Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Johannes Hoffmann

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure III*
Wintersemester 2021/22
Blatt 3 – Musterlösung
Abgabe: Freitag, 05.11.2021, 22:00 Uhr über Moodle

Aufgabe 1 (5 + 5 Punkte). Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme zu Differentialgleichungen erster Ordnung mit den Methoden der Vorlesung:

(a) $y' = 4xy + 2x \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$

(b) $xy' + 2y = 4x^2 \quad \text{mit} \quad y(1) = 2 \quad \text{für} \quad x > 0$

Lösung.

(a) Setze $a(x) = 4x$ und $r(x) = 2x$. Eine Stammfunktion von $a(x)$ ist $2x^2$, also gilt laut Vorlesung

$$\begin{aligned}
y(x) &= y_0 \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t\right) + \int_{x_0}^{x} r(t) \exp\left(\int_{t}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}t \\
&= y_0 \exp\left(2t^2\Big|_0^x\right) + \int_0^x 2t \exp\left(2s^2\Big|_t^x\right) \mathrm{d}t \\
&= y_0 \exp(2x^2) + \int_0^x 2t \exp(2x^2 - 2t^2)\,\mathrm{d}t \\
&= y_0 \exp(2x^2) - \frac{1}{2}\exp(2x^2) \int_0^x -4t \exp(-2t^2)\,\mathrm{d}t \\
&= y_0 \exp(2x^2) - \frac{1}{2}\exp(2x^2)\, \exp(-2t^2)\Big|_0^x \\
&= y_0 \exp(2x^2) - \frac{1}{2}\exp(2x^2)(\exp(-2x^2) - 1) \\
&= y_0 \exp(2x^2) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\exp(2x^2) \\
&= \frac{1}{2}\left((2y_0 + 1)\exp(2x^2) - 1\right).
\end{aligned}$$

(b) Wegen $x > 0$ ist die gegebene Differentialgleichung äquivalent zu

$$y' = -\frac{2}{x} y + 4x \quad \text{mit} \quad y(1) = 2 \quad \text{für} \quad x > 0.$$

Setze $a(x) = -\frac{2}{x}$ und $r(x) = 4x$. Eine Stammfunktion von $a(x)$ ist $-2\ln(x)$, also gilt mit $x_0 = 1$ und $y_0 = 2$ laut Vorlesung

$$\begin{aligned}
y(x) &= y_0 \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t\right) + \int_{x_0}^{x} r(t)\exp\left(\int_{t}^{x} a(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t \\
&= 2\exp\left(-2\ln(t)\Big|_1^x\right) + \int_1^x 4t\exp\left(-2\ln(s)\Big|_t^x\right)\mathrm{d}t \\
&= 2\exp(-2\ln(x) + 2\ln(1)) + \int_1^x 4t\exp(-2\ln(x) + 2\ln(t))\,\mathrm{d}t \\
&= 2\exp\big(\ln\big(x^{-2}\big)\big) + \int_1^x 4t\exp\big(\ln\big(x^{-2}\big)\big)\exp\big(\ln\big(t^2\big)\big)\,\mathrm{d}t \\
&= 2x^{-2} + \int_1^x 4tx^{-2}t^2\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2}\int_1^x 4t^3\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2}\,t^4\Big|_1^x \\
&= \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2}(x^4 - 1) = \frac{2}{x^2} + x^2 - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} + x^2.
\end{aligned}$$

Satz (Separation der Variablen, mathematisch)**.** Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle mit $x_0 \in I$ und $y_0 \in J$. Weiterhin seien $f : I \to \mathbb{R}$ sowie $g : J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Für das Anfangswertproblem

$$y' = f(x)g(y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0$$

gilt dann:

(i) Ist $g(y_0) = 0$, so ist die konstante Funktion $y(x) = y_0$ eine Lösung des Anfangswertproblems auf ganz I.

(ii) Ist $g(y_0) \neq 0$, so existiert auf einem offenen Teilintervall $\tilde{I} \subseteq I$ mit $x_0 \in \tilde{I}$ eine eindeutige Lösung $y : \tilde{I} \to J$ des Anfangswertproblems, die folgende Gleichung erfüllt:

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{g(t)} \, \mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f(s) \, \mathrm{d}s \, .$$

Das größte Intervall, auf dem die Lösung y definiert ist, heißt *maximales Existenzintervall* von y (dieses muss notwendigerweise $\tilde{I}$ und damit x_0 enthalten).

