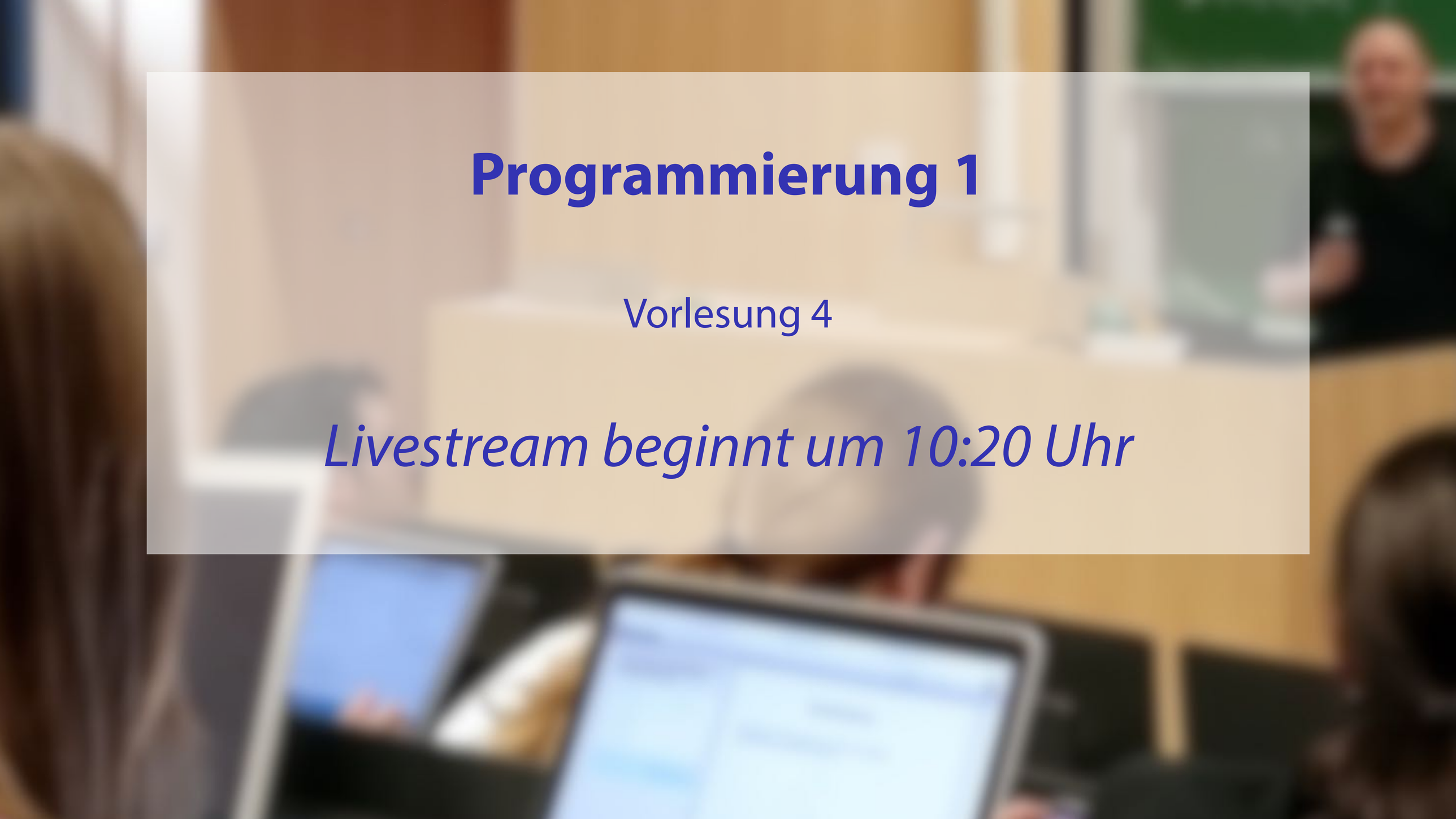


Programmierung 1

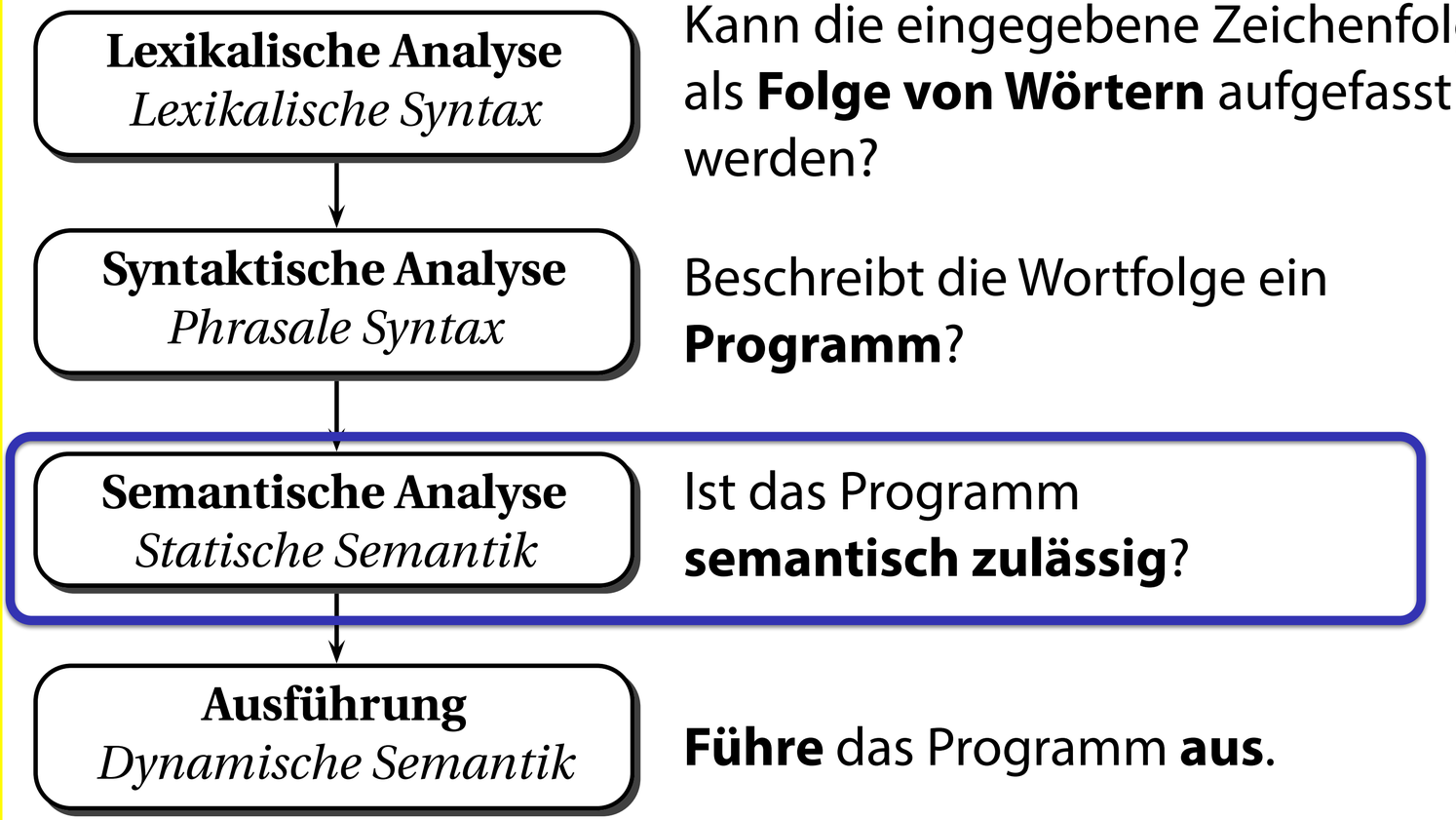
Vorlesung 4

Livestream beginnt um 10:20 Uhr

Programmiersprachliches, Teil 2
Höherstufige Prozeduren

Programmierung 1

Verarbeitungsphasen eines Interpreters



Kann die eingegebene Zeichenfolge als **Folge von Wörtern** aufgefasst werden?

