Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

Bachelor plus MINT Präsenzübung, Blatt 9

Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure II

Sommersemester 2020

Aufgabe 1.

i) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen

$$\text{(a) } z^2 + 2\overline{z}^2 + z - \overline{z} + 9 = 0, \qquad \text{(b) } (1-i)z^2 = (1+i)z.$$

ii) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z, für die

$$|z| = |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$$

gilt.

Aufgabe 2.

i) Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine Matrix $X \in M(3,3)$, die die Gleichung

$$AX - B = C$$

löst.

ii) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -6x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= 2 \\ -9x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 3 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ -15x_1 + 14x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 5. \end{aligned}$$

iii) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Was ist der maximale Rang dieser Matrix? Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat die Matrix diesen maximalen Rang?

Aufgabe 3.

i) Es seien $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x \neq -1, \\ 0, & x = -1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 2, \\ x-2, & x > 2, \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ 2-x, & x > 1. \end{cases}$$

Berechnen Sie – falls existent – die Grenzwerte $\lim_{x\to -1} f(x)$, $\lim_{x\to 2} g(x)$ und $\lim_{x\to 1} h(x)$. Sind die Funktionen stetig auf $\mathbb{R}$?

ii) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

Lipschitz-stetig ist. Ist $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig?

Aufgabe 4.

i) Finden und klassifizieren Sie alle Extrema der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-1|}.$$

ii) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{4}(4x+3)(2x-1) - \frac{1}{2}e^x.$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass f mindestens drei Nullstellen besitzt.

(b) Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Rolle, dass f höchstens drei und damit genau drei Nullstellen besitzt.

iii) Berechnen Sie – falls existent – die Grenzwerte

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(x+1)}\right), \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)+\cos(x)}{x}.$$

Aufgabe 5.

i) Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

$$\text{(a)}\ \int \frac{\sin(2x)}{\cos(x)+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)}\ \int \frac{16x+1}{8x^2-14x+3}\,\mathrm{d}x.$$

ii) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_2^3 x^2\sqrt{x-2}\,\mathrm{d}x.$$

iii) Konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^x\,\mathrm{d}x?$$

Aufgabe 6.

i) Es sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{\sin(x)}$. Finden Sie ein Polynom $p(x)$ vierten Grades mit $p(0)=f(0), p'(0)=f'(0),\dots,p^{(4)}(0)=f^{(4)}(0)$.

ii) Berechnen Sie die Taylor Reihe mit Entwicklungspunkt $x_0=0$ der durch die Formel

$$\frac{1}{4-\pi x^3}$$

definierten Funktion und geben Sie den Konvergenzradius an.