**Universität des Saarlandes**
**Fakultät für Mathematik und Informatik**
**Fachrichtung Mathematik**
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Johannes Hoffmann

**Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure III***
Wintersemester 2021/22
**Blatt 9 – Musterlösung**
Abgabe: Freitag, 17.12.2021, 22:00 Uhr über Moodle

---

**Aufgabe 1** (4 Punkte). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f, g : U \to \mathbb{R}^n$ stetig. Zeigen Sie, dass für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Funktion $\alpha f + \beta g : U \to \mathbb{R}^n$ stetig ist.

**Lösung.** Für jede Funktion $h : U \to \mathbb{R}^n$ gilt laut Vorlesung

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \text{ stetig} \quad \Leftrightarrow \quad h_\ell \text{ stetig für alle } \ell \in \{1, \dots, n\},$$

also reicht es, den Fall $n = 1$ zu betrachten. Sei also $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f, g : U \to \mathbb{R}$ stetig. Sei weiterhin $x^{(0)} \in U$ und $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $U \setminus \{x^{(0)}\}$, die gegen $x^{(0)}$ konvergiert. Da $f$ und $g$ stetig sind, gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = f(x^{(0)}) \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} g(x^{(k)}) = g(x^{(0)}).$$

Da $(f(x^{(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ und $(g(x^{(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller Zahlen sind, greifen die Grenzwertsätze und es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} (\alpha f + \beta g)(x^{(k)}) &= \lim_{k\to\infty} \alpha f(x^{(k)}) + \beta g(x^{(k)}) \overset{\text{GWS}}{=} \alpha \lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) + \beta \lim_{k\to\infty} g(x^{(k)}) \\ &= \alpha f(x^{(0)}) + \beta g(x^{(0)}) = (\alpha f + \beta g)(x^{(0)}),\end{aligned}$$

also ist $\alpha f + \beta g$ stetig in $x^{(0)}$ (und damit auch stetig auf $U$, da $x^{(0)}$ beliebig in $U$ gewählt war).

**Bemerkung.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig. Analog zu den entsprechenden Aussagen in Dimension 1 gilt:

- Ist $\varphi : U \to \mathbb{R}$ stetig, so sind auch $\varphi \cdot f$, und $\frac{1}{\varphi} \cdot f$ als Funktionen $U \to \mathbb{R}^n$ stetig (letztere natürlich nur in den $x \in U$, für die $\varphi(x) \neq 0$).
- Ist $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f(U) \subseteq V$ und $h : V \to \mathbb{R}^\ell$ stetig, so ist auch die Komposition $h \circ f : U \to \mathbb{R}^\ell$ stetig.

**Aufgabe 2** (3 + 3 + 2 Punkte)**.** In dieser Aufgabe sei stets

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

(a) Zeigen Sie mit der Definition der (Folgen-)Stetigkeit, dass für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ die *Projektion* $\pi_j$ auf die $j$-te Komponente stetig ist, wobei

$$\pi_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x_j.$$

(b) Eine *(multivariate) Polynomfunktion* ist eine endliche Summe von Funktionen der Form

$$\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \alpha \cdot x_1^{\nu_1} \cdots x_m^{\nu_m} \quad \text{mit} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \nu_1, \dots, \nu_m \in \mathbb{N}_0.$$

Eine *(multivariate) rationale Funktion* ist der Quotient zweier Polynomfunktionen. Zeigen Sie, dass alle Polynomfunktionen stetig sind und folgern Sie, dass dann auch alle rationalen Funktionen dort stetig sind, wo sie wohldefiniert sind.

(c) Zeigen Sie, dass die Euklidische Norm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{\sum_{k=1}^m x_k^2}$ stetig ist.

**Lösung.** (a) Sei $x^{(0)} \in \mathbb{R}^m$ beliebig und $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^m \setminus \{x^{(0)}\}$, die gegen $x^{(0)}$ konvergiert. Aus $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(0)}$ folgt laut Vorlesung $\lim_{k\to\infty} x_j^{(k)} = x_j^{(0)}$, also gilt

$$\lim_{k\to\infty} \pi_j(x^{(k)}) = \lim_{k\to\infty} x_j^{(k)} = x_j^{(0)} = \pi_j(x^{(0)})$$

und somit ist $\pi_j$ in $x^{(0)}$ stetig.

