Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

Lösungshinweise Übungsblatt 5
Höhere Mathematik für (Naturwiss. und) Ingenieure II
Sommersemester 2020

Aufgabe 1. (*Konvexität/Konkavität, 1.5+1.5 Punkte*)

i) Es seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, $n \geq 2$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mithilfe vollständiger Induktion die *Jensensche Ungleichung*

$$f\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

ii) Es sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ die durch $f(x) = \ln(x)/x$ definierte Funktion. Ist f konvex bzw. konkav?

Lösung Aufgabe 1.

i) **Induktionsanfang** ($n = 2$): Es seien $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ und $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Da f konvex ist, gilt

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = f\big(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)x_2\big) \leq \lambda_1 f(x_1) + (1-\lambda_1) f(x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Induktionsschritt: Es sei $n \in \mathbb{N}$ *fest* und für alle $\mu_1, \dots, \mu_n \geq 0$ mit $\mu_1 + \dots + \mu_n = 1$ und $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ gelte

$$f\Big(\sum_{i=1}^n \mu_i y_i\Big) \leq \sum_{i=1}^n \mu_i f(y_i)$$

(*Induktionsvoraussetzung*).

Es seien nun $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0$ mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1$ und $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$. Da f konvex ist, gilt

$$\begin{aligned} f\Big(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\Big) &= f\Big((1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\Big) \\ &\leq (1-\lambda_{n+1}) f\Big(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i\Big) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \end{aligned}$$

und aus

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1$$

folgt

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1 - \lambda_{n+1},$$

also

$$\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} + \cdots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} = 1.$$

Aus der Induktionsvoraussetzung (mit $\mu_i = \lambda_i/(1-\lambda_{n+1})$ und $y_i = x_i$) folgt

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} f(x_i),$$

d.h.

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\Big) \leq (1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

ii) Nach der Quotientenregel ist f (zweimal) differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{-x-2x(1-\ln(x))}{x^4} = \frac{2\ln(x)-3}{x^3}$$

für alle $x \in (0,\infty)$. Es ist also

$$f''(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\ln(x) - 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > \exp\Big(\frac{3}{2}\Big),$$

wobei wir benutzt haben, dass die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ streng monoton steigend ist. Nach Satz 5.8 ist f also (streng) konkav auf $(0, e^{\frac{3}{2}})$ und (streng) konvex auf $(e^{\frac{3}{2}}, \infty)$.

Aufgabe 2. (*Grenzwerte, 2.5+1.5+2+2.5+1 Punkte*)

i) Berechnen Sie – falls existent – die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh^2(x)-1}{\sin^2(x)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{e^x-1}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{e^x \sin(x)}, \quad \lim_{x\to 2} \frac{\cosh^2(x)-1}{\sinh^2(x)}.$$

ii) Berechnen Sie – falls existent – die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0^+} x^x, \quad \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

iii) Berechnen Sie – falls existent – die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \Big(\frac{\ln(1+x)}{x^2} - \frac{1}{x}\Big), \quad \lim_{x\to 0} \Big(\frac{\ln(1+x)}{x^3} - \frac{1}{x^2}\Big).$$

iv) Berechnen Sie – falls existent – die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 1^-} \sin(\pi x)\ln(|1-x|), \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x-\sin(x)}{x+\cos(x)}.$$

v) Es sei $a_n = n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n\in\mathbb{N})$. Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Lösung Aufgabe 2.

i)

