Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Johannes Hoffmann

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure III*
Wintersemester 2021/22
Blatt 13 – Musterlösung
Abgabe: Freitag, 28.01.2022, 22:00 Uhr über Moodle

Aufgabe 1 (2 + 4 + 2 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion mit Nullstelle $x \in \mathbb{R}^3$. Weiterhin sei $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \neq 0$ für alle $k \in \{1, 2, 3\}$.

(a) Zeigen Sie, dass es eine Umgebung U von x gibt, in der f nach jeder der drei Variablen auflösbar ist.

(b) Wir bezeichnen diese lokalen Auflösungen wieder mit

$$x_1 = x_1(x_2, x_3), \quad x_2 = x_2(x_1, x_3) \quad \text{und} \quad x_3 = x_3(x_1, x_2).$$

Zeigen Sie, dass folgende Beziehung auf U gilt:

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial x_1} = -1.$$

(c) Ein Mol eines idealen Gases mit Druck $p > 0$, Volumen $V > 0$ und Temperatur $T > 0$ erfüllt die thermische Zustandsgleichung

$$pV = RT,$$

wobei $R > 0$ die Gaskonstante ist. Lösen Sie $f(p, V, T) = pV - RT$ explizit nach p, V und T auf. Überprüfen Sie dann in diesem Beispiel die Aussage aus Teil (b).

Lösung. (a) Wir überprüfen die Voraussetzungen: Es ist $\mathbb{R}^3$ offen, f ist nach Voraussetzung C^1 und $f(x) = 0$. Für $k = 1$ gilt

$$\det(D_{x_1} f(x)) = \det\left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \neq 0,$$

also ist f laut dem Satz über implizite Funktionen in einer Umgebung $U_1 \subseteq \mathbb{R}$ von x_1 nach x auflösbar. Analog gibt es Umgebungen $U_2 \subseteq \mathbb{R}$ von x_2 und $U_3 \subseteq \mathbb{R}$ von x_3, in denen f nach der jeweiligen Variable auflösbar ist. Somit ist f in $U := U_1 \times U_2 \times U_3$ nach jeder Variable auflösbar.

(b) Weiter mit dem Satz über implizite Funktionen gilt

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x_1}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \frac{\partial x_1(x_2, x_3)}{\partial(x_2, x_3)} = -(D_{x_1} f)^{-1} D_{(x_2,x_3)} f = -f_{x_1}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_{x_2} & f_{x_3} \end{pmatrix},$$

also insbesondere

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = -f_{x_1}^{-1} f_{x_2} \quad \text{und analog} \quad \frac{\partial x_2}{\partial x_3} = -f_{x_2}^{-1} f_{x_3} \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial x_3}{\partial x_1} = -f_{x_3}^{-1} f_{x_1}.$$

Zusammen gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial x_1} &= (-f_{x_1}^{-1} f_{x_2})(-f_{x_2}^{-1} f_{x_3})(-f_{x_3}^{-1} f_{x_1}) \\ &= -f_{x_1}^{-1} f_{x_2} f_{x_2}^{-1} f_{x_3} f_{x_3}^{-1} f_{x_1} = -1. \end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$p(V,T) = \frac{RT}{V}, \quad V(p,T) = \frac{RT}{p} \quad \text{und} \quad T(p,V) = \frac{pV}{R},$$

also

$$\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{RT}{V^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{P} \quad \text{und} \quad \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{V}{R}.$$

Einsetzen liefert unter Ausnutzung von $pV = RT$ wie gewünscht

$$\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{RT}{V^2} \cdot \frac{R}{p} \cdot \frac{V}{R} = -\frac{RT}{pV} = -1.$$

Aufgabe 2 (8 Punkte). Berechnen Sie alle Extrema der Funktion f unter der Nebenbedingung $g(x, y) \leq 0$, wobei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 - xy + y^2 - x \quad \text{sowie} \quad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1.$$

Hinweis: Es gilt $\sqrt{3} < \frac{7}{4}$.