(b) Laut obigem Satz (und Induktion) sind endliche Summen stetige Funktionen stetig, also reicht es zu zeigen, dass $\psi$ stetig ist, dann sind auch alle Polynomfunktionen stetig. Allerdings ist

$$\psi(x) = \alpha \cdot x_1^{\nu_1} \cdots x_m^{\nu_m} = \alpha \cdot \pi_1(x)^{\nu_1} \cdots \pi_m(x)^{\nu_m}$$

ein Produkt von reellwertigen stetigen Funktionen und damit nach obigem Satz ebenfalls stetig.

Rationale Funktionen als Quotient zweier stetiger reellwertiger Funktionen sind laut dem Satz dort stetig, wo sie wohldefiniert sind, also für alle $x \in U$ mit $q(x) \neq 0$.

(c) Die Funktion $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{k=1}^m x_k^2$ ist als Polynomfunktion stetig. Bekanntermaßen ist auch die Wurzelfunktion $\sqrt{\cdot} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig. Wegen $f(\mathbb{R}^m) \subseteq [0, \infty)$ ist laut obigem Satz auch die Verkettung $\|\cdot\| = \sqrt{\cdot} \circ f$ stetig.

**Aufgabe 3** $(4+4+2$ Punkte$)$**.**

(a) Überprüfen Sie die Funktion $f$ auf Stetigkeit, wobei

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto\begin{cases}\frac{|x_1-a_1|^2}{\|x-a\|}, & x\neq a,\\ 0, & x=a,\end{cases}\quad \text{mit}\quad a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2.$$

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $g$ stetig ist und überprüfen Sie, ob $g$ im Punkt $0\in\mathbb{R}^2$ stetig fortgesetzt werden kann, wobei

$$g:\mathbb{R}^2\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mapsto\frac{|x_1|+|x_2|}{\|x\|}.$$

*Hinweis: $g$ ist stetig fortsetzbar in $0$, wenn man $g(0):=a$ für ein $a\in\mathbb{R}$ setzen kann und die dadurch entstandene Fortsetzung von $g$ stetig ist.*

(c) Überprüfen Sie, ob die Funktion $F$ stetig ist, wobei

$$F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\arctan(\|x\|)\\ x_1+\frac{x_3}{2}-\sin(x_2)\end{pmatrix}.$$

**Lösung.** (a) Für $x\neq a$ ist $\|x-a\|$ eine strikt positive stetige reellwertige Funktion. Außerdem ist der Zähler $|x_1-a_1|^2=|\pi_1(x)-a_1|^2$ eine Verkettung stetiger Funktionen, also ist auch der Quotient $f(x)$ stetig.

Sei nun $x^{(0)}=a$ und $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^2\setminus\{a\}$ mit $\lim_{k\to\infty}x^{(k)}=x^{(0)}$. Dann gilt

$$0\le\left|f(x^{(k)})-f(a)\right|=\left|f(x^{(k)})\right|=\frac{\left|x_1^{(k)}-a_1\right|^2}{\|x^{(k)}-a\|}\le\frac{\left|x_1^{(k)}-a_1\right|^2+\left|x_2^{(k)}-a_2\right|^2}{\|x^{(k)}-a\|}$$
$$=\frac{\left\|x^{(k)}-a\right\|^2}{\|x^{(k)}-a\|}=\left\|x^{(k)}-a\right\|\xrightarrow{k\to\infty}0.$$

Mit dem Einschließungskriterium folgt $\lim_{k\to\infty}f(\underline{\mathbf{x}}^{(k)})=f(\underline{\mathbf{a}})$ und daher die Stetigkeit von $f$ in $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}=\underline{\mathbf{a}}$. Insgesamt ist $f$ also auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig.

(b) Die Funktion $g$ ist stetig als Komposition stetiger Funktionen. Definiere

$$x^{(k)}=\frac{1}{k}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad y^{(k)}=\frac{1}{k}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad\text{für alle}\quad k\in\mathbb{N},$$

dann sind $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ Nullfolgen in $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. Für alle $k\in\mathbb{N}$ gilt

$$\|x^{(k)}\|\ =\frac{1}{k}\quad\text{und}\quad\|y^{(k)}\|\ =\frac{1}{k}\sqrt{2},$$

also

$$\lim_{k\to\infty}g(x^{(k)})=\lim_{k\to\infty}\frac{|x_1^{(k)}|\ +|x_2^{(k)}|}{\|x^{(k)}\|}=\lim_{k\to\infty}\frac{0+\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}}=$$

und

$$\lim_{k\to\infty}g(y^{(k)})=\lim_{k\to\infty}\frac{|y_1^{(k)}|\ +|y_1^{(k)}|}{\|y^{(k)}\|}=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k}+\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

Somit existiert $\lim_{x\to0}g(x)$ nicht. Somit ist $g$ im Punkt $x^{(0)}=0$ nicht stetig fortsetzbar.