- Die Funktionen $f(x)=\cosh^2(x)-1$ und $g(x)=\sin^2(x)$ sind (zweimal) differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $f(0)=\cosh(0)-1=0=g(0)$, $f'(0)=2\cosh(0)\sinh(0)=0=g'(0)=2\sin(0)\cos(0)$ und $g''(x)=2(\cos^2(x)-\sin^2(x))\neq 0$ für $x\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$. Nach der Regel von L'Hospital gilt
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cosh^2(x)-1}{\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cosh(x)\sinh(x)}{2\sin(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2(\sinh^2(x)+\cosh^2(x))}{2(\cos^2(x)-\sin^2(x))} = 1.$$
- Die Funktionen $f(x)=2^x-1$ und $g(x)=e^x-1$ sind differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $f(0)=2^0-1=0=e^0-1=g(0)$ und $g'(x)=e^x\neq 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Nach der Regel von L'Hospital gilt
$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{e^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln(2)}{e^x} = \ln(2).$$
- Die Funktionen $f(x)=\ln(1+x^2)$ und $g(x)=e^x\sin(x)$ sind differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $f(0)=\ln(1)=0=g(0)=e^0\sin(0)$ und $g'(x)=e^x(\sin(x)+\cos(x))\neq 0$ für alle $x\in(-\frac{5\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$. Nach der Regel von L'Hospital gilt
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{e^x\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{e^x(\sin(x)+\cos(x))} = 0.$$
- Die Funktionen $f(x)=\cosh^2(x)-1$ und $g(x)=\sinh^2(x)$ sind stetig auf $\mathbb{R}$ mit $g(2)=\sinh^2(2)\neq 0$. Also gilt
$$\lim_{x\to 2}\frac{\cosh^2(x)-1}{\sinh^2(x)} = \frac{\cosh^2(2)-1}{\sinh^2(2)}.$$

ii)

- In der Vorlesung (S. 140) wurde gezeigt, dass $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)=0$ und da die Exponentialfunktion stetig ist, gilt
$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(x)} = e^0 = 1.$$
- Die Funktionen $f(x)=\ln(x)$ und $g(x)=\sqrt{x}$ sind differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty=\lim_{x\to\infty} g(x)$ und $g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\neq 0$ für alle $x\in(0,\infty)$. Nach der Regel von L'Hospital gilt
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$
und da die Exponentialfunktion stetig ist, gilt
$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}} = e^0 = 1.$$

iii)

- Es ist
$$\frac{\ln(1+x)}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$
und die Funktionen $f(x) = \ln(1+x) - x$ und $g(x) = x^2$ sind (zweimal) differenzierbar auf $(-1, \infty)$ mit $f(0) = \ln(1) - 0 = 0 = g(0)$, $f'(0) = \frac{1}{1+0} - 1 = 0 = g'(0)$ und $g''(x) = 2 \neq 0$ für alle $x \in (-1, \infty)$. Nach der Regel von L'Hospital gilt
$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{\ln(1+x)}{x^2} - \frac{1}{x}\Big) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

- Wir zeigen, dass die einseitigen Grenzwerte
$$\lim_{x\to 0^-}\Big(\frac{\ln(1+x)}{x^3} - \frac{1}{x^2}\Big), \quad \lim_{x\to 0^+}\Big(\frac{\ln(1+x)}{x^3} - \frac{1}{x^2}\Big)$$
nicht existieren. Es seien $R > 0$ und $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Nach dem oben gezeigten gibt es $0 < \delta < 1$ mit
$$\frac{\ln(1+x)}{x^2} - \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{2} + \varepsilon < 0$$
für alle $x \in (-\delta, \delta)$. Wähle nun $0 < \delta < 1$ so klein, dass zusätzlich
$$\delta \leq \frac{\frac{1}{2} - \varepsilon}{R}$$
und damit
$$\frac{-\frac{1}{2} + \varepsilon}{R} < x < \frac{\frac{1}{2} - \varepsilon}{R}$$
für alle $x \in (-\delta, \delta)$ ist. Dann gilt
$$\Big(\frac{\ln(1+x)}{x^2} - \frac{1}{x}\Big)\frac{1}{x} \leq \Big(-\frac{1}{2} + \varepsilon\Big)\frac{1}{x} > R$$
für alle $x \in (-\delta, 0)$ und
$$\Big(\frac{\ln(1+x)}{x^2} - \frac{1}{x}\Big)\frac{1}{x} \leq \Big(-\frac{1}{2} + \varepsilon\Big)\frac{1}{x} < -R$$
für alle $x \in (0, \delta)$. Also existieren die einseitigen Grenzwerte
$$\lim_{x\to 0^-}\Big(\frac{\ln(1+x)}{x^3} - \frac{1}{x^2}\Big) = \lim_{x\to 0^-}\Big(\frac{\ln(1+x)}{x^2} - \frac{1}{x}\Big)\frac{1}{x}$$
und
$$\lim_{x\to 0^+}\Big(\frac{\ln(1+x)}{x^3} - \frac{1}{x^2}\Big) = \lim_{x\to 0^+}\Big(\frac{\ln(1+x)}{x^2} - \frac{1}{x}\Big)\frac{1}{x}$$
und damit auch der Grenzwert
$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{\ln(1+x)}{x^3} - \frac{1}{x^2}\Big) = \lim_{x\to 0}\Big(\frac{\ln(1+x)}{x^2} - \frac{1}{x}\Big)\frac{1}{x}$$
nicht (wir haben gezeigt, dass die Funktion in jeder beliebig kleinen Nullumgebung unbeschränkt ist).

