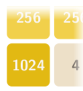
Programmierung 2 (SS 2021)
Universität des Saarlandes
Fakultät MI
Compiler Design Lab

Musterlösung 1
Arithmetik

Prof. Dr. Sebastian Hack
Julian Rosemann, B. Sc.
Thorsten Klößner, M. Sc.
Julia Wichlacz, M. Sc.
Maximilian Fickert, M. Sc.

Im Vorlesungskalender finden Sie Informationen über die Kapitel des Skripts, die parallel zur Vorlesung bearbeitet werden sollen bzw. dort besprochen werden. Die Übungsaufgaben dienen der Vertiefung des Wissens, das in der Vorlesung vermittelt wird und als Vorbereitung auf Minitests und Klausur.
Weitere Aufgaben zu den Themen finden Sie jeweils am Ende der Skriptkapitel.
Die Schwierigkeitsgrade sind durch Tic-Tac-Toe Spiele gekennzeichnet, von einem Stein „leicht“ bis drei Steine „schwer“. Vier Steine stehen für Knobelaufgaben.

Aufgabe 1.0: Verschiedene Zahlensysteme



Rechnen Sie die folgenden Zahlen in das angegebene System um.

1. $\langle 43\rangle_{10}$ ins 7er-System
2. $\langle 212\rangle_3$ ins 9er-System
3. $\langle 313\rangle_4$ ins 6er-System
4. $\langle 3142\rangle_5$ ins 3er-System
5. $\langle 2013\rangle_4$ ins 7er-System
6. $\langle 1534\rangle_6$ ins 4er-System
7. $\langle 621\rangle_{11}$ ins 5er-System
8. $\langle 2601\rangle_7$ ins 3er-System

Lösung

1. $\langle 43\rangle_{10} = 6\times 7 + 1\times 1 = \langle 61\rangle_7$
2. $\langle 212\rangle_3 = 2\times 9 + 1\times 3 + 2\times 1 = \langle 23\rangle_{10} = 2\times 9 + 5\times 1 = \langle 25\rangle_9$
3. $\langle 313\rangle_4 = 3\times 16 + 1\times 4 + 3\times 1 = \langle 55\rangle_{10} = 1\times 36 + 3\times 6 + 1\times 1 = \langle 131\rangle_6$
4. $\langle 3142\rangle_5 = 3\times125+1\times25+4\times5+2\times1 = \langle 422\rangle_{10} = 1\times243+2\times81+0\times27+1\times9+2\times3+2\times1 = \langle 120122\rangle_3$
5. $\langle 2013\rangle_4 = 2\times 64 + 0\times 16 + 1\times 4 + 3\times 1 = \langle 135\rangle_{10} = 2\times 49 + 5\times 7 + 2\times 1 = \langle 252\rangle_7$
6. $\langle 1534\rangle_6 = 1\times216+5\times36+3\times6+4\times1 = \langle 418\rangle_{10} = 1\times256+2\times64+2\times16+0\times+4+2\times1 = \langle 12202\rangle_4$
7. $\langle 621\rangle_{11} = 6\times 121 + 2\times 11 + 1\times 1 = \langle 749\rangle_{10} = 1\times 625 + 0\times 125 + 4\times 25 + 4\times 5 + 4\times 1 = \langle 10444\rangle_5$
8. $\langle 2601\rangle_7 = 2\times343+6\times49+0\times7+1\times1 = \langle 981\rangle_{10} = 1\times729+1\times243+0\times81+0\times27+1\times9+0\times3+0\times1 = \langle 1100100\rangle_3$

Umrechnung mit Horner-Schema vom Dezimalsystem:

1. $43 : 7 = 6 \; R \; 1$
   $6 : 7 = 0 \; R \; 6$
2. $23 : 9 = 2 \; R \; 5$
   $2 : 9 = 0 \; R \; 2$
3. $55 : 6 = 9 \; R \; 1$
   $9 : 6 = 1 \; R \; 3$
   $1 : 6 = 0 \; R \; 1$
4. $422 : 3 = 140 \; R \; 2$
   $140 : 3 = 46 \; R \; 2$
   $46 : 3 = 15 \; R \; 1$
   $15 : 3 = 5 \; R \; 0$
   $5 : 3 = 1 \; R \; 2$
   $1 : 3 = 0 \; R \; 1$
5. $135 : 7 = 19 \; R \; 2$
   $19 : 7 = 2 \; R \; 5$
   $2 : 7 = 0 \; R \; 2$
6. $418 : 4 = 104 \; R \; 2$
   $104 : 4 = 26 \; R \; 0$
   $26 : 4 = 6 \; R \; 2$
   $6 : 4 = 1 \; R \; 2$
   $1 : 4 = 0 \; R \; 1$
7. $749 : 5 = 149 \; R \; 4$
   $149 : 5 = 29 \; R \; 4$
   $29 : 5 = 5 \; R \; 4$
   $5 : 5 = 1 \; R \; 0$
   $1 : 5 = 0 \; R \; 1$
8. $981 : 3 = 327 \; R \; 0$
   $327 : 3 = 109 \; R \; 0$
   $109 : 3 = 36 \; R \; 1$
   $36 : 3 = 12 \; R \; 0$
   $12 : 3 = 4 \; R \; 0$
   $4 : 3 = 1 \; R \; 1$
   $1 : 3 = 0 \; R \; 1$

Aufgabe 1.1: Einige Stellenwertsysteme

Wir betrachten folgende Stellenwertsysteme:

Name	**Basis**	**Präfix**	**Ziffern**
Binärsystem	2	0b	0,1
Oktalsystem	8	0	0,...,7
Hexadezimalsystem	16	0x	0,...,9,A,B,C,D,E,F

Die Ziffern sind in aufsteigender Reihenfolge ihrer Wertigkeit angegeben, z.B. hat die Ziffer F im Hexadezimalsystem die Wertigkeit 15.
Der Inhalt der Spalte Präfix wird einer Zahl vorangestellt um anzuzeigen, dass sie im jeweiligen Stellenwertsystem kodiert ist. So ist z.b. 013 eine Oktalzahl, 0x13 eine Hexadezimalzahl, und 13 eine Dezimalzahl.

1. Geben Sie die folgenden Dezimalzahlen in jedem der drei Stellenwertsysteme an. Rechnen Sie unbedingt von Hand!

   $$5 \quad 16 \quad 49 \quad 81 \quad 257 \quad 317 \quad 1721 \quad 4096$$

2. Wie sind sie beim Umrechnen vorgegangen? Notieren Sie ihre Vorgehensweise als Anleitung für einen anderen Studenten!

3. Wir nehmen an, wir verfügen über eine Funktion $\mathit{ziff} : [0, 15] \rightarrow \{0, \ldots, 9, A, \ldots, F\}$ die zu einer Dezimalzahl im Intervall $[0, 15]$ die entsprechende Ziffer liefert. Vervollständigen Sie folgende rekursive Definition einer Funktion $\rangle\cdot\langle_b : \mathbb{N} \rightarrow \{0, \ldots, 9, A, \ldots, F\}^*$ die zu einer natürlichen Zahl die Darstellung in Basis b liefert. Beispielsweise soll $\rangle 257 \langle_8 = 401$ gelten.

   $$\rangle n \langle_b = \begin{cases} & \text{wenn} \\ & \text{sonst} \end{cases}$$

Lösung

1. Tabelle:

10	2	8	16
5	0b101	05	0x5
16	0b10000	020	0x10
49	0b110001	061	0x31
81	0b1010001	0121	0x51
257	0b100000001	0401	0x101
317	0b100111101	0475	0x13D
1721	0b11010111001	03271	0x6B9
4096	0b1000000000000	010000	0x1000

2. Umwandlung einer Zahl n in die Basis b am Beispiel $\langle 401 \rangle_8 = 257$

   (a) Notieren aller $b^k < n$

8^2	8^1	8^0

   (b) Beginnend von links größtmögliches a bestimmen mit $a * b^k < n$.
   n' neu bestimmen mit $n' = n - (a * b^k)$
   Hier: $n' = 1$

