CISPA HELMHOLTZ CENTER FOR INFORMATION SECURITY

Prof. Bernd Finkbeiner, Ph.D.
Jana Hofmann, M.Sc.
Reactive Systems Group

Programmierung 1 (WS 2020/21)
Zusatztutorium 5 (Lösungsvorschläge)
Laufzeit

Hinweis: Diese Aufgaben wurden von den Tutoren für das Zusatztutorium erstellt. Sie sind für die Klausur weder relevant noch irrelevant. 🤔 markiert potentiell schwerere Aufgaben.

1 Größen- und Laufzeitfunktionen

Aufgabe Z5.1 *(Spaß mit Laufzeiten)*
Geben Sie die Komplexitäten der folgenden *mathematischen* Objekte an. Geben Sie, sofern notwendig, auch eine geeignete Größen- und eine dazu passende Laufzeitfunktion an.

(a) $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$$\begin{array}{lll} p\,0 & = & 1 \\ p\,n & = & p\,(n-1) \quad n > 0 \end{array}$$

(b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$
$f\,n = \text{if } n < -10 \text{ then } 1 \text{ else } 2 \cdot f(n-1)$

(c) $\lambda n \in \mathbb{N}.234$

(d) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$$\begin{array}{lll} h\,0 & = & 9 \\ h\,1 & = & 90 \\ h\,2 & = & 42 \\ h\,3 & = & 0 \\ h\,4 & = & 234624562389897 \\ h\,n & = & h\left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right) + 789 \qquad n \geq 5 \end{array}$$

Lösungsvorschlag Z5.1

(a)
- Größenfunktion $\lambda n \in \mathbb{N}.n$
- Laufzeitfunktion:

  $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_+$
  $$\begin{array}{lll} g\,0 & = & 1 \\ g\,n & = & g\,(n-1) + 1 \quad n > 0 \end{array}$$

(b)
- Größenfunktion: $\lambda n \in \mathbb{Z}.ifn < -10then0elsen + 11$
- Laufzeitfunktion:

  $q : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_+$
  $$\begin{array}{lll} q\,0 & = & 1 \\ q\,n & = & q\,(n-1) + 1 \quad n > 0 \end{array}$$

(c)
- Größenfunktion $\lambda n \in \mathbb{N}.n$
- Laufzeitfunktion: r n = 1

(d)
- Größenfunktion $\lambda n \in \mathbb{N}.n$
- Laufzeitfunktion:

$$\begin{array}{lll} s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_+ & & \\ s\,n & = \;\; 1 & n < 5 \\ s\,n & = \;\; s\left(\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right) + 1 & n \geq 5 \end{array}$$

Aufgabe Z5.2 *(Auf die Größe kommts an)*
Bestimmen Sie zunächst eine rekursive Laufzeitfunktion für folgende Prozeduren unter Beachtung der gegebenen Größenfunktion. Versuchen Sie anschließend eine explizite Laufzeitfunktion zu finden:

(a)
$$\begin{array}{lll} a : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & & \\ a(n) = 42 & n < 5 & \lambda n \in \mathbb{N}.n \\ a(n) = 2 \cdot a(n-5) & n \geq 5 & \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{lll} b : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & & \\ b(n) = 33 \cdot n & n < 3 & \lambda n \in \mathbb{N}.n+3 \\ b(n) = 12 + 8 \cdot b(n-3) & n \geq 3 & \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{lll} c : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & & \\ c(n) = 0 & n = 0 & \lambda n \in \mathbb{N}.n^2 \\ c(n) = \frac{1}{8} \cdot c(n-1) & n > 0 & \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{lll} d : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & & \\ d(n) = 0 & n = 0 & \lambda n \in \mathbb{N}.2^n \\ d(n) = \frac{1}{8} \cdot d(n-1) & n > 0 & \end{array}$$

(e)
$$\begin{array}{lll} e : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & & \\ e(n) = 3 & n = 0 & \lambda n \in \mathbb{N}.n \\ e(n) = e(n-1) \cdot e(n-1) & n \geq 1 & \end{array}$$

(f)
$$\begin{array}{lll} f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & & \\ f(n) = 1234 & n = 0 & \lambda n \in \mathbb{N}.n+2 \\ f(n) = f(n-1) + f(n-1) & n \geq 1 & \end{array}$$

(g)
$$\begin{array}{lll} g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & & \\ g(n) = n^{11n} & n < 3 & \lambda n \in \mathbb{N}.n \\ g(n) = 55 \cdot g(n-3) & n \geq 3 & \end{array}$$

