Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

Lösungshinweise Übungsblatt 0
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure II
Sommersemester 2020

Aufgabe 1. Bestimmen Sie mithilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens die Lösungen der Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 8x_2 + x_3 &= -8 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 3x_3 + 2x_4 &= 2 \\ -x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= -4. \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 1.

- Wir berechnen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 8 & 1 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[III+I]{II-2\cdot I} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 8 & 2 & -5 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{III-4\cdot II} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[6\cdot II+III]{6\cdot I-III} \left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 12 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{array}\right),$$

sodass $x_1 = \frac{11}{12}$, $x_2 = -\frac{11}{12}$, $x_3 = \frac{7}{6}$ die eindeutige Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 8x_2 + x_3 &= -8 \end{aligned}$$

ist.

- Wir berechnen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & -3 & -4 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[3\cdot III+I]{3\cdot II+4\cdot I} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 6 & 6 \\ 0 & -8 & -10 & -12 & -12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III+2\cdot II} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

sodass $x_3 = 3x_1 + x_2$, $x_4 = 1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{5}{6}x_3 = 1 - \frac{5}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 3x_3 + 2x_4 &= 2 \\ -x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= -4 \end{aligned}$$

lösen. Es gibt also unendlich viele Lösungen $\underline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ von der Form

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2.

i) Es seien

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ A_4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Paare (i, j), $1 \leq i, j \leq 4$, für die das Matrizenprodukt A_iA_j definiert ist und berechnen Sie diese Produkte.

ii) Es seien $l, m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in M(n, m)$, $B \in M(m, l)$. Zeigen Sie dass

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

iii) Bringen Sie das Schema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

durch elementare Zeilenumformungen auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 1 & 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

mit $c_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq 3$ und berechnen Sie AC, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und $C = (c_{ij})$.

Lösung Aufgabe 2.

i) Damit das Matrixprodukt $A_i A_j$ definiert ist, muss die Matrix A_i genau so viele Spalten haben wie die Matrix A_j Zeilen hat. Wir können also die Matrizenprodukte

$$\begin{aligned}
A_2A_1 &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -2 \\ 21 & 6 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}, \\
A_2A_2 &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 8 & 4 \\ 8 & 9 & -8 \\ 1 & -2 & 24 \end{pmatrix}, \\
A_2A_3 &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}, \\
A_3A_4 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \\ 10 & 6 & -4 \end{pmatrix}, \\
A_4A_1 &= \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -12 \end{pmatrix}, \\
A_4A_2 &= \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 36 \end{pmatrix}, \\
A_4A_3 &= \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

berechnen. Alle übrigen Matrizenprodukte sind nicht definiert.

ii) Es sei $C = AB$. Wir bezeichnen die Einträge der Matrizen A^T, B^T und C^T mit a^T_{ki} ($k = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, n$), b^T_{jk} ($j = 1, \ldots, l$) und c^T_{ji}. Nach Definition der transponierten Matrix und der Matrixmultiplikation ist einerseits

$$c^T_{ji} = c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

und andererseits

$$(B^T A^T)_{ji} = \sum_{k=1}^{m} b^T_{jk} a^T_{ki} = \sum_{k=1}^{m} b_{kj} a_{ik} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

für alle $j = 1, \ldots, l$, $i = 1, \ldots, n$, wobei $(B^T A^T)_{ji}$ den Eintrag in der j-ten Zeile und der i-ten Spalte der Matrix $B^T A^T$ bezeichnet. Alle Einträge der Matrizen C^T und $B^T A^T$ sind also gleich, d.h. es gilt $(AB)^T = B^T A^T$.

iii) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow[III-I]{II-I} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{III-2\cdot II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{I+2\cdot III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{I+3\cdot II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow[(-1)\cdot III]{(-1)\cdot II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{II\leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und definieren

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.

i) Bestimmen Sie mithilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens den Rang der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & t \\ t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & t \end{pmatrix},$$

wobei $t \in \mathbb{R}$ fixiert ist. Was ist jeweils die Dimension des Kerns?

ii) Es seien $a \in \mathbb{R}$ fixiert und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{rg} A$.