Lösung. Zunächst gilt

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 2x - y - 1 \\ -x + 2y \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Hess} f = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \operatorname{grad} g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}. \textbf{ [1 Punkt]}$$

Wir betrachten das Innere und den Rand der Region

$$D := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) \leq 0\big\} = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\big\}$$

getrennt:

- Auf $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, dem Inneren von D, betrachten wir die kritischen Punkte: Aus $\operatorname{grad} f = 0$ folgt in der zweiten Komponente $x = 2y$, eingesetzt in die erste Komponente erhält man

  $$0 = 4y - y - 1 = 3y - 1,$$

  also $y = \frac{1}{3}$ und somit $x = 2y = \frac{2}{3}$. Die Matrix $\operatorname{Hess} f$ hat Eigenwerte 1 und 3 und ist somit positiv definit, folglich liegt in $(x, y) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ein lokales Minimum von f vor mit $f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$. **[2 Punkte]**

- Auf dem Einheitskreis $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$, dem Rand von D, gilt $\operatorname{grad} g \neq 0$ (nur der Nullpunkt ist Nullstelle von $\operatorname{grad} g$), also gibt es in jedem Extremum (x, y) von f auf M einen Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

  $$\begin{pmatrix} 2x - y - 1 \\ -x + 2y \end{pmatrix} = \operatorname{grad} f = \lambda \operatorname{grad} g = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

  Folglich gilt

  $$2xy - y^2 - y = (2x - y - 1)y = (2\lambda x)y = (2\lambda y)x = (-x + 2y)x = -x^2 + 2xy,$$

  also $x^2 = y^2 + y$. Da $(x, y) \in M$ gilt

  $$0 = g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = \underbrace{y^2 + y}_{=x^2} + y^2 - 1 = 2y^2 + y - 1 = 2(y + 1)\left(y - \frac{1}{2}\right),$$

  also $y = -1$ oder $y = \frac{1}{2}$. Der einzige Punkt (x, y) in M mit $y = -1$ ist $(0, -1)$, für $y = \frac{1}{2}$ erhält man

  $$0 = g\left(x, \frac{1}{2}\right) = x^2 + \frac{1}{4} - 1 = x^2 - \frac{3}{4},$$

  also $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Es folgt

  $$f(0, -1) = 1, \quad f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{3}{4}\sqrt{3}, \quad f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{3}{4}\sqrt{3}. \textbf{ [3 Punkte]}$$

Nun vergleichen wir alle gefundenen Kandidaten: Es gilt $3\sqrt{3} > 0$ und laut Hinweis ($\sqrt{3} < \frac{7}{4}$)

$$1 - \frac{3}{4}\sqrt{3} > 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{4} = 1 - \frac{21}{16} = -\frac{5}{16} = -\frac{15}{16 \cdot 3} > -\frac{16}{16 \cdot 3} = -\frac{1}{3},$$

also

$$\underbrace{f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)}_{=-\frac{1}{3}} < \underbrace{f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)}_{=1-\frac{3}{4}\sqrt{3}} < \underbrace{f(0,-1)}_{=1} < \underbrace{f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)}_{=1+\frac{3}{4}\sqrt{3}}.$$

Somit hat f in D ein globales Minimum in $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (im Inneren) und ein globales Maximum in $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (auf dem Rand). **[2 Punkte]**

Aufgabe 3 (3 + 4 + 5 Punkte). Wir betrachten eine herkömmliche quaderförmige geschlossene Kiste mit Tiefe x, Breite y und Höhe z. Aus Platzgründen soll keine Kante länger als 4 sein, aus physikalischen Gründen sollte keine Kante eine negative Länge haben. Berechnen Sie:

(a) Das maximale Volumen einer Kiste mit Oberfläche 24. Sie dürfen in diesem Aufgabenteil voraussetzen, dass das Maximum nicht auf dem Rand von $[0,4]^3$ angenommen wird.

