Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Johannes Hoffmann

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure III*
Wintersemester 2021/22
Blatt 8 – Musterlösung
Abgabe: Freitag, 10.12.2021, 22:00 Uhr über Moodle

Aufgabe 1 (2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 Punkte)**.** Bestimmen Sie die Jordan-Formen der folgenden reellen Matrizen:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 2 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 5 \end{pmatrix}$ wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(e) $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mit Eigenwerten 42, π und e, wobei

$$a(42) = g(42) = g(\mathrm{e}) = 1 \quad \text{und} \quad a(\pi) = g(\pi) = a(\mathrm{e}) = 2.$$

(f) $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mit $\chi_A(\lambda) = -\lambda^5 + \lambda$.

Hinweis: Die Transformationsmatrizen sind hier nicht gefragt – Sie müssen also nur so weit rechnen, dass Sie begründen können, wie die Jordan-Form aussehen muss.

Lösung. Hinweis: Die Reihenfolge der Jordan-Blöcke auf der Diagonalen der Jordan-Form ist beliebig, es geht immer nur um die Eigenwerte und die Größen der Blöcke!

(a) Da A symmetrisch ist, muss A reell diagonalisierbar sein, es reicht also, die (algebraischen Vielfachheiten der) Eigenwerte auszurechnen. Wegen

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)^3 + 1 + 1 - 3(1-\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 = -\lambda^2(\lambda - 3) \end{aligned}$$

hat A einen einfachen Eigenwert 3 und einen doppelten Eigenwert 0, die Jordan-Form ist also

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alternativ sieht man die Diagonalisierbarkeit an der Dimension von

$$E_0 = \operatorname{kern}(A) = \operatorname{kern}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Es gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2,$$

also hat A einen einfachen Eigenwert 1 und einen zweifachen Eigenwert -1. Es gilt

$$E_{-1} = \operatorname{kern}(A + I_3) = \operatorname{kern}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\},$$

also $g(-1) = \dim(E_{-1}) = 1$. Die Jordan-Form von A ist somit

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

(c) Es gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) - (1-\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2,$$

also hat A einen einfachen Eigenwert -1 und einen doppelten Eigenwert 1. Für den Eigenraum zu 1 gilt

$$\begin{aligned} E_1 = \operatorname{kern}(A - I_3) &= \operatorname{kern}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{kern}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

also $g(1) = \dim(E_1) = 2$. Somit ist A diagonalisierbar, die Jordan-Form ist

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Mittels geeigneter Laplace-Entwicklung oder der Formel für die Determinante einer (verallgemeinerten) Dreiecksmatrix gilt

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_5) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 5-\lambda \end{pmatrix} \\ = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda)(5-\lambda). \end{aligned}$$

Somit hat A fünf verschiedene Eigenwerte und ist diagonalisierbar, die Jordan-Form ist

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(e) Aus $a(42) = g(42) = 1$ erhält man einen Jordan-Block zu 42 der Größe 1. Aus $a(\pi) = g(\pi) = 2$ erhält man zwei Jordan-Blöcke zu π jeweils der Größe 1. Aus $a(\mathrm{e}) = 2$ und $g(\mathrm{e}) = 1$ erhält man einen Jordan-Block zu e der Größe 2. Die Jordan-Form von A ist also

$$J = \begin{pmatrix} 42 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{e} \end{pmatrix}$$

(f) Es gilt

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^5 + \lambda = -\lambda(\lambda^4 - 1) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + \mathrm{i})(\lambda - \mathrm{i}),$$

also hat A fünf verschiedene Eigenwerte und ist diagonalisierbar, die Jordan-Form ist

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Satz. Sei $y' = Ay$ ein System von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Laut Existenz- und Eindeutigkeitssatz gibt es immer eine n-dimensionale reelle Lösung. Die Spektraltheorie liefert immer ein komplexes Fundamentalsystem, dessen Anteile zu reellen Eigenwerten direkt übernommen werden können. Für echt komplexe Eigenwerte geht man wie folgt vor:

