Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Johannes Hoffmann

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure III*
Wintersemester 2021/22
Blatt 14 – Musterlösung
Abgabe: Freitag, 04.02.2022, 22:00 Uhr über Moodle

Definition. Seien $\gamma, \gamma^{(1)} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ und $\gamma^{(2)} : [c, d] \to \mathbb{R}^m$ Kurven mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, wobei $a < b$ und $c < d$.

- Die Kurve γ heißt *geschlossen*, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- Die zu γ *entgegengesetzte Kurve* ist

$$\gamma^- : [a, b] \to \mathbb{R}^m, \quad t \mapsto \gamma(a + b - t).$$

- Die aus $\gamma^{(1)}$ und $\gamma^{(2)}$ *zusammengesetzte Kurve* ist

$$\gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)} : [a, b + d - c] \to \mathbb{R}^m, \quad t \mapsto \begin{cases} \gamma^{(1)}(t), & \text{falls } a \le t \le b, \\ \gamma^{(2)}(t + c - b), & \text{falls } b \le t \le b + d - c. \end{cases}$$

Aufgabe 1 (5 + 5 + 2 + 2 Punkte)**.** Seien $\gamma, \gamma^{(1)} : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ und $\gamma^{(2)} : [c, d] \to \mathbb{R}^m$ Kurven mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, wobei $a < b$ und $c < d$. Weiterhin sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ ein stetiges Skalarfeld und $F : U \to \mathbb{R}^m$ ein stetiges Vektorfeld. Zeigen Sie:

(a) Die zwei Typen von Kurvenintegralen verhalten sich unterschiedlich unter Orientierungsumkehrung:

(i) $\int_{\gamma^-} f \, \mathrm{d}x = \int_\gamma f \, \mathrm{d}x$. (ii) $\int_{\gamma^-} \langle F, \mathrm{d}x \rangle = -\int_\gamma \langle F, \mathrm{d}x \rangle$.

(b) Die zwei Typen von Kurvenintegralen verhalten sich gleich unter Kurvenzusammensetzung:

(i) $\int_{\gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)}} f \, \mathrm{d}x = \int_{\gamma^{(1)}} f \, \mathrm{d}x + \int_{\gamma^{(2)}} f \, \mathrm{d}x$.

(ii) $\int_{\gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)}} \langle F, \mathrm{d}x \rangle = \int_{\gamma^{(1)}} \langle F, \mathrm{d}x \rangle + \int_{\gamma^{(2)}} \langle F, \mathrm{d}x \rangle$.

(c) Ist F konservativ und γ geschlossen, so gilt $\int_\gamma \langle F, \mathrm{d}x \rangle = 0$.

(d) Ist F konstant, also $F(x) = a \in \mathbb{R}^m$ für alle $x \in U$, so ist F konservativ.

Lösung. (a) Betrachte

$$\psi : [a, b] \to [a, b], \quad t \mapsto a + b - t.$$

Wegen

$$(\psi \circ \psi)(t) = \psi(\psi(t)) = \psi(a + b - t) = a + b - (a + b - t) = t$$

ist ψ selbstinvers, also insbesondere bijektiv. Als Polynomfunktion ist ψ stetig differenzierbar. Wegen $\psi'(t) = -1 < 0$ ist ψ streng monoton fallend. Insgesamt ist ψ also eine orientierungsumkehrende C^1-Parametertransformation. Es gilt $\gamma^- = \gamma \circ \psi$ und mit der Kettenregel

$$(\gamma^-)'(t) = (\gamma \circ \psi)'(t) = \gamma'(\psi(t)) \cdot \psi'(t).$$

(i) Wegen $\psi'(t) = -1 < 0$ gilt $|\psi'(t)| = -\psi'(t)$ und daher mit Substitutionsregel

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma^-} f \,\mathrm{d}x &= \int_a^b f(\gamma^-(t)) \big\|(\gamma^-)'(t)\big\| \,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b f(\gamma(\psi(t))) \|\gamma'(\psi(t)) \cdot \psi'(t)\| \,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b f(\gamma(\psi(t))) \|\gamma'(\psi(t))\| \cdot |\psi'(t)| \,\mathrm{d}t \\
&= -\int_a^b f(\gamma(\psi(t))) \|\gamma'(\psi(t))\| \cdot \psi'(t) \,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \,\mathrm{d}t \\
&= -\int_b^a f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_\gamma f \,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

