Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Johannes Hoffmann

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure III*
Wintersemester 2021/22
Blatt 6 – Musterlösung
Abgabe: Freitag, 26.11.2021, 22:00 Uhr über Moodle

Aufgabe 1 (4 + 8 Punkte)**.**

(a) Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ein Polynom mit $a_k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = f(x)\exp(\lambda x)$$

gegeben ist durch $y(x) = p(x)\exp(\lambda x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$, wobei die Koeffizienten $b_k \in \mathbb{R}$ des Polynoms $p(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$ wie folgt rekursiv von der höchsten bis zur niedrigsten Potenz definiert sind:

$$b_n := \frac{a_n}{\lambda} \quad \text{und} \quad b_k := \frac{1}{\lambda}(a_k - (k+1)b_{k+1}) \quad \text{für} \quad k = n-1, \dots, 0.$$

(b) Lösen Sie folgende Differentialgleichung mit der Methode der Variation der Konstanten für Systeme:

$$y''' - y'' - y' + y = x^3.$$

Hinweis: Sie dürfen die Lösung der homogenen Gleichung aus Aufgabe 2 von Blatt 4 übernehmen.

Lösung. (a) Um zu zeigen, dass der Ansatz funktioniert, setzen wir den Ansatz in die Differentialgleichung ein:

$$f(x)\exp(\lambda x) \overset{!}{=} y'(x) = (p(x)\exp(\lambda x) + c)' = (p'(x) + \lambda p(x))\exp(\lambda x)$$

Es bleibt zu zeigen, dass $p'(x) + \lambda p(x) = f(x)$:

$$\begin{aligned}
p'(x) + \lambda p(x) &= \left(\sum_{k=0}^n b_k x^k\right)' + \lambda \sum_{k=0}^n b_k x^k = \sum_{k=1}^n k b_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^n \lambda b_k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) b_{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda b_k x^k + \lambda \frac{a_n}{\lambda} x^n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} ((k+1) b_{k+1} + \lambda b_k) x^k + a_n x^n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} ((k+1) b_{k+1} + \lambda \frac{1}{\lambda}(a_k - (k+1) b_{k+1})) x^k + a_n x^n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + a_n x^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k = f(x).
\end{aligned}$$

(b) Aus Aufgabe 2 von Blatt 4 wissen wir, dass ein Fundamentalsystem für die Gleichung gegeben ist durch

$$y_1(x) = \exp(x), \quad y_2(x) = x\exp(x), \quad y_3(x) = \exp(-x).$$

In Systemform hat die Differentialgleichung die Form $y' = Ay + r(x)$ mit

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad r(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Eine Fundamentalmatrix ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} Y(x) &= \begin{pmatrix} \exp(x) & x\exp(x) & \exp(-x) \\ \exp(x) & (x+1)\exp(x) & -\exp(-x) \\ \exp(x) & (x+2)\exp(x) & \exp(-x) \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & x+1 & -1 \\ 1 & x+2 & 1 \end{pmatrix}}_{=:B(x)} \underbrace{\begin{pmatrix} \exp(x) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(x) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-x) \end{pmatrix}}_{=:D(x)}. \end{aligned}$$

Zunächst invertieren wir $B(x)$ durch Zeilenumformungen:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & x & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x+1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & x+2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & x & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow[\substack{\text{I}\cdot 2 \\ \text{III}\cdot 2}]{\text{II}\leftrightarrow\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2x & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow[\text{III}-\text{II}]{\text{I}-x\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & x+2 & 0 & -x \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow[\text{III}\cdot(-1)]{\substack{\text{I}\cdot 2 \\ \text{II}\cdot 2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 4 & 2x+4 & 0 & -2x \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{\text{I}-\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 2x+3 & 2 & -2x-1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Somit gilt

$$B(x)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2x+3 & 2 & -2x-1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

also

$$\begin{aligned} Y(x)^{-1} &= (B(x) \cdot D(x))^{-1} = D(x)^{-1} \cdot B(x)^{-1} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \exp(-x) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-x) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+3 & 2 & -2x-1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit Variation der Konstanten und der Formel aus Teil (a) (oder ausufernder partieller Integration) berechnen wir nun

