Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

Lösungshinweise Übungsblatt 3
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure II
Sommersemester 2020

Aufgabe 1. (*Ableitung von Potenzfunktionen, 3 Punkte*) Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ($x \neq 0$ für $k < 0$) gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^k = k x^{k-1}.$$

Lösung Aufgabe 1. Zunächst zeigen wir die Aussage für $k \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang ($k = 1$): Die Funktion $x \mapsto x$ ist laut Vorlesung differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit Ableitung $1 = 1 \cdot x^{1-1}$.

Induktionsschritt: Es gelte

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^k = k x^{k-1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

für ein *festes* $k \in \mathbb{N}$ (*Induktionsvoraussetzung*). Nach der Produktregel (Satz 5.2 i)(c)) ist die Funktion $x \mapsto x^{k+1}$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{k+1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \cdot x^k) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) \cdot x^k + x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^k) \overset{\text{I.V.}}{=} x^k + x k x^{k-1} = (k+1)x^k$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Nun sei $k \in \mathbb{Z}$ mit $k < 0$, sodass $-k \in \mathbb{N}$. Dann ist die Funktion

$$x \mapsto x^k = \frac{1}{x^{-k}}$$

nach der Quotientenregel (Satz 5.2 ii)) differenzierbar auf $\mathbb{R} - \{0\}$ und mit dem oben Gezeigten folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^k = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1) \cdot x^{-k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-k}) \cdot 1}{x^{-2k}} = \frac{0 \cdot x^{-k} - (-k)x^{-k-1} \cdot 1}{x^{-2k}} = k x^{-k-1-(-2k)} = k x^{k-1}$$

für alle $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Für $k = 0$ ist die Funktion $x \mapsto x^0 = 1$ laut Vorlesung differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit Ableitung 0 ($= 0 \cdot x^{0-1}$ für $x \neq 0$).

Aufgabe 2. (*Trigonometrische und hyperbolische Funktionen, 2+3 Punkte*)

i) Bestimmen Sie mithilfe der Reihendarstellungen die Ableitungen von $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sinh(x)$, $\cosh(x)$. Benutzen Sie dann die Quotientenregel, um - dort wo sie existiert - die Ableitung von $\cot(x)$ zu berechnen.

ii) Benutzen Sie Satz 5.4 über die Ableitung der Umkehrfunktion um - dort wo sie existieren - die Ableitungen von $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctan(x)$ zu berechnen.

Lösung Aufgabe 2.

i) Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{2k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(2k+1)x^{2k}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}\\ &= \cos(x)\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Genauso zeigt man $\cos'(x) = -\sin(x)$, $\sinh'(x) = \cosh(x)$ und $\cosh'(x) = \sinh(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Nach der Quotientenregel ist die Funktion

$$\cot\colon \mathbb{R} - \{k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)},$$

differenzierbar mit

$$\cot'(x) = \frac{\cos'(x)\sin(x) - \cos(x)\sin'(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

für alle $x \in \mathbb{R} - \{k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\}$.

ii) Die Funktionen

$$\sin\colon \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big) \to (-1,1), \quad \cos\colon (0,\pi) \to (-1,1), \quad \tan\colon \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big) \to \mathbb{R}$$

sind bijektiv und differenzierbar mit

$$\begin{aligned}\sin'(x) &= \cos(x) \neq 0, \quad x \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big),\\ \cos'(x) &= -\sin(x) \neq 0, \quad x \in (0,\pi),\\ \tan'(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)} \neq 0, \quad x \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big).\end{aligned}$$

Nach Satz 5.4 sind ihre Umkehrfunktionen

$$\arcsin\colon (-1,1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad \arccos\colon (-1,1) \to (0,\pi), \quad \arctan\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

differenzierbar mit

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin(x)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

und

$$\begin{aligned} \arccos'(x) &= \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} \\ &= -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-(\cos(\arccos(x)))^2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

für $x \in (-1,1)$. Außerdem gilt

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \cos^2(\arctan(x)) \neq 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und wegen

$$\cos^2(\arctan(x)) + \sin^2(\arctan(x)) = 1$$

folgt

$$1 + \underbrace{\tan^2(\arctan(x))}_{=x^2} = \frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}$$

und damit

$$\arctan'(x) = \cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. (*Ableitungen, 6 Punkte*) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Ableitung der Funktionen

i) $f(x) = \sqrt{1+\exp(\cos(x))}$,

ii) $f(x) = a^{x\exp(x)}$, $\quad a > 0$ fixiert,

iii) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^2}$,

iv) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(1+x^2)}$,

v) $f(x) = x^x$,

vi) $f(x) = \arcsin(\sqrt{1-x^2})$.

Lösung Aufgabe 3.

i) Die Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{1+\exp(\cos(x))}$$
ist differenzierbar als Verkettung differenzierbarer Funktionen (Satz 5.2 + 5.3) mit
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+\exp(\cos(x))}} \cdot \exp(\cos(x)) \cdot (-\sin(x)) = -\frac{\exp(\cos(x))\sin(x)}{2\sqrt{1+\exp(\cos(x))}}$$
für alle $x \in \mathbb{R}$.

ii) Die Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto a^{x\exp(x)} = \exp(x\exp(x)\ln(a))$$
ist differenzierbar als Verkettung differenzierbarer Funktionen mit
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = a^{x\exp(x)} \cdot \ln(a) \cdot (\exp(x) + x\exp(x)) = a^{x\exp(x)}\ln(a)\exp(x)(1+x)$$
für alle $x \in \mathbb{R}$.

