Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Präsenzübungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Blatt 11 B
Lösungshinweise

Aufgabe 1: Gegeben sei das Polynom

$$p(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 - 5x + 12.$$

(a) Zerlegen Sie p vollständig in Linearfaktoren.

(b) Bestimmen Sie Polynome q und r, die beide Grad ≤ 2 haben und die Bedingung

$$p(x) = q(x)(x-1) + r(x)$$

erfüllen.

Lösung:

(a) Für p „erraten" wir die Nullstelle $x = 2$. In der gesuchten Faktorisierung von p muss demnach der Linearfaktor $x - 2$ auftauchen. Mithilfe der Polynomdivision

$$\begin{array}{l}
\big(\tfrac{1}{4}x^3 - x^2 - 5x + 12\big) : \big(x-2\big) = \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x - 6 \\
\underline{-\tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2} \\
\qquad\quad -\tfrac{1}{2}x^2 - 5x \\
\qquad\quad \underline{\ \ \tfrac{1}{2}x^2 - x} \\
\qquad\qquad\qquad -6x + 12 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\ \ 6x - 12} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

bestimmen wir die Zerlegung

$$p(x) = \Big(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 6\Big)(x-2). \tag{1}$$

Anschließend zerlegen wir das quadratische Polynom mittels quadratischer Ergänzung

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 6 &= \frac{1}{4}\big(x^2 - 2x - 24\big) \\
&= \frac{1}{4}\big((x^2 - 2x + 1) - 1 - 24\big) \\
&= \frac{1}{4}\big((x-1)^2 - 5^2\big) \\
&= \frac{1}{4}(x - 1 - 5)(x - 1 + 5) \\
&= \frac{1}{4}(x-6)(x+4),
\end{aligned}$$

womit sich zusammenfassend die gewünschte Linearfaktorzerlegung von p ergibt:

$$p(x) = \frac{1}{4}(x+4)(x-2)(x-6)$$

An dieser können wir insbesondere die Nullstellen von p ablesen, nämlich $\{-4, 2, 6\}$.

Bemerkung: Alternativ zur Polynomdivision kann man (1) auch mittels des Horner-Schemas

$$\begin{array}{c|cccc}
 & \frac{1}{4} & -1 & -5 & 12 \\
+ & & \frac{1}{2} & -1 & -12 \\
\hline
2 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -6 & 0
\end{array}$$

bestimmen. In der letzten Zeile können wir die Koeffizienten des quadratischen Polynoms ablesen, das in der Zerlegung (1) auftaucht.

(b) Mithilfe der Polynomdivision

$$\begin{array}{llll}
\big(\frac{1}{4}x^3 & -x^2 & -5x & +12\big) : \big(x-1\big) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{23}{4} + \dfrac{\frac{25}{4}}{x-1} \\
-\frac{1}{4}x^3 & +\frac{1}{4}x^2 & & \\
\hline
 & -\frac{3}{4}x^2 & -5x & \\
 & \frac{3}{4}x^2 & -\frac{3}{4}x & \\
\cline{2-3}
 & & -\frac{23}{4}x & +12 \\
 & & \frac{23}{4}x & -\frac{23}{4} \\
\cline{3-4}
 & & & \frac{25}{4}
\end{array}$$

sehen wir, dass mit

$$q(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{23}{4} \qquad \text{und} \qquad r(x) = \frac{25}{4}$$

die geforderte Bedingung $p(x) = q(x)(x-1) + r(x)$ erfüllt ist. Diese beiden Polynome erfüllen zudem die in der Aufgabenstellung formulierte Grad-Bedingung.

Bemerkung: Es gibt jedoch noch weitere Polynome mit diesen Eigenschaften. Konkret haben wir für jedes Polynom g vom Grad ≤ 1, dass

$$p(x) = \big(q(x) + g(x)\big)(x-1) + \big(r(x) - g(x)(x-1)\big) = \tilde{q}(x)(x-1) + \tilde{r}(x),$$

wobei $\tilde{q}(x) := q(x) + g(x)$ und $\tilde{r}(x) := r(x) - g(x)(x-1)$ beide ebenfalls Grad ≤ 2 haben. Die Darstellung $p(x) = q(x)(x-1) + r(x)$ wird eindeutig, wenn wir die Grad-Bedingung an r zu Grad 0 verschärfen, d. h. wenn wir fordern, dass r konstant ist.

