Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Daniel Kraemer

Saarbrücken, 05.10.2018

Klausur zur Vorlesung
Höhere Mathematik für (Naturwiss. &) Ingenieure II

Die folgende Klausur besteht aus 4 Aufgaben. Die in den einzelnen Aufgabenteilen erreichbare Punktzahl ist jeweils angegeben, ebenso die Themengebiete, aus denen die Aufgabe gewählt wurde. Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten. Achten Sie auf eine saubere Argumentation, d.h.: **Schreiben Sie alle Lösungsschritte hin und begründen Sie diese – auch wenn eine Aufgabe als Frage formuliert ist, ist die Antwort selbstverständlich zu begründen**, für "geratene" Lösungen kann es keine Punkte geben.

Aufgabe 1. (Matrizen, lineare Gleichungssysteme, lineare Abbildungen; **(2+2+2)+ (1+2+1) Punkte**)

i) Es sei $a \in \mathbb{R}$ fixiert und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix} \in M(3,3) \, .$$

(a) Bestimmen Sie $\det A$ und $\operatorname{rg} A$.

(b) Wie lautet die allgemeine Lösung des homogenen Gleichungssystems $A\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$?

(c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems

$$A\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \, .$$

ii) Man betrachte die lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, die bestimmt ist durch

$$L(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}) = \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \underline{\mathbf{f}}^{(2)} \, , \qquad L(\underline{\mathbf{e}}^{(2)}) = 2\underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \underline{\mathbf{f}}^{(2)} \, , \qquad L(\underline{\mathbf{e}}^{(3)}) = -\underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \underline{\mathbf{f}}^{(2)} \, .$$

Dabei bezeichne $\mathcal{E} = (\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)}, \underline{\mathbf{e}}^{(3)})$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = (\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)})$ bezeichne die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildung bzgl. der kanonischen Basen.

Bitte wenden.

(b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildung bzgl. der Basen $\mathcal{V} = (\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)})$ des $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{W} = (\underline{\mathbf{w}}^{(1)}, \underline{\mathbf{w}}^{(2)})$ des $\mathbb{R}^2$, wobei gelte

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \underline{\mathbf{e}}^{(2)} + \underline{\mathbf{e}}^{(3)} , \qquad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} - \underline{\mathbf{e}}^{(3)} , \qquad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = 5\underline{\mathbf{e}}^{(2)} + \underline{\mathbf{e}}^{(3)} ;$$

$$\underline{\mathbf{w}}^{(1)} = -\underline{\mathbf{f}}^{(1)} - \underline{\mathbf{f}}^{(2)} , \qquad \underline{\mathbf{w}}^{(2)} = \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + 4\underline{\mathbf{f}}^{(2)} .$$

(c) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $L(\underline{\mathbf{v}}^{(3)})$ bzgl. $\mathcal{F}$.

Erinnerung zur Notation: Ist $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und sind $\mathcal{G}$ (als Basis des Urbildraumes) und $\mathcal{H}$ (als Basis des Bildraumes) Basen des $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$, so bezeichnet $A^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}}$ die Matrixdarstellung der linearen Abbildung bzgl. dieser Basen.

Aufgabe 2. (Stetigkeit, Differenzierbarkeit; **(1+1)+(1+1)+6 Punkte**)

i) (a) Die Funktion $f\colon I = (-1/2, 1/2) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} & \text{für} \quad x \neq 0 , \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 . \end{cases}$$

Ist f stetig in $x_0 = 0$?

(b) Man betrachte auf $I - \{0\}$ die Funktion $\cos(1/x)f(x)$, f wie in (a). Kann die Funktion so im Nullpunkt definiert werden, dass sie dort stetig ist?

ii) Berechnen Sie – falls existent – die Grenzwerte

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{2x} , \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x-\sin(x)} - 1}{x\sqrt{1+x^2}} .$$

iii) Es sei $I = [-2, 2] \subset \mathbb{R}$ und die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \frac{|x|}{1+x^2} .$$

Ist f stetig auf I? Ist f differenzierbar auf $(-2, 2)$? Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Maxima und Minima von f auf I. Skizzieren Sie f.

Aufgabe 3. (Integralrechnung; **je 2 Punkte**)

i) Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

$$a) \int \exp(x) \cdot \exp\big(\exp(x)\big)\, \mathrm{d}x , \qquad b) \int \frac{x+1}{x^2+5x+6}\, \mathrm{d}x ,$$

$$c) \int \frac{1}{1+e^x}\, \mathrm{d}x .$$

ii) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^{2\pi} e^x \sin(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

iii) Konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_\pi^\infty \frac{1}{x^2 + \sqrt{x} + \sin(x)} \, \mathrm{d}x \, ?$$

Aufgabe 4. (Gemischte Aufgaben; **2.5+2.5+(1+2)+2 Punkte**)

i) Es sei $w = (1+i)/(1-i) \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von w. Bestimmen Sie weiter alle Lösungen der Gleichung $z^3 = w$ und veranschaulichen Sie das Ergebnis in der Gaußschen Zahlenebene.

ii) Betrachten Sie die Daten

x_i	0	1	2	3
y_i	3	2	2	1

.

Es sei $f(x) = a_1 + a_2 x$. Bestimmen Sie a_1, a_2 nach der Methode der kleinsten Quadrate zu diesen Daten.

iii) Für $-1 < x < 1$ sei $f(x) = (1+x)/(1-x)$, $n = 1$, $h_0 = 1/8$, $h_1 = 1/16$.

Berechnen Sie einen Näherungswert ("Extrapolation zum Limes $h \to 0$", 8 Nachkommastellen) für $f'(0)$

(a) mittels des Differenzenquotienten;

(b) mittels des zentralen Differenzenquotienten (als Polynom in h_i^2).

iv) Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ das Taylor-Polynom n^{ten} Grades zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ von $f(x) = xe^{x-1}$.