

Programmierung 1 (WS 2020/21)

Zusatztutorial 6 (Lösungsvorschläge)

Statische und dynamische Semantik

Hinweis: Diese Aufgaben wurden von den Tutoren für das Zusatztutorial erstellt. Sie sind für die Klausur weder relevant noch irrelevant. 😊 markiert potentiell schwerere Aufgaben.

Aufgabe Z6.1 (Der Inferator - Statische Semantik)

Bestimmen Sie die Typen der folgenden Ausdrücke gemäß der statischen Semantik:

- (a) $(\text{fn } x \Rightarrow \text{int } x + 2) \ 3$ in der Umgebung \emptyset
- (b) $f \ 2 \ (\text{fn } x : \text{bool} \Rightarrow 2)$ in der Umgebung $[f := \text{int} \rightarrow (\text{bool} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{bool}]$
- (c) $\text{if } x \leq 6 \text{ then } \text{fn } x : \text{int} \Rightarrow g \ x \text{ else } \text{fn } y : \text{int} \Rightarrow \text{true}$ in der Umgebung $[x := \text{int}, g := \text{int} \rightarrow \text{bool}]$

Lösungsvorschlag Z6.1

(a)

$$\begin{array}{c} \text{Sid} \frac{(x, \text{int}) \in [x := \text{int}]}{[x := \text{int}] \vdash x : \text{int}} \quad \text{Snum} \frac{2 \in \mathbb{Z}}{[x := \text{int}] \vdash 2 : \text{int}} \\ \text{Soai} \frac{}{} \\ \text{Sabs} \frac{[x := \text{int}] \vdash x + 2 : \text{int}}{\emptyset \vdash \text{fn } x : \text{int} \Rightarrow x + 2 : \text{int} \rightarrow \text{int}} \quad \text{Snum} \frac{3 \in \mathbb{Z}}{\emptyset \vdash 3 : \text{int}} \\ \text{Sapp} \frac{}{\emptyset \vdash (\text{fn } x : \text{int} \Rightarrow x + 2) \ 3 : \text{int}} \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{c} \text{Sid} \frac{(f, \text{int} \rightarrow (\text{bool} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{bool}) \in [f := \text{int} \rightarrow (\text{bool} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{bool}]}{[f := \text{int} \rightarrow (\text{bool} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{bool}] \vdash f : \text{int} \rightarrow (\text{bool} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{bool}} \quad \text{Snum} \frac{2 \in \mathbb{Z}}{[f := \text{int} \rightarrow (\text{bool} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{bool}] \vdash 2 : \text{int}} \quad \text{Snum} \frac{2 \in \mathbb{Z}}{[f := \text{int} \rightarrow (\text{bool} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{bool}, x := \text{bool}] \vdash 2 : \text{int}} \\ \text{Sapp} \frac{}{[f := \text{int} \rightarrow (\text{bool} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{bool}] \vdash f \ 2 : (\text{bool} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{bool}} \quad \text{Sabs} \frac{}{[f := \text{int} \rightarrow (\text{bool} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{bool}] \vdash \text{fn } x : \text{bool} \Rightarrow 2 : \text{bool} \rightarrow \text{int}} \\ \text{Sapp} \frac{}{[f := \text{int} \rightarrow (\text{bool} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{bool}] \vdash f \ 2 \ (\text{fn } x : \text{bool} \Rightarrow 2) : \text{bool}} \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{c} \text{Sid} \frac{(x, \text{int}) \in T}{T \vdash x : \text{int}} \quad \text{Snum} \frac{6 \in \mathbb{Z}}{T \vdash 6 : \text{int}} \quad \text{Sid} \frac{(\text{int} \rightarrow \text{bool}) \in T[x := \text{int}]}{T[x := \text{int}] \vdash g : \text{int} \rightarrow \text{bool}} \quad \text{Sid} \frac{(x, \text{int}) \in T[x := \text{int}]}{T[x := \text{int}] \vdash x : \text{int}} \\ \text{Soab} \frac{}{T \vdash x \leq 6 : \text{bool}} \quad \text{Sabs} \frac{T[x := \text{int}] \vdash g \ x : \text{bool}}{T \vdash \text{fn } x : \text{int} \Rightarrow g \ x : \text{int} \rightarrow \text{bool}} \quad \text{Strue} \frac{}{T[y := \text{int}] \vdash \text{true} : \text{bool}} \\ \text{Sif} \frac{}{T := [x := \text{int}, g := \text{int} \rightarrow \text{bool}] \vdash \text{if } x \leq 6 \text{ then } \text{fn } x : \text{int} \Rightarrow g \ x \text{ else } \text{fn } y : \text{int} \Rightarrow \text{true} : \text{int} \rightarrow \text{bool}} \end{array}$$