Beschreibt die Wortfolge ein **Programm**?

Ist das Programm **semantisch zulässig**?

Führe das Programm **aus**.

Semantische Zulässigkeit

- Ein semantisch zulässiges Programm muss **geschlossen** sein:
  - Die **freien Bezeichner einer Phrase** sind die Bezeichner, die in der Phrase ein Auftreten haben, das **nicht** im Rahmen der Phrase **gebunden** ist.
  - Phrasen **ohne** freie Bezeichner bezeichnet man als **geschlossen** und Phrasen **mit** freien Bezeichnern als **offen**.
  - Beispiele:

```
fun q (x:int) = 3+(p x)        offen
val x = x                      offen
fun f (x:int) : int = if x<1 then 1 else x*f(x-1)
                               geschlossen
```

- Ein semantisch zulässiges Programm muss **wohlgetypt** sein.

Typregeln

$$\frac{e_1 : t_1 \qquad o : t_1 * t_2 \to t \qquad e_2 : t_2}{e_1\ o\ e_2 \ : \ t}$$

Die Regel besagt, dass eine Anwendung $e_1\ o\ e_2$ **wohlgetypt** ist und **den Typ** t **hat**, wenn

1. der linke Teilausdruck e_1 den Typ t_1 hat,
2. der Operator o den Typ $t_1 * t_2 \to t$ hat, und
3. der rechte Teilausdruck e_2 den Typ t_2 hat.

Beispiel: Ausdruck $x+5$

Wenn wir annehmen, dass x den Typ int hat, dann folgt,

weil + den Typ int * int → int und 5 den Typ int hat, dass $x+5$ wohlgetypt ist und den Typ int hat.

Inferenzregeln

Allgemein hat eine **Inferenzregel** die Form

$$\frac{P_1 \quad \cdots \quad P_n}{P}$$

$P_1 \quad \cdots \quad P_n$ sind die **Prämissen** der Inferenzregel,

P ist die **Konklusion**.

Die Regel besagt, dass die **Konklusion** gilt
wenn die **Prämissen** gelten.

$$\frac{e_1 : bool \qquad e_2 : t \qquad e_3 : t}{if\ e_1\ then\ e_2\ else\ e_3 :\ t}$$

$$\frac{e_1 : t_1 \qquad \cdots \qquad e_n : t_n}{(e_1, \ldots, e_n) :\ t_1 * \cdots * t_n}$$