(b) Wie lautet die allgemeine Lösung des homogenen Gleichungssystems $A\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$?

(c) Für welche $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^3$ ist das inhomogene Gleichungssystem $A\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ lösbar? Ist die Lösung eindeutig? Wie lautet die allgemeine Lösung?

Lösung Aufgabe 3.

i)
- Wir berechnen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[IV-I]{II-I,\ III-I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV-II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

  sodass die Matrix den (Zeilen-)Rang 3 hat. Nach der Dimensionsformel (Satz 1.3) ist die Dimension des Kerns 1.
- Wir berechnen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & t \\ t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & t \end{pmatrix} \xrightarrow[III-I]{II-t\cdot I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & t \\ 0 & 1 & 1-2t & 1-t^2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{III-2\cdot II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & t \\ 0 & 1 & 1-2t & 1-t^2 \\ 0 & 0 & 4t-4 & 2t^2-2 \end{pmatrix}$$

  und wegen

$$4t-4=0, \quad 2t^2-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=1$$

  folgt

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & t \\ t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & t \end{pmatrix} = \begin{cases} 3, & t \neq 1, \\ 2, & t = 1. \end{cases}$$

  Nach der Dimensionsformel ist die Dimension des Kerns 1, falls $t \neq 1$ und 2, falls $t = 1$.

ii) (a) Wir berechnen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-a\cdot I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -a^2 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-a\cdot II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -a^2 \\ 0 & 0 & 1+a^3 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt

$$1+a^3=0 \quad \Leftrightarrow \quad a^3=-1 \quad \Leftrightarrow \quad a=-1$$

und damit

$$\operatorname{rg} A = \begin{cases} 3, & a \neq -1, \\ 2, & a = -1. \end{cases}$$

(b) Ist rg $A = 3$, d.h. $\dim(\ker A) = 0$, so hat das Gleichungssystem $A\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$ nur die triviale Lösung $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}$.
Ist rg $A = 2$, so ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$\begin{aligned} A\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 = x_3, \quad x_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems lautet also

$$\underline{\mathbf{x}}_{\mathrm{h}} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(c) Ist rg $A = 3$ (d.h. $a \neq -1$), so hat das System $A\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ für jedes $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^3$ die eindeutige Lösung $\underline{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)^T$ mit

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{b_3 - ab_2 + a^2 b_1}{1 + a^3}, \\ x_2 &= b_2 - ab_1 + \frac{a^2(b_3 - ab_2 + a^2 b_1)}{1 + a^3}, \\ x_1 &= b_1 - \frac{a(b_3 - ab_2 + a^2 b_1)}{1 + a^3}, \end{aligned}$$

wobei wir die Rechnung zur Zeilenstufenform aus Teil (a) benutzt haben.
Sind rg $A = 2$ (d.h. $a = -1$) und $\underline{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$, so ist

$$\text{rg } (A|\underline{\mathbf{b}}) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} 3, & b_3 \neq 0, \\ 2, & b_3 = 0. \end{cases}$$

Das Gleichungssystem $A\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ ist nach Satz 1.2 genau dann lösbar, wenn $b_3 = 0$. In diesem Fall ist die letzte Zeile der erweiterten Matrix $(A|\underline{\mathbf{b}})$ eine Nullzeile und wir können zur Konstruktion einer speziellen Lösung bspw. $x_3 = 0$ setzen (das Gleichungssystem ist unterbestimmt). Aus den beiden übrigen Gleichungen folgt dann $x_1 = b_1$ und $x_2 = b_2$. Eine spezielle Lösung ist damit gegeben durch

$$\underline{\mathbf{x}}_{\mathrm{s}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{b}}$$

und nach Satz 1.1 ist

$$\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}}_{\mathrm{s}} + \underline{\mathbf{x}}_{\mathrm{h}} = \underline{\mathbf{b}} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems.

Aufgabe 4. Betrachten Sie die Daten

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y_i & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}.$$

i) Es sei $f(x) = a_1 + a_2 x$. Bestimmen Sie a_1, a_2 nach der Methode der kleinsten Quadrate zu diesen Daten.

ii) Es sei $f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$. Bestimmen Sie a_1, a_2, a_3 nach der Methode der kleinsten Quadrate zu diesen Daten.

