Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Johannes Hoffmann

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure III*
Wintersemester 2021/22
Blatt 7 – Musterlösung
Abgabe: Freitag, 03.12.2021, 22:00 Uhr über Moodle

Aufgabe 1 (5 + 5 Punkte). Berechnen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$. Entscheiden Sie anhand Ihrer Erkenntnisse, ob die Matrizen diagonalisierbar sind.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung. (a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+1}(1-\lambda)\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 2 \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1-\lambda & -2 \end{pmatrix} \\
&= (1-\lambda)((-1-\lambda)(-\lambda) - 4) + 2 \cdot (-2)(-1-\lambda) \\
&= 9\lambda - \lambda^3 \\
&= \lambda(3-\lambda)(3+\lambda),
\end{aligned}$$

die Eigenwerte von A sind somit 0, -3 und 3. Für die Eigenräume berechnen wir

$$\begin{aligned}
E_0 = \operatorname{kern}(A) = \operatorname{kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} &= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : v_1 = v_2 = -2v_3 \right\} \\
&= \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_3 = \operatorname{kern}(A - 3I_3) = \operatorname{kern} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} &= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : v_1 = v_3 = -2v_2 \right\} \\
&= \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

und

$$E_{-3} = \operatorname{kern}(A + 3I_3) = \operatorname{kern}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : v_2 = v_3 = -2v_1 \right\}$$
$$= \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Da A drei verschieden Eigenwerte hat, ist A diagonalisierbar. (Drei linear unabhängige Eigenvektoren ist natürlich auch ein korrektes Argument.)

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{2+2}(3-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)((2-\lambda)^2 - 1) \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = (3-\lambda)^2(1-\lambda), \end{aligned}$$

die Eigenwerte von B sind somit 3 und 1. Für die Eigenräume berechnen wir

$$\begin{aligned} E_3 = \operatorname{kern}(B - 3I_3) = \operatorname{kern}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} &= \operatorname{kern}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ = \operatorname{kern}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{kern}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} E_1 = \operatorname{kern}(B - I_3) = \operatorname{kern}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} &= \operatorname{kern}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \\ = \operatorname{kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Da $g(3) = 1 < 2 = a(3)$ ist A nicht diagonalisierbar.

Aufgabe 2 $(2+2+2+2+2$ Punkte$)$. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(a) Die Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn 0 **kein** Eigenwert von A ist.

(b) Ist A invertierbar und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so ist λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1}.

(c) Die Matrizen A und A^T haben dieselben Eigenwerte.

(d) Ist $k \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so ist λ^k ein Eigenwert von A^k.

(e) Ist $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = 0$ (eine solche Matrix A heißt auch *nilpotent*), so ist 0 ein Eigenwert von A und A kann keine anderen Eigenwerte haben.

Lösung. (a) Die Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn sie trivialen Kern hat: $\operatorname{kern}(A) = \{0\}$. Dann gilt aber auch $\operatorname{kern}(A - 0 \cdot I_n) = \{0\}$, also kann 0 kein Eigenwert von A sein. Kurz gefasst:

$$\begin{aligned} A \text{ ist invertierbar} \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{kern}(A) = \{0\} \\ &\Leftrightarrow \quad \operatorname{kern}(A - 0 \cdot I_n) = \{0\} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \text{ ist kein Eigenwert von } A. \end{aligned}$$

(b) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert einer invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Laut (a) gilt $\lambda \neq 0$. Sei nun also $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von A zu λ, also $Av = \lambda v$. Durchmultiplizieren der Gleichung mit A^{-1} und λ^{-1} liefert $A^{-1}v = \lambda^{-1}v$, also ist v ein Eigenvektor von A^{-1} zu λ^{-1}. Anders ausgedrückt:

$$\begin{aligned} v \text{ Eigenvektor von } A \text{ zu } \lambda \quad &\Rightarrow \quad Av = \lambda v \\ &\Rightarrow \quad v = \lambda A^{-1} v \\ &\Rightarrow \quad A^{-1}v = \frac{1}{\lambda} v \\ &\Rightarrow \quad v \text{ Eigenvektor von } A^{-1} \text{ zu } \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1}.

