Programmierung 1

Vorlesung 15

Livestream beginnt um 14:15 Uhr

Programmierung 1

1. Schnellkurs
2. Programmiersprachliches
3. Höherstufige Prozeduren
4. Listen und Strings
5. Sortieren
6. Konstruktoren und Ausnahmen
7. Bäume
8. Mengenlehre
9. **Mathematische Prozeduren**
10. **Induktive Korrektheitsbeweise**
11. Laufzeit rekursiver Programme
12. Statische und dynamische Semantik
13. Konkrete Syntax
14. Datenstrukturen
15. Speicher und veränderliche Objekte
16. Stapelmaschinen und Übersetzer

Mathematische Objekte als reine Mengen

- **Boolesche Werte:**
  false: $\emptyset$
  true: $\{\emptyset\}$

- **Natürliche Zahlen:**

0: $\emptyset$	2: $\{\{\emptyset\}\}$	4: $\{\{\{\{\emptyset\}\}\}\}$
1: $\{\emptyset\}$	3: $\{\{\{\emptyset\}\}\}$	$\ldots$

- **Zahlenmengen:** $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{B}$	$:= \{0, 1\}$	**Boolesche Werte**
$\mathbb{N}$	$:= \{0, 1, 2, \ldots\}$	**Natürliche Zahlen**
$\mathbb{N}_+$	$:= \{1, 2, 3, \ldots\}$	**Positive natürliche Zahlen**
$\mathbb{Z}$	$:= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	**Ganze Zahlen**
$\mathbb{R}$	$:=$ Menge der reellen Zahlen	**Reelle Zahlen**

- **Paare:**
  (x,y): $\{\{x\},\{x,y\}\}$

Mathematische Prozeduren

- Eine **(mathematische) Prozedur** ist eine Berechnungsvorschrift, die bei der Anwendung auf ein Argument ein Ergebnis liefert.

- **Mathematische Prozeduren sind mathematische Objekte, die unabhängig von einer Programmiersprache existieren.**

- Eine mathematische Prozedur ist gegeben durch
  - den **Namen** der Prozedur,
  - den **Argumentbereich,**
  - den **Ergebnisbereich,** und
  - eine oder mehrere, eventuell rekursive, **definierende Gleichungen.**

Terminierung

Sei p eine Prozedur $X \to Y$ und $x \in X$.
Wir sagen, dass die **Anwendung** $p\,x$

- **mit dem Ergebnis *y* terminiert** (auch: **für *x* mit *y* terminiert** oder **für *x* das Ergebnis *y* liefert**), wenn es ein Ausführungsprotokoll gibt, das mit $p\,x$ beginnt und mit y endet.

- **divergiert,** wenn es **kein terminierendes** Ausführungsprotokoll gibt, das mit $p\,x$ beginnt.

Der **Definitionsbereich** einer Prozedur p ist die Menge der **terminierenden Argumente:**

$$Dom\,p := \{x \in X \mid p \text{ terminiert für } x\}$$

Terminierungsfunktion für Prozeduren

- Eine Prozedur **terminiert für** x genau dann, wenn ihre Rekursionsrelation für x terminiert.
- Eine Prozedur **terminiert** genau dann, wenn ihre Rekursionsrelation terminiert.
- Eine Prozedur terminiert für ein Argument genau dann, wenn sie für alle **Folgeargumente** terminiert.

- Eine Funktion $f \in X \to \mathbb{N}$ heißt **natürliche Terminierungsfunktion** für eine Prozedur *p*, wenn für jeden Rekursionsschritt (x,x') von *p* gilt: $f\,x > f\,x'$

- **Proposition: Wenn für eine Prozedur eine natürliche Terminierungsfunktion existiert, dann terminiert die Prozedur für alle Argumente.**

Ergebnisfunktion

- Die **Ergebnisfunktion** einer **Prozedur** *p*:

  $$\{(x, y) \mid x \in \mathit{Dom}\ p \text{ und die Anwendung von } p \text{ auf } x \text{ liefert } y\}$$

- Eine Prozedur *p* **berechnet** eine Funktion *f*, wenn
  $\mathit{Dom}\ f \subseteq \mathit{Dom}\ p$ **und**
  p für jedes Argument $x \in \mathit{Dom}\ f$ das Ergebnis $f\,x$ liefert.