(ii) Die reelle Zahl $\psi'(t) \in \mathbb{R}$ kann man aus dem Skalarprodukt herausziehen, also folgt mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma^-} \langle F, \mathrm{d}x \rangle &= \int_a^b \big\langle F(\gamma^-(t)), (\gamma^-)'(t) \big\rangle \,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \langle F(\gamma(\psi(t))), \gamma'(\psi(t)) \cdot \psi'(t) \rangle \,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \langle F(\gamma(\psi(t))), \gamma'(\psi(t)) \rangle \cdot \psi'(t) \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \,\mathrm{d}t \\
&= \int_b^a \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \,\mathrm{d}t \\
&= -\int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \,\mathrm{d}t = -\int_\gamma \langle F, \mathrm{d}x \rangle.
\end{aligned}$$

(b) Betrachte

$$\psi : [b, b+d-c] \to [c, d], \quad t \mapsto t + c - b.$$

Die Abbildung

$$\psi^{-1} : [c, d] \to [b, b+d-c], \quad t \mapsto t - (c - b)$$

ist invers zu ψ, also ist ψ bijektiv. Als Polynomfunktion ist ψ stetig differenzierbar. Wegen $\psi'(t) = 1 > 0$ ist ψ streng monoton steigend. Insgesamt ist ψ also eine orientierungstreue C^1-Parametertransformation. Für alle $t \in [b, b+d-c]$ gilt dann

$$(\gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)})(t) = \gamma^{(2)}(t + c - b) = (\gamma^{(2)} \circ \psi)(t).$$

(i) Da sich der Wert von skalaren Kurvenintegralen unter orientierungstreuen Parametertransformation nicht ändert, gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)}} f \,\mathrm{d}x &= \int_a^{b+d-c} f((\gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)})(t)) \big\|(\gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)})'(t)\big\| \,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b f((\gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)})(t)) \big\|(\gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)})'(t)\big\| \,\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_b^{b+d-c} f((\gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)})(t)) \big\|(\gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)})'(t)\big\| \,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b f(\gamma^{(1)}(t)) \big\|(\gamma^{(1)})'(t)\big\| \,\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_b^{b+d-c} f((\gamma^{(2)} \circ \psi)(t)) \big\|(\gamma^{(2)} \circ \psi)'(t)\big\| \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\gamma^{(1)}} f \,\mathrm{d}x + \int_{\gamma^{(2)} \circ \psi} f \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\gamma^{(1)}} f \,\mathrm{d}x + \int_{\gamma^{(2)}} f \,\mathrm{d}x \,.
\end{aligned}$$

(ii) Da sich der Wert von vektoriellen Kurvenintegralen unter orientierungstreuen Parametertransformation nicht ändert, gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)}} \langle F, \mathrm{d}x \rangle \,\mathrm{d}x &= \int_a^{b+d-c} \big\langle F((\gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)})(t)), (\gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)})'(t) \big\rangle \,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \big\langle F((\gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)})(t)), (\gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)})'(t) \big\rangle \,\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_b^{b+d-c} \big\langle F((\gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)})(t)), (\gamma^{(1)} \oplus \gamma^{(2)})'(t) \big\rangle \,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \big\langle F(\gamma^{(1)}(t)), (\gamma^{(1)})'(t) \big\rangle \,\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_b^{b+d-c} \big\langle F((\gamma^{(2)} \circ \psi)(t)), (\gamma^{(2)} \circ \psi)'(t) \big\rangle \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\gamma^{(1)}} \langle F, \mathrm{d}x \rangle + \int_{\gamma^{(2)} \circ \psi} \langle F, \mathrm{d}x \rangle \\
&= \int_{\gamma^{(1)}} \langle F, \mathrm{d}x \rangle + \int_{\gamma^{(2)}} \langle F, \mathrm{d}x \rangle.
\end{aligned}$$

(c) Da γ geschlossen ist, gilt $\gamma(a) = \gamma(b)$. Da F konservativ ist, existiert ein Potential $\varphi : U \to \mathbb{R}$ von F. Laut Hauptsatz gilt dann

$$\int_\gamma \langle F, \mathrm{d}x \rangle = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(b)) = 0.$$

(d) Angenommen, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ wäre ein Potential von F. Dann gilt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x) = F_k(x) = a_k \in \mathbb{R} \quad \text{für alle} \quad k \in \{1, \dots, m\}\,,$$

also muss φ linear in x_k sein mit Koeffizient a_k. Nachrechnen zeigt, dass

$$\varphi : U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle x, a \rangle = \sum_{k=1}^{m} a_k x_k = a_1 x_1 + \ldots + a_m x_m$$

tatsächlich ein Potential von F ist. Somit ist F konservativ.