(c) Die Funktionen

$$F_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \arctan(\|x\|)$$

und

$$F_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \pi_1(x) + \frac{1}{2}\pi_3(x) - \sin(\pi_2(x))$$

sind stetig als Verkettung stetiger Funktionen, also auch $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$.

**Satz.** Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre und stetig differenzierbare Kurve.

(a) Die zugehörige *Bogenlängenfunktion*

$$s : [a,b] \to [0, L(\gamma)], \quad t \mapsto \int_a^t \|\gamma'(x)\| \,\mathrm{d}x$$

ist streng monoton steigend und bijektiv.

(b) Die *Parametrisierung nach der Bogenlänge* $\tilde{\gamma}$ der Kurve $\gamma$ entsteht dann aus $\gamma$ nach Parametertransformation mit $s^{-1}$:

$$\tilde{\gamma} : [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \gamma(s^{-1}(t)) = (\gamma \circ s^{-1})(t).$$

Sie erfüllt $\|\tilde{\gamma}'(t)\| = 1$ für alle $t \in [0, L(\gamma)]$.

**Aufgabe 4** (5 + 5 Bonuspunkte). Beweisen Sie obigen Satz.

**Lösung.** (a) Da $\gamma$ stetig differenzierbar ist, ist $\gamma'$ stetig. Mit der Stetigkeit der Euklidischen Norm ist $x \mapsto \|\gamma'(x)\|$ stetig, also ist auch $s$ stetig.

Da $\gamma$ regulär ist, gilt $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a,b]$ und somit $\|\gamma'(t)\| > 0$ für alle $t \in [a,b]$. Seien $t_1, t_2 \in [a,b]$ mit $t_1 < t_2$, dann gilt

$$\begin{aligned} s(t_2) - s(t_1) &= \int_0^{t_2} \|\gamma'(x)\| \,\mathrm{d}x - \int_0^{t_1} \|\gamma'(x)\| \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(x)\| \,\mathrm{d}x > \int_{t_1}^{t_2} 0 \,\mathrm{d}x = 0, \end{aligned}$$

da $\|\gamma'(x)\| > 0$ für alle $x \in [t_1, t_2] \subseteq [a,b]$, also ist $s$ streng monoton steigend.

Da $s$ sowohl stetig als auch streng monoton ist, muss $s$ auch bijektiv sein.

(b) Erinnerung: Sind $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f : I \to \mathbb{R}$ eine bijektive differenzierbare Abbildung mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to I$ differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Zur Aufgabe: Laut Hauptsatz gilt $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$, mit der Erinnerung folgt

$$\tilde{\gamma}'(t) = (\gamma \circ s^{-1})'(t) = \gamma'(s^{-1}(t)) \cdot (s^{-1})'(t) = \frac{\gamma'(s^{-1}(t))}{s'(s^{-1}(t))} = \frac{\gamma'(s^{-1}(t))}{\|\gamma'(s^{-1}(t))\|}$$

und somit

$$\|\tilde{\gamma}'(t)\| = \left\| \frac{\gamma'(s^{-1}(t))}{\|\gamma'(s^{-1}(t))\|} \right\| = \frac{1}{\|\gamma'(s^{-1}(t))\|} \cdot \left\|\gamma'(s^{-1}(t))\right\| = 1.$$

**Aufgabe 5** (5 + 5 Punkte). Bestimmen Sie für die folgenden Kurven jeweils die Länge und die Parametrisierung nach der Bogenlänge:

(a) Seien $r, n, h > 0$. Die *Helix* (oder *Schraubenfeder*)

$$f : [0, n] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(2\pi t) \\ r\sin(2\pi t) \\ ht \end{pmatrix}$$

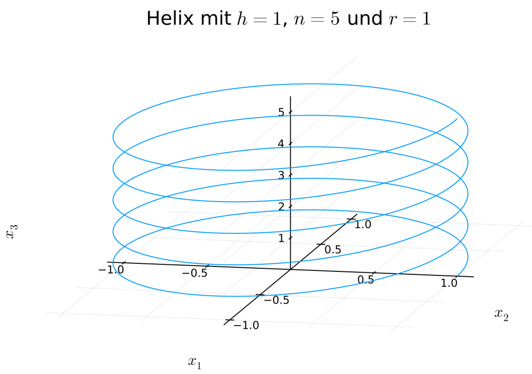
ist eine Kurve, deren Spur sich mit Radius $r$, Windungszahl $n$ und Ganghöhe $h$ (Abstand zwischen zwei Windungen) gegen den Uhrzeigersinn um die $x_3$-Achse wickelt.