- Die Prozedur *p* berechnet *f* also genau dann,
  wenn *f* eine **Teilmenge** der Ergebnisfunktion ist.
- Die Ergebnisfunktion ist die **größte Funktion,**
  die von *p* berechnet wird.

- **Proposition:** Sei *p* eine Prozedur, die eine Funktion *f* **berechnet.**
  Dann ist *f* die Ergebnisfunktion von *p* genau dann,
  wenn $\mathit{Dom}\ f = \mathit{Dom}\ p$.

Ergebnissatz, Korrektheitssatz

Satz (Ergebnis)

Die **Ergebnisfunktion** einer Prozedur $p: X \to Y$ ist eine Funktion $Dom\ p \to Y$, die die **definierenden Gleichungen** von p für alle $x \in Dom\ p$ erfüllt.

Satz (Korrektheit)

Eine **Prozedur** p **berechnet eine Funktion** f, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. $Dom\ f \subseteq Dom\ p$ **und**
2. f erfüllt die **definierenden Gleichungen** von p.

Potenzen

- **Prozedur** *p*:

$$p : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$

$$p(a, x, 0) = a$$

$$p(a, x, n) = p(a \cdot x, x, n-1) \quad \text{für } n > 0$$

- **Funktion** *f*:

$$f \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$

$$f(a, x, n) = a \cdot x^n$$

- **Anwendung des Korrektheitssatzes:**
  - *p* terminiert:
    Natürliche **Terminierungsfunktion**: $\lambda(a, x, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}.\, n$
    daher: *Dom p = Dom f*
  - Außerdem erfüllt *f* die definierenden Gleichungen von *p:*

$$f(a, x, 0) = a \cdot x^0 = a$$

$$f(a, x, n) = a \cdot x^n = a \cdot x \cdot x^{n-1} = f(a \cdot x, x, n-1) \quad \text{für } n > 0$$

- **Damit folgt:** *p* berechnet *f.*

Fakultäten

- **Prozedur** *p*:

$$p : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$$
$$p(a,0) = a$$
$$p(a,n) = p(a \cdot n, n-1) \quad \text{für } n > 0$$

- **Funktion** *f*:

$$f \in \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$$
$$f(a,n) = a \cdot \widehat{fac}\, n$$

$$fac : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$fac\ 0 = 1$$
$$fac\ n = n \cdot fac(n-1) \quad \text{für } n > 0$$

$\widehat{fac}$ ist die Ergebnisfunktion der Prozedur *fac*.

- **Anwendung des Korrektheitssatzes:**

1. *p* terminiert:
   Natürliche **Terminierungsfunktion**: $\lambda\,(a,n) \in \mathbb{N}^2.\, n$
   daher: *Dom p = Dom f*

Fakultäten

- **Prozedur** *p*:

  $p : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

  $\boxed{p(a,0) = a}$

  $p(a,n) = p(a \cdot n, n-1) \quad \text{für } n > 0$

- **Funktion** *f*:

  $f \in \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

  $\boxed{f(a,n) = a \cdot \widehat{fac}\, n}$

$fac : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$\boxed{fac\, 0 = 1}$

$fac\, n = n \cdot fac(n-1) \quad \text{für } n > 0$

$\widehat{fac}$ ist die Ergebnisfunktion der Prozedur *fac*.

- **Anwendung des Korrektheitssatzes:**

  2. Die definierenden Gleichungen von *p* sind erfüllt:

$$f(a,0) \underset{\text{Def. } f}{=} a \cdot \widehat{fac}\, 0 \underset{\text{erste definierende Gleichung von } fac}{=} a$$

Fakultäten

- **Prozedur** *p*:

$p : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$p(a,0) = a$

$\boxed{p(a,n) = p(a \cdot n, n-1) \quad \text{für } n > 0}$

- **Funktion** *f*:

$f \in \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$\boxed{f(a,n) = a \cdot \widehat{fac}\, n}$

$fac : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$fac\ 0 = 1$

$\boxed{fac\ n = n \cdot fac(n-1) \quad \text{für } n > 0}$

$\widehat{fac}$ ist die Ergebnisfunktion der Prozedur *fac*.