$$\frac{e_1 : t_1 \to t_2 \qquad e_2 : t_1}{e_1\ e_2 :\ t_2}$$

Ableitungsbaum

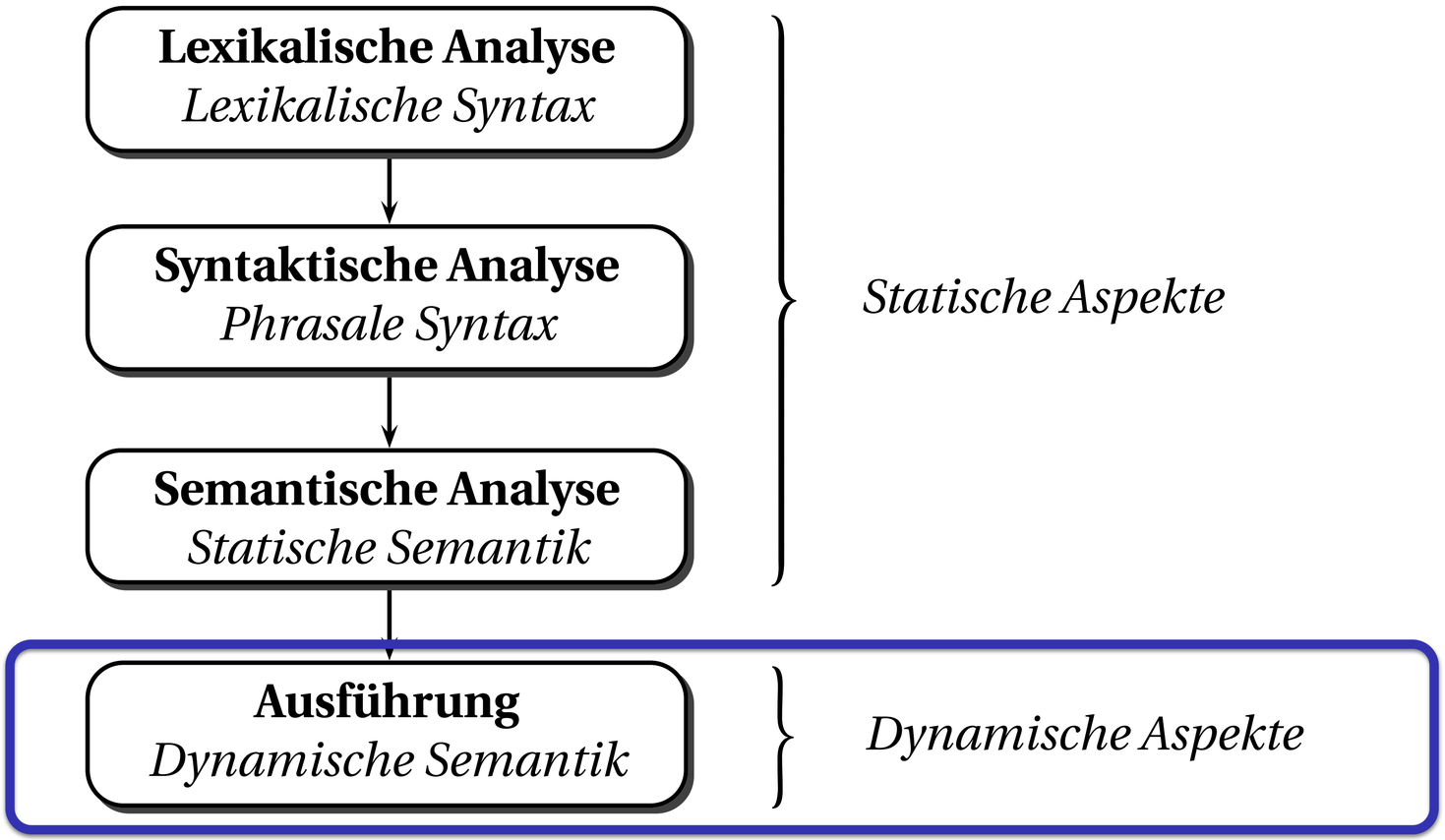
Ist der Ausdruck
if if true then false else true then 10 *else* 2*3
wohlgetypt und hat den Typ *int*?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\textit{true}:\textit{bool}} \quad \dfrac{}{\textit{false}:\textit{bool}} \quad \dfrac{}{\textit{true}:\textit{bool}}}{\textit{if true then false else true} : \textit{bool}} \quad \dfrac{}{10:\textit{int}} \quad \dfrac{\dfrac{}{2:\textit{int}} \quad \dfrac{}{*:\textit{int}*\textit{int}\rightarrow\textit{int}} \quad \dfrac{}{3:\textit{int}}}{2*3 : \textit{int}}}{\textit{if if true then false else true then } 10 \textit{ else } 2*3 : \textit{int}}$$

$$\frac{e_1 : t_1 \qquad o : t_1 * t_2 \rightarrow t \qquad e_2 : t_2}{e_1 \; o \; e_2 \; : \; t}$$

$$\frac{e_1 : \textit{bool} \qquad e_2 : t \qquad e_3 : t}{\textit{if } e_1 \textit{ then } e_2 \textit{ else } e_3 \; : \; t}$$

Verarbeitungsphasen eines Interpreters



Umgebungen

- Eine **Umgebung** ist eine Sammlung von **Bezeichnerbindungen**.

