Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Präsenzübungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Blatt 6 B
Lösungshinweise

Aufgabe 1:

(a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, d. h. es gibt eine reelle Zahl $C > 0$, sodass $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist mit

$$\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \Big(\lim_{n\to\infty} a_n\Big)\Big(\lim_{n\to\infty} b_n\Big).$$

Hinweis: Setzen Sie $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ sowie $b := \lim_{n\to\infty} b_n$ und schreiben Sie $a_nb_n - ab = (a_n - a)b_n + a(b_n - b)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

(a) Wir setzen $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Für $\varepsilon = 1$ finden wir demnach ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - a| < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt. Folglich ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ aus der Dreiecksungleichung, dass

$$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|. \tag{1}$$

Setzen wir nun

$$C := \max\big\{1 + |a|, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|\big\},$$

so gilt damit $|a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Für $n \geq N$ gilt dies aufgrund von (1) und für $1 \leq n \leq N-1$ nach Definition von C.)

(b) Zunächst wenden wir Aufgabenteil (a) auf die konvergente Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an. Damit ergibt sich, dass eine reelle Zahl $C > 0$ existiert, sodass $|b_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir geben uns nun ein $\varepsilon > 0$ vor. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert, finden wir ein $N_1 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2C} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq N_1$$

gilt. Ferner, weil $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen b konvergiert, finden wir ein $N_2 \in \mathbb{N}$, sodass

$$|b_n - n| < \frac{\varepsilon}{2(1+|a|)} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq N_2$$

gilt. Wir setzen $N := \max\{N_1, N_2\}$. Mithilfe der im Hinweis angegebenen Zerlegung und der Dreiecksungleichung sehen wir, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \\
&\leq |a_n - a|\,|b_n| + |a|\,|b_n - b| \\
&\leq C\,|a_n - a| + |a|\,|b_n - b| \\
&\leq C\,\frac{\varepsilon}{2C} + |a|\,\frac{\varepsilon}{2(1+|a|)} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt verwendet haben, dass $\frac{|a|}{1+|a|} \leq 1$. Damit haben wir gezeigt, dass die Folge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist mit dem Grenzwert ab.

Aufgabe 2: Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen, sodass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist mit Grenzwert $b \neq 0$ und die Folge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
Gilt die Aussage auch dann noch, wenn man auf die Voraussetzung $b \neq 0$ verzichtet? (Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.)

Lösung:

(a) Es sei $c \in \mathbb{R}$ der Grenzwert der Folge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $b \neq 0$ konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$$

für alle $n \geq N$. Insbesondere gilt also $b_n \neq 0$ für alle $n \geq N$ und es folgt mit den aus der Vorlesung bekannten Grenzwertrechenregeln, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+N} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+N} b_{n+N}}{b_{n+N}} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_{n+N} b_{n+N}}{\lim_{n\to\infty} b_{n+N}} = \frac{c}{b}.$$

(b) Verzichtet man auf die Voraussetzung $b \neq 0$, so ist die Aussage falsch. Setze etwa $a_n = n$ und $b_n = 1/n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1$, aber die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

Aufgabe 3: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die durch folgende Rekursion definierte Folge:

$$a_0 = 0 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Finden und beweisen Sie eine geschlossene Formel für a_n (d. h. eine Bildungsvorschrift für a_n, die nur von n abhängt) und zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Hinweis: Es gilt $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für alle $q \neq 1$.

(b) Wie ändert sich der Grenzwert für einen beliebigen Startwert $a_0 \neq 0$?

Lösung: Mittels der Rekursion berechnen wir die ersten Folgenglieder (wobei wir auf das Einsetzen des gegebenen Startwerts $a_0 = 0$ verzichten):

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2}{3}a_0 + \frac{1}{3} \\
a_2 &= \frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}a_0 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 a_0 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right) \\
a_3 &= \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 a_0 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)\right) + \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 a_0 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

Dies führt zu folgender Vermutung, wie (für einen beliebigen Startwert a_0) die explizite Darstellung der Folge aussehen könnte:

$$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n a_0 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

bzw. in Summenschreibweise

$$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n a_0 + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Korrektheit unserer Vermutung beweisen wir (ebenfalls für einen beliebigen Startwert a_0) mittels vollständiger Induktion: Für den *Induktionsanfang* $n = 0$ überzeugen wir uns, dass die rechte Seite der zu beweisenden Formel wie gewünscht den Wert a_0 liefert. Für den *Induktionsschritt* nehmen wir an, dass die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}_0$ richtig ist, also

$$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n a_0 + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

gilt. Wir berechnen damit a_{n+1} aus der Rekursion zu

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3} \\
&= \frac{2}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n a_0 + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k\right) + \frac{1}{3} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} a_0 + \frac{1}{3}\left(1 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}\right) \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} a_0 + \frac{1}{3}\left(1 + \sum_{k=1}^{(n+1)-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\right) \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} a_0 + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{(n+1)-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}
\end{aligned}$$

und sehen damit, dass die behauptete Formel auch das Folgenglied a_{n+1} korrekt bestimmt. Also ist die Behauptung auch für $n+1$ richtig. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion haben wir damit die Gültigkeit unserer Vermutung für alle $n \in \mathbb{N}_0$ nachgewiesen. Mithilfe der Formel für die geometrische Summe, die im Hinweis angegeben war und die wir auf $q = \frac{2}{3}$ anwenden, sehen wir nun, dass

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} a_0 + \frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} a_0 + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ &= 1 + \left(\frac{2}{3} a_0 - 1\right) \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\frac{2}{3} < 1$ folgt damit, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 + \left(\frac{2}{3} a_0 - 1\right) \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n}_{=0} = 1.$$

Dies zeigt (a) und gleichzeitig, dass diese Aussage unabhängig vom konkreten Startwert a_0 gültig ist.

Bemerkung: Wenn wir schon wüssten, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so könnten wir aus der Rekursion für den Grenzwert $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ die Gleichung $a = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}$ herleiten, aus der sich schließlich $a = 1$ ergeben würde. Wie in der Vorlesung sehen wir also auch hier, dass die Rekursion im Limes eine Gleichung für den Grenzwert liefert, die hier sogar eine eindeutige Lösung besitzt. Dennoch verrät uns das nicht, ob die Folge tatsächlich konvergent ist. Hierfür benötigt man, wie wir oben gesehen haben, speziellere Argumente, die auf die jeweilige Situation zugeschnitten sind.