Aufgabe Z6.2 (Schon wieder Inferenzregeln - Dynamische Semantik)

Bestimmen Sie die Werte der folgenden Ausdrücke gemäß der dynamischen Semantik:

- (a) $\text{if } \text{false} \text{ then } 5 * 6 \text{ else } 3 + x$ in der Umgebung $[x := 6]$
- (b) $(\text{fn } x : \text{int} \Rightarrow 4 * x - 3) \ y$ in der Umgebung $[y := 2]$
- (c) $(\text{fn } x : \text{int} \rightarrow \text{int} \Rightarrow x \ 5)(\text{fn } y : \text{int} \Rightarrow y + 3)$ in der Umgebung \emptyset
- (d) $((\text{fn } x : \text{int} \Rightarrow x + 5) \ x) * 5$ in der Umgebung $[y := 4, z := 2]$
- (e) $\text{if } 42 \cdot 0 \text{ then } 5 + 3 \text{ else } \text{fn } x : \text{int} \Rightarrow 42$ in der Umgebung \emptyset

(a)

$$\text{Dfalse} \frac{}{[x := 6] \vdash \text{false} \triangleright 0} \quad \text{Dnum} \frac{3 \in \mathbb{Z}}{[x := 6] \vdash 3 \triangleright 3} \quad \text{Did} \frac{[x := 6]x = 6}{[x := 6] \vdash x \triangleright 6} \quad 9 = 3 + 6$$

$$\text{Diffalse} \frac{}{[x := 6] \vdash \text{if } \text{false} \text{ then } 5 * 6 \text{ else } 3 + x \triangleright 9}$$

(b)

$$\text{Dabs} \frac{[y := 2] \vdash \text{fn } x : \text{int} \Rightarrow 4 * x - 3 \triangleright \langle x, 4 * x - 3, [y := 2] \rangle}{[y := 2] \vdash \text{fn } x : \text{int} \Rightarrow 4 * x - 3 \triangleright 5} \quad \text{Did} \frac{[y := 2] y = 2}{[y := 2] \vdash y \triangleright 2} \quad \text{Dnum} \frac{4 \in \mathbb{Z}}{[y := 2, x := 2] \vdash 4 \triangleright 4} \quad \text{Did} \frac{[y := 2, x := 2] x = 2}{[y := 2, x := 2] \vdash x \triangleright 2} \quad 8 = 4 * 2$$

$$\text{D} \frac{[y := 2, x := 2] \vdash 4 * x \triangleright 8}{[y := 2, x := 2] \vdash 4 * x - 3 \triangleright 5} \quad \text{Dnum} \frac{3 \in \mathbb{Z}}{[y := 2, x := 2] \vdash 3 \triangleright 3} \quad 5 = 8 - 3$$

(c)

$$\text{Dabs} \frac{\emptyset \vdash \text{fn } x : \text{int} \rightarrow \text{int} \Rightarrow x \triangleright 5 \triangleright \langle x, x \cdot 5, \emptyset \rangle}{\emptyset \vdash \text{fn } x : \text{int} \rightarrow \text{int} \Rightarrow x \triangleright 5 \triangleright 8} \quad \text{Dabs} \frac{\emptyset \vdash \text{fn } y : \text{int} \Rightarrow y + 3 \triangleright \langle y, y + 3, \emptyset \rangle}{\emptyset \vdash \text{fn } x : \text{int} \rightarrow \text{int} \Rightarrow x \triangleright 5 \triangleright 8} \quad \text{Did} \frac{[x := \langle y, y + 3, \emptyset \rangle] x = \langle y, y + 3, \emptyset \rangle}{[x := \langle y, y + 3, \emptyset \rangle] \vdash x \triangleright \langle y, y + 3, \emptyset \rangle} \quad \text{Dnum} \frac{5 \in \mathbb{Z}}{[x := \langle y, y + 3, \emptyset \rangle] \vdash 5 \triangleright 5} \quad \text{s. Hilfsbaum}$$

$$\text{Hilfsbaum: Did} \frac{[y := 5] y = 5}{[y := 5] \vdash y \triangleright 5} \quad \text{Dnum} \frac{3 \in \mathbb{Z}}{[y := 5] \vdash 3 \triangleright 3} \quad 8 = 5 + 3$$

$$\text{D+} \frac{}{[y := 5] \vdash y + 3 \triangleright 8}$$

(d)

$$\text{D*} \frac{\text{s. Hilfsbaum} \quad \text{Dnum} \frac{5 \in \mathbb{Z}}{[y := 4, z := 2] \vdash 5 \triangleright 5} \quad ? * 5 = ?}{[y := 4, z := 2] \vdash ((\text{fn } x : \text{int} \Rightarrow x + 5)x) * 5 \triangleright ?}$$