Bemerkung (Separation der Variablen, praktisch)**.** Hat man eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = f(x)g(y) \quad \text{mit} \quad y(x_0) = y_0$$

gegeben, so kann man durch $g(y)$ teilen und mit $\mathrm{d}x$ "multiplizieren" und erhält erst

$$\frac{1}{g(y)} \, \mathrm{d}y = f(x) \, \mathrm{d}x \quad \text{und dann} \quad \int \frac{1}{g(y)} \, \mathrm{d}y = \int f(x) \, \mathrm{d}x + c$$

durch Integrieren auf beiden Seiten, wobei man die Integrationskonstanten in c sammelt. Nun löst man nach y auf (gegebenenfalls muss man noch die Anfangsbedingung einsetzen, um c zu finden) und überlegt sich abschließend, für welche x die Funktion y sowohl definiert ist als auch die Differentialgleichung löst.

Aufgabe 2 ($3 + 3 + 4$ Punkte)**.** Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme durch Separation der Variablen. Bestimmen Sie jeweils auch das maximale Existenzintervall.

(a) $y' = -\alpha y^2 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1 \quad \text{und} \quad \alpha > 0$

(b) $xy' = 2y \quad \text{mit} \quad y(1) = 42$

(c) $y' = (y^2 + 1)x^3 \quad \text{mit} \quad y(0) = 1$

Lösung. (a) Mit $g(y) = y^2$ und $f(x) = -\alpha$ erhält man

$$-\frac{1}{y} = \int \frac{1}{y^2} \, \mathrm{d}y = -\alpha \int 1 \, \mathrm{d}x + c = -\alpha x + c,$$

also $y(x) = \frac{1}{\alpha x - c}$. Einsetzen der Anfangswertbedingung liefert

$$1 = y(0) = \frac{1}{0 \cdot x - c} = -\frac{1}{c},$$

also $c = -1$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(x) = \frac{1}{\alpha x + 1}.$$

Die Funktion y hat einen Pol bei $x = -\frac{1}{\alpha}$, das maximale Existenzintervall der Lösung ist also $\left(-\frac{1}{\alpha}, \infty\right)$.

(b) Für $x \neq 0$ ist die Differentialgleichung äquivalent zu $y' = \frac{2}{x}y$. Mit $g(y) = y$ und $f(x) = \frac{2}{x}$ erhält man

$$\ln(|y|) = \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x + c = 2\ln(|x|) + c,$$

also $y(x) = \pm|x|^2 \cdot \exp(c) = \tilde{c}x^2$ für eine neue Konstante $\tilde{c} \in \mathbb{R}$. Einsetzen der Anfangswertbedingung liefert

$$42 = y(1) = \tilde{c} \cdot 1^2 = \tilde{c}.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also $y(x) = 42x^2$. Die Funktion y ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und es gilt

$$xy'(x) = x \cdot 2 \cdot 42x = 2 \cdot 42x^2 = 2y(x) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R},$$

also ist y auf ganz $\mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung; das maximale Existenzintervall ist somit $\mathbb{R}$.

(c) Mit $g(y) = y^2 + 1$ und $f(x) = x^3$ erhält man

$$\arctan(y) = \int \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \int x^3\,\mathrm{d}x + c = \frac{1}{4}x^4 + c,$$

also $y(x) = \tan\left(\frac{1}{4}x^4 + c\right)$. Einsetzen der Anfangsbedingung liefert

$$1 = y(0) = \tan\left(\frac{1}{4} \cdot 0^4 + c\right) = \tan(c),$$

also $c = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(x) = \tan\left(\frac{x^4 + \pi}{4}\right).$$

Die Funktion y hat überall da einen Pol, wo $\frac{x^4+\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Da aufgrund der Anfangswertbedingung 0 im maximalen Existenzintervall liegen muss und $\frac{0^4+\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ gilt, ist das maximale Existenzintervall der Lösung begrenzt durch $\left|\frac{x^4+\pi}{4}\right| < \frac{\pi}{2}$, also durch $x^4 < \pi$ und ist damit gegeben durch $I = (-\sqrt[4]{\pi}, \sqrt[4]{\pi})$.

