Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

Lösungshinweise Übungsblatt 1
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure II
Sommersemester 2020

Aufgabe 1. (*Komplexe Zahlen, (0,5+0,5+1)+(1+2) Punkte*)

i) Bestimmen Sie jeweils Real- und Imaginärteil sowie den Betrag der komplexen Zahlen

$$\text{(a) } (-2+i)(1+i(2-i)), \qquad \text{(b) } (\sqrt{2}-i)(1+i)^2, \qquad \text{(c) } \frac{2i}{i-\dfrac{1}{2i+1}}.$$

ii) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen

(a) $z^3 = i$,

(b) $z^2 - (3+i)z + 4 + 3i = 0$.

[Hinweis: Für zwei komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ gilt $z_1 = z_2$ genau dann, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$. Insbesondere gilt $z_1^2 = z_2$ genau dann, wenn $x_1^2 - y_1^2 = x_2$ und $2x_1y_1 = y_2$.]

Lösung Aufgabe 1.

i) (a) Es ist

$$\begin{aligned}(-2+i)(1+i(2-i)) &= -2-2i(2-i)+i-(2-i)\\ &= -2-4i-2+i-2+i\\ &= -6-2i,\end{aligned}$$

sodass

$$\operatorname{Re}(-2+i)(1+i(2-i)) = -6, \quad \operatorname{Im}(-2+i)(1+i(2-i)) = -2$$

und

$$|(-2+i)(1+i(2-i))| = \sqrt{(-6)^2+(-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

(b) Es ist

$$(\sqrt{2}-i)(1+i)^2 = (\sqrt{2}-i)(1+2i-1) = 2+2\sqrt{2}i,$$

sodass

$$\operatorname{Re}(\sqrt{2}-i)(1+i)^2 = 2, \quad \operatorname{Im}(\sqrt{2}-i)(1+i)^2 = 2\sqrt{2}$$

und

$$|(\sqrt{2}-i)(1+i)^2| = \sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

(c) Es ist

$$\frac{2i}{i - \dfrac{1}{2i+1}} = \frac{2i(2i+1)}{i(2i+1)-1} = \frac{-4+2i}{-3+i} = \frac{(-4+2i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)} = \frac{14-2i}{10} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}i$$

sodass

$$\operatorname{Re} \frac{2i}{i - \dfrac{1}{2i+1}} = \frac{7}{5}, \quad \operatorname{Im} \frac{2i}{i - \dfrac{1}{2i+1}} = -\frac{1}{5}$$

und

$$\left| \frac{2i}{i - \dfrac{1}{2i+1}} \right| = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

ii) (a) Es ist $i = e^{i\pi/2}$, folglich sind

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad z_1 = e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{5\pi}{6}}, \quad z_2 = e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})} = e^{i\frac{9\pi}{6}}$$

die drei Lösungen der Gleichung $z^3 = i$.

(b) Es ist

$$\begin{aligned} z^2 - (3+i)z + 4 + 3i = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 - (3+i)z = -4 - 3i \\ &\Leftrightarrow \quad \left(z - \frac{3+i}{2}\right)^2 = -4 - 3i + \left(\frac{3+i}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(z - \frac{3+i}{2}\right)^2 = -4 - 3i + \frac{9+6i-1}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(z - \frac{3+i}{2}\right)^2 = -2 - \frac{3}{2}i. \end{aligned} \tag{1}$$

Nun suchen wir $w \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $w^2 = -2 - \frac{3}{2}i$. Schreiben wir $w = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$ (wäre $x = 0$ oder $y = 0$, so wäre $\operatorname{Im} w^2 = 0$), so gilt

$$
\begin{aligned}
w^2 = -2 - \frac{3}{2}i \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = -2 \quad \wedge \quad 2xy = -\frac{3}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - y^2 = -2 \quad \wedge \quad y = -\frac{3}{4x} \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{9}{16x^2} = -2 \quad \wedge \quad y = -\frac{3}{4x} \\
&\Leftrightarrow \quad x^4 + 2x^2 = \frac{9}{16} \quad \wedge \quad y = -\frac{3}{4x} \\
&\Leftrightarrow \quad (x^2+1)^2 = \frac{25}{16} \quad \wedge \quad y = -\frac{3}{4x} \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 + 1 = \frac{5}{4} \quad \wedge \quad y = -\frac{3}{4x} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{2} \quad \wedge \quad y = \mp\frac{3}{2},
\end{aligned}
$$

d.h. $w = \pm(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i)$. Nach Gleichung (1) gilt

$$\left(z - \frac{3+i}{2}\right)^2 = w^2,$$

d.h.

