Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Johannes Hoffmann

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure III*
Wintersemester 2021/22
Blatt 12 – Musterlösung
Abgabe: Freitag, 21.01.2022, 22:00 Uhr über Moodle

Aufgabe 1 (5 Punkte). In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

für kartesische Koordinaten (x, y) und Polarkoordinaten (r, φ) gilt. Zeigen Sie, dass der zweidimensionale Laplace-Operator in Polarkoordinaten geschrieben werden kann als

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}.$$

Lösung. Für jedes zweidimensionale C^2-Skalarfeld f gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \frac{\sin(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\
&= \cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos(\varphi)\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin(\varphi)}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) - \frac{\sin(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\cos(\varphi)\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin(\varphi)}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) \\
&= \cos^2(\varphi)\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \cos(\varphi)\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) \\
&\quad - \frac{\sin(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\cos(\varphi)\cdot\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\sin(\varphi)}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin(\varphi)\cdot\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) \\
&= \cos^2(\varphi)\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \cos(\varphi)\sin(\varphi)\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial \varphi}\right) \\
&\quad - \frac{\sin(\varphi)}{r}\left(-\sin(\varphi)\frac{\partial f}{\partial r} + \cos(\varphi)\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi\,\partial r}\right) + \frac{\sin(\varphi)}{r^2}\left(\cos(\varphi)\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \sin(\varphi)\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right) \\
&= \cos^2(\varphi)\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial \varphi} \\
&\quad + \frac{\sin^2(\varphi)}{r}\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi\,\partial r} + \frac{\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\sin^2(\varphi)}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \\
&= \cos^2(\varphi)\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial \varphi}\right) + \frac{\sin^2(\varphi)}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\sin^2(\varphi)}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}
\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\cos(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= \sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin(\varphi)\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos(\varphi)}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) + \frac{\cos(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin(\varphi)\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos(\varphi)}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) \\
&= \sin^2(\varphi)\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \cos(\varphi)\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) \\
&\quad + \frac{\cos(\varphi)}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin(\varphi)\cdot\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\cos(\varphi)}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\cos(\varphi)\cdot\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right) \\
&= \sin^2(\varphi)\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \cos(\varphi)\sin(\varphi)\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial \varphi}\right) \\
&\quad + \frac{\cos(\varphi)}{r}\left(\cos(\varphi)\frac{\partial f}{\partial r} + \sin(\varphi)\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi\,\partial r}\right) + \frac{\cos(\varphi)}{r^2}\left(-\sin(\varphi)\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \cos(\varphi)\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right) \\
&= \sin^2(\varphi)\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial \varphi} \\
&\quad + \frac{\cos^2(\varphi)}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi\,\partial r} - \frac{\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \frac{\cos^2(\varphi)}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \\
&= \sin^2(\varphi)\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{2\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial \varphi}\right) + \frac{\cos^2(\varphi)}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos^2(\varphi)}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2},
\end{aligned}
$$

zusammen also

$$
\begin{aligned}
\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
&= \cos^2(\varphi)\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial \varphi}\right) + \frac{\sin^2(\varphi)}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\sin^2(\varphi)}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \\
&\quad + \sin^2(\varphi)\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{2\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial \varphi}\right) + \frac{\cos^2(\varphi)}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos^2(\varphi)}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \\
&= \cos^2(\varphi)\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\sin^2(\varphi)}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\sin^2(\varphi)}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \sin^2(\varphi)\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\cos^2(\varphi)}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos^2(\varphi)}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \\
&= \left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}.
\end{aligned}
$$

Bemerkung. Zu einer C^{k+1}-Funktion f bezeichne $T_n(x, x^{(0)})$ für $n \leq k$ das Taylor-Polynom n-ter Ordnung von f um den Punkt $x^{(0)}$, also

$$T_n(x, x^{(0)}) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{D^\alpha f(x^{(0)})}{\alpha!}(x - x^{(0)})^\alpha,$$

wobei wir $D^0 f := f$ für den Fall $\alpha = 0$ vereinbaren.

Aufgabe 2 $(3 + 4 + 5$ Punkte$)$**.**

(a) Sei $U := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$. Berechnen Sie $T_1(x, x^{(0)})$ für

$$f : U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln\big(1 + x_1^2 - x_2^2\big) \quad \text{und} \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in U.$$

(b) Sei $U := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$. Berechnen Sie $T_2(x, x^{(0)})$ für

$$f : U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x_2 \ln(x_1) + x_1 \exp(x_2 + 2) \quad \text{und} \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-1} \\ -1 \end{pmatrix} \in U.$$

(c) Berechnen Sie $T_n(x, 0)$ für allgemeines $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x_1 x_2 + \exp(x_3).$$

Hinweis: Machen Sie eine Fallunterscheidung nach n.