$$
\begin{aligned}
c(x) &= \int Y(x)^{-1} r(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int \begin{pmatrix} \exp(-x) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-x) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+3 & 2 & -2x-1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\int \begin{pmatrix} \exp(-x) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-x) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x^4 - x^3 \\ 2x^3 \\ x^3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\int \begin{pmatrix} (-2x^4 - x^3)\exp(-x) \\ 2x^3\exp(-x) \\ x^3\exp(+x) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (2x^4 + 9x^3 + 27x^2 + 54x + 54)\exp(-x) \\ (-2x^3 - 6x^2 - 12x - 12)\exp(-x) \\ (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\exp(+x) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \exp(-x) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-x) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x^4 + 9x^3 + 27x^2 + 54x + 54 \\ -2x^3 - 6x^2 - 12x - 12 \\ x^3 - 3x^2 + 6x - 6 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} D(x)^{-1} \begin{pmatrix} 2x^4 + 9x^3 + 27x^2 + 54x + 54 \\ -2x^3 - 6x^2 - 12x - 12 \\ x^3 - 3x^2 + 6x - 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

und damit die spezielle Lösung

$$
\begin{aligned}
y_{\mathrm{s}}(x) &= Y(x)c(x) \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & x+1 & -1 \\ 1 & x+2 & 1 \end{pmatrix} D(x)}_{=Y(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{4} D(x)^{-1} \begin{pmatrix} 2x^4 + 9x^3 + 27x^2 + 54x + 54 \\ -2x^3 - 6x^2 - 12x - 12 \\ x^3 - 3x^2 + 6x - 6 \end{pmatrix}}_{=c(x)} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & x+1 & -1 \\ 1 & x+2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x^4 + 9x^3 + 27x^2 + 54x + 54 \\ -2x^3 - 6x^2 - 12x - 12 \\ x^3 - 3x^2 + 6x - 6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Da unser System aus einer Differentialgleichung dritter Ordnung gebaut wurde, interessieren wir uns nur für den ersten Eintrag von $y_{\mathrm{s}}(x)$, die weiteren Einträge sind die erste und die zweite Ableitung davon. Also gilt

$$
\begin{aligned}
y_{\mathrm{s}(x)_1} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x^4 + 9x^3 + 27x^2 + 54x + 54 \\ -2x^3 - 6x^2 - 12x - 12 \\ x^3 - 3x^2 + 6x - 6 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \big(2x^4 + 9x^3 + 27x^2 + 54x + 54 \\
&\qquad -2x^4 - 6x^3 - 12x^2 - 12x + x^3 - 3x^2 + 6x - 6\big) \\
&= \frac{1}{4} \big(4x^3 + 12x^2 + 48x + 48\big) = x^3 + 3x^2 + 12x + 12,
\end{aligned}
$$

Was mit dem Ergebnis aus Aufgabe 2 von Blatt 4 übereinstimmt.

Definition. Eine konstante Lösung y einer Differentialgleichung oder eines Systems von Differentialgleichungen ist eine Lösung, die nicht vom Argument x abhängt. Eine konstante Lösung heißt auch *Gleichgewichtszustand*.

Aufgabe 2 (3 + 5 Punkte)**.** Sei $y' = Ay + b$ ein System von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

(a) Charakterisieren Sie die Existenz und Eindeutigkeit von Gleichgewichtszuständen für dieses System anhand von A und b.

(b) Entscheiden Sie in Abhängigkeit von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, wann das folgende System keinen/einen eindeutigen/unendlich viele Gleichgewichtszustände hat:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -\beta \\ -16 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Bestimmen Sie alle Gleichgewichtszustände in den Situationen, in denen unendlich viele Gleichgewichtszustände vorliegen.

Lösung. (a) Ein Vektor $y \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Gleichgewichtszustand, wenn

$$0 = y' = Ay + b.$$

Die Gleichgewichtszustände des Systems sind also genau die Lösungen $y \in \mathbb{R}^n$ des linearen Gleichungssystems $Ay = -b$. Wir wissen aus der linearen Algebra, dass die Existenz einer Lösung dazu äquivalent ist, dass $-b \in \operatorname{bild}(A)$ (aufgrund der Linearität ist das auch äquivalent dazu, dass $b \in \operatorname{bild}(A)$). Die Eindeutigkeit einer Lösung ist genau dann gegeben, wenn A invertierbar ist (die eindeutige Lösung ist dann gerade $y = -A^{-1}b$).

Ein solches System von Differentialgleichungen hat also genau dann mindestens einen Gleichgewichtszustand, wenn $b \in \operatorname{bild}(A)$. Weiterhin hat das System genau dann genau einen Gleichgewichtszustand, wenn A invertierbar ist.