Aufgabe 2 $(4+2+3$ Punkte$)$**.** Betrachten Sie das Vektorfeld

$$F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad x\mapsto\begin{pmatrix}x_1^2+x_2\\x_1+3x_2^2\end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie (die Spur von) $\gamma^{(1)}\oplus\gamma^{(2)}$ und berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\gamma^{(1)}\oplus\gamma^{(2)}}\langle F,\mathrm{d}x\rangle$ für

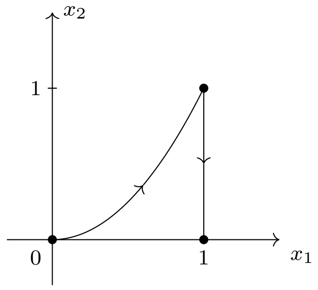
$$\gamma^{(1)}:[0,1]\to\mathbb{R}^2,\quad t\mapsto\begin{pmatrix}t\\t^2\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad\gamma^{(2)}:[0,1]\to\mathbb{R}^2,\quad t\mapsto\begin{pmatrix}1\\1-t\end{pmatrix}.$$

(b) Geben Sie eine Parametrisierung $\tilde\gamma$ der Gerade an, die die Punkte $\gamma^{(1)}(0)$ und $\gamma^{(2)}(1)$ verbindet. Zeigen Sie, dass $\int_{\tilde\gamma}\langle F,\mathrm{d}x\rangle$ den gleichen Wert wie das Kurvenintegral aus Teil (a) annimmt.

(c) Die Gleichheit der zwei Kurvenintegrale sowie die Tatsache, dass F die notwendige Integrabilitätsbedingung erfüllt ($\frac{\partial F_1}{\partial x_2}=1=\frac{\partial F_2}{\partial x_1}$), lassen die Vermutung aufkommen, dass F konservativ sein könnte. Bestätigen Sie diese Vermutung, in dem Sie ein Potential von F berechnen.

Hinweis: Vergleichen Sie die herkömmlichen Integrale $\int F\,\mathrm{d}x_1$ und $\int F\,\mathrm{d}x_2$.

Lösung. (a) Die (Spur der) zusammengesetzten Kurve γ sieht wie folgt aus, wobei die Pfeile die Orientierung der Kurve anzeigen:



Es gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma\langle F,\mathrm{d}x\rangle&=\int_{\gamma^{(1)}}\langle F,\mathrm{d}x\rangle+\int_{\gamma^{(2)}}\langle F,\mathrm{d}x\rangle\\&=\int_0^1\left\langle\begin{pmatrix}2t^2\\t+3t^4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2t\end{pmatrix}\right\rangle\mathrm{d}t+\int_0^1\left\langle\begin{pmatrix}2-t\\1+3(1-t)^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right\rangle\mathrm{d}t\\&=\int_0^1 6t^5+4t^2\,\mathrm{d}t+\int_0^1-3t^2+6t-4\,\mathrm{d}t\\&=\left[t^6+\frac{1}{3}t^3+3t^2-4t\right]_0^1=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

(b) Es gilt $\gamma^{(1)}(0)=(0,0)$ und $\gamma^{(2)}(1)=(1,0)$, eine Parametrisierung der direkten Verbindungsstrecke ist etwa

$$\tilde\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2,\ t\mapsto\begin{pmatrix}t\\0\end{pmatrix}\quad\text{mit}\quad\tilde\gamma'(t)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\int_{\tilde\gamma}\langle F,\mathrm{d}x\rangle=\int_0^1\left\langle\begin{pmatrix}t^2\\t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle\mathrm{d}t=\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}=\int_\gamma\langle F,\mathrm{d}x\rangle.$$

