SAARLAND UNIVERSITY
COMPUTER SCIENCE

Prof. Dr. Jan Reineke
Dr. Andreas Abel
Lucas Biehl

Systemarchitektur SS 2021

Präsenzblatt 3 (Lösungsvorschläge)

Hinweis: **Dieses Aufgabenblatt wurde von Tutoren erstellt. Die Aufgaben sind für die Klausur weder relevant noch irrelevant, die Lösungsvorschlage weder korrekt noch inkorrekt.**

Aufgabe 3.1: Logische Funktionen

Realisieren Sie die folgenden Booleschen Ausdrücke unter Verwendung der bekannten Gatter.

1. $(\neg x + y) \cdot z$
2. $x + x \cdot (z + y \cdot (\neg x))$
3. $(x \cdot (\neg y)) + (x \oplus z)$
4. $x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z$
5. $(\neg(x \cdot y + x \oplus z)) \cdot \neg(y + z)$

Tipp: Einige Ausdrücke können vorher vereinfacht werden.

Lösungsvorschlag:

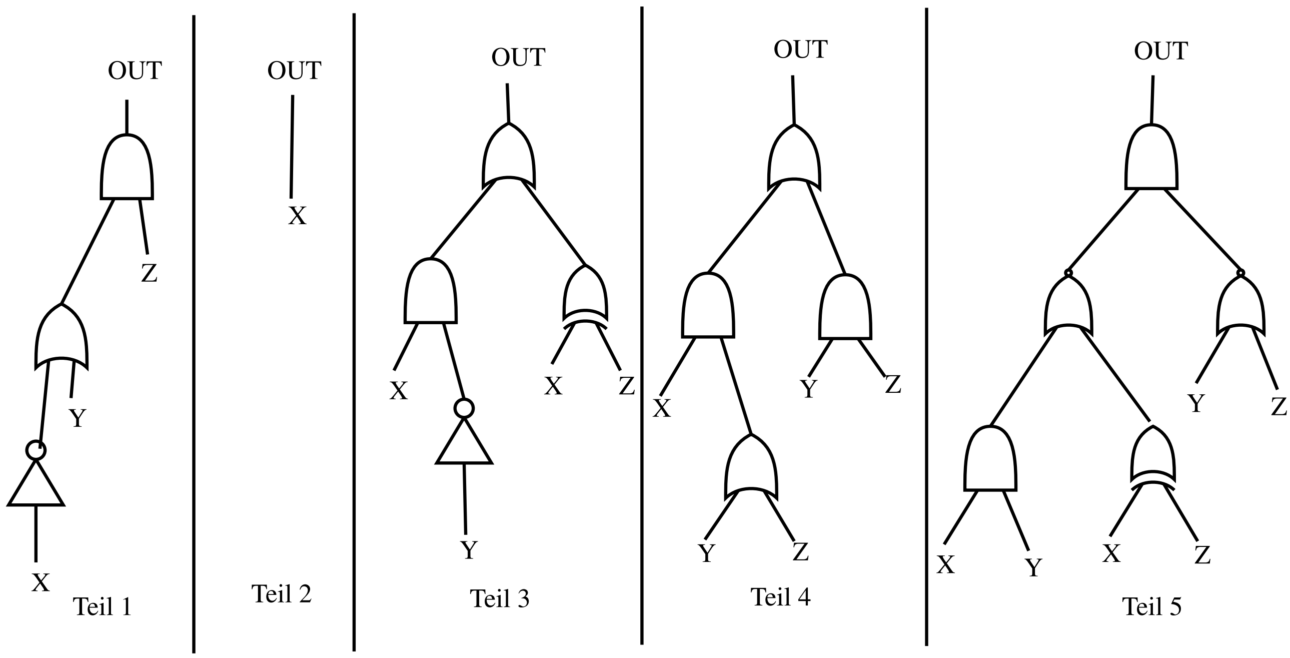

Abbildung 1: Aufgabe 2.2

Aufgabe 3.2: CMOS-Technologie

1. Realisieren Sie folgende Gatter mit den Eingängen X_0 und X_1 und dem Ausgang Y in CMOS.
   a) NOT-Gatter
   b) NOR-Gatter
   c) AND-Gatter
2. Realisieren Sie die Funktion $Y = \neg(X_0 + X_1) \cdot X_2$ in CMOS-Technologie.

