Prof. Bernd Finkbeiner, Ph.D.
Jana Hofmann, M.Sc.
Reactive Systems Group

Programmierung 1 (WS 2020/21)
Aufgaben für die Übungsgruppe H (Lösungsvorschläge)

Hinweis: Diese Aufgaben wurden von den Tutoren für die Übungsgruppe erstellt. Sie sind für die Klausur weder relevant noch irrelevant. 🤔 markiert potentiell schwerere Aufgaben.

Mathematische Prozeduren

Aufgabe TH.1 *(Terminierungsfunktionen ohne Ende)*
Beweisen Sie die Terminierung der folgenden Relationen, indem Sie jeweils eine natürliche oder strukturelle Terminierungsfunktion angeben.

(a) $\left\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \,\middle|\, x < 0 \land y = x + 1\right\}$

(b) $\left\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \,\middle|\, y = x \; div \; 3 \;\land\; x > 0\right\}$

(c) $\{(3,7)\}$

(d) $\left\{((a,b),(c,d)) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^2 \,\middle|\, ((c = a + 1 \land d = b) \lor (d = b - 1 \land c = a)) \land d > c\right\}$

(e) $\{(a,b) \mid a = \{b\}\}$

Lösungsvorschlag TH.1

(a) $\lambda x \in \mathbb{Z}.\ -x$

(b) $\lambda x \in \mathbb{N}.\ x$

(c) $\lambda x \in \mathbb{N}.\ 7 - x$

(d) $\lambda(a,b) \in \mathbb{R}^2.\ |\lfloor b - a \rfloor|$

(e) $\lambda a.\ a$

Aufgabe TH.2 *(Terminierungsfunktionen)*
Bestimmen Sie zu den folgenden Prozeduren jeweils eine Terminierungsfunktion:

(a) $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$p\ 0 = 0$
$p\ n = p\ (n-1) + p\ (n-1) + p\ (n-1) \qquad$ für $n > 0$

(b) $q : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$q\ 0 = 0$
$q\ 1 = 0$
$q\ n = q\ \ (2^n) + q\ \ (2^n) + q\ \ (2^n) \qquad$ für $n > 1$ und n nicht durch 2 teilbar
$q\ n = q\left(\frac{n}{2}\right) + q\left(\frac{n}{2}\right) + q\left(\frac{n}{2}\right) \qquad$ für $n > 1$ und n durch 2 teilbar

Lösungsvorschlag TH.2

(a) $\lambda n \in \mathbb{N}.\, n$

(b) $\lambda n \in \mathbb{N}. \begin{cases} 0 & \text{für } n \in \{0,1\} \\ \log_2(n) & \text{falls } n > 1 \text{ und } \exists x : 2^x = n \\ b + s + 1 & \text{falls } n > 1,\ \nexists x : 2^x = n \text{ und } n = b \cdot 2^s \text{ für } n, b \in \mathbb{N} \end{cases}$

Aufgabe TH.3 *(Funktions-Terminator 2 - Tag der Abrechnung)*
Geben Sie (wenn vorhanden) Terminierungsfunktionen für folgende Prozeduren an:

(a) $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ll} a(n) = 0 & n < 10 \\ a(n) = a(n-3) \cdot a(n-1) & n \geq 10 \end{array}$$

(b) $b : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ll} b(n) = 7 - n & n < -100 \\ b(n) = b(n-1) - b(n-1) & n \geq -100 \end{array}$$

(c) $c : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ll} c(n) = 123 & n > 15 \\ c(n) = c(n+1) & n \leq 15 \end{array}$$

(d) $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ll} d(m,n) = d(m-1,n) & m > 4 \\ d(m,n) = d(m,n-1) & m \leq 4 \ \wedge \ n > 10 \\ d(m,n) = m^n \cdot m & m \leq 4 \ \wedge \ n \leq 10 \end{array}$$

Lösungsvorschlag TH.3

(a) $\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$

(b) $\lambda n \in \mathbb{Z}.\ \text{if } n < -100 \text{ then } 0 \text{ else } n + 101$

(c) $\lambda n \in \mathbb{N}.\ \text{if } n > 15 \text{ then } 0 \text{ else } 16 - n$

(d) $\lambda(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.\ m + n$

Aufgabe TH.4 *(Welche regelt's?)*
Gegeben sei die folgende mathematische Prozedur p:

$$\begin{array}{c} p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ p\ n = \text{if } n = 0 \text{ then } 0 \text{ else if } n > 0 \text{ then } p\ (n-1) \text{ else } p\ (n+1) \end{array}$$

Welche der folgenden Funktionen sind gültige Terminierungsfunktionen für p? Begründen Sie!

- [ ] $\lambda n \in \mathbb{Z}.\ n$
- [x] $\lambda n \in \mathbb{Z}.\ |n|$
- [x] $\lambda z \in \mathbb{Z}.\ |z|$
- [x] $\lambda n \in \mathbb{Z}.\ |2 \cdot n|$
- [ ] $\lambda n \in \mathbb{Z}.\ 2^n$
- [ ] $\lambda n \in \mathbb{Z}.\ \left|\frac{n}{2}\right|$
- [x] $\lambda n \in \mathbb{Z}.\ n^2$
- [ ] $\lambda n \in \mathbb{Z}.\ |n-1|$

Aufgabe TH.5 *(Immer positiv denken)*
Geben Sie (wenn vorhanden) Terminierungsfunktionen für folgende Prozeduren an:

(a) $$\begin{array}{ll} a : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & \\ a(n) = 0 & n < 10 \\ a(n) = a(n-3) \cdot a(n-1) & n \geq 10 \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{ll} b : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} & \\ b(n) = 7 - n & n < -100 \\ b(n) = b(n-1) - b(n-1) & n \geq -100 \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{ll} c : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & \\ c(n) = 123 & n > 15 \\ c(n) = c(n+1) & n \leq 15 \end{array}$$

(d) $$\begin{array}{ll} d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} & \\ d(m,n) = d(m-1,n) & m > 4 \\ d(m,n) = d(m,n-1) & m \leq 4 \ \wedge \ n > 10 \\ d(m,n) = m^n \cdot m & m \leq 4 \ \wedge \ n \leq 10 \end{array}$$

Lösungsvorschlag TH.5

(a) $\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$

(b) $\lambda n \in \mathbb{Z}.$ if $n < -100$ then 0 else $n + 101$

(c) $\lambda n \in \mathbb{N}.$ if $n > 15$ then 0 else $16 - n$

(d) $\lambda(m, n) \in \mathbb{N}^2.\ m + n$

Aufgabe TH.6 *(Alles hat ein Ende – oder auch nicht)*
Betrachten Sie folgende Aussagen. Entscheiden Sie, ob diese wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Antwort.