Aufgabe 3 ((2 + 6 + 2 + (2 + 1 + 4 + 2 + 1)) Punkte). Die *logistische Gleichung*

$$y' = k \cdot y \cdot (L - y)$$

ist ein Modell zur Beschreibung der Größe y einer Population in Abhängigkeit von der Zeit t. Hierbei ist $k > 0$ eine Konstante und $L > 0$ eine obere Schranke für $y(t)$, etwa gegeben durch beschränkte Ressourcen. Sei weiterhin $t_0 \in \mathbb{R}$ der Startzeitpunkt und $y_0 \in [0, L]$ die Größe der Bevölkerung zum Zeitpunkt t_0.

(a) Bestimmen Sie die Lösung der logistischen Gleichung für die Randfälle $y_0 = 0$ und $y_0 = L$. Interpretieren Sie diese Lösungen im Rahmen des Populationsmodells.

(b) Nutzen Sie Separation der Variablen, um für $y_0 \in (0, L)$ zu zeigen, dass die allgemeine Lösung der logistischen Gleichung gegeben ist durch

$$y(t) = L \left(1 + \frac{L - y_0}{y_0} \exp(Lk(t_0 - t)) \right)^{-1}.$$

(c) Bestimmen Sie das maximale Existenzintervall I der allgemeinen Lösung und zeigen Sie, dass $y(t) \in (0, L)$ für alle $t \in I$ gilt.

(d) Diskutieren Sie die allgemeine Lösung y anhand der folgenden Schritte:

(i) Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von y.

(ii) Bestimmen Sie alle Extremstellen von y und ihren Typ.

(iii) Bestimmen Sie das Krümmungsverhalten und alle Wendestellen von y.

(iv) Bestimmen Sie das Grenzverhalten von y gegen $\pm\infty$.

(v) Skizzieren Sie y für $k = L = 1$, $t_0 = 0$ und $y_0 = \frac{1}{2}$.

Hinweis: Sie müssen die allgemeine Lösung nicht ableiten - betrachten Sie direkt die Differentialgleichung!

Lösung. Betrachte $g(y) = y(L - y) = -y^2 + Ly$ und $f(t) = k$.

(a) Für $y_0 = 0$ ist $y = 0$ eine Lösung der logistischen Gleichung; im Rahmen des Modells entspricht das der Überlegung, dass eine Population von 0 Individuen sich nie vermehren kann. Für $y_0 = L$ erhält man die Lösung $y = L$; im Modell bedeutet dies, dass eine Bevölkerung, die schon maximale Größe erreicht hat, diese beibehält.

(b) Einerseits gilt $\int f(t)\,\mathrm{d}t + c = k \int 1\,\mathrm{d}t + c = kt + c$. Mit Partialbruchzerlegung erhält man

$$\frac{1}{y(L - y)} = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{L - y} \right)$$

und damit andererseits

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y &= \int \frac{1}{y(L - y)}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{L} \left(\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y + \int \frac{1}{L - y}\,\mathrm{d}y \right) \\ &= \frac{1}{L} \left(\ln(|y|) - \ln(|L - y|) \right) = \frac{1}{L} \ln\left(\left| \frac{y}{L - y} \right| \right),\end{aligned}$$

also

$$kt + c = \int f(t)\,\mathrm{d}t + c = \int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{L} \ln\left(\left| \frac{y}{L - y} \right| \right).$$

Multiplizieren mit L und anschließendes Anwenden der Exponentialfunktion liefert

$$\left|\frac{y}{L-y}\right| = c\exp(Lkt) \quad \text{und somit} \quad \frac{y}{L-y} = c\exp(Lkt)$$

für jeweils neue Konstanten c. Einsetzen der Anfangswertbedingung ergibt

$$c = \frac{y(t_0)}{L-y(t_0)}\exp(-Lkt_0) = \frac{y_0}{L-y_0}\exp(-Lkt_0)$$

und damit

$$\frac{y}{L-y} = \frac{y_0}{L-y_0}\exp(Lk(t-t_0)).$$

Setze $h(t) := \exp(Lk(t-t_0))$, dann folgt

$$y = \frac{y_0 h(t)}{L-y_0}(L-y) = \frac{Ly_0 h(t)}{L-y_0} - y\frac{y_0 h(t)}{L-y_0}$$