- **Anwendung des Korrektheitssatzes:**

2. Die definierenden Gleichungen von *p* sind erfüllt:

$$f(a,0) = a \cdot \widehat{fac}\, 0 = a$$

$$f(a,n) \underset{\text{Def. } f}{=} a \cdot \widehat{fac}\, n \underset{\substack{\text{zweite}\\ \text{definierende}\\ \text{Gleichung}\\ \text{von}\\ fac}}{=} a \cdot n \cdot \widehat{fac}(n-1) \underset{\text{Def. } f}{=} f(a \cdot n, n-1) \quad \text{für } n > 0$$

Gaußsche Formel

Gaußsche Formel: $0 + 1 \cdots + n = \frac{n}{2}(n+1) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$

- Linke Seite: **Prozedur** sum:

$$sum : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$sum\, 0 = 0$$
$$sum\, n = sum(n-1) + n \quad \text{für } n > 0$$

- Rechte Seite: **Funktion** *f*:

$$f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f\, n = \frac{n}{2}(n+1)$$

- **Anwendung des Korrektheitssatzes:**

1. *sum* **terminiert:** natürliche Terminierungsfunktion $\lambda\, n \in \mathbb{N}.\, n$
   daher: *Dom sum = Dom f*

Gaußsche Formel

Gaußsche Formel: $0 + 1 \cdots + n = \frac{n}{2}(n+1) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$

- Linke Seite: **Prozedur** sum:

$$sum : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$\boxed{sum\ 0 = 0}$$
$$\boxed{sum\ n = sum(n-1) + n \quad \text{für } n > 0}$$

- Rechte Seite: **Funktion** *f*:

$$f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$\boxed{f\,n = \frac{n}{2}(n+1)}$$

- **Anwendung des Korrektheitssatzes:**

2. *f* **erfüllt die definierenden Gleichungen** von *sum*:

$$f\,0 \stackrel{\text{Def. } f}{=} \frac{0}{2}(0+1) = 0$$

$$f\,n \stackrel{\text{Def. } f}{=} \frac{n}{2}(n+1) = (\frac{n-1}{2} + 1)n$$

$$= \frac{n-1}{2}(n-1+1) + n \stackrel{\text{Def. } f}{=} f\,(n\text{-}1) + n \quad \text{für } n>0$$

Erweiterungssatz

- Eine Prozedur p **erweitert** eine Prozedur q, wenn **jede Anwendungsgleichung** für q bis auf den Prozedurnamen eine Anwendungsgleichung für p ist.

- **Beispiel:** fac' erweitert fac.

$$
\begin{aligned}
&fac : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\\
&fac\, 0 = 1\\
&fac\; n = n \cdot fac(n-1) \quad \text{für } n > 0
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&fac' : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\\
&fac'\; x = \text{if } x = 0 \text{ then } 1 \text{ else } x \cdot fac'(x-1)
\end{aligned}
$$

Satz (Erweiterung)

Wenn eine Prozedur p eine Prozedur q erweitert, gilt

1. Der **Argumentbereich** von q ist eine Teilmenge des Argumentbereichs von p.
2. Jedes **Ausführungsprotokoll** für q ist ein **Ausführungsprotokoll** für p (bis auf den Prozedurnamen).
3. **Terminiert** q für x mit dem **Ergebnis** y, so gilt dies auch für p.

Semantische Äquivalenz

- Zwei Prozeduren heißen **semantisch äquivalent,** wenn sie **denselben Argumentbereich** und **dieselbe Ergebnisfunktion** haben.

- **Proposition:** Wenn sich zwei Prozeduren **wechselseitig erweitern,** dann sind sie semantisch äquivalent. Die Umkehrung gilt nicht.

- **Beispiele:**

  - semantisch äquivalent, wechselseitige Erweiterung

$$fib : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$fib\ n = \text{if } n < 2 \text{ then } n \text{ else } fib(n-1) + fib(n-2)$$

$$fib' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$fib'\ n = n \quad \text{für } n < 2$$
$$fib'\ n = fib'(n-1) + fib'(n-2) \quad \text{für } n \geq 2$$

  - semantisch äquivalent, keine wechselseitige Erweiterung

$$p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$p n = 0$$

$$q : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$q n = \text{if } n = 0 \text{ then } 0 \text{ else } q(n-1)$$

Kapitel 10
Induktive Korrektheitsbeweise

Induktion

Behauptung $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n < 2^n$.

Beweis Durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden drei Fälle.

Sei $n = 0$. Dann $n = 0 < 1 = 2^0 = 2^n$.

Sei $n = 1$. Dann $n = 1 < 2 = 2^1 = 2^n$.