$$z - \frac{3+i}{2} = \pm w = \pm\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right).$$

Die beiden Lösungen zur Gleichung $z^2 - (3+i)z + 4 + 3i = 0$ sind also gegeben durch

$$z_0 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i = 1 + 2i, \quad z_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i = 2 - i.$$

Aufgabe 2. (*Stetigkeit/Lipschitz-Stetigkeit/Gleichmäßige Stetigkeit, 1+2+1 Punkte*) Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

i) Die Betragsfunktion ist Lipschitz-stetig.

ii) Lipschitz-stetige Funktionen (und damit auch die Betragsfunktion) sind gleichmäßig stetig.

iii) Die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$, ist im Nullpunkt stetig aber nicht Lipschitz-stetig.

Lösung Aufgabe 2.

i) Setze $K = 1$, dann gilt

$$\big||x| - |y|\big| \leq K|x - y|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ nach der umgekehrten Dreiecksungleichung.

ii) Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein (evtl. verallgemeinertes) Intervall, $f\colon I \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $K \geq 0$ und $\varepsilon > 0$.

Ist $K = 0$, so ist die Funktion f konstant und damit gleichmäßig stetig.

Ist $K > 0$, so definieren wir $\delta = \varepsilon/K$. Für alle $x, y \in I$ mit $|x - y| < \delta$ gilt dann

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| < K \cdot \delta = K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon,$$

d.h. f ist gleichmäßig stetig.

iii) Es sind

$$\sqrt{\cdot}\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

und

$$|\cdot|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|$$

stetige Funktionen. Nach Satz 4.1 ist daher auch

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{|x|}$$

als Verkettung obiger Funktionen stetig. Um zu begründen, dass f im Nullpunkt nicht Lipschitz-stetig ist (d.h. dass es für jedes $K > 0$ ein $x \in \mathbb{R}$ mit $|f(x) - f(0)| = |\sqrt{|x|}| = \sqrt{|x|} > K|x|$ gibt), sei $K > 0$. Nun müssen wir $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ finden mit $\sqrt{|x|} > K|x|$, d.h. $K\sqrt{|x|} < 1$. Hierzu betrachten wir die Folge $\{\frac{1}{n^2}\}_{n \in \mathbb{N}}$ und bemerken

$$\lim_{n\to\infty} K\sqrt{\left|\frac{1}{n^2}\right|} = K \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Somit gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit

$$K\sqrt{\left|\frac{1}{N^2}\right|} < 1$$

d.h. für $x = \frac{1}{N^2}$ gilt $K|x| < \sqrt{|x|}$. Also ist f im Nullpunkt nicht Lipschitz-stetig.

Aufgabe 3. (*Einseitige Grenzwerte, 0.5+0.5+1+1+1+1 Punkte*) Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein (verallgemeinertes) Intervall und f eine Funktion $I \to \mathbb{R}$.

Dann lassen sich die **einseitigen Grenzwerte** folgendermaßen definieren:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0^-} f(x) = y_0 \quad &:\Leftrightarrow \quad \text{für alle Folgen } \{x_n\},\ x_n \in I,\ x_n < x_0 \text{ gilt:}\\
&\qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0,\\
\lim_{x\to x_0^+} f(x) = y_0 \quad &:\Leftrightarrow \quad \text{für alle Folgen } \{x_n\},\ x_n \in I,\ x_n > x_0 \text{ gilt:}\\
&\qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0.
\end{aligned}$$

Weierhin definieren wir für eine reelle Zahlenfolge $\{x_n\}$ (anlog der Fall "$-\infty$"):

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty :\Leftrightarrow \text{Zu jedem } M > 0 \text{ existiert ein } N \in \mathbb{N} \text{ mit } M < x_n \text{ für alle } n > N,$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = y_0 :\Leftrightarrow \text{für alle Folgen } \{x_n\},\ x_n \in I \text{ gilt: } \lim_{n\to\infty} x_n = \infty \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0.$$

Existieren die Grenzwerte

$$\begin{aligned} &i) \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x^3+x^2}, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{x^3+x^2}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^3}, \\ &ii) \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|\cos(x)}{|x+1|}, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{(x^2+1)\sin(x)}{\cos(x)-\sin(x)}, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{x\cos(x)}{|x|}? \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 3.

i)

