**Fachrichtung Mathematik**
**Fakultät für Mathematik und Informatik**
**Universität des Saarlandes**
**Prof. Dr. Michael Bildhauer**
**B.Sc. Nils Gutheil**

Saarbrücken, 26.03.2019

**Klausur zur Vorlesung**
**Höhere Mathematik für Ingenieure III**

*i)* Die folgende Klausur besteht aus 4 Aufgaben mit jeweils 10 Bewertungspunkten.

*ii)* Jede der 4 Aufgaben ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten.

*iii)* Achten Sie auf eine saubere Argumentation, d.h.:

*Schreiben Sie alle Lösungsschritte hin und begründen Sie diese – auch wenn eine Aufgabe als Frage formuliert ist, ist die Antwort selbstverständlich zu begründen.*

*Für geratene oder unbegründete Lösungen gibt es keine Punkte.*

*iv)* Der Einsatz eines Taschenrechners ist nur für elementare Berechnungen erlaubt.

*Komplexere Algorithmen auf der Basis eines Taschenrechners sind keine erlaubten Hilfsmittel.*

*v)* Weiteres erlaubtes Hilfsmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt.

*vi)* Benutzen Sie einen dokumentenechten Stift. *Aufzeichnungen mit Bleistift werden nicht gewertet.*

---

**Aufgabe 1.** *Gew. lin. DGl./Systeme mit konst. Koeff.; 5+5 Punkte)*

*i)* Bestimmen Sie reelles Fundamentalsystem von Lösungen des Systems:

$$\underline{\mathbf{y}}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{y}} \,.$$

*ii)* Bestimmen Sie die allgemeine (reelle) Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + 2y = 1 + x + x^2$$

*mithilfe eines Ansatzes nach der rechten Seite.*

---

*Bitte wenden.*

**Aufgabe 2.** *(Grenzwert von Funktionen, Differenzierbarkeit, Extrema; 2+2+6 Punkte)*

*i)* Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 - \{\underline{\mathbf{0}}\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}\ .$$

Finden Sie (mindestens) vier verschiedene Nullfolgen (nicht identisch Null) $\{\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\}$, $\{\underline{\mathbf{y}}^{(k)}\}$, $\{\underline{\mathbf{u}}^{(k)}\}$, $\{\underline{\mathbf{v}}^{(k)}\}$ aus $\mathbb{R}^2 - \{\underline{\mathbf{0}}\}$, sodass die Folgen $\{f(\underline{\mathbf{x}}^{(k)})\}$, $\{f(\underline{\mathbf{y}}^{(k)})\}$, $\{f(\underline{\mathbf{u}}^{(k)})\}$ und $\{f(\underline{\mathbf{v}}^{(k)})\}$ jeweils unterschiedliche Grenzwerte haben.

*ii)* Es seien $f$, $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $h := (f \circ g - g \circ f)$. Berechnen $Dh$ im Fall

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}\ , \qquad g(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

*iii)* Es sei $0 < a < 1/2$ fixiert,

$$E := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + 2x_2^2 \leq 1\}$$

und $f\colon E \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \frac{1}{1 + (x_1 - a)^2 + x_2^2}\ .$$

Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema von $f$.

---

**Aufgabe 3.** *(Integralrechnung; 5+5 Punkte)*

*i)* Es seien

$$E_1^c = \left\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} \geq 1\right\}\ , \qquad E_2 = \left\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + \frac{x_2^2}{9} \leq 1\right\}\ ,$$
$$Q = \left\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 :\ x_2 \geq 0\right\}\ , \qquad M = E_1^c \cap E_2 \cap Q\ .$$

Skizzieren Sie $M$ und deuten Sie in der Skizze an, dass $M$ kein Normalbereich in $x_1$-Richtung ist. Berechnen Sie $\int_M x_1 \, \mathrm{d}V$.

*ii)* Es sei

$$M := \left\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 :\ e^{-1} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1,\ x_3 = -\frac{1}{2}\ln(x_1^2 + x_2^2)\right\}\ .$$

Skizzieren Sie $M$ und berechnen Sie $\int_M \, \mathrm{d}V$ *mithilfe der Transformation*

$$g :\quad \begin{pmatrix} \varphi \\ \rho \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{-\rho}\cos(\varphi) \\ e^{-\rho}\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}\ .$$

---

**Aufgabe 4.** *(Gemischte Aufgaben; (2+3)+3+2 Punkte)*

*i)* Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die $2\pi$-periodische Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} (x+\pi)^2 & \text{für} \quad -\pi \le x < 0\ , \\ (x-\pi)^2 & \text{für} \quad 0 \le x < \pi\ . \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die explizite Abbildungsvorschrift $f(x) = \ldots$ für $-2\pi \le x < -\pi$ und für $\pi \le x < 2\pi$. Fertigen Sie eine Skizze an. Ist $f$ eine gerade bzw. eine ungerade Funktion?

(b) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von $f$. Gegen welche Funktion konvergiert die Fourier-Reihe von $f$?

*ii)* Es sei $a \in \mathbb{R}$ fixiert und $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} = \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$. Weiter sei $U := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 :\ \|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}^{(0)}\| < 1/4\}$ und es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \subset U \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \frac{e^{x_1+x_2}}{1-x_1-x_2}\ .$$

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom $T_n(\underline{\mathbf{x}}; \underline{\mathbf{x}}^{(0)}) = T_n(\underline{\mathbf{x}}^{(0)} + \underline{\xi}; \underline{\mathbf{x}}^{(0)})$ von $f$ der Ordnung $n = 2$ um den Entwicklungspunkt $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$.

*iii)* Skizzieren Sie die Kurve $\gamma$, die sich aus den auf $I = [-1, 1]$ definierten Kurven $\gamma_1$, $\gamma_2$ und $\gamma_3$ zusammensetzt:

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}\ , \quad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}\ , \quad \gamma_3(t) = \begin{pmatrix} -t \\ -t \end{pmatrix}\ .$$

Berechnen Sie weiter $\int_\gamma \langle F, \mathrm{d}\underline{\mathbf{x}} \rangle$ für das Vektorfeld $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

---

*Viel Erfolg!*