8^2	8^1	8^0
4		

(c) Von links nach rechts vorherigen Schritt wiederholen:

8^2	8^1	8^0
4	0	1

3. Idee: Umkehrung des Baumbeispiels (Skript). In jedem Rekursionsschritt bis $n < b$ ist: $n \mod b$ ergibt, das wievielte Kind der gerade betrachtete Knoten im Teilbaum ist. $\frac{n}{b}$ als Argument führt dazu, dass im nächsten Schritt die Ebene oberhalb der jetzigen betrachtet wird

$$\rangle n \langle_b = \begin{cases} \rangle \lfloor \frac{n}{b} \rfloor \langle_b \cdot \mathit{ziff}(n \bmod b) & \text{wenn } n \geq b \\ \mathit{ziff}(n) & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 1.2: Umrechnen!

Füllen Sie die folgende Tabelle aus.

Binärsystem $\langle\cdot\rangle_2$	Oktalsystem $\langle\cdot\rangle_8$	Dezimalsystem $\langle\cdot\rangle_{10}$	Hexadezimalsystem $\langle\cdot\rangle_{16}$
			$\langle 21\rangle_{16}$
$\langle 1101\rangle_2$			
	$\langle 103\rangle_8$		
$\langle 1011\rangle_2$			
			$\langle 2D\rangle_{16}$
	$\langle 417\rangle_8$		
			$\langle 17\rangle_{16}$
$\langle 111101\rangle_2$			
	$\langle 315\rangle_8$		

Lösung

Binärsystem $\langle\cdot\rangle_2$	Oktalsystem $\langle\cdot\rangle_8$	Dezimalsystem $\langle\cdot\rangle_{10}$	Hexadezimalsystem $\langle\cdot\rangle_{16}$
$\langle 100001\rangle_2$	$\langle 41\rangle_8$	$\langle 33\rangle_{10}$	$\langle 21\rangle_{16}$
$\langle 1101\rangle_2$	$\langle 15\rangle_8$	$\langle 13\rangle_{10}$	$\langle D\rangle_{16}$
$\langle 1000011\rangle_2$	$\langle 103\rangle_8$	$\langle 67\rangle_{10}$	$\langle 43\rangle_{16}$
$\langle 1011\rangle_2$	$\langle 13\rangle_8$	$\langle 11\rangle_{10}$	$\langle B\rangle_{16}$
$\langle 101101\rangle_2$	$\langle 55\rangle_8$	$\langle 45\rangle_{10}$	$\langle 2D\rangle_{16}$
$\langle 100001111\rangle_2$	$\langle 417\rangle_8$	$\langle 271\rangle_{10}$	$\langle 10F\rangle_{16}$
$\langle 10111\rangle_2$	$\langle 27\rangle_8$	$\langle 23\rangle_{10}$	$\langle 17\rangle_{16}$
$\langle 111101\rangle_2$	$\langle 75\rangle_8$	$\langle 61\rangle_{10}$	$\langle 3D\rangle_{16}$
$\langle 11001101\rangle_2$	$\langle 315\rangle_8$	$\langle 205\rangle_{10}$	$\langle CD\rangle_{16}$

Aufgabe 1.3: Vorzeichenlose Arithmetik

1. Geben Sie die Dezimaldarstellung der folgenden Binärzahlen (wir schreiben $\langle\cdot\rangle$ statt $\langle\cdot\rangle_2$) an:
   (a) $\langle 11\rangle$
   (b) $\langle 011\rangle$
   (c) $\langle 1001\rangle$
   (d) $\langle 1111\rangle$
   (e) $\langle 101111\rangle$
2. Berechnen Sie, geben Sie das Ergebnis im Binärssystem:
   (a) $\langle 1011\rangle + \langle 1101\rangle$
   (b) $\langle 11\rangle + \langle 1101\rangle$
   (c) $\langle 10111\rangle + \langle 1101\rangle$
   (d) $\langle 1011 + 1101\rangle$

