SAARLAND UNIVERSITY
COMPUTER SCIENCE

Prof. Dr. Jan Reineke
Dr. Andreas Abel
Lucas Biehl

Systemarchitektur SS 2021

Lösungsskizze 1

Aufgabe 1.1: Strukturelle Induktion 1

Im Folgenden sei $Lit(a)$ die Anzahl der Literale im Booleschen Ausdruck a, mit $Lit(0) = 0$, $Lit(1) = 0$, $Lit(x_i) = 1, x_i \in X_n$, $Lit((g+h)) = Lit(g) + Lit(h)$, $Lit((g \cdot h)) = Lit(g) + Lit(h)$, $Lit((\sim g)) = Lit(g)$.

Beweis durch strukturelle Induktion über die Booleschen Ausdrücke.

Basisfälle

$a = 0 \qquad Lit(a) = Lit(0) = 0 \leq 1 = 2^0 = 2^{D(0)} = 2^{D(a)}$

$a = 1$ analog

$a = x_i \in X_n \qquad Lit(a) = Lit(x_i) = 1 \leq 1 = 2^0 = 2^{D(x_i)} = 2^{D(a)}$

Induktionsvoraussetzung Wir nehmen an, dass die Behauptung für zwei Boolesche Ausdrücke g und h gilt.

Induktionsschritt

$a = (g+h)$

$$Lit(a) = Lit((g+h)) = Lit(g)+Lit(h) \overset{IV}{\leq} 2^{D(g)}+2^{D(h)} \leq 2 \cdot 2^{max\{D(g),D(h)\}} = 2^{1+max\{D(g),D(h)\}} = 2^{D(a)}$$

$a = (g \cdot h)$ analog

$a = (\sim g)$

$$Lit(a) = Lit((\sim g)) = Lit(g) \overset{IV}{\leq} 2^{D(g)} < 2^{1+D(g)} = 2^{D(a)}$$

□

Aufgabe 1.2: Strukturelle Induktion 2

1.
   - Ist a der Form 0, 1 oder $x_i \in X_n$, so ist die Länge $L(a) = 1$.
   - Ist a der Form $(g+h)$ oder $(g \cdot h)$, wobei g und h wiederum vollständig geklammerte Boolesche Ausdrücke sind, so ist die Länge $L(a) = 3 + L(g) + L(h)$.
   - Ist a der Form $(\sim g)$, wobei g wiederum ein vollständig geklammerter Boolescher Ausdruck ist, so ist die Länge $L(a) = 3 + L(g)$.

2. **Basisfälle**

   $a = 0 \qquad D(a) + 1 = D(0) + 1 = 0 + 1 = 1 \leq 1 = L(0) = L(a)$

   $a = 1$ analog

   $a = x_i \in X_n$ analog

   Induktionsvoraussetzung Wir nehmen an, dass die Behauptung für zwei Boolesche Ausdrücke g und h gilt, d.h. $D(g) + 1 \leq L(g)$ und $D(h) + 1 \leq L(h)$.

   Induktionsschritt

$a = (g + h)$

$$\begin{aligned} D(a) + 1 &= D((g+h)) + 1 \\ &= 1 + max\{D(g), D(h)\} + 1 \\ &\le 1 + D(g) + D(h) + 1 \\ &= (D(g)+1) + (D(h)+1) \\ &\overset{IV}{\le} L(g) + L(h) \\ &\le 3 + L(g) + L(h) \\ &= L(a) \end{aligned}$$

$a = (g \cdot h)$ analog

$a = (\sim g)$

$$D(a) + 1 = D((\sim g)) + 1 = 1 + D(g) + 1 \overset{IV}{\le} 1 + L(g) \le 3 + L(g) = L((\sim g)) = L(a)$$

$\square$

Aufgabe 1.3: Boolesche Ausdrücke

Wertetabellen

(a) $\equiv$ (c) $\equiv$ (f):

X_0	X_1	X_2	Wert
0	0	0	1
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	0	1
0	0	1	1
1	0	1	0
0	1	1	1
1	1	1	1

(b) $\equiv$ (e):

X_0	X_1	X_2	Wert
0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	1
1	1	0	1
0	0	1	0
1	0	1	0
0	1	1	1
1	1	1	1

(d):

X_0	X_1	X_2	Wert
0	0	0	1
1	0	0	1
0	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	0

Mit Umformungen

Im folgenden wurden triviale Umformungen (Assoziativität) größtenteils übersprungen und nur die wesentlichen Umformungen angegeben.