Sei $n \geq 2$. Durch Induktion haben wir einen Beweis für $n - 1 < 2^{n-1}$. Also gilt:

$$
\begin{aligned}
2^n &= 2 \cdot 2^{n-1} \\
&> 2(n-1) && \text{Induktion für } n-1 \\
&= n + (n-2) \\
&\geq n && n \geq 2
\end{aligned}
$$

Induktion

Behauptung $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ n < 2^n.$

Beweis Durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden drei Fälle.

Sei $n = 0$. Dann $n = 0 < 1 = 2^0 = 2^n$.

Sei $n = 1$. Dann $n = 1 < 2 = 2^1 = 2^n$.

Sei $n \geq 2$. Durch Induktion haben wir einen Beweis für $n - 1 < 2^{n-1}$. Also gilt:

$$\begin{aligned}
2^n &= 2 \cdot 2^{n-1} \\
&> 2(n-1) && \text{Induktion für } n-1 \\
&= n + (n-2) \\
&\geq n && n \geq 2
\end{aligned}$$

- Beweis durch **Induktion über** …
- **Induktion für**…

Induktion

Behauptung Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ kann als Produkt von Primzahlen dargestellt werden.

Beweis Durch Induktion über $n \geq 2$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

n ist eine Primzahl. Dann ist die Behauptung trivial.

n ist keine Primzahl. Dann gibt es $a, b \in \mathbb{N}$ mit $n = a \cdot b$ und $2 \leq a, b < n$. Mit Induktion für a und b folgt, dass a und b als Produkte von Primzahlen darstellbar sind. Also ist $n = ab$ als Produkt von Primzahlen darstellbar.

Vollständige Induktion

- Sei $\forall n \in \mathbb{N}: A(n)$ eine **allquantifizierte Aussage** über die natürlichen Zahlen.

- Um die allquantifizierte Aussage zu beweisen, zeigen wir
  - den **Induktionsanfang**: $A(0)$
  - den **Induktionsschritt**: $\forall n \in \mathbb{N}: A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

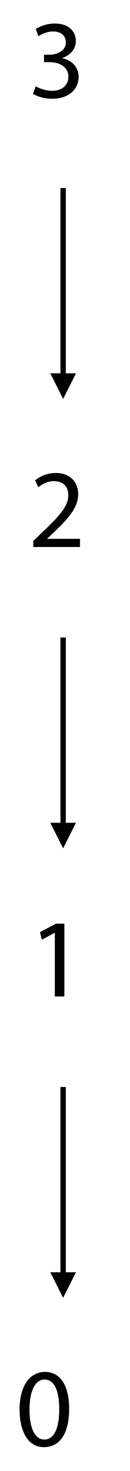
    $A(n)$ heißt **Induktionshypothese**

- **Vollständige Induktion**:

$$\Big(\underbrace{A(0)}_{\text{Induktionsanfang}} \wedge \underbrace{\forall n \in \mathbb{N}: A(n) \Rightarrow A(n+1)}_{\text{Induktionsschritt}}\Big) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: A(n)$$

