CISPA
HELMHOLTZ CENTER FOR
INFORMATION SECURITY

Prof. Bernd Finkbeiner, Ph.D.
Jana Hofmann, M.Sc.
Reactive Systems Group

Programmierung 1 (WS 2020/21)
Aufgaben für die Übungsgruppe J (Lösungsvorschläge)

Hinweis: Diese Aufgaben wurden von den Tutoren für die Übungsgruppe erstellt. Sie sind für die Klausur weder relevant noch irrelevant. 🤔 markiert potentiell schwerere Aufgaben.

Laufzeit

Aufgabe TJ.1 *(Kostenfunktionen)*
Geben Sie Laufzeitfunktionen für die Prozeduren a, b und c unter Beachtung der Größenfunktionen an. Bestimmen Sie zunächst die Kostenfunktionen für b' und c'.

(a) $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
$$\begin{aligned} &a\ (n) = 3 && n = 0 \\ &a\ (n) = 2 - a\ (n-1) && n > 0 \end{aligned}$$
$\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$

(b) $b' : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
$$\begin{aligned} &b'\ (n) = 5 && n < 2 \\ &b'\ (n) = b'\ (n-1) + b'\ (n-1) - 98n && n \geq 2 \end{aligned}$$
$\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$

$b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$$\begin{aligned} &b\ (n) = 5 && n < 3 \\ &b\ (n) = b\ (n-1) \cdot b'\ (n) && n \geq 3 \end{aligned}$$
$\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$

(c) $c' : \mathcal{L}\ (X) \to \mathbb{N}$
$$\begin{aligned} &c'\ (nil) = 5 \\ &c'\ (x :: xr) = 10 \end{aligned}$$
$\lambda xs \in \mathscr{L}\ (X)\ .\ |xs|$

$c : \mathcal{L}\ (X) \to \mathbb{N}$
$$\begin{aligned} &c\ (nil) = 0 + c'\ (nil) \\ &c\ (x :: xr) = c\ (xr) - c\ (xr) - 12 \cdot c'\ (x :: xr) \end{aligned}$$
$\lambda xs \in \mathscr{L}\ (X)\ .\ |xs|$

Lösungsvorschlag TJ.1

(a) $r \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}_+$
$$\begin{aligned} &r\ (n) = 1 && n = 0 \\ &r\ (n) = r\ (n-1) + 1 && n > 0 \end{aligned}$$

(b) $g \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}_+$
$$\begin{aligned} &g\ (n) = 1 && n < 2 \\ &g\ (n) = 2 \cdot g\ (n-1) + 1 && n \geq 2 \end{aligned}$$
$r \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}_+$
$$\begin{aligned} &r\ (n) = 1 && n < 3 \\ &r\ (n) = r\ (n-1) + g\ (n) + 1 && n \geq 3 \end{aligned}$$

(c) $g \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}_+$
$$g\ (n) = 1$$
$r \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}_+$
$$\begin{aligned} &r\ (n) = g\ (n) + 1 && n = 0 \\ &r\ (n) = 2 \cdot r\ (n-1) + g\ (n) + 1 && n > 0 \end{aligned}$$

Aufgabe TJ.2
Geben Sie die Komplexitäten der im Folgenden rekursiv definierten Funktionen $f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}_+$ möglichst einfach an.

(a) $f\ n = \text{if } n < 3 \text{ then } 1 \text{ else } f\ (n-2) + 5$

(b) $f\ n = \text{if } n < 30 \text{ then } 1 \text{ else } f\ (n-6) + 3n + 7n^2$

(c) $f\ n = \text{if } n < 27 \text{ then } 1 \text{ else } f\ (n-7) + 3n^7 + 7n^3$

Lösungsvorschlag TJ.2

(a) Die Funktion f lässt sich durch die folgende Rekurrenz (mit $g\ n = 5$) darstellen:

$$\begin{aligned} f\ n &= 1 && \text{für } n < 3 \\ f\ n &= f\ (n-2) + g\ n && \text{für } n \geq 3 \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(n^0)$ und mit Satz 11.5 (Rekurrenzsatz) folgt $\mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(n^{0+1}) = \mathcal{O}(n)$.

(b) Die Funktion f lässt sich wie folgt (mit $g\ n = 3n + 7n^2$) darstellen.

$$\begin{aligned} f\ n &= 1 && \text{für } n < 30 \\ f\ n &= f\ (n-6) + g\ n && \text{für } n \geq 30 \end{aligned}$$

Man überlegt sich leicht, dass $\mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(n^2)$ gilt, und mit Satz 11.5 (polynomieller Rekurrenzsatz) folgt daraus $\mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(n^{2+1}) = \mathcal{O}(n^3)$.

(c) Die Funktion f lässt sich mit $g\ n = 3n^7 + 7n^3$ durch diese Rekurrenz darstellen:

$$\begin{aligned} f\ n &= 1 && \text{für } n < 27 \\ f\ n &= f\ (n-7) + g\ n && \text{für } n \geq 27 \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(n^7)$ und mit Satz 11.5 (polynomieller Rekurrenzsatz) folgt $\mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(n^{7+1}) = \mathcal{O}(n^8)$.

Aufgabe TJ.3
Seien zwei Prozeduren wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} &p : \mathbb{N} \to \mathbb{N} && q : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ &p\ n = \text{if } n < 5 \text{ then } n \text{ else } p\ (n-2) && q\ n = \text{if } n < 12 \text{ then } 3n \text{ else } q\ (n-1) + q\ (n-1) + p\ n \end{aligned}$$

Sie sollen die Laufzeitfunktionen und die Komplexitäten der Prozeduren für die Größenfunktion $\lambda n.\ n$ bestimmen.

(a) Beschreiben Sie die Laufzeitfunktion von p rekursiv.

(b) Beschreiben Sie die Laufzeitfunktion von q rekursiv. Machen Sie dabei von der Laufzeitfunktion für p Gebrauch, um die für die Anwendung der Funktion p anfallenden Nebenkosten einzubringen.

(c) Geben Sie die Komplexität der Prozedur p an.

(d) Geben Sie die Komplexität der Prozedur q an.

Lösungsvorschlag TJ.3

(a) Die Laufzeitfunktion $r : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_+$ von p lässt sich rekursiv darstellen als

$$\begin{aligned} r\ n &= 1 && \text{für } n < 5 \\ r\ n &= r\ (n-2) + 1 && \text{für } n \geq 5 \end{aligned}$$

(b) Die Laufzeitfunktion $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_+$ von q lässt sich rekursiv darstellen als

$$\begin{aligned} s\ n &= 1 && \text{für } n < 12 \\ s\ n &= 2 \cdot s\ (n-1) + r\ n + 1 && \text{für } n \geq 12 \end{aligned}$$

(c) Aus (a) und Satz 11.5 (polynomieller Rekurrenzsatz) folgt $\mathcal{O}\,(r) = \mathcal{O}\,(n)$.

