**Fachrichtung Mathematik**
**Fakultät für Mathematik und Informatik**
**Universität des Saarlandes**
**Prof. Dr. Michael Bildhauer**
**M.Sc. Nils Gutheil**

Lösungshinweise Übungsblatt 6
**Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure II**
Sommersemester 2020

**Aufgabe 1.** (*Zerlegungen, 2+(2+1+1) Punkte*) Es seien $I = [a, b]$ und $f: I \to \mathbb{R}$ beschränkt.

*i)* Eine Zerlegung $\mathcal{Z}^*$ von $I$ heißt *Verfeinerung* der Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $I$, falls alle Teilpunkte von $\mathcal{Z}$ auch Teilpunkte von $\mathcal{Z}^*$ sind (d.h. $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Z}^*$).

Zeigen Sie: Ist $\mathcal{Z}^*$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}$, so gilt

$$\underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) \leq \underline{S}_{\mathcal{Z}^*}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{Z}^*}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{Z}}(f).$$

*ii)* Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für zwei beliebige Zerlegungen $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ von $I$ gilt

$$\underline{S}_{\mathcal{Z}_1}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{Z}_2}(f).$$

(b) Für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $I$ gilt

$$|I| \inf_{x \in I} f(x) \leq \underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{Z}}(f) \leq |I| \sup_{x \in I} f(x).$$

(c) Für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $I$ gilt

$$\underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) \leq \underline{\mathcal{I}}(f) \leq \overline{\mathcal{I}}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{Z}}(f).$$

**Lösung Aufgabe 1.**

*i)* Wir betrachten zunächst den Fall, dass die Zerlegung $\mathcal{Z}^*$ genau einen Punkt $x^* \in (a, b)$ mehr enthält, als die Zerlegung $\mathcal{Z}$, d.h.

$$\mathcal{Z}^* = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x^* < x_{i+1} < \cdots < x_n = b\}$$

für ein $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Es seien nun

$$\underline{m}_i^* = \inf\{f(x)\colon x \in [x_i, x^*]\}, \quad \underline{m}_{i+1}^* = \inf\{f(x)\colon x \in [x^*, x_{i+1}]\}$$

Dann ist

$$\underline{m}_{i+1} = \inf\{f(x)\colon x \in [x_i, x_{i+1}]\} \leq \inf\{f(x)\colon x \in [x_i, x^*]\} = \underline{m}_i^*$$

bzw.

$$\underline{m}_{i+1} = \inf\{f(x) \colon x \in [x_i, x_{i+1}]\} \leq \inf\{f(x) \colon x \in [x^*, x_{i+1}]\} = \underline{m}^*_{i+1}$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned}
\underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) &= \sum_{j=1}^{n} \underline{m}_j (x_j - x_{j-1}) \\
&= \sum_{j=1}^{i} \underline{m}_j (x_j - x_{j-1}) + \underline{m}_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + \sum_{j=i+2}^{n} \underline{m}_j (x_j - x_{j-1}) \\
&= \sum_{j=1}^{i} \underline{m}_j (x_j - x_{j-1}) + \underline{m}_{i+1}(x_{i+1} - x^*) + \underline{m}_{i+1}(x^* - x_i) + \sum_{j=i+2}^{n} \underline{m}_j (x_j - x_{j-1}) \\
&\leq \sum_{j=1}^{i} \underline{m}_j (x_j - x_{j-1}) + \underline{m}^*_{i+1}(x_{i+1} - x^*) + \underline{m}^*_{i}(x^* - x_i) + \sum_{j=i+2}^{n} \underline{m}_j (x_j - x_{j-1}) \\
&= \underline{S}_{\mathcal{Z}^*}(f).
\end{aligned}$$

Induktiv folgt nun $\underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) \leq \underline{S}_{\mathcal{Z}^*}(f)$ für jede beliebige Verfeinerung $\mathcal{Z}^*$ von $\mathcal{Z}$. Genauso zeigt man $\overline{S}_{\mathcal{Z}^*}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{Z}}(f)$ (betrachte jeweils sup anstatt inf und ersetze "$\leq$" durch "$\geq$") und wegen $\underline{S}_{\mathcal{Z}^*}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{Z}^*}(f)$ folgt die Behauptung.

