SAARLAND UNIVERSITY
COMPUTER SCIENCE

Prof. Dr. Jan Reineke
Dr. Andreas Abel
Lucas Biehl

Systemarchitektur SS 2021

Lösungsskizze 2

Aufgabe 2.1: Normalformen und PLAs

1.

$$\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xy\bar{z}$$

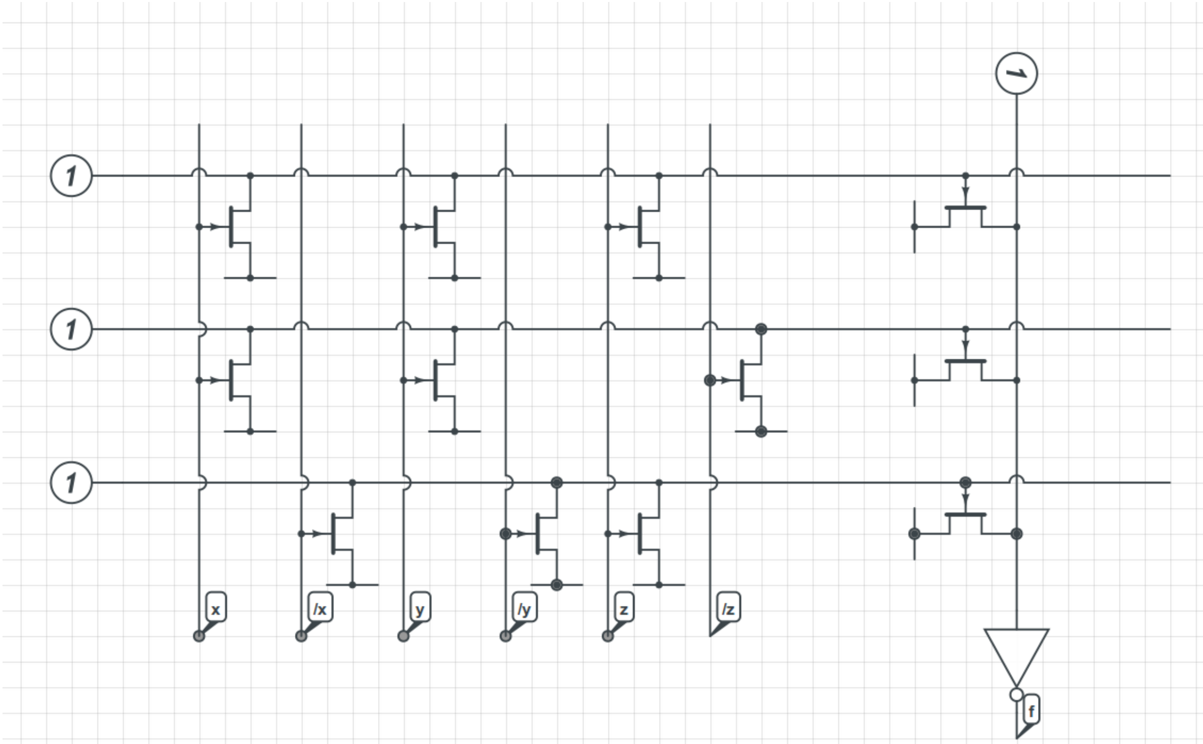
2.

- **Definitionen (KNF):**
  - *Klausel:* Disjunktion von Literalen, in der jedes Literal höchstens einmal (also entweder negativ oder positiv) vorkommt. Des Weiteren der Boolesche Ausdruck 0.
  - *Maxterm:* Klausel, in der zu jeder Variable genau ein Literal vorkommt (= vollständige Klausel).
  - *(kanonische/vollständige) konjunktive NF:* Konjunktion von paarweise verschiedenen (vollständigen) Klauseln.
- **Definitionen (DNF):**
  - *Monom:* Konjunktion von Literalen, in der jedes Literal höchstens einmal (also entweder negativ oder positiv) vorkommt. Des Weiteren der Boolesche Ausdruck 1.
  - *Minterm:* Monom, in der zu jeder Variable genau ein Literal vorkommt (= vollständiges Monom).
  - *(kanonische/vollständige) disjunktive NF:* Disjunktion von paarweise verschiedenen (vollständigen) Monomen.
- **Algorithmus:**
  1. Betrachte Einträge (Zeilen), die eine 0 als Ergebnis haben.
  2. Konstruiere den Maxterm zu x_i $(0 \leq i)$ in einer Zeile folgendermaßen:
     - enthält die Spalte zu x_i eine $1 \rightarrow \overline{x_i}$
     - enthält die Spalte zu x_i eine $0 \rightarrow x_i$
  3. Verknüpfe alle Maxterme zu einer Konjunktion.