iv) • Da wir den einseitigen Grenzwert $x \to 1^-$ betrachten, können wir annehmen, dass $0 < x < 1$ (also $|1-x| = 1-x$ und $\sin(\pi x) \neq 0$) ist. Dann gilt

$$\sin(\pi x)\ln(|1-x|) = \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\sin(\pi x)}}$$

für alle $x \in (0,1)$ und die Funktionen $f_1(x) = \ln(1-x)$ und $g_1(x) = \frac{1}{\sin(\pi x)}$ sind differenzierbar auf $(0,1)$ mit $\lim_{x\to 1^-} f_1(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^-} g_1(x) = \infty$ und $g_1'(x) = -\frac{\pi\cos(\pi x)}{\sin^2(\pi x)} \neq 0$ für alle $x \in (\frac{1}{2}, 1)$. Nach der Regel von L'Hospital gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} \sin(\pi x)\ln(|1-x|) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\sin(\pi x)}} \\
&= \lim_{x\to 1^-} \frac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{\pi\cos(\pi x)}{\sin^2(\pi x)}} \\
&= \lim_{x\to 1^-} \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi(1-x)\cos(\pi x)},
\end{aligned}$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite exisitert.

Die Funktionen $f_2(x) = \sin^2(\pi x)$ und $g_2(x) = \pi(1-x)\cos(\pi x)$ sind differenzierbar auf $(\frac{1}{2}, 1)$ mit $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sin^2(\pi) = 0 = \lim_{x\to 1^-} g(x) = \pi \cdot 0 \cdot \cos(\pi)$ und $\lim_{x\to 1^-} g_2'(x) = \lim_{x\to 1^-} \big(-\pi\cos(\pi x) - \pi^2(1-x)\sin(\pi x)\big) = \pi$, d.h. es existiert $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ mit $g_2'(x) \neq 0$ für alle $x \in (1-\delta, 1)$. Nach der Regel von L'Hospital gilt

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi(1-x)\cos(\pi x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2\pi\sin(\pi x)\cos(\pi x)}{-\pi\cos(\pi x) - \pi^2(1-x)\sin(\pi x)} = 0.$$

Also gilt

$$\lim_{x\to 1^-} \sin(\pi x)\ln(|1-x|) = 0.$$

• Für alle $x \in (0,\infty)$ gilt $x + \cos(x) > 0$ und

$$\frac{x - \sin(x)}{x + \cos(x)} = \frac{1 - \frac{\sin(x)}{x}}{1 + \frac{\cos(x)}{x}}.$$