(d) Aus (b) und (c) folgt mit Satz 11.6 (exponentieller Rekurrenzsatz) $\mathcal{O}\,(s) = \mathcal{O}\,(2^n)$.

Aufgabe TJ.4 *(Ein immer und immer wieder auftretendes Problem...)*
Bestimmen Sie die Laufzeitkomplexitäten folgender Prozeduren für die gegebenen Größenfunktionen, indem Sie zunächst die rekursiven Laufzeitfunktionen aufstellen. Wenn kein Rekurrenzsatz anwendbar ist, begründen Sie stattdessen weshalb. Veranschlagen Sie für q quadratische und für l lineare Nebenkosten. Prozedurnamen mit einem Strich stehen für Hilfsprozeduren.

(a) $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
$a\ (n) = 3 \qquad n \leq 1$
$a\ (n) = 2 - a\ (n-2) \qquad n > 1$
$\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$

(b) $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$b\ (n) = 5 \qquad n < 100$
$b\ (n) = 4 \cdot b\ (n-34) \qquad n \geq 100$
$\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$

(c) $c' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$c'\ (n) = n^n \qquad n \leq 56$
$c'\ (n) = 4 \cdot c'\ (n-7) \qquad n > 56$
$\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$

$c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$c\ (n) = \sqrt{n} \qquad n \leq 55$
$c\ (n) = 4 \cdot c\ (n-1) + c\ (n-1) + c'\ (n) \qquad n \geq 56$
$\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$

(d) $d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$d\ (n) = 999 \qquad n \leq 3$
$d\ (n) = d\ (n-1) + d\ (n-2) + q\ (n-3) + 5 \qquad n > 3$
$\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$

(e) $e : \mathscr{L}\,(X) \to \mathbb{R}$
$e\ (nil) = 1$
$e\ (x :: xr) = e\ (xr) - \dfrac{e\ (xr)}{e\ (xr) + 1}$
$\lambda xs \in \mathscr{L}\,(X)\,.\ |xs|$

(f) $f' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f'(n) = n \cdot \log(n) \qquad n \leq 10^4$$

$$f'(n) = 4 \cdot f'(100) \qquad n > 10^4$$

$\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$$f(n) = n + n - (n + 3) \qquad n < 123$$

$$f(n) = 4 \cdot f(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) - f'(n) \qquad n \geq 123$$

$\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$

(g) $g' : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$g'(m, n) = n^2 \cdot m^3 \qquad n \leq 10$$

$$g'(m, n) = g'(m - 1, n - 2) + 9 \qquad n > 10$$

$\lambda(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}.\ n$

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$$g(n) = n^{n^n} \qquad n < 3$$

$$g(n) = 2 \cdot g(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + g(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) - g'(n - 1, n) \cdot g(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + 34 \cdot g(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) \qquad n \geq 3$$

$\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$

(h) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$h(n) = q(0) \qquad n = 0$$

$$h(n) = h(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor) + l(n) \qquad n > 0$$

$\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$

(i) $i'' : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$$i''(n) = n^1 - 1 \qquad n \leq 7$$

$$i''(n) = i''(n - 5) \qquad n > 7$$

$\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$

$i' : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$$i'(n) = i''(n) \qquad n \leq 10$$

$$i'(n) = i''(n) - i'(n - 4) \qquad n > 10$$

$\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$

$i : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$$i(n) = n^{n+90} \qquad n < 27$$

$$i(n) = 0 \cdot i(n - 1) + i(n - 1) - (i'(n))^{i\,(n-1)} \qquad n \geq 27$$

$\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$

(j) $j' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$j'(n) = n - \frac{n}{n} + n^3 \qquad n < 403$$

$$j'(n) = j'(n-57) + 9 \qquad n \geq 403$$

$\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$

$j : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$

$$j(m,n) = m^{n^n} \qquad m \leq 900$$

$$j(m,n) = \frac{j\left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor, n-5\right)}{j\left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor, n-12\right) + 2} \cdot j'(m) \qquad m > 900$$

$\lambda(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}.\ m$

Lösungsvorschlag TJ.4

(a) Aus der Rekurrenz $r(n) = r(n-2) + \mathcal{O}\left(n^0\right)$ folgt die Komplexität $\mathcal{O}\left(n^{0+1}\right)$.

(b) Aus der Rekurrenz $r(n) = r(n-34) + \mathcal{O}\left(n^0\right)$ folgt die Komplexität $\mathcal{O}\left(n^{0+1}\right)$.

(c) Aus der Rekurrenz $g(n) = g(n-7) + \mathcal{O}\left(n^0\right)$ folgt die Komplexität $\mathcal{O}\left(n^{0+1}\right)$ für c'. Aus diesen Nebenkosten folgt die Rekurrenz $r(n) = 2 \cdot r(n-1) + \mathcal{O}\left(n^{0+1}\right)$ für c. Daher hat c die Komplexität $\mathcal{O}(2^n)$.

(d) Es ist kein Rekurrenzsatz anwendbar. Ähnlich wie bei fib kommt nur der exponentielle Rekurrenzsatz in Frage, der aber nur Rekursion mit um eins kleineren Argumenten zulässt.

(e) Aus der Rekurrenz $r(n) = 3 \cdot r(n-1) + \mathcal{O}\left(n^0\right)$ folgt die Komplexität $\mathcal{O}(3^n)$.

(f) Da f' konstante Laufzeit hat, hat es die Komplexität $\mathcal{O}(1)$. Aus diesen Nebenkosten folgt die Rekurrenz $r(4 \cdot n) = r(n) + \mathcal{O}(1)$ für f. Daher hat f die Komplexität $\mathcal{O}(\log n)$.

(g) Aus der Rekurrenz $g(n) = g(n-2) + \mathcal{O}\left(n^0\right)$ folgt die Komplexität $\mathcal{O}\left(n^{0+1}\right)$ für g'. Aus diesen Nebenkosten folgt die Rekurrenz $r(n) = 4 \cdot r(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + \mathcal{O}\left(n^{0+1}\right)$ für g. Daher hat g die Komplexität $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$.

(h) Es ist kein Rekurrenzsatz anwendbar. Wegen der linearen Nebenkosten, würde nur der Linear-logarithmische Rekurrenzsatz in Frage kommen. Für den Linear-logarithmische Rekurrenzsatz bräuchte die Prozedur allerdings drei rekursive Aufrufe.