Hilfsbaum:

$$\text{Dabs} \frac{[y := 4, z := 2] \vdash \text{fn } x : \text{int} \Rightarrow x + 5 \triangleright \langle x, x + 5, [y := 4, z := 2] \rangle}{[y := 4, z := 2] \vdash \text{fn } x : \text{int} \Rightarrow x + 5 \triangleright ?} \quad \text{Bez. ungeb. } \text{Did} \frac{[y := 4, z := 2] x = ?}{y := 4, z := 2 \vdash x \triangleright ?} \quad \text{D+} \frac{}{[y := 4, z := 2] [x := ?] \vdash x + 5 \triangleright ?}$$

(e)

Hinweis: Auch wenn es sich bei dem gegebenen Ausdruck nicht um einen statisch zulässigen Ausdruck handelt, können wir mit den Regeln der dynamischen Semantik einen Wert inferieren.

$$\text{Dnum} \frac{42 \in \mathbb{Z}}{\emptyset \vdash 42 \triangleright 42} \quad \text{Dnum} \frac{0 \in \mathbb{Z}}{\emptyset \vdash 0 \triangleright 0} \quad 0 = 42 \cdot 0$$

$$\text{D*} \frac{}{\emptyset \vdash 42 \cdot 0 \triangleright 0} \quad \text{Dabs} \frac{}{\emptyset \vdash \text{fn } x : \text{int} \Rightarrow 42 \triangleright \langle x, 42, \emptyset \rangle}$$


$$\text{Diffalse} \frac{}{\emptyset \vdash \text{if } 42 \cdot 0 \text{ then } 5 + 3 \text{ else fn } x : \text{int} \Rightarrow 42 \triangleright \langle x, 42, \emptyset \rangle}$$

Aufgabe Z6.3 (*andalso und orelse*)

Wir erweitern die Sprache F um Ausdrücke mit **andalso** und **orelse**. Wir erweitern unseren Konstruktortyp **exp** hierfür wie folgt:

```
1 datatype exp = ... | Andalso of exp * exp | Orelse of exp * exp
```

Gehen Sie nun wie folgt vor, erweitern Sie die...

- (a) Statische Semantik Geben Sie die Statische Semantik in Form zweier Inferenzregeln für Ausdrücke mit **andalso** und **orelse** an.
- (b) Ergänzen Sie die Prozedur **elab** ebenfalls um diese Fälle.
- (c) Dynamische Semantik Geben Sie die Dynamische Semantik in Form zweier Inferenzregeln für Ausdrücke mit **andalso** und **orelse** an.
- (d) Ergänzen Sie die Prozedur **eval** ebenfalls um diese Fälle.
- (e) Wie würde sich Ihre Implementierung bei folgendem Ausdruck verhalten: 

```
1 fun f(x:int) = f x
2 true andalso f 5
```

Erkennen Sie einen Unterschied zum Verhalten von **andalso** in SML? Können Sie Ihre Inferenzregeln und Ihre Implementierung so anpassen, dass sie sich identisch verhält?

Lösungsvorschlag Z6.3

(a)

$$\text{Sorelse} \frac{T \vdash e_1 : \text{bool} \quad T \vdash e_2 : \text{bool}}{T \vdash e_1 \text{ orelse } e_2 : \text{bool}}$$

$$\text{Sandalso} \frac{T \vdash e_1 : \text{bool} \quad T \vdash e_2 : \text{bool}}{T \vdash e_1 \text{ andalso } e_2 : \text{bool}}$$

```
1 ...
2 | elab f (Andalso(e1, e2)) = (case (elab f e1, elab f e2) of
3   (Bool, Bool) => Bool
4   | _ => raise Error "T_Andalso")
5 | elab f (Orelse(e1, e2)) = (case (elab f e1, elab f e2) of
6   (Bool, Bool) => Bool
7   | _ => raise Error "T_Orelse")
```

(b)

$$\text{Dorelse} \frac{V \vdash e_1 \triangleright b_1 \quad V \vdash e_2 \triangleright b_2 \quad b = \text{if } b_1 = 0 \wedge b_2 = 0 \text{ then } 0 \text{ else } 1}{V \vdash e_1 \text{ orelse } e_2 \triangleright b}$$

$$\text{Dandalso} \frac{V \vdash e_1 \triangleright b_1 \quad V \vdash e_2 \triangleright b_2 \quad b = \text{if } b_1 = 1 \wedge b_2 = 1 \text{ then } 1 \text{ else } 0}{V \vdash e_1 \text{ andalso } e_2 \triangleright b}$$

```
1 ...
2 | eval f (Andalso(e1, e2)) = (case (eval f e1, eval f e2) of
3   (IV 1, IV 1) => (IV 1)
4   | _ => (IV 0))
5 | eval f (Orelse(e1, e2)) = (case (eval f e1, eval f e2) of
6   (IV 0, IV 0) => (IV 0)
7   | _ => (IV 1))
```

