Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

Lösungshinweise Übungsblatt 8
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure II
Sommersemester 2020

Aufgabe 1. (*Cauchyscher Hauptwert, 2+2 Punkte*) Es sei f eine lokal integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}$. Der *Cauchysche Hauptwert*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

ist (sofern existent)

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

i) Berechnen Sie den Cauchyschen Hauptwert $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

ii) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\cos(x)\,\mathrm{d}x$ divergiert.

Lösung Aufgabe 1.

i) Es gilt (partielle Integration)

$$\int x\cos(x)\,\mathrm{d}x = x\sin(x)+\cos(x)+C$$

und damit

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} x\cos(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty}\big[x\sin(x)+\cos(x)\big]_{-R}^{R}\\
&= \lim_{R\to\infty}\left(R\sin(R)+\cos(R)+R\sin(-R)-\cos(-R)\right)\\
&= \lim_{R\to\infty}\left(R\sin(R)+\cos(R)-R\sin(R)-\cos(R)\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

ii) Die Folge $\{\frac{(4n+1)\pi}{2}\}_{n\in\mathbb{N}}\subset(0,\infty)$ erfüllt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(4n+1)\pi}{2}=\infty$$

und es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_0^{(4n+1)\pi/2} x\cos(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\big[x\sin(x)+\cos(x)\big]_0^{(4n+1)\pi/2}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(4n+1)\pi}{2}\sin\left(\frac{(4n+1)\pi}{2}\right)-1\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(4n+1)\pi}{2}-1\\
&= \infty,
\end{aligned}$$

sodass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty x\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

und damit nach Definition (siehe S. 188) auch das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^\infty x\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

divergieren.

Aufgabe 2. (*Uneigentliche Integrale, 2+(2+2+2+2+2) Punkte*)

i) Für welche $\alpha\in\mathbb{R}$ konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x?$$

ii) Konvergieren die uneigentlichen Integrale

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \min\left\{\frac{1}{\sqrt{x}},\frac{1}{x^2}\right\}\mathrm{d}x,$

(b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\cos(x)}{x^2e^x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x,$

(c) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{3-\sin(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x,$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-2x}\sin(x)\,\mathrm{d}x,$

(e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^3+2x^2+x}\,\mathrm{d}x?$

Lösung Aufgabe 2.

i) Für $\alpha\in\mathbb{R}-\{1\}$ gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi\to 0^+}\int_\xi^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\xi\to 0^+}\left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right]_\xi^1\\
&= \lim_{\xi\to 0^+}\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\xi^{1-\alpha}\\
&= \begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}, & \alpha<1\\ -\infty, & \alpha>1.\end{cases}
\end{aligned}$$

Für $\alpha = 1$ gilt

$$\lim_{\xi \to 0^+} \int_\xi^1 \frac{1}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x = \lim_{\xi \to 0^+} \left[\ln(x) \right]_\xi^1 = \lim_{\xi \to 0^+} - \ln(\xi) = \infty.$$

Also konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \, \mathrm{d}x$$

genau dann, wenn $\alpha < 1$.

ii) (a) Für $x \in (0,1]$ ist $\sqrt{x} \geq x \geq x^2$, sodass

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^2}$$

und nach Teil *i)* konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \min\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{x^2}\right\} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x.$$

Für $x > 1$ ist $x^2 > x > \sqrt{x}$, sodass

$$\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

und laut Vorlesung (Standardbeispiel S.188/189) konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \min\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{x^2}\right\} \mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Insgesamt konvergiert also auch das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \min\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{x^2}\right\} \mathrm{d}x = \int_0^1 \min\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{x^2}\right\} \mathrm{d}x + \int_1^\infty \min\left\{\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{x^2}\right\} \mathrm{d}x.$$

(b) Nach Teil *i)* konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$$

und aus der Abschätzung

$$\left| \frac{\cos(x)}{x^2 e^x + \sqrt{x}} \right| = \frac{|\cos(x)|}{x^2 e^x + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^2 e^x + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

für alle $x \in (0,1)$ folgt mit dem Majorantenkriterium (Satz 6.7 *ii)*) die Konvergenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{x^2 e^x + \sqrt{x}} \, \mathrm{d}x.$$

Außerdem ist die Funktion $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x^2 e^x + \sqrt{x}}$ als Verkettung stetiger Funktionen stetig auf $[1,2]$, sodass nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung das Integral

$$\int_1^2 \frac{\cos(x)}{x^2 e^x + \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

existiert.

