Fachrichtung 6.1 – Mathematik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Daniel Kraemer

Saarbrücken, 05.04.2017

Klausur zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure III

Die folgende Klausur besteht aus 4 Aufgaben. Die in den einzelnen Aufgabenteilen erreichbare Punktzahl ist jeweils angegeben, ebenso die Themengebiete, aus denen die Aufgabe gewählt wurde. Jede Aufgabe ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten. Achten Sie auf eine saubere Argumentation, d.h.: **Schreiben Sie alle Lösungsschritte hin und begründen Sie diese – auch wenn eine Aufgabe als Frage formuliert ist, ist die Antwort selbstverständlich zu begründen**, für "geratene" Lösungen kann es keine Punkte geben.

Aufgabe 1. (Gewöhnliche Differentialgleichungen/ - Systeme; **2.5+7.5 Punkte**)

i) Betrachten Sie die gewöhnliche homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y''' + y'' - y' - y = 0$$

und bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen.

ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$\underline{\mathbf{y}}' = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{y}} + \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 2. (Stetigkeit, Differenzierbarkeit; **2+1.5+(2.5+4) Punkte**)

i) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{cases} \dfrac{x_1^3 + x_1^2 + x_2^2}{\|\underline{\mathbf{x}}\|} & \text{für} \quad \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}\,, \\ 0 & \text{für} \quad \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}\,. \end{cases}$$

Ist f stetig auf $\mathbb{R}^2$?

Bitte wenden.

ii) Es sei $f\colon \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ -1 < x_1\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \ln(1 + x_1)e^{x_2} + \cos(x_3)\ .$$

Berechnen Sie die Richtungsableitung $D_{\underline{\mathbf{v}}} f(\underline{\mathbf{0}})$, falls $\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

iii) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \ln(2 + x_2^2 - x_1^2)\ .$$

(a) Bestimmen Sie im Fall $U = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ alle lokalen Extrema der Funktion f.

(b) Es sei nun $U = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$. Existieren globale (absolute) Extrema von f auf U? Falls ja, bestimmen Sie diese.

Aufgabe 3. (Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$; **6+4 Punkte**)

i) Es sei

$$M := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x_1 - \frac{1}{2}x_2 \leq 1, \ 0 \leq x_2 - x_1 \leq 1\}$$

und

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\ .$$

Skizzieren Sie M und berechnen Sie

$$\int_M \frac{2x_1 - x_2}{1 + (x_2 - x_1)}\, \mathrm{d}V$$

mithilfe der Transformation

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u + v \\ 2u + 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\ .$$

ii) Im $\mathbb{R}^3$ seien

$$G_1 := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1 - x_3\}\ , \qquad G_2 := \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : \ x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \ 0 \leq x_3 \leq 1\}\ .$$

Skizzieren Sie $G_1 \cap G_2$ und berechnen Sie

$$\int_{G_1 \cap G_2} x_3\, \mathrm{d}V\ .$$

Aufgabe 4. (Fourier-Reihen, Eigen- Hauptvektoren, Kurvenintegrale; **(2.5+2.5+1)+2+2 Punkte**)

i) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq x < \pi/2 \ , \\ x & \text{für} \quad \pi/2 \leq x < 3\pi/2 \ , \\ 0 & \text{für} \quad 3\pi/2 \leq x < 2\pi \ . \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die explizite Abbildungsvorschrift $f(x) = \dots$ für $-2\pi \leq x < 0$ und skizzieren Sie f.

(b) Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten von f bis zur Ordnung $n = 1$.

(c) Konvergiert die Fourier-Reihe von f gegen f?

ii) Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \in M(2,2)$$

und bestimmen Sie einen Hauptvektor erster Stufe.

iii) Das Vektorfeld $F\colon \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 :\ x_1^2 + x_2^2 \neq 0\} \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$F(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} \\ \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \\ x_3 \end{pmatrix} \ .$$

Die Kurve $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \ .$$

Skizzieren Sie die Kurve und berechnen Sie $\int_\gamma \langle F, \mathrm{d}\underline{\mathbf{x}} \rangle$.