

EINFÜHRUNG IN  
DIE MATHEMATIK FÜR

INGENIEURE UND NATURWISSENSCHAFTLER

Michael Bildhauer



**Teil III**

Gewöhnliche lineare DGL.

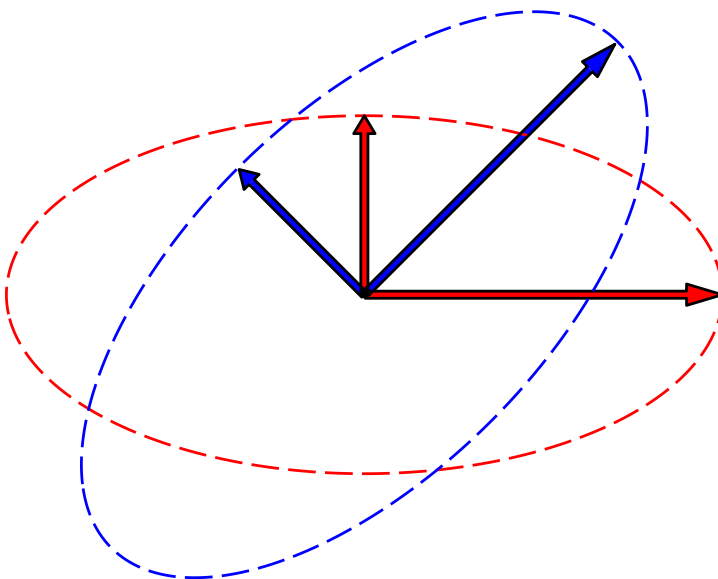
Spektraltheorie von Matrizen

Differential-

UND

Integralrechnung II

Der Gaußsche Integralsatz



Universität des Saarlandes  
F.R. 6.1 Mathematik  
Postfach 151150  
D-66041 Saarbrücken

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen</b>	<b>7</b>
1.1	Einführung (explizite, implizite, gewöhnliche, lineare, homogene, inhomogene, partielle Differentialgleichung; Ordnung einer Differentialgleichung; System von Differentialgleichungen; Anfangswertproblem; Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen) . . . . .	7
1.2	Homogene lineare Differentialgleichungen (lineare Unabhängigkeit; Fundamentalsystem; allgemeine Lösung; Wronski-Determinante) . . .	17
1.3	Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (charakteristische Gleichung bzw. charakteristisches Polynom; Reduktion der Ordnung) . . . . .	25
1.4	Inhomogene lineare Differentialgleichungen (spezielle, allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung; Variation der Konstanten; Ansatz rechte Seite; Resonanz) . . . . .	32
1.5	Übungsaufgaben zu Kapitel 1 . . . . .	45
<b>2</b>	<b>Systeme linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung</b>	<b>55</b>
2.1	Gleichung erster Ordnung und System $n$ -ter Ordnung . . .	55
2.2	Homogene Systeme linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung (Fundamentalsystem; allgemeine Lösung; Wronski-Determinante) . . . . .	59
2.3	Inomogene Systeme linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung (Variation der Konstanten; Fundamentalmatrix) . . . . .	64
2.4	Übungsaufgaben zu Kapitel 2.4 . . . . .	73
	<b>Lineare Abbildungen</b>	<b>75</b>
E.1	Definition und erste Eigenschaften (Kern und Bild einer linearen Abbildung; Rang; Rangsatz; Injektivität, Surjektivität und Bijektivität einer linearen Abbildung) . . . . .	76

E.2	Matrixdarstellung (Koordinaten; darstellende Matrix) . . . . .	81
E.3	Basiswechsel und Koordinatentransformation (Transformation der darstellenden Matrix; Tensor; kovariant; kontravariant) . . . . .	88
E.4	Übungsaufgaben zu Kapitel . . . . .	99
<b>3</b>	<b>Spektraltheorie quadratischer Matrizen</b>	<b>109</b>
3.1	Hauptachsentransformation für symmetrische Matrizen (Eigenwert; Eigenvektor; charakteristisches Polynom; Diagonalisierbarkeit symmetrischer Matrizen) . . . . .	109
3.2	Ähnliche und diagonalisierbare Matrizen (komplexe Rechnung; lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren; algebraische und geometrische Vielfachheit von Eigenwerten) . . . . .	118
3.3	Die Jordansche Normalform (Hauptvektoren; Kettenbedingung; Jordan-Kästchen) . . . . .	128
3.4	Anwendung: Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (3 Fälle) . . . . .	134
3.5	Übungsaufgaben zu Kapitel 3 . . . . .	143
<b>4</b>	<b>Stetige Funktionen mehrerer Veränderlicher</b>	<b>153</b>
4.1	Definition und Eigenschaften (Grenzwert und Stetigkeit; geometrische Vorstellung) . . . . .	153
4.2	Übungsaufgaben zu Kapitel 4 . . . . .	165
<b>5</b>	<b>Kurven im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>169</b>
5.1	Klassische Beispiele (Helix; Helikoid; Minimalfläche; Regelfläche; Kettenlinie; Katenoid; Rotationsfläche; Zykloide; Brachystochonenproblem; Traktrix; Pseudosphäre; Klothoide) . . . . .	169
5.2	Parametrisierte Kurven im $\mathbb{R}^n$ (Spur; reguläre Kurve; Doppelpunkte; Rektifizierbarkeit; Bogenlänge; Parametertransformation) . . . . .	173
5.3	Übungsaufgaben zu Kapitel 5 . . . . .	183
<b>6</b>	<b>Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen</b>	<b>187</b>
6.1	Ableitungen (partielle Ableitung; (stetig) partiell differenzierbar; die Klasse $C^1(U)$ ; totale Differenzierbarkeit; Nabla-Operator; Gradient; Richtungsableitung; Tangentialebene; Differential; Jacobi-Matrix; Funktionalmatrix; Polarkoordinaten; krummlinige Koordinaten; Differentialoperatoren (in krummlinigen Koordinaten); Vektorfeld; Divergenz; Rotation; Laplace-Operator; höhere Ableitungen; Vertauschbarkeit von Ableitungen) . . . .	187

6.2	Der Satz von Taylor für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Multiindex) . . . . .	218
6.3	Extremwertaufgaben in mehreren Veränderlichen (notwendige Bedingung; Definitheit; Hessesche Matrix; hinreichende Bedingung) . . . .	222
6.4	Der Satz über Implizite Funktionen (Höhenlinien, lokale Auflösbarkeit) . . . . .	232
6.5	Der Umkehrsatz (Existenz einer lokalen Umkehrabbildung; Koordinatentransformationen) . . . . .	240
6.6	Extrema mit Nebenbedingungen (Lagrangescher Multiplikator; globale Extrema) . . . . .	243
6.7	Übungsaufgaben zu Kapitel 6.7 . . . . .	253
<b>7</b>	<b>Kurvenintegrale</b>	<b>263</b>
7.1	Definition und Eigenschaften (Wegunabhängigkeit; Potential; konservatives Vektorfeld) . . . . .	263
7.2	Übungsaufgaben zu Kapitel 7 . . . . .	275
<b>8</b>	<b>Integrale im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>279</b>
8.1	Das Riemannsche Integral (Riemannsches Integral über Zellen; iteriertes Integral; Normalbereich; Projizierbarkeit; Satz von Fubini) . . . .	279
8.2	Der Transformationssatz (Polarkoordinaten; Kugelkoordinaten; Zylinderkoordinaten) . . . . .	300
8.3	Uneigentliche Integrale (reguläre Ausschöpfung; kompakt enthalten; Figur; Konvergenzkriterium) . . . . .	306
8.4	Übungsaufgaben zu Kapitel 8 . . . . .	313
<b>9</b>	<b>Der Gaußsche Integralsatz</b>	<b>319</b>
9.1	Der Gaußsche Integralsatz in der Ebene (positiv orientierter Rand; äußere Einheitsnormale; Fluss eines Vektorfeldes) . . . . .	319
9.2	Flächen im $\mathbb{R}^3$ (Gebiet; zusammenhängend; Parameterdarstellung einer Fläche; Kurven auf Flächen; Tangentialebene; Normaleneinheitsvektor; Oberflächeninhalt; Oberflächenintegral) . . . . .	326
9.3	Der Gaußsche Integralsatz im $\mathbb{R}^3$ (äußere Einheitsnormale; Massenfluss; Kontinuitätsgleichung; partielle Integration) . . . . .	337
9.4	Übungsaufgaben zu Kapitel 9 . . . . .	343
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>345</b>



# Kapitel 1

## Gewöhnliche lineare Differentialgleichungen

**1.1 Einführung** (explizite, implizite, gewöhnliche, lineare, homogene, inhomogene, partielle Differentialgleichung; Ordnung einer Differentialgleichung; System von Differentialgleichungen; Anfangswertproblem; Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen)

### Was ist eine Differentialgleichung?

Nahezu alle Modelle aus Naturwissenschaft und Technik führen auf das Studium so genannter **Differentialgleichungen**, die beispielsweise eine physikalische Größe und deren Änderungsrate in einen funktionalen Zusammenhang stellen.

Etwas präziser bezeichnet eine **gewöhnliche Differentialgleichung** eine Gleichung, in welcher **eine unabhängige reelle Variable, eine gesuchte Funktion sowie deren Ableitungen auftreten.**

Die unabhängige Variable wird hier in der Regel mit  $x$  oder mit  $t$  als Symbol für die Zeit bezeichnet.

Man betrachte beispielhaft die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' + 2xy = 0 . \tag{1}$$

In diesem Fall ist

- ▷  $x \in \mathbb{R}$  die unabhängige Variable ,
- ▷  $y = y(x)$  die gesuchte Funktion ,
- ▷  $y'$  deren (erste) Ableitung .

Eine auf einem (verallgemeinerten) Intervall  $I$  differenzierbare Funktion  $y(x)$  heißt Lösung von (1) auf dem Intervall  $I$ , falls (1) für alle  $x \in I$  gilt.

Im dem Beispiel wird leicht verifiziert, dass die Funktion  $y(x) = e^{-x^2}$  die Gleichung auf  $(-\infty, \infty)$  löst: Es ist

$$\frac{d}{dx}e^{-x^2} + 2xe^{-x^2} \equiv 0 .$$

---

### Einige Beispiele aus den Anwendungen.

- i) Man betrachte eine punktförmige Masse  $m$  an einer Feder (vgl. Abbildung 1.1).

Dann besagt das [Hookesche Gesetz](#), dass die Rückstellkraft der Feder proportional zu deren Auslenkung ist, die Proportionalitätskonstante heißt die Federkonstante  $c$ :

$$my''(t) = -cy(t) .$$

Hier symbolisiert  $t$  die unabhängige Variable (die Zeit),  $y(t)$  ist die Auslenkung der Masse zum Zeitpunkt  $t$  (die gesuchte Lösung).



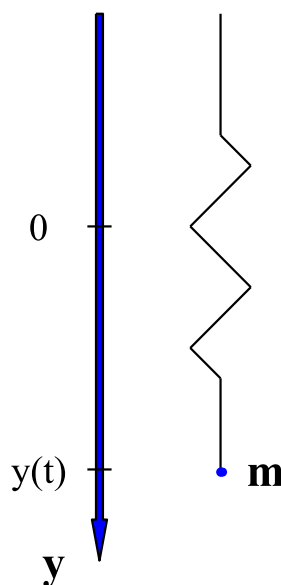


Abbildung 1.1: Zum Hookeschen Gesetz.

Wird zusätzlich eine Reibung im System modelliert, so erhält man als **Bewegungsgleichung** ( $k \geq 0$ )

$$my''(t) + ky'(t) + cy(t) = 0 .$$

Ergänzt werden Bewegungsgleichungen durch Anfangsbedingungen:

Es sei  $t_0$  der Anfangszeitpunkt für die Betrachtung des Systems. Im Beispiel hängt die Bewegung von

▷ der Auslenkung  $y_0 = y(t_0)$  der Masse zum Zeitpunkt  $t_0$

ab und ebenso

▷ von der Geschwindigkeit  $v_0 = y'(t_0)$ , mit der die Masse zum Zeitpunkt  $t_0$  durch  $y_0$  schwingt.

Eine vollständige Beschreibung der Bewegung erfordert demnach neben der Differentialgleichung die Angabe der Anfangsdaten  $y(t_0)$  und  $y'(t_0)$ , man spricht von einem [Anfangswertproblem](#).

- ii) Man betrachte einen Wechselstromkreis mit Spule (Induktivität  $L$ ) und Ohmschen Widerstand  $R$  in Reihenschaltung (siehe Abbildung 1.2).

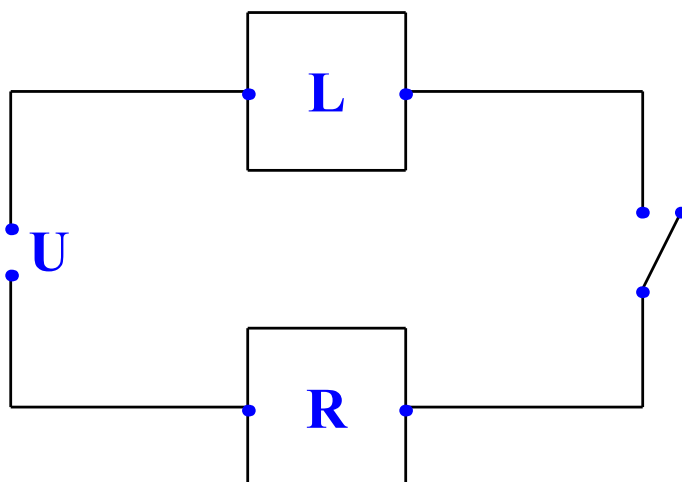


Abbildung 1.2: Wechselstromkreis mit Spule und Ohmschen Widerstand.

Eine feste Spannung  $U$  sei vorgegeben und zunächst sei der Schalter geöffnet. Schließt man den Schalter zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$ , so gilt für die Stromstärke  $I$  in Abhängigkeit von der Zeit  $t$

$$U = RI(t) + LI'(t)$$

mit der Anfangsbedingung  $I(0) = 0$ .

Differenziert man die Gleichung (beide Seiten ableiten) und wird eine zusätzliche Kapazität  $C > 0$  behandelt, so führt das auf eine Gleichung in der Stromstärke, deren erster und zweiter Ableitung:

$$U'(t) = LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) .$$

Diese Gleichung modelliert den [Schwingkreis](#) und dient als prominentes Beispiel zur die Diskussion so genannter gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

- iii) Beim radioaktiven Zerfall ist die Änderung der Masse  $m(t)$  einer radioaktiven Substanz proportional zu dieser Masse.

Mit einer Zerfallskonstanten  $k > 0$  gilt (bei gegebener Anfangsmasse)

$$m'(t) = -km(t) .$$

- iv) Es gibt unzählige weitere Beispiele (Abkühlung eines Körpers, Durchbiegung eines Balkens ...), bei denen man jeweils auf eine Differentialgleichung (ggf. ein so genanntes System) geführt wird, die das Problem zusammen mit geeigneten Anfangs- oder Randbedingungen beschreibt.

---

### Definition und Bezeichnungen.

Um den funktionalen Zusammenhang in Gleichung (1) des einführenden Beispiels zu verdeutlichen, sei  $U \subset \mathbb{R}^3$ ,  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F(\underline{z}) = z_3 + 2z_1z_2 \quad \text{für alle } \underline{z} \in U .$$

Es seien  $a < b \in \mathbb{R}$  und  $K > 0$  fixiert. Die Differentialgleichung (1) modelliere einen Vorgang für  $x \in (a, b)$  und nur sofern eine Lösung durch  $K$  nach oben beschränkt sei.

Man wählt

$$U := (a, b) \times (-\infty, K) \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$$

und die Situation ist beschrieben durch die Gleichung

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{sofern} \quad (x, y(x), y'(x)) \in U .$$

Die eingangs gefundene Funktion  $y(x) = e^{-x^2}$  heißt in diesem Sinne Lösung der Differentialgleichung, falls zusätzlich  $e^{-x^2} < K$  für alle  $x \in (a, b)$ .

Mit dieser Betrachtungsweise wird die allgemeinste Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung eingeführt.

**Definition 1.1.**

**GEWÖHNLICHE DGL. DER ORDNUNG  $n$**

Es sei  $n \in \mathbb{N}$  fixiert,  $U \subset \mathbb{R}^{n+2}$  und  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ .

i) Eine Beziehung der Form

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 , \tag{2}$$

in der neben der (unabhängigen) Variablen  $x$  und der (gesuchten) Funktion  $y(x)$  Ableitungen von  $y$  bis zur Ordnung  $n$  auftreten, heißt *gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung  $n$* .

ii) Eine auf einem (verallgemeinerten) Intervall  $I$   $n$ -mal differenzierbare Funktion  $y(x)$  heißt *Lösung der Differentialgleichung (2)*, falls

$$(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \in U \quad \text{für alle } x \in I$$

und falls (2) für alle  $x \in I$  erfüllt ist.

**Bezeichnungen.**

- i) Die Ordnung der Differentialgleichung ist per definitionem die höchste auftretende Ableitung.
- ii) Eine Differentialgleichung der Form (2) heißt *implizite Differentialgleichung*.

Eine *explizite Differentialgleichung* hat die spezielle Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) .$$

- iii) Eine gewöhnliche *lineare Differentialgleichung*  $n^{\text{ter}}$  Ordnung ist von der Form

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x) ,$$

wobei die skalaren Funktionen  $a_0(x), \dots, a_n(x), r(x)$  auf einem (verallgemeinerten) Intervall  $I$  definiert seien.

Ist  $r(x) \equiv 0$ , so heißt die Differentialgleichung *homogen*, andernfalls heißt sie *inhomogen*.

- iv) Bei mehreren Differentialgleichungen für mehrere gesuchte Funktionen spricht man von einem *System von Differentialgleichungen*.

Ist beispielsweise  $n \in \mathbb{N}$  und

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} ,$$

so betrachte man das System erster Ordnung

$$\underline{\mathbf{y}}' = A(x)\underline{\mathbf{y}} + \underline{\mathbf{r}}(x) ,$$

d.h. gesucht ist eine Funktion  $\underline{\mathbf{y}}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= a_{11}(x)y_1(x) + a_{12}(x)y_2(x) + \cdots + a_{1n}(x)y_n(x) + r_1(x) \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ y_n'(x) &= a_{n1}(x)y_1(x) + a_{n2}(x)y_2(x) + \cdots + a_{nn}(x)y_n(x) + r_n(x) . \end{aligned}$$

v) Bei *partiellen Differentialgleichungen* treten so genannte partielle Ableitungen einer Funktion mehrerer Veränderlicher auf.

Partielle Differentialgleichungen werden an dieser Stelle nicht weiter diskutiert.

## Zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen eines AWP's.

Gemäß der einführenden Diskussion des Hookeschen Gesetzes wird die Bewegungsgleichung alleine keine eindeutige Lösung haben.

Man erwartet jedoch, dass das Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist.

Exemplarisch sei dazu auf  $I = (-\infty, \infty)$  die folgende (gewöhnliche, lineare, homogene) Differentialgleichung zweiter Ordnung betrachtet:

$$y'' + y = 0 .$$

Bekannt sind die offensichtlichen Lösungen dieser Gleichung (Probe)

$$y_1(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad y_2(x) = \sin(x) .$$

Ebenso löst mit beliebigen Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  die Funktion

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

die Differentialgleichung.

Die Konstanten sind (wie oben bereits angedeutet und wie nun gezeigt wird) dann festgelegt, wenn ein so genanntes [Anfangswertproblem](#) betrachtet wird.

In der Tat: Sind für ein  $x_0 \in I$  Werte  $y(x_0) = y_0$  und  $y'(x_0) = y_0^{(1)}$  gegeben, etwa  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ , so folgt

$$0 = y(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1 ,$$

$$1 = y'(0) = -c_1 \sin(0) + c_2 \cos(0) = c_2$$

und man wird auf die **eindeutig bestimmte** Lösung  $y(t) = \sin(t)$  des Anfangswertproblems geführt.

Das bestätigt die eingangs gemachten Bemerkungen zum Beispiel der schwingenden Feder:

Zusätzlich zur Bewegungsgleichung müssen die Anfangsauslenkung und die Anfangsgeschwindigkeit bekannt sein, um zu einer eindeutigen Lösung des Problems zu gelangen.

Bei komplexeren Problemen ist a priori nicht klar, ob überhaupt eine Lösung existiert und ob diese trotz gegebener Anfangsdaten eindeutig ist – ein klassisches Beispiel dazu wird im Übungskapitel 1.5 besprochen.

Mit anderen Worten: Es sind gewisse Strukturbedingungen an die Form der Gleichung zu stellen, damit die [Existenz](#) und die [Eindeutigkeit](#) einer

Lösung des Anfangswertproblems sichergestellt ist.

Diese Bedingungen sind jedoch im hier diskutierten Fall linearer Differentialgleichungen stets erfüllt, sodass man sich im gegebenen Kontext auf den folgenden Satz berufen kann (o.E. wird der Koeffizient  $a_n$  auf  $a_n(x) \equiv 1$  normiert).

**Satz 1.1.** EXISTENZ UND EINDEUTIGKEIT

*In der linearen gewöhnlichen Differentialgleichung  $n^{\text{ter}}$  Ordnung*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x)$$

*mit den Anfangsbedingungen*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0^{(1)}, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

*seien die Funktionen  $a_i(x)$ ,  $r(x)$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , stetig auf dem (verallgemeinerten) Intervall  $I$  und es sei  $x_0 \in I$ .*

*Dann existiert auf  $I$  genau eine Lösung des Anfangswertproblems, d.h. eine Funktion  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf  $I$  der Differentialgleichung sowie den Anfangsbedingungen genügt.*

---

*Beweisidee.* Der Beweis kann „elementar“ geführt werden, folgt aber auch dem später zu beweisenden Existenz- und Eindeutigkeitsatz für allgemeinere Anfangswertprobleme. □



## 1.2 Homogene lineare Differentialgleichungen (lineare Unabhängigkeit; Fundamentalsystem; allgemeine Lösung; Wronski-Determinante)

In diesem Paragraphen werden gewöhnliche Differentialgleichungen mit zwei besonderen Eigenschaften betrachtet:

- ▷ Die Gleichungen sind linear.
- ▷ Betrachtet wird der homogene Fall.

Sie sind damit von der Form (wieder o.E.  $a_n = 1$ )

$$L[y] := y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad (3)$$

wobei die  $a_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, n-1$ , stetige Funktionen auf dem Intervall  $[a, b]$  seien.

In der **lediglich abkürzenden** Schreibweise  $L[y] = 0$  nennt man  $L$  einen (linearen) **Differentialoperator**, der einer gegebenen Funktion  $y$  einen Ausdruck in Termen der unabhängigen Variablen, der Funktion und deren Ableitungen (bis zur Ordnung  $n$ ) zuweist.

In (3) verschwindet die **rechte Seite**  $r(x)$  identisch. Per definitionem handelt sich damit um eine **homogene Differentialgleichung**.

Die intuitive Vorstellung ist, dass es keine „äußere antreibende Kraft“ im modellierten System gibt,  $r(x) = 0$ .

Sind für  $k \in \mathbb{N}$  Funktionen  $y_1(x), \dots, y_k(x): I \rightarrow \mathbb{R}$  sowie reelle Konstanten  $c_1, \dots, c_k$ , gegeben, so bedeutet die Linearität

$$\mathbb{L} \left[ \sum_{i=1}^k c_i y_i \right] = \sum_{i=1}^k c_i L[y_i],$$

Dies bedeutet: Nach Satz 1.1 hat zwar das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung, es gilt jedoch völlig analog zum [Superpositionsprinzip](#) für homogene lineare Gleichungssysteme:

Sind  $y_1(x), \dots, y_k(x)$  Lösungen der homogenen Differentialgleichung (3), so ist auch

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k(x)$$

mit beliebigen Konstanten  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , Lösung von  $L[y] = 0$ .

### Gesamtheit aller Lösungen der Gleichung?

Satz 1.1 belegt die Eindeutigkeit von Lösungen des Anfangswertproblems. Auf der anderen Seite belegt das Superpositionsprinzip, dass die Menge der Lösungen von (3) sogar einen Vektorraum aufspannen.

Die Frage nach der Gesamtheit aller Lösungen sei wieder exemplarisch anhand der Differentialgleichung

$$y'' + y = 0$$

illustriert.

Zwei bekannte Lösungen sind  $y_1(x) = \cos(x)$ ,  $y_2(x) = \sin(x)$ . Damit ist auch für beliebige  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + g(x)$$

eine Lösung von (3).

Es sei nun  $g(x)$  **irgendeine** weitere Lösung der Differentialgleichung. Es soll der Frage nachgegangen werden, was über  $g$  ausgesagt werden kann.

Um zu Informationen über  $g$  zu gelangen, betrachtet man das Anfangswertproblem mit

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0^{(1)},$$

wobei  $y_0, y_0^{(1)} \in \mathbb{R}$  beliebig vorgegeben seien.

Das Anfangswertproblem ist gelöst, falls zusätzlich

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + g(0) = y_0, \\ y'(0) &= c_2 + g'(0) = y_0^{(1)}. \end{aligned}$$

Dann sind die Konstanten  $c_1, c_2$  bestimmt, nämlich

$$c_1 = y_0 - g(0), \quad c_2 = y_0^{(1)} - g'(0).$$

Folglich ist die Funktion

$$y(x) = (y_0 - g(0)) \cos(x) + (y_0^{(1)} - g'(0)) \sin(x) + g(x)$$

eine Lösung des Anfangswertproblems.

Man verifiziert leicht, dass auch die Funktion

$$\tilde{y}(x) = y_0 \cos(x) + y_0^{(1)} \sin(x)$$

dasselbe Anfangswertproblem löst.

Nach Satz 1.1 ist die Lösung aber eindeutig bestimmt, was  $y(x) = \tilde{y}(x)$  für alle  $x \in I$  impliziert.

Das Gleichsetzen der beiden Darstellungen für  $y$  ergibt

$$\begin{aligned}
g(x) &= (y_0 - y_0 + g(0)) \cos(x) + (y_0^{(1)} - y_0^{(1)} + g'(0)) \sin(x) \\
&= g(0) \cos(x) + g'(0) \sin(x) .
\end{aligned}$$

Zusammenfassend: Eine beliebige Lösung  $g(x)$  der Differentialgleichung kann als Linearkombination des Kosinus und des Sinus geschrieben werden.

In diesem Beispiel ist die Lösungsmenge ein zweidimensionaler Vektorraum. Man beachte, dass der Begriff „zweidimensional“ eine Definition des Begriffes „Lineare Unabhängigkeit“ voraussetzt.

### Lineare Unabhängigkeit und Fundamentalsystem.

Analog zur linearen Unabhängigkeit von Vektoren im  $\mathbb{R}^n$  wird definiert:

#### Definition 1.2. LINEAR UNABHÄNGIGE LÖSUNGEN

Die Funktionen  $y_1, \dots, y_k$  seien auf einem (verallgemeinerten) Intervall  $I$  definiert.

Sie heißen linear unabhängig auf  $I$ , falls aus

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in I ,$$

$c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, k$ , stets folgt

$$c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0 .$$

Sonst heißen die Funktionen linear abhängig auf  $I$ .

**Bemerkung.** Der Begriff der linearen Unabhängigkeit ist bereits in Definition Teil I, Definition 10.2, auf Vektorräumen, also linearen Räumen festgelegt.

Wie erwähnt bilden die Lösungen von (3) ebenfalls einen Vektorraum<sup>1</sup>. Deshalb kann Definition 1.2 als Definition im *Lösungsraum* von (3) interpretiert werden.

Damit hängt zusammen, dass der Begriff der linearen Unabhängigkeit ohne Bezug auf den Lösungsraum, d.h. formal nach Definition 1.2, von dem betrachteten Intervall abhängt (siehe Übungskapitel 1.5 zur näheren Erläuterung anhand von Beispielen).

---

## Lineare Unabhängigkeit im einführenden Beispiel.

Dort waren

$$y_1(x) = \cos(x) , \quad y_2(x) = \sin(x) , \quad I = (-\infty, \infty) .$$

Ist für alle  $x \in I$

$$c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) = 0 ,$$

so ist dies insbesondere für  $x = 0$  und für  $x = \frac{\pi}{2}$  richtig:

$$\begin{aligned} c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) &= 0 \Rightarrow c_1 = 0 , \\ c_1 \cos(\pi/2) + c_2 \sin(\pi/2) &= 0 \Rightarrow c_2 = 0 . \end{aligned}$$

Demnach sind  $\cos(x)$  und  $\sin(x)$  linear unabhängige Funktionen auf  $I$ .

---

<sup>1</sup>Stichwort Superpositionsprinzip – vgl. auch Teil II, Satz 1.1: kern  $A$  ist Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  – vgl. ebenfalls Übungskapitel 1.5.

Zusammenfassend wird festgehalten:

**Satz 1.2.** FUNDAMENTALSYSTEM

Die Funktionen  $a_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , seien stetig auf  $I$ .

i) Dann hat die Differentialgleichung (3), d.h.  $L[y] = 0$ , ein so genanntes *Fundamentalsystem*  $\mathcal{F}$  von Lösungen, d.h.  $n$  linear unabhängige Lösungen  $y_1, y_2, \dots, y_n$  auf  $I$ .

ii) Ist  $\mathcal{F} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  ein Fundamentalsystem von Lösungen, so ist *jede Lösung* von  $L[y] = 0$  auf  $I$  von der Form

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \quad \text{für alle } x \in I,$$

wobei die  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , reelle Konstanten bezeichnen.

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(x), \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n, \quad x \in I,$$

heißt die *allgemeine Lösung* von (3).

**Bemerkungen.**

i) In diesem Sinne existiert ein  $n$ -dimensionaler Lösungsraum der Gleichung (3).

ii) Ebenso wie es keine eindeutig bestimmte Basis des  $\mathbb{R}^n$  gibt, gibt es auch kein eindeutig bestimmtes Fundamentalsystem.

iii) Im obigen Beispiel bilden also  $y_1(x) = \cos(x)$  und  $y_2(x) = \sin(x)$  ein Fundamentalsystem,

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

heißt die allgemeine Lösung.

### Kriterium für die lineare Unabhängigkeit von Lösungen.

Im Allgemeinen ist es nicht einfach, die lineare Unabhängigkeit von Lösungen zu verifizieren. Als Kriterium für die lineare Unabhängigkeit von Lösungen ist der folgende Satz sehr hilfreich.

Die so genannte **Wronski-Determinante** wird noch häufig als eine natürliche Größe in Erscheinung treten.

Wie im Übungskapitel 1.5 diskutiert wird, ist die Voraussetzung „Lösung von  $L[y] = 0$ “ wesentlich für den folgenden Satz.

#### Satz 1.3. **WRONSKI-DETERMINANTE**

i) Es sind  $n$  Lösungen  $y_1, \dots, y_n$  der Differentialgleichung (3) auf  $I$  **genau dann** linear unabhängig, wenn für (mindestens) ein  $x \in I$  die Wronski-Determinante von Null verschieden ist:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

ii) Ist die Wronski-Determinante für ein  $x \in I$  von Null verschieden, so ist sie für alle  $x \in I$  von Null verschieden.

---

**Beispiel.** Betrachtet man die Lösungen  $y_1(x) = \cos(x)$ ,  $y_2(x) = \sin(x)$  von  $y'' + y = 0$ , so folgt die lineare Unabhängigkeit auch aus Satz 1.3:

$$W = \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$


---

### Die Wronski-Determinante und das Anfangswertproblem.

Das Studium von Anfangswertproblemen führt zwingend auf die Wronski-Determinante:

Man betrachte die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) , \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} ,$$

der linearen homogenen Differentialgleichung  $L[y] = 0$ . Sind hier

$$y(x_0) = y_0 , \quad y'(x_0) = y_0^{(1)} , \quad \dots , \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

die Anfangsdaten des betrachteten Anfangswertproblems, so erhält man die eindeutige Lösung durch geeignete Wahl der Konstanten.

Dazu ist ein lineares Gleichungssystem in den  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  zu lösen:



$$\begin{aligned}
 y_0 &= c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \cdots + c_n y_n(x_0) \\
 y_0^{(1)} &= c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \cdots + c_n y_n'(x_0) \\
 &\vdots \\
 y_0^{(n-1)} &= c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) .
 \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise lautet dieses Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0^{(1)} \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \end{pmatrix} .$$

Nach Teil II, Satz 1.3, ist dieses Gleichungssystem für beliebig gegebene Anfangsdaten eindeutig lösbar, falls Wronski-Determinante  $W(x)$  nicht verschwindet.

### 1.3 Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (charakteristische Gleichung bzw. charakteristisches Polynom; Reduktion der Ordnung)

In diesem Abschnitt wird der Spezialfall homogener (gewöhnlicher) linearer Differentialgleichungen mit **konstanten Koeffizienten** diskutiert, d.h. die Koeffizienten hängen nicht von  $x$  ab:

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0 \quad \text{auf } I, \quad (4)$$

wobei  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  (wieder ist o.E.  $a_n = 1$  angenommen) **reelle Konstanten** seien.

In diesem Spezialfall kann die allgemeine Lösung explizit konstruiert werden.

Die wesentlichen Effekte können anhand von drei typischen Beispielen erläutert werden:

---

### Typ 1.

Es sei  $I = (-\infty, \infty)$  und

$$L[y] = y'' + y' - 2y .$$

Zur Konstruktion der allgemeinen Lösung macht man den Ansatz

$$y = e^{\lambda x} , \quad \lambda \in \mathbb{R} .$$

Setzt man den Ansatz in die Gleichung ein, so ergibt sich

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0 ,$$

was auf die [charakteristische Gleichung](#) führt:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 .$$

Diese hat die beiden Wurzeln

$$\lambda_1 = 1 , \quad \lambda_2 = -2 ,$$

die als Fundamentalsystem (lineare Unabhängigkeit nachrechnen!) liefern:

$$y_1 = e^x , \quad y_2 = e^{-2x} .$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

---

### Typ 2.

Es sei wieder  $I = (-\infty, \infty)$  und

$$L[y] = y'' + 2y' + y = 0.$$

Wie oben erhält man die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,$$

die nur eine (zweifache) Wurzel  $\lambda_1 = -1$  hat.

Somit liefert der obige Ansatz lediglich eine Lösung, nämlich

$$y_1(x) = e^{-x}.$$

Um eine weitere, linear unabhängige Lösung zu finden, bedient man sich einer **Reduktion der Ordnung**: Es wird der Ansatz

$$y_2(x) = u(x)e^{-x}$$

gemacht, wobei die Funktion  $u$  geeignet zu bestimmen ist.

**Bemerkung.** Der Produktansatz mit dem Faktor  $e^{\lambda_1 x}$  ist so gewählt, dass sich bei der Berechnung  $L[y_2]$  die meisten Terme wegheben.

Einsetzen liefert für  $L[y_2]$

$$\begin{aligned} L[y_2] &= u''(x)e^{-x} - 2u'(x)e^{-x} + u(x)e^{-x} + 2u'(x)e^{-x} \\ &\quad - 2u(x)e^{-x} + u(x)e^{-x} \\ &= u''(x)e^{-x} . \end{aligned}$$

Somit ist  $L[y_2] = 0$ , falls  $u''(x) \equiv 0$ , also  $u = k_1x + k_2$  mit reellen Konstanten  $k_1, k_2$ . Insbesondere ist  $(k_1 = 1, k_2 = 0)$

$$y_2(x) = xe^{-x}$$

eine weitere von  $y_1$  linear unabhängige (nachrechnen!) Lösung der Differentialgleichung und die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

### Typ 3.

Auf  $I = (-\infty, \infty)$  sei nun

$$L[y] = y'' - 2y' + 5y = 0 ,$$

die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

hat in diesem Fall nur die komplexen Wurzeln

$$\lambda_1 = 1 + 2i , \quad \lambda_2 = 1 - 2i .$$

Die beiden Wurzeln sind konjugiert komplex, wie schon in Teil I, Korollar 11.1, gezeigt ist.

Man betrachtet zunächst **formal** die **komplexe Lösung**

$$y(x) = K_1 e^{(1+2i)x} + K_2 e^{(1-2i)x}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{C}.$$

Die komplexen Konstanten  $K_1$  und  $K_2$  sollen nun so gewählt werden, dass  $y(x) \in \mathbb{R}$  für alle  $x \in I$ , d.h. sodass eine reelle Lösung gefunden ist.

Dazu seien  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  beliebig,  $A := c_1/2$ ,  $B := -c_2/2$  und

$$K_1 := A + iB, \quad K_2 = \overline{K_1} = A - iB.$$

Damit wird berechnet:

$$\begin{aligned} y(x) &= (A + iB)e^x(\cos(2x) + i\sin(2x)) \\ &\quad + (A - iB)e^x(\cos(2x) - i\sin(2x)) \\ &= 2Ae^x \cos(2x) - 2Be^x \sin(2x) \\ &= c_1 e^x \cos(2x) + c_2 e^x \sin(2x). \end{aligned}$$

Mit dieser Wahl von  $K_1, K_2$  ist  $y$  in der Tat reellwertig und die allgemeine (reelle) Lösung lautet

$$y(x) = c_1 e^x \cos(2x) + c_2 e^x \sin(2x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

---

### **Zusammenfassung der Beispiele.**

Fasst man die in den drei Beispielen diskutierten Aspekte zusammen, so ergibt sich

**Satz 1.4.** KONSTANTE KOEFFIZIENTEN

Es seien  $a_j$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ , reelle konstante Koeffizienten der homogenen Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y + a_0y = 0$$

mit dem zugehörigen charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 .$$

i) Ist  $\lambda$  eine  $q$ -fache reelle Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so sind  $q$  linear unabhängige Lösungen der homogenen Differentialgleichung gegeben durch:

$$e^{\lambda x}, \quad xe^{\lambda x}, \quad \dots, \quad x^{q-1}e^{\lambda x} .$$

ii) Ist  $\lambda = \sigma + i\tau$  ( $\tau \neq 0$ ) eine  $r$ -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so ist  $\bar{\lambda} = \sigma - i\tau$  die konjugiert komplexe  $r$ -fache Nullstelle und linear unabhängig kommen  $2r$  Lösungen hinzu:

$$\begin{aligned} e^{\sigma x} \cos(\tau x), \quad xe^{\sigma x} \cos(\tau x), \quad \dots, \quad x^{r-1}e^{\sigma x} \cos(\tau x), \\ e^{\sigma x} \sin(\tau x), \quad xe^{\sigma x} \sin(\tau x), \quad \dots, \quad x^{r-1}e^{\sigma x} \sin(\tau x) . \end{aligned}$$

iii) Insgesamt erhält man so  $n$  linear unabhängige Lösungen, also ein Fundamentalsystem von Lösungen.

---

Satz 1.4 kann etwa auf den freien [Schwingkreis](#) angewandt werden, wobei in Abbildung 1.2 zusätzlich eine Kapazität einzufügen ist.

Hier gilt mit Konstanten  $L > 0$ ,  $C > 0$ ,  $R \geq 0$  die homogene lineare Differentialgleichung (siehe Einleitung dieses Kapitels und Übungskapitel 1.5)

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = 0 .$$

Als weiteres Beispiel betrachte man die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$y''' - y = 0 .$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 1 ,$$

die Nullstellen sind (man erinnere sich an die Diskussion von komplexen Einheitswurzeln in Teil I, Kapitel 11.3)

$$\lambda_1 = 1 , \quad \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Ein Fundamentalsystem von Lösungen ist

$$e^x , \quad e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) , \quad e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) ,$$

als allgemeine Lösung ergibt sich

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_3 e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

mit  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  (Probe!).

## 1.4 Inhomogene lineare Differentialgleichungen (spezielle, allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung; Variation der Konstanten; Ansatz rechte Seite; Resonanz)

Wirkt eine äußere mechanische Kraft, eine angelegte Spannung (genauer Spannungsänderung) etc. auf ein physikalisches System ein, so muss eine Inhomogenität in der Differentialgleichung berücksichtigt werden..

Aufgrund der Schreibweise wird diese hier meist „rechte Seite“  $r(x)$  genannt:

$$L[y] := y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x) . \quad (5)$$

Man beachte, dass es sich nicht unbedingt um konstante Koeffizienten handeln muss.

Es gelte aber wieder, dass die Funktionen  $a_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , als stetig auf einem (verallgemeinerten) Intervall  $I$  vorausgesetzt sind. Gleiches gelte für die Funktion  $r(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

### Allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Völlig analog zu Teil II, Satz 1.1, benötigt man die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und eine **spezielle Lösung** der inhomogenen Gleichung im Sinne von

**Satz 1.5.** ALLGEMEINE LÖSUNG INHOMOGENE GLEICHUNG

Es sei  $\mathcal{F} = (y_1, \dots, y_n)$  ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Differentialgleichung  $L[y] = 0$  und es sei

$$y_{\text{hom}} = \sum_{i=1}^n c_i y_i , \quad c_i \in \mathbb{R} , \quad i = 1, \dots, n ,$$



die allgemeine Lösung von  $L[y] = 0$ .

Ist  $y_s$  irgendeine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (5), so ist

$$y_{inhom}(x) = y_{hom}(x) + y_s(x) , \quad x \in I ,$$

die *allgemeine Lösung* der inhomogenen Differentialgleichung.

---

*Beweis.* Wie bereits angedeutet, argumentiere man analog zum Fall linearer Gleichungssysteme (Teil II, Satz 1.1)  $\square$

---

**Beispiel.** Betrachtet man etwa auf  $I = (-\infty, \infty)$  die inhomogene Differentialgleichung

$$y'' + y = x^2 ,$$

so verifiziert man mit einer Probe leicht, dass  $y_s(x) = x^2 - 2$  eine spezielle Lösung ist.

Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + x^2 - 2 , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

---

### Das Anfangswertproblem.

Völlig analog zum homogenen Fall liefert die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung auch die eindeutig bestimmte Lösung eines zugehörigen Anfangswertproblems (vgl. Übungskapitel 1.5).

---

## Wie findet man denn eine spezielle Lösung?

Im Fall homogener (gewöhnlicher, linearer) Differentialgleichungen kann man zumindest bei konstanten Koeffizienten nach Satz 1.4 direkt Lösungen finden.

Im obigen inhomogenen Beispiel stellt sich natürlich die Frage, wie man auf eine spezielle Lösung kommt.

Dazu startet man im Allgemeinen mit einem Fundamentalsystem  $(y_1, \dots, y_n)$  der homogenen Gleichung

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 .$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung gewinnt man durch eine so genannte [Variation der Konstanten](#).

---

Die Idee ist dabei, in der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

die Konstanten durch Funktionen  $c_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , zu ersetzen:

D.h. man macht den [Ansatz](#)

$$y_s(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \dots + c_n(x)y_n(x) .$$


---

Im obigen Beispiel betrachtet man auf  $I = (-\infty, \infty)$  die inhomogene Gleichung

$$y'' + y = x^2 .$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

Mit dem Ansatz

$$y_s(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

sind zunächst die Ableitungen von  $y_s$  zu berechnen:

$$y'_s(x) = c'_1(x)y_1(x) + c_1(x)y'_1(x) + c'_2(x)y_2(x) + c_2(x)y'_2(x) .$$

Nun wählt man die gesuchten Funktionen  $c_1(x)$ ,  $c_2(x)$  im ersten Schritt derart, dass für alle  $x \in I$

$$c'_1(x)y_1(x) + c'_2(x)y_2(x) = 0 , \tag{6}$$

wobei die Bedingung (6) in Kürze gerechtfertigt wird.

Gilt (6), so ist  $y'_s$  unabhängig von den  $c'_i$ , es gilt (als ob die  $c_i$  nicht von  $x$  abhängen)

$$y'_s(x) = c_1(x)y'_1(x) + c_2(x)y'_2(x) .$$

Die zweite Ableitung berechnet sich demnach zu

$$y''_s(x) = c'_1(x)y'_1(x) + c_1(x)y''_1(x) + c'_2(x)y'_2(x) + c_2(x)y''_2(x) .$$

Zusätzlich zu (6) wählt man nun die Funktionen  $c_1(x)$ ,  $c_2(x)$  so, dass

$$c'_1(x)y'_1(x) + c'_2(x)y'_2(x) = x^2 . \tag{7}$$

Auch Bedingung (7) ist noch zu rechtfertigen. Es sei aber schon angemerkt, dass sich im zweiten und letzten Schritt die Terme mit Ableitungen der  $c_i$  nicht wegheben sollten, da man sonst auf eine homogene Lösung gefhrt

würde.

Gelten (6) und (7), so impliziert das

$$y_s''(x) = c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x) + x^2$$

und somit

$$y_s''(x) + y_s(x) = c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x) + x^2 + c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) .$$

An dieser Stelle kann ausgenutzt werden, dass  $y_1$  und  $y_2$  Lösungen der homogenen Gleichung sind, d.h.

$$c_1(x)y_1''(x) + c_1(x)y_1(x) = c_1(x)(y_1''(x) + y_1(x)) = 0 ,$$

$$c_2(x)y_2''(x) + c_2(x)y_2(x) = c_2(x)(y_2''(x) + y_2(x)) = 0 .$$

Folglich gilt wie angestrebt

$$y_s'' + y_s = x^2 ,$$

vorausgesetzt, dass die Bedingungen (6) und (7) erfüllt sind.

Diese lauten im konkreten Beispiel

$$c_1'(x) \cos(x) + c_2'(x) \sin(x) = 0 ,$$

$$-c_1'(x) \sin(x) + c_2'(x) \cos(x) = x^2 .$$

Als Lösung findet man

$$c_1'(x) = -x^2 \sin(x) , \quad c_2'(x) = x^2 \cos(x) .$$

Schließlich muss noch aufintegriert werden und man erhält mittels partieller Integration (die Integrationskonstanten werden gleich Null gewählt - eine andere Wahl führt auf eine andere spezielle Lösung, die aber nur um eine Lösung der homogenen Gleichung differiert)

$$c_1(x) = x^2 \cos(x) - 2x \sin(x) - 2 \cos(x) ,$$

$$c_2(x) = x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x) .$$

Eine spezielle Lösung

$$\begin{aligned} y_s(x) &= c_1(x) \cos(x) + c_2(x) \sin(x) \\ &= x^2 \cos^2(x) - 2x \sin(x) \cos(x) - 2 \cos^2(x) \\ &\quad + x^2 \sin^2(x) + 2x \cos(x) \sin(x) - 2 \sin^2(x) \\ &= x^2 - 2 \end{aligned}$$

ist gefunden, von der oben schon nachgerechnet ist, dass sie tatsächlich die inhomogene Differentialgleichung löst.

---

Wie im Beispiel führt im allgemeinen Fall obiger Ansatz auf das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} y_1(x)c_1'(x) + y_2(x)c_2'(x) + \cdots + y_n(x)c_n'(x) &= 0 \\ y_1'(x)c_1(x) + y_2'(x)c_2(x) + \cdots + y_n'(x)c_n(x) &= 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \\ y_1^{(n-1)}(x)c_1'(x) + \cdots + y_n^{(n-1)}(x)c_n'(x) &= r(x) . \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Sind die  $y_i$  (und deren Ableitungen) als Lösungen des homogenen Systems bekannt, so ist (8) ein inhomogenes lineares Gleichungssystem für die  $c_i'$ ,

$i = 1, \dots, n$ .

Die Gleichungsdeterminante ist wieder die **Wronski-Determinante**, also für ein gegebenes Fundamentalsystem von Null verschieden, und man erhält eine eindeutige Lösung  $c'_1(x), \dots, c'_n(x)$ .

Durch Integration lassen sich schließlich die gesuchten Funktionen  $c_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ermitteln.

Zusammenfassend ist festzuhalten:

Prinzipiell können über die Methode der Variation der Konstanten immer spezielle Lösungen gefunden werden, die Rechnungen sind aber oft sehr aufwendig.

### Gibt es in bestimmten Situationen einfachere Möglichkeiten?

Die technischen Schwierigkeiten, die eine Variation der Konstanten mit sich bringt, können in speziellen Situationen umgangen werden.

Betrachtet man beispielsweise eine inhomogene Differentialgleichung mit **konstanten Koeffizienten**

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = r(x), \quad (9)$$

$a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , und hat zudem die rechte Seite  $r(x)$  in (9) eine **ganz besondere Struktur**, ist sie nämlich für ein  $k \in \mathbb{N}_0$  von der Form

$$r(x) = e^{\rho x} \left[ \cos(\omega x) \sum_{i=0}^k c_i x^i + \sin(\omega x) \sum_{i=0}^k d_i x^i \right], \quad (10)$$

$c_i, d_i, \rho, \omega \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ , so ist es naheliegend, einen der Struktur angepassten Ansatz zu machen, da sich das System in gewisser Weise nach

der „antreibenden rechten Seite“ richten wird.

Man macht also einen [Ansatz nach der rechten Seite](#).

**Einfache Beispiele für zulässige rechte Seiten.** Die hier *vorausgesetzte* Form (10) der rechten Seite  $r(x)$  beinhaltet zahlreiche aus den Anwendungen bekannte Varianten.

Mit der Wahl  $\rho = 0$  und  $\omega = 0$  kann etwa eine polynomiale rechte Seite

$$r(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k$$

behandelt werden.

Für  $k = 0$  und  $\omega = 0$  ist

$$r(x) = c_0 e^{\rho x} .$$

Im Fall  $k = 0$ ,  $\rho = 0$  hat man

$$r(x) = c_0 \cos(\omega x) + d_0 \sin(\omega x) .$$

---

### Beispiel Schwingkreis.

Mit einer Induktivität  $L > 0$ , einer Kapazität  $C > 0$ , einem Ohmschen Widerstand  $R \geq 0$  sei die Wechselspannung  $U(t)$ ,

$$U'(t) = c_0 \cos(\omega t) + d_0 \sin(\omega t) , \quad 0 \neq \omega \in \mathbb{R} ,$$

gegeben, d.h. in obiger Notation  $k = 0$ ,  $\rho = 0$ ,

$$\rho + i\omega = i\omega . \tag{11}$$

Damit werde der inhomogene [Schwingkreis](#) betrachtet:

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = c_0 \cos(\omega t) + d_0 \sin(\omega t) . \quad (12)$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms erfüllen die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 L + \lambda R + \frac{1}{C} = 0 .$$

Deren Lösungen sind

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} .$$

Es gilt

$$\operatorname{Im} \lambda_{1,2} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (13)$$

und im Fall von (13) ist

$$\lambda_{1,2} = \sigma \pm i\tau , \quad \sigma := -\frac{R}{2L} , \quad \tau := \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} . \quad (14)$$

Vergleicht nun in (12) die rechte und die linke Seite, so kann man die erste qualitative Aussage treffen:

Die linke Seite von (12) – und damit die Nullstellen (14) des charakteristischen Polynoms – beschreibt das Verhalten des Schwingkreises selbst.

Die rechte Seite von (12) – und damit (11) – charakterisiert die angelegte Spannung (deren Änderung) als die äußere Anregung des Systems.

Gibt es keine Gleichheit zwischen (11) und (14), so wird sich das System im Laufe der Zeit der Anregung anpassen und die Struktur eines Lösungsansatzes ist die der rechten Seite.



Gibt es hingegen Gleichheit zwischen (11) und (14), so liegt der **Resonanzfall** vor und der Schwingkreis wird sich im Laufe der Zeit aufschaukeln. Der Lösungsansatz muss dann berücksichtigen, dass die Amplitude im Laufe der Zeit anwachsen wird.

---

### Der Ansatz im Allgemeinen.

- i) In (10) sei  $\rho + i\omega$  **keine Wurzel** des zu  $L[y] = 0$  gehörigen charakteristischen Polynoms.

Der Ansatz lautet hier mit Konstanten  $\gamma_i, \delta_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, k$ ,

$$y_s(x) = e^{\rho x} \left[ \cos(\omega x) \sum_{i=0}^k \gamma_i x^i + \sin(\omega x) \sum_{i=0}^k \delta_i x^i \right].$$

Die  $2k + 2$  Koeffizienten sind so zu bestimmen, dass  $y_s$  eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung wird.

- ii) In (10)  $\rho + i\omega$  eine Wurzel der Vielfachheit  $m$  des zu  $L[y] = 0$  gehörigen charakteristischen Polynoms.

Nun lautet der Ansatz mit Konstanten  $\gamma_i, \delta_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, k$ ,

$$y_s(x) = x^m \cdot e^{\rho x} \left[ \cos(\omega x) \sum_{i=0}^k \gamma_i x^i + \sin(\omega x) \sum_{i=0}^k \delta_i x^i \right].$$

$\gamma_i, \delta_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, k$ .

Dabei korrespondiert der Faktor  $x^m$  mit dem von der Resonanz verursachten Anwachsen der Amplitude.

Wieder sind die  $2k + 2$  Koeffizienten so zu bestimmen, dass  $y_s$  eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung wird.

---

### Konkrete Rechnung für den Schwingkreis.

Beispielhaft wird der Resonanzfall betrachtet, d.h.

$$i\omega = \sigma + i\tau \quad \Leftrightarrow \quad R = 0 \quad \text{und} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Der Ansatz lautet ( $m = 1$ ):

$$I_s(t) = t[\gamma_0 \cos(\omega t) + \delta_0 \sin(\omega t)] ,$$

und man berechnet

$$I'_s(t) = \gamma_0 \cos(\omega t) + \delta_0 \sin(\omega t) - t\gamma_0\omega \sin(\omega t) + t\delta_0\omega \cos(\omega t)$$

sowie

$$\begin{aligned} I''_s(t) &= -\gamma_0\omega \sin(\omega t) + \delta_0\omega \cos(\omega t) \\ &\quad -\gamma_0\omega \sin(\omega t) - t\gamma_0\omega^2 \cos(\omega t) \\ &\quad +\delta_0\omega \cos(\omega t) - t\delta_0\omega^2 \sin(\omega t) \\ &= -2\gamma_0\omega \sin(\omega t) + 2\delta_0\omega \cos(\omega t) \\ &\quad -t[\gamma_0\omega^2 \cos(\omega t) + \delta_0\omega^2 \sin(\omega t)] . \end{aligned}$$

In die Differentialgleichung (Gleichung (12) mit  $R = 0$ )

$$LI'' + \frac{1}{C}I = c_0 \cos(\omega t) + d_0 \sin(\omega t)$$

eingesetzt, erhält man

$$\begin{aligned}
 & -2L\gamma_0\omega \sin(\omega t) + 2L\delta_0\omega \cos(\omega t) \\
 & -tL[\gamma_0\omega^2 \cos(\omega t) + \delta_0\omega^2 \sin(\omega t)] \\
 & + \frac{1}{C}t[\gamma_0 \cos(\omega t) + \delta_0 \sin(\omega t)] \\
 & = c_0 \cos(\omega t) + d_0 \sin(\omega t) .
 \end{aligned}$$

Hierbei ist insbesondere zu beachten, dass die Gleichheit nur gelten kann, wenn sich die beiden Terme der Form  $t[\dots]$  gegenseitig aufheben.

In der Tat gilt genau im betrachteten Resonanzfall  $\omega = 1/\sqrt{LC}$

$$-tL\gamma_0\omega^2 + t\frac{\gamma_0}{C} = 0$$

wegen

$$-L\omega^2 + \frac{1}{C} = -L\frac{1}{LC} + \frac{1}{C} = 0 .$$

Ebenso erkennt man

$$-tL\delta_0\omega^2 + t\frac{\delta_0}{C} = 0 ,$$

d.h. der obige Ansatz ist genau auf den Resonanzfall zugeschnitten.

Für die Konstanten  $\gamma_0$  und  $\delta_0$  erhält man mittels eines Koeffizientenvergleiches

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= -\frac{d_0}{2L\omega_0} = -\frac{d_0}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} , \\
 \delta_0 &= \frac{c_0}{2L\omega_0} = \frac{c_0}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} .
 \end{aligned}$$

Mit dieser Wahl ist  $y_s$  eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung lautet mit weiteren Konstanten  $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$

$$I(t) = (M_1 + t\gamma_0) \cos(\omega_0 t) + (M_2 + t\delta_0) \sin(\omega_0 t) ,$$

die Amplitude der Lösung wird mit fortschreitender Zeit immer größer und es entwickelt sich eine [Resonanzkatastrophe](#).

---

### Ausblick.

Der Ansatz  $y = e^{\lambda x}$  hat im Fall einer Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten zur allgemeinen Lösung der Differentialgleichung geführt.

Bevor [Systeme von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten](#) mit einem verwandten Ansatz untersucht werden können, müssen zunächst weitere Bausteine aus der linearen Algebra zur Verfügung gestellt werden.

## 1.5 Übungsaufgaben zu Kapitel 1

### Aufgabe 1.

i) Betrachten Sie die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = \sqrt{|y|} .$$

Rechnen Sie nach, dass die Funktionen ( $a \leq 0$  fixiert)

$$\phi_a(x) := \begin{cases} x^2/4 & \text{für } x > 0 , \\ 0 & \text{für } a \leq x \leq 0 , \\ -(x-a)^2/4 & \text{für } x < a , \end{cases}$$

$$\psi(x) := \begin{cases} x^2/4 & \text{für } x > 0 , \\ 0 & \text{für } x \leq 0 , \end{cases}$$

das Anfangswertproblem mit  $y(2) = 1$  lösen.

Es gibt also unendlich viele Lösungen des Anfangswertproblems.  
Widerspricht das Satz 1.1?

ii) Rechnen Sie nach, dass die Funktion

$$\phi(x) = \frac{1}{x-1}$$

das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{1}{y^2} , \quad y(0) = -1 ,$$

löst. Diese Lösung existiert also nicht für alle  $x$  sondern nur für  $x < 1$ .

---

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie: Die Menge der Lösungen der homogenen Gleichung

$$L[y] := y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

ist ein Vektorraum.

---

**Aufgabe 3.\*** Die Funktionen

$$\psi_1(x) = x^3, \quad \psi_2(x) = |x|^3,$$

seien für  $-1 < a < 1$  auf  $I_a = (a, 1) \subset \mathbb{R}$  definiert.

Für welche  $a$  sind die Funktionen auf  $I$  linear unabhängig, für welche linear abhängig?

Berechnen Sie weiter

$$\begin{vmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) \\ \psi_1'(x) & \psi_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Warum widerspricht das Ergebnis nicht Satz 1.3?

---

**Aufgabe 4.\*** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des freien Schwingkreises ( $L > 0$ ,  $C > 0$ ,  $R \geq 0$  reelle Konstanten)

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = 0.$$

Skizzieren Sie die Lösung in den unterschiedlichen Fällen, die sich bei der Rechnung ergeben.

---

**Aufgabe 5.\*** Betrachten Sie die gewöhnliche homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y''' + y'' - y' - y = 0$$

und bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen.

Berechnen Sie daraus die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems mit  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = 1$  und verifizieren Sie das Ergebnis mit einer Probe.

---

**Aufgabe 6.\*** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichungen

i)  $y''' + 2y'' + y' + 2y = 0$ ,

ii)  $y'' - 2y' + 2y = 0$ .

---

**Aufgabe 7.\*** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y'' - 4y' + 4y = e^x$$

mithilfe einer Variation der Konstanten.

---

**Aufgabe 8.\*** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + 2y = x^2$$

mithilfe eines Ansatzes nach der rechten Seite.

---

**Aufgabe 9.** Betrachten Sie den inhomogenen Schwingkreis ( $L > 0$ ,  $C > 0$ ,  $R \geq 0$ ,  $\omega \neq 0$  reelle Konstanten)

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = \cos(\omega t) + \sin(\omega t) .$$

Finden Sie eine spezielle Lösung im Fall  $R > 0$  und im Fall  $R = 0$  mit  $\omega \neq 1/\sqrt{LC}$ .

---

**Aufgabe 10.** Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung der folgenden inhomogenen Differentialgleichungen und verifizieren Sie das Ergebnis mit einer Probe:

i)  $y'' - 4y' + 5y = xe^{2x}$  ,

ii)  $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$  .

---



**Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben.**

**Aufgabe 3.** Im Fall  $0 \leq a < 1$  ist

$$\psi_1(x) - \psi_2(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in I_a$$

und die Funktionen sind in diesem Fall linear abhängig.

Es sei nun  $-1 < a < 0$  und es gelte mit reellen Konstanten  $c_1, c_2$

$$c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in I_a .$$

Man fixiere weiter  $x_0 > 0$  mit  $x_0 < a$ , d.h.  $x_0, -x_0 \in I_a$ .

Aus

$$c_1\psi_1(x_0) + c_2\psi_2(x_0) = x_0^3(c_1 + c_2) = 0$$

sowie aus

$$c_1\psi_1(-x_0) + c_2\psi_2(-x_0) = x_0^3(-c_1 + c_2) = 0$$

folgt  $c_1 = c_2 = 0$ . Die Funktionen  $\psi_1$  und  $\psi_2$  können auf  $I_a$  in diesem Fall also nicht beide Lösungen der Differentialgleichung (3) aus Satz 1.3 sein.

**Aufgabe 4.** Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms berechnen sich zu

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} .$$

Im Fall

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

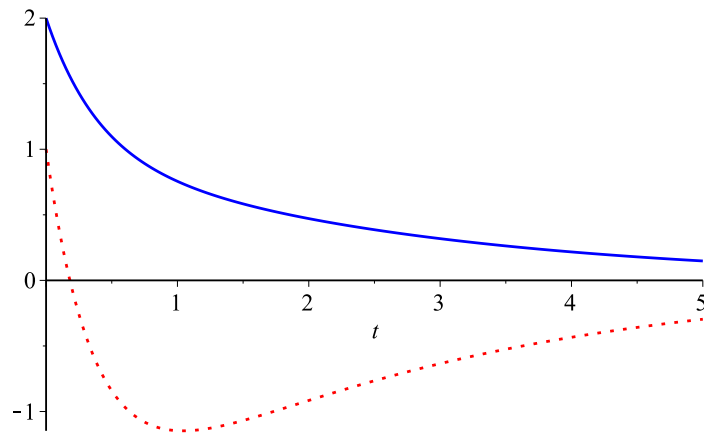


Abbildung 1.3: Der Kriechfall.

ist das System stark gedämpft und man spricht von **Kriechfall** (vgl. Abbildung 1.3).