- Ist $J \in \mathbb{C}^{k\times k}$ ein Jordan-Block in der Jordan-Form von A zu einem komplexen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, so ist $\overline{J}$ ein korrespondierender Jordan-Block zu $\overline{\lambda}$ in der Jordan-Form von A.
- Ist $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ ein zu J gehöriges komplexes Fundamentalsystem von $y' = Ay$, so ist $\overline{\varphi_1}, \dots, \overline{\varphi_k}$ ein zu $\overline{J}$ gehöriges komplexes Fundamentalsystem von $y' = Ay$.
- Ein zu J und $\overline{J}$ gehöriges **reelles** Fundamentalsystem von $y' = Ay$ ist gegeben durch

$$\operatorname{Re}(\varphi_1), \operatorname{Im}(\varphi_1), \dots, \operatorname{Re}(\varphi_k), \operatorname{Im}(\varphi_k).$$

Hinweis: Insbesondere gilt dies auch für Jordan-"Blöcke" der Größe 1.

Aufgabe 2 (7+7+7 Punkte)**.** Berechnen Sie die allgemeine **reelle** Lösung der folgenden Systeme:

(a) $y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y$ (b) $y' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} y$ (c) $y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$

Lösung. (a) Für

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt mit Entwicklung nach der dritten Spalte

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} &= (-1)^{3+3}(1-\lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + 1). \end{aligned}$$

Somit hat A die (komplexen) Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \mathrm{i}$ und $\lambda_3 = -\mathrm{i}$. Durch Betrachten der Matrix findet man sofort

$$E_1 = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\},$$

alternativ bestimmt man $\operatorname{kern}(A - I_3)$ durch Zeilenumformungen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I}+\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}-\frac{1}{2}\cdot\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Für den Eigenraum zu $\lambda_2 = \mathrm{i}$ bestimmen wir $\mathrm{kern}(A - \mathrm{i}I_3)$ durch Zeilenumformungen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\mathrm{i} & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mathrm{i} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III}\cdot(1-\mathrm{i})^{-1}]{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}+\mathrm{i}\cdot\mathrm{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{Parameter wählen}]{\text{Nullzeile entfernen}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{I}+\mathrm{i}\cdot\mathrm{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \mathrm{i}z \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Somit gilt

$$E_{\mathrm{i}} = \left\{ z \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C} \right\}$$

und somit (da komplex konjugierte Eigenwerte auch komplex konjugierte Eigenvektoren haben)

$$E_{-\mathrm{i}} = E_{\bar{\mathrm{i}}} = \overline{E_{\mathrm{i}}} = \left\{ z \overline{\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} : z \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Ein komplexes Fundamentalsystem $(y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)})$ ist also gegeben durch

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(x), \quad y^{(2)} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(\mathrm{i}x), \quad y^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-\mathrm{i}x).$$

Wegen

$$\mathrm{Re}(y^{(2)}) = \mathrm{Re}\left(\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)) \right) = \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{Im}(y^{(2)}) = \mathrm{Im}\left(\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)) \right) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir die allgemeine reelle Lösung

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(x) + c_2 \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -c_2\sin(x) + c_3\cos(x) \\ c_2\cos(x) + c_3\sin(x) \\ c_1\exp(x) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Für

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2.$$

Somit hat A den doppelten reellen Eigenwert $\lambda = 3$. Es gilt

$$E_3 = \operatorname{kern}(A - 3I) = \operatorname{kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\},$$

also $g(\lambda) = \dim(E_3) = 1 < 2 = a(\lambda)$. Um einen Hauptvektor zweiter Stufe zum Eigenwert $\lambda = 3$ zu finden, lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$(A - 3I)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: v^{(1)}.$$

Die Lösungsmenge ist gegeben durch

$$\left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\},$$

ein Hauptvektor zweiter Stufe ist etwa ($t = 0$)

$$v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit

$$T := \begin{pmatrix} v^{(1)} & v^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir also die Jordan-Form

$$J = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Laut Vorlesung ist eine Fundamentalmatrix für das System $z' = Jz$ (mit $z = T^{-1}y$) gegeben durch

$$Z(x) = \exp(3x) \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

eine Fundamentalmatrix für $y' = Ay$ ist also

$$Y(x) = TZ(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \exp(3x) \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp(3x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine reelle Lösung ist also