Lösung. (a) Es gilt

$$f(x^{(0)}) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) = \ln\left(1 + 0^2 - \frac{1}{2^2}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

und

$$D_1 f(x) = \frac{2x_1}{1 + x_1^2 - x_2^2} \quad \text{sowie} \quad D_2 f(x) = \frac{-2x_2}{1 + x_1^2 - x_2^2},$$

so dass

$$D_1 f(x^{(0)}) = 0 \quad \text{und} \quad D_2 f(x^{(0)}) = \frac{-2 \cdot \frac{1}{2}}{1 + 0^2 - \frac{1}{2^2}} = -\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{4}{3}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} T_1(x; x^{(0)}) &= \sum_{|\alpha| \leq 1} \frac{D^\alpha f(x^{(0)})}{\alpha!}(x - x^{(0)})^\alpha \\ &= f(x^{(0)}) + \underbrace{D_1 f(x^{(0)})}_{=0} \cdot (x_1 - x_1^{(0)}) + D_2 f(x^{(0)}) \cdot (x_2 - x_2^{(0)}) \\ &= \ln\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{4}{3}\left(x_2 - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{x_2}{x_1} + \exp(x_2 + 2) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \ln(x_1) + x_1 \exp(x_2 + 2)$$

sowie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} = -\frac{x_2}{x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{x_1} + \exp(x_2 + 2) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} = x_1 \exp(x_2 + 2),$$

also

$$\begin{aligned}
D^{(0,0)} f(x^{(0)}) &= -1 \ln(\exp(-1)) + \exp(-1)\exp(-1+2) = 1 + 1 = 2, \\
D^{(1,0)} f(x^{(0)}) &= \frac{-1}{\mathrm{e}^{-1}} + \exp(-1+2) = -\mathrm{e} + \mathrm{e} = 0, \\
D^{(0,1)} f(x^{(0)}) &= \ln(\exp(-1)) + \exp(-1)\exp(-1+2) = -1 + 1 = 0, \\
D^{(2,0)} f(x^{(0)}) &= -\frac{-1}{(\mathrm{e}^{-1})^2} = \mathrm{e}^2, \\
D^{(1,1)} f(x^{(0)}) &= \frac{1}{\mathrm{e}^{-1}} + \exp(-1+2) = \mathrm{e} + \mathrm{e} = 2\mathrm{e} \quad \text{und} \\
D^{(0,2)} f(x^{(0)}) &= \mathrm{e}^{-1} \exp(-1+2) = 1.
\end{aligned}$$

Folglich erhält man

$$\begin{aligned}
T_2(x, x^{(0)}) &= \sum_{|\alpha| \le 2} \frac{D^\alpha f(x^{(0)})}{\alpha!} (x - x^{(0)})^\alpha \\
&= \frac{D^{(0,0)} f(x^{(0)})}{0! \cdot 0!} (x - x^{(0)})^{(0,0)} + \frac{D^{(1,0)} f(x^{(0)})}{1! \cdot 0!} (x - x^{(0)})^{(1,0)} \\
&\quad + \frac{D^{(0,1)} f(x^{(0)})}{0! \cdot 1!} (x - x^{(0)})^{(0,1)} + \frac{D^{(2,0)} f(x^{(0)})}{2! \cdot 0!} (x - x^{(0)})^{(2,0)} \\
&\quad + \frac{D^{(1,1)} f(x^{(0)})}{1! \cdot 1!} (x - x^{(0)})^{(1,1)} + \frac{D^{(0,2)} f(x^{(0)})}{0! \cdot 2!} (x - x^{(0)})^{(0,2)} \\
&= 2 + \frac{\mathrm{e}^2}{2} (x_1 - x_1^{(0)})^2 + 2\mathrm{e} (x_1 - x_1^{(0)})^1 (x_2 - x_2^{(0)})^1 + \frac{1}{2} (x_2 - x_2^{(0)})^2 \\
&= 2 + \frac{\mathrm{e}^2}{2} (x_1 - \mathrm{e}^{-1})^2 + 2\mathrm{e} (x_1 - \mathrm{e}^{-1})(x_2 + 1) + \frac{1}{2} (x_2 + 1)^2.
\end{aligned}$$