(h)
$$\begin{array}{ll} h : \mathscr{L}(X) \to \mathbb{N} & \\ h(nil) = 4 & \lambda xs \in \mathscr{L}(X).\,|xs| \\ h(x :: xr) = 2 \cdot h(xr) & \end{array}$$

Lösungsvorschlag Z5.2

(a) rekursive Laufzeitfunktion:

$$\begin{array}{ll} ra \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+ & \\ ra(n) = 1 & n < 5 \\ ra(n) = ra(n-5) + 1 & n \geq 5 \end{array}$$

explizite Laufzeitfunktion:
$\lambda n \in \mathbb{N}.\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + 1$

(b) rekursive Laufzeitfunktion:

$$\begin{array}{ll} rb \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+ & \\ rb(n) = 1 & n < 6 \\ rb(n) = rb(n-3) + 1 & n \geq 6 \end{array}$$

explizite Laufzeitfunktion:
$\lambda n \in \mathbb{N}.\left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor + 1$

(c) rekursive Laufzeitfunktion:

$rc \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$
$rc(n) = 1 \qquad n = 0$
$rc(n) = rc(\ (\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1)^2\ ) + 1 \qquad n > 0$

explizite Laufzeitfunktion:
$\lambda n \in \mathbb{N}.\ \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1$
(*Hinweis:* Diese Laufzeitfunktion wird nur mit Quadratzahlen tatsächlich aufgerufen (Warum?), auch wenn sie für mehr Eingaben etwas berechnet. Das Abrunden ist daher aus einem technischen Grund notwendig: Laufzeitfunktionen dürfen nur natürliche Zahlen zurückgeben. Die Umformung bei der rekursiven Laufzeitfunktion folgt aus der binomischen Formel)

(d) rekursive Laufzeitfunktion:

$rd \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$
$rd(n) = 1 \qquad n \leq 1$
$rd(n) = rd(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor) + 1 \qquad n > 1$

explizite Laufzeitfunktion:
$\lambda n \in \mathbb{N}.\ \lceil log(n)\rceil + 1$

(e) rekursive Laufzeitfunktion:

$re \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$
$re(n) = 1 \qquad n = 0$
$re(n) = 2 \cdot re(n-1) + 1 \qquad n > 0$

explizite Laufzeitfunktion:
$\lambda n \in \mathbb{N}.2^{(n+1)} - 1$

(f) rekursive Laufzeitfunktion:

$rf \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$
$rf(n) = 1 \qquad n \leq 2$
$rf(n) = 2 \cdot rf(n-1) + 1 \qquad n > 2$

explizite Laufzeitfunktion:
$\lambda n \in \mathbb{N}.2^{(n-1)} - 1$

(g) rekursive Laufzeitfunktion:

$rg \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$
$rg(n) = 1 \qquad n < 3$
$rg(n) = rg(n-3) + 1 \qquad n \geq 3$

explizite Laufzeitfunktion:
$\lambda n \in \mathbb{N}.\ \lfloor\frac{n}{3}\rfloor + 1$

(h) rekursive Laufzeitfunktion:

$rh \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$
$rh(n) = 1 \qquad n = 0$
$rh(n) = rh(n-1) + 1 \qquad n > 0$

explizite Laufzeitfunktion:
$\lambda n \in \mathbb{N}.n + 1$

Aufgabe Z5.3 *(Merge)*
Betrachten Sie die folgende Prozedur *merge*, welche beim Sortieren durch Mischen verwendet wird:

$$\begin{aligned}
&merge : \mathscr{L}(\mathbb{N}) \times \mathscr{L}(\mathbb{N}) \to \mathscr{L}(\mathbb{N}) \\
&merge\ (nil, ys) = ys \\
&merge\ (xs, nil) = xs \\
&merge\ (x :: xr, y :: yr) = \text{if } x \leq y \text{ then } x :: merge\ (xr, y :: yr) \text{ else } y :: merge\ (x :: xr, yr)
\end{aligned}$$

(a) Geben Sie eine Größenfunktion für *merge* an.

(b) Geben Sie für die Größe 4 ein Argument für *merge* mit minimaler Laufzeit und eines mit maximaler an. Geben Sie die entsprechenden Laufzeiten an.

(c) Welche minimale / maximale Laufzeit hat *merge* für Argumente der Größe n?

