Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*

Wintersemester 2020/21

Blatt 10

Lösungshinweise

Notation:

(a) Es sei V ein Vektorraum über dem Grundkörper $\mathbb{K}$. Sind n beliebige Vektoren $\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(n)} \in V$ gegeben, so definieren wir ihre *lineare Hülle* durch

$$\operatorname{Spann}(\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(n)}) := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{v}^{(j)} \,\middle|\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Man kann zeigen (siehe Aufgabe 2 (a) auf Präsenzblatt 9 B), dass $\operatorname{Spann}(\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(n)})$ einen Unterraum von V darstellt. Man nennt $\operatorname{Spann}(\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(n)})$ deshalb auch den *von* $\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(n)}$ *aufgespannten Unterraum von* V.

(b) Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$. Ist M eine beliebige Teilmenge von V, so definieren wir $M^\perp := \{\mathbf{v} \in V \mid \forall \mathbf{w} \in M : \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0\}$. Wir nennen $M^\perp$ das *orthogonale Komplement von* M. Man kann zeigen, dass $M^\perp$ immer einen Unterraum von V darstellt.

Aufgabe 1 (6 + 6 Punkte): Im $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die Vektoren

$$\mathbf{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{v}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Wir setzen

$$U := \operatorname{Spann}\left(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}\right) \qquad \text{und} \qquad V := \operatorname{Spann}\left(\mathbf{v}^{(3)}, \mathbf{v}^{(4)}\right).$$

Bestimmen Sie eine Basis des Unterraums $U \cap V$.

Hinweis: Für jedes $\mathbf{x} \in U \cap V$ gibt es $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{v}^{(1)} + \lambda_2 \mathbf{v}^{(2)} = \lambda_3 \mathbf{v}^{(3)} + \lambda_4 \mathbf{v}^{(4)}$.

(b) Wir betrachten nun den Unterraum

$$W := \operatorname{Spann}\left(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}, \mathbf{v}^{(4)}\right).$$

Bestimmen Sie $\dim W$ und geben Sie eine Orthonormalbasis von W an.

Lösung:

(a) Es sei $\mathbf{x} \in U \cap V$. Wie im Hinweis angegeben gibt es dann $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{v}^{(1)} + \lambda_2 \mathbf{v}^{(2)} = \lambda_3 \mathbf{v}^{(3)} + \lambda_4 \mathbf{v}^{(4)}.$$

Dies führt uns auf die Bedingung

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

die wir zu dem folgenden linearen Gleichungssystem umschreiben können:

$$\lambda_1 = \lambda_3 \tag{2}$$
$$\lambda_2 = \lambda_4 \tag{3}$$
$$\lambda_2 = \lambda_3 \tag{4}$$
$$\lambda_1 = \lambda_4 \tag{5}$$

Daraus folgern wir, dass

$$\lambda_1 \overset{(2)}{=} \lambda_3 \overset{(4)}{=} \lambda_2 \overset{(3)}{=} \lambda_4.$$

Umgekehrt ist die Bedingung (1) natürlich erfüllt, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ gilt. Dementsprechend gilt $\mathbf{x} \in U \cap V$ genau dann, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{v}$ mit

$$\mathbf{v} := \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v}^{(3)} + \mathbf{v}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also haben wir $U \cap V = \operatorname{Spann}(\mathbf{v})$ und $\mathbf{v}$ ist eine Basis von $U \cap V$.

(b) Aus Aufgabenteil (a) wissen wir bereits, dass $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}, \mathbf{v}^{(4)}$ die Relation $\mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}^{(2)} + (-1)\mathbf{v}^{(3)} + (-1)\mathbf{v}^{(4)} = \mathbf{0}$ erfüllen und deshalb nicht linear unabhängig sein können. Insbesondere haben wir $\mathbf{v}^{(4)} = \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}^{(2)} + (-1)\mathbf{v}^{(3)}$ und deshalb

$$W = \operatorname{Spann}(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}).$$

Wir behaupten, dass $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}$ linear unabhängig sind und dementsprechend eine Basis von W darstellen. Dazu seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gegeben, die die Bedingung $\lambda_1 \mathbf{v}^{(1)} + \lambda_2 \mathbf{v}^{(2)} + \lambda_3 \mathbf{v}^{(3)} = \mathbf{0}$ erfüllen. Konkret bedeutet dies

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

was wir zu dem folgenden linearen Gleichungssystem umschreiben können:

$$\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \tag{6}$$
$$\lambda_2 = 0 \tag{7}$$
$$\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \tag{8}$$
$$\lambda_1 = 0 \tag{9}$$