(c) Fallunterscheidung nach $n \in \mathbb{N}_0$:

- $n = 0$: Es gilt $T_0(x; 0) = f(0) = 1$.
- $n = 1$: Es ist $f(0) = 1$ sowie

$$D_1 f(x) = x_2, \quad D_2 f(x) = x_1 \quad \text{und} \quad D_3 f(x) = \exp(x_3),$$

so dass

$$\begin{aligned}
T_1(x; 0) &= \sum_{|\alpha| \le 1} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha = T_0(x; 0) + \sum_{|\alpha| = 1} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha \\
&= 1 + D_1 f(0) x_1 + D_2 f(0) x_2 + D_3 f(0) x_3 \\
&= 1 + x_3.
\end{aligned}$$

- $n = 2$: Bis auf

$$D_2 D_1 f(x) = D_1 D_2 f(x) = 1 \quad \text{und} \quad D_3^2 f(x) = \exp(x_3)$$

verschwinden alle zweiten Ableitungen, so dass

$$\begin{aligned} T_2(x;0) = \sum_{|\alpha|\leq 2} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha &= T_1(x;0) + \sum_{|\alpha|=2} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha \\ &= 1 + x_3 + \frac{D_1^2 f(0)}{2} x_1^2 + D_1 D_2 f(0) x_1 x_2 + D_1 D_3 f(0) x_1 x_3 \\ &\quad + \frac{D_2^2 f(0)}{2} x_2^2 + D_2 D_3 f(0) x_2 x_3 + \frac{D_3^2 f(0)}{2} x_3^2 \\ &= 1 + x_3 + x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_3^2. \end{aligned}$$

- $n \geq 3$: Für alle $\alpha \in \mathbb{N}^3$ mit $|\alpha| \geq 3$ gilt

$$D^\alpha f(x) = \begin{cases} \exp(x_3), & \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \\ 0, & \alpha_1 \neq 0 \vee \alpha_2 \neq 0, \end{cases}$$

  so dass

$$\begin{aligned} T_n(x;0) = \sum_{|\alpha|\leq n} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha &= T_2(x;0) + \sum_{3\leq|\alpha|\leq n} \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!} x^\alpha \\ &= 1 + x_3 + x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_3^2 + \sum_{\alpha_3=3}^{n} \frac{1}{\alpha_3!} x_3^{\alpha_3} \\ &= x_1 x_2 + \sum_{k=0}^{n} \frac{x_3^k}{k!} \quad \left(\xrightarrow{n\to\infty} x_1 x_2 + \exp(x_3) \right). \end{aligned}$$

Aufgabe 3 $(4 + (2 + 3)$ Punkte$)$.

(a) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x_1^4 + x_2^4 - 4x_1^2 - 2x_2^2.$$

Hinweis: Die Funktion f hat neun kritische Punkte.

(b) Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (x_2 - 2x_1^2)(x_2 - x_1^2) = 2x_1^4 - 3x_1^2 x_2 + x_2^2.$$

(i) Eine *Ursprungsgerade* ist eine Gerade durch den Nullpunkt und kann daher parametrisiert werden als

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \to t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \text{für ein} \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktion $f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle solche γ ein lokales Minimum in $\gamma(0) = 0$ hat. (Man sagt, der Nullpunkt ist ein lokales Minimum von f entlang jeder Ursprungsgeraden.)

(ii) Zeigen Sie, dass der Nullpunkt zwar ein kritischer Punkt von f ist, dort aber kein lokales Minimum vorliegt.
Hinweis: Betrachten Sie Punkte der Form (x_1, ax_1^2) für verschiedene $a \in \mathbb{R}$.

Lösung. (a) Es gilt

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1^3 - 8x_1 \\ 4x_2^3 - 4x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1(x_1^2 - 2) \\ 4x_2(x_2^2 - 1) \end{pmatrix}$$

und daher

$$(\operatorname{grad} f)(x^{(0)}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^{(0)} \in \left\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\} \quad \text{und} \quad x_2^{(0)} \in \{0, 1, -1\}.$$

Die neun kritischen Punkte von f sind also

$$(0,0), \quad (0, \pm 1), \quad (\pm\sqrt{2}, 0) \quad \text{und} \quad (\pm\sqrt{2}, \pm 1).$$