- (c) Die beiden logischen Operatoren **andalso** und **orelse** werden in SML *lazy* ausgewertet. Das heißt, dass bei einem Ausdruck **e1 andalso e2** erst **e1** ausgewertet wird und nur dann, wenn **e1** zu **true** auswertet, auch **e2** evaluiert wird. Eine Anpassung unserer Regeln und Implementierung könnte so aussehen:

	DorelseFirstTrue	$\frac{V \vdash e_1 \triangleright 1}{V \vdash e_1 \text{ orelse } e_2 \triangleright 1}$
	DorelseFirstFalse	$\frac{V \vdash e_1 \triangleright 0 \quad V \vdash e_2 \triangleright b}{V \vdash e_1 \text{ orelse } e_2 \triangleright b}$
	DandalsoFirstFalse	$\frac{V \vdash e_1 \triangleright 0}{V \vdash e_1 \text{ andalso } e_2 \triangleright 0}$
	DandalsoFirstTrue	$\frac{V \vdash e_1 \triangleright 1 \quad V \vdash e_2 \triangleright b}{V \vdash e_1 \text{ andalso } e_2 \triangleright b}$
<hr/>		
1	...	
2	eval f (Andalso(e1,e2)) = (case eval f e1 of	
3		(IV 1) ⇒ eval f e2
4		_ ⇒ (IV 0))
5	eval f (Orelse(e1,e2)) = (case eval f e1 of	
6		(IV 0) ⇒ eval f e2
7		_ ⇒ (IV 1))

Aufgabe Z6.4 (Komponist - die frühen Werke)

Wir wollen F nun um den Operator **o** erweitern. Dieser komponiert Prozeduren, das heißt er führt zwei Prozeduren hintereinander aus.

Zunächst erweitern wir den Typ **opr** wie folgt:

```
1 datatype opr = ... | Comp
```

Beginnen wir mit der statischen Semantik: Ergänzen Sie in folgender Inferenzregel die Prämissen:

$$(\text{Scomp}) \frac{}{T \vdash e_1 \text{ o } e_2 : t_1 \rightarrow t_3}$$

Leiten Sie daraus die entsprechende Zeile der Prozedur **elabOpr** ab:

```
1 ... | elabOpr Comp t t' =
```

Lösungsvorschlag Z6.4

$$(\text{Scomp}) \frac{T \vdash e_1 : t_2 \rightarrow t_3 \quad T \vdash e_2 : t_1 \rightarrow t_2}{T \vdash e_1 \text{ o } e_2 : t_1 \rightarrow t_3}$$

```
1 ...
2 | elabOpr Comp t t' = case (t, t') of
3   (Arrow (t2', t3), Arrow (t1, t2)) ⇒
4     if t2 = t2' then Arrow (t1, t3)
5     else raise Error "Concat_1"
6   | _ ⇒ raise Error "Concat_2"
```

Aufgabe Z6.5 (n-stellige Tupel)

Erweitern Sie F um *n*-stellige Tupel und Projektionen. Die erweiterte abstrakte Grammatik ist wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} t &\in Ty = \dots \mid t \times \dots \times t \\ e &\in Exp = \dots \mid (e, \dots, e) \mid \#i \, e \quad \text{mit } i \in \mathbb{N}_+ \\ Val &= \mathbb{Z} \cup Proc \cup Val^* \end{aligned}$$

Wobei Val^* die Menge aller Tupel über Val ist, also $(v_1, \dots, v_n) \in Val^*$ mit $v_1, \dots, v_n \in Val$ und $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie jeweils Inferenzregeln für die statische und dynamische Semantik an.

Regeln für die statische Semantik:

$$\mathbf{STup} \frac{T \vdash e_1 : t_1 \quad \dots \quad T \vdash e_n : t_n}{T \vdash (e_1, \dots, e_n) : t_1 \times \dots \times t_n}$$
$$\mathbf{SPro} \frac{T \vdash e : t_1 \times \dots \times t_i \times \dots \times t_n}{T \vdash \#i \ e : t_i}$$

Regeln für die dynamische Semantik:

$$\mathbf{DTup} \frac{V \vdash e_1 \triangleright v_1 \quad \dots \quad V \vdash e_n \triangleright v_n}{V \vdash (e_1, \dots, e_n) \triangleright (v_1, \dots, v_n)}$$
$$\mathbf{DPro} \frac{V \vdash e \triangleright (v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)}{V \vdash \#i \ e \triangleright v_i}$$