(c) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Da eine (quadratische) Matrix und ihre Transponierte dieselbe Determinante haben, gilt

$$\begin{aligned} \lambda \text{ Eigenwert von } A \quad &\Leftrightarrow \quad \det(A - \lambda I_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \det\left((A - \lambda I_n)^T\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \det\left(A^T - \lambda I_n^T\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \det\left(A^T - \lambda I_n\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda \text{ Eigenwert von } A^T. \end{aligned}$$

(d) Sei $k \in \mathbb{N}$ und $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Wir zeigen, dass v dann auch ein Eigenvektor von A^k zum Eigenwert λ^k ist, also $A^k v = \lambda^k v$ gilt. Der Induktionsanfang ist gerade die Eigenwertgleichung $Av = \lambda v$, für den Induktionsschluss gilt

$$A^{k+1}v = A \cdot A^k v \overset{\text{IV}}{=} A \cdot \lambda^k v = \lambda^k A v \overset{\text{IA}}{=} \lambda^k \cdot \lambda v = \lambda^{k+1} v.$$

(e) Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = 0$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Dann ist v laut (d) auch ein Eigenvektor von A^k zum Eigenwert λ^k, also gilt

$$\lambda^k v = A^k v = 0,$$

also folgt $\lambda^k = 0$ und damit $\lambda = 0$. Wenn A also einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ hat, muss $\lambda = 0$ gelten.

Da das charakteristische Polynom über $\mathbb{C}$ aber Nullstellen haben muss und außer 0 nichts in Frage kommt, muss 0 ein Eigenwert von A sein.

Ein Argument, das auch über $\mathbb{R}$ (und jedem anderen Körper) funktioniert: Laut (a) muss 0 ein Eigenwert von A sein, denn A kann nicht invertierbar sein: Angenommen, A wäre invertierbar, dann erhält man den Widerspruch

$$I_n = I_n^k = (AA^{-1})^k = A^k \left(A^{-1}\right)^k = 0 \cdot \left(A^{-1}\right)^k = 0,$$

wobei man ausnutzt, dass A und A^{-1} vertauschen.

Satz. Seien $k, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalisierbar, etwa $T^{-1}AT = D$ für eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann gilt

$$A^k = TD^kT^{-1}.$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.** Berechnen Sie A^{2021} für

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2},$$

indem Sie zunächst A diagonalisieren und dann den Satz anwenden.

Lösung. Es gilt

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} &= -(1+\lambda)(1-\lambda) + 2 \\ = -(1-\lambda^2) + 2 = \lambda^2 + 1 = (\lambda + \mathrm{i})(\lambda - \mathrm{i}),\end{aligned}$$

also hat A die (komplexen) Eigenwerte $\lambda_1 = \mathrm{i}$ und $\lambda_2 = -\mathrm{i}$. Für die Eigenräume gilt

$$E_{\mathrm{i}} = \operatorname{kern}(A - \mathrm{i}I) = \operatorname{kern} \begin{pmatrix} -1-\mathrm{i} & -2 \\ 1 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} = \left\{ t \begin{pmatrix} \mathrm{i}-1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{C} \right\}$$

sowie

$$E_{-\mathrm{i}} = \operatorname{kern}(A + \mathrm{i}I) = \operatorname{kern} \begin{pmatrix} -1+\mathrm{i} & -2 \\ 1 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} = \left\{ t \begin{pmatrix} \mathrm{i}+1 \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{C} \right\} = \overline{E_{\mathrm{i}}}.$$

Sei also

$$T := \begin{pmatrix} \mathrm{i}-1 & \mathrm{i}+1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2},$$

dann gilt $\det(T) = -\mathrm{i} + 1 - \mathrm{i} - 1 = -2\mathrm{i} = \frac{2}{\mathrm{i}}$ und daher

$$T^{-1} = \frac{\mathrm{i}}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\mathrm{i}-1 \\ -1 & \mathrm{i}-1 \end{pmatrix}.$$