(c) Jedes Potential $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ von F erfüllt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) = x_1^2 + x_2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(x) = x_1 + 3x_2^2.$$

Integrieren ergibt

$$\varphi(x) = \int x_1^2 + x_2 \,\mathrm{d}x_1 = \frac{1}{3}x_1^3 + x_1x_2 + \psi_1(x_2) + C_1$$

sowie

$$\varphi(x) = \int x_1 + 3x_2^2 \,\mathrm{d}x_2 = x_1x_2 + x_2^3 + \psi_2(x_1) + C_2$$

mit geeigneten Funktionen $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Durch Gleichsetzen erhält man (bis auf Konstanten)

$$\frac{1}{3}x_1^3 + x_1x_2 + \psi_1(x_2) = \varphi(x) = x_1x_2 + x_2^3 + \psi_2(x_1),$$

also

$$\psi_1(x_2) = x_2^3 \quad \text{und} \quad \psi_2(x_1) = \frac{1}{3}x_1^3.$$

Ein Potential von F ist somit gegeben durch

$$\varphi(x) = \frac{1}{3}x_1^3 + x_1x_2 + x_2^3.$$

Bonus: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $U \subseteq \mathbb{R}^m$. Laut dem gewöhnlichen Hauptsatz kann man eine Stammfunktion einer eindimensionalen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ berechnen als $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, wobei $a \in I$ ein fest gewählter Punkt ist. Analog kann man ein Potential eines konservativen Vektorfelds $F : U \to \mathbb{R}^m$ berechnen: Dazu wählt man eine Kurve γ in U, die von einem fest gewählten Punkt $a \in U$ zum generischen Punkt $x \in U$ verläuft, und berechnet $\varphi(x) := \int_\gamma \langle F, \mathrm{d}x\rangle$. Da für konservative Vektorfelder der Wert des Integrals nur von den Endpunkten der Kurve abhängt, muss φ dann ein Potential von F sein.

Wenn man nicht weiß, ob F konservativ ist, kann man so zumindest versuchen, einen Kandidaten für ein Potential zu bestimmen, und dann überprüfen, ob das Ergebnis tatsächlich ein Potential ist.

In diesem Beispiel kann man $a = 0$ und die direkte Verbindung von a zu x wählen, also $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto a + t(x-a) = tx$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(x) := \int_\gamma \langle F, \mathrm{d}x\rangle &= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} (tx_1)^2 + tx_2 \\ tx_1 + 3(tx_2)^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \int_0^1 (x_1^3 + 3x_2^3)t^2 + 2x_1x_2t \,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{3}(x_1^3 + 3x_2^3)t^3 + x_1x_2t^2 \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}x_1^3 + x_2^3 + x_1x_2.
\end{aligned}$$

Nachrechnen zeigt, dass $\operatorname{grad}\varphi = F$, also ist φ ein Potential von F und F ist somit konservativ.

Aufgabe 3 (2 + 2 + 2 Punkte). Sei

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} \\ \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass F die notwendige Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$ erfüllt.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma \langle F, \mathrm{d}x \rangle$.

(c) Ist F konservativ?

Lösung. (a) Mit Quotientenregel gilt

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} = -\frac{1 \cdot (x_1^2 + x_2^2) - x_2 \cdot 2x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = -\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

und

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{1 \cdot (x_1^2 + x_2^2) - x_1 \cdot 2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2},$$

also erfüllt F die Integrabilitätsbedingung.

(b) Wegen $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \int_\gamma \langle F, \mathrm{d}x \rangle &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{\sin(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} \\ \frac{\cos(t)}{\cos^2(t)+\sin^2(t)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos'(t) \\ \sin'(t) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}t = 2\pi. \end{aligned}$$

(c) Die Kurve γ ist geschlossen, da cos und sin beide 2π-periodisch sind. Wäre F also konservativ, so müsste laut Aufgabe 1 schon $\int_\gamma \langle F, \mathrm{d}x \rangle = 0$ gelten im Widerspruch zu Teil (a). Also kann F nicht konservativ sein, auch wenn die notwendige Integrabilitätsbedingung erfüllt ist.