Lösung Aufgabe 4.

i) Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}, \quad A^T \underline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

mit $\operatorname{rg} A^T A = \operatorname{rg} A = 2$ und wir berechnen

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 4 \\ 6 & 14 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{II - \frac{3}{2}\cdot I} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{I - \frac{6}{5}\cdot II} \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & \frac{26}{5} \\ 0 & 5 & -1 \end{array}\right),$$

sodass die Lösung $\underline{\mathbf{a}} = (a_1, a_2)^T$ der Normalengleichung $A^T A \underline{\mathbf{a}} = A^T \underline{\mathbf{y}}$ gegeben ist durch

$$a_1 = \frac{13}{10}, \quad a_2 = -\frac{1}{5},$$

d.h. $f(x) = \frac{13}{10} - \frac{1}{5}x$.

ii) Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{pmatrix},$$

$$A^T \underline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

mit $\operatorname{rg} A^T A = \operatorname{rg} A = 3$ und wir berechnen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 14 & 4 \\ 6 & 14 & 36 & 5 \\ 14 & 36 & 98 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[III-\frac{7}{2}\cdot I]{II-\frac{3}{2}\cdot I} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 14 & 4 \\ 0 & 5 & 15 & -1 \\ 0 & 15 & 49 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III-3\cdot II} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 14 & 4 \\ 0 & 5 & 15 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[II-\frac{15}{4}\cdot III]{I-\frac{7}{2}\cdot III} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I-\frac{6}{5}\cdot II} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & \frac{26}{5} \\ 0 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

sodass die Lösung $\underline{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, a_3)^T$ der Normalengleichung $A^T A \underline{\mathbf{a}} = A^T \underline{\mathbf{y}}$ gegeben ist durch

$$a_1 = \frac{13}{10}, \quad a_2 = -\frac{1}{5}, \quad a_3 = 0,$$

d.h. $f(x) = \frac{13}{10} - \frac{1}{5}x$.

Aufgabe 5.

i) Es seien $A, B \in M(n,n)$ reguläre Matrizen. Zeigen Sie die folgenden Rechenregeln.

(a) $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

(c) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(d) $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$ für $\lambda \neq 0$.

ii) Eine Matrix $A \in M(n,n)$ heißt *symmetrisch*, falls $A^T = A$ und *schiefsymmetrisch*, falls $A^T = -A$. Folgern Sie aus den Rechenregeln in Teil *i)*: ist eine reguläre Matrix $A \in M(n,n)$ symmetrisch/schiefsymmetrisch, so ist auch A^{-1} symmetrisch/schiefsymmetrisch.

iii) Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & t \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar? Bestimmen Sie A^{-1} in diesen Fällen.

iv) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem $A\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung Aufgabe 5.

i) (a) Definitionsgemäß gilt

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$$

und

$$(A^{-1})^{-1}A^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^{-1} = I_n.$$

Da die inverse Matrix eindeutig ist, folgt aus beiden Gleichungen $(A^{-1})^{-1} = A$.

(b) Aus

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$$

folgt wegen $I_n^T = I_n$ und Aufgabe 2 *ii)*, dass

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = I_n,$$

d.h. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ wegen der Eindeutigkeit der inversen Matrix.

(c) Definitionsgemäß gilt

$$\begin{aligned} & AB(AB)^{-1} = I_n \\ \Leftrightarrow\quad & B(AB)^{-1} = A^{-1} \quad \text{(Multiplikation von links mit } A^{-1}) \\ \Leftrightarrow\quad & (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad \text{(Multiplikation von links mit } B^{-1}). \end{aligned}$$

(d) Es gilt

$$\begin{aligned} & (\lambda A)(\lambda A)^{-1} = I_n \quad \text{(Definition der inversen Matrix)} \\ \Leftrightarrow\quad & \lambda\big(A(\lambda A)^{-1}\big) = I_n \quad \text{(Definition des Matrixprodukts)} \\ \Leftrightarrow\quad & A(\lambda A)^{-1} = \tfrac{1}{\lambda} I_n \\ \Leftrightarrow\quad & (\lambda A)^{-1} = \tfrac{1}{\lambda} A^{-1} \quad \text{(Multiplikation von links mit } A^{-1}) \end{aligned}$$

