Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Präsenzübungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Blatt 5 B
Lösungshinweise

Aufgabe 1: Es bezeichne log den Logarithmus zur Basis 10. Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck so weit wie möglich:

$$\log\left(\sqrt{5}\cdot\frac{10^{-4}}{10^{-3}}\right)+\frac{1}{2}\log(2)$$

Lösung: Wir vereinfachen den Ausdruck wie folgt:

$$\begin{aligned}
\log\left(\sqrt{5}\cdot\frac{10^{-4}}{10^{-3}}\right)+\frac{1}{2}\log(2) &= \log\left(\sqrt{5}\cdot 10^{-4-(-3)}\right)+\frac{1}{2}\log(2)\\
&= \log\left(\sqrt{5}\cdot 10^{-1}\right)+\frac{1}{2}\log(2)\\
&= \log\left(5^{1/2}\cdot 10^{-1}\right)+\frac{1}{2}\log(2)\\
&= \log\left(5^{1/2}\right)+\log(10^{-1})+\frac{1}{2}\log(2)\\
&= \frac{1}{2}\log(5)+(-1)\log(10)+\frac{1}{2}\log(2)\\
&= \frac{1}{2}\big(\log(5)+\log(2)\big)+(-1)\log(10)\\
&= \frac{1}{2}\log(5\cdot 2)-\log(10)\\
&= \frac{1}{2}\log(10)-\log(10)\\
&= -\frac{1}{2}\log(10)\\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Gegeben seien die durch

$$f(x)=4e^x-1 \quad \text{bzw.} \quad g(x)=9-e^x$$

definierten Funktionen $f,g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

(a) Ermitteln Sie die Wertebereiche und die Nullstellen der beiden Funktionen.

(b) Stellen Sie die Graphen der beiden Funktionen in einer gemeinsamen Skizze dar.

(c) Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt der beiden Graphen.

Lösung:

(a) Aus $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ folgt $f(\mathbb{R}) = (-1, \infty)$ und $g(\mathbb{R}) = (-\infty, 9)$. Weiter gilt für $x \in \mathbb{R}$, dass

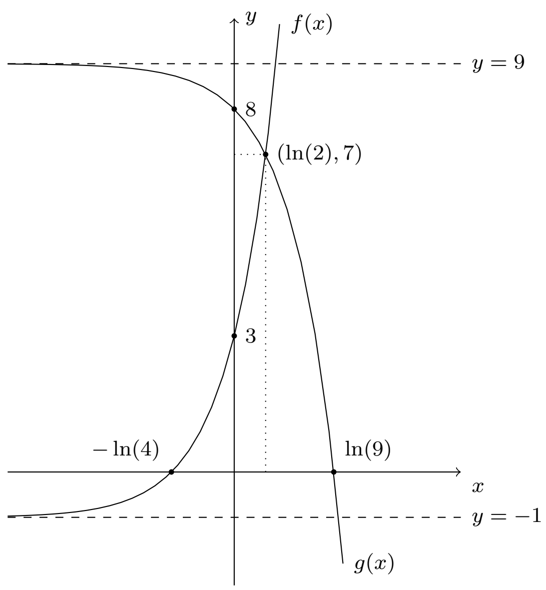
$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 4e^x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad e^x = \tfrac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad x = -\ln(4), \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} g(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 9 - e^x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad e^x = 9 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \ln(9). \end{aligned}$$

Also haben f und g jeweils genau eine Nullstelle, die bei $-\ln(4)$ bzw. $\ln(9)$ liegen.

(b) Durch Verschiebung und gegebenenfalls Spiegelung des Graphen der natürlichen Exponentialfunktion exp erhalten wir die Graphen der beiden Funktionen f und g:



(c) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) \quad &\Leftrightarrow \quad 4e^x - 1 = 9 - e^x \\ &\Leftrightarrow \quad 5e^x = 10 \\ &\Leftrightarrow \quad e^x = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \ln(2), \end{aligned}$$

wobei $f(\ln(2)) = g(\ln(2)) = 7$; also schneiden sich die Graphen von f und g im Punkt $(\ln(2), 7)$.

Aufgabe 3: Von einer Funktion $y = f(x)$ seien die folgenden Wertepaare (x, y) bekannt:

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-1	0	1	2

(a) Bestimmen Sie ein Polynom p möglichst kleinen Grades, das f an den in der Tabelle angegebenen Stellen interpoliert. Verwenden Sie dazu die Darstellung von Lagrange.

(b) Tatsächlich handelt es sich bei f um eine Logarithmusfunktion. Geben Sie diese an.

(c) Vergleichen Sie $p(3)$ für das in (a) bestimmte Interpolationspolynom p mit dem exakten Wert $f(3)$.

Lösung:

(a) Wir haben 4 Datenpunkte (x_j, y_j) für $j = 0, 1, 2, 3$ zu interpolieren, nämlich

j	0	1	2	3
x_j	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y_j	-1	0	1	2

.

Wir wissen damit, dass es ein interpolierendes Polynom vom Grad ≤ 3 gibt und dass dieses in der Lagrange-Darstellung gegeben ist durch

$$p(x) = \sum_{j=0}^{3} y_j L_j(x),$$

wobei die Polynome $L_j(x)$ für $j = 0, 1, 2, 3$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-4)} \\
&= -\frac{8}{21}\big(x^3 - 7x^2 + 14x - 8\big), \\
L_1(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{(x-\frac{1}{2})(x-2)(x-4)}{(1-\frac{1}{2})(1-2)(1-4)} \\
&= \frac{1}{3}\big(2x^3 - 13x^2 + 22x - 8\big), \\
L_2(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x-\frac{1}{2})(x-1)(x-4)}{(2-\frac{1}{2})(2-1)(2-4)} \\
&= -\frac{1}{6}\big(2x^3 - 11x^2 + 13x - 4\big), \\
L_3(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x-\frac{1}{2})(x-1)(x-2)}{(4-\frac{1}{2})(4-1)(4-2)} \\
&= \frac{1}{42}\big(2x^3 - 7x^2 + 7x - 2\big).
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$p(x) = \frac{1}{7}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{52}{21}.$$

(b) Es handelt sich um den Logarithmus $\log_2 \colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ zur Basis 2.

(c) Es gilt

$$|p(3) - \log_2(3)| = |\tfrac{29}{21} - \log_2(3)| = \left|\log_2\left(\frac{2^{29/21}}{3}\right)\right| \approx 0,204010.$$

Nachfolgend sind die Graphen von p (blau) und f (gestrichelt) dargestellt: