Fachrichtung Mathematik
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität des Saarlandes
Prof. Dr. Michael Bildhauer
M.Sc. Nils Gutheil

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Fakultät für Mathematik und Informatik

Saarbrücken, 24.02.2021

Klausur zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure III

i) Die folgende Klausur besteht aus 4 Aufgaben mit jeweils 20 Bewertungspunkten.

ii) Jede der 4 Aufgaben ist auf einem gesonderten Blatt zu bearbeiten.

iii) Achten Sie auf eine saubere Argumentation, d.h.:

Schreiben Sie alle Lösungsschritte hin und begründen Sie diese – auch wenn eine Aufgabe als Frage formuliert ist, ist die Antwort selbstverständlich zu begründen.

Für geratene oder unbegründete Lösungen gibt es keine Punkte.

iv) Der Einsatz eines Taschenrechners ist nur für elementare Berechnungen erlaubt.

Komplexere Algorithmen auf der Basis eines Taschenrechners sind keine erlaubten Hilfsmittel.

v) Weiteres erlaubtes Hilfsmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt.

vi) Benutzen Sie einen dokumentenechten Stift.

Aufzeichnungen mit Bleistift werden nicht gewertet.

Aufgabe 1. (*Gewöhnliche Differentialgleichungen, Systeme, Spektraltheorie quadratischer Matrizen; 10+2+8 Punkte*)

i) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Bestimmen Sie die (reelle) allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + 2y = e^{2x}$$

mithilfe einer Variation der Konstanten.

Bitte wenden.

ii) Führen Sie die homogene Differentialgleichung aus Teil *i)* auf ein System erster Ordnung zurück und geben Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen für dieses System an.

iii) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des Systems

$$\underline{\mathbf{y}}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \underline{\mathbf{y}}.$$

Aufgabe 2. (*Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen; 3+4+(1+4+8) Punkte*)

i) Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } \underline{\mathbf{x}} \neq \underline{\mathbf{0}}, \\ 0 & \text{für } \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}. \end{cases}$$

Ist f stetig auf $\mathbb{R}^2$?

ii) Es seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{y}}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix}, \quad g(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 x_3 \end{pmatrix}$$

und $h = f \circ g$. Berechnen Sie für beliebiges $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ unter Verwendung der Kettenregel die Determinante der Jacobi-Matrix

$$\det Dh(\underline{\mathbf{x}}).$$

iii) Es seien

$$E = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 < 1 \right\}, \quad \overline{E} = \left\{ \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 \leq 1 \right\}$$

und die Funktion $f\colon \overline{E} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \ln(5 - x_1^2) \ln(2 + x_2^2).$$

(a) Welche der beiden Mengen E und $\overline{E}$ ist kompakt?

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f auf E.

(c) Existieren globale Extrema von f auf $\overline{E}$? Falls ja, Bestimmen Sie diese.

Aufgabe 3. *(Integralrechnung in mehreren Veränderlichen; 10+10 Punkte)*

i) Es sei
$$M = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x_1 + x_2 \leq 1,\ 0 \leq x_2 - x_1 \leq 1\}.$$
Skizzieren Sie M und berechnen Sie
$$\int_M (x_1 + x_2)^{x_2 - x_1}\, \mathrm{d}V$$
mithilfe der Transformation
$$g\colon \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \\ \frac{1}{2}(u_1 - u_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$
Skizzieren Sie auch die Menge $g^{-1}(M)$.

ii) Schreiben Sie die Menge
$$M = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\}.$$
als Normalbereich in x_3-Richtung und berechnen Sie das Volumen von M, d.h. berechnen Sie
$$\int_M 1\, \mathrm{d}V.$$

Aufgabe 4. *(Lineare Abbildungen, Satz von Taylor, Potentiale; (2+9)+6+3 Punkte)*

i) Die lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ sei bestimmt durch
$$L(\underline{\mathbf{e}}^{(1)}) = \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \underline{\mathbf{f}}^{(2)} + \underline{\mathbf{f}}^{(3)}, \quad L(\underline{\mathbf{e}}^{(2)}) = 2\underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \underline{\mathbf{f}}^{(2)},$$
wobei $\mathcal{E} = (\underline{\mathbf{e}}^{(1)}, \underline{\mathbf{e}}^{(2)})$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{F} = (\underline{\mathbf{f}}^{(1)}, \underline{\mathbf{f}}^{(2)}, \underline{\mathbf{f}}^{(3)})$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ bezeichnen.

(a) Bestimmmen Sie die Matrixdarstellung von L bezüglich der kanonischen Basen.

(b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von L bezüglich der Basen $\mathcal{V} = (\underline{\mathbf{v}}^{(1)}, \underline{\mathbf{v}}^{(2)})$ des $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{W} = (\underline{\mathbf{w}}^{(1)}, \underline{\mathbf{w}}^{(2)}, \underline{\mathbf{w}}^{(3)})$ des $\mathbb{R}^3$, die gegeben sind durch
$$\underline{\mathbf{v}}^{(1)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} + 2\underline{\mathbf{e}}^{(2)}, \quad \underline{\mathbf{v}}^{(2)} = \underline{\mathbf{e}}^{(1)} - 2\underline{\mathbf{e}}^{(2)}$$
und
$$\underline{\mathbf{w}}^{(1)} = \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \underline{\mathbf{f}}^{(3)}, \quad \underline{\mathbf{w}}^{(2)} = \underline{\mathbf{f}}^{(1)} + \underline{\mathbf{f}}^{(2)}, \quad \underline{\mathbf{w}}^{(3)} = \underline{\mathbf{f}}^{(2)} + \underline{\mathbf{f}}^{(3)}.$$

[**Erinnerung zur Notation:** Ist $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung und sind $\mathcal{G}$ (als Basis des Urbildraumes) und $\mathcal{H}$ (als Basis des Bildraumes) Basen des $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$, so bezeichnet $A^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}} \in M(n,m)$ die Matrixdarstellung der linearen Abbildung L bezüglich dieser Basen.]

Bitte wenden.

ii) Es seien $U = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 > 0,\ x_2 > 0\}$ und $f \colon \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(\underline{\mathbf{x}}) = \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$$

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom $T_2(\underline{\mathbf{x}}; \underline{\mathbf{x}}^{(0)})$ $(\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}}^{(0)} + \underline{\xi})$ von f der Ordnung 2 um den Entwicklungspunkt $\underline{\mathbf{x}}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

iii) Existiert ein Potential des Vektorfeldes

$$F \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(\underline{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \dfrac{2x_1}{1+x_1^2} e^{x_2} + x_3 \\ \ln(1+x_1^2) e^{x_2} \\ 1 \end{pmatrix}?$$

Viel Erfolg!

Klausureinsicht Mo 01.03.

13:15

HS II

Zugang über Noteingang
von der Bibliotheksseite