(i) Aus der Rekurrenz $k(n) = k(n-5) + \mathcal{O}\left(n^0\right)$ folgt die Komplexität $\mathcal{O}\left(n^{0+1}\right)$ für i''. Aus diesen Nebenkosten folgt die Rekurrenz $g(n) = g(n-4) + \mathcal{O}(n^1)$ für i'. Daher hat i' die Komplexität $\mathcal{O}(n^{1+1})$. Aus diesen Nebenkosten folgt die Rekurrenz $r(n) = 3 \cdot r(n-1) + \mathcal{O}(n^2)$ für i. Daher hat i die Komplexität $\mathcal{O}(3^n)$.

(j) Aus der Rekurrenz $g(n) = g(n-57) + \mathcal{O}\left(n^0\right)$ folgt die Komplexität $\mathcal{O}\left(n^{0+1}\right)$ für j'. Aus diesen Nebenkosten folgt die Rekurrenz $r(n) = 2 \cdot r(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \mathcal{O}\left(n^{0+1}\right)$ für j. Daher hat j die Komplexität $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$.

Aufgabe TJ.5 *(Rekurrenzsätze umgekehrt)*
Geben Sie zu den folgenden Komplexitäten möglichst einfache Prozeduren $\mathbb{N} \to \{0\}$ an und nennen Sie den Rekurrenzsatz, den Sie bei der Konstruktion benutzt haben.

(a) $\mathcal{O}(1)$ $\mathcal{O}(n)$ ohne Nebenkosten

(b) $\mathcal{O}\left(n^2\right)$ $\mathcal{O}\left(n^3\right)$ mit linearen/quadratischen Nebenkosten

(c) $\mathcal{O}(2^n)$ $\mathcal{O}(\log(n))$ $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$

(d) Ist es möglich eine Prozedur mit $\mathcal{O}(0)$ anzugeben? Begründen Sie Ihre Antwort.

(e) Wäre $f(n) = 0$ eine valide Lösung für Aufgabenteil (b) und (c)? Begründen Sie.

Lösungsvorschlag TJ.5

(a)
- Polynomieller Rekurenzsatz
  $f(n) = 0$

- Polynomieller Rekurenzsatz
  $g(0) = 0$
  $g(n) = (n - 1)$

(b)
- Polynomieller Rekurenzsatz
  $h(0) = 0$
  $h(n) = h(n - 1) + g(n)$
- Polynomieller Rekurenzsatz
  $i(0) = 0$
  $i(n) = i(n - 1) + h(n)$

(c)
- Exponentieller Rekurenzsatz
  $j(0) = 0$
  $j(n) = j(n - 1) + j(n - 1)$
- Logarithmischer Rekurenzsatz
  $k(0) = 0$
  $k(n) = k(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$
- Linear-Logarithmischer Rekurenzsatz
  $k(0) = 0$
  $k(n) = k(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + k(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + g(n)$

(d) Nein. Es gibt zwar Funktionen mit $\mathcal{O}(0)$, aber keine Prozeduren, da diese immer mindestens einen Aufruf haben.

(e) Ja. Da $f \in \mathcal{O}(1)$ und $\mathcal{O}(1)$ ist Teilmenge aller gegebenen Komplexitätsklassen.

Aufgabe TJ.6 *(Dieter schon wieder)*
Dieter Schlau wird im Minitest die folgende Aufgabe gestellt:

Geben Sie die Komplexität der Prozedur pizza an:

$$\begin{aligned}
&\mathit{pizza} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\
&\mathit{pizza}\ 0 = 1 \\
&\mathit{pizza}\ n = 3 \cdot \mathit{pizza}\ (n-1) + 1 && \text{für } n > 0
\end{aligned}$$

Dieter ist schon etwas knapp in der Zeit und beschließt, diese Aufgabe schnell mit einem Rekurrenzsatz zu lösen. Er sieht das Muster des exponentiellen Rekurrenzsatzes ($r\ n = b \cdot r\ (n-1) + g\ n$) und wendet ihn an (mit $b = 3$ und $g\ n = 1$). Die Tutorin steht schon vor Dieter und schaut ihn böse an, als er noch schnell $\mathcal{O}(3^n)$ als Ergebnis unter die Aufgabe schreibt.

(a) Dieters Lösung ist falsch. Was wird seine Tutorin Eva Smart in seinem Test bemängeln?

(b) Lösen Sie die Aufgabe korrekt.

(c) Ändern Sie die Aufgabe so ab, dass Dieters „Lösung“ richtig(er) ist.

Lösungsvorschlag TJ.6

(a) Den Rekurrenzsatz darf man nicht direkt auf die Prozedur anwenden, sondern nur auf die (rekursive) Laufzeitfunktion.

(b) Zuerst finden wir die Größenfunktion $\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$.

Die rekursive Laufzeitfunktion ist dann:

$$\begin{aligned}
&r \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}_+ \\
&r\ 0 = 1 \\
&r\ n = r\ (n-1) + 1 && \text{für } n > 0
\end{aligned}$$

Damit lässt sich der polynomielle Rekurrenzsatz anwenden und wir erhalten $\mathcal{O}(n)$.

(c) Die neue Aufgabe lautet:

Geben Sie die Komplexität der Prozedur *neu* an.

$$\begin{aligned}
&neu : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\
&neu\ (0) = 1 \\
&neu\ (n) = neu\ (n-1) + neu\ (n-1) + neu\ (n-1) && \text{für } n > 0
\end{aligned}$$

Statische und Dynamische Semantik

Inferenz

Aufgabe TJ.7 *(Inferenz-Bootcamp)*
Leiten Sie die Typen der folgenden Ausdrücke gemäß der statischen Semantik ab:

(a) if $true$ then 2 else y in der Umgebung $[y := int]$

(b) (fn $(x : int) \Rightarrow x + 2)$ 3 in der Umgebung $\emptyset$

(c) f 2 (fn $(x : bool) \Rightarrow 2)$ in der Umgebung $[f := int \to (bool \to int) \to bool]$

(d) if $x \leq 6$ then fn $(x : int) \Rightarrow g\ x$ else fn $y : int \Rightarrow true$ in der Umgebung $[x := int, g := int \to bool]$

Lösungsvorschlag TJ.7

(a)
$$\textbf{(Sif)}\ \dfrac{\textbf{(Strue)}\ \dfrac{}{[y := int] \vdash true : bool} \qquad \textbf{(Snum)}\ \dfrac{2 \in \mathbb{Z}}{[y := int] \vdash 2 : int} \qquad \textbf{(Sid)}\ \dfrac{[y := int](y) = int}{[y := int] \vdash y : int}}{[y := int] \vdash \text{if } true \text{ then } 2 \text{ else } y : int}$$