Aufgabe 4 (6 + 5 Punkte)**.**

(a) Sei $H = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0\}$ sowie

$$E_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 < 1\right\} \quad \text{und} \quad E_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{x_1^2}{9} + x_2^2 \leq 1\right\}.$$

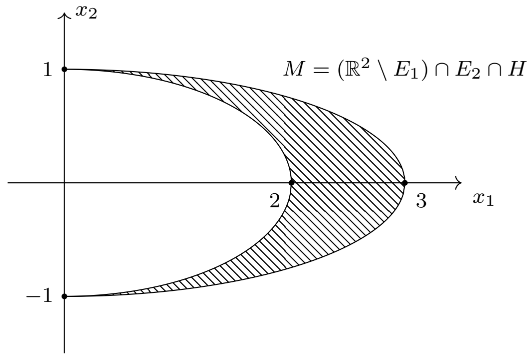
Skizzieren Sie die Menge $M = (\mathbb{R}^2 \setminus E_1) \cap E_2 \cap H$ und berechnen Sie $\int_M x_1 \,\mathrm{d}V$.

(b) Berechnen Sie $\int_Q \exp(x_3)\,\mathrm{d}V$, wobei

$$Q = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\right\}.$$

Hinweis: Da hier stetige Funktionen über kompakte Mengen integriert werden, ist die Voraussetzung im Satz von Fubini jeweils erfüllt und muss nicht extra nachgewiesen werden.

Lösung. (a) Die Mengen E_1 und E_2 beschreiben jeweils Ellipsen. Die Menge M besteht also aus allen Punkten in der rechten Halbebene, die in oder auf der Ellipse E_2 liegen, aber nicht in der Ellipse E_1:



Sei $x \in M$. Wegen $M \subseteq H$ gilt $x_1 \geq 0$. Wegen $M \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus E_1$ gilt $x_1^2 \geq 4(1 - x_2^2)$, also

$$x_1 \geq 2\sqrt{1 - x_2^2}, \quad \text{wobei} \quad x_2 \in [-1, 1].$$

Wegen $x \in E_2$ gilt $x_1^2 \leq 9(1 - x_2^2)$, also

$$x_1 \leq 3\sqrt{1 - x_2^2}, \quad \text{wobei} \quad x_2 \in [-1, 1].$$

Somit ist M Normalbereich in x_1-Richtung und mit dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned}
\int_M x_1 \,\mathrm{d}V &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{2\sqrt{1-x_2^2}}^{3\sqrt{1-x_2^2}} x_1 \,\mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2 \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\left[\frac{1}{2} x_1^2 \right]_{2\sqrt{1-x_2^2}}^{3\sqrt{1-x_2^2}} \right) \mathrm{d}x_2 \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(\left(3\sqrt{1 - x_2^2}\right)^2 - \left(2\sqrt{1 - x_2^2}\right)^2 \right) \mathrm{d}x_2 \\
&= \frac{5}{2} \int_{-1}^{1} 1 - x_2^2 \,\mathrm{d}x_2 \\
&= \frac{5}{2} \left[x_2 - \frac{1}{3} x_2^3 \right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{5}{2} \left(1 - \frac{1}{3} - (-1) - \frac{1}{3} \right) = \frac{10}{3}.
\end{aligned}$$

(b) Sei $x \in Q$, also $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ und $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$. Dann gilt

$$0 \leq x_3 \leq 1 - x_1 - x_2, \quad 0 \leq x_2 \leq 1 - x_1 \quad \text{und} \quad 0 \leq x_1 \leq 1,$$

mit dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned}
\int_Q \exp(x_3)\,\mathrm{d}V &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x_1} \left(\int_0^{1-x_1-x_2} \exp(x_3)\,\mathrm{d}x_3 \right) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x_1} \exp(1 - x_1 - x_2) - 1\,\mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 \\
&= \int_0^1 \left(\big[-\exp(1 - x_1 - x_2) - x_2 \big]_0^{1-x_1} \right) \mathrm{d}x_1 \\
&= \int_0^1 - \underbrace{\exp(1 - x_1 - (1 - x_1))}_{=\exp(0)=1} - (1 - x_1) + \exp(1 - x_1)\,\mathrm{d}x_1 \\
&= \int_0^1 -2 + x_1 + \exp(1 - x_1)\,\mathrm{d}x_1 \\
&= \left[-2x_1 + \frac{1}{2}x_1^2 - \exp(1 - x_1) \right]_0^1 \\
&= -2 + \frac{1}{2} - 1 + \exp(1) = \mathrm{e} - \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (10 Bonuspunkte)**.** Betrachten Sie die Kurve im $\mathbb{R}^3$, die durch den Schnitt der Flächen

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad x - 2z = 3$$

gegeben ist. Finden Sie die Punkte auf dieser Kurve, die den kleinsten Abstand zum Ursprung haben.

