Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Johannes Hoffmann

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure III*
Wintersemester 2021/22
Blatt 1 – Musterlösung
Abgabe: Sonntag, 24.10.2021, 22:00 Uhr über Moodle

Aufgabe 1 ($1+2+4+3$ Punkte)**.** Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion mit

$$f(x) = x + \sin(x) - \pi \quad \text{für} \quad x \in [0, 2\pi).$$

(a) Bestimmen Sie $f(x)$ für $x \in [-2\pi, 0)$.

(b) Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

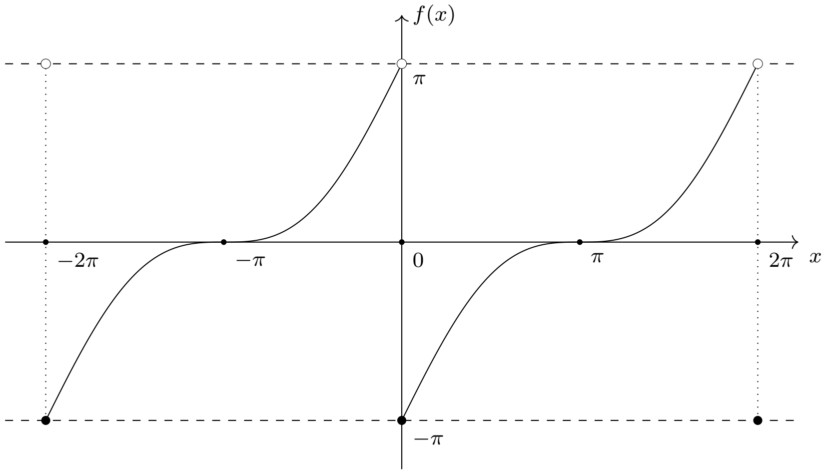
(c) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von f.

(d) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourier-Reihe von f punktweise?

Lösung. (a) Sei $x \in [-2\pi, 0)$, dann gilt $x + 2\pi \in [0, 2\pi)$. Es folgt

$$f(x) = f(x+2\pi) = (x+2\pi) + \sin(x+2\pi) - \pi = x + \sin(x) + \pi.$$

(b)



(c) Sei $x \in (0, 2\pi)$, dann gilt

$$f(-x) = -x + \sin(-x) + \pi = -x - \sin(x) + \pi = -(x + \sin(x) - \pi) = -f(x),$$

also ist f ungerade (bis auf in den Sprungstellen) und es folgt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Weiterhin gilt

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi} (x - \pi) \sin(nx) \,\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} \sin(x) \sin(nx) \,\mathrm{d}x \right).$$

Mittels partieller Integration gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\sin(nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}(x-\pi)\cos(nx)\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2\pi}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi}\left[\sin(nx)\right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{n}.\end{aligned}$$

Wegen der Orthogonalität der Basisfunktionen gilt

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases}1, & n=1,\\ 0, & n>1,\end{cases}$$

also folgt

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\sin(nx)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \begin{cases}-\frac{2}{1}+1=-1, & n=1,\\ -\frac{2}{n}, & n>1\end{cases} \quad \text{für alle} \quad n\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Die formale Fourier-Reihe von f lautet also

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx) = -\sin(x) - 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}.$$

(d) Für alle Unstetigkeitsstellen $x = 2k\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$ gilt

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = \frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0.$$

Die Funktion f ist differenzierbar auf $(0,\pi)$, also auch insgesamt betrachtet stückweise glatt, also konvergiert die Fourier-Reihe von f laut Vorlesung punktweise in den Unstetigkeitsstellen gegen den Mittelwert der einseitigen Grenzwerte und in den Stetigkeitsstellen gegen f:

$$\begin{cases}\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = 0, & x = 2k\pi \text{ für ein } k\in\mathbb{Z},\\ f(x), & \text{sonst.}\end{cases}$$

Bemerkung. Die Fourier-Reihe einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit allgemeiner Periode $T > 0$ ist gegeben durch

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \right)$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \mathrm{d}x \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \mathrm{d}x \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Die Aussagen der Vorlesung zur Konvergenz übertragen sich entsprechend.

