Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Christian Tietz
M.Sc. Jan Müller

Saarbrücken, 21.02.2017

Klausur zur Vorlesung
Höhere Mathematik für (Naturwiss. &) Ingenieure III

Die folgende Klausur besteht aus 4 Aufgaben. Die in den einzelnen Aufgabenteilen erreichbare Punktzahl ist jeweils angegeben, ebenso die Themengebiete, aus denen die Aufgabe gewählt wurde. Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten. Achten Sie auf eine saubere Argumentation, d.h.: **Schreiben Sie alle Lösungsschritte hin und begründen Sie diese – auch wenn eine Aufgabe als Frage formuliert ist, ist die Antwort selbstverständlich zu begründen**, für "geratene" Lösungen kann es keine Punkte geben.

Aufgabe 1. (Gewöhnliche Differentialgleichungen/ - Systeme; **(2+2+2)+4 Punkte**)

i) Betrachten Sie die gewöhnliche homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$L[y] := y''' - y'' - y' + y = 0 \, .$$

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen.

(b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung von

$$L[y] = x \, .$$

(c) Führen Sie die Gleichung $L[y] = 0$ auf ein System

$$\underline{\mathbf{y}}' = A\underline{\mathbf{y}}$$

erster Ordnung zurück.

ii) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \, .$$

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen des homogenen Systems

$$\underline{\mathbf{y}}' = A\underline{\mathbf{y}} \, .$$

Bitte wenden.

Aufgabe 2. (Stetigkeit, Differenzierbarkeit; **2+2+(2+4) Punkte**)

i) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3 + x_1 + x_2}{\|\underline{\mathbf{x}}\|} & \text{für} \quad \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}\,, \\ 0 & \text{für} \quad \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}\,. \end{cases}$$

Ist f stetig auf $\mathbb{R}^2$?

ii) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{y}}) = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} .$$

Es sei weiter $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$g(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2 \\ \\ x_1 - x_2^2 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie für $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$ **mithilfe der Kettenregel** $D(f \circ g)(\underline{\mathbf{x}})$. Bestimmen Sie zudem die explizite Abbildungsvorschrift der Funktion $f \circ g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

iii) Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ und $f\colon U \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = x_1 x_2 e^{x_1 x_2} .$$

(a) Bestimmen Sie im Fall

$$U = B_1(\underline{\mathbf{0}}) := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$$

alle lokalen Extrema von f.

(b) Existieren im Fall

$$U = \overline{B_1(\underline{\mathbf{0}})} := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

globale Extrema von f? Falls ja, bestimmen Sie diese.

Aufgabe 3. (5+5 Punkte)

i) Es sei $M := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x_1 \leq 2,\ x_1 \leq x_2 \leq \sqrt{8 - x_1^2}\}$. Skizzieren Sie M und berechnen Sie

$$\int_M \frac{1}{5 + x_1^2 + x_2^2}\, \mathrm{d}V .$$

ii) Es sei $G \subset \mathbb{R}^3$ das von den Paraboloiden

$$\begin{aligned} &\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 :\ 1 + x_1^2 + x_2^2 = x_3\}\,, \\ \text{und} \quad &\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 :\ 2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = x_3\} \end{aligned}$$

eingeschlossene (beschränkte) Raumstück im $\mathbb{R}^3$. Skizzieren Sie G und berechnen Sie das Volumen von G.

Hinweis: Zylinderkoordinaten

Aufgabe 4. (Gemischte Aufgaben: **(2+2)+3+3 Punkte**)

i) (a) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \ln(1+x^2)$. Bestimmen Sie das Taylor-Polynom $T(x, x_0)$ von f der Ordnung 2 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) Für $U := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \|\underline{\mathbf{x}}\| < 1\}$ sei $f\colon \mathbb{R}^2 \subset U \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \ln(1 + x_1^2 - x_2^2) \ .$$

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom $T(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{x}}^{(0)}))$ von f der Ordnung 1 um den Entwicklungspunkt $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

ii) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M(2, 2, \mathbb{R}) \ .$$

Bestimmen Sie eine ähnliche Matrix B in Diagonalgestalt. Wie lautet die zugehörige (orthonormale) Transformationsmatrix?

iii) Betrachten Sie die Kurve $\gamma\colon [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ \frac{1}{2}\sin(t) \end{pmatrix} \ .$$

und fertigen Sie eine Skizze an. Betrachten Sie weiter das Vektorfeld $G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$G(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 1 + x_2 + 2x_1x_2^2 \\ x_1 + 2x_1^2x_2 \end{pmatrix} \ .$$

Ist das Vektorfeld konservativ? Falls ja, geben Sie ein Potential an. Berechnen Sie

$$\int_\gamma < G, \mathrm{d}\underline{\mathbf{x}} > \ .$$