Der Fall

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

heißt **aperiodischer Grenzfall** (Abbildung 1.4).

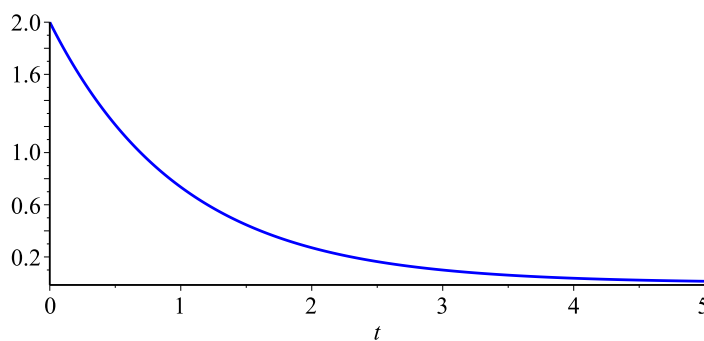


Abbildung 1.4: Der aperiodische Grenzfall.

Bei schwacher Dämpfung

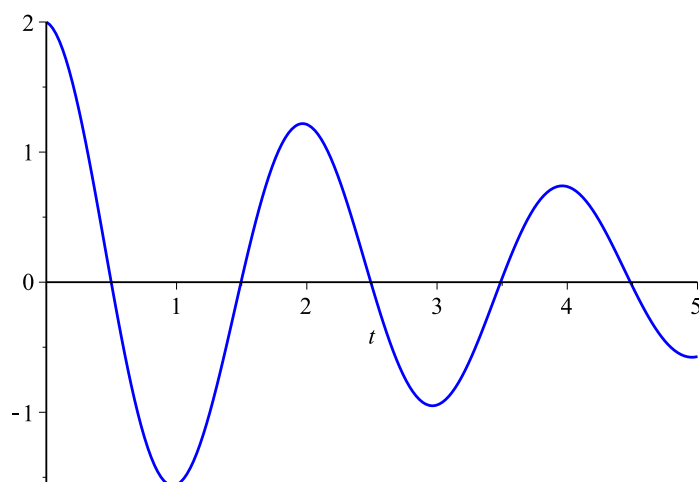


Abbildung 1.5: Der Schwingfall.

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

befindet man sich im so genannten **Schwingfall** (Abbildung 1.5).

**Aufgabe 5.** Die charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1) = 0 .$$

Es ist  $\lambda_1 = 1$  eine einfache Nullstelle und Satz 1.4 liefert als Lösung

$$y_1(x) = e^x .$$

$\lambda_2 = -1$  ist zweifache Nullstelle und man erhält als weitere linear unabhängige Lösungen

$$y_2(x) = e^{-x}, \quad y_3(x) = xe^{-x}.$$

Das Gleichungssystem zur Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -3/4 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

Mit einer Probe verifiziert man leicht, dass

$$y(x) = \frac{3}{4}e^x - \frac{3}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-x}$$

das Anfangswertproblem löst.

---

**Aufgabe 6.** Die gesuchten Nullstellen des charakteristischen Polynoms lauten:

i)  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i,$

ii)  $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i.$

Satz 1.4 liefert jeweils die allgemeine Lösung.

---

**Aufgabe 7.** Die charakteristische Gleichung des homogenen Systems lautet

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0 .$$

Nach Satz 1.4 bilden

$$y_1(x) = e^{2x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = xe^{2x}$$

ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung.

Eine Variation der Konstanten führt auf

$$\begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x}(1+2x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix} .$$

Man findet

$$c'_1 = -xe^{-x} , \quad c'_2 = e^{-x}$$

und als eine spezielle Lösung (Probe!)

$$y_s = e^{-x}(1+x)e^{2x} - e^{-x}xe^{2x} = e^x .$$

---

**Aufgabe 8.** Nach Aufgabe 6, *ii*), hat man als Fundamentalsystem im homogenen Fall

$$y_1(x) = e^x \cos(x) , \quad y_2(x) = e^x \sin(x) .$$

Im Ansatz nach der rechten Seite ist  $\sigma + i\omega = 0 \neq 1 \pm i$ , also keine Wurzel des charakteristischen Polynoms.

Damit lautet der Ansatz für eine spezielle Lösung

$$y_s = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2$$

und mit

$$y'_s = \gamma_1 + 2\gamma_2 x, \quad y''_s = 2\gamma_2$$

erhält man

$$2\gamma_2 - 2(\gamma_1 + 2\gamma_2 x) + 2(\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2) = x^2.$$

Man findet

$$y_s = \frac{1}{2} + x + \frac{1}{2}x^2.$$

---

# Kapitel 2

## Systeme linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung

### 2.1 Gleichung erster Ordnung und System $n$ -ter Ordnung

Häufig bestehen geeignete mathematische Modelle aus mehreren Differentialgleichungen für mehrere gesuchte Funktion, d.h. aus Systemen von Differentialgleichungen.

In diesem Kapitel werden [Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung](#) vorgestellt.

Die Diskussion ist auch für das Verständnis im Fall einer Gleichung der Ordnung  $n$  von großer Bedeutung, da eine Differentialgleichung  $n^{ter}$  Ordnung wie folgt auf eine System erster Ordnung zurückgeführt werden kann und somit Ergebnisse im Kontext von Systemen auf den Fall von Gleichungen übertragen werden können.

Man betrachte einerseits ein explizites System erster Ordnung bestehend aus  $n$  Gleichungen, welches per definitionem die Gestalt hat:

$$\underline{\mathbf{y}}'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Hier ist  $I$  ein evtl. verallgemeinertes Intervall,  $W \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V = I \times W \subset \mathbb{R}^{n+1}$  und gegeben sei die Funktionen  $f_i: V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Gesucht ist eine Lösung  $\underline{\mathbf{y}}: I \rightarrow W$  des Systems (1).

Andererseits sei  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  und  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung der expliziten Differentialgleichung  $n^{ter}$  Ordnung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad \text{mit} \quad (x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in V \quad (2)$$

für alle  $x \in I$ .

Ausgehend von dieser Lösung  $y$  der Gleichung  $n^{ter}$  Ordnung definiert man die Funktionen  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , mittels der Vorschriften

$$y_1(x) := y(x), \quad y_2(x) := y'(x), \quad \dots, \quad y_n(x) := y^{(n-1)}(x) \quad (3)$$

für alle  $x \in I$ .

Mit  $\underline{\mathbf{y}}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$\underline{\mathbf{y}}(x) := \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } x \in I, \quad (4)$$

erhält man wegen (3), mit komponentenweiser Differentiation und mit (2)



$$\begin{aligned}
 \underline{y}' &= \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ f(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}. \tag{5}
 \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Löst die Funktion  $y$  die Gleichung (2) so löst  $\underline{y}$  aus (4) mit den Funktionen

$$\begin{aligned}
 f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= y_2, \\
 f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= y_3, \\
 &\vdots = \vdots \\
 f_{n-1}(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= y_n, \\
 f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_n)
 \end{aligned}$$

ein System erster Ordnung der Form (1).

Der umgekehrte Prozess liefert aus einer Lösung des Systems erster Ordnung (5) eine Lösung der Gleichung erster Ordnung (2).

**Bemerkung.** Dies funktioniert nicht für beliebige Systeme der Form (1)

sondern nur unter Ausnutzung der speziellen Form der rechten Seite des Systems (5).

---

### Ein Beispiel.

Man betrachte die Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' = -4y + 4y' =: f(y, y') . \quad (6)$$

Nach Kapitel 1.3 lautet die charakteristische Gleichung

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

und Satz 1.4 liefert das Fundamentalsystem

$$y(x) = e^{2x} , \quad \tilde{y}(x) = xe^{2x} . \quad (7)$$

Die Gleichung (6) kann nach den obigen Betrachtungen in das System erster Ordnung (vgl. (5)) überführt werden:

$$\underline{\mathbf{y}}'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -4y_1 + 4y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{y}} . \quad (8)$$

Das Fundamentalsystem aus (7) liefert als Lösungen von (8):

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{y}}(x) &= \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 2e^{2x} \end{pmatrix} , \\ \underline{\tilde{\mathbf{y}}}(x) &= \begin{pmatrix} \tilde{y}(x) \\ \tilde{y}'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xe^{2x} \\ e^{2x}(1 + 2x) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$


---

## Das Anfangswertproblem.

Betrachtet man zu (2) die Anfangswerte

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_0^{(1)} \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)}, \end{aligned}$$

so gehören zum System (5) die Anfangsdaten

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= y_0 \\ y_2(x_0) &= y_0^{(1)} \\ &\vdots \\ y_n(x_0) &= y_0^{(n-1)}. \end{aligned}$$

## 2.2 Homogene Systeme linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung (Fundamentalsystem; allgemeine Lösung; Wronski-Determinante)

In diesem Abschnitt wird stets ein lineares homogenes System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung ( $x \in I$ )

$$\underline{\mathbf{y}}' = A(x)\underline{\mathbf{y}} \tag{9}$$

betrachtet, wobei  $I$  ein evtl. verallgemeinertes Intervall und die gesuchte Lösung  $\underline{\mathbf{y}}$  eine Funktion  $\underline{\mathbf{y}}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$  sei, d.h.

$$\underline{\mathbf{y}}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}.$$

Es ist  $A(x) \in M(n, n)$  für jedes  $x \in I$ ,

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Dabei sei ausdrücklich betont, dass die Koeffizienten  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$  nicht konstant sein müssen und **von  $x$  abhängen** können.

### Lineare Unabhängigkeit.

Um den Lösungsraum von (9) zu charakterisieren, benötigt man wieder den Begriff der **linearen Unabhängigkeit**, der nahezu wörtlich aus Kapitel 1.2 übernommen werden kann (vgl. Definition 1.2, die anschließenden Bemerkungen übertragen sich ebenfalls).

#### Definition 2.1.

#### LINEAR UNABHÄNGIGE LÖSUNGEN

Die Funktionen  $\underline{\mathbf{y}}^{(1)}, \dots, \underline{\mathbf{y}}^{(k)}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  seien auf einem (verallgemeinerten) Intervall  $I$  definiert.

Sie heißen **linear unabhängig** auf  $I$ , falls aus

$$c_1 \underline{\mathbf{y}}^{(1)}(x) + c_2 \underline{\mathbf{y}}^{(2)}(x) + \dots + c_k \underline{\mathbf{y}}^{(k)}(x) = \underline{\mathbf{0}} \quad \text{für alle } x \in I,$$

$c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , stets folgt

$$c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0 .$$

Sonst heißen die Funktionen *linear abhängig* auf  $I$ .

---

**Bezeichnung.** Die Notation  $\underline{\mathbf{y}}^{(1)}, \dots, \underline{\mathbf{y}}^{(k)}$  zur Bezeichnung der Funktionenfamilie dient nur zur Durchnummerierung und hat nichts mit höheren Ableitungen zu tun.

Da in diesem Kapitel nur Ableitungen erster Ordnung auftreten, kann es zu keinen Verwechslungen kommen. Tiefgestellte Indizes bezeichnen im Folgenden wie üblich die Komponenten einer vektorwertigen Funktion.

**Bemerkung.** Wie bereits nach Satz 1.1 erwähnt, wird auf die eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems im vierten Teil der Vorlesungsreihe in einem allgemeineren Kontext eingegangen.

---

## Fundamentalsystem von Lösungen.

Hier wird zunächst das Gegenstück zu Satz 1.2 formuliert.

### Satz 2.1. FUNDAMENTALSYSTEM

Die Funktionen  $a_{ij}(x): I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$  seien stetig auf  $I$ .

- i) Dann hat das homogene System (9) ein *Fundamentalsystem*  $\mathcal{F}$  von Lösungen, d.h.  $n$  linear unabhängige Lösungen  $\underline{\mathbf{y}}^{(1)}, \underline{\mathbf{y}}^{(2)}, \dots, \underline{\mathbf{y}}^{(n)}$  auf  $I$ .
- ii) Ist  $\mathcal{F} = (\underline{\mathbf{y}}^{(1)}, \underline{\mathbf{y}}^{(2)}, \dots, \underline{\mathbf{y}}^{(n)})$  ein Fundamentalsystem von Lösungen, so ist *jede Lösung* von (9) von der Form

$$\underline{\mathbf{y}}(x) = c_1 \underline{\mathbf{y}}^{(1)}(x) + c_2 \underline{\mathbf{y}}^{(2)}(x) + \cdots + c_n \underline{\mathbf{y}}^{(n)}(x) \quad \text{für alle } x \in I,$$

wobei die  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , reelle Konstanten bezeichnen.

$$\underline{\mathbf{y}}(x) = \sum_{i=1}^n c_i \underline{\mathbf{y}}^{(i)}(x), \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad x \in I,$$

heißt die *allgemeine Lösung* von (9).

---

Auch das Kriterium zur Prüfung auf lineare Unabhängigkeit von Lösungen (Satz 1.3) ist nahezu wörtlich auf Systeme zu übertragen, wobei in den Spalten der Determinante lediglich die Ableitungen durch die Komponenten zu ersetzen sind.

**Satz 2.2.** WRONSKI-DETERMINANTE

- i) Es sind  $n$  Lösungen  $\underline{\mathbf{y}}^{(1)}, \dots, \underline{\mathbf{y}}^{(n)}$  des Systems (9) auf  $I$  *genau dann* linear unabhängig, wenn für (mindestens) ein  $x \in I$  die *Wronski-Determinante* von Null verschieden ist;

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x) & y_1^{(2)}(x) & \cdots & y_1^{(n)}(x) \\ y_2^{(1)}(x) & y_2^{(2)}(x) & \cdots & y_2^{(n)}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n^{(1)}(x) & y_n^{(2)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

- ii) Ist die Wronski-Determinante für ein  $x \in I$  von Null verschieden, so ist sie für alle  $x \in I$  von Null verschieden.
-

Als Beispiel dient hier

---

### Ein System mit nicht-konstanten Koeffizienten.

Für  $x > 0$  und  $n = 2$  sei das lineare homogene System

$$\underline{\mathbf{y}}' = A(x)\underline{\mathbf{y}} \quad \text{mit} \quad A(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x(x^2+1)} & \frac{1}{x^2(x^2+1)} \\ \frac{x^2}{x^2+1} & \frac{2x^2+1}{x(x^2+1)} \end{pmatrix}$$

betrachtet, d.h. ausführlich

$$\begin{aligned} y_1' &= -\frac{1}{x(x^2+1)}y_1 + \frac{1}{x^2(x^2+1)}y_2, \\ y_2' &= -\frac{x^2}{x^2+1}y_1 + \frac{2x^2+1}{x(x^2+1)}y_2. \end{aligned}$$

Mit

$$\underline{\mathbf{y}}^{(1)}(x) := \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{y}}^{(2)}(x) := \begin{pmatrix} -1/x \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad x > 0,$$

berechnet man leicht

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{y}}^{(1)'}(x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x(x^2+1)} & \frac{1}{x^2(x^2+1)} \\ -\frac{x^2}{x^2+1} & \frac{2x^2+1}{x(x^2+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \\ &= A(x)\underline{\mathbf{y}}^{(1)}(x) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{y}}^{(2)'}(x) &= \begin{pmatrix} 1/x^2 \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x(x^2+1)} & \frac{1}{x^2(x^2+1)} \\ -\frac{x^2}{x^2+1} & \frac{2x^2+1}{x(x^2+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/x \\ x^2 \end{pmatrix} \\
&= A(x)\underline{\mathbf{y}}^{(2)}(x) .
\end{aligned}$$

Sowohl  $\underline{\mathbf{y}}^{(1)}(x)$  als auch  $\underline{\mathbf{y}}^{(2)}(x)$  lösen also für  $x > 0$  das betrachtete System.

Zur Beantwortung der Frage, ob damit ein Fundamentalsystem von Lösungen gefunden ist, d.h. ob die beiden Funktionen auf  $I = (0, \infty)$  linear unabhängig sind, wird die Wronski-Determinante berechnet:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1/x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = x^2 + 1 \neq 0 ,$$

es handelt sich also tatsächlich um ein Fundamentalsystem.

### 2.3 Inhomogene Systeme linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung (Variation der Konstanten; Fundamentalmatrix)

Satz 1.5 über die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung überträgt sich wieder nahezu wörtlich auf die [allgemeine Lösung](#) des inhomogenen Systems

$$\underline{\mathbf{y}}' = A(x)\underline{\mathbf{y}} + \underline{\mathbf{r}}(x) , \tag{10}$$

wobei die Daten (die Einträge von  $A(x)$  bzw. die Komponenten von  $\underline{\mathbf{r}}(x)$ ) als stetige Funktionen vorausgesetzt sind.

Die Funktion  $\underline{\mathbf{r}}(x)$  ist wie die gesuchte Funktion  $\underline{\mathbf{y}}(x)$  eine vektorwertige Funktion  $I \rightarrow \mathbb{R}^n$  und das System lautet ausführlich geschrieben



$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + r_1(x) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + r_n(x) . \end{aligned}$$

Entscheidend ist auch hier das Auffinden einer **speziellen Lösung** des inhomogenen Systems, die zumindest prinzipiell mithilfe einer **Variation der Konstanten** konstruiert werden kann.

Dazu benötigt man noch die

**Notation.** Ist  $\underline{\mathbf{y}}^{(1)}, \dots, \underline{\mathbf{y}}^{(n)}$  ein Fundamentalsystem von Lösungen des homogenen Systems

$$\underline{\mathbf{y}}' = A(x)\underline{\mathbf{y}} , \tag{11}$$

so nennt man die Matrix bestehend aus diesen Spaltenvektoren,

$$Y := (\underline{\mathbf{y}}^{(1)}(x) \ \underline{\mathbf{y}}^{(2)}(x) \ \dots \ \underline{\mathbf{y}}^{(n)}(x)) = \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(x) & \dots & y_1^{(n)}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_n^{(1)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{pmatrix}$$

eine **Fundamentalmatrix** des homogenen Systems (11).

Weiterhin wird aus reellen Konstanten  $c_1, \dots, c_n$  der Vektor gebildet:

$$\underline{\mathbf{c}} := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n .$$

Man beachte, dass mit dieser Schreibweise gilt

$$M(n, n) \ni Y' = A(x)Y ,$$

$$\mathbb{R}^n \ni Y(x)\underline{\mathbf{c}} = c_1 \underline{\mathbf{y}}^{(1)}(x) + \cdots + c_n \underline{\mathbf{y}}^{(n)}(x) ,$$

*d.h. die allgemeine Lösung des homogenen Systems kann als  $Y\underline{\mathbf{c}}$  geschrieben werden.*

Der Ansatz für eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems (10) lautet nun mit einer auf  $I$  differenzierbaren vektorwertigen Funktion  $\underline{\mathbf{c}}(x)$

$$\underline{\mathbf{y}}^{(s)}(x) = Y(x)\underline{\mathbf{c}}(x) .$$

Differentiation ergibt (da  $Y$  Fundamentalmatrix ist)

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{y}}^{(s)'}(x) &= Y'(x)\underline{\mathbf{c}}(x) + Y(x)\underline{\mathbf{c}}'(x) \\ &= A(x)Y(x)\underline{\mathbf{c}}(x) + Y(x)\underline{\mathbf{c}}'(x) \\ &= A(x)\underline{\mathbf{y}}^{(s)}(x) + Y(x)\underline{\mathbf{c}}'(x) . \end{aligned}$$

Also löst  $\underline{\mathbf{y}}^{(s)}(x)$  **genau dann** die inhomogene Differentialgleichung, falls (die Integration ist komponentenweise zu interpretieren)

$$Y(x)\underline{\mathbf{c}}'(x) = \underline{\mathbf{r}}(x) ,$$

das bedeutet

$$\underline{\mathbf{c}}(x) = \underline{\mathbf{c}}^{(0)} + \int_{x_0}^x [Y(t)]^{-1} \underline{\mathbf{r}}(t) \, dt , \quad \underline{\mathbf{c}}^{(0)} \in \mathbb{R}^n , \quad x_0 \in I ,$$

wobei die Fundamentalmatrix  $Y$  invertierbar ist (warum?).

Es ist gezeigt:

**Satz 2.3.** ALLGEMEINE LÖSUNG INHOMOGENES SYSTEM

Auf  $I$  betrachte man das inhomogene System

$$\underline{\mathbf{y}}' = A(x)\underline{\mathbf{y}} + \underline{\mathbf{r}}(x) ,$$

wobei die Daten  $A(x)$  und  $\underline{\mathbf{r}}(x)$  stetige Funktionen auf  $I$  seien.

Es sei  $Y(x)$  eine Fundamentalmatrix des zugehörigen homogenen Systems.

Dann kann die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems geschrieben werden als ( $x_0 \in I$ )

$$\underline{\mathbf{y}}^{(inhom)}(x) = Y(x) \left[ \underline{\mathbf{c}}^{(0)} + \int_{x_0}^x [Y(t)]^{-1} \underline{\mathbf{r}}(t) \, dt \right] , \quad \underline{\mathbf{c}}^{(0)} \in \mathbb{R}^n .$$


---

**Bemerkungen.**

i) Eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems ist wie oben bewiesen (mit der Wahl  $\underline{\mathbf{c}}^{(0)} = \underline{\mathbf{0}}$ )

$$\underline{\mathbf{y}}^{(s)} = Y(x) \int_{x_0}^x [Y(t)]^{-1} \underline{\mathbf{r}}(t) \, dt .$$

ii) Wird eine Lösung des Anfangswertproblems mit

$$\underline{\mathbf{y}}(x_0) = \underline{\mathbf{y}}^{(0)}$$

betrachtet, so ist  $\underline{\mathbf{c}}^{(0)} = [Y(x_0)]^{-1} \underline{\mathbf{y}}^{(0)}$  zu wählen.

---

### Erstes Beispiel zur Variation der Konstanten.

In Kapitel 1.4 dient die inhomogene Gleichung

$$y'' + y = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y'' = -y + x^2 = f(x, y, y') \quad (12)$$

als Beispiel zur Demonstration der Variation der Konstanten im Fall von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen  $n^{ter}$  Ordnung, wobei in dem speziellen Beispiel  $f(x, y, y') = f(x, y)$  geschrieben werden kann.

Diese Art der Variation der Konstanten wird nun mit dem Fall von Systemen erster Ordnung verglichen, indem zunächst (12) wie bekannt mit einem System erster Ordnung identifiziert wird:

$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \underline{y} + \underline{r}(x), \quad \underline{r}(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Aus dem Fundamentalsystem  $y_1(x) = \cos(x)$ ,  $y_2(x) = \sin(x)$  zum homogenen Fall der Gleichung (12) ergibt sich für (13) die Fundamentalmatrix

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}.$$

Um Satz 2.3 anwenden zu können, wird zunächst berechnet

$$Y^{-1}(x)\underline{r}(x) = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 \sin(x) \\ x^2 \cos(x) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

In (14) sind genau die Funktionen  $c_1'(x)$ ,  $c_2'(x)$  nach Kapitel 1.4 berechnet.

Die anschließende Integration liefert (mit geeigneter Wahl von  $\underline{c}^{(0)}$ ) nach den in Kapitel 1.4 genannten Rechnungen

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{c}}(x) &= \underline{\mathbf{c}}^{(0)} + \int_{x_0}^x \begin{pmatrix} -t^2 \sin(t) \\ t^2 \cos(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} x^2 \cos(x) - 2x \sin(x) - 2 \cos(x) \\ x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Man erhält als eine spezielle Lösung

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{y}}^{(s)} &= Y(x) \begin{pmatrix} x^2 \cos(x) - 2x \sin(x) - 2 \cos(x) \\ x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^2 - 2 \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_s(x) \\ y'_s(x) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

wobei  $y_s(x) = x^2 - 2$  die in Kapitel 1.4 gefundene spezielle Lösung der zugehörigen Gleichung zweiter Ordnung ist.

---

### **Zweites Beispiel zur Variation der Konstanten.**

Abschließend wird die Variation der Konstanten für ein System erster Ordnung vorgeführt, dessen Koeffizienten nicht konstant sind.

Betrachtet sei für  $x > 0$  das System

$$\underline{\mathbf{y}}' = A(x)\underline{\mathbf{y}} + \underline{\mathbf{r}}(x)$$

mit (siehe oben)

$$A(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x(x^2+1)} & \frac{1}{x^2(x^2+1)} \\ -\frac{x^2}{x^2+1} & \frac{2x^2+1}{x(x^2+1)} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{r}}(x) = \begin{pmatrix} 1/x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist bereits gezeigt, dass

$$\underline{\mathbf{y}}^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{y}}^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} -1/x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängige Lösungen des homogenen Systems sind, eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems ist

$$Y(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1/x \\ x & x^2 \end{pmatrix}.$$

Man findet

$$[Y(x)]^{-1} = \frac{1}{1+x^2} \begin{pmatrix} x^2 & 1/x \\ -x & 1 \end{pmatrix}$$

sowie mit der Wahl  $x_0 = 1$  (jedes  $x_0 > 0$  ist hier eine zulässige Wahl)

$$\begin{aligned} \int_1^x [Y(t)]^{-1} \underline{\mathbf{r}}(t) \, dt &= \int_1^x \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} t^2 & 1/t \\ -t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/t \\ 1 \end{pmatrix} \, dt \\ &= \int_1^x \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} t + 1/t \\ 0 \end{pmatrix} \, dt \\ &= \int_1^x \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \, dt \\ &= \begin{pmatrix} \ln(x) \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems ist nach Satz 2.3

$$\underline{\mathbf{y}}^{(s)} = \begin{pmatrix} 1 & -1/x \\ x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln(x) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(x) \\ x \ln(x) \end{pmatrix}.$$

Dies kann wieder mit einer Probe verifiziert werden.

**Bemerkung.** *Die spezielle Situation im Falle von Systemen mit konstanten Koeffizienten wird im Anschluss an die geometrischen Betrachtungen der folgenden Kapitel als direkte Anwendung präsentiert.*





## 2.4 Übungsaufgaben zu Kapitel 2.4

**Aufgabe 1.** Betrachten Sie ein Fundamentalsystem einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung  $n^{ter}$  Ordnung.

Zeigen Sie mithilfe der Wronski-Determinante für eine Gleichung  $n^{ter}$  Ordnung bzw. für ein System erster Ordnung:

Wird die Gleichung  $n^{ter}$  Ordnung auf ein System erster Ordnung zurückgeführt, so entsteht dabei ein Fundamentalsystem des Systems erster Ordnung.

---

**Aufgabe 2.** Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y''' - 8y'' + 16y' = 0 .$$

i) Finden Sie die allgemeine Lösung dieser homogenen Gleichung.

ii) Führen Sie die Gleichung auf ein System

$$\underline{\mathbf{y}}' = A\underline{\mathbf{y}}$$

erster Ordnung zurück und bestimmen Sie mithilfe von (a) ein Fundamentalsystem von Lösungen für dieses System erster Ordnung. Machen Sie eine Probe.



# Exkurs

## Lineare Abbildungen

[Lineare Abbildungen](#) sind eine natürliche Klasse von Abbildungen zwischen zwei Vektorräumen, denn sie vertragen sich per definitionem mit der Struktur linearer Räume.

Viele relevante Operationen können als lineare Abbildungen interpretiert werden.

Beispielsweise beschreibt die lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \ni \underline{x} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \underline{x}$$

eine Rotation im  $\mathbb{R}^2$ .

Aber auch beim Studium nicht-linearer Probleme spielen lineare Abbildungen eine gewichtige Rolle: Nicht-lineare Probleme sind in der Regel nur schwer oder gar nicht explizit lösbar.

Deshalb approximiert man diese häufig zu einer gegebenen Fehlertoleranz mit (affin) linearen Funktionen (für „kleine“  $x$  setzt man  $e^x \approx 1 + x$ , wie es die Potenzreihe nahelegt, etc.), sodass eine mehr oder weniger explizite Rechnung möglich ist.

Nach der Definition sowie der Klärung der grundlegenden Begriffe und Eigenschaften steht in diesem Kapitel der Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen im Vordergrund.

## E.1 Definition und erste Eigenschaften (Kern und Bild einer linearen Abbildung; Rang; Rangsatz; Injektivität, Surjektivität und Bijektivität einer linearen Abbildung)

Im einfachsten Fall ist  $f$  eine lineare Abbildung  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Diese ist von der Form

$$x \mapsto ax, \quad a \in \mathbb{R} \text{ fixiert.}$$

Im allgemeinen Fall ist die oben erwähnte Verträglichkeit mit der Struktur von Vektorräumen in Definition E.1 festgehalten, wobei stets daran zu denken ist, dass sich die Additionen „+“ auf der linken und der rechten Seite unterscheiden, obwohl sie mit dem gleichen Symbol bezeichnet werden.

Auf der einen Seite handelt es sich um die Addition im Vektorraum  $V$  (z.B. im  $\mathbb{R}^m$ ), auf der anderen Seite um die Addition im Vektorraum  $W$  (z.B. im  $\mathbb{R}^n$  oder auch in einem Vektorraum von Funktionen).

### Definition E.1. LINEARE ABBILDUNG

*Es seien  $V$  und  $W$  zwei Vektorräume über demselben Körper, hier der Einfachheit halber stets über  $\mathbb{R}$ .*

*Eine Abbildung  $L: V \rightarrow W$  heißt lineare Abbildung oder **Homomorphismus**, falls für alle  $\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}} \in V$  und für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:*

$$L(\underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{w}}) = L(\underline{\mathbf{v}}) + L(\underline{\mathbf{w}}),$$

$$L(\lambda \underline{\mathbf{v}}) = \lambda L(\underline{\mathbf{v}}).$$

---

Ebenso wie in einem linearen Raum (in einem Vektorraum) stets die  $\mathbf{0}$  liegen muss, impliziert die Definition einer linearen Abbildung ( $\underline{\mathbf{v}} \in V$  beliebig)

$$L(\underline{\mathbf{0}}) = L(0\underline{\mathbf{v}}) = 0L(\underline{\mathbf{v}}) = \underline{\mathbf{0}} .$$

Die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$x \mapsto ax + b , \quad a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0 ,$$

ist demnach nicht linear, man nennt sie **affin linear**.

Zur Vereinfachung der Darstellung werden **im Folgenden lineare Abbildungen vom  $\mathbb{R}^m$  in den  $\mathbb{R}^n$  betrachtet**, obwohl in gleicher Weise auch andere Beispiele diskutiert werden können.

---

### **Grundlegende Begriffe.**

Ist  $A \in M(n, m)$ , so ist die Abbildung  $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$\underline{\mathbf{x}} \mapsto A\underline{\mathbf{x}}$$

linear, wie man leicht nachrechnet bzw. wie bereits gezeigt ist.

Daher liegt es nahe, Begriffsbildungen für Matrizen auf lineare Abbildungen zu übertragen:

Es sei  $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lineare Abbildung.

i) Dann ist der **Kern** der Abbildung  $L$  per definitionem

$$\text{Kern } L := L^{-1}(\{\underline{\mathbf{0}}\}) := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m : L(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{0}}\} .$$

ii) Das **Bild** der Abbildung ist

$$\text{bild } L := \{ \underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n : \underline{\mathbf{y}} = L(\underline{\mathbf{x}}) \text{ für ein } \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m \} .$$

iii) Als **Rang** der Abbildung  $L$  definiert man

$$\text{rg } L := \dim (\text{bild } L) .$$

Die Motivation für die Bezeichnung „Rang einer linearen Abbildung“ im Vergleich zur Definition des Rangs einer Matrix wird in Kürze deutlich.

**Beispiel.** Betrachtet man die lineare Abbildung  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$L(\underline{\mathbf{x}}) := x_1 - x_2 ,$$

so ist  $\underline{\mathbf{x}} \in \text{kern } L$  genau dann, wenn gilt  $x_1 = x_2$ , d.h.

$$\text{kern } L = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} .$$

In dem Beispiel ist  $\text{bild } L = \mathbb{R}$ .

Man erkennt, dass der Kern und das Bild Unterräume sind (eine Vektorraumstruktur haben), wodurch der Begriff „Dimension“ überhaupt erst definiert ist.

Tatsächlich ist als Übungsaufgabe zu diesem Kapitel zu zeigen, dass der Kern und das Bild einer linearen Abbildung  $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  Unterräume des  $\mathbb{R}^m$  bzw. des  $\mathbb{R}^n$  sind.

---

**Der Rangsatz.**

Um den sogenannten **Rangsatz** als Gegenstück zu Teil II, Satz 1.3 zu verstehen, beantworte man zunächst die folgenden beiden Fragen (vgl. Übungskapitel E.4):

Es sei  $L$  eine lineare Abbildung vom  $\mathbb{R}^m$  in den  $\mathbb{R}^n$ .

- i) Ist es möglich, dass zwei linear abhängige Vektoren  $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^m$  auf zwei linear unabhängige Vektoren  $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$  abgebildet werden?
- ii) Ist es möglich, dass zwei linear unabhängige Vektoren  $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^m$  auf zwei linear abhängige Vektoren  $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$  abgebildet werden?

Falls ja, kann man daraus eine Aussage über kern  $L$  ableiten?

**Satz E.1.** **RANGSATZ**

Es sei  $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lineare Abbildung. Dann ist

$$\dim(\text{kern } L) + \text{rg } L = m .$$

---

Der Rangsatz ist in Abbildung E.1 anhand des einfachen Beispiels

$$L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad L(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

illustriert:

Der Kern ist ein eindimensionaler Unterraum (die rot dargestellte  $x_3$ -Achse), das Bild ist die blau skizzierte  $x_1, x_2$ -Ebene, also ein zweidimensionaler Unterraum.

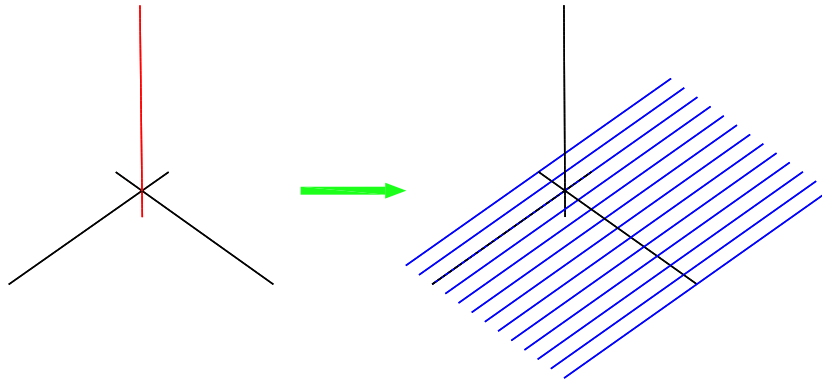


Abbildung E.1: Ein einfaches Beispiel um Rangsatz.

---

Als Korollar folgt aus dem Rangsatz unmittelbar die Äquivalenz von [Injektivität](#), [Surjektivität](#) und damit [Bijektivität](#) linearer Abbildungen.

**Korollar E.1.** INJEKTIVITÄT VERSUS SURJEKTIVITÄT

*Es sei  $n = m$  und  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei eine lineare Abbildung.*

*Dann ist  $L$  injektiv (d.h.  $\dim(\ker L) = 0$ ) genau dann, wenn  $L$  surjektiv ist (d.h.  $\operatorname{rg} L = n$ ).*

---

*Beweis.* Siehe Übungskapitel E.4

□



## E.2 Matrixdarstellung (Koordinaten; darstellende Matrix)

Eine Abbildung  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann linear, wenn sie von der einfachen Gestalt ist:

$$f(x) = ax, \quad a \in \mathbb{R} \text{ fixiert.}$$

Insbesondere ist die Abbildung allein durch den Parameter  $a = f(1)$  charakterisiert, da die Bedingung der Linearität für alle  $x \in \mathbb{R}$  liefert:

$$f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = ax.$$

### Kann diese Beobachtung verallgemeinert werden?

Im Folgenden sei  $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lineare Abbildung.

Betrachtet seien weiter eine Basis

$$\mathcal{V} = (\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \dots, \underline{\mathbf{v}}^{(m)})$$

des  $\mathbb{R}^m$  und eine Basis des  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\mathcal{W} = (\underline{\mathbf{w}}^{(1)}, \dots, \underline{\mathbf{w}}^{(n)}).$$

Bzgl. der Basis  $\mathcal{V}$  des  $\mathbb{R}^m$  ist jedes  $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m$  darstellbar als

$$\underline{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^m \alpha_j \underline{\mathbf{v}}^{(j)}, \quad \alpha_j \in \mathbb{R},$$

und für die lineare Abbildung  $L$  folgt nach Definition E.1

$$L(\underline{\mathbf{x}}) = L\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j \underline{\mathbf{v}}^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^m \alpha_j L(\underline{\mathbf{v}}^{(j)}). \quad (1)$$

**Beobachtung.**  $L(\underline{\mathbf{x}})$  ist demnach für alle  $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m$  festgelegt, wenn nur die Bilder  $L(\underline{\mathbf{v}}^{(j)})$ ,  $j = 1, \dots, m$ , irgendeiner Basis des  $\mathbb{R}^m$  bekannt sind.

Für jedes fixierte  $1 \leq j \leq m$  kann das Bild  $L(\underline{\mathbf{v}}^{(j)}) \in \mathbb{R}^n$  aber wiederum bzgl. der Basis  $\mathcal{W}$  des  $\mathbb{R}^n$  geschrieben werden:

$$L(\underline{\mathbf{v}}^{(j)}) = \sum_{i=1}^n \beta_i^{(j)} \underline{\mathbf{w}}^{(i)}, \quad \beta_i^{(j)} = \beta_i(\underline{\mathbf{v}}^{(j)}) \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Dabei betont die Notation, dass zu jedem festen  $\underline{\mathbf{v}}^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , jeweils  $n$  Koeffizienten  $\beta_i^{(j)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , wie oben zu wählen sind.

Diese hängen von den gewählten Basen  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  ab.

Nach (1) und (2) gilt für jedes  $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m$  die Darstellung

$$L(\underline{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \left[ \sum_{i=1}^n \beta_i^{(j)} \underline{\mathbf{w}}^{(i)} \right] = \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^m \beta_i^{(j)} \alpha_j \right] \underline{\mathbf{w}}^{(i)}. \quad (3)$$

### Erstes Beispiel.

Es sei  $\mathcal{E} = (\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)})$  die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{F} = (\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)}, \underline{\mathbf{f}}^{(3)})$  sei die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^3$ .

Weiterhin sei  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine lineare Abbildung und es gelte (wie bereits gesagt, ist durch diese Wahl die lineare Abbildung eindeutig bestimmt)

$$L(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}) = \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \underline{\mathbf{f}}^{(3)}, \quad L(\underline{\mathbf{e}}^{(2)}) = \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + 2\underline{\mathbf{f}}^{(2)}. \quad (4)$$

Mit obiger Notation (2) ist

$$\begin{aligned} \beta_1^{(1)} &= 1, & \beta_2^{(1)} &= 0, & \beta_3^{(1)} &= 1; \\ \beta_1^{(2)} &= 1, & \beta_2^{(2)} &= 2, & \beta_3^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Bezüglich der kanonischen Basis  $\mathcal{E}$  des  $\mathbb{R}^2$  (bzw.  $\mathcal{F}$  des  $\mathbb{R}^3$ ) wird ein beliebiges  $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$  (bzw.  $\underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^3$ ) nun wie üblich in **Koordinaten** geschrieben:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{x}} &= x_1 \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + x_2 \underline{\mathbf{e}}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}, \\ \underline{\mathbf{u}} &= u_1 \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + u_2 \underline{\mathbf{f}}^{(2)} + u_3 \underline{\mathbf{f}}^{(3)} =: \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{F}}.\end{aligned}\tag{6}$$

In dieser Weise werden die Vektoren  $L(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}), L(\underline{\mathbf{e}}^{(2)}) \in \mathbb{R}^3$  in **Koordinaten bzgl. der kanonischen Basis  $\mathcal{F}$  des  $\mathbb{R}^3$**  dargestellt:

$$\begin{aligned}L(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}) &= \begin{pmatrix} \beta_1^{(1)} \\ \beta_2^{(1)} \\ \beta_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{F}}, \\ L(\underline{\mathbf{e}}^{(2)}) &= \begin{pmatrix} \beta_1^{(2)} \\ \beta_2^{(2)} \\ \beta_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{F}}.\end{aligned}\tag{7}$$

Bildet man aus diesen **Spaltenvektoren** eine Matrix  $A$ , so folgt nach (3)

$$\begin{aligned}L(\underline{\mathbf{x}}) &= \sum_{i=1}^3 \left[ \sum_{j=1}^2 \beta_i^{(j)} x_j \right] \underline{\mathbf{f}}^{(i)} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^2 \beta_1^{(j)} x_j \\ \sum_{j=1}^2 \beta_2^{(j)} x_j \\ \sum_{j=1}^2 \beta_3^{(j)} x_j \end{pmatrix}_{\mathcal{F}} \\ &= A_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \quad \text{für alle } \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2,\end{aligned}\tag{8}$$

wobei

$$A_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = \left( \beta_i^{(j)} \right)_{\substack{1 \leq j \leq 2 \\ 1 \leq i \leq 3}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

**Beobachtung.** *Die lineare Abbildung  $L$  kann mit einer Matrix  $A$  identifiziert werden.*

*Die Bilder der Basis des  $\mathbb{R}^2$  werden als Spaltenvektoren im  $\mathbb{R}^3$  geschrieben und aus diesen Spaltenvektoren setzt sich die Matrix  $A$  zusammen.*

---

### Zweites Beispiel.

Man betrachte **dieselbe lineare Abbildung** wie im ersten Beispiel.

Als Basis des  $\mathbb{R}^2$  diene jetzt  $\mathcal{G} := (\underline{\mathbf{g}}^{(1)}, \underline{\mathbf{g}}^{(2)})$ ,

$$\underline{\mathbf{g}}^{(1)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \underline{\mathbf{e}}^{(2)}, \quad \underline{\mathbf{g}}^{(2)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} - \underline{\mathbf{e}}^{(2)},$$

$\mathcal{H} = (\underline{\mathbf{h}}^{(1)}, \underline{\mathbf{h}}^{(2)}, \underline{\mathbf{h}}^{(3)})$  werde als Basis des  $\mathbb{R}^3$  gewählt,

$$\underline{\mathbf{h}}^{(1)} = \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \underline{\mathbf{f}}^{(3)}, \quad \underline{\mathbf{h}}^{(2)} = \underline{\mathbf{f}}^{(2)} + \underline{\mathbf{f}}^{(3)}, \quad \underline{\mathbf{h}}^{(3)} = \underline{\mathbf{f}}^{(3)}.$$

Man berechnet

$$\begin{aligned} L(\underline{\mathbf{g}}^{(1)}) &= L(\underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \underline{\mathbf{e}}^{(2)}) = L(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}) + L(\underline{\mathbf{e}}^{(2)}) \\ &= 2\underline{\mathbf{f}}^{(1)} + 2\underline{\mathbf{f}}^{(2)} + \underline{\mathbf{f}}^{(3)} \end{aligned}$$

und analog

$$L(\underline{\mathbf{g}}^{(2)}) = \underline{\mathbf{f}}^{(3)} - 2\underline{\mathbf{f}}^{(2)}.$$

Nun sollen  $L(\underline{\mathbf{g}}^{(1)})$  und  $L(\underline{\mathbf{g}}^{(2)})$  bzgl. der neuen Basis  $\mathcal{H}$  dargestellt werden (vgl. (4) in der Diskussion des ersten Beispiels).

Dazu wird umgeformt

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{f}}^{(1)} &= \underline{\mathbf{h}}^{(1)} - \underline{\mathbf{h}}^{(3)} , \\ \underline{\mathbf{f}}^{(2)} &= \underline{\mathbf{h}}^{(2)} - \underline{\mathbf{h}}^{(3)} , \\ \underline{\mathbf{f}}^{(3)} &= \underline{\mathbf{h}}^{(3)} ,\end{aligned}$$

und anschließend eingesetzt

$$L(\underline{\mathbf{g}}^{(1)}) = 2\underline{\mathbf{h}}^{(1)} + 2\underline{\mathbf{h}}^{(2)} - 3\underline{\mathbf{h}}^{(3)} , \quad L(\underline{\mathbf{g}}^{(2)}) = -2\underline{\mathbf{h}}^{(2)} + 3\underline{\mathbf{h}}^{(3)} . \quad (10)$$

Anhand von (10) erkennt man das Gegenstück zu (5) **bezogen auf die Basen  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}$** ,

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_1^{(1)} &= 2 , & \tilde{\beta}_2^{(1)} &= 2 , & \tilde{\beta}_3^{(1)} &= -3 ; \\ \tilde{\beta}_1^{(2)} &= 0 , & \tilde{\beta}_2^{(2)} &= -2 , & \tilde{\beta}_3^{(2)} &= 3 .\end{aligned} \quad (11)$$

Schließlich wird für beliebiges  $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$  bzw. für beliebiges  $\underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^3$  die **Koordinatendarstellung bzgl. der Basis  $\mathcal{G}$**  bzw. bzgl. der Basis  $\mathcal{H}$  eingeführt:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{x}} &= \alpha_1 \underline{\mathbf{g}}^{(1)} + \alpha_2 \underline{\mathbf{g}}^{(2)} =: \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{G}} , \\ \underline{\mathbf{u}} &= \rho_1 \underline{\mathbf{h}}^{(1)} + \rho_2 \underline{\mathbf{h}}^{(2)} + \rho_3 \underline{\mathbf{h}}^{(3)} =: \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{H}} .\end{aligned} \quad (12)$$

Im Vergleich zum ersten Beispiel ersetzt (12) nun (6).

**Bemerkung.** Insbesondere gilt mit dieser Notation

$$\underline{\mathbf{g}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{G}}, \quad \underline{\mathbf{g}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{G}}.$$

Statt (7) ergibt sich

$$L(\underline{\mathbf{g}}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{H}}, \quad L(\underline{\mathbf{g}}^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{H}}. \quad (13)$$

(8) und (9) werden folglich ersetzt durch

$$\begin{aligned} L(\underline{\mathbf{x}}) &= \sum_{i=1}^3 \left[ \sum_{j=1}^2 \beta_i^{(j)} \alpha_j \right] \underline{\mathbf{h}}^{(i)} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^2 \beta_1^{(j)} \alpha_j \\ \sum_{j=1}^2 \beta_2^{(j)} \alpha_j \\ \sum_{j=1}^2 \beta_3^{(j)} \alpha_j \end{pmatrix}_{\mathcal{H}} \\ &= A_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{G}} \quad \text{für alle } \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2, \\ A_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}} &:= \left( \beta_i^{(j)} \right)_{\substack{1 \leq j \leq 2 \\ 1 \leq i \leq 3}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten kann die lineare Abbildung bei fixierten Basen  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}$  in Koordinaten als

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{G}} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{G}}$$

geschrieben werden, die Matrix

$$A_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

repräsentiert die lineare Abbildung  $L$  bzgl. der Basen  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}$ .

In der Tat berechnet man als Probe

$$A_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{H}},$$

$$A_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{H}}$$

als alternative Schreibweise für (13) und damit als Definition der linearen Abbildung.

In der Mitte sind dabei die Bezeichnungen  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}$  weggelassen, um zu verdeutlichen, dass es sich um das übliche Matrixprodukt handelt.

Im Folgenden wird oft ganz auf die Kennzeichnung der Basen verzichtet, sofern keine Verwechslungen auftreten können.

### Das allgemeine Schema.

Das allgemeine Schema zur **Darstellung einer linearen Abbildung als Matrix** bzgl. gegebener Basen lautet:

- i) Es sei  $\mathcal{G}$  eine Basis des  $\mathbb{R}^m$ ,  $\mathcal{H}$  eine Basis  $\mathbb{R}^n$  und  $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei eine lineare Abbildung.
- ii) Man berechne die Bilder (unter  $L$ ) der Basisvektoren von  $\mathcal{G}$ .
- iii) Von diesen Bildern wird die Koordinatendarstellung bzgl.  $\mathcal{H}$  berechnet.
- iv) Die Matrixdarstellung  $A_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}} \in M(n, m)$  der linearen Abbildung  $L$  bzgl. der Basen  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}$  erhält man, indem man aus diesen Spaltenvektoren eine Matrix bildet.

Die darstellende Matrix enthält mit anderen Worten die **Koordinaten der Bilder der Basisvektoren als Spaltenvektoren**.

- v) Ein beliebiges  $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$  wird **mit seiner Koordinatendarstellung**

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}_{\mathcal{G}}$$
**bzgl. der Basis  $\mathcal{G}$  identifiziert.**
- vi) Dann liefert  $A_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}_{\mathcal{G}}$  die **Koordinatendarstellung von  $L(\underline{x})$  bzgl. der Basis  $\mathcal{H}$ .**

### E.3 Basiswechsel und Koordinatentransformation

(Transformation der darstellenden Matrix; Tensor; kovariant; kontravariant)

Beim Übergang vom ersten zum zweiten Beispiel wurde dasselbe Problem bzgl. anderer Basen betrachtet, d.h. mithilfe eines **Basiswechsels** transformiert.



Ein solcher Basiswechsel kann konkrete Rechnungen erheblich vereinfachen, falls eine neue Basis die physikalischen oder geometrischen Eigenschaften eines Problems widerspiegelt.

Mit dem Basiswechsel ändern sich die Koordinaten eines Vektors und man spricht von einer [Koordinatentransformation](#).

Der Zusammenhang zwischen Basiswechsel und Koordinatentransformation wird nun systematisiert.

Es seien dazu

$$\mathcal{A} = (\underline{\mathbf{a}}^{(1)}, \dots, \underline{\mathbf{a}}^{(m)}) \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = (\underline{\mathbf{b}}^{(1)}, \dots, \underline{\mathbf{b}}^{(m)})$$

zwei Basen des  $\mathbb{R}^m$ .

Die „neuen“ Basisvektoren der Basis  $\mathcal{B}$  seien in Abhängigkeit der „alten“ Basisvektoren aus  $\mathcal{A}$  gegeben, d.h. mit Koeffizienten  $\gamma_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ , gelte

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{b}}^{(1)} &= \gamma_{11}\underline{\mathbf{a}}^{(1)} + \dots + \gamma_{1m}\underline{\mathbf{a}}^{(m)}, \\ &\vdots \\ \underline{\mathbf{b}}^{(m)} &= \gamma_{m1}\underline{\mathbf{a}}^{(1)} + \dots + \gamma_{mm}\underline{\mathbf{a}}^{(m)}. \end{aligned}$$

Aus diesen Koeffizienten entsteht die sogenannte [Transformationsmatrix](#) als die [transponierte Matrix](#) der Koeffizienten, d.h. man definiert

$$S := (\gamma_{ij})^T = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{m1} & \dots & \gamma_{mm} \end{pmatrix} \in M(m, m).$$

Hat nun  $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m$  bzgl.  $\mathcal{A}$  bzw.  $\mathcal{B}$  die Koordinatendarstellungen

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}_{\mathcal{A}}, \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}},$$

so berechnet man

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{x}} &= \alpha_1 \underline{\mathbf{a}}^{(1)} + \cdots + \alpha_m \underline{\mathbf{a}}^{(m)} = \beta_1 \underline{\mathbf{b}}^{(1)} + \cdots + \beta_m \underline{\mathbf{b}}^{(m)} \\ &= \sum_{j=1}^m \beta_j \left( \sum_{i=1}^m \gamma_{ji} \underline{\mathbf{a}}^{(i)} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^m \gamma_{ji} \beta_j \right) \underline{\mathbf{a}}^{(i)}. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten gilt die Beziehung

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^m \gamma_{ji} \beta_j.$$

zwischen den Koordinaten bzgl.  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$ .

Die zugehörige Matrixschreibweise lautet

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} = S \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = S^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}_{\mathcal{A}},$$

wobei die Invertierbarkeit von  $S$  unmittelbar daraus folgt, dass sowohl  $\mathcal{A}$  als auch  $\mathcal{B}$  Basen des  $\mathbb{R}^m$  sind.

**Beispiele.**

i) Sind die „neuen“ Basisvektoren lediglich Vielfache der „alten“ Basisvektoren im Sinne von  $\underline{\mathbf{b}}^{(j)} = \lambda \underline{\mathbf{a}}^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, m$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$ , so ist

$$S = \lambda I_m, \quad S^{-1} = \frac{1}{\lambda} I_m,$$

und man erkennt, dass die Koordinaten mit dem Kehrwert von  $\lambda$  skaliert werden.

In gewissem Sinne verhalten sich also Basis- und Koordinatentransformationen konträr.

ii) Im oben illustrierten zweiten Beispiel ist

$$\underline{\mathbf{g}}^{(1)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \underline{\mathbf{e}}^{(2)}, \quad \underline{\mathbf{g}}^{(2)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} - \underline{\mathbf{e}}^{(2)}.$$

Die Transformationsmatrix wird zu

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für beliebiges  $x \in \mathbb{R}^2$  mit den Darstellungen

$$\underline{\mathbf{x}} = x_1 \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + x_2 \underline{\mathbf{e}}^{(2)} = \beta_1 \underline{\mathbf{g}}^{(1)} + \beta_2 \underline{\mathbf{g}}^{(2)}$$

gilt nach den obigen Betrachtungen

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{G}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{x_1 - x_2}{2} \end{pmatrix}_{\mathcal{G}}.$$

*In der Tat kann als Probe in der Darstellung bzgl. der kanonischen Basis verifiziert werden:*

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x_1 - x_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} .$$


---

### Transformation der darstellenden Matrix beim Basiswechsel.

Vollzieht man einen Basiswechsel im Urbild  $\mathbb{R}^m$  und/oder im Bild  $\mathbb{R}^n$  einer linearen Abbildung, so transformiert sich mit den Koordinaten auch die darstellende Matrix der linearen Abbildung.

Die Situation ist schematisch in Abbildung E.2 dargestellt.

Wie in der Abbildung angedeutet, sei  $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lineare Abbildung,

$$\mathcal{A} = (\underline{\mathbf{a}}^{(1)}, \dots, \underline{\mathbf{a}}^{(m)}) \quad \text{sei eine Basis des } \mathbb{R}^m ,$$

$$\mathcal{U} = (\underline{\mathbf{u}}^{(1)}, \dots, \underline{\mathbf{u}}^{(n)}) \quad \text{sei eine Basis des } \mathbb{R}^n$$

und  $A_{\mathcal{U}}^{\mathcal{A}} \in M(n, m)$  sei die darstellende Matrix der linearen Abbildung  $L$  bzgl. dieser Basen.

Man betrachte weiterhin „neue“ Basen

$$\mathcal{B} = (\underline{\mathbf{b}}^{(1)}, \dots, \underline{\mathbf{b}}^{(m)}) \quad \text{des } \mathbb{R}^m \text{ bzw.}$$

$$\mathcal{V} = (\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \dots, \underline{\mathbf{v}}^{(n)}) \quad \text{des } \mathbb{R}^n .$$

Gesucht ist die Matrixdarstellung  $A_{\mathcal{V}}^{\mathcal{B}}$  von  $L$  bzgl. dieser Basen.

Der Basiswechsel von  $\mathcal{A}$  nach  $\mathcal{B}$  werde durch die Transformationsmatrix  $S \in M(m, m)$  beschrieben, der Basiswechsel von  $\mathcal{U}$  nach  $\mathcal{V}$  analog durch

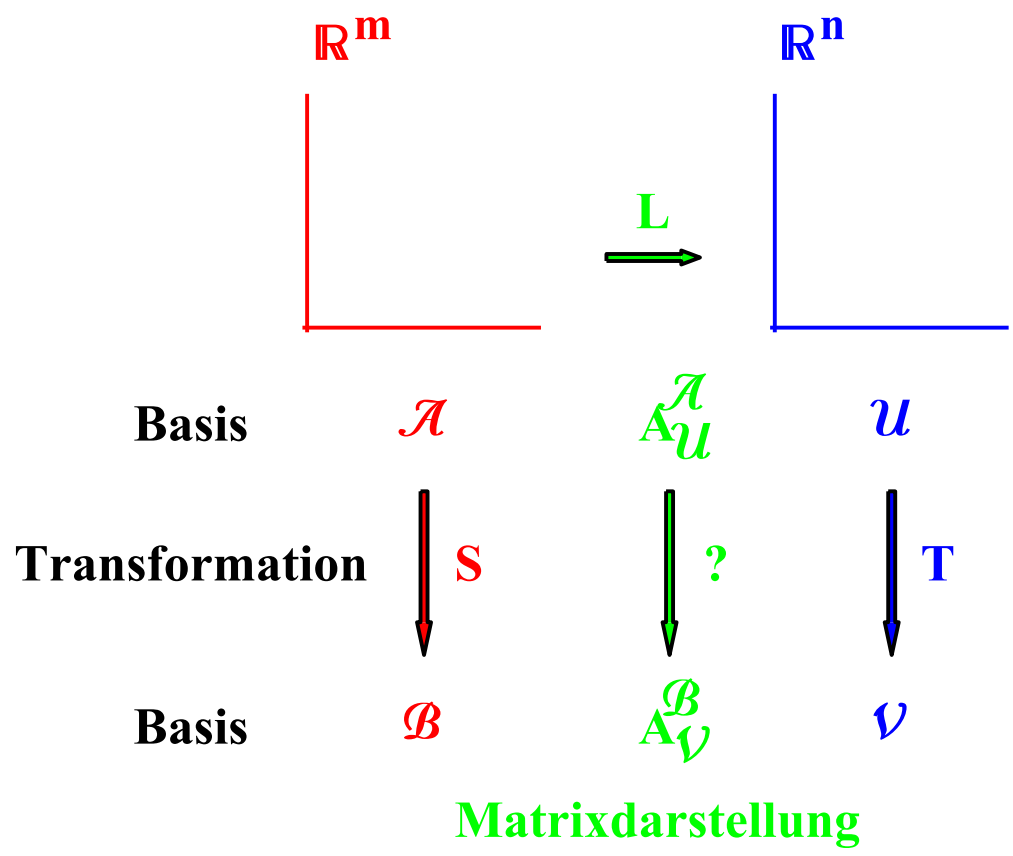


Abbildung E.2: Zur Transformation der darstellenden Matrix.

die Transformationsmatrix  $T \in M(n, n)$ .

Ist  $L(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{y}}$  und

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{x}} &= \alpha_1 \underline{\mathbf{a}}^{(1)} + \cdots + \alpha_m \underline{\mathbf{a}}^{(m)} \\ &= \beta_1 \underline{\mathbf{b}}^{(1)} + \cdots + \beta_m \underline{\mathbf{b}}^{(m)} , \\ \underline{\mathbf{y}} &= \mu_1 \underline{\mathbf{u}}^{(1)} + \cdots + \mu_n \underline{\mathbf{u}}^{(n)} \\ &= \nu_1 \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \cdots + \nu_n \underline{\mathbf{v}}^{(n)} , \end{aligned}$$

so gilt mit der darstellenden Matrix  $A_{\mathcal{U}}^{\mathcal{A}} \in M(n, m)$

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_{\mathcal{U}} = A_{\mathcal{U}}^{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}_{\mathcal{A}} = A_{\mathcal{U}}^{\mathcal{A}} S \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}},$$

wobei die zweite Gleichheit aus der bereits gezeigten Koordinatentransformation folgt.

Eine Transformation der linken Seite ergibt schließlich

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix}_{\mathcal{V}} &= T^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_{\mathcal{U}} \\ &= T^{-1} A_{\mathcal{U}}^{\mathcal{A}} S \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{V}}^{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Zusammenfassend ist folgender Satz gezeigt:

**Satz E.2.** BASISWECHSEL

- i) Es seien  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  Basen des  $\mathbb{R}^m$  und die Transformationsmatrix  $S \in M(m, m)$  sei wie oben gegeben.

Ist

$$\underline{\mathbf{x}} = \alpha_1 \underline{\mathbf{a}}^{(1)} + \cdots + \alpha_m \underline{\mathbf{a}}^{(m)} = \beta_1 \underline{\mathbf{b}}^{(1)} + \cdots + \beta_m \underline{\mathbf{b}}^{(m)},$$

so gilt für die Koordinaten bzgl. der unterschiedlichen Basen

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}.$$

ii) Es seien weiterhin  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  Basen des  $\mathbb{R}^n$  und die Transformation dieser Basen sei durch die Matrix  $T \in M(n, n)$  gegeben.

Es sei  $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lineare Abbildung mit der Matrixdarstellung  $A_{\mathcal{U}}^A \in M(n, m)$  bzgl. der Basen  $\mathcal{A}, \mathcal{U}$ .

Dann lautet die Matrixdarstellung von  $L$  bzgl. der Basen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{V}$

$$A_{\mathcal{V}}^B = T^{-1} A_{\mathcal{U}}^A S.$$

---

**Bemerkung.** Da die Spaltenvektoren aus den Koordinaten selbst als Vektoren aus dem  $\mathbb{R}^m$  bzw.  $\mathbb{R}^n$  aufgefasst werden, werden im obigen Satz die Indizes zur Basisbenennung weggelassen.

---

### Zu den einführenden Beispielen.

Die Situation in den einführenden Beispielen i), ii) zu Beginn des Kapitels sieht wie folgt aus:

Der Basiswechsel von i) nach ii) wird beschrieben durch

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h. } T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt wie behauptet

$$\begin{aligned}
 A_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}} &= T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$


---

### Eine kurze Bemerkung zu kovarianten Tensoren erster Stufe.

Tensoren sind Multilinearformen, wobei es sich im einfachsten Fall eines kovarianten Tensors erster Stufe um eine lineare Abbildung vom  $\mathbb{R}^m$  in die reellen Zahlen handelt.

Eine solche lineare Abbildung wird bzgl. einer gegebenen Basis des  $\mathbb{R}^m$  durch einen Zeilenvektor repräsentiert. Dieser Zeilenvektor ändert sich wie oben gesehen bei einem Basiswechsel.

Eine physikalisch relevante Größe sollte jedoch unabhängig von der speziellen Wahl einer Basis sein, d.h.:

Der Tensor als lineare Abbildung ist ein physikalisch sinnvolles Objekt, wohingegen es sich bei einem Zeilenvektor nur um eine spezielle Darstellung bzgl. einer fixierten Basis handelt.

