Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

Lösungshinweise Übungsblatt 9
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure II
Sommersemester 2020

Aufgabe 1. (*Taylor-Polynome, 2+3+1 Punkte*)

i) Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ das Taylorpolynom n-ten Grades zum Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ sowie das Restglied in Lagrangescher Darstellung von

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1.$$

ii) Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ das Taylorpolynom n-ten Grades zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ von

(a) $f(x) = x^2 + e^x$, (b) $f(x) = e^{x^2}$.

iii) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom dritten Grades zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x^2)$.

Lösung Aufgabe 1.

i) Es gilt

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3,$$

sodass

$$T_n(x;1) = \begin{cases} 0, & n \leq 2, \\ (x-1)^3, & n \geq 3, \end{cases} \quad R_n(x-1) = \begin{cases} (x-1)^3, & n \leq 2, \\ 0, & n \geq 3. \end{cases}$$

ii) (a) Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + e^x, \\ f'(x) &= 2x + e^x, \\ f''(x) &= 2 + e^x, \\ f^{(k)}(x) &= e^x \end{aligned}$$

für alle $k \geq 3$, sodass

$$\begin{aligned} f(0) &= 1, \\ f'(0) &= 1, \\ f''(0) &= 3, \\ f^{(k)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

für alle $k \geq 3$. Also folgt

$$\begin{aligned}
T_0(x;0) &= f(0) = 1, \\
T_1(x;0) &= f(0) + f'(0)x = 1 + x, \\
T_2(x;0) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 1 + x + \frac{3}{2}x^2
\end{aligned}$$

und

$$T_n(x;0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k!}x^k$$

für alle $n \geq 3$.

(b) Es gilt

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist

$$e^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Da die Potenzreihenentwicklung der Funktion $x \mapsto e^{x^2}$ eindeutig ist, folgt

$$T_n(x;0) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n/2} \frac{x^{2k}}{k!}, & n \text{ gerade}, \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{(n-1)/2} \frac{x^{2k}}{k!}, & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

iii) Es ist

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x^2), \\
f'(x) &= 2x\cos(x^2), \\
f''(x) &= 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2), \\
f'''(x) &= -4x\sin(x^2) - 8x\sin(x^2) - 8x^3\cos(x^2),
\end{aligned}$$

sodass

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0, \\
f'(0) &= 0, \\
f''(0) &= 2, \\
f'''(0) &= 0,
\end{aligned}$$

und damit

$$T_3(x;0) = \frac{f''(0)}{2!}x^2 = x^2.$$

Aufgabe 2. (*Cauchys Beispiel, 5 Punkte*) Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion, dass

$$f^{(k)}(x) = p_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$, wobei p_k ein Polynom vom Grad $3k$ ist und folgern Sie, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Ist $f \in C^\omega(\mathbb{R})$?

Lösung Aufgabe 2. Zunächst zeigen wir durch vollständige Induktion, dass

$$f^{(k)}(x) = p_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$, wobei p_k ein Polynom vom Grad $3k$ ist.

Induktionsanfang ($n = 1$): Für $x \neq 0$ ist f differenzierbar als Verkettung differenzierbarer Funktionen und es gilt

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2} = p_1\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}$$

mit $p_1(y) = 2y^3$.

Induktionsschritt: Es gelte

$$f^{(k)}(x) = p_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}, \quad x \neq 0,$$

für ein *festes* $k \in \mathbb{N}$, wobei p_k ein Polynom $3k$-ten Grades sei (*Induktionsvoraussetzung*). Für $x \neq 0$ ist $f^{(k)}$ differenzierbar als Verkettung differenzierbarer Funktionen und es gilt (Produkt- und Kettenregel)

$$f^{(k+1)}(x) = -\frac{1}{x^2}p_k'\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2} + p_k\left(\frac{1}{x}\right)\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2} = p_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2},$$

wobei $p_{k+1}(y) = -y^2p_k'(y) + 2y^3p_k(y)$ ein Polynom vom Grad $3k + 3 = 3(k + 1)$ ist.

