Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Johannes Hoffmann

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure III*
Wintersemester 2021/22
Blatt 4 – Musterlösung
Abgabe: Freitag, 12.11.2021, 22:00 Uhr über Moodle

Aufgabe 1 (3+3+4 Punkte)**.** Bestimmen Sie jeweils ein Fundamentalsystem der reellen Lösungen der folgenden homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit den Methoden der Vorlesung:

(a) $y'' = 5y' - 6y$ (b) $-\frac{1}{3}y'' = 2y' + 3y$ (c) $y'' = 8y' - 41y$

In dieser Situation besteht ein Fundamentalsystem aus zwei linear unabhängigen Lösungen der Gleichung. Zeigen Sie jeweils explizit mit der Wronski-Determinante, dass Ihre gefundenen Lösungen tatsächlich linear unabhängig sind.

Lösung. Wir schreiben die gegebenen Gleichungen in der Form $y'' + a_1 y + a_0 = 0$ und betrachten das charakteristische Polynom $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$:

(a) Die gegebene Differentialgleichung ist äquivalent zu $y'' - 5y' + 6y = 0$, das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

und hat daher die zwei reellen Nullstellen 2 und 3. Laut Vorlesung ist ein Fundamentalsystem gegeben durch

$$y_1(x) = \exp(2x) \quad \text{und} \quad y_2(x) = \exp(3x).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} W(x) &= \det \begin{pmatrix} \exp(2x) & \exp(3x) \\ 2\exp(2x) & 3\exp(3x) \end{pmatrix} = \exp(2x)\exp(3x)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \exp(5x)(1\cdot 3 - 2\cdot 1) = \exp(5x) \neq 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

also sind $\exp(2x)$ und $\exp(3x)$ linear unabhängig.

(b) Die gegebene Differentialgleichung ist äquivalent zu $y'' + 6y' + 9y = 0$, das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (x + 3)^2$$

und hat daher die doppelte reelle Nullstelle -3. Laut Vorlesung ist ein Fundamentalsystem gegeben durch

$$y_1(x) = \exp(-3x) \quad \text{und} \quad y_2(x) = x\exp(-3x).$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
W(x) &= \det\begin{pmatrix} \exp(-3x) & x\exp(-3x) \\ -3\exp(-3x) & (1-3x)\exp(-3x) \end{pmatrix} \\
&= \exp(-3x)^2 \det\begin{pmatrix} 1 & x \\ -3 & 1-3x \end{pmatrix} \\
&= \exp(-6x)(1-3x+3x) = \exp(-6x) \neq 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

also sind $\exp(-3x)$ und $x\exp(-3x)$ linear unabhängig.

(c) Die gegebene Differentialgleichung ist äquivalent zu $y'' - 8y' + 41y = 0$, das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 - 8\lambda + 41 = (\lambda - (4+5\mathrm{i}))(\lambda - (4-5\mathrm{i}))$$

und hat daher die zwei komplexen Nullstellen $4+5\mathrm{i}$ und $4-5\mathrm{i}$. Laut Vorlesung ist ein Fundamentalsystem gegeben durch

$$y_1(x) = \exp(4x)\sin(5x) \quad \text{und} \quad y_2(x) = \exp(4x)\cos(5x).$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
W(x) &= \det\begin{pmatrix} \sin(5x)\exp(4x) & \cos(5x)\exp(4x) \\ (4\sin(5x)+5\cos(5x))\exp(4x) & (4\cos(5x)-5\sin(5x))\exp(4x) \end{pmatrix} \\
&= \exp(4x)^2 \det\begin{pmatrix} \sin(5x) & \cos(5x) \\ 4\sin(5x)+5\cos(5x) & 4\cos(5x)-5\sin(5x) \end{pmatrix} \\
&= \exp(8x)\big(4\sin(5x)\cos(5x) - 5\sin^2(5x) \\
&\qquad -4\sin(5x)\cos(5x) - 5\cos^2(5x)\big) \\
&= -5\exp(8x)(\sin^2(5x)+\cos^2(5x)) = -5\exp(8x) \neq 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

also sind $\exp(4x)\sin(5x)$ und $\exp(4x)\cos(5x)$ linear unabhängig.

Aufgabe 2 (2 + 2 + 3 + 3 Punkte). Betrachten Sie auf $\mathbb{R}$ die folgende homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y''' - y'' - y' + y = 0.$$

(a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen.

(b) Zeigen Sie explizit mithilfe der Wronski-Determinante, dass die gefundenen Lösungen linear unabhängig sind.