3.

$$(x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$$

4.



Man kann den Schaltkreis noch optimieren und die oberen beiden Leitungen zusammenfassen, indem man die Ausdrücke $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ und $\bar{x}\bar{y}z$ vorher zu $\bar{x}\bar{y}$ kombiniert, das hier abgebildete PLA ist aber näher an der hergeleiteten DNF.

5.

- Primäre Kosten: 3
- Sekundäre Kosten: 12

Aufgabe 2.2: Boolesche Funktionen

Die Boolesche Algebra der Booleschen Funktionen in n Variablen wurde auf Folie 15 (Foliensatz 1) definiert.

$$\begin{aligned} & f \cdot g \leq f \leq f + g \\ \Leftrightarrow\ & f(\alpha) \cdot g(\alpha) \leq f(\alpha) \leq f(\alpha) + g(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{B}^n \end{aligned}$$

Es lässt sich durch Fallunterscheidung zeigen:

(I) Gilt $f(\alpha) = 0$.

$$\begin{aligned} f(\alpha) \cdot g(\alpha) = 0 \cdot g(\alpha) &= 0 && \mid \text{Neutrales Element} \\ &\leq 0 \quad (= f(\alpha)) \\ &\leq g(\alpha) = 0 + g(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha) && \mid \text{Neutrales Element} \end{aligned}$$

(II) Gilt $f(\alpha) = 1$.

$$\begin{aligned} f(\alpha) \cdot g(\alpha) = 1 \cdot g(\alpha) &= g(\alpha) && \mid \text{Neutrales Element} \\ &\leq 1 \quad (= f(\alpha)) \\ &\leq 1 + g(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha) && \mid \text{Neutrales Element} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.3: Minimierung Boolescher Ausdrücke

1. Die Mengen L_0 bis L_2 werden konstruiert. Dabei bedeutet ein ✓ hinter einem Monom der Menge L_i, dass dieses für die Konstruktion der Menge L_{i+1} herangezogen wurde.

	w	x	y	z	
$L_0^{\{w,x,y,z\}}$	0	0	0	0	✓
	0	0	0	1	✓
	0	0	1	0	✓
	1	0	0	0	✓
	0	0	1	1	✓
	0	1	0	1	✓
	1	0	1	0	✓
	1	1	0	0	✓
	0	1	1	1	✓
	1	1	0	1	✓
	1	1	1	1	✓

	w	x	y	z	
$L_1^{\{w,x,y\}}$	0	0	0	–	✓
	0	0	1	–	✓
	1	1	0	–	
$L_1^{\{w,x,z\}}$	0	0	–	0	✓
	0	0	–	1	✓
	1	0	–	0	✓
	0	1	–	1	✓
	1	1	–	1	✓
$L_1^{\{w,y,z\}}$	0	–	0	1	✓
	1	–	0	0	
	0	–	1	1	✓
$L_1^{\{x,y,z\}}$	–	0	0	0	✓
	–	0	1	0	✓
	–	1	0	1	✓
	–	1	1	1	✓

	w	x	y	z
$L_2^{\{w,x\}}$	0	0	–	–
$L_2^{\{w,z\}}$	0	–	–	1
$L_2^{\{x,z\}}$	–	0	–	0
	–	1	–	1

Alle nicht abgehakten Monome sind Primimplikanten der Funktion g.

$$\Longrightarrow\ g = \bar w\bar x \vee \bar w z \vee \bar x\bar z \vee xz \vee wx\bar y \vee w\bar y\bar z$$

2. Jetzt kann die Primimplikantentafel aufgestellt werden. Dabei werden die Minterme mit der Dezimalzahl repräsentiert, die dem als Binärzahl interpretierten Minterm entspricht.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\bar w\bar x$	×	×	×	×												
$\bar w z$		×		×		×		×								
$\bar x\bar z$	×		×						×		×					
xz						×		×						×		×
$wx\bar y$													×	×		
$w\bar y\bar z$									×				×			

Die wesentlichen Primimplikanten $\bar x\bar z$ sowie xz, genauso wie deren Minterme, werden gestrichen (1. Reduktionsregel):

	$\cancel{0}$	1	$\cancel{2}$	3	4	$\cancel{5}$	6	$\cancel{7}$	$\cancel{8}$	9	$\cancel{10}$	11	12	$\cancel{13}$	14	$\cancel{15}$
$\bar w\bar x$	×	×	×	×												
$\bar w z$		×		×		×		×								
$\cancel{\bar x\bar z}$	×		×						×		×					
$\cancel{xz}$						×		×						×		×
$wx\bar y$													×	×		
$w\bar y\bar z$									×				×			