(b)
$$\textbf{(Sapp)}\ \dfrac{\textbf{(Sabs)}\ \dfrac{\textbf{(Soai)}\ \dfrac{\textbf{(Sid)}\ \dfrac{(x, int) \in [x := int]}{[x := int] \vdash x : int} \qquad \textbf{(Snum)}\ \dfrac{2 \in \mathbb{Z}}{[x := int] \vdash 2 : int}}{[x := int] \vdash x + 2 : int}}{\emptyset \vdash \text{fn } (x : int) \Rightarrow x + 2 : int \to int} \qquad \textbf{(Snum)}\ \dfrac{3 \in \mathbb{Z}}{\emptyset \vdash 3 : int}}{\emptyset \vdash (\text{fn } (x : int) \Rightarrow x + 2)\ 3 : int}$$

(c)
$$\textbf{(Sapp)}\ \dfrac{\textbf{(Sapp)}\ \dfrac{\textbf{(Sid)}\ \dfrac{(f, int \to (bool \to int) \to bool) \in [f := int \to (bool \to int) \to bool]}{[f := int \to (bool \to int) \to bool] \vdash f : int \to (bool \to int) \to bool} \qquad \textbf{(Snum)}\ \dfrac{2 \in \mathbb{Z}}{[f := int \to (bool \to int) \to bool] \vdash 2 : int}}{[f := int \to (bool \to int) \to bool] \vdash f\ 2 : (bool \to int) \to bool} \qquad \textbf{(Sabs)}\ \dfrac{\textbf{(Snum)}\ \dfrac{2 \in \mathbb{Z}}{[f := int \to (bool \to int) \to bool, x := bool] \vdash 2 : int}}{[f := int \to (bool \to int) \to bool] \vdash \text{fn } (x : bool) \Rightarrow 2 : bool \to int}}{[f := int \to (bool \to int) \to bool] \vdash f\ 2\ (\text{fn } (x : bool) \Rightarrow 2) : bool}$$

(d) Sei $T := [x := int, g := int \to bool]$.

$$\textbf{(Sif)}\ \dfrac{\textbf{(Soab)}\ \dfrac{\textbf{(Sid)}\ \dfrac{(x, int) \in T}{T \vdash x : int} \qquad \textbf{(Snum)}\ \dfrac{6 \in \mathbb{Z}}{T \vdash 6 : int}}{T \vdash x \leq 6 : bool} \qquad \textbf{(Sabs)}\ \dfrac{\textbf{(Sapp)}\ \dfrac{\textbf{(Sid)}\ \dfrac{(g, int \to bool) \in T[x := int]}{T[x := int] \vdash g : int \to bool} \qquad \textbf{(Sid)}\ \dfrac{(x, int) \in T[x := int]}{T[x := int] \vdash x : int}}{T[x := int] \vdash g\ x : bool}}{T \vdash \text{fn } (x : int) \Rightarrow g\ x : int \to bool} \qquad \textbf{(Sabs)}\ \dfrac{\textbf{(Strue)}\ \dfrac{}{T[y := int] \vdash true : bool}}{T \vdash \text{fn } (y : int) \Rightarrow true : int \to bool}}{T \vdash \text{if } x \leq 6 \text{ then fn } (x : int) \Rightarrow g\ x \text{ else fn } (y : int) \Rightarrow true : int \to bool}$$

Aufgabe TJ.8 *(Ersteinmal vorglühen)*
Leiten Sie den folgenden Ausdruck gemäß der statischen Semantik in der leeren Typumgebung ab.

```
(fn(x: int) => if x <=4 then x else 0) 42
```

Lösungsvorschlag TJ.8

$$\textbf{(Sapp)}\ \dfrac{\textbf{(Sabs)}\ \dfrac{\textbf{(Sif)}\ \dfrac{\textbf{(Soab)}\ \dfrac{\textbf{(Sid)}\ \dfrac{(x, int) \in [x := int]}{[x := int] \vdash x : int} \qquad \textbf{(Snum)}\ \dfrac{42 \in \mathbb{Z}}{[x := int] \vdash 42 : int}}{[x := int] \vdash x \leq 42 : bool} \qquad \textbf{(Sid)}\ \dfrac{(x, int) \in [x := int]}{[x := int] \vdash x : int} \qquad \textbf{(Snum)}\ \dfrac{0 \in \mathbb{Z}}{[x := int] \vdash 0 : int}}{[x := int] \vdash \text{if } x \leq 42 \text{ then } x \text{ else } 0 : int}}{\emptyset \vdash \text{fn } (x : int) \Rightarrow \text{if } x \leq 42 \text{ then } x \text{ else } 0 : int \to int} \qquad \textbf{(Snum)}\ \dfrac{42 \in \mathbb{Z}}{\emptyset \vdash 42 : int}}{\emptyset \vdash (\text{fn } (x : int) \Rightarrow \text{if } x \leq 42 \text{ then } x \text{ else } 0)\ 42 : int}$$

Aufgabe TJ.9 *(Statische Semantik)*
Leiten Sie die Typen der folgenden Ausdrücke gemäß der statischen Semantik ab:

(a) if true then 2 else y in der Umgebung $[y \coloneqq \mathit{int}]$

(b) $(\text{fn } (x : \mathit{int}) \Rightarrow x + 2)\ 3$ in der leeren Umgebung

(c) $f\ 2\ (\text{fn } (x : \mathit{bool}) \Rightarrow 2)$ in der Umgebung $[f \coloneqq \mathit{int} \to (\mathit{bool} \to \mathit{int}) \to \mathit{bool}]$

(d) if $x \leq 6$ then fn $(x : \mathit{int}) \Rightarrow g\ x$ else fn $y : \mathit{int} \Rightarrow \mathit{true}$ in der Umgebung $[x \coloneqq \mathit{int}, g \coloneqq \mathit{int} \to \mathit{bool}]$

(e) if $x \leq 0$ then (fn $a : \mathit{bool} \Rightarrow$ if a then 42 else ~ 1337) false else true in der Umgebung $[x \coloneqq \mathit{int}]$

Lösungsvorschlag TJ.9

(a)
$$\textbf{(Sif)}\ \dfrac{\textbf{(Strue)}\ \dfrac{}{[y \coloneqq \mathit{int}] \vdash \mathit{true} : \mathit{bool}} \quad \textbf{(Snum)}\ \dfrac{2 \in \mathbb{Z}}{[y \coloneqq \mathit{int}] \vdash 2 : \mathit{int}} \quad \textbf{(Sid)}\ \dfrac{(x, \mathit{int}) \in [y \coloneqq \mathit{int}]}{[y \coloneqq \mathit{int}] \vdash y : \mathit{int}}}{[y \coloneqq \mathit{int}] \vdash \text{if } \mathit{true} \text{ then } 2 \text{ else } y : \mathit{int}}$$

