Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

Lösungshinweise Übungsblatt 4
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure II
Sommersemester 2020

Aufgabe 1. (*Folgerungen aus dem Mittelwertsatz, 2+1+1 Punkte*) Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a,b). Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

i) Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$, so ist f konstant.

ii) Es ist $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) für alle $x \in (a,b)$ genau dann, wenn f auf $[a,b]$ monoton wachsend (bzw. monoton fallend) ist.

iii) Ist $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$) für alle $x \in (a,b)$, so ist f streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend) auf $[a,b]$. Zeigen Sie außerdem durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass die Umkehrung dieser Aussage falsch ist.

Lösung Aufgabe 1.

i) Es seien $x_2, x_2 \in (a,b)$ mit $x_1 < x_2$. Dann ist f auf $[x_1,x_2]$ stetig und auf (x_1,x_2) differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz gibt es $\xi \in (x_1,x_2)$ mit

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) = 0,$$

d.h. $f(x_2) = f(x_1)$. Da x_1 und x_2 beliebig vorgegeben waren, ist f auf (a,b) konstant. Da f stetig ist, ist f damit auch konstant auf $[a,b]$ (für jede Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in (a,b) die gegen a bzw. b konvergiert ist die Folge $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konstant und konvergiert gegen $f(a)$ bzw. $f(b)$, d.h. $f(a) = f(b) = f(x)$ für alle $x \in (a,b)$).

ii)
- Es seien $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$ und $x_1, x_2 \in (a,b)$ mit $x_1 \leq x_2$. Dann ist f auf $[x_1,x_2]$ stetig und auf (x_1,x_2) differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz gibt es $\xi \in (x_1,x_2)$ mit

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \geq 0,$$

d.h. $f(x_2) \geq f(x_1)$. Da x_1 und x_2 beliebig vorgegeben waren, ist f auf (a,b) monoton wachsend. Weiter ist nach dem gerade gezeigten für jede gegen a konvergente, monoton fallende Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus (a,b) die Folge $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und da f stetig ist, gilt

$$f(a) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) \leq \inf_{x\in(a,b)} f(x) \leq f(z)$$

für alle $z \in (a,b)$. Ein entsprechendes Argument liefert $f(b) \geq f(z)$ für alle $z \in (a,b)$. Also ist f monoton wachsend auf $[a,b]$.

- Es seien f monoton wachsend auf $[a,b]$ und $z \in (a,b)$. Für jedes $h > 0$ mit $z+h \in (a,b)$ ist dann wegen der Monotonie

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \geq 0$$

und durch Übergang zum Grenzwert $h \to 0$ erhalten wir schließlich $f'(z) \geq 0$.

iii) Dies zeigt man genauso wie die erste Implikation in Teil *ii*).

Als Gegenbeispiel betrachte die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Diese ist streng monoton wachsend ($x < y \Rightarrow x^2 < yx < y^2 \Rightarrow x^3 < y^2x < y^3$ für alle $0 \leq x < y$ und $x < y < 0 \Rightarrow -x > -y > 0 \Rightarrow (-x)^3 > (-y)^3 > 0 \Rightarrow x^3 < y^3 < 0$) und es gilt $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$.

Um die Aussagen in *ii*) und *iii*) für (streng) monoton fallende Funktionen zu zeigen, kehrt man die entsprechenden Ordnungszeichen um und betrachtet in Teil *iii*) das Gegenbeispiel $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3$.

Aufgabe 2. (*Lokale und globale Extrema, 3+3+4 Punkte*)

i) Es sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = |x|e^{-x^2-1}.$$

Ist f stetig auf $[-1,1]$? Ist f differenzierbar auf $(-1,1)$? Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Maxima und Minima von f auf $[-1,1]$.

ii) Es sei $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} xe^{x-1} & \text{für } x \leq 0, \\ xe^{1-x} & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Ist f stetig auf $[-2,2]$? Ist f differenzierbar auf $(-2,2)$? Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Maxima und Minima von f auf $[-2,2]$.

iii) Bestimmen Sie den (maximalen) Definitionsbereich I der durch die Formel

$$f(x) = \ln(x^2 - 2|x| + 2)$$

definierten Funktion f. Ist f stetig auf I? Ist f differenzierbar im Inneren von I? Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Maxima und Minima von f auf I.

Lösung Aufgabe 2.

i) Die Funktion f ist stetig auf $[-1,1]$ als Verkettung stetiger Funktionen.

