Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Fakultät für Mathematik und Informatik

Saarbrücken, 08.04.2021

Klausur zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure III

i) Die folgende Klausur besteht aus 4 Aufgaben mit jeweils 20 Bewertungspunkten.

ii) Jede der 4 Aufgaben ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten.

iii) Achten Sie auf eine saubere Argumentation, d.h.:

Schreiben Sie alle Lösungsschritte hin und begründen Sie diese – auch wenn eine Aufgabe als Frage formuliert ist, ist die Antwort selbstverständlich zu begründen.

Für geratene oder unbegründete Lösungen gibt es keine Punkte.

iv) Der Einsatz eines Taschenrechners ist nur für elementare Berechnungen erlaubt.

Komplexere Algorithmen auf der Basis eines Taschenrechners sind keine erlaubten Hilfsmittel.

v) Weiteres erlaubtes Hilfsmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt.

vi) Benutzen Sie einen dokumentenechten Stift.

Aufzeichnungen mit Bleistift werden nicht gewertet.

Aufgabe 1. (*Gewöhnliche Differentialgleichungen, Systeme, Spektraltheorie quadratischer Matrizen; (4+6)+(5+5) Punkte*)

i) (a) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$y'' - y' - 2y = 0$$

und berechnen Sie die zugehörige Wronski-Determinante.

(b) Bestimmen Sie die (reelle) allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y'' - y' - 2y = -2x^3$$

mithilfe eines Ansatzes nach der rechten Seite.

Bitte wenden.

ii) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie ein reelles Fundamentalsystem von Lösungen des homogenen Differentialgleichungssystems erster Ordnung

$$\underline{\mathbf{y}}' = A\underline{\mathbf{y}}$$

an und berechnen Sie die zugehörige Wronski-Determinante.

(b) Bestimmen Sie die (reelle) allgemeine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems erster Ordnung

$$\underline{\mathbf{y}}' = A\underline{\mathbf{y}} + \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. *(Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen; 3+3+(2+1+3+8) Punkte)*

i) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}, \\ 0 & \text{für } \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}. \end{cases}$$

Ist f stetig auf $\mathbb{R}^2$?

ii) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{y}}) = \begin{pmatrix} y_1 y_2 \\ y_2 + y_1 y_2 \end{pmatrix}.$$

Auf $U = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \neq x_2\}$ sei weiter $g\colon U \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$g(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \dfrac{x_1}{x_2 - x_1} \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie für beliebiges $\underline{\mathbf{x}} \in U$ unter Verwendung der Kettenregel die Jacobi-Matrix $D(f \circ g)(\underline{\mathbf{x}})$.

iii) Es seien

$$U = \left\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \colon \|\underline{\mathbf{x}}\|^2 < 1\right\}, \quad \overline{U} = \left\{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \colon \|\underline{\mathbf{x}}\|^2 \leq 1\right\}$$

und die Funktion $f\colon \overline{U} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \ln\left(1 + \frac{x_1 x_2}{2}\right).$$

(a) Es sei $\underline{\mathbf{x}} \in U$. Berechnen Sie $\nabla f(\underline{\mathbf{x}})$ und $(\operatorname{Hess} f)(\underline{\mathbf{x}})$.

(b) Welche der beiden Mengen U und $\overline{U}$ ist kompakt?

(c) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f auf U.

(d) Existieren globale Extrema von f auf $\overline{U}$? Falls ja, bestimmen Sie diese.

Aufgabe 3. (*Integralrechnung in mehreren Veränderlichen; 10+10 Punkte*)

i) Es seien

$$G_1 = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \colon \|\underline{\mathbf{x}}\| \leq 1 \right\}, \quad G_2 = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \colon \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \frac{1}{2} \right\}$$

und $G = G_1 \cap G_2$. Berechnen Sie das Volumen von G, d.h.

$$\int_G 1 \, \mathrm{d}V$$

mithilfe des Transformationssatzes, indem Sie Zylinderkoordinaten verwenden.

ii) Schreiben Sie die Menge

$$M = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_1 + x_2 + x_3^2 \leq 1 \right\}$$

als Normalbereich in x_3-Richtung und berechnen Sie das Volumen von M, d.h. berechnen Sie

$$\int_M 1 \, \mathrm{d}V.$$

Aufgabe 4. (*Lineare Abbildungen, Fourier-Reihen; 9+(2+6+3) Punkte*)

i) Es sei $\mathcal{E} = (\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)})$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$. Außerdem seien die Basen $\mathcal{V} = (\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)})$ und $\mathcal{W} = (\underline{\mathbf{w}}^{(1)}, \underline{\mathbf{w}}^{(2)})$ des $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \underline{\mathbf{e}}^{(2)}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} - \underline{\mathbf{e}}^{(2)}$$

und

$$\underline{\mathbf{w}}^{(1)} = \underline{\mathbf{e}}^{(2)}, \quad \underline{\mathbf{w}}^{(2)} = 2\underline{\mathbf{e}}^{(1)} + \underline{\mathbf{e}}^{(2)}.$$

Die lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ habe bezüglich der Basen $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ die Matrixdarstellung

$$A_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Matrixdarstellung $A_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}$ von L bezüglich der Basis $\mathcal{V}$ und die Matrixdarstellung $A_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}$ von L bezüglich der Basen $\mathcal{W}$ und $\mathcal{V}$.

[**Erinnerung zur Notation:** Ist $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und sind $\mathcal{G}$ (als Basis des Urbildraumes) und $\mathcal{H}$ (als Basis des Bildraumes) Basen des $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$, so bezeichnet $A_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}} \in M(n,m)$ die Matrixdarstellung der linearen Abbildung L bezüglich dieser Basen.]

Bitte wenden.

ii) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion mit

$$f(x) = x + \sin(2x) - \pi, \quad 0 \le x < 2\pi.$$

(a) Bestimmen Sie die explizite Abbildungsvorschrift $f(x) = \ldots$ für $-2\pi \le x < 0$. Ist f eine gerade bzw. ungerade Funktion?

(b) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe von f.

(c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Fourier-Reihe gegen die Funktion f?

Einsicht
Di
$11^{\underline{00}}$
13. April
Hörsaal 2

Viel Erfolg!