Aufgabe 2: Gegeben sei die Funktion

$$f:\ [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

Bestimmen Sie ein Polynom p möglichst kleinen Grades, das die Funktion f an den Stellen $x_0 = 0$, $x_1 = 3$ und $x_2 = 8$ interpoliert.

Lösung: Mit den vorgegebenen Stützstellen x_j bestimmen wir $y_j = f(x_j)$ für $j = 0, 1, 2$. Die so erhaltenen Werte fassen wir in der folgenden Wertetabelle zusammen:

j	0	1	2
x_j	0	3	8
y_j	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Gesucht ist also das Interpolationspolynom p_2 zu den Stützstellen x_j und Werten y_j für $j = 0, 1, 2$.

Lösung mithilfe der Lagrangeschen Darstellung: Für $x \in \mathbb{R}$ berechnen wir

$$\begin{aligned} p_2(x) &= 1 \cdot \frac{x-3}{0-3} \cdot \frac{x-8}{0-8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x-0}{3-0} \cdot \frac{x-8}{3-8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x-0}{8-0} \cdot \frac{x-3}{8-3} \\ &= \frac{1}{24}(x-3)(x-8) - \frac{1}{30}x(x-8) + \frac{1}{120}x(x-3) \\ &= \frac{1}{24}(x^2 - 11x + 24) - \frac{1}{30}(x^2 - 8x) + \frac{1}{120}(x^2 - 3x) \\ &= \frac{1}{60}x^2 - \frac{13}{60}x + 1. \end{aligned}$$

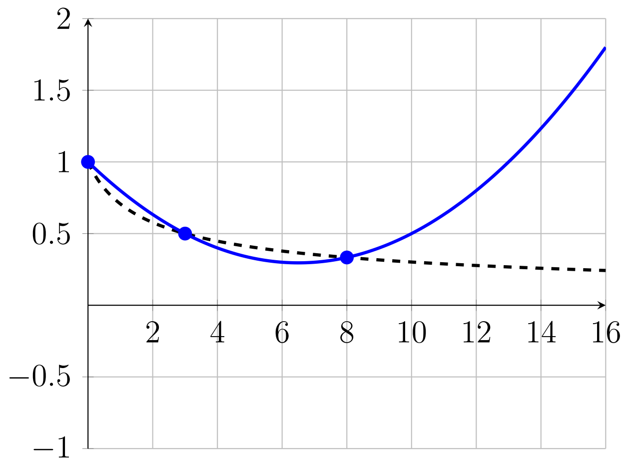
Lösung mithilfe der Newtonschen Darstellung: Für $x \in \mathbb{R}$ berechnen wir die dividierten Differenzen mit dem folgenden Schema:

$$\begin{array}{r|l|l|l} x_0 = 0 & y[x_0] = 1 & & \\ & & y[x_0, x_1] = \frac{\frac{1}{2}-1}{3-0} = -\frac{1}{6} & \\ x_1 = 3 & y[x_1] = \frac{1}{2} & & y[x_0, x_1, x_2] = \frac{-\frac{1}{30}+\frac{1}{6}}{8-0} = \frac{1}{60} \\ & & y[x_1, x_2] = \frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{8-3} = -\frac{1}{30} & \\ x_2 = 8 & y[x_2] = \frac{1}{3} & & \end{array}$$

Damit erhalten wir die Newtonsche Darstellung

$$\begin{aligned} p_2(x) &= y[x_0] + y[x_0, x_1]x + y[x_0, x_1, x_2]x(x-3) \\ &= 1 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{60}x(x-3) \\ &= \frac{1}{60}x^2 - \frac{13}{60}x + 1. \end{aligned}$$

In der nachfolgenden Grafik sind f (gestrichelt) und p_2 (blau) dargestellt.