Man betrachte nun eine lineare Abbildung  $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , eine Basis  $\mathcal{A}$  des  $\mathbb{R}^m$  sowie die Darstellung

$$(\xi_1 \ \dots \ \xi_m)_{\mathcal{A}}$$

der linearen Abbildung bzgl.  $\mathcal{A}$  als Zeilenvektor.



Ist  $\mathcal{B}$  eine weitere Basis des  $\mathbb{R}^m$ , so ist nach Satz E.2 die Darstellung bzgl. dieser Basis

$$\begin{pmatrix} \psi_1 & \dots & \psi_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \dots & \xi_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{1m} & \dots & \gamma_{mm} \end{pmatrix},$$

wobei der Basiswechsel wie oben durch die Koeffizienten  $\gamma_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ , gegeben sei.

Man erkennt für alle  $i = 1, \dots, n$ :

$$\psi_i = \sum_{j=1}^m \gamma_{ij} \xi_j.$$

Mit anderen Worten: Zeilenvektoren (die Koordinaten der linearen Abbildung) transformieren sich bei einem Basiswechsel genau wie die Basis selbst, weshalb man von einem kovarianten Tensor spricht.

Spaltenvektoren verhalten sich hingegen konträr, wie bei Koordinatentransformationen bereits festgestellt wurde.

Sie stellen so genannte **kontravariante Tensoren** erster Stufe bzgl. einer gegebenen Basis dar.



## E.4 Übungsaufgaben zu Kapitel

### Aufgabe 1.

i) Geben Sie eine nicht-lineare Abbildung  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  an.

ii) Finden Sie eine lineare Abbildung  $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $L(3) = -2$ .

Zeigen Sie, dass es keine weitere lineare Abbildung  $\tilde{L}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\tilde{L}(3) = -2$  gibt.

iii) Finden Sie eine lineare Abbildung  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ist diese eindeutig bestimmt?

Bestimmen Sie den Kern und das Bild von  $L$ .

---

**Aufgabe 2.\*** Zeigen Sie: Kern und Bild einer linearen Abbildung  $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  sind Unterräume des  $\mathbb{R}^m$  bzw. des  $\mathbb{R}^n$ .

---

**Aufgabe 3.** Es sei  $L$  eine lineare Abbildung vom  $\mathbb{R}^m$  in den  $\mathbb{R}^n$ .

i) Ist es möglich, dass zwei linear abhängige Vektoren  $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^m$  auf zwei linear unabhängige Vektoren  $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$  abgebildet werden?

- ii) Ist es möglich, dass zwei linear unabhängige Vektoren  $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^m$  auf zwei linear abhängige Vektoren  $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$  abgebildet werden?

Falls ja, kann man daraus eine Aussage über kern  $L$  ableiten?

---

**Aufgabe 4.\*** Zeigen Sie Korollar 3.1.

---

**Aufgabe 5.** Es sei  $a = 0$ ,  $a = 1$  oder  $a = 2$  fixiert und  $L: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$  sei gegeben durch

$$L(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 - x_3 \\ (x_1 + x_4)^a \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_4 \end{pmatrix} .$$

- i) Ist  $L$  eine lineare Abbildung?

- ii) Nun sei  $a = 1$ : Durch welche Matrix wird  $L$  bzgl. der kanonischen Basen dargestellt? Bestimmen Sie kern  $L$ , rg  $L$  und bild  $L$ .

---

**Aufgabe 6.\*** Es bezeichne  $\mathcal{E} = (\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)})$  die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^2$ . Gegeben seien weiter die Basen  $\mathcal{V} = (\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)})$  und  $\mathcal{W} = (\underline{\mathbf{w}}^{(1)}, \underline{\mathbf{w}}^{(2)})$  des  $\mathbb{R}^2$ , wobei gelte

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \underline{\mathbf{e}}^{(2)} , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} - \underline{\mathbf{e}}^{(2)} ;$$

$$\underline{\mathbf{w}}^{(1)} = \underline{\mathbf{e}}^{(2)} , \quad \underline{\mathbf{w}}^{(2)} = 2\underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \underline{\mathbf{e}}^{(2)} .$$

Es sei  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die lineare Abbildung mit

$$A_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie  $A_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}$  und  $A_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}$ .

---

**Aufgabe 7.\*** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3, 3) .$$

Weiterhin bezeichne  $\mathcal{E} = (\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)}, \underline{\mathbf{e}}^{(3)})$  die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^3$  und gegeben sei zudem die Basis  $\mathcal{V} = (\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)})$  mit

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \underline{\mathbf{e}}^{(2)} , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \underline{\mathbf{e}}^{(2)} + \underline{\mathbf{e}}^{(3)} .$$

Die Matrixdarstellung  $A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$  einer linearen Abbildung  $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei durch obige Matrix  $A$  gegeben.

Bestimmen Sie  $A_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}$  und berechnen Sie die Koordinatendarstellungen von  $L(\underline{\mathbf{v}}^{(3)})$  bzgl. der Basen  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{V}$ .

---

**Aufgabe 8.\*** Es bezeichne  $\mathcal{E} = (\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)})$  die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^2$ .

Es sei weiter  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  die lineare Abbildung mit

$$L(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}) = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} \quad \text{und} \quad L(\underline{\mathbf{e}}^{(2)}) = \underline{\mathbf{e}}^{(2)} - \underline{\mathbf{e}}^{(1)} .$$

Bezüglich welcher Basis  $\mathcal{V} = (\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)})$  hat  $L$  die Matrixdarstellung

$$A_{\mathcal{V}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ?$$


---

**Aufgabe 9.** Man betrachte die lineare Abbildung  $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die bestimmt ist durch

$$L(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}) = \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \underline{\mathbf{f}}^{(2)}, \quad L(\underline{\mathbf{e}}^{(2)}) = 2\underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \underline{\mathbf{f}}^{(2)}, \quad L(\underline{\mathbf{e}}^{(3)}) = -\underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \underline{\mathbf{f}}^{(2)}.$$

Dabei bezeichne  $(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)}, \underline{\mathbf{e}}^{(3)})$  die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^3$ ,  $(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)})$  bezeichne die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^2$ .

- i) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildung bzgl. der kanonischen Basen.
- ii) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildung bzgl. der Basen

$$(\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \underline{\mathbf{v}}^{(3)}) \quad \text{des } \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad (\underline{\mathbf{w}}^{(1)}, \underline{\mathbf{w}}^{(2)}) \quad \text{des } \mathbb{R}^2,$$

wobei gelte

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{v}}^{(1)} &= \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \underline{\mathbf{e}}^{(2)} + \underline{\mathbf{e}}^{(3)}, & \underline{\mathbf{v}}^{(2)} &= \underline{\mathbf{e}}^{(1)} - \underline{\mathbf{e}}^{(3)}, & \underline{\mathbf{v}}^{(3)} &= 5\underline{\mathbf{e}}^{(2)} + \underline{\mathbf{e}}^{(3)}; \\ \underline{\mathbf{w}}^{(1)} &= -\underline{\mathbf{f}}^{(1)} - \underline{\mathbf{f}}^{(2)}, & \underline{\mathbf{w}}^{(2)} &= \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + 4\underline{\mathbf{f}}^{(2)}. \end{aligned}$$

- iii) Finden Sie eine Basis  $(\underline{\mathbf{g}}^{(1)}, \underline{\mathbf{g}}^{(2)})$  des  $\mathbb{R}^2$ , sodass die Matrixdarstellung von  $L$  bzgl. der kanonischen Basis des  $\mathbb{R}^3$  und bzgl.  $(\underline{\mathbf{g}}^{(1)}, \underline{\mathbf{g}}^{(2)})$  gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

---





## Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben.

**Aufgabe 2.** Man vergleiche die Aufgabe mit der Diskussion linearer Gleichungssysteme (z.B. mit dem Superpositionsprinzip im homogenen Fall).

---

**Aufgabe 4.** Ist  $L$  injektiv, so ist für alle  $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}$ ,

$$L(\underline{\mathbf{x}}) \neq L(\underline{\mathbf{0}}) = \underline{\mathbf{0}},$$

d.h. kern  $L = \{\underline{\mathbf{0}}\}$ . Aus dem Rangsatz folgt, dass  $L$  auch surjektiv ist.

Ist  $L$  surjektiv, so ist nach dem Rangsatz kern  $L = \{\underline{\mathbf{0}}\}$ .

Aus  $L(\underline{\mathbf{x}}) = L(\underline{\mathbf{y}})$  folgt aber  $L(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{y}}) = \underline{\mathbf{0}}$  und somit  $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{y}}$ . □

---

**Aufgabe 6.** Man berechnet

$$\underline{\mathbf{w}}^{(1)} = \frac{\underline{\mathbf{v}}^{(1)} - \underline{\mathbf{v}}^{(2)}}{2}, \quad \underline{\mathbf{w}}^{(2)} = \frac{3}{2}\underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \frac{1}{2}\underline{\mathbf{v}}^{(2)},$$

woraus sich als Transformationsmatrix  $S$  von  $\mathcal{V}$  nach  $\mathcal{W}$  bzw. als deren Inverse  $S^{-1}$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ergibt. Ist  $T$  die Transformationsmatrix von  $\mathcal{W}$  nach  $\mathcal{V}$ , so ist  $T = S^{-1}$  (Probe!).

Man berechnet

$$A_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}} = SA_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}I_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und

$$A_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}} = SA_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$


---

**Aufgabe 7.** Für die Transformationsmatrizen gilt mit der Notation dieses Kapitels

$$S = T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Als Inverse findet man

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich

$$A_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}} = S^{-1}A_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$L(\underline{\mathbf{v}}^{(3)}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{V}}$$

und wegen

$$3\underline{\mathbf{v}}^{(1)} + 2\underline{\mathbf{v}}^{(3)} = 5\underline{\mathbf{e}}^{(1)} + 2\underline{\mathbf{e}}^{(2)} + 2\underline{\mathbf{e}}^{(3)}$$

ist schließlich

$$L(\underline{\mathbf{v}}^{(3)}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}.$$


---

**Aufgabe 8.** Anhand von

$$A_{\mathcal{V}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

erkennt man

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{e}}^{(1)} &= L(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}) = \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \\ \underline{\mathbf{e}}^{(2)} - \underline{\mathbf{e}}^{(1)} &= L(\underline{\mathbf{e}}^{(2)}) = \underline{\mathbf{v}}^{(1)} + 2\underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{v}}^{(1)} &= 3\underline{\mathbf{e}}^{(1)} - \underline{\mathbf{e}}^{(2)}, \\ \underline{\mathbf{v}}^{(2)} &= \underline{\mathbf{e}}^{(2)} - 2\underline{\mathbf{e}}^{(1)}. \end{aligned}$$


---



# Kapitel 3

## Spektraltheorie quadratischer Matrizen

Die abschließende Bemerkung aus Kapitel 2 deutet bereits an, dass die [Spektraltheorie](#) quadratischer Matrizen eine wesentliche Anwendung beim Studium von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen hat.

Dieser Gedanke wird in Abschnitt 3.4 wieder aufgegriffen.

Als einführende Motivation wird hier jedoch zunächst eine geometrische Anwendung vorgestellt, die eng mit den Betrachtungen des obigen Exkurses und dort insbesondere mit der Matrixdarstellung linearer Abbildungen und der Basistransformation verknüpft ist.

### 3.1 Hauptachsentransformation für symmetrische Matrizen (Eigenwert; Eigenvektor; charakteristisches Polynom; Diagonalisierbarkeit symmetrischer Matrizen)

Zur Anschaulichkeit der Rechnungen wird hier **o.E. der  $\mathbb{R}^2$  betrachtet** – die Rechnungen im  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , verlaufen formal identisch.

**Erstes Beispiel.**

Im  $\mathbb{R}^2$  betrachte man die Ellipse

$$E = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 = 1 \right\}.$$

mit den Längen 2 und 1 der Halbachsen (vgl. Abbildung 3.1).

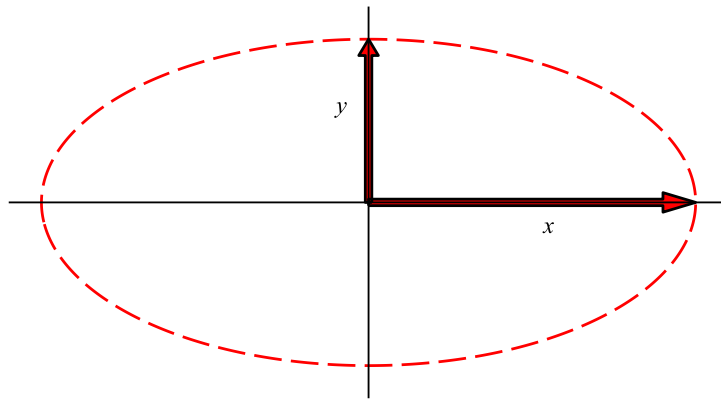


Abbildung 3.1: Die Ellipse  $E$ .

Mithilfe der Matrix  $A \in M(2, 2)$ ,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kann dies äquivalent geschrieben werden als

$$E = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \underline{\mathbf{x}}^T A \underline{\mathbf{x}} = 1 \right\}.$$

Die Achsen der Ellipse zeigen in Richtung der kanonischen Basisvektoren und die Matrix  $A$  angewandt auf einen Basisvektoren ergibt jeweils ein Vielfaches des Basisvektors:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man sagt dazu:

Die Zahlen  $\lambda_1 = 1/4$  und  $\lambda_2 = 1$  heißen Eigenwerte der Matrix  $A$  und  $\underline{\mathbf{e}}^{(1)}$ ,  $\underline{\mathbf{e}}^{(2)}$  sind dazugehörige Eigenvektoren.

Wegen der Linearität des Problems sind alle Vielfachen eines Eigenvektors ebenfalls Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert, d.h. Eigenvektoren sind nicht eindeutig bestimmt.

Man erhält in dem Beispiel die Eigenräume

$$E_{\lambda_1} := \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \underline{\mathbf{x}} = t \underline{\mathbf{e}}^{(1)}, t \in \mathbb{R} \} ,$$

$$E_{\lambda_2} := \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \underline{\mathbf{x}} = t \underline{\mathbf{e}}^{(2)}, t \in \mathbb{R} \} ,$$

d.h. die kanonischen Achsen.

## Zweites Beispiel.

Nun wird die Menge

$$\tilde{E} = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{8} [5(x_1^2 + x_2^2) - 6x_1x_2] = 1 \right\}$$

betrachtet, deren geometrische Struktur in dieser Form nicht ersichtlich ist.

Mit der (symmetrischen) Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$$

lautet die äquivalente Schreibweise in diesem Beispiel

$$\tilde{E} = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \underline{\mathbf{x}}^T \tilde{A} \underline{\mathbf{x}} = 1 \right\} .$$

Falls die Eigenwerte und Eigenvektoren eine geometrische Bedeutung haben, dann sind diese zunächst zu berechnen:

Per definitionem ist  $\lambda \in \mathbb{R}$  ein Eigenwert der Matrix  $\tilde{A}$ , falls ein Vektor  $\underline{v} \neq \underline{0} \in \mathbb{R}^2$  existiert mit

$$\tilde{A} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda I_2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} ,$$

wobei  $I_2$  wie üblich die Einheitsmatrix

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bezeichnet.

Diese Gleichung wird geschrieben als

$$(\tilde{A} - \lambda I_2) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

und die Existenz von Eigenwerten bzw. Eigenvektoren ist reduziert auf die Frage, für welche  $\lambda$  eine nicht-triviale Lösung dieses Gleichungssystems existiert.

Es handelt sich hierbei um ein homogenes lineares Gleichungssystem, welches genau dann eine nicht-triviale Lösung hat , falls (vgl. Teil II, Satz 2.2)

$$\det (\tilde{A} - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} \frac{5}{8} - \lambda & -\frac{3}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} - \lambda \end{vmatrix} = 0 ,$$

d.h. falls

$$\lambda^2 - \frac{10}{8}\lambda + \frac{1}{4} = 0 .$$

Man findet in diesem Fall die beiden Eigenwerte



$$\lambda_1 = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 1 .$$

Die Gleichungssysteme

$$\tilde{A} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{A} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

liefern dazu die (orthogonalen) Eigenvektoren (hier auf Länge 1 normiert – jedes Vielfache hätte ebenso genommen werden können)

$$\underline{\mathbf{f}}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{f}}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

**Beobachtung.** *Diese Eigenvektoren bilden eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^2$ .*

Betrachtet man nun die Ellipse nicht in Koordinaten der kanonischen Basis sondern in Koordinaten bzgl. der Basis  $(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)})$ , so ist – wie im Exkurs geschildert – die Transformationsmatrix

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

zu bilden, wobei die Orthonormalität der Eigenvektoren

$$S^{-1} = S^T$$

liefert (vgl. Teil II, Kapitel 2.2).

---

**Ergebnis.**

Wird  $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$  bzgl. der neuen Orthonormalbasis  $(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)})$  dargestellt,

$$\underline{\mathbf{x}} = \beta_1 \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \beta_2 \underline{\mathbf{f}}^{(2)}, \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R},$$

so gilt, wie im obigen Exkurs beschrieben, wegen

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} = S \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{F}}$$

und dementsprechend wegen

$$\underline{\mathbf{x}}^T = (x_1 \ x_2)_{\mathcal{E}} = (\beta_1 \ \beta_2)_{\mathcal{F}} S^T$$

die Beziehung

$$\underline{\mathbf{x}}^T \tilde{A} \underline{\mathbf{x}} = (\beta_1 \ \beta_2) \underbrace{S^T \tilde{A} S}_{=: B} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = (\beta_1 \ \beta_2) B \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Aufgrund der Konstruktion hat  $B$  dabei automatisch Diagonalgestalt, d.h. auf der Hauptdiagonalen stehen die Eigenwerte und alle anderen Einträge verschwinden.

**Bemerkung.** Nach der Definition von  $S$  ist

$$\begin{aligned} S^T \tilde{A} S &= S^T (\lambda_1 \underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \lambda_2 \underline{\mathbf{f}}^{(2)}) = \begin{pmatrix} (\underline{\mathbf{f}}^{(1)})^T \\ (\underline{\mathbf{f}}^{(2)})^T \end{pmatrix} (\lambda_1 \underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \lambda_2 \underline{\mathbf{f}}^{(2)}) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei die Eigenschaft „Orthonormalsystem“ von  $(\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)})$  ausgenutzt ist.

Nach der Bemerkung ist (Probe durch explizites Rechnen)

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Beobachtung.**

- i) Bzgl. der neuen Koordinaten hat die Menge  $\tilde{E}$  die gleiche Gestalt wie die Menge  $E$  des ersten Beispiels.
- ii) Die neue Basis  $(f^{(1)}, f^{(2)})$  entsteht aus der kanonischen Basis durch eine **Rotation um  $\pi/4$**  und dementsprechend ist die Menge  $\tilde{E}$  nichts anderes als die um  $\pi/4$  rotierte Ellipse  $E$  (vgl. Abbildung 3.2).
- iii) Zeigen die Achsen von  $E$  in Richtung der Koordinatenachsen als Richtungen der Eigenvektoren von  $A$ , so zeigen die **Achsen von  $\tilde{E}$  in Richtung der Eigenvektoren von  $\tilde{A}$** .

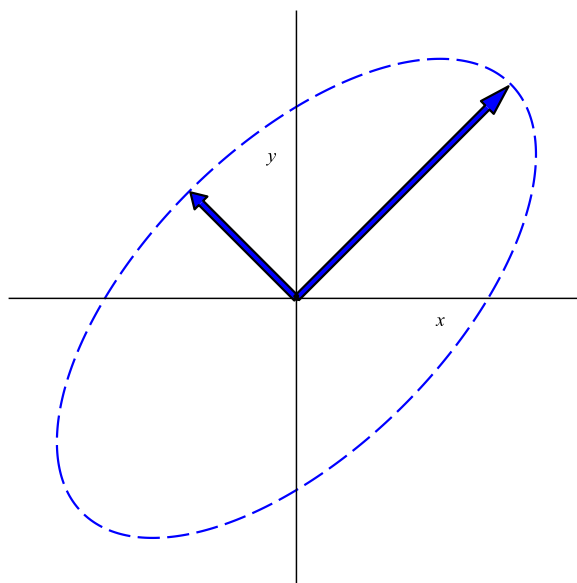


Abbildung 3.2: Die Ellipse  $\tilde{E}$ .

**Zusammenfassung.****Definition 3.1.****EIGENWERTE UND EIGENVEKTOREN**

Es sei  $A \in M(n, n)$ .

- i) Ein Vektor  $\underline{\mathbf{v}} \neq \underline{\mathbf{0}}$  heißt *Eigenvektor* der Matrix  $A$  zum *Eigenwert*  $\lambda \in \mathbb{R}$ , falls

$$A\underline{\mathbf{v}} = \lambda\underline{\mathbf{v}} .$$

- ii) Mit einem Vektor  $\underline{\mathbf{v}}$  ist auch jedes Vielfache  $t\underline{\mathbf{v}}$ ,  $t \neq 0$ , von  $\underline{\mathbf{v}}$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ , die Menge

$$E_\lambda := \{\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n : A\underline{\mathbf{v}} = \lambda\underline{\mathbf{v}}\}$$

ist ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$ , genannt der *Eigenraum* zum Eigenwert  $\lambda$ .

- iii) Als Funktion von  $\lambda$  heißt das Polynom  $n^{\text{ten}}$  Grades

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$$

das *charakteristische Polynom* der Matrix  $A$ .

Die möglichen Eigenwerte berechnen sich als Lösungen der *charakteristischen Gleichung*

$$\det(A - \lambda I_n) = 0 .$$

---

Im Allgemeinen ist in Definition 3.1 die Anzahl, die Vielfachheit der reellen Eigenwerte (als Vielfachheit der Nullstelle) und die Dimension der

Eigenräume a priori nicht direkt ersichtlich.

Da Eigenwerte als Nullstellen eines Polynoms definiert sind, ist im Allgemeinen zudem komplex zu rechnen. Dies wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

Gegenstand der Beispiele dieses Abschnitts sind jedoch **symmetrische Matrizen** und **in diesem Spezialfall** gilt der Satz über die **Hauptachsentransformation**:

**Satz 3.1.**     **HAUPTACHSENTTRANSFORMATION**

Es sei  $A \in M(n, n)$  *symmetrisch. d.h. es gelte  $A^T = A$ .*

i) Dann gibt es eine *orthogonale Matrix*  $S$ , die  $A$  auf Diagonalgestalt transformiert:

$$S^{-1}AS = S^TAS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

ii) Dabei sind die  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , reelle Eigenwerte von  $A$  (nicht notwendig verschieden) und die Spaltenvektoren der Transformationsmatrix  $S$  bilden eine *Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^n$  aus Eigenvektoren*.

iii) Allgemein heißt eine Matrix  $C \in M(n, n, \mathbb{C})$  (auch komplexe Eintragungen sind möglich) *diagonalisierbar*, falls eine reguläre Matrix  $T \in M(n, n, \mathbb{C})$  existiert mit

$$D = T^{-1}CT, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

$\lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, n.$

*Nach i) und ii) ist eine symmetrische Matrix mit reellen Eintragungen stets (sogar mithilfe einer orthogonalen, reellen Matrix) diagonalisierbar, wobei die  $\lambda_i$  alle reell sind.*

---

Selbst wenn eine Matrix  $A$  reell ist, geht die Diagonalisierbarkeit im Reellen und auch die komplexe Diagonalisierbarkeit im Allgemeinen verloren, sobald die Matrix **nicht mehr als symmetrisch vorausgesetzt** wird. Dies ist der Gegenstand der nächsten Sektion.

## 3.2 Ähnliche und diagonalisierbare Matrizen (komplexe Rechnung; lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren; algebraische und geometrische Vielfachheit von Eigenwerten)

Nun sei  $A \in M(n, n)$  **nicht mehr notwendig symmetrisch**, wie es in Abschnitt 3.1 angenommen wurde.

Es stellt sich die Frage, ob bzw. unter welchen Voraussetzungen  $A$  auf Diagonalgestalt wie in Satz 3.1 i) oder zumindest ii) gebracht werden kann.

---

### **Komplexe Rechnung.**

Die Definition 3.1 von Eigenwerten, Eigenräumen und charakteristischem Polynom bezieht sich nicht auf die Symmetrie der Matrix  $A$  und überträgt

sich wörtlich auf die verallgemeinerte Situation.

Aber: Selbst wenn die Matrix  $A$  mit  $A^T \neq A$  nur reelle Eintragungen hat, kann nicht erwartet werden, dass reelle Eigenwerte existieren, da es sich um Nullstellen eines Polynoms handelt.

Ist etwa

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \varphi \in (0, 2\pi),$$

so kann kein reeller Eigenwert existieren (warum?).

Hingegen gilt bei komplexer Rechnung

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) - i \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^{i\varphi} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Rechnung zeigt, dass der Vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$  ein komplexer Eigenvektor zum komplexen Eigenwert  $\lambda = e^{i\varphi}$  ist.

Analog sieht man, dass der Vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $e^{-i\varphi}$  ist.

Auch bei reellen Matrizen ist demnach im Allgemeinen mit komplexen Eigenwerten und Eigenvektoren zu argumentieren.

Es gilt jedoch zumindest:

**Satz 3.2.** KONJUGIERT KOMPLEXE EIGENWERTE

Die Matrix  $A \in M(n, n, \mathbb{R})$  habe *reelle Eintragungen*.

i) Ist  $\lambda = \alpha + i\beta$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ein *komplexer Eigenwert* von  $A$ , so ist auch die *konjugiert komplexe Zahl  $\bar{\lambda}$  Eigenwert* von  $A$ .

ii) Ist  $\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{a}} + i\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{C}^n$ ,  $\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^n$ , ein *komplexer Eigenvektor* zum Eigenwert  $\lambda$  von  $A$ , so ist  $\underline{\mathbf{v}} := \underline{\mathbf{a}} - i\underline{\mathbf{b}}$  *Eigenvektor zum Eigenwert  $\bar{\lambda}$*  von  $A$ .

*Beweis.* Siehe Übungskapitel 3.5. □

**Zur Orthogonalität von Eigenvektoren.**

Ohne die Symmetrie der Matrix  $A$  geht im Allgemeinen auch die Orthogonalität von Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten verloren, *selbst wenn reell gerechnet werden kann*.

Man betrachte etwa die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3, 3)$$

mit den drei unterschiedlichen Eigenwerten  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$ ,  $\lambda_3 = -1$ .

Die Eigenräume werden von den Vektoren

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



aufgespannt, die nicht orthogonal aufeinander stehen.

Es gilt jedoch noch

**Satz 3.3.** LINEARE UNABHÄNGIGKEIT VON EIGENVEKTOREN

Sind  $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \dots, \underline{\mathbf{v}}^{(k)} \in \mathbb{C}^n$  Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$  einer Matrix  $A \in M(n, n, \mathbb{C})$ , so sind sie linear unabhängig.

*Beweis.* Siehe Übungskapitel 3.5. □

### Vielfachheiten von Eigenwerten.

Nach Definition 3.1 ist  $\lambda \in \mathbb{R}$  bzw.  $\lambda \in \mathbb{C}$  genau dann ein Eigenwert einer Matrix  $A \in M(n, n)$ , wenn  $\lambda$  eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist,

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n).$$

Ist beispielsweise

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so berechnet man als charakteristisches Polynom

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)^2(1 - \lambda). \end{aligned}$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, d.h. die Eigenwerte von  $A$ , sind  $\lambda_1 = 2$  und  $\lambda_2 = 1$ .

Für die Eigenvektoren zum Eigenwert  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ , gilt

$$(A - \lambda_i I_3) \underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 2 - \lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda_i \end{pmatrix} \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{0}}.$$

Es ergibt sich (solange keine komplexen Eigenwerte auftauchen, können die Beispiele hier und im Folgenden o.E. in reeller Notation gerechnet werden)

$$E_{\lambda_1=2} = \{ \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3 : v_3 = 0 \}$$

und

$$E_{\lambda_2=1} = \{ t \underline{\mathbf{w}} : t \in \mathbb{R} \}, \quad \underline{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Im Allgemeinen ist das charakteristische Polynom einer Matrix  $A \in M(n, n)$  ein Polynom vom Grad  $n$ , welches nach dem Fundamentalsatz der Algebra (Teil I, Satz 10.2) in Linearfaktoren zerfällt, wobei  $a_n = (-1)^n$  der höchste Koeffizient ist (warum?):

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}.$$

Dabei ist

$$\mathbb{N} \ni r \leq n, \quad k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$$

und für  $i = 1, \dots, r$  sind die  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  die Eigenwerte von  $A$  mit den algebraischen Vielfachheiten  $a(\lambda_i)$  (als Nullstellen des charakteristischen

Polynoms)  $k_i$ .

Werden also die **Eigenwerte mit ihrer algebraischen Vielfachheit gezählt**, so hat  $A$  genau  $n$  Eigenwerte.

---

Im obigen Beispiel ist  $\lambda_1 = 2$  mit der Vielfachheit 2 zu zählen,  $\lambda_2 = 1$  mit der Vielfachheit 1.

In dem Beispiel stimmt jeweils die algebraische Vielfachheit mit der Dimension des zugehörigen Eigenraums überein –  $E_{\lambda_1}$  ist ein zweidimensionaler Vektorraum,  $E_{\lambda_2}$  ist eindimensional.

Das Beispiel steht jedoch nicht exemplarisch für alle anderen.

---

Es sei nun

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(2, 2, \mathbb{R}) .$$

Wegen

$$\chi_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2$$

ist  $\lambda_1 = 1$  die einzige Nullstelle des charakteristischen Polynoms und hat die algebraische Vielfachheit 2.

Andererseits ist der Eigenraum

$$E_{\lambda_1=1} = \{t\underline{\mathbf{w}}, t \in \mathbb{R}\} , \quad \underline{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

lediglich eindimensional.

Es gibt keine weiteren von  $\underline{\mathbf{w}}$  linear unabhängigen Eigenvektoren.

Die geometrische Vielfachheit, d.h. die Dimension des Eigenraums, ist 1 und damit kleiner als die algebraische Vielfachheit.

Nach der Dimensionsformel, Teil II, Satz 1.3, ist

$$n - \operatorname{rg}(A - \lambda I_n) = \dim [\operatorname{kern}(A - \lambda I_n)]$$

und die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts ist als Dimension des zugehörigen Eigenraums definiert:

**Definition 3.2.** GEOMETRISCHE VIELFACHHEIT

Es sei  $\lambda \in \mathbb{C}$  ein Eigenwert der Matrix  $A \in M(n, n, \mathbb{C})$ .

Dann ist die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes definiert als

$$\begin{aligned} 1 \leq g(\lambda) &:= \dim \left\{ \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I_n) \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{0}} \right\} \\ &= n - \operatorname{rg}(A - \lambda I_n). \end{aligned}$$

Für die anschließenden Betrachtungen hält Lemma 3.1 eine grundlegende Beobachtung fest.

**Lemma 3.1.** GEOMETRISCH VERSUS ALGEBRAISCH

Mit der obigen Notation gilt für jeden Eigenwert  $\lambda$

$$1 \leq g(\lambda) \leq a(\lambda).$$

*Beweis.* Siehe Übungskapitel 3.5. □

---

### Ähnliche Matrizen.

Nun kann die eingangs gestellte Frage, nämlich ob bzw. unter welchen Voraussetzungen eine Matrix  $A$  über einen Basiswechsel **diagonalisierbar** ist, wieder aufgegriffen werden.

Anders formuliert lautet die Frage (vgl. Satz 3.1): Existiert eine reguläre Matrix  $S$ , sodass

$$B = S^{-1}AS \tag{1}$$

Diagonalgestalt hat?

Matrizen  $A, B$ , die eine Beziehung der Form (1) erfüllen, heißen **ähnliche Matrizen**.

Es gilt der folgende

**Satz 3.4.** **ÄHNLICHE MATRIZEN**

- i) Die charakteristischen Polynome und damit die Eigenwerte und ihre algebraischen Vielfachheiten ähnlicher Matrizen sind gleich.*
- ii) Die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte ähnlicher Matrizen sind gleich.*

*Ist dabei ( $S$  regulär)  $B = S^{-1}AS$ , so ist  $\underline{v}$  genau dann Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ , wenn  $\underline{w} := S^{-1}\underline{v}$  Eigenvektor von  $B$  zum Eigenwert  $\lambda$  ist.*

---

*Beweis.* Siehe Übungskapitel 3.5. □

### Diagonalisierbare Matrizen.

Gibt es zu einer Matrix  $A$  eine reguläre Transformationsmatrix  $S$  sowie eine Matrix  $B$  in Diagonalgestalt,

$$B = S^{-1}AS \quad \text{mit} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

so schreibt man  $S$  als Tupel von Spaltenvektoren,

$$S = (\underline{\mathbf{v}}^{(1)} \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} \quad \dots \quad \underline{\mathbf{v}}^{(n)}) .$$

Es ist  $B = S^{-1}AS$  äquivalent zu  $SB = AS$ , also

$$(\underline{\mathbf{v}}^{(1)} \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} \quad \dots \quad \underline{\mathbf{v}}^{(n)}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = A(\underline{\mathbf{v}}^{(1)} \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} \quad \dots \quad \underline{\mathbf{v}}^{(n)})$$

und man erkennt

$$(\lambda_1 \underline{\mathbf{v}}^{(1)} \quad \lambda_2 \underline{\mathbf{v}}^{(2)} \quad \dots \quad \lambda_n \underline{\mathbf{v}}^{(n)}) = (A \underline{\mathbf{v}}^{(1)} \quad A \underline{\mathbf{v}}^{(2)} \quad \dots \quad A \underline{\mathbf{v}}^{(n)}) .$$

Die Spaltenvektoren der Matrix  $S$  sind Eigenvektoren von  $A$ , wie es bereits

in Satz 3.1 im Spezialfall symmetrischer Matrizen formuliert wurde.

Eine reguläre Matrix  $S$  wie oben kann also nur existieren, falls es  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren gibt.

Insbesondere müssen die geometrische und die algebraische Vielfachheit aller Eigenwerte übereinstimmen.

**Satz 3.5.** DIAGONALISIERBARKEIT

- i) *Eine Matrix  $A \in M(n, n, \mathbb{C})$  hat genau dann eine ähnliche Matrix in Diagonalform, wenn sie  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren hat.*

*Die Spaltenvektoren der Transformationsmatrix sind die Eigenvektoren und in der Diagonalmatrix stehen die zugehörigen Eigenwerte (nicht notwendig verschieden).*

- ii) *Eine Matrix  $A \in M(n, n, \mathbb{C})$  ist genau dann diagonalisierbar, wenn für jeden Eigenwert die algebraische Vielfachheit und die geometrische Vielfachheit übereinstimmen.*

---

Satz 3.1 besagt, dass eine symmetrische reelle Matrix sogar reell diagonalisierbar ist, das obige Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zeigt, dass es Matrizen gibt, die auch im Komplexen nicht diagonalisierbar sind.

### 3.3 Die Jordansche Normalform (Hauptvektoren; Kettenbedingung; Jordan-Kästchen)

Nach Satz 3.5 ist eine Matrix genau dann diagonalisierbar, wenn die algebraische und die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwertes übereinstimmen.

In diesem Paragraphen soll anhand eines typischen Beispiels die Idee vermittelt werden, wie andernfalls vorzugehen ist.

Man wird auf die sogenannte [Jordansche Normalform](#) geführt, die im nächsten Abschnitt zu Differentialgleichungssystemen mit konstanten Koeffizienten eine weitere Anwendung findet.

#### Ein Beispiel.

Eine nicht diagonalisierbare Matrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 8 & 6 \end{pmatrix} \in M(3, 3) .$$

Das charakteristische Polynom von  $A$  berechnet sich nämlich mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes (Teil II, Definition 2.1) zu

$$\chi_A(\lambda) = \det (A - \lambda I_3) = (2 - \lambda)[(-2 - \lambda)(6 - \lambda) + 16] = (2 - \lambda)^3 .$$

Demnach ist  $\lambda = 2$  die einzige Nullstelle des charakteristischen Polynoms und hat die algebraische Vielfachheit  $a(\lambda = 2) = 3$ .

Zur Bestimmung der Eigenvektoren beobachtet man, dass aus



$$(A - \lambda I_3)\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{0}}$$

folgt

$$\underline{\mathbf{v}} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die geometrische Vielfachheit ist somit  $g(\lambda = 2) = 1$  und wie behauptet ist  $A$  nicht diagonalisierbar.

---

### Hauptvektoren erster Stufe.

Zur Verdeutlichung der Idee sei im einfachsten Fall  $n = 2$ ,  $A \in M(2, 2)$  und  $\lambda$  Eigenwert von  $A$  mit  $1 = g(\lambda) < 2 = a(\lambda)$ .

Es sei weiter  $\underline{\mathbf{v}}^{(0)}$  Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ , d.h.  $A\underline{\mathbf{v}}^{(0)} = \lambda\underline{\mathbf{v}}^{(0)}$ .

Nun soll gezeigt werden dass  $\underline{\mathbf{v}}^{(0)} \in \text{bild}(A - \lambda I)$  (siehe (2)), wobei  $\text{bild}(A - \lambda I) \neq \mathbb{R}^2$ , da  $\text{kern}(A - \lambda I) \neq \{\underline{\mathbf{0}}\}$ , d.h. die Behauptung ist nicht trivial.

Man beobachtet zunächst, dass die Dimensionsformel (Teil II, Satz 1.3) impliziert

$$\dim [\text{bild}(A - \lambda I)] = n - \dim [\text{kern}(A - \lambda I)] = n - g(\lambda) = 1.$$

Es gilt also für ein  $\underline{\mathbf{w}} \neq \underline{\mathbf{0}}$

$$\text{bild}(A - \lambda I) = \{t\underline{\mathbf{w}}\}$$

und folglich existiert ein  $\mu \in \mathbb{R}$  (bzw.  $\mathbb{C}$ ) mit

$$\text{bild } (A - \lambda I) \ni (A - \lambda I)\underline{\mathbf{w}} = \mu \underline{\mathbf{w}} \Leftrightarrow (A - (\lambda + \mu)I)\underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{0}}.$$

Da  $\lambda$  der einzige Eigenwert ist, muss hier  $\mu = 0$  gelten und aufgrund von  $g(\lambda) = 1$  ist  $\underline{\mathbf{w}}$  ein Vielfaches von  $\underline{\mathbf{v}}^{(0)}$ , folglich

$$\text{bild } (A - \lambda I) = \{t\underline{\mathbf{v}}^{(0)}, t \in \mathbb{R}\}$$

und insbesondere existiert eine Lösung des Gleichungssystems

$$(A - \lambda I)\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{v}}^{(0)}. \quad (2)$$

Man nennt (i.A. sei ein Eigenvektor  $\underline{\mathbf{v}}^{(0)}$  zum Eigenwert  $\lambda$  von  $A \in M(n, n)$  betrachtet) eine Lösung  $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$  des Gleichungssystems (2) einen **Hauptvektor erster Stufe** zum Eigenwert  $\lambda$ .

Wegen  $\underline{\mathbf{v}}^{(0)} \in \text{kern } (A - \lambda I)$  und  $\underline{\mathbf{v}}^{(1)} \notin \text{kern } (A - \lambda I)$  müssen die Vektoren  $\underline{\mathbf{v}}^{(0)}$  und  $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$  dabei linear unabhängig sein.

### Ein Hauptvektor erster Stufe im Beispiel.

Im obigen Beispiel betrachte man den Eigenvektor

$$\underline{\mathbf{v}}^{(0)} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei die Normierung lediglich die Rechnung vereinfacht.

Das zu lösende Gleichungssystem lautet

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ v_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die Lösungen sind

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} t \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Der Vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  liegt im Eigenraum und da man  $t \in \mathbb{R}$  beliebig wählen kann, wählt man sinnvollerweise (aber nicht zwingend)  $t = 0$ , d.h. im Folgenden ist

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

### Ein Hauptvektor zweiter Stufe.

In dem Beispiel ist die Differenz aus algebraischer und geometrischer Vielfachheit 2 (zum einzigen Eigenwert  $\lambda = 2$  der geometrischen Vielfachheit 1), man sucht noch nach einem Hauptvektor zweiter Stufe, d.h. per definitionem analog zu oben

$$(A - 2I_3)\underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \underline{\mathbf{v}}^{(1)} . \quad (3)$$

Mit der fixierten Wahl von  $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$  führt das auf das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ v_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ein Hauptvektor zweiter Stufe ist

$$\underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/8 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

### Jordan-Kästchen

Analog zu Kapitel 3.2 wird nun die Matrix  $S$  gebildet,

$$S = (\underline{\mathbf{v}}^{(0)} \quad \underline{\mathbf{v}}^{(1)} \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)}) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1/8 \\ 0 & 2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

$S$  besteht jetzt nicht mehr aus einer Orthonormalbasis aus Eigenvektoren, die ja nicht existiert, sondern aus einem Eigenvektor, einem Hauptvektor erster Stufe und einem Hauptvektor zweiter Stufe, die über eine Kettenbedingung (d.h. über die Bedingungen (2) und (3)) miteinander verknüpft sind.

$S$  ist regulär (im Allgemeinen nicht orthogonal) und in Analogie zu Kapitel 3.2 wird die transformierte Matrix

$$J = S^{-1}AS$$

untersucht.

Die konkrete Berechnung ergibt

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

sowie

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die neue Matrix  $J$  ist i.A. nicht mehr von Diagonalgestalt, hat aber dennoch eine besonders einfache Struktur.

Allgemein nennt man eine Matrix der Form

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

ein [Jordan-Kästchen](#).

Im einfachsten Fall gilt:

**Satz 3.6.** JORDANSCHES NORMALFORM

*Es sei  $A \in M(n, n, \mathbb{C})$  und  $\lambda$  sei der einzige Eigenwert der Matrix  $A$ .*

*Es habe  $\lambda$  die geometrische Vielfachheit  $g(\lambda) = 1$  und die algebraische Vielfachheit  $a(\lambda) > 1$ .*

*Dann transformiert die Matrix  $S$ , die genau wie im obigen Beispiel aus einem Eigenvektor und aus Hauptvektoren (bis zur Stufe  $a(\lambda) - 1$ ) besteht, die Matrix  $A$  auf ein Jordan-Kästchen  $J(\lambda)$ , d.h.*

$$S^{-1}AS = J(\lambda) .$$

**Bemerkung.** *In seiner allgemeinen Form ist der Satz von der Jordanschen Normalform wesentlich komplexer:*

*Hat  $A$  mehrere Eigenwerte, so zerfällt die transformierte Matrix in verschiedene Jordan-Kästchen.*

*Ist die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes größer als 1, so zerfallen diese im Allgemeinen in weitere Jordan-Kästchen, deren Größe in der Regel erst nach der Berechnung der Hauptvektoren bekannt ist.*

*Ist etwa  $g(\lambda) = 2$  und  $a(\lambda) = 4$ , so ist zunächst nicht klar, ob man je einen Eigenvektor und ein zugehörigen Hauptvektor erster Stufe oder einen Eigenvektor und einen Eigenvektor mit einem Hauptvektor erster und einem Hauptvektor zweiter Stufe zu betrachten hat.*

### 3.4 Anwendung: Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (3 Fälle)

In diesem Abschnitt wird kurz diskutiert, wie im Fall von [System mit konstanten Koeffizienten](#) die allgemeine Lösung mithilfe der Spektraltheorie quadratischer Matrizen explizit konstruiert werden kann.

Es wird stets das homogene System

$$\underline{\mathbf{y}}' = A\underline{\mathbf{y}} , \quad A \in M(n, n) ,$$

auf  $I = (-\infty, \infty)$  betrachtet,  $\underline{\mathbf{y}}$  ist die gesuchte Funktion  $I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

---

**Ansatz.**

Es sei  $A \in M(n, n)$  eine quadratische  $n \times n$  Matrix. Es liegt nahe, ähnlich wie in Kapitel 1.3 den Ansatz zu machen:

$$\underline{\mathbf{y}}(x) = \underline{\mathbf{v}}e^{\lambda x} , \quad \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n , \quad \lambda \in \mathbb{R} .$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung, ergibt der Ansatz

$$\underline{\mathbf{v}}\lambda e^{\lambda x} = A\underline{\mathbf{v}}e^{\lambda x} .$$

Mit anderen Worten muss  $\underline{\mathbf{v}}$  der Beziehung

$$A\underline{\mathbf{v}} = \lambda\underline{\mathbf{v}}$$

genügen, d.h.  $\lambda$  ist ein Eigenwert von  $A$  und  $\underline{\mathbf{v}}$  ist Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ .

Auch die Umkehrung ist richtig: Gilt diese Beziehung, so ist  $\underline{\mathbf{y}}(x) = \underline{\mathbf{v}}e^{\lambda x}$  eine Lösung des obigen Differentialgleichungssystems.

---

**Fall 1.  $A$  ist reell diagonalisierbar.**

Die Matrix  $A$  sei diagonalisierbar, wobei alle Eigenwerte und die zugehörige Basis aus Eigenvektoren reell seien.

Wie in Kapitel 3.2 betrachte man das Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3, 3) .$$

Die Eigenwerte von  $A$  sind  $\lambda_1 = 2$  und  $\lambda_2 = 1$ , die zugehörigen (reellen) Eigenräume sind gegeben durch

$$E_{\lambda_1=2} = \{\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3 : v_3 = 0\}$$

sowie

$$E_{\lambda_2=1} = \{t\underline{\mathbf{w}} : t \in \mathbb{R}\} , \quad \underline{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Mit

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist eine Basis aus Eigenvektoren gefunden.

Ein Fundamentalsystem von Lösungen ist

$$\underline{\mathbf{y}}^{(1)}(x) = \underline{\mathbf{v}}^{(1)} e^{2x} , \quad \underline{\mathbf{y}}^{(2)}(x) = \underline{\mathbf{v}}^{(2)} e^{2x} , \quad \underline{\mathbf{y}}^{(3)}(x) = \underline{\mathbf{v}}^{(3)} e^x ,$$

wobei die lineare Unabhängigkeit der Funktion unmittelbar aus Satz 2.2



folgt.

Die allgemeine Lösung des Systems ist ( $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ )

$$\underline{\mathbf{y}}(x) = c_1 \underline{\mathbf{v}}^{(1)} e^{2x} + c_2 \underline{\mathbf{v}}^{(2)} e^{2x} + c_3 \underline{\mathbf{v}}^{(3)} e^x .$$

**Fall 2. Die Matrix  $A$  ist zwar diagonalisierbar, aber nicht im Reellen.**

Da man aber an reellen Lösungen des Systems interessiert ist, muss ähnlich wie in Kapitel 1.3 argumentiert werden:

Mit  $\lambda$  ist auch  $\bar{\lambda}$  Eigenwert (Eigenvektoren  $\underline{\mathbf{v}}$  und  $\bar{\underline{\mathbf{v}}}$ , vgl. Satz 3.2) und man erhält aus zwei komplexen Lösungen

$$\underline{\mathbf{v}} e^{\lambda x} , \quad \bar{\underline{\mathbf{v}}} e^{\bar{\lambda} x}$$

die reellen (nachrechnen!) Lösungen

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{y}}^{(1)}(x) &= \operatorname{Re} \underline{\mathbf{v}} e^{\lambda x} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{v}} e^{\lambda x} + \bar{\underline{\mathbf{v}}} e^{\bar{\lambda} x}) , \\ \underline{\mathbf{y}}^{(2)}(x) &= \operatorname{Im} \underline{\mathbf{v}} e^{\lambda x} = \frac{1}{2i} (\underline{\mathbf{v}} e^{\lambda x} - \bar{\underline{\mathbf{v}}} e^{\bar{\lambda} x}) . \end{aligned}$$

Lautet das System etwa

$$\underline{\mathbf{y}}' = A \underline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{y}} ,$$

so bestimmt man zunächst als Eigenwerte und Eigenvektoren

$$\lambda_1 = 1 + 2i, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 1 - 2i, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}.$$

Rechnet man im Komplexen, so ergibt sich als Fundamentalsystem unmittelbar

$$\underline{\mathbf{z}}^{(1)}(x) = e^{(1+2i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix},$$

$$\underline{\mathbf{z}}^{(2)}(x) = e^{(1-2i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}.$$

Im Reellen betrachtet man

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{y}}^{(1)}(x) &= \frac{1}{2} \left[ e^{(1+2i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} + e^{(1-2i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} e^x \left[ (\cos(2x) + i \sin(2x)) \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + (\cos(2x) - i \sin(2x)) \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} e^x \begin{pmatrix} 2 \cos(2x) \\ 4 \sin(2x) \end{pmatrix} \\ &= e^x \begin{pmatrix} \cos(2x) \\ 2 \sin(2x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Als linear unabhängige reelle Lösung findet man analog

$$\underline{\mathbf{y}}^{(2)}(x) = e^x \begin{pmatrix} \sin(2x) \\ -2 \cos(2x) \end{pmatrix}.$$

Mit anderen Worten ist die allgemeine (reelle) Lösung (Probe!)

$$\underline{\mathbf{y}}(x) = e^x \begin{pmatrix} c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) \\ 2c_1 \sin(2x) - 2c_2 \cos(2x) \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$


---

### Fall 3. Die Matrix ist nicht diagonalisierbar.

Man betrachte beispielhaft die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

aus Kapitel 3.3.

Zur Lösung des Systems

$$\underline{\mathbf{y}}' = A\underline{\mathbf{y}}$$

liefert der obige Ansatz nur die Lösung

$$\underline{\mathbf{y}}^{(0)}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x}$$

sowie deren Vielfache.

In der Hoffnung auf eine größere Lösungsmenge und motiviert durch die in Kapitel 1.3 diskutierte Reduktion der Ordnung, wird der erweiterte Ansatz

$$\underline{\mathbf{y}}^{(1)}(x) = \underline{\mathbf{v}}^{(0)} x e^{2x} + \underline{\mathbf{v}}^{(1)} e^{2x}$$

gemacht, wobei  $\underline{\mathbf{v}}^{(0)}$  einen Eigenvektor von  $A$  bezeichne — o.E. und nur zur Vereinfachung der Rechnung in diesem Beispiel  $\underline{\mathbf{v}}^{(0)} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  — und  $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$  geeignet zu bestimmen ist.

Falls  $\underline{\mathbf{y}}^{(1)}$  das Differentialgleichungssystem löst, so gilt

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{v}}^{(0)} e^{2x} + \underline{\mathbf{v}}^{(0)} x 2e^{2x} + \underline{\mathbf{v}}^{(1)} 2e^{2x} &= \underline{\mathbf{y}}^{(1)'}(x) \\ &= A \underline{\mathbf{y}}^{(1)} \\ &= A \underline{\mathbf{v}}^{(0)} x e^{2x} + A \underline{\mathbf{v}}^{(1)} e^{2x} \\ &= 2 \underline{\mathbf{v}}^{(0)} x e^{2x} + A \underline{\mathbf{v}}^{(1)} e^{2x} . \end{aligned}$$

Als Bedingung an  $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$  ergibt sich

$$(A - 2I_3) \underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \underline{\mathbf{v}}^{(0)} , \quad (4)$$

d.h. nach (2) ist  $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$  ein Hauptvektor erster Stufe.

Umgekehrt gilt: Ist (4) erfüllt, so löst  $\underline{\mathbf{y}}^{(1)}$  das Differentialgleichungssystem.

**Bemerkung.** *An der Rechnung erkennt man, dass der einfache Ansatz  $\underline{\mathbf{y}}^{(1)} = \underline{\mathbf{v}}^{(0)} x e^{2x}$  nicht zum Ziel führen kann.*

Im Beispiel liefert der Hauptvektor erster Stufe (der einer Kettenbedingung genügt) die linear unabhängige Lösung

$$\underline{\mathbf{y}}^{(1)}(x) = \underline{\mathbf{v}}^{(0)} x e^{2x} + \underline{\mathbf{v}}^{(1)} e^{2x} , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Mithilfe des Hauptvektors zweiter Stufe konstruiert man analog eine dritte linear unabhängige Lösung (Probe!):

$$\underline{\mathbf{y}}^{(2)}(x) = \underline{\mathbf{v}}^{(0)} \frac{1}{2!} x^2 e^{2x} + \underline{\mathbf{v}}^{(1)} \frac{x}{1!} e^{2x} + \underline{\mathbf{v}}^{(2)} e^{2x} , \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/8 \\ 1/4 \end{pmatrix} .$$



### 3.5 Übungsaufgaben zu Kapitel 3

**Aufgabe 1.\*** Zeigen Sie Satz 3.2.

---

**Aufgabe 2\*.** Folgern Sie: Es sei  $A \in M(n, n, \mathbb{R})$  eine **symmetrische Matrix mit reellen Eintragungen**. Dann gilt

- i) Die **Eigenwerte von  $A$  sind reell** und damit auch die Eigenvektoren.
  - ii) Eigenvektoren **zu verschiedenen Eigenwerten** stehen **senkrecht** aufeinander.
- 

**Aufgabe 3.\*** Zeigen Sie Satz 3.3.

---

**Aufgabe 4.\*** Zeigen Sie Satz 3.4.

---

**Aufgabe 5.\*** Zeigen Sie Lemma 3.1.

---

**Aufgabe 6.** Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$


---

**Aufgabe 7.** Es sei  $a \in \mathbb{R}$  fixiert. Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenräume der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Rechnen Sie dabei komplex.

---

**Aufgabe 8.** Es sei  $(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)})$  die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^2$  und es sei

$$\underline{\mathbf{f}}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\underline{\mathbf{e}}^{(1)} - \underline{\mathbf{e}}^{(2)}), \quad \underline{\mathbf{f}}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\underline{\mathbf{e}}^{(1)} - \underline{\mathbf{e}}^{(2)}).$$

Ferner seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

i) Finden Sie eine reguläre Matrix  $S \in M(2, 2)$  mit  $S^{-1} = S^T$  und

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$



für alle Vektoren  $\underline{\mathbf{v}} = v_1 \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + v_2 \underline{\mathbf{e}}^{(2)} = u_1 \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + u_2 \underline{\mathbf{f}}^{(2)}$ .

ii) Rechnen Sie nach:  $\tilde{A} = SAS^{-1}$ .

iii) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren (normiert auf die Länge 1) von  $A$  und  $\tilde{A}$ .

iv) Skizzieren Sie die Mengen

$$E = \left\{ 4x_1^2 + 2x_2^2 = 1 \right\} \quad \text{und} \quad \tilde{E} = \left\{ 3(x_1^2 + x_2^2) + 2x_1x_2 = 1 \right\}.$$

Tragen Sie dabei die Basisvektoren „an passender Stelle“ ein.

v) Schlagen Sie in der Literatur die Normalformen der Quadriken im  $\mathbb{R}^2$  nach und schreiben Sie die verschiedenen Fälle auf.

**Aufgabe 9.** Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

und die Menge

$$H = \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \underline{\mathbf{x}}^T A \underline{\mathbf{x}} = 1 \}.$$

i) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren von  $A$ .

- ii) Finden Sie eine orthogonale Matrix  $S = (\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)}) \in M(2, 2)$ , sodass die Matrix  $S^T A S$  Diagonalgestalt hat.
- iii) Betrachten Sie die Koordinatenvektoren bzgl. der Basis  $\mathcal{F} = (\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)})$  des  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{F}} \quad \text{für } \underline{\mathbf{x}} = \beta_1 \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \beta_2 \underline{\mathbf{f}}^{(2)} .$$

Welche Gleichung gilt für  $\beta_1, \beta_2$ , falls  $x \in H$ ?

- iv) Fertigen Sie eine Skizze an.

---

**Aufgabe 10.** Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Finden Sie, falls möglich, eine reguläre Matrix  $S \in M(3, 3)$ , sodass  $S^{-1} A S$  Diagonalgestalt hat. Gilt  $S^{-1} = S^T$ ?

---

**Aufgabe 11.** Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{2 - \sqrt{2}}{2} & 2 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 - \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix  $A$  sowie die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte.

---

**Aufgabe 12.** Es sei  $n = 2$  und  $A \in M(2, 2)$  eine symmetrische Matrix.

Welche Eigenschaft muss die Matrix  $A$  jeweils haben, damit

i) 0 ein Eigenwert von  $A$  ist;

ii) ein Eigenwert der algebraischen Vielfachheit 2 existiert?

---

**Aufgabe 13.** Es sei  $a \in \mathbb{R}$  fixiert und gegeben sei weiter die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bringen Sie  $A$  auf Jordansche Normalform.

---

**Aufgabe 14.** Bestimmen Sie die allgemeine (reelle) Lösung der folgenden Systeme linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$i) \quad \underline{\mathbf{y}}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{y}}, \quad ii) \quad \underline{\mathbf{y}}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{y}},$$

$$iii) \quad \underline{\mathbf{y}}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{y}}, \quad iv) \quad \underline{\mathbf{y}}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{y}}.$$

Machen Sie jeweils eine Probe.

---

**Aufgabe 15.** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Systeme mit konstanten Koeffizienten

$$i) \quad \underline{\mathbf{y}}' = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \underline{\mathbf{y}} + \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix},$$

$$ii) \quad \underline{\mathbf{y}}' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{y}} + \begin{pmatrix} e^{x/2} \\ -2e^{x/2} \end{pmatrix}.$$

---

### Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben.

**Aufgabe 1.** Die erste Aussage ist eine Konsequenz aus der Tatsache, dass für ein reelles Polynom mit  $\lambda \in \mathbb{C}$  auch  $\bar{\lambda}$  eine Nullstelle ist (vgl. Teil I, Korollar 11.1).

Zum Beweis der zweiten Aussage beobachtet man

$$A(\underline{\mathbf{a}} - i\underline{\mathbf{b}}) = \overline{A(\underline{\mathbf{a}} + i\underline{\mathbf{b}})} = \overline{\lambda \underline{\mathbf{a}} + i\lambda \underline{\mathbf{b}}} = \bar{\lambda} \underline{\mathbf{a}} - i\bar{\lambda} \underline{\mathbf{b}} = \bar{\lambda}(\underline{\mathbf{a}} - i\underline{\mathbf{b}}) ,$$

wobei ausgenutzt wurde, dass  $A$ ,  $\underline{\mathbf{a}}$  und  $\underline{\mathbf{b}}$  nur reelle Eintragungen haben. □

**Aufgabe 2.** Es sei  $A \in M(n, n, \mathbb{R})$  symmetrisch, d.h.  $A = A^T$  und es sei  $\lambda$  ein Eigenwert von  $A$ ,  $\underline{\mathbf{v}} \neq \underline{\mathbf{0}}$  ein zugehöriger Eigenvektor.

Es gilt

$$A\underline{\mathbf{v}} = \lambda \underline{\mathbf{v}} \quad \text{und damit} \quad \underline{\mathbf{v}}^T A^T = \lambda \underline{\mathbf{v}}^T, \quad A\bar{\underline{\mathbf{v}}} = \bar{\lambda} \bar{\underline{\mathbf{v}}} .$$

Aus der Symmetrie von  $A$  (also aus  $A^T = A$ ) folgt

$$\begin{aligned} \lambda \langle \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{v}} \rangle &= \lambda \underline{\mathbf{v}}^T \bar{\underline{\mathbf{v}}} = \underline{\mathbf{v}}^T A^T \bar{\underline{\mathbf{v}}} = \underline{\mathbf{v}}^T A \bar{\underline{\mathbf{v}}} = \underline{\mathbf{v}}^T \bar{\lambda} \bar{\underline{\mathbf{v}}} \\ &= \bar{\lambda} \langle \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{v}} \rangle . \end{aligned}$$

Man erkennt  $\lambda = \bar{\lambda}$ , der Eigenwert ist reell.

Sind nun  $\underline{\mathbf{v}}$  und  $\underline{\mathbf{w}}$  Eigenvektoren zu  $\lambda \in \mathbb{R}$  bzw.  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq \mu$ , so gilt

$$\begin{aligned} (\lambda - \mu) \underline{\mathbf{v}}^T \underline{\mathbf{w}} &= \lambda \underline{\mathbf{v}}^T \underline{\mathbf{w}} - \underline{\mathbf{v}}^T \mu \underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{v}}^T A^T \underline{\mathbf{w}} - \underline{\mathbf{v}}^T A \underline{\mathbf{w}} \\ &= \underline{\mathbf{v}}^T A \underline{\mathbf{w}} - \underline{\mathbf{v}}^T A \underline{\mathbf{w}} = 0 , \end{aligned}$$

woraus die Orthogonalität von  $\underline{\mathbf{v}}$  und  $\underline{\mathbf{w}}$  folgt.

□

**Aufgabe 3.** Der Beweis wird hier nur im Fall  $k = 2$  geführt, der allgemeine Fall kann ähnlich verifiziert werden..

Es sei also  $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$  Eigenvektor von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda_1$  und es sei  $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$  Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_2 \neq \lambda_1$  (o.E.  $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)} \neq \underline{\mathbf{0}}$ ):

$$A\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \lambda_1 \underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \quad A\underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \lambda_2 \underline{\mathbf{v}}^{(2)}.$$

Wären  $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}$  und  $\underline{\mathbf{v}}^{(2)}$  linear abhängig, so gäbe es ein  $\alpha \in \mathbb{C}$  mit  $\underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \alpha \underline{\mathbf{v}}^{(1)}$ .

Dies würde aber

$$A\underline{\mathbf{v}}^{(2)} = A\alpha \underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \alpha A\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \alpha \lambda_1 \underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \lambda_1 \alpha \underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \lambda_1 \underline{\mathbf{v}}^{(2)}$$

bedeuten und aus der Voraussetzung  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  folgte ein Widerspruch.

□

#### Aufgabe 4.

i) Es seien  $A, S \in M(n, n, \mathbb{C})$ ,  $S$  regulär und  $B = S^{-1}AS$ .