(a) Wenn man zeigen will, dass eine Relation terminiert, reicht es eine Funktion zu finden, die auf $\mathbb{N}$ abbildet und bei der für alle Elemente a, b, für die b Nachfolger von a ist, gilt, dass $f(a) > f(b)$.

(b) Die Konstituenten von $\{\{\{\}\}\}$ sind $\{\}$ und $\{\{\}\}$.

(c) Eine Funktion, deren Wertebereich eine echte Obermenge von $\mathbb{N}$ ist, kann keine natürliche Terminierungsfunktion sein.

(d) $\lambda x \in \mathbb{Z}.\ x$ ist eine natürliche Terminierungsfunktion für die Relation $R = \{(x, x') \in \mathbb{Z}^2 \mid x > x'\}$.

(e) $f \in \mathit{Ver}\, R \to \mathbb{N}$ heißt natürliche Terminierungsfunktion für R, wenn für jede Kante $(x, y) \in R$ gilt, dass $f(x) \geq f(y)$.

(f) Nur Relationen, für die natürliche Terminierungsfunktion existieren, terminieren.

(g) Die Relation $R = \{(0, 2), (29, 3), (3, 0), (7, 29), (2, 7)\}$ terminiert für den Knoten 7.

(h) Eine Relation auf den ganzen Zahlen kann nicht terminieren.

(i) Die Menge $\{\{\{\{\}\}\}\}$ hat genau 4 Konstituenten.

(j) Eine Relation, die eine Teilmenge von *Ter* ist, terminiert. Als natürliche Terminierungsfunktion kann man immer $\lambda x \in \mathbb{N}.x$ wählen.

(k) Jede Relation R, für die gilt, dass für jede Kante $(x, y) \in R$ gilt, dass y eine Konstituente von x ist, terminiert.

Lösungsvorschlag TH.6

(a) Die Aussage ist korrekt. Nach Proposition 8.12 folgt aus der Existenz einer natürlichen Terminierungsfunktion für R, dass R terminierend ist. Eine natürliche Terminierungsfunktion ist nun genau definiert als $f \in \mathit{Ver}\, R \to \mathbb{N}$, sodass für jede Kante $(x, y) \in R$ gilt $f\ x > f\ y$. Lässt sich also eine solche Funktion finden, dann ist ihre Existenz gezeigt und es folgt, dass R terminierend ist.

(b) Wahr, denn $\{\{\}\}$ ist als Element der Menge nach Definition eine Konstituente und $\{\}$ als Konstituente von $\{\{\}\}$ auch.

(c) Die Aussage ist korrekt. Eine natürliche Terminierungsfunktion f ist eben so definiert, dass sie nach $\mathbb{N}$ abbildet. Wenn der Wertebereich eine echte Obermenge von $\mathbb{N}$ ist, dann gibt es mindestens einen Wert, auf den f abbildet, der nicht in $\mathbb{N}$ liegt und somit ist das Kriterium nicht mehr erfüllt.

(d) Die Aussage ist falsch, da die Funktion auf $\mathbb{Z}$ abbildet.

(e) Die Aussage ist falsch, es muss echt größer und nicht größer gleich sein.

(f) Die Aussage ist korrekt, wurde aber so in der Vorlesung nicht bewiesen: Bei Proposition 8.12 handelt es sich um eine Implikation, die besagt, dass wenn eine natürliche Terminierungsfunktion für eine Relation existiert, die Relation auch terminierend ist. Die Rückrichtung folgt daraus nicht direkt. Man kann sie jedoch beweisen:

Wenn man weiß, dass eine Relation terminiert, kann man jedem Knoten die Länge des kürzesten Pfades zuordnen, der bei diesem Knoten startet und bis zu einer Senke läuft. Hat man eine Kante von A zu B, so kann man von A über B gehen, der kürzeste Pfad, der bei A anfängt, kann somit maximal eins länger sein als der, der bei B losgeht.

(g) Die Aussage ist falsch, R enthält einen Zyklus, ist somit fortschreitend und terminiert daher nach Proposition 8.8 für keinen ihrer Knoten.

(h) Die Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel: Sei eine Relation R gegeben durch $\{(x, y) \mid |x| > |y|\}$. Dann ist $\lambda x \in \mathbb{Z}.\, |x|$ eine gültige natürliche Terminierungsfunktion, da der Betrag auf die natürlichen Zahlen abbildet.

(i) Die Aussage ist falsch, die Menge hat drei Konstituenten: $\{\}$, $\{\{\}\}$ und $\{\{\{\}\}\}$.

(j) Die Aussage ist korrekt.

Es gilt $\forall (x, y) \in \mathit{Ter} : x > y \wedge (x, y) \in \mathbb{N}^2$ und somit auch $f\ x > f\ y$ mit $f = \lambda x \in \mathbb{N}.x$. Da dies für alle Paare in Ter gilt, muss es auch für eine Teilmenge davon gelten. Man findet also mit f eine natürliche Terminierungsfunktion, die nach Proposition 8.12 die Terminierung sichert.

(k) Die Aussage ist korrekt. Es handelt sich um Proposition 8.15.

Aufgabe TH.7 *(Ergebnisfunktionen I)*
Geben Sie nicht-rekursive Ergebnisfunktionen folgender Prozeduren an:

(a) $a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &a\ (z) = 0 && z = 0 \\ &a\ (z) = z \cdot a\ (z - 1) && z > 0 \end{aligned}$$

(b) $b : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &b\ (e, i) = e && i = 0 \\ &b\ (e, i) = e \cdot b\ (e, i - 1) && i > 0 \end{aligned}$$

(c) $c : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} &c\ (a) = c\ (a - 2a) && a < 0 \\ &c\ (a) = 1 && a = 0 \\ &c\ (a) = -a + c\ (a - a) && a > 0 \end{aligned}$$

(d) $d : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &d\ (t) = d\ (-t + 1) && t < 1 \\ &d\ (t) = 0 && t = 1 \\ &d\ (t) = t + d\ (t - 1) && t > 1 \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag TH.7

(a) $\lambda n \in \mathbb{N}.\ 0$

(b) $\lambda (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.\ a^{b+1}$

(c) $\lambda n \in \mathbb{Z}.\ -|n| + 1$

(d) $\lambda w \in \mathbb{Z}.$ if $w \geq 1$ then $\frac{w \cdot (w+1)}{2} - 1$ else $\frac{(-w+2) \cdot (-w+1)}{2} - 1$

Hinweis: Gauß-Summe verschieben

Aufgabe TH.8 *(Ergebnisfunktionen II)*
Beweisen Sie folgende Aussage:

Jede Prozedur hat *genau* eine Ergebnisfunktion.