Nun gilt

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \frac{1}{xe^{1/x^2}}$$

für $x \neq 0$ und wegen

$$|xe^{1/x^2}| = |x|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{x^{2k}} = |x| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{|x|^{2k-1}} \to \infty$$

für $x \to 0$ folgt

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| \to 0$$

für $x \to 0$, sodass f differenzierbar in 0 ist mit $f'(0) = 0$. Genauso zeigt man

$$\lim_{x \to 0} p_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} = 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ (sodass $f' \in C^0(\mathbb{R})$, d.h. $f \in C^1(\mathbb{R})$ folgt) sowie

$$\lim_{x \to 0} \frac{p_k(\frac{1}{x}) e^{-1/x^2}}{x} = 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Induktiv folgt, dass $f^{(k)}$ differenzierbar in 0 und $f^{(k+1)}$ stetig in 0 (mit $f^{(k+1)}(0) = 0$) sind für alle $k \in \mathbb{N}$, d.h. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Nach der Taylorschen Formel (Definition 7.1) ist

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{=0} + R_n(x)$$

für $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = f(x) \neq 0$$

für $x \neq 0$ und damit ist $f \notin C^\omega(\mathbb{R})$.

Aufgabe 3. (*Taylorsche Formel, 1.5+1.5 Punkte*)

i) Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = \cos(x)$ das Restglied $R_2(x - 0)$ in Lagrangescher Darstellung.

ii) Berechnen Sie

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$$

mithilfe dieser Restglieddarstellung und der Taylorschen Formel.

Lösung Aufgabe 3.

i) Es ist f unendlich oft (also insbesondere dreimal) differenzierbar mit

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x), \\ f'(x) &= -\sin(x), \\ f''(x) &= -\cos(x), \\ f'''(x) &= \sin(x), \end{aligned}$$

und nach der Lagrangeschen Restgliedformel (Korollar 7.1) gibt es $\theta \in (0, 1)$ so, dass

$$R_2(x) = \frac{1}{3!} f'''(\theta x) x^3 = \frac{1}{6} \sin(\theta x) x^3.$$

ii) Nach der Taylorschen Formel und Teil *i*) gilt

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + R_2(x),$$

d.h.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6}\sin(\theta x)x^3,$$

also

$$\frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sin(\theta x)x$$

für $x \neq 0$, sodass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

(da $x \mapsto \frac{1}{6}\sin(\theta x)x$ stetig ist mit $\lim_{x\to 0} \frac{1}{6}\sin(\theta x)x = \frac{1}{6}\sin(0)\cdot 0 = 0$).

Aufgabe 4. (*Taylor-Reihen, je 1,5 Punkte*) Bestimmen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Taylor-Reihen um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ der durch die Formeln

i) $\dfrac{x}{1+x^3}$, *ii*) $\dfrac{e^{x^4} - 1}{x^3}$, *iii*) $\dfrac{1 - \cos(x^2)}{x^4}$, *iv*) $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$

definierten Funktionen und geben Sie jeweils den Konvergenzradius an.

[Hinweis zu *iv*): Berechnen Sie die Taylor-Reihe von $\frac{1}{1+x^2}$ und verwenden Sie das Cauchy-Produkt.]

Lösung Aufgabe 4.

i) Es gilt (geometrische Reihe)

$$\frac{x}{1+x^3} = x\frac{1}{1-(-x^3)} = x\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{3k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{3k+1}$$

für $|-x^3| < 1$, d.h. $|x| < 1$.

ii) Es gilt (Reihendarstellung der Exponentialfunktion)

$$\frac{e^{x^4} - 1}{x^3} = \frac{1}{x^3}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^{4k} - 1\right) = \frac{1}{x^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}x^{4k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}x^{4k-3}$$

für $x \neq 0$ und wegen

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^4} - 1}{x^3} = 0 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot 0^{4k-3}$$

(Regel von L'Hospital) gilt diese Reihendarstellung auch für $x = 0$.

iii) Es gilt (Reihendarstellung von $x \mapsto \cos(x)$)

$$\frac{1-\cos(x^2)}{x^4} = \frac{1}{x^4}\left(1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{4k}\right) = \frac{1}{x^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}x^{4k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}x^{4(k-1)}$$

für $x \neq 0$ und wegen

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x^4} = \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!}\cdot 0^{4(k-1)}$$

(Regel von L'Hospital) gilt diese Reihendarstellung auch für $x = 0$.

iv) Es gilt (geometrische Reihe)

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$$

für $|-x^2| < 1$, d.h. $|x| < 1$. Daraus folgt (Cauchy-Produkt)

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+x^2)^2} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}\right)^2\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^j x^{2j}\cdot(-1)^{k-j}x^{2(k-j)}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(-1)^k x^{2k}\end{aligned}$$

für $|x| < 1$.