Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Johannes Hoffmann

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure III*
Wintersemester 2021/22
Blatt 5 – Musterlösung
Abgabe: Freitag, 19.11.2021, 22:00 Uhr über Moodle

Hinweis: Zur Lösung der Aufgaben dieses Blattes dürfen nur Aussagen der Kapitel 1 und 2 sowie der bisherigen Übungsblätter verwendet werden!

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Seien $m, n, p \in \mathbb{N}$ und I ein offenes Intervall. Seien weiterhin $A : I \to \mathbb{R}^{n\times m}$ und $B : I \to \mathbb{R}^{m\times p}$ (eintragsweise) differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann für alle $x \in I$ gilt:

$$(A(x) \cdot B(x))' = A'(x) \cdot B(x) + A(x) \cdot B'(x).$$

Hinweis: Vergleichen Sie den allgemeinen (i, j)-Eintrag auf beiden Seiten.

Lösung. Seien $a_{ij}, b_{k\ell} : I \to \mathbb{R}$ die differenzierbaren Einträge von A beziehungsweise B. Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und alle $j \in \{1, \dots, p\}$ gilt dann

$$\begin{aligned}((A \cdot B)')_{ij} &= \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}\right)' = \sum_{k=1}^{m} \left(a'_{ik} b_{kj} + a_{ik} b'_{kj}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} a'_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b'_{kj} = (A' \cdot B)_{ij} + (A \cdot B')_{ij}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2 ($4 \cdot 3$ Punkte). Für ein System von zwei homogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y' = Ay \quad \text{mit} \quad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

erwarten wir einen zweidimensionalen Lösungsraum. Wir betrachten den Lösungsansatz

$$y(x) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \exp(\alpha x) + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \exp(\beta x) \quad \text{mit} \quad c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$$

für die folgenden Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie in den folgenden Situationen alle Lösungen, die der Ansatz liefert:

(a) Für $A = A_1$ mit $\alpha = 1$ und $\beta = 3$.

(b) Für $A = A_1$ mit $\alpha = -2$ und $\beta = 4$.

(c) Für $A = A_2$ mit $\alpha = 1$ und $\beta = 2$.

(d) Für $A = A_3$ mit $\alpha = 1$ und $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ beliebig.

Lösung. Allgemein gilt für den Ansatz

$$y'(x) = \begin{pmatrix} \alpha c_1 \\ \alpha c_2 \end{pmatrix} \exp(\alpha x) + \begin{pmatrix} \beta d_1 \\ \beta d_2 \end{pmatrix} \exp(\beta x).$$

(a) Multiplikation der Matrix A_1 mit dem Ansatz liefert

$$A_1 y(x) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} y(x) = \begin{pmatrix} c_1 + 3c_2 \\ 3c_1 + c_2 \end{pmatrix} \exp(x) + \begin{pmatrix} d_1 + 3d_2 \\ 3d_1 + d_2 \end{pmatrix} \exp(3x).$$

Koeffizientenvergleich mit

$$y'(x) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \exp(x) + \begin{pmatrix} 3d_1 \\ 3d_2 \end{pmatrix} \exp(3x)$$

liefert

$$\begin{pmatrix} c_1 + 3c_2 \\ 3c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} d_1 + 3d_2 \\ 3d_1 + d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3d_1 \\ 3d_2 \end{pmatrix},$$

in Form linearer Gleichungssysteme also

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da die beiden Matrizen invertierbar sind (ihre Determinanten sind -9 beziehungsweise -5), sind die einzigen Lösungen gegeben für $c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0$. Somit liefert der Ansatz hier nur die triviale Lösung

$$y(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(3x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Koeffizientenvergleich von $A_1 y(x)$ (wie in (a)) mit

$$y'(x) = \begin{pmatrix} -2c_1 \\ -2c_2 \end{pmatrix} \exp(-2x) + \begin{pmatrix} 4d_1 \\ 4d_2 \end{pmatrix} \exp(4x)$$

liefert

$$\begin{pmatrix} c_1 + 3c_2 \\ 3c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_1 \\ -2c_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} d_1 + 3d_2 \\ 3d_1 + d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4d_1 \\ 4d_2 \end{pmatrix},$$

in Form linearer Gleichungssysteme also

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert die Bedingungen $c_2 = -c_1$ und $d_2 = d_1$, also erhält man aus dem Ansatz die Lösungen

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \exp(-2x) + d_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(4x) \quad \text{mit} \quad c_1, d_1 \in \mathbb{R}.$$

(c) Multiplikation der Matrix A_2 mit dem Ansatz liefert

$$A_2 y(x) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y(x) = \begin{pmatrix} c_1 + 3c_2 \\ 2c_2 \end{pmatrix} \exp(x) + \begin{pmatrix} d_1 + 3d_2 \\ 2d_2 \end{pmatrix} \exp(2x).$$