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(3x) + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \exp(3x) \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) Für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} &= (2-\lambda)^2 - 1 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3). \end{aligned}$$

Somit hat A die reellen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$. Die Eigenräume sind

$$E_1 = \operatorname{kern}(A - I) = \operatorname{kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$E_3 = \operatorname{kern}(A - 3I) = \operatorname{kern} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ein reelles Fundamentalsystem $(y^{(1)}, y^{(2)})$ für das homogene System $y' = Ay$ ist also gegeben durch

$$y^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \exp(x), \quad y^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(3x).$$

Für die zugehörige Fundamentalmatrix

$$Y(x) = \begin{pmatrix} \exp(x) & \exp(3x) \\ -\exp(x) & \exp(3x) \end{pmatrix}$$

gilt

$$\det(Y(X)) = \exp(x)\exp(3x) + \exp(x)\exp(3x) = 2\exp(4x)$$

und somit

$$Y(x)^{-1} = \frac{1}{2}\exp(-4x) \begin{pmatrix} \exp(3x) & -\exp(3x) \\ \exp(x) & \exp(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \exp(-x) & -\exp(-x) \\ \exp(-3x) & \exp(-3x) \end{pmatrix}.$$

Für

$$r(x) = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

gilt dann

$$Y(x)^{-1} r(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \exp(-x) & -\exp(-x) \\ \exp(-3x) & \exp(-3x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x\exp(-3x) \end{pmatrix}.$$

Mit partieller Integration und Variation der Konstanten folgt

$$c(x) = \int Y(x)^{-1} r(x) \, \mathrm{d}x = \int \begin{pmatrix} 0 \\ x\exp(-3x) \end{pmatrix} \mathrm{d}x = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 \\ 3x+1 \end{pmatrix} \exp(-3x) + \tilde{c},$$

eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems ist also ($\tilde{c} = 0$)

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{s}}(x) = Y(x)c(x) &= -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} \exp(x) & \exp(3x) \\ -\exp(x) & \exp(3x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3x+1 \end{pmatrix} \exp(-3x) \\ &= -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} (3x+1)\exp(3x) \\ (3x+1)\exp(3x) \end{pmatrix} \exp(-3x) = -\frac{1}{9}(3x+1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die allgemeine reelle Lösung des inhomogenen Systems ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} y(x) &= y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{s}}(x) = Y(x)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + Y(x)c(x) \\ &= \underbrace{c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \exp(x) + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(3x)}_{\text{Lösung des homogenen Systems}} \underbrace{- \frac{1}{9}(3x+1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{spezielle Lösung}} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 $(2+(2+4+2)$ Punkte). Das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = r \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{V_1} & 0 & \frac{1}{V_3} \\ \frac{1}{V_1} & -\frac{1}{V_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{V_2} & -\frac{1}{V_3} \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

beschreibt den Salzgehalt in drei miteinander verbundenen Flüssigkeitsbehältern (die physikalischen Einheiten werden der Einfachheit halber weggelassen): Zum Zeitpunkt t ist $y_i(t)$ der Salzgehalt in Behälter T_i, der ein Volumen von $V_i > 0$ hat. Mit einer Rate von $r > 0$ wird nun Flüssigkeit von T_1 nach T_2, von T_2 nach T_3 und schließlich von T_3 zurück nach T_1 gepumpt.

(a) Zeigen Sie, dass 0 ein Eigenwert von A ist. Geben Sie einen Eigenvektor zu 0 an.

(b) Seien nun $V_1 = V_3 = 10$, $V_2 = 5$ und $r = 5$.

(i) Bestimmen Sie die restlichen Eigenwerte von A.

(ii) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der **reellen** Lösungen des Systems.

(iii) Bestimmen Sie das langfristige Salzverhältnis zwischen den Behältern.