(b) Das maximale Volumen einer Kiste, deren zwölf Kanten zusammengenommen Länge 24 haben.

(c) Die minimale Oberfläche einer Kiste mit Volumen 8.

Hinweis: Suchen Sie zunächst Kandidaten in $(0,4)^3$, *dem Inneren von* $[0,4]^3$. *Sehen Sie sich in den Teilen (b) und (c) dann Punkte auf dem Rand gesondert an, also Punkte, bei denen mindestens eine Kantenlänge* 0 *oder* 4 *ist.*

Lösung. Wir betrachten das Volumen V, die Oberfläche A und die Summe aller Kantenlänge ℓ der Kiste als Funktionen $[0,4]^3 \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$V(x,y,z) = xyz, \quad A(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz, \quad \ell(x,y,z) = 4x + 4y + 4z.$$

Wir orientieren uns am Prozess aus der Vorlesung: Die Mengen M im Folgenden sind jeweils abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Da die Zielfunktionen V und A stetig sind, existieren die gesuchten Extrema also und wir haben den ersten Schritt erledigt. Wir betrachten jeweils erst das Innere von $[0,4]^3$, dann den Rand und abschließend vergleichen wir die gefundenen Kandidaten.

(a) Wir suchen das Maximum von V auf $M = \{(x,y,z) \in [0,4]^3 : g(x,y,z) = 0\}$, wobei

$$g : [0,4]^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto A(x,y,z) - 24 = 2xy + 2xz + 2yz - 24.$$

(i) Zunächst betrachten wir das Problem auf $\mathring{M}$, dem Inneren von M: Es gilt

$$\operatorname{grad} g = \begin{pmatrix} 2y+2z \\ 2x+2z \\ 2x+2y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}}_{=:B} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det(B) = 16$ ist B invertierbar, also ist der Nullpunkt die einzige Lösung von $\operatorname{grad} g = 0$. Allerdings gilt $A(0,0,0) = 0 \neq 24$, also liegt der Nullpunkt nicht in $\mathring{M}$. Somit existiert für alle Extremstellen von V auf $\mathring{M}$ ein Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} = \operatorname{grad} V = \lambda \operatorname{grad} g = \lambda \begin{pmatrix} 2y+2z \\ 2x+2z \\ 2x+2y \end{pmatrix}.$$

Multipliziert man die erste Komponente mit x und die zweite mit y, so erhält man durch Vergleich

$$2\lambda xy + 2\lambda xz = xyz = 2\lambda xy + 2\lambda yz,$$

also $2\lambda z(x-y) = 0$.

- Für $z = 0$ erhält man ein Volumen von 0, was einem Minimum entspricht.
- Für $\lambda = 0$ erhält man $\operatorname{grad} V = 0$, also müssen mindestens zwei Kanten die Länge 0 haben, was die Nebenbedingung verletzt (und auch zu einem Volumen von 0 führt).

Also gilt $x = y$. Analog vergleicht man etwa die letzten beiden Gleichungen und erhält $y = z$. Es gilt

$$24 = A(x, x, x) = 2x^2 + 2x^2 + 2x^2 = 6x^2,$$

also $x^2 = 4$ und damit $x = 2$. Unser einziger Kandidat für das Maximum im Inneren von M ist also $(2, 2, 2)$ mit Volumen $V(2, 2, 2) = 8$.