Lösungsvorschlag Z5.3

(a) $\lambda(xs, ys) \in \mathscr{L}(\mathbb{N}) \times \mathscr{L}(\mathbb{N})\,.\ |xs| + |ys|$

(b) minimale Laufzeit: $(nil, [1,2,3,4])$ mit Laufzeit 1.

maximale Laufzeit: $([1,2,3],[4])$ mit Laufzeit 4.

(c) minimale Laufzeit: 1

maximale Laufzeit: n

2 Komplexität

Aufgabe Z5.4 *(Komplexität)*
Vereinfachen Sie zunächst die Komplexitäten und ordnen Sie dann nach Inklusion. **Hinweis:** Benutzen Sie "$=$" und "$\subset$".

(a) $\mathcal{O}(n+2)$ $\quad\mathcal{O}(n^2)$ $\quad\mathcal{O}(\log(2n))$ $\quad\mathcal{O}(2^n)$ $\quad\mathcal{O}(23925)$ $\quad\mathcal{O}(\log(n))$

(b) $\mathcal{O}\left(\log\left(n^0+1\right)\cdot n\right)$ $\quad\mathcal{O}\left(\sqrt{23\cdot n}+17^n\right)$ $\quad\mathcal{O}(\pi)$ $\quad\mathcal{O}(0)$ $\quad\mathcal{O}\left(n^{\log(e+1)}\right)$ $\quad\mathcal{O}(n\cdot n)$

(c) $\mathcal{O}(n!)$ $\quad\mathcal{O}\left(2^{15}\right)$ $\quad\mathcal{O}\left(\frac{n^2}{5}+1\right)$ $\quad\mathcal{O}\left(n^8+n^6\cdot n^4\cdot n^2\right)$ $\quad\mathcal{O}\left(\frac{n^5}{n^2}\right)$ $\quad\mathcal{O}\left(\frac{n^2+1}{5}\right)$

Lösungsvorschlag Z5.4

(a)
- $\mathcal{O}(n)$ $\quad\mathcal{O}(n^2)$ $\quad\mathcal{O}(\log(n))$ $\quad\mathcal{O}(2^n)$ $\quad\mathcal{O}(1)$ $\quad\mathcal{O}(\log(n))$
- $\mathcal{O}(1) \subset \mathcal{O}(log(n) = \mathcal{O}(log(n) \subset \mathcal{O}(n) \subset \mathcal{O}\left(n^2\right) \subset \mathcal{O}(2^n)$

(b)
- $\mathcal{O}(n)$ $\quad\mathcal{O}(17^n)$ $\quad\mathcal{O}(1)$ $\quad\mathcal{O}(0)$ $\quad\mathcal{O}\left(n^{\log(e+1)}\right)$ $\quad\mathcal{O}\left(n^2\right)$
- $\mathcal{O}(0) \subset \mathcal{O}(1) \subset \mathcal{O}(n) \subset \mathcal{O}\left(n^{\log(e+1)}\right) \subset \mathcal{O}\left(n^2\right) \subset \mathcal{O}(17^n)$

(c)
- $\mathcal{O}(n!)$ $\quad\mathcal{O}(1)$ $\quad\mathcal{O}\left(n^2\right)$ $\quad\mathcal{O}(n^{12})$ $\quad\mathcal{O}\left(n^3\right)$ $\quad\mathcal{O}\left(n^2\right)$
- $\mathcal{O}(1) \subset \mathcal{O}\left(n^2\right) = \mathcal{O}\left(n^2\right) \subset \mathcal{O}\left(n^3\right) \subset \mathcal{O}(n^{12}) \subset \mathcal{O}(n!)$

Aufgabe Z5.5 *(Komplexitäten)*
Bestimmen Sie die Komplexitäten der folgenden Funktionen und ordnen Sie sie nach der Inklusionsordnung:

(a)
$$a \in \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$$
$$a(n) = 21\cdot n^7 - 34\cdot n^3 + 3\cdot n^5\cdot n^3$$

(b)
$$b \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$\begin{array}{ll} b(n) = \sqrt[3]{n} & n < 20 \\ b(n) = \sqrt[2]{n^4} & n \geq 20 \end{array}$$

(c)
$$c \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$\begin{array}{ll} c(n) = n^3 + n^2\cdot\ln(7\cdot n) & n \mod 12 = 0 \\ c(n) = 8\cdot n^3 & n \mod 12 \neq 0 \end{array}$$