Hinweis: Bestimmen Sie dazu die Grenzwerte $\lim_{t\to\infty} y_i(t)$ *in der allgemeinen Lösung des Systems.*

Lösung. (a) **Variante 1: Hinsehen.** Es gilt

$$A \underbrace{\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}}_{=:v} = r \begin{pmatrix} -\frac{1}{V_1} & 0 & \frac{1}{V_3} \\ \frac{1}{V_1} & -\frac{1}{V_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{V_2} & -\frac{1}{V_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+1 \\ 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = 0 = 0 \cdot v,$$

also ist 0 ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $v \neq 0$.

Variante 2: Determinante. Mit der Regel von Sarrus gilt

$$\det(A) = r^3 \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{V_1} & 0 & \frac{1}{V_3} \\ \frac{1}{V_1} & -\frac{1}{V_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{V_2} & -\frac{1}{V_3} \end{pmatrix} = r^3 \left(-\frac{1}{V_1V_2V_3} + \frac{1}{V_1V_2V_3} \right) = r^3 \cdot 0 = 0,$$

also ist A nicht invertierbar, laut B7A2(a) ist damit 0 ein Eigenwert von A. Für den Eigenraum gilt ($\operatorname{kern}(A) = \operatorname{kern}(r^{-1}A)$ für $r > 0$)

$$\begin{aligned} E_0 = \operatorname{kern}(A) &= \operatorname{kern} \begin{pmatrix} -\frac{1}{V_1} & 0 & \frac{1}{V_3} \\ \frac{1}{V_1} & -\frac{1}{V_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{V_2} & -\frac{1}{V_3} \end{pmatrix} = \operatorname{kern} \begin{pmatrix} -\frac{1}{V_1} & 0 & \frac{1}{V_3} \\ 0 & -\frac{1}{V_2} & \frac{1}{V_3} \\ 0 & \frac{1}{V_2} & -\frac{1}{V_3} \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{kern} \begin{pmatrix} -\frac{1}{V_1} & 0 & \frac{1}{V_3} \\ 0 & -\frac{1}{V_2} & \frac{1}{V_3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{kern} \begin{pmatrix} -V_3 & 0 & V_1 \\ 0 & -V_3 & V_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left\{ t \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Variante 3: Lineare Abhängigkeit. Summiert man die drei Zeilen von A auf, so erhält man eine Nullzeile. Folglich sind die Zeilen von A linear abhängig und A ist nicht invertierbar, laut B7A2(a) ist damit 0 ein Eigenwert von A. Genau wie in Variante 2 berechnet man den Eigenraum.

Variante 4: Nach Rezept. Es gilt

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} -\frac{r}{V_1} - \lambda & 0 & \frac{r}{V_3} \\ \frac{r}{V_1} & -\frac{r}{V_2} - \lambda & 0 \\ 0 & \frac{r}{V_2} & -\frac{r}{V_3} - \lambda \end{pmatrix} = \dots \\ &= -\lambda \left(\lambda^2 + r \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_3} \right) \lambda + r^2 \left(\frac{1}{V_2 V_3} + \frac{1}{V_3 V_1} + \frac{1}{V_1 V_2} \right) \right),\end{aligned}$$

also ist 0 ein Eigenwert von A. Genau wie in Variante 2 berechnet man den Eigenraum.

(b) Mit den gegebenen Zahlen gilt

$$A = 5 \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Es gilt

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \dots = -\lambda \left(\lambda^2 + 2\lambda + \frac{5}{4} \right) = -\lambda \left(-1 + \frac{1}{2}\mathrm{i} \right) \left(-1 - \frac{1}{2}\mathrm{i} \right),\end{aligned}$$

also hat A die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 := 0$, $\lambda_2 := -1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ und $\lambda_3 := -1 - \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