Wegen

$$\underbrace{0}_{\to 0} < \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|, \left|\frac{\cos(x)}{x}\right| \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}$$

für alle $x \in (0,\infty)$ folgt mit dem Einschließungskriterium, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$$

und damit

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin(x)}{x + \cos(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{\sin(x)}{x}}{1 + \frac{\cos(x)}{x}} = 1.$$

v) Betrachte die Funktion

$$h\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}.$$

Die Funktionen $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ und $g(x) = \frac{1}{x}$ sind differenzierbar auf $(0,\infty)$ mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = \sin(0) = 0 = \lim_{x\to\infty} g(x)$ und $g'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$ für alle $x \in (0,\infty)$. Nach der Regel von L'Hospital gilt

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\cos(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} h(n) = 1.$$

Aufgabe 3. (*Zentraler Differenzenquotient, 1.5+1 Punkte*)

i) Es seien $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in I$. Zeigen Sie, dass der zentrale Differenzenquotient

$$\delta(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

im Limes $h \to 0$ gegen $f'(x_0)$ konvergiert.

ii) Es habe $g\colon I \to \mathbb{R}$ die Eigenschaft, dass der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0-h)}{2h}$$

existiert. Ist g differenzierbar in x_0?

Lösung Aufgabe 3.

i) Es ist

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0-h)}{2h} \\
&= \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{2h}}_{h = x - x_0} + \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{-(f(x_0) - f(x_0-h))}{-2h}}_{-h = x - x_0} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{1}{2} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(x_0).
\end{aligned}$$

ii) Es seien $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$ und $x_0 = 0$. Dann ist $g(h) - g(-h) = 0$ für alle $h \in \mathbb{R} - \{0\}$, sodass

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(-h)}{2h} = 0,$$

aber g ist nicht differenzierbar in x_0.

Aufgabe 4. (*Numerische Differentiation, 2+3 Punkte*) Es seien $x > -1$, $f(x) = \ln(1+x)$, $n = 2$, $h_0 = 1/8$, $h_1 = 1/16$, $h_2 = 1/32$. Berechnen Sie einen Näherungswert ("Extrapolation zum Limes $h \to 0$", 8 Nachkommastellen) für $f'(0)$

i) mittels des Differenzenquotienten;

ii) mittels des zentralen Differenzenquotienten (als Polynom in h_i^2).

Lösung Aufgabe 4.

i) Mithilfe des Differenzenquotienten berechnen wir gemäß dem Algorithmus von Neville für den Wert $p_2(0)$ des Interpolationspolynoms p_2 an der Stelle 0 das Schema

h_i	$y_i = \frac{\ln(1+h_i)}{h_i}$	$k=1$	$k=2$
$\frac{1}{8}$	$y_0 = p_{0,0}(0) = 0,94226429$		
$\frac{1}{16}$	$y_1 = p_{1,0}(0) = 0,96999395$	$p_{1,1}(0) = 0,99772361$	
$\frac{1}{32}$	$y_2 = p_{2,0}(0) = 0,98469308$	$p_{2,1}(0) = 0,99939221$	$p_{2,2}(0) = 0,99994841$

und erhalten $f'(0) \approx p_2(0) = p_{2,2}(0) = 0,99994841$.

ii) Mithilfe des zentralen Differenzenquotienten berechnen wir gemäß dem Algorithmus von Neville für den Wert $p_2(0)$ des Interpolationspolynoms p_2 an der Stelle 0 das Schema

h_i^2	$y_i = \frac{\ln(1+h_i)-\ln(1-h_i)}{2h_i}$	$k=1$	$k=2$
$(\frac{1}{8})^2$	$y_0 = p_{0,0}(0) = 1,00525771$		
$(\frac{1}{16})^2$	$y_1 = p_{1,0}(0) = 1,00130514$	$p_{1,1}(0) = 0,99998762$	
$(\frac{1}{32})^2$	$y_2 = p_{2,0}(0) = 1,00032571$	$p_{2,1}(0) = 0,99999923$	$p_{2,2}(0) = 1,00000000$

und erhalten $f'(0) \approx p_2(0) = p_{2,2}(0) = 1,00000000$.