Aufgabe 2 (2 + 6 + 2 Punkte). Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion mit der Periode 8, die gegeben ist durch

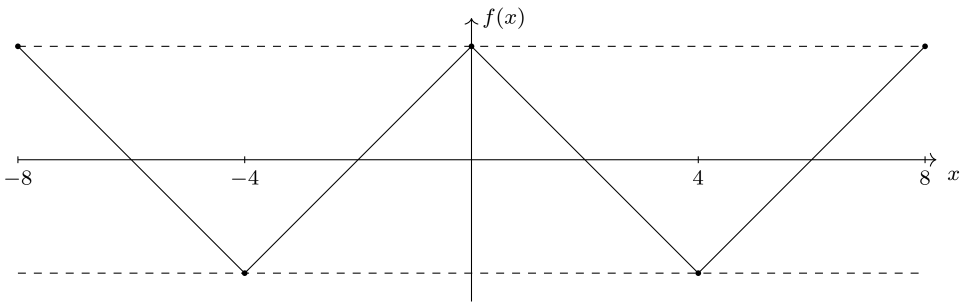
$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & 0 \le x < 4, \\ x - 6, & 4 \le x < 8. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $[-8, 8]$.

(b) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe g von f.

(c) Gegen welche Funktion konvergiert die Fourier-Reihe punktweise, wo konvergiert sie gleichmäßig?

Lösung. (a)



(b) Für $x \in [-8, 0)$ gilt

$$f(x) = f(x+8) = \begin{cases} 2 - (x+8) = -x - 6, & x \in [-8, -4), \\ (x+8) - 6 = 2 + x, & x \in [-4, 0), \end{cases} = f(-x),$$

also ist f gerade und es gilt $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$, dann gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{4} \int_0^8 f(x) \cos\left(\frac{\pi}{4} nx\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_0^4 (2 - x) \cos\left(\frac{\pi}{4} nx\right) \mathrm{d}x + \int_4^8 (x - 6) \cos\left(\frac{\pi}{4} nx\right) \mathrm{d}x \right). \end{aligned}$$

Mit partieller Integration gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^4 (2-x)\cos\Big(\frac{\pi}{4}nx\Big)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{4(2-x)}{n\pi}\sin\Big(\frac{\pi}{4}nx\Big)\right]_0^4 + \frac{4}{n\pi}\int_0^4 \sin\Big(\frac{\pi}{4}nx\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{8}{n\pi}\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} - \frac{8}{n\pi}\underbrace{\sin(0)}_{=0} - \frac{16}{n^2\pi^2}\left[\cos\Big(\frac{\pi}{4}nx\Big)\right]_0^4 \\
&= -\frac{16}{n^2\pi^2}(\cos(n\pi)-\cos(0)) = \frac{16}{n^2\pi^2}(1-\cos(n\pi))
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_4^8 (x-6)\cos\Big(\frac{\pi}{4}nx\Big)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{4(x-6)}{n\pi}\sin\Big(\frac{\pi}{4}nx\Big)\right]_4^8 - \frac{4}{n\pi}\int_4^8 \sin\Big(\frac{\pi}{4}nx\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{8}{n\pi}\underbrace{\sin(2n\pi)}_{=0} + \frac{8}{n\pi}\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} + \frac{16}{n^2\pi^2}\left[\cos\Big(\frac{\pi}{4}nx\Big)\right]_4^8 \\
&= \frac{16}{n^2\pi^2}(\cos(2n\pi)-\cos(n\pi)) = \frac{16}{n^2\pi^2}(1-\cos(n\pi)).
\end{aligned}$$

Wegen

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1, & n \text{ gerade}, \\ -1, & n \text{ ungerade}, \end{cases} = (-1)^n$$

folgt

$$a_n = \frac{1}{4}\cdot\frac{16}{n^2\pi^2}\cdot 2(1-\cos(n\pi)) = \frac{8}{n^2\pi^2}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade}, \\ \frac{16}{n^2\pi^2} & n \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Die Fourier-Reihe von f ist also gegeben durch

