Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Johannes Hoffmann

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure III*
Wintersemester 2021/22
Blatt 11 – Musterlösung
Abgabe: Freitag, 14.01.2022, 22:00 Uhr über Moodle

Aufgabe 1 (3 + 2 + 2 + 4 Punkte). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ und $f \in C^2(U, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{rot}(fF) = f \operatorname{rot} F - F \times \operatorname{grad} f$.

(b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$.

(c) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$.

(d) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} F) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} F) - \Delta F$. ($\Delta F$ ist eintragsweise gemeint: $(\Delta F)_j = \Delta(F_j)$)

Hinweis: Wie üblich im Zusammenhang mit Differentialoperatoren ist der Gradient auch in diesen Formeln als Spaltenvektor zu interpretieren.

Lösung. (a) Mit der Produktregel gilt

$$\operatorname{rot}(fF) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(fF_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial(fF_2)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial(fF_1)}{\partial x_3} - \frac{\partial(fF_3)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(fF_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(fF_1)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot F_3 + f \cdot \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot F_2 - f \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \cdot F_1 + f \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot F_3 - f \cdot \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot F_2 + f \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot F_1 - f \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$= f \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_3} - F_3 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ F_3 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} - F_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ F_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} - F_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} \end{pmatrix} = f \operatorname{rot} F - F \times \operatorname{grad} f.$$

(b) Da laut Voraussetzung alle zweiten partiellen Ableitungen vertauschen, gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) &= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial(\operatorname{rot} F)_k}{\partial x_k} = \frac{\partial(\operatorname{rot} F)_1}{\partial x_1} + \frac{\partial(\operatorname{rot} F)_2}{\partial x_2} + \frac{\partial(\operatorname{rot} F)_3}{\partial x_3} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial F_2}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial F_3}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\
&= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_3 \partial x_2} \\
&= \underbrace{\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2 \partial x_1}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial x_3}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_3 \partial x_2}}_{=0} = 0.
\end{aligned}$$

(c) Da laut Voraussetzung alle zweiten partiellen Ableitungen vertauschen, gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) &= \nabla^T \times (\operatorname{grad} f)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \end{pmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

(d) Es gilt

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\operatorname{rot} F) &= \nabla^T \times \operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \, \partial x_1} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial {x_2}^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial {x_3}^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_3 \, \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_3 \, \partial x_2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial {x_3}^2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \, \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \, \partial x_3} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial {x_1}^2} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \, \partial x_3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \, \partial x_2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1 \, \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \, \partial x_1} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2 \, \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_3 \, \partial x_1} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_3 \, \partial x_2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial {x_3}^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial {x_3}^2} \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial {x_3}^2} \\ \frac{\partial^2 F_3}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial {x_3}^2} \end{pmatrix} \\
&= (\operatorname{grad}(\operatorname{div} F))^T - \Delta F.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2 ((1 + 2) + (2 + 2) + (2 + 3) Punkte).

(a) Berechnen Sie für die folgenden Skalarfelder $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jeweils $\operatorname{grad} f$ und Δf:

(i) $f(x,y,z) := 1 - 2x^2 - 3y^2$ (ii) $f(x,y,z) := x^3y^2z - \frac{1}{10}x^5z$

(b) Berechnen Sie für die folgenden Vektorfelder $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jeweils $\operatorname{div} F$ und $\operatorname{rot} F$:

(i) $F(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2yz \\ xy^2z \\ -2xyz^2 \end{pmatrix}$ (ii) $F(x,y,z) := \begin{pmatrix} \cos(x)\sin(y)\sin(z) \\ \sin(x)\cos(y)\sin(z) \\ \sin(x)\sin(y)\cos(z) \end{pmatrix}$

(c) Berechnen Sie für die folgenden Skalarfelder $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ jeweils Δf für $x \neq 0$:

(i) $f(x) := \|x\|$ (ii) $f(x) := \frac{1}{\|x\|}$

Lösung. (a) Erinnerung: $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

(i) Es gilt

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} -4x \\ -6y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta f = -4 - 6 + 0 = -10.$$