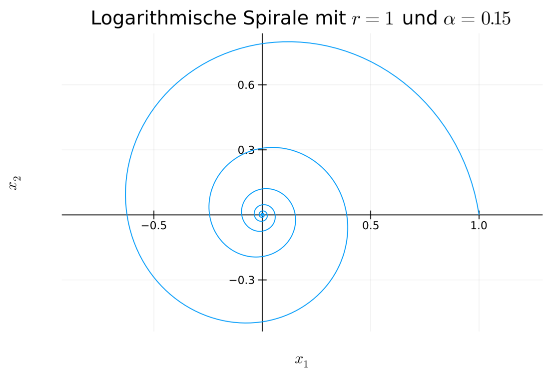
(b) Seien $\alpha, r > 0$. Die *logarithmische Spirale*

$$\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2, \; t \mapsto \exp(-\alpha t) \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}$$

beschreibt viele Phänomene in der Natur, etwa die Form von Schneckenhäusern, Wirbelstürmen oder Galaxie-Armen. Hierbei ist $r$ der Startradius und $\alpha$ steuert, wie schnell sich die Spirale zusammenzieht.

*Hinweis: Betrachten Sie statt $\infty$ einen geeigneten Grenzübergang.*




**Lösung.** (a) Wegen

$$f'(t) = \begin{pmatrix} -2\pi r\sin(2\pi t) \\ 2\pi r\cos(2\pi t) \\ h \end{pmatrix}$$

gilt

$$\begin{aligned} \|f'(t)\| &= \sqrt{(-2\pi r\sin(2\pi t))^2 + (2\pi r\cos(2\pi t))^2 + h^2} \\ &= \sqrt{4\pi^2 r^2(\sin^2(2\pi t) + \cos^2(2\pi t)) + h^2} = \sqrt{4\pi^2 r^2 + h^2} \end{aligned}$$

und damit

$$s(t) = \int_0^t \|f'(x)\| \, \mathrm{d}x = \sqrt{4\pi^2 r^2 + h^2} \int_0^t 1 \, \mathrm{d}x = t\sqrt{4\pi^2 r^2 + h^2},$$

also insbesondere

$$L(f) = s(n) = n\sqrt{4\pi^2 r^2 + h^2}.$$

Weiterhin ist $s^{-1}(t) = \frac{t}{\sqrt{4\pi^2r^2+h^2}}$ und die Parametrisierung nach der Bogenlänge ist gegeben durch

$$\tilde{f} : [0, n\sqrt{4\pi^2r^2+h^2}] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\left(\frac{2\pi t}{\sqrt{4\pi^2r^2+h^2}}\right) \\ r\sin\left(\frac{2\pi t}{\sqrt{4\pi^2r^2+h^2}}\right) \\ h\frac{t}{\sqrt{4\pi^2r^2+h^2}} \end{pmatrix}.$$

*Zusatz:* Die Größe $k := \frac{h}{2\pi r}$ ist die *Steigung* der Helix. Damit gilt

$$s(t) = t\sqrt{4\pi^2r^2+h^2} = t\sqrt{4\pi^2r^2+4\pi^2r^2k^2} = 2\pi rt\sqrt{1+k^2},$$

die Parametrisierung nach der Bogenlänge wird zu

$$\tilde{f} : [0, 2\pi rn\sqrt{1+k^2}] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\left(\frac{2\pi t}{2\pi r\sqrt{1+k^2}}\right) \\ r\sin\left(\frac{2\pi t}{2\pi r\sqrt{1+k^2}}\right) \\ h\frac{t}{2\pi r\sqrt{1+k^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\left(\frac{t}{r\sqrt{1+k^2}}\right) \\ r\sin\left(\frac{t}{r\sqrt{1+k^2}}\right) \\ h\frac{t}{2\pi r\sqrt{1+k^2}} \end{pmatrix}.$$

(b) Wegen

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \exp(-\alpha t)r\cos(t) \\ \exp(-\alpha t)r\sin(t) \end{pmatrix}' = \exp(-\alpha t)\begin{pmatrix} -\alpha r\cos(t) - r\sin(t) \\ -\alpha r\sin(t) + r\cos(t) \end{pmatrix}$$

gilt mit der abkürzenden Schreibweise $E := \exp(-\alpha t)$, $S := \sin(t)$ und $C := \cos(t)$