Aus dem Determinantenmultiplikationssatz folgt:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_n) &= \det(SS^{-1}(A - \lambda I_n)) \\ &= \det(S) \det(S^{-1}(A - \lambda I_n)) \\ &= \det(S^{-1}A - \lambda I_n S^{-1}) \det(S) \\ &= \det(S^{-1}AS - \lambda I_n) = \det(B - \lambda I_n). \end{aligned}$$

ii) Man beachte die Äquivalenz

$$A\underline{\mathbf{v}} = \lambda\underline{\mathbf{v}} \Leftrightarrow \underbrace{(S^{-1}AS)}_{=B}(S^{-1}\underline{\mathbf{v}}) = \lambda\underbrace{(S^{-1}\underline{\mathbf{v}})}_{=\underline{\mathbf{w}}}.$$

**Aufgabe 5.** Per definitionem gilt für jeden Eigenwert  $\lambda$  offensichtlich  $1 \leq g(\lambda)$ .

Analog zur Idee von Satz 3.5 wird weiter wie folgt argumentiert:

Es sei  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  ein Eigenwert der geometrischen Vielfachheit  $1 \leq k := g(\lambda_0) \leq n$  und es seien  $\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \dots, \underline{\mathbf{v}}^{(k)}$  linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert  $\lambda_0$ .

Diese linear unabhängigen Vektoren können zu einer Basis  $\mathcal{B}$  des  $\mathbb{R}^n$  (bzw.  $\mathbb{C}^n$ )

$$\mathcal{B} = (\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)}, \dots, \underline{\mathbf{v}}^{(k)}, \tilde{\underline{\mathbf{v}}}^{(k+1)}, \dots, \tilde{\underline{\mathbf{v}}}^{(n)})$$

ergänzt werden, wobei die hinzugekommenen Vektoren keine Eigenvektoren sein müssen.

Schließlich setzt man (als Spaltenvektoren geschrieben)

$$C := (\underline{\mathbf{v}}^{(1)} \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} \quad \dots \quad \underline{\mathbf{v}}^{(k)} \quad \tilde{\underline{\mathbf{v}}}^{(k+1)} \quad \dots \quad \tilde{\underline{\mathbf{v}}}^{(n)}) \in M(n, n).$$

Aus dieser Schreibweise ergibt sich (zur Erinnerung:  $\mathcal{B}$  ist Basis)

$$\begin{aligned}
AC &= (A_{\underline{\mathbf{v}}^{(1)}} A_{\underline{\mathbf{v}}^{(2)}} \dots A_{\underline{\mathbf{v}}^{(k)}} A_{\underline{\tilde{\mathbf{v}}}^{(k+1)}} \dots A_{\underline{\tilde{\mathbf{v}}}^{(n)}}) \\
&= (\lambda_0 \underline{\mathbf{v}}^{(1)} \lambda_0 \underline{\mathbf{v}}^{(2)} \dots \lambda_0 \underline{\mathbf{v}}^{(k)} A_{\underline{\tilde{\mathbf{v}}}^{(k+1)}} \dots A_{\underline{\tilde{\mathbf{v}}}^{(n)}}) \\
&= C \underbrace{\left( \begin{array}{cccc|c} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \end{array} \right)}_{=:M}.
\end{aligned}$$

Anhand der Struktur von  $M$  erkennt man

$$\det (M - \lambda I_n) = (\lambda - \lambda_0)^k p_{n-k}(\lambda),$$

wobei  $p_{n-k}$  ein Polynom vom Grad  $n - k$  bezeichne.

Da  $\mathcal{B}$  Basis ist, ist  $C$  invertierbar und wie in obiger Aufgabe 4 folgt zusammenfassend, dass  $\lambda_0$  mindestens die algebraische Vielfachheit  $k$  hat.

□



# Kapitel 4

## Stetige Funktionen mehrerer Veränderlicher

### 4.1 Definition und Eigenschaften (Grenzwert und Stetigkeit; geometrische Vorstellung)

Der Konvergenzbegriff im  $\mathbb{R}^n$  ist bereits in Teil I, Definition 10.9, diskutiert – man ersetzt im  $\mathbb{R}^n$  lediglich den Betrag durch die Euklidische Norm.

Von besonderer Bedeutung ist dabei Teil I, Satz 10.3, zur komponentenweise Konvergenz, der die Situation auf die eindimensionale zurückspielt.

Dementsprechend überträgt sich auch der Begriff des Grenzwertes bzw. der Stetigkeit einer Funktionen auf den Fall mehrerer Veränderlicher (vgl. Teil II, Definition 4.1).

Zur Vereinfachung der Darstellung werden zunächst Funktionen  $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  betrachtet, wobei  $U \subset \mathbb{R}^m$  eine offene Menge sei.

#### Definition 4.1. GRENZWERT UND STETIGKEIT

Man betrachte eine offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^m$  und eine Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ .

i) Es seien  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in U$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  fixiert.

Es hat  $f$  an der Stelle  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  den Grenzwert  $\alpha$ , falls für jede Folge  $\{\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\}$  aus  $U$  mit  $\underline{\mathbf{x}}^{(k)} \neq \underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $\underline{\mathbf{x}}^{(k)} \rightarrow \underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  für  $k \rightarrow \infty$  gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\underline{\mathbf{x}}^{(k)}) = \alpha, \quad \text{Notation:} \quad \lim_{\underline{\mathbf{x}} \rightarrow \underline{\mathbf{x}}_0} f(\underline{\mathbf{x}}) = \alpha.$$

ii) Die Funktion  $f$  heißt stetig in einem Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in U$ , falls

$$\lim_{\underline{\mathbf{x}} \rightarrow \underline{\mathbf{x}}^{(0)}} f(\underline{\mathbf{x}}) = f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) .$$

iii) Die Funktion heißt stetig auf  $U$ , falls sie in jedem Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in U$  stetig ist.

Analog zu den Bemerkungen nach Teil II, Definition 4.1 ist festzuhalten:

### Bemerkungen.

- i) Der Grenzwert einer Funktion kann auch in einem Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \notin U$  definiert werden. Dazu muss  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  ein *Häufungspunkt* (vgl. Teil I, Definition 10.12) der Menge  $U$  sein.
- ii) Die Rechenregeln, Eigenschaften und Sätze aus Teil II, Kapitel 4, übertragen sich ebenfalls sinngemäß – bis auf Satz Teil II, Satz 4.4 (Zwischenwertsatz), und Teil II, Korollar 4.1 (Stetigkeit und Umkehrfunktion), in denen die Anordnung der reellen Zahlen eingeht.
- iii) Insbesondere überträgt sich Teil II, Satz 4.3, auf den Fall von Funktionen mehrerer Veränderlicher in die *reellen Zahlen* (bei Funktionen in den  $\mathbb{R}^n$  kann nicht von Maximum bzw. Minimum gesprochen werden):
- iv) Ist  $\overline{U} \subset \mathbb{R}^m$  kompakt, so nimmt eine stetige Funktion  $f: \overline{U} \rightarrow \mathbb{R}$  ihr absolutes Maximum und ihr absolutes Minimum an.

- v) Die äquivalente Grenzwertdefinition und die gleichmäßige Stetigkeit werden im Übungskapitel 4.2 anhand von Beispielen diskutiert.

---

### Beispiele zur geometrischen Vorstellung.

- i) Das Standardbeispiel einer stetigen (nicht-differenzierbaren) Funktion  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Euklidische Norm  $f(\underline{\mathbf{x}}) = \|\underline{\mathbf{x}}\|$ , die in Abbildung 4.1 dargestellt ist.

Man erkennt wieder den „Knick“ des Graphen im Nullpunkt.

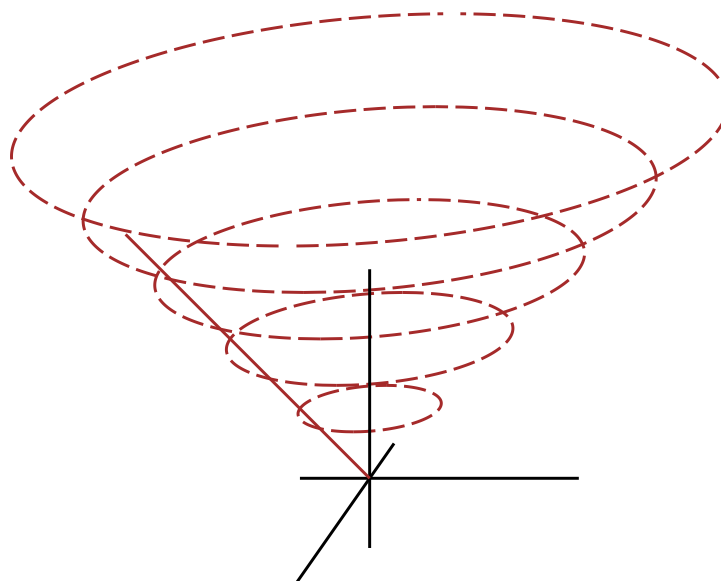


Abbildung 4.1: Die Betragsfunktion im  $\mathbb{R}^m$ .

Um Stetigkeit in einem fixierten Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  nachzuweisen, setzt man nach Definition 4.1 den Wert  $\alpha = \|\underline{\mathbf{x}}^{(0)}\|$  und betrachtet eine beliebige Folge  $\{\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\}$  aus  $\mathbb{R}^m$ ,  $\underline{\mathbf{x}}^{(k)} \neq \underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , mit

$$\|\underline{\mathbf{x}}^{(k)} - \underline{\mathbf{x}}^{(0)}\| \rightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty .$$

Nach der umgekehrten Dreiecksungleichung gilt (für  $k \rightarrow \infty$ )

$$|f(\underline{\mathbf{x}}^{(k)}) - \alpha| = |\|\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\| - \|\underline{\mathbf{x}}^{(0)}\|| \leq \|\underline{\mathbf{x}}^{(k)} - \underline{\mathbf{x}}^{(0)}\| \rightarrow 0 .$$

Damit ist  $\alpha$  der Grenzwert von  $f$  für  $\underline{\mathbf{x}} \rightarrow \underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  und wegen  $\alpha = f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})$  ist  $f$  stetig in  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$ .

Gezeigt ist tatsächlich: Auch im  $\mathbb{R}^m$  ist die Betragsfunktion [Lipschitz-stetig](#) (vgl. Übungskapitel 4.2).

- ii) Analog zu Teil II, Abbildung 4.4, kann man aus einer Skizze des Graphen nicht unbedingt auf die Stetigkeit einer Funktion schließen (vgl. Abbildung 4.2).

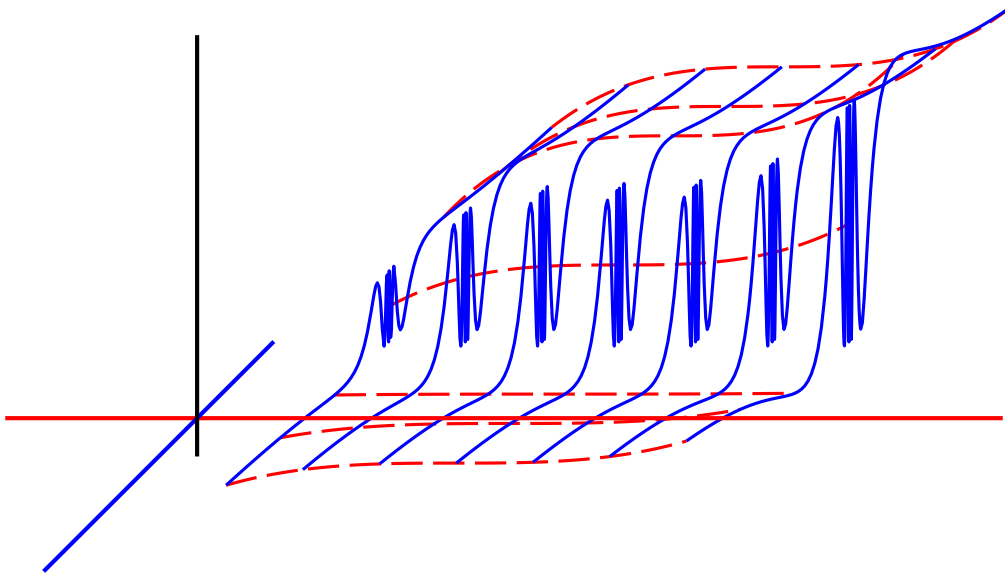


Abbildung 4.2: Anhand der Graphik kann man nicht auf Stetigkeit schließen.

- iii) Im Gegensatz zu Funktionen einer Veränderlichen können sich Funktionen mehrerer Veränderlicher „in gewisse Richtungen“ stetig verhalten, in andere Richtungen wiederum unstetig.

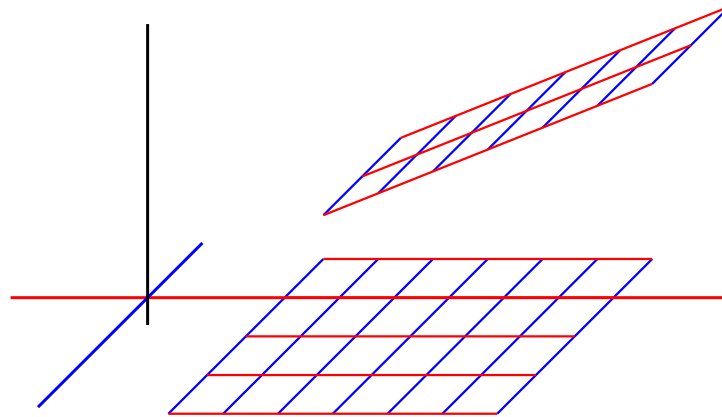


Abbildung 4.3: Verschiedenes Verhalten in unterschiedlichen Richtungen.

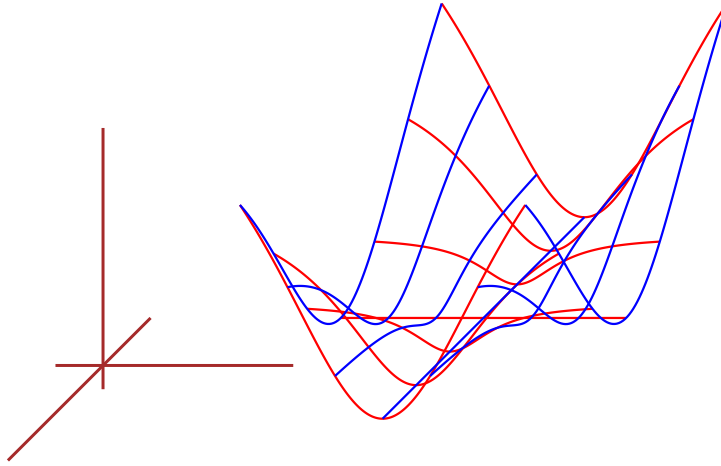
Ein einfaches Beispiel ist in Abbildung 4.3 dargestellt: Für fixiertes  $x_1$  ist der Graph in Abhängigkeit von  $x_2$  eine Gerade und damit stetig.

Für ein fixiertes  $x_2$  hat die Funktion eine Sprungstelle bei  $x_1 = -1$  und ist dort in diese Richtung nicht stetig und damit insgesamt nicht stetig.

#### 4 weitere Beispiele.

Man betrachte die folgenden Funktionen  $f, g, h, l: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$i) \quad f(\underline{\mathbf{x}}) := \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}, \\ 0 & \text{für } \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}; \end{cases}$$

Abbildung 4.4: Die Funktion  $f$ .

$$ii) \quad g(\underline{\mathbf{x}}) := \begin{cases} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}, \\ 0 & \text{für } \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}; \end{cases}$$

$$iii) \quad h(\underline{\mathbf{x}}) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}, \\ 0 & \text{für } \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}; \end{cases}$$

$$iv) \quad i(\underline{\mathbf{x}}) := \begin{cases} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}, \\ 0 & \text{für } \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}. \end{cases}$$

Ist  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \neq \underline{\mathbf{0}}$ , so folgt die Existenz des Grenzwertes aller vier Funktion und die Stetigkeit im Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  nach den bekannten Sätzen über Summe und Produkt von Grenzwerten.

Alle Beispiele sind so konstruiert, dass jeweils der Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} = \underline{\mathbf{0}}$  gesondert betrachtet werden muss.

- i) Die Funktion  $f$  ist in Abbildung 4.4 dargestellt, die die Stetigkeit von  $f$  vermuten lässt.

Man versucht deshalb ähnlich wie im Beispiel der Euklidischen Norm vorzugehen und bei  $k \rightarrow \infty$  die Konvergenz einer beliebigen gegebenen Folge mit  $\underline{\mathbf{x}}^{(k)} \rightarrow \underline{\mathbf{0}}$  auszunutzen, um die Konvergenz der Funktionswerte einzusehen.

Wie bemerkt ist die Funktion in jedem Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \neq \underline{\mathbf{0}}$  stetig und es sei  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} = \underline{\mathbf{0}}$ .

Man betrachtet eine beliebige Folge  $\{\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\}$ ,  $\underline{\mathbf{x}}^{(k)} \rightarrow \underline{\mathbf{0}}$  für  $k \rightarrow \infty$ ,  $\underline{\mathbf{x}}^{(k)} \neq \underline{\mathbf{0}}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , und beobachtet

$$|f(\underline{\mathbf{x}}^{(k)}) - f(\underline{\mathbf{0}})| = |f(\underline{\mathbf{x}}^{(k)})| = \left| \frac{(x_1^{(k)})^2 (x_2^{(k)})^2}{(x_1^{(k)})^2 + (x_2^{(k)})^2} \right| \leq \frac{\|\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\|^4}{\|\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\|^2} = \|\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\|^2.$$

Also gilt für alle Folgen  $\{\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\}$  wie oben

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\underline{\mathbf{x}}^{(k)}) = f(\underline{\mathbf{0}})$$

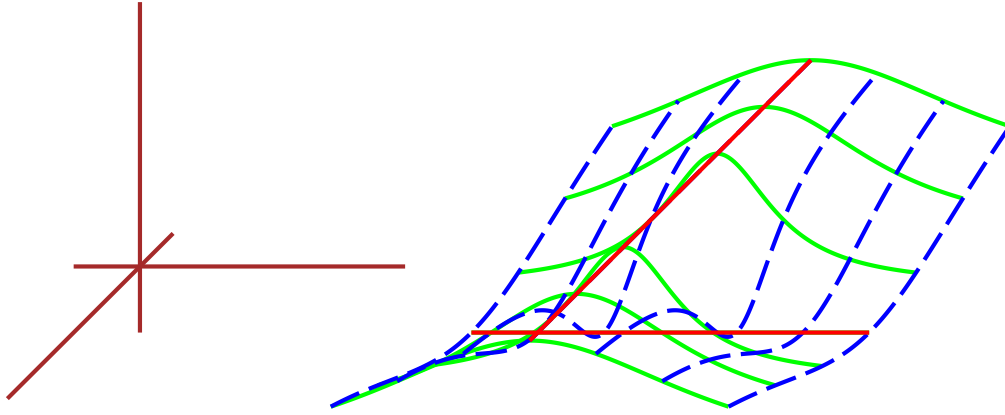
und die Stetigkeit von  $f$  ist gezeigt.

- ii) Die Funktion  $g$  ist in Abbildung 4.5 illustriert.

Im Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} = \underline{\mathbf{0}}$  beobachtet man in diesem Beispiel:

Läuft man auf der  $x_1$ -Achse in den Nullpunkt, so nimmt die Funktion  $g$  konstant den Wert  $+1$  an.

Läuft man hingegen auf der  $x_2$ -Achse in den Nullpunkt, so ist  $g$  konstant gleich  $-1$  (diese beiden Beobachtungen sind in der Abbildung

Abbildung 4.5: Die Funktion  $g$ .

angedeutet).

Auf der Winkelhalbierenden ( $x_1 = x_2$ ) wiederum ist  $g$  identisch Null.

Formal kann die Unstetigkeit von  $g$  im Nullpunkt etwa wie folgt gezeigt werden:

Für die Folge  $\{\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\}$ ,  $\underline{\mathbf{x}}^{(k)} = \begin{pmatrix} 1/k \\ 0 \end{pmatrix}$ , gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(\underline{\mathbf{x}}^{(k)}) = 1 .$$

Wegen  $g(\underline{\mathbf{0}}) = 0$  kann die Funktion nicht stetig im Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} = \underline{\mathbf{0}}$  sein.

Um zu zeigen, dass auch kein Grenzwert der Funktion für  $\underline{\mathbf{x}} \rightarrow \underline{\mathbf{0}}$  existiert, betrachtet man etwa die Folge  $\tilde{\underline{\mathbf{x}}}^{(k)}$ ,  $\tilde{\underline{\mathbf{x}}}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/k \end{pmatrix}$ , und erkennt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(\tilde{\underline{\mathbf{x}}}^{(k)}) = -1 .$$



Für zwei gegen  $\underline{\mathbf{0}}$  konvergente Folgen haben die Folgen der Funktionswerte demnach einen unterschiedlichen Grenzwert und somit kann der Grenzwert von  $g$  bei  $\underline{\mathbf{x}} \rightarrow \underline{\mathbf{0}}$  nicht existieren.

Insbesondere ist  $g$  – wie bereits oben gezeigt – nicht stetig im Nullpunkt.

iii) Die Funktion  $h$  ist in Abbildung 4.6 skizziert.

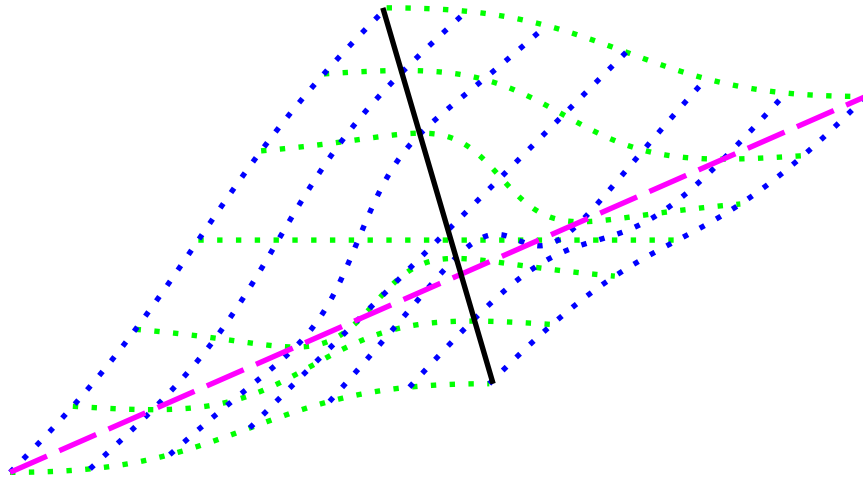
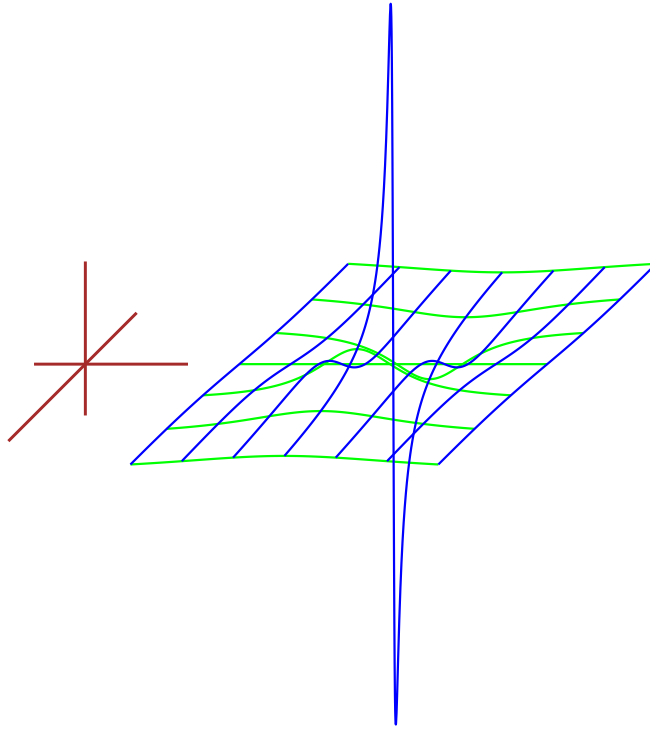


Abbildung 4.6: Die Funktion  $h$ .

Im Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} = \underline{\mathbf{0}}$  beobachtet man, dass  $h$  sowohl auf der  $x_1$ -Achse als auch auf der  $x_2$ -Achse identisch Null ist.

Für  $x_1 = x_2$  (bzw.  $x_1 = -x_2$ ),  $\underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{x}}^{(0)}$ , nimmt  $h$  jedoch konstant den Wert  $1/2$  ( $-1/2$ ) an und auch  $h$  kann nicht stetig im Nullpunkt sein.

iv) Bei der Funktion  $l(\underline{\mathbf{x}})$  (Abbildung 4.7) ist die Zählerpotenz kleiner als die Nennerpotenz und die Funktion muss im Nullpunkt divergieren.

Abbildung 4.7: Die Funktion  $l$ .

Man betrachte etwa die Folge  $\{\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\}$ ,  $\underline{\mathbf{x}}^{(k)} = \begin{pmatrix} 1/k \\ 0 \end{pmatrix}$ , und in der Tat ist mit dieser Wahl die Folge  $l(\underline{\mathbf{x}}^{(k)})$  unbeschränkt und folglich divergent.

Der Grenzwert der Funktionswerte für  $\underline{\mathbf{x}} \rightarrow \underline{\mathbf{0}}$  existiert nicht und damit ist auch die Funktion  $l$  nicht stetig im Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} = \underline{\mathbf{0}}$ .

**Bemerkung.** Im Gegensatz zum ersten Beispiel führt in den letzten drei Beispielen die Vermutung, dass der Grenzwert nicht existiert, zu der Strategie, verschiedene Folgen mit unterschiedlichem Grenzverhalten der Funktionswerte zu finden.

Die Liste von elementaren Beispielen wird in Übungskapitel 4.2 fortgesetzt.

**Vektorwertige Funktionen.**

Schließlich sei  $F: \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$  zudem vektorwertig, d.h. eine Abbildung

$$\mathbb{R}^m \subset U \ni \underline{x} \mapsto F(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\underline{x}) \\ f_2(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_n(\underline{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n .$$

Die Definition 4.1 der Stetigkeit überträgt sich wieder wörtlich, wenn nur die Konvergenz in  $\mathbb{R}$  durch die Konvergenz im  $\mathbb{R}^n$  ersetzt wird, d.h. der reelle Betrag durch die Euklidische Norm im  $\mathbb{R}^n$ .

Nach Teil I, Satz 10.3, kann das auf die komponentenweise Stetigkeit zurückgeführt werden, d.h. die Funktion  $F$  ist stetig, falls für alle  $i = 1, \dots, n$  die Funktion  $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist.

Beispielsweise ist mit  $f, g$  aus den letzten Beispielen *i*), *ii*) die Funktion  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$F(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f(\underline{x}) \\ g(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

nicht stetig im Punkt  $\underline{x}^{(0)} = \underline{0}$ , da die Funktion  $g$  dort nicht stetig ist.

---



## 4.2 Übungsaufgaben zu Kapitel 4

**Aufgabe 1.** Übertragen Sie den Begriff der Lipschitz-Stetigkeit auf den Fall von Funktionen  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ .

Ist die Funktion  $\underline{x} \mapsto \|\underline{x}\|$  Lipschitz-stetig?

---

**Aufgabe 2.** Formulieren Sie Teil II, Satz 4.2 und Definition 4.2, für Funktionen mehrerer Veränderlicher.

---

**Aufgabe 3.**

i) Es sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{x_1|x_1 - x_2|}{\|\underline{x}\|} & \text{für } \underline{x} \neq \underline{0}, \\ 0 & \text{für } \underline{x} = \underline{0}. \end{cases}$$

Ist  $f$  stetig auf  $\mathbb{R}^2$ ?

ii) Es sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{|x_1| - |x_2|}{\|\underline{x}\|} & \text{für } \underline{x} \neq \underline{0}, \\ 0 & \text{für } \underline{x} = \underline{0}. \end{cases}$$

Ist  $f$  stetig auf  $\mathbb{R}^2$ ?

iii) Es sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{cases} \frac{x_1|x_1 + x_2|x_2}{\|\underline{\mathbf{x}}\|^3} & \text{für } \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}, \\ 0 & \text{für } \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}. \end{cases}$$

Ist  $f$  stetig auf  $\mathbb{R}^2$ ?

**Aufgabe 4.** Sind die folgenden Funktionen stetig auf  $\mathbb{R}^2$ ?

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{cases} \frac{|x_1 - a_1|^2}{\|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{a}}\|} & \text{für } \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{a}}, \\ 0 & \text{für } \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{a}}, \end{cases} \quad \underline{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^2 \text{ fixiert.}$$

$$g(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{cases} \frac{|x_1| + |x_2|}{\|\underline{\mathbf{x}}\|} & \text{für } \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}, \\ a & \text{für } \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}, \end{cases} \quad a \in \mathbb{R} \text{ fixiert.}$$

**Aufgabe 5.** Betrachten Sie die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{cases} \frac{x_1^2 + x_1 - x_2}{\|\underline{\mathbf{x}}\|} & \text{für } \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}, \\ 0 & \text{für } \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}. \end{cases}$$

Finden Sie drei verschiedene Nullfolgen (nicht identisch Null)

$$\{\underline{\mathbf{x}}^{(k)}\}, \quad \{\underline{\mathbf{y}}^{(k)}\}, \quad \{\underline{\mathbf{z}}^{(k)}\} \quad \text{im } \mathbb{R}^2,$$

sodass die Folgen

$$\{f(\underline{\mathbf{x}}^{(k)})\}, \quad \{f(\underline{\mathbf{y}}^{(k)})\} \quad \text{und} \quad \{f(\underline{\mathbf{z}}^{(k)})\}$$

unterschiedliche Grenzwerte haben.

---

**Aufgabe 6.** Es sein  $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lineare Abbildung.

Ist  $L$  stetig?

---





# Kapitel 5

## Kurven im $\mathbb{R}^n$

### 5.1 Klassische Beispiele (Helix; Helikoid; Minimalfläche; Regelfläche; Kettenlinie; Katenoid; Rotationsfläche; Zykloide; Brachystochonenproblem; Traktrix; Pseudoshäre; Klothoide)

Bevor auf die grundlegenden Definitionen und Eigenschaften eingegangen wird, dienen hier einige wenige der zahlreichen klassischen Beispiele der geometrischen Intuition.

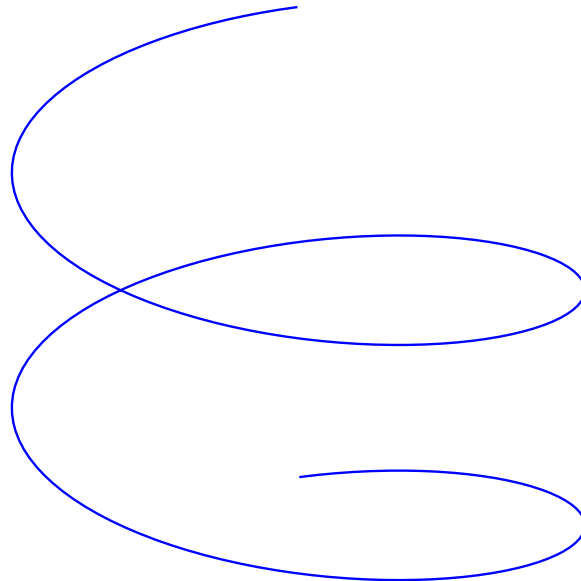


Abbildung 5.1: Helix.

- i)* Eine der bekanntesten Kurven ist sicherlich die [Helix](#) oder [Schraubenlinie](#), die in Abbildung 5.1 als rechtsgängige Helix dargestellt ist.

Verbindet man die Punkte auf der Helix mit der  $z$ -Achse, so entsteht das **Helikoid** (siehe Abbildung 5.2), welches als **Minimalfläche** von besonderer Bedeutung ist.

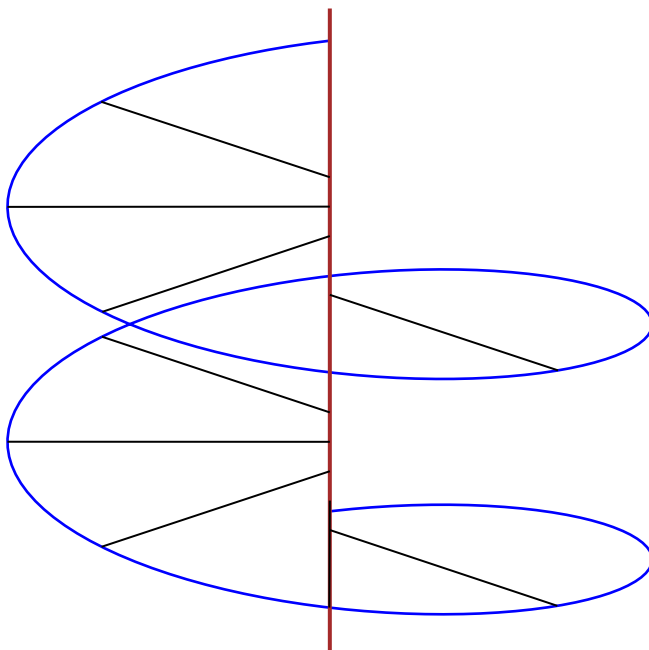


Abbildung 5.2: Helikoid.

Das Helikoid ist die einzige Minimalfläche, die gleichzeitig eine so genannte **Regelfläche** ist.

- ii) Die **Kettenlinie** entsteht – wie der Name schon sagt – beim Durchhängen einer Kette unter der Schwerkraft (vgl. Abbildung 5.3).

Auch die Kettenlinie produziert eine Minimalfläche, das sogenannte **Katenoid** (Abbildung 5.4) als **Rotationsfläche** der Kettenlinie.

Das Katenoid ist die einzige Minimalfläche, die gleichzeitig Rotationsfläche ist.

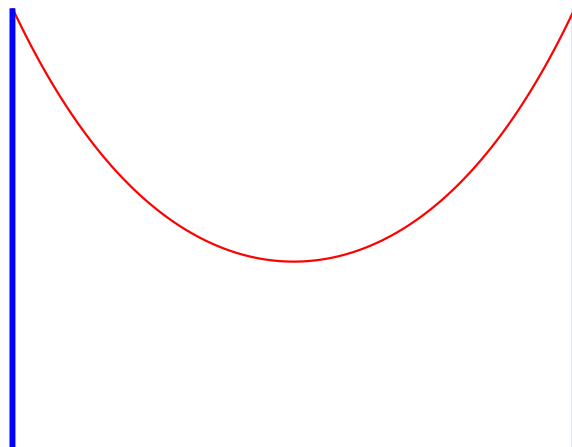


Abbildung 5.3: Kettenlinie.

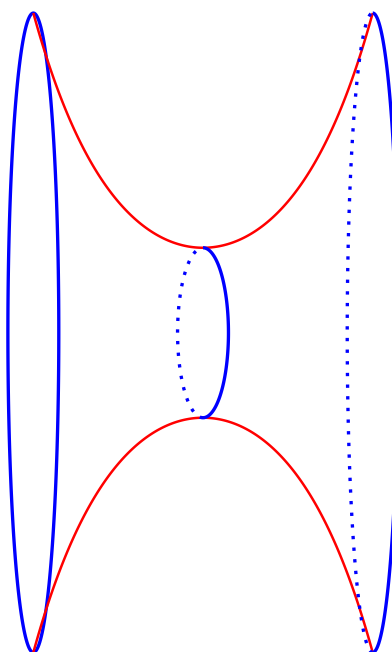


Abbildung 5.4: Katenoid.

- iii) Die **Zykloide** ist eine sogenannte **Rollkurve**, die beim Abrollen einer Kreisscheibe (eines Rades) entsteht (siehe Abbildung 5.5).

Die Zykloide ist gleichzeitig die Lösung des sogenannten **Brachysto-**

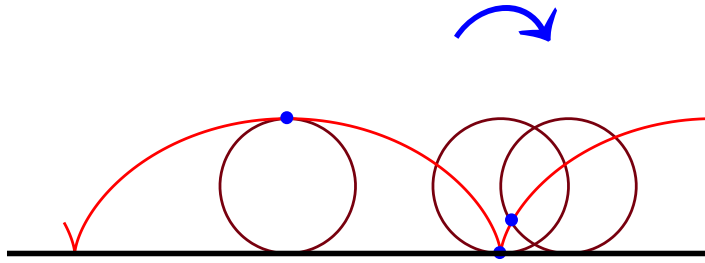


Abbildung 5.5: Zykloide.

chronenproblems von [Johann Bernoulli](#), dessen Formulierung 1696 als Beginn der Variationsrechnung angesehen werden kann:

„Gesucht wird die Bahnkurve eines Massenpunktes, der sich unter dem Einfluss der Schwerkraft in kürzester Zeit vom Punkt  $A$  zum Punkt  $B$  bewegt.“

- iv)* Die [Traktrix](#), eine sogenannte [Schleppkurve](#), wird von einem Massenpunkt beschrieben, der an einer Stange gezogen wird (Abbildung 5.6).

Für jede Tangente an die Traktrix ist die Länge des Segments zwischen ihrem Berührungspunkt und der  $y$ -Achse konstant gleich 1.

Durch Rotation der Traktrix entsteht die sogenannte [Pseudosphäre](#) aus Abbildung 5.7, deren [Gaußsche Krümmung](#) in jedem regulären Punkt gleich  $-1$  ist.

Grob gesprochen ist die Gaußsche Krümmung in einem Punkt einer zweidimensionalen Fläche im  $\mathbb{R}^3$  das Produkt aus der maximalen und minimalen Krümmung in verschiedene Richtungen. Bei der Sphäre vom Radius 1 ist sie konstant  $+1$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Nach dem [Theorema Egregium](#) von Gauß handelt es sich in der Tat um eine intrinsische Größe, die nicht vom umgebenden Raum abhängt.

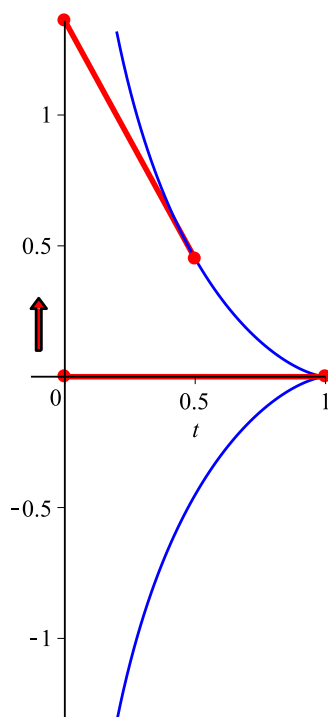


Abbildung 5.6: Traktrix.

- v) Die **Klothoide** (Abbildung 5.8) wiederum ist aus dem Straßenbau bekannt.

Sie wird verwandt, um ein Kehre mit kontinuierlich anwachsender Krümmung an ein Geradenstück anzupassen.

Ein Kreisbogen beispielsweise kann nicht direkt an ein Geradenstück angeschlossen werden, da dies einen nicht beherrschbaren Sprung in der Krümmung zur Folge hätte.

## 5.2 Parametrisierte Kurven im $\mathbb{R}^n$ (Spur; reguläre Kurve; Doppelpunkte; Rektifizierbarkeit; Bogenlänge; Parametertransformation)

Unter einer (parametrisierten) Kurve im  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , versteht man eine **stetige** Abbildung  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

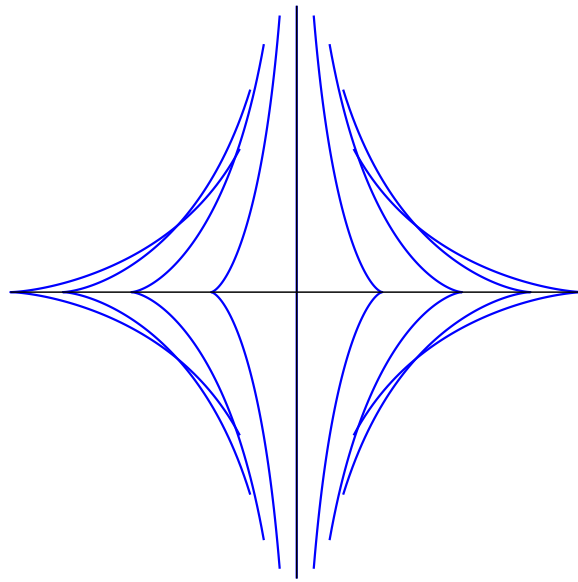


Abbildung 5.7: Pseudosphäre.

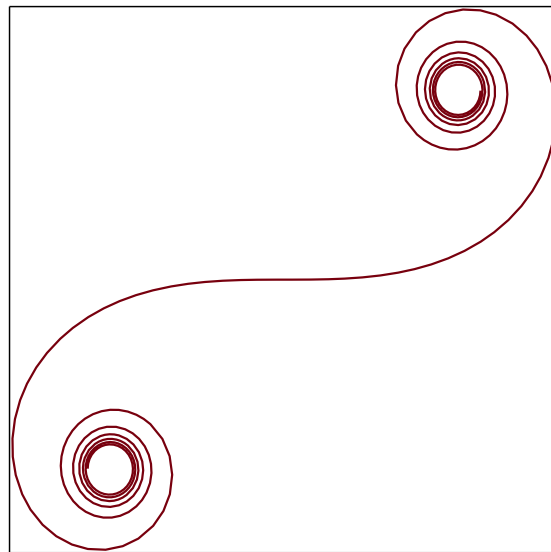


Abbildung 5.8: Klothoide.

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I,$$

wobei  $I \subset \mathbb{R}$  ein (evtl. verallgemeinertes) Intervall bezeichnet.

Abbildung 5.1 stellt eigentlich die **Spur** der **Helix** oder **Schraubenlinie**

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ a \sin(t) \\ bt \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

dar, wobei  $a, b > 0$  fixierte Konstanten bezeichnen.

Dabei ist die Spur einer Kurve per definitionem (vgl. Teil I, Definition 1.2)

$$\text{bild}(\gamma) = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} = \gamma(t) \text{ für ein } t \in I = \mathbb{R} \}.$$

Zu beachten ist, dass **unterschiedliche Kurven dieselbe Spur** haben können und dass eine Kurve nicht notwendig injektiv sein muss, d.h. es können **Doppelpunkte** ( $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$  für  $t_1 \neq t_2 \in I$ ) existieren.

Zudem fehlt in den Skizzen des vorangegangenen Paragraphen jegliche Information darüber, **mit welcher Geschwindigkeit und in welche Richtung die Kurve durchlaufen wird** (man erinnere sich an die geometrische und die kinematische Interpretation der Ableitung aus Teil II, Kapitel 5.1, insbesondere Abbildung 5.1 und Abbildung 5.2).

Dabei benötigt man noch:

**Definition 5.1.** DIFFERENZIERBARE, PARAMETRISIERTE KURVE

*i) Eine Kurve  $\gamma$  heißt (stetig) differenzierbar, falls alle Funktionen (Komponenten)  $\gamma_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , differenzierbar (bzw. stetig differenzierbar) sind.*

*Ist  $\gamma$  differenzierbar, so heißt*

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \vdots \\ \gamma'_n(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I,$$

*Tangentenvektor* (oder *Tangentialvektor*) der Kurve  $\gamma$  zum Parameterwert  $t$ .

- ii) Ist  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar, so heißt die Kurve *regulär*, falls  $\gamma'(t) \neq \underline{0}$  für alle  $t \in I$ .

In diesem Fall  $\gamma'(t) \neq 0$  heißt  $\gamma'(t)/\|\gamma'(t)\|$  Tangenteneinheitsvektor.

Andernfalls heißt ein Parameterwert  $t \in I$  mit  $\gamma'(t) = \underline{0}$  *singulär*.

### Beispiele.

- i) Die Kurve

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi),$$

hat als Spur die Einheitskreislinie im  $\mathbb{R}^2$ .

Die gleiche Spur (zweimal durchlaufen) hat die Kurve

$$\tilde{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

- ii) Der Punkt  $0 = \alpha(1) = \alpha(-1)$  ist ein Doppelpunkt der Kurve (Abbildung 5.9)

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t^3 - t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Trotzdem können Tangentialvektoren zu den Parameterwerten  $t = 1$  und  $t = -1$  erklärt werden.



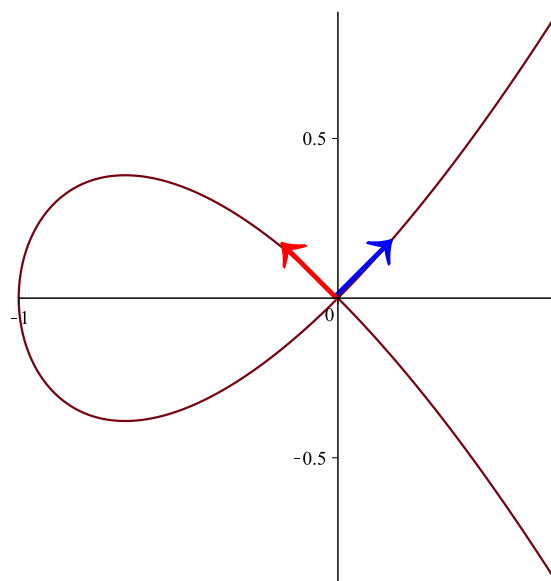


Abbildung 5.9: Eine reguläre Kurve mit Doppelpunkt.

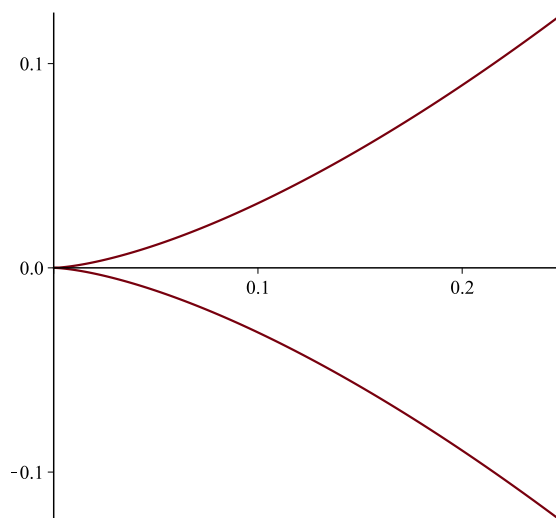


Abbildung 5.10: Neilsche Parabel.

iii) Die **Neilsche Parabel** (siehe Abbildung 5.10),

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

ist im Punkt  $t = 0$  singulär.

iv) Man betrachte die Kurven  $\alpha, \tilde{\alpha}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , skizziere deren Spur und überlege, ob die Kurven regulär sind:

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \quad \tilde{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$


---

### Die Länge einer Kurve.

Die Idee zur Definition der Länge einer Kurve ist die Folgende:

Man approximiere eine Kurve mit **Polygonzügen**, d.h. Punkte auf der Spur der Kurve werden (affin) linear (mit Strecken) verbunden (siehe Abbildung 5.11).

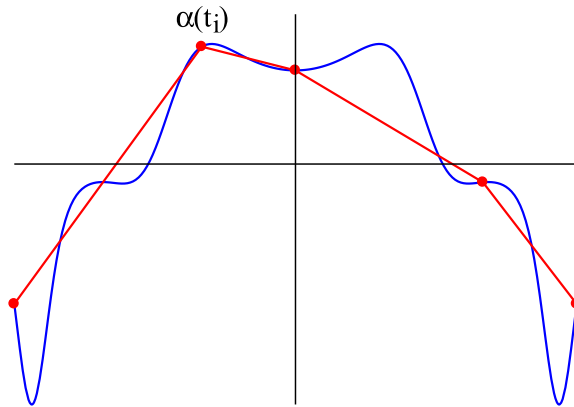


Abbildung 5.11: Zur Rektifizierbarkeit einer Kurve.

Dazu sei in Erinnerung gerufen, dass per definitionem eine **Zerlegung**  $\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$  eines Intervalls  $[a, b]$  eine Menge von Punkten

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

ist. Damit setzt man:

**Definition 5.2.**

REKTIFIZIERBARKEIT UND BOGENLÄNGE

Es sei  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Kurve und für eine beliebige Zerlegung  $\mathcal{Z}$  des Intervalls  $[a, b]$  sei

$$L(\mathcal{Z}) := \sum_{i=1}^N \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\| .$$

i) Gibt es eine Konstante  $M$ , so dass für jede solche Zerlegung  $L(\mathcal{Z}) \leq M$  gilt, so heißt  $\alpha$  *rektifizierbar*.

ii) Die *(Bogen-) Länge* der Kurve ist in diesem Fall

$$L := \sup_{\mathcal{Z}} L(\mathcal{Z}) .$$

---

Im Folgenden werden nur hinreichend glatte Kurven betrachtet (zumindest stückweise) und im Grenzwert ergibt sich

**Satz 5.1.**

LÄNGE EINER KURVE

Jede stetig differenzierbare Kurve  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist rektifizierbar, und ihre Länge berechnet sich zu

$$L = \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt .$$

---

**Beispiel.** Im  $\mathbb{R}^2$  sei ein Graph betrachtet, d.h. eine Kurve der Form

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix} , \quad t \in [a, b] .$$

Dann ist

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (g')^2(t)} \, dt .$$


---

### Parametertransformationen für Kurven.

Die Vorstellung bei einer **Parametertransformation** ist es, dass die Spur der Kurve mit einer anderen Geschwindigkeit durchlaufen wird.

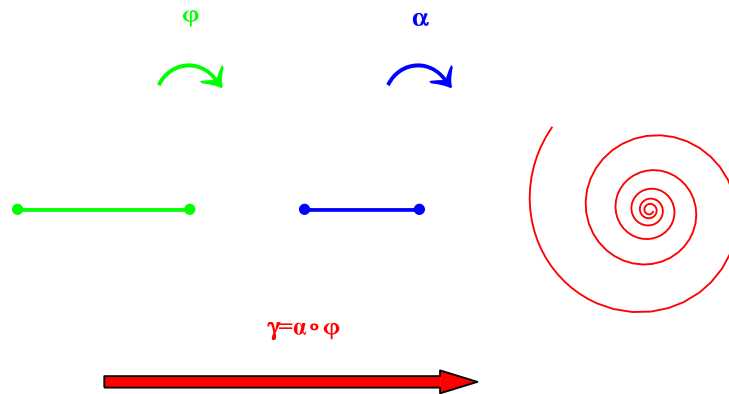


Abbildung 5.12: Eine Parametertransformation.

#### Definition 5.3.

#### PARAMETERTRANSFORMATION FÜR KURVEN

Es sei  $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine parametrisierte Kurve,  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$  ein weiteres Intervall und  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  eine bijektive, stetige Abbildung.

i) Dann ist die Komposition

$$\tilde{\alpha} := \alpha \circ \varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eine parametrisierte Kurve im  $\mathbb{R}^n$ , die die gleiche Spur wie  $\alpha$  hat.

- ii) Die Parametertransformation  $\varphi$  heißt *orientierungstreu* (bzw. *orientierungsumkehrend*), falls die Abbildung *monoton wächst* (bzw. *monoton fällt*).
- iii) Sind sowohl  $\varphi$  als auch die Umkehrabbildung  $\varphi^{-1}: [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  stetig differenzierbar, so heißt  $\varphi$  eine  $C^1$ -Parametertransformation.
- 

Als Übungsaufgabe beweist man leicht den folgenden Satz mithilfe der Substitutionsregel.

**Satz 5.2.** INVARIANZ

Die Länge einer regulären parametrisierten Kurve ist invariant unter  $C^1$ -Parametertransformationen.

---



### 5.3 Übungsaufgaben zu Kapitel 5

**Aufgabe 1.** Es seien positive reellen Zahlen  $a, b, c$  fixiert mit  $c^2 = a^2 + b^2$ . Betrachten Sie die parametrisierte Kurve  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} a \cos\left(\frac{s}{c}\right) \\ a \sin\left(\frac{s}{c}\right) \\ b \frac{s}{c} \end{pmatrix}.$$

- i) Berechnen Sie  $\underline{\mathbf{t}}(s) = \alpha'(s)$  und zeigen Sie:  $\|\alpha'(s)\| = 1$  für alle  $s \in \mathbb{R}$  (man nennt  $\alpha$  **nach Bogenlänge parametrisiert**).
- ii) Berechnen Sie  $\alpha''(s)$ ,  $\|\alpha''(s)\|$  (für eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve ist  $\|\alpha''(s)\|$  die **Krümmung**  $\kappa(s)$  der Kurve) sowie  $\underline{\mathbf{n}}(s) := \alpha''(s)/\|\alpha''(s)\|$  ( $\underline{\mathbf{n}}(s)$  heißt **Normalenvektor**).
- iii) Berechnen Sie  $\underline{\mathbf{b}}(s) = \underline{\mathbf{t}}(s) \times \underline{\mathbf{n}}(s)$  ( $\underline{\mathbf{b}}(s)$  heißt **Binormalenvektor**) sowie  $\tau(s)$  mit

$$\underline{\mathbf{b}}'(s) = \tau(s)\underline{\mathbf{n}}(s)$$

( $\tau(s)$  heißt die **Torsion** und legt zusammen mit  $\kappa(s)$  die Kurve bis auf sogenannte eigentliche Bewegungen fest).

- iv) Skizzieren Sie die Kurve und tragen Sie in einem Punkt die Vektoren  $\underline{\mathbf{t}}(s)$ ,  $\underline{\mathbf{n}}(s)$  und  $\underline{\mathbf{b}}(s)$  ein (das sogenannte **Frenetsche Dreibein**).

**Aufgabe 2.** Betrachten Sie die Kurve im  $\mathbb{R}^2$  ([Zykloide](#))

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}, \quad 0 < t < 2\pi.$$

- i) Skizzieren Sie die Kurve. Tragen Sie in die Skizze für ein  $0 < t_0 < \pi$  auch die Tangente an die Kurve und deren Schnittwinkel  $\varphi$  mit der  $x$ -Achse ein.
  - ii) Berechnen Sie die Länge der Kurve.
  - iii) Es sei  $0 < t_0 < \pi$ . Berechnen Sie den Winkel  $\varphi \in (0, \pi/2)$ , den die Tangente in  $\alpha(t_0)$  an die Kurve mit der  $x$ -Achse einschließt.
  - iv) Nun sei  $\alpha$  wie oben für  $t \in (0, 4\pi)$  definiert. Handelt es sich um eine reguläre Kurve?
- 

**Aufgabe 3.** Betrachten Sie für fixiertes  $a > 0$  die Kurve ([Klothoide](#))  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = a\sqrt{\pi} \begin{pmatrix} \int_0^t \cos\left(\frac{\pi\xi^2}{2}\right) d\xi \\ \int_0^t \sin\left(\frac{\pi\xi^2}{2}\right) d\xi \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

- i) Handelt es sich um eine reguläre Kurve? Berechnen Sie zu gegebenem  $t \in \mathbb{R}$  die Bogenlänge der Kurve:

$$s(t) := \int_0^t \|\alpha'(\xi)\| d\xi.$$



ii) Zeigen Sie, dass die **orientierte Krümmung**

$$\kappa(t) := \frac{x'y'' - x''y'}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}$$

der Kurve proportional zur Länge  $s(t)$  des Bogens ist und skizzieren Sie eine Kurve mit dieser Eigenschaft (also z.B. die Klothoide).

**Aufgabe 4.** Es sei  $g: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\varepsilon > 0$  hinreichend klein) eine Funktion mit  $g(0) = 0$  und

$$g'(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + g^2(s)/2}} \quad \text{für alle } s \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Die Kurve  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei gegeben durch

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{4}g^2(s) \\ g(s) \\ 1 + \frac{1}{4}g^2(s) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie (analog zu Aufgabe 1) die Krümmung  $\kappa(0)$  und die Normale  $n(0)$  an die Kurve  $\alpha$  in  $s = 0$ . Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \alpha(s), \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \alpha(s), \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und zeigen Sie, dass es sich bei der Kurve  $\alpha$  um eine Parabel handelt.

**Aufgabe 5.** Zeigen Sie Satz 5.2.

---

# Kapitel 6

## Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen

**6.1 Ableitungen** (partielle Ableitung; (stetig) partiell differenzierbar; die Klasse  $C^1(U)$ ; totale Differenzierbarkeit; Nabla-Operator; Gradient; Richtungsableitung; Tangentialebene; Differential; Jacobi-Matrix; Funktionalmatrix; Polarkoordinaten; krummlinige Koordinaten; Differentialoperatoren (in krummlinigen Koordinaten); Vektorfeld; Divergenz; Rotation; Laplace-Operator; höhere Ableitungen; Vertauschbarkeit von Ableitungen)

Im letzten Paragraphen wurden Kurven im  $\mathbb{R}^n$  diskutiert, d.h. Abbildungen  $f: \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Im Gegensatz dazu sei jetzt zunächst der **Bildbereich reell** und

$$f: \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}, \quad U \ni \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto f(\underline{\mathbf{x}}) \in \mathbb{R}.$$

Es ist nicht evident, wie der Ableitungsbegriff auf den Fall mehrerer Veränderlicher verallgemeinert werden kann – hier kann **kein Differenzenquotient** betrachtet werden, da durch eine vektorwertige Größe nicht dividiert werden kann.

Im Folgenden sei  **$U \subset \mathbb{R}^m$  stets eine offene Menge**.

## Was erwartet man von einer Ableitung?

Betrachtet sei  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ .

- i) Die Ableitung der Funktion  $f$  soll eine **lineare Abbildung**  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  sein, die  $f$  in gewissem Sinne approximiert.

Diese (affin) lineare Abbildung entspricht im Fall einer Veränderlichen der Tangente an den Graphen der Funktion in einem Punkt.

In Fall  $m = 2$  muss als natürliche Verallgemeinerung die sogenannte **Tangentialebene** betrachtet werden (vgl. Abbildung 6.1).

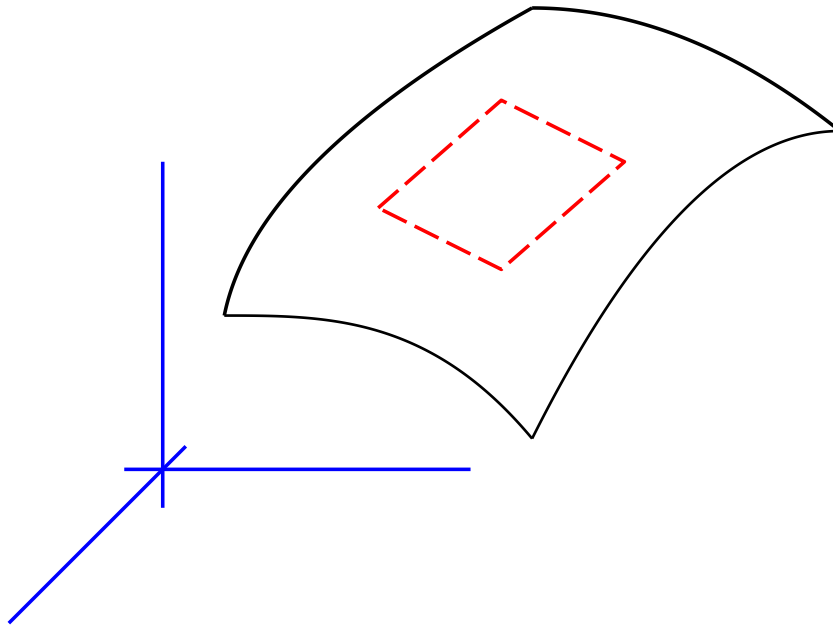


Abbildung 6.1: Approximation mit einer Tangentialebene.

- ii) Eine lineare Abbildung  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  kann nach dem obigen Exkurs mit einer Matrix  $A \in M(1, m)$ , d.h. mit einem **Zeilenvektor** identifiziert werden, d.h. gesucht ist ein geeigneter Zeilenvektor als Repräsentant der Ableitung.

- iii) Variiert man die unabhängige Variable  $\underline{x}$  nur in eine Koordinatenrichtung  $\underline{e}^{(i)}$  und hält die anderen Koordinaten fest, so ist die Situation analog zu der einer Funktion nur einer Veränderlichen.

Geometrisch betrachtet man eine **Kurve auf dem Graphen** (vgl. Abbildung 6.2 und Abbildung 6.3).

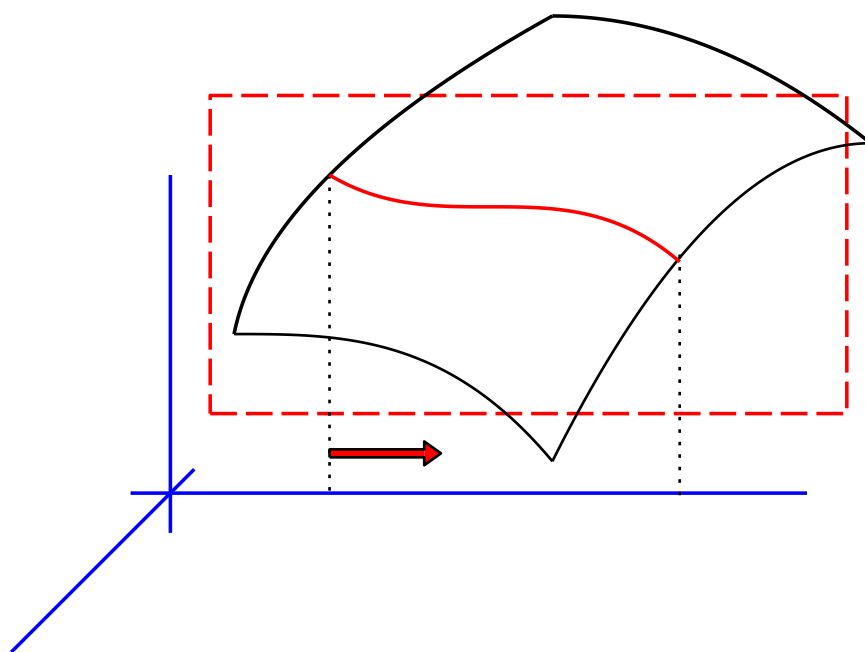


Abbildung 6.2: Es wird nur in  $\underline{e}^{(2)}$ -Richtung variiert.

- iv) Nach iii) sollten gewisse Arten eindimensionaler Ableitungen die Eintragungen des Zeilenvektors aus ii) sein.

## Partielle Ableitungen.

### Definition 6.1. PARTIELLE ABLEITUNGEN

Es sei  $f: \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ .

- i) Es heißt  $f$  im Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in U$  *partiell differenzierbar* bzgl. der  $i^{\text{ten}}$  Koordinatenrichtung, falls der Grenzwert

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) &:= D_i f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) \\ &:= \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)} + h \underline{\mathbf{e}}^{(i)}) - f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})}{h} \end{aligned}$$

existiert, wobei  $\underline{\mathbf{e}}^{(i)}$ ,  $1 \leq i \leq m$ , den  $i^{\text{ten}}$  Einheitsvektor der Standardbasis des  $\mathbb{R}^m$  bezeichne.