Lösungsvorschlag:

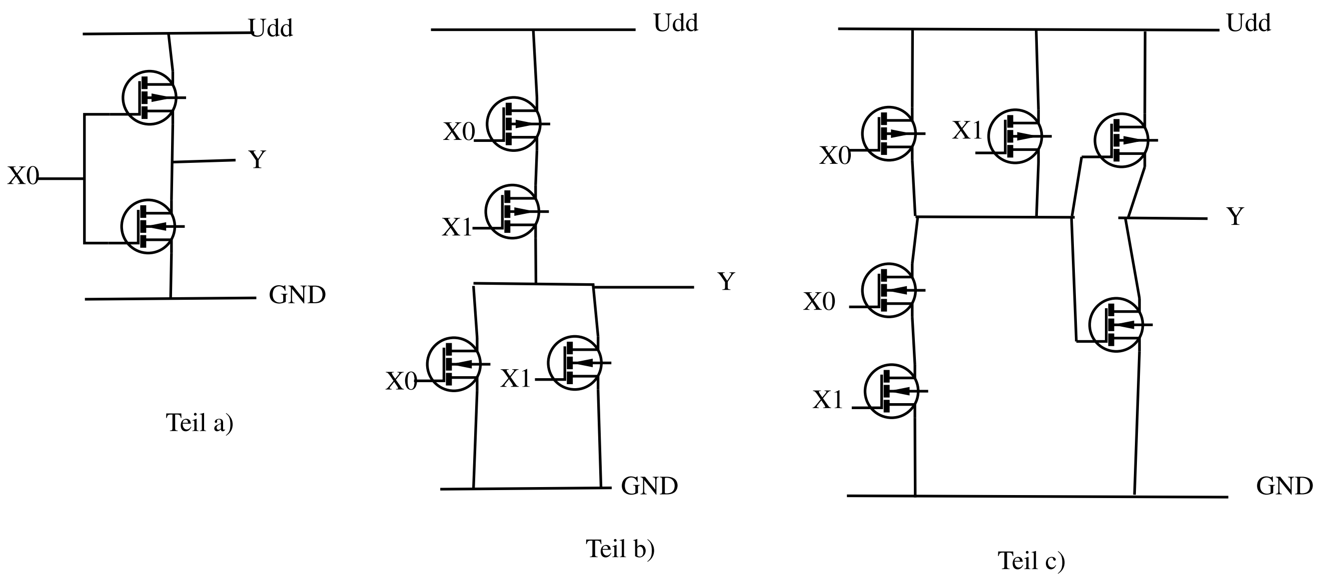

Abbildung 2: Aufgabe 2.3.1

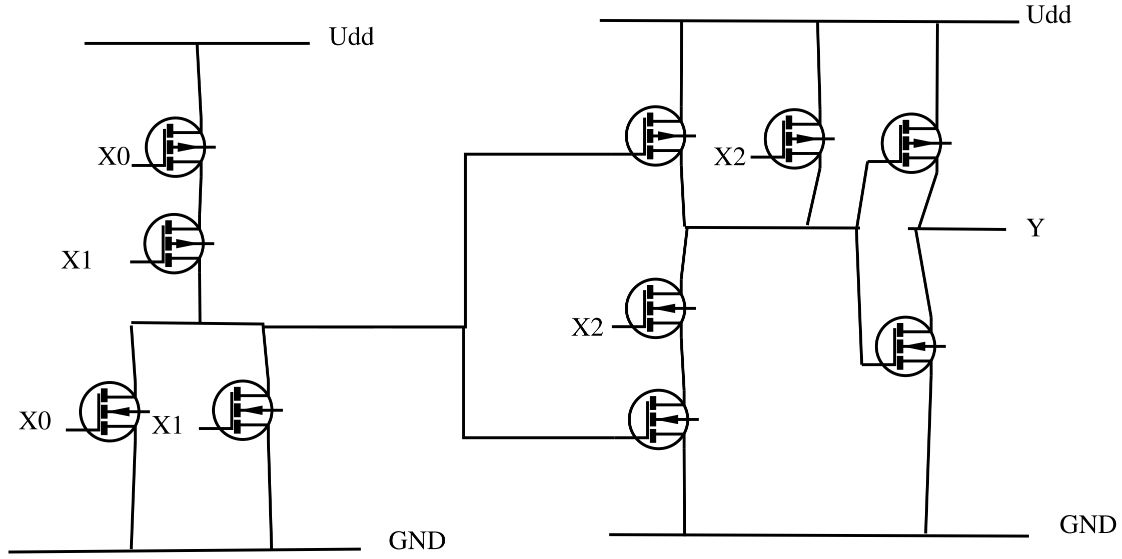

Abbildung 3: Aufgabe 2.3.2

Aufgabe 3.3: Binärzahlen

Gegeben sei die 8-stellige Binärzahl

$$x = 1101\ 1001.$$

Interpretieren Sie x als

1. Zahl in Betrag-Vorzeichen-Darstellung,
2. Zahl in Einer-Komplement-Darstellung,
3. Zahl in Zweier-Komplement-Darstellung,
4. Festkommazahl mit 3 Nachkommastellen,
5. Festkommazahl in Zweier-Komplement-Darstellung mit 5 Nachkommastellen.

Lösungsvorschlag:

1. $(-1)^1 \cdot (2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^0) = -89$
2. $2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^0 - (2^7 - 1) = -38$
3. $-38 - 1 = -39$
4. $2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 + 2^{-3} = 27.125$
5. $-2^2 + 2^1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-5} = -1.21875$

Aufgabe 3.4: Minimalpolynome (Wdh. letztes Blatt)

1. Betrachten Sie die folgende Primimplikantentafel einer Booleschen Funktion $f(w, x, y, z)$:

	0010	0011	0100	0101	0111	1010	1011	1110	1111
$\bar{w}x\bar{y}$			×	×					
$\bar{w}xz$									
wy									
$\bar{x}y$									
yz									