(d)
$$d \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$\begin{array}{ll} d(n) = 12\cdot n \mod 100 + 1 & n > 4 \\ d(n) = d(n+2)^{d(n+1)} & n \leq 4 \end{array}$$

(e)
$$e \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$\begin{array}{ll} e(n) = 3 & n = 0 \\ e(n) = e(n-1) + e(n-1) - e(n-1) & \\ \qquad + e(n-1) + e(n-1) & n > 0 \end{array}$$

(f)
$$f \in \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$\begin{array}{ll} f(n) = 5 & n \leq 1 \\ f(n) = (n-1)\cdot n\cdot f(n-2) & n > 1 \end{array}$$

Lösungsvorschlag Z5.5

(a) $\mathcal{O}\left(n^8\right)$ (b) $\mathcal{O}\left(n^2\right)$ (c) $\mathcal{O}\left(n^3\right)$ (d) $\mathcal{O}\left(1\right)$ (e) $\mathcal{O}\left(3^n\right)$ (f) $\mathcal{O}\left(n!\right)$

Für die Komplexitäten gilt: $\mathcal{O}\left(1\right) \subset \mathcal{O}\left(n^2\right) \subset \mathcal{O}\left(n^3\right) \subset \mathcal{O}\left(n^8\right) \subset \mathcal{O}\left(3^n\right) \subset \mathcal{O}\left(n!\right)$

3 Nebenkosten und Rekurrenzsätze

Aufgabe Z5.6 *(Einstieg)*
Gegeben sei folgende Prozedur $p : \mathbb{N} \to \mathscr{L}(\mathbb{N})$:

$$p\ 0 = [\,]$$
$$p\ n = f(n-1) :: p(n-1) \qquad \text{für n} \geq 1$$

Hierbei fallen für $f:\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bei einem Argument der Größe m die Kosten $m+1$ an.

(a) Geben Sie eine Größenfunktion für p an.

(b) Geben Sie zu p eine passende Laufzeitfunktion r zu Ihrer Größenfunktion an.

(c) Geben Sie nun die explizite Darstellung Ihrer Laufzeitfunktion an.

(d) Welche ist die kleinste Komplexitätsklasse der p angehört? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag Z5.6

(a) $\lambda n \in \mathbb{N}.n$

(b) $r\ 0 = 1$
$r\ n = r(n-1)\ +\ g(n)$ für $n \geq 1$
, wobei $g := \lambda n \in \mathbb{N}.n+1$

(c) $r\ n = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} i$

(d) Der Polynomielle Rekurrenzsatz lässt sich anwenden, wobei $s = 1$ und $O(g)\ =\ O(n^1)$, also $k = 1$ und $n_0 = 1$.
Daraus folgt, dass p der Komplexitätsklasse $O(n^{k+1})$ liegt, also $O(n^2)$.

Aufgabe Z5.7 *(Komplexität)*
Ermitteln Sie zunächst die rekursiv definierte Laufzeitfunktion bezüglich der angegebenen Größenfunktion. Bestimmen Sie dann die Komplexität mit Hilfe der Rekurrenzsätze.

(a) Größenfunktion: $\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$
$a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$a(n) = 3 \cdot n \qquad n < 5$
$a(n) = a(n-1) + 7 \quad n \geq 5$

(b) Größenfunktion: $\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$
$b : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
$b(n) = (n+1) \cdot (n+1) \qquad n < 32$
$b(n) = (-\ b(n-3)) \cdot a(n) \quad n \geq 32$

(c) Größenfunktion: $\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$
$d' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$d'(n) = 0 \qquad n = 0$
$d'(n) = d'(n-2+1) + 1 \quad n \neq 0$

Größenfunktion: $\lambda(x, y) \in \mathbb{N}.\ y$
$d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
$d(x, 0) = d'(y)$
$d(x, y) = d(x, y-1) + d(x, y-1) + d'(y) \qquad 0 < y \leq 7$
$d(x, y) = d'(x) \cdot d(x+2, y\ div\ 2) \cdot d(x+2, y\ div\ 2) \quad y > 7$

(d) Größenfunktion: $\lambda z \in \mathbb{Z}.\ |z|$
$e : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$
$e(n) = \sqrt{n^2} \qquad |n| < 8$
$e(n) = \text{if } n < 0 \text{ then } 3 \cdot e(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor) \text{ else } e(n\ div\ 5) \quad 49 < |n|$
$e(n) = e(\frac{n^2}{-n} + 1) \qquad 49 \geq |n| \geq 8$