Aufgabe 3: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. Für $g_1, g_2 \in G$ schreiben wir $g_1 \sim g_2$, falls es ein $h \in G$ gibt, sodass $g_2 = h \cdot g_1 \cdot h^{-1}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf G definiert.

(b) Bestimmen Sie die Äquivalenzklasse von e bezüglich $\sim$.

(c) Es sei G Abelsch. Bestimmen Sie alle Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$.

Lösung:

(a) Wir rechnen für $\sim$ die definierenden Eigenschaften einer Äquivalenzrelation nach:

- *Reflexivität:* Für $g \in G$ gilt $g = e \cdot g \cdot e^{-1}$ aufgrund der charakteristischen Eigenschaft des neutralen Elements $e \in G$. Definitionsgemäß haben wir also $g \sim g$ (mit $h = e$).
- *Symmetrie:* Es seien $g_1, g_2 \in G$ mit $g_1 \sim g_2$ gegeben. Laut Definition gibt es ein $h \in G$, sodass $g_2 = h \cdot g_1 \cdot h^{-1}$. Damit haben wir auch

$$\begin{aligned} h^{-1} \cdot g_2 \cdot (h^{-1})^{-1} &= h^{-1} \cdot (h \cdot g_1 \cdot h^{-1}) \cdot (h^{-1})^{-1} \\ &= (h^{-1} \cdot h) \cdot g_1 \cdot (h^{-1} \cdot (h^{-1})^{-1}) \\ &= e \cdot g_1 \cdot e \\ &= g_1, \end{aligned}$$

  also $g_2 \sim g_1$ (mit h^{-1} anstelle von h).
- *Transitivität:* Gegeben seien $g_1, g_2, g_3 \in G$ mit $g_1 \sim g_2$ und $g_2 \sim g_3$. Gemäß der Definition von $\sim$ finden wir $h_1, h_2 \in G$, sodass $g_2 = h_1 \cdot g_1 \cdot h_1^{-1}$ und $g_3 = h_2 \cdot g_2 \cdot h_2^{-1}$. Zusammenfassend gilt also

$$\begin{aligned} g_3 &= h_2 \cdot g_2 \cdot h_2^{-1} \\ &= h_2 \cdot (h_1 \cdot g_1 \cdot h_1^{-1}) \cdot h_2^{-1} \\ &= (h_2 \cdot h_1) \cdot g_1 \cdot (h_1^{-1} \cdot h_2^{-1}) \\ &= (h_2 \cdot h_1) \cdot g_1 \cdot (h_2 \cdot h_1)^{-1}, \end{aligned}$$

  d. h. wir haben $g_1 \sim g_3$ (mit $h = h_2 \cdot h_1$).

(b) Es sei $g \in G$ mit der Eigenschaft $e \sim g$ gegeben. Dann existiert ein $h \in G$, sodass $g = h \cdot e \cdot h^{-1}$. Unter Ausnutzung der Eigenschaften des neutralen bzw. inversen Elements lässt sich dies vereinfachen zu

$$g = h \cdot e \cdot h^{-1} = h \cdot h^{-1} = e.$$

Folglich besteht die Äquivalenzklasse von e nur aus e selbst; mit anderen Worten,

$$[e] = \{g \in G \mid e \sim g\} = \{e\}.$$

(c) Ist G Abelsch, dann bestehen alle Äquivalenzklassen aus jeweils einem einzelnen Element, d. h. es ist $[g] = \{g\}$ für alle $g \in G$. Dies sehen wir wie folgt: Sind $g_1, g_2 \in G$ mit $g_1 \sim g_2$ gegeben, dann existiert ein $h \in G$ mit $g_2 = h \cdot g_1 \cdot h^{-1}$. Da G Abelsch ist, vereinfacht sich dies zu

$$g_2 = h \cdot g_1 \cdot h^{-1} = g_1 \cdot (h \cdot h^{-1}) = g_1 \cdot e = g_1.$$

Dementsprechend stimmt $\sim$ auf G mit $=$ überein. Es gilt also wie behauptet $[g] = \{g\}$ für alle $g \in G$.