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\Big(\frac{\pi}{4}nx\Big) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{16}{(2k+1)^2\pi^2}\cos\Big(\frac{\pi}{4}(2k+1)x\Big).$$

(c) Da f stückweise linear ist, ist f auch stückweise glatt. Es gilt

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-}(2-x) = -2 = \lim_{x\to 4^+}(x-6) = \lim_{x\to 4^+} f(x)$$

und

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x+2 = 2 = \lim_{x\to 0^+} 2-x = \lim_{x\to 0^+} f(x),$$

also ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Somit konvergiert die Fourier-Reihe von f überall punktweise und gleichmäßig gegen f.

Definition. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

- Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt *stetig*, falls ihre reellwertigen Komponentenfunktionen $\operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f) : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig sind, wobei
$$\operatorname{Re}(f)(x) := \operatorname{Re}(f(x)) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(f)(x) := \operatorname{Im}(f(x)) \quad \text{für alle} \quad x \in [a, b].$$
In diesem Fall ist das *bestimmte Integral* über f gegeben durch
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \int_a^b \operatorname{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t + \mathrm{i} \int_a^b \operatorname{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t\,.$$
- Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ heißt *differenzierbar* auf (a, b), falls die Funktionen $\operatorname{Re}(f), \operatorname{Im}(f) : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind. In diesem Fall ist die *Ableitung* von f gegeben durch $f' := \operatorname{Re}(f)' + \mathrm{i}\operatorname{Im}(f)'$.

Aufgabe 3 (3 + 3 Punkte)**.**

(a) Sei $z \in \mathbb{C}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass $zf : I \to \mathbb{C},\ x \mapsto z \cdot f(x)$ differenzierbar ist mit $(zf)' = z \cdot f'$.

(b) Seien $k \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und
$$f_k : [a, b] \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto \exp(-\mathrm{i}kx).$$
Bestimmen Sie anhand obiger Definition sowohl f_k' auf (a, b) als auch eine Stammfunktion von f_k. Drücken Sie Ihre Ergebnisse wieder durch Exponentialfunktionen aus!

Lösung. (a) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $z = \alpha + \mathrm{i}\beta$. Dann gilt
$$\begin{aligned}
(zf)'(x) &= ((\alpha + \mathrm{i}\beta)(\operatorname{Re}(f)(x) + \mathrm{i}\operatorname{Im}(f)(x)))' \\
&= (\underbrace{\alpha \operatorname{Re}(f)(x) - b \operatorname{Im}(f)(x)}_{=\operatorname{Re}(zf)(x)} + \mathrm{i}(\underbrace{\alpha \operatorname{Im}(f)(x) + \beta \operatorname{Re}(f)(x)}_{=\operatorname{Im}(zf)(x)}))' \\
&= (\alpha \operatorname{Re}(f)(x) - b \operatorname{Im}(f)(x))' + \mathrm{i}(\alpha \operatorname{Im}(f)(x) + \beta \operatorname{Re}(f)(x))' \\
&= \alpha \operatorname{Re}(f)'(x) - b \operatorname{Im}(f)'(x)) + \mathrm{i}(\alpha \operatorname{Im}(f)'(x) + \beta \operatorname{Re}(f)'(x)) \\
&= (\alpha + \mathrm{i}\beta)(\operatorname{Re}(f)'(x) + \mathrm{i}\operatorname{Im}(f)'(x)) \\
&= z \cdot f'(x),
\end{aligned}$$
da $\operatorname{Re}(zf)$ und $\operatorname{Im}(zf)$ als Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar sind.