(ii) Es gilt

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 3x^2y^2z - \frac{1}{2}x^4z \\ 2x^3yz \\ x^3y^2 - \frac{1}{10}x^5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta f = 6xy^2z - 2x^3z + 2x^3z = 6xy^2z.$$

(b) (i) Es gilt

$$\operatorname{div} F = 2xyz + 2xyz - 4xyz = 0$$

und

$$\operatorname{rot} F = \nabla^T \times F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x^2yz \\ xy^2z \\ -2xyz^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2xz^2 - xy^2 \\ x^2y + 2yz^2 \\ y^2z - x^2z \end{pmatrix} \neq 0.$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= -\sin(x)\sin(y)\sin(z) - \sin(x)\sin(y)\sin(z) - \sin(x)\sin(y)\sin(z) \\ &= -3\sin(x)\sin(y)\sin(z) \neq 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} F = \nabla^T \times F &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(x)\sin(y)\sin(z) \\ \sin(x)\cos(y)\sin(z) \\ \sin(x)\sin(y)\cos(z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin(x)\cos(y)\cos(z) - \sin(x)\cos(y)\cos(z) \\ \cos(x)\sin(y)\cos(z) - \cos(x)\sin(y)\cos(z) \\ \cos(x)\cos(y)\sin(z) - \cos(x)\cos(y)\sin(z) \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Bemerkung: Es gilt $F = \operatorname{grad} f$ *für* $f(x,y,z) = \sin(x)\sin(y)\sin(z)$, *also mit Aufgabe 1 auch* $\operatorname{rot} F = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$. *Die Rotation eines Vektorfeldes, das selbst Gradient eines Skalarfeldes ist, ist also immer* 0.

(c) Sei $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ und $k \in \{1, \dots, m\}$. Laut Aufgabe 1(a) von Blatt 10 gilt

$$\frac{\partial \|x\|}{\partial x_k} = \frac{x_k}{\|x\|}.$$

(i) Mit Quotientenregel gilt

$$\frac{\partial^2 \|x\|}{\partial {x_k}^2} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{x_k}{\|x\|} = \frac{1 \cdot \|x\| - x_k \frac{\partial \|x\|}{\partial x_k}}{\|x\|^2} = \frac{\|x\| - x_k \frac{x_k}{\|x\|}}{\|x\|^2} = \frac{\|x\|^2 - x_k^2}{\|x\|^3}$$

und somit

$$\begin{aligned}\Delta \|x\| &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 \|x\|}{\partial {x_k}^2} = \sum_{k=1}^m \frac{\|x\|^2 - x_k^2}{\|x\|^3} = \frac{1}{\|x\|^3} \left(\sum_{k=1}^m \|x\|^2 - \sum_{k=1}^m x_k^2 \right) \\ &= \frac{1}{\|x\|^3} (m\|x\|^2 - \|x\|^2) = \frac{(m-1)\|x\|^2}{\|x\|^3} = \frac{m-1}{\|x\|}.\end{aligned}$$

(ii) Mit Quotientenregel gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\|x\|} = \frac{0 \cdot \|x\| - 1 \cdot \frac{\partial \|x\|}{\partial x_k}}{\|x\|^2} = -\frac{x_k}{\|x\|^3}.$$

Weiterhin gilt mit Quotienten- und Kettenregel

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial {x_k}^2} \frac{1}{\|x\|} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\frac{x_k}{\|x\|^3} \right) = -\frac{1 \cdot \|x\|^3 - x_k \frac{\partial \|x\|^3}{\partial x_k}}{\|x\|^6} = -\frac{\|x\|^3 - 3x_k \|x\|^2 \frac{\partial \|x\|}{\partial x_k}}{\|x\|^6} \\ &= -\frac{\|x\|^3 - 3x_k \|x\|^2 \frac{x_k}{\|x\|}}{\|x\|^6} = -\frac{\|x\|^3 - 3x_k^2 \|x\|}{\|x\|^6} = -\frac{\|x\|^2 - 3x_k^2}{\|x\|^5}\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\Delta \frac{1}{\|x\|} &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2}{\partial {x_k}^2} \frac{1}{\|x\|} = -\sum_{k=1}^m \frac{\|x\|^2 - 3x_k^2}{\|x\|^5} = -\frac{1}{\|x\|^5} \left(\sum_{k=1}^m \|x\|^2 - 3 \sum_{k=1}^m x_k^2 \right) \\ &= -\frac{1}{\|x\|^5} (m\|x\|^2 - 3\|x\|^2) = -\frac{(m-3)\|x\|^2}{\|x\|^5} = -\frac{(m-3)}{\|x\|^3}.\end{aligned}$$

Bemerkung: Insbesondere gilt im Spezialfall $m = 3$ schon $\Delta \frac{1}{\|x\|} = 0$.