(b)
$$\textbf{(Sapp)}\ \dfrac{\textbf{(Sabs)}\ \dfrac{\textbf{(Soai)}\ \dfrac{\textbf{(Sid)}\ \dfrac{(x, \mathit{int}) \in [x \coloneqq \mathit{int}]}{[x \coloneqq \mathit{int}] \vdash x : \mathit{int}} \quad \textbf{(Snum)}\ \dfrac{2 \in \mathbb{Z}}{[x \coloneqq \mathit{int}] \vdash 2 : \mathit{int}}}{[x \coloneqq \mathit{int}] \vdash x + 2 : \mathit{int}}}{\emptyset \vdash \text{fn } (x : \mathit{int}) \Rightarrow x + 2 : \mathit{int} \to \mathit{int}} \quad \textbf{(Snum)}\ \dfrac{3 \in \mathbb{Z}}{\emptyset \vdash 3 : \mathit{int}}}{\emptyset \vdash (\text{fn } (x : \mathit{int}) \Rightarrow x + 2)\ 3 : \mathit{int}}$$

(c)
$$\textbf{(Sapp)}\ \dfrac{\textbf{(Sapp)}\ \dfrac{\textbf{(Sid)}\ \dfrac{(f, \mathit{int} \to (\mathit{bool} \to \mathit{int}) \to \mathit{bool}) \in [f \coloneqq \mathit{int} \to (\mathit{bool} \to \mathit{int}) \to \mathit{bool}]}{[f \coloneqq \mathit{int} \to (\mathit{bool} \to \mathit{int}) \to \mathit{bool}] \vdash f : \mathit{int} \to (\mathit{bool} \to \mathit{int}) \to \mathit{bool}} \quad \textbf{(Snum)}\ \dfrac{2 \in \mathbb{Z}}{[f \coloneqq \mathit{int} \to (\mathit{bool} \to \mathit{int}) \to \mathit{bool}] \vdash 2 : \mathit{int}}}{[f \coloneqq \mathit{int} \to (\mathit{bool} \to \mathit{int}) \to \mathit{bool}] \vdash f\ 2 : (\mathit{bool} \to \mathit{int}) \to \mathit{bool}} \quad \textbf{(Sabs)}\ \dfrac{\textbf{(Snum)}\ \dfrac{2 \in \mathbb{Z}}{[f \coloneqq \mathit{int} \to (\mathit{bool} \to \mathit{int}) \to \mathit{bool}, x \coloneqq \mathit{bool}] \vdash 2 : \mathit{int}}}{[f \coloneqq \mathit{int} \to (\mathit{bool} \to \mathit{int}) \to \mathit{bool}] \vdash \text{fn } (x : \mathit{bool}) \Rightarrow 2 : \mathit{bool} \to \mathit{int}}}{[f \coloneqq \mathit{int} \to (\mathit{bool} \to \mathit{int}) \to \mathit{bool}] \vdash f\ 2\ (\text{fn } (x : \mathit{bool}) \Rightarrow 2) : \mathit{bool}}$$

(d) Sei $T \coloneqq [x \coloneqq \mathit{int}, g \coloneqq \mathit{int} \to \mathit{bool}]$.
$$\textbf{(Sif)}\ \dfrac{\textbf{(Soab)}\ \dfrac{\textbf{(Sid)}\ \dfrac{(x, \mathit{int}) \in T}{T \vdash x : \mathit{int}} \quad \textbf{(Snum)}\ \dfrac{6 \in \mathbb{Z}}{T \vdash 6 : \mathit{int}}}{T \vdash x \leq 6 : \mathit{bool}} \quad \textbf{(Sabs)}\ \dfrac{\textbf{(Sapp)}\ \dfrac{\textbf{(Sid)}\ \dfrac{(g, \mathit{int} \to \mathit{bool}) \in T[x \coloneqq \mathit{int}]}{T[x \coloneqq \mathit{int}] \vdash g : \mathit{int} \to \mathit{bool}} \quad \textbf{(Sid)}\ \dfrac{(x, \mathit{int}) \in T[x \coloneqq \mathit{int}]}{T[x \coloneqq \mathit{int}] \vdash x : \mathit{int}}}{T[x \coloneqq \mathit{int}] \vdash g\ x : \mathit{bool}}}{T \vdash \text{fn } (x : \mathit{int}) \Rightarrow g\ x : \mathit{int} \to \mathit{bool}} \quad \textbf{(Sabs)}\ \dfrac{\textbf{(Strue)}\ \dfrac{}{T[y \coloneqq \mathit{int}] \vdash \mathit{true} : \mathit{bool}}}{T \vdash \text{fn } (y : \mathit{int}) \Rightarrow \mathit{true} : \mathit{int} \to \mathit{bool}}}{T \vdash \text{if } x \leq 6 \text{ then fn } (x : \mathit{int}) \Rightarrow g\ x \text{ else fn } (y : \mathit{int}) \Rightarrow \mathit{true} : \mathit{int} \to \mathit{bool}}$$

(e)
$$\textbf{(Sif)}\ \dfrac{\textbf{(Soab)}\ \dfrac{\textbf{(Sid)}\ \dfrac{(x, \mathit{int}) \in [x := \mathit{int}]}{[x := \mathit{int}] \vdash x : \mathit{int}} \quad \textbf{(Snum)}\ \dfrac{0 \in \mathbb{Z}}{[x := \mathit{int}] \vdash 0 : \mathit{int}}}{[x := \mathit{int}] \vdash x \leq 0 : \mathit{bool}} \quad \textbf{(Sapp)}\ \dfrac{\textbf{(Sabs)}\ \dfrac{\textbf{(Sif)}\ \dfrac{\textbf{(Sid)}\ \dfrac{(a, \mathit{bool}) \in [x := \mathit{int}, a := \mathit{bool}]}{[x := \mathit{int}, a := \mathit{bool}] \vdash a : \mathit{bool}} \quad \textbf{(Snum)}\ \dfrac{42 \in \mathbb{Z}}{[x := \mathit{int}, a := \mathit{bool}] \vdash 42 : \mathit{int}} \quad \textbf{(Snum)}\ \dfrac{\sim 1337 \in \mathbb{Z}}{[x := \mathit{int}, a := \mathit{bool}] \vdash \sim 1337 : \mathit{int}}}{[x := \mathit{int}, a := \mathit{bool}] \vdash \text{if } a \text{ then } 42 \text{ else } \sim 1337 : \mathit{int}}}{[x := \mathit{int}] \vdash \text{fn } a : \mathit{bool} \Rightarrow \text{if } a \text{ then } 42 \text{ else } \sim 1337 : \mathit{bool} \to \mathit{int}} \quad \textbf{(Sfalse)}\ \dfrac{}{[x := \mathit{int}] \vdash \text{false} : \mathit{bool}}}{[x := \mathit{int}] \vdash (\text{fn } a : \mathit{bool} \Rightarrow \text{if } a \text{ then } 42 \text{ else } \sim 1337)\ \text{false} : \mathit{int}} \quad \textbf{(Strue)}\ \dfrac{}{[x := \mathit{int}] \vdash \text{true} : \mathit{bool}}}{[x := \mathit{int}] \vdash \text{if } x \leq 0 \text{ then } (\text{fn } a : \mathit{bool} \Rightarrow \text{if } a \text{ then } 42 \text{ else } \sim 1337)\ \text{false else true} : \lightning}$$

