Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Zusatzblatt
Lösungshinweise

Zusatzaufgabe 1 (3 × 5 Punkte): Beweisen Sie die folgenden Aussagen jeweils durch vollständige Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $9^{2n-1} + 1$ durch 10 teilbar.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(2n)! \geq (n!)^2$.

Lösung 1:

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $A(n)$ die Aussage

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Für den *Induktionsanfang* überprüfen wir die Gültigkeit der Aussage $A(1)$ mittels

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}.$$

Für den *Induktionsschritt* machen wir die *Induktionsannahme*, dass $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig ist, und weisen damit die Gültigkeit der *Induktionsbehauptung* $A(n+1)$ mit der folgenden Rechnung nach:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&\overset{A(n)}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n+1}{(n+1)+1}
\end{aligned}$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ die Aussage, dass die Zahl $9^{2n-1}+1$ durch 10 teilbar ist. Für $n=1$ ist $9^{2n-1}+1=10$ offensichtlich durch 10 teilbar, womit der *Induktionsanfang* $A(1)$ bewiesen ist. Wir machen nun die *Induktionsannahme*, dass $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig ist; es gibt also ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $9^{2n-1}+1=10k$. Damit rechnen wir nach, dass

$$9^{2(n+1)-1}+1=9^{2n+1}+1=81\cdot 9^{2n-1}+1=81(9^{2n-1}+1)-8\cdot 10 \overset{A(n)}{=} 10(81k-8),$$

d. h. die Zahl $9^{2(n+1)-1}+1$ ist durch 10 teilbar, womit die Gültigkeit von $A(n+1)$ bewiesen und somit der *Induktionsschritt* abgeschlossen ist.

(c) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ die Aussage $(2n)! \geq (n!)^2$. Für $n=1$ rechnen wir nach, dass $(2n)!=2!=2\geq 1=(1!)^2=(n!)^2$, d. h. $A(1)$ ist wahr, womit der *Induktionsanfang* gezeigt ist. Wir machen nun die *Induktionsannahme*, dass $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig ist und rechnen damit nach, dass

$$\begin{aligned}\big(2(n+1)\big)! &= (2n)!\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)\\ &\overset{A(n)}{\geq} (n!)^2\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)\\ &\geq (n!)^2\cdot(n+1)^2\\ &= \big(n!\cdot(n+1)\big)^2\\ &= \big((n+1)!\big)^2,\end{aligned}$$

womit wir sehen, dass die *Induktionsbehauptung* $A(n+1)$ wahr ist. Damit ist der *Induktionsschritt* bewiesen.

Zusatzaufgabe 2 (5 Punkte): Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die gilt

$$(x-2)^2-1<9-(x-4)^2.$$

Lösung 2: Zu bestimmen ist die Menge $\mathbb{L} := \{x \in \mathbb{R} \mid (x-2)^2-1<9-(x-4)^2\}$. Für $x \in \mathbb{R}$ formen wir die Ungleichung wie folgt um:

$$\begin{aligned} & (x-2)^2-1 && < 9-(x-4)^2\\ \iff\ & (x^2-4x+4)-1 && < 9-(x^2-8x+16)\\ \iff\ & x^2-4x+3 && < -x^2+8x-7\\ \iff\ & 2x^2-12x+10 && < 0\\ \iff\ & x^2-6x+5 && < 0\\ \iff\ & (x-1)(x-5) && < 0\\ \iff\ & 1<x<5 && \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der Ungleichung ist somit $\mathbb{L}=(1,5)$.

Zusatzaufgabe 3 (5 + 5 Punkte): Ein Passwort soll mit vier verschiedenen Großbuchstaben von A bis Z (d. h. ohne Umlaute) beginnen, gefolgt von drei bis fünf Ziffern zwischen 0 und 9.

(a) Wie viele solcher Passwörter gibt es insgesamt?

(b) Wie viele Passwörter davon enthalten die Zeichenfolge „A1“?

Lösung 3:

(a) Für die vier verschiedenen Buchstaben am Anfang des Passworts gibt es $\frac{26!}{(26-4)!}$ Möglichkeiten und für die drei bis fünf Ziffern am Ende des Passworts gibt es $10^3 + 10^4 + 10^5$ Möglichkeiten; somit können insgesamt

$$\frac{26!}{(26-4)!} \cdot (10^3 + 10^4 + 10^5) = 39826800000$$

verschiedene Passwörter gebildet werden.

(b) Da die Zeichenfolge „A1“ einen Buchstaben und eine Ziffer enthält, kann diese nur an der vierten und fünften Stelle des Passworts auftauchen. Für die restlichen drei Buchstaben verbleiben dann noch $\frac{25!}{(25-3)!}$ Möglichkeiten und für die übrigen zwei bis vier Ziffern am Ende gibt es $10^2 + 10^3 + 10^4$ Möglichkeiten; somit gibt es insgesamt

$$\frac{25!}{(25-3)!} \cdot (10^2 + 10^3 + 10^4) = 153180000$$

Passwörter, die die Zeichenfolge „A1“ enthalten.

Zusatzaufgabe 4 (3 + 4 + 3 Punkte): Gegeben seien $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Wie viele Funktionen $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ gibt es?