(c) Berechnen Sie die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems mit

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1.$$

(d) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y''' - y'' - y' + y = x^3.$$

Machen Sie dazu einen polynomiellen Ansatz

$$y_{\mathrm{s}}(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{mit} \quad a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}.$$

Lösung. (a) Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2$$

und hat daher die doppelte reelle Nullstelle 1 und die einfache reelle Nullstelle -1. Laut Vorlesung ist ein Fundamentalsystem gegeben durch

$$y_1(x) = \exp(x), \quad y_2(x) = x\exp(x), \quad y_3(x) = \exp(-x).$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \exp(x), & y_2(x) &= x\exp(x), & y_3(x) &= \exp(-x), \\ y_1'(x) &= \exp(x), & y_2'(x) &= (1+x)\exp(x), & y_3'(x) &= -\exp(-x), \\ y_1''(x) &= \exp(x), & y_2''(x) &= (2+x)\exp(x), & y_3''(x) &= \exp(-x), \end{aligned}$$

sodass die Wronski-Determinante gegeben ist durch

$$\begin{aligned} W(x) &= \det\begin{pmatrix} \exp(x) & x\exp(x) & \exp(-x) \\ \exp(x) & (1+x)\exp(x) & -\exp(-x) \\ \exp(x) & (2+x)\exp(x) & \exp(-x) \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & 1+x & -1 \\ 1 & 2+x & 1 \end{pmatrix} \exp(x)\exp(x)\exp(-x) \\ &= ((1+x) - x + (2+x) - (1+x) + (2+x) - x) \cdot \exp(x) \\ &= 4\exp(x). \end{aligned}$$

Damit gilt $W(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und folglich sind y_1, y_2, y_3 linear unabhängig.

(c) Die allgemeine Lösung ist

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1 \exp(x) + c_2 x \exp(x) + c_3 \exp(-x) \quad \text{mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Mit den gegebenen Anfangsdaten

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
1 = y(0) \quad &= c_1 \exp(0) + c_2 \cdot 0 \cdot \exp(0) + c_3 \exp(-0) &&= c_1 + c_3, \\
0 = y'(0) \quad &= c_1 \exp(0) + c_2 (1+0) \exp(0) - c_3 \exp(-0) &&= c_1 + c_2 - c_3, \\
1 = y''(0) \quad &= c_1 \exp(0) + c_2 (2+0) \exp(0) + c_3 \exp(-0) &&= c_1 + 2c_2 + c_3,
\end{aligned}$$

also müssen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

lösen. Zeilenumformungen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2\cdot\text{II}-\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{III}\cdot\frac{1}{2}]{\text{II}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{I}-\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Somit ergibt sich $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = 0$, $c_3 = \frac{1}{2}$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit

$$y_{\text{hom}}(x) = \frac{1}{2} \exp(x) + \frac{1}{2} \exp(-x) = \cosh(x).$$

(d) Differenzieren des Ansatzes ergibt

$$\begin{aligned}
y_{\text{s}}(x) &= a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \\
y_{\text{s}}'(x) &= 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1, \\
y_{\text{s}}''(x) &= 6a_3 x + 2a_2, \\
y_{\text{s}}'''(x) &= 6a_3.
\end{aligned}$$

Die Funktion y_{s} ist also genau dann eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, wenn

$$\begin{aligned}
x^3 &= y_{\text{s}}'''(x) - y_{\text{s}}''(x) - y_{\text{s}}'(x) + y_{\text{s}}(x) \\
&= 6a_3 - 6a_3 x - 2a_2 - 3a_3 x^2 - 2a_2 x - a_1 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\
&= a_3 \cdot x^3 + (-3a_3 + a_2) \cdot x^2 + (-6a_3 - 2a_2 + a_1) \cdot x + (6a_3 - 2a_2 - a_1 + a_0) \cdot 1.
\end{aligned}$$

Mittels Koeffizientenvergleich erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeilenumformungen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}+3\cdot\text{IV}]{\substack{\text{I}-6\cdot\text{IV} \\ \text{II}+6\cdot\text{IV}}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{II}+2\cdot\text{III}]{\text{I}+2\cdot\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{I}+\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Also ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung gegeben durch

$$y_{\mathrm{s}}(x) = x^3 + 3x^2 + 12x + 12.$$

Bemerkung. Eine Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$y'' = f(x, y')$$

(in der also y nicht explizit auftaucht), ist insbesondere auch eine Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion $u := y'$. Hat man $u' = f(x, u)$ gelöst, so erhält man y als Stammfunktion von u.
Dieses Vorgehen ist ein Beispiel für eine ganze Reihe von Techniken, die man unter dem Begriff *Reduktion der Ordnung* zusammenfasst.

Aufgabe 3 ((3 + 3) + 4 Punkte)**.**

(a) Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen auf $(0, \infty)$ durch Reduktion auf erste Ordnung:

(i) $y'' = \frac{y'}{x}$

(ii) $y'' = -\alpha(y')^2 \quad \text{mit} \quad \alpha > 0$

(b) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $c : I \to \mathbb{R}$ integrierbar. Geben Sie eine allgemeine Formel zur Lösung der Differentialgleichung $y''(x) = c(x)y'(x)$ auf I an. Weisen Sie durch Einsetzen in die Differentialgleichung nach, dass Ihre Formel funktioniert.