(ii) Laut Voraussetzung liegt das Maximum nicht auf dem Rand, also ist nichts zu tun. Der Vollständigkeit halber hier eine mögliche Herangehensweise: Alle Punkte (x, y, z), die mindestens eine Komponente 0 haben, führen zu einem Volumen von 0, sind also höchstens Minima. Sei also eine Komponente maximal, etwa $x = 4$. Einsetzen in die Nebenbedingung liefert

$$24 = A(x, y, z) = A(4, y, z) = 2(4y + yz + 4z) = 8y + 2z(y + 4),$$

also $z = \frac{4(3-y)}{y+4}$. Die Funktion

$$V(x, y, z) = V\left(4, y, \frac{4(3-y)}{y+4}\right) = 16\frac{-y^2 + 3y}{y + 4}$$

nimmt ihr Maximum auf dem Intervall $[0, 4]$ für $y = 2\sqrt{7} - 4 \approx 1.29$ an, wie man mit den üblichen eindimensionalen Methoden errechnen kann. Es gilt

$$V(4, 2\sqrt{7} - 4, 2\sqrt{7} - 4) \approx 6.67 < 8 = V(2, 2, 2),$$

also liegt dort kein Maximum von V auf M vor.

(iii) Da das Maximum nicht auf dem Rand angenommen wird, muss der einzige Kandidat $(2, 2, 2)$ im Inneren die Maximalstelle sein. Die Kiste ist in diesem Fall ein Würfel mit Kantenlänge 2 und Volumen 8.

(b) Wir suchen das Maximum von V auf $M = \{(x, y, z) \in [0, 4]^3 : g(x, y, z) = 0\}$, wobei

$$g : [0, 4]^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto \ell(x, y, z) - 24 = 4x + 4y + 4z - 24.$$

(i) Zunächst betrachten wir das Problem auf $\mathring{M}$, dem Inneren von M: Es gilt

$$\operatorname{grad} g = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \neq 0,$$

somit existiert für alle Extremstellen von V auf $\mathring{M}$ ein Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} = \operatorname{grad} V = \lambda \operatorname{grad} g = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Vergleicht man die erste mit der zweiten Komponente, so erhält man $yz = 4\lambda = xz$, also $z(x-y) = 0$. Die Wahl $z = 0$ führt wieder zu Volumen 0 und einem Minimum, also gilt $x = y$. Analog vergleicht man etwa die letzten beiden Gleichungen und erhält $y = z$. Es gilt

$$24 = \ell(x,x,x) = 4x + 4x + 4x = 12x,$$

also $x = 2$. Unser einziger Kandidat für das Maximum im Inneren von M ist also erneut $(2,2,2)$ mit Volumen $V(2,2,2) = 8$.

(ii) Wir betrachten den Rand von M: Erneut führen alle Punkte (x,y,z), die mindestens eine Komponente 0 haben, zu einem Volumen von 0, sind also höchstens Minima. Sei also eine Komponente maximal, etwa $x = 4$. Einsetzen in die Nebenbedingung liefert

$$24 = \ell(4,y,z) = 4(4+y+z) = 16 + 4(y+z),$$

also $2 = y + z$ (insbesondere können y und z jetzt weder 0 noch 4 sein) und damit $z = 2 - y$. Es gilt

$$\tilde{V}(y) := V(4,y,2-y) = 4y(2-y) = 8y - 4y^2.$$

Wegen

$$\tilde{V}'(y) = 8 - 8y = 8(1-y) \quad \text{und} \quad \tilde{V}''(y) = -8 < 0$$

haben wir ein Maximum von $\tilde{V}$ bei $y = 1$. Es folgt $z = 2 - y = 1$ und somit ist unser einziger Kandidat auf dem Rand $(4,1,1)$ mit

$$V(4,1,1) = 4 < 8 = V(2,2,2).$$

(iii) Alle Punkte auf dem Rand führen zu einem geringeren Volumen als der Kandidat aus dem Inneren, also muss das Maximum von V auf M im Punkt $(2,2,2)$ angenommen werden. Die Kiste ist in diesem Fall erneut ein Würfel mit Kantenlänge 2 und Volumen 8.