$D_i f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})$  heißt dann die  $i^{\text{te}}$  *partielle Ableitung* von  $f$  im Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$ .

- ii) Es heißt  $f$  *partiell differenzierbar* in  $U$ , falls  $D_i f(\underline{\mathbf{x}})$  für alle Punkte  $\underline{\mathbf{x}} \in U$  und für alle  $i = 1, \dots, m$  existiert.

Bei der partiellen Ableitung einer Funktion wird nach Definition 6.1 für ein fixiertes  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in U$  und für ein fixiertes  $1 \leq i \leq m$  die folgende Funktion einer Veränderlichen betrachtet:

$$t \mapsto f^{(i)}(t) := f_{\underline{\mathbf{x}}^{(0)}}^{(i)}(t) := f \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_{i-1}^{(0)} \\ x_i^{(0)} + t \\ x_{i+1}^{(0)} \\ \vdots \\ x_m^{(0)} \end{pmatrix} = f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)} + t\mathbf{e}^{(i)}) .$$

Mit dieser Notation ist

$$\begin{aligned} D_i f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) &= \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{f^{(i)}(h) - f^{(i)}(0)}{h} = (f^{(i)})'(0) \\ &= \frac{d}{dt} f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)} + t\mathbf{e}^{(i)})|_{t=0} . \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: **Man leite nach der  $i^{\text{ten}}$  Variablen ab, die restlichen  $m - 1$  Variablen sind fixiert (eingefroren)** (vgl. wieder Abbildung 6.2).

**Bemerkung.** *Somit übertragen sich die Rechenregeln für „d/dx“ auf die Differentialoperatoren  $D_i$ .*

Man betrachte beispielsweise die Funktion

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \left( \sum_{i=1}^m x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\underline{\mathbf{x}}\| , \quad U = \mathbb{R}^m - \{\mathbf{0}\} .$$

Ist  $\underline{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$  fixiert, so ist für alle  $i = 1, \dots, m$

$$t \mapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + (x_i + t)^2 + \dots + x_m^2}$$

als Funktion einer Variablen differenzierbar,  $f$  ist für alle  $i = 1, \dots, m$  partiell differenzierbar und es gilt

$$D_i f(\underline{\mathbf{x}}) = \frac{x_i + t}{\sqrt{x_1^2 + \dots + (x_i + t)^2 + \dots + x_m^2}} \Big|_{t=0} = \frac{x_i}{f(\underline{\mathbf{x}})} = \frac{x_i}{\|\underline{\mathbf{x}}\|}.$$

Analog zum Fall der Betragsfunktion in einer Veränderlichen kann die Funktion nicht auf ganz  $\mathbb{R}^m$  partiell differenzierbar sein, da im Nullpunkt keine partielle Ableitung existiert.

### Partielle Differenzierbarkeit und Stetigkeit.

Der Zusammenhang zwischen partieller Differenzierbarkeit und Stetigkeit ist auf zwei unterschiedlichen Ebenen zu diskutieren:

i) Partielle Differenzierbarkeit und Stetigkeit der Funktion selbst.

Ein in sich geschlossener Differenzierbarkeitsbegriff sollte wie im Fall einer Dimension „stärker“ sein als der Begriff der Stetigkeit, d.h. differenzierbare Funktionen sollten auch stetig sein.

Aus partieller Differenzierbarkeit folgt jedoch **nicht einmal die Stetigkeit der Funktion selbst**, wie das folgende Beispiel (vgl. Übungskapitel 6.7) belegt:

Es sei  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $m \geq 2$ , definiert durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2 \dots x_m}{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2)^m} & \text{für } \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}, \\ 0 & \text{für } \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}. \end{cases}$$

Dann ist  $f$  zwar partiell differenzierbar,  $f$  ist im Nullpunkt aber nicht stetig.



Partielle Differenzierbarkeit allein kann also nicht die geeignete Verallgemeinerung des eindimensionalen Ableitungsbegriffes sein.

ii) Partielle Differenzierbarkeit und Stetigkeit der partiellen Ableitungen.

Ist eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, so ist die **Ableitung nicht notwendigerweise selbst eine stetige Funktion**.

Dies kann man etwa anhand des Beispiels  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

einsehen.

Funktionen  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , deren Ableitungen stetig sind, heißen **stetig differenzierbar**.

Funktionen  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , deren partielle Ableitungen (in jedem Punkt und in jede Richtung) existieren und selbst stetige Funktionen sind, heißen **stetig partiell differenzierbar** oder von der Klasse  $C^1$ .

---

### **Differenzierbarkeit.**

Stetige Differenzierbarkeit ist nach dem Beispiel ein „stärkerer“ Begriff als „normale“ Differenzierbarkeit und „zwischen“ partiell differenzierbar und stetig partiell differenzierbar hat man den Zugang als lineare Approximation im Sinne von Definition 6.2.

**Definition 6.2.****DIFFERENZIERBARKEIT**

- i) Die Funktion  $f: \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}$  heißt in einem Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in U$  (total) differenzierbar, falls es eine lineare Abbildung  $A = A(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})$ ,

$$A(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

gibt, sodass für eine Umgebung von  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  und für alle  $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^m$  aus dieser Umgebung gilt:

$$f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)} + \underline{\xi}) = f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) + A\underline{\xi} + \varphi(\underline{\xi}) .$$

Hierbei ist  $\varphi$  in einer Umgebung der Null definiert und es gilt:

$$\lim_{\underline{\xi} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\varphi(\underline{\xi})}{\|\underline{\xi}\|} = 0 .$$

Die lineare Abbildung  $A$  (und ihre Matrixdarstellung als Zeilenvektor bzgl. der kanonischen Basen) ist **eindeutig bestimmt** und heißt die **Ableitung** von  $f$  im Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$ .

Notation: Für die lineare Abbildung wird auch geschrieben

$$A(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) = Df(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) = \text{grad } f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) = \nabla f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) ,$$

die Speichweise für  $\nabla f$  lautet: **Gradient von  $f$**  ( $\nabla$  heißt **Nabla-Operator**).

- ii) Die Funktion  $f$  heißt in  $U$  (total) differenzierbar, falls sie in jedem Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in U$  (total) differenzierbar ist.



Wie oben bereits angedeutet ist, gilt der folgende Satz.

**Satz 6.1.** IMPLIKATIONEN ZUR DIFFERENZIERBARKEIT

Für eine Funktion  $f: \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}$  gelten die Implikationen

$f$  ist auf  $U$  stetig partiell differenzierbar

$\Rightarrow f$  ist auf  $U$  (total) differenzierbar

$\Rightarrow f$  ist auf  $U$  partiell differenzierbar

und die *Umkehrungen* sind im Allgemeinen *falsch*.

**Beispiele differenzierbarer Funktionen.**

i) Es sei  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(\underline{x}) = \|\underline{x}\|^2.$$

Die Funktion  $f$  ist von der Klasse  $C^1(U)$ , wie anhand der partiellen Ableitungen verifiziert wird und nach Satz 6.1 ist  $f$  differenzierbar.

Dies kann ebenso über die Definition verifiziert werden: Es gilt in jedem Punkt  $\underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^m$ :

$$\begin{aligned} f(\underline{x}^{(0)} + \underline{\xi}) - f(\underline{x}^{(0)}) &= \sum_{i=1}^m (x_i^{(0)} + \xi_i)^2 - \sum_{i=1}^m x_i^{(0)2} \\ &= \sum_{i=1}^m (2x_i^{(0)}\xi_i + \xi_i^2) \\ &= 2(x_1^{(0)} \dots x_m^{(0)})\underline{\xi} + \|\underline{\xi}\|^2. \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit der Definition der (totalen) Differenzierbarkeit zeigt, dass  $f$  in jedem  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in \mathbb{R}^m$  differenzierbar ist mit

$$A = A(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) = 2(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}) .$$

Es ist also  $A$  (als Matrixdarstellung interpretiert) genau der Gradient von  $f$  im Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$ .

ii) Es sei  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \|\underline{\mathbf{x}}\| .$$

Auf  $\mathbb{R}^m - \{\underline{\mathbf{0}}\}$  ist  $f$  von der Klasse  $C^1$ , also (total) differenzierbar.

Im Punkt  $\{\underline{\mathbf{0}}\}$  beobachtet man zunächst:

$$f(\underline{\mathbf{0}} + \underline{\xi}) - f(\underline{\mathbf{0}}) = \|\underline{\xi}\| = \left[ \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} .$$

Wäre  $f$  in  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  (total) differenzierbar, so hätte man nach der Definition 6.2 (totaler) Differenzierbarkeit

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\underline{\xi} \rightarrow \underline{\mathbf{0}}} \frac{\varphi(\underline{\xi})}{\|\underline{\xi}\|} \\ &= \lim_{\underline{\xi} \rightarrow \underline{\mathbf{0}}} \left[ \frac{f(\underline{\mathbf{0}} + \underline{\xi}) - f(\underline{\mathbf{0}})}{\|\underline{\xi}\|} - \frac{A\underline{\xi}}{\|\underline{\xi}\|} \right] = \lim_{\underline{\xi} \rightarrow \underline{\mathbf{0}}} \left[ 1 - \frac{A\underline{\xi}}{\|\underline{\xi}\|} \right] . \end{aligned}$$

Nach Annahme existiert der Grenzwert und für jede gegebene Nullfolge  $\{\underline{\xi}^{(n)}\}$  ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A \underline{\xi}^{(n)}}{\|\underline{\xi}^{(n)}\|} = 1 .$$

Der Widerspruch ergibt sich aus der Tatsache, dass  $\{-\underline{\xi}^{(n)}\}$  ebenfalls eine Nullfolge ist, dass jedoch gilt

$$-1 = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A \underline{\xi}^{(n)}}{\|\underline{\xi}^{(n)}\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(-\underline{\xi})^{(n)}}{\|-\underline{\xi}^{(n)}\|} .$$

Demnach ist  $f$  in **0** nicht (total) differenzierbar, wie es von der Diskussion der Betragsfunktion in einer Veränderlichen zu erwarten war.

**Generalvoraussetzung.** *Im Folgenden wird in der Regel als wesentliche Vereinfachung stets angenommen, dass die betrachteten Funktionen zumindest von der Klasse  $C^1$  sind.*

---

## Kurven auf dem Graphen.

Um nun das Verhalten einer Funktion nahe eines Punktes zu charakterisieren (und nicht nur in die fixierten Koordinatenrichtungen), sei vorangestellt:

**Erinnerung.** *Im Fall  $m = 1$  ist der Graph einer Funktion  $f$  die Spur der Kurve im  $\mathbb{R}^2$ :*

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} ,$$

der Richtungsvektor der Tangente im Punkt  $t$  ist gegeben durch

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}.$$

Im Fall  $m > 1$  ist der Graph aber nicht mehr die Spur nur einer Kurve.

**Idee.** Die Geometrie des Graphen  $\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in U\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$  soll durch das Studium *der Gesamtheit aller Kurven auf der Fläche* analysiert werden.

Dazu sei  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  von der Klasse  $C^1$  und  $\varphi$  sei eine  $C^1$ -Abbildung eines (verallgemeinerten) Intervalls  $I$  nach  $U$  (*eine Kurve im  $\mathbb{R}^m$* ).

Dann ist eine Kurve auf dem Graphen von  $f$  (vgl. Abbildung 6.3) von der Form

$$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}, \quad \gamma(t) := \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_m(t) \\ f \circ \varphi(t) \end{pmatrix}.$$

Um die Differenzierbarkeit der Kurve  $\gamma$  einzusehen und die Ableitungen berechnen zu können, wird eine *Kettenregel* für die letzte Komponente benötigt:

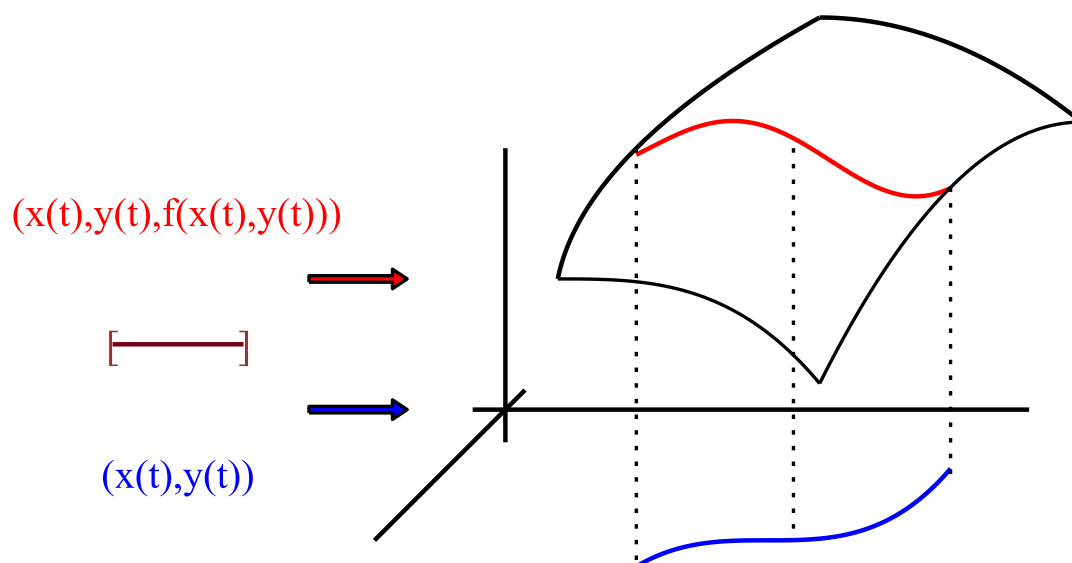
**Satz 6.2.** KETTENREGEL FÜR KURVEN AUF DEM GRAPHEN

Es sei  $f \in C^1(U)$ , es sei  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine  $C^1$ -*Kurve im  $\mathbb{R}^m$*  und es gelte  $\varphi([a, b]) \subset U$ .

Dann ist die Komposition  $f \circ \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ebenfalls von der Klasse  $C^1$  und es gilt für alle  $t_0 \in (a, b)$

$$\frac{d}{dt} f(\varphi(t_0)) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t_0)) \varphi'_i(t_0).$$


---


 Abbildung 6.3: Eine Kurve auf dem Graphen von  $f$ .

*Beweisidee.* Zur besseren Veranschaulichung sei lediglich der Fall  $m = 2$  betrachtet.

Zum Beweis muss der Differenzenquotient

$$\frac{f(\varphi(t_0 + h)) - f(\varphi(t_0))}{h}.$$

betrachtet werden.

Der Vektor  $\varphi(t_0 + h) \in \mathbb{R}^2$  wird mit Funktionen  $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_1(h)$ ,  $\Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_2(h)$  geschrieben als

$$\varphi(t_0 + h) = \varphi(t_0) + \Delta\varphi_1 \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \Delta\varphi_2 \underline{\mathbf{e}}^{(2)},$$

wobei  $(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)})$  die kanonische Basis im  $\mathbb{R}^2$  bezeichnet.

Man erhält

$$\begin{aligned}
& \frac{f(\varphi(t_0 + h)) - f(\varphi(t_0))}{h} \\
&= \frac{f(\varphi(t_0) + \Delta_1 \varphi_1 \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \Delta_2 \varphi_2 \underline{\mathbf{e}}^{(2)}) - f(\varphi(t_0))}{h} \\
&= \frac{f(\varphi(t_0) + \Delta_1 \varphi_1 \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \Delta_2 \varphi_2 \underline{\mathbf{e}}^{(2)}) - f(\varphi(t_0) + \Delta_1 \varphi_1 \underline{\mathbf{e}}^{(1)})}{h} \\
&\quad + \frac{f(\varphi(t_0) + \Delta_1 \varphi_1 \underline{\mathbf{e}}^{(1)}) - f(\varphi(t_0))}{h} \\
&\approx D_2 f(\varphi(t_0)) \frac{\Delta_2 \varphi_2(h)}{h} + D_1 f(\varphi(t_0)) \frac{\Delta_1 \varphi_1(h)}{h} ,
\end{aligned}$$

wobei das Symbol „ $\approx$ “ anhand der Voraussetzungen mit dem Mittelwertsatz (Teil II, Satz 5.7) zu präzisieren ist.  $\square$

### Der Gradient als Zeilenvektor.

Ist  $f$  von der Klasse  $C^1$  und  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in U$  fixiert.

Die lineare Abbildung (die Ableitung) nach Definition 6.2 sei mit  $A = A(x_0)$  bezeichnet.

Die Definition ergibt ( $\underline{\xi} \neq \underline{\mathbf{0}}$ )

$$\frac{f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)} + \underline{\xi}) - f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})}{\|\underline{\xi}\|} = A \frac{\underline{\xi}}{\|\underline{\xi}\|} + \frac{\varphi(\underline{\xi})}{\|\underline{\xi}\|} . \tag{1}$$

Der kanonische Einheitsvektor  $\underline{\mathbf{e}}^{(i)}$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , sei fixiert.



Wie bereits angemerkt ist

$$\lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} \frac{f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)} + t\underline{\mathbf{e}}^{(i)}) - f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})}{t} = D_i f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) . \quad (2)$$

In (1) kann insbesondere  $\underline{\xi} = t\underline{\mathbf{e}}^{(i)}$ ,  $t > 0$ , gewählt werden, d.h.

$$\frac{f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)} + t\underline{\mathbf{e}}^{(i)}) - f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})}{t} = A\underline{\mathbf{e}}^{(i)} + \frac{\varphi(t\underline{\mathbf{e}}^{(i)})}{t} . \quad (3)$$

Im Grenzwert  $t \rightarrow 0$  konvergiert die rechte Seite von (3) gegen  $A\underline{\mathbf{e}}^{(i)}$  und ein Vergleich von (2), (3) ergibt

$$D_i f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) = A\underline{\mathbf{e}}^{(i)} .$$

Wird  $A$  bzgl. der kanonischen Basis als Zeilenvektor  $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m)$  geschrieben, so gilt schließlich  $A\underline{\mathbf{e}}^{(i)} = a_i$ .

In der Darstellung als Zeilenvektor bzgl. der kanonischen Basis stehen im Gradienten also die partiellen Ableitungen von  $f$ .

Man definiert den sogenannten **Nabla-Operator** als den „**Zeilenvektor**“

$$\nabla := \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \ \frac{\partial}{\partial x_2} \ \dots \ \frac{\partial}{\partial x_m} \right) ,$$

was symbolisch geschrieben ist für

$$\text{grad} f(\underline{\mathbf{x}}) := \nabla f(\underline{\mathbf{x}}) := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} \ \frac{\partial f}{\partial x_2} \ \dots \ \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) (\underline{\mathbf{x}}) .$$


---

### Richtungsableitungen.

Es sei wieder  $f$  wie oben und  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in U$  fixiert.

Anstelle eines kanonischen Basisvektors kann ebenso ein Vektor  $\underline{\mathbf{v}}$  betrachtet werden, der hier auf die Länge eins normiert sei,  $\|\underline{\mathbf{v}}\| = 1$ .

Nun sei  $\varphi: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ ,  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein,

$$\varphi(t) = \underline{\mathbf{x}}^{(0)} + t\underline{\mathbf{v}}.$$

Die **Richtungsableitung** von  $f$  im Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  in Richtung  $\underline{\mathbf{v}}$  ist nach Satz 6.2 (vgl. Abbildung 6.4)

$$D_{\underline{\mathbf{v}}}f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) := \frac{d}{dt}f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)} + t\underline{\mathbf{v}})|_{t=0} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})v_i = \nabla f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) \cdot \underline{\mathbf{v}}.$$

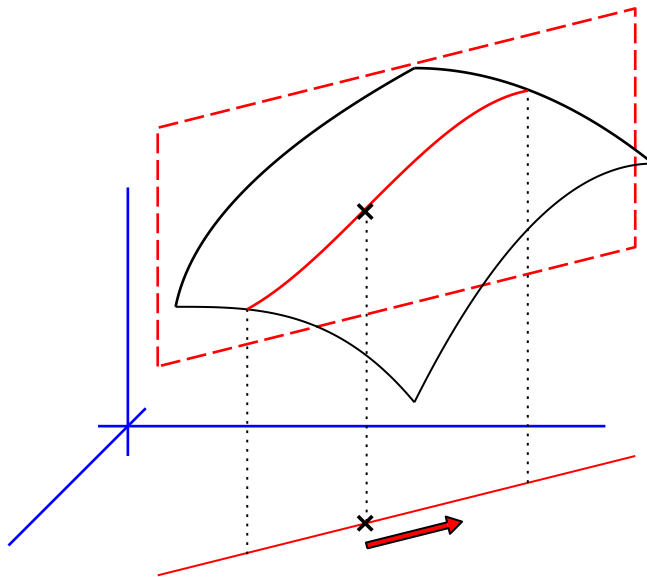


Abbildung 6.4: Zur Richtungsableitung.

Mit Hilfe der Richtungsableitung wird **das Verhalten von  $f$  bei  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  in Richtung von  $\underline{\mathbf{v}}$  analysiert.**

Ist  $\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{e}}^{(i)}$ , so erhält man wieder die  $i^{te}$  partielle Ableitung,  $i = 1, \dots, m$ .

---

## Interpretationen des Gradienten.

- i) Betrachtet man in einem fixierten Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  die Richtungsableitungen in alle möglichen Richtungen  $\underline{\mathbf{v}}$ , also den Ausdruck

$$\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})\underline{\mathbf{v}}, \quad \|\underline{\mathbf{v}}\| = 1,$$

so erkennt man, dass dieser Ausdruck maximal wird, falls  $\underline{\mathbf{v}}$  in Richtung von  $\nabla f$  (eigentlich des transponierten Vektors) zeigt:

Als Spaltenvektor im  $\mathbb{R}^m$  zeigt  $\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})$  in die Richtung des stärksten Anstiegs von  $f$  im Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$ .

- ii) Zu einer ähnlichen Interpretation gelangt man, wenn die Funktion  $f$  mit Hilfe von Höhenlinien diskutiert wird (siehe Übungskapitel 6.7).
- iii) Es sei der Anschaulichkeit wegen o.E.  $m = 2$ , d.h.  $f: \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$  und es sei  $f$  eine Abbildung der Klasse  $C^1(U)$ .

Es sei weiter ein beliebiger Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in U$  fixiert, in dessen Nähe die Abbildung  $f$  durch das Verhalten von Kurven auf dem Graphen analysiert werden soll.

Dazu sei  $\varphi$  eine beliebige  $C^1$ -Kurve in  $U$ ,  $\varphi: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ ,  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein, mit  $\varphi(0) = \underline{\mathbf{x}}^{(0)}$ .

Die Kurve  $\gamma$  auf dem Graphen von  $f$ ,

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ f \circ \varphi(t) \end{pmatrix},$$

hat im Punkt  $t = 0$  nach Satz 6.2 den Tangentenvektor

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= \begin{pmatrix} \varphi'_1(0) \\ \varphi'_2(0) \\ \nabla f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) \begin{pmatrix} \varphi'_1(0) \\ \varphi'_2(0) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi'_1(0) \\ \varphi'_2(0) \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})\varphi'_1(0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})\varphi'_2(0) \end{pmatrix} \\ &= \varphi'_1(0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) \end{pmatrix} + \varphi'_2(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Man setzt schließlich

$$\underline{\mathbf{u}} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) \end{pmatrix},$$

wobei diese beiden Vektoren **nur von der Abbildung  $f$  und dem Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  abhängen**, nicht aber von der Kurve  $\gamma$ :

**Tangentenvektoren an beliebige Kurven auf dem Graphen von  $f$**  liegen in der sogenannten **Tangentialebene**

$$T_{\underline{\mathbf{x}}^{(0)}}f := \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \underline{\mathbf{x}} = \lambda \underline{\mathbf{u}} + \mu \underline{\mathbf{v}}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \},$$

die von den Vektoren  $\underline{\mathbf{u}}$  und  $\underline{\mathbf{v}}$  aufgespannt wird.

Anschaulich stellt man sich diese Ebene im Punkt  $\begin{pmatrix} \underline{\mathbf{x}}^{(0)} \\ f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  „angeheftet“ vor (in vollständiger analogie zur Tangente an die Kurve im Fall  $m = 1$ ). Die Situation ist bereits in Abbildung 6.1 skizziert.

Man betrachte beispielsweise die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = c + x_1^2 + x_2^2,$$

wobei  $c > 0$  eine positive Konstante bezeichne. Es handelt sich hier um ein **Paraboloid**, wie es in Abbildung 6.5 skizziert ist.

Mit obiger Notation ist

$$\underline{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x_1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x_2 \end{pmatrix},$$

im Punkt  $\underline{\mathbf{0}}$  wird die Tangentialebene  $T_{\underline{\mathbf{0}}}f$  aufgespannt von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

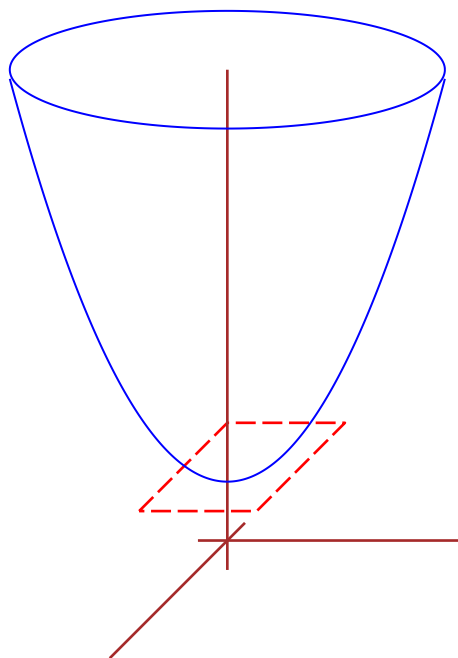


Abbildung 6.5: Paraboloid.

$T_{\underline{0}}f$  ist die  $\underline{e}^{(1)}, \underline{e}^{(2)}$ -Ebene im  $\mathbb{R}^3$ .

Im Übungskapitel 6.7 ist die geometrische Situation anhand weiterer Beispiele ausführlich analysiert.

- iv) In Teil II, Kapitel 5.1, siehe auch Teil II, Kapitel 7.1, wurde die Ableitung einer glatten Funktion einer Veränderlichen als Approximation erster Ordnung interpretiert, d.h.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots ,$$

wobei „ $\dots$ “ für Terme höherer Ordnung steht, die in der Nähe eines fixierten Punktes  $x_0$  im besten Fall „vernachlässigt“ werden können.

Es handelt sich hier um eine (affin) lineare Approximation.

Analog gilt – wie oben bereits angedeutet ist – für glatte Funktionen  $f: \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}$  „in der Nähe“ eines jeden Punktes  $\underline{x}^{(0)} \in U$

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) + \nabla f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}^{(0)}) + \dots$$

Der Gradient wird in diesem Sinne als (affin) lineare Approximation einer Funktion  $f$  bei  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  interpretiert.

---

### Vektorwertige Funktionen mehrerer Veränderlicher.

Im Fall einer vektorwertigen Funktion  $f: \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist die Ableitung in Verallgemeinerung der obigen Betrachtungen als

$$\text{lineare Abbildung } DF: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

zu interpretieren, d.h. als Darstellung bzgl. der kanonischen Basis ist statt des Gradienten als Zeilenvektor eine Matrix zu betrachten.

#### Definition 6.3. JACOBI-MATRIX

Es sei  $f: \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^1(U; \mathbb{R}^n)$ , d.h. alle partiellen Ableitungen aller Komponentenfunktionen existieren in jedem Punkt aus  $U$  und seien stetige Funktionen auf  $U$ .

Dann heißt die Matrix  $A = A(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})$  (auch als lineare Abbildung interpretiert), bestehend aus allen partiellen Ableitungen in einem Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in U$ ,

$$A := Df(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) := J_f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) := \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, m} \in M(n, m),$$

das Differential oder die Jacobi-Matrix oder die Funktionalmatrix von  $f$  in  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$ .

---

**Beispiele.**

i) Im Fall  $n = 1$  ist  $A(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})$  der Gradient von  $f$  im Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$ .

ii) Es sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_1 x_2 \\ e^{x_1} \end{pmatrix}.$$

Dann ist  $f$  von der Klasse  $C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3)$  und für jedes  $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$  ist

$$A = A(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 1 \\ x_2 & x_1 \\ e^{x_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

**Gibt es eine Verallgemeinerung der Kettenregel?**

In Verallgemeinerung von Satz 6.2 sei hier die **Kettenregel** als eine der wichtigsten Regeln der Differential- und Integralrechnung festgehalten (vgl. Abbildung 6.6).

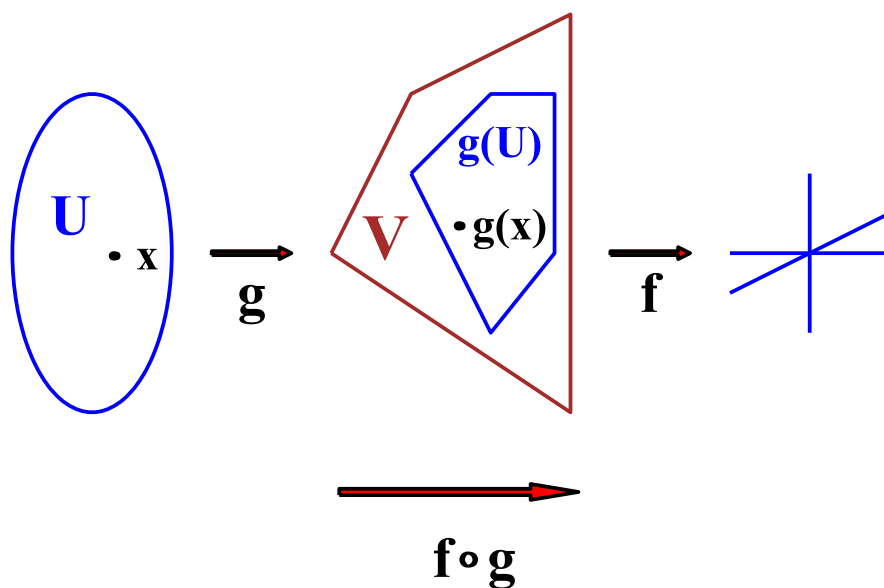
**Satz 6.3.** **KETTENREGEL**

Es seien  $U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $V \subset \mathbb{R}^k$ ,  $g: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ , es gelte  $g(U) \subset V$  und die Abbildungen  $f$ ,  $g$  seien von der Klasse  $C^1$ .

Dann ist auch die Abbildung  $f \circ g: \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^1$  und in jedem Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in U$  gilt

$$D(f \circ g)(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) = Df(g(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}))Dg(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}).$$




 Abbildung 6.6: Zur Kettenregel:  $U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $V \subset \mathbb{R}^k$ ,  $\mathbb{R}^n$ .

**Beispiel.** Im Spezialfall  $f$  reellwertig ( $n = 1$ ) gilt ( $h := f \circ g$ )

$$\begin{aligned}
 Dh(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) &= Df(g(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}))Dg(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) \\
 &= \left( \frac{\partial f}{\partial y_1}(g(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial y_k}(g(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})) \right) \\
 &\quad \left( \begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial x_m}(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Insbesondere ist ( $i = 1, \dots, m$ )

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial f}{\partial y_j}(g(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) .$$

## Eine Anwendung der Kettenregel: Der Nabla-Operator in Polarkoordinaten.

Es sei (Polarkoordinaten)

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} : 0 < r, 0 < \varphi < 2\pi \right\},$$

$$g : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

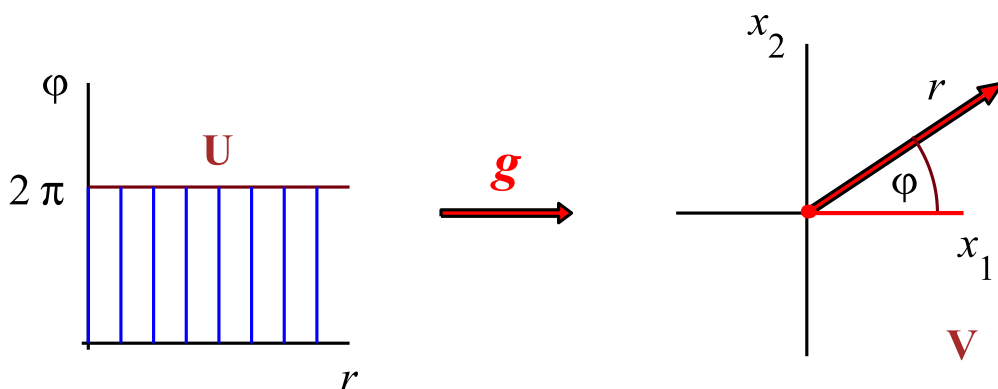


Abbildung 6.7: Polarkoordinaten.

Dann gilt für  $h = f \circ g$ :

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(r, \varphi)) \cos(\varphi) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(g(r, \varphi)) \sin(\varphi), \quad (4)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi} = -\frac{\partial f}{\partial x_1}(g(r, \varphi)) r \sin(\varphi) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(g(r, \varphi)) r \cos(\varphi). \quad (5)$$

Multipliziert man die Gleichung (4) mit  $r \sin(\varphi)$ , Gleichung (5) mit  $\cos(\varphi)$  und addiert sie anschließend, so folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f(g(r, \varphi)) = \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} h + \frac{\cos(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} h. \quad (6)$$

Wird die Gleichung (6) wiederum in (4) eingesetzt, so folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(g(r, \varphi)) = \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} h - \frac{\sin(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} h. \quad (7)$$

Die Beziehungen (6) und (7) werden **symbolisch** geschrieben als

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\varphi)}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

es handelt sich um den **Nabla-Operator in Polarkoordinaten**.

Analoge Ausdrücke können auch für andere **krummlinige Koordinaten** hergeleitet werden.

Die Idee bei der Einführung des Nabla-Operators in Polarkoordinaten ist, dass die Ausnutzung einer evtl. gegebenen Rotationssymmetrie Rechnungen deutlich vereinfachen kann.

Zu einer in kartesischen Koordinaten gegebenen Funktion  $f(\mathbf{x})$  sei beispielsweise als relevante Größe das Vektorfeld  $\nabla f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  zu analysieren.

Dieses Vektorfeld wird in Polarkoordinaten dargestellt, indem  $(\nabla f)(g(r, \varphi))$  betrachtet wird.

Das ist zu unterscheiden von dem Ausdruck  $\nabla\left(f(g(r, \phi))\right)$ , dem eine völlig andere Bedeutung zukommt ( $\nabla = \nabla_{(r, \varphi)}$  bezeichnet in diesem Fall die Ableitung nach den Koordinaten  $r$  und  $\varphi$ ).

Zur Veranschaulichung sei die Funktion  $f: V = \mathbb{R}^2 - \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$  betrachtet, sodass für alle  $\underline{\mathbf{x}} \in V$

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

Das Gradienten-Vektorfeld  $\nabla f(\underline{\mathbf{x}})$  ist folglich

$$\nabla f(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix} \quad \text{für alle } \underline{\mathbf{x}} \in V.$$

Man erkennt für alle  $\underline{\mathbf{x}} \in V$

$$\|\nabla f(\underline{\mathbf{x}})\| = \frac{1}{\|\underline{\mathbf{x}}\|}, \quad \langle \nabla f(\underline{\mathbf{x}}), \underline{\mathbf{x}} \rangle = 0,$$

sodass sich die Einführung von Polarkoordinaten anbietet.

In diesem einfachen Beispiel kann direkt berechnet werden:

$$(\nabla f)(g(r, \varphi)) = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(\varphi)}{r} & \frac{\cos(\varphi)}{r} \end{pmatrix}.$$

Anhand des Beispiels soll das allgemeine Schema kurz erörtert werden:

Betrachtet wird  $h(r, \varphi) = f(g(r, \varphi))$ , zu berechnen sind zunächst  $\partial h / \partial r$ ,  $\partial h / \partial \varphi$  und daraus  $(\nabla f)(g(r, \varphi))$ .

Es ist im Beispiel

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right),$$

$$h(r, \varphi) = \arctan\left(\frac{r \sin(\varphi)}{r \cos(\varphi)}\right) = \arctan(\tan(\varphi)) = \varphi.$$

Folglich ist

$$\frac{\partial h}{\partial r} \equiv 0, \quad \frac{\partial h}{\partial \varphi} \equiv 1$$

und aus der Darstellung des Nabla-Operators in Polarkoordinaten erhält man

$$\begin{aligned} (\nabla f)(g(r, \varphi)) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(r, \varphi)), \frac{\partial f}{\partial x_2}(g(r, \varphi)) \right) \\ &= \left( -\frac{\sin(\varphi)}{r}, \frac{\cos(\varphi)}{r} \right), \end{aligned}$$

der Formalismus verifiziert so leicht das vorab berechnete Ergebnis.

### **Spezielle Differentialoperatoren.**

In den Anwendungen spielen neben dem Gradienten weitere spezielle [Differentialoperatoren](#) eine herausragende Rolle:

**Definition 6.4.** div , rot ,  $\Delta$ 

Ein *Vektorfeld* auf  $U$  ist eine Abbildung

$$F : \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m ,$$

also eine Abbildung, die jedem  $\underline{x} \in U$  wieder einen Vektor  $F(\underline{x}) \in \mathbb{R}^m$  zuordnet. (Beispiel:  $\underline{x} \mapsto \nabla f(\underline{x})$  als Spaltenvektor interpretiert).

i) Es heißt

$$\operatorname{div} F(\underline{x}) := \langle \nabla^T, F \rangle(\underline{x}) := \sum_{i=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\underline{x}) \in \mathbb{R}$$

die *Divergenz* des Vektorfeldes  $F$  im Punkt  $\underline{x} \in U$ .

ii) Ist speziell  $m = 3$  und, so heißt

$$\operatorname{rot} F(\underline{x}) := (\nabla^T \times F)(\underline{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^3$$

die *Rotation* des Vektorfeldes  $v$  im Punkt  $\underline{x} \in U$ .

iii) Man setzt

$$\Delta f(\underline{x}) := \operatorname{div} \operatorname{grad} f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(\underline{x}) ,$$

wobei  $\Delta$  *Laplace-Operator* heißt.

**Bemerkungen.**

i) Die Divergenz ist ein Maß für *Quellen und Senken eines Vektorfeldes*.

In der Fluid-Mechanik bedeutet „div Geschwindigkeitsfeld = 0“ die *Massenerhaltung* im inkompressiblen Fall.

ii) Die Rotation gibt Informationen über mögliche *Wirbel eines Vektorfeldes*.

iii) Die partielle Differentialgleichung  $\Delta f = 0$  heißt die *Potentialgleichung*, die Lösungen sind sogenannte *harmonische Funktionen*.

iv) Beziehungen wie „rot grad =  $\mathbf{0}$ “ werden im Übungskapitel 6.7 diskutiert.

**Beispiele.**

i) Es sei  $F(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{x}}$ :

$$\operatorname{div} F(\underline{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = m .$$

ii) Es sei  $f(\underline{\mathbf{x}}) = \left( \sum_{i=1}^m x_i^2 \right)^{1/2}$ ,  $U = \mathbb{R}^m - \mathbf{0}$ . Dann gilt ( $\nabla f$  als Spaltenvektor geschrieben)

$$\nabla f(\underline{\mathbf{x}}) = \frac{\underline{\mathbf{x}}}{f(\underline{\mathbf{x}})} \in \mathbb{R}^m$$

und man berechnet

$$\begin{aligned}
\Delta f(\underline{x}) &= \operatorname{div} \operatorname{grad} f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{x_i}{f(\underline{x})} \\
&= \sum_{i=1}^m \left[ \frac{1}{f(\underline{x})} - \frac{x_i}{f^2(\underline{x})} \frac{x_i}{f(\underline{x})} \right] \\
&= \left[ \sum_{i=1}^m \frac{1}{f(\underline{x})} \right] - \frac{1}{f(\underline{x})} = \frac{m-1}{f(\underline{x})}.
\end{aligned}$$


---

### Höhere Ableitungen.

Oben sind bereits partielle Ableitungen  $D_i f$  selbst als Abbildungen  $U \rightarrow \mathbb{R}$  aufgefasst worden.

So können – wie bereits im Spezialfall des Laplace-Operators geschehen – auch allgemein **höhere Ableitungen** eingeführt werden, wobei hier der Einfachheit halber der skalare Fall  $n = 1$  betrachtet wird.

#### Definition 6.5. HÖHERE ABLEITUNGEN

Es sei  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  von der Klasse  $C^1(U)$  und die **partiellen Ableitungen**  $D_i f: U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , **seien selbst wieder partiell differenzierbar** (und nach der Generalvoraussetzung stetige Funktionen auf  $U$ ).

Dann heißt  $f$  **zweimal (stetig) differenzierbar** mit partiellen Ableitungen zweiter Ordnung  $D_j D_i f$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Notation:  $f \in C^2(U)$ .

---

**Bemerkung.** Induktiv werden **Ableitungen  $k^{\text{ter}}$  Ordnung**,  $k > 2$ , definiert.



**Beispiel.** (*Laplace-Operator in Polarkoordinaten*) Die zweimalige Anwendung von (6) und (7) liefert in Polarkoordinaten (wieder in der symbolischen Schreibweise) (siehe Übungskapitel 6.7)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} .$$


---

**Wie hängt  $D_j D_i f$  mit  $D_i D_j f$  zusammen?**

**Idee.** Klarerweise sind die Ableitungen vertauschbar, falls

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = x_1^a x_2^b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad U = \mathbb{R}^2 .$$

Diese Eigenschaft überträgt sich auf hinreichend glatte Funktionen.

**Satz 6.4.**

**VERTAUSCHBARKEIT**

Ist  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  von der Klasse  $C^2(U)$ , so gilt für alle  $\underline{\mathbf{x}} \in U$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} := D_j D_i f(\underline{\mathbf{x}}) = D_i D_j f(\underline{\mathbf{x}}) .$$


---

**Vorsicht.** Ohne die Generalvoraussetzung der Stetigkeit aller Ableitungen ist Satz 6.4 falsch.

Als Beispiel dient im Übungskapitel 6.7:

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{cases} x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}, \\ 0 & \text{für } \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}. \end{cases}$$

## 6.2 Der Satz von Taylor für Funktionen mehrerer Veränderlicher (Multiindex)

In Kapitel Teil II, Kapitel 7, ist der Satz von [Taylor](#) in einer Veränderlichen dargestellt.

Zuvor sind bereits in Teil II, Kapitel 5.2, lokale Extrema unabhängig davon diskutiert.

Ebenso können aber notwendige und hinreichende Bedingungen für lokale Extrema aus dem Satz von Taylor hergeleitet werden.

Diese Reihenfolge wird nun im Fall von Funktionen mehrerer Veränderlicher gewählt.

Es sei daran erinnert, dass im letzten Paragraphen das Differential als „affin lineare Approximation“ einer Abbildung  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  interpretiert ist. Zudem steht der Begriff „höhere Ableitungen“ zur Verfügung.

In diesem Abschnitt wird die [Taylorsche Formel](#) als „[Approximation höherer Ordnung](#)“ eingeführt.

Wieder ist im Folgenden  $U \subset \mathbb{R}^m$  offen,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  ist stets eine [skalare Funktion](#).

**Bezeichnungen.** [Multiindizes:](#) Es sei  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  ein  $m$ -Tupel natürlicher Zahlen mit

$$|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_m, \quad \alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m!.$$

Ist  $f$  eine  $|\alpha|$ -mal stetig differenzierbare Funktion, so setzt man

$$D^\alpha f := D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_m^{\alpha_m} := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}$$

$$\text{mit } D_i^{\alpha_i} := \underbrace{D_i \dots D_i}_{\alpha_i\text{-mal}}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Weiterhin sei

$$\underline{\mathbf{x}}^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m} .$$

Dann gilt die Taylorsche Formel<sup>1</sup> (es wird exemplarisch die [Lagrangesche Restgliedformel](#) angegeben, vgl. Teil II, Korollar 7.1, *ii*)).

**Satz 6.5.** TAYLOR-ENTWICKLUNG

*Es seien  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in U$ ,  $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^m$  derart, dass für alle  $0 \leq t \leq 1$  gilt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} + t\underline{\xi} \in U$ . Die Funktion  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  sei von der Klasse  $C^{k+1}$ .*

*Dann existiert ein  $\theta \in [0, 1]$  mit*

$$f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)} + \underline{\xi}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})}{\alpha!} \underline{\xi}^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)} + \theta \underline{\xi})}{\alpha!} \underline{\xi}^\alpha .$$


---

*Beweisidee.* Man betrachte die Funktion einer Variablen

$$g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) := f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)} + t\underline{\xi}) .$$

Mit dem Satz von Taylor in einer Variablen und der Restglieddarstellung folgt Satz 6.5. □

---

**Bemerkungen.**

*i) Nach Satz 6.5 ist*

$$f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)} + \underline{\xi}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})}{\alpha!} \underline{\xi}^\alpha + o(\|\underline{\xi}\|^k) ,$$

---

<sup>1</sup>Die Bezeichnungen aus Kapitel Teil II, Kapitel 7, übertragen sich in natürlicher Weise und werden nicht erneut eingeführt.

wobei  $o(\|\underline{\xi}\|^k)$  für eine Funktion  $\varphi(\underline{\xi})$  steht mit

$$\varphi(\underline{\mathbf{0}}) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\underline{\xi} \rightarrow \underline{\mathbf{0}}, \underline{\xi} \neq \underline{\mathbf{0}}} \frac{\varphi(\underline{\xi})}{\|\underline{\xi}\|^k} = 0 .$$

Im Hinblick auf diese Notation sei an die Definition der *Landauschen Symbole* erinnert.

- ii) Damit die richtigen Vorfaktoren gewählt sind, ist *unbedingt darauf zu achten*, dass in der Definition von  $D^\alpha f$  die partiellen Ableitungen *in geordneter Reihenfolge* beginnend mit  $D_1$  bis hin zu  $D_m f$  auftauchen.

### Ein Beispiel.

Als einfaches Beispiel betrachte man die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\underline{\mathbf{x}}) = e^{x_1 x_2} .$$

Um den Satz von Taylor anwenden zu können, sind zunächst die entsprechenden partiellen Ableitungen zu berechnen.

In der Summe entspricht der Summand mit  $|\alpha| = 0$  dem Multiindex  $\alpha = (0, 0)$  und als Beitrag zur Summe erhält man den Funktionswert an der Stelle  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$ .

Es sei nun  $|\alpha| = 1$ . Hier sind die beiden Multiindizes  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$  zu betrachten:

$$D_1 f(\underline{\mathbf{x}}) = x_2 e^{x_1 x_2}, \quad D_2 f(\underline{\mathbf{x}}) = x_1 e^{x_1 x_2} .$$

Für  $|\alpha| = 2$  ergeben sich die Multiindizes  $(2, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 2)$  und zu berechnen sind die Ableitungen

$$D_1 D_1 f(\underline{\mathbf{x}}) = x_2^2 e^{x_1 x_2}, \quad D_1 D_2 f(\underline{\mathbf{x}}) = (1 + x_1 x_2) e^{x_1 x_2},$$

$$D_2 D_2 f(\underline{\mathbf{x}}) = x_1^2 e^{x_1 x_2}.$$

Soll der Satz für  $k = 2$  angewendet werden, so benötigt man die Ableitungen bis zur Ordnung  $|\alpha| = k + 1 = 3$  mit den Multiinizes  $(3, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(0, 3)$ :

$$D_1 D_1 D_1 f(\underline{\mathbf{x}}) = x_2^3 e^{x_1 x_2}, \quad D_1 D_1 D_2 f(\underline{\mathbf{x}}) = (2x_2 + x_1 x_2^2) e^{x_1 x_2},$$

$$D_1 D_2 D_2 f(\underline{\mathbf{x}}) = (2x_1 + x_2 x_1^2) e^{x_1 x_2}, \quad D_2 D_2 D_2 f(\underline{\mathbf{x}}) = x_1^3 e^{x_1 x_2}.$$

Zur Vereinfachung bezeichne nun  $\underline{\mathbf{x}}$  (statt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$ ) einen fixierten Punkt. Es folgt und für alle  $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} e^{(x_1+\xi_1)(x_2+\xi_2)} &= e^{x_1 x_2} + x_2 e^{x_1 x_2} \xi_1 + x_1 e^{x_1 x_2} \xi_2 \\ &\quad + \frac{1}{2} x_2^2 e^{x_1 x_2} \xi_1^2 + (1 + x_1 x_2) e^{x_1 x_2} \xi_1 \xi_2 + \frac{1}{2} x_1^2 e^{x_1 x_2} \xi_2^2 \\ &\quad + R_2(\underline{\xi}), \end{aligned}$$

wobei mit der Notation  $\bar{x}_1 := x_1 + \theta \xi_1$ ,  $\bar{x}_2 := x_2 + \theta \xi_2$ ,  $0 < \theta < 1$  wie in Satz 6.5, gilt

$$\begin{aligned} R_2(\underline{\xi}) &= \frac{1}{3!} \bar{x}_2^3 e^{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \xi_1^3 + \frac{1}{2!} (2\bar{x}_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2^2) e^{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \xi_1^2 \xi_2 \\ &\quad + \frac{1}{2!} (2\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \bar{x}_1^2) e^{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \xi_1 \xi_2^2 + \frac{1}{3!} \bar{x}_1^3 e^{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \xi_2^3. \end{aligned}$$

Insbesondere konvergiert also  $R_2(\underline{\xi})$  wie  $\|\underline{\xi}\|^3$  gegen 0 bei  $\|\underline{\xi}\| \rightarrow 0$ .

**Bemerkung.** Im Übungskapitel 6.7 kann das Ergebnis dieses einfachen Beispiels mithilfe des Satzes von Taylor in einer Veränderlichen bestätigt werden.

### 6.3 Extremwertaufgaben in mehreren Veränderlichen (notwendige Bedingung; Definitheit; Hessesche Matrix; hinreichende Bedingung)

Da bei Extremwertaufgaben Funktionswerte verglichen werden und im  $\mathbb{R}^n$  für  $n > 1$  keine Relation „ $<$ “ definiert ist, sind die folgenden Betrachtungen nur im skalaren Fall  $f: \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}$  sinnvoll und können nicht auf vektorwertige Funktionen verallgemeinert werden.

Als Vorbereitung ist das Analogon zu Teil II, Definition 5.3, festzuhalten:

#### Definition 6.6. LOKALE EXTREMA

Eine Funktion  $f: \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}$  hat im Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in U$  ein *lokales Maximum* (*lokales Minimum*), falls ein  $r > 0$  existiert, sodass

$$f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) \geq f(\underline{\mathbf{x}}) \quad (\text{lok. Maximum}) \quad \text{bzw.} \quad f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) \leq f(\underline{\mathbf{x}}) \quad (\text{lok. Minimum})$$

$$\text{für alle } \underline{\mathbf{x}} \in \{\underline{\mathbf{y}} \in U : \|\underline{\mathbf{y}} - \underline{\mathbf{x}}^{(0)}\| \leq r\}.$$

Gilt jeweils die *strikte Ungleichung*, so spricht man von einem *strikten lokalen Maximum* (*Minimum*).

Sprechweise: Lokale Maxima und lokale Minima heißen *lokale Extrema*.

Punkte  $\underline{\mathbf{x}}$ , in denen lokale Maxima bzw. lokale Minima angenommen werden, heißen *lokale Maximierer* bzw. *lokale Minimierer* (*lokale Maximalstellen* bzw. *lokale Minimalstelle*).

Lokale Maximal- bzw. Minimalstellen heißen *lokale Extremalstellen*.

In der Sprechweise ist ein Maximum (Minimum) der Funktionswert in einer Maximalstelle (Minimalstelle).

---

Wie im Fall  $m = 1$  gilt:

- i) Ein lokales Extremum ist von einem globalen (oder absoluten) Extremum (Maximum bzw. Minimum) zu unterscheiden.
- ii) Ein globales Extremum ist immer auch ein lokales Extremum.

### Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum.

Im Fall  $m = 1$  wird als notwendige Bedingung eine horizontale Tangente geometrisch motiviert.

Die natürliche Verallgemeinerung ist die Existenz einer horizontalen Tangentialebene, wie beispielsweise in Abbildung 6.5 dargestellt.

Das Verschwinden der dritten Komponente (horizontale Tangentialebene) bedeutet in dem zweidimensionalen Beispiel

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) = 0, \quad \text{also } \nabla f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) = \underline{\mathbf{0}}.$$

#### Satz 6.6. NOTWENDIGE BEDINGUNG

Die Funktion  $f: \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}$  habe in einem inneren Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in U$  ein *lokales Extremum* und sei dort differenzierbar.

Dann gilt

$$\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) = \underline{\mathbf{0}}.$$

Sprechweise: Solche Punkte nennt man *kritische Punkte*.

**Beispiel.** Betrachtet sei das erwähnte *Paraboloid* aus Abbildung 6.5, d.h.  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = c + x_1^2 + x_2^2 \quad \text{für alle } \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \text{ und für eine Konstante } c \in \mathbb{R}.$$

Es ist

$$\nabla f(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

und einziger *Kandidat* für ein lokales Extremum ist der Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} = \underline{\mathbf{0}}$ .

**Bemerkung.** Beim analogen Teil II, Satz 5.5, wurden Punkte  $x_0$  aus einem offenen Intervall betrachtet.

Als Gegenstück werden hier *offene Mengen bzw. nur innere Punkte von  $U$*  untersucht.

### Sattelpunkte.

Die Bedingung  $\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) = \underline{\mathbf{0}}$  ist lediglich *notwendig, aber nicht hinreichend* dafür, dass in  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  ein lokales Extremum vorliegt (völlig analog zum Fall  $m = 1$ ).

Als weiteres Beispiel betrachte man (vgl. Abbildung 6.8) die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \sin(x_1) \sin(x_2) \quad \text{für alle } \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2.$$

Es gilt

$$\nabla f(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \cos(x_1) \sin(x_2) \\ \sin(x_1) \cos(x_2) \end{pmatrix}$$



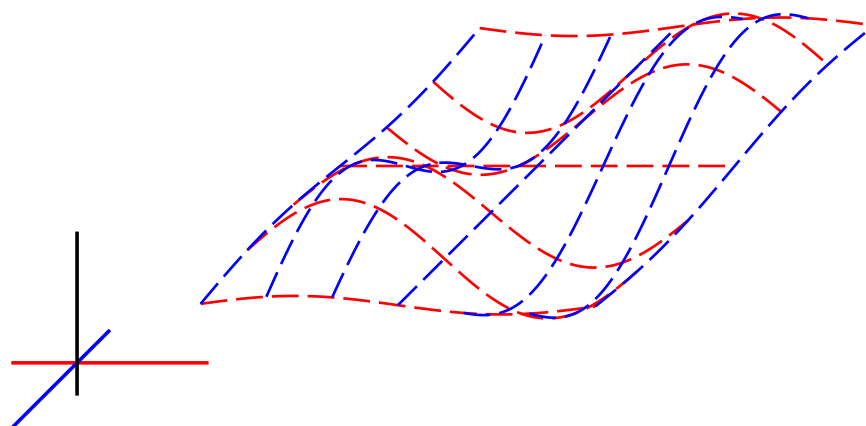


Abbildung 6.8: Ein Sattelpunkt.

und man erkennt

$$\nabla f(\underline{\mathbf{0}}) = \underline{\mathbf{0}} .$$

Andererseits gilt jedoch

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(\underline{\mathbf{x}}) = \sin^2(x_1) > 0 ,$$

$$x_1 = -x_2 \Rightarrow f(\underline{\mathbf{x}}) = -\sin^2(x_1) < 0 .$$

Folglich existieren beliebig nahe bei  $\underline{\mathbf{0}}$  Punkte, in denen  $f$  positive bzw. negative Werte annimmt,  $f(\underline{\mathbf{0}}) = 0$  kann kein Extremwert sein.

Es handelt sich um einen kritischen Punkt, in dem kein Extremum vorliegt und man spricht von einem **Sattelpunkt**.

Die notwendige Bedingung liefert also nur geeignete Kandidaten, trifft aber keine Aussage, ob es sich tatsächlich um ein Extremum handelt.

## Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema?

Teil II, Satz 5.9, hält hinreichende Bedingungen für die Existenz lokaler Extrema im Fall  $m = 1$  fest. Dort wird mit Hilfe des Vorzeichens der zweiten Ableitung argumentiert.

Im Fall mehrerer Veränderlicher ist zunächst nicht klar, wie eine Vorzeichenbedingung zu formulieren ist, um eine Verallgemeinerung des Satzes zu erhalten. Man setzt:

### Definition 6.7. DEFINITHEIT

Es sei  $A \in M(m, m)$  eine *symmetrische Matrix*.

i)  $A$  heißt *positiv definit*, falls

$$\langle \underline{\mathbf{v}}, A\underline{\mathbf{v}} \rangle > 0 \quad \text{für alle } \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^m - \{\underline{\mathbf{0}}\} .$$

ii)  $A$  heißt *positiv semidefinit*, falls

$$\langle \underline{\mathbf{v}}, A\underline{\mathbf{v}} \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^m .$$

iii)  $A$  heißt *negativ definit* (bzw. *negativ semidefinit*), falls die Matrix  $-A$  positiv definit (bzw. positiv semidefinit) ist.

iv)  $A$  heißt *indefinit*, falls  $\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^m$  existieren mit

$$\langle \underline{\mathbf{v}}, A\underline{\mathbf{v}} \rangle > 0 , \quad \langle \underline{\mathbf{w}}, A\underline{\mathbf{w}} \rangle < 0 .$$


---

**Beispiele.**

- i) Die Matrix  $A = I_m \in M(m, m)$  ist positiv definit, da für alle  $\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^m - \{\underline{\mathbf{0}}\}$  gilt

$$\langle \underline{\mathbf{v}}, I_m \underline{\mathbf{v}} \rangle = \|\underline{\mathbf{v}}\|^2 > 0 .$$

- ii) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M(2, 2) .$$

Sind  $\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)}$  die kanonischen Basisvektoren des  $\mathbb{R}^2$ , so gilt

$$\langle \underline{\mathbf{e}}^{(1)}, A \underline{\mathbf{e}}^{(1)} \rangle = 1 , \quad \langle \underline{\mathbf{e}}^{(2)}, A \underline{\mathbf{e}}^{(2)} \rangle = -1 ,$$

die Matrix  $A$  ist indefinit.

Aus der Definition und der Diskussion von Kapitel 3.1 ergibt sich unmittelbar:

**Korollar 6.1.****DEFINITHEIT UND EIGENWERTE**

*Es sei  $A \in M(n, n, \mathbb{R})$  eine symmetrische Matrix. Dann gilt:*

- i)  *$A$  ist genau dann positiv definit (positiv semidefinit), wenn alle Eigenwerte positiv (positiv oder gleich Null) sind.*
- ii)  *$A$  ist genau dann negativ definit (negativ semidefinit), wenn alle Eigenwerte negativ (negativ oder gleich Null) sind.*

iii)  $A$  ist genau dann indefinit, wenn  $A$  sowohl positive als auch negative Eigenwerte hat.

---

*Beweis.* Siehe Übungskapitel 6.7. □

---

Zur weiteren Behandlung von Extremwertaufgaben ist die folgende Matrix der zweiten Ableitungen zu bilden:

**Definition 6.8.** **HESSESCHES MATRIX**

Es sei  $f: \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar.

Die *Hessesche Matrix* von  $f$  im Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in U$  ist die *symmetrische*  $m \times m$ -Matrix

$$(\text{Hess } f)(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) := (D_j D_i f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}))_{1 \leq i \leq m}^{1 \leq j \leq m} \in M(m, m).$$


---

Mit den Definitionen 6.7 und 6.8 kann schließlich die gesuchte hinreichende Bedingung formuliert werden:

**Satz 6.7.** **HINREICHENDE BEDINGUNG**

Es sei  $f: \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar.

Existiert ein Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in U$  mit  $\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) = \underline{\mathbf{0}}$ , so gilt:

i) Ist  $(\text{Hess } f)(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})$  *positiv definit*, so ist  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  ein *strikt Minimizer* der Funktion  $f$ .

- ii) Ist  $(\text{Hess } f)(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})$  *negativ definit*, so ist  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  ein *striker Maximierer* der Funktion  $f$ .
- iii) Ist  $(\text{Hess } f)(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})$  *indefinit*, so besitzt die Funktion  $f$  in  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  *kein lokales Extremum*.
- 

### Beispiele.

- i) Man betrachte wieder das Paraboloid wie oben gegeben.

Die Hessesche Matrix

$$(\text{Hess } f)(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist stets positiv definit,  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} = \underline{\mathbf{0}}$  ist also ein strikter (lokaler) Minimierer, wie es in Abbildung 6.5 angedeutet ist und wie auch anhand der Definition evident ist.

- ii) Für die Funktion

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \sin(x_1) \sin(x_2)$$

ist bereits nachgerechnet:

$$\nabla f(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \cos(x_1) \sin(x_2) \\ \sin(x_1) \cos(x_2) \end{pmatrix}.$$

Die Hessesche Matrix ist folglich

$$(\text{Hess } f)(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} -\sin(x_1) \sin(x_2) & \cos(x_1) \cos(x_2) \\ \cos(x_1) \cos(x_2) & -\sin(x_1) \sin(x_2) \end{pmatrix}.$$

Im kritischen Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} = \underline{\mathbf{0}}$  zeigt dies

$$(\text{Hess } f)(\underline{\mathbf{0}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man beobachtet

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} > 0, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} < 0.$$

Die Matrix ist indefinit und es kann kein lokales Extremum vorliegen.

Man vergleiche die Wahl der Richtungen

$$\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit der vorherigen Diskussion dieses Beispiels als Sattelpunkt.

### Ein Kriterium in zwei Dimensionen.

Das folgende Korollar 6.2 kann im Fall  $m = 2$  unmittelbar auf Satz 6.7 angewandt werden.

Zur systematischen Untersuchung des Falls  $m > 2$  sei auf die Literatur verwiesen.

**Korollar 6.2.****BEDINGUNGEN IN ZWEI DIMENSIONEN**

Es sei  $f: \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in U$  sei ein kritischer Punkt von  $f$ .