Die Hesse-Matrix von f ist

$$H := \operatorname{Hess} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 8 & 0 \\ 0 & 12x_2^2 - 4 \end{pmatrix},$$

als Diagonalmatrix sind die Einträge auf der Diagonalen gleichzeitig die Eigenwerte. Man erhält folgende Daten:

x	$\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}(x)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}(x)$	Definitheit	Extremum
$(0,0)$	-8	-4	negativ	Maximum
$(0,\pm 1)$	-8	8	indefinit	kein
$(\pm\sqrt{2},0)$	16	-4	indefinit	kein
$(\pm\sqrt{2},\pm 1)$	16	8	positiv	Minimum

Insgesamt hat f also ein lokales Maximum in $(0,0)$ und vier lokale Minima in $(\pm\sqrt{2},\pm 1)$. In den vier Stellen $(0,\pm 1)$ und $(\pm\sqrt{2},0)$ hat f keine lokalen Extrema.

(b) (i) Sei $g := f\circ\gamma$, dann gilt

$$\begin{aligned} g(t) &= f(\gamma(t)) = 2(tv_1)^4 - 3(tv_1)^2(tv_2) + (tv_2)^2 = 2v_1^4t^4 - 3v_1^2v_2t^3 + v_2^2t^2,\\ g'(t) &= 8v_1^4t^3 - 9v_1^2v_2t^2 + 2v_2^2t,\\ g''(t) &= 24v_1^4t^2 - 18v_1^2v_2t + 2v_2^2. \end{aligned}$$

Wegen $g'(0) = 0$ ist der Nullpunkt ein kritischer Punkt von g mit $g''(0) = 2v_2^2$.

- Im Fall $v_2 \neq 0$ folgt $g''(0) > 0$, also hat g ein lokales Minimum in 0.
- Im Fall $v_2 = 0$ folgt $v_1 \neq 0$ aus der Voraussetzung und damit gilt schon $g(t) = 2v_1^4t^4 > 0 = g(0)$ für alle $t \neq 0$, also hat g sogar ein globales Minimum in 0.

Somit hat f entlang jeder Ursprungsgeraden ein lokales Minimum im Nullpunkt.

(ii) Es gilt

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 8x_1^3 - 6x_1x_2 \\ -3x_1^2 + 2x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \operatorname{Hess} f = \begin{pmatrix} 24x_1^2 - 6x_2 & -6x_1 \\ -6x_1 & 2 \end{pmatrix}$$

also gilt $(\operatorname{grad} f)(0) = 0$ und somit ist 0 ein kritischer Punkt von f. Die Hesse-Matrix im Punkt 0,

$$(\operatorname{Hess} f)(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

hat Eigenwerte 0 und 2 und ist somit positiv semidefinit, was uns nicht weiterhilft. Mit Hinweis sei $a \in \mathbb{R}$ und wir betrachten

$$\begin{aligned} f(x_1, ax_1^2) &= (ax_1^2 - x_1^2)(ax_1^2 - x_1^2)\\ &= (a-2)(a-1)x_1^4 \begin{cases} < 0, & \text{falls } 1 < a < 2,\\ = 0, & \text{falls } a = 1 \text{ oder } a = 2,\\ > 0, & \text{falls } a < 1 \text{ oder } a > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

So hat man für alle $x_1 \neq 0$ etwa

$$f\left(x_1, \frac{3}{2}x_1^2\right) = \left(\frac{3}{2} - 2\right)\left(\frac{3}{2} - 1\right)x_1^4 = -\frac{1}{4}x_1^4 < 0 = f(0)$$

und

$$f(x_1, 3x_1^2) = (3-2)(3-1)x_1^4 = 2x_1^4 > 0 = f(0),$$

also liegen in jeder Umgebung von 0 sowohl Punkte mit größerem als auch mit kleinerem Funktionswert. Folglich hat f kein lokales Minimum in 0.

Aufgabe 4 (3 + 2 + 2 + 2 Punkte). Mit $U := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$ sei

$$f : U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x_1^{x_2} \quad \text{und} \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U.$$

(a) Berechnen Sie $\operatorname{grad} f$ und $\operatorname{Hess} f$.

(b) Berechnen Sie $T_2(x, x^{(0)})$.

(c) Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus (b) eine Näherung für $\sqrt[10]{1.05^9}$.

(d) Berechnen Sie alle Extrema von f.