Jetzt kann die 3. Reduktionsregel zum Streichen von $\bar w\bar x$ sowie $w\bar y\bar z$ angewandt werden:

	1	3	12
$\cancel{\bar w\bar x}$	×	×	
$\bar w z$	×	×	
$wx\bar y$			×
$\cancel{w\bar y\bar z}$			×

$$\Longrightarrow\ g = \bar x\bar z \vee xz \vee \bar w z \vee wx\bar y$$

SAARLAND UNIVERSITY
COMPUTER SCIENCE

Prof. Dr. Jan Reineke
Dr. Andreas Abel
Lucas Biehl

System Architecture SS 2021

Solution Sketch 2

Problem 2.1: Normal Forms and PLAs

1.

$$\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xy\bar{z}$$

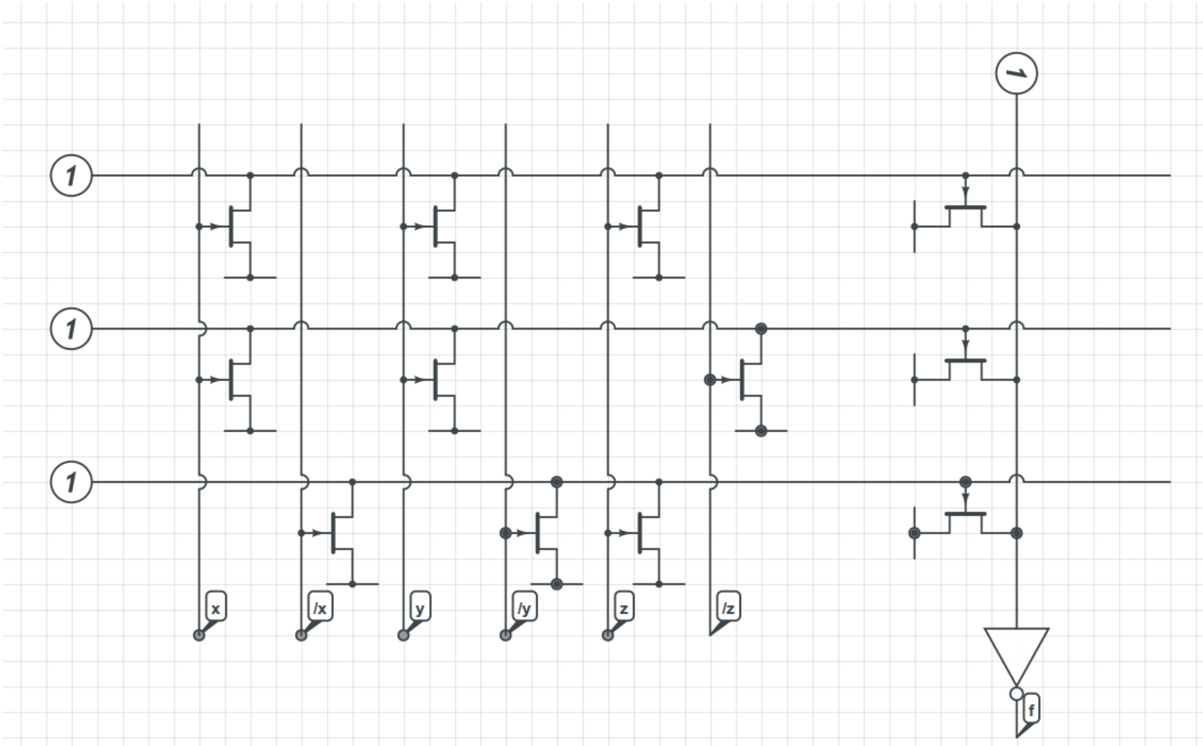
2.

- **Definitions (CNF):**
  - *Clause:* Disjunction of literals in which every literal appears at most once (i.e., either negatively or positively), or the Boolean expression 0.
  - *Maxterm:* Clause in which exactly one literal occurs for each variable.
  - *(canonical) conjunctive NF:* Conjunction of pairwise different clauses (maxterms).
- **Definitions (DNF):**
  - *Monomial:* Conjunction of literals in which every literal occurs at most once (i.e., either negatively or positively), or the Boolean expression 1.
  - *Minterm:* Monomial in which exactly one literal occurs for each variable.
  - *(canonical) disjunctive NF:* Disjunction of pairwise different monomials (minterms).
- **Algorithm:**
  1. Consider rows that have a value of 0.
  2. Construct the maxterm for a row as follows:
     - if the column for x_i is 1 $\rightarrow \overline{x_i}$
     - if the column for x_i is 0 $\rightarrow x_i$
  3. Combine all the maxterms into a conjunction.

3.

$$(x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$$

4.