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \left\| \begin{pmatrix} -E(rS+\alpha rC) \\ E(rC-\alpha rS) \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{E^2(rS+\alpha rC)^2 + E^2(rC-\alpha rS)} \\ &= E\sqrt{r^2S^2 + 2\alpha r^2CS + \alpha^2r^2C^2 + r^2C^2 - 2\alpha r^2CS + \alpha^2r^2S^2} \\ &= E\sqrt{(1+\alpha^2)r^2(S^2+C^2)} = \exp(-\alpha t)\sqrt{(1+\alpha^2)r^2(\sin^2(t)+\cos^2(t))} \\ &= \exp(-\alpha t)r\sqrt{(1+\alpha^2)} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \|\gamma'(x)\|\,\mathrm{d}x = r\sqrt{(1+\alpha^2)}\int_0^t \exp(-\alpha x)\,\mathrm{d}x \\ &= r\sqrt{(1+\alpha^2)}\frac{1}{\alpha}\left(-\exp(-\alpha x)\right)\Big|_0^t = \frac{r}{\alpha}\sqrt{(1+\alpha^2)}(1-\exp(-\alpha t)) \end{aligned}$$

also insbesondere

$$L(\gamma) = \lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{r}{\alpha}\sqrt{(1+\alpha^2)}(1-\exp(-\alpha t)) = \frac{r}{\alpha}\sqrt{(1+\alpha^2)}.$$

Durch Termumformung erhält man

$$s^{-1}(t) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1 - \frac{\alpha t}{r\sqrt{1+\alpha^2}}\right)$$

und die Parametrisierung nach der Bogenlänge ist gegeben durch

$$\tilde{\gamma} : \left[0, \frac{r}{\alpha}\sqrt{1+\alpha^2}\right] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \left(1 - \frac{\alpha t}{r\sqrt{1+\alpha^2}}\right)\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{1}{\alpha}\ln\left(1-\frac{\alpha t}{r\sqrt{1+\alpha^2}}\right)\right) \\ \sin\left(-\frac{1}{\alpha}\ln\left(1-\frac{\alpha t}{r\sqrt{1+\alpha^2}}\right)\right) \end{pmatrix}.$$

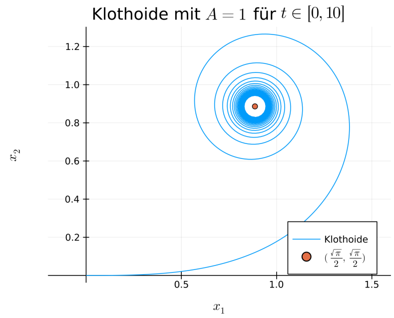
**Aufgabe 6** (4 + 4 Punkte). Eine *Klothoide* (oder *Euler-Spirale*) mit Konstante $A > 0$ ist eine Kurve

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto A\sqrt{\pi} \int_0^t \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi\xi^2}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi\xi^2}{2}\right) \end{pmatrix} \mathrm{d}\xi \, .$$

(a) Bestimmen Sie $\alpha'$, $\alpha''$ und $\|\alpha'(t)\|$. Ist $\alpha$ eine reguläre Kurve?

(b) Zeigen Sie, dass die Bogenlänge $s(t)$ proportional ist zur *orientierten Krümmung*

$$\kappa(t) := \frac{\alpha_1'(t)\alpha_2''(t) - \alpha_1''(t)\alpha_2'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$




Wegen dieser linearen Zunahme im Krümmungsverlauf finden Klothoiden Anwendung im Verkehrswesen als Übergangsstücke von Geraden zu Kreisbahnen, um Unstetigkeiten im Beschleunigungsverhalten zu vermeiden.

**Lösung.** (a) Nach dem Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung ist $\alpha$ differenzierbar mit

$$\alpha'(t) = A\sqrt{\pi} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \alpha''(t) = At\pi\sqrt{\pi} \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Weiterhin gilt

$$\|\alpha'(t)\| = A\sqrt{\pi}\sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)} = A\sqrt{\pi} \neq 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, also auch $\alpha'(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, sodass $\alpha$ eine reguläre Kurve ist.

(b) Für die Bogenlänge $s$ gilt

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(\xi)\| \, \mathrm{d}\xi = \int_0^t a\sqrt{\pi} \, \mathrm{d}\xi = At\sqrt{\pi}.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\alpha_1'(t)\alpha_2''(t) - \alpha_1''(t)\alpha_2'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{A^2\pi^2 t\cos^2\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) + A^2\pi^2 t\sin^2\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)}{A^3\sqrt{\pi}^3} \\ &= \frac{A^2\pi^2 t}{A^3\sqrt{\pi}^3} = \frac{t\sqrt{\pi}}{A} = \frac{1}{A^2}s(t). \end{aligned}$$