(b) Mit der Eulerschen Formel gilt $\exp(-\mathrm{i}kx) = \cos(-kx) + \mathrm{i}\sin(-kx)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, also
$$\begin{aligned}
f_k'(x) &= (\exp(-\mathrm{i}kx))' = (\cos(-kx) + \mathrm{i}\sin(-kx))' = \cos(-kx)' + \mathrm{i}\sin(-kx)' \\
&= k\sin(kx) - \mathrm{i}k\cos(-kx) = -\mathrm{i}k(\cos(-kx) + \mathrm{i}\sin(-kx)) = -\mathrm{i}k\exp(-\mathrm{i}kx).
\end{aligned}$$
Für $k = 0$ gilt $f_0(x) = \exp(-\mathrm{i} \cdot 0 \cdot x) = \exp(0) = 1$, also ist $F_0 : [a, b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$ eine Stammfunktion von f_0. Für $k \neq 0$ ist
$$F_k(x) : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\mathrm{i}}{k}\exp(-\mathrm{i}kx)$$
eine Stammfunktion von f_k, denn mit obiger Rechnung folgt
$$F_k'(x) = \left(\frac{\mathrm{i}}{k}\exp(-\mathrm{i}kx)\right)' \overset{\text{(a)}}{=} \frac{\mathrm{i}}{k}\exp(-\mathrm{i}kx)' = \frac{\mathrm{i}}{k} \cdot (-\mathrm{i}k)\exp(-\mathrm{i}kx) = \exp(-\mathrm{i}kx).$$

Aufgabe 4 (5 + 5 + 1 + 3 Punkte). Gegeben sei die 2π-periodische Funktion f mit

$$f(x) = (x - \pi)^2 \quad \text{für} \quad x \in [0, 2\pi).$$

(i) Bestimmen Sie die cos-sin-Darstellung der Fourier-Reihe von f, in dem Sie die Fourier-Koeffizienten a_n und b_n direkt berechnen.

(ii) Bestimmen Sie die exp-Darstellung der Fourier-Reihe von f, in dem Sie die Fourier-Koeffizienten c_k direkt über die Integralformel berechnen:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \exp(-\mathrm{i}kx)\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Hinweis: Sie dürfen hier ohne Beweis verwenden, dass sich mittels obiger Definition die in der Vorlesung behandelten Differentiations- und Integrationstechniken wie partielle Integration auch auf komplexwertige Funktionen übertragen.

(iii) Überprüfen Sie, dass die Koeffizienten a_n, b_n und c_k tatsächlich die folgenden Relationen für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n}{2} - \mathrm{i}\frac{b_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n}{2} + \mathrm{i}\frac{b_n}{2}.$$

(iv) Verwenden Sie die Fourier-Reihe von f, um den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ zu bestimmen.

Lösung. (i) Für alle $x \in [0, 2\pi)$ gilt

$$f(-x) = f(2\pi - x) = (2\pi - x - \pi)^2 = (\pi - x)^2 = (x - \pi)^2 = f(x),$$

also ist f gerade und daher gilt $b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 0$ gilt

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x - \pi)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3\pi}(x - \pi)^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3\pi}(\pi^3 - (-\pi)^3) = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Für $n \neq 0$ gilt mit partieller Integration gilt

$$\begin{aligned}
&\int (x - \pi)^2 \cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n}(x - \pi)^2 \sin(nx) - \frac{2}{n} \int (x - \pi) \sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{n}(x - \pi)^2 \sin(nx) - \frac{2}{n} \left(-\frac{1}{n}(x - \pi) \cos(nx) + \frac{1}{n} \int \cos(nx)\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{1}{n}(x - \pi)^2 \sin(nx) - \frac{2}{n} \left(-\frac{1}{n}(x - \pi) \cos(nx) + \frac{1}{n^2} \sin(nx) \right) \\
&= \frac{1}{n^3} \left(n^2(x - \pi)^2 \sin(nx) + 2n(x - \pi) \cos(nx) - 2 \sin(nx) \right) \\
&= \frac{1}{n^3} \left((n^2(x - \pi)^2 - 2) \sin(nx) + 2n(x - \pi) \cos(nx) \right).
\end{aligned}$$