(wobei wir in der letzten Zeile zusätzlich benutzt haben, dass $cA = (cI_n)A = A(cI_n)$ für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt; dies folgt direkt aus der Definition der Matrixmultiplikation).

ii) Wegen Teil *i)*(b) gilt

$$A^T = A \quad \Leftrightarrow \quad (A^T)^{-1} = A^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad (A^{-1})^T = A^{-1}$$

und wegen Teil *i)*(b) und Teil *i)*(d) gilt

$$A^T = -A \quad \Leftrightarrow \quad (A^T)^{-1} = (-A)^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad (A^{-1})^T = -A^{-1}.$$

iii) Wir berechnen

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&t\\0&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{III-I}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&1\\0&1&0&t-1\\0&1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[IV-II]{III-II}\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&1\\0&0&-1&t-2\\0&0&-1&0\end{pmatrix},$$

sodass

$$\operatorname{rg} A=\begin{cases}4, & t\neq 2,\\ 3, & t=2.\end{cases}$$

Nach Satz 2.1 ist A also genau dann invertierbar, wenn $t\neq 2$. Zur Bestimmung der inversen Matrix berechnen wir

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&1&0&0\\1&1&1&t&0&0&1&0\\0&1&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{III-I}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&1&0&0\\0&1&0&t-1&-1&0&1&0\\0&1&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[IV-II]{III-II}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&1&0&0\\0&0&-1&t-2&-1&-1&1&0\\0&0&-1&0&0&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III\leftrightarrow IV}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&1&0&0\\0&0&-1&0&0&-1&0&1\\0&0&-1&t-2&-1&-1&1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[IV-III]{I+III,\ II+III}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&1&1&-1&0&1\\0&1&0&1&0&0&0&1\\0&0&-1&0&0&-1&0&1\\0&0&0&t-2&-1&0&1&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[II-\frac{1}{t-2}\cdot IV]{I-\frac{1}{t-2}\cdot IV}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&\frac{t-1}{t-2}&-1&-\frac{1}{t-2}&\frac{t-1}{t-2}\\0&1&0&0&\frac{1}{t-2}&0&-\frac{1}{t-2}&\frac{t-1}{t-2}\\0&0&-1&0&0&-1&0&1\\0&0&0&t-2&-1&0&1&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{t-2}\cdot IV]{(-1)\cdot III}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&\frac{t-1}{t-2}&-1&-\frac{1}{t-2}&\frac{t-1}{t-2}\\0&1&0&0&\frac{1}{t-2}&0&-\frac{1}{t-2}&\frac{t-1}{t-2}\\0&0&1&0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&-\frac{1}{t-2}&0&\frac{1}{t-2}&-\frac{1}{t-2}\end{array}\right),$$

sodass

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{t-1}{t-2}&-1&-\frac{1}{t-2}&\frac{t-1}{t-2}\\\frac{1}{t-2}&0&-\frac{1}{t-2}&\frac{t-1}{t-2}\\0&1&0&-1\\-\frac{1}{t-2}&0&\frac{1}{t-2}&-\frac{1}{t-2}\end{pmatrix}.$$

iv) Für die LR-Zerlegung berechnen wir

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[III-I]{II-2\cdot I}\begin{pmatrix}1&1&0\\2&-1&1\\1&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\2&-1&1\\1&0&2\end{pmatrix},$$

sodass $A = LR$ mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} L\underline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 1 - 2y_1 = 1, \quad y_3 = 1 - y_1 = 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} R\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{y}} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -(1 - x_3) = -\frac{1}{2}, \quad x_1 = -x_2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystems $A\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist also $\underline{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6.

i) Es sei $A \in M(n,n)$. Zeigen Sie: geht $\tilde{A}$ aus A durch Addition eines Vielfachen einer Zeile/Spalte zu einer anderen Zeile/Spalte hervor, so gilt $\det \tilde{A} = \det A$.