iii) Die Funktion
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1-x}{1+x^2}$$
ist differenzierbar als Verkettung differenzierbarer Funktionen mit
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{-(1+x^2)-(1-x)2x}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}$$
für alle $x \in \mathbb{R}$.

iv) Die Funktion
$$f\colon \mathbb{R}-\{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{\ln(1+x^2)}$$
ist differenzierbar als Verkettung differenzierbarer Funktionen mit
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = -(\ln(1+x^2))^{-2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = -\frac{2x}{\ln^2(1+x^2)(1+x^2)}$$
für alle $x \in \mathbb{R}-\{0\}$.

v) Die Funktion
$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^x = \exp(x\ln(x))$$
ist differenzierbar als Verkettung differenzierbarer Funktionen mit
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \exp(x\ln(x)) \cdot (\ln(x)+1)$$
für alle $x \in (0,\infty)$.

vi) Für alle $x \in [-1,1]$ ist die Funktion $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ definiert mit $\sqrt{1-x^2} \in [0,1]$ für alle $x \in [-1,1]$. Der Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \arcsin(\sqrt{1-x^2})$ ist also $[-1,1]$ und auf $(-1,1)$ ist f differenzierbar als Verkettung differenzierbarer Funktionen mit

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$

für alle $x \in (-1,1)$ (die einseitigen Ableitungen in $x_0 = \pm 1$ existieren nicht, da die Wurzelfunktion in 0 nicht (rechtsseitig) differenzierbar ist).

Aufgabe 4. (*Höhere Ableitungen, 2+1+3 Punkte*)

i) Die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien dreimal differenzierbar. Berechnen Sie $(g \circ f)^{(3)}$.

ii) Finden Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf $\mathbb{R}$ drei- aber nicht viermal differenzierbar ist.

iii) Betrachten Sie die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)/x$ und zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dass

$$f^{(n)}(x) = a_n \frac{1}{x^{n+1}} + b_n \frac{\ln(x)}{x^{n+1}}$$

für alle $x \in (0,\infty)$, wobei $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ und

$$a_{n+1} = -a_n(n+1) + b_n, \quad b_{n+1} = -b_n(n+1).$$

Lösung Aufgabe 4.

i) Nach der Kettenregel und der Produktregel gilt

$$(g \circ f)' = g'(f(x))f'(x) = (g' \circ f)(x)f'(x)$$

sowie

$$\begin{aligned}(g \circ f)'' &= (g' \circ f)'(x)f'(x) + (g' \circ f)(x)f''(x) \\ &= g''(f(x))(f'(x))^2 + (g' \circ f)(x)f''(x) \\ &= (g'' \circ f)(x)(f'(x))^2 + (g' \circ f)(x)f''(x)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(g \circ f)^{(3)} &= (g'' \circ f)'(x)(f'(x))^2 + 2(g'' \circ f)(x)f'(x)f''(x) \\ &\quad + (g' \circ f)'(x)f''(x) + (g' \circ f)(x)f^{(3)}(x) \\ &= g^{(3)}(f(x))(f'(x))^3 + 2(g'' \circ f)(x)f'(x)f''(x) \\ &\quad + g''(f(x))f'(x)f''(x) + (g' \circ f)(x)f^{(3)}(x) \\ &= (g^{(3)} \circ f)(x)(f'(x))^3 + 3(g'' \circ f)(x)f'(x)f''(x) + (g' \circ f)(x)f^{(3)}(x).\end{aligned}$$

ii) Wir zeigen, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{24}x^4, & x \geq 0, \\ -\frac{1}{24}x^4, & x < 0 \end{cases}$$

dreimal differenzierbar ist mit $f^{(3)}(x) = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Nach Aufgabe 1 ist f auf $\mathbb{R} - \{0\}$ differenzierbar. Außerdem gilt

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{f(h) - f(0)}{h} \right| = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{24}|h|^4}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{24}|h|^3 = 0,$$

sodass f in 0 differenzierbar (mit $f'(0) = 0$) ist und es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x^3, & x \geq 0, \\ -\frac{1}{6}x^3, & x < 0. \end{cases}$$

Genauso zeigt man, dass f' differenzierbar ist mit

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & x \geq 0, \\ -\frac{1}{2}x^2, & x < 0 \end{cases}$$

und dass f'' differenzierbar ist mit

$$f^{(3)}(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Da $f^{(3)}$ nicht differenzierbar ist, ist f genau dreimal differenzierbar.

iii) **Induktionsanfang** ($n = 1$): Nach der Quotientenregel ist f differenzierbar auf $(0, \infty)$ mit

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2} = (-a_0 + b_0)\frac{1}{x^2} + (-b_0)\frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Induktionsschritt: Es gelte

$$f^{(n)}(x) = a_n \frac{1}{x^{n+1}} + b_n \frac{\ln(x)}{x^{n+1}}, \quad x \in (0, \infty),$$

für ein *festes* $n \in \mathbb{N}$ (*Induktionsvoraussetzung*). Als Verkettung differenzierbarer Funktionen ist $f^{(n)}$ auf $(0, \infty)$ differenzierbar mit

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} &= -a_n(n+1)\frac{1}{x^{n+2}} + b_n \frac{1 - (n+1)\ln(x)}{x^{n+2}} \\ &= \frac{-a_n(n+1) + b_n}{x^{n+2}} + (-b_n)(n+1)\frac{\ln(x)}{x^{n+2}} \\ &= a_{n+1}\frac{1}{x^{n+2}} + b_{n+1}\frac{\ln(x)}{x^{n+2}}. \end{aligned}$$