(b) Wir machen Zeilenumformungen auf der Matrix $\left(A \mid -b\right)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 2 & \beta \\ -1 & 0 & 1 & \alpha & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{IV+I}]{\substack{\text{II}-2\cdot\text{I} \\ \text{III}-3\cdot\text{I}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 5 & \beta \\ 0 & 2 & 0 & \alpha-1 & 16 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{IV}-2\cdot\text{II}]{\text{III}-\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & \beta-2 \\ 0 & 0 & -6 & \alpha-7 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{IV}+3\cdot\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & \beta-2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-1 & 3\beta+6 \end{array}\right)$$

An dieser Stelle sieht man, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $\alpha \neq 1$, in diesem Fall existiert also ein eindeutiger Gleichgewichtszustand.

Im Fall $\alpha = 1$ lautet die letzte Gleichung $0 = 3\beta + 6 = 3(\beta + 2)$, für $\beta \neq -2$ hat das System also keine Lösung.

Betrachten wir also die letzte Situation mit $\alpha = 1$ und $\beta = -2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & \beta - 2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 & 3\beta + 6 \end{array}\right) \xrightarrow[\beta=-2]{\alpha=1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{Nullzeile entfernen} \\ \text{Parameter wählen}}]{\text{III}\cdot\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{III}-\text{IV}]{\substack{\text{I}+\text{IV} \\ \text{II}-3\cdot\text{IV}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 - 3t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 - t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{II}-3\cdot\text{III}]{\text{I}+\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 - t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{I}-2\cdot\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 - t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right)$$

Für den Fall $\alpha = 1$ und $\beta = -2$ hat man also unendlich viele Gleichgewichtszustände der Form

$$\begin{pmatrix} -18 \\ 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Definition. Eine Differentialgleichung $y' = f(y)$ erster Ordnung, in der das Argument x also nicht explizit vorkommt, heißt *autonome* Differentialgleichung. Ist f stetig, so heißt ein Gleichgewichtszustand $\hat{y}$

- *instabil*, wenn f links von $\hat{y}$ negativ und rechts von $\hat{y}$ positiv ist (mathematisch: wenn es ein offenes Intervall I mit $\hat{y} \in I$ gibt, so dass $f(y) < 0$ für alle $y \in I$ mit $y < \hat{y}$ und $f(y) > 0$ für alle $y \in I$ mit $y > \hat{y}$).
- *stabil*, wenn f links von $\hat{y}$ positiv und rechts von $\hat{y}$ negativ ist.
- *semi-stabil*, wenn f auf beiden Seiten von $\hat{y}$ das gleiche Vorzeichen hat.

Praktisch bedeutet dies, dass eine Lösung y mit Anfangswert y_0 auf lange Sicht ($x \to \infty$) zu einem stabilen Gleichgewichtszustand hinstrebt und von einem instabilen Gleichgewichtszustand wegstrebt.

Aufgabe 3 (3+3+4 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Gleichgewichtszustände in den folgenden Modellen und überprüfen Sie diese auf Stabilität. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Rahmen des jeweiligen Modells.

(a) Thermisches Gleichgewicht: Die Temperatur T eines Getränks in einer Tasse mit Wärmekoeffizient $k > 0$ in Abhängigkeit von der Zeit t bei konstanter Umgebungstemperatur T_A erfüllt
$$T' = -k(T - T_A).$$

(b) Freier Fall mit Reibung: Die Geschwindigkeit v einer fallenden Masse $m > 0$ in Abhängigkeit von der Zeit t mit Erdbeschleunigung $g > 0$ und Reibungskoeffizient $k > 0$ erfüllt
$$mv' = -mg - kv.$$
Hinweis: Geschwindigkeit in Fallrichtung wird hier als negativ modelliert.

(c) Modifizierte logistische Gleichung: Die Größe y einer Population mit oberer Schranke $L > 0$, biologischer Konstante $k > 0$ und zusätzlicher positiver Konstante $T < L$ in Abhängigkeit von der Zeit t erfüllt
$$y' = ky(L - y)(y - T).$$
Was modelliert die zusätzliche Konstante T?

Lösung. Ist y konstant, so gilt $0 = y' = f(y)$. Die Gleichgewichtszustände sind also gerade die reellen Nullstellen von f.