[Hinweis: Eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M(n,n)$$

kann auch in der Form $A = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{c}}^{(1)} & \underline{\mathbf{c}}^{(2)} & \dots & \underline{\mathbf{c}}^{(n)} \end{pmatrix}$ mit Spaltenvektoren $\underline{\mathbf{c}}^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$, $j = 1, \dots, n$, beziehungsweise in der Form $A = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{r}}^{(1)} \\ \underline{\mathbf{r}}^{(2)} \\ \vdots \\ \underline{\mathbf{r}}^{(n)} \end{pmatrix}$ mit Zeilenvektoren $\underline{\mathbf{r}}^{(i)} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}$, $i = 1, \dots n$, geschrieben werden. Benutzen Sie diese Schreibweise zusammen mit den elementaren Eigenschaften der Determinante und den Ergebnissen aus Satz 2.2.]

ii) Berechnen Sie

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ -2 & 1 & 2 & -4 & 2 \\ 8 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Hinweis: Benutzen Sie geeignete Zeilen- und Spaltenumformungen und Teil i) um den Rechenaufwand erheblich zu verringern.

Vorsicht! Das Ersetzen einer Zeile/Spalte durch ein Vielfaches *derselben* Zeile/Spalte ändert den Wert der Determinate!]

iii) Benutzen Sie die Cramersche Regel, um das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

zu lösen.

iv) Es sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung Aufgabe 6.

i) Es sei $A = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{c}}^{(1)} & \dots & \underline{\mathbf{c}}^{(n)} \end{pmatrix}$. Die Determinante ist eine n-Linearform ist, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{c}}^{(1)} & \dots & \underline{\mathbf{c}}^{(i-1)} & \lambda\underline{\mathbf{c}}^{(i)} + \mu\underline{\mathbf{c}}^{(j)} & \underline{\mathbf{c}}^{(i+1)} & \dots & \underline{\mathbf{c}}^{(n)} \end{pmatrix} \\ &= \lambda \det \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{c}}^{(1)} & \dots & \underline{\mathbf{c}}^{(n)} \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{c}}^{(1)} & \dots & \underline{\mathbf{c}}^{(i-1)} & \underline{\mathbf{c}}^{(j)} & \underline{\mathbf{c}}^{(i+1)} & \dots & \underline{\mathbf{c}}^{(n)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $1 \le i, j \le n$ und die Determinante ist alternierend, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{c}}^{(1)} & \dots & \underline{\mathbf{c}}^{(i-1)} & \underline{\mathbf{c}}^{(j)} & \underline{\mathbf{c}}^{(i+1)} & \dots & \underline{\mathbf{c}}^{(j-1)} & \underline{\mathbf{c}}^{(i)} & \underline{\mathbf{c}}^{(j+1)} & \underline{\mathbf{c}}^{(n)} \end{pmatrix} \\ &= -\det \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{c}}^{(1)} & \dots & \underline{\mathbf{c}}^{(n)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $1 \le i < j \le n$ (insbesondere ist $\det A = 0$, falls $\underline{\mathbf{c}}^{(i)} = \underline{\mathbf{c}}^{(j)}$).
Ist nun $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{c}}^{(1)} & \dots & \underline{\mathbf{c}}^{(i-1)} & \underline{\mathbf{c}}^{(i)} + \lambda\underline{\mathbf{c}}^{(j)} & \underline{\mathbf{c}}^{(i+1)} & \dots & \underline{\mathbf{c}}^{(n)} \end{pmatrix}$ für $1 \le i < j \le n$, d.h. $\tilde{A}$ geht aus A durch Addition eines Vielfachen einer Spalte zu einer anderen Spalte hervor, so gilt

$$\begin{aligned} \det \tilde{A} &= \det \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{c}}^{(1)} & \dots & \underline{\mathbf{c}}^{(i-1)} & \underline{\mathbf{c}}^{(i)} + \lambda\underline{\mathbf{c}}^{(j)} & \underline{\mathbf{c}}^{(i+1)} & \dots & \underline{\mathbf{c}}^{(n)} \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\det \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{c}}^{(1)} & \dots & \underline{\mathbf{c}}^{(n)} \end{pmatrix}}_{= \det A} \\ &\quad + \lambda \underbrace{\det \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{c}}^{(1)} & \dots & \underline{\mathbf{c}}^{(i-1)} & \underline{\mathbf{c}}^{(j)} & \underline{\mathbf{c}}^{(i+1)} & \dots & \underline{\mathbf{c}}^{(j-1)} & \underline{\mathbf{c}}^{(j)} & \underline{\mathbf{c}}^{(j+1)} & \underline{\mathbf{c}}^{(n)} \end{pmatrix}}_{=0} \\ &= \det A. \end{aligned}$$

