SAARLAND UNIVERSITY
COMPUTER SCIENCE

Prof. Dr. Jan Reineke
Dr. Andreas Abel
Lucas Biehl

Systemarchitektur SS 2021

Aufgabenblatt 1

Sie können Ihre Lösungen bis **Mittwoch, dem 28.04.2021, um 10:00 Uhr** im CMS abgeben.
Geben Sie auf Ihrer Lösung Ihr Tutorium sowie die Namen und Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder an.

Aufgabe 1.1: Strukturelle Induktion 1

Die Zahl der Literale in einem Booleschen Ausdruck a ist durch $2^{D(a)}$ beschränkt, wobei $D(a)$ die Schachtelungstiefe des Ausdrucks a bezeichnet. Beweisen Sie diese Behauptung per struktureller Induktion.

Definition: Die Schachtelungstiefe eines vollständig geklammerten Booleschen Ausdrucks a ist wie folgt definiert:

1. Ist a der Form 0, 1 oder $x_i \in X_n$, so ist die Schachtelungstiefe $D(a) = 0$.
2. Ist a der Form $(g + h)$ oder $(g \cdot h)$, wobei g und h wiederum vollständig geklammerte Boolesche Ausdrücke sind, so ist die Schachtelungstiefe $D(a) = 1 + max\{D(g), D(h)\}$.
3. Ist a der Form $(\sim g)$, wobei g wiederum ein vollständig geklammerter Boolescher Ausdruck ist, so ist die Schachtelungstiefe $D(a) = 1 + D(g)$.

Aufgabe 1.2: Strukturelle Induktion 2

1. Definieren Sie die Länge $L(a)$ eines Booleschen Ausdrucks rekursiv. Die Länge entspricht der Anzahl der Zeichen in dem Ausdruck. Beispielsweise ist $L((\sim x_1)) = 4$ und $L((x_2 + (0 \cdot 1))) = 9$ (die Variablen $x_i \in X_n$ zählen dabei jeweils als ein Zeichen).
2. Beweisen Sie per struktureller Induktion, dass für alle Booleschen Ausdrücke a Folgendes gilt:

$$D(a) + 1 \leq L(a)$$

Aufgabe 1.3: Boolesche Ausdrücke

Betrachten Sie die folgenden Booleschen Ausdrücke:

(a) $\neg X_0 + (X_1 + \neg X_2)$

(b) $\neg(X_0 + X_2) + X_1$

(c) $\neg(X_0 \cdot X_2) + X_1$

(d) $\neg X_1 + ((\neg X_0) \cdot X_2)$

(e) $(X_1 + \neg X_0) \cdot (\neg X_2 + X_1)$

(f) $\neg X_2 + ((\neg X_0) + X_1)$

Geben Sie für jeden Ausdruck die Werttabelle an. Welche der Ausdrücke sind zueinander Äquivalent? Können Sie die Äquivalenz auch durch Umformungen mithilfe der Axiome der Booleschen Algebra sowie der in der Vorlesung daraus abgeleiteten Regeln (z.B. De Morgan) zeigen? Geben Sie die Umformungen explizit an.

Aufgabe 1.4: Boolesche Funktionen

1. Wie viele verschiedene Boolesche Funktionen $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^m$ gibt es?

2. Zeigen Sie, dass die Menge der Booleschen Funktionen in n Variablen mit Operationen $+$, $\cdot$ und $\sim$ wie auf Folie 15 (Foliensatz "1. Boolean Calculus") eine Boolesche Algebra ist.

Aufgabe 1.5: Doppeltes Komplement

Folgern Sie aus den Axiomen der Booleschen Algebra:

$$\sim (\sim x) = x$$

SAARLAND UNIVERSITY
COMPUTER SCIENCE

Prof. Dr. Jan Reineke
Dr. Andreas Abel
Lucas Biehl

System Architecture SS 2021

Assignment 1

You may submit your solutions via the CMS until **10:00 a.m. on Wednesday, April 28, 2021**.
Please state on your solutions your tutorial, and the names and matriculation numbers of all team members.

Problem 1.1: Structural Induction 1

The number of literals in a Boolean expression a is bounded by $2^{D(a)}$, where $D(a)$ is the nesting depth of a. Prove this claim by structural induction.

Definition: The nesting depth $D(a)$ of a fully parenthesized Boolean expression a is defined as follows:

1. If a is of the form 0, 1, or $x_i \in X_n$, then $D(a) = 0$.
2. If a is of the form $(g + h)$ or $(g \cdot h)$, where g and h are fully parenthesized Boolean expressions, then $D(a) = 1 + max\{D(g), D(h)\}$.
3. If a is of the form $(\sim g)$, where g is a fully parenthesized Boolean expression, then $D(a) = 1 + D(g)$.

Problem 1.2: Structural Induction 2

1. Define the length $L(a)$ of a Boolean expression recursively. The length corresponds to the number of characters in the expression. For example, $L((\sim x_1)) = 4$ and $L((x_2 + (0 \cdot 1))) = 9$ (here, we consider the variables $x_i \in X_n$ to be single characters).
2. Prove by structural induction that the following holds for all Boolean expressions a:

$$D(a) + 1 \leq L(a)$$

Problem 1.3: Boolean Expressions

Consider the following Boolean expressions:

(a) $\neg X_0 + (X_1 + \neg X_2)$

(b) $\neg(X_0 + X_2) + X_1$

(c) $\neg(X_0 \cdot X_2) + X_1$

(d) $\neg X_1 + ((\neg X_0) \cdot X_2)$

(e) $(X_1 + \neg X_0) \cdot (\neg X_2 + X_1)$

(f) $\neg X_2 + ((\neg X_0) + X_1)$

Construct the truth table for each expression. Which of the expressions are equivalent? Can you also show the equivalence via transformations using the axioms of the Boolean algebra and the derived laws (e.g., De Morgan)? State each transformation explicitly.

Problem 1.4: Boolean Functions

1. How many Boolean functions $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^m$ are there?

2. Show that the set of Boolean functions in n variables with the operations $+$, $\cdot$, and $\sim$, as introduced on slide 15 (slide deck “1. Boolean Calculus”), is a Boolean algebra.

Problem 1.5: Double Negation

Deduce from the axioms of the Boolean algebra:

$$\sim(\sim x) = x$$