(a) Mit $f(T) = -k(T - T_A)$ gilt $f(T) = 0$ genau dann, wenn $T = T_A$. Für $T < T_A$ gilt
$$f(T) = -k(\underbrace{T - T_A}_{<0}) > 0,$$
für $T > T_A$ analog
$$f(T) = -k(\underbrace{T - T_A}_{>0}) < 0,$$
also ist $T = T_A$ ein stabiler Gleichgewichtszustand. Im Modell bedeutet dies, dass ein Getränk, was heißer (bzw. kälter) ist als die Umgebung, auf die Umgebungstemperatur abkühlt (bzw. erwärmt wird), wenn man es lange genug stehen lässt.

(b) Nach Division durch $m > 0$ ist die Differentialgleichung äquivalent zu $v' = -g - \frac{k}{m}v$. Mit $f(v) = -g - \frac{k}{m}v$ gilt $f(v_L) = 0$ genau dann, wenn $v_L = -\frac{mg}{k}$. Für $v < v_L$ gilt

$$f(v) = -g - \frac{k}{m}v = \frac{k}{m}\underbrace{(v_L - v)}_{>0} > 0,$$

für $v > v_L$ analog

$$f(v) = -g - \frac{k}{m}v = \frac{k}{m}\underbrace{(v_L - v)}_{<0} < 0,$$

also ist $v = v_L$ ein stabiler Gleichgewichtszustand. Im Modell bedeutet dies, dass eine Masse, die (betragsmäßig) langsamer fällt als die Grenzgeschwindigkeit v_L, auf die Erde zu beschleunigt, während eine Masse, die (betragsmäßig) schneller fällt als die Grenzgeschwindigkeit v_L, durch die Reibung abgebremst wird.

(c) Mit $f(y) = ky(L - y)(y - T)$ gilt $f(y) = 0$ genau dann, wenn $y \in \{0, T, L\}$. Es gilt

$$f(y) = \begin{cases} k\underbrace{y}_{<0}\underbrace{(L-y)}_{>0}\underbrace{(y-T)}_{<0} > 0, & y \in (-\infty, 0), \\ 0, & y = 0, \\ k\underbrace{y}_{>0}\underbrace{(L-y)}_{>0}\underbrace{(y-T)}_{<0} < 0, & y \in (0, T), \\ 0, & y = T, \\ k\underbrace{y}_{>0}\underbrace{(L-y)}_{>0}\underbrace{(y-T)}_{>0} > 0, & y \in (T, L), \\ 0, & y = L, \\ k\underbrace{y}_{>0}\underbrace{(L-y)}_{<0}\underbrace{(y-T)}_{>0} < 0, & y \in (L, \infty). \end{cases}$$

Somit ist $y = T$ ein instabiler Gleichgewichtszustand, während $y = 0$ und $y = L$ stabile Gleichgewichtszustände sind. Im Modell bedeutet dies:

- Eine negative Population ergibt hier keinen Sinn, das Verhalten im Bereich $(-\infty, 0)$ ist also nicht relevant.
- Eine Population, die im Intervall $(0, T)$ startet, stirbt auf lange Sicht aus.
- Eine Population, die im Intervall (T, L) startet, vermehrt sich auf lange Sicht bis zur oberen Schranke L.
- Eine Population, die im Intervall (L, ∞) startet, ist auf lange Sicht zu groß und schrumpft auf die Schranke L zu.

Im Rahmen dieses Modells beschreibt T eine Mindestgröße, die die Population haben muss, um überleben zu können.

Aufgabe 4 $((1+1+2+2)+4$ Punkte$)$**.**

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von

$$0_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Für einen Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ (im Bogenmaß) heißt eine Matrix der Form

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{mit} \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

Rotationsmatrix, da sie einen Vektor v um φ gegen den Uhrzeigersinn verdreht. Begründen Sie zunächst aus der Anschauung, warum A_φ nur für $\varphi \in \{0, \pi\}$ reelle Eigenwerte haben kann. Beweisen Sie diese Aussage, in dem Sie die Eigenwerte von A_φ über $\mathbb{C}$ ausrechnen.

Lösung. Für kleine Matrixgrößen kann man Eigenwerte und Eigenvektoren manchmal durch bloßes Hinsehen erkennen.