Lösungsvorschlag TH.8
Beweis. Seien zwei Funktionen f, g gegeben, die beide Ergebnisfunktionen für p sind. Damit erfüllen sowohl f als auch g die definierenden Gleichungen für p. Die Ergebnisfunktion ist jedoch die kleinste Funktion, die die definierenden Gleichungen für p erfüllt. Damit gilt $f \subseteq g$ und $g \subseteq f$. Gemäß der Definition von Mengengleichheit folgt $f = g$. ■

Korrektheitssatz

Aufgabe TH.9 *(Multiplikation mit Addition)*
Betrachten Sie folgende Prozedur $p : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, die die Funktion $f = \lambda(x, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}.\, x \cdot n$ durch wiederholte Addition berechnet.

$$\begin{array}{ll} p : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z} & \\ p(x, n) = 0 & \text{für } n = 0 \\ p(x, n) = x + p(x, n-1) & \text{für } n > 0 \end{array}$$

Beweisen Sie mit dem Korrektheitssatz die Korrektheit der Prozedur.

Lösungsvorschlag TH.9
Beweis mit dem Korrektheitssatz. Wir zeigen zuerst, dass $\mathit{Dom}\ f \subseteq \mathit{Dom}\ p$ gilt. Das folgt daraus, dass p für alle $(x, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ terminiert mit der Terminierungsfunktion $\lambda(x, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}.\, n$. Nun zeigen wir, dass f die definierenden Gleichungen von p für alle $(x, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ erfüllt.
Wir unterscheiden zwei Fälle:

- 1. Fall: $n = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= x \cdot 0 && \text{da } n = 0 \\ &= f(x, 0) && \text{Definition } f \\ &= f(x, n) && \text{da } n = 0 \end{aligned}$$

- 2. Fall: $n > 0$

$$\begin{aligned} x + f(x, n-1) &= x + x \cdot (n-1) && \text{Definition } f \\ &= x \cdot (1 + (n-1)) && \text{Arithmetik} \\ &= x \cdot n && \text{Arithmetik} \\ &= f(x, n) && \text{Definition } f \end{aligned}$$

Aufgabe TH.10 *(Korrektheitssatz)*
Geben Sie zu folgenden Prozeduren die Ergebnisfunktion an und beweisen Sie ihre Korrektheit.

(a) $$\begin{array}{ll} a : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & \\ a\ (n) = 1 & n = 0 \\ a\ (n) = 2 \cdot a\ (n-1) + 2 \cdot a\ (n-1) & n > 0 \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{ll} b : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z} & \\ b\ (n, m) = 1 & m = 0 \\ b\ (n, m) = n \cdot b\ (n, m-1) & m \neq 0 \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{ll} c : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} & \\ c\ (n) = 0 & n = 0 \\ c\ (n) = c\ (n-1) - 2 & n > 0 \end{array}$$

Lösungsvorschlag TH.10

(a) Ergebnisfunktion: $f = \lambda n \in \mathbb{N}.\ 4^n$

Beweis. mit dem Korrektheitssatz. Wir zeigen zuerst, dass $\mathit{Dom}\ f = \mathit{Dom}\ a$ gilt. Dafür zeigen wir mithilfe einer natürlichen Terminierungsfunktion, dass a für alle $n \in \mathbb{N}$ terminiert: $\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$. Somit gilt $\mathit{Dom}\ f = \mathbb{N} = \mathit{Dom}\ a$. Nun bleibt noch zu zeigen, dass f die definierenden Gleichungen von a erfüllt.

- 1. Fall: $n = 0$:

$$\begin{aligned} 1 &= 4^0 && \text{Arithmetik} \\ &= f\ (0) && \text{Definition } f \end{aligned}$$

- 2. Fall: $n > 0$:

$$\begin{aligned} 2 \cdot f\ (n-1) + 2 \cdot f\ (n-1) &= 2 \cdot 4^{n-1} + 2 \cdot 4^{n-1} && \text{Definition } f \\ &= 2 \cdot (2 \cdot 4^{n-1}) && \text{Arithmetik} \\ &= 4 \cdot 4^{n-1} && \text{Arithmetik} \\ &= 4^n && \text{Arithmetik} \\ &= f\ (n) && \text{Definition } f \end{aligned}$$

■

(b) Ergebnisfunktion: $g = \lambda(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}.\ n^m$

Beweis. mit dem Korrektheitssatz. Wir zeigen zuerst, dass $Dom\ g = Dom\ b$ gilt. Dafür zeigen wir mithilfe einer natürlichen Terminierungsfunktion, dass b für alle $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ terminiert: $\lambda(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}.\ m$. Somit gilt $Dom\ g = \mathbb{Z} \times \mathbb{N} = Dom\ b$. Nun bleibt noch zu zeigen, dass g die definierenden Gleichungen von b erfüllt.

- 1. Fall: $n = 0$:

$$\begin{aligned} 1 &= n^0 && \text{Arithmetik} \\ &= g\ (n, 0) && \text{Definition } g \end{aligned}$$

- 2. Fall: $n > 0$:

$$\begin{aligned} n \cdot g\ (n, m-1) &= n \cdot n^{m-1} && \text{Definition } g \\ &= n^m && \text{Arithmetik} \\ &= g\ (n, m) && \text{Definition } g \end{aligned}$$

■

(c) Ergebnisfunktion: $h = \lambda n \in \mathbb{N}.\ -2 \cdot n$

Beweis. mit dem Korrektheitssatz. Wir zeigen zuerst, dass $Dom\ h = Dom\ c$ gilt. Dafür zeigen wir mithilfe einer natürlichen Terminierungsfunktion, dass c für alle $n \in \mathbb{N}$ terminiert: $\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$. Somit gilt $Dom\ h = \mathbb{N} = Dom\ c$. Nun bleibt noch zu zeigen, dass h die definierenden Gleichungen von c erfüllt.

