Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Lösungshinweise Übungsblatt 2

Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure II

Sommersemester 2020

Aufgabe 1. (*Zwischenwertsatz, 3+3 Punkte*)

$i)$ Es sei $f\colon [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass ein $\xi \in [0,1]$ existiert mit $f(\xi) = \xi$. Ein solches ξ nennt man *Fixpunkt* von f.

[Hinweis: Verwenden Sie den Zwischenwertsatz für die Funktion $g(x) = f(x) - x$.]

$ii)$ Zeigen Sie weiter, dass die Gleichung

$$2\cos(\pi x/3) = 3x$$

(mindestens) eine Lösung $x \in (0,1)$ hat.

Lösung Aufgabe 1.

$i)$ Die Funktion

$$g\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) - x$$

ist stetig als Verkettung stetiger Funktionen (Satz 4.1). Wir können ohne Einschränkung $f(0) > 0$ und $f(1) < 1$ annehmen, denn sonst ist nichts zu zeigen. Wegen $f([0,1]) \subset [0,1]$ gilt

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0, \quad g(1) = f(1) - 1 < 0.$$

Nach dem Zwischenwertsatz (Satz 4.4) gibt es $\xi \in [0,1]$ mit $g(\xi) = 0$, d.h. $f(\xi) = \xi$.

$ii)$ Die Funktion

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$$

ist stetig als Verkettung stetiger Funktionen mit $f([0,1]) \subset [0,1]$ (da $\cos(x) \in [0,1]$ für alle $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$). Nach Teil $i)$ gibt es $\xi \in [0,1]$ mit $f(\xi) = \xi$, d.h.

$$2\cos\left(\frac{\pi}{3}\xi\right) = 3\xi.$$

Da $2\cos(\frac{\pi}{3} \cdot 0) = 2 \neq 0 = 3 \cdot 0$ und $2\cos(\frac{\pi}{3}) < 3$ gilt, folgt $\xi \in (0,1)$.

Aufgabe 2. (*Differenzierbarkeit und konstante Funktionen, 2 Punkte*) Es seien $U = (0,1) \cup (2,3)$ und $f\colon U \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit der Eigenschaft $f'(x) = 0$ für alle $x \in U$. Ist f eine konstante Funktion?

Lösung Aufgabe 2. Nein. Die Funktion

$$f\colon U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & x \in (2,3) \end{cases}$$

ist differenzierbar und erfüllt $f'(x) = 0$ für alle $x \in U$, ist aber nicht konstant.

Aufgabe 3. (*Differenzierbarkeit und Betrag, 3 Punkte*) Für welche Werte von $\alpha \in (0,\infty)$ ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^\alpha$ differenzierbar im Nullpunkt?

Lösung Aufgabe 3.

- Ist $\alpha = 1$, so ist f in 0 nicht differenzierbar, denn für die Folgen $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{-\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ gilt
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\frac{1}{n}|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$
und
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|-\frac{1}{n}|}{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} -1 = -1,$$
d.h. der Grenzwert $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ existiert nicht.

- Ist $\alpha < 1$, so gilt
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\frac{1}{n}|^\alpha}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\frac{1}{n})^{1-\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\exp((1-\alpha)\ln(\frac{1}{n}))} = \infty,$$
wobei wir benutzt haben, dass $1-\alpha > 0$, dass die Funktion $x \mapsto \exp((1-\alpha)\ln(x))^{-1}$ als Verkettung stetiger Funktionen stetig auf $(0,\infty)$ ist, und dass $\lim_{n\to\infty} \ln(\frac{1}{n}) = -\infty$. Also ist f im Nullpunkt nicht differenzierbar.

- Ist $\alpha > 1$, so gilt für eine beliebige Nullfolge $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{R} - \{0\}$, dass
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{|h_n|^\alpha}{h_n}\right| = \lim_{n\to\infty} |h_n|^{\alpha-1} = \lim_{n\to\infty} \exp((\alpha-1)\ln(|h_n|)) = 0,$$
wobei wir benutzt haben, dass $\alpha - 1 > 0$, dass die Funktion $x \mapsto \exp((1-\alpha)\ln(|x|))$ als Verkettung stetiger Funktionen stetig auf $\mathbb{R} - \{0\}$ ist, und dass $\lim_{n\to\infty} \ln(|h_n|) = -\infty$. Also ist f im Nullpunkt differenzierbar.

Aufgabe 4. (*Stetigkeit und Differenzierbarkeit, 3 Punkte*) Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes (evtl. verallgemeinertes) Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie: Ist f differenzierbar im Punkt $x_0 \in I$, so ist f im Punkt x_0 stetig.

Lösung Aufgabe 4. Wir wissen, dass der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert und müssen zeigen, dass

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Es gilt (Grenzwertsätze für Folgen)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \\
&= \Big(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\Big)\Big(\lim_{x\to x_0} x - x_0\Big) \\
&= f'(x_0) \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5. (*Differenzierbare Funktionen, 3+3 Punkte*) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch die Formel

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x), & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

i) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitungsfunktion f'.

ii) Ist $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion?

Lösung Aufgabe 5.

i) Die Funktion f ist differenzierbar auf $\mathbb{R} - \{0\}$ als Verkettung differenzierbarer Funktionen (Satz 5.2) mit

$$f'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Die Rechnung

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \cos\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} h \underbrace{\cos\left(\frac{1}{h}\right)}_{\in [-1,1]} = 0,$$

zeigt, dass f im Nullpunkt differenzierbar ist mit $f'(0) = 0$.

ii) Die Ableitung f' von f ist nicht stetig in 0, denn es ist $x_n = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Nullfolge in $\mathbb{R} - \{0\}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{4}{(4n+1)\pi} \underbrace{\cos\left(\frac{(4n+1)\pi}{2}\right)}_{=0} + \underbrace{\sin\left(\frac{(4n+1)\pi}{2}\right)}_{=1}\right] = 1,$$

aber $f'(0) = 0$.