Probe:

$$\begin{aligned} T^{-1}AT &= \frac{\mathrm{i}}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\mathrm{i}-1 \\ -1 & \mathrm{i}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{i}-1 & \mathrm{i}+1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\mathrm{i}-1 \\ -1 & \mathrm{i}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathrm{i}+1-2 & -\mathrm{i}-1+2 \\ \mathrm{i}-1+1 & \mathrm{i}+1-1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\mathrm{i}-1 \\ -1 & \mathrm{i}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathrm{i}-1 & -\mathrm{i}+1 \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{i}+1-\mathrm{i}^2-\mathrm{i} & \mathrm{i}-1-\mathrm{i}^2-\mathrm{i} \\ \mathrm{i}+1+\mathrm{i}^2-\mathrm{i} & \mathrm{i}-1+\mathrm{i}^2-\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mathrm{i}}{2} \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i}^2 & -1-\mathrm{i}^2 \\ 1+\mathrm{i}^2 & -1+\mathrm{i}^2 \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{i}}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit dem Satz gilt also

$$\begin{aligned} A^{2021} &= \left(T \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} T^{-1} \right)^{2021} = T \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}^{2021} T^{-1} = T \cdot \mathrm{i}^{2021} \begin{pmatrix} 1^{2021} & 0 \\ 0 & (-1)^{2021} \end{pmatrix} T^{-1} \\ &= T \cdot \mathrm{i}^{4\cdot 505+1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} T^{-1} = T \cdot \mathrm{i} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} T^{-1} = T \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} T^{-1} = A. \end{aligned}$$

Definition. Eine *Quadrik* (in der Ebene) ist die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}^2$, die Nullstellen einer Funktion $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der folgenden Form sind:

$$Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + f = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f$$

mit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Die Quadriken, die wir im Folgenden betrachten, haben jeweils einen geometrischen Typ: Sie sind Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln. Ist $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ orthogonal, so hat die Quadrik von $\tilde{Q}(x) := Q(Sx)$ denselben Typ wie die von Q, denn die Koordinatentransformation $x \mapsto Sx$ verdreht oder spiegelt die Quadrik nur.

Aufgabe 4 (3 · 4 Punkte)**.** Identifizieren Sie den Typ der folgenden Quadriken. Diagonalisieren Sie dazu die jeweilige Matrix A mit einer orthogonalen Matrix $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und skizzieren Sie die neue Quadrik von $\hat{Q}$.

(a) $a = c = d = e = 0,\ b = \sqrt{2},\ f = -1$

(b) $a = c = 1,\ b = -1,\ d = e = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ f = \pi$

(c) $a = 3,\ b = \sqrt{2},\ c = 4,\ d = e = 0,\ f = -1$

Hinweis: Beachten Sie auch den Abschnitt zur Hauptachsentransformation im Skript.

Lösung. (a) Die gegebene Quadrik ist die Nullstellenmenge der Funktion

$$Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 1 = x^T A x - 1.$$

Zunächst müssen wir A diagonalisieren: Es gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2 = (\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2}),$$

also hat A die reellen Eigenwerte $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$. Für die Eigenräume gilt

$$E_{\sqrt{2}} = \operatorname{kern}(A - \sqrt{2}I) = \operatorname{kern} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$E_{-\sqrt{2}} = \operatorname{kern}(A + \sqrt{2}I) = \operatorname{kern} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nach Normieren erhält man die orthogonale Matrix

$$S := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

die A orthogonal diagonalisiert. Probe:

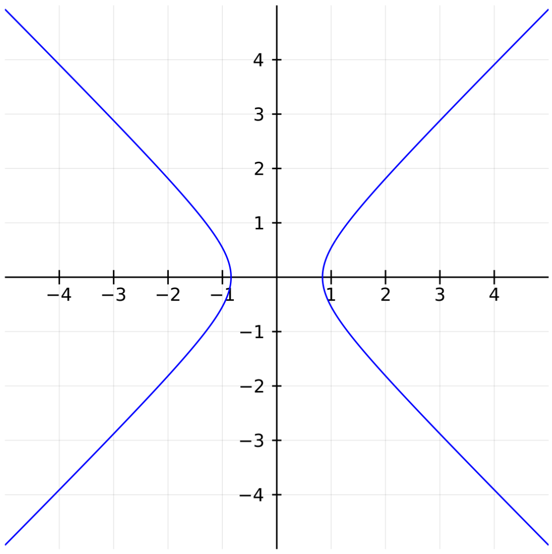
$$\begin{aligned}
S^T A S &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Koordinatentransformation $x \mapsto Sx$ liefert also