The circuit can be optimized by combining the upper two lines (by combining the expressions $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ and $\bar{x}\bar{y}z$ to $\bar{x}\bar{y}$); however, the PLA shown here is closer to the derived DNF.

5.

- Primary cost: 3
- Secondary cost: 12

Problem 2.2: Boolean Functions

The Boolean algebra of Boolean functions in n variables was defined on slide 15 (slide deck 1).

$$\begin{aligned} & f \cdot g \leq f \leq f + g \\ \Leftrightarrow\ & f(\alpha) \cdot g(\alpha) \leq f(\alpha) \leq f(\alpha) + g(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{B}^n \end{aligned}$$

We can show by case distinction:

(I) Let $f(\alpha) = 0$.

$$\begin{aligned} f(\alpha) \cdot g(\alpha) = 0 \cdot g(\alpha) = 0 & \qquad \text{| neutral element} \\ \leq 0 \quad (= f(\alpha)) & \\ \leq g(\alpha) = 0 + g(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha) & \qquad \text{| neutral element} \end{aligned}$$

(II) Let $f(\alpha) = 1$.

$$\begin{aligned} f(\alpha) \cdot g(\alpha) = 1 \cdot g(\alpha) = g(\alpha) & \qquad \text{| neutral element} \\ \leq 1 \quad (= f(\alpha)) & \\ \leq 1 + g(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha) & \qquad \text{| neutral element} \end{aligned}$$

Problem 2.3: Minimization of Boolean Expressions

1. We construct the sets L_0 to L_2. A ✓ behind a monomial of the set L_i means that this monomial was used for the construction of the set L_{i+1}.

	w	x	y	z	
$L_0^{\{w,x,y,z\}}$	0	0	0	0	✓
	0	0	0	1	✓
	0	0	1	0	✓
	1	0	0	0	✓
	0	0	1	1	✓
	0	1	0	1	✓
	1	0	1	0	✓
	1	1	0	0	✓
	0	1	1	1	✓
	1	1	0	1	✓
	1	1	1	1	✓

	w	x	y	z	
$L_1^{\{w,x,y\}}$	0	0	0	–	✓
	0	0	1	–	✓
	1	1	0	–	
$L_1^{\{w,x,z\}}$	0	0	–	0	✓
	0	0	–	1	✓
	1	0	–	0	✓
	0	1	–	1	✓
	1	1	–	1	✓
$L_1^{\{w,y,z\}}$	0	–	0	1	✓
	1	–	0	0	
	0	–	1	1	✓
$L_1^{\{x,y,z\}}$	–	0	0	0	✓
	–	0	1	0	✓
	–	1	0	1	✓
	–	1	1	1	✓

	w	x	y	z	
$L_2^{\{w,x\}}$	0	0	–	–	
$L_2^{\{w,z\}}$	0	–	–	1	
$L_2^{\{x,z\}}$	–	0	–	0	
	–	1	–	1	

All unchecked monomials are prime implicants of the function g.

$$\Longrightarrow \; g = \bar{w}\bar{x} \lor \bar{w}z \lor \bar{x}\bar{z} \lor xz \lor wx\bar{y} \lor w\bar{y}\bar{z}$$

2. Now, we can construct the prime implicant table. Here, the minterms are represented by the decimal number that corresponds to an interpretation of the minterm as a binary number.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\bar{w}\bar{x}$	×	×	×	×												
$\bar{w}z$		×		×		×		×								
$\bar{x}\bar{z}$	×		×						×		×					
xz						×		×						×		×
$wx\bar{y}$													×	×		
$w\bar{y}\bar{z}$									×				×			

We remove the essential prime implicants $\bar{x}\bar{z}$ and xz, and the minterms that are covered by them (first reduction rule):

	$\cancel{0}$	1	$\cancel{2}$	3	4	$\cancel{5}$	6	$\cancel{7}$	$\cancel{8}$	9	$\cancel{10}$	11	12	$\cancel{13}$	14	$\cancel{15}$
$\bar{w}\bar{x}$	×	×	×	×												
$\bar{w}z$		×		×		×		×								
$\cancel{\bar{x}\bar{z}}$	×		×						×		×					
$\cancel{xz}$						×		×						×		×
$wx\bar{y}$													×	×		
$w\bar{y}\bar{z}$									×				×			

Now, we can apply the third reduction rule to remove $\bar{w}\bar{x}$ and $w\bar{y}\bar{z}$:

	1	3	12
$\cancel{\bar{w}\bar{x}}$	×	×	
$\bar{w}z$	×	×	
$wx\bar{y}$			×
$\cancel{w\bar{y}\bar{z}}$			×

$$\Longrightarrow \; g = \bar{x}\bar{z} \lor xz \lor \bar{w}z \lor wx\bar{y}$$