*ii)* (a) Sind $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ zwei Zerlegungen von $I$, so ist $\mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}_1$ und von $\mathcal{Z}_2$. Nach Teil *i)* gilt

$$\underline{S}_{\mathcal{Z}_1}(f) \leq \underline{S}_{\mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{Z}_2}(f).$$

(b) Ist $\mathcal{Z} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ eine Zerlegung von $I$, so folgt aus

$$|I| = x_n - x_0 = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1})$$

und den Abschätzungen

$$\inf_{x \in I} f(x) \leq \inf\{f(x) \colon x \in [x_j, x_{j-1}]\} = \underline{m}_j$$

und

$$\overline{m}_j = \sup\{f(x) \colon x \in [x_j, x_{j-1}]\} \leq \sup_{x \in I} f(x)$$

für alle $j = 1, \ldots, n$, dass

$$|I| \inf_{x \in I} f(x) \leq \underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) \leq \overline{S}_{\mathcal{Z}}(f) \leq |I| \sup_{x \in I} f(x).$$

(c) Für alle Zerlegungen $\mathcal{Z}$ von $I$ gilt definitionsgemäß

$$\underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) \leq \sup\{\underline{S}_{\tilde{\mathcal{Z}}}(f) \colon \tilde{\mathcal{Z}} \text{ ist Zerlegung von } I\} = \underline{\mathcal{I}}$$

und wegen $\underline{S}_{\tilde{\mathcal{Z}}}(f) \leq \overline{S}_{\tilde{\mathcal{Z}}}(f)$ für alle Zerlegungen $\tilde{\mathcal{Z}}$ von $I$ gilt

$$\underline{\mathcal{I}} \leq \overline{\mathcal{I}} = \inf\{\overline{S}_{\tilde{\mathcal{Z}}}(f) \colon \tilde{\mathcal{Z}} \text{ ist Zerlegung von } I\} \leq \overline{S}_{\mathcal{Z}}(f).$$

**Aufgabe 2.** (*Integrabilitätskriterium, 2.5+2.5 Punkte*)

*i)* Es seien $I = [0,1]$ und $f\colon I \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+1$. Zeigen Sie mithilfe des Integrabilitätskriteriums, dass $f$ integrierbar auf $I$ ist und berechnen Sie $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ mithilfe von Ober- und Untersummen.

*ii)* Es seien $I = [0,2]$ und $g\colon I \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1-x$. Zeigen Sie mithilfe des Integrabilitätskriteriums, dass $g$ integrierbar auf $I$ ist und berechnen Sie $\int_I g(x)\,\mathrm{d}x$ mithilfe von Ober- und Untersummen.

**Lösung Aufgabe 2.**

*i)* Zu $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Zerlegung

$$\mathcal{Z}_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\right\}$$

von $I = [0,1]$. Da $f$ monoton wachsend ist (es ist $f'(x) = 2 > 0$ für alle $x \in (0,1)$), gilt

$$\inf_{x\in[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}]} f(x) = f\Big(\frac{j-1}{n}\Big) = 2\Big(\frac{j-1}{n}\Big) + 1, \qquad \sup_{x\in[\frac{j-1}{n},\frac{j}{n}]} f(x) = f\Big(\frac{j}{n}\Big) = 2\Big(\frac{j}{n}\Big) + 1$$