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}(x) := Q(Sx) &= (Sx)^T A (Sx) - 1 = x^T S^T A S x - 1 \\
&= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 1 = \sqrt{2} x_1^2 - \sqrt{2} x_2^2 - 1.
\end{aligned}$$

Die Punkte auf der neuen Quadrik $\tilde{Q}$ erfüllen also die Hyperbel-Gleichung

$$x_1^2 - x_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



(b) Die gegebene Quadrik ist die Nullstellenmenge der Funktion

$$Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \pi.$$

Zunächst müssen wir A diagonalisieren: Es gilt

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = (\lambda - 2)\lambda,$$

also hat A die reellen Eigenwerte 2 und 0. Für die Eigenräume gilt

$$E_2 = \operatorname{kern}(A - 2I) = \operatorname{kern} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$E_0 = \operatorname{kern}(A - 0 \cdot I) = \operatorname{kern}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nach Normieren erhält man die orthogonale Matrix

$$S := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

die A orthogonal diagonalisiert. Probe:

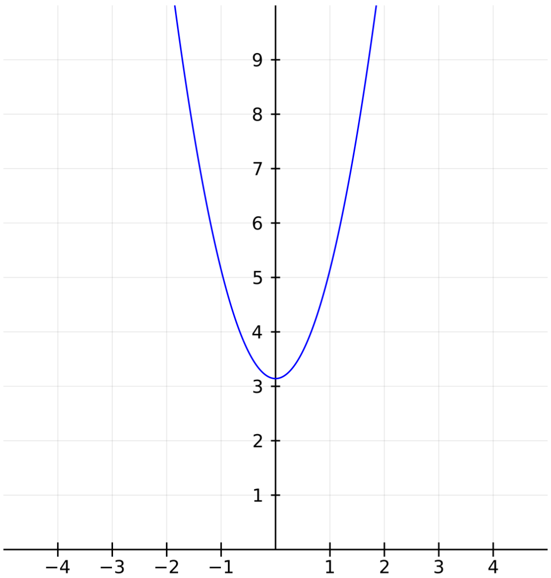
$$\begin{aligned} S^T A S &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Koordinatentransformation $x \mapsto Sx$ liefert also

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(x) := Q(Sx) &= (Sx)^T A (Sx) + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \pi \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \pi \\ &= 2x_1^2 - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \pi = 2x_1^2 - x_2 + \pi. \end{aligned}$$

Die Punkte auf der neuen Quadrik $\tilde{Q}$ erfüllen also die Parabel-Gleichung

$$x_2 = 2x_1^2 + \pi.$$



(c) Die gegebene Quadrik ist die Nullstellenmenge der Funktion

$$Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 1 = x^T A x - 1.$$

Zunächst müssen wir A diagonalisieren: Es gilt

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 4-\lambda \end{pmatrix} &= (3-\lambda)(4-\lambda) - 2 \\ = \lambda^2 - 7\lambda + 12 - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 &= (\lambda-2)(\lambda-5)\end{aligned}$$

also hat A die reellen Eigenwerte 5 und 2. Für die Eigenräume gilt

$$E_5 = \operatorname{kern}(A - 5I) = \operatorname{kern} \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$E_2 = \operatorname{kern}(A - 2I) = \operatorname{kern} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} = \left\{ t \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nach Normieren erhält man die orthogonale Matrix

$$S := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix},$$

die A orthogonal diagonalisiert. Probe:

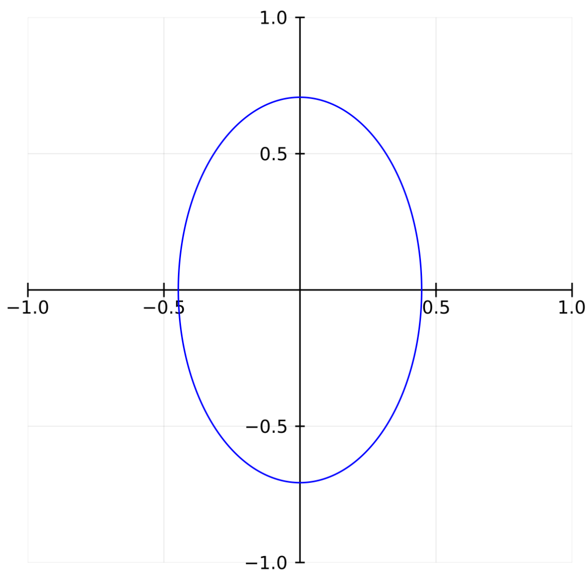
$$\begin{aligned} S^T A S &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2\sqrt{2} \\ 5\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Koordinatentransformation $x \mapsto Sx$ liefert also