Koeffizientenvergleich mit

$$y'(x) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \exp(x) + \begin{pmatrix} 2d_1 \\ 2d_2 \end{pmatrix} \exp(2x)$$

liefert

$$\begin{pmatrix} c_1 + 3c_2 \\ 2c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} d_1 + 3d_2 \\ 2d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d_1 \\ 2d_2 \end{pmatrix},$$

in Form linearer Gleichungssysteme also

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert die Bedingungen $c_2 = 0$ und $d_1 = 3d_2$, also erhält man aus dem Ansatz die Lösungen

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(x) + d_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(2x) \quad \text{mit} \quad c_1, d_2 \in \mathbb{R}.$$

(d) Multiplikation der Matrix A_3 mit dem Ansatz liefert

$$A_3 y(x) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y(x) = \begin{pmatrix} c_1 + 3c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \exp(x) + \begin{pmatrix} d_1 + 3d_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \exp(\beta x).$$

Koeffizientenvergleich mit

$$y'(x) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \exp(x) + \begin{pmatrix} \beta d_1 \\ \beta d_2 \end{pmatrix} \exp(\beta x)$$

liefert

$$\begin{pmatrix} c_1 + 3c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} d_1 + 3d_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta d_1 \\ \beta d_2 \end{pmatrix},$$

in Form linearer Gleichungssysteme also

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \beta - 1 & -3 \\ 0 & \beta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert einerseits die Bedingung $c_2 = 0$. Andererseits ist die zweite Matrix invertierbar (wegen $\beta \neq 1$ ist ihre Determinante $(\beta - 1)^2 \neq 0$), also muss $d_1 = d_2 = 0$ gelten. Mit dem Ansatz erhält man also nur die Lösung

$$y(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(\beta x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(x) \quad \text{mit} \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Da β beliebig gewählt war, kann der allgemeine Ansatz in dieser Aufgabe nicht alle Lösungen des Systems finden.

Aufgabe 3 (1+2+5 Punkte)**.** Wir betrachten die folgende lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung auf $(0,\infty)$:

$$y'' = \frac{2}{x^2}y.$$

(a) Schreiben Sie die gegebene Differentialgleichung als ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung und in Matrixform.

(b) Zeigen Sie, dass durch

$$Y(x) = \begin{pmatrix} x^2 & x^{-1} \\ 2x & -x^{-2} \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix des Systems aus (a) gegeben ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Spalten von Y Lösungen des Systems sind und nutzen Sie die Wronski-Determinante, um ihre lineare Unabhängigkeit nachzuweisen.

(c) Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung $y'' = \frac{2}{x^2}y + x$ mit Variation der Konstanten.

Lösung. (a) Eine äquivalente Beschreibung als System ist gegeben durch

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = \frac{2}{x^2}y_1, \end{cases} \qquad \text{beziehungsweise} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{x^2} & 0 \end{pmatrix}}_{=:A(x)} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt

$$A(x)Y(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{x^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 & x^{-1} \\ 2x & -x^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -x^{-2} \\ 2 & 2x^{-3} \end{pmatrix} = Y'(x),$$

also sind die Spalten von $Y(x)$ tatsächlich Lösungen des Systems. Weiterhin gilt

$$W(x) = \det(Y(X)) = \det \begin{pmatrix} x^2 & x^{-1} \\ 2x & -x^{-2} \end{pmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0 \quad \text{für alle} \quad x \in (0,\infty),$$

also sind die Spalten linear unabhängig. Damit ist $Y(x)$ eine Fundamentalmatrix des Systems.

(c) Die Differentialgleichung ist äquivalent zum System

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{x^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}}_{=:r(x)}.$$

Es gilt

$$Y(x)^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -x^{-2} & -x^{-1} \\ -2x & x^2 \end{pmatrix}.$$

Mit Variation der Variablen erhält man

$$\begin{aligned} c(x) &= \int Y^{-1}(x)r(x)\,\mathrm{d}x + \tilde{c} = -\frac{1}{3}\int \begin{pmatrix} -x^{-2} & -x^{-1} \\ -2x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \mathrm{d}x + \tilde{c} \\ &= -\frac{1}{3}\int \begin{pmatrix} -1 \\ x^3 \end{pmatrix} \mathrm{d}x + \tilde{c} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -x \\ \frac{1}{4}x^4 \end{pmatrix} + \tilde{c} \end{aligned}$$

und daher

$$Y(x)c(x) = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} x^2 & x^{-1} \\ 2x & -x^{-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x \\ \frac{1}{4}x^4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -x^3 + \frac{1}{4}x^3 \\ -2x^2 - \frac{1}{4}x^2 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4}x^3 \\ -\frac{9}{4}x^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} x^3 \\ 3x^2 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung des Systems ist also

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} x^{-1} \\ -x^{-2} \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} x^3 \\ 3x^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist folglich

$$y(x) = y_1(x) = c_1x^2 + \frac{c_2}{x} + \frac{x^3}{4} \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4 ($(4+2+(5+5))$ Punkte)**.**

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\operatorname{Spur}(A) := a_{11} + a_{22} \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$A^2 - \operatorname{Spur}(A)A + \det(A)I_2 = 0.$$

(b) Sei

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

ein homogenes lineares System von Differentialgleichungen erster Ordnung. Zeigen Sie, dass dann sowohl y_1 als auch y_2 Lösungen der folgenden homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung sind:

$$y'' = \operatorname{Spur}(A)y' - \det(A)y.$$

(c) Wir betrachten folgendes System aus Aufgabe 2 erneut:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

(i) Lösen Sie das System mittels der Differentialgleichung aus (b).

