Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Johannes Hoffmann

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure III*
Wintersemester 2021/22
Blatt 2 – Musterlösung
Abgabe: Freitag, 29.10.2021, 22:00 Uhr über Moodle

Aufgabe 1 (6 + 2 Punkte). Sei $\alpha > 0$. Wir betrachten die nicht-lineare Differentialgleichung zur chemischen Reaktion aus der Vorlesung:

$$y'(x) = -\alpha \cdot y(x)^2 \quad \text{für alle} \quad x \in [0, \infty).$$

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen $y : [0, \infty) \to (0, \infty)$ der Differentialgleichung.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Hilfsfunktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{y(x)} - \alpha x$ differenzierbar ist und bestimmen Sie ihre Ableitung.

(b) Finden Sie die eindeutige Lösung der Differentialgleichung, welche die Anfangswertbedingung $y(0) = 1$ erfüllt.

Lösung. (a) Sei also $y : [0, \infty) \to (0, \infty)$ eine Lösung der Differentialgleichung, dann ist y differenzierbar und es gilt $y(x) \neq 0$ für alle $x \geq 0$. Damit ist laut Quotientenkriterium insbesondere auch die Funktion $\frac{1}{y}$ differenzierbar mit

$$\left(\frac{1}{y(x)}\right)' = \frac{1' \cdot y(x) - 1 \cdot y'(x)}{y(x)^2} = -\frac{y'(x)}{y(x)^2} = -\frac{\alpha y(x)^2}{y(x)^2} = \alpha \quad \text{für alle} \quad x \in [0, \infty),$$

wobei wir direkt ausnutzen, dass y laut Annahme die Differentialgleichung löst. Als Komposition differenzierbarer Funktionen ist damit auch g differenzierbar mit

$$g'(x) = \left(\frac{1}{y(x)} - \alpha x\right)' = \left(\frac{1}{y(x)}\right)' - (\alpha x)' = \alpha - \alpha = 0.$$

Also muss g konstant sein und daher existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $g(x) = c$ für alle $x \in [0, \infty)$. Wegen

$$\frac{1}{y(x)} - \alpha x = c \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{\alpha x + c}$$

muss jede Lösung der Differentialgleichung also die Form $y(x) = \frac{1}{\alpha x + c}$ haben. Die Probe zeigt, dass tatsächlich alle Funktionen dieser Form auch Lösungen sind: Für alle $x \in [0, \infty)$ gilt

$$y'(x) = \left((\alpha x + c)^{-1}\right)' = (-1)\alpha(\alpha x + c)^{-2} = -\alpha \left(\frac{1}{\alpha x + c}\right)^2 = -\alpha y(x)^2.$$

(b) Einsetzen von 0 in die allgemeine Lösung liefert

$$y(0) = \frac{1}{\alpha \cdot 0 + c} = \frac{1}{c},$$

die Anfangswertbedingung $y(0) = 1$ ist also genau dann erfüllt, wenn $c = 1$. Die gesuchte Lösung ist also $y(x) = \frac{1}{\alpha x + 1}$.

Aufgabe 2 (2 + 4 + 4 Punkte).

(a) Bestimmen Sie die lineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die $y(x) = 8\exp(5x) - \frac{2}{5}$ als Lösung hat.

(b) Bestimmen Sie Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $y(x) = (x+3)\exp(2x)$ eine Lösung des Anfangswertproblems $y' = ay + \exp(2x)$ mit $y(0) = b$ ist.

(c) Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung $y' = 2y + 3$, welche die Anfangswertbedingung $y(0) = 1$ erfüllt.

Hinweis: Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y' = 2y$ ist $y(x) = c\exp(2x)$. Machen Sie damit einen Ansatz für die inhomogene Gleichung, in dem Sie c durch eine differenzierbare Funktion $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ersetzen ("Variation der Konstanten").

Lösung. (a) Differenzieren liefert

$$y'(x) = 5 \cdot 8\exp(5x) = 5 \cdot \left(y(x) + \frac{2}{5}\right) = 5y(x) + 2,$$

die gesuchte Differentialgleichung ist also $y' = 5y + 2$.

(b) Differenzieren von y liefert

$$y'(x) = 1 \cdot \exp(2x) + 2(x+3)\exp(2x) = (2x+7)\exp(2x).$$

Die Funktion y ist also genau dann eine Lösung der Differentialgleichung, wenn

$$\begin{aligned}(2x+7)\exp(2x) = y'(x) &= ay(x) + \exp(2x) = a(x+3)\exp(2x) + \exp(2x) \\ &= (a(x+3)+1)\exp(2x).\end{aligned}$$

Da $\exp(2x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist dies äquivalent zu

$$a(x+3) + 1 = 2x + 7 = 2(x+3) + 1$$

und daher zu $a = 2$. Wegen

$$y(0) = (0+3)\exp(2 \cdot 0) = 3\exp(0) = 3$$

erfüllt y die Anfangswertbedingung genau dann, wenn $b = 3$. Die vorgegebene Funktion y löst also das Anfangswertproblem $y' = 2y + \exp(2x)$ mit $y(0) = 3$.