- Der Grenzwert $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x^3+x^2}$ existiert:
  Es sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge positiver reeller Zahlen. Dann gilt wegen den Grenzwertsätzen für konvergente Folgen
  $$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{x_n^3+x_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n+1} = \frac{1}{(\lim_{n\to\infty} x_n)+1} = 1.$$
- Genauso argumentiert man, um die Existenz des Grenzwerts $\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{x^3+x}$ nachzuweisen.
- Der Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{x^3}$ existiert:
  Es sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n^3} = 0$ und folglich
  $$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^3+1}{x_n^3} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{x_n^3} = 1.$$

ii)

- Der Grenzwert $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|\cos(x)}{|x+1|}$ existiert:
  Es sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge positiver reeller Zahlen. Nun sind $x \mapsto |x|$, $x \mapsto |x+1|$, $x \mapsto \cos(x)$ stetige Funktionen $(-1,1) \to \mathbb{R}$. Nach Satz 4.1 *i)* (b) und *ii)* ist damit auch
  $$x \mapsto \frac{|x|\cos(x)}{|x+1|}$$
  eine stetige Funktion $(-1,1) \to \mathbb{R}$. Also gilt
  $$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_n|\cos(x_n)}{|x_n+1|} = \frac{|0|\cos(0)}{|0+1|} = 0$$
  und damit
  $$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|\cos(x)}{|x+1|} = 0.$$
- Genauso argumentiert man, um zu zeigen dass
  $$\lim_{x\to 0^-} \frac{(x^2+1)\sin(x)}{\cos(x)-\sin(x)} = 0.$$

- Der Grenzwert $\lim_{x\to-\infty} \frac{x\cos(x)}{|x|}$ existiert nicht:
  Für $x_n = -2n\pi$ und $y_n = -(2n+1)\pi$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$ aber
  $$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n \cos(x_n)}{|x_n|} = \lim_{n\to\infty} -\cos(-2n\pi) = -1$$
  und
  $$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n \cos(y_n)}{|y_n|} = \lim_{n\to\infty} -\cos(-(2n+1)\pi) = 1.$$

Aufgabe 4. (*Stetige Funktionen, 2+2+2 Punkte*)

i) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch
$$f(x) = \begin{cases} (e^x - 1)\sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$
Ist f eine auf $\mathbb{R}$ stetige Funktion?

ii) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch
$$f(x) = \begin{cases} \cos(\frac{1}{2x}) - \sin(x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$
Ist f eine auf $\mathbb{R}$ stetige Funktion?

iii) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist die durch die Formel
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x-1|}\sin^2(\ln(|x-1|^2)) & \text{für } x \neq 1, \\ a & \text{für } x = 1 \end{cases}$$
definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ stetig?

Lösung Aufgabe 4.

i) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist auf $\mathbb{R} - \{0\}$ als Verkettung stetiger Funktionen stetig (Satz 4.1). Ferner sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R} - \{0\}$. Dann gilt
$$\underbrace{0}_{\to 0} \leq \left|(e^{x_n} - 1)\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)\right| \leq \underbrace{|e^{x_n} - 1|}_{\to 0}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ (die Exponentialfunktion ist stetig), sodass
$$\lim_{n\to\infty} (e^{x_n} - 1)\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = 0.$$
Also ist f auch stetig in 0 und damit stetig auf ganz $\mathbb{R}$.

ii) Die Funktion ist im Nullpunkt nicht stetig. Für $x_n = \frac{1}{4n\pi}$ und $y_n = \frac{1}{(4n+2)\pi}$ $(n \in \mathbb{N})$ gilt nämlich

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(2n\pi) - \sin\left(\frac{1}{4n\pi}\right) = 1$$

und

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} \cos((2n+1)\pi) - \sin\left(\frac{1}{(2n+1)\pi}\right) = -1.$$

iii) Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ als Verkettung stetiger Funktionen stetig (Satz 4.1). Ist außerdem $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}-\{1\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ so folgt aus $|\sin(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dass

$$\underbrace{0}_{\to 0} \leq |f(x_n)| = \sqrt{|x_n - 1|}|\sin^2(\ln(|x_n - 1|^2))| \leq \underbrace{|\sqrt{|x_n - 1|}|}_{\to 0}$$

(da die Funktion $x \mapsto x - 1$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ und die Funktion $x \mapsto \sqrt{|x|}$ nach Aufgabe 2 *iii*) stetig in $x = 0$ sind). Also ist f genau für $a = 0$ stetig auf $\mathbb{R}$.