Definition. Die n-dimensionale *Wellengleichung* mit Wellengeschwindigkeit $c > 0$ ist die folgende lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u = c^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_j}^2}.$$

Hierbei gibt n die Anzahl der *räumlichen* Dimensionen an, dargestellt durch die Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Zusätzlich gibt es aber immer noch eine *zeitliche* Variable t, sodass u eine Funktion der $n+1$ Variablen $x_1, \ldots, x_n, t$ ist. Im physikalischen Kontext gilt die Vereinbarung, dass Differentialoperatoren wie Δ, div, rot und grad nur auf die räumlichen Variablen wirken; Ableitungen nach der Zeit t werden immer extra geschrieben. Um etwas Schreibarbeit zu sparen, nutzt man häufig eine Kurzform für partielle Ableitungen, etwa

$$u_{xt} := (u_x)_t := \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial t\, \partial x}.$$

Somit schreibt man beispielsweise $u_{tt} = c^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2})$ für $n = 2$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** In einem Vakuum gibt es weder Ladung ($\rho = 0$) noch Stromfluss ($J = 0$), daher vereinfachen sich dort die Maxwell-Gleichungen zu

(1) $\operatorname{div} E = 0$, (2) $\operatorname{div} B = 0$, (3) $\operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}$, (4) $\operatorname{rot} B = \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}$.

Zeigen Sie, dass sowohl die elektrische Feldstärke $E = E(x,t) = E(x_1, x_2, x_3, t)$ als auch die magnetische Feldstärke $B = B(x,t)$ die dreidimensionale Wellengleichung erfüllen.
Hinweis: Auch für E und B wirkt rot *nur auf die räumlichen Variablen x_1, x_2, x_3. Zeigen Sie zunächst, dass* $\operatorname{rot}(\frac{\partial E}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} E$.

Lösung. Mit der Vertauschbarkeit der zweiten partiellen Ableitungen gilt

$$\operatorname{rot}\left(\frac{\partial E}{\partial t}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 E_3}{\partial x_2\, \partial t} - \dfrac{\partial^2 E_2}{\partial x_3\, \partial t} \\ \dfrac{\partial^2 E_1}{\partial x_3\, \partial t} - \dfrac{\partial^2 E_3}{\partial x_1\, \partial t} \\ \dfrac{\partial^2 E_2}{\partial x_1\, \partial t} - \dfrac{\partial^2 E_1}{\partial x_2\, \partial t} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial E_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial E_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial E_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial E_3}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial E_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial E_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} E$$

und analog $\operatorname{rot}(\frac{\partial B}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} B$. **[2 Punkte]**
Mit den Regeln von Aufgabe 1 gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial E}{\partial t} \overset{(4)}{=} \frac{\partial}{\partial t} c \operatorname{rot} B = c \operatorname{rot}\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right) \overset{(3)}{=} c \operatorname{rot}(-c \operatorname{rot} E) \\ &= -c^2 \operatorname{rot}(\operatorname{rot} E) = -c^2(\operatorname{grad}(\underbrace{\operatorname{div} E}_{=0}) - \Delta E) \overset{(1)}{=} c^2 \Delta E \qquad \textbf{[2 Punkte]}\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial B}{\partial t} \overset{(3)}{=} \frac{\partial}{\partial t}(-c \operatorname{rot} E) = -c \operatorname{rot}\left(\frac{\partial}{\partial t} E\right) \overset{(4)}{=} -c \operatorname{rot}(c \operatorname{rot} B) \\ &= -c^2 \operatorname{rot}(\operatorname{rot} B) = -c^2(\operatorname{grad}(\underbrace{\operatorname{div} B}_{=0}) - \Delta B) \overset{(2)}{=} c^2 \Delta B, \qquad \textbf{[2 Punkte]}\end{aligned}$$

also erfüllen sowohl E als auch B die dreidimensionale Wellengleichung.

