Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Johannes Hoffmann

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure III*
Wintersemester 2021/22
Blatt 10 – Musterlösung
Abgabe: Freitag, 07.01.2022, 22:00 Uhr über Moodle

Aufgabe 1 $(3+2+(2+3))$ Punkte)**.**

(a) Zeigen Sie, dass die Euklidische Norm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ stetig partiell differenzierbar ist und bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \|x\|}{\partial x_j}$ für $j \in \{1, \dots, m\}$. Zeigen Sie weiterhin, dass $\|\cdot\|$ im Nullpunkt nicht partiell differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass alle Polynomfunktionen stetig partiell differenzierbar sind.

(c) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Zeigen Sie, dass für alle partiell differenzierbare Funktionen $f, g : U \to \mathbb{R}$ und $F : U \to \mathbb{R}^n$ gilt:

(i) $\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$.

(ii) $\operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div} F + \langle F, \operatorname{grad} f \rangle$.

Hinweis: Formal müsste hier eigentlich $\dots + \left\langle F, (\operatorname{grad} f)^T \right\rangle$ *stehen. Um die Formel nicht komplizierter zu machen, wird hier der Gradient als Spaltenvektor interpretiert.*

Lösung. (a) Für $x \neq 0$ und $k \in \{1, \dots, m\}$ gilt mit der Kettenregel

$$D_k\|x\| = \frac{\partial \|x\|}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \sqrt{\sum_{\ell=1}^m x_\ell^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{\ell=1}^m x_\ell^2}{\sqrt{\sum_{\ell=1}^m x_\ell^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x_k}{\|x\|} = \frac{x_k}{\|x\|}.$$

Als Komposition stetiger Funktionen ist $D_k\|x\|$ stetig, also ist $\|\cdot\|$ stetig partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$.

Im Nullpunkt $x = 0$ gilt für alle $k \in \{1, \dots, m\}$

$$\frac{\left\|x + te^{(k)}\right\| - \|x\|}{t} = \frac{\left\|te^{(k)}\right\|}{t} = \frac{|t|}{t},$$

was für $t \to 0$ divergiert, da

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{|t|}{t} = \lim_{t \to 0^-} \frac{-t}{t} = -1 \neq 1 = \lim_{t \to 0^+} \frac{t}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{|t|}{t}.$$

Also ist $\|\cdot\|$ im Nullpunkt nicht partiell differenzierbar.

(b) Da sowohl Stetigkeit als auch partielle Differenzierbarkeit mit der Bildung von endlichen Summen und der Multiplikation von Skalaren verträglich sind, reicht es zu zeigen, dass alle Funktionen der Form

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x_1^{\nu_1} \cdots x_m^{\nu_m}$$

stetig partiell differenzierbar sind, wobei $\nu_1, \ldots, \nu_m \in \mathbb{N}_0$. Für alle $k \in \{1, \ldots, m\}$ ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} x_1^{\nu_1} \cdots x_m^{\nu_m} = \begin{cases} \nu_k x_1^{\nu_1} \cdots x_k^{\nu_k - 1} \cdots x_m^{\nu_m}, & \text{falls } \nu_k \geq 1, \\ 0, & \text{falls } \nu_k = 0, \end{cases}$$

in jedem Fall also wieder eine Polynomfunktion und damit stetig.

Anders ausgedrückt: Für jede ausgewählte Variable x_k ist f partiell nach x_k differenzierbar (dies entspricht der Differenzierbarkeit von f im Sinne der HMI 2, wenn man die übrigen $m-1$ Variablen festhält). Betrachtet man diese Ableitung nun wieder in allen m Variablen, so erhält man wieder eine multivariate Polynomfunktion, die somit im Sinne der HMI 3 stetig ist. Also hat f stetige partielle Ableitungen in alle Richtungen und ist somit stetig partiell differenzierbar.

(c) (i) Für alle $k \in \{1, \ldots, m\}$ und alle $x \in U$ gilt aufgrund der Produktregel für gewöhnliche Ableitungen

$$\begin{aligned}(\operatorname{grad} fg)_k(x) &= \frac{\partial}{\partial x_k}(f \cdot g)(x) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k}(x) \\ &= (\operatorname{grad} f)_k(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot (\operatorname{grad} g)_k(x),\end{aligned}$$

also $\operatorname{grad} fg = \operatorname{grad} f \cdot g + f \cdot \operatorname{grad} g$.