- 1. Fall: $n = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= -2 \cdot 0 && \text{Arithmetik} \\ &= -2 \cdot n && \text{da } n = 0 \\ &= h\ (0) && \text{Definition } h \end{aligned}$$

- 2. Fall: $n > 0$:

$$\begin{aligned} h\ (n-1) - 2 &= -2 \cdot (n-1) - 2 && \text{Definition } h \\ &= -2 \cdot n + 2 - 2 && \text{Arithmetik} \\ &= -2 \cdot n && \text{Arithmetik} \\ &= h\ (n) && \text{Definition } h \end{aligned}$$

■

Aufgabe TH.11 *(Äquivalenzbeweis: Genau hingeschaut)* 🤔

Betrachten Sie die beiden folgenden mathematischen Prozeduren:

$$\begin{aligned} &p : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ &p\ (0, y) = y \\ &p\ (x, y) = p\ (x-1, y+1) \quad \text{für } x > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &q : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ &q\ (0, y) = 2 \cdot y - y \\ &q\ (x, y) = 2 \cdot q\ (x-1, y+1) - q\ (x-1, y+1) \quad \text{für } x > 0 \end{aligned}$$

Beweisen Sie, dass die beiden Prozeduren semantisch äquivalent sind. Argumentieren Sie dabei genau und geben Sie an, welche Sätze Sie benutzen!

Lösungsvorschlag TH.11
Wir geben eine Funktion f an, welche insbesondere die definierenden Gleichungen von p erfüllt:

$$\begin{aligned} & f \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ & f\ (0, y) = y \\ & f\ (x, y) = f\ (x-1, y+1) && \text{für } x > 0 \end{aligned}$$

Demnach gilt $Dom\ f = Dom\ p$, da der Definitionsbereich der Funktion f dem *Argumentbereich* der Prozedur p entspricht *und* die Prozedur p für alle ihre Argumente terminiert, wie die natürliche Terminierungsfunktion $\lambda(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}.\ x$ beweist.

Nun zeigen wir zuerst, dass q die Funktion f berechnet. Dazu nutzen wir den Korrektheitssatz:

(a) $Dom\ f = Dom\ q$, da Definitionsbereich von f und Argumentbereich von p übereinstimmen und q für alle Argumente terminiert ($\lambda(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}.\ x$).

(b) f erfüllt die definierenden Gleichungen von q:

- Fall 1: $x = 0$:

$$\begin{aligned} f\ (0, y) &= y && \text{Definition } f \\ &= 2 \cdot y - y && \text{Arithmetik} \end{aligned}$$

- Fall 2: $x > 0$:

$$\begin{aligned} f\ (x, y) &= f\ (x-1, y+1) && \text{Definition } f,\ x > 0 \\ &= 2 \cdot f\ (x-1, y+1) - f\ (x-1, y+1) && \text{Arithmetik} \end{aligned}$$

Da q die Funktion f berechnet, und $Dom\ f = Dom\ q$, folgt mit Proposition 9.5, dass f die Ergebnisfunktion von q ist.

Damit haben p und q die gleiche Ergebnisfunktion. Da auch ihr Argumentbereich gleich ist, sind sie laut Definition semantisch äquivalent.

Aufgabe TH.12 *(Alles zusammen)*
Geben Sie für die folgenden Prozeduren Rekursionsfunktion, Rekursionsrelation, Terminierungsfunktion und Ergebnisfunktion an. Beweisen Sie außerdem, dass die von Ihnen gewählte Ergebnisfunktion korrekt ist.

Hinweis: Gegebenenfalls müssen Sie für die Terminierungsfunktion den Argumentbereich der Prozedur einschränken.

(a) $p : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$
$p\ (0, y) = y$
$p\ (x, y) = 1 + p\ (x-1, y) \quad \text{für } x > 0$

(b) $p : \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
$p\ (0, y) = 0$
$p\ (x, y) = y + p\ (x-1, y) \quad \text{für } x > 0$

(c) $p : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$
$p\ (x, 0) = 1$
$p\ (x, y) = y \cdot p\ (x-1, y) \quad \text{für } y \neq 0$

(d) $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$p\ 0 = 0$
$p\ 1 = 1$
$p\ n = 1 + p\ (n-2) \quad \text{für } n > 1$

(e) $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$p\ 0 = 3$
$p\ x = 1 + p\ (x-1) \quad \text{für } x > 0$

(f) $p : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} p\ (x, y) = {} & \text{if } x = y \text{ then } x \\ & \text{else if } x = 0 \text{ then } p(x, y-1) \\ & \text{else if } y = 0 \text{ then } p(x-1, y) \\ & \text{else } p(x-1, y-1) \end{aligned}$$

(g) Zeigen Sie außerdem, dass die Prozedur aus (b) die Funktion $g = \lambda(x,y) \in \mathbb{N}^2.\ x \cdot y$ berechnet.

Lösungsvorschlag TH.12
Da die Aufgabenstellung bereits eine Terminierungsfunktion verlangt (und *Dom p* somit bestimmt wurde), wird im Folgenden unter dem Punkt „Korrektheit" nur noch gezeigt, dass die Ergebnisfunktion die definierenden Gleichungen der entsprechenden Prozedur erfüllt.

(a)
- Rekursionsfunktion: $\lambda(x,y) \in \mathbb{N}^2.$ if $x = 0$ then $\langle\rangle$ else $\langle(x-1,y)\rangle$
- Rekursionsrelation: $\left\{((x,y),(x-1,y)) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2\right\}$
- Terminierungsfunktion: $\lambda(x,y) \in \mathbb{N}^2.\ x$
- Ergebnisfunktion f: $\lambda(x,y) \in \mathbb{N}^2.\ x + y$

  Korrektheit:

  - Fall: $x = 0$

$$\begin{aligned} f\ (0,y) &= 0 + y && \text{Definition } f \\ &= y && \text{Mathe} \end{aligned}$$

  - Fall: $x > 0$

$$\begin{aligned} f\ (x,y) &= x + y && \text{Definition } f \\ &= 1 - 1 + x + y && \text{Mathe} \\ &= 1 + (x - 1 + y) && \text{Mathe} \\ &= 1 + f\ (x-1,y) && \text{Definition } f \end{aligned}$$

(b)
- Rekursionsfunktion: $\lambda(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}.$ if $x = 0$ then $\langle\rangle$ else $\langle(x-1,y)\rangle$
- Rekursionsrelation: $\{((x,y),(x-1,y)) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{Z}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{Z})\}$
- Terminierungsfunktion: $\lambda(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}.\ x$
- Ergebnisfunktion f: $\lambda(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}.\ x \cdot y$