für alle $j = 1, \ldots, n$ und damit

$$\begin{aligned}
\underline{S}_{\mathcal{Z}_n}(f) &= \sum_{j=1}^{n} \Big(2\Big(\frac{j-1}{n}\Big) + 1\Big)\Big(\frac{j}{n} - \frac{j-1}{n}\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \Big(2\Big(\frac{j-1}{n}\Big) + 1\Big)\frac{1}{n} \\
&= \frac{2}{n^2}\left(\sum_{j=1}^{n}(j-1)\right) + 1 \\
&= \frac{n(n-1)}{n^2} + 1 \\
&= 2 - \frac{1}{n} \\
&\to 2
\end{aligned}$$

und

$$\overline{S}_{\mathcal{Z}_n}(f) = \frac{2}{n^2}\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) + 1 = 2 + \frac{1}{n} \to 2$$

für $n \to \infty$. Insbesondere gilt also $\lim_{n\to\infty}(\overline{S}_{\mathcal{Z}_n}(f) - \underline{S}_{\mathcal{Z}_n}(f)) = 0$ und nach dem Integrabilitätskriterium (Satz 6.1) ist $f$ Riemann-integrierbar auf $I$ mit

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2x+1\,\mathrm{d}x = 2.$$

*ii)* Zu $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Zerlegung

$$\mathcal{Z}_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1, 1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{2}{n}, \dots, 2\right\}$$

von $I = [0, 2]$. Da $g$ monoton fallend ist (es ist $g'(x) = -1 < 0$ für alle $x \in (0, 2)$), gilt

$$\inf_{x \in [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]} g(x) = g\left(\frac{j}{n}\right) = 1 - \frac{j}{n}, \qquad \sup_{x \in [\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}]} g(x) = g\left(\frac{j-1}{n}\right) = 1 - \frac{j-1}{n}$$

für alle $j = 1, \dots, 2n$ und damit

$$\begin{aligned}
\underline{S}_{\mathcal{Z}_n}(g) &= \sum_{j=1}^{2n} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \frac{1}{n} \\
&= 2 - \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{2n} j \\
&= 2 - \frac{2n(2n+1)}{2n^2} \\
&= -\frac{1}{n} \\
&\to 0
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\overline{S}_{\mathcal{Z}_n}(g) &= 2 - \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{2n} (j-1) \\
&= 2 - \frac{(2n-1)2n}{2n^2} \\
&= \frac{1}{n} \\
&\to 0
\end{aligned}$$

für $n \to \infty$. Insbesondere gilt also $\lim_{n\to\infty} (\overline{S}_{\mathcal{Z}_n}(g) - \underline{S}_{\mathcal{Z}_n}(g)) = 0$ und nach dem Integrabilitätskriterium ist $g$ Riemann-integrierbar auf $I$ mit

$$\int_I f(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^2 1 - x \, \mathrm{d}x = 0.$$

---

**Aufgabe 3.** (*Integrierbare Funktionen, 2.5+(1+2.5) Punkte*)

*i)* Es seien $I = [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ monoton. Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{R}(I)$.

[Hinweis: Betrachten Sie eine äquidistante Zerlegung $\mathcal{Z}_n$ von $I$ in $n$ Teilintervalle und benutzen Sie das Integrabilitätskriterium.]

*ii)* Es seien $I = [a, b]$ und $f, g \in \mathcal{R}(I)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x.$$

[Hinweis: Zeigen Sie zunächst den Spezialfall $f = 0$.]

(b) Zeigen Sie, dass $|f| \in \mathcal{R}(I)$ ist und folgern Sie aus (a), dass

$$\left| \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x.$$

[Hinweis: Vergleichen Sie für eine beliebige Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $I$ die Größen $\overline{S}_{\mathcal{Z}}(|f|) - \underline{S}_{\mathcal{Z}}(|f|)$ und $\overline{S}_{\mathcal{Z}}(f) - \underline{S}_{\mathcal{Z}}(f)$ und benutzen Sie das Integrabilitätskriterium.]

**Lösung Aufgabe 3.**

*i)* Wir nehmen an, dass $f$ monton wachsend ist. Analog zeigt man die Aussage für monton fallende Funktionen.