(c) Sei also $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und betrachte $y(x) = c(x)\exp(2x)$. Die Produktregel liefert

$$y'(x) = c'(x)\exp(2x) + 2c(x)\exp(2x).$$

Die Funktion y ist also genau dann eine Lösung der Differentialgleichung, wenn

$$c'(x)\exp(2x) + 2c(x)\exp(2x) = y'(x) = 2y(x) + 3 = 2c(x)\exp(2x) + 3,$$

was äquivalent ist zu $c'(x)\exp(2x) = 3$ beziehungsweise $c'(x) = 3\exp(-2x)$. Dann ist $c'(x)$ integrierbar und es gilt

$$c(x) = \int 3\exp(-2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\exp(-2x) + a$$

mit Parameter $a \in \mathbb{R}$. Somit gilt

$$y(x) = c(x)\exp(2x) = \left(-\frac{3}{2}\exp(-2x) + a\right)\exp(2x) = a\exp(2x) - \frac{3}{2}.$$

Probe:

$$y'(x) = \left(a\exp(2x) - \frac{3}{2}\right)' = 2a\exp(2x) = 2\left(a\exp(2x) - \frac{3}{2}\right) + 3 = 2y(x) + 3,$$

also löst $y(x) = a\exp(2x) - \frac{3}{2}$ die Differentialgleichung. Wegen

$$y(0) = a\exp(0 \cdot x) - \frac{3}{2} = a - \frac{3}{2}$$

ist die Anfangswertbedingung $y(0) = 1$ genau dann erfüllt, wenn $a = \frac{5}{2}$. Somit ist die Funktion

$$y(x) = \frac{5}{2}\exp(2x) - \frac{3}{2}$$

eine Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

Bemerkung. Ist I ein offenes Intervall, so ist die Menge $\mathbb{R}^I := \{f : I \to \mathbb{R}\}$ aller Funktionen von I nach $\mathbb{R}$ ein reeller Vektorraum. Ist $n \in \mathbb{N}$, so heißen $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}^I$ daher *linear unabhängig*, falls für alle $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ aus $\sum_{k=1}^n c_k \cdot f_k(x) = 0$ für alle $x \in I$ schon folgt, dass $c_1 = \ldots = c_n = 0$, andernfalls heißen sie *linear abhängig*.

Aufgabe 3 (4 + 4 + 4 Punkte)**.** Sei I ein offenes Intervall.

(a) Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \leq m$. Zeigen Sie, dass $x^n, x^m \in \mathbb{R}^I$ genau dann linear abhängig sind, wenn $n = m$.

Hinweis: Die gegebenen Funktionen sind beliebig oft stetig differenzierbar.

(b) Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\exp(\lambda x), \exp(\mu x) \in \mathbb{R}^I$ genau dann linear abhängig sind, wenn $\lambda = \mu$.

(c) Sei $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Zeigen Sie, dass $\sin, \cos, \tan \in \mathbb{R}^I$ linear unabhängig sind.

Lösung. (a) Vorüberlegung: Für $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(x^\ell)^{(k)} = \begin{cases} \frac{\ell!}{(\ell-k)!} x^{\ell-k}, & k \leq \ell, \\ 0, & k > \ell. \end{cases}$$

Zur Aufgabe: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $ax^n + bx^m = 0$ für alle $x \in I$.

(i) Ist $n = m$, so kann man $a = 1$ und $b = -1$ wählen und erhält sofort die lineare Abhängigkeit.

(ii) Ist $n < m$, so liefert $(n+1)$-maliges Differenzieren der Gleichung $0 = ax^n + bx^m$ laut Vorüberlegung

$$0 = a \cdot 0 + b\frac{m!}{(m-n-1)!}x^{m-n-1} = b\frac{m!}{(m-n-1)!}x^{m-n-1},$$

woraus direkt $b = 0$ folgt. Aus $0 = ax^n + bx^m = ax^n$ folgt nun auch $a = 0$, also sind x^n und x^m linear unabhängig.

Zusammengefasst sind x^n und x^m also genau dann linear abhängig, wenn $n = m$.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a\exp(\lambda x) + b\exp(\mu x) = 0$ für alle $x \in I$.

(i) Ist $\lambda = \mu$, so kann man $a = 1$ und $b = -1$ wählen und erhält sofort die lineare Abhängigkeit.

(ii) Sei also $\lambda \neq \mu$. Differenzieren der Gleichung liefert

$$a\lambda \exp(\lambda x) + b\mu \exp(\mu x) = 0.$$

Zieht man von dieser Gleichung das λ-fache der ersten Gleichung ab, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= a\lambda \exp(\lambda x) + b\mu \exp(\mu x) - \lambda(a\exp(\lambda x) + b\exp(\mu x)) \\ &= b\mu \exp(\mu x) - b\lambda \exp(\mu x) = b(\mu - \lambda)\exp(\mu x). \end{aligned}$$

Wegen $\mu \neq \lambda$ und $\exp(\mu x) \neq 0$ folgt $b = 0$. Wegen $\exp(\mu x) \neq 0$ folgt aus der ersten Gleichung dann auch $a = 0$, also sind $\exp(\lambda x)$ und $\exp(\mu x)$ linear unabhängig.