(b) Wie viele injektive Funktionen $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ gibt es für $m \leq n$? Welches Ergebnis erhalten Sie im Fall $m = n$?

(c) Die Frage nach surjektiven Funktionen ist ungleich komplizierter. Man kann zeigen (was Sie nicht tun müssen!), dass für $m \geq n$ die Anzahl aller surjektiven Funktionen $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ gegeben ist durch den Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m.$$

Bestätigen Sie dieses Ergebnis für $m = 3$ und $n = 2$.

Lösung 4:

(a) Eine Funktion $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ ist eindeutig bestimmt durch das m-Tupel $(f(1), \ldots, f(m)) \in \{1, \ldots, n\}^m$ ihrer Funktionswerte und umgekehrt definiert jedes m-Tupel in $\{1, \ldots, n\}^m$ auf diese Weise eine Funktion $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$. Die Menge der Funktionen $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ steht demnach in Bijektion mit $\{1, \ldots, n\}^m$. Weil $\{1, \ldots, n\}^m$ eine endliche Menge mit n^m Elementen ist gibt es somit n^m Funktionen $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$.

(b) Für $m \leq n$ entsprechen die injektiven Funktionen $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ den Tupeln aus $\{1, \ldots, n\}^m$, deren Einträge alle verschieden sind. Wählen wir ein solches Tupel aus, so haben wir für den ersten Eintrag n Möglichkeiten, für den zweiten $n-1$ Möglichkeiten usw., also insgesamt $n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$ Möglichkeiten.
Falls $n = m$, vereinfacht sich diese Formel zu $n!$, was bekanntlich die Anzahl der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ angibt. Dies ist kein Zufall, sondern liegt daran, dass jede injektive Funktion $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ automatisch surjektiv und somit bijektiv ist, also eine Permutation von $\{1, \ldots, n\}$ darstellt.

(c) Wir listen die surjektiven Funktionen $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2\}$ auf, indem wir die korrespondierenden Tupel $(f(1), f(2), f(3))$ angeben; dies sind die sechs Tupel

$$(2,1,1), \quad (1,2,1), \quad (1,1,2), \quad (1,2,2), \quad (2,1,2) \quad \text{und} \quad (2,2,1).$$

Die Formel bestätigt dieses Ergebnis, denn wir haben

$$\sum_{k=1}^{2} (-1)^{2-k} \binom{2}{k} k^3 = (-1)^1 \binom{2}{1} 1^3 + (-1)^0 \binom{2}{2} 2^3 = -2 + 8 = 6.$$

Zusatzaufgabe 5 (2 + 2 + 6 Punkte): Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 4 - x^2.$$

(a) Begründen Sie, warum $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ weder injektiv noch surjektiv ist.

(b) Finden Sie ein möglichst großes Intervall I in $\mathbb{R}$, für das die Einschränkung von f auf I injektiv ist.

(c) Begründen Sie, warum die Funktion $f : I \to f(I)$ für das Intervall I aus (b) bijektiv ist, und bestimmen Sie das Bild $f(I)$ sowie einen expliziten Ausdruck für die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$.

Lösung 5:

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt offensichtlich $f(x) \leq 4$. Für $y \in (4, \infty)$ kann es also kein $x \in \mathbb{R}$ mit $y = f(x)$ geben; somit ist f nicht surjektiv. Andererseits gilt $f(-x) = f(x)$ und $-x \neq x$ für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodass f keinesfalls injektiv sein kann.

(b) Sind $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $f(x_1) = f(x_2)$ gegeben, so folgt, dass $x_1 = -x_2$ oder $x_1 = x_2$ gilt, denn:

$$\begin{aligned}
& f(x_1) && = f(x_2) \\
\iff \quad & 4 - x_1^2 && = 4 - x_2^2 \\
\iff \quad & x_2^2 - x_1^2 && = 0 \\
\iff \quad & (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) && = 0
\end{aligned}$$

Schränken wir also f auf das Intervall $I = [0, \infty)$ ein, so erhalten wir eine injektive Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, und dieses Intervall kann nicht vergrößert werden, ohne die Injektivität der Einschränkung zu verlieren.

Bemerkung: Alternativ könnte man auch $I = (-\infty, 0]$ wählen. Auch für dieses Intervall I ist die Einschränkung von f auf I injektiv.

(c) Aufgrund unserer Überlegungen im Aufgabenteil (a) muss $f(I) \subseteq (-\infty, 4]$ gelten. Für $y \in (-\infty, 4]$ besitzt aber die Gleichung $y = 4 - x^2$ genau eine Lösung $x \in I$, nämlich $x = \sqrt{4-y}$, d. h. $f(I) = (-\infty, 4]$ und wir haben zugleich die Umkehrfunktion $f^{-1} : (-\infty, 4] \to I, y \mapsto \sqrt{4-y}$ bestimmt.

Bemerkung: Hat man in (b) das Intervall $I = (-\infty, 0]$ gewählt, so gilt wiederum $f(I) = (-\infty, 4]$, jedoch ist die Umkehrfunktion in diesem Fall gegeben durch $f^{-1} : (-\infty, 4] \to I, y \mapsto -\sqrt{4-y}$.