(c) Wir suchen das Minimum von A auf $M = \{(x,y,z) \in [0,4]^3 : g(x,y,z) = 0\}$, wobei

$$g : [0,4]^3 \to \mathbb{R}, \quad (x,y,z) \mapsto V(x,y,z) - 8 = xyz - 8$$

(i) Zunächst betrachten wir das Problem auf $\mathring{M}$, dem Inneren von M: Es gilt

$$\operatorname{grad} g = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}.$$

Jede Nullstelle von $\operatorname{grad} g$ muss mindestens zwei Komponenten mit Wert 0 haben; alle diese Kandidaten gehören aber zu Kisten mit Volumen $0 \neq 8$, was die Nebenbedingung verletzt. Somit existiert für alle Extremstellen von V auf $\mathring{M}$ ein Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 2y+2z \\ 2x+2z \\ 2x+2y \end{pmatrix} = \operatorname{grad} A = \lambda \operatorname{grad} g = \lambda \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}.$$

Wäre $\lambda = 0$, so müsste $y + z = x + z = x + y = 0$ gelten. Dies impliziert aber $x = y = z = 0$, da alle Kantenlängen nicht-negativ sind, und verletzt somit die Nebenbedingung. Dividiert man also durch $\lambda \neq 0$, so erhält man das gleiche Gleichungssystem wie in Teil (a) und dementsprechend auch die Folgerung $x = y = z$. Es gilt

$$8 = V(x, x, x) = x^3,$$

also $x = 2$. Unser einziger Kandidat für ein Minimum (oder überhaupt ein Extremum) im Inneren von M ist also mal wieder $(2, 2, 2)$ mit Oberfläche $A(2, 2, 2) = 24$.

(ii) Wir betrachten den Rand von M:

- Alle Punkte (x, y, z), die mindestens eine Komponente 0 haben, verletzen die Nebenbedingung.
- Sei also eine Komponente maximal, etwa $x = 4$. Aus der Nebenbedingung folgt

  $$8 = V(4, y, z) = 4yz,$$

  also $z = \frac{2}{y}$. Für die Funktion

  $$\tilde{A}(y) := A\left(4, y, \frac{2}{y}\right) = 8y + \frac{16}{y} + 4 = \frac{8y^2 + 2y + 16}{y}$$

  gilt mit Quotientenregel

  $$\tilde{A}'(y) = \frac{8(y^2 - 2)}{y^2} \quad \text{und} \quad \tilde{A}''(y) = \frac{32}{y^3},$$

  also ist $y = \sqrt{2}$ ein Minimum von $\tilde{A}$ auf $(0, 4)$. Es folgt $z = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = y$. Somit ist $(x, y, z) = (4, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ ein weiterer Kandidat für das globale Minimum.
- Seien nun zwei Komponenten maximal, etwa $x = y = 4$. Aus der Nebenbedingung folgt $8 = V(4, 4, z) = 16z$, also $z = \frac{1}{2}$. Unser letzter Kandidat ist also $\left(4, 4, \frac{1}{2}\right)$.

(iii) Es gilt

$$A(2, 2, 2) = 24, \quad A(4, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = 16\sqrt{2} + 4 \quad \text{und} \quad A\left(4, 4, \frac{1}{2}\right) = 40.$$

Aus $\sqrt{2} > \frac{5}{4}$ folgt

$$A(4, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = 16\sqrt{2} + 4 > 16 \cdot \frac{5}{4} + 4 = 20 + 4 = 24 = A(2, 2, 2),$$

außerdem gilt

$$A\left(4, 4, \frac{1}{2}\right) = 40 > 24 = A(2, 2, 2).$$

Alle Kandidaten auf dem Rand führen also zu einer größeren Oberfläche als der Kandidat aus dem Inneren, also muss das Minimum von A auf M (Überraschung!) im Punkt $(2, 2, 2)$ angenommen werden. Die Kiste ist der inzwischen wohlbekannte Würfel mit Kantenlänge 2.