Zusammengefasst sind $\exp(\lambda x)$ und $\exp(\mu x)$ also genau dann linear abhängig, wenn $\lambda = \mu$.

(c) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a\sin(x) + b\cos(x) + c\tan(x) = 0$ für alle $x \in I$. Dann gilt diese Gleichung insbesondere für $x = 0$, also

$$0 = a\underbrace{\sin(0)}_{=0} + b\underbrace{\cos(0)}_{=1} + c\underbrace{\tan(0)}_{=0} = b.$$

Somit reduziert sich die Gleichung auf

$$0 = a\sin(x) + c\tan(x) = a\sin(x) + c\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \left(a + c\frac{1}{\cos(x)}\right)\sin(x).$$

Für jedes $x \in I \setminus \{0\}$ gilt $\sin(x) \neq 0$, also folgt

$$a + c\frac{1}{\cos(x)} = 0 \quad \text{oder äquivalenterweise} \quad a\cos(x) = -c.$$

Wäre $a \neq 0$, so würde $\cos(x) = -\frac{c}{a} \in \mathbb{R}$ für alle $x \in I \setminus \{0\}$ folgen. Dies ist ein Widerspruch, da cos auf $I \setminus \{0\}$ sicherlich nicht konstant ist. Also muss $a = 0$ gelten und damit auch $c = -a\cos(x) = 0$. Folglich sind sin, cos und tan linear unabhängig.

Aufgabe 4 (4+6 Punkte)**.** Wir betrachten eine Masse $m > 0$, die im homogenen Gravitationsfeld der Erde fällt. Laut Newton ist Kraft das Produkt aus Masse und Beschleunigung, auf m wirkt also eine Kraft von $-m \cdot g$, wobei g die (konstante) Erdbeschleunigung ist. Es bezeichne $y(t)$ die Höhe der Masse m zum Zeitpunkt t über dem Erdboden, dann ist $y'(t)$ die Geschwindigkeit und $y''(t)$ die Beschleunigung, jeweils zum Zeitpunkt t.

(a) Ignoriert man den Luftwiderstand, so erhält man die Gleichung $m \cdot y'' = -m \cdot g$. Finden Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung.

(b) Modelliert man den Luftwiderstand als proportional zur Geschwindigkeit, so erhält man stattdessen die Gleichung

$$m \cdot y'' = -k \cdot y' - m \cdot g,$$

wobei k eine positive Konstante ist. Finden Sie alle Lösungen dieser Differentialgleichung der Form $y(t) = a\exp(bt) + ct + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $b \neq 0$.

Hinweis: Die allgemeine Lösung hängt von zwei Parametern ab.

Lösung. (a) Wegen $m > 0$ ist die Differentialgleichung äquivalent zu $y'' = -g$. Integrieren liefert erst

$$y' = \int -g \,\mathrm{d}t = -gt + c_1$$

und dann

$$y'' = \int y'(t)\,\mathrm{d}t = \int -gt + c_1 \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2$$

mit Parametern $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Zweimaliges Ableiten von y liefert

$$y'(t) = ab\exp(bt) + c \quad \text{und} \quad y''(t) = ab^2\exp(bt).$$

Somit ist y genau dann eine Lösung der Differentialgleichung, wenn

$$\begin{aligned} ab^2\exp(bt) = y''(t) &= -\frac{k}{m}y'(t) - g = -\frac{k}{m}(ab\exp(bt) + c) - g \\ &= -\frac{k}{m}ab\exp(bt) - \frac{k}{m}c - g, \end{aligned}$$

also

$$ab\left(b + \frac{k}{m}\right)\exp(bt) = -\frac{k}{m}c - g = -\left(\frac{k}{m}c - g\right)\exp(0 \cdot t).$$

Wegen $b \neq 0$ sind $\exp(bt)$ und $\exp(0 \cdot t)$ laut Aufgabe 3 linear unabhängig, also ist y genau dann eine Lösung, wenn

$$ab\left(b + \frac{k}{m}\right) = 0 \quad \text{sowie} \quad -\frac{k}{m}c - g = 0.$$

Die zweite Gleichung ist äquivalent zu $c = -\frac{mg}{k}$, die erste Gleichung ist (wiederum wegen $b \neq 0$) äquivalent zu $a = 0$ oder $b = -\frac{k}{m}$. Betrachtet man $b = -\frac{k}{m}$, so erhält man

$$y(t) = a\exp\left(-\frac{k}{m}t\right) + d - \frac{mg}{k}t;$$

der Fall $a = 0$ liefert $y(x) = d - \frac{mg}{k}t$ als Spezialfall der allgemeineren Lösung. Also sind alle Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y(t) = c_1\exp\left(-\frac{k}{m}t\right) + c_2 - \frac{mg}{k}t \quad \text{mit} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$