SAARLAND UNIVERSITY
COMPUTER SCIENCE

Prof. Dr. Jan Reineke
Dr. Andreas Abel
Lucas Biehl

Systemarchitektur SS 2021

Aufgabenblatt 4

Sie können Ihre Lösungen bis **Mittwoch, dem 19.05.2021, um 10:00 Uhr** im CMS abgeben.
Geben Sie auf Ihrer Lösung Ihr Tutorium sowie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder an.

Aufgabe 4.1: Abhängigkeitsbegriff

In der Vorlesung zu Addierern haben wir untere Schranken für die Tiefe und Kosten von Addierer-Schaltkreisen hergeleitet. Die Argumentation stützte sich darauf, dass die Ausgabe s_n eines Addierers von allen $2n+1$ Eingaben *abhängt*. Die formale Definition der Abhängigkeitsrelation zwischen Ein- und Ausgaben wurde in der Vorlesung aber nicht gegeben. Diese Lücke möchten wir in dieser Aufgabe schließen.

1. Gegeben eine beliebige Boolesche Funktion $f \in \mathbb{B}_{n,m}$. Definieren Sie formal die Abhängigkeitsrelation $dep_f \subseteq \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$. Dabei soll $(i, j) \in dep_f$ genau dann wenn die Ausgabe j der Funktion f von der Eingabe i abhängt.
2. Geben Sie eine Beispielfunktion $f \in \mathbb{B}_{2,2}$ an, für die $(1, 1) \in dep_f$ und $(1, 2) \notin dep_f$.

Aufgabe 4.2: Inkrementierer

Ein n-bit Inkrementierer hat als Eingabe eine n-bit Sequenz $a = a_{n-1} \ldots a_0$, ein Eingabebit c_{in} und berechnet als Ausgabe eine $(n+1)$-bit Sequenz $s = s_n \ldots s_0$, sodass $\langle s \rangle = \langle a \rangle + c_{in}$.

Konstruieren Sie einen n-bit Inkrementierer mit asymptotisch linearen ($O(n)$) Kosten mithilfe von Halbaddierern.

1. Definieren Sie hierzu einen rekursiven Schaltkreis.
2. Beweisen Sie die Korrektheit Ihres Schaltkreises mithilfe von Induktion.
3. Geben Sie rekursive Gleichungen für Kosten und Tiefe der Schaltung an.
4. Schätzen Sie die Tiefe und die Kosten durch eine geschlossene, d.h. nicht rekursive, Formel ab. Beweisen Sie mithilfe von Induktion, dass Ihre Abschätzungen korrekt sind.

Hinweis: Geben Sie jeweils die Induktionsvoraussetzung explizit an.

Aufgabe 4.3: Modellierung durch Schaltkreise

Ein Multiplexer MUX^n (nicht zu verwechseln mit dem MUX$_n$ aus der Vorlesung) ist ein Logikbaustein, der abhängig von Selektionssignalen $(S_1, \ldots, S_n)$ eines aus mehreren Eingangssignalen $(X_1, \ldots, X_{2^n})$ auswählt. Das Ausgangssignal eines MUX^n ist das Eingangssignal $X_{\langle S_n \ldots S_1 \rangle + 1}$.

(a) Entwerfen Sie einen MUX^1 mit zwei Eingangssignalen und einem Selektionssignal. Verwenden Sie dabei ausschließlich AND_2, OR_2 und NOT Gatter.

(b) Entwerfen Sie einen MUX^n mit n Selektionssignalen und 2^n Eingangssignalen. Verwenden Sie dazu ausschließlich MUX-Bausteine, die $n-1$ oder 1 Selektionssignale haben.

(c) Welche Tiefe und welche Kosten hat der Schaltkreis eines MUX^n mit n Selektionssignalen? Finden Sie zunächst jeweils eine rekursive Formel und dann eine geschlossene Form.

SAARLAND UNIVERSITY
COMPUTER SCIENCE

Prof. Dr. Jan Reineke
Dr. Andreas Abel
Lucas Biehl

System Architecture SS 2021

Assignment 4

You may submit your solutions via the CMS until **10:00 a.m. on Wednesday, May 19, 2021**.
Please state on your solutions your tutorial, and the names and matriculation numbers of all team members.

Problem 4.1: Notion of Dependency

In the lecture on adders we have derived lower bounds on the cost and depth of adder circuits. The argument critically relied on the fact that the output s_n of an adder *depends* on all $2n+1$ inputs of the adder. However, no formal definition of this dependency relation between inputs and outputs was given in the lecture. The goal of this assignment is to close this gap.

1. Let $f \in \mathbb{B}_{n,m}$ be an arbitrary Boolean function. Formally define the dependency relation $dep_f \subseteq \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,m\}$. Thus, $(i,j) \in dep_f$ if and only if the output j of the function f depends on its input i.
2. Provide an example function $f \in \mathbb{B}_{2,2}$, such that $(1,1) \in dep_f$ and $(1,2) \notin dep_f$.

Problem 4.2: Incrementer

An n-bit incrementer has as input an n-bit sequence $a = a_{n-1}\ldots a_0$ and an input bit c_{in}. It computes as output an $(n+1)$-bit sequence $s = s_n \ldots s_0$ such that $\langle s \rangle = \langle a \rangle + c_{in}$.
Construct an n-bit incrementer with asymptotically linear ($O(n)$) cost using half adders.

1. Construct a corresponding recursive circuit.
2. Prove the correctness of your circuit using induction.
3. Give recursive equations for the cost and the depth of the circuit.
4. Estimate the depth and cost using a closed-form, i.e., non-recursive, formula. Using induction, prove that your estimates are correct.

Note: Always state the induction hypotheses explicitly!

Problem 4.3: Modeling Through Circuits

A multiplexer MUX^n (not to be confused with the MUX_n from the lecture) is a logic circuit that selects one out of several input signals $(X_1, \ldots, X_{2^n})$ depending on selection signals $(S_1, \ldots, S_n)$. The output signal of a MUX^n is the input signal $X_{\langle S_n \ldots S_1 \rangle + 1}$.

(a) Design a MUX^1 with two input signals and one selection signal. Use only AND_2, OR_2, and NOT gates.

(b) Design a MUX^n with n selection signals and 2^n input signals. Use only MUX devices that have $n-1$ or 1 selection signals.

(c) What is the depth and cost of the circuit of a MUX^n with n selection signals? First, find a recursive formula for each, and then, find a closed form for each.