Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Daniel Kraemer

Saarbrücken, 03.08.2018

Klausur zur Vorlesung
Höhere Mathematik für (Naturwiss. &) Ingenieure II

Die folgende Klausur besteht aus 4 Aufgaben. Die in den einzelnen Aufgabenteilen erreichbare Punktzahl ist jeweils angegeben, ebenso die Themengebiete, aus denen die Aufgabe gewählt wurde. Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten. Achten Sie auf eine saubere Argumentation, d.h.: **Schreiben Sie alle Lösungsschritte hin und begründen Sie diese – auch wenn eine Aufgabe als Frage formuliert ist, ist die Antwort selbstverständlich zu begründen**, für "geratene" Lösungen kann es keine Punkte geben.

Aufgabe 1. (Matrizen, lineare Gleichungssyteme, lineare Abbildungen; **(2.5+2.5)+ (1+3+1) Punkte**)

i) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M(3,3) \; .$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von A und bestimmen Sie kern A. Berechnen Sie weiter die zu A inverse Matrix (sofern sie existiert) mithilfe von elementaren Zeilenumformungen (d.h. mit dem Schema zum Gaußschen Eliminationsverfahren).

(b) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A und lösen Sie **mithilfe dieser Zerlegung** das lineare Gleichungssystem

$$A\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \; .$$

ii) Es bezeichne $\mathcal{E} = (\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)}, \underline{\mathbf{e}}^{(3)})$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = (\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)})$ bezeichne die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$.

Die Matrixdarstellung der linearen Abbildung L: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ bzgl. der kanonischen Basen sei gegeben durch

$$A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; .$$

Bitte wenden.

(a) Im $\mathbb{R}^3$ sei eine weitere Basis $\mathcal{B} = (\underline{\mathbf{b}}^{(1)}, \underline{\mathbf{b}}^{(2)}, \underline{\mathbf{b}}^{(3)})$ gegeben,

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{b}}^{(1)} &= \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \underline{\mathbf{e}}^{(2)} + \underline{\mathbf{e}}^{(3)} , \\ \underline{\mathbf{b}}^{(2)} &= \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \underline{\mathbf{e}}^{(2)} , \\ \underline{\mathbf{b}}^{(3)} &= \underline{\mathbf{e}}^{(1)} . \end{aligned}$$

Bestimmen Sie Matrixdarstellung $A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{F}}$ der linearen Abbildung L.

(b) Bzgl. einer Basis $\mathcal{V} = (\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)})$ des $\mathbb{R}^2$ sei die Matrixdarstellung von L:

$$A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie $\mathcal{V}$.

(c) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $L\big(\underline{\mathbf{b}}^{(2)}\big)$ bzgl. der Basis $\mathcal{V}$.

Erinnerung zur Notation: Ist $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung und sind $\mathcal{G}$ (als Basis des Urbildraumes) und $\mathcal{H}$ (als Basis des Bildraumes) Basen des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{R}^2$, so bezeichnet $A^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}}$ die Matrixdarstellung der linearen Abbildung bzgl. dieser Basen.

Aufgabe 2. (Stetigkeit, Differenzierbarkeit; **1+(1.5+1.5)+6 Punkte**)

i) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + x\cos(1/x)} & \text{für} \quad x \neq 0 , \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 . \end{cases}$$

Ist f stetig in $x_0 = 0$?

ii) Berechnen Sie – falls existent – die Grenzwerte

$$\text{(a)} \lim_{x \to 0} \frac{\sinh(x) - x}{x^3} , \qquad \text{(b)} \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)(2^x - 1)}{3^x - 1} .$$

iii) Es sei $I = [-3, 3] \subset \mathbb{R}$ und die Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1 + x^2} & \text{für} \quad x \geq 0 , \\ x(x+2) & \text{für} \quad x < 0 . \end{cases}$$

Ist f stetig auf I? Ist f differenzierbar auf $(-3, 3)$? Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Maxima und Minima von f auf I.

Aufgabe 3. (Integralrechnung; **je 2 Punkte**)

i) Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

$$\text{(a)} \int x^\alpha \ln(x)\,\mathrm{d}x\ ,\quad \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1 \text{ fixiert}\ ,\qquad \text{(b)} \int \frac{x-2}{x^3+x}\,\mathrm{d}x\ ,$$

$$\text{(c)} \int x\ln(x)(1+\ln(x))\,\mathrm{d}x\ .$$

ii) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^{2\pi} \sinh(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

iii) Konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{x}+\sin(x)}\,\mathrm{d}x\ ?$$

Aufgabe 4. (Gemischte Aufgaben: **(1.5+2)+2.5+2.5+1.5 Punkte**)

i) (a) Lösen Sie die Gleichung $9z^2 + 2iz = 26/9$ **mithilfe einer quadratischen Ergänzung**.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = 8(1+i)/\sqrt{2}$ und veranschaulichen Sie das Ergebnis in der Gaußschen Zahlenebene.

ii) Betrachten Sie die Daten

x_i	-1	0	1	2
y_i	-1	1	1	2

.

Es sei $f(x) = a_1 + a_2x$. Bestimmen Sie a_1, a_2 nach der Methode der kleinsten Quadrate zu diesen Daten.

iii) Bestimmen Sie eine Approximation von

$$\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$$

mit der summierten Trapezregel zu $N = 4$ (8 Nachkommastellen) und geben Sie den absoluten Fehler an.

iv) Es sei $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ für alle $x \in (0,1)$ gegeben durch

$$f(x) = \int_0^{\ln(x)} g(\exp(t))\,\mathrm{d}t\ .$$

Berechnen Sie $f'(x)$.