Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Bachelor plus MINT Präsenzübung, Blatt 5
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure II
Sommersemester 2020

Aufgabe 1. Es seien $I = [0,1]$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

i) Für $n \in \mathbb{N}$ sei eine Zerlegung $\mathcal{Z}_n = \{0 = x_0 < \cdots < x_n = 1\}$ von I gegeben durch

$$x_j = \frac{j}{n}, \quad j = 0, \ldots, n.$$

Zeigen Sie, dass

$$\underline{S}_{\mathcal{Z}_n}(f) = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

und

$$\overline{S}_{\mathcal{Z}_n}(f) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}.$$

[Hinweis: $\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.]

ii) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \overline{S}_{\mathcal{Z}_n}(f) - \underline{S}_{\mathcal{Z}_n}(f) = 0$. Folgern Sie dass f Riemann-integrierbar auf I ist und berechnen Sie

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 2. Es seien $a > 0$ und $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie:

i) Ist f ungerade, so gilt $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$,

ii) Ist f gerade, so gilt $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

[Hinweis: Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung hat f eine Stammfunktion F. Zeigen Sie: Ist f eine ungerade Funktion, so ist F eine gerade Funktion und ist f eine gerade Funktion, so gibt es $C \in \mathbb{R}$ so, dass $F + C$ eine ungerade Funktion ist. Betrachten Sie hierzu die Funktion $h(x) = F(x) - F(-x)$ und berechnen Sie $h'(x)$.]

Bitte wenden.

Aufgabe 3.

i) Bestimmen Sie

$$\int \cot x \,\mathrm{d}x, \quad x \in \mathbb{R} - \{k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$$

und

$$\int \frac{2e^x}{1-4e^x}\,\mathrm{d}x, \quad x \in \mathbb{R} - \{-\ln(4)\}.$$

ii) Es seien $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ für alle $x \in (0,1)$ gegeben durch

$$f(x) = \int_0^{x^2} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Berechnen Sie $f'(x)$.