Aufgabe TJ.10 *(Dynamische Semantik)*
Leiten Sie die Werte der folgenden Ausdrücke gemäß der dynamischen Semantik ab:

(a) $24 + 5 \leq 18 * 2$ in der leeren Umgebung

(b) if false then $5 * 6$ else $3 + x$ in der Umgebung $[x \coloneqq 6]$

(c) $(\text{fn } (x : \mathit{int}) \Rightarrow x + 3)\ 2$ in der leeren Umgebung

(d) if $42 \cdot 0$ then $5 + 3$ else fn $(x : \mathit{int}) \Rightarrow 42$ in der leeren Umgebung

(e) $(\text{fn } (x : \mathit{int}) \Rightarrow 4 * x - 3)\ y$ in der Umgebung $[y \coloneqq 2]$

(f) $(\text{fn } (x : \mathit{int} \to \mathit{int}) \Rightarrow x\ 5)(\text{fn } (y : \mathit{int}) \Rightarrow y + 3)$ in der leeren Umgebung

(g) $((\text{fn } (x : \mathit{int}) \Rightarrow x + 5)\ x) * 5$ in der Umgebung $[y \coloneqq 4, z \coloneqq 2]$

(h) $(\text{fn } (y : \mathit{bool} \to \mathit{int}) \Rightarrow y\ \mathit{true})\ g$ in der Umgebung $[g \coloneqq \langle x, \text{if } x \text{ then } 1 \text{ else } 2, \emptyset \rangle]$.

Lösungsvorschlag TJ.10

(a)

$$
(\textbf{D}\leq)\ \dfrac{(\textbf{D+})\ \dfrac{(\textbf{Dnum})\ \dfrac{24 \in \mathbb{Z}}{\emptyset \vdash 24 \rhd 24} \quad (\textbf{Dnum})\ \dfrac{5 \in \mathbb{Z}}{\emptyset \vdash 5 \rhd 5} \quad 24+5=29}{\emptyset \vdash 24+5 \rhd 29} \quad (\textbf{D}*)\ \dfrac{(\textbf{Dnum})\ \dfrac{18 \in \mathbb{Z}}{\emptyset \vdash 18 \rhd 18} \quad (\textbf{Dnum})\ \dfrac{2 \in \mathbb{Z}}{\emptyset \vdash 2 \rhd 2} \quad 36 = 18*2}{\emptyset \vdash 18*2 \rhd 36} \quad 1 = \text{if } 29 \leq 36 \text{ then } 1 \text{ else } 0}{\emptyset \vdash 24+5 \leq 18*2 \rhd 1}
$$

(b)

$$
(\textbf{Diffalse})\ \dfrac{(\textbf{Dfalse})\ \dfrac{}{[x := 6] \vdash \mathit{false} \rhd 0} \quad (\textbf{D+})\ \dfrac{(\textbf{Dnum})\ \dfrac{3 \in \mathbb{Z}}{[x := 6] \vdash 3 \rhd 3} \quad (\textbf{Did})\ \dfrac{(x,6) \in [x := 6]}{[x := 6] \vdash x \rhd 6} \quad 9 = 3+6}{[x := 6] \vdash 3 + x \rhd 9}}{[x := 6] \vdash \text{if } \mathit{false} \text{ then } 5*6 \text{ else } 3+x \rhd 9}
$$

(c)

$$
(\textbf{Dapp})\ \dfrac{(\textbf{Dabs})\ \dfrac{}{\emptyset \vdash (\text{fn } x : \mathit{int}) \Rightarrow x+3 \rhd \langle x, x+3, \emptyset \rangle} \quad (\textbf{Dnum})\ \dfrac{2 \in \mathbb{Z}}{\emptyset \vdash 2 \rhd 2} \quad (\textbf{D+})\ \dfrac{(\textbf{Did})\ \dfrac{(x,2) \in [x := 2]}{[x := 2] \vdash x \rhd 2} \quad (\textbf{Dnum})\ \dfrac{3 \in \mathbb{Z}}{[x := 2] \vdash 3 \rhd 3} \quad 5 = 2+3}{[x := 2] \vdash x+3 \rhd 5}}{\emptyset \vdash (\text{fn } (x : \mathit{int}) \Rightarrow x+3)\ 2 \rhd 5}
$$

(d)

$$
(\textbf{Diffalse})\ \dfrac{(\textbf{D}*)\ \dfrac{(\textbf{Dnum})\ \dfrac{42 \in \mathbb{Z}}{\emptyset \vdash 42 \rhd 42} \quad (\textbf{Dnum})\ \dfrac{0 \in \mathbb{Z}}{\emptyset \vdash 0 \rhd 0} \quad 0 = 42 \cdot 0}{\emptyset \vdash 42 \cdot 0 \rhd 0} \quad (\textbf{Dabs})\ \dfrac{}{\emptyset \vdash \text{fn } (x : \mathit{int}) \Rightarrow 42 \rhd \langle x, 42, \emptyset \rangle}}{\emptyset \vdash \text{if } 42 \cdot 0 \text{ then } 5+3 \text{ else fn } (x : \mathit{int}) \Rightarrow 42 \rhd \langle x, 42, \emptyset \rangle}
$$

(e)

$$
(\textbf{Dapp})\ \dfrac{(\textbf{Dabs})\ \dfrac{}{[y := 2] \vdash \text{fn } (x : \mathit{int}) \Rightarrow 4*x-3 \rhd \langle x, 4*x-3, [y := 2] \rangle} \quad (\textbf{Did})\ \dfrac{(y,2) \in [y := 2]}{[y := 2] \vdash y \rhd 2} \quad (\textbf{D}-)\ \dfrac{(\textbf{D}*)\ \dfrac{(\textbf{Dnum})\ \dfrac{4 \in \mathbb{Z}}{[y := 2, x := 2] \vdash 4 \rhd 4} \quad (\textbf{Did})\ \dfrac{(x,2) \in [y := 2, x := 2]}{[y := 2, x := 2] \vdash x \rhd 2} \quad 8 = 4*2}{[y := 2, x := 2] \vdash 4*x \rhd 8} \quad (\textbf{Dnum})\ \dfrac{3 \in \mathbb{Z}}{[y := 2, x := 2] \vdash 3 \rhd 3} \quad 5 = 8-3}{[y := 2, x := 2] \vdash 4*x-3 \rhd 5}}{[y := 2] \vdash (\text{fn } (x : \mathit{int}) \Rightarrow 4*x-3)\ y \rhd 5}
$$