Lösung. (a) Mit $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2} = \exp(x_2 \ln(x_1))$ gilt

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(x_2 \ln(x_1)) \cdot \frac{x_2}{x_1} \\ \ln(x_1) \exp(x_2 \ln(x_1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 x_1^{x_2 - 1} \\ \ln(x_1) x_1^{x_2} \end{pmatrix} = x_1^{x_2-1} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \ln(x_1) \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} &= x_2(x_2 - 1) x_1^{x_2 - 2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{1}{x_1} \cdot x_1^{x_2} + \ln(x_1) \cdot x_2 x_1^{x_2 - 1} = (1 + x_2 \ln(x_1)) x_1^{x_2 - 1} \quad \text{und} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} &= \ln^2(x_1) x_1^{x_2}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess} f &= \begin{pmatrix} x_2(x_2 - 1) x_1^{x_2 - 2} & (1 + x_2 \ln(x_1)) x_1^{x_2 - 1} \\ (1 + x_2 \ln(x_1)) x_1^{x_2 - 1} & \ln^2(x_1) x_1^{x_2} \end{pmatrix} \\ &= x_1^{x_2 - 2} \begin{pmatrix} x_2(x_2 - 1) & (1 + x_2 \ln(x_1)) x_1 \\ (1 + x_2 \ln(x_1)) x_1 & \ln^2(x_1) x_1^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Mit $x^{(0)} = (1, 1)$ gilt

$$\begin{aligned} f(x^{(0)}) &= 1, \\ D_1 f(x^{(0)}) &= \left[x_2 x_1^{x_2 - 1} \right]_{x=(1,1)} = 1, \\ D_2 f(x^{(0)}) &= \left[\ln(x_1) x_1^{x_2} \right]_{x=(1,1)} = 0, \\ D_1 D_1 f(x^{(0)}) &= \left[x_2(x_2 - 1) x_1^{x_2 - 2} \right]_{x=(1,1)} = 0, \\ D_1 D_2 f(x^{(0)}) &= \left[(1 + x_2 \ln(x_1)) x_1^{x_2 - 1} \right]_{x=(1,1)} = 1, \\ D_2 D_2 f(x^{(0)}) &= \left[\ln^2(x_1) x_1 \right]_{x=(1,1)} = 0. \end{aligned}$$

Folglich erhält man

$$\begin{aligned} T_2(x; x^{(0)}) &= \sum_{|\alpha| \le 2} \frac{D^\alpha f(x^{(0)})}{\alpha!} (x - x^{(0)})^\alpha \\ &= 1 + 1 \cdot (x_1 - 1) + 0 \cdot (x_2 - 1) \\ &\quad + \frac{0}{2} (x_1 - 1)^2 + 1 \cdot (x_1 - 1)(x_2 - 1) + \frac{0}{2} \cdot (x_2 - 1)^2 \\ &= 1 + (x_1 - 1) + (x_1 - 1)(x_2 - 1). \end{aligned}$$

(c) Für $x = (1.05, 0.9)$ gilt

$$\begin{aligned}\sqrt[10]{1.05^9} = f(1.05, 0.9) \approx T_2(x; x^{(0)}) &= 1 + (1.05 - 1) + (1.05 - 1)(0.9 - 1) \\ &= 1 + 0.05 + 0.05 \cdot (-0.1) = 1.045.\end{aligned}$$

Warnung: Ohne eine Fehlerabschätzung durchzuführen können wir natürlich im Vorhinein nicht garantieren, dass diese Näherung dem tatsächlichen Ergebnis überhaupt "nahe" ist! In diesem Beispiel können wir uns aber immerhin im Nachhinein überzeugen, dass wir nicht "zu weit" von $1.05^{0.9} = 1.0448895\ldots$ entfernt sind.

(d) Es gilt

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} x_2 x_1^{x_2-1} \\ \ln(x_1) x_1^{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der einzige Kandidat ist also $x^{(0)} = (1, 0)$. Die Matrix

$$(\operatorname{Hess} f)(1, 0) = 1^{-2} \begin{pmatrix} 0 \cdot (0 - 1) & (1 + 0 \cdot \ln(1)) \cdot 1 \\ (1 + 0 \cdot \ln(1)) \cdot 1 & \ln^2(1) \cdot 1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist indefinit (Eigenwerte 1 und -1), also hat f kein lokales Extremum in $(1, 0)$.