(a)
- Da $0_{2\times 2} \cdot v = 0 = 0 \cdot v$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$ gilt, hat die Nullmatrix nur den (zweifachen) Eigenwert 0 mit zweidimensionalem Eigenraum $E_0 = \mathbb{R}^2$. Alternativ berechnet man das charakteristische Polynom

$$\chi_{0_{2\times 2}}(\lambda) = \det(0_{2\times 2} - \lambda I_2) = \det(-\lambda I_2) = (-\lambda)^2 \det(I_2) = \lambda^2$$

  und den Eigenraum $E_0 = \mathrm{kern}(0_{2\times 2} - 0 \cdot I_2) = \mathrm{kern}(0_{2\times 2}) = \mathbb{R}^2$.
- Da $I_2 \cdot v = v = 1 \cdot v$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$ gilt, hat die Einheitsmatrix nur den (zweifachen) Eigenwert 1 mit zweidimensionalem Eigenraum $E_1 = \mathbb{R}^2$. Alternativ berechnet man das charakteristische Polynom

$$\chi_{I_2}(\lambda) = \det(I_2 - \lambda I_2) = \det((1-\lambda) I_2) = (1-\lambda)^2 \det(I_2) = (1-\lambda)^2$$

  und den Eigenraum $E_1 = \mathrm{kern}(I_2 - 1 \cdot I_2) = \mathrm{kern}(0_{2\times 2}) = \mathbb{R}^2$.
- Die Matrix P ist eine Permutationsmatrix, die die beiden Komponenten vertauscht. Sind beide Komponenten gleich, so ändert sich nichts, etwa gilt

$$P \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  Ein Vektor, dessen Komponenten betragsmäßig gleich sind, aber unterschiedliches Vorzeichen haben, wird durch P auf sein Negatives abgebildet:

$$P \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

  Somit sind 1 und -1 Eigenwerte von P mit eindimensionalen Eigenräumen

$$E_1 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad E_{-1} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Alternativ berechnet man das charakteristische Polynom

$$\chi_P(\lambda) = \det(P - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

und die eindimensionalen Eigenräume

$$E_1 = \operatorname{kern}(P - 1 \cdot I_2) = \operatorname{kern} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$E_{-1} = \operatorname{kern}(P - (-1) \cdot I_2) = \operatorname{kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Wegen
$$N \cdot e^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot e^{(1)}$$
ist 0 klarerweise ein Eigenwert von P, aber mehr sieht man hier durch Hinschauen kaum. Man berechnet das charakteristische Polynom
$$\chi_N(\lambda) = \det(N - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2,$$
also ist 0 in der Tat der einzige Eigenwert mit eindimensionalem Eigenraum
$$E_0 = \operatorname{kern}(N - 0 \cdot I_2) = \operatorname{kern}(N) = \left\{ t \cdot e^{(1)} : t \in \mathbb{R} \right\}$$
(wegen $\operatorname{rg}(N) = 1$ gilt mit der Dimensionsformel $\dim(\operatorname{kern}(N)) = 1$, also kann der Eigenraum $E_0 = \operatorname{kern}(N)$ gar nicht zweidimensional sein).

(b) Ist v ein Eigenvektor von A_φ, so wird v von A_φ auf ein Vielfaches seiner selbst abgebildet. Da ein Vektor durch Rotation seine Länge nicht ändert, kann v also nur auf sich selbst oder sein Negatives abgebildet werden. Dies entspricht einer Rotation um 0 beziehungsweise π, also kann A_φ nur in diesen Fällen reelle Eigenwerte haben (für die Anschauung sind komplexe Eigenwerte eher schlecht geeignet).

Sei nun $\varphi \in [0, 2\pi)$, dann gilt

$$\begin{aligned} \chi_{A_\varphi}(\lambda) = \det(A_\varphi - \lambda I_2) &= \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi) - \lambda & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (\cos(\varphi) - \lambda)^2 + \sin^2(\varphi) \\ &= \cos^2(\varphi) - 2\lambda\cos(\varphi) + \lambda^2 + \sin^2(\varphi) \\ &= \lambda^2 - 2\lambda\cos(\varphi) + 1. \end{aligned}$$

Die Nullstellen sind somit gegeben durch

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\frac{-2\cos(\varphi)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2\cos(\varphi)}{2}\right)^2 - 1} \\ &= \cos(\varphi) \pm \sqrt{\cos^2(\varphi) - 1} = \cos(\varphi) \pm \sqrt{-\sin^2(\varphi)} \\ &= \cos(\varphi) \pm \mathrm{i}\sin(\varphi) = \exp(\pm\mathrm{i}\varphi). \end{aligned}$$

und daher genau dann reell, wenn $\sin(\varphi) = 0$, was genau für $\varphi \in \{0, \pi\}$ der Fall ist.