Gemäß (9) und (7) haben wir $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 0$, woraus sich mit (6) oder (8) unmittelbar $\lambda_3 = 0$ ergibt. Folglich sind $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}$ wie behauptet linear unabhängig und stellen eine Basis von W dar, d. h. $\dim W = 3$.
Wir nutzen nun das Gram-Schmidt-Verfahren, um aus $(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)})$ eine Orthonormalbasis $(\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)}, \mathbf{w}^{(3)})$ von W zu konstruieren. Wir setzen zunächst

$$\mathbf{w}^{(1)} := \frac{\mathbf{v}^{(1)}}{\|\mathbf{v}^{(1)}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dann

$$\tilde{\mathbf{w}}^{(2)} := \mathbf{v}^{(2)} - \langle \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{w}^{(1)} \rangle \mathbf{w}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=0} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{w}^{(2)} := \frac{\tilde{\mathbf{w}}^{(2)}}{\|\tilde{\mathbf{w}}^{(2)}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{w}}^{(3)} &:= \mathbf{v}^{(3)} - \langle \mathbf{v}^{(3)}, \mathbf{w}^{(1)} \rangle \mathbf{w}^{(1)} - \langle \mathbf{v}^{(3)}, \mathbf{w}^{(2)} \rangle \mathbf{w}^{(2)} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und

$$\mathbf{w}^{(3)} := \frac{\tilde{\mathbf{w}}^{(3)}}{\|\tilde{\mathbf{w}}^{(3)}\|} = \tilde{\mathbf{w}}^{(3)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nach Konstruktion bildet $(\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)}, \mathbf{w}^{(3)})$ eine Orthonormalbasis von W.

Aufgabe 2 (5 + 3 + 2 Punkte):

(a) Betrachten Sie den Unterraum $V := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ des $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie $\dim V$ und geben Sie eine Orthonormalbasis von V an.

(b) Ergänzen Sie die in (a) bestimmte Orthonormalbasis von V zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$.

(c) Stellen Sie den kanonischen Einheitsvektor $\mathbf{e}^{(1)}$ als Linearkombination der in (b) bestimmten Basisvektoren dar.

Lösung:

(a) Als Unterraum von $\mathbb{R}^4$ muss $\dim V \leq \dim \mathbb{R}^4 \leq 4$ gelten. Wir wollen nun ausschließen, dass $\dim V = 4$ gelten kann. Wäre $\dim V = 4$, so könnten wir eine Basis von V finden, also ein maximales System $(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}, \mathbf{v}^{(4)})$ linear unabhängiger Vektoren in V. Diese Vektoren wären dann aber auch in $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig, weshalb $(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}, \mathbf{v}^{(4)})$ auch eine Basis von $\mathbb{R}^4$ sein müsste. Weil wir aus der Vorlesung wissen, dass jeder Vektor (in eindeutiger Weise) als Linearkombination der Basisvektoren geschrieben werden kann, wäre damit $V = \text{Spann}(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}, \mathbf{v}^{(4)}) = \mathbb{R}^4$. Dies ist jedoch nicht möglich, weil der Vektor $\mathbf{e}^{(1)} \in \mathbb{R}^4$ offensichtlich nicht zu V gehört. Deshalb muss $\dim V \leq 3$ gelten.
Wir zeigen nun $\dim V = 3$, indem wir drei linear unabhängige Vektoren in V angeben. Wir betrachten

$$\mathbf{v}^{(1)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}^{(2)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{v}^{(3)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese gehören offensichtlich zu V. Wir überzeugen uns nun davon, dass $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}$ linear unabhängig sind. Hierzu nehmen wir an, dass $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ die Bedingung $\lambda_1 \mathbf{v}^{(1)} + \lambda_2 \mathbf{v}^{(2)} + \lambda_3 \mathbf{v}^{(3)} = \mathbf{0}$ erfüllen. Dies bedeutet konkret

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und führt uns deshalb auf das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 &= 0 \\ -\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ gelten muss. Also sind die Vektoren $\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}$ wie behauptet linear unabhängig. Insbesondere haben wir deshalb $\dim V \geq 3$. Weil wir eingangs bereits gesehen haben, dass $\dim V \leq 3$ gelten muss, folgt $\dim V = 3$.