Größenfunktion: $\lambda xs \in \mathscr{L}(X)\,.\ |xs|$
$g : \mathscr{L}(X) \to \mathbb{N}$
$g(nil) = 3$
$g(x :: xr) = 2 \cdot g'(4) + g(xr) + g'(16) \cdot g'(16)$

(e) Größenfunktion: $\lambda xs \in \mathscr{L}(X)\,.\ |xs|$
$f : \mathscr{L}(X) \to \mathbb{Q}$
$f(nil) = 1$
$f(x :: xr) = f(xr) - \frac{f(xr)}{f(xr)+1}$

(f) Größenfunktion: $\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$
$g' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$g'(0) = 17$
$g'(n) = g'(n-2) + 2 \quad n \neq 0$

Lösungsvorschlag Z5.7
Beachten Sie, dass die Komplexität für fast alle $n \in \mathbb{N}$ betrachtet wird und man sich somit immer den größten Fall anschauen muss. Zum Beispiel ist bei Aufgabenteil (c) nur der Bereich ab $n_0 = 21$ interessant.

(a)
$$\begin{array}{ll} r \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}_+ & \\ r(n) = 1 & n < 5 \\ r(n) = r(n-1) + 1 & n \geq 5 \end{array}$$

Aus der Rekurrenz $r(n) = r(n-1) + \mathcal{O}(n^0)$ folgt mit Hilfe des Polynomiellen Rekurrenzsatzes die Komplexität $\mathcal{O}(n^{0+1})$.

(b)
$$\begin{array}{ll} r \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}_+ & \\ r(n) = 1 & n < 32 \\ r(n) = r(n-3) + g(n) & n \geq 32 \end{array}$$

Da $\mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(n^1)$, wegen a) gilt, folgt aus der Rekurrenz $r(n) = r(n-3) + \mathcal{O}(n^1)$ mit Hilfe des Polynomiellen Rekurrenzsatzes die Komplexität $\mathcal{O}(n^{1+1}) = \mathcal{O}(n^2)$

(c)
$$\begin{array}{ll} r \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}_+ & \\ r(n) = g(n) + 1 & n = 0 \\ r(n) = 2 \cdot r(n-1) + g(n) & 0 < n \leq 7 \\ r(n) = g(n) + 2 \cdot r(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) & n > 7 \end{array}$$

Aus der Rekurrenz $r(n) = r(n-1) + \mathcal{O}(n^0)$ folgt mit Hilfe des Polynomiellen Rekurrenzsatzes die Komplexität von g = $\mathcal{O}(n^{0+1})$. Da r offensichtlich monoton wachsend ist, folgt aus der Rekurrenz $r(b \cdot n) = b \cdot r(n) + \mathcal{O}(n)$ mit Hilfe des Linear-Logarithmischen Rekurrenzsatzes $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$

(d)
$$\begin{array}{ll} r \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}_+ & \\ r(0) = 1 & \\ r(n) = r(n-1) + 1 & n \neq 0 \end{array}$$

Aus der Rekurrenz $r(n) = r(n-1) + \mathcal{O}(n^0)$ folgt mit Hilfe des Polynomiellen Rekurrenzsatzes die Komplexität $\mathcal{O}(n^{0+1})$. Die Hilfsprozedur g' wird nicht berücksichtigt, da sie mit einer konkreten Zahl aufgerufen wird und somit konstante Laufzeit hat.

(e)
$$\begin{array}{ll} r \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}_+ & \\ r(n) = 1 & n < 8 \\ r(n) = r(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor) + 1 & 49 < n \\ r(n) = r(n-1) + 1 & 49 \geq n \geq 8 \end{array}$$

Da r offensichtlich monoton wachsend ist, folgt aus der Rekurrenz $r(b \cdot n) = r(n) + \mathcal{O}(n)$ mit Hilfe des Logarithmischen Rekurrenzsatzes $\mathcal{O}(\log(n))$

(f)
$$\begin{array}{ll} r \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}_+ & \\ r(0) = 1 & \\ r(n) = 3 \cdot r(n-1) + 1 & n \neq 0 \end{array}$$

Aus der Rekurrenz $r(n) = 3 \cdot r(n-1) + \mathcal{O}(n^0)$ folgt mit Hilfe des Exponentiellen Rekurrenzsatzes die Komplexität $\mathcal{O}(3^n)$.