(ii) Wegen $(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) = (1+\mathrm{i})(\overline{1-\mathrm{i}}) = |1+\mathrm{i}|^2 = 2$ gilt

$$\begin{aligned}E_{-1+\frac{1}{2}\mathrm{i}} &= \operatorname{kern}\left(A - \left(-1 + \frac{1}{2}\mathrm{i} \right) I_3 \right) = \operatorname{kern}(2A + (2-\mathrm{i}) I_3) \\ &= \operatorname{kern} \begin{pmatrix} -1 + (2-\mathrm{i}) & 0 & 1 \\ 1 & -2 + (2-\mathrm{i}) & 0 \\ 0 & 2 & -1 + (2-\mathrm{i}) \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{kern} \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 0 & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 2 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \\ -2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{C} \right\}.\end{aligned}$$

Ein Fundamentalsystem der **komplexen** Lösungen ist also gegeben durch

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \\ -2 \end{pmatrix} \exp\left(\left(-1 + \frac{1}{2}\mathrm{i} \right) t \right)$$

und

$$\varphi_3(t) = \overline{\varphi_2(t)} = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \\ -2 \end{pmatrix} \exp\left(\left(-1-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right) t\right).$$

Mit den abkürzenden Schreibweisen $s := \sin\left(\frac{1}{2}t\right)$ und $c := \cos\left(\frac{1}{2}t\right)$ gilt

$$\exp\left(\left(-1+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right) t\right) = \exp(-t)\left(\cos\left(\frac{1}{2}t\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{1}{2}t\right)\right) = \exp(-t)(c+\mathrm{i}s)$$

und somit

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) &= \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \\ -2 \end{pmatrix} \exp\left(\left(-1+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right) t\right) = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \\ -2 \end{pmatrix} \exp(-t)(c+\mathrm{i}s) \\ &= \exp(-t)\begin{pmatrix} (1+\mathrm{i})(c+\mathrm{i}s) \\ (1-\mathrm{i})(c+\mathrm{i}s) \\ -2(c+\mathrm{i}s) \end{pmatrix} = \exp(-t)\begin{pmatrix} (c-s)+\mathrm{i}(s+c) \\ (c+s)+\mathrm{i}(s-c) \\ -2c-2\mathrm{i}s \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} c-s \\ c+s \\ -2c \end{pmatrix} \exp(-t)}_{=\mathrm{Re}(\varphi_2(x))} + \mathrm{i} \underbrace{\begin{pmatrix} s+c \\ s-c \\ -2s \end{pmatrix} \exp(-t)}_{=\mathrm{Im}(\varphi_2(x))}. \end{aligned}$$

Ein Fundamentalsystem der **reellen** Lösungen ist also gegeben durch

$$\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Re}(\varphi_2(t)) = \begin{pmatrix} c-s \\ c+s \\ -2c \end{pmatrix} \exp(-t)$$

und

$$\mathrm{Im}(\varphi_2(t)) = \begin{pmatrix} s+c \\ s-c \\ -2s \end{pmatrix} \exp(-t).$$

(iii) Die allgemeine Lösung des Systems ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} c-s \\ c+s \\ -2c \end{pmatrix} \exp(-t) + c_3 \begin{pmatrix} s+c \\ s-c \\ -2s \end{pmatrix} \exp(-t)$$

mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Da $c = \cos\left(\frac{1}{2}t\right) \in [-1,1]$ und $s = \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \in [-1,1]$ gilt

$$c-s, c+s, -2s, -2c \in [-2,2]$$

und damit

$$\lim_{t\to\infty} (c-s)\exp(-t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} (c+s)\exp(-t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} -2c\exp(-t) = 0,$$

sowie

$$\lim_{t\to\infty} (s+c)\exp(-t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} (s-c)\exp(-t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} -2s\exp(-t) = 0.$$

Somit gilt

$$\lim_{t\to\infty} y_1(t) = \lim_{t\to\infty} 2c_1 + c_2 \underbrace{(c-s)\exp(-t)}_{\to 0} + c_3 \underbrace{(s+c)\exp(-t)}_{\to 0} = 2c_1$$

und analog

$$\lim_{t\to 0} y_2(t) = c_1 \quad \text{sowie} \quad \lim_{t\to 0} y_3(t) = 2c_1.$$

Auf lange Sicht verhält sich der Salzgehalt in den Behältern also wie $2 : 1 : 2$, also wie $V_1 : V_2 : V_3$.