Satz (Extrema mit mehreren Nebenbedingungen)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $g : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $n < m$ und

$$M := \{x \in U : g(x) = 0\}.$$

Sei $a \in M$ ein Punkt mit

$$\operatorname{rg}((Dg)(a)) = n$$

(die Jacobi-Matrix von g habe maximalen Rang n im Punkt a). Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine weitere stetig differenzierbare Funktion, die in a auf M ein lokales Extremum hat. Dann gibt es einen *Lagrange-Multiplikator* $\lambda \in \mathbb{R}^n$ mit

$$(\operatorname{grad} f)(a) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (\operatorname{grad} g_k)(a).$$

Aufgabe 4 ($2 + 5 + 3$ Punkte)**.** Wir interessieren uns für die Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto 4y - 2z$$

unter den Nebenbedingungen

$$2x - y - z = 2 \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

(a) Die Menge M aller Punkte, die beide Nebenbedingungen erfüllen, ist per Konstruktion abgeschlossen. Zeigen Sie, dass M auch beschränkt ist.

(b) Berechnen Sie alle Extrema von f unter den gegebenen Nebenbedingungen mit obigem Satz für $n = 2$. Vergessen Sie nicht, die Voraussetzungen zu überprüfen! Begründen Sie auch, warum ihre Kandidaten tatsächlich Extrema sind.

(c) Lösen Sie die erste Nebenbedingung nach z auf und transformieren Sie damit das Problem so, dass Sie obigen Satz für $n = 1$ anwenden können. Bestimmen Sie damit die Kandidaten für Extremstellen von f unter den Nebenbedingungen erneut.

Lösung. Es ist $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0\}$ für

$$g_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto 2x - y - z - 2 \quad \text{und} \quad g_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - 1.$$

(a) Aus $g_2(x, y, z) = 0$ folgt direkt, dass der Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ auf dem Einheitskreis liegt, also $x, y \in [-1, 1]$ gelten muss. Aus g_1 folgt dann einerseits

$$z = 2x - y - 2 \leq 2 \cdot 1 - (-1) - 2 = 2 + 1 - 2 = 1$$

und andererseits

$$z = 2x - y - 2 \geq 2 \cdot (-1) - 1 - 2 = -2 - 1 - 2 = -5.$$

Somit gilt $(x, y, z) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-5, 1]$ für alle Punkte $(x, y, z) \in M$, also ist M beschränkt.

(b) Die Matrix

$$Dg = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

hat vollen Rang 2 für alle Punkte in M (nur für $x = y = 0$ fällt der Rang auf 1 ab, aber der Nullpunkt liegt nicht auf dem Einheitskreis und verletzt somit g_2). Für alle Extremstellen (x, y, z) von f auf M existiert also ein Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \operatorname{grad} f = \lambda_1 \operatorname{grad} g_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} g_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der letzten Komponente $-2 = -\lambda_1$ folgt sofort $\lambda_1 = 2$. Einsetzen liefert

$$0 = 2 \cdot 2 + 2x\lambda_2 = 4 + 2x\lambda_2 \quad \text{und} \quad 4 = 2 \cdot (-1) + 2y\lambda_2 = -2 + 2y\lambda_2,$$

also $x = -\frac{2}{\lambda_2}$ und $y = \frac{3}{\lambda_2}$. Aus der zweiten Nebenbedingung erhält man

$$1 = x^2 + y^2 = \frac{4}{\lambda_2^2} + \frac{9}{\lambda_2^2} = \frac{13}{\lambda_2^2},$$

also $\lambda_2 = \pm\sqrt{13}$.