   Die Tabelle ist bzgl. der Implikanten und der Minterme vollständig, sodass f eindeutig bestimmt ist. Finden Sie ein Minimalpolynom, indem Sie die Tabelle ergänzen und die Reduktionsregeln anwenden. Ist Ihre Lösung auch eindeutig? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Bei der Suche nach Minimalpolynomen kann es auch zu Fällen kommen, in denen keine der drei Reduktionsregeln mehr angewendet werden kann. Betrachten Sie hierzu die folgende Primimplikantentafel, in der die Primimplikanten vereinfachend als Buchstaben und die Minterme als Zahlen gegeben sind.

	0	1	2	3
a		×	×	
b	×			×
c			×	×
d	×		×	
e	×	×		
f		×		×

   Verwenden Sie die Methode von *Petrick* um *alle* Minimalpolynome zu bestimmen. Bilden Sie hierzu einen passenden Ausdruck in KNF und multiplizieren Sie diesen geschickt aus. Gehen Sie davon aus, dass alle Primimplikanten die gleichen Kosten haben.

Lösungsvorschlag:

1.

	0010	0011	0100	0101	0111	1010	1011	1110	1111
$\bar{w}x\bar{y}$			×	×					
$\bar{w}xz$				×	×				
wy						×	×	×	×
$\bar{x}y$	×	×				×	×		
yz		×			×		×		×

Wir wenden nun die erste Reduktionsregel an. Die Primimplikanten $\bar{w}x\bar{y}$, wy und $\bar{x}y$ sind essentiell für die Minterme 0100, 1110 bzw. 0010.