- $(c) \equiv (a)$

$$
\begin{aligned}
(c) =& \sim(X_0X_2) + X_1 && \\
=&(\sim X_0 + \sim X_2) + X_1 && \text{DeMorgan} \\
=& \sim X_0 + (\sim X_2 + X_1) && \text{Assoziativität} \\
=& \sim X_0 + (X_1 + \sim X_2) && \text{Kommutativität} \\
=&(a) &&
\end{aligned}
$$

- $(e) \equiv (b)$

$$
\begin{aligned}
(e) =&(X_1 + \sim X_0)(\sim X_2 + X_1) && \\
=&(X_1 + \sim X_0)(X_1 + \sim X_2) && \text{Kommutativität} \\
=&X_1 + (\sim X_0)(\sim X_2) && \text{Distributivität} \\
=&(\sim X_0)(\sim X_2) + X_1 && \text{Kommutativität} \\
=& \sim(X_0 + X_2) + X_1 && \text{DeMorgan} \\
=&(b) &&
\end{aligned}
$$

- $(f) \equiv (a)$

$$
\begin{aligned}
(f) =& \sim X_2 + (\sim X_0 + X_1) && \\
=&(\sim X_0 + X_1) + \sim X_2 && \text{Kommutativität} \\
=& \sim X_0 + (X_1 + \sim X_2) && \text{Assoziativität} \\
=&(a) &&
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1.4: Boolesche Funktionen

1. Es gibt 2^{m*2^n} Boolesche Funktionen. Das kann man sich leicht an einer Wertetabelle klar machen.
2. Sei $(\mathbb{B}, \times, +, \sim)$ eine Boolesche Algebra (z. B.: $(\mathbb{B}, \wedge, \vee, \neg)$).
   Dann ist auch $(\mathscr{B}_n, \times, +, \sim)$ wie auf Folie 15 eine Boolesche Algebra: Die Axiome (Folie 13) sind erfüllt.
   Beweis: Es ist bereits gezeigt, dass $(\mathbb{B}, \wedge, \vee, \neg)$ eine Boolesche Algebra ist (1).

   Kommutativität zu zeigen: $\forall f, g \in \mathscr{B}_n.\ f + g = g + f$.

$$
\begin{array}{rll}
 & (f+g)(\alpha) & \text{Definition } (f+g) \\
= & f(\alpha) + g(\alpha) & \text{(1) Kommutativität } + \text{ bzw. } \vee \\
= & g(\alpha) + f(\alpha) & \text{Definition } (g+f) \\
= & (g+f)(\alpha) &
\end{array}
$$

   analog: $\forall f, g \in \mathscr{B}_n.\ f \cdot g = g \cdot f$.

   Assoziativität zu zeigen: $\forall f, g, h \in \mathscr{B}_n.\ f + (g + h) = (f + g) + h$.

$$
\begin{array}{rll}
 & (f+(g+h))(\alpha) & \text{Definition } + \\
= & f(\alpha) + (g+h)(\alpha) & \text{Definition } + \\
= & f(\alpha) + (g(\alpha) + h(\alpha)) & \text{(1) Assoziativität } + \text{ bzw. } \vee \\
= & (f(\alpha) + g(\alpha)) + h(\alpha) & \text{Definition } + \\
= & (f+g)(\alpha) + h(\alpha) & \text{Definition } + \\
= & ((f+g)+h)(\alpha) &
\end{array}
$$

   analog: $\forall f, g, h \in \mathscr{B}_n.\ f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$.

Absorption zu zeigen: $\forall f, g \in \mathscr{B}_n.\ f + (f \cdot g) = f$.

$$\begin{array}{rll} & (f + (f \cdot g))(\alpha) & \text{Definition } + \\ = & f(\alpha) + (f \cdot g)(\alpha) & \text{Definition } \cdot \\ = & f(\alpha) + (f(\alpha) \cdot g(\alpha)) & \text{(1) Absorption von } (\mathbb{B}, \times, +, \sim) \\ = & f(\alpha) & \end{array}$$

analog: $\forall f, g \in \mathscr{B}_n.\ f \cdot (f + g) = f$.