  Beispiel: [*x*:=5, *y*:=7]

  Der Bezeichner *x* ist an den Wert 5 gebunden,
  der Bezeichner *y* an den Wert 7.

- Um den **Wert** eines Ausdrucks mit **freien Bezeichnern** zu bestimmen, benötigen wir eine Umgebung:

  *x***y* **hat den Wert** 35 **in der Umgebung** [*x*:=5, *y*:=7]
  *x***y* **hat den Wert** 40 **in der Umgebung** [*x*:=5, *y*:=8]

Tripeldarstellung von Prozeduren

Prozedur = (Code, Typ, Umgebung)

Die **Tripeldarstellung** einer **Prozedur** besteht aus

- dem **Code** (einer Prozedurdeklaration)
- dem **Typ** der Prozedur, und
- einer **Umgebung**, die die freien Bezeichner bindet.

Beispiel:

```
val a = 2*7
fun p (x:int) = x+a
```

Die Ausführung bindet *p* an die Prozedur

$$(\underbrace{fun\ p\ x = x + a}_{\text{Code}},\ \underbrace{int \to int}_{\text{Typ}},\ \underbrace{[a := 14]}_{\text{Umgebung}})$$

Adjunktion von Umgebungen

Adjunktion ist eine **Operation** $V_1 + V_2$
die zwei Umgebungen V_1, V_2 zu einer Umgebung **kombiniert** :

$$[x{:=}\,5,\ y{:=}\,7]\ +\ [x{:=}\,1,\ z{:=}\,3]\ =\ [x{:=}\,1,\ y{:=}\,7,\ z{:=}\,3]$$

$$[x{:=}\,1,\ z{:=}\,3]\ +\ [x{:=}\,5,\ y{:=}\,7]\ =\ [x{:=}\,5,\ y{:=}\,7,\ z{:=}\,3]$$

Adjunktion ist nicht kommutativ.

Die Bindungen der rechten Umgebung überschreiben
die Bindungen der linken Umgebung.

Frage

Was ist [x:=1, y:=3] + [y:=4, z:=2] ?

- [x:=1, z:=2]
- [y:=3, z:=2]
- [x:=1, y:=3, z:=2]
- [x:=1, y:=4, z:=2]

Ausführung (auch: Auswertung, Evaluation)

- **Ausführung von Programmen.** Gegeben ein Programm *P* und eine Umgebung *V*, bestimme die Umgebung, die *P* für *V* liefert.
- **Ausführung von Deklarationen.** Gegeben eine Deklaration *D* und eine Umgebung *V*, bestimme die Umgebung, die *D* für *V* liefert.
- **Ausführung von Ausdrücken.** Gegeben ein Ausdruck *e* und eine Umgebung *V*, bestimme den Wert, den *e* für *V* liefert.
- **Ausführung von Prozeduranwendungen.** Gegeben eine Prozedur *p* und einen Wert *v*, bestimme den Wert, den *p* für *v* liefert.

Ausführung von Programmen

- **Aufbau eines Programms** (siehe syntaktische Gleichung):

  $\langle Programm \rangle ::= \langle Deklaration \rangle \ \ldots \ \langle Deklaration \rangle$

- **Ausführung eines Programms** in einer **Umgebung** *V*:

  - Wenn das Programm **leer** ist,
    wird die Umgebung *V* geliefert.

  - Wenn das Programm die **Form** *D P* hat,
    wird **zunächst** die **Deklaration** *D* in *V* ausgeführt.
    Wenn das die Umgebung *V'* liefert,
    wird das **Restprogramm** *P* in *V'* ausgeführt und
    das Programm liefert die so erhaltene Umgebung.

Ausführung von Deklarationen

- **Aufbau einer Deklaration** (siehe syntaktische Gleichung):

$$\langle Deklaration \rangle ::= \langle Val\text{-}Deklaration \rangle \mid \langle Prozedurdeklaration \rangle$$

- **Ausführung einer Deklaration** in einer **Umgebung** *V*:

1. Bei einer **Val-Deklaration** val *M* = *e* wird zuerst der Ausdruck *e* in *V* ausgeführt.

   Wenn das den Wert *v* liefert, wird die Umgebung *V'* bestimmt, die die Variablen des Musters *M* gemäß *v* bindet.