	0111
$\bar{w}xz$	×
yz	×

Nach der dritten Reduktionsregel wählen wir nun den (eindeutig) billigeren Primimplikanten und erhalten das Minimalpolynom

$$\bar{w}x\bar{y} \vee wy \vee \bar{x}y \vee yz$$

Da alle anderen gewählten Primimplikanten essentiell waren, ist diese Lösung auch eindeutig.

2. Wir erhalten folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
&(b+d+e)(a+e+f)(a+c+d)(b+c+f)\\
=&((a+c+d)(a+e+f))((b+c+f)(b+d+e))\\
=&(\mathbf{a}+ac+ad+ae+\mathbf{ce}+de+af+cf+\mathbf{df})(\mathbf{b}+bc+bd+bf+be+cd+\mathbf{ce}+\mathbf{df}+ef)\\
=&ab+ce+df+\dots
\end{aligned}$$

Es gibt daher drei mögliche Lösungen für das Minimalpolynom. Sie lauten: $a+b, c+e$ und $d+f$.

Aufgabe 3.5: Ringsummen-Normalform (Bonus)

Für den Verlauf dieser Aufgabe fü+gen wir unserer Definition der Booleschen Ausdrücke einen Operator $\oplus$ (Exklusiv-Oder) hinzu. Semantisch kann der Operator folgendermaßen interpretiert werden:

$$\Psi((g \oplus h)) = (\Psi(g) + \Psi(h)) \cdot (\sim (\Psi(g) \cdot \Psi(h))).$$

Ein Ausdruck $(g \oplus h)$ evaluiert also genau dann zu 1, wenn genau einer der Ausdrücke g und h zu 1 evaluiert.

1. Betrachten Sie die kDNF e aus Aufgabe 2.1. Beschreibt e immernoch die Funktion f, wenn Sie jedes Auftreten von $+$ durch $\oplus$ ersetzen? Begründen Sie Ihre Antwort.
   Wie würde Ihre Antwort lauten, wenn e nicht vollständig wäre?

2. Können Sie die Boolesche Negation nur mit Konstanten und $\oplus$ darstellen? Wenn ja, wie?

3. Geben Sie eine Vorschrift an, mit der man für eine beliebige Boolesche Funktion f einen die Funktion beschreibenden Booleschen Ausdruck, der nur Konstanten 0 und 1, positive Literale, $\oplus$ und $\cdot$ benutzt, konstruieren kann. Geben Sie einen solchen Ausdruck für die Funktion aus Aufgabe 2.1 an.

   Bemerkung: Mulipliziert man einen solchen Ausdruck aus, so erhält man eine Exklusiv-Oder-Verknüpfung paarweise verschiedener Monome, die nur aus positiven Literalen bestehen. Dies ist die sogenannte *kanonische Ringsummendarstellung*.

Lösungsvorschlag:

1. Da die einzelnen Monome vollständig sind, wertet jedes der Monome auf genau einer Eingabe zu 1 aus. Insbesondere gilt: Evaluiert die kDNF auf einer Variablenbelegung zu 1, so wertet genau eines der vollständigen Monome zu 1 aus. Deshalb kann $+$ durch $\oplus$ ersetzt werden.
   Ist e nicht vollständig, so gilt die Aussage nicht. Betrachte dazu z.B. die DNF $(x_1 + (x_1 \cdot x_2))$. Auf der Belegung $x_1 \mapsto 1, x_2 \mapsto 1$ werten beide Monome zu 1 aus und daher wertet das ganze Polynom zu 1 aus. Der Ausdruck $(x_1 \oplus (x_1 \cdot x_2))$ wertet unter dieser Belegung jedoch zu 0 aus.