Distributivität zu zeigen: $\forall f, g, h \in \mathscr{B}_n.\ f + (g \cdot h) = (f + g) \cdot (f + h)$.

$$\begin{array}{rll} & (f + (g \cdot h))(\alpha) & \text{Definition +} \\ = & f(\alpha) + (g \cdot h)(\alpha) & \text{Definition } \cdot \\ = & f(\alpha) + (g(\alpha) \cdot h(\alpha)) & \text{(1) Distributivität der inneren Algebra} \\ = & (f(\alpha) + g(\alpha)) \cdot (f(\alpha) + h(\alpha)) & \text{Definition +} \\ = & (f + g)(\alpha) \cdot (f + h)(\alpha) & \text{Definition } \cdot \\ = & ((f + g) \cdot (f + h))(\alpha) & \end{array}$$

analog: $\forall f, g, h \in \mathscr{B}_n.\ f \cdot (g + h) = (f \cdot g) + (f \cdot h)$.

Komplementregel zu zeigen: $\forall f, g \in \mathscr{B}_n.\ f + (g \cdot (\sim g)) = f$.

$$\begin{array}{rll} & (f + (g \cdot (\sim g)))(\alpha) & \text{Definition +} \\ = & f(\alpha) + (g \cdot (\sim g))(\alpha) & \text{Definition } \cdot \\ = & f(\alpha) + (g(\alpha) \cdot (\sim g)(\alpha)) & \text{Definition } \sim \\ = & f(\alpha) + (g(\alpha) \cdot (\sim (g(\alpha)))) & \text{(1) Komplementregel der inneren Algebra} \\ = & f(\alpha) & \end{array}$$

analog: $\forall f, g \in \mathscr{B}_n.\ f \cdot (g + (\sim g)) = f$.

$\square$

Aufgabe 1.5: Doppeltes Komplement

$$\begin{array}{rll} & x & \text{Komplementregel mit } x := x \text{ und } y :=\sim x \\ = & x + ((\sim x) \cdot (\sim (\sim x))) & \text{Distributivgesetz} \\ = & (x + (\sim x)) \cdot (x + (\sim (\sim x))) & \text{Kommutativität} \\ = & (x + (\sim (\sim x))) \cdot (x + (\sim x)) & \text{Komplementregel mit } x := (x + (\sim (\sim x))) \text{ und } y := x \\ = & (x + (\sim (\sim x))) & \text{Komplementregel und Kommutativität} \\ = & (\sim (\sim x) + x) \cdot (\sim (\sim x) + (\sim x)) & \text{Distributivität} \\ = & \sim (\sim x) + (x \cdot (\sim x)) & \text{Komplementregel mit } x :=\sim (\sim x) \text{ und } y := x \\ = & \sim (\sim x) & \end{array}$$

SAARLAND UNIVERSITY
COMPUTER SCIENCE

Prof. Dr. Jan Reineke
Dr. Andreas Abel
Lucas Biehl

System Architecture SS 2021

Solution Sketch 1

Problem 1.1: Structural Induction 1

Let $Lit(a)$ be the number of literals in the Boolean expression a, with $Lit(0) = 0$, $Lit(1) = 0$, $Lit(x_i) = 1, x_i \in X_n$, $Lit((g+h)) = Lit(g) + Lit(h)$, $Lit((g \cdot h)) = Lit(g) + Lit(h)$, $Lit((\sim g)) = Lit(g)$.
Proof by structural induction over Boolean expressions.

Base cases

$a = 0$ $\quad Lit(a) = Lit(0) = 0 \leq 1 = 2^0 = 2^{D(0)} = 2^{D(a)}$

$a = 1$ $\quad$ analogous

$a = x_i \in X_n$ $\quad Lit(a) = Lit(x_i) = 1 \leq 1 = 2^0 = 2^{D(x_i)} = 2^{D(a)}$

Induction hypothesis We assume that the claim holds for two Boolean expressions g and h.

Induction step

$a = (g+h)$

$$Lit(a) = Lit((g+h)) = Lit(g)+Lit(h) \overset{IH}{\leq} 2^{D(g)}+2^{D(h)} \leq 2 \cdot 2^{max\{D(g),D(h)\}} = 2^{1+max\{D(g),D(h)\}} = 2^{D(a)}$$

$a = (g \cdot h)$ analogous

$a = (\sim g)$

$$Lit(a) = Lit((\sim g)) = Lit(g) \overset{IH}{\leq} 2^{D(g)} < 2^{1+D(g)} = 2^{D(a)}$$

□

Problem 1.2: Structural Induction 2

1. - If a is of the form 0, 1, or $x_i \in X_n$, then the length $L(a) = 1$.
   - If a is of the form $(g+h)$ or $(g \cdot h)$, where g and h are again fully parenthesized Boolean expressions, then the length $L(a) = 3 + L(g) + L(h)$.
   - If a is of the form $(\sim g)$, where g is again a fully parenthesized Boolean expression, then the length $L(a) = 3 + L(g)$.

