Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Präsenzübungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Blatt 11 A
Lösungshinweise

Aufgabe 1: Die einleuchtende Vorstellung, dass man den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen dadurch erhält, dass man den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen durch eine Lösung i der Gleichung $x^2 = -1$ ergänzt, kann auf folgende Weise formalisiert werden: Wir versehen $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ mit der Addition $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und der Multiplikation $\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die durch

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \text{bzw.} \quad (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

definiert sind.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ einen Körper darstellt, indem Sie die Körperaxiome nachrechnen.

(b) Wir identifizieren $\mathbb{R}$ mit $\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$, also insbesondere $1 \in \mathbb{R}$ mit $(1, 0) \in \mathbb{C}$, und setzen $\mathrm{i} := (0, 1)$. Verifizieren Sie, dass $\mathrm{i}^2 = -1$ gilt, und zeigen Sie, dass sich jedes $z \in \mathbb{C}$ eindeutig in der Form $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ darstellen lässt.

Lösung:

(a) Wir rechnen die Gültigkeit der Körperaxiome für $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ nach:

- $(\mathbb{C}, +)$ *ist eine kommutative Gruppe.* Das neutrale Element bezüglich $+$ (d. h. das Nullelement in $\mathbb{C}$) ist $(0, 0)$. Zu jedem $(x, y) \in \mathbb{C}$ ist $(-x, -y)$ das inverse Element bezüglich $+$. Da $+$ komponentenweise definiert ist, übertragen sich Kommutativität sowie das Assoziativgesetz direkt von $(\mathbb{R}, +)$.
- $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ *ist eine kommutative Gruppe.* Wir überzeugen uns zunächst davon, dass

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)\\ &= (x_2x_1 - y_2y_1, x_2y_1 + x_1y_2) = (x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1)\end{aligned}$$

für alle $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ gilt, d. h. die Verknüpfung $\cdot$ ist kommutativ. Das neutrale Element bezüglich $\cdot$ (d. h. das Einselement in $\mathbb{C}$) ist $(1, 0)$; in der Tat gilt

$$(1, 0) \cdot (x, y) = (x, y) = (x, y) \cdot (1, 0) \qquad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}.$$

Zu jedem $(x,y) \in \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ ist

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) \in \mathbb{C}$$

das inverse Element bezüglich $\cdot$; tatsächlich haben wir

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) \cdot (x,y) \\
&\qquad = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\,x - \frac{-y}{x^2+y^2}\,y, \frac{x}{x^2+y^2}\,y + \frac{-y}{x^2+y^2}\,x\right) = (1,0)
\end{aligned}$$

und

$$(x,y) \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) = (1,0),$$

wobei sich die letztgenannte Identität analog zur ersten ergibt oder aufgrund der Kommutativität von $\cdot$ aus dieser folgt. Die Assoziativität rechnen wir mit

$$\begin{aligned}
&\big((x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)\big)\cdot(x_3,y_3) \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)\cdot(x_3,y_3) \\
&= \big((x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (x_1y_2 + x_2y_1)y_3, (x_1x_2 - y_1y_2)y_3 + x_3(x_1y_2 + x_2y_1)\big) \\
&= \big(x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(x_2y_3 + x_3y_2), x_1(x_2y_3 + x_3y_2) + (x_2x_3 - y_2y_3)y_1\big) \\
&= (x_1,y_1)\cdot(x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + x_3y_2) \\
&= (x_1,y_1)\cdot\big((x_2,y_2)\cdot(x_3,y_3)\big)
\end{aligned}$$

für alle $(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) \in \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ nach.

- *Es gilt das Distributivgesetz.* Für $(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) \in \mathbb{C}$ rechnen wir (unter Verwendung des Distributivgesetzes auf $\mathbb{R}$) nach, dass

$$\begin{aligned}
&(x_1,y_1)\cdot\big((x_2,y_2) + (x_3,y_3)\big) \\
&= (x_1,y_1)\cdot(x_2+x_3, y_2+y_3) \\
&= \big(x_1(x_2+x_3) - y_1(y_2+y_3), x_1(y_2+y_3) + (x_2+x_3)y_1\big) \\
&= \big((x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1x_3 - y_1y_3), (x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1y_3 + x_3y_1)\big) \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + x_3y_1) \\
&= (x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) + (x_1,y_1)\cdot(x_3,y_3).
\end{aligned}$$

(b) Mit den vereinbarten Identifikationen berechnen wir

$$\mathrm{i}^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1.$$

Ferner sehen wir, dass für alle $z = (x,y) \in \mathbb{C}$

$$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1)\cdot(y,0) = x + \mathrm{i}\cdot y = x + \mathrm{i}y.$$

Dies zeigt die gewünschte Darstellung. Dass diese eindeutig ist, sieht man, indem man die obige Rechnung von rechts nach links liest.

Aufgabe 2: Beweisen Sie **mittels vollständiger Induktion**, dass

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{n+1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Lösung: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ betrachten wir die Aussage

$$A(n): \qquad \binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{n+1}.$$

Induktionsanfang: $A(0)$ ist wegen $\binom{0}{0} = 1 = \frac{4^0}{0+1}$ offensichtlich richtig.

Induktionsschritt: Wir nehmen an (*Induktionsannahme*), dass $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ wahr ist. Damit rechnen wir nun die Gültigkeit von $A(n+1)$ (*Induktionsbehauptung*) nach:

$$\begin{aligned}
\binom{2(n+1)}{n+1} &= \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \\
&= \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \\
&= \binom{2n}{n} \underbrace{\frac{2(2n+1)}{n+1}}_{\geq 0} \\
&\overset{\text{I.A.}}{\geq} \frac{4^n}{n+1} \frac{2(2n+1)}{n+1} \\
&= \frac{4^n}{n+1} \frac{4(n+\frac{1}{2})}{n+1} \\
&= \frac{4^{n+1}}{(n+1)+1} \frac{(n+\frac{1}{2})(n+2)}{(n+1)^2} \\
&= \underbrace{\frac{4^{n+1}}{(n+1)+1}}_{\geq 0} \frac{n^2+\frac{5}{2}n+1}{(n+1)^2} \\
&\geq \frac{4^{n+1}}{(n+1)+1} \underbrace{\frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2}}_{=1} \\
&= \frac{4^{n+1}}{(n+1)+1}.
\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist die Aussage $A(n)$ damit für alle $n \in \mathbb{N}_0$ richtig.