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(x) := Q(Sx) &= (Sx)^T A (Sx) - 1 = x^T S^T A S x - 1 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 1 = 5x_1^2 + 2x_2^2 - 1. \end{aligned}$$

Die Punkte auf der neuen Quadrik $\tilde{Q}$ erfüllen also die Ellipsen-Gleichung

$$5x_1^2 + 2x_2^2 = 1.$$



Aufgabe 5 (5 + 5 Bonuspunkte[1]). Das sogenannte *SIS-Modell* beschreibt den Infektionsverlauf einer ansteckenden Krankheit ohne Immunitätsbildung (Genesene können sich wieder infizieren). Der Anteil der infizierten Bevölkerung v in Abhängigkeit von der Zeit $t \geq 0$ wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$v' = R(v_* - v)v \quad \text{mit} \quad v_* := 1 - \frac{1}{R},$$

wobei $R > 0$ die Reproduktionsrate ist, die angibt, wie viele weitere Personen eine infizierte Person in einer gewissen Zeiteinheit ansteckt (im Durchschnitt).

(a) Bestimmen Sie die Gleichgewichtszustände der Differentialgleichung und untersuchen Sie diese auf Stabilität. Machen Sie dazu eine Fallunterscheidung ($R < 1$, $R = 1$, $R > 1$). Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse im Rahmen des Modells.

(b) Sei $v_0 := v(0) \in (0, 1]$ ein Anfangswert mit $v_0 \neq v_*$. Nutzen Sie Separation der Variablen, um zu zeigen, dass die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $R > 1$ gegeben ist durch

$$v(t) = \frac{v_0 v_*}{(v_* - v_0)\exp(-(R-1)t) + v_0}.$$

Bestimmen Sie das Grenzverhalten von v für $t \to \infty$.

Lösung. (a) Die gegebene Gleichung ist eine autonome Differentialgleichung erster Ordnung. Mit $f(v) := R\left(\left(1 - \frac{1}{R}\right) - v\right) v$ sind die Gleichgewichtszustände der Gleichung gerade die Nullstellen von f, also $v = 0$ und $v = v_* := 1 - \frac{1}{R}$. Wir untersuchen drei Fälle:

- Ist $R < 1$, so ist $\frac{1}{R} > 1$ und damit $v_* = 1 - \frac{1}{R} < 0$. Es gilt

$$f(v) = \begin{cases} R\underbrace{(v_* - v)}_{>0}\underbrace{v}_{<0} < 0, & v \in (-\infty, v_*), \\ 0, & v = v_*, \\ R\underbrace{(v_* - v)}_{<0}\underbrace{v}_{<0} > 0, & v \in (v_*, 0), \\ 0, & v = 0, \\ R\underbrace{(v_* - v)}_{<0}\underbrace{v}_{>0} < 0, & v \in (0, \infty), \end{cases}$$

also ist 0 ein stabiler und v_* ein instabiler Gleichgewichtszustand. Da v einen Anteil modelliert, ist $v_* < 0$ hier kein relevanter Gleichgewichtszustand. Im Fall $R < 1$ strebt der Anteil der Infizierten also unabhängig vom Anfangswert gegen 0. Wenn also jeder Infizierte im Schnitt weniger als einen Gesunden ansteckt, stirbt die Infektion auf lange Sicht aus.

[1] Bonuspunkte sind Jokerpunkte: Sie werden am Ende der Vorlesungszeit bei Bedarf automatisch auf Blätter unterhalb der 25%-Grenze angerechnet, um Ihnen eine letzte Chance auf die Klausurzulassung zu geben – allerdings können sie nur für Blätter angerechnet werden, auf denen Sie mindestens einen Punkt erreicht haben.