Aufgabe 4 (1 + 5 + 3 + 2 Punkte). Die eindimensionale Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ mit $c > 0$ beschreibt unter anderem die Vibrationen einer Gitarrensaite. Ohne die Gleichung explizit zu lösen können wir trotzdem etwas über die Form der allgemeinen Lösung aussagen.

(a) Wir führen zwei neue Koordinaten ein: $a := x - ct$ und $b := x + ct$. Schreiben Sie die alten Koordinaten x und t in Abhängigkeit von den neuen Koordinaten a und b (insbesondere sollte $x = x(a, b)$ nicht von t abhängen).

(b) Formal entspricht der Koordinatenwechsel einer Abbildung

$$\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie mit der Kettenregel, dass

$$u_a := \frac{\partial}{\partial a} u(\tau(a, b)) = \frac{1}{2} u_x - \frac{1}{2c} u_t \quad \text{sowie} \quad u_b = \frac{1}{2} u_x + \frac{1}{2c} u_t.$$

(c) Zeigen Sie, dass $u_{ab} = 0$.

(d) Zeigen Sie, dass $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ für zwei Funktionen $f, g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Hinweis: Integrieren Sie u_{ab} nacheinander nach den neuen Koordinaten. Bedenken Sie, dass die "Integrationskonstante" bei Integration nach a von b abhängen kann.

Lösung. (a) Es gilt

$$a + b = x - ct + x + ct = 2x \quad \text{und} \quad b - a = x + ct - (x - ct) = 2ct,$$

also $x = \frac{a+b}{2}$ und $t = \frac{b-a}{2c}$.

(b) Es gilt

$$x_a = \frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \frac{a + b}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad t_a = \frac{\partial t}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \frac{b - a}{2c} = -\frac{1}{2c}$$

sowie

$$x_b = \frac{\partial x}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \frac{a + b}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad t_b = \frac{\partial t}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \frac{b - a}{2c} = \frac{1}{2c}.$$

Mit Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} u_a = \frac{\partial (u \circ \tau)}{\partial a}(a, b) &= \frac{\partial u}{\partial \tau(a, b)_1}(\tau(a, b)) \cdot \frac{\partial \tau(a, b)_1}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial \tau(a, b)_2}(\tau(a, b)) \cdot \frac{\partial \tau(a, b)_2}{\partial a} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \cdot \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \cdot \frac{\partial t}{\partial a} \\ &= \frac{1}{2} u_x - \frac{1}{2c} u_t \end{aligned}$$

sowie analog

$$u_b = \frac{\partial (u \circ \tau)}{\partial b}(a, b) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \cdot \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \cdot \frac{\partial t}{\partial b} = \frac{1}{2} u_x + \frac{1}{2c} u_t.$$

(c) Mit Kettenregel und der Wellengleichung gilt

$$
\begin{aligned}
u_{ab} &= \frac{\partial u_a}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{2}u_x - \frac{1}{2c}u_t\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial u_x}{\partial b} - \frac{1}{2c}\frac{\partial u_t}{\partial b} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}(x,t)\cdot\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial u_x}{\partial t}(x,t)\cdot\frac{\partial t}{\partial b}\right) - \frac{1}{2c}\left(\frac{\partial u_t}{\partial x}(x,t)\cdot\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial u_t}{\partial t}(x,t)\cdot\frac{\partial t}{\partial b}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_{xx} + \frac{1}{2c}u_{xt}\right) - \frac{1}{2c}\left(\frac{1}{2}u_{tx} + \frac{1}{2c}u_{tt}\right) \\
&= \frac{1}{4}u_{xx} - \frac{1}{4c^2}u_{tt} = \frac{1}{4c^2}(c^2u_{xx} - u_{tt}) = 0.
\end{aligned}
$$

(d) Es gilt

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \iint u_{ab}\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}a = \iint 0\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}a = \int \tilde{f}(a)\,\mathrm{d}a \\
&= f(a) + g(b) = f(x-ct) + g(x+ct)
\end{aligned}
$$

für geeignete Funktionen $f, g, \tilde{f} \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.