   Die Deklaration liefert dann die Umgebung *V*+*V'*.

Ausführung von Deklarationen

- **Aufbau einer Deklaration** (siehe syntaktische Gleichung):

  $\langle Deklaration \rangle ::=$

  $\quad \langle Val\text{-}Deklaration \rangle$

  $\quad \mid \langle Prozedurdeklaration \rangle$

- **Ausführung einer Deklaration** in einer **Umgebung** *V*:

  2. Eine **Prozedurdeklaration** fun *f M* = *e* oder fun *f M* : *t* = *e*
     liefert die Umgebung V+[f:=(fun f *M′*=*e*, *t′*,*V′*)]
     wobei *M′*, *t′* und *V′* wie folgt bestimmt sind:

     M′ ergibt sich aus *M* durch Löschen der Typen;
     t′ ist der für die deklarierte Prozedur ermittelte Typ;
     V′ besteht aus den Bindungen von *V*,
     die die **freien Bezeichner** der Prozedurdeklaration binden.

Beispiel

```
val a = 2*7
fun p (x:int) = x+a
fun q (x:int) = x + p x
```

Die Ausführung liefert:

$$a := 14$$

$$p := (fun\ p\ x = x + a,\ \ int \to int,\ \ [a := 14])$$

$$q := (fun\ q\ x = x + p\ x,\ \ int \to int,$$
$$[p := (fun\ p\ x = x + a,\ \ int \to int,\ \ [a := 14])])$$

Beispiel

```
fun p (x:int) = x
fun q (x:int) = p x
fun p (x:int) = 2*x
val a = (p 5, q 5)
```

Die Ausführung liefert:

$$p := (fun\ p\ x = 2 * x,\ \ int \to int,\ \ [\,])$$
$$q := (fun\ q\ x = p\ x,\ \ int \to int,\ \ [p := (fun\ p\ x = x,\ \ int \to int,\ \ [\,])])$$
$$a := (10, 5)$$

statisches (auch: **lexikalisches**) **Bindungsprinzip**:
**Der Rumpf einer Prozedur arbeitet immer mit den Bindungen,
die bei der Ausführung der Deklaration der Prozedur vorlagen.**

Ausführung von Ausdrücken

- **Aufbau eines Ausdrucks** (siehe syntaktische Gleichungen):

$$
\begin{aligned}
&\langle \textit{Ausdruck} \rangle \ ::= \\
&\qquad \langle \textit{atomarer Ausdruck} \rangle \\
&\quad | \ \langle \textit{Anwendung} \rangle \\
&\quad | \ \langle \textit{Konditional} \rangle \\
&\quad | \ \langle \textit{Tupelausdruck} \rangle \\
&\quad | \ \langle \textit{Let-Ausdruck} \rangle \\
&\quad | \ (\ \langle \textit{Ausdruck} \rangle\ )
\end{aligned}
$$

- **Ausführung eines Ausdrucks** in einer **Umgebung** *V*:

1. Die Ausführung eines Ausdrucks, der nur aus einer **Konstanten** besteht, liefert den durch die Konstante bezeichneten Wert.

2. Die Ausführung eines Ausdrucks, der nur aus einem **Bezeichner** besteht, liefert den von V für den Bezeichner gegebenen Wert.

Ausführung von Ausdrücken

- **Ausführung eines Ausdrucks** in einer **Umgebung** *V*:

  3. …
  4. …
  5. …
  6. Die Ausführung einer **Prozeduranwendung** $e_1\ e_2$ beginnt mit der Ausführung der Teilausdrücke e_1 und e_2 in *V*.
     Wenn diese die **Prozedur** *p* und den **Wert** *v* liefern,
     wird der **Prozeduraufruf** *p v* ausgeführt.
     Die Prozeduranwendung liefert den so erhaltenen Wert.