(f)

$$
(\textbf{Dapp})\ \dfrac{(\textbf{Dabs})\ \dfrac{}{\emptyset \vdash \text{fn } (x : \mathit{int} \to \mathit{int}) \Rightarrow x\ 5 \rhd \langle x, x\ 5, \emptyset \rangle} \quad (\textbf{Dabs})\ \dfrac{}{\emptyset \vdash \text{fn } (y : \mathit{int}) \Rightarrow y+3 \rhd \langle y, y+3, \emptyset \rangle} \quad (\textbf{Dapp})\ \dfrac{(\textbf{Did})\ \dfrac{(x, \langle y, y+3, \emptyset \rangle) \in [x := \langle y, y+3, \emptyset \rangle]}{[x := \langle y, y+3, \emptyset \rangle] \vdash x \rhd \langle y, y+3, \emptyset \rangle} \quad (\textbf{Dnum})\ \dfrac{5 \in \mathbb{Z}}{[x := \langle y, y+3, \emptyset \rangle] \vdash 5 \rhd 5} \quad (\textbf{D+})\ \dfrac{(\textbf{Did})\ \dfrac{(y,5) \in [y := 5]}{[y := 5] \vdash y \rhd 5} \quad (\textbf{Dnum})\ \dfrac{3 \in \mathbb{Z}}{[y := 5] \vdash 3 \rhd 3} \quad 8 = 5+3}{[y := 5] \vdash y+3 \rhd 8}}{[x := \langle y, y+3, \emptyset \rangle] \vdash x\ 5 \rhd 8}}{\emptyset \vdash (\text{fn } (x : \mathit{int} \to \mathit{int}) \Rightarrow x\ 5)(\text{fn } y : \mathit{int} \Rightarrow y+3) \rhd 8}
$$

(g)

$$
(\textbf{D}*)\ \dfrac{(\textbf{Dapp})\ \dfrac{(\textbf{Dabs})\ \dfrac{}{[y := 4, z := 2] \vdash \text{fn } x : \mathit{int} \Rightarrow x+5 \rhd \langle x, x+5, [y := 4, z := 2] \rangle} \quad (\textbf{Did})\ \dfrac{x \text{ ungebunden } \lightning}{[y := 4, z := 2] \vdash x \rhd ?} \quad (\textbf{D+})\ \dfrac{\lightning}{[y := 4, z := 2, x := ?] \vdash x+5 \rhd ?}}{[y := 4, z := 2] \vdash (\text{fn } (x : \mathit{int}) \Rightarrow x+5)\ x \rhd ?} \quad (\textbf{Dnum})\ \dfrac{5 \in \mathbb{Z}}{[y := 4, z := 2] \vdash 5 \rhd 5} \quad ? * 5 = ?}{[y := 4, z := 2] \vdash ((\text{fn } (x : \mathit{int}) \Rightarrow x+5)\ x) * 5 \rhd ?}
$$

(h)

$$
(\textbf{Dapp})\ \dfrac{(\textbf{Dabs})\ \dfrac{}{V \vdash \text{fn } (y : \mathit{bool} \to \mathit{int}) \Rightarrow y\ \mathit{true} \rhd \langle y, y\ \mathit{true}, V \rangle} \quad (\textbf{Did})\ \dfrac{(g, \langle x, \text{if } x \text{ then } 1 \text{ else } 2, \emptyset \rangle) \in V}{V \vdash g \rhd \langle x, \text{if } x \text{ then } 1 \text{ else } 2, \emptyset \rangle} \quad (\textbf{Dapp})\ \dfrac{(\textbf{Did})\ \dfrac{(y, \langle x, \text{if } x \text{ then } 1 \text{ else } 2, V' \rangle) \in V'}{V' \vdash y \rhd \langle x, \text{if } x \text{ then } 1 \text{ else } 2, V' \rangle} \quad (\textbf{Dtrue})\ \dfrac{}{V' \vdash \mathit{true} \rhd 1} \quad (\textbf{Diftrue})\ \dfrac{(\textbf{Did})\ \dfrac{(x,1) \in V'[x := 1]}{V'[x := 1] \vdash x \rhd 1} \quad (\textbf{Dnum})\ \dfrac{1 \in \mathbb{Z}}{V'[x := 1] \vdash 1 \rhd 1}}{V'[x := 1] \vdash \text{if } x \text{ then } 1 \text{ else } 2 \rhd 1}}{V[y := \langle x, \text{if } x \text{ then } 1 \text{ else } 2 \rangle] \vdash y\ \mathit{true} \rhd 1}}{[g := \langle x, \text{if } x \text{ then } 1 \text{ else } 2, \emptyset \rangle] \vdash (\text{fn } (y : \mathit{bool} \to \mathit{int}) \Rightarrow y\ \mathit{true})\ g \rhd 1}
$$

Erweiterung von F

Aufgabe TJ.11 *(Inkrement und Dekrement)*
Erweitern Sie `elab` und `eval` um zwei unäre Operatoren:

- `++` : $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, welcher eine Ganzzahl um 1 erhöht (Inkrementierung).
- `--` : $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, welcher eine Ganzzahl um 1 verkleinert (Dekrementierung).

Gehen Sie beim Lösen der Aufgabe strukturiert vor:

(a) Erweiteren Sie formal die abstrakte Grammatik für die abstrakte Syntax von F.

(b) Erweitern Sie nun die Typdeklarationen für die abstrakte Syntax von F.

(c) Geben Sie die Inferenzregeln für die statische und dynamische Semantik der neuen Operatoren an.

(d) Erweitern Sie die Deklaration der Prozedur `elab`.

(e) Erweitern Sie nun die Deklaration der Prozedur `eval`.