- Ist $R = 1$, so ist $\frac{1}{R} = 1$ und damit $v_* = 1 - \frac{1}{R} = 0$. Es gilt

$$f(v) = -v^2 = \begin{cases} -v^2 < 0, & v \in (-\infty, 0), \\ 0, & v = 0, \\ -v^2 < 0, & v \in (0, \infty), \end{cases}$$

  also ist 0 ein semi-stabiler Gleichgewichtszustand. Es gilt $v'(t) = -v(t)^2 < 0$, also ist jede Lösung der Differentialgleichung streng monoton fallend. Auch im Fall $R = 1$ stirbt die Infektion also auf lange Sicht aus.

- Ist $R > 1$, so ist $\frac{1}{R} < 1$ und damit $v_* = 1 - \frac{1}{R} > 0$. Es gilt

$$f(v) = \begin{cases} R\underbrace{(v_* - v)}_{>0}\underbrace{v}_{<0} < 0, & v \in (-\infty, 0), \\ 0, & v = 0, \\ R\underbrace{(v_* - v)}_{>0}\underbrace{v}_{>0} > 0, & v \in (0, v_*), \\ 0, & v = v_*, \\ R\underbrace{(v_* - v)}_{<0}\underbrace{v}_{>0} < 0, & v \in (v_*, \infty), \end{cases}$$

  also ist 0 ein instabiler und v_* ein stabiler Gleichgewichtszustand. Ist also die Reproduktionsrate $R > 1$, so strebt der Anteil der Infizierten auf lange Sicht gegen v_*.

(b) Mit $g(v) = R(v_* - v)v$ und $f(t) = 1$ und Separation der Variablen erhält man einerseits

$$\int f(t)\,\mathrm{d}t + c = \int 1\,\mathrm{d}t + c = t + c$$

und andererseits mit Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{g(v)}\,\mathrm{d}v &= \frac{1}{R}\int \frac{1}{(v_* - v)v}\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{R}\left(\int \frac{1}{v_*(v_* - v)} + \frac{1}{v_* v}\,\mathrm{d}v\right) \\ &= \frac{1}{Rv_*}\left(\int \frac{1}{v_* - v}\,\mathrm{d}v + \int \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v\right) \\ &= \frac{1}{Rv_*}(-\ln(|v_* - v|) + \ln(|v|)) \\ &= \frac{1}{Rv_*}\ln\left(\left|\frac{v}{v_* - v}\right|\right), \end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{Rv_*}\ln\left(\left|\frac{v}{v_* - v}\right|\right) = t + c$$

und damit

$$\frac{v}{v_* - v} = c\exp(Rv_* t) = c\exp\left(R\left(1 - \frac{1}{R}\right)t\right) = c\exp((R-1)t).$$

Die Konstante c ermitteln wir aus der Anfangsbedingung $v(0) = v_0$:

$$c = \frac{v(0)}{v_* - v(0)} \exp((R-1)\cdot 0) = \frac{v_0}{v_* - v_0}.$$

Wir formen weiter um: Zunächst erhalten wir

$$v = v_* c \exp((R-1)t) - vc \exp((R-1)t)$$

und dann

$$v(1 + c\exp((R-1)t)) = v_* c \exp((R-1)t),$$

also

$$\begin{aligned} v &= \frac{v_* c \exp((R-1)t)}{1 + c\exp((R-1)t)} \\ &= \frac{v_* c}{\exp(-(R-1)t) + c} \\ &= \frac{v_* \frac{v_0}{v_* - v_0}}{\exp(-(R-1)t) + \frac{v_0}{v_* - v_0}} \\ &= \frac{v_* v_0}{(v_* - v_0)\exp(-(R-1)t) + v_0}. \end{aligned}$$

Wegen $R - 1 > 0$ gilt $-(R-1)t \xrightarrow{t\to\infty} -\infty$ und damit $\exp(-(R-1)t) \xrightarrow{t\to\infty} 0$, also

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{v_* v_0}{(v_* - v_0)\exp(-(R-1)t) + v_0} = \frac{v_* v_0}{v_0} = v_*,$$

unabhängig davon, ob der Anfangswert v_0 oberhalb oder unterhalb vom Gleichgewichtszustand v_* startet.