2. **Base cases**

   $a = 0$ $\quad D(a) + 1 = D(0) + 1 = 0 + 1 = 1 \leq 1 = L(0) = L(a)$

   $a = 1$ $\quad$ analogous

   $a = x_i \in X_n$ $\quad$ analogous

   Induction hypothesis We assume that the claim holds for two Boolean expressions g and h, i.e., $D(g) + 1 \leq L(g)$ and $D(h) + 1 \leq L(h)$.

   Induction step

$a = (g + h)$

$$\begin{aligned} D(a) + 1 &= D((g + h)) + 1 \\ &= 1 + max\{D(g), D(h)\} + 1 \\ &\leq 1 + D(g) + D(h) + 1 \\ &= (D(g) + 1) + (D(h) + 1) \\ &\overset{IH}{\leq} L(g) + L(h) \\ &\leq 3 + L(g) + L(h) \\ &= L(a) \end{aligned}$$

$a = (g \cdot h)$ analogous

$a = (\sim g)$

$$D(a) + 1 = D((\sim g)) + 1 = 1 + D(g) + 1 \overset{IH}{\leq} 1 + L(g) \leq 3 + L(g) = L((\sim g)) = L(a)$$

□

Problem 1.3: Boolean Expressions

Truth tables

(a) ≡ (c) ≡ (f):

X_0	X_1	X_2	value
0	0	0	1
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	0	1
0	0	1	1
1	0	1	0
0	1	1	1
1	1	1	1

(b) ≡ (e):

X_0	X_1	X_2	value
0	0	0	1
1	0	0	0
0	1	0	1
1	1	0	1
0	0	1	0
1	0	1	0
0	1	1	1
1	1	1	1

(d):

X_0	X_1	X_2	value
0	0	0	1
1	0	0	1
0	1	0	0
1	1	0	0
0	0	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	0

With transformations

In the following, trivial transformations (e.g., associativity) are ignored in most cases, and only the essential transformations are shown.

- $(c) \equiv (a)$

$$
\begin{aligned}
(c) =& \sim(X_0 X_2) + X_1 & \\
=& (\sim X_0 + \sim X_2) + X_1 & \text{De Morgan} \\
=& \sim X_0 + (\sim X_2 + X_1) & \text{associativity} \\
=& \sim X_0 + (X_1 + \sim X_2) & \text{commutativity} \\
=& (a) &
\end{aligned}
$$

- $(e) \equiv (b)$

$$
\begin{aligned}
(e) =& (X_1 + \sim X_0)(\sim X_2 + X_1) & \\
=& (X_1 + \sim X_0)(X_1 + \sim X_2) & \text{commutativity} \\
=& X_1 + (\sim X_0)(\sim X_2) & \text{distributivity} \\
=& (\sim X_0)(\sim X_2) + X_1 & \text{commutativity} \\
=& \sim(X_0 + X_2) + X_1 & \text{De Morgan} \\
=& (b) &
\end{aligned}
$$

- $(f) \equiv (a)$

$$
\begin{aligned}
(f) =& \sim X_2 + (\sim X_0 + X_1) & \\
=& (\sim X_0 + X_1) + \sim X_2 & \text{commutativity} \\
=& \sim X_0 + (X_1 + \sim X_2) & \text{associativity} \\
=& (a) &
\end{aligned}
$$

Problem 1.4: Boolean Functions

1. There are 2^{m*2^n} Boolean functions. This can easily be seen using a truth table.

2. Let $(\mathbb{B}, \times, +, \sim)$ be a Boolean algebra (e.g., $(\mathbb{B}, \wedge, \vee, \neg)$).

   Then, $(\mathscr{B}_n, \times, +, \sim)$ as on slide 15 is also a Boolean algebra: the axioms (slide 13) hold.

   Proof: It has been shown that $(\mathbb{B}, \wedge, \vee, \neg)$ is a Boolean algebra (1).