Schließlich bestimmen wir mittels des Gram-Schmidt-Verfahrens aus $(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)})$ eine Orthonormalbasis $(\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)}, \mathbf{w}^{(3)})$ von V. Wir setzen dafür

$$\mathbf{w}^{(1)} := \frac{\mathbf{v}^{(1)}}{\|\mathbf{v}^{(1)}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dann

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{w}}^{(2)} &:= \mathbf{v}^{(2)} - \langle \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{w}^{(1)} \rangle \mathbf{w}^{(1)} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und

$$\mathbf{w}^{(2)} := \frac{\tilde{\mathbf{w}}^{(2)}}{\|\tilde{\mathbf{w}}^{(2)}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{w}}^{(3)} &:= \mathbf{v}^{(3)} - \langle \mathbf{v}^{(3)}, \mathbf{w}^{(1)} \rangle \mathbf{w}^{(1)} - \langle \mathbf{v}^{(3)}, \mathbf{w}^{(2)} \rangle \mathbf{w}^{(2)} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und

$$\mathbf{w}^{(3)} := \frac{\tilde{\mathbf{w}}^{(3)}}{\|\tilde{\mathbf{w}}^{(3)}\|} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Nach Konstruktion bildet $(\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)}, \mathbf{w}^{(3)})$ eine Orthonormalbasis von V.

(b) Bereits in Aufgabenteil (a) haben wir ausgenutzt, dass $\mathbf{e}^{(1)}$ nicht zu V gehört. Somit besteht $(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}, \mathbf{e}^{(1)})$ aus linear unabhängigen Vektoren, bildet also eine Basis von $\mathbb{R}^4$. Aus dieser können wir mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ konstruieren. Die ersten drei Schritte haben wir schon in Aufgabenteil (a) durchgeführt. Es fehlt damit nur der letzte Schritt. Dafür setzen wir

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{w}}^{(4)} &:= \mathbf{e}^{(1)} - \langle \mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{w}^{(1)} \rangle \mathbf{w}^{(1)} - \langle \mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)} \rangle \mathbf{w}^{(2)} - \langle \mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{w}^{(3)} \rangle \mathbf{w}^{(3)} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und schließlich

$$\mathbf{w}^{(4)} := \frac{\tilde{\mathbf{w}}^{(4)}}{\|\tilde{\mathbf{w}}^{(4)}\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Mit $(\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)}, \mathbf{w}^{(3)}, \mathbf{w}^{(4)})$ haben wir dann die gewünschte Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$ gefunden.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{(1)} &= \langle \mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{w}^{(1)} \rangle \mathbf{w}^{(1)} + \langle \mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)} \rangle \mathbf{w}^{(2)} + \langle \mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{w}^{(3)} \rangle \mathbf{w}^{(3)} + \langle \mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{w}^{(4)} \rangle \mathbf{w}^{(4)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{w}^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{w}^{(2)} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \mathbf{w}^{(3)} + \frac{1}{2} \mathbf{w}^{(4)}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (5 + 3 Punkte): Es sei

$$M = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, -1 \leq \lambda \leq 1 \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $M^\perp$.

(b) Bestimmen Sie $(M^\perp)^\perp$ und $\big((M^\perp)^\perp\big)^\perp$.

Lösung: Zur Abkürzung setzen wir $\mathbf{e} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und schreiben $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Es sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Wir sehen damit, dass

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in M^\perp \qquad &\iff \qquad \forall \lambda \in [-1,1]: \ \langle \mathbf{x}, \lambda \mathbf{e} \rangle = 0 \\ &\iff \qquad \langle \mathbf{x}, \mathbf{e} \rangle = 0 \\ &\iff \qquad x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die zwei Vektoren

$$\mathbf{v}^{(1)} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{v}^{(2)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Diese sind offensichtlich linear unabhängig und gehören nach der eingangs bewiesenen Charakterisierung zu $M^\perp$. Wir haben also $\dim M^\perp \geq 2$ und zudem die triviale Abschätzung $\dim M^\perp \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3$. Wegen $\mathbf{e} \notin M^\perp$ ist $\dim M^\perp = 3$ nicht möglich; vgl. Aufgabe 2 (a). Folglich muss $\dim M^\perp = 2$ gelten und $(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})$ stellt eine Basis von $M^\perp$ dar.

Wir nutzen das Gram-Schmidt-Verfahren, um aus $(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)})$ ein Orthonormalsystem von $M^\perp$ zu konstruieren. Hierfür setzen wir

$$\mathbf{w}^{(1)} := \frac{\mathbf{v}^{(1)}}{\|\mathbf{v}^{(1)}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}}^{(2)} &:= \mathbf{v}^{(2)} - \langle \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{w}^{(1)} \rangle \mathbf{w}^{(1)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \underbrace{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle}_{=1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit

$$\mathbf{w}^{(2)} := \frac{\tilde{\mathbf{w}}^{(2)}}{\|\tilde{\mathbf{w}}^{(2)}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Die gewünschte Orthonormalbasis von $M^\perp$ ist also $(\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)})$.