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{div} fF &= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial (fF)_k}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial (f \cdot F_k)}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot F_k + f \cdot \frac{\partial F_k}{\partial x_k} \right) \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot F_k \right)}_{=(\operatorname{grad} f) \cdot F} + f \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}}_{= \operatorname{div} F} = \langle \operatorname{grad} f, F \rangle + f \operatorname{div} F.\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (5 + 5 Bonuspunkte).

(a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $D_1 f$ und $D_2 f$ von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie außerdem, dass $D_1 D_2 f(0) \neq D_2 D_1 f(0)$.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $v \in \mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung $D_v f$ der folgenden Funktion f im Nullpunkt existiert:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

Zeigen Sie außerdem, dass f im Nullpunkt nicht stetig (und damit auch nicht total differenzierbar) ist.

Hinweis: Betrachten Sie eine Nullfolge, die keiner Geraden folgt.

Lösung. (a) Für $x \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} D_1 f(x) &= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{(3x_1^2 - x_2^3)(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3) 2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ &= \frac{x_2(x_1^4 + 4x_1^2 x_2^2 - x_2^4)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} D_2 f &= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{(x_1^3 - 3x_1 x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3) 2x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ &= \frac{x_1(x_1^4 - 4x_1^2 x_2^2 - x_2^4)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \end{aligned}$$

für $x = 0$ gilt

$$D_1 f(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(te^{(1)})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0$$

und analog $D_2 f(0) = 0$, also

$$D_1 f(x) = \begin{cases} \frac{x_2(x_1^4 + 4x_1^2 x_2^2 - x_2^4)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

und

$$D_2 f(x) = \begin{cases} \frac{x_1(x_1^4 - 4x_1^2 x_2^2 - x_2^4)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Im Nullpunkt gilt nun

$$\begin{aligned} D_2 D_1 f(0) &= \lim_{t \to 0} \frac{D_1 f(0 + te^{(2)}) - D_1 f(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{D_1 f(te^{(2)})}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t(0^4 + 4 \cdot 0^2 t^2 - t^4)}{(0^2 + t^2)^2} = \lim_{t \to 0} \frac{-t^4}{t^4} = -1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}D_1D_2f(0) &= \lim_{t\to 0}\frac{D_2f(0+te^{(1)}) - D_2f(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{D_2f(te^{(1)})}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\frac{t(t^4-4t^2\cdot 0^2-0^4)}{(t^2+0^2)^2} = \lim_{t\to 0}\frac{t^4}{t^4} = 1,\end{aligned}$$

also existieren D_1D_2f und D_2D_1f im Nullpunkt zwar, stimmen aber nicht überein.

(b) Sei $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Falls $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$ gilt, so ist $v_1v_2 = 0$ und somit $f(tv) = 0$ und

$$D_vf(0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(0+tv) - f(0)) = \lim_{t\to 0}\frac{f(tv)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = 0.$$

Sei also $v_1 \neq 0$ und $v_2 \neq 0$, dann gilt

$$\begin{aligned}D_vf(0) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(0+tv) - f(0)) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}f(tv)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\frac{t^3v_1v_2^2}{t^2v_1^2+t^4v_2^4} = \lim_{t\to 0}\frac{v_1v_2^2}{v_1^2+t^2v_2^4} = \frac{v_2^2}{v_1}.\end{aligned}$$

Somit existieren alle Richtungsableitungen im Nullpunkt. Betrachtet man aber eine Nullfolge, die keiner Geraden folgt, so zeigt sich, dass f im Nullpunkt nicht stetig ist: Sei $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ die Nullfolge mit

$$x^{(k)} := \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2} \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix} \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N},$$

so gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{k}\right)^2}{\left(\frac{1}{k^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^4} = \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4}+\frac{1}{k^4}} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0).$$

Aufgabe 3 (2 + 4 Punkte)**.**

(a) Berechnen Sie die Funktionalmatrix $DF(x)$ für

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x_1)\exp(x_2) \\ x_2^2 x_3 + x_1 x_3^2 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie den Gradienten von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin(x_1 x_2)\sqrt{1 + x_1^2}.$$