Da $f$ monoton wachsend ist, gilt

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

für alle $x \in [a, b]$, sodass $f$ beschränkt ist.

Nun sei

$$\mathcal{Z}_n = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

die Zerlegung von $[a, b]$ in $n$ Teilintervalle gleicher Länge, d.h. $x_j = a + j\frac{b-a}{n}$ ($j = 0, \ldots, n$). Weil $f$ monoton wachsend ist, gilt

$$\underline{m}_j = \inf\{f(x) \colon x \in [x_{j-1}, x_j]\} = f(x_{j-1})$$

und

$$\overline{m}_j = \sup\{f(x) \colon x \in [x_{j-1}, x_j]\} = f(x_j)$$

für alle $j = 1, \ldots, n$ und damit

$$\underline{S}_{\mathcal{Z}_n}(f) = \sum_{j=1}^{n} \underline{m}_j (x_j - x_{j-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})$$

und

$$\overline{S}_{\mathcal{Z}_n}(f) = \sum_{j=1}^{n} \overline{m}_j (x_j - x_{j-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j),$$

sodass

$$\overline{S}_{\mathcal{Z}_n}(f) - \underline{S}_{\mathcal{Z}_n}(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1})) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \to 0$$

für $n \to \infty$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert also $N \in \mathbb{N}$ mit $\overline{S}_{\mathcal{Z}_n}(f) - \underline{S}_{\mathcal{Z}_n}(f) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Nach dem Integrabilitätskriterium ist $f \in \mathcal{R}(I)$.

*ii)* (a) Es sei zunächst $f = 0$. Wegen $g(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ folgt $\underline{S}_{\mathcal{Z}}(g) \geq 0$ und $\overline{S}_{\mathcal{Z}}(g) \geq 0$ für jede beliebige Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $I$ und daraus folgt

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x &= \sup\{\underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) \colon \mathcal{Z} \text{ ist Zerlegung von } I\} \\ &= \inf\{\overline{S}_{\mathcal{Z}}(f) \colon \mathcal{Z} \text{ ist Zerlegung von } I\} \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Nun sei $f \in \mathcal{R}(I)$ beliebig. Aus $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in I$ folgt dann $g(x) - f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, also nach dem oben gezeigten

$$\int_a^b g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0,$$

d.h.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Wegen $f \in \mathcal{R}(I)$ ist $f$ beschränkt, d.h. $|f|$ ist beschränkt. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nach dem Integrabilitätskriterium außerdem eine Zerlegung $\mathcal{Z} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ von $I$ mit

$$\overline{S}_{\mathcal{Z}}(f) - \underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) = \sum_{j=1}^{n} (\overline{m}_j - \underline{m}_j)(x_j - x_{j-1}) < \varepsilon,$$

wobei

$$\underline{m}_j = \inf\{f(x) \colon x \in [x_{j-1}, x_j]\}, \quad \overline{m}_j = \sup\{f(x) \colon x \in [x_{j-1}, x_j]\}.$$

Nun zeigen wir, dass

$$\sup\{|f(x)| \colon x \in [x_{j-1}, x_j]\} - \inf\{|f(x)| \colon x \in [x_{j-1}, x_j]\} \leq \overline{m}_j - \underline{m}_j$$

für alle $j = 1, \ldots, n$. Hierzu unterscheiden wir drei Fälle.