Lösung

1. (a) $\langle 11\rangle = 3$
   (b) $\langle 011\rangle = 3$
   (c) $\langle 1001\rangle = 9$
   (d) $\langle 1111\rangle = 15$
   (e) $\langle 101111\rangle = 47$
2. Berechne:
   (a) $\langle 1011\rangle + \langle 1101\rangle = 11 + 13 = 24 = \langle 11000\rangle$
   (b) $\langle 11\rangle + \langle 1101\rangle = 3 + 13 = 16 = \langle 10000\rangle$
   (c) $\langle 10111\rangle + \langle 1101\rangle = 23 + 13 = 36 = \langle 100100\rangle$
   (d) $\langle 1011 + 1101\rangle = \langle 11000\rangle = 24 = \langle 11000\rangle$

Aufgabe 1.4: and, or, xor

- Zeigen Sie mittels Wertetabelle, dass ˆ und | assoziativ sind.
- Welche der drei Operationen distribuieren miteinander? Sprich, für welche $\circ, \circ' \in \{\&, |, \hat{}\,\}$ gilt $a \circ (b \circ' c) = (a \circ b) \circ' (a \circ c)$.

Lösung

1.

a	b	c	$(b \mathbin{\hat{}} c)$	$a \mathbin{\hat{}} (b \mathbin{\hat{}} c)$	$(a \mathbin{\hat{}} b)$	$(a \mathbin{\hat{}} b) \mathbin{\hat{}} c$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	1

a	b	c	$(b \mid c)$	$a \mid (b \mid c)$	$(a \mid b)$	$(a \mid b) \mid c$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

2. | mit &, & mit |, & mit ˆ

Aufgabe 1.5: Arithmetikbeweise

Beweisen Sie:

1. Sei x eine Ziffernfolge der Länge n und y eine Ziffernfolge der Länge m.
   Zeigen Sie , dass $\langle x \cdot y \rangle_\beta = \langle x \rangle_\beta \times \beta^m + \langle y \rangle_\beta$ gilt.
2. Zeigen Sie, dass für alle $n > 0$: $\langle \mathrm{Z}^n \rangle + 1 = \beta^n$
3. Sei x eine Ziffernfolge der Länge n. Zeigen Sie, dass $\langle x \rangle_\beta < \beta^n$ gilt.

Lösung

1.

$$\begin{aligned}
\langle x \cdot y \rangle_\beta &= \sum_{i=0}^{n-1} x_i \beta^{m+i} + \sum_{i=0}^{m-1} y_i \beta^i \\
&= \beta^m \times \sum_{i=0}^{n-1} x_i \beta^i + \sum_{i=0}^{m-1} y_i \beta^i \\
&= \beta^m \times \langle x \rangle + \langle y \rangle \quad \square
\end{aligned}$$

2.

$$
\begin{aligned}
\langle \mathsf{Z}^n \rangle + 1 &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathsf{Z}\beta^i + 1 \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (\beta - 1)\beta^i + 1 \qquad |\alpha = \beta - 1 \\
&= (\beta - 1)\beta^{n-1} + (\beta - 1)\beta^{n-2} + \dots + (\beta - 1)\beta + (\beta - 1) + 1 \qquad |\text{Klammern auflösen} \\
&= \beta^n - \underbrace{\beta^{n-1} + \beta^{n-1}}_{0} + \dots \underbrace{-\beta + \beta}_{0} \underbrace{-1 + 1}_{0} \\
&= \beta^n \quad \square
\end{aligned}
$$

3. Durch Induktion:

$n = 1$**:** $x \leq \mathsf{Z} = \beta - 1 < \beta^1$.

$n \to n + 1$: Induktionsannahme: $\langle x_{n-1} \cdots x_0 \rangle < \beta^n$

$$
\begin{aligned}
x_n \cdots x_0 &= x_n \times \beta^n + \langle x_{n-1} \cdots x_0 \rangle \\
&< x_n \times \beta^n + \beta^n \qquad |Induktionsannahme \\
&\leq (\beta - 1) \times \beta^n + \beta^n \qquad |x_n \leq \beta - 1 \\
&= \beta^{n+1} - \beta^n + \beta^n \\
&= \beta^{n+1} \quad \square
\end{aligned}
$$