Insgesamt konvergiert also das uneigentliche Integral

$$\int_0^2 \frac{\cos(x)}{x^2 e^x + \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\cos(x)}{x^2 e^x + \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{\cos(x)}{x^2 e^x + \sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

(c) Für alle $x \in (3,\infty)$ gilt (wegen $\sin(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$)

$$\frac{3-\sin(x)}{x+1} \geq \frac{2}{x+1} \geq 0$$

und wegen

$$\lim_{R\to\infty} \int_3^R \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty} \big[2\ln(x+1)\big]_3^R = \lim_{R\to\infty} 2\ln(R+1) - 2\ln(3) = \infty$$

divergiert das uneigentliche Integral

$$\int_3^\infty \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

sodass nach dem Minorantenkriterium (Satz 6.7 *iii*)) auch das uneigentliche Integral

$$\int_3^\infty \frac{3-\sin(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

divergiert.

(d) Es sei $R > 0$. Mithilfe partieller Integration berechnen wir

$$\begin{aligned}\int_0^R e^{-2x}\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \big[-e^{-2x}\cos(x)\big]_0^R - 2\int_0^R e^{-2x}\cos(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -e^{-2R}\cos(R) + 1\\ &\qquad - 2\left(\big[e^{-2x}\sin(x)\big]_0^R + 2\int_0^R e^{-2x}\sin(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= -e^{-2R}\cos(R) + 1 - 2e^{-2R}\sin(R) - 4\int_0^R e^{-2x}\sin(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

und damit ist

$$\int_0^R e^{-2x}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\big(-e^{-2R}\cos(R) + 1 - 2e^{-2R}\sin(R)\big),$$

sodass

$$\int_0^\infty e^{-2x}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-2x}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}.$$

(e) Für alle $x \in [1, \infty)$ gilt

$$x^3 + 2x^2 + x \geq x^3,$$

sodass

$$\frac{1}{x^3 + 2x^2 + x} \leq \frac{1}{x^3}$$

für alle $x \in [1, \infty)$ und da das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3} \, \mathrm{d}x$$

laut Vorlesung (Standardbeispiel S.188/189) konvergiert, konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3 + 2x^2 + x} \, \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 3. (*Numerische Integration, 1+1+1+1 Punkte*) Bestimmen Sie eine Approximation (8 Nachkommastellen) von

$$\int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x$$

mit

i) der Trapez-Regel,

ii) der Simpson-Regel,

iii) der 3/8-Regel,

iv) der summierten Trapez-Regel zu $N = 4$.

Wie groß ist jeweils der (absolute) Fehler?

Lösung Aufgabe 3. Es seien

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}, \quad x \in [0, 1], \quad I = \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Dann gilt

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \big[\ln(1 + x^2) \big]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2} \approx 0,34657359.$$

Die Trapez-Regel liefert

$$I_1(f) = \frac{1}{2} \left(f(0) + f(1) \right) = \frac{1}{4} = 0,25,$$

die Simpson-Regel liefert

$$I_2(f) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\Big(f(0) + 4f\Big(\frac{1}{2}\Big) + f(1)\Big) = \frac{1}{6}\Big(\frac{8}{5} + \frac{1}{2}\Big) = \frac{21}{60} = 0,35,$$

die $\frac{3}{8}$-Regel liefert

$$I_3(f) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3}\Big(f(0) + 3f\Big(\frac{1}{3}\Big) + 3f\Big(\frac{2}{3}\Big) + f(1)\Big) = \frac{1}{8}\Big(\frac{9}{10} + \frac{18}{13} + \frac{1}{2}\Big) = \frac{181}{520} \approx 0,34807692$$

und die summierte Trapez-Regel zu $N = 4$ liefert

$$\begin{aligned} T(f, h_4) &= \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2}f(0) + f\Big(\frac{1}{4}\Big) + f\Big(\frac{1}{2}\Big) + f\Big(\frac{3}{4}\Big) + \frac{1}{2}f(1)\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(\frac{4}{17} + \frac{2}{5} + \frac{12}{25} + \frac{1}{4}\Big) \\ &= \frac{2321}{6800} \\ &\approx 0,34132353. \end{aligned}$$

Für den absoluten Fehler gilt

$$\begin{aligned} |I - I_1(f)| &\approx 0,09657359 \\ |I - I_2(f)| &\approx 0,00342641 \\ |I - I_3(f)| &\approx 0,00150333 \\ |I - T(f, h_4)| &\approx 0,00525006. \end{aligned}$$