  Korrektheit:

  - Fall: $x = 0$

$$\begin{aligned} f\ (0,y) &= 0 \cdot y && \text{Definition } f \\ &= 0 && \text{Mathe} \end{aligned}$$

  - Fall: $x > 0$

$$\begin{aligned} f\ (x,y) &= x \cdot y && \text{Definition } f \\ &= y - y + x \cdot y && \text{Mathe} \\ &= y + (x \cdot y - y) && \text{Mathe} \\ &= y + (x - 1) \cdot y && \text{Distributivität} \\ &= y + f\ (x-1,y) \end{aligned}$$

(c)
- Rekursionsfunktion: $\lambda(x,y) \in \mathbb{Z}^2.$ if $x = 0$ then $\langle\rangle$ else $\langle(x-1,y)\rangle$
- Rekursionsrelation: $\left\{((x,y),(x-1,y)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; y \neq 0\right\}$
- Die Prozedur terminiert nur für Argumente der Form $(x,0)$ mit $x \in \mathbb{Z}$
- Ergebnisfunktion f: $\lambda(x,y) \in \mathbb{Z} \times \{0\}\ .\ 1$

  Korrektheit: Aufgrund des eingeschränkten Definitionsbereichs der Funktion muss nur eine Gleichung der Prozedur geprüft werden, nämlich die erste:

$$1 = f\ (x,0) \qquad \text{Definition } f$$

(d)

- Rekursionsfunktion: $\lambda n \in \mathbb{N}.$ if $n = 0$ then $\langle\rangle$ else if $n = 1$ then $\langle\rangle$ else $\langle n - 2\rangle$
- Rekursionsrelation: $\left\{(n, n-2) \in \mathbb{N}^2\right\}$
- Terminierungsfunktion: $\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$
- Ergebnisfunktion: $\lambda n \in \mathbb{N}.\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

  Korrektheit:

  - Fall: $n = 0$

$$\begin{aligned} f\ 0 &= \left\lceil \frac{0}{2} \right\rceil && \text{Definition } f \\ &= 0 && \text{Mathe, Definition } \lceil\rceil \end{aligned}$$

  - Fall: $n = 1$

$$\begin{aligned} f\ 1 &= \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil && \text{Definition } f \\ &= 1 && \text{Mathe, Definition } \lceil\rceil \end{aligned}$$

  - Fall: $n > 1$

$$\begin{aligned} f\ n &= \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil && \text{Definition } f \\ &= 1 + -1 + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil && \text{Mathe} \\ &= 1 + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 && \text{Mathe} \\ &= 1 + \left\lceil \frac{n}{2} - 1 \right\rceil && \text{Mathe, Definition } \lceil\rceil \\ &= 1 + \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil && \text{Mathe} \\ &= 1 + f\ (n-2) \end{aligned}$$

(e)

- Rekursionsfunktion: $\lambda x \in \mathbb{N}.$ if $x = 0$ then $\langle\rangle$ else $\langle x - 1\rangle$
- Rekursionsrelation: $\left\{(x, x-1) \in \mathbb{N}^2\right\}$
- Terminierungsfunktion: $\lambda n \in \mathbb{N}.\ n$
- Ergebnisfunktion f: $\lambda n \in \mathbb{N}.\ x + 3$

  Korrektheit:

  - Fall: $x = 0$

$$\begin{aligned} f\ 0 &= 0 + 3 && \text{Definition f} \\ &= 3 && \text{Mathe} \end{aligned}$$

  - Fall: $x > 0$

$$\begin{aligned} f\ x &= x + 3 && \text{Definition } f \\ &= 1 - 1 + x + 3 && \text{Mathe} \\ &= 1 + (x - 1 + 3) && \text{Mathe} \\ &= 1 + f\ (x-1) \end{aligned}$$

(f)

- Rekursionsfunktion:

$$\begin{aligned} \lambda(x, y) \in \mathbb{Z}^2.\ &\text{if } x = y \text{ then } \langle\rangle \\ &\text{else if } x = 0 \text{ then } \langle(x, y-1)\rangle \\ &\text{else if } y = 0 \text{ then } \langle(x-1, y)\rangle \\ &\text{else } \langle(x-1, y-1)\rangle \end{aligned}$$

- Rekursionsrelation:

$$\begin{aligned} &\left\{((x,y),(x,y-1)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \,\middle|\, x = 0 \land y \neq 0\right\} \\ \cup &\left\{((x,y),(x-1,y)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \,\middle|\, y = 0 \land x \neq 0\right\} \\ \cup &\left\{((x,y),(x-1,y-1)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \,\middle|\, y \neq 0 \land x \neq 0 \land x \neq y\right\} \end{aligned}$$

- Terminierungsfunktion: Die Prozedur terminiert nur für $(x,y) \in \left\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \,\middle|\, x = y \lor (x \geq 0 \land y \geq 0)\right\}$. Wenn wir den Argumentbereich entsprechend einschränken, können wir

$$\lambda(x,y) \in \left\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \,\middle|\, x = y \lor (x \geq 0 \land y \geq 0)\right\} .\ \text{if } x = y \text{ then } 0 \text{ else } x + y$$

verwenden.

- Ergebnisfunktion f: $\lambda(x,y) \in \mathbb{N}^2.$ if $x = y$ then x else 0

Korrektheit:

- Fall $x = y$

$$\begin{aligned} f\ (x,y) &= \text{if } x = y \text{ then } x \text{ else } 0 && \text{Definition } f \\ &= x && x = y \end{aligned}$$

- Fall $x = 0 \land y \neq 0$

$$\begin{aligned} f\ (x,y) &= \text{if } x = y \text{ then } x \text{ else } 0 && \text{Definition } f \\ &= 0 && x \neq y, \text{ da } x = 0 \text{ und } y > 0 \\ &= \text{if } 0 = y - 1 \text{ then } 0 \text{ else } 0 && \text{Da Konsequenz und Alternative } 0 \\ &= f\ (0, y-1) && \text{Definition } f \\ &= f\ (x, y-1) && x = 0 \end{aligned}$$

- Fall $y = 0 \land x \neq 0$

$$\begin{aligned} f\ (x,y) &= \text{if } x = y \text{ then } x \text{ else } 0 && \text{Definition f} \\ &= 0 && x \neq y, \text{ da } x > 0 \text{ und } y = 0 \\ &= \text{if } x - 1 = 0 \text{ then } x - 1 \text{ else } 0 && \text{Da Konsequenz und Alternative } 0 \\ &= f\ (x-1, 0) && \text{Definition } f \\ &= f(x-1, y) && y = 0 \end{aligned}$$

- Fall $y \neq 0 \land x \neq 0 \land x \neq y$

$$\begin{aligned} f\ (x,y) &= \text{if } x = y \text{ then } x \text{ else } 0 && \text{Definition } f \\ &= \text{if } x - 1 = y - 1 \text{ then } x - 1 \text{ else } 0 && \text{Da } x = y \leftrightarrow x - 1 = y - 1 \\ &= f(x-1, y-1) && \text{Definition } f \end{aligned}$$

(g) Die Prozedur p aus Aufgabenteil (b) berechnet die Funktion g, da $g \subseteq f$ ist.