(b) Es sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Weil $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)})$ nach Aufgabenteil (a) eine Basis von $M^\perp$ darstellt, gilt $\mathbf{x} \in (M^\perp)^\perp$ genau dann, wenn die beiden Bedingungen

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{v}^{(1)} \rangle = 0 \qquad \text{und} \qquad \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}^{(2)} \rangle = 0$$

erfüllt sind. In der üblichen Komponentenschreibweise für $\mathbf{x}$ besagen die vorgenannten Bedingungen in äquivalenter Form, dass

$$x_1 - x_2 = 0 \qquad \text{und} \qquad x_1 - x_3 = 0.$$

Hieraus folgt $x_1 = x_2 = x_3$; es existiert also ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{e}$. Umgekehrt liefert uns das Kriterium, dass jeder Vektor dieser Form zu $(M^\perp)^\perp$ gehören muss. Zusammenfassend haben wir also $(M^\perp)^\perp = \operatorname{Spann}(\mathbf{e})$ und damit ferner

$$\big((M^\perp)^\perp\big)^\perp = \operatorname{Spann}(\mathbf{e})^\perp = M^\perp = \operatorname{Spann}(\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)}).$$

Aufgabe 4 (10 Punkte): Für zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ definieren wir das *Vektorprodukt*

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Zeigen Sie (durch direktes Nachrechnen mittels der Definitionen von Vektor- und Skalarprodukt) für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ den *Entwicklungssatz*

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{y} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{z}.$$

Lösung: Gegeben seien drei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$; wir schreiben wie üblich

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Damit rechnen wir nach, dass

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{y} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{z} \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \\
&= (x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cancel{x_1y_1z_1} + x_2y_1z_2 + x_3y_1z_3 \\ \cancel{x_1y_2z_1} + x_2y_2z_2 + x_3y_2z_3 \\ \cancel{x_1y_3z_1} + x_2y_3z_2 + x_3y_3z_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cancel{x_1y_1z_1} + x_2y_2z_1 + x_3y_3z_1 \\ \cancel{x_1y_1z_2} + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_2 \\ \cancel{x_1y_1z_3} + x_2y_2z_3 + x_3y_3z_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_2y_1z_2 - x_2z_1y_2 - x_3y_3z_1 + x_3y_1z_3 \\ x_3y_2z_3 - x_3y_3z_2 - x_1y_1z_2 + x_1y_2z_1 \\ x_1y_3z_1 - x_1y_1z_3 - x_2y_2z_3 + x_2y_3z_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_2(y_1z_2 - z_1y_2) - x_3(y_3z_1 - y_1z_3) \\ x_3(y_2z_3 - y_3z_2) - x_1(y_1z_2 - z_1y_2) \\ x_1(y_3z_1 - y_1z_3) - x_2(y_2z_3 - y_3z_2) \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{x} \times \begin{pmatrix} y_2z_3 - y_3z_2 \\ y_3z_1 - y_1z_3 \\ y_1z_2 - z_1y_2 \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}).
\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe (4 × 5 Punkte):

(a) Es seien A, B, C Mengen. Verdeutlichen Sie die folgende Beziehung zunächst anhand eines Venn-Diagrammes und geben Sie anschließend einen formalen Beweis:

$$(A \cup B) \cap (C \setminus B) \subseteq (A \cup C).$$

Belegen Sie mit einem Beispiel, dass im Allgemeinen keine Gleichheit gelten kann.

(b) Zusammen mit zwei Bekannten nehmen Sie an einem Wettbewerb mit insgesamt sieben Personen teil. Wie viele Möglichkeiten gibt es,

  (i) dass Sie Dritter werden und besser als Ihre beiden Bekannten abschneiden;

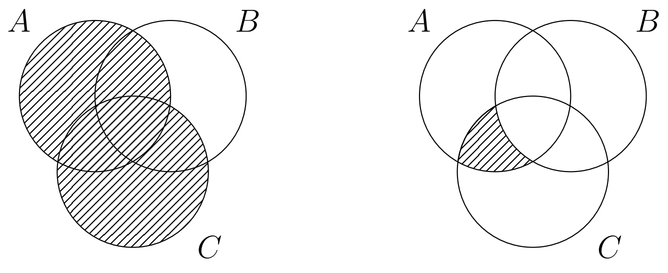
  (ii) dass Sie als Vierter abschneiden, einer Ihrer Bekannten besser ist als Sie und der andere den letzten Platz belegt?