Lösung. (a) (i) Wir setzen $u := y'$ und betrachten zunächst $u' = \frac{1}{x}u$. Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung, die Lösung ist laut Vorlesung gegeben durch

$$u(x) = \exp\bigg(\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\bigg) = \exp(\ln(x) + c) = \tilde{c}x$$

mit Konstanten $c, \tilde{c} \in \mathbb{R}$. Nun erhalten wir y als Stammfunktion von u:

$$y(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int \tilde{c}x\,\mathrm{d}x = c_1x^2 + c_2$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(ii) Wir setzen $u := y'$ und betrachten zunächst $u' = -\alpha u^2$. Laut A1(a) von Blatt 2 und A2(a) von Blatt 3 gilt $u(x) = \frac{1}{\alpha x + c_1}$ mit einer Konstanten $c_1 \in \mathbb{R}$. Nun erhalten wir y als Stammfunktion von u:

$$y(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\alpha x + c_1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\ln(|\alpha x + c_1|) + c_2$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Wir setzen $u := y'$ und betrachten zunächst $u'(x) = c(x)u(x)$. Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung, die Lösung ist laut Vorlesung gegeben durch

$$u(x) = \exp\bigg(\int c(x)\,\mathrm{d}x\bigg).$$

Nun erhalten wir y als Stammfunktion von u:

$$y(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int \exp\bigg(\int c(x)\,\mathrm{d}x\bigg)\,\mathrm{d}x\,.$$

Zur Probe berechnen wir die Ableitungen der Formel: Nach Definition der Stammfunktion gilt

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int \exp\left(\int c(x)\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}x = \exp\left(\int c(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

und zusätzlich mit Kettenregel erhält man

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \exp\left(\int c(x)\,\mathrm{d}x\right) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int c(x)\,\mathrm{d}x\right) \exp\left(\int c(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= c(x) \exp\left(\int c(x)\,\mathrm{d}x\right) = c(x) y'(x). \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (4+2+4 Punkte)**.** Eine *Kettenlinie* ist eine Kurve, die die Form einer Kette beschreibt, die an beiden Enden aufgehängt ist und von der Schwerkraft beeinflusst wird. Sie wird beschrieben durch die nicht-lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$ay'' = \sqrt{1 + (y')^2} \quad \text{mit} \quad a > 0.$$

Lösen Sie die Differentialgleichung der Kettenlinie anhand der folgenden Schritte:

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{arsinh}(x) = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\bigr)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei arsinh ("Areasinus hyperbolicus") die Umkehrfunktion von sinh ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung der Kettenlinie mittels Reduktion auf erste Ordnung und Separation der Variablen.

Lösung. (a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Einerseits gilt mit den Identitäten $\cos^2(x) = \sinh^2(x) + 1$ und $\sinh(x) + \cosh(x) = \exp(x)$ schon

$$\begin{aligned}
\operatorname{arsinh}(\sinh(x)) &= \ln\left(\sinh(x) + \sqrt{\sinh^2(x) + 1}\right) \\
&= \ln\left(\sinh(x) + \sqrt{\cosh^2(x)}\right) \\
&= \ln(\sinh(x) + \cosh(x)) = \ln(\exp(x)) = x,
\end{aligned}$$

andererseits gilt mit $\sinh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x))$ auch

$$\begin{aligned}
\sinh(\operatorname{arsinh}(x)) &= \sinh\Bigl(\ln\Bigl(x + \sqrt{x^2+1}\Bigr)\Bigr) \\
&= \frac{1}{2}\Bigl(\exp\Bigl(\ln\Bigl(x + \sqrt{x^2+1}\Bigr)\Bigr) - \exp\Bigl(-\ln\Bigl(x + \sqrt{x^2+1}\Bigr)\Bigr)\Bigr) \\
&= \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= \frac{(x + \sqrt{x^2+1})^2 - 1}{2(x + \sqrt{x^2+1})} \\
&= \frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1 - 1}{2(x + \sqrt{x^2+1})} \\
&= \frac{2x(x + \sqrt{x^2+1})}{2(x + \sqrt{x^2+1})} \\
&= x,
\end{aligned}$$

also ist $\operatorname{arsinh}(x) = \ln\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\bigr)$ tatsächlich die Umkehrfunktion von $\sinh(x)$.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Zweifache Anwendung der Kettenregel liefert

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arsinh}'(x) = \left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)' &= \frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.
\end{aligned}
$$

(c) Wir setzen $u := y'$ und betrachten zunächst $u' = \frac{1}{a}\sqrt{1+u^2}$. Mit Separation der Variablen für $f(x) = \frac{1}{a}$ und $g(u) = \sqrt{1+u^2}$ erhält man

$$
\operatorname{arsinh}(u) = \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{a}\,\mathrm{d}x + c = \frac{x}{a} + c = \frac{x+c_1}{a}
$$

für Konstanten $c, c_1 \in \mathbb{R}$, also

$$
u(x) = \sinh\left(\frac{x+c_1}{a}\right).
$$

Nun erhalten wir y als Stammfunktion von u:

$$
y(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int \sinh\left(\frac{x+c_1}{a}\right)\mathrm{d}x = a\cosh\left(\frac{x+c_1}{a}\right) + c_2
$$

für Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.