Es sei weiter

$$(\text{Hess } f)(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix},$$

Dann gilt

- i) Die Bedingung ( $a > 0$  und  $ad - b^2 > 0$ ) ist *hinreichend für ein Minimum*.
- ii) Die Bedingung ( $a < 0$  und  $ad - b^2 > 0$ ) ist *hinreichend für ein Maximum*.
- iii) Die Bedingung ( $a \geq 0$  und  $ad - b^2 \geq 0$ ) ist *notwendig für ein Minimum*.
- iv) Die Bedingung ( $a \leq 0$  und  $ad - b^2 \geq 0$ ) ist *notwendig für ein Maximum*.
- v) Ist hingegen  $ad - b^2 < 0$ , so kann  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  *keine Extremalstelle* sein.

---

*Beweis.* Siehe Übungskapitel 6.7.

□

**Beispiel.** Ist  $m = 2$  und

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = 6x_1x_2 - 3x_2^2 - 2x_1^3,$$

so sind die einzigen kritischen Punkte

$$\underline{\mathbf{x}}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{x}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Hessesche Matrix ist

$$(\text{Hess } f)(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} -12x_1 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Demnach kann  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  keine Extremalstelle sein, in  $\underline{\mathbf{x}}^{(1)}$  hat  $f$  ein lokales Maximum.

## 6.4 Der Satz über Implizite Funktionen (Höhenlinien, lokale Auflösbarkeit)

In diesem Paragraphen wird der [Satz über implizite Funktionen](#) vorgestellt.

Als wesentliche Konsequenzen folgen in den Kapiteln 6.5 und 6.6 der [Umkehrsatz](#) und die Diskussion von [Extrema unter Nebenbedingungen](#).

Mit letzterer eröffnet sich die Möglichkeit, auch im Fall von Funktionen mehrerer Veränderlicher, die Frage nach [globalen Extrema](#) zu erörtern.

---



### Die Grundidee des Satzes.

Zu einer gegebenen Funktion  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (im einfachsten Fall) werde eine implizite Gleichung untersucht:

$$g(x, y) = 0$$

Es stellen sich die Fragen:

- i) Unter welchen Bedingungen kann diese Gleichung nach der zweiten Variablen  $y$  „auflöst“ werden, d.h. wann existiert eine Funktion

$$y = f(x) \quad \text{mit} \quad g(x, f(x)) = 0 ?$$

- ii) Falls eine solche Funktion existiert, ist diese evtl. eindeutig bestimmt?

Beispielsweise können auf diese Art die Höhenlinien einer Funktion  $h(x, y)$  analysiert werden, indem man  $g(x, y) := h(x, y) - c$  setzt.

Auf weitere Folgerungen wird (wie oben angedeutet) im Anschließenden eingegangen.

---

### Drei einfache Beispiele.

- i) Man betrachte die (affin) lineare Funktion  $g(x, y) = 3x + by - 4$ ,  $b \in \mathbb{R}$  fixiert, also die lineare Gleichung

$$3x + by - 4 = 0 .$$

Ist  $b \neq 0$ , so kann diese Gleichung nach  $y$  aufgelöst werden mit

$$y = f(x) = \frac{4}{b} - \frac{3}{b}x .$$

Die einschränkende Bedingung

$$b = \frac{\partial g}{\partial y} \neq 0$$

korrespondiert mit der ersten wesentlichen Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen.

Ohne diese Einschränkung kann die Auflösbarkeit nach  $y$  nicht erwartet werden.

- ii) Um die zweite wesentliche Voraussetzung des Satzes über implizite Funktionen zu verstehen, betrachte man die Einheitskreislinie im  $\mathbb{R}^2$ , die gegeben ist durch die implizite Gleichung (mit der Schreibweise  $\mathbb{R}^2 \ni \underline{x} = (x, y)$ )

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 .$$

Hier kommen sowohl

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{als auch} \quad \tilde{f}(x) = -\sqrt{1 - x^2}$$

als „Auflösungen“ nach  $y$  in Frage:

Es existiert im Allgemeinen höchstens eine lokale Lösung des Problems in einer Umgebung  $U$  eines fixierten Punktes  $(x^{(0)}, y^{(0)})$ .

Mit anderen Worten: Man kann nicht erwarten, dass die komplette Nullstellenmenge von  $g$  mithilfe einer Funktion  $y = f(x)$  charakterisiert werden kann.

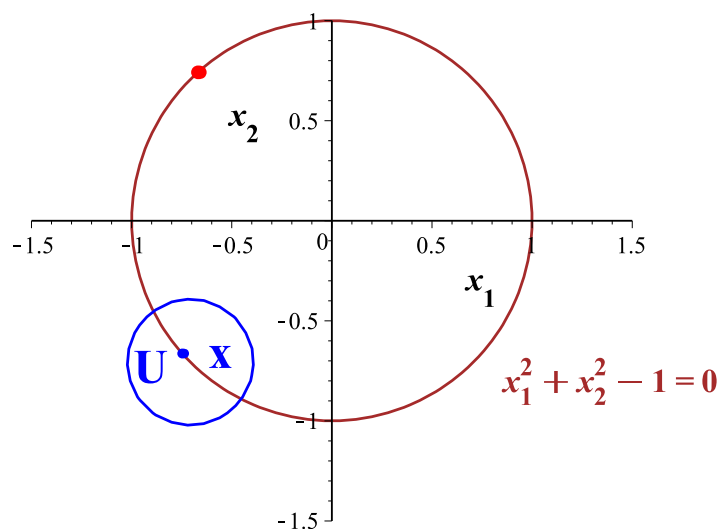


Abbildung 6.9: Die Gleichung  $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$  ist höchstens lokal auflösbar.

Vielmehr werden in verschiedenen Bereichen unterschiedliche Auflösungen heranzuziehen sein (vgl. Abbildung 6.9).

- iii) Es sei  $g$  wieder affin linear, was die Betrachtungen natürlich wesentlich vereinfacht.

In Verallgemeinerung des ersten Beispiels sei nun  $g: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad \underline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Mit der offensichtlichen Bedeutung der Notation wird ein **lineares Gleichungssystem** untersucht:

$$g(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) = \underline{\mathbf{0}}.$$

Es handelt sich hier um  $n$  lineare Gleichungen in den  $m + n$  Unbekannten  $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ :

$$g_j(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) = \sum_{k=1}^m a_{jk} x_k + \sum_{l=1}^n b_{jl} y_l - c_j = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

wobei alle  $a_{jk}$ ,  $b_{jl}$  und  $c_j \in \mathbb{R}$  fixiert seien.

Mit  $A = (a_{jk}) \in M(n, m, \mathbb{R})$ ,  $B = (b_{jl}) \in M(n, n, \mathbb{R})$  und  $\underline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ , kann das System geschrieben werden als

$$B\underline{\mathbf{y}} = \underline{\mathbf{c}} - A\underline{\mathbf{x}}.$$

Dieses System kann genau dann nach  $\underline{\mathbf{y}}$  aufgelöst werden, wenn gilt

$$\det B = \left| \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \right| \neq 0.$$

### Der Satz.

Die Idee wird im letzten Beispiel deutlich:

Die Matrix  $B$  ist die Jacobi Matrix der Funktion  $g$  in Abhängigkeit von der Variablen  $\underline{\mathbf{y}}$ .

Beschreibt **lokal** die erste Ableitung das wesentliche Verhalten eine Funktion, so sollte ein Analogon im allgemeinen (nicht-linearen) Fall richtig sein:

**Satz 6.8.** **SATZ ÜBER IMPLIZITE FUNKTIONEN**

Es seien  $U_1 \subset \mathbb{R}^m$  und  $U_2 \subset \mathbb{R}^n$  offene Mengen und

$$g : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) \mapsto g(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}),$$

eine Abbildung von der Klasse  $C^1$ .

Es sei weiter  $(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}, \underline{\mathbf{y}}^{(0)}) \in U_1 \times U_2$  ein fixierter Punkt mit mit

$$g(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}, \underline{\mathbf{y}}^{(0)}) = \underline{\mathbf{0}},$$

und die Matrix

$$D_{\underline{\mathbf{y}}}g := \left( \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \right)_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq n}} \in M(n, n, \mathbb{R})$$

sei in diesem Punkt *invertierbar*.

Dann gibt es offene *Umgebungen*  $V_1 \subset U_1$  von  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  und  $V_2 \subset U_2$  von  $\underline{\mathbf{y}}^{(0)}$  und eine *stetig differenzierbare Abbildung*  $f : V_1 \rightarrow V_2$  mit

$$g(\underline{\mathbf{x}}, f(\underline{\mathbf{x}})) = \underline{\mathbf{0}} \quad \text{für alle } \underline{\mathbf{x}} \in V_1.$$

Ist umgekehrt  $(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) \in V_1 \times V_2$  ein Punkt mit  $g(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) = \underline{\mathbf{0}}$ , so folgt  $\underline{\mathbf{y}} = f(\underline{\mathbf{x}})$ .

**Bemerkungen.**

i) Wie Abbildung 6.10 zeigt, ist die Verkleinerung von  $U_1$  und  $U_2$  tatsächlich notwendig.

ii) Es gilt nach der Kettenregel (lokal bei  $(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}, f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}))$ )

$$D_{\underline{\mathbf{x}}}(g(\underline{\mathbf{x}}, f(\underline{\mathbf{x}}))) = 0$$

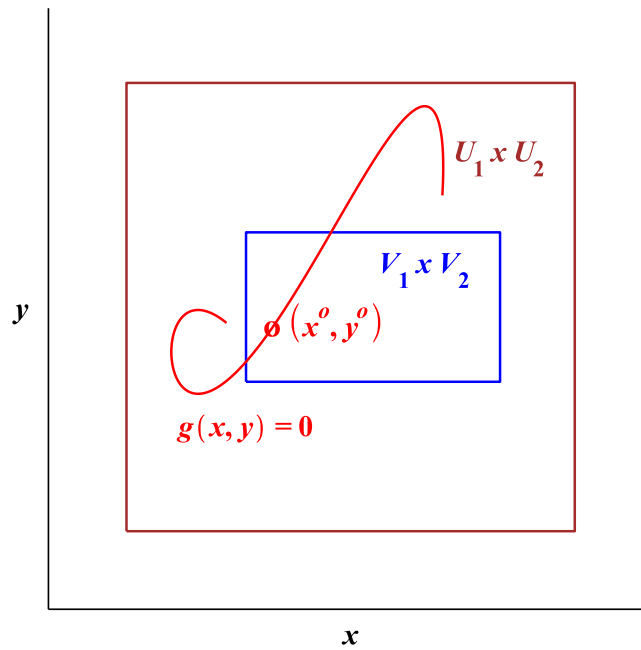


Abbildung 6.10: Zum Satz über implizite Funktionen.

und man berechnet explizit

$$Df(\underline{\mathbf{x}}) = - \left( D_{\underline{\mathbf{y}}} g(\underline{\mathbf{x}}, f(\underline{\mathbf{x}})) \right)^{-1} D_{\underline{\mathbf{x}}} g(\underline{\mathbf{x}}, f(\underline{\mathbf{x}})) .$$

- iii) Es sei nochmals ausdrücklich betont, dass es sich für fixiertes  $\underline{\mathbf{x}} \in U_1$  bei der Funktion  $g(\underline{\mathbf{x}}, \cdot)$  um eine Funktion  $\mathbb{R}^n \supset U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  handelt.

Die Jacobi-Matrix  $D_{\underline{\mathbf{y}}}$  muss quadratisch sein, damit die obigen Ausdrücke überhaupt definiert sind.

### Das Paraboloid als Beispiel.

Im einfachsten Fall  $m = n = 1$  betrachte man das wohlbekannte **Paraboloid** als Graph der Funktion  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 1 .$$

Es soll nun die Höhenlinie  $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : h(\underline{x}) = 6\}$  mithilfe des Satzes über implizite Funktionen diskutiert werden (in diesem einfachen Fall eine Kreislinie).

Dazu sei in der Notation von Satz 6.8 die Gleichung

$$g(x, y) := x^2 + y^2 - 5 = 0$$

betrachtet und der Punkt  $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (1, 2)$  fixiert.

Der Punkt genügt offensichtlich der Gleichung und es ist

$$D_y g(1, 2) = 2y|_{(x=1, y=2)} = 4 \neq 0 .$$

Der Satz über implizite Funktionen ist somit anwendbar und liefert eine Auflösung  $y = f(x)$  in der Nähe des betrachteten Punktes.

Für die Ableitung folgt (wiederum in der Nähe dieses Punktes  $x = 1$ ,  $f(x) = 2$ )

$$Df(x) = -(2f(x))^{-1}(2x) , \quad \text{insbesondere } Df(1) = -\frac{1}{2} .$$

**Probe.** Klarerweise handelt es sich im obigen einfachen Beispiel um eine Kreislinie vom Radius  $\sqrt{5}$  um den Ursprung.

Diese ist **in der Nähe von  $(1, 2)$**  gegeben durch

$$y = f(x) = \sqrt{5 - x^2} .$$

Es folgt (wie oben bereits hergeleitet)

$$f'(1) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{5-x^2}} (-2x)|_{x=1} = -\frac{1}{2}.$$

Im Gegensatz zu diesem Beispiel kann im Allgemeinen die Funktion  $f$  nicht explizit angegeben werden.

Man kann lediglich ihre Ableitung in dem fixierten Punkt, also ihr „Verhalten erster Ordnung“ bestimmen.

## 6.5 Der Umkehrsatz (Existenz einer lokalen Umkehrabbildung; Koordinatentransformationen)

Der **Umkehrsatz** (vgl. Abbildung 6.11) kann als eine der wichtigsten Folgerungen aus dem Satz über implizite Funktionen abgeleitet werden.

Dementsprechend ist die Aussage von lokaler Natur und die Invertierbarkeit der Jacobi-Matrix ist eine wesentliche Voraussetzung.

### Satz 6.9. **UMKEHRSATZ**

Es sei  $U \subset \mathbb{R}^m$  offen,  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  sei stetig differenzierbar, es sei  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in U$ ,  $\underline{\mathbf{y}}^{(0)} = f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})$  und die **Jacobi-Matrix**  $Df(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})$  sei invertierbar.

Dann gibt es offene Umgebungen  $V \subset U$  von  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  und  $V'$  von  $\underline{\mathbf{y}}^{(0)}$ , sodass  $f$  die Menge  $V$  **bijektiv** auf  $V'$  abbildet und die **Umkehrabbildung**

$$g := (f|_V)^{-1} : V' \rightarrow V$$

stetig differenzierbar ist mit

$$Dg(\underline{\mathbf{y}}^{(0)}) = \left( Df(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) \right)^{-1}.$$


---



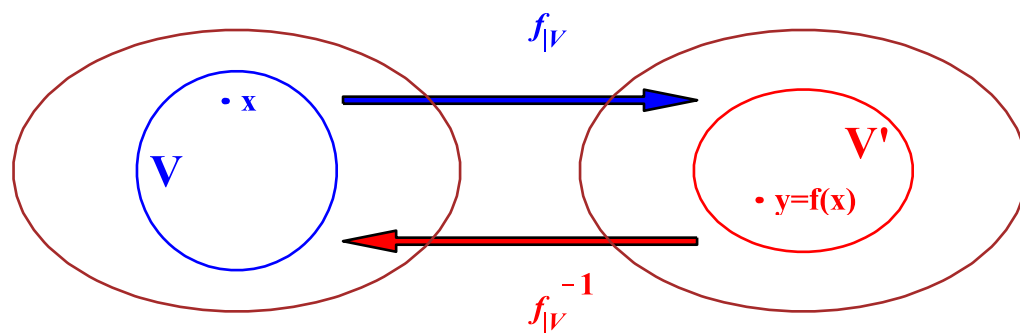


Abbildung 6.11: Zum Umkehrsatz.

**Bemerkungen.**

- i) Wie oben angedeutet, kann nur auf die *lokale Umkehrbarkeit* geschlossen werden.
- ii) Wieder muss  $U$  im  $\mathbb{R}^m$  liegen, der gleichzeitig der Bildraum ist.

**Beispiel Polarkoordinaten.**

Die (lokale) Umkehrbarkeit ist etwa bei Koordinatentransformationen wichtig, die ein Problem auf beispielsweise den Symmetrien angepasste Koordinaten transformieren.

Hierbei müssen die neuen Koordinaten (zumindest lokal) 1-1 auf die alten umgerechnet werden können.

Für das Beispiel **Polarkoordinaten** sei

$$f : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \underline{\mathbf{x}} := \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix},$$

$$Df \left( \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\det \left( Df \left( \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \right) \right) = r > 0,$$

die Abbildung  $f$  ist nach Satz 6.9 in jedem Punkt  $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$  **lokal invertierbar** mit  $(g := (f|_V)^{-1})$

$$\begin{aligned} Dg \left( f \left( \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \right) \right) &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) & r \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aus

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \frac{x_1}{r} = \cos(\varphi), \quad \frac{x_2}{r} = \sin(\varphi),$$

folgt schließlich

$$Dg(\underline{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \end{pmatrix}.$$

**Beobachtung.** In diesem Beispiel macht

$$f\left(\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} r \\ \varphi + 2\pi k \end{pmatrix}\right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

deutlich, dass es *keine globale Umkehrabbildung* geben kann.

## 6.6 Extrema mit Nebenbedingungen (Lagrangescher Multiplikator; globale Extrema)

Eine zweite wesentliche Konsequenz aus dem Satz über implizite Funktionen ist der folgende Satz 6.10 über [Extrema mit Nebenbedingungen](#).

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass eine Vielzahl von physikalischen Problemen Nebenbedingungen involvieren, beispielsweise ist bei einem Pendel der Abstand der schwingenden Masse zum Drehpunkt konstant etc.

Auch die Diskussion von [globalen](#) (oder absoluten) [Extrema](#) einer Funktion führt in der Regel zu einer Nebenbedingung, nämlich dass die Funktion gesondert auf dem Rand ihres Definitionsbereiches zu untersuchen ist.

Hier soll jedoch zunächst als Motivation ein geometrisches Beispiel erörtert werden.

### Ein Beispiel.

Es soll der Flächeninhalt  $A$  eines Dreieckes bei [gegebenem Umfang](#) maximiert werden.

**Erinnerung.** Es gilt die [Heronische Flächenformel](#) nach Abbildung 6.12:

$$A^2 = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

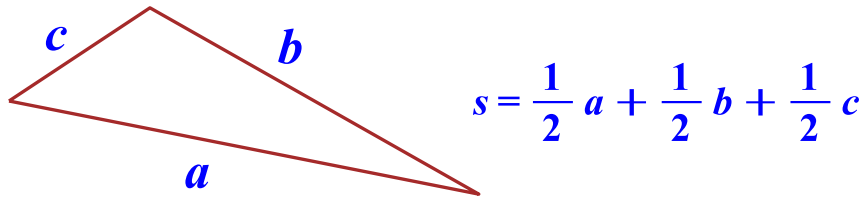


Abbildung 6.12: Zur Heronischen Flächenformel.

**Intuitive Vermutung.** Die Lösung ist ein *gleichseitiges Dreieck*, d.h.

$$a = b = c = \frac{2}{3}s .$$

### Die allgemeine Vorgehensweise.

Zunächst ist zu klären, was unter einem Extremum unter einer Nebenbedingung zu verstehen ist, um anschließend eine notwendige Bedingung ableiten zu können.

#### Definition 6.9. EXTREMA UNTER NEBENBEDINGUNGEN

Es sei  $U \subset \mathbb{R}^m$  offen,  $g: U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und die Nebenbedingung sei definiert durch die Menge (bzw. die Gleichung)

$$M := \{ \underline{\mathbf{x}} \in U : g(\underline{\mathbf{x}}) = 0 \} .$$

Es sei  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in M$  ein Punkt mit

$$\nabla g(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) \neq \underline{\mathbf{0}}$$

Es sei weiter  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Funktion.

Dann hat  $f$  im Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  ein lokales Maximum (Minimum) *unter der Nebenbedingung  $g = 0$* , falls für eine Umgebung  $V \subset U$  von  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  gilt

$$f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) \geq f(\underline{\mathbf{x}}) \quad (\text{bzw. } f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) \leq f(\underline{\mathbf{x}}))$$

für alle  $\underline{\mathbf{x}} \in M \cap V$ .

---

Die Idee des folgenden Satzes ist, dass sich in einer Extremalstelle unter der Nebenbedingung nur bzgl.  $M$  ein „Gleichgewicht“ („horizontale Tangente bei Variationen in Richtung  $M$ “) einstellen wird.

„Senkrecht zur Nebenbedingung“ erhält man keine Einschränkung.

In orthogonale Richtung zeigt aber wie bereits gesehen der Vektor  $\nabla g(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})$ , d.h. in einer lokalen Extremalstelle sollten  $\nabla f$  und  $\nabla g$  Vielfache voneinander sein.

**Satz 6.10.** NOTWENDIGE BEDINGUNG

Mit den Voraussetzungen von Definition 6.9 habe  $f$  im Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung  $g = 0$ .

Dann gibt es einen *Lagrangeschen Multiplikator*  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit

$$\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) = \lambda \nabla g(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) .$$


---

Analog zu Satz 6.6 handelt es sich hier um eine *notwendige Bedingung*, d.h. *falls*  $f$  ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung  $g = 0$  besitzt und *falls*  $\nabla g$  in dem entsprechenden Punkt nicht verschwindet, dann existiert ein Lagrangescher Multiplikator mit obigen Eigenschaften.

Mit anderen Worten:

Mit dem Satz werden mögliche Kandidaten für Extrema unter Nebenbedingungen ermittelt.

**Bemerkung.** Satz 6.10 überträgt sich unmittelbar auf Extremwertprobleme in  $m$  Variablen mit  $r$  Nebenbedingungen.

---

### Zurück zum Beispiel.

Hier ist der Umfang oder äquivalent  $s > 0$  fixiert. Mit der Notation

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

lautet die Aufgabe

$$f(\underline{\mathbf{x}}) := s(s - x_1)(s - x_2)(s - x_3) \rightarrow \max$$

unter der Nebenbedingung

$$g(\underline{\mathbf{x}}) := x_1 + x_2 + x_3 - 2s = 0 .$$

In dem Beispiel ist

$$M := \{ \underline{\mathbf{x}} \in (0, s) \times (0, s) \times (0, s) = U : g(\underline{\mathbf{x}}) = 0 \} ,$$

$$\nabla g(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \underline{\mathbf{0}} \quad \text{für alle } \underline{\mathbf{x}} \in M .$$

Bei der Definition von  $M$  ist zu beachten, dass die Seitenlängen eines Dreiecks immer größer als Null sind.

Wäre eine Seitenlänge größer als  $s$ , o.E.  $s < x_1$ , so folgte aus der Dreiecksungleichung

$$s < x_2 + x_3 \quad \text{und damit der Widerspruch} \quad 2s < x_1 + x_2 + x_3 .$$

Falls ein Maximum in einem Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  existiert, so impliziert Satz 6.10

$$\begin{aligned} \nabla f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) &= - \begin{pmatrix} s(s-x_2)(s-x_3) \\ s(s-x_1)(s-x_3) \\ s(s-x_1)(s-x_2) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

$$g(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) = x_1 + x_2 + x_3 - 2s = 0 .$$

Man hat insgesamt (d.h. **inklusive der Nebenbedingung**) vier Gleichungen in vier Unbekannten.

Es handelt sich jedoch um ein **nichtlineares** Gleichungssystem, sodass Lösungen nicht nach einem einfachen Schema ermittelt werden können.

In dem konkreten Beispiel unterscheidet man zwei Fälle:

*Fall 1.* Ist  $\lambda \neq 0$ , so ist

$$(s-x_2)(s-x_3) = (s-x_1)(s-x_3) = (s-x_2)(s-x_3)$$

und es folgt

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{2s}{3} , \quad \lambda = -\frac{s^3}{9} .$$

Im Fall  $\lambda \neq 0$  gibt es nur einen Kandidaten für die Lösung des Problems,

$$\underline{\mathbf{x}}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}s \\ \frac{2}{3}s \\ \frac{2}{3}s \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) = \frac{s^4}{27} > 0.$$

*Fall 2.* Ist  $\lambda = 0$ , so müssen zwei der  $x_i$  gleich Null sein und es handelt sich nicht um zulässige Lösungen.

Falls also eine Lösung der Aufgabe existiert, so kommt nur der Kandidat  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  in Frage – es handelt sich tatsächlich um ein gleichseitiges Dreieck.

### Globale Extrema.

Ist  $f: \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}$  von der Klasse  $C^1$  und sucht man globale Maximierer (bzw. Minimierer) von  $f$ , d.h. Punkte  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in U$  mit

$$f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) \geq f(\underline{\mathbf{x}}) \quad (\text{bzw. } f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)}) \leq f(\underline{\mathbf{x}}))$$

für alle  $\underline{\mathbf{x}} \in U$ , so kann man, wie schon mehrfach angedeutet, beispielsweise dann auf deren Existenz schließen, wenn  $U$  kompakt ist.

Bei der Suche nach geeigneten Kandidaten greift die notwendige Bedingung aus Satz 6.6 aber nur im Innern von  $U$ .

Im Fall von Funktionen einer Veränderlichen kann in einem Randextremum nicht auf eine horizontale Tangente geschlossen werden und ebenso sind hier **Extrema am Rand nicht durch eine horizontale Tangentialebene charakterisiert** – selbst wenn man am Rand differenzieren dürfte.

Bei Funktionen in einer Variablen, die auf einem Intervall definiert sind, kann dieses Problem sehr einfach umgangen werden: **Man vergleicht die Funktionswerte an den beiden Intervallenden mit den anderen Kandidaten.**



Im Fall von mehreren Veränderlichen besteht der Rand des Definitionsbereiches aber im Allgemeinen nicht aus einzelnen Punkten, in den die Funktion gesondert ausgewertet werden kann.

In der Regel sind hier Randkurven gesondert zu untersuchen.

### Ein typisches Beispiel zu Extremwertaufgaben.

Es sei

$$\overline{E} := \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \frac{5}{8}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{3}{4}x_1x_2 \leq 1 \} ,$$

$$E := \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \frac{5}{8}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{3}{4}x_1x_2 < 1 \} ,$$

$$\partial E := \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \frac{5}{8}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{3}{4}x_1x_2 = 1 \} .$$

Die Ellipse  $\partial E$  ist Gegenstand des zweiten Beispiels in Kapitel 3.1 zur Hauptachsentransformation und in Abbildung 3.2 skizziert.

Man betrachte weiter die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = x_1^2 + x_2^2 \quad \text{für alle } \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 .$$

Gesucht sind alle lokalen und globalen Extremwerte von  $f$  auf  $\overline{E}$ .

- i) Kandidaten für lokale Extrema müssen nach Satz 6.6 die notwendige Bedingung erfüllen:

$$\nabla f(\underline{\mathbf{x}}) = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{0}} .$$

Somit kommt nur der Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} = \underline{\mathbf{0}}$  infrage und wegen

$$0 = f(\underline{\mathbf{0}}) < f(\underline{\mathbf{x}}) \quad \text{für alle } \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}$$

handelt es sich um ein lokales und globales Minimum der Funktion  $f$  auf  $\mathbb{R}^2$ , insbesondere auch auf  $\overline{E}$ .

- ii) Da  $\overline{E}$  als abgeschlossene und beschränkte Menge per definitionem kompakt ist, existiert auch (zumindest) ein Maximierer der stetigen Funktion  $f$  auf  $\overline{E}$ .

In  $E$  gibt es keine weiteren Kandidaten und es verbleibt, die Funktion  $f$  auf  $\partial E$  oder mit anderen Worten unter der Nebenbedingung

$$g(\underline{\mathbf{x}}) = \frac{5}{8}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{3}{4}x_1x_2 - 1 = 0$$

zu untersuchen. Wegen

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_2 \\ \frac{5}{4}x_2 - \frac{3}{4}x_1 \end{pmatrix} \neq \underline{\mathbf{0}}$$

kann Satz 6.10 angewandt werden:

In einem Extremum  $f(\underline{\mathbf{x}})$  auf  $\partial E$  existiert ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit

$$2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{5}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_2 \\ \frac{5}{4}x_2 - \frac{3}{4}x_1 \end{pmatrix}.$$

Der Fall  $\lambda = 0$  würde im Widerspruch zu  $\underline{\mathbf{x}} \in \partial E$  den Kandidaten  $\underline{\mathbf{0}}$  liefern.

Es sei also  $\lambda \neq 0$ . Multipliziert man die erste Gleichung mit  $x_2$  und die zweite Gleichung mit  $x_1$ , so ergibt sich

$$x_2 \left( \frac{5}{4}x_1 - \frac{3}{4}x_2 \right) = x_1 \left( \frac{5}{4}x_2 - \frac{3}{4}x_1 \right), \quad \text{somit}$$

$$x_2^2 = x_1^2 \quad \text{bzw.} \quad x_2 = \pm x_1.$$

Ist  $x_1 = x_2$ , so liefert die Nebenbedingung  $\underline{\mathbf{x}} \in \partial E$

$$\frac{1}{2}x_1^2 = 1$$

und man erhält die Kandidaten

$$\underline{\mathbf{x}}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{x}}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad f(\underline{\mathbf{x}}^{(1)}) = f(\underline{\mathbf{x}}^{(2)}) = 4.$$

Ist  $x_1 = -x_2$ , so erhält man analog die Kandidaten

$$\underline{\mathbf{x}}^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbf{x}}^{(4)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad f(\underline{\mathbf{x}}^{(3)}) = f(\underline{\mathbf{x}}^{(4)}) = 1.$$

Somit sind  $\underline{\mathbf{x}}^{(1)}$  und  $\underline{\mathbf{x}}^{(2)}$  globale Maximierer auf  $\overline{E}$ , wie man auch anhand von Abbildung 3.2 ablesen kann, da  $f$  den quadrierten Abstand vom Nullpunkt misst.

### Bemerkungen.

- i) Wird  $f$  nicht auf einer kompakten Menge untersucht, so können auch andere Argumente wie beispielsweise das Wachstum von  $f$  die Existenz von Maximierern oder Minimierern liefern.*

- ii) *Ist die Funktion  $f$  oder die Nebenbedingung  $g$  in einzelnen Punkten nicht differenzierbar, so sind diese Punkte gesondert zu betrachten.*
  - iii) *Hierzu und für weitere Beispiele sei auf das Übungskapitel 6.7 verwiesen.*
-

## 6.7 Übungsaufgaben zu Kapitel 6.7

### Aufgabe 1.

i) Es sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & \text{für } \underline{x} \neq \underline{0}, \\ 0 & \text{für } \underline{x} = \underline{0}. \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $f$  partiell differenzierbar auf  $\mathbb{R}^2 - \{\underline{0}\}$  ist, und bestimmen Sie die partiellen Ableitungen.
- (b) Zeigen Sie, dass  $f$  partiell differenzierbar im Punkt  $\underline{x} = \underline{0}$  ist, und bestimmen Sie die partiellen Ableitungen in  $\underline{0}$ .
- (c) Ist  $f$  stetig in  $\underline{0}$ ?

ii) Es sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(\underline{x}) = x_1^2 x_2$ . Zeigen Sie mithilfe von Definition 6.2, dass  $f$  in jedem Punkt  $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$  differenzierbar ist.

**Aufgabe 2.** Es sei  $f: \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$  (wie üblich von der Klasse  $C^1$ ) und  $a \in \mathbb{R}$  eine Konstante. Unter einer Höhenlinie (Niveaumenge im Fall  $U \subset \mathbb{R}^m$ ) versteht man die Menge (abhängig vom Niveau  $a$ )

$$N_a f := \{\underline{x} \in U : f(\underline{x}) = a\}.$$

i) Skizzieren Sie ( $a > 0$ ) die Höhenlinien sowie den Gradienten von  $f$  für

$$a) f(\underline{x}) = \frac{x_1^2}{4} - x_2^2, \quad U = \mathbb{R}^2, \quad b) f(\underline{x}) = \|x\|^{-1}, \quad U = \mathbb{R}^2 - \{\underline{0}\}.$$

Stellen Sie dazu die Höhenlinien als (Spur einer) Kurve in  $U$  dar. Deuten Sie auch den Gradienten in Ihrer Skizze an.

- ii) Zeigen Sie: Ist eine Höhenlinie durch eine reguläre  $C^1$ -Kurve  $\varphi: I \rightarrow U$  gegeben, so steht der Gradient von  $f$  senkrecht auf der Höhenlinie (d.h. auf  $\varphi'$ ).

### Aufgabe 3.

- i) Betrachten Sie die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\underline{\mathbf{x}}) = \|\underline{\mathbf{x}}\| \ln(1 + \|\underline{\mathbf{x}}\|^2).$$

Ist die Funktion auf ganz  $\mathbb{R}^2$  stetig partiell differenzierbar? Berechnen Sie, falls existent,  $\nabla f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$ .

- ii) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion

$$\varphi: U := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(\underline{\mathbf{x}}) = \arctan(x_2/x_1),$$

in einem fixierten Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} \in U$  sowie die Richtungsableitung  $D_{\underline{\mathbf{v}}}\varphi(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})$  in die Richtung  $\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} -x_2^{(0)} \\ x_1^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Aufgabe 4.** Skizzieren Sie jeweils den Graphen der Funktion

i)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(u, v) = v^2 - u^2 \quad \text{für alle } u, v \in \mathbb{R},$$

ii)  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$g(u, v) = u^3 - 3uv^2 \quad \text{für alle } u, v \in \mathbb{R} \quad (\text{Affensattel}),$$

und bestimmen Sie die Tangentialebene in einem fixierten Punkt  $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ .

---

**Aufgabe 5.** Betrachten Sie die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \ln(x_1^2 + x_2^2) \quad \text{für alle } \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 - \{\underline{\mathbf{0}}\}.$$

i) Skizzieren Sie den Graphen von  $f$ .

ii) Bestimmen Sie für fixiertes  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)}$  die Tangentialebene  $T_{\underline{\mathbf{x}}^{(0)}}f$ .

iii) Betrachten die „affin lineare Tangentialebene“, d.h. „heften“ Sie die Tangentialebene an den zugehörigen Aufpunkt  $(\underline{\mathbf{x}}, f(\underline{\mathbf{x}}^{(0)})) \in \text{graph}(f)$ .

iv) Geben Sie dazu die Parameterdarstellung und die Hessesche Normalform an.

v) Fügen Sie die Ebene in Ihre Skizze ein.

---

**Aufgabe 6.** Für die folgenden Verkettungen  $h = f \circ g$  berechne man mithilfe der Kettenregel die Jacobi-Matrizen und überprüfe das Ergebnis, indem man  $h$  direkt partiell ableite:

i)  $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$g(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2^2 \end{pmatrix}, \quad f(\underline{\mathbf{y}}) = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}.$$

ii)  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2, g: U = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\} \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,

$$g(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} x_1/x_2 \\ x_2 \\ e^{x_1-x_2} \\ e^{x_2} \end{pmatrix}, \quad f(\underline{\mathbf{y}}) = \begin{pmatrix} y_1 y_2 y_4 \\ y_2 y_3 y_4 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 7.** Berechnen Sie  $DF$ ,  $\operatorname{div} F(\underline{\mathbf{x}})$  sowie  $\operatorname{rot} F(\underline{\mathbf{x}})$  für  $\underline{\mathbf{x}} \in U = \mathbb{R}^3 - \{\underline{\mathbf{0}}\}$  und das [Zentralkraft-Vektorfeld](#)

$$F: U \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(\underline{\mathbf{x}}) = \frac{\underline{\mathbf{x}}}{\|\underline{\mathbf{x}}\|^3} \quad \text{für alle } \underline{\mathbf{x}} \in U.$$

**Aufgabe 8.** Es sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{cases} x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}, \\ 0 & \text{für } \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}. \end{cases}$$

Berechnen Sie, falls existent, alle partiellen zweiten Ableitungen von  $f$ .



**Aufgabe 9.** Es sei  $U \subset \mathbb{R}^3$  offen,  $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$  und  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  seien jeweils von der Klasse  $C^2$ .

Rechnen Sie die folgenden Regeln nach:

$$i) \quad \text{grad}(fg) = f \text{grad } g + g \text{grad } f ;$$

$$ii) \quad \text{div}(fF) = f \text{div } F + \langle F, \text{grad } f \rangle ;$$

$$iii) \quad \text{rot}(fF) = f \text{rot } F - F \times \text{grad } f ;$$

$$iv) \quad \text{div}(\text{rot } F) = 0 ;$$

$$v) \quad \text{rot}(\text{grad } f) = \underline{0} .$$

**Aufgabe 10.** Zeigen Sie, dass der Laplace-Operator in Polarkoordinaten geschrieben werden kann als

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} .$$

**Aufgabe 11.**

i) Für  $U := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\underline{x}\| < 1\}$  sei  $f: \mathbb{R}^2 \subset U \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(\underline{x}) = \ln(1 + x_1^2 - x_2^2) .$$

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom  $T(\underline{x}, \underline{x}^{(0)})$  von  $f$  der Ordnung 1 um den Entwicklungspunkt

$$\underline{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} .$$

- ii) Bestimmen Sie für  $n \in \mathbb{N}$  das Taylor-Polynom  $n^{ter}$  Ordnung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\underline{\mathbf{x}}) = x_1 x_2 + e^{x_3}$$

um den Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} = \underline{\mathbf{0}}$  (das Restglied ist nicht zu berechnen).

- iii) Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\underline{\mathbf{x}}) := e^{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3}$$

um den Punkt  $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} = \underline{\mathbf{0}}$  bis einschließlich der Glieder  $2^{ter}$  Ordnung (das Restglied ist nicht zu berechnen).

**Aufgabe 12.** Es sei  $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$  fixiert. Betrachten Sie für  $\xi \in \mathbb{R}^2$  den Ausdruck

$$e^{(x_1+\xi_1)(x_2+\xi_2)} = e^{x_1 x_2} e^t \quad \text{mit } t := x_1 \xi_2 + x_2 \xi_1 + \xi_1 \xi_2.$$

Verifizieren Sie mithilfe einer Taylor-Entwicklung in einer Veränderlichen der Funktion  $t \mapsto e^t$ :

$$\begin{aligned} e^{(x_1+\xi_1)(x_2+\xi_2)} &= e^{x_1 x_2} \left[ 1 + x_1 \xi_2 + x_2 \xi_1 + \frac{1}{2} x_2^2 \xi_1^2 + (1 + x_1 x_2) \xi_1 \xi_2 + \frac{1}{2} x_1^2 \xi_2^2 \right] \\ &\quad + O(\|\xi\|^3). \end{aligned}$$

Vergleichen Sie das Resultat mit dem Beispiel aus Kapitel 6.2.

**Aufgabe 13.** Zeigen Sie Korollare 6.1 und 6.2.

---

**Aufgabe 14.** Es sei  $U = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : x_2 > -1\}$  und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei definiert via

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_1 x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} =: \underline{\mathbf{y}} .$$

- i) Ist die Funktion  $f$  lokal umkehrbar?
  - ii) Falls ja, bestimmen Sie mit Hilfe des Umkehrsatzes die Ableitung der Umkehrfunktion.
  - iii) Berechnen Sie die Umkehrfunktion selbst und machen Sie eine Probe.
- 

**Aufgabe 15.**

- i) Es sei  $B_1(\underline{\mathbf{0}}) := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$  und  $f: B_1(\underline{\mathbf{0}}) \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert als

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = x_1 x_2 (1 - x_1 - x_2) .$$

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von  $f$ .

- ii) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$g(\underline{\mathbf{x}}) = x_1 x_2 x_3 .$$

iii) Die Zahl 1 soll so als Summe von drei positiven Zahlen

$$0 \leq a_i \leq 1, \quad i = 1, 2, 3,$$

dargestellt werden, dass deren Produkt maximal wird. Falls eine Lösung dieses Problems existiert, wie muss diese dann aussehen?

---

**Aufgabe 16.** Es sei  $f: \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \ln(2 + x_2^2 - x_1^2).$$

- i) Bestimmen Sie im Fall  $U = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$  alle lokalen Extrema der Funktion  $f$ .
- ii) Es sei nun  $U = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ . Existieren globale (absolute) Extrema von  $f$  auf  $U$ ? Falls ja, bestimmen Sie diese.
- 

**Aufgabe 17.** Es sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = x_1 x_2 e^{x_1 x_2}.$$

- i) Bestimmen Sie im Fall

$$U = B_1(\underline{\mathbf{0}}) := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$$

alle lokalen Extrema von  $f$ .

ii) Existieren im Fall

$$U = \overline{B_1(\underline{\mathbf{0}})} := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

globale Extrema von  $f$ ? Falls ja, bestimmen Sie diese.

---

**Aufgabe 18.** Es seien

$$E^c := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + 2x_2^2 \geq 1\} ,$$

$$Q := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x_1 \leq 2, -2 \leq x_2 \leq 2\} .$$

Weiterhin sei  $0 \leq x_0 < 1$  fixiert und  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = (x - x_0)^2 + y^2 .$$

i) Existieren absolute Extrema von  $f$  auf  $E^c$ ? Falls ja, bestimmen Sie diese.

ii) Existieren absolute Extrema von  $f$  auf  $E^c \cap Q$ ? Falls ja, bestimmen Sie diese.



# Kapitel 7

## Kurvenintegrale

### 7.1 Definition und Eigenschaften (Wegunabhängigkeit; Potential; konservatives Vektorfeld)

Als typisches Beispiel betrachte man eine stetig differenzierbare Kurve

$$\gamma : I = [a, b] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m .$$

In einem **Kraftfeld** (per definitionem ein **Vektorfeld**)  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  bewege sich ein Massenpunkt **längs dieser Kurve**.

Die zu verrichtende Arbeit („Kraft  $\times$  Weg“) ist nur vom **Anteil der Kraft in Kurvenrichtung** abhängig, wie es in Abbildung 7.1 angedeutet ist, d.h. es ist das **Skalarprodukt aus Kraft und Weg** zu betrachten.

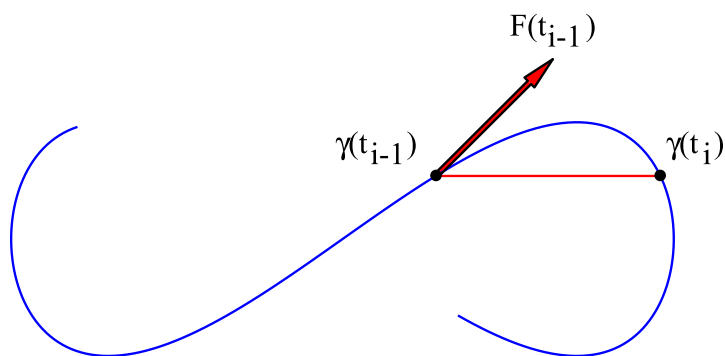


Abbildung 7.1: Zur Berechnung der verrichteten Arbeit.

**Definition 7.1.** KURVENINTEGRAL

Es sei  $U \subset \mathbb{R}^m$  offen,  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  sei ein stetiges Vektorfeld und weiter sei  $\gamma: I = [a, b] \rightarrow U$  eine glatte Kurve.

Dann heißt

$$\int_{\gamma} \langle F, d\mathbf{x} \rangle := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt =: \int_{\gamma} \left[ \sum_{i=1}^m F_i dx_i \right]$$

das *Kurvenintegral* des Vektorfeldes  $F$  längs der Kurve  $\gamma$ .

**Bemerkung.** Um auch *stückweise glatte Kurven*  $\gamma$  betrachten zu können, die sich wie in Abbildung 7.2 aus glatten „Teilkurven“  $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(k)}$  *stetig* zusammensetzen, definiert man

$$\int_{\gamma} \langle F, d\mathbf{x} \rangle := \sum_{i=1}^k \int_{\gamma^{(i)}} \langle F, d\mathbf{x} \rangle .$$

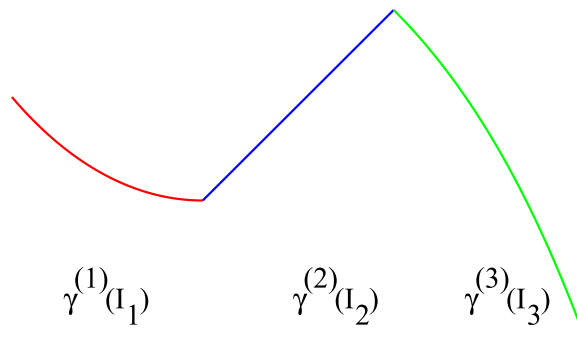


Abbildung 7.2: Eine stückweise glatte Kurve.



## Kurven- oder Wegintegrale?

Nach obiger Motivation des Kurvenintegrals über den Begriff der Arbeit sollte ein Kurvenintegral invariant unter **orientierungserhaltenden Parametertransformationen** sein.

Tatsächlich gilt für eine Kurve  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ , eine glatte orientierungstreue Parametertransformation  $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  sowie  $\tilde{\gamma}: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi$ :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} \langle F, d\mathbf{x} \rangle &= \int_{\alpha}^{\beta} \langle F(\tilde{\gamma}(\tau)), \tilde{\gamma}'(\tau) \rangle d\tau \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \langle F \circ \gamma(\varphi(\tau)), \gamma'(\varphi(\tau)) \rangle \varphi'(\tau) d\tau \\ &\stackrel{\text{Subst.}}{=} \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_{\gamma} \langle F, d\mathbf{x} \rangle . \end{aligned}$$

Identifiziert man (als **Äquivalenzrelation**) Kurven, die durch orientierungserhaltende Parametertransformationen auseinander hervorgehen, so spricht man von einem **Weg**.

Wegen der oben gezeigten Invarianz ist es berechtigt, von einem **Wegintegral** zu sprechen. Auf die genaue Unterscheidung zwischen Kurve und Weg wird hier jedoch meist nicht eingegangen.

Ist  $\tilde{\gamma}$  eine Kurve, die mittels einer **orientierungsumkehrenden Parametertransformation** aus  $\gamma$  hervorgeht, so sieht man wie oben

$$\int_{\tilde{\gamma}} \langle F, d\mathbf{x} \rangle = - \int_{\gamma} \langle F, d\mathbf{x} \rangle .$$

Aus diesem Grunde wird auch  $-\gamma$  für einen in umgekehrter Orientierung durchlaufenen Weg geschrieben.

**Beispiele.**

- i) Es fließe ein konstanter Strom  $I$  durch einen unendlich langen Leiter im  $\mathbb{R}^3$ .

Es wird ein Magnetfeld

$$B : U = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

aufgebaut mit

$$B(\underline{\mathbf{x}}) = I \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \\ \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

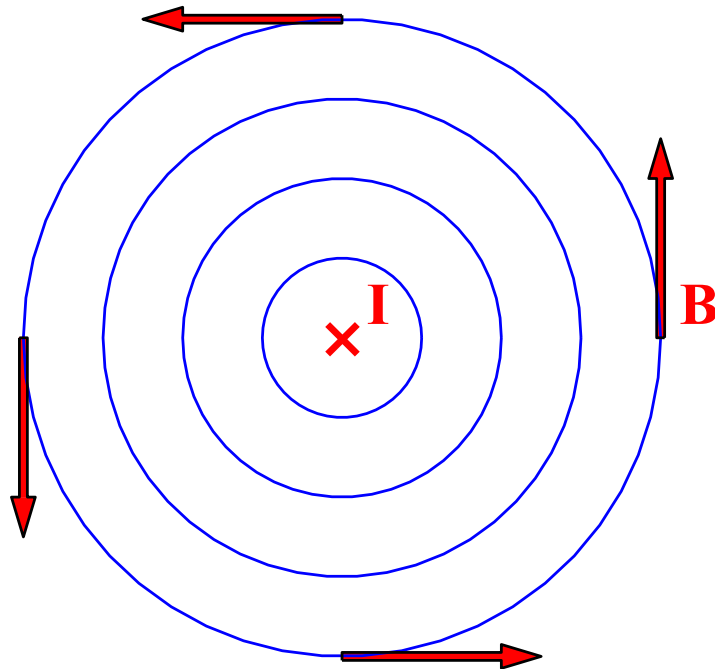


Abbildung 7.3: Magnetfeld um einen Leiter.

Berechnet werden soll nun das Kurvenintegral längs der Kurve  $\gamma$ ,

$$t \in [0, 2\pi) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \\ \text{konst.} \end{pmatrix}, \quad r > 0.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \langle B, d\mathbf{x} \rangle &= I \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} \left\langle \begin{pmatrix} -r \sin(t) \\ r \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r \sin(t) \\ r \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= I \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi I. \end{aligned}$$

Auf dieses Beispiel wird in Kürze noch zurückgegriffen werden.

ii) Das Vektorfeld  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sei gegeben durch

$$F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Betrachtet seien weiter die Kurven

$$\gamma: t \in [0, 1] \rightarrow \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

$$\tilde{\gamma}: t \in [0, 1] \rightarrow \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Zu beachten ist dabei: **Anfangs- und Endpunkt beider Kurven stimmen überein** (vgl. Abbildung 7.4).

Es gilt aber:

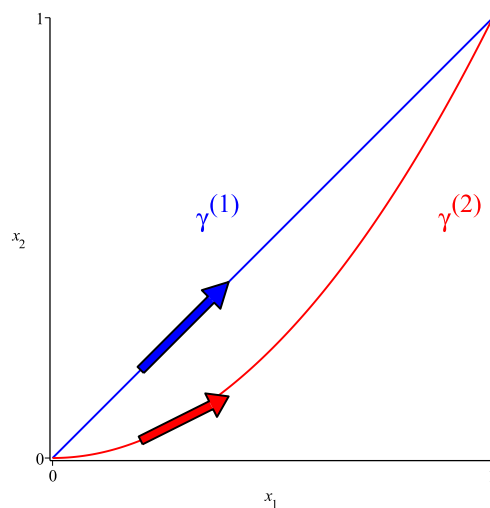


Abbildung 7.4: Zur Wegabhängigkeit des Kurvenintegrals.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \langle F, d\underline{\mathbf{x}} \rangle &= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t^2 + t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 3t^2 dt = 1, \\ \int_{\tilde{\gamma}} \langle F, d\underline{\mathbf{x}} \rangle &= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t^2 + t^4 \\ t^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 (3t^4 + t^2) dt \\ &= \frac{14}{15}. \end{aligned}$$

Im Allgemeinen hängt das Kurvenintegral also nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab, es kommt auch auf die spezielle Wahl des Weges an.

---

### Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals?

**Frage.** In welchen Fällen ist das Kurvenintegral **wegunabhängig**, d.h. nur vom Anfangs- und vom Endpunkt abhängig?

Dabei ist die Wegunabhängigkeit äquivalent zu

$$\int_{\gamma} \langle F, d\mathbf{x} \rangle = 0 \quad \text{für jeden geschlossenen Weg ,}$$

d.h. für jede geschlossen durchlaufene Kurve  $\gamma$ , d.h.  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

Dies sieht man anhand von Abbildung 7.5 ein, indem man den Weg  $\gamma = \gamma^{(1)} - \gamma^{(2)}$  betrachtet.

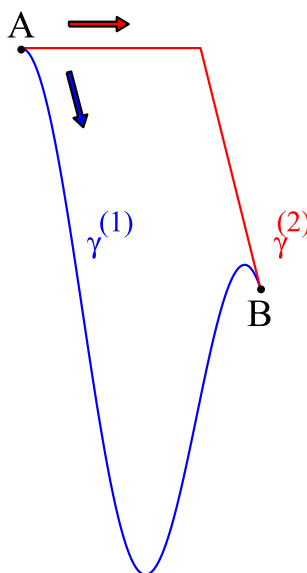


Abbildung 7.5: Wegabhängigkeit und geschlossene Wege.

**Beispiel.** Wird eine Masse im Gravitationsfeld angehoben, so ist die verrichtete Arbeit nur abhängig von der überwundenen Höhe, der Weg, auf dem das geschehen ist, spielt keine Rolle.

Das Gravitationsfeld ist *konservativ*.

Werden hingegen Reibungsverluste berücksichtigt, so wird die spezielle Wahl des Weges eine wichtige Rolle spielen.

**Definition 7.2.** POTENTIAL

Es sei  $U \subset \mathbb{R}^m$  offen und  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  sei ein stetiges Vektorfeld.

Falls eine Funktion  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$  existiert mit

$$F(\underline{\mathbf{x}}) = \nabla \varphi(\underline{\mathbf{x}}) \quad \text{für alle } \underline{\mathbf{x}} \in U ,$$

so heißt  $\varphi$  ein *Potential* von  $F$ .

Das Vektorfeld  $F$  bezeichnet man in diesem Fall als konservativ.

**Satz 7.1.** WEGUNABHÄNGIGKEIT IM KONSERVATIVEN V.F.

Es sei  $U \subset \mathbb{R}^m$  offen und  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  sei ein stetiges, konservatives Vektorfeld.

Ist  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  eine (stückweise) glatte Kurve und ist  $\varphi$  ein Potential von  $F$ , so gilt

$$\int_{\gamma} \langle F, d\underline{\mathbf{x}} \rangle = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) .$$

*Beweisidee* Man berechne  $\int_a^b \frac{d}{dt} \varphi(\gamma(t)) dt$  (siehe Übungskapitel 7.2). □

**Wie findet man ein Potential, falls es existiert?**

Es sei  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$F(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^3 \\ 3x_1x_2^2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Dann gilt  $F = \nabla\varphi$  mit

$$\varphi(\underline{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2^3 + x_3 .$$

Die Eigenschaft „ $\varphi$  ist ein Potential von  $F$ “ kann für die angegebenen Funktionen  $\varphi$  und  $F$  direkt nachgerechnet werden.

Um jedoch von dem gegebenem Vektorfeld auf  $F$  auf ein mögliches Potential  $\varphi$  zu schließen, nutzt man den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und folgert in dem Beispiel im Fall der Existenz eines Potentials mit geeigneten Funktionen  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$

$$\begin{aligned}\varphi(\underline{\mathbf{x}}) &= \int [t + x_2^3] dt + \xi_1(x_2, x_3) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2^3 + \xi_1(x_2, x_3) + c , \\ \varphi(\underline{\mathbf{x}}) &= \int [3x_1t^2] dt + \xi_2(x_1, x_3) = x_1x_2^3 + \xi_2(x_1, x_3) + c , \\ \varphi(\underline{\mathbf{x}}) &= \int 1 dt + \xi_3(x_1, x_2) = x_3 + \xi_3(x_1, x_2) + c .\end{aligned}$$

Anhand der ersten beiden Gleichungen erkennt man beispielsweise  $\partial\xi_1/\partial x_2 = 0$ , aus der letzten Gleichung zusätzlich  $\xi_1(x_2, x_3) = x_3$ .

Insgesamt muss gelten (bis auf Konstanten)

$$\begin{aligned}\xi_1(x_2, x_3) &= x_3 , \\ \xi_2(x_1, x_3) &= \frac{1}{2}x_1^3 + x_3 , \\ \xi_3(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2^3\end{aligned}$$

und ein Potential  $\varphi$  ist in dem Beispiel konstruktiv gefunden.

---

## Rotation und Integrabilitätskriterien.

Zu beachten ist im obigen Beispiel

$$\operatorname{rot} F = \underline{\mathbf{0}} .$$

Allgemein wurde für beliebiges  $\varphi: \mathbb{R}^3 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$  von der Klasse  $C^2$  im Übungskapitel 6.7 nachgerechnet:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = \underline{\mathbf{0}} .$$

Hat demnach ein (glattes) Vektorfeld  $F: \mathbb{R}^3 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Potential, so **muss rot  $F$  verschwinden** (als notwendige Bedingung für die Existenz eines Potentials).

Im  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \neq 3$ , argumentiert man analog:

Falls ein glattes Vektorfeld  $F$  im  $\mathbb{R}^m$  ein Potential  $\varphi$  hat, so gilt

$$F_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad \text{für alle } i = 1, 2, \dots, n ,$$

und folglich wegen der Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F_i = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \varphi = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \varphi = \frac{\partial}{\partial x_i} F_j .$$

Diese **Integrabilitätsbedingungen** müssen notwendig erfüllt sein, damit ein Vektorfeld  $F$  ein Potential haben kann.

---



**Zurück zum Beispiel des unendlich langen Leiters.**

Es sei wieder

$$B(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \\ \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Betrachtet man auf  $U = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0\}$  die Funktion

$$\varphi(\underline{\mathbf{x}}) = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right),$$

so erkennt man (vgl. Beispiel zum Nabla-Operator in Polarkoordinaten)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \frac{1}{1 + \frac{x_2^2}{x_1^2}} \left( -\frac{1}{x_1^2} x_2 \right) = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{1}{1 + \frac{x_2^2}{x_1^2}} \frac{1}{x_1} = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0,$$

$\varphi$  ist also auf  $U$  ein Potential von  $B$ .

Für eine geschlossene Kreislinie um den Ursprung ist oben berechnet

$$\int_{\gamma} \langle B, d\underline{\mathbf{x}} \rangle = 2\pi$$

und nach Satz 7.1 kann  $B$  kein Potential auf  $\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \neq 0\}$  haben (vgl. auch Abbildung 7.6).

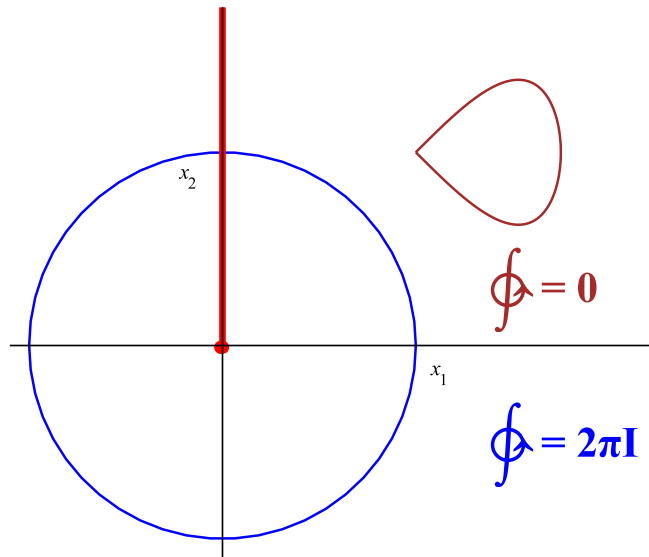


Abbildung 7.6:  $B$  kann kein „globales“ Potential haben.

Als Übung berechne man  $\text{rot } B$  auf  $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \neq 0\}$  und interpretiere das Ergebnis (vgl. Übungskapitel 7.2).

---

## 7.2 Übungsaufgaben zu Kapitel 7

**Aufgabe 1.** Zeigen Sie Satz 7.1.

---

**Aufgabe 2.** Es sei  $F: \mathbb{R}^3 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein glattes Vektorfeld.

Folgt aus  $\operatorname{rot} F = \underline{\mathbf{0}}$ , dass  $F$  konservativ ist?

*Hinweis. Betrachten Sie das Beispiel „Magnetfeld“ aus der Vorlesung.*

---

**Aufgabe 3.** Skizzieren Sie  $\gamma$  und berechnen Sie  $\int_{\gamma} \langle F, d\underline{\mathbf{x}} \rangle$  in den folgenden beiden Fällen:

i) Im  $\mathbb{R}^2$  sei  $\gamma$  die aus  $\gamma^{(1)}$  und  $\gamma^{(2)}$  zusammengesetzte stückweise glatte Kurve,

$$\gamma^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t(-t^2 - t + 2) \end{pmatrix}, \quad t \in [-2, 0],$$

$$\gamma^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2],$$

(*Hinweis. Nullstellen der zweiten Komponente von  $\gamma^{(1)}$  berechnen*),  
und es sei  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$F(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

ii) Es sei  $F: \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$F(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} \\ \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Finden Sie in diesem Fall weiter eine Kurve  $\tilde{\gamma}$  mit gleichem Anfangs- und Endpunkt und  $\int_{\tilde{\gamma}} \langle F, d\underline{\mathbf{x}} \rangle \neq \int_{\gamma} \langle F, d\underline{\mathbf{x}} \rangle$ .

---

**Aufgabe 4.** Betrachten Sie das Vektorfeld  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$F(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_1 + 3x_2^2 \end{pmatrix}.$$

i) Ist  $F$  konservativ?

ii) Betrachten Sie weiter die stückweise glatte Kurve  $\gamma$  im  $\mathbb{R}^2$ , die sich zusammensetzt aus

$$\gamma^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]; \quad \gamma^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

Skizzieren Sie die Kurve und berechnen Sie  $\int_{\gamma} \langle F, d\underline{\mathbf{x}} \rangle$ .

iii) Berechnen Sie  $\int_{\tilde{\gamma}} \langle F, d\underline{\mathbf{x}} \rangle$ , falls  $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben sei durch

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$


---

**Aufgabe 5.** Es sei  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein konservatives Vektorfeld. Weiter sei  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine glatte Kurve mit

$$\gamma''(t) = F(\gamma(t)) \quad (\text{Newtonsches Bewegungsgesetz}) .$$

Berechnen Sie  $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle)$  und folgern Sie den **Energiesatz**

$$\left[ \frac{1}{2} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \right]_{t_1}^{t_2} = \varphi(\gamma(t_2)) - \varphi(\gamma(t_1)) .$$

---

**Aufgabe 6.** Es seien  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  glatte Funktionen,  $F, G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  seien die Vektorfelder

$$F(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} x_2 + e^{x_1} \\ f(x_2) \end{pmatrix} , \quad G(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} x_2^2 + e^{x_1} \\ g(x_1, x_2) \end{pmatrix} .$$

- i) Kann  $F$  ein konservatives Vektorfeld sein? Falls ja, finden Sie alle solchen  $f$  und ein zugehöriges Potential von  $F$ .
  - ii) Kann  $G$  ein konservatives Vektorfeld sein? Falls ja, finden Sie alle solchen  $g$  und ein zugehöriges Potential von  $G$ .
-



# Kapitel 8

## Integrale im $\mathbb{R}^n$

### 8.1 Das Riemannsche Integral (Riemannsches Integral über Zellen; iteriertes Integral; Normalbereich; Projizierbarkeit; Satz von Fubini)

Die Idee zur Konstruktion des [Riemannschen Integrals](#) ist ähnlich wie im eindimensionalen Fall:

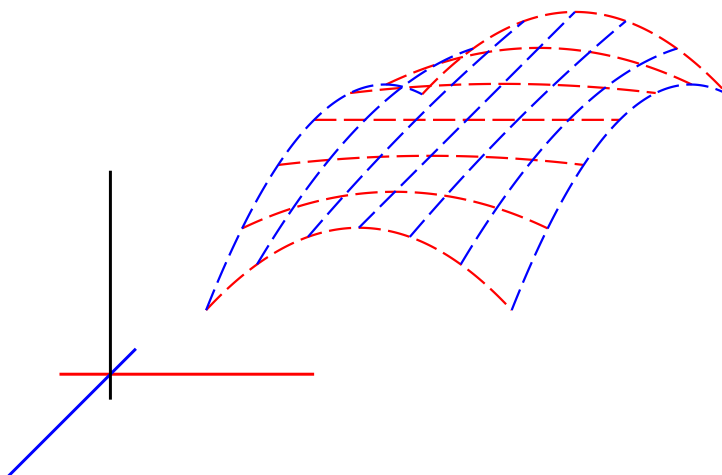


Abbildung 8.1: Der Graph einer Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Ist  $f: M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte Funktion, so sollte das Integral  $\int_M f \, dV$  ein Maß für das Volumen des vom Graphen und von  $M$  berandeten Körpers sein, so wie es in Abbildung 8.1 angedeutet ist.