und daraus

$$y\left(1+\frac{y_0 h(t)}{L-y_0}\right) = \frac{Ly_0 h(t)}{L-y_0},$$

also

$$\begin{aligned} y &= \frac{Ly_0 h(t)}{(L-y_0)\left(1+\frac{y_0 h(t)}{L-y_0}\right)} = L\frac{y_0 h(t)}{L-y_0+y_0 h(t)} = L\frac{1}{\frac{L-y_0}{y_0 h(t)}+1} \\ &= L\left(1+\frac{L-y_0}{y_0 h(t)}\right)^{-1} = L\left(1+\frac{L-y_0}{y_0}\exp(Lk(t_0-t))\right)^{-1}. \end{aligned}$$

(c) Aus $y_0 \in (0,L)$ folgt

$$\varphi(t) := \underbrace{\frac{L-y_0}{y_0}}_{>0}\underbrace{\exp(Lk(t_0-t))}_{>0} > 0,$$

also $1+\varphi(t) > 1$ (und damit auch $(1+\varphi(t))^{-1} \in (0,1)$) für alle $t \in \mathbb{R}$. Damit ist die allgemeine Lösung für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert, das maximale Existenzintervall der Lösung y ist also $\mathbb{R}$.

Aus $L > 0$ folgt direkt $y(t) = L(1+\varphi(t))^{-1} > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, andererseits gilt

$$y(t) = L\underbrace{(1+\varphi(t))^{-1}}_{<1} < L\cdot 1 = L.$$

(d) (i) Als Komposition beliebig oft differenzierbarer Funktionen ist y auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Aus der Differentialgleichung und $y(t) \in (0,L)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ folgt

$$y'(t) = \underbrace{k}_{>0}\cdot\underbrace{y(t)}_{>0}\cdot\underbrace{(L-y)}_{>0} > 0,$$

also ist y auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

(ii) Da y auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, können Extremstellen von y nur an Nullstellen von y' auftreten. Wegen $y'(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ hat y also keine Extremstellen.

Alternativ: Als streng monoton wachsende Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ kann y keine Extrema haben.

(iii) Erneutes Ableiten der Differentialgleichung liefert mit Produktregel

$$\begin{aligned} y''(t) &= (ky(t)(L - y(t)))' = k\,(y'(t)(L - y(t)) + y(t) \cdot (-y'(t))) \\ &= ky'(t)(L - 2(y(t))) \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wegen $ky'(t) > 0$ ist $y''(t)$ also konvex, solange $y(t) < \frac{L}{2}$, und konkav, sobald $y(t) > \frac{L}{2}$. Insbesondere hat y eine Wendestelle t_W mit $y(t_W) = \frac{L}{2}$. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} & \frac{L}{2} = y(t_W) = L\left(1 + \frac{L - y_0}{y_0}\exp(Lk(t_0 - t_W))\right)^{-1} \\ \Rightarrow \quad & 2 = 1 + \frac{L - y_0}{y_0}\exp(Lk(t_0 - t_W)) \\ \Rightarrow \quad & \frac{y_0}{L - y_0} = \exp(Lk(t_0 - t_W)) \\ \Rightarrow \quad & Lk(t_0 - t_W) = \ln\left(\frac{y_0}{L - y_0}\right) \\ \Rightarrow \quad & t_W = t_0 - \frac{1}{Lk}\ln\left(\frac{y_0}{L - y_0}\right). \end{aligned}$$

(iv) Die Funktion

$$\varphi(t) := \frac{L - y_0}{y_0}\exp(Lk(t_0 - t))$$

ist stetig und erfüllt

$$\lim_{t \to -\infty} \varphi(t) = \infty \quad \text{sowie} \quad \lim_{t \to \infty} \varphi(t) = 0.$$

Somit folgt

$$\lim_{t \to -\infty} y(t) = \lim_{t \to -\infty} \frac{L}{1 + \varphi(t)} = 0 \quad \text{sowie} \quad \lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{L}{1 + \varphi(t)} = L.$$

(v)