Ausführung von Prozeduraufrufen

Bei einem **Aufruf einer Prozedur** $p = (\text{fun } f\, M = e, t, V)$
mit einem Wert v

- wird zuerst die Umgebung V' bestimmt, die die Variablen des **Musters** M gemäß dem Argument v bindet.
- Dann wird der **Prozedurrumpf** e
  in der Umgebung $(V + [\, f := p \,]) + V'$ ausgeführt.

Der Prozeduraufruf liefert den so erhaltenen Wert.

Die Bindung $f := p$ ermöglicht **rekursive Prozeduraufrufe**.

Ausführung von Prozeduraufrufen

- **Ausführung eines Ausdrucks** in einer **Umgebung** *V*:

7. Die Ausführung eines **Konditionals** if e_1 then e_2 else e_3 beginnt mit der Ausführung der **Bedingung** e_1 in V . Wenn e_1 den Wert true liefert, wird die **Konsequenz** e_2 in *V* ausgeführt und das Konditional liefert den so erhaltenen Wert. Wenn e_1 den Wert false liefert, wird die **Alternative** e_3 in *V* ausgeführt und das Konditional liefert den so erhaltenen Wert.

8. Die Ausführung eines **Tupelausdrucks** (e_1,..., e_n) beginnt mit der Ausführung der Teilausdrücke e_1,..., e_n in *V*. Wenn diese die Werte v_1,..., v_n liefern, liefert der Tupelausdruck das **Tupel** (v_1,..., v_n).

9. Die Ausführung eines **Let-Ausdrucks** let *P* in *e* end beginnt mit der Ausführung des **Programms** *P* in *V*. Wenn diese die Umgebung V′ liefert, wird der **Ausdruck** *e* in *V*′ ausgeführt. Der Let-Ausdruck liefert den so erhaltenen Wert.

Semantische Äquivalenz

Zwei Programme sind **semantisch äquivalent,**
wenn sie sich bezüglich statischer und dynamischer Semantik
nach außen hin gleich verhalten.

val h = 3*2	ist äquivalent zu	val h = 3+3
fun f(x:int) = 2+x	ist äquivalent zu	fun f(y:int) = 2+y
val z = (x-y) * (x-y)	ist äquivalent zu	val z = x*x - 2*x*y + y*y

Hierbei wird ein idealisierter Interpreter angenommen.
Semantisch äquivalente Programme zeigen nicht notwendigerweise
das gleiche Verhalten in SOSML.

Kapitel 3
Höherstufige Prozeduren

Abstraktionen

Abstraktionen sind **Ausdrücke** die **Prozeduren** beschreiben.

Beispiele:

```
fn (x:int) => x*x
```

$fn : int \rightarrow int$

```
(fn (x:int) => x*x) 7
```

$49 : int$

```
fn (x:int, y:int) => x*y
```

$fn : int * int \rightarrow int$

```
(fn (x:int, y:int) => x*y) (4,7)
```

$28 : int$

Prozedurdeklarationen

Prozedurdeklaration:

```
fun f … = …
```

abkürzende Schreibweise für:

```
val f = fn … => …
```

Für **rekursive Prozeduren**:

```
val rec f = fn … => …
```

Beispiel:

```
fun p (x:int, n:int) :int
      = if n>0 then x*p(x,n-1) else 1
val rec p:int*int->int = fn (x:int, n:int)
      => if n>0 then x*p(x,n-1) else 1
```

Kaskadierte Prozeduren

Prozeduren die **Prozeduren als Ergebnis** liefern,
werden als **kaskadiert** bezeichnet.

Beispiel:

```
fun mul (x:int) = fn (y:int) => x*y
```
$val\ mul : int \rightarrow (\ int \rightarrow int\ )$

```
mul 7
```
$fn : int \rightarrow int$

```
it 3
```
$21 : int$

```
mul 7 5
```
$35 : int$

www.prog1.saarland