Die Funktion f ist nicht differenzierbar auf $(-1,1)$, denn f ist nicht differenzierbar im Punkt $x=0$. Es sind nämlich $\{-\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolgen mit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}-0}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}e^{-\frac{1}{n^2}-1}}{\frac{1}{n}}=e^{-1}$$

und

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(-\frac{1}{n})-f(0)}{-\frac{1}{n}-0}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}e^{-\frac{1}{n^2}-1}}{-\frac{1}{n}}=-e^{-1},$$

sodass der Grenzwert $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ nicht existiert.

Da $[-1,1]\subseteq\mathbb{R}$ kompakt und $f\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$ stetig ist, nimmt die Funktion f ihr globales Maximum und Minimum an. Es gilt

$$f'(x)=\begin{cases}(2x^2-1)e^{-x^2-1}, & x\in(-1,0),\\ (1-2x^2)e^{-x^2-1}, & x\in(0,1),\end{cases}$$

sodass

$$f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Weiter gilt

$$f''(x)=\begin{cases}(6x-4x^3)e^{-x^2-1}, & x\in(-1,0),\\ (4x^3-6x)e^{-x^2-1}, & x\in(0,1),\end{cases}$$

sodass $f''(-\frac{1}{\sqrt{2}})<0$ und $f''(\frac{1}{\sqrt{2}})<0$. Also sind $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}$ lokale Maxima von f. Weiter gilt $f(0)=0$ und $f(x)\geq 0$ für alle $x\in[-1,1]$, d.h. 0 ist globales Minimum von f. Wegen $f'(x)>0$ für $x\in(-1,-\frac{1}{\sqrt{2}})$, ist f auf $[-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}]$ monoton wachsend, d.h. -1 ist lokales Minimum und wegen $f(-1)=e^{-2}>0=f(0)$ kein globales Minimum. Wegen $f'(x)<0$ für $x\in(\frac{1}{\sqrt{2}},1)$ ist f auf $(\frac{1}{\sqrt{2}},1)$ monoton fallend, d.h. 1 ist lokales Minimum und wegen $f(1)=e^{-2}>0=f(0)$ kein globales Minimum. Also sind $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}}$ auch globale Maxima von f.

ii) Die Funktion f ist stetig auf $[-2,2]-\{0\}$ als Verkettung stetiger Funktionen. Nach den Grenzwertsätzen für Folgen gilt für jede Nullfolge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus positiven Zahlen, dass

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}e^{1-x_n}=0$$

und entsprechend für jede Nullfolge $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus negativen Zahlen, dass

$$\lim_{n\to\infty}f(y_n)=\lim_{n\to\infty}y_n\cdot\lim_{n\to\infty}e^{y_n-1}=0,$$

d.h. $\lim_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$, d.h. f ist stetig in 0.

Die Funktion f ist nicht differenzierbar auf $(-2,2)$, denn f ist nicht differenzierbar im Punkt $x=0$. Es sind nämlich $\{-\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolgen mit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(-\frac{1}{n})-f(0)}{-\frac{1}{n}-0}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n}e^{-\frac{1}{n}-1}}{-\frac{1}{n}}=e^{-1},$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n} - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}e^{1-\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = e,$$

d.h. $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ existiert nicht.

Da $[-2,2] \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$ stetig ist, nimmt die Funktion f ihr globales Maximum und Minimum an. Es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} (1+x)e^{x-1}, & x \in (-2,0), \\ (1-x)e^{1-x}, & x \in (0,2), \end{cases}$$

sodass

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1.$$

Weiter gilt

$$f''(x) = \begin{cases} (2+x)e^{x-1}, & x \in (-2,0), \\ (x-2)e^{1-x}, & x \in (0,2), \end{cases}$$

sodass $f''(1) < 0$ und $f''(-1) > 0$. Also ist 1 ein lokales Maximum und -1 ein lokales Minimum von f. Wegen $f(x) < 0$ für $x \in (-2,0)$ und $f(x) > 0$ für $x \in (0,2]$ ist 0 kein Extremum von f. Wegen $f'(x) \le 0$ für $x \in (-2,-1)$ ist f auf $[-2,-1]$ monoton fallend, d.h. -2 ist lokales Maximum von f. Wegen $f'(x) \le 0$ für $x \in (1,2)$ ist f auf $[1,2]$ monoton fallend, d.h. 2 ist lokales Minimum von f. Wegen

$$f(-2) = -2e^{-3} < 1 = f(1)$$

ist 1 das einzige globale Maximum und wegen

$$f(2) = 2e^{-1} > -e^{-2} = f(-1)$$

ist -1 das einzige globale Minimum von f.

iii) Da der Definitionsbereich des Logartihmus $(0,\infty)$ ist, gilt

$$x \in I \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2|x| + 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (|x|-1)^2 + 1 > 0$$

und da diese Ungleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist, gilt $I = \mathbb{R}$.