- Aus $\lambda_2 = \sqrt{13}$ folgt $x = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ und $y = \frac{3}{\sqrt{13}}$, aus g_1 also

$$z = 2x - y - 2 = -\frac{4}{\sqrt{13}} - \frac{3}{\sqrt{13}} - 2 = -2 - \frac{7}{\sqrt{13}}.$$

  Es gilt

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, -2 - \frac{7}{\sqrt{13}}\right) &= 4 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} - 2 \cdot \left(-2 - \frac{7}{\sqrt{13}}\right) \\ &= 4 + \frac{26}{\sqrt{13}} = 4 + \frac{26}{13}\sqrt{13} = 4 + 2\sqrt{13}. \end{aligned}$$

- Aus $\lambda_2 = -\sqrt{13}$ folgt $x = \frac{2}{\sqrt{13}}$ und $y = -\frac{3}{\sqrt{13}}$, aus g_1 also

$$z = 2x - y - 2 = \frac{4}{\sqrt{13}} + \frac{3}{\sqrt{13}} - 2 = -2 + \frac{7}{\sqrt{13}}.$$

  Es gilt

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, -2 + \frac{7}{\sqrt{13}}\right) &= 4 \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right) - 2 \cdot \left(-2 + \frac{7}{\sqrt{13}}\right) \\ &= 4 - \frac{26}{\sqrt{13}} = 4 - \frac{26}{13}\sqrt{13} = 4 - 2\sqrt{13}. \end{aligned}$$

Als abgeschlossene und beschränkte Menge ist M kompakt, f nimmt also Maximum und Minimum auf M an. Da wir nur zwei Kandidaten für Extremstellen haben, müssen diese Maximum und Minimum sein. Wegen

$$4 - 2\sqrt{13} < 4 < 4 + 2\sqrt{13}$$

ist $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, -2 + \frac{7}{\sqrt{13}}\right)$ das Minimum und $\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, -2 - \frac{7}{\sqrt{13}}\right)$ das Maximum von f auf M.

(c) Obiger Satz für $n = 1$ ist der Satz aus der Vorlesung zu Extrema unter Nebenbedingungen (Dg ist dann gerade $\operatorname{grad} g$, und eine Matrix mit nur einer Zeile oder nur einer Spalte hat genau dann Rang 1, wenn sie von Null verschieden ist). Es gilt $z = 2x - y - 2$, also bestimmen wir die (Kandidaten für) Extrema von

$$\tilde{f}(x, y) := f(x, y, 2x - y - 2) = 4y - 2(2x - y - 2) = 6y - 4x + 4$$

unter der Nebenbedingung $g(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$, also auf der Menge

$$\tilde{M} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\},$$

die per Konstruktion abgeschlossen ist. Wegen $\|(x, y)\| = 1$ für alle $(x, y) \in M$ ist M sicherlich auch beschränkt. Als stetige Funktion nimmt f somit Maximum und Minimum auf M an. Es gilt

$$\operatorname{grad} \tilde{f} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \operatorname{grad} g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Es ist $(x, y) = (0, 0)$ der einzige Punkt, an dem der Gradient von g verschwindet, wiederum verletzt der Nullpunkt aber die Nebenbedingung. Für alle Extremstellen (x, y) von $\tilde{f}$ auf $\tilde{M}$ existiert also ein Lagrange-Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \operatorname{grad} \tilde{f} = \lambda \operatorname{grad} g = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Vergleicht man das y-fache der ersten Komponente mit dem x-fachen der zweiten Komponente, so ergibt sich

$$-4y = 2\lambda xy = 6x,$$

also $y = -\frac{3}{2}x$. Einsetzen in die Nebenbedingung liefert

$$1 = x^2 + y^2 = x^2 + \frac{9}{4}x^2 = \frac{13}{4}x^2,$$

also $x = \pm\frac{2}{\sqrt{13}}$. Mittels $y = -\frac{3}{2}x$ und $z = 2x - y - 2$ ermittelt man somit erneut die beiden Kandidaten

$$\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, -2 + \frac{7}{\sqrt{13}}\right) \quad \text{und} \quad \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, -2 - \frac{7}{\sqrt{13}}\right)$$

für das ursprüngliche Problem.