2. Es gilt für einen beliebigen Booleschen Ausdruck $g \in BE(X_n)$:
$$(\sim g) \equiv (g \oplus 1)$$

3. Man bildet zunächst einen Booleschen Ausdruck in kDNF, der f beschreibt. Anschließend ersetzt man jedes $+$ durch ein $\oplus$ und jedes negative Literal $\overline{x_i}$ durch $(x_i \oplus 1)$. Der entstehende Ausdruck nutzt nur positive Literale, 1 sowie $\oplus$ und $\cdot$.
   Eine Anwendung dieses Vorgehens auf die Funktion aus Aufgabe 2.1 liefert:
$$((x \oplus 1) \cdot (y \oplus 1) \cdot z) \oplus ((x \oplus 1) \cdot y \cdot (z \oplus 1)) \oplus ((x \oplus 1) \cdot y \cdot z) \oplus (x \cdot y \cdot z)$$
   Man kann leicht zeigen, dass $\oplus$ unter $\cdot$ distributiert. Durch Ausmultiplizieren erhält man daher den äquivalenten Ausdruck
$$(x \cdot z) \oplus (y \cdot z) \oplus (x \cdot y) \oplus z \oplus y.$$

Prof. Dr. Jan Reineke
Dr. Andreas Abel
Lucas Biehl

System Architecture SS 2021

Tutorial Sheet 3 (Suggested Solutions)

***Note:* This task sheet was created by tutors. The tasks are neither relevant nor irrelevant for the exam, the suggested solutions are neither correct nor incorrect.**

Problem 3.1: Logic Functions

Implement the following boolean expressions using the logical Gates discussed in the lecture.

1. $(\neg x + y) \cdot z$
2. $x + x \cdot (z + y \cdot (\neg x))$
3. $(x \cdot (\neg y)) + (x \oplus z)$
4. $x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z$
5. $(\neg(x \cdot y + x \oplus z)) \cdot \neg(y + z)$

Tip: some expressions can be reduced.

Suggested solution:

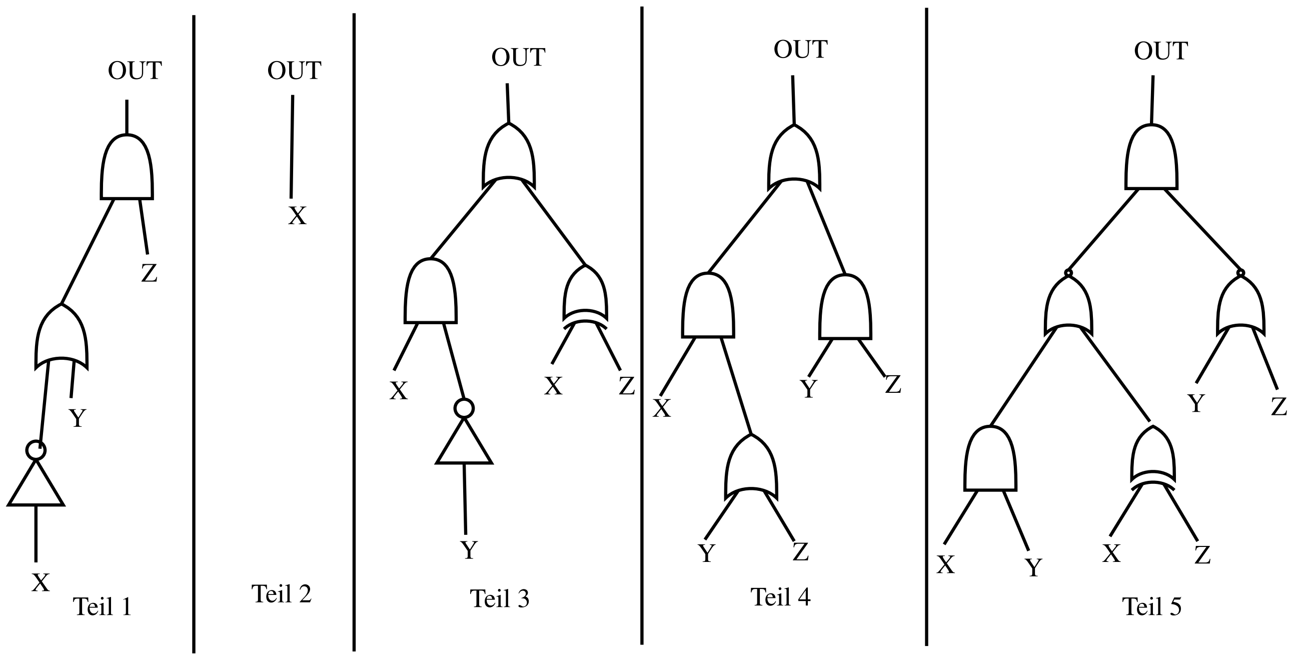

Abbildung 4: Aufgabe 2.2

Problem 3.2: CMOS Technology

1. Realize the following gates with inputs X_0 and X_1 and output Y in CMOS.
   a) NOT gate
   b) NOR gate
   c) AND gate
2. Realize the function $Y = \neg(X_0 + X_1) \cdot X_2$ in CMOS technology.

Suggested solution:

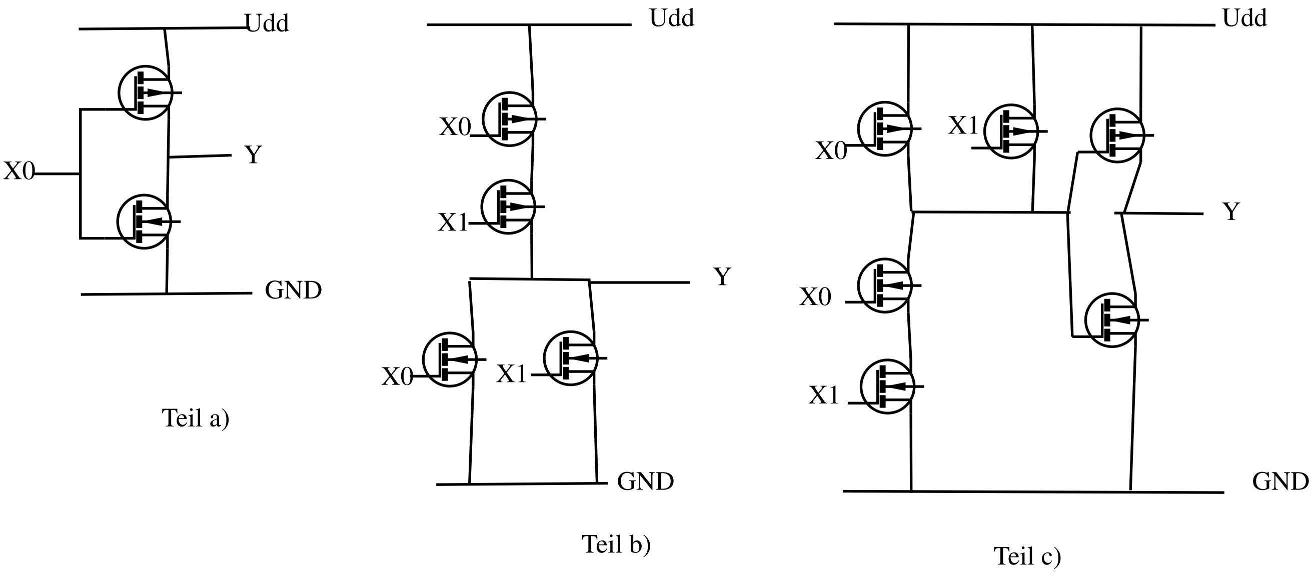

Abbildung 5: Aufgabe 2.3.1

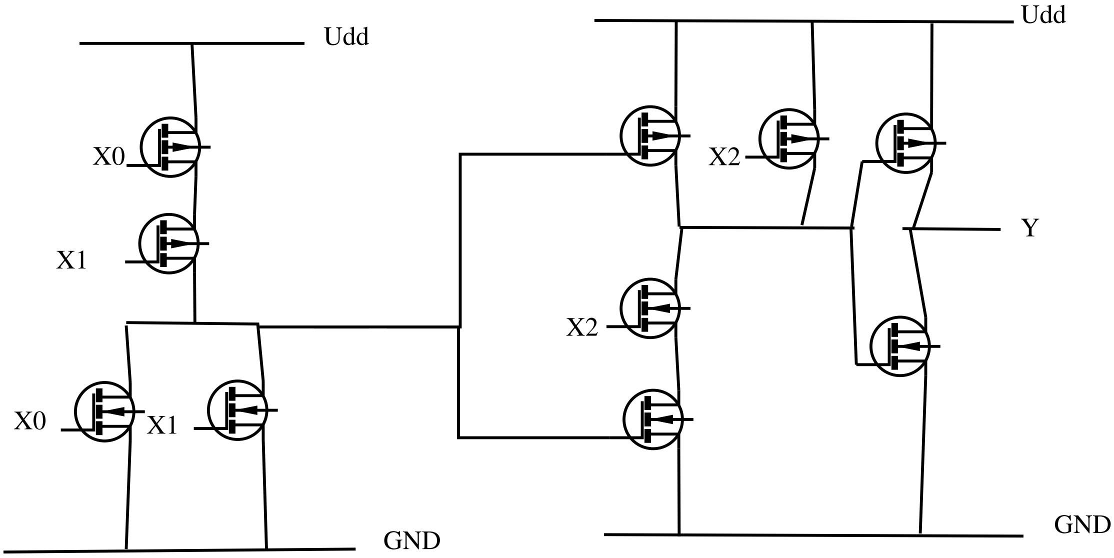

Abbildung 6: Aufgabe 2.3.2

Problem 3.3: Binary Numbers

Given the 8-digit binary number

$$x = 1101\ 1001.$$

Interpret x as

1. number in signed magnitude representation,
2. number in one's complement representation,
3. number in two's complement representation,
4. fixed-point number with 3 decimal places,
5. fixed-point number in two's complement representation with 5 decimal places.

Suggested solution:

1. $(-1)^1 \cdot (2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^0) = -89$
2. $2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^0 - (2^7 - 1) = -38$
3. $-38 - 1 = -39$
4. $2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 + 2^{-3} = 27.125$
5. $-2^2 + 2^1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-5} = -1.21875$

Problem 3.4: Minimal Polynomials (repetition from last weeks sheet)

1. Consider the following prime implicant table of a Boolean function $f(w, x, y, z)$:

	0010	0011	0100	0101	0111	1010	1011	1110	1111
$\bar{w}x\bar{y}$			×	×					
$\bar{w}xz$									
wy									
$\bar{x}y$									
yz									

   The table is complete with respect to implicants and minterms, so that f is uniquely determined. Find a minimal polynomial by completing the table and applying the reduction rules. Is your solution unique? Justify your answer.

2. When searching for minimal polynomials, there may be cases in which none of the three reduction rules can be applied. Consider the following prime implicant table, in which the prime implicants are simplified as letters and the minterms as numbers.

	0	1	2	3
a		×	×	
b	×			×
c			×	×
d	×		×	
e	×	×		
f		×		×

   Use Petrick's method to determine all minimal polynomials. To do so, form a suitable expression in KNF and multiply it out cleverly. Assume that all prime implicants have the same cost.

Suggested solution:

1.

	0010	0011	0100	0101	0111	1010	1011	1110	1111
$\bar{w}x\bar{y}$			×	×					
$\bar{w}xz$				×	×				
wy						×	×	×	×
$\bar{x}y$	×	×				×	×		
yz		×			×		×		×

We now apply the first reduction rule. The prime implicants $\bar{w}x\bar{y}$, wy and $\bar{x}y$ are essential for the minterms 0100, 1110 and 0010, respectively.