Die Funktion f ist stetig auf $\mathbb{R}$ als Verkettung stetiger Funktionen.

Die Funktion f ist nicht differenzierbar in 0, denn sonst wäre nach der Kettenregel auch die Funktion

$$|x| = \exp\Big(-\frac{1}{2}(f(x) - x^2 - 2)\Big)$$

differenzierbar in 0, ein Widerspruch. Auf $\mathbb{R} - \{0\}$ ist f differenzierbar mit

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x+2}{x^2+2x+2}, & x < 0, \\ \frac{2x-2}{x^2-2x+2}, & x > 0, \end{cases}$$

sodass

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1.$$

Weiter gilt

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-2x^2-4x}{(x^2+2x+2)^2}, & x < 0, \\ \frac{-2x^2+4x}{(x^2-2x+2)^2}, & x > 0, \end{cases}$$

sodass $f''(-1) > 0$ und $f''(1) > 0$. Also sind -1 und 1 lokale Minima von f. Wegen $f'(x) > 0$ für $x \in (-1, 0)$ und $f'(x) < 0$ für $x \in (0, 1)$ ist f monoton wachsend auf $[-1, 0]$ und monoton fallend auf $[0, 1]$, sodass 0 ein lokales Maximum von f ist. Wegen

$$x^2 - 2|x| + 2 = (|x| - 1)^2 + 1 > 1$$

für alle $x \neq \pm 1$ ist $f(x) > 0$ für alle $x \neq \pm 1$ (da ln monoton wachsend ist), d.h. -1 und 1 sind globale Minima von f. Schließlich gilt

$$\lim_{x \to \pm\infty} \ln(x^2 - |x| + 2) = \lim_{x \to \pm\infty} \ln((|x| - 1)^2 + 1) = \infty,$$

sodass f kein globales Maximum hat.

Aufgabe 3. (*Kritische Punkte, 3 Punkte*) Es seien $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = x^3 \sin(x), \quad g(x) = x^3 \cos(x).$$

Ist der Punkt $x_0 = 0$

i) ein kritischer Punkt,

ii) eine lokale Minimalstelle bzw. Maximalstelle,

iii) ein Sattelpunkt

von f bzw. g?

Lösung Aufgabe 3.

i) Es gilt $f'(x) = 3x^2 \sin(x) + x^3 \cos(x)$ bzw. $g'(x) = 3x^2 \cos(x) - x^3 \sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}$, sodass $f'(0) = 0 = g'(0)$, d.h. 0 ist ein kritischer Punkt von f und von g.

ii) Die Funktion f' ist ungerade mit $f'(x) > 0$ für $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Also ist $f'(x) < 0$ für $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ und damit ist f monoton fallend in $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ und monoton wachsend in $(0, \frac{\pi}{2})$, d.h. f hat in 0 ein lokales Minimum.

Die Funktion g' ist gerade, ändert in 0 also ihr Vorzeichen nicht, d.h. 0 ist kein lokales Extremum von g.

iii) Nach dem in *ii)* gezeigten ist 0 ein Sattelpunkt von g.

Aufgabe 4. (*Differenzierbarkeit und Lipschitz-Stetigkeit, 3 Punkte*) Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $[a, b] \subset I$. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar auf ganz I und die Ableitungsfunktion f' sei eine auf dem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion.

Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig auf $[a, b]$ ist.

Lösung Aufgabe 4. Es seien $x, y \in [a, b]$ mit $x \neq y$. Dann ist f auf $[x, y]$ stetig und auf (x, y) differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz gibt es $\xi \in (x, y)$ mit

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi).$$

Als stetige Funktion nimmt $|f'|$ auf dem Kompaktum $[a, b]$ ihr Maximum an. Daraus folgt

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| = |f'(\xi)| \leq \sup_{z \in [a,b]} |f'(z)|.$$

Da $x, y \in [a, b]$ beliebig vorgegeben waren, folgt

$$|f(y) - f(x)| \leq K|y - x|$$

für alle $x, y \in [a, b]$, wobei $K = \sup_{z \in [a,b]} |f'(z)|$.