- Ist $\underline{m}_j \geq 0$ (sodass $\overline{m}_j \geq 0$), so ist $|f(x)| = f(x)$ für alle $x \in [x_{j-1}, x_j]$ und damit

$$\sup\{|f(x)| \colon x \in [x_{j-1}, x_j]\} - \inf\{|f(x)| \colon x \in [x_{j-1}, x_j]\} = \overline{m}_j - \underline{m}_j$$

- Ist $\overline{m}_j < 0$ (sodass $\underline{m}_j < 0$), so ist $|f(x)| = -f(x)$ für alle $x \in [x_{j-1}, x_j]$ und damit

$$\begin{aligned}&\sup\{|f(x)| \colon x \in [x_{j-1}, x_j]\} - \inf\{|f(x)| \colon x \in [x_{j-1}, x_j]\} \\ &= \sup\{-f(x) \colon x \in [x_{j-1}, x_j]\} - \inf\{-f(x) \colon x \in [x_{j-1}, x_j]\} \\ &= -\inf\{f(x) \colon x \in [x_{j-1}, x_j]\} + \sup\{f(x) \colon x \in [x_{j-1}, x_j]\} \\ &= \overline{m}_j - \underline{m}_j\end{aligned}$$

- Ist $\underline{m}_j \leq 0 \leq \overline{m}_j$, so ist

$$0 \leq |f(x)| \leq \max\{\overline{m}_j, -\underline{m}_j\}$$

für alle $x \in [x_{j-1}, x_j]$, sodass $\inf\{|f(x)| \colon x \in [x_{j-1}, x_j]\} \geq 0 \geq \underline{m}_j$ und $\sup\{|f(x)| \colon x \in [x_{j-1}, x_j]\} \leq \max\{\overline{m}_j, -\underline{m}_j\} \leq \overline{m}_j - \underline{m}_j$ und damit

$$\sup\{|f(x)| \colon x \in [x_{j-1}, x_j]\} - \inf\{|f(x)| \colon x \in [x_{j-1}, x_j]\} \leq \overline{m}_j - \underline{m}_j.$$

Aus der gezeigten Abschtätzung folgt nun

$$\begin{aligned}
&\overline{S}_{\mathcal{Z}}(|f|) - \underline{S}_{\mathcal{Z}}(|f|)\\
&= \sum_{j=1}^{n} (\sup\{|f(x)|\colon x \in [x_{j-1}, x_j]\} - \inf\{|f(x)|\colon x \in [x_{j-1}, x_j]\})(x_j - x_{j-1})\\
&\leq \sum_{j=1}^{n} (\overline{m}_j - \underline{m}_j)(x_j - x_{j-1})\\
&= \overline{S}_{\mathcal{Z}}(f) - \underline{S}_{\mathcal{Z}}(f)\\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

sodass $|f| \in \mathcal{R}(I)$ nach dem Integrabilitätskriterium.
Außerdem gilt

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

für alle $x \in I$ und aus Teil (a) folgt

$$-\int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x,$$

d.h.

$$\left| \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x.$$

---

**Aufgabe 4.** (*Nicht-integrierbare Funktionen, 3 Punkte*) Es sei $I = [0, 1]$. Gibt es eine beschränkte Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, die nicht von der Klasse $\mathcal{R}(I)$ ist?

**Lösung Aufgabe 4.** Die Funktion

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \end{cases}$$

ist beschränkt, aber sie ist nicht Riemann-integrierbar. Ist nämlich $\mathcal{Z} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ irgendeine Zerlegung von $[0, 1]$, so gilt

$$\underline{m}_j = \inf\{f(x)\colon x \in [x_{j-1}, x_j]\} = 0$$

und

$$\overline{m}_j = \sup\{f(x)\colon x \in [x_{j-1}, x_j]\} = 1$$

für alle $j = 1, \ldots, n$, denn jedes Intervall $[x_{j-1}, x_j]$ enthält sowohl eine rationale als auch eine irrationale Zahl. Also gilt $\underline{S}_{\mathcal{Z}}(f) = 0$ und $\overline{S}_{\mathcal{Z}}(f) = 1$. Da die Zerlegung $\mathcal{Z}$ beliebig vorgegeben war, folgt

$$\underline{\mathcal{I}}(f) = 0 < 1 = \overline{\mathcal{I}}(f),$$

d.h. $f$ ist nicht Riemann-integrierbar.