SAARLAND UNIVERSITY
COMPUTER SCIENCE

Prof. Dr. Jan Reineke
Dr. Andreas Abel
Lucas Biehl

Systemarchitektur SS 2021

Präsenzblatt 1 (Lösungsvorschläge)

***Hinweis:* Dieses Aufgabenblatt wurde von Tutoren erstellt. Die Aufgaben sind für die Klausur weder relevant noch irrelevant, die Lösungsvorschlage weder korrekt noch inkorrekt.**

Aufgabe 1.1: Strukturelle Induktion

Die Zahl der linken und rechten Klammern in einem Booleschen Ausdruck a ist (offensichtlich) stets gleich. Beweisen Sie diese Behauptung per struktureller Induktion.

Vereinfachend dürfen Sie annehmen, dass der Ausdruck vollständig geklammert ist, also dass keine Klammern aufgrund klarer Präzedenz ausgespart wurden. Damit ist a stets in einer der folgenden Formen:

1. 0, 1 oder $x_i \in X_n$.
2. $(g + h)$ oder $(g \cdot h)$, wobei g und h wiederum vollständig geklammerte Boolesche Ausdrücke sind.
3. $(\neg g)$, wobei g wiederum ein vollständig geklammerter Boolescher Ausdruck ist.

Lösungsvorschlag:

$$\forall a : l(a) = r(a)$$

Basisfälle
$l(a) = 0 = r(a)$ für $a \in \{0, 1, x_i\}$ $(x_i \in X_n)$

Induktionsvoraussetzung
Wir nehmen an, dass die Behauptung für zwei Boolesche Ausdrücke g und h gilt.

Induktionsschritt
Sei a der Form $(g + h)$ oder $(g \cdot h)$. Dann gilt :

$$l(a) = l(g) + l(h) + 1 \overset{IV}{=} r(g) + r(h) + 1 = r(a)$$

Sei a der Form $(\neg g)$. Dann gilt :

$$l(a) = l(g) + 1 \overset{IV}{=} r(g) + 1 = r(a)$$

Aufgabe 1.2: Boolesche Ausdrücke 1

1. Beweisen Sie die De Morgan-Regeln $(\neg(x + y) = (\neg x) \cdot (\neg y))$ mithilfe von Wertetabellen.
2. Beweisen Sie die De Morgan-Regeln mithilfe der Axiome (Kommutativität, Assoziativität, Absorption, Distributivität und Komplementregel) der Booleschen Algebra (und nur mit diesen!).

Lösungsvorschlag:

1. Wir packen alles in eine Wertetabelle.

x	y	$x+y$	$\neg(x+y)$	$\neg x$	$\neg y$	$(\neg x)\cdot(\neg y)$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

2. Es gilt zu zeigen :

$$\neg(x+y) = (\neg x \cdot \neg y)$$

Dazu wird die Eindeutigkeit des Komplements benutzt

$$\forall x, y : (x \cdot y = 0 \wedge x + y = 1) \rightarrow y = \neg x.$$

Es muss dann noch gezeigt werden, dass

$$(x+y)\cdot(\neg x \cdot \neg y) = 0 \tag{1}$$
$$(x+y) + (\neg x \cdot \neg y) = 1. \tag{2}$$

Wir beginnen mit einigen Hilfsergebnissen.

Neutrales Element 0:

$$\begin{aligned} x + 0 &= x + (x \cdot \neg x) && \text{| Def. 0} \\ &= x && \text{| Komplement} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \cdot 0 &= 0 \cdot x && \text{| Kommutativität} \\ &= 0 \cdot (x+0) && \text{| s.links} \\ &= 0 \cdot (0+x) && \text{| Kommutativität} \\ &= 0 && \text{| Absorption} \end{aligned}$$

Neutrales Element 1:

$$\begin{aligned} x \cdot 1 &= x \cdot (x + \neg x) && \text{| Def. 1} \\ &= x && \text{| Komplement} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 1 &= 1 + x && \text{| Kommutativität} \\ &= 1 + (x \cdot 1) && \text{| s.links} \\ &= 1 + (1 \cdot x) && \text{| Kommutativität} \\ &= 1 && \text{| Absorption} \end{aligned}$$

Eindeutigkeit des Komplements:

Angenommen, $x \cdot y = 0$ und $x + y = 1$, zeige $y = \neg x$.

$$\begin{aligned} y &= y \cdot (x + \neg x) && \text{| Komplement} \\ &= y \cdot x + y \cdot (\neg x) && \text{| Distributivität} \\ &= x \cdot y + (\neg x) \cdot y && \text{| Kommutativität} \\ &= 0 + (\neg x) \cdot y && \text{| } x \cdot y = 0 \\ &= (x \cdot \neg x) + (\neg x) \cdot y && \text{| 0-Element} \\ &= ((\neg x) \cdot x) + (\neg x) \cdot y && \text{| Kommutativität} \\ &= (\neg x) \cdot (x + y) && \text{| Distributivität} \\ &= (\neg x) \cdot 1 && \text{| } x + y = 1 \\ &= \neg