Lösungsvorschlag TJ.11

(a) Wir erweitern die abstrakte Grammatik für die abstrakte Syntax von F wie folgt:

$$u \in \mathit{UnOpr} = \texttt{++} \mid \texttt{--} \qquad \text{(Unäre Operatoren)}$$
$$e \in \mathit{Exp} = \dots \mid u\ e \qquad \text{(Ausdrücke)}$$

(b) Wir erweitern die Typdeklaration für die abstrakte Syntax von F wie folgt:

```
datatype unopr = Inkr | Dekr
datatype exp = ... | UnOpr of unopr * exp
```

(c) Wir erhalten folgende Inferenzregeln:

$$\textbf{(SInkr)}\ \frac{T \vdash e : \mathit{int}}{T \vdash \texttt{++}e : \mathit{int}} \qquad \textbf{(SDekr)}\ \frac{T \vdash e : \mathit{int}}{T \vdash \texttt{--}e : \mathit{int}}$$

$$\textbf{(DInkr)}\ \frac{V \vdash e \triangleright v}{V \vdash \texttt{++}e \triangleright v + 1} \qquad \textbf{(DDekr)}\ \frac{V \vdash e \triangleright v}{V \vdash \texttt{--}e \triangleright v - 1}$$

(d) Aus den Inferenzregeln folgt die Erweiterung:

```
fun elabUnOpr Inkr Int = Int
  | elabUnOpr Dekr Int = Int
  | elabUnOpr _ _ = raise Error "T UnOpr"
fun elab f ...
  | elab f (UnOpr(unopr, e)) = elabUnOpr unopr (elab f e)
```

(e) Aus den Inferenzregeln folgt die Erweiterung:

```
fun evalUnOpr Inkr (IV x) = IV (x + 1)
  | evalUnOpr Dekr (IV x) = IV (x - 1)
  | evalUnOpr _ _ = raise Error "R UnOpr"
fun eval f ...
  | eval f (UnOpr(unopr, e)) = evalUnOpr unopr (eval f e)
```

Aufgabe TJ.12 *(Sequenzialisierung)*
Erweitern Sie die Sprache F um Sequenzialisierung. Die erweiterte abstrakte Sprache ist dabei wie folgt gegeben: $e : \mathit{Exp} ::= \dots \mid (e; e)$ und `datatype exp = ... | Seq of exp * exp`. Beachten Sie, dass bei der Sequenzialisierung beide Ausdrücke der Reihe nach ausgewertet werden, aber nur der letzte Ausdruck Wert und Typ des Gesamtausdruckes bestimmt. Geben Sie sowohl die statische Inferenzregel, als auch die Erweiterung für `elab` an.

Lösungsvorschlag TJ.12

$$\textbf{(SSeq)}\ \frac{T \vdash e_1 : t_1 \qquad T \vdash e_2 : t_2}{T \vdash (e_1; e_2) : t_2}$$

```
datatype exp = ... | Seq of exp * exp

fun elab f ...
  | elab f (Seq(e1, e1)) = let
                              val t1 = elab f e1
                              val t2 = elab f e2
                           in
                              t2
                           end
```

Aufgabe TJ.13 *(Switch)*
Erweitern Sie die Sprache F um einen *switch*-Ausdruck. Dieses Konstrukt arbeitet ähnlich zum *if*-Ausdruck. Er erlaubt es, in Abhängigkeit von einem Ausdruck, der zu einer natürlichen Zahl auswertet, einen bestimmten

Ausdruck auszuführen. Ist für die entsprechende Zahl kein Fall definiert, wird ein zuvor angegebener *default*-Ausdruck ausgewertet.

Der Einfachheit halber wird davon ausgegangen, dass in einem *switch*, das n Fälle definiert, diese Fälle mit den Zahlen 1 bis n angesprochen werden.

Die erweiterte abstrakte Sprache ist dabei wie folgt gegeben:

$$e \in \mathit{Exp} = \ldots \mid \text{switch } e \text{ of } (1 : e, 2 : e, \ldots, n : e, \text{default} : e)$$

Typ und Wert des *switch*-Ausdruckes werden durch den Ausdruck des ausgewählten Falles bestimmt. Bedenken Sie, dass ein *switch*-Ausdruck einen eindeutigen Typ haben muss und beliebig viele Fälle haben darf.

Lösungsvorschlag TJ.13

(a) $$\textbf{(Sseq)}\ \frac{T \vdash e : \mathit{int} \qquad T \vdash e1 : t \qquad T \vdash e2 : t \qquad T \vdash en : t \qquad T \vdash e' : t}{T \vdash \mathit{switch}\, e\ \mathit{of}\ (1 : e1, 2 : e2, \ldots, n : en, \mathit{default} : e') : t}$$

(b) $$\textbf{(Dseq)}\ \frac{V \vdash e \rhd z \qquad V \vdash e1 \rhd v1 \qquad V \vdash e2 \rhd v2 \qquad V \vdash en \rhd vn \qquad V \vdash e' \rhd v' \qquad \text{if } (z \leq n) \text{ then } v = vz \text{ else } v = v'}{V \vdash \mathit{switch}\, e\ \mathit{of}\ (1 : e1, 2 : e2, \ldots, n : en, \mathit{default} : e') \rhd v}$$

(c)
```
datatype exp = ... | Switch of exp * (exp list) * exp

fun elab f ...
  | elab f (Switch (e, el, e')) = case (elab f e, elab f e') of
      (Int, t) => if (List.all (fn x => t = x) (map elab f el)) then t
                  else raise Error "SSwitch1"
    |     _     => raise Error "SSwitch2"

fun eval f ...
  | eval f (Switch (e, el, e')) = case (eval f e) of
      (IV i) => (eval f (List.nth (el, i))) handle Subscript => eval f e'
    |    _    => raise Error "DSwitch"
```

Aufgabe TJ.14 *(let-Ausdrücke)*
Erweitern Sie F um let-Ausdrücke. Ein let-Ausdruck hat die Form let val $x : t = e$ in e end.

(a) Geben Sie neue Inferenzregeln an, mit deren Hilfe die statische und dynamische Semantik von let-Ausdrücken definiert wird.

(b) Ergänzen Sie die Konstruktortypen `ty`, `exp` und `value`, falls notwendig.

(c) Implementieren Sie die Semantiken, indem `eval` und `elab` erweitern.

Lösungsvorschlag TJ.14

(a) $$\textbf{(Slet)}\ \frac{T \vdash e_1 : t \qquad T[x := t] \vdash e_2 : t'}{T \vdash \text{let val } x : t = e_1 \text{ in } e_2 \text{ end} : t'} \qquad \textbf{(Dlet)}\ \frac{V \vdash e_1 \rhd v \qquad V[x := v] \vdash e_2 \rhd v'}{V \vdash \text{let val } x : t = e_1 \text{ in } e_2 \text{ end} \rhd v'}$$

(b) `datatype exp = ... | Let of id * ty * exp * exp`

(c)
```
fun elab ...
  | elab f (Let(x,t,e1,e2)) = let
                                  val t2 = elab f e1
                              in
                                  if t = t2 then elab (update f x t) e2
                                            else raise Error "T Let"
                              end

fun eval ...
 | eval f (Let(x,_,e1,e2)) = eval (update f x (eval f e1)) e2
```