Dabei übertragen sich die einführenden Bemerkungen aus Teil II, Kapitel 6, zur Vorgehensweise sinngemäß.

Während man im eindimensionalen Fall in der Regel jedoch lediglich über Intervalle integriert, deren Länge wohl definiert ist, sind die Integrationsbereiche im Fall  $n \geq 2$  wesentlich vielfältiger und das [Maß der Mengen](#) (als Analogon zur Länge eines Intervalls) ist noch nicht definiert.

### Das Riemannsche Integral über Zellen.

Ist im einfachsten Fall  $n = 2$  und  $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$  ein Rechteck im  $\mathbb{R}^2$ , so visualisiert Abbildung 8.2, wie [Unter- und Obersummen](#) in diesem Fall völlig analog zur eindimensionalen Situation erklärt sind.

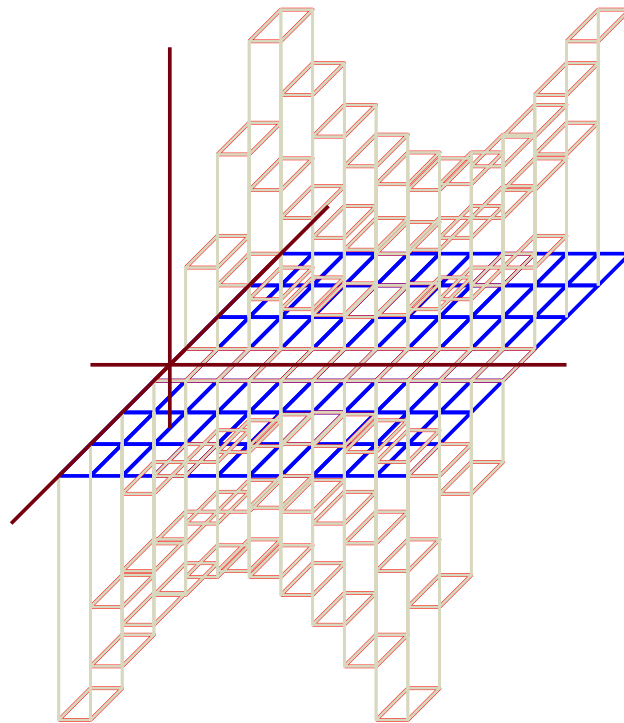


Abbildung 8.2: Eine Riemannsche Summe (vgl. Abbildung 8.1).

Ist in Verallgemeinerung der Situation  $n \in \mathbb{N}$  fixiert, bezeichnen  $I_1, I_2, \dots, I_n$  reelle (abgeschlossene) Intervalle und ist weiter

$$C := I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n \subset \mathbb{R}^n ,$$



so heißt  $C$  eine **Zelle** im  $\mathbb{R}^n$ .

Als Übungsaufgabe (vgl. Übungskapitel 8.4) definiere man analog zum Fall  $n = 1$  den Begriff einer **integrierbaren Funktion**  $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ .

Die Notation lautet:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(f) &= \int_C f \, dV = \int_C f(\underline{\mathbf{x}}) \, dV \\ &= \int \int \cdots \int_C f(\underline{\mathbf{x}}) \, dx_1 \dots dx_n ,\end{aligned}$$

$\mathcal{I}(f)$  heißt das **Riemannsche Integral** von  $f$  über die Zelle  $C$ ,  $dV$  heißt **Volumenelement**.

Die Bemerkungen und **Integrabilitätskriterien** aus dem Fall  $n = 1$  übertragen sich analog, beispielsweise gilt

### Satz 8.1. INTEGRIERBARKEIT STETIGER FUNKTIONEN

Ist  $f: \mathbb{R}^n \supset C \rightarrow \mathbb{R}$  *stetig* auf der Zelle  $C$ , so ist  $f$  integrierbar auf  $C$ .

---

## Wie berechnet man Integrale über Zellen im $\mathbb{R}^n$ ?

### Satz 8.2. ITERIERTE INTEGRALE

Es sei o.E.  $n = 2$  (für  $n \geq 3$  gelten analoge Aussagen). Es sei weiter  $f: \mathbb{R}^2 \supset C \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar auf der Zelle

$$C = \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : a \leq x_1 \leq b, c \leq x_2 \leq d \} .$$

- i) Falls für jedes *fixierte*  $x_1 \in [a, b]$  das Integral  $\int_c^d f(\underline{\mathbf{x}}) dx_2$  existiert, so existiert das „*iterierte Integral*“

$$\int_a^b \left[ \int_c^d f(\underline{\mathbf{x}}) dx_2 \right] dx_1$$

und es gilt

$$\int_C f(\underline{\mathbf{x}}) dV = \int_a^b \left[ \int_c^d f(\underline{\mathbf{x}}) dx_2 \right] dx_1 .$$

- ii) Falls für jedes *fixierte*  $x_2 \in [c, d]$  das Integral  $\int_a^b f(\underline{\mathbf{x}}) dx_1$  existiert, so gilt die analoge Aussage.

**Bemerkungen.** Satz 8.2 ist mit einigen Bemerkungen zu kommentieren:

- i) Mit diesem Satz ist erst die Notation als *Mehrfachintegral*  $\int \int_C f(\underline{\mathbf{x}}) dx_1 dx_2$  gerechtfertigt.
- ii) Die Berechnung eines Integrals im  $\mathbb{R}^n$  wird mithilfe von Satz 8.2 auf zwei nacheinander auszuführende „eindimensionale“ Integrationen zurückgeführt.

*Damit übertragen sich (unter den Voraussetzungen von Satz 8.2) die bekannten Eigenschaften aus der Integralrechnung einer Variablen (Linearität ...)*

- iii) Wie Beispiele zeigen (siehe Übungskapitel 8.4), *folgt allein aus der Existenz der iterierten Integrale in Satz 8.2 nicht die Existenz von  $\int_C f(\underline{\mathbf{x}}) dV$ .*

Im Folgenden wird, sofern es nicht anders betont ist, stets die Existenz aller auftretenden Integrale als Generalvoraussetzung angenommen.

Dazu sei nun beispielsweise  $f$  stetig auf  $C$ .

Nach Satz 8.2 gilt für das Zweifachintegral (mit der gängigen Notation  $f(\underline{\mathbf{x}}) = f(x_1, x_2)$ )

$$i) \int_C f(\underline{\mathbf{x}}) \, dx = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x_1, x_2) \, dx_2 \right] dx_1 ,$$

also wird für festes  $x_1$  erst das Einfachintegral

$$\int_c^d f(x_1, x_2) \, dx_2 =: g(x_1)$$

bestimmt, dann die Funktion  $g(x_1)$  bzgl.  $x_1$  integriert, wie es in Abbildung 8.3 angedeutet ist.

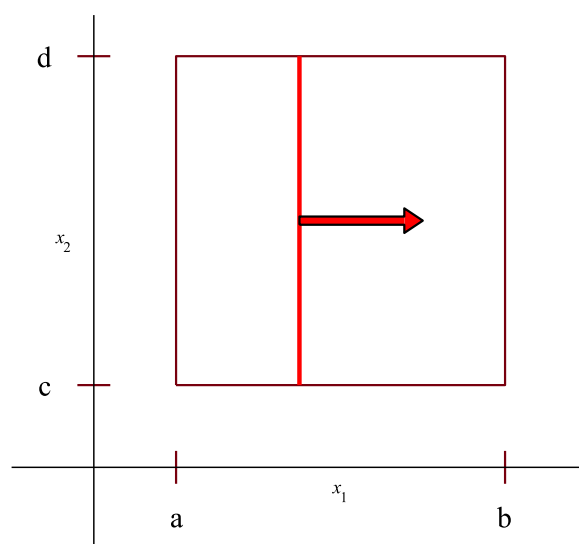


Abbildung 8.3: Eine Möglichkeit zur Berechnung eines Zweifachintegrals.

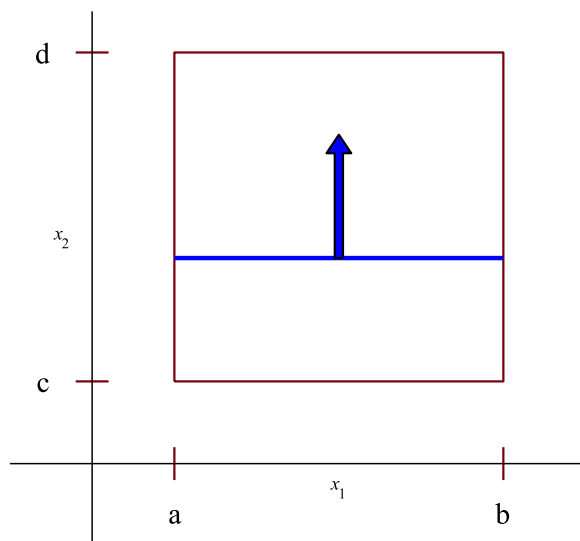


Abbildung 8.4: Eine zweite Möglichkeit zur Berechnung eines Zweifachintegrals.

$$ii) \int_C f(\underline{x}) \, dx = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x_1, x_2) \, dx_1 \right] dx_2.$$

Hier ist die Situation umgekehrt (siehe Abbildung 8.4).

### Drei Beispiele.

i) Es sei  $C = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, 1 \leq x_2 \leq 2\}$ ,  $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$ .

Dann ist  $f$  stetig auf  $C$ , insbesondere sind die Voraussetzungen aus Satz 8.2 erfüllt, es gilt

$$\begin{aligned} \int_C x_1^{x_2} \, dV &= \int_1^2 \left[ \int_0^1 x_1^{x_2} \, dx_1 \right] dx_2, \\ \int_0^1 x_1^{x_2} \, dx_1 &= \frac{x_1^{x_2+1}}{x_2+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{x_2+1} \end{aligned}$$

und damit

$$\int_C x_1^{x_2} dV = \int_1^2 \frac{1}{x_2 + 1} dx_2 = \ln(1 + x_2) \Big|_1^2 = \ln(3/2) .$$

ii) Es sei jetzt  $n = 3$ ,

$$C = C_{3d} = \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 1, 2 \leq x_3 \leq 4 \} .$$

Als stetiger Integrand  $f$  wird betrachtet:

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = x_1 + x_2 + x_3 .$$

Mit der Notation

$$C_{2d} = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : 0 \leq x_2 \leq 1, 2 \leq x_3 \leq 4 \right\}$$

folgt

$$\int_C f(\underline{\mathbf{x}}) dV = \int_{C_{2d}} \left[ \underbrace{\int_0^2 (x_1 + x_2 + x_3) dx_1}_{=: g(x_2, x_3)} \right] dV(x_2, x_3) ,$$

wobei  $dV(x_2, x_3)$  das zweidimensionale Volumenelement (bzgl. der Variablen  $x_2, x_3$ ) bezeichne.

Eine nochmalige Anwendung von Satz 8.2 liefert

$$\int_{C_{2d}} g(x_2, x_3) dV(x_2, x_3) = \int_2^4 \left[ \int_0^1 g(x_2, x_3) dx_2 \right] dx_3$$

und insgesamt:

$$\begin{aligned}
 \int_C f(\underline{\mathbf{x}}) \, dV &= \int_2^4 \left[ \int_0^1 \left[ \int_0^2 (x_1 + x_2 + x_3) \, dx_1 \right] dx_2 \right] dx_3 \\
 &= \int_2^4 \left[ \int_0^1 \left[ \frac{x_1^2}{2} + x_1(x_2 + x_3) \right]_0^2 dx_2 \right] dx_3 \\
 &= \int_2^4 \left[ \int_0^1 [2 + 2x_2 + 2x_3] dx_2 \right] dx_3 \\
 &= \int_2^4 [2x_2(1 + x_3) + x_2^2]_0^1 dx_3 \\
 &= \int_2^4 [3 + 2x_3] dx_3 = [3x_3 + x_3^2]_2^4 = 18 .
 \end{aligned}$$

iii) Ist speziell

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{von der Form} \quad f(\underline{\mathbf{x}}) = f_1(x_1)f_2(x_2)$$

und sind die Funktionen  $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $[a, b]$  bzw.  $[c, d] \subset \mathbb{R}$ , so ist mit  $C := [a, b] \times [c, d]$  (vgl. Übungskapitel 8.4)

$$\int_C f(\underline{\mathbf{x}}) \, dV = \left[ \int_a^b f_1(x_1) \, dx_1 \right] \left[ \int_c^d f_2(x_2) \, dx_2 \right] .$$

---

**Man will aber nicht nur über Zellen integrieren!**

Bei der Integration in einer Veränderlichen genügt es meist, Integrale über Intervalle definieren zu können.

In mehreren Veränderlichen ist die Beschränkung auf Zellen zu restriktiv.

Das Riemannsche Integral kann etwa auf sogenannten **quadrierbaren Mengen** eingeführt werden, wozu der Begriff des **Jordanschen Maßes** benötigt wird. Dazu sei hier lediglich auf die Literatur verwiesen.

Eine kleinere, für praktische Zwecke aber gut handbare Klasse ist:

**Definition 8.1.** NORMALBEREICH

i) Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^2$  heißt  **$x_2$ -projizierbar** oder **Normalbereich in  $x_2$ -Richtung**, falls  $M$  von der Form ist

$$M = \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in [a, b], \varphi_1(x_1) \leq x_2 \leq \varphi_2(x_1) \} ,$$

wobei  $\varphi_1, \varphi_2$  zwei auf  $[a, b]$  stetige Funktionen seien.

ii) Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^2$  heißt  **$x_1$ -projizierbar** oder **Normalbereich in  $x_1$ -Richtung**, falls  $M$  von der Form ist

$$M = \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : x_2 \in [c, d], \psi_1(x_2) \leq x_1 \leq \psi_2(x_2) \} ,$$

wobei  $\psi_1, \psi_2$  zwei auf  $[c, d]$  stetige Funktionen seien.

iii) Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt  **$x_j$ -projizierbar** oder **Normalbereich in  $x_j$ -Richtung**,  $1 \leq j \leq n$ , wenn sie die Form

$$M = \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \underline{\mathbf{y}} \in K, \xi_1(\underline{\mathbf{y}}) \leq x_j \leq \xi_2(\underline{\mathbf{y}}) \}$$

hat, wobei  $\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{n-1}$  von der Form

$$\underline{\mathbf{y}} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{j-1} \\ x_{j+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$$

ist und wobei  $K$  eine (präzise: kompakte, quadrierbare) Menge des  $\mathbb{R}^{n-1}$  bezeichne. Die Funktionen  $\xi_1, \xi_2: K \rightarrow \mathbb{R}$  seien stetig.

---

Mit anderen Worten bedeutet etwa  $x_2$ -Projizierbarkeit, dass  $M$  von den Graphen der Funktionen  $\varphi_1(x_1)$  und  $\varphi_2(x_1)$  eingesperrt ist.

Bei einer Integration in Verallgemeinerung von Satz 8.2 kann dann zunächst das Integral bzgl.  $x_2$  für fixiertes  $x_1$  zwischen den Grenzen  $\varphi_1(x_1)$  und  $\varphi_2(x_1)$  berechnet werden, anschließend wird das von  $x_1$  abhängende Ergebnis bzgl.  $x_1$  integriert.

---

### Beispiele zur Projizierbarkeit.

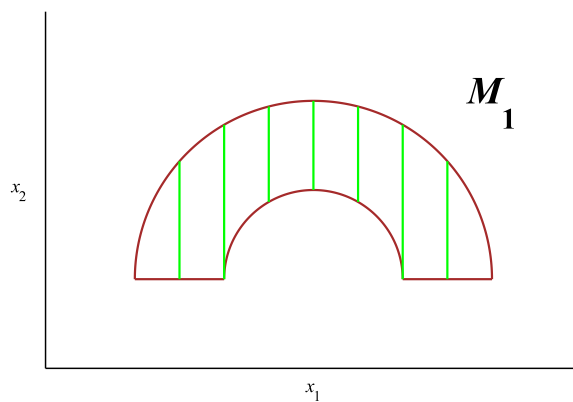
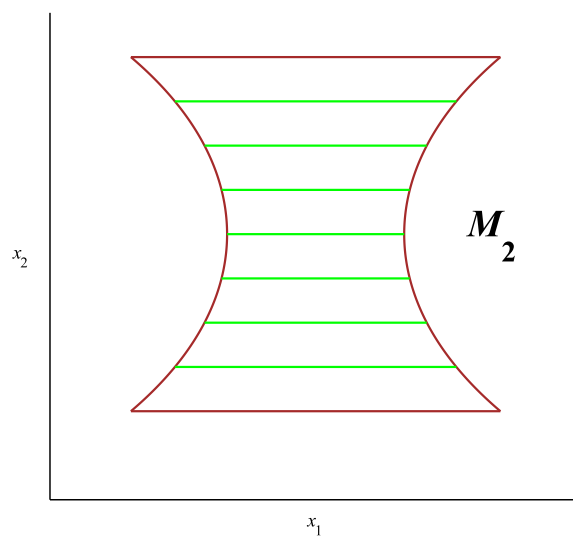
- i) Zweidimensionale Beispiele sind in den Abbildungen 8.5–8.8 dargestellt.
- ii) Man betrachte obiges dreidimensionales Beispiel der Zelle

$$C = \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_1 \leq 2, 0 \leq x_2 \leq 1, 2 \leq x_3 \leq 4 \} .$$

Mit der Notation

$$\underline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} , \quad \xi_1(\underline{\mathbf{y}}) \equiv 0 , \quad \xi_2(\underline{\mathbf{y}}) \equiv 2 ,$$




 Abbildung 8.5:  $M_1$  ist  $x_2$  projizierbar, nicht  $x_1$  projizierbar.

 Abbildung 8.6:  $M_2$  ist  $x_1$  projizierbar, nicht  $x_2$  projizierbar.

ist als die Menge  $K \subset \mathbb{R}^2$  zu wählen:

$$K = C_{2d} = \{ \underline{\mathbf{y}} : 0 \leq x_2 \leq 1, 2 \leq x_3 \leq 4 \} .$$

Damit ist

$$C = \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \underline{\mathbf{y}} \in K, \xi_1(\underline{\mathbf{y}}) \leq x_1 \leq \xi_2(\underline{\mathbf{y}}) \} ,$$

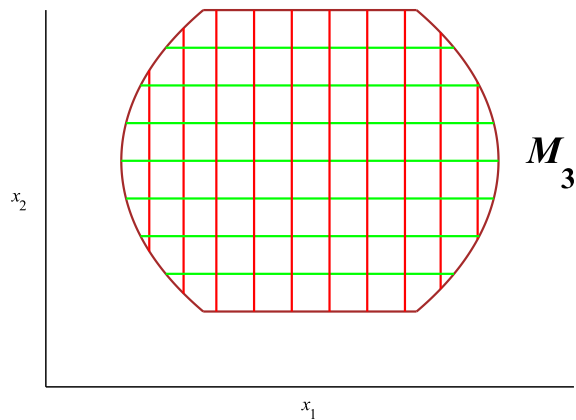


Abbildung 8.7:  $M_3$  ist  $x_1$  projizierbar und  $x_2$  projizierbar.

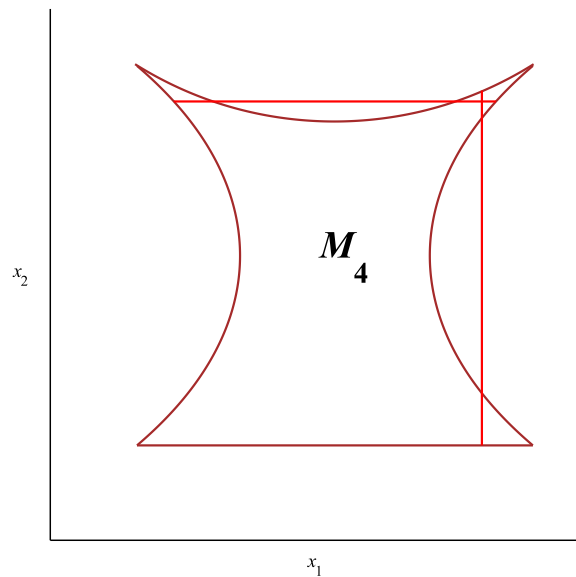


Abbildung 8.8:  $M_4$  ist weder  $x_1$  projizierbar noch  $x_2$  projizierbar.

die Zelle ist also ein Normalbereich in  $x_1$ -Richtung (analog sieht man ein, dass  $C$  Normalbereich in  $x_2$ - und  $x_3$ -Richtung ist).

iii) Es sei  $M \subset \mathbb{R}^3$  das „Raumstück“, welches den beiden Zylindern

$$\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \quad \text{und} \quad \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_3^2 \leq 1\}$$

gemeinsam ist,

$$M = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \cap \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_3^2 \leq 1\} .$$

Dann ist  $M$  Normalbereich in  $x_3$ -Richtung (analog in  $x_2$ -Richtung).

Um das einzusehen betrachte man die „Grundfläche“ bestehend aus den Punkten

$$\underline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in K := \{\underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

sowie die untere bzw. obere Grenzen als Funktion  $K \rightarrow \mathbb{R}$

$$\xi_1(\underline{\mathbf{y}}) = -\sqrt{1 - x_1^2}, \quad \xi_2(\underline{\mathbf{y}}) = \sqrt{1 - x_1^2} \quad \text{für alle } \underline{\mathbf{y}} \in K .$$

Damit ist

$$M = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \underline{\mathbf{y}} \in K, \xi_1(\underline{\mathbf{y}}) \leq x_3 \leq \xi_2(\underline{\mathbf{y}})\} .$$

*iv)* Es sei

$$M = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\} .$$

Wieder ist  $M$  Normalbereich in  $x_3$ -Richtung (andere Richtungen analog).

Die Menge  $K$  findet man wie folgt.

Zunächst muss auf  $K$  gelten:  $x_1 \geq 0$  und  $x_2 \geq 0$ .

Es ist weiter in  $K$

$$\underline{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \xi_1(\underline{\mathbf{y}}) = 0, \quad \xi_2(\underline{\mathbf{y}}) = 1 - x_1 - x_2.$$

Die Bedingung  $\xi_1(\underline{\mathbf{y}}) \leq \xi_2(\underline{\mathbf{y}})$  muss auf ganz  $K$  gelten, folglich

$$K = \{ \underline{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1 \}.$$

### Cavalierisches Prinzip, Satz von Fubini.

Als Definition des Riemannschen Integrals über Normalbereiche und gleichzeitig als Satz zu deren Berechnung dient hier der [Satz von Fubini](#) (man vergleiche das sogenannte [Cavalierisches Prinzip](#)).

#### Satz 8.3. SATZ VON FUBINI

Es sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  und  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

Dann gilt mit den obigen Bezeichnungen:

i) Ist  $n = 2$  und  $M$  ein Normalbereich in  $x_2$ -Richtung, so gilt

$$\int_M f \, dV = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x_1)}^{\varphi_2(x_1)} f(x_1, x_2) \, dx_2 \right] dx_1.$$

ii) Ist  $n = 2$  und  $M$  ein Normalbereich in  $x_1$ -Richtung, so gilt

$$\int_M f \, dV = \int_c^d \left[ \int_{\psi_1(x_2)}^{\psi_2(x_2)} f(x_1, x_2) \, dx_1 \right] dx_2.$$

- iii) Im allgemeinen Fall  $n \geq 2$ ,  *$M$  Normalbereich in eine Richtung  $x_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , gilt*

$$\int_M f \, dV = \int_K \left[ \int_{\xi_1(\underline{y})}^{\xi_2(\underline{y})} f(\underline{x}) \, dx_j \right] dV_{n-1},$$

wobei  $dV_{n-1}$  das  $(n-1)$ -dimensionale Volumenelement auf  $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$  bezeichne.

Dabei ist das Integral auf der rechten Seite definiert, falls  $K$  selbst wieder Normalbereich in die verbleibenden Richtungen ist.

### Bemerkungen.

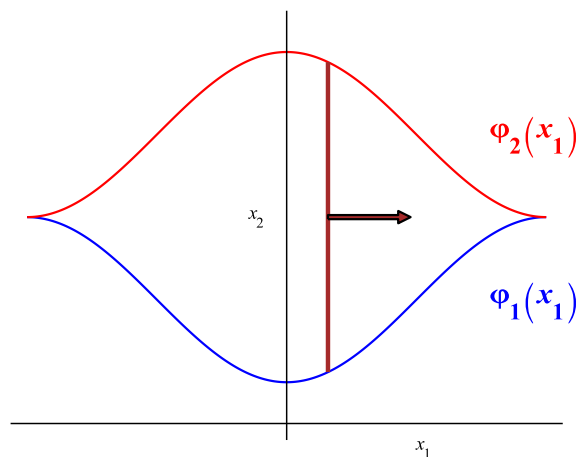


Abbildung 8.9: Iterierte Integration für einen  $x_2$ -Normalbereich.

- i) Der Satz führt Integrale in  $\mathbb{R}^n$  als Mehrfachintegrale ein und ist damit auch ein wesentliches Hilfsmittel zur *konkreten Berechnung*.

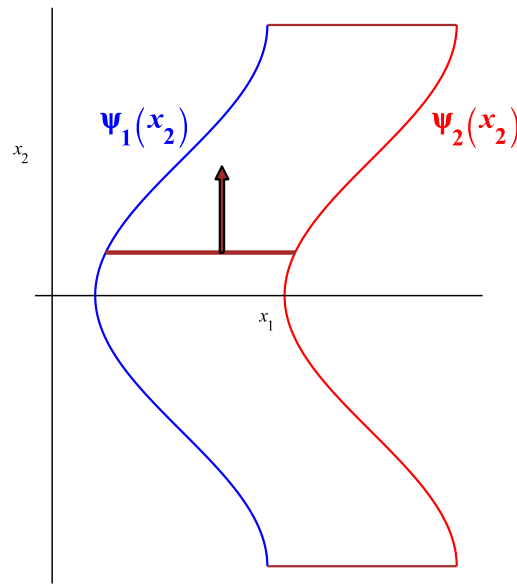


Abbildung 8.10: Iterierte Integration für einen  $x_1$ -Normalbereich – hier wäre die Variante analog zu Abbildung 8.9 nicht möglich.

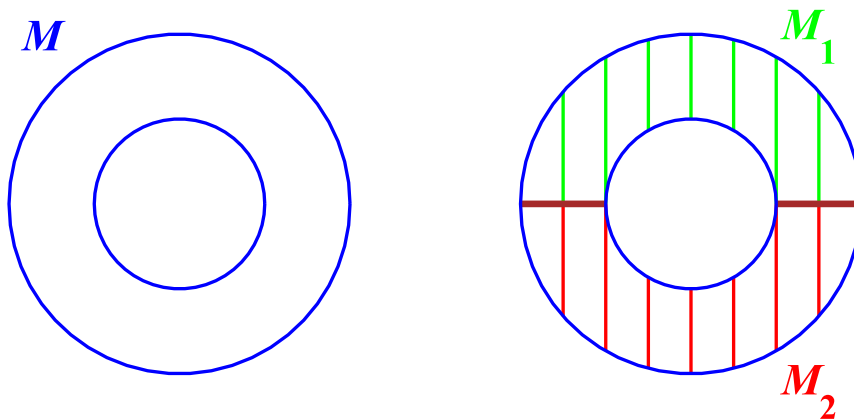


Abbildung 8.11: Eine Zerlegung in Normalbereiche.

Analog zu Satz 8.2 ist die anschauliche Vorstellung in den Abbildungen 8.9 und 8.10 wiedergegeben.

- ii) Ist  $M$  in verschiedene Richtungen ein Normalbereich, so kann natürlich die „einfachste“ Berechnungsvariante gewählt werden.

- iii) Ist  $M$  kein Normalbereich, so kann versucht werden,  $M$  in endlich viele Normalbereiche zu zerlegen, um Satz 8.3 anzuwenden.
- iv) Ist  $M$  eine Vereinigung von endlich vielen Normalbereichen, so heißt  $M$  ein Greenscher Bereich (vgl. Abbildung 8.11).

### Ein Beispiel, zwei Möglichkeiten.

Es sei  $R > 0$  fixiert und

$$M := \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, x_2 \geq 0 \} .$$

Der Integrand  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = x_1^2 x_2 .$$

1<sup>te</sup> Möglichkeit. Man rechne nach Satz 8.3, i) (vgl. Abbildung 8.12):

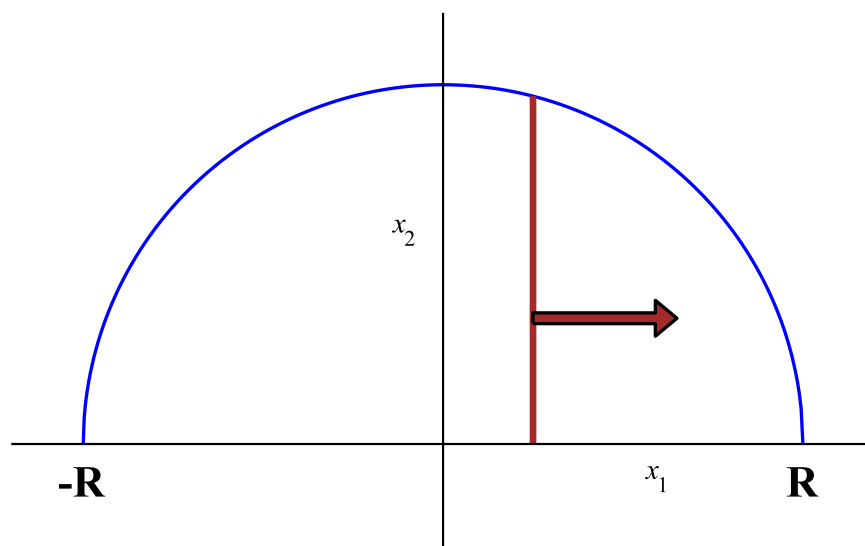


Abbildung 8.12: 1<sup>te</sup> Möglichkeit.

$$\begin{aligned}
\int_M x_1^2 x_2 \, dV &= \int_{-R}^R \left[ \int_0^{\sqrt{R^2-x_1^2}} x_1^2 x_2 \, dx_2 \right] dx_1 \\
&= \int_{-R}^R \left[ \frac{x_1^2 x_2^2}{2} \right]_0^{\sqrt{R^2-x_1^2}} dx_1 \\
&= \frac{1}{2} \int_{-R}^R x_1^2 (R^2 - x_1^2) \, dx_1 \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{x_1^3}{3} R^2 - \frac{x_1^5}{5} \right]_{-R}^R = \frac{2}{15} R^5 .
\end{aligned}$$

2<sup>te</sup> Möglichkeit. Man rechne nach Satz 8.3, ii) (vgl. Abbildung 8.13):

$$\begin{aligned}
\int_M x_1^2 x_2 \, dV &= \int_0^R \left[ \int_{-\sqrt{R^2-x_2^2}}^{\sqrt{R^2-x_2^2}} x_1^2 x_2 \, dx_1 \right] dx_2 \\
&= \int_0^R \left[ \frac{x_1^3}{3} x_2 \right]_{-\sqrt{R^2-x_2^2}}^{\sqrt{R^2-x_2^2}} dx_2 \\
&= \frac{1}{3} \int_0^R 2x_2 (R^2 - x_2^2)^{\frac{3}{2}} \, dx_2 \\
&= \frac{1}{3} \left[ \left( -\frac{2}{5} \right) (R^2 - x_2^2)^{\frac{5}{2}} \right]_0^R = \frac{2}{15} R^5 .
\end{aligned}$$

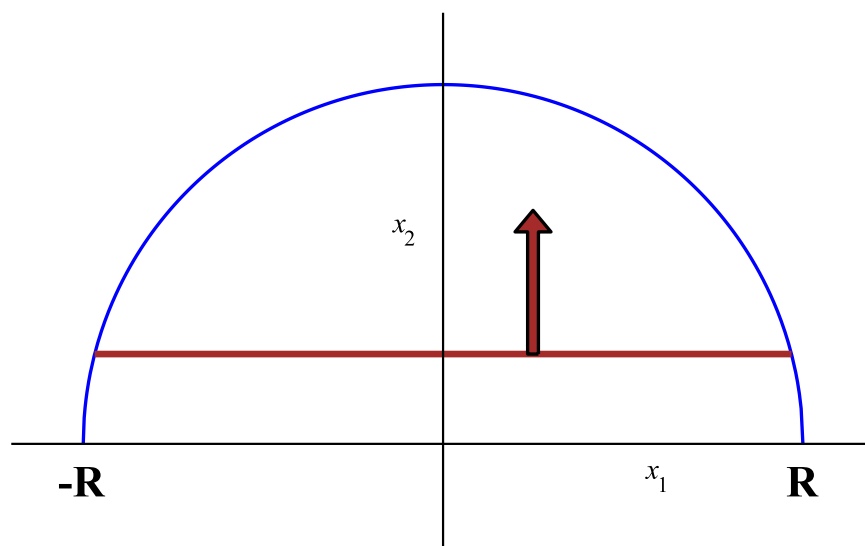

---

### Volumen eines Tetraeders.

Gesucht sei das Volumen  $V$  des Tetraeders  $T$  mit den Ecken  $O = \underline{0}$ ,

$$A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, \quad a, b, c > 0 \text{ fixiert},$$



Abbildung 8.13: 2<sup>te</sup> Möglichkeit.

d.h. man berechne

$$\int_T 1 \, dV ,$$

wobei  $dV$  das dreidimensionale Volumenelement bezeichne.

Um die richtigen Integrationsgrenzen zu finden, beachtet man zunächst, dass das Dreieck  $\triangle ABO$  in der Ebene  $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$  liegt (vgl. Abbildung 8.14).

Zu einem gegebenem Punkt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \triangle ABO$$

ist nach Abbildung 8.14 längs der grünen Linie bzgl.  $x_3$  bis zu der Höhe zu integrieren, die durch das Dreieck  $\triangle ABC$  festgelegt ist.

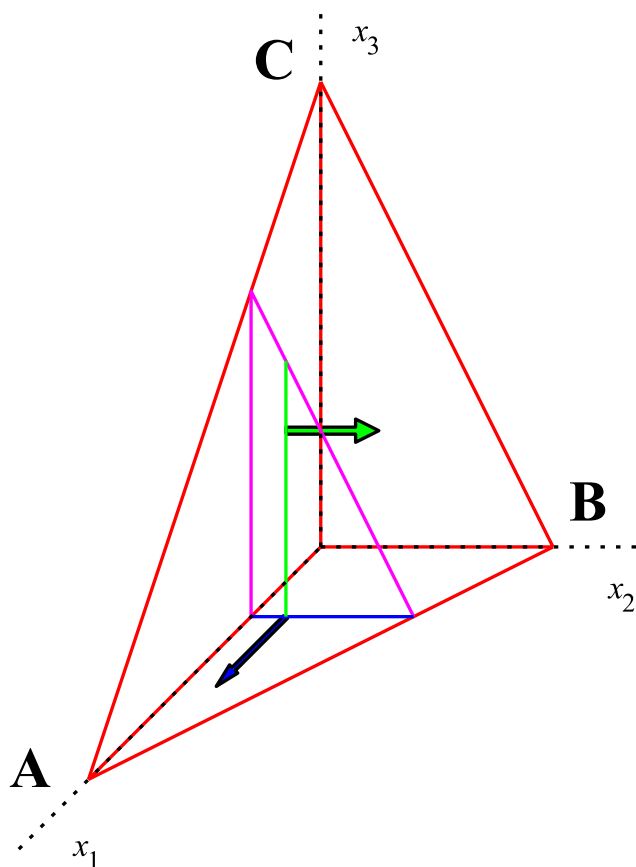


Abbildung 8.14: Zur Volumenberechnung des Tetraeders.

Dieses Dreieck liegt in der Ebene (Probe!)

$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} = 1 .$$

Wird also zunächst das Integral bzgl  $x_3$  abgespalten, so ist zwischen den Grenzen  $x_3 = 0$  und

$$x_3 = c \left( 1 - \frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} \right)$$

zu integrieren.

Bleibt im nächsten Schritt  $x_1$  fixiert, so ist bzgl.  $x_2$  wie mit dem grünen Pfeil angedeutet zu integrieren, d.h. die untere Grenze ist  $x_2 = 0$ .

Die Gerade durch die Punkte  $A$  und  $B$  wird wiederum durch die Gleichung

$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 1$$

beschrieben, woraus sich als obere Grenze  $b(1 - x_1/a)$  ergibt.

Wie mit dem blauen Pfeil angedeutet ist die letzte Integration bzgl.  $x_1$  von 0 bis  $a$  auszuführen.

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} V &= \int_T 1 \, dV \\ &= \int_0^a \left[ \int_0^{b(1-x_1/a)} \left[ \int_0^{c(1-x_1/a-x_2/b)} dx_3 \right] dx_2 \right] dx_1 \\ &= \int_0^a \left[ \int_0^{b(1-x_1/a)} c \left( 1 - \frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} \right) dx_2 \right] dx_1 \\ &= \int_0^a c \left[ \left( 1 - \frac{x_1}{a} \right) x_2 - \frac{1}{2} \frac{x_2^2}{b} \right]_0^{b(1-x_1/a)} dx_1 \\ &= \int_0^a \frac{bc}{2} \left( 1 - \frac{x_1}{a} \right)^2 dx_1 = \frac{bc}{2} \left[ -\frac{a}{3} \left( 1 - \frac{x_1}{a} \right) \right]_0^a = \frac{abc}{6}. \end{aligned}$$

Als Übungsaufgabe (vgl. Übungskapitel 8.4) berechne man das Integral von

$$f(x_1, x_2) = c \left( 1 - \frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} \right)$$

über dem Dreieck mit den Ecken  $O$ ,  $A$ ,  $B$  in der  $(x_1, x_2)$ -Ebene (vgl. wieder Abbildung 8.14) und interpretiere das Ergebnis.

## 8.2 Der Transformationssatz (Polarkoordinaten; Kugelkoordinaten; Zylinderkoordinaten)

Kann analog zur [Substitutionsregel](#) im Fall einer Funktion einer Variablen die Integration in bestimmten Situationen durch eine geeignete Transformation (d.h. durch eine geeignete [Koordinatentransformation](#)) vereinfacht werden?

Betrachtet seien dazu zwei offene Mengen  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  und eine Abbildung

$$g: U \rightarrow V, \quad U \ni \underline{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \mapsto g(\underline{\mathbf{u}}) = \underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in V.$$

Die Abbildung  $g$  sei ein [Diffeomorphismus](#), d.h. bijektiv und sowohl  $g$  als auch  $g^{-1}$  seien stetig differenzierbar.

Die sogenannte [Jacobische Funktionaldeterminante](#) ist für einen solchen Diffeomorphismus stets von Null verschieden, d.h. für alle  $\underline{\mathbf{u}} \in U$  gilt

$$\det Dg(\underline{\mathbf{u}}) = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial u_n} \end{pmatrix} \right| (\underline{\mathbf{u}}) \neq 0.$$

Unter diesen Voraussetzungen ist der [Transformationssatz](#) richtig:

**Satz 8.4.** TRANSFORMATIONSSATZ

Es sei  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $K \subset V$  sei *kompakt*. Dann gilt

$$\int_K f(\underline{\mathbf{v}}) \, dV(\underline{\mathbf{v}}) = \int_{g^{-1}(K)} f(g(\underline{\mathbf{u}})) |\det Dg(\underline{\mathbf{u}})| \, dV(\underline{\mathbf{u}}),$$

$$g^{-1}(K) := \{ \underline{\mathbf{u}} \in U : g(\underline{\mathbf{u}}) \in K \}.$$

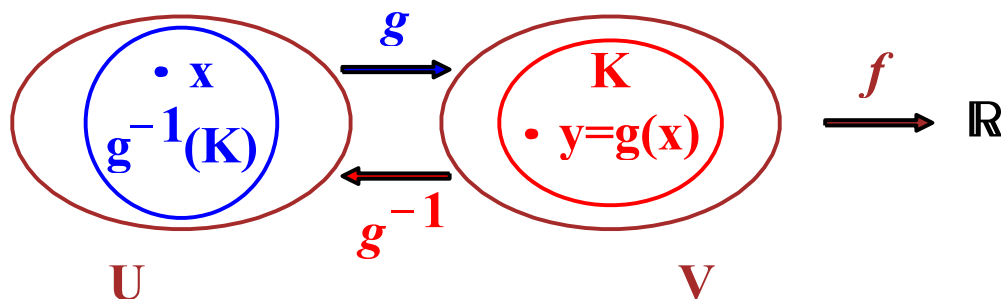


Abbildung 8.15: Zum Transformationssatz.

Die *Integrationsvariable* ist im Volumenelement angedeutet.

---

Satz 8.4 hat formal die gleiche Gestalt wie die Substitutionsregel im Fall  $n = 1$  (Teil II, Satz 6.6), wobei nun der **Betrag** der Jacobischen Funktionaldeterminante zu betrachten ist.

---

### Beispiele.

i) Im  $\mathbb{R}^2$  seien **Polarkoordinaten** betrachtet: Es ist

$$\underline{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \varphi < 2\pi,$$

sowie

$$\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Die Menge

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} : 0 < r < \infty, 0 < \varphi < 2\pi \right\}$$

ist offen, die Bildmenge

$$V = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 : x_2 \neq 0 \text{ falls } x \geq 0 \}$$

ist die „**aufgeschlitzte**“  $(x_1, x_2)$ -Ebene (vgl. Abbildung 8.16).

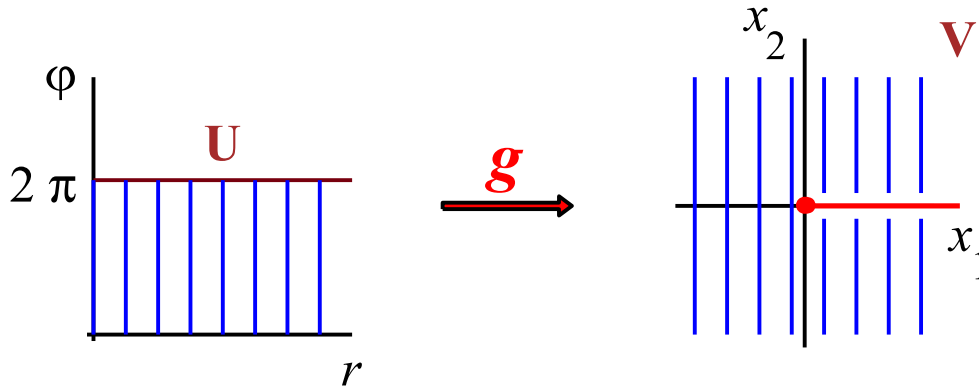


Abbildung 8.16: Polarkoordinaten im  $\mathbb{R}^2$ .

Die Funktionaldeterminante der Transformation  $g$  ist

$$|\det Dg| = \left| \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix} \right| = r \neq 0 .$$

ii) Es sei  $K = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \}$ . Gesucht ist

$$\int_K \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \, dV .$$

**Bemerkung.** Die Menge ***K*** ist nicht vollständig in der offenen Menge ***V*** aus i) enthalten, da die  $(x_1, x_2)$ -Ebene aufgeschnitten ist.

In  $V$  fehlt aber nur eine Menge mit „Volumen Null“, nämlich eine „Linie“, was die hier auftretenden Integrale nicht verändert (der Integrand ist beschränkt) und die folgenden Rechnungen rechtfertigt (vgl. Abbildung 8.17 für eine formal korrekte Argumentation).

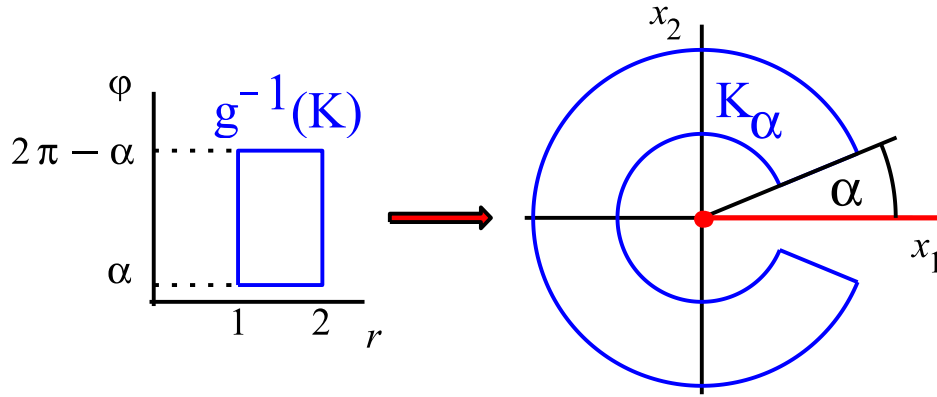


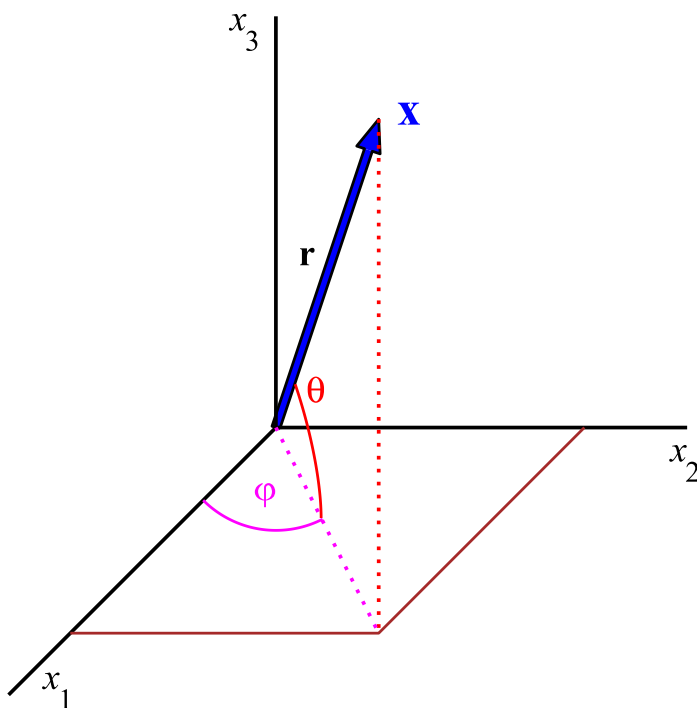
Abbildung 8.17: Formal wird die Menge  $K_\alpha$  betrachtet und zum Grenzübergang  $\alpha \rightarrow 0$  übergegangen.

Als Abbildung  $g: g^{-1}(K) \rightarrow K$  werden Polarkoordinaten eingeführt, und aus Satz 8.4 folgt

$$\begin{aligned} & \int_K \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \, dV(\underline{\mathbf{x}}) \\ &= \int_{g^{-1}(K)} \sqrt{r^2 \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi)} \, r \, dV(r, \varphi) \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_1^2 r^2 \, dr \right] d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{7}{3} \, d\varphi = \frac{14}{3} \pi. \end{aligned}$$

iii) Bei [Kugelkoordinaten](#) im  $\mathbb{R}^3$ : betrachtet man die Transformation:

$$\underline{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \xrightarrow{g} \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

Abbildung 8.18: Kugelkoordinaten im  $\mathbb{R}^3$ .

In obiger Notation ist

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} : r > 0, 0 < \varphi < 2\pi, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right\},$$

das Bild  $V$  ist der  $\mathbb{R}^3$  ohne die nicht-negative  $x_1$ -Achse und ohne die  $x_3$ -Achse.

Es gilt (Entwicklung nach der dritten Zeile, vgl. Teil II, Definition 2.1)

$$|\det Dg| = \left| \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\theta) & -r \sin(\varphi) \cos(\theta) & -r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \cos(\theta) & r \cos(\varphi) \cos(\theta) & -r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & 0 & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \right|,$$



und folglich

$$\begin{aligned}
 |\det Dg| &= \sin(\theta) (r^2 \sin^2(\varphi) \cos(\theta) \sin(\theta) + r^2 \cos^2(\varphi) \sin(\theta) \cos(\theta)) \\
 &\quad + r \cos(\theta) (r \cos^2(\varphi) \cos^2(\theta) + r \sin^2(\varphi) \cos^2(\theta)) \\
 &= \sin(\theta) r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + r \cos(\theta) r \cos^2(\theta) \\
 &= r^2 \cos(\theta) \neq 0 \quad \text{für } 0 < r, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

iv) Es seien

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

$$K = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}.$$

Mittels der Transformation auf Kugelkoordinaten folgt

$$\begin{aligned}
 \int_K \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \, dV(\underline{\mathbf{x}}) &= \int_0^1 \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} r r^2 \cos(\theta) \, d\varphi \right] d\theta \right] dr \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos(\theta) \, d\theta \right] dr \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 r^3 \, dr = \frac{\pi}{8}.
 \end{aligned}$$

**Bemerkung.** Oft sind auch *Zylinderkoordinaten* im  $\mathbb{R}^3$  (vgl. Übungskapitel 8.4) bzw. weitere einem konkreten Problem angepasste Koordinaten sehr hilfreich.

### 8.3 Uneigentliche Integrale (reguläre Ausschöpfung; kompakt enthalten; Figur; Konvergenzkriterium)

Wie im Fall  $n = 1$  (Teil II, Kapitel 6.4) sollen jetzt die **Restriktionen** „ $M$  beschränkte Menge“ und „ $f$  beschränkt“ **fallen gelassen werden**, die bisher immer vorausgesetzt waren.

Mit anderen Worten: Das **uneigentliche Integral**  $\int_{\Omega} f \, dV$  soll für **stetige Funktionen auf beliebigen offenen Mengen  $\Omega$**  (streng genommen auf offenen Normalbereichen) definiert werden.

**Erinnerung.** *Offene Mengen müssen nicht beschränkt sein, stetige Funktionen auf offenen Mengen müssen nicht beschränkt sein.*

#### Zwei typische Beispiele.

Völlig analog zu Teil II, Kapitel 6.4, vgl. insbesondere Abbildung 6.6, werden hier zwei exemplarische Situationen vorgestellt.

i) Es sei  $\Omega = \mathbb{R}^n$ .

Um  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx$  für geeignete  $f$  sinnvoll zu definieren, startet man mit den (offenen) Kugeln

$$B_k(\underline{\mathbf{0}}) = \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{\mathbf{x}}\| < k \} \subset \Omega .$$

Statt des nicht definierten Ausdrucks  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx$  betrachtet man für alle  $k \in \mathbb{N}$  das wohl definierte Integral  $\int_{B_k(\underline{\mathbf{0}})} f(x) \, dx$  und analysiert den Grenzwert  $k \rightarrow \infty$ .

ii) Es sei  $\Omega = B_1(\underline{\mathbf{0}}) - \{\underline{\mathbf{0}}\}$  und  $f$  in der Nähe von  $\underline{\mathbf{0}}$  evtl. nicht beschränkt.

Um  $\int_{\Omega} f(x) \, dx$  für geeignete  $f$  sinnvoll zu definieren, startet man hier mit den Mengen ( $0 < \varepsilon < 1$ )

$$T_{\varepsilon}(\mathbf{0}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < \|\mathbf{x}\| < 1 \} .$$

Statt des nicht-definierten Ausdrucks  $\int_{\Omega} f(x) \, dx$  betrachtet man für alle  $\varepsilon$  wie oben das wohl definierte Integral  $\int_{T_{\varepsilon}(\mathbf{0})} f(x) \, dx$  und analysiert den Grenzwert  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### Definition des uneigentlichen Integrals.

Zunächst benötigt man wie in den Beispielen motiviert

#### Definition 8.2. REGULÄRE AUSSCHÖPFUNG

Es seien  $M, M_1, M_2, \dots, M_j, \dots$  Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ .

Man nennt die Folge  $\{M_j\}$  eine *reguläre Ausschöpfung* von  $M$ , Notation:  $M_j \nearrow M$ , falls gilt

$$i) \quad \overline{M_j} \Subset \overset{\circ}{M}_{j+1} \text{ für alle } j \in \mathbb{N} ,$$

$$ii) \quad M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j .$$

Dabei bedeutet  $A \Subset B$  (Sprechweise:  $A$  *kompakt enthalten* in  $B$ ):  $A$  ist beschränkt und es gilt  $\overline{A} \subset B$ .

Man kann zeigen, dass für jede offene Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine reguläre Ausschöpfung  $F_j \nearrow \Omega$  durch sogenannte **Figuren**  $F_j$  (eine Figur ist die Vereinigung endlich vieler Zellen, die sich nicht überlappen) existiert.

Damit kann definiert werden:

**Definition 8.3.** UNEIGENTLICHES INTEGRAL

- i) Es sei  $\Omega$  eine offene Menge des  $\mathbb{R}^n$ ,  $f$  stetig auf  $\Omega$  und für *jede* reguläre Ausschöpfung  $M_j \nearrow \Omega$  von  $\Omega$  durch quadrierbare Mengen  $M_j$  sei die Folge der Zahlen  $\int_{M_j} f \, dV$  konvergent.

Dann heißt

$$\int_{\Omega} f(\underline{\mathbf{x}}) \, dV := \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{M_j} f(\underline{\mathbf{x}}) \, dV$$

das *uneigentliche Integral* von  $f$  über  $\Omega$ , das uneigentliche Integral existiert oder *konvergiert* in diesem Fall.

- ii) Das uneigentliche Integral heißt *absolut konvergent*, falls das Integral  $\int_{\Omega} |f(\underline{\mathbf{x}})| \, dV$  konvergiert.

**Bemerkungen.**

- i) Die Definition des uneigentlichen Integrals ist *unabhängig von der speziellen Wahl der Ausschöpfung*.
- ii) Die Definition ist konsistent mit den vorherigen Abschnitten.
- iii) Natürlich übertragen sich Eigenschaften wie die Linearität des Integrals sowie elementare Abschätzungen.

iv) Das uneigentliche Integral  $\int_{\Omega} f(\underline{\mathbf{x}}) \, dV$  konvergiert, falls es absolut konvergiert.

---

### Wie kann in der Praxis die Konvergenz des uneigentlichen Integrals nachgeprüft werden?

Dazu bedient man sich des folgenden Konvergenzkriteriums.

#### Satz 8.5. KONVERGENZKRITERIEN

Das uneigentliche Integral  $\int_{\Omega} f(\underline{\mathbf{x}}) \, dV$  einer stetigen Funktion  $f$  ist *genau dann absolut konvergent*, wenn es eine Konstante  $c \geq 0$  gibt, sodass

$$\int_M |f(\underline{\mathbf{x}})| \, dV \leq c$$

für alle (quadrierbaren) Mengen  $M \Subset \Omega$  gilt.

---

**Bemerkung.** Man vergleiche Satz 8.5 mit dem *Majorantenkriterium* respektive dem *Minorantenkriterium* aus Teil II, Satz 6.7.

---

Es sei beispielsweise

$$\Omega = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : |\underline{\mathbf{x}}| > 1\} .$$

Es sei weiter  $\alpha > 0$  fixiert,

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = |\underline{\mathbf{x}}|^{-\alpha} , \quad R > 1 , \quad \Omega_R := \Omega \cap B_R(0) .$$

Dann gilt (mithilfe der Transformation auf Kugelkoordinaten)

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_R} f(\underline{\mathbf{x}}) \, dV &= \int_{\Omega_R} |\underline{\mathbf{x}}|^{-\alpha} \, dV \\
 &= \int_1^R \left[ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{2\pi} r^{-\alpha} r^2 \cos(\theta) \, d\varphi \right] d\theta \right] dr \\
 &= 2\pi \int_1^R r^{2-\alpha} [\sin(\theta)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dr = 4\pi \int_1^R r^{2-\alpha} \, dr.
 \end{aligned}$$

Die rechte Seite wird beliebig groß, falls  $\alpha \leq 3$  ist, das uneigentliche Integral konvergiert in diesem Fall nicht.

Genau gesagt: Ist  $R_j = j$  und  $M_j = \Omega_{R_j}$ , so ist eine reguläre Ausschöpfung von  $\Omega$  gefunden, für die  $\int_{M_j} f(\underline{\mathbf{x}}) \, dV$  nicht konvergiert, das uneigentliche Integral ist nach Definition 8.3, *i*), nicht konvergent.

Ist  $\alpha > 3$ , so gilt

$$\int_{\Omega_R} f(\underline{\mathbf{x}}) \, dV = 4\pi \left[ \frac{1}{3-\alpha} r^{3-\alpha} \right]_1^R = \frac{4\pi}{\alpha-3} (1 - R^{3-\alpha}) < \frac{4\pi}{\alpha-3}.$$

Jede quadrierbare Menge  $M \Subset \Omega$  ist aber für hinreichend großes  $R$  in  $\Omega_R$  enthalten (quadrierbare Mengen sind per definitionem beschränkt), d.h. man hat

$$\int_M |f(\underline{\mathbf{x}})| \, dV \leq \frac{4\pi}{\alpha-3}$$

für jede quadrierbare Menge  $M \Subset \Omega$  im Fall  $\alpha > 3$ .

Nach Satz 8.5 ist in diesem Fall das uneigentliche Integral konvergent.

Zur Berechnung des Integrals reicht es nach Definition 8.3 dann, eine spezielle reguläre Ausschöpfung von  $\Omega$  zu betrachten (etwa  $M_j$  wie oben) und man erhält

$$\int_{\Omega} |\underline{\mathbf{x}}|^{-\alpha} \, dV = \frac{4\pi}{\alpha - 3} \, .$$

---





## 8.4 Übungsaufgaben zu Kapitel 8

**Aufgabe 1.** Definieren Sie analog zum Fall  $n = 1$ , was unter integrierbaren Funktionen über Zellen zu verstehen ist.

---

**Aufgabe 2.** Zu fixiertem  $\rho \geq 0$  sei  $f_\rho: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f_\rho(\underline{\mathbf{x}}) := \begin{cases} \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + x_2 + \rho)^3} & \text{für } \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}, \\ 0 & \text{für } \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}. \end{cases}$$

i) Rechnen Sie nach, dass für  $\rho > 0$

$$\int_0^1 \left[ \int_0^1 f_\rho(\underline{\mathbf{x}}) \, dx_1 \right] dx_2 = \int_0^1 \left[ \int_0^1 f_\rho(\underline{\mathbf{x}}) \, dx_2 \right] dx_1 = 0.$$

ii) Rechnen Sie nach, dass i) im Fall  $\rho = 0$  falsch ist.

Widerspricht das Satz 8.2?

---

**Aufgabe 3.** Es sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  von der Form

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = f_1(x_1)f_2(x_2),$$

wobei die Funktionen  $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $[a, b]$  bzw.  $[c, d] \subset \mathbb{R}$  seien.

Zeigen Sie ( $C := [a, b] \times [c, d]$ )

$$\int_C f(\underline{\mathbf{x}}) \, dV = \left[ \int_a^b f_1(x_1) \, dx_1 \right] \left[ \int_c^d f_2(x_2) \, dx_2 \right] .$$


---

#### Aufgabe 4.

i) Es seien

$$E_1^c = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 \geq 1 \right\}, \quad E_2 = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{9} + x_2^2 \leq 1 \right\},$$

$$Q = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0 \right\}, \quad M = E_1^c \cap E_2 \cap Q .$$

Skizzieren Sie  $M$  und berechnen Sie  $\int_M x_1 \, dV$ .

ii) Es sei

$$C = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \text{ und } x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \right\} .$$

Berechnen Sie

$$\int_C e^{x_3} \, dV .$$


---

#### Aufgabe 5. Es sei

$$M = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_1 \leq 2, \frac{1}{x_1} \leq x_2 \leq \frac{2}{x_1} \right\} .$$

Skizzieren Sie  $M$  und berechnen Sie

$$\int_M e^{-x_1 + \frac{1}{x_2}} \frac{1}{x_2^2} dV$$

**mithilfe der Transformation**

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u_1 \\ \frac{1}{u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} .$$


---

**Aufgabe 6.** Berechnen Sie das Volumen des Raumstücks im  $\mathbb{R}^3$ , welches den beiden Zylindern  $\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$  und  $\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_3^2 \leq 1\}$  gemeinsam ist.

---

**Aufgabe 7.** Nutzen Sie (modifizierte) Kugelkoordinaten,

$$x_1 = ar \cos(\varphi) \cos(\theta) , \quad x_2 = br \sin(\varphi) \cos(\theta) , \quad x_3 = cr \sin(\theta) ,$$

um das Trägheitsmoment  $\theta$  des Ellipsoids

$$E = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} \leq 1 \right\} , \quad a, b, c > 0 \text{ fixiert} ,$$

bzgl. der  $x_3$ -Achse zu berechnen,

$$\theta := \int_E (x_1^2 + x_2^2) dV(\underline{\mathbf{x}}) .$$


---

**Aufgabe 8.**

i) Es sei

$$M := \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq 1, 0 \leq x_2 - x_1 \leq 1 \right\},$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie  $M$  und berechnen Sie

$$\int_M \frac{2x_1 - x_2}{1 + (x_2 - x_1)} \, dV$$

**mithilfe der Transformation**

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u + v \\ 2u + 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

ii) Skizzieren Sie im  $\mathbb{R}^3$

$$G_1 := \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1 - x_3 \right\},$$

$$G_2 := \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 1 \right\}.$$

und berechnen Sie

$$\int_{G_1 \cap G_2} x_3 \, dV.$$

*Hinweis.* Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z)^T \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), z)^T$ .