Lösung. (a) Es gilt

$$\begin{aligned} DF(x) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(x) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(x_1)\exp(x_2) & \sin(x_1)\exp(x_2) & 0 \\ x_3^2 & 2x_2x_3 & x_2^2 + 2x_1x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sqrt{1 + x_1^2}\sin(x_1x_2)\right)(x) \\ &= \frac{\partial \sqrt{1 + x_1^2}}{\partial x_1}(x) \cdot \sin(x_1x_2) + \sqrt{1 + x_1^2} \cdot \frac{\partial \sin(x_1x_2)}{\partial x_1}(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1 + x_1^2}} \cdot 2x_1 \cdot \sin(x_1x_2) + \sqrt{1 + x_1^2} \cdot x_2\cos(x_1x_2) \\ &= \frac{x_1\sin(x_1x_2)}{\sqrt{1 + x_1^2}} + x_2\cos(x_1x_2)\sqrt{1 + x_1^2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sqrt{1 + x_1^2}\sin(x_1x_2)\right)(x) \\ &= \sqrt{1 + x_1^2} \cdot \frac{\partial \sin(x_1x_2)}{\partial x_2}(x) = x_1\sqrt{1 + x_1^2}\cos(x_1x_2), \end{aligned}$$

also

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1\sin(x_1x_2)}{\sqrt{1+x_1^2}} + x_2\cos(x_1x_2)\sqrt{1 + x_1^2} \\ x_1\sqrt{1 + x_1^2}\cos(x_1x_2) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 $((2+3+2)+4$ Punkte$)$**.**

(a) Sei $U := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > x_2\}$ und

$$f : U \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ \ln(x_1 - x_2) \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Verkettung $h = f \circ g$.

(ii) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von h mithilfe der Kettenregel aus den Jacobi-Matrizen von f und g.

(iii) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von h durch direktes partielles Ableiten.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von $h = f \circ g$ mit der Kettenregel, wobei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} \sin(x_1) \\ \cos(x_2) \\ x_1^2 \\ x_1 x_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 \exp(x_3) \end{pmatrix}.$$

Lösung. (a) (i) Es gilt

$$\begin{aligned} h(x) = f(g(x)) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} (x_1+x_2)^2 - (x_2+x_3)^2 \\ \ln((x_1+x_2) - (x_2+x_3)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x_1+x_2)^2 - (x_2+x_3)^2 \\ \ln(x_1 - x_3) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also ist $h : V \to \mathbb{R}^2$ wohldefiniert für $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 > x_3\}$.

(ii) Die Funktionen f und g sind stetig partiell differenzierbar mit

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ \frac{1}{x_1 - x_2} & -\frac{1}{x_1 - x_2} \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad Dg(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit der Kettenregel ist h auf V stetig partiell differenzierbar mit

$$\begin{aligned} Dh(x) &= Df(g(x))Dg(x) \\ &= \begin{pmatrix} 2(x_1+x_2) & -2(x_2+x_3) \\ \frac{1}{(x_1+x_2)-(x_2+x_3)} & -\frac{1}{(x_1+x_2)-(x_2+x_3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(x_1+x_2) & -2(x_2+x_3) \\ \frac{1}{x_1-x_3} & -\frac{1}{x_1-x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(x_1+x_2) & 2(x_1-x_3) & -2(x_2+x_3) \\ \frac{1}{x_1-x_3} & 0 & -\frac{1}{x_1-x_3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(iii) Direktes partielles Ableiten ergibt

$$Dh(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1+x_2) & 2(x_1-x_3) & -2(x_2+x_3) \\ \frac{1}{x_1-x_3} & 0 & -\frac{1}{x_1-x_3} \end{pmatrix} = Df(g(x))Dg(x).$$

(b) Es gilt

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \cos(x_1) & 0 \\ 0 & -\sin(x_2) \\ 2x_1 & 0 \\ x_2^2 & 2x_1x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Dg(x) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & \exp(x_3) & x_2\exp(x_3) \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned}
& D(f\circ g)(x) \\
&= Df(g(x))\cdot Dg(x) \\
&= \begin{pmatrix} \cos(x_1x_2) & 0 \\ 0 & -\sin(x_2\exp(x_3)) \\ 2x_1x_2 & 0 \\ x_2^2\exp(2x_3) & 2x_1x_2^2\exp(x_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & \exp(x_3) & x_2\exp(x_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_2\cos(x_1x_2) & x_1\cos(x_1x_2) & 0 \\ 0 & -\exp(x_3)\sin(x_2\exp(x_3)) & -x_2\exp(x_3)\sin(x_2\exp(x_3)) \\ 2x_1x_2^2 & 2x_1^2x_2 & 0 \\ x_2^3\exp(2x_3) & 3x_1x_2^2\exp(2x_3) & 2x_1x_2^3\exp(2x_3) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Als Probe kann man die Verkettung $f\circ g$ ausrechnen und die Ableitungen vergleichen; dabei ist

$$(f\circ g)(x) = \begin{pmatrix} \sin(x_1x_2) \\ \cos(x_2\exp(x_3)) \\ x_1^2x_2^2 \\ x_1x_2^3\exp(2x_3) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (5 + 5 + 3 Punkte)**.**