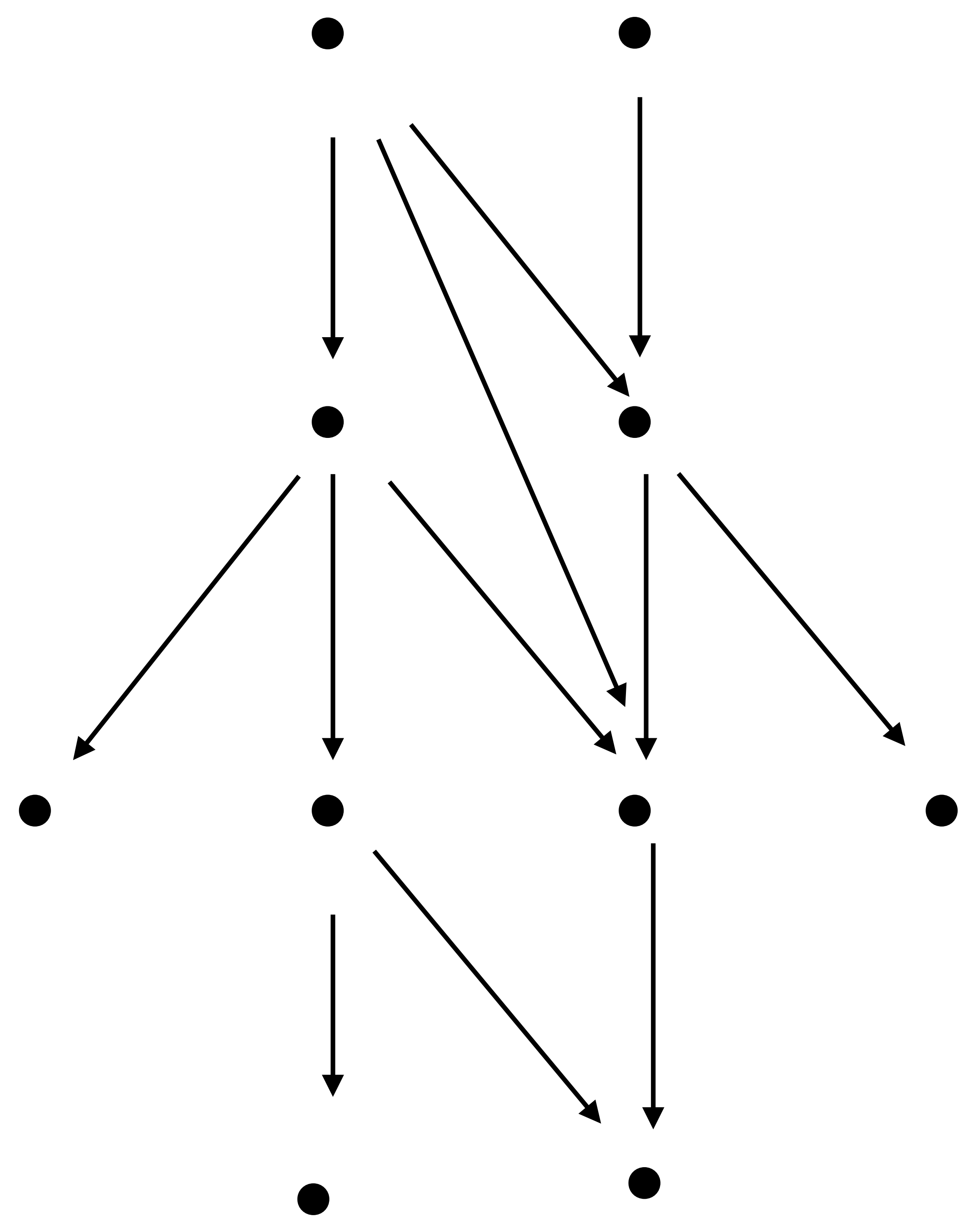
Vollständige vs. wohlfundierte Induktion

Vollständige Induktion



$$(A(0) \;\wedge\; \forall n\in\mathbb{N}: A(n) \Rightarrow A(n+1))$$
$$\Rightarrow\; \forall n\in\mathbb{N}: A(n)$$

Wohlfundierte Induktion



$$(\forall x\in X\; (\forall y\in X: x>y \Rightarrow A(y)) \Rightarrow A(x))$$
$$\Rightarrow \forall x\in X: A(x)$$

Wohlfundierte Induktion (Noethersche Induktion)

- Sei $\forall x \in X : A(x)$ eine **allquantifizierte Aussage** über eine Menge X.

- Eine **Induktionsrelation** $>$ ist eine **terminierende Relation** auf X.
  Um die allquantifizierte Aussage zu beweisen, zeigen wir
  den **Induktionsschritt:**
  für jedes Argument x folgt aus der Tatsache,
  dass für jedes kleinere Argument y $A(y)$ gilt, dass $A(x)$ gilt.

- **Wohlfundierte Induktion**:

$$\underbrace{(\forall x \in X \ \ (\forall y \in X : x > y \Rightarrow A(y)) \Rightarrow A(x)) \ \ \Rightarrow \forall x \in X : A(x)}_{\text{Induktionsschritt}}$$

Amalie „Emmy“ Noether
(1882 – 1935)

Natürliche vs. strukturelle Induktion

- Wenn es sich bei der Induktionsrelation um *Ter* handelt, sprechen wir von **natürlicher Induktion.**

$$Ter := \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x > y\}$$

- Wenn es sich bei der Induktionsrelation um eine **strukturelle Relation** handelt, sprechen wir von **struktureller Induktion.**
  Dazu später mehr.