Lösung. Zu minimieren ist die Funktion

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Da die Wurzelfunktion streng monoton steigend ist, hat $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$ die gleichen Extremstellen und ist etwas leichter zu handhaben (der *Wert* der beiden Funktionen kann natürlich verschieden sein). Wir suchen also die Extrema von f auf der Menge $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$, wobei

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} g_1(x, y, z) \\ g_2(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - z^2 \\ x - 2z - 3 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$Dg = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix Dg hat nur dann nicht vollen Rang, wenn die erste Zeile ein Vielfaches der zweiten Zeile ist. Dafür muss $y = 0$ gelten und $2x = \frac{2x}{1} = \frac{-2z}{-2} = z$. Setzt man dies in die erste Nebenbedingung ein, erhält man $x^2 = x^2 + y^2 = z^2 = 4x^2$, also $x = 0$ und damit auch $z = 0$. Dies liefert einen Widerspruch zur zweiten Nebenbedingung, denn $3 \neq 0 = x - 2z$. Also ist der Satz von Blatt 13 anwendbar: Für alle Extremstellen (x, y, z) von f auf M existiert also ein Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \operatorname{grad} f = \lambda_1 \operatorname{grad} g_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} g_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten Komponente $2y = \lambda_1 \cdot 2y$ folgt $\lambda_1 = 1$ oder $y = 0$.

Falls $\lambda_1 = 1$, so lautet die erste Gleichung $2x = 2x + \lambda_2$, also folgt $\lambda_2 = 0$. Die dritte Gleichung ist dann $2z = -2z$, also folgt $z = 0$ und aus der zweiten Nebenbedingung $x = 2z + 3 = 3$. Die erste Nebenbedingung lautet dann $9 + y^2 = x^2 + y^2 = z^2 = 0$ und führt zum Widerspruch $y^2 = -9$.

Also muss $y = 0$ gelten. Aus der ersten Nebenbedingung $x^2 = z^2$ erhält man also $z = \pm x$.

- Aus $z = x$ folgt mit der zweiten Nebenbedingung $x = 2x + 3$, also $x = -3$ und somit $(x, y, z) = (-3, 0, -3)$.
- Aus $z = -x$ folgt mit der zweiten Nebenbedingung $x = -2x + 3$, also $x = 1$ und somit $(x, y, z) = (1, 0, -1)$.

Mit diesen zwei Kandidaten gehen wir nun zurück zur eigentlichen Funktion $\tilde{f}$: Es gilt

$$\tilde{f}(-3,0,-3) = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

und

$$\tilde{f}(1,0,-1) = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

also liegt der Punkt $(1,0,-1)$ näher am Ursprung. Gäbe es einen Punkt in M, der näher am Ursprung liegen würde, hätten wir ihn als Kandidaten finden müssen, also ist $(1,0,-1)$ der Punkt auf der von g_1 und g_2 definierten Kurve, der den kleinsten Abstand zum Ursprung hat.

Alternativ: Man kann die zweite Nebenbedingung $x = 2z+3$ benutzen, um die Fragestellung auf ein Problem mit nur zwei Variablen und einer Nebenbedingung zurückzuführen: Minimiere

$$f(2z+3,y,z) = (2z+3)^2 + y^2 + z^2 = 5z^2 + 12z + 9 + y^2$$

unter der Nebenbedingung

$$0 = g_1(2z+3,y,z) = (2z+3)^2 + y^2 - z^2 = 3z^2 + 12z + 9 + y^2.$$

Man zeigt, dass jeder kritische Punkt von g_1 gleichzeitig die Nebenbedingung g_1 verletzt und wendet den Satz von Blatt 13 für $n = 1$ an, das ist genau die Version aus der Vorlesung. Man erhält die Kandidaten $(0,-1)$ und $(0,-3)$ für (y,z) und letztendlich das gleiche Ergebnis.