Induktive Korrektheitsbeweise

Aufgabe TH.13 *(Dumbo und seine Freunde)*
Im Folgenden wollen wir zeigen, dass wenn in einer Menge aus Tieren ein Elefant ist, alle Tiere der Menge Elefanten sind. Der folgende Induktionsbeweis ist offensichtlich falsch, da die Aussage nicht gelten kann. Finden Sie den Fehler?
Beweis. Beweis durch natürliche Induktion über die Anzahl $n \in \mathbb{N}$ der Elefanten.

- Sei $n = 1$
  Wenn die Menge aus nur einem Tier besteht und dieses Tier ein Elefant ist, so sind offensichtlich alle Tiere der Menge Elefanten.

- Sei $n \in \mathbb{N}, n > 1$
  Sei jedes Tier in der Menge nummeriert mit einer Zahl $i \in M = \{1, \ldots, n\}$, wobei der Elefant die Nummer 1 erhalte. Wir unterteilen nun M in die Mengen $M_1 = \{1, \ldots, n-1\}$ und $M_2 = \{2, \ldots, n\}$. Da sich der Elefant in M_1 befindet, sind alle Tiere in M_1 Elefanten aufgrund der Induktionsvoraussetzung. Demnach ist auch das $n - 1$te Tier ein Elefant. Da sich das $n - 1$te Tier auch in M_2 befindet, sind nach der Induktionsvoraussetzung auch alle Tiere in M_2 Elefanten, wodurch alle Tiere in M Elefanten sind.

Lösungsvorschlag TH.13
Die Aussage gilt nicht für $n = 2$, da sich hier M_1 und M_2 nicht schneiden.

Aufgabe TH.14 *(Einfach gerade biegen)*
Im Folgenden wollen wir zeigen, dass alle Fibonacci Zahlen gerade sind.
Der folgende Induktionsbeweis ist offensichtlich falsch, da die Aussage nicht gelten kann. Finden Sie den Fehler?
Beweis: Beweis durch natürliche Induktion über $n \in \mathbb{N}$, wobei wir jeweils die n-te Fibonacci Zahl betrachten. Wir bezeichnen die n-te Fibonacci Zahl mit $\mathit{fib}(n)$.
Eine Zahl m ist genau dann gerade, wenn es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $m = 2 \cdot k$ gibt.

- Induktionsanfang: $n = 0$

$$\begin{aligned} \mathit{fib}(0) &= 0 && \text{Definition } \mathit{fib} \\ &= 2 \cdot 0 && \text{Arithmetik} \end{aligned}$$

  Da $0 \in \mathbb{N}$ gilt, ist 0 gerade.

- Sei $n > 0$.
  Induktionsannahme: Sei die Aussage bereits gezeigt für ein $m < n$.

- Dann:

$$\begin{aligned} \mathit{fib}(n) &= \mathit{fib}(n-1) + \mathit{fib}(n-2) && \text{Definition } \mathit{fib} \\ &= 2 \cdot k' + 2 \cdot k'' && \text{Induktion für } m = n-1 \text{ und } m = n-2 \\ &= 2 \cdot (k' + k'') && \text{Distributivgesetz} \end{aligned}$$

  Da $k', k'' \in \mathbb{N}$, ist auch $k = k' + k'' \in \mathbb{N}$, weshalb $\mathit{fib}(n)$ gerade ist.

Lösungsvorschlag TH.14
Da bei der Rekursion von *fib* rekursiv zwei Werte benötigt werden, müssen wir den Induktionsanfang auch für $\mathit{fib}(1)$ beweisen, woran der Beweis aber scheitert.

Aufgabe TH.15 *(Natürliche Induktion)*
Beweisen Sie durch natürliche Induktion:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}_+ : \sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2$

(b) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 : n^2 - 2n - 1 > 0$

Lösungsvorschlag TH.15

(a) **Behauptung:** $\forall n \in \mathbb{N}_+ : \sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2$
Beweis: Durch Induktion über $n \in \mathbb{N}_+$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

- Sei $n = 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 &= \sum_{i=1}^{1} 2i - 1 && n = 1 \\
&= 2 \cdot 1 - 1 && \text{Definition } \Sigma \\
&= 1 && \text{Arithmetik} \\
&= 1^2 && \text{Arithmetik} \\
&= n^2 && n = 1
\end{aligned}$$

- Sei $n > 1$.
  Induktionsannahme: Für alle $m < n$ gilt $\sum_{i=1}^{m} 2i - 1 = m^2$.
  Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 &= 2n - 1 + \sum_{i=1}^{n-1} 2i - 1 && \text{Definition } \Sigma \text{ mit } n > 1 \\
&= 2n + (n-1)^2 - 1 && \text{Induktion für } m = n - 1 \\
&= 2n + (n^2 - 2n + 1) - 1 && \text{Arithmetik} \\
&= n^2 && \text{Arithmetik}
\end{aligned}$$

(b) **Behauptung:** $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$
Beweis: Durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

- Sei $n = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} 2^i &= \sum_{i=0}^{0} 2^i && n = 0 \\
&= 2^0 && \text{Definition } \Sigma \\
&= 1 && \text{Arithmetik} \\
&= 2^1 - 1 && \text{Arithmetik} \\
&= 2^{0+1} - 1 && \text{Arithmetik} \\
&= 2^{n+1} - 1 && n = 0
\end{aligned}$$

- Sei $n > 0$.
  Induktionsannahme: Für alle $m < n$ gilt $\sum_{i=0}^{m} 2^i = 2^{m+1} - 1$.
  Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} 2^i &= 2^n + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i && \text{Definition } \Sigma \text{ mit } n > 0 \\
&= 2^n + 2^{n-1+1} - 1 && \text{Induktion für } m = n - 1 \\
&= 2^n + 2^n - 1 && \text{Arithmetik} \\
&= 2 \cdot 2^n - 1 && \text{Arithmetik} \\
&= 2^{n+1} - 1 && \text{Arithmetik, Definition der Potenz}
\end{aligned}$$