(ii) Lösen Sie das System durch "Rückwärtseinsetzen": Aufgrund der Dreiecksgestalt der Matrix hängt y_2 nicht von y_1 ab und kann daher elementar bestimmt werden. Schließlich setzt man y_2 in die erste Gleichung ein und bestimmt y_1.

Lösung. (a) Es gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{21}a_{22} & a_{12}a_{21} + a_{22}^2 \end{pmatrix}$$

und

$$\operatorname{Spur}(A)A = (a_{11} + a_{22}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{11}a_{22} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{21}a_{22} & a_{11}a_{22} + a_{22}^2 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} A^2 &- \operatorname{Spur}(A)A \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} - a_{11}^2 - a_{11}a_{22} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} - a_{11}a_{12} - a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{21}a_{22} - a_{11}a_{21} - a_{21}a_{22} & a_{12}a_{21} + a_{22}^2 - a_{11}a_{22} - a_{22}^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} & 0 \\ 0 & a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} \end{pmatrix} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})I_2 = -\det(A)I_2. \end{aligned}$$

Hinweis: Diese Aussage ist der Satz von Hamilton-Cayley in Dimension $n = 2$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}'' &= \left(A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)' = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = A^2 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \overset{\text{(a)}}{=} (\operatorname{Spur}(A)A - \det(A)I_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{Spur}(A)A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \det(A) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \operatorname{Spur}(A) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' - \det(A) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also lösen sowohl y_1 als auch y_2 die Differentialgleichung $y'' = \operatorname{Spur}(A)y' - \det(A)y$.

(c) (i) Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt $\operatorname{Spur}(A) = 2$ und $\det(A) = 1$, y_1 und y_2 erfüllen also die Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$ hat eine doppelte reelle Nullstelle bei 1. Laut Vorlesung ist ein Fundamentalsystem gegeben durch $\exp(x)$ und $x\exp(x)$, folglich gilt für geeignete $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ schon

$$y_1(x) = c_1 \exp(x) + d_1 x \exp(x) \quad \text{und} \quad y_2(x) = c_2 \exp(x) + d_2 x \exp(x),$$

oder kompakt

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \exp(x) + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} x \exp(x).$$

Diesen Ansatz setzen wir in das ursprüngliche System ein: Einerseits gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \exp(x) + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} (x+1) \exp(x) \\ &= \begin{pmatrix} c_1 + d_1 \\ c_2 + d_2 \end{pmatrix} \exp(x) + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} x \exp(x) \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + 3c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \exp(x) + \begin{pmatrix} d_1 + 3d_2 \\ d_2 \end{pmatrix} x \exp(x).$$

Da $\exp(x)$ und $x\exp(x)$ linear unabhängig sind (dies sieht man schnell, wenn man $x = 0$ einsetzt), liefert ein Koeffizientenvergleich

$$\begin{pmatrix} c_1 + d_1 \\ c_2 + d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + 3c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 + 3d_2 \\ d_2 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3d_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies liefert die Bedingungen $d_1 = 3c_2$ und $d_2 = 0$, man erhält also die Lösung

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \exp(x) + \begin{pmatrix} 3c_2 \\ 0 \end{pmatrix} x \exp(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(x) + c_2 \begin{pmatrix} 3x \\ 1 \end{pmatrix} \exp(x).$$

(ii) Es gilt

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + 3y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Die homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung $y_2' = y_2$ hat laut Vorlesung die allgemeine Lösung $y_2(x) = c_2 \exp(x)$ mit $c_2 \in \mathbb{R}$, Einsetzen liefert

$$y_1' = y_1 + 3c_2 \exp(x).$$

Der homogene Anteil hat wiederum die Lösung $(y_1)_{\text{hom}}(x) = c \exp(x)$. Variation von c zu $c(x)$ liefert den Ansatz $y_1(x) = c(x)\exp(x)$. Durch Einsetzen erhält man einerseits

$$y_1'(x) = c'(x) \exp(x) + c(x) \exp(x)$$

und andererseits

$$y_1 + 3c_2 \exp(x) = c(x) \exp(x) + 3c_2 \exp(x).$$

Somit ist y_1 genau dann eine Lösung, wenn $c'(x) \exp(x) = 3c_2 \exp(x)$, also $c'(x) = 3c_2$ und damit

$$c(x) = \int c'(x) \, \mathrm{d}x = \int 3c_2 \, \mathrm{d}x = 3c_2 x + c_1 \quad \text{mit} \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Setzt man die Lösungen abschließend zusammen, so erhält man

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3c_2 x + c_1) \exp(x) \\ c_2 \exp(x) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(x) + c_2 \begin{pmatrix} 3x \\ 1 \end{pmatrix} \exp(x).$$