	0111
$\bar{w}xz$	×
yz	×

According to the third reduction rule we now choose the (clearly) cheaper prime implicant and get the minimal polynomial

$$\bar{w}x\bar{y} \vee wy \vee \bar{x}y \vee yz$$

Since all other chosen prime implicants were essential, this solution is also unique.

2. We get the following expression:

$$\begin{aligned}
&(b+d+e)(a+e+f)(a+c+d)(b+c+f)\\
=&((a+c+d)(a+e+f))((b+c+f)(b+d+e))\\
=&(\mathbf{a}+ac+ad+ae+\mathbf{ce}+de+af+cf+\mathbf{df})(\mathbf{b}+bc+bd+bf+be+cd+\mathbf{ce}+\mathbf{df}+ef)\\
=&ab+ce+df+\dots
\end{aligned}$$

Therefore, there are three possible solutions for the minimal polynomial. They are: $a+b, c+e$ and $d+f$.

Problem 3.5: Ring Sum Normal Form (bonus)

For the course of this Problem, we add an operator $\oplus$ (exclusive-or) to our definition of Boolean expressions. Semantically, the operator can be interpreted as followsmaß:

$$\Psi((g \oplus h)) = (\Psi(g) + \Psi(h)) \cdot (\sim (\Psi(g) \cdot \Psi(h))).$$

Thus, an expression $(g \oplus h)$ evaluates to 1 if and only if exactly one of the expressions g and h evaluates to 1.

1. Consider the kDNF e from Problem 2.1. Does e still describe the function f if you replace each occurrence of $+$ with $\oplus$? Justify your answer. What would your answer be if e was not complete?

2. Can you represent Boolean negation using only constants and $\oplus$? If so, how?

3. Give a rule for constructing for any Boolean function f, a Boolean expression describing the function using only constants 0 and 1, positive literals, $\oplus$, and $\cdot$. Give such an expression for the function in Problem 2.1.

   Note: Muliplying out such an expression, we obtain an exclusive-or linkage of pairwise distinct monomials consisting only of positive literals. This is the so-called *canonical ring sum representation*.

Suggested solution:

1. Since the individual monomials are complete, each of the monomials evaluates to 1 on exactly one input. In particular, if the kDNF evaluates to 1 on a variable assignment, then exactly one of the complete monomials evaluates to 1. Therefore, $+$ can be replaced by $\oplus$.
   If e is not complete, the statement does not hold. For example, consider the DNF $(x_1 + (x_1 \cdot x_2))$. On the assignment $x_1 \mapsto 1, x_2 \mapsto 1$ both monomials evaluate to 1 and therefore the whole polynomial evaluates to 1. However, the expression $(x_1 \oplus (x_1 \cdot x_2))$ evaluates to 0 under this assignment.

2. It holds for any Boolean expression $g \in BE(X_n)$:
   $$(\sim g) \equiv (g \oplus 1)$$

3. First, one forms a Boolean expression in kDNF describing f. Then, one replaces each $+$ with an $\oplus$ and each negative literal $\overline{x_i}$ with $(x_i \oplus 1)$. The resulting expression uses only positive literals, 1 as well as $\oplus$ and $\cdot$. Applying this to the function from Problem 2.1 yields:
   $$((x \oplus 1) \cdot (y \oplus 1) \cdot z) \oplus ((x \oplus 1) \cdot y \cdot (z \oplus 1)) \oplus ((x \oplus 1) \cdot y \cdot z) \oplus (x \cdot y \cdot z)$$
   One can easily show that $\oplus$ distributes under $\cdot$. Therefore, by multiplying out, one obtains the equivalent expression
   $$(x \cdot z) \oplus (y \cdot z) \oplus (x \cdot y) \oplus z \oplus y.$$