(c) **Behauptung:** $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 : n^2 - 2n - 1 > 0$
Beweis: Durch Induktion über $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

- Sei $n = 3$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
n^2 - 2n - 1 &= 3^2 - 2 \cdot 3 - 1 && n = 3 \\
&= 9 - 6 - 1 && \text{Arithmetik} \\
&= 2 && \text{Arithmetik} \\
&> 0 && \text{Arithmetik}
\end{aligned}$$

- Sei $n > 3$.
  Induktionsannahme: Für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $3 \leq m < n$ gilt $m^2 - 2m - 1 > 0$.
  Dann gilt:

$$\begin{aligned}
n^2 - 2n - 1 &= \left(n^2 - 2n - 1\right) + 1 - 1 + 2n - 2n + 2 - 2 && \text{Arithmetik} \\
&= n^2 - 2n + 1 - 2n + 2 - 1 + 2n - 3 && \text{Arithmetik} \\
&= \left(n^2 - 2n + 1\right) - (2n - 2) - 1 + 2n - 3 && \text{Arithmetik} \\
&= \left((n-1)^2 - 2\,(n-1) - 1\right) + 2n - 3 && \text{Induktion für } m = n - 1 \\
&> 0 + 2n - 3 && n > 3 \\
&> 0 && \text{Arithmetik}
\end{aligned}$$

Aufgabe TH.16 *(Identität)*
Betrachten Sie folgende Prozedur und beweisen Sie die Aussage $\forall n \in \mathbb{N} : p\ n = n$.

$$\begin{aligned}
&p : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\
&p\ 0 = 0 \\
&p\ 1 = 1 \\
&p\ n = 1 + p\ (p\ (n-2) + 1) && \text{für } n > 1
\end{aligned}$$

Lösungsvorschlag TH.16
Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N} : p\ n = n$
Beweis: Durch natürliche Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden drei Fälle.

- Sei $n = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
p\ n &= p\ 0 && n = 0 \\
&= 0 && \text{Definition } p \\
&= n && n = 0
\end{aligned}$$

- Sei $n = 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
p\ n &= p\ 1 && n = 1 \\
&= 1 && \text{Definition } p \\
&= n && n = 1
\end{aligned}$$

- Sei $n > 1$.

  Induktionsannahme: Für alle $m < n$ gilt: $p\ m = m$.

  Dann gilt:

$$\begin{aligned}
p\ n &= 1 + p\ (p\ (n-2) + 1) && \text{Definition } p \\
&= 1 + p\ (n - 2 + 1) && \text{Induktion für } n - 2 \\
&= 1 + p\ (n-1) && \text{Arithmetik} \\
&= 1 + (n-1) && \text{Induktion für } n - 1 \\
&= n && \text{Arithmetik}
\end{aligned}$$

Aufgabe TH.17 *(iter)*
Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch natürliche Induktion:

(a) $\forall x, y \in \mathbb{N} : x \cdot y = \mathit{iter}\,(x, 0, \lambda x \in \mathbb{N}.\ x + y)$

(b) $\forall x, y \in \mathbb{N} : x + y = \mathit{iter}\,(y, x, \lambda x \in \mathbb{N}.\ x + 1)$

Überlegen Sie sich, worüber Sie in jedem Fall Induktion führen sollten. Sie dürfen die Vertauschungseigenschaft von *iter* aus dem Buch verwenden.

Lösungsvorschlag TH.17

(a) **Behauptung:** $\forall x, y \in \mathbb{N} : x \cdot y = \mathit{iter}\,(x, 0, \lambda x \in \mathbb{N}.\ x + y)$
Beweis: Durch Induktion über $x \in \mathbb{N}$. Fallunterscheidung:

- Sei $x = 0$. Sei $y \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt:

$$x \cdot y = 0 \cdot y = 0 \overset{\text{Def. } \mathit{iter}}{=} \mathit{iter}\,(0, 0, f) = \mathit{iter}\,(x, 0, f)$$

- Sei $x > 0$. Sei $y \in \mathbb{N}$ beliebig.

  Induktionsannahme: Für alle $x' < x$ gilt: $\forall y' \in \mathbb{N} : x' \cdot y' = \mathit{iter}\,(x', 0, \lambda x \in \mathbb{N}.\ x + y')$.

  Dann haben wir:

$$\begin{aligned}
x \cdot y &= x \cdot y - y + y && \text{Arithmetik}\\
&= (x-1) \cdot y + y && \text{Arithmetik}\\
&= f\,((x-1) \cdot y) && \text{Definition } f\\
&= f\,(\mathit{iter}\,(x-1, 0, f)) && \text{Induktion für } x' = x-1 \text{ und } y' = y\\
&= \mathit{iter}\,(x, 0, f) && \text{Vertauschungseigenschaft}
\end{aligned}$$

(b) **Behauptung:** $\forall x, y \in \mathbb{N} : x + y = \mathit{iter}\,(y, x, \lambda x \in \mathbb{N}.\ x + 1)$
Beweis: Sei $x \in \mathbb{N}$ beliebig. Beweis durch Induktion über $y \in \mathbb{N}$. Fallunterscheidung:

- Sei $y = 0$. Dann gilt:

$$x + y = x + 0 = x \overset{\text{Def. } \mathit{iter}}{=} \mathit{iter}\,(0, x, f) = \mathit{iter}\,(y, x, f)$$

- Sei $y > 0$.

  Induktionsannahme: Für alle $y' < y$ gilt: $x + y' = \mathit{iter}\,(y', x, \lambda x \in \mathbb{N}.\ x + 1)$.