   Commutativity to show: $\forall f, g \in \mathscr{B}_n.\ f + g = g + f$.

$$
\begin{array}{rll}
 & (f+g)(\alpha) & \text{definition } (f+g) \\
= & f(\alpha) + g(\alpha) & \text{(1) commutativity + resp. } \vee \\
= & g(\alpha) + f(\alpha) & \text{definition } (g+f) \\
= & (g+f)(\alpha) &
\end{array}
$$

   analogous: $\forall f, g \in \mathscr{B}_n.\ f \cdot g = g \cdot f$.

   Associativity to show: $\forall f, g, h \in \mathscr{B}_n.\ f + (g + h) = (f + g) + h$.

$$
\begin{array}{rll}
 & (f + (g+h))(\alpha) & \text{definition } + \\
= & f(\alpha) + (g+h)(\alpha) & \text{definition } + \\
= & f(\alpha) + (g(\alpha) + h(\alpha)) & \text{(1) associativity + resp. } \vee \\
= & (f(\alpha) + g(\alpha)) + h(\alpha) & \text{definition } + \\
= & (f+g)(\alpha) + h(\alpha) & \text{definition } + \\
= & ((f+g)+h)(\alpha) &
\end{array}
$$

   analogous: $\forall f, g, h \in \mathscr{B}_n.\ f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$.

Absorption to show: $\forall f, g \in \mathscr{B}_n.\ f + (f \cdot g) = f$.

$$\begin{array}{lll} & (f + (f \cdot g))(\alpha) & \text{definition } + \\ = & f(\alpha) + (f \cdot g)(\alpha) & \text{definition } \cdot \\ = & f(\alpha) + (f(\alpha) \cdot g(\alpha)) & \text{(1) absorption of } (\mathbb{B}, \times, +, \sim) \\ = & f(\alpha) & \end{array}$$

analogous: $\forall f, g \in \mathscr{B}_n.\ f \cdot (f + g) = f$.

Distributivity to show: $\forall f, g, h \in \mathscr{B}_n.\ f + (g \cdot h) = (f + g) \cdot (f + h)$.

$$\begin{array}{lll} & (f + (g \cdot h))(\alpha) & \text{definition } + \\ = & f(\alpha) + (g \cdot h)(\alpha) & \text{definition } \cdot \\ = & f(\alpha) + (g(\alpha) \cdot h(\alpha)) & \text{(1) distributivity of the inner algebra} \\ = & (f(\alpha) + g(\alpha)) \cdot (f(\alpha) + h(\alpha)) & \text{definition } + \\ = & (f + g)(\alpha) \cdot (f + h)(\alpha) & \text{definition } \cdot \\ = & ((f + g) \cdot (f + h))(\alpha) & \end{array}$$

analogous: $\forall f, g, h \in \mathscr{B}_n.\ f \cdot (g + h) = (f \cdot g) + (f \cdot h)$.

Complements to show: $\forall f, g \in \mathscr{B}_n.\ f + (g \cdot (\sim g)) = f$.

$$\begin{array}{lll} & (f + (g \cdot (\sim g)))(\alpha) & \text{definition } + \\ = & f(\alpha) + (g \cdot (\sim g))(\alpha) & \text{definition } \cdot \\ = & f(\alpha) + (g(\alpha) \cdot (\sim g)(\alpha)) & \text{definition } \sim \\ = & f(\alpha) + (g(\alpha) \cdot (\sim (g(\alpha)))) & \text{(1) complements of the inner algebra} \\ = & f(\alpha) & \end{array}$$

analogous: $\forall f, g \in \mathscr{B}_n.\ f \cdot (g + (\sim g)) = f$.

□

Problem 1.5: Double negation

$$\begin{array}{lll} & x & \text{complements with } x := x \text{ and } y :=\sim x \\ = & x + ((\sim x) \cdot (\sim (\sim x))) & \text{distributivity} \\ = & (x + (\sim x)) \cdot (x + (\sim (\sim x))) & \text{commutativity} \\ = & (x + (\sim (\sim x))) \cdot (x + (\sim x)) & \text{complements with } x := (x + (\sim (\sim x))) \text{ and } y := x \\ = & (x + (\sim (\sim x))) & \text{complements and commutativity} \\ = & (\sim (\sim x) + x) \cdot (\sim (\sim x) + (\sim x)) & \text{distributivity} \\ = & \sim (\sim x) + (x \cdot (\sim x)) & \text{complements with } x :=\sim (\sim x) \text{ and } y := x \\ = & \sim (\sim x) & \end{array}$$