Der Fall, dass $\tilde{A}$ aus A durch Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile hervorgeht wird analog gezeigt, indem man $A = (\underline{\mathbf{r}}^{(1)}, \dots, \underline{\mathbf{r}}^{(n)})^T$ schreibt und die entsprechenden Eigenschaften der Determinante in jeder Zeile ausnutzt.

ii) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ -2 & 1 & 2 & -4 & 2 \\ 8 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir subtrahieren von der ersten Zeile die zweite Zeile und erhalten die Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ -2 & 1 & 2 & -4 & 2 \\ 8 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $\det \tilde{A} = \det A$ nach Teil *i)*. Entwicklung nach der ersten Zeile ergibt $\det \tilde{A} = \det B$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir subtrahieren von der zweiten Spalte die vierte Spalte und erhalten die Matrix

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & -4 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $\det \tilde{B} = \det B$ nach Teil *i)*. Entwicklung nach der zweiten Spalte ergibt

$$\det \tilde{B} = 4 \det \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 1 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und wegen

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot ((-4) \cdot 1 + 1 \cdot 2) + (-4) \cdot 2 - 1 \cdot 2 \\ &= -13 \end{aligned}$$

(Entwicklung nach der ersten Spalte) und

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 1 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} &= 2 \det \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 3 \det \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot ((-4) \cdot 2 - 1 \cdot 2) - (6 \cdot 2 - 1 \cdot 8) - 3 \cdot (6 \cdot 2 + 4 \cdot 8) \\ &= -156 \end{aligned}$$

(Entwicklung nach der ersten Spalte) folgt

$$\det A = \det \tilde{B} = 4 \cdot (-13) - 156 = -208.$$

iii) Wir schreiben das gegebene Gleichungssystem als

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

und nach der Cramerschen Regel gilt

$$x_1 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$x_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$x_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1.$$

iv) **Induktionsanfang** ($n = 1$, $n = 2$): Es ist

$$\det 1 = 1 = \prod_{1 \le i < j \le 1} (x_j - x_i),$$

da ein leeres Produkt definitionsgemäß 1 ist.

Für $n = 2$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \le i < j \le 2} (x_j - x_i).$$

Induktionsschritt: Es gelte

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

für ein *festes* $n \in \mathbb{N}$ (*Induktionsvoraussetzung*). Nun betrachten wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^{n} \end{pmatrix}.$$

Für $i = 2, \ldots, n+1$ subtrahieren wir nun von der i-ten Spalte die mit x_1 multiplizierte $(i-1)$-te Spalte und erhalten die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \ldots & x_2^n - x_1 x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}^2 - x_1 x_{n+1} & \ldots & x_{n+1}^n - x_1 x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Nach Teil i) gilt

$$\begin{aligned}
&\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \ldots & x_{n+1}^n \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \ldots & x_2^n - x_1 x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}^2 - x_1 x_{n+1} & \ldots & x_{n+1}^n - x_1 x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \ldots & x_2^n - x_1 x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n+1} - x_1 & x_{n+1}^2 - x_1 x_{n+1} & \ldots & x_{n+1}^n - x_1 x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= (x_2 - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_{n+1} - x_1) \det \begin{pmatrix} 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} (x_2 - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_{n+1} - x_1) \prod_{2 \le i < j \le n+1} (x_j - x_i) \\
&= \prod_{1 \le i < j \le n+1} (x_j - x_i)
\end{aligned}$$

wobei wir beim zweiten Gleichheitszeichen nach der ersten Zeile entwickelt und beim dritten Gleichheitszeichen die Linearität der Determinante in jeder Zeile ausgenutzt haben.