Ist der folgende Beweis für die Behauptung "für alle n: $2^n = 1$" korrekt?

Beweis durch Induktion über $n \geqslant 0$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $n=0$: Dann $2^0 = 1$.
Sei $n>0$: Dann $2^n = (2^{n-1} \times 2^{n-1}) / 2^{n-2} = (1 \times 1) / 2^{n-2} = 1 / 1 = 1$.

A: Ja

B: Nein, Argument für $n=0$ ist falsch

C: Nein, Argument für $n=1$ ist falsch

D: Nein, Argument für $n=2$ ist falsch

Beispiel: *sum*

$sum\colon (\mathbb{N}\to\mathbb{N})\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$sum\,(f,n) = f\,0$ für $n<1$

$sum\,(f,n) = sum\,(f, n\text{-}1) + f\,\mathrm{n}$ für $n\geq 1$

Behauptung: $\forall \mathrm{n}\in\mathbb{N}\colon sum(f,n) = \sum_{i=0}^{n} f\,i$

Beweis durch Induktion über n∈ℕ. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $n=0$. $sum(f,0) = f\,0 = \sum_{i=0}^{0} f\,i$ Definition *sum*

Sei $n>0$. $sum(\mathrm{f,n}) = \mathrm{sum}\,(f, n\text{-}1) + f\,n$ Definition *sum*

Induktion für *n*-1 $= \sum_{i=0}^{n-1} f\,i + f\,n$

$= \sum_{i=0}^{n} f\,i$

Bestimmte Iteration

$iter\colon (\mathbb{N} \times X \times (X \to X)) \to X$

$iter\,(0,x,f) = x$

$iter\,(n,x,f) = iter\,(n\text{-}1, f\,x, f)$ für $n>0$

Schrittfunktion

$$\begin{aligned} iter(3, x, f) &= iter(2, f\,x, f) \\ &= iter(1, f\,(f\,x), f) \\ &= iter(0, f\,(f\,(f\,x)), f) \\ &= f\,(f\,(f\,x)) \end{aligned}$$

Terminiert die mathematische Prozedur iter?

$iter\colon (\mathbb{N} \times X \times (X \to X)) \to X$

$iter\,(0,x,f) = x$

$iter\,(n,x,f) = iter\,(n-1, f\,x, f)$ für $n>0$

A: Ja, für alle Argumente ✓

B: Ja, für manche (aber nicht alle) Argumente ✗

C: Nein ✗

Bestimmte Iteration

$iter\colon (\mathbb{N} \times X \times (X \to X)) \to X$

$iter\,(0,x,f) = x$

$iter\,(n,x,f) = iter\,(n\text{-}1, f\,x, f)$ für $n>0$

Schrittfunktion

Wichtiger Unterschied zur konkreten Prozedur *iter* aus Vorlesung 5:

- Das Argument *f* der mathematischen Prozedur ist eine **Funktion**.
- Im Gegensatz dazu wird der konkreten Prozedur eine **Prozedur** übergeben. Wenn die Schrittprozedur divergiert, divergiert auch das konkrete *iter*. **Die mathematische Prozedur terminiert immer!**

Bestimmte Iteration

iter: $(\mathbb{N} \times X \times (X \to X)) \to X$
iter $(0,x,f) = x$
iter $(n,x,f) =$ *iter* $(n\text{-}1, f\,x, f)$ für $n>0$

Behauptung: (Vertauschungseigenschaft von *iter*)

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ \forall x \in X\ \ \forall f \in X \to X: \quad iter(n+1, x, f) = f\,(iter(n, x, f)).$$

Beweis durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Sei $n=0$. Sei $x \in X$ beliebig, sei $f \in X \to X$ beliebig.

$$\begin{aligned} iter(n+1, x, f) &= iter(1, x, f) = iter(0, f\,x, f) = f\,x \\ &= f\,(iter(0, x, f)) = f\,(iter(n, x, f)) \end{aligned}$$

Sei $n>0$. Sei $x \in X$ beliebig, sei $f \in X \to X$ beliebig.

$$\begin{aligned} iter(n+1, x, f) &= iter(n, f\,x, f) && \text{Definition } iter \\ &= f\,(iter(n-1, f\,x, f)) && \text{Induktion für } n-1 \\ &= f\,(iter(n, x, f)) && \text{Definition } iter \end{aligned}$$

www.prog1.saarland