---

**Aufgabe 9.** Es sei

$$\underline{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Weiterhin seien der Zylinder  $Z$ , die Ebene  $E$  und der Kegel  $K$  im  $\mathbb{R}^3$  gegeben durch

$$Z = \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1 \}, \quad E = \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \langle \underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{N}} \rangle = 2\sqrt{2}/\sqrt{3} \},$$

$$K = \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = x_3 \}.$$

Skizzieren Sie das von  $Z$ ,  $E$  und  $K$  eingeschlossene (beschränkte) Raumstück  $G$  und berechnen Sie sein Volumen. (Hinweis: Zylinderkoordinaten)

**Aufgabe 10.**

i) Es sei

$$\mathbb{R}^3 \supset M = B_1(\underline{\mathbf{0}}) - \{\underline{\mathbf{0}}\} = \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : 0 < |\underline{\mathbf{x}}| < 1 \}.$$

Zu fixiertem  $\alpha \in \mathbb{R}$  sei  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = |\underline{\mathbf{x}}|^{-\alpha}.$$

Finden Sie eine reguläre Ausschöpfung von  $M$  und zeigen Sie, für welche  $\alpha$  das uneigentliche Integral

$$\int_M f(\underline{\mathbf{x}}) \, dV$$

konvergiert.

Berechnen Sie das Integral, falls es konvergiert.

ii) Kann das Integral

$$\int_{\{\underline{x} \in \mathbb{R}^3: |\underline{x}| > 1\}} \frac{e^{|\underline{x}|}}{|\underline{x}|} dV$$

konvergieren?

---

# Kapitel 9

## Der Gaußsche Integralsatz

Der [Gaußsche Integralsatz](#) ist einer der zentralen Sätze der Analysis.

Es wird etwa im Verlaufe dieses Kapitels geklärt werden, wie eine [partielle Integration](#) im Falle von Funktionen mehrerer Veränderlicher zu verstehen ist.

Ebenso wird deutlich werden, warum die Divergenz eines Vektorfeldes ein Maß für [Quellen](#) und [Senken](#) ist (man vergleiche die Bemerkungen nach Definition 6.4).

Der Gaußsche Integralsatz in der Ebene kann mit den bisher bekannten Begriffen vorgestellt werden, zum Verständnis des Gaußschen Integralsatzes im  $\mathbb{R}^3$  sind hingegen einige geometrische Betrachtungen voranzustellen.

### 9.1 Der Gaußsche Integralsatz in der Ebene (positiv orientierter Rand; äußere Einheitsnormale; Fluss eines Vektorfeldes)

Im Fall einer Veränderlichen besagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Teil II, Satz 6.4), dass das bestimmte Integral einer Funktion  $f$  als Differenz der Funktionswerte einer Stammfunktion **in den Randpunkten** gegeben ist.

In diesem Paragraphen wird **ein zweidimensionales Integral über eine Divergenz als Integral über eine Randkurve** geschrieben werden, welches als [Flussintegral](#) zu interpretieren ist.

Zur Formulierung dieses Satzes ist noch eine Vorzeichenbedingung zu klären:

Ist  $M \subset \mathbb{R}^2$  ein Normalbereich etwa in  $x_2$ -Richtung (vgl. Definition 8.1), so kann **der Rand** von  $M$ , wie beispielhaft in Abbildung 9.1 angedeutet, durch eine stückweise glatte Kurve  $\gamma$  parametrisiert werden.

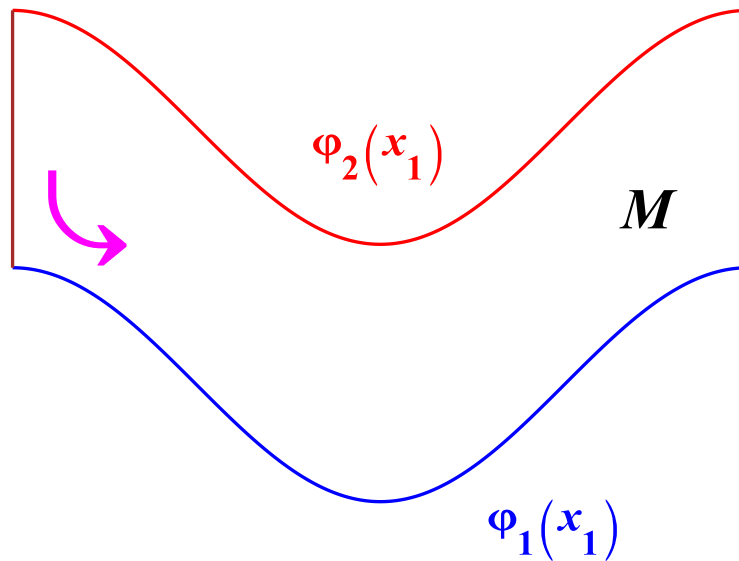


Abbildung 9.1: Der Rand  $\partial M$ .

Die Funktionen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  ergeben sich dabei aus der Bedingung „Normalbereich“.

Es wird stets angenommen, dass diese Kurve regulär ( $\gamma' \neq 0$  auf den Teilkurven) ist und dass sie so orientiert ist, dass  $M$  **beim Durchlaufen der Kurve zur Linken liege**, d.h.  $\partial M$  sei **positiv orientiert**.

---

### Ein Beispiel.

Die Idee, den Gaußschen Integralsatz aus dem Satz von Fubini (Satz 8.3) und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Teil II, Satz



6.4) abzuleiten, sei anhand des einfachsten Beispiels angedeutet:

Man betrachte das Quadrat  $Q := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$  und überlege sich, dass es von den Kurven (jeweils auf  $[0, 1]$  definiert)

$$\gamma^{(1)} : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{(2)} : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix},$$

$$\gamma^{(3)} : t \mapsto \begin{pmatrix} 1-t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{(4)} : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1-t \end{pmatrix}$$

positiv orientiert berandet wird.

Für ein glattes Vektorfeld

$$F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

ist nach den oben genannten Sätzen (mit der Notation  $F(\underline{x}) = F(x_1, x_2)$ )

$$\begin{aligned} \int_Q \frac{\partial F_2}{\partial x_1} dV &= \int_0^1 \left[ \int_0^1 \frac{\partial F_2}{\partial x_1} dx_1 \right] dx_2 \\ &= \int_0^1 [F_2(1, x_2) - F_2(0, x_2)] dx_2 \\ &= \int_{\gamma^{(2)}} \langle F, d\underline{x} \rangle + \int_{\gamma^{(4)}} \langle F, d\underline{x} \rangle. \end{aligned}$$

Analog berechnet sich

$$- \int_Q \frac{\partial F_1}{\partial x_2} dV = \int_{\gamma^{(1)}} \langle F, d\underline{x} \rangle + \int_{\gamma^{(3)}} \langle F, d\underline{x} \rangle.$$

Bezeichnet  $\gamma$  die aus  $\gamma^{(1)}$  bis  $\gamma^{(4)}$  zusammengesetzte stückweise glatte Kurve, so ist gezeigt

$$\int_Q \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dV = \int_\gamma \langle F, d\mathbf{x} \rangle .$$


---

**Satz 9.1.** GAUSSSCHER INTEGRALSATZ IN DER EBENE

*Es sei  $M \subset \mathbb{R}^2$  sowohl ein Normalbereich in  $x_1$ -Richtung als auch ein Normalbereich in  $x_2$ -Richtung.*

*Der Rand  $\partial M$  sei positiv orientiert, stückweise glatt und regulär.*

*Weiterhin sei  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld, welches auf einer offenen Obermenge  $U \supset M$  definiert ist.*

*Schreibt man  $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$  und ist  $\gamma$  wie oben, so folgt*

$$\int_M \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dV = \int_\gamma \langle F, d\mathbf{x} \rangle .$$


---

**Bemerkungen.**

- i) Nach Kapitel 7.1 hängt das Kurvenintegral auf der rechten Seite nicht von der speziellen Wahl der Parametrisierung ab.*
- ii) Der Gaußsche Integralsatz in der Ebene gilt auch für Greensche Bereiche, d.h. endliche Vereinigungen von Normalbereichen wie oben.*

*Dabei ist auf die Orientierung der einzelnen Randkurven zu achten (vgl. Abbildung 9.2).*

*Die Mengen  $M_1$  und  $M_2$  aus Abbildung 9.2 können formal auch weiter zerlegt werden, sodass sich Normalbereiche sowohl in  $x_1$ - als auch  $x_2$ -Richtung ergeben.*

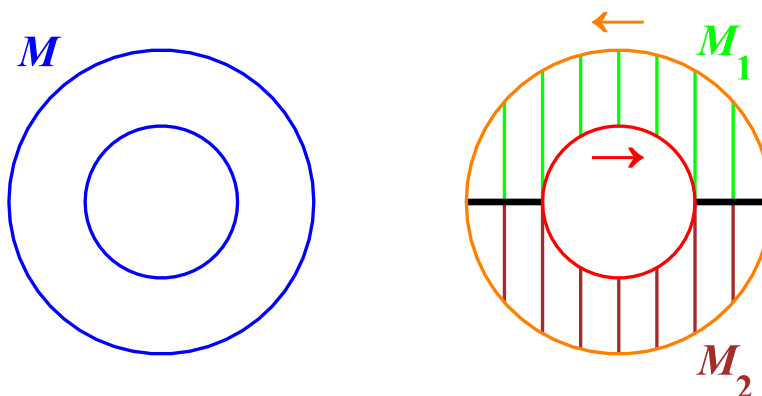


Abbildung 9.2: Zur Orientierung eines Greenschen Bereichs.

### Zwei Beispiele.

i) Es sei  $F(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ . Dann ist

$$\int_M \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dV = 2 \int_M dV = 2A(M),$$

wobei  $A(M)$  den Flächeninhalt von  $M$  bezeichne. Es folgt

$$A(M) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \langle F, d\underline{x} \rangle, \quad F = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

ii) Ist speziell  $M$  die Ellipse

$$M = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1 \right\}, \quad 0 \neq a, b \in \mathbb{R},$$

so ist

$$\gamma(t) := \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

eine Parametrisierung von  $\partial M$  wie in Satz 9.1 gefordert, d.h.

$$\begin{aligned} A(M) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -b \sin(t) \\ a \cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \sin(t) \\ b \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab \, dt = \pi ab. \end{aligned}$$

### **Bemerkungen zur Verallgemeinerung auf den Fall $n = 3$ .**

Es existiere eine reguläre  $C^1$ -Parametrisierung  $\gamma(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , des positiv orientierten Randes  $\partial M$ . Dann gilt

$$\begin{pmatrix} \gamma'_2(t) \\ -\gamma'_1(t) \end{pmatrix} \perp \gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \gamma'_2(t) \end{pmatrix}$$

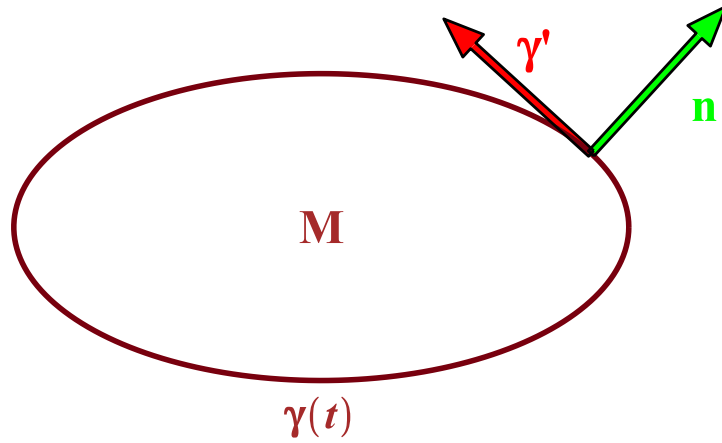
und man bezeichnet

$$\underline{\mathbf{n}}(t) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \begin{pmatrix} \gamma'_2(t) \\ -\gamma'_1(t) \end{pmatrix}$$

als die **äußere Einheitsnormale an  $\partial M$**  (zum Parameterwert  $t$ ).

Ist  $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld und setzt man

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} -F_2 \\ F_1 \end{pmatrix},$$


 Abbildung 9.3: Die äußere Einheitsnormale an  $\partial M$ .

so folgt aus dem Gaußschen Satz für  $\tilde{F}$ :

$$\begin{aligned}
 \int_M \operatorname{div} F \, dV &= \int_M \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right) dV = \int_M \left( \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial x_2} \right) dV \\
 &= \int_a^b \langle \tilde{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\
 &= \int_a^b \left( -F_2(\gamma(t))\gamma'_1(t) + F_1(\gamma(t))\gamma'_2(t) \right) dt \\
 &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \underline{n}(t) \rangle \|\gamma'(t)\| dt .
 \end{aligned}$$

Das Integral auf der rechten Seite heißt auch der **Fluss des Vektorfeldes  $F$  durch  $\partial M$** .

Man beachte, dass hier nur die **Komponente von  $F$  senkrecht zu  $\partial M$  zu berücksichtigen** ist.

In der obigen Form lässt sich Satz 9.1 auf den  $\mathbb{R}^3$  verallgemeinern, wozu jedoch zunächst ein kurzer Exkurs notwendig ist.

## 9.2 Flächen im $\mathbb{R}^3$ (Gebiet; zusammenhängend; Parameterdarstellung einer Fläche; Kurven auf Flächen; Tangentialebene; Normaleneinheitsvektor; Oberflächeninhalt; Oberflächenintegral)

In Kapitel 8.1 wurde bemerkt, dass man im  $\mathbb{R}^2$  über quadrierbare Mengen integrieren kann und das Riemannsche Integral wurde zumindest für Normalbereiche mithilfe von Satz 8.3 definiert.

Nach einer kurzen Diskussion [zweidimensionaler](#) (im Allgemeinen nicht-ebene) [Flächen im  \$\mathbb{R}^3\$](#)  wird in diesem Abschnitt das [Oberflächenintegral](#) eingeführt, um damit den Gaußschen Integralsatz im  $\mathbb{R}^3$  formulieren zu können.

Es sei im Folgenden  $U \subset \mathbb{R}^2$  stets ein [Gebiet](#), das bedeutet  $U$  sei nicht leer, offen und  $U$  sei [bogenweise zusammenhängend](#).

Bogenweise zusammenhängend wiederum bedeutet, dass je zwei Punkte aus  $U$  durch eine stetige Kurve verbunden werden können, die [vollständig in  \$U\$](#)  verläuft.

Die typische Vorstellung ist in den Abbildung 9.4 und 9.5 angedeutet.

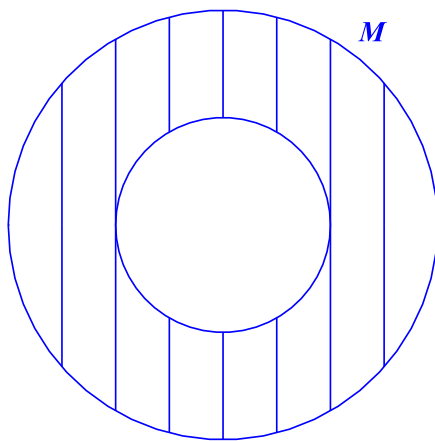
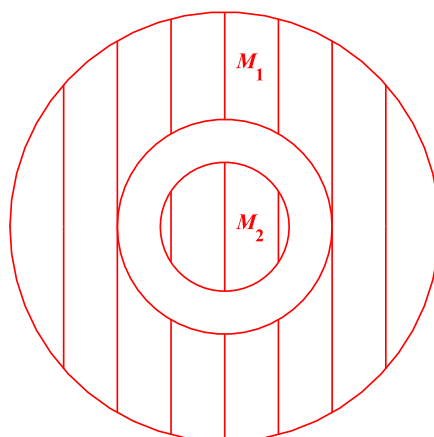


Abbildung 9.4:  $M$  ist bogenweise zusammenhängend.

Abbildung 9.5:  $M := M_1 \cup M_2$  ist nicht bogenweise zusammenhängend.

Mit diesen Vorbereitungen wird eine Fläche im  $\mathbb{R}^3$  nun als Punktmenge eingeführt (vgl. Bemerkung *i*) unten)

**Definition 9.1.** FLÄCHE IM  $\mathbb{R}^3$

Es sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  ein quadrierbares<sup>1</sup> Gebiet und  $X: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\bar{U} \ni \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mapsto X(\underline{u}) = \begin{pmatrix} X_1(\underline{u}) \\ X_2(\underline{u}) \\ X_3(\underline{u}) \end{pmatrix},$$

eine *injektive* Abbildung der Klasse  $C^1$ . Ferner habe die Jacobi-Matrix

$$DX = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial u_1} & \frac{\partial X_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial u_1} & \frac{\partial X_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial X_3}{\partial u_1} & \frac{\partial X_3}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

<sup>1</sup>Auf Begriff „quadrierbar“ soll auch hier nicht näher eingegangen werden. Man stelle sich ein hinreichend glatt berandetes Gebiet vor.

überall den *maximalen Rang 2*.

Dann heißt die Punktmenge

$$\mathbb{R}^3 \ni S = \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \underline{\mathbf{x}} = X(\underline{\mathbf{u}}), \underline{\mathbf{u}} \in U \}$$

eine (*reguläre, eingebettete*) Fläche im  $\mathbb{R}^3$ .

Der *Rand* von  $S$  ist

$$\partial S = \{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \underline{\mathbf{x}} = X(\underline{\mathbf{u}}), \underline{\mathbf{u}} \in \partial U \} .$$


---

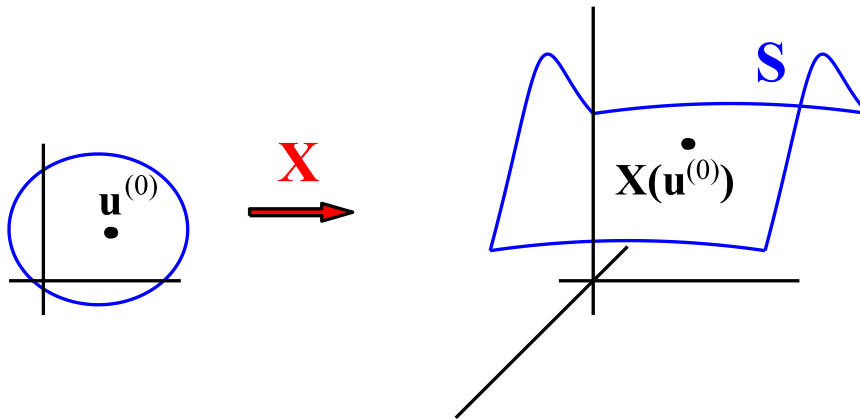


Abbildung 9.6: Eine zweidimensionale Fläche im  $\mathbb{R}^3$ .

### Bemerkungen.

- i) Analog zur Definition einer Kurve wird meist die *Abbildung*  $X$  als Fläche bezeichnet,  $S$  ist die Spur der Abbildung.

Die Abbildung  $X$  heißt auch eine *Parameterdarstellung* von  $S$ .

Ebenso analog definiert man den Rand als Kurve

$$X|_{\partial U} : \underline{\mathbf{u}} \in \partial U \mapsto X(\underline{\mathbf{u}}) .$$



*Zugunsten einer einfachen und übersichtlichen Darstellung wird dieser Unterschied hier allerdings ignoriert, d.h.  $X$  und  $S$  werden identifiziert.*

*Zu beachten ist aber: Es gibt unterschiedliche Parameterdarstellungen einer Fläche  $S$  (vgl. auch Parametertransformationen für Kurven)*

*ii) Differenzierbarkeit wurde nur für offene Mengen definiert.*

*Eine Abbildung der Klasse  $C^1$  auf der abgeschlossenen Menge  $\bar{U}$  ist definiert und stetig differenzierbar auf einer offenen Obermenge  $O \supset U$  (Notation hier:  $C^1(\bar{U}, \mathbb{R}^3)$ ).*

*iii) In Definition 9.1 wird eigentlich ein „Flächenstück“ definiert. Im Allgemeinen können Flächen aus vielen Flächenstücken bestehen und in der Regel ist es nicht möglich, eine Fläche komplett mit einer Parametrisierung zu beschreiben. Auch darauf wird an dieser Stelle nicht weiter eingegangen.*

### **Beispiel: Zweidimensionale Sphäre im $\mathbb{R}^3$ .**

Eine Sphäre in  $\mathbb{R}^3$  kann wie folgt parametrisiert sein:

Zu fixiertem  $r > 0$  sei

$$X(\underline{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} r \cos(u_1) \cos(u_2) \\ r \sin(u_1) \cos(u_2) \\ r \sin(u_2) \end{pmatrix},$$

$$U = \left\{ \underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2, 0 < u_1 < 2\pi, -\frac{\pi}{2} < u_2 < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Es ist

$$DX = \begin{pmatrix} -r \sin(u_1) \cos(u_2) & -r \cos(u_1) \sin(u_2) \\ r \cos(u_1) \cos(u_2) & -r \sin(u_1) \sin(u_2) \\ 0 & r \cos(u_2) \end{pmatrix},$$

die Matrix hat vollen Rang 2.

### Beispiel: Graphen im $\mathbb{R}^3$ .

Graphenflächen im  $\mathbb{R}^3$  sind in Kapitel 6.1 ausführlich vorgestellt.

Ist  $U \subset \mathbb{R}^2$  eine offene Menge und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  von der Klasse  $C^1$ , so ist mit den obigen Bezeichnungen:

$$S = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ f(u_1, u_2) \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{u}} \in U \right\},$$

die Abbildungsvorschrift für die Abbildung  $X$  lautet für die Graphenfläche

$$\underline{\mathbf{u}} \mapsto X(\underline{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ f(u_1, u_2) \end{pmatrix}.$$

Da die Jacobi-Matrix

$$DX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u_1} & \frac{\partial f}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

in diesem Fall immer den Rang 2 hat, ist eine  $C^1$ -Graphenfläche grundsätzlich regulär.

### Tangentialebene und Normale.

Es sei nun eine Fläche  $S$  wie in Definition 9.1 gegeben. Weiterhin sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow U$  eine reguläre, glatte Kurve in  $U$ . Dann ist

$$c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c := X \circ \gamma,$$

eine reguläre, glatte **Kurve auf der Fläche  $S$** .

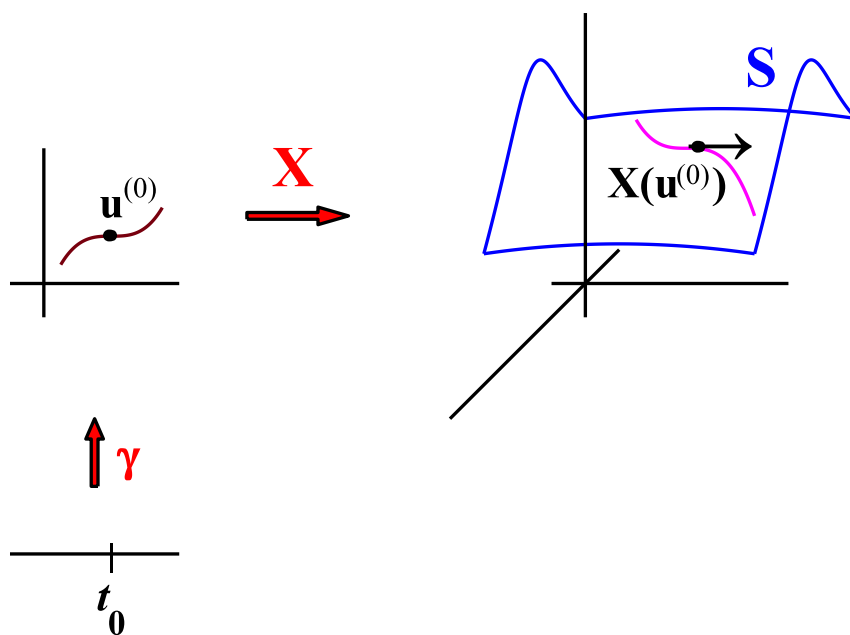


Abbildung 9.7: Eine Kurve auf  $S$ .

Man betrachte einen Punkt  $\underline{\mathbf{u}}^{(0)} \in U$  und ein  $t_0 \in (a, b)$  mit

$$\gamma(t_0) = \underline{\mathbf{u}}^{(0)}, \quad X(\gamma(t_0)) = X(\underline{\mathbf{u}}^{(0)}) = c(t_0).$$

Nach der Kettenregel gilt

$$c'(t_0) = X_{u_1}(\underline{\mathbf{u}}^{(0)})\gamma_1'(t_0) + X_{u_2}(\underline{\mathbf{u}}^{(0)})\gamma_2'(t_0)$$

mit der Vereinbarung:

$$X_{u_i}(\underline{\mathbf{u}}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial u_i} \\ \frac{\partial X_2}{\partial u_i} \\ \frac{\partial X_3}{\partial u_i} \end{pmatrix}(\underline{\mathbf{u}}), \quad i = 1, 2.$$

Der Vektor  $c'(t_0)$  gibt die Richtung der Tangente an die Kurve  $c$  auf der Fläche  $S$  im Punkt  $c(t_0)$ .

Alle solchen **Tangentenvektoren** bestimmen die **Tangentialebene**  $T_{\underline{\mathbf{u}}}X$ .

Da  $X_{u_1}$  und  $X_{u_2}$  nach Voraussetzung linear unabhängig sind, ist  $T_{\underline{\mathbf{u}}^{(0)}}X$  tatsächlich eine Ebene:

$$T_{\underline{\mathbf{u}}^{(0)}}X = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \underline{\mathbf{x}} = \lambda X_{u_1}(\underline{\mathbf{u}}^{(0)}) + \mu X_{u_2}(\underline{\mathbf{u}}^{(0)}), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

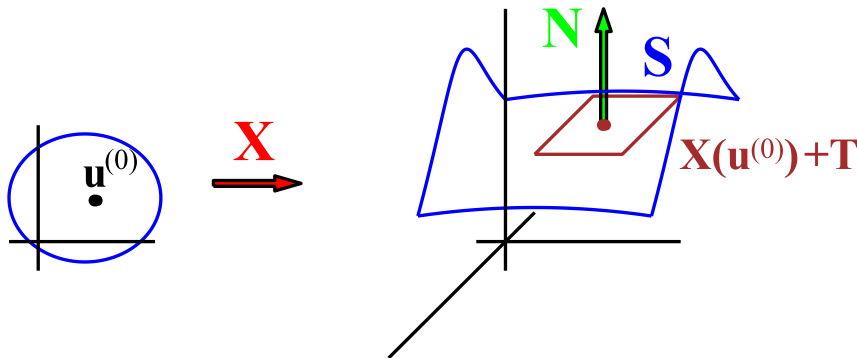


Abbildung 9.8: Normale und Tangentialebene.

**Senkrecht zur Tangentialebene** hat man

**Definition 9.2.** NORMALE

Es seien  $S$  bzw.  $X$  wie in Definition 9.1 gegeben.

Dann heißt

$$N(\underline{\mathbf{u}}) = \frac{X_{u_1}(\underline{\mathbf{u}}) \times X_{u_2}(\underline{\mathbf{u}})}{\|X_{u_1}(\underline{\mathbf{u}}) \times X_{u_2}(\underline{\mathbf{u}})\|}, \quad \underline{\mathbf{u}} \in U,$$

*Normalen(einheits-)vektor* der Fläche in  $X(\underline{\mathbf{u}})$  bzw. zum Parameterwert  $\underline{\mathbf{u}}$ .

**Bemerkung.** Streng genommen muss unterschieden werden, ob  $N$  (und analog die Tangentialebene) als Funktion von  $\underline{\mathbf{u}}$  angesehen wird ( $N: U \rightarrow B_1(0)$ ) oder ob man sich die Normale  $N$  als Vektor auf der Fläche vorstellt.

Ohne auf formale Details einzugehen (und mit nicht ganz korrekter Notation) wird hier  $N$  als Symbol für beide Situationen benutzt (formal ist bei den folgenden Oberflächenintegralen  $N$  zu ersetzen durch  $\tilde{N}(\underline{\mathbf{x}}) = N \circ X^{-1}(\underline{\mathbf{x}})$ , insbesondere gilt dann  $\tilde{N}(X(\underline{\mathbf{u}})) = N(\underline{\mathbf{u}})$ ).

### Beispiel: Zweidimensionale Sphäre im $\mathbb{R}^3$ .

Für die Sphäre betrachte man wieder

$$X(\underline{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} r \cos(u_1) \cos(u_2) \\ r \sin(u_1) \cos(u_2) \\ r \sin(u_2) \end{pmatrix}.$$

Damit berechnet man

$$X_{u_1} \times X_{u_2} = \begin{pmatrix} r^2 \cos(u_1) \cos^2(u_2) \\ r^2 \sin(u_1) \cos^2(u_2) \\ r^2 \sin(u_2) \cos(u_2) \end{pmatrix}, \quad \|X_{u_1} \times X_{u_2}\| = r^2 \cos(u_2),$$

also ist  $N(\underline{\mathbf{u}})$  der (radiale Vektor)

$$N(\underline{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} \cos(u_1) \cos(u_2) \\ \sin(u_1) \cos(u_2) \\ \sin(u_2) \end{pmatrix}.$$

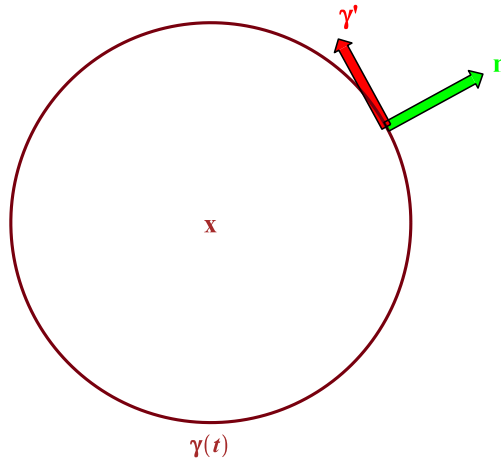


Abbildung 9.9: Einheitsnormale an die Sphäre.

In einem Punkt  $\underline{\mathbf{x}}$  einer Kreislinie zeigt der Normalenvektor radial nach außen und damit in Richtung von  $\underline{\mathbf{x}}$  (vgl. Abbildung 9.9), ganz analog gilt für einen Punkt auf der Sphäre

$$N(\underline{\mathbf{u}}) \sim X(\underline{\mathbf{u}}).$$

**Beispiel: Graphen im  $\mathbb{R}^3$ .**

Ist  $f$  wie oben und

$$X(\underline{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ f(u_1, u_2) \end{pmatrix},$$

so berechnet man

$$N(\underline{\mathbf{u}}) = \frac{1}{1 + |\nabla f|^2} \begin{pmatrix} -f_{u_1} \\ -f_{u_2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Erinnerung.** Die Ausdrücke  $f_{u_1}$  und  $f_{u_2}$  bezeichnen wieder die partiellen Ableitungen von  $f$  nach  $u_1$  bzw. nach  $u_2$ .

---

**Oberflächeninhalt und Oberflächenintegral.**

Mit diesen Werkzeugen kann der (Ober-) Flächeninhalt einer zweidimensionalen Fläche im  $\mathbb{R}^3$  gemessen werden bzw. das Oberflächenintegral eingeführt werden:

**Definition 9.3.** OBERFLÄCHENINHALT

Es seien  $X, S$  wie oben. Dann heißt

$$A(S) := \int_U \|X_{u_1}(\underline{\mathbf{u}}) \times X_{u_2}(\underline{\mathbf{u}})\| \, dV$$

der Oberflächeninhalt von  $S$ .

---

**Bemerkung.** Hier ist die Unabhängigkeit der Definition von der speziellen Parametrisierung zu überprüfen (Transformationssatz).

**Beispiel.** Der Oberflächeninhalt der Sphäre vom Radius  $r$  errechnet sich nach obiger Definition im Einklang mit der Elementargeometrie zu

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_U r^2 \cos(u_2) \, dV \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} \left[ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(u_2) \, du_2 \right] du_1 \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} 2 \, du_1 = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

Nachdem der Oberflächeninhalt definiert ist, kann im nächsten Schritt das Oberflächenintegral einer auf  $S$  definierten Funktion  $h$  definiert werden.

Integriert wird dabei über eine zweidimensionale Fläche im  $\mathbb{R}^3$  und das Integral unterscheidet sich grundsätzlich von einem Integral über Zellen bzw. Normalbereiche.

Die Idee ist, die Abbildung  $X$  zu nutzen, um das Integral auf ein Integral über Normalbereich (allgemeiner quadrierbare Menge) zurückzuführen.

**Definition 9.4.** OBERFLÄCHENINTEGRAL

Es seien  $X, S$  wie oben. Weiterhin sei  $h: \mathbb{R}^3 \supset S \rightarrow \mathbb{R}$  stetig auf  $S$ . Dann heißt

$$\int_S h \, dA := \int_U h(X(\underline{\mathbf{u}})) \|X_{u_1}(\underline{\mathbf{u}}) \times X_{u_2}(\underline{\mathbf{u}})\| \, dV$$

das Oberflächenintegral von  $h$  über  $S$ .

---



**Beispiel.** Man betrachte wieder die Kugel und  $h(\underline{x}) = x_1^2$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \int_S h \, dA &= \int_U r^2 \cos^2(u_1) \cos^2(u_2) \, r^2 \cos(u_2) \, dV \\ &= r^4 \int_0^{2\pi} \left[ \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3(u_2) \, du_2}_{=[\sin(u_2) - \frac{1}{3} \sin^3(u_2)]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4/3} \right] \cos^2(u_1) \, du_1 \\ &= \frac{4}{3} r^4 \left[ \frac{1}{2} (\sin(u_1) \cos(u_1) + u_1) \right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi r^4. \end{aligned}$$

### 9.3 Der Gaußsche Integralsatz im $\mathbb{R}^3$ (äußere Einheitsnormale; Massenfluss; Kontinuitätsgleichung; partielle Integration)

Im Folgenden sei  $M$  ein Normalbereich im  $\mathbb{R}^3$  (projizierbar in  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$ -Richtung) mit **äußerer Einheitsnormalen**  $N$  an  $\partial M$  („zeigt aus  $M$  heraus“).

Der Rand von  $M$  sei eine **Vereinigung von endlich vielen Flächenstücken nach Definition 9.1** (Beispiel Würfel: Abbildung 9.10).

Endliche Vereinigungen solcher Normalbereiche können wieder „stückweise“ untersucht werden.

#### Beispiele.

i) Es sei an Abbildung 9.8 erinnert.

ii) Man betrachte den Würfel

$$M := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_i \leq 1, \, i = 1, 2, 3 \}.$$

Die äußere Normale an  $\partial M$  ist in Abbildung 9.10 angedeutet.

Ähnlich wie in Kapitel 9.1 folgt:

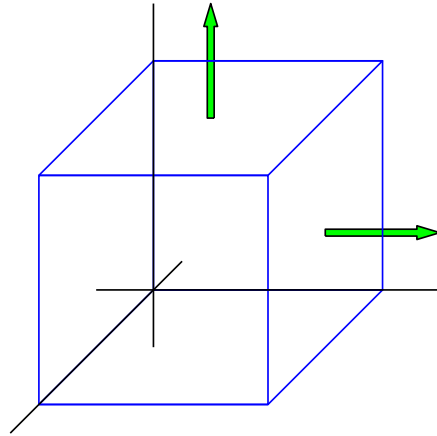


Abbildung 9.10: Äußere Einheitsnormale an den Würfel.

**Satz 9.2.** GAUSSSCHER INTEGRALSATZ IM  $\mathbb{R}^3$ 

Es seien  $M$ ,  $\partial M$  und  $N$  wie oben und  $F: G \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $G$  offen,  $M \subset G$ , ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

Dann gilt

$$\int_M \operatorname{div} F \, dV = \int_{\partial M} \langle F, N \rangle \, dA .$$


---

**Beispiel: Volumen einer Kugel.**

Es sei  $M = B_r(\underline{0})$  die Kugel vom Radius  $r > 0$  um den Nullpunkt.

Mit der obigen Parametrisierung  $X(\underline{u})$  von  $\partial B_r(\underline{0})$  ist bereits nachgerechnet

$$N(\underline{u}) = \begin{pmatrix} \cos(u_1) \cos(u_2) \\ \sin(u_1) \cos(u_2) \\ \sin(u_2) \end{pmatrix} , \quad \|X_{u_1} \times X_{u_2}\| = r^2 \cos(u_2) .$$

Man betrachte weiter das Vektorfeld  $F(\underline{x}) = \underline{x}$ , d.h.  $\operatorname{div} F \equiv 3$ .

Dann gilt

$$F(X(\underline{\mathbf{u}})) = \begin{pmatrix} r \cos(u_1) \cos(u_2) \\ r \sin(u_1) \cos(u_2) \\ r \sin(u_2) \end{pmatrix}, \quad \langle F(X(\underline{\mathbf{u}})), N(\underline{\mathbf{u}}) \rangle = r.$$

Also folgt

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_r(\underline{\mathbf{0}})} F \cdot N \, dA &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r r^2 \cos(u_2) \, du_2 \right] du_1 \\ &= 4\pi r^3. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\int_{B_r(\underline{\mathbf{0}})} \operatorname{div} F \, dV = 3V,$$

wobei  $V$  das Volumen der Kugel bezeichne. Nach dem Gaußschen Integralsatz im  $\mathbb{R}^3$  gilt somit

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

---

**Beispiel:** Massenerhaltung in der Fluid-Mechanik.

Man betrachte eine strömende Flüssigkeit in drei Raumdimensionen.

Die gebräuchliche Notation lautet:

$\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$  : Räumliche Variable;

$t \in [0, \infty)$  : Zeit;

$v = v(\underline{\mathbf{x}}, t) = \begin{pmatrix} v_1(\underline{\mathbf{x}}, t) \\ v_2(\underline{\mathbf{x}}, t) \\ v_3(\underline{\mathbf{x}}, t) \end{pmatrix}$  : Geschwindigkeitsfeld der Flüssigkeit;

$\rho = \rho(\underline{\mathbf{x}}, t)$  : Massendichte („Masse pro Volumen“.

Man betrachte weiter ein beliebiges „Testvolumen“  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .

Dann gilt

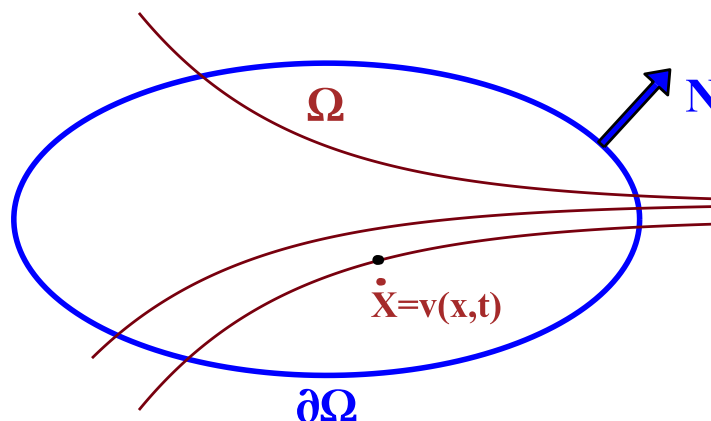
Massenänderung in  $\Omega$  = Massenfluss durch  $\partial\Omega$ , d.h.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial \rho(\underline{\mathbf{x}}, t)}{\partial t} dV &= - \underbrace{\int_{\partial\Omega} \langle \rho(\underline{\mathbf{x}}, t) v(\underline{\mathbf{x}}, t), N \rangle dA}_{\text{Fluß des Vektorfeldes } \rho v \text{ durch } \partial\Omega} \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} (\rho(\underline{\mathbf{x}}, t) v(\underline{\mathbf{x}}, t)) dx . \end{aligned}$$

Hier ist die Divergenz bzgl. der räumlichen Variablen zu interpretieren.

Da  $\Omega$  beliebig gewählt werden kann folgt („relativ leicht“) als [Kontinuitätsgleichung](#):

$$\frac{\partial \rho(\underline{\mathbf{x}}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho(\underline{\mathbf{x}}, t) v(\underline{\mathbf{x}}, t)) = 0 .$$


 Abbildung 9.11: Trajektorie  $t \mapsto X(t) \in \mathbb{R}^3$ .

Ist die Flüssigkeit **inkompressibel** mit  $\rho(\underline{x}, t) = \textit{konstant}$ , so reduziert sich die Kontinuitätsgleichung auf

$$\operatorname{div} v(\underline{x}, t) = 0 .$$

### Beispiel: Partielle Integration.

Die Voraussetzungen aus Satz 9.2 seien erfüllt und es seien  $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar auf  $\overline{M}$ .

Als Vektorfeld  $F$  wähle man zunächst

$$F(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f(\underline{x})g(\underline{x}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

es gilt also

$$\operatorname{div} F(\underline{x}) = D_1(f(\underline{x})g(\underline{x})) = (D_1 f(\underline{x}))g(\underline{x}) + f(\underline{x})D_1 g(\underline{x}) .$$

Ist

$$N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}$$

die äußere Einheitsnormale an  $\partial M$ , so folgt

$$\int_M \left( (D_1 f(\underline{\mathbf{x}}))g(\underline{\mathbf{x}}) + f(\underline{\mathbf{x}})D_1 g(\underline{\mathbf{x}}) \right) dV = \int_{\partial M} f g N_1 dA .$$

Für die anderen Komponenten wird analog argumentiert und man erhält

$$\int_M f(D_i g) dV = - \int_M (D_i f)g dV + \int_{\partial M} f g N_i dA , \quad i = 1, 2, 3 .$$

---

### Interpretation des Gaußschen Integralsatzes

Es sei  $F$  ein Vektorfeld im  $\mathbb{R}^3$  mit  $\operatorname{div} F \equiv 0$ .

Es sei weiter  $B = B_r(\underline{\mathbf{x}}) \subset \mathbb{R}^3$  eine beliebige Kugel um irgendeinen fixierten Punkt  $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ .

Für den Fluß  $\int_{\partial B} \langle F, N \rangle dA$  des Vektorfeldes  $F$  durch die Sphäre  $\partial B$  (den Rand der Kugel) gilt nach dem Gaußschen Integralsatz

$$\int_{\partial B} \langle F, N \rangle dA = \int_B \operatorname{div} F dV = 0 .$$

In der Summe fließt ebenso viel in die Kugel herein wie herausfließt, man bezeichnet  $F$  als **quellenfrei**.

---

## 9.4 Übungsaufgaben zu Kapitel 9

**Aufgabe 1.** in *i)* bzw. *ii)* sei  $M \subset \mathbb{R}^2$  sei der von  $\gamma$  berandete Normalbereich,  $\gamma$  die aus  $\gamma^{(1)}$ ,  $\gamma^{(2)}$  und  $\gamma^{(3)}$  zusammengesetzte stückweise glatte Kurve.

Fertigen Sie jeweils eine Skizze an (Orientierung des Randes von  $M$  andeuten) und berechnen Sie den Flächeninhalt von  $M$  mithilfe des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene.

*i)* Es seien

$$\gamma^{(1)} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t^3 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^{(2)} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t - 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^{(3)} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 1 - t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*ii)* Es seien

$$\gamma^{(1)} : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^{(2)} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 2 - t \\ t \end{pmatrix},$$

$$\gamma^{(3)} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 1 - t \\ (1 - t)^2 \end{pmatrix}.$$


---

**Aufgabe 2.** Im  $\mathbb{R}^3$  sei  $M$  der Normalbereich mit Rand  $\partial M = S^{(1)} \cup S^{(2)}$ .

Die Flächen  $S^{(1)}$ ,  $S^{(2)}$  seien hierbei gegeben durch die Parametrisierungen

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mapsto X^{(1)}(\underline{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} u_2 \cos(u_1) \\ u_2 \sin(u_1) \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad 0 < u_1 < 2\pi, \quad 0 < u_2 < 1,$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mapsto X^{(2)}(\underline{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} u_2 \cos(u_1) \\ u_2 \sin(u_1) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 0 < u_1 < 2\pi, \quad 0 < u_2 < 1.$$

Mit  $N$  sei der **äußere Normaleneinheitsvektor** an  $\partial M$  bezeichnet.

Fertigen Sie eine Skizze an und berechnen Sie für das Vektorfeld  $F(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{x}}$

$$\int_{\partial M} \langle F, N \rangle \, dA.$$


---



# Literaturverzeichnis

- [AORS1] Ansorge, R., Oberle, H.J., Rothe, K., Sonar, Th.; Mathematik für Ingenieure 1 u. 2. 4. erweiterte Auflage, Wiley-VCH, Weinheim, 2010.
- [AORS2] Ansorge, R., Oberle, H.J., Rothe, K., Sonar, Th., Aufgaben und Lösungen zu Mathematik für Ingenieure 1 u. 2. Wiley-VCH, Weinheim, 2010.
- [Ba] Bärwolff, G.; Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure. 2. erweiterte Auflage, Spektrum-Elsevier, München 2005.
- [Br] Braun, R., Meise, R., Analysis mit Maple. 2.Auflage, Vieweg u. Teubner, Wiesbaden 2012.
- [BHW] Burg, K., Haf, H., Wille, F.; Höhere Mathematik für Ingenieure. I - V. Teubner/Vieweg-Teubner.
- [Di] Dirschmid, H.J.; Mathematische Grundlagen der Elektrotechnik. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1990.
- [Fi] Fischer, G.; Lineare Algebra. 17. Auflage, Vieweg u. Teubner, Wiesbaden 2010.
- [HSZ] Hackbusch, W.; Schwarz, H.R., Zeidler, E.; Teubner-Taschenbuch der Mathematik. Teubner, Wiesbaden 2003.
- [Hi1] Hildebrandt, S.; Analysis 1. Springer, Berlin/Heidelberg 2002.
- [Hi2] Hildebrandt, S.; Analysis 2. Springer, Berlin/Heidelberg 2003.
- [HMV1] Hoffmann, A., Marx, B., Vogt, W.; Mathematik für Ingenieure 1. Pearson, München 2005. eBook: ISBN: PDF-978-3-8273-7113-3

- [HVM2] Hoffmann, A., Marx, B., Vogt, W.; Mathematik für Ingenieure 2. Pearson, München 2006. eBook: ISBN: PDF-978-3-8273-7114-0
- [spektrum] Lexikon der Mathematik, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2001.
- [Pa] Papula, L.; Mathematik für Chemiker. Enke, 1991.
- [PaW] Pavel, W., Winkler, R.; Mathematik für Naturwissenschaftler. Pearson, 2007.
- [Re] Reinsch, E.A.; Mathematik für Chemiker. Teubner, 2004.
- [Ro] Rösch, N.; Mathematik für Chemiker. Springer, 1993.
- [We] Westermann, Th., Ingenieurmathematik kompakt mit Maple. Springer online.
- [FJ] Zachmann, H.G., Jüngel, A.; Mathematik für Chemiker. Wiley, 2007.

# Index

- Äquivalenzrelation, 187
- ähnliche Matrizen, 75
- äußere Einheitsnormale, 238
- Ableitung, 131
  - Differential, 141
  - Funktionalmatrix, 141
  - Gradient, 131
  - höherer Ordnung, 147
  - Jacobi-Matrix, 141
  - Kettenregel, 142
  - Nabla-Operator, 131, 136
  - partielle, 127
  - Richtungsableitung, 136
  - vertauschbar, 147
- algebraische Vielfachheit, 72
- allgemeine Lösung, 18, 26, 52, 54
- Anfangswertproblem, 9, 12
  - Eindeutigkeit, 13
  - Existenz, 13
- Ansatz nach der rechten Seite, 31
- aperiodischer Grenzfall, 42
- Bewegungsgleichung, 9
- Binormalenvektor, 121
- Bogenlänge, 118
- Brachystochronenproblem, 111
- Cavalierisches Prinzip, 210
- charakteristische Gleichung, 21
- charakteristisches Polynom, 67
- definit
  - negativ, 155
  - positiv, 154
- diagonalisierbare Matrix, 68, 74
- Diffeomorphismus, 217
- Differential, 141
- Differentialgleichung, 7
  - allgemeine Lösung, 18, 26, 52, 54
  - Anfangswertproblem, 9, 12
  - Ansatz nach der rechten Seite, 31
  - charakteristische Gleichung, 21
  - explizite, 11
  - Fundamentalmatrix, 55
  - Fundamentalsystem, 18, 52
  - gewöhnliche, 7, 11
  - homogene, 11, 14
  - homogenes System, 51
  - implizite, 11
  - inhomogene, 11
  - konstante Koeffizienten, 20
  - Lösung, 11
  - lineare, 11
  - Ordnung, 11
  - partielle, 12
  - rechte Seite, 14
  - Reduktion der Ordnung, 22
  - spezielle Lösung, 26, 54
  - System, 11, 37, 47
  - Variation der Konstanten, 28, 54
  - Wronski-Determinante, 19, 31, 52
- Differentialoperator, 14, 128, 145

- Divergenz, 145
- Laplace-Operator, 145
- Rotation, 145
- differenzierbar
  - partiell, 127
  - stetig, 130
  - stetig partiell, 130
  - total, 131
- Divergenz, 145
- Doppelpunkt, 114
- Eigenraum, 63, 67
- Eigenvektor, 63, 67
- Eigenwert, 63, 67
  - algebraische Vielfachheit, 72
  - geometrische Vielfachheit, 73
- Einheitsnormale
  - äußere, 238
- explizite Differentialgleichung, 11
- Extremum
  - globales, 152, 159, 168, 172
  - lokales, 152
  - Nebenbedingung, 159, 167
- Figur, 224
- Fläche
  - eingebettete, 241
  - Helikoid, 109
  - Katenoid, 110
  - Minimalfläche, 109
  - Normalenvektor, 245
  - orientierte, 255
  - Parameterdarstellung, 241
  - Pseudoshäre, 112
  - Rand, 241
  - reguläre, 241
  - Tangentialebene, 244
  - Theorema Egregium, 112
  - zweidimensionale im  $\mathbb{R}^3$ , 239
- Flächenformel
  - Heronische, 168
- Frenetsches Dreibein, 121
- Fundamentalmatrix, 55
- Fundamentalsystem, 18, 52
- Funktion
  - Integrierbarkeit, 201
  - stetige, 97
- Funktionaldeterminante
  - Jacobische, 217
- Funktionalmatrix, 141
- Gaußscher Integralsatz, 233
- Gebiet, 239
- geometrische Vielfachheit, 73
- geschlossener Weg, 190
- gewöhnliche Differentialgleichung, 7, 11
- Gradient, 131
- Greenscher Bereich, 212, 236
- Häufungspunkt, 98
- Höhenlinie, 138, 159
- höhere Ableitung, 147
- harmonische Funktion, 146
- Hauptachsentransformation, 67
- Hauptvektor, 79
- Helikoid, 109
- Helix, 109, 114
- Hessesche Matrix, 156
- homogene Differentialgleichung, 11, 14
- homogenes System, 51
- Hookesches Gesetz, 8
- implizit
  - Funktion, 158
  - Gleichung, 159

- implizite Differentialgleichung, 11
- indefinit, 155
- inhomogene Differentialgleichung, 11
- inkompressibel, 251
- Integrabilitätskriterien, 201
- Integral
  - iteriertes, 201
  - Mehrfachintegral, 202
  - Oberflächenintegral, 246
  - Obersumme, 200
  - Riemannsche Summe, 200
  - Riemannsches, 199, 201
  - uneigentliches, 222, 224
    - absolute Konvergenz, 224
    - Figur, 224
    - Konvergenz, 224
    - Majorantenkriterium, 225
    - Minorantenkriterium, 225
    - reguläre Ausschöpfung, 223
  - Untersumme, 200
- Integration
  - Integrationsvariable, 218
  - partielle, 233, 251
  - Substitutionsregel, 217
  - Transformationssatz, 217
- Integrierbarkeit, 201
- Intergalsatz
  - Gauß, 233
- Jacobi-Matrix, 141
- Jordan-Kästchen, 81
- Jordansche Normalform, 77
  - Hauptvektor, 79
  - Jordan-Kästchen, 81
  - Kettenbedingung, 81
- Jordansches Maß, 206
- Katenoid, 110
- Kettenbedingung, 81
- Kettenlinie, 110
- Kettenregel, 142
- Klothoide, 113, 122
- kompakt enthalten, 224
- konservativ, 191
- konstante Koeffizienten, 20, 82
- Kontinuitätsgleichung, 251
- Koordinaten
  - krummlinige, 144
  - Kugelkoordinaten, 220
  - Polarkoordinaten, 144
- Koordinatentransformation, 217
- Krümmung, 121
  - Gaußsche, 112
  - orientierte, 122
- Kraftfeld, 185
- Kriechfall, 41
- kritischer Punkt, 152
- Kugelkoordinaten, 220
- Transformationssatz, 220
- Kurve
  - auf dem Graph, 126, 133
  - auf einer Fläche, 243
  - Binormalenvektor, 121
  - Bogenlänge, 118
  - Doppelpunkt, 114
  - Frenetsches Dreibein, 121
  - Helix, 109, 114
  - Kettenlinie, 110
  - Kettenregel, 134
  - Klothoide, 113, 122
  - Krümmung, 121
  - Normalenvektor, 121
  - Parametertransformation, 119
  - regulär, 115

- rektifizierbar, 118
  - Rollkurve, 111
  - Schleppkurve, 112
  - Schraubenlinie, 109, 114
  - singulär, 115
  - Spur, 114
  - stückweise glatt, 186
  - Tangentenvektor, 115
  - Torsion, 121
  - Traktrix, 112
  - Zykloide, 111, 121
- Kurvenintegral, 186
  - Wegunabhängigkeit, 190
- Kuve
  - Tangentialvektor, 115
- Lösung einer Differentialgleichung, 11
- Lösungsraum, 17
- Lagrangescher Multiplikator, 169
- Landausche Symbole, 150
- Laplace-Operator, 145
- linear abhängig, 17, 51
- linear unabhängig, 17, 50, 51
- lineare Differentialgleichung, 11
- Linearkombination, 16
- Lipschitz-stetig, 99
- Maß einer Menge, 200
- Majorantenkriterium, 225
- Massenerhaltung, 146, 250
- Massenfluss, 250
- Maximalstelle
  - lokale, 152
- Maximierer
  - lokaler, 152
- Maximum
  - globales, 152
  - lokales, 152
  - striktes lokales, 152
- Minimalfläche, 109
  - Helikoid, 109
  - Katenoid, 110
- Minimalstelle
  - lokale, 152
- Minimierer
  - lokaler, 152
- Minimum
  - globales, 152
  - lokales, 152
  - stiktes lokales, 152
- Minorantenkriterium, 225
- Multiindex, 149
- Nabla-Operator, 131, 136
  - Polarkoordinaten, 144
- Nebenbedingung, 159, 167
- negativ definit, 155
- negativ semidefinit, 155
- Normalbereich, 206
  - in  $x_1$ -Richtung, 206
  - in  $x_2$ -Richtung, 206
  - in  $x_j$ -Richtung, 206
- Normalenvektor, 121, 245
  - äußere Einheitsnormale, 248
  - positiv orientiert, 255
- Oberflächeninhalt, 246
- Oberflächenintegral, 239, 246
- Obersumme, 200
- Ordnung einer Differentialgleichung, 11
- Orientierung
  - $\partial M$ , 234
- orientierungstreu, 119
- orientierungsumkehrend, 119

- Paraboloid, 139, 152, 164
- Parametertransformation, 119
  - orientierungstreu, 119, 186
  - orientierungsumkehrend, 119, 187
- Parametrisierung
  - nach Bogenlänge, 121
- partiell differenzierbar, 127
- partielle Ableitung, 127
- partielle Differentialgleichung, 12
- partielle Integration, 233, 251
- Polarkoordinaten, 144, 166, 218
  - Laplace-Operator, 147
  - Nabla-Operator, 144
  - Transformationssatz
    - Polarkoordinaten, 218
- positiv definit, 154
- positiv semidefinit, 155
- Potential, 191
- Potentialgleichung, 146
- projizierbare Menge, 206
  - $x_1$ -projizierbar, 206
  - $x_2$ -projizierbar, 206
  - $x_j$ -projizierbar, 206
- Pseudoshäre, 112
- quadrierbare Menge, 206
- quellenfrei, 252
- Reduktion der Ordnung, 22
- Regelfläche, 110
- regulär, 115
- reguläre Ausschöpfung, 223
- rektifizierbar, 118
- Resonanzfall, 33
- Restglied
  - Lagrange, 149
- Richtungsableitung, 136
- Rollkurve, 111
- Rotation, 145
- Rotationsfläche, 110
- Sattelpunkt, 153
- Satz
  - implizite Funktion, 158
  - Umkehrfunktion, 158, 165
  - von Fubini, 210
- Schleppkurve, 112
- Schraubenlinie, 109, 114
- Schwingfall, 43
- Schwingkreis, 25, 32
  - aperiodischer Grenzfall, 42
  - Dauerschwingung, 35
  - freie Schwingung, 35
  - Kriechfall, 41
  - Resonanzfall, 33
  - Resonanzkatastrophe, 37
  - Schwingfall, 43
- semidefinit
  - negativ, 155
  - positiv, 155
- singulär, 115
- Spektraltheorie, 61
  - ähnliche Matrizen, 75
  - charakteristisches Polynom, 67
  - diagonalisierbare Matrix, 68, 74
  - Eigenraum, 63
  - Eigenvektor, 63, 67
  - Eigenwert, 63, 67
  - Hauptachsentransformation, 67
  - Jordansche Normalform, 77
- spezielle Lösung, 26, 54
- Spur, 114
- stückweise glatte Kurve, 186
- stetig differenzierbar, 130
  - zweimal, 147

- stetig partiell differenzierbar, 130
- Stetigkeit, 97
  - Lipschitz, 99
- Substitutionsregel, 217
- Superpositionsprinzip, 14
- System von Differentialgleichungen,
  - 11, 47
  - konstante Koeffizienten, 82
  - nicht konstante Koeffizienten, 53
- Tangentenvektor, 115, 244
- Tangentialebene, 126, 139
  - Fläche, 244
- Tangentialvektor, 115
- Taylorsche Formel, 149
- Theorema Egregium, 112
- Torsion, 121
- total differenzierbar, 131
- Trajektorie, 251
- Traktrix, 112
- Transformationssatz, 217
- Umkehrsatz, 158, 165
- uneigentliches Integral, 222, 224
- Untersumme, 200
- Variation der Konstanten, 28, 54
- Vektorfeld, 145, 185
  - Fluss, 233, 239
  - konservativ, 191
  - Kraftfeld, 185
  - Quelle, Senke, 146, 233
  - quellenfrei, 252
  - Wirbel, 146
  - wirbelfrei, 258
  - Zentralkraft, 179
  - Zirkulation, 255
- Vielfachheit
  - algebraische, 72
  - geometrische, 73
- Volumenelement, 201
- Weg, 187
  - geschlossen, 190
- Wegintegral, 187
- Wegunabhängigkeit, 190
- wirbelfrei, 258
- Wronski-Determinante, 19, 31, 52
- Zelle, 201
- Zerlegung, 117
- zusammenhängend, 239
- Zykloide, 111, 121
- Zylinderkoordinaten, 222
- PERSONENVERZEICHNIS
  - Bernoulli, Johann (1667-1748), 111
  - Cavalieri ..., 210
  - Frenet ..., 121
  - Fubini ..., 210
  - Gauß, Carl Friedrich (1777-1855), 112
  - Green ..., 212
  - Heron ..., 168
  - Hooke, Robert (1635-1703), 8
  - Jacobi ..., 217
  - Jordan ..., 206
  - Jordan, C. (1838-1922), 81
  - Lagrange ..., 149
  - Lagrange..., 169
  - Laplace ..., 145
  - Riemann..., 199
  - Taylor ..., 148
- SYMBOLVERZEICHNIS
  - Ableitung
    - $Df$  Ableitung, 131, 141
    - $C^1$  Klasse  $C^1$ , 130



- $C^1(U; \mathbb{R}^n)$  Klasse  $C^1(U; \mathbb{R}^n)$ , 141
- $C^2$  Klasse  $C^2$ , 147
- $C^1(\bar{U})$  Klasse  $C^1(\bar{U})$ , 242
- $(\partial f_i / \partial x_j)_{i=1, \dots, n}^{j=1, \dots, m}$  Funktionalmatrix, 141
- $\nabla f$  Gradient, 131
- Hess  $f$  Hessesche Matrix, 156
- $(D_j D_i f)_{1 \leq i \leq m}^{1 \leq j \leq m}$  Hessesche Matrix, 156
- $J_f$  Jacobi-Matrix, 141
- $D_i f$  partielle, 127
- $\partial f / \partial x_i$  partielle, 127
- $X_u$  partielle, 244
- $D_{\underline{\mathbf{v}}}$  Richtungsableitung, 137
- $T_{\underline{\mathbf{x}}} f$  Tangentialebene, 139
- $T_{\underline{\mathbf{u}}} X$  Tangentialebene an eine Fläche, 244
- $D_j D_i f$  zweite partielle, 147
- Differentialoperator
  - div Divergenz, 145
  - $L[y]$  gew. DGL.  $n$ -ter Ordnung, 14
  - $\Delta$  Laplace-Operator, 145
  - $\nabla$  Nabla-Operator, 131, 136
  - $D_i$  partielle Ableitung, 128
  - rot Rotation, 145
- Fläche
  - $\partial S$  Rand einer Fläche, 241
- Integral
  - $M_j \nearrow M$  Ausschöpfung, 224
  - $\int \cdots \int_C f dx_1 dx_2 \dots dx_n$  über Zelle  $C$ , 201
  - $\int_C f dV$  über Zelle  $C$ , 201
- Menge
  - $A \Subset B$  kompakt enthalten, 224
- Multiindex
  - $|\alpha|$  Betrag, 149
  - $\alpha!$  Fakultät, 149
  - $\underline{\mathbf{x}}^\alpha$  Potenz, 149
  - $D^\alpha f$  Ableitung, 149
  - $D_i^{\alpha_i} f$  partielle Ableitung, 149