Aufgabe 5 (5 Punkte)**.** Eine Firma stellt zwei Produkte A und B her. Eine Einheit A wird für 10 € verkauft, eine Einheit B für 9 €. Beide Produkte werden in einem komplizierten Prozess in der gleichen Fabrik produziert. Die Herstellung von x Einheiten A und y Einheiten B in einem Arbeitsgang kostet $f(x, y)$ €, wobei

$$f(x,y) = 400 + 2x + 3y + \frac{1}{100}(3x^2 + xy + 3y^2).$$

Wie viele Einheiten (x, y) muss der Hersteller in einem Arbeitsgang produzieren, um seinen Gewinn zu maximieren? Wie groß ist dieser maximale Gewinn?
Hinweis: Überlegen Sie sich genau, mit welcher Funktion Sie rechnen. Sie dürfen hier ausnahmsweise davon ausgehen, dass das lokale Maximum auch global ist.

Lösung. Gewinn ist Verkaufserlös abzüglich Kosten, für einen Arbeitsgang hat man also einen Gewinn von

$$g(x,y) = 10x + 9y - f(x,y) = 8x + 6y - 400 - \frac{1}{100}(3x^2 + xy + 3y^2).$$

Wir suchen also Maxima von g: Es gilt

$$\operatorname{grad} g = \begin{pmatrix} 8 - \frac{1}{100}(6x + y) \\ 6 - \frac{1}{100}(x + 6y) \end{pmatrix} = -\frac{1}{100}\begin{pmatrix} 6x + y - 800 \\ x + 6y - 600 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\operatorname{grad} g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6x + y = 800 \\ x + 6y = 600 \end{cases},$$

den einzigen kritischen Punkt $(x, y) = (120, 80)$ erhält man etwa mit Zeilenumformungen:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 1 & 800 \\ 1 & 6 & 600 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I}-6\cdot\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -35 & -2800 \\ 1 & 6 & 600 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I}\cdot(-\frac{1}{35})} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 80 \\ 1 & 6 & 600 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{\mathrm{II}-6\cdot\mathrm{I}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 80 \\ 1 & 0 & 120 \end{array}\right)$$

Weiterhin gilt

$$H := \operatorname{Hess} g = \begin{pmatrix} -\frac{6}{100} & -\frac{1}{100} \\ -\frac{1}{100} & -\frac{6}{100} \end{pmatrix}$$

unabhängig von (x, y). Wegen

$$\begin{aligned} \chi_H(\lambda) &= \det(H - \lambda I_2) \\ &= \det\begin{pmatrix} -\frac{6}{100} - \lambda & -\frac{1}{100} \\ -\frac{1}{100} & -\frac{6}{100} - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \left(-\frac{1}{100}\right)^2 \det\begin{pmatrix} 6 + 100\lambda & 1 \\ 1 & 6 + 100\lambda \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10^4}((6 + 100\lambda)^2 - 1) \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned} \chi_H(\lambda) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (6 + 100\lambda)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 6 + 100\lambda = 1 \text{ oder } 6 + 100\lambda = -1 \\ &\Leftrightarrow \quad 100\lambda = -5 \text{ oder } 100\lambda = -7 \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{5}{100} \text{ oder } \lambda = -\frac{7}{100}, \end{aligned}$$

also ist H negativ definit und g hat in $(120, 80)$ ein lokales Maximum, das mit dem Hinweis auch global ist. Der maximale Gewinn pro Arbeitsschritt in Euro ist also

$$\begin{aligned}
g(120, 80) &= 8 \cdot 120 + 6 \cdot 80 - 400 - \frac{1}{100}(3 \cdot 120^2 + 120 \cdot 80 + 3 \cdot 80^2) \\
&= 960 + 480 - 400 - \frac{1}{100}(3 \cdot 14400 + 3 \cdot 3200 + 3 \cdot 6400) \\
&= 1040 - 3 \cdot (144 + 32 + 64) \\
&= 1040 - 3 \cdot 240 \\
&= 1040 - 720 \\
&= 320.
\end{aligned}$$

Hinweis: In einer etwas realistischeren Betrachtung müsste man natürlich noch argumentieren, dass das lokale Maximum global ist, in dem man das Verhalten gegen $\pm\infty$ *überprüft. Häufig hat man auch eine Nebenbedingung, die die gültigen Werte für Stückzahlen einschränkt (zum Beispiel könnte gelten, dass pro Arbeitsgang nur zwischen* 1 *und* 1000 *Einheiten* x *produziert werden können und analog für* y*). Dies wiederum würde dann noch eine Betrachtung des Randes notwendig machen.*