Wegen $\sin(n \cdot 2\pi) = 0 = \sin(n \cdot 0)$ und $\cos(n \cdot 2\pi) = 1 = \cos(n \cdot 0)$ folgt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 \cos(nx) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n^3 \pi} \left[(n^2 (x-\pi)^2 - 2) \sin(nx) + 2n(x-\pi) \cos(nx) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{n^3 \pi} \cdot 2n(x-\pi) \Big|_0^{2\pi} = \frac{2}{n^2 \pi} (\pi - (-\pi)) = \frac{4}{n^2} \end{aligned}$$

und somit ist die cos-sin-Darstellung der Fourier-Reihe von f gegeben durch

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

(ii) Für $k = 0$ gilt

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{6\pi} (x-\pi)^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{6\pi} (\pi^3 - (-\pi)^3) = \frac{\pi^2}{3}.$$

Mit Aufgabe 3 und partieller Integration gilt für $k \neq 0$

$$\begin{aligned} &\int (x-\pi)^2 \exp(-\mathrm{i}kx) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{i}}{k} (x-\pi)^2 \exp(-\mathrm{i}kx) - \frac{2\mathrm{i}}{k} \int (x-\pi) \exp(-\mathrm{i}kx) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{i}}{k} (x-\pi)^2 \exp(-\mathrm{i}kx) - \frac{2\mathrm{i}}{k} \left(\frac{\mathrm{i}}{k} (x-\pi) \exp(-\mathrm{i}kx) - \frac{\mathrm{i}}{k} \int \exp(-\mathrm{i}kx) \, \mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{k} (x-\pi)^2 \exp(-\mathrm{i}kx) - \frac{2\mathrm{i}}{k} \left(\frac{\mathrm{i}}{k} (x-\pi) \exp(-\mathrm{i}kx) - \frac{\mathrm{i}^2}{k^2} \exp(-\mathrm{i}kx) \right) \\ &= \frac{\mathrm{i} \exp(-\mathrm{i}kx)}{k^3} (k^2 (x-\pi)^2 - 2k\mathrm{i}(x-\pi) - 2). \end{aligned}$$

Wegen $\exp(-\mathrm{i}k \cdot 2\pi) = 1 = \exp(-\mathrm{i}k \cdot 0)$ folgt

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 \exp(-\mathrm{i}kx) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\mathrm{i} \exp(-\mathrm{i}kx)}{2\pi k^3} (k^2 (x-\pi)^2 - 2k\mathrm{i}(x-\pi) - 2) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2\pi k^3} (k^2 (x-\pi)^2 - 2k\mathrm{i}(x-\pi) - 2) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2\pi k^3} (k^2 \pi^2 - 2k\mathrm{i}\pi - 2 - k^2 \pi^2 - 2k\mathrm{i}\pi + 2) \\ &= \frac{-4k\mathrm{i}^2 \pi}{2\pi k^3} = \frac{2}{k^2} \end{aligned}$$

und somit ist die exp-Darstellung der Fourier-Reihe von f gegeben durch

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp(-\mathrm{i}kx) = \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\exp(-\mathrm{i}kx)}{k^2}.$$

(iii) Es gilt $c_0 = \frac{\pi^2}{3} = \frac{a_0}{2}$ und $c_k = \frac{2}{k^2} = \frac{a_{|k|}}{2}$ für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(iv) Für $0 < |x| < 2\pi$ gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} f(x+2\pi) = \lim_{x\to 0^-} (x+2\pi-\pi)^2 \\ &= \lim_{x\to 0^-} (x+\pi)^2 = \pi^2 = \lim_{x\to 0^+} (x-\pi)^2 = \lim_{x\to 0^+} f(x)\end{aligned}$$

also ist f stetig und somit stimmt die Fourier-Reihe von f auf ganz $\mathbb{R}$ mit f überein. Insbesondere gilt

$$\pi^2 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(0)}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}}{4} = \frac{\frac{2\pi^2}{3}}{4} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Alternativ über die komplexe Fourier-Reihe:

$$\begin{aligned}\pi^2 = f(0) &= \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\exp(0)}{k^2} = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{\pi^2}{3} + 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(-k)^2}\right) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.\end{aligned}$$