  Dann haben wir:

$$\begin{aligned}
x + y &= x + y - 1 + 1 && \text{Arithmetik}\\
&= x + (y-1) + 1 && \text{Arithmetik}\\
&= f\,(x + (y-1)) && \text{Definition } f\\
&= f\,(\mathit{iter}\,(y-1, x, f) && \text{Induktion für } y' = y-1\\
&= \mathit{iter}\,(y, x, f) && \text{Vertauschungseigenschaft}
\end{aligned}$$

Aufgabe TH.18 *(Bernoullische Ungleichung)*
In der Mathematik gibt es eine wichtige Ungleichung, mit der sich die Potenzfunktion nach unten abschätzen lässt. Beweisen Sie:
Für jede nicht negative Zahl $x \geq 0$ gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} :\ (1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Lösungsvorschlag TH.18
Behauptung: $\forall n \in \mathbb{N} : \forall x \geq 0 \in \mathbb{R} : (1+x)^n \geq 1 + nx$
Beweis: Durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

- Sei $n = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (1+x)^0 &= 1 && \text{Mathe} \\ &\geq 1 && \text{Mathe} \\ &= 1 + 0 \cdot x && \text{Mathe} \end{aligned}$$

- Sei $n \geq 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= (1+x) \cdot (1+x)^{n-1} && \text{Mathe} \\ &\geq (1+x) \cdot (1 + (n-1) \cdot x) && \text{Induktion über } n-1 \\ &= (1+x) \cdot (1 + (nx - x)) && \text{Mathe} \\ &= (1+x) \cdot (1 + nx - x) && \text{Mathe} \\ &= 1 + nx - x + x + nx^2 - x^2 && \text{Mathe} \\ &= -x^2 + nx^2 + nx + 1 && \text{Mathe, umformen} \\ &= x^2(-1+n) + nx + 1 && \text{Mathe, umformen} \\ &\geq nx + 1 && \text{da } n \text{ immer} \geq 1 \text{ und } x \geq 0 \end{aligned}$$

■

Aufgabe TH.19 *(Induktiooon)*
Zeigen Sie für die folgenden Prozeduren jeweils mittels Induktion, dass p die Funktion f berechnet, also dass $\forall z \in Dom f : \; p\ z = f\ z$ gilt.

(a) $p : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$
$p\ (0, y) = y$
$p\ (x, y) = 1 + p(x-1, y)$ für $x > 0$
$f = \lambda(x, y) \in \mathbb{N}^2.\ x + y$

(b) $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$p\ 0 = 3$
$p\ x = 1 + p(x-1)$ für $x > 0$
$f = \lambda n \in \mathbb{N}.\ n + 3$

Lösungsvorschlag TH.19

(a) Sei $y \in \mathbb{N}$. **Behauptung:** $\forall x \in \mathbb{N} : \; p\ (x, y) = f\ (x, y)$
Beweis: Durch Induktion über $x \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

- Sei $x = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} p(x,y) &= p(0,y) && x = 0 \\ &= y && \text{Definition } p \\ &= 0 + y && \text{Mathe} \\ &= x + y && x = 0 \\ &= f(x,y) && \text{Definition } f \end{aligned}$$

- Sei $x > 0$. Induktionsannahme: Für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m < x$ gilt $p\ (m, y) = f\ (m, y)$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} p(x,y) &= 1 + p(x-1, y) && \text{Definition } p \\ &= 1 + ((x-1) + y) && \text{Induktion für } m = x - 1 \\ &= x + y && \text{Assoziativität, Kommutativität} \\ &= f(x,y) && \text{Definition } f \end{aligned}$$

■

(b) **Behauptung:** $\forall x \in \mathbb{N}: \; p\ x = f\ x$
Beweis: Durch Induktion über $x \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

- Sei $x = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} p\ x &= p\ 0 && x = 0 \\ &= 3 && \text{Definition } p \\ &= 0 + 3 && \text{Mathe} \\ &= x + 3 && x = 0 \\ &= f\ x && \text{Definition } f \end{aligned}$$

- Sei $x > 0$. Induktionsannahme: Für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m < x$ gilt $p\ m = fm$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} p\ x &= 1 + p\ (x-1) && \text{Definition } p \\ &= 1 + ((x-1) + 3) && \text{Induktion für } m = x - 1 \\ &= x + 3 && \text{Assoziativität, Kommutativität} \\ &= f\ x && \text{Definition } f \end{aligned}$$

■

Aufgabe TH.20
Zeigen Sie, dass *iter* (siehe S.201) und die unten definierte Prozedur *iter′* semantisch äquivalent sind.

$$\begin{aligned} &\mathit{iter}' : \mathbb{N} \times X \times (X \to X) \to X \\ &\mathit{iter}'\ (0, x, f) = x \\ &\mathit{iter}'\ (n, x, f) = f\ (\mathit{iter}'\ (n-1, x, f)) && \text{für } n > 0 \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag TH.20

Beweis. Zwei Prozeduren sind semantisch äquivalent, wenn sie denselben Argumentbereich und dieselbe Ergebnisfunktion haben.

Der Argumentbereich von *iter′* und *iter* ist bei beiden $\mathbb{N} \times X \times (X \to X)$. Es bleibt zu zeigen, dass *iter′* und *iter* die gleiche Ergebnisfunktion besitzen. Dazu müssen beide Prozeduren den gleichen Definitionsbereich haben und für jedes x aus dem Definitionsbereich, muss $\mathit{iter}'\ x$ den gleichen Wert liefern wie $\mathit{iter}\ x$.

Für eine beliebige Menge X ist die Funktion $\lambda(n, x, f) \in \mathbb{N} \times X \times (X \to X)$. n eine natürliche Terminierungsfunktion für *iter′* und *iter*. Daher ist $\mathit{Dom}\ \mathit{iter}' = \mathit{Dom}\ \mathit{iter} = \mathbb{N} \times X \times (X \to X)$. Es bleibt folgende Aussage zu zeigen:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in X : \forall f \in X \to X : \mathit{iter}\ (n, x, f) = \mathit{iter}'\ (n, x, f)$$

Beweis durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Fall $n = 0$. Seien $x \in X$ und $f \in X \to X$ beliebig. Dann gilt $\mathit{iter}\ (0, x, f) = x = \mathit{iter}'\ (0, x, f)$ gemäß der Definitionen von *iter* und *iter′*.
- Fall $n > 0$. Seien $x \in X$ und $f \in X \to X$ beliebig.

  Induktionsannahme (IA): Für alle $m < n$ gilt, dass $\forall x \in X : \forall f \in X \to X : \mathit{iter}\ (m, x, f) = \mathit{iter}'\ (m, x, f)$.

  Damit zeigen wir

$$\begin{aligned} \mathit{iter}\ (n, x, f) &= f\ (\mathit{iter}\ (n-1, x, f)) && \text{Proposition 10.1 für } n-1,\ x \text{ und } f \\ &= f\ (\mathit{iter}'\ (n-1, x, f)) && \text{IA für } m = n-1,\ x \text{ und } f \\ &= \mathit{iter}'\ (n, x, f) && \text{Definition von } \mathit{iter}' \end{aligned}$$

■