(a) Sei $U := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 > 0\}$ und

$$f : U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x_1 x_2 + x_1 \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

Zeigen Sie, dass f folgende partielle Differentialgleichung löst:

$$x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 x_2 + f.$$

(b) Zeigen Sie, dass für $x, y \in \mathbb{R}$ (Koordinaten in der Ebene) und $t > 0$ (Zeit) die Funktion

$$u(x, y, t) = \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4t}\right)$$

die *Wärmeleitungsgleichung* (oder *Diffusionsgleichung*) löst:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

(c) Zeigen Sie, dass es keine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ geben kann, die folgendes System von partiellen Differentialgleichungen löst:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_1^2 x_2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^3.$$

Lösung. (a) Mit den Vorüberlegungen

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{1}{\frac{x_2}{x_1}} x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 x_2}{x_2} \left(-\frac{1}{x_1^2}\right) = -\frac{1}{x_1}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{1}{\frac{x_2}{x_1}} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} \frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} x_2 = \frac{1}{x_2}$$

gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1 x_2 + x_1 \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right) = x_2 + \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \\ &= x_2 + \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - 1\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1 x_2 + x_1 \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right) = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_2 + \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right) \\ &= x_1 \left(1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right) = x_1 \left(1 + \frac{1}{x_2}\right) = x_1 + \frac{x_1}{x_2}.\end{aligned}$$

Zusammengenommen ergibt sich

$$\begin{aligned}
x_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} &= x_1 \left(x_2 + \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - 1 \right) + x_2 \left(x_1 + \frac{x_1}{x_2} \right) \\
&= \underbrace{x_1 x_2 + x_1 \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}_{=f} - x_1 + x_1 x_2 + x_1 = x_1 x_2 + f,
\end{aligned}$$

also löst f die partielle Differentialgleichung.

(b) Für die Zeitableitung gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)\right) \\
&= \frac{\partial t^{-1}}{\partial t} \cdot \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right) + \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{t^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right) + \frac{1}{t}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)(-1)\frac{x^2+y^2}{4}\frac{\partial t^{-1}}{\partial t} \\
&= \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)\left(-\frac{1}{t^2} - \frac{x^2+y^2}{4t}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)\left(-\frac{1}{t^2} + \frac{x^2+y^2}{4t^3}\right) \\
&= \frac{1}{4t^3}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)\left(x^2+y^2-4t\right),
\end{aligned}$$

die Ableitungen nach x sind

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{t}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)\right) = \frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial x}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right) \\
&= \frac{1}{t}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right) \\
&= -\frac{1}{4t^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} \\
&= -\frac{1}{4t^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)\cdot 2x \\
&= -\frac{x}{2t^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{2t^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)\right) = -\frac{1}{2t^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2t^2}\left(\frac{\partial x}{\partial x}\cdot\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right) + x\frac{\partial}{\partial x}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2t^2}\left(\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right) + x\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2t^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)\left(1 + x\frac{-2x}{4t}\right) \\
&= -\frac{1}{2t^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2t}\right) = \frac{1}{4t^3}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)(x^2-2t).
\end{aligned}$$

Da u symmetrisch in x und y ist, gilt also auch

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{4t^3} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)(y^2 - 2t).$$

Zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{1}{4t^3} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)(x^2 - 2t + y^2 - 2t) \\ &= \frac{1}{4t^3} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right)(x^2 + y^2 - 4t) = \frac{\partial u}{\partial t},\end{aligned}$$

also ist u tatsächlich eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung.

(c) Angenommen, es gäbe eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit den gegebenen partiellen Ableitungen. Da f zweimal stetig partiell differenzierbar ist, existieren die gemischten zweiten partiellen Ableitungen: Es gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial x_1^2 x_2}{\partial x_2} = x_1^2$$

und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial x_1^3}{\partial x_1} = 3x_1^2.$$

Weiterhin müssen diese zwei partiellen Ableitungen übereinstimmen, man erhält also den folgenden Widerspruch:

$$x_1^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 3x_1^2.$$

Somit kann es keine Funktion f mit den geforderten Eigenschaften geben.