(c) Es seien A, B, C Aussagen. Für welche Kombinationen von $w(A)$, $w(B)$, $w(C)$ sind die Aussagen $A \Rightarrow \neg B$, $\neg B \Rightarrow A$ und $B \Leftrightarrow C$ alle richtig?

(d) Es sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe mit neutralem Element $e \in G$. Zeigen Sie, dass es für alle $g \in G$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $g^n = e$, wobei $g^n := \underbrace{g \circ \cdots \circ g}_{n \text{ Faktoren}}$.

Lösung:

(a) Die folgenden beiden Venn-Diagramme veranschaulichen die Situation:



$A \cup C$ $\qquad$ $(A \cup B) \cap (C \setminus B)$

Dies stützt die Behauptung, dass allgemein $(A \cup B) \cap (C \setminus B) \subseteq (A \cup C)$ gilt. Den formalen Beweis dieser Inklusion erbringen wir wie folgt: Es sei $x \in (A \cup B) \cap (C \setminus B)$ gegeben. Dann muss $x \in C \setminus B$ und damit $x \in C$ gelten, woraus sich insbesondere $x \in A \cup C$ ergibt. Dies zeigt, dass $(A \cup B) \cap (C \setminus B) \subset A \cup C$.
Um einzusehen, dass hier im Allgemeinen keine Gleichheit gelten kann, betrachten wir die Mengen $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ und $C = \{3\}$. Für diese gilt

$$(A \cup B) \cap (C \setminus B) = \{1, 2\} \cap \{3\} = \emptyset,$$

wohingegen

$$A \cup C = \{1, 3\},$$

sodass die beiden Mengen nicht gleich sind.

(b) (i) Die erste Person kann die Plätze 4-7 belegen (4 Möglichkeiten) und die zweite Person kann eine der drei verbleibenden Plätze belegen (2-Permutation aus $\{1, \ldots, 4\}$ ohne Wiederholung). Die übrigen Läufer belegen beliebig einen der 4 restlichen Plätze ($4! = 24$ Möglichkeiten). Insgesamt gibt es also $4 \cdot 3 \cdot 24 = 288$ Möglichkeiten.

(ii) Eine der beiden anderen Personen belegt den letzten Platz (2 Möglichkeiten), die zweite Person belegt einen der Plätze 1-3. Die übrigen Läufer belegen beliebig einen der 4 restlichen Plätze ($4! = 24$ Möglichkeiten). Insgesamt gibt es also $2 \cdot 3 \cdot 24 = 144$ Möglichkeiten.

(c) Zunächst bestimmen wir alle möglichen Kombinationen mit Hilfe einer Wahrheitstafel:

$w(A)$	$w(B)$	$w(C)$	$w(\neg B)$	$w(A \Rightarrow \neg B)$	$w(\neg B \Rightarrow A)$	$w(B \Leftrightarrow C)$
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0	1

.

Die Aussagen $A \Rightarrow \neg B$, $\neg B \Rightarrow A$ und $B \Leftrightarrow C$ sind also genau dann alle richtig, falls entweder

- A richtig, B falsch und C falsch oder
- A falsch, B richtig und C richtig sind.

(d) Es sei $g \in G$ beliebig vorgegeben. Wir betrachten die Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to G, n \mapsto g^n$. Das Bild $\varphi(\mathbb{N}) = \{g^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dieser Abbildung stellt eine Teilmenge der nach Voraussetzung endlichen Menge G dar, muss also selbst endlich sein. Folglich kann φ nicht injektiv sein. (Wäre nämlich φ injektiv, dann würde φ eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to \varphi(\mathbb{N})$ liefern, weshalb $\varphi(\mathbb{N})$ abzählbar unendlich müsste, also insbesondere nicht endlich sein könnte.) Da φ nicht injektiv ist, gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_1 \neq n_2$, sodass $\varphi(n_1) = \varphi(n_2)$, d. h. $g^{n_1} = g^{n_2}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $n_2 > n_1$ gilt. Somit ist $n := n_2 - n_1 \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass n die gewünschte Eigenschaft besitzt. Tatsächlich erhalten wir

$$g^n \circ g^{n_1} = g^{n_2 - n_1} \circ g^{n_1} = g^{(n_2 - n_1) + n_1} = g^{n_2} = g^{n_1}$$

und damit schließlich

$$g^n = g^n \circ e = g^n \circ \left(g^{n_1} \circ (g^{n_1})^{-1}\right) = \left(g^n \circ g^{n_1}\right) \circ (g^{n_1})^{-1} = g^{n_1} \circ (g^{n_1})^{-1} = e.$$