1)+x}=\frac{x^2+1}{x^3+2x}$$

und damit

$$\frac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x}}}}=\frac{1}{x+\cfrac{x^2+1}{x^3+2x}}=\frac{x^3+2x}{x(x^3+2x)+(x^2+1)}=\frac{x^3+2x}{x^4+3x^2+1}.$$

Aufgabe 2 (3 + 3 + 4 Punkte): Es seien A und B zwei beliebige Aussagen. Verifizieren Sie mithilfe von Wahrheitstafeln:

(a) Es gilt $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

(b) Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn $A \wedge (\neg B)$ falsch ist.

(Dies begründet, warum die Vorgehensweise bei einem *Widerspruchsbeweis* erlaubt ist.)

(c) Es gelten die *de-morganschen Regeln*

$$\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B) \qquad \text{und} \qquad \neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B).$$

Lösung: (a) Es sei C die Aussage $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$. Wir erstellen die folgende Wahrheitstafel:

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg B)$	$w(\neg A)$	$w(A \Rightarrow B)$	$w(\neg B \Rightarrow \neg A)$	$w(C)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1

Es gilt also in jedem Fall $w(C) = 1$, womit die Behauptung bewiesen ist.

(b) Wir betrachten die folgende Wahrheitstafel:

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg B)$	$w(A \wedge (\neg B))$	$w(A \Rightarrow B)$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1

Dies bestätigt, dass $w(A \Rightarrow B) = 1$ genau dann, wenn $w(A \wedge (\neg B)) = 0$.

(c) Es bezeichne C die Aussage $\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$. Für diese erstellen wir die folgende Wahrheitstafel:

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \vee B)$	$w(\neg(A \vee B))$	$w(\neg A)$	$w(\neg B)$	$w((\neg A) \wedge (\neg B))$	$w(C)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1

Nun bezeichne C die Aussage $\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B)$. Für diese erstellen wir die folgende Wahrheitstafel:

$w(A)$	$w(B)$	$w(A \wedge B)$	$w(\neg(A \wedge B))$	$w(\neg A)$	$w(\neg B)$	$w((\neg A) \vee (\neg B))$	$w(C)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1

Aufgabe 3 (10 Punkte): Wir betrachten die folgenden beiden Aussagen:

$$A: \quad \exists t \in \mathbb{R}: \quad \Big[\forall s \in \mathbb{R}: \quad \big[\forall p \in \mathbb{R} \quad \text{gilt} \quad s = p + t\big]\Big],$$

$$B: \quad \forall s \in \mathbb{R}: \quad \Big[\forall p \in \mathbb{R}: \quad \big[\exists t \in \mathbb{R} \quad \text{sodass} \quad s = p + t\big]\Big].$$

Sind diese Aussagen wahr oder falsch? Bestimmen Sie jeweils die Negation der Aussage.

Lösung: (a) Die Aussage bedeutet in Worten: Es gibt eine reelle Zahl t, sodass für alle reellen Zahlen s und p gilt: $s - p = t$. Diese Aussage ist offensichtlich falsch.
Für die Negation gilt

$$\begin{aligned}
&\neg\Big[\exists t \in \mathbb{R}\colon \Big[\forall s \in \mathbb{R}\colon \big[\forall p \in \mathbb{R}\colon s = p + t\big]\Big]\Big] \\
\Leftrightarrow \quad &\forall t \in \mathbb{R}\colon \neg\Big[\forall s \in \mathbb{R}\colon \big[\forall p \in \mathbb{R}\colon s = p + t\big]\Big] \\
\Leftrightarrow \quad &\forall t \in \mathbb{R}\colon \Big[\exists s \in \mathbb{R}\colon \neg\big[\forall p \in \mathbb{R}\colon s = p + t\big]\Big] \\
\Leftrightarrow \quad &\forall t \in \mathbb{R}\colon \Big[\exists s \in \mathbb{R}\colon \big[\exists p \in \mathbb{R}\colon s \neq p + t\big]\Big]
\end{aligned}$$

(In Worten: Für alle reellen Zahlen t gibt es reelle Zahlen s und p, deren Differenz nicht t ist.)

(b) Die Aussage bedeutet in Worten: Für alle reellen Zahlen s und p gilt: Es gibt eine reelle Zahl t mit der Eigenschaft $s - p = t$. Diese Aussage ist richtig.
Für die Negation gilt

$$\begin{aligned}
&\neg\Big[\forall s \in \mathbb{R}\colon \Big[\forall p \in \mathbb{R}\colon \big[\exists t \in \mathbb{R}\colon s = p + t\big]\Big]\Big] \\
\Leftrightarrow \quad &\exists s \in \mathbb{R}\colon \neg\Big[\forall p \in \mathbb{R}\colon \big[\exists t \in \mathbb{R}\colon s = p + t\big]\Big] \\
\Leftrightarrow \quad &\exists s \in \mathbb{R}\colon \Big[\exists p \in \mathbb{R}\colon \neg\big[\exists t \in \mathbb{R}\colon s = p + t\big]\Big] \\
\Leftrightarrow \quad &\exists s \in \mathbb{R}\colon \Big[\exists p \in \mathbb{R}\colon \big[\forall t \in \mathbb{R}\colon s \neq p + t\big]\Big]
\end{aligned}$$

(In Worten: Es gibt reelle Zahlen s und p mit der Eigenschaft, dass alle reellen Zahlen t nicht gleich der Differenz $s - p$ sind.)

Aufgabe 4 (4 + 4 + 2 Punkte):

(a) Bestimmen Sie für $A := \{1, 2, 3, 4\}$, $B := \{2, 4, 5\}$ und $C := \{1, 7\}$ die Mengen

$$A \cap B, \qquad A \cup B, \qquad A \setminus B, \qquad \text{und} \qquad B \times (C \cap A).$$

(b) Es sei A eine beliebige Menge. Mit $\mathcal{P}(A)$ bezeichnen wir die *Potenzmenge von A*, d. h. $\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$. Beispielsweise gilt $\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Bestimmen Sie ebenso

$$\mathcal{P}\big(\{1, 3, 5\}\big) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{P}\big(\{1, 2, \{1\}\}\big).$$

(c) Es bezeichne $A \subset \mathbb{N}$ die Menge aller durch 4 teilbaren Zahlen und $B \subset \mathbb{N}$ die Menge aller durch 6 teilbaren Zahlen. Bestimmen Sie $A \cap B$.

Lösung: (a) Es gilt

$$A \cap B = \{2, 4\}, \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad A \setminus B = \{1, 3\}$$

und

$$B \times (C \cap A) = \{2, 4, 5\} \times \{1\} = \{(2, 1), (4, 1), (5, 1)\}.$$

(b) Wir bestimmen

$$\mathcal{P}\big(\{1, 3, 5\}\big) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}\big\}$$

und

$$\mathcal{P}\big(\{1, 2, \{1\}\}\big) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{\{1\}\}, \{1, 2\}, \{1, \{1\}\}, \{2, \{1\}\}, \{1, 2, \{1\}\}\big\}.$$

(c) Die Menge $A \cap B$ ist definitionsgemäß die Menge aller natürlichen Zahlen, die sowohl durch 4 als auch durch 6 teilbar sind. Wegen $4 = 2 \cdot 2$ und $6 = 2 \cdot 3$, sind das genau die natürlichen Zahlen, die durch $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ (das kleinste gemeinsame Vielfache von 4 und 6) teilbar sind. Also ist $A \cap B$ die Menge aller durch 12 teilbaren Zahlen.