Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
B.Sc. Nils Gutheil

Saarbrücken, 20.02.2019

Klausur zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure III

i) Die folgende Klausur besteht aus 4 Aufgaben mit jeweils 10 Bewertungspunkten.

ii) Jede der 4 Aufgaben ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten.

iii) Achten Sie auf eine saubere Argumentation, d.h.:

Schreiben Sie alle Lösungsschritte hin und begründen Sie diese – auch wenn eine Aufgabe als Frage formuliert ist, ist die Antwort selbstverständlich zu begründen.

Für geratene oder unbegründete Lösungen gibt es keine Punkte.

iv) Der Einsatz eines Taschenrechners ist nur für elementare Berechnungen erlaubt.

Komplexere Algorithmen auf der Basis eines Taschenrechners sind keine erlaubten Hilfsmittel.

v) Weiteres erlaubtes Hilfsmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt.

vi) Benutzen Sie einen dokumentenechten Stift. *Aufzeichnungen mit Bleistift werden nicht gewertet.*

Aufgabe 1. *(Gewöhnliche lineare DGl./Systeme; 1.5+1.5+1.5+4+1.5 Punkte)*

Betrachten Sie die gewöhnliche homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$L[y] := y'' + 4y' + 4y = 0 \ .$$

i) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen.

ii) Zeigen Sie dabei explizit mithilfe der Wronski-Determinante, dass die gefundenen Lösungen linear unabhängig sind.

iii) Berechnen Sie die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems mit

$$y(0) = 1 \ , \quad y'(0) = 1 \ .$$

Bitte wenden.

iv) Es sei $k \in \mathbb{N}$ fixiert. Bestimmen Sie *mithilfe einer Variation der Konstanten* eine spezielle Lösung von
$$L[y] = x^k e^{-2x} \ .$$

v) Führen Sie die Gleichung $L[y] = 0$ auf ein lineares System erster Ordnung der Form
$$\underline{\mathbf{y}}' = A\underline{\mathbf{y}} \ , \qquad A \in M(2,2,\mathbb{R}) \ ,$$
zurück und bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen dieses Systems.

Aufgabe 2. *(Stetigkeit, Differenzierbarkeit; 2+2+6 Punkte)*

i) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch
$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{cases} \dfrac{(x_1+x_2)^2}{\|\underline{\mathbf{x}}\|^2} & \text{für} \quad \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}} \ , \\ 1 & \text{für} \quad \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}} \ . \end{cases}$$
Ist f stetig auf $\mathbb{R}^2$?

ii) Für die folgende Verkettung $h = f \circ g$, $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, berechne man mithilfe der Kettenregel die Jacobi-Matrix:
$$g(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1^2 + x_2^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix} \ , \qquad f(\underline{\mathbf{y}}) = \begin{pmatrix} e^{y_1+y_3} \\ \ln(1+y_2) \end{pmatrix} \ .$$

iii) Es sei $a \in (0,1)$ fixiert. Betrachten Sie die Funktion
$$f \ : \ B^a := \Big\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x_1-a)^2 + x_2^2 \leq 4 \Big\} \to \mathbb{R} \ , \quad f(\underline{\mathbf{x}}) = e^{x_1^2 - x_2^2} \ .$$
Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema von f.

Aufgabe 3. *(Integralrechnung; 5+5 Punkte)*

i) Es seien
$$H = \Big\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1^2 - x_2^2 \geq \frac{1}{2} \Big\} \ , \qquad B = \Big\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \Big\} \ ,$$
$$Q = \Big\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \Big\} \ , \qquad M = H \cap B \cap Q \ .$$

Bestimmen Sie zunächst in der Menge Q den Schnittpunkt der Hyperbel $x_1^2 - x_2^2 = 1/2$ mit der Kreislinie $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Skizzieren Sie dann M und berechnen Sie $\int_M x_1 x_2 \, \mathrm{d}V$.

ii) Es seien $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ und $R \geq 1$ fixiert. Betrachten Sie

$$Z = Z_{a,b} = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1 \right\} ,$$

$$E = E^R_{a,b,c} = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} \leq R^2 \right\} .$$

Fertigen Sie eine Skizze an und berechnen Sie das Volumen von $Z \cap E$, indem Sie „modifizierte" Zylinderkoordinaten betrachten:

$$g : \quad \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ar\cos(\varphi) \\ br\sin(\varphi) \\ cz \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{x}} .$$

Aufgabe 4. *(Gemischte Aufgaben; 3.5+3+(1.5+2) Punkte)*

i) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ für alle $x \in [-\pi, \pi)$, und für alle $x \in \mathbb{R}$ gelte $f(x) = f(x + 2\pi)$, d.h. f sei 2π-periodisch.

Berechnen Sie die Fourier-Reihe von f.

ii) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Rechnen Sie dabei komplex.

iii) (a) Betrachten Sie für fixierte n, $m \in \mathbb{N}$ das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 , \quad F(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} x_1^n + x_2^m \\ m x_1 x_2^{m-1} \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie $\int_\gamma \langle F, \mathrm{d}\underline{\mathbf{x}} \rangle$ für

$$\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2 , \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} .$$

(b) Es seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatte Funktionen. Finden Sie eine Funktion $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sodass das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 , \quad F(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} f'(x_1) + g(x_2) \\ h(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

konservativ ist. Geben Sie in diesem Fall ein Potential $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ von F an.

<u>Viel Erfolg!</u>