Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

Lösungshinweise Übungsblatt 7

Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure II

Sommersemester 2020

Aufgabe 1. (*Stammfunktionen, je 2 Punkte*) Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

i) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$

ii) $\displaystyle\int x^2\cosh(x)\,\mathrm{d}x,$

iii) $\displaystyle\int \cosh(\sin(x))\cos(x)\,\mathrm{d}x,$

iv) $\displaystyle\int \frac{1-x}{2x^3+4x^2+2x}\,\mathrm{d}x,$

v) $\displaystyle\int e^x\ln(1+e^x)\,\mathrm{d}x,$

vi) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-x^2+x-1}\,\mathrm{d}x,$

vii) $\displaystyle\int \frac{1+xe^{x^2}}{2x+e^{x^2}}\,\mathrm{d}x,$

viii) $\displaystyle\int x^x(1+\ln(x))\,\mathrm{d}x,$

ix) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x,$

x) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x,$

xi) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(\frac{1}{x})}\,\mathrm{d}x,$

xii) $\displaystyle\int \cosh(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x.$

Lösung Aufgabe 1.

i) Die Substitution $x=\sinh(y)$ liefert (wegen $\cosh^2(y)-\sinh^2(y)=1$ für alle $y\in\mathbb{R}$)

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1+\sinh^2(y)}\cosh(y)\,\mathrm{d}y = \int \cosh^2(y)\,\mathrm{d}y$$

und mit partieller Integration folgt weiter

$$\begin{aligned}\int \cosh^2(y)\,\mathrm{d}y &= \sinh(y)\cosh(y) - \int \sinh^2(y)\,\mathrm{d}y\\ &= \sinh(y)\cosh(y) + \int 1-\cosh^2(y)\,\mathrm{d}y\\ &= \sinh(y)\cosh(y) + y - \int \cosh^2(y)\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

sodass

$$\int \cosh^2(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(\sinh(y)\cosh(y)+y)+C.$$

Die Rücksubstitution $y=\operatorname{arsinh}(x)$ liefert

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x\cosh(\operatorname{arsinh}(x))+\operatorname{arsinh}(x)) = \frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2}+\operatorname{arsinh}(x))+C.$$

ii) Zweimalige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int x^2\cosh(x)\,\mathrm{d}x &= x^2\sinh(x) - \int 2x\sinh(x)\,\mathrm{d}x\\ &= x^2\sinh(x) - 2x\cosh(x) + \int 2\cosh(x)\,\mathrm{d}x\\ &= (x^2+2)\sinh(x) - 2x\cosh(x) + C.\end{aligned}$$

iii) Es ist (Kettenregel)

$$\int \cosh(\sin(x))\cos(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\sinh(\sin(x))\big)\,\mathrm{d}x = \sinh(\sin(x)) + C.$$

iv) Es ist

$$2x^3 + 4x^2 + 2x = 2x(x^2+2x+1) = 2x(x+1)^2$$

und wir machen den Ansatz (Partialbruchzerlegung)

$$\begin{aligned}\frac{1-x}{2x(x+1)^2} &= \frac{A}{2x} + \frac{B}{2(x+1)} + \frac{C}{2(x+1)^2}\\ &= \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{2x(x+1)^2}\\ &= \frac{(A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A}{2x(x+1)^2}.\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}A+B &= 0\\ 2A+B+C &= -1\\ A &= 1\end{aligned}$$

mit der Lösung

$$A = 1,\quad B = -1,\quad C = -2,$$

sodass

$$\frac{1-x}{2x^3+4x^2+2x} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

und damit

$$\int \frac{1-x}{2x^3+4x^2+2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(|x|) - \frac{1}{2}\ln(|x+1|) + \frac{1}{1+x} + C.$$

v) Aus der Vorlesung (Beispiel *ii)* auf S. 177) wissen wir, dass

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C.$$

Also gilt (Kettenregel)

$$\int e^x\ln(1+e^x)\,\mathrm{d}x = (1+e^x)\ln(1+e^x) - (1+e^x) + C.$$

vi) Es ist

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$$

und wir machen den Ansatz (Partialbruchzerlegung)

$$\begin{aligned}\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}\\ &= \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}\\ &= \frac{(A+B)x^2 + (C-B)x + A - C}{(x-1)(x^2+1)}\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}A + B &= 0\\ -B + C &= 1\\ A - C &= 0\end{aligned}$$

mit der Lösung

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2},$$

sodass

$$\frac{x}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1-x}{2(x^2+1)}$$

und damit

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^3 - x^2 + x - 1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2(x-1)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x}{2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\ln(|x-1|) + \frac{1}{2}\arctan(x) - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + C.\end{aligned}$$

vii) Es gilt

$$\int \frac{1 + xe^{x^2}}{2x + e^{x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2 + 2xe^{x^2}}{2x + e^{x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(2x + e^{x^2}) + C.$$

viii) Wegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\ln(x)) = 1 + \ln(x)$ folgt mit der Kettenregel

$$\int x^x(1 + \ln(x))\,\mathrm{d}x = \int e^{x\ln(x)}(1 + \ln(x))\,\mathrm{d}x = e^{x\ln(x)} + C = x^x + C.$$

ix) Die Substitution $y = \cos(x)$ liefert

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \cos^2(x)}\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x) + \cos^2(x)}\,\mathrm{d}x\\ &= -\int \frac{1}{y + y^2}\,\mathrm{d}y\\ &= -\int \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y \quad \text{(Partialbruchzerlegung)}\\ &= \ln(|1+y|) - \ln(|y|)\\ &= \ln(|1 + \cos(x)|) - \ln(|\cos(x)|) + C.\end{aligned}$$

$x)$ Es gilt

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int 1 - \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = x - \ln(1+e^x) + C.$$

$xi)$ Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\Big(\ln\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big) = \frac{1}{\ln(\frac{1}{x})}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\Big(\frac{1}{x}\Big) = \frac{1}{\ln(\frac{1}{x})}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x}}\cdot\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = -\frac{1}{x\ln(\frac{1}{x})},$$

sodass

$$\int \frac{1}{x\ln(\frac{1}{x})}\,\mathrm{d}x = -\ln\Big(\ln\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big) + C.$$

$xii)$ Zweimalige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int \cosh(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x &= \sinh(x)\cos(x) + \int \sinh(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \sinh(x)\cos(x) + \cosh(x)\sin(x) - \int \cosh(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

sodass

$$\int \cosh(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\sinh(x)\cos(x) + \cosh(x)\sin(x)) + C.$$

Aufgabe 2. (*Bestimmte Integrale, je 2 Punkte*)

$i)$ Berechnen Sie die bestimmten Integrale

$$\text{(a)}\ \int_1^e x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)}\ \int_0^1 \cos(\pi 2^x)2^x\,\mathrm{d}x.$$

$ii)$ Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\cos(x) - x\sin(x))\ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

[Hinweis: Berechnen Sie zunächst $\int(\cos(x) - x\sin(x))\,\mathrm{d}x$.]

Lösung Aufgabe 2.

$i)$ (a) Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}\int_1^e x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\Big]_1^e - \int_1^e \frac{1}{3}x^2\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}e^3 - \Big[\frac{1}{9}x^3\Big]_1^e\\ &= \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}.\end{aligned}$$

(b) Es ist (Kettenregel)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \cos(\pi 2^x)2^x \, \mathrm{d}x &= \int_0^1 \cos(\pi e^{\ln(2)x})e^{\ln(2)x} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi \ln(2)} \int_0^1 \cos(\pi e^{\ln(2)x})\pi \ln(2) e^{\ln(2)x} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi \ln(2)} \big[\sin(\pi e^{\ln(2)x}) \big]_0^1 = 0.\end{aligned}$$

ii) Partielle Integration liefert

$$\int \cos(x) - x \sin(x) \, \mathrm{d}x = \sin(x) + x\cos(x) - \int \cos(x) \, \mathrm{d}x = x\cos(x).$$

Und daher folgt mit einer weiteren partiellen Integration

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\cos(x) - x\sin(x)) \ln(x) \, \mathrm{d}x &= \big[x \cos(x) \ln(x)\big]_{\pi/2}^{3\pi/2} - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos(x) \, \mathrm{d}x \\ &= -\big[\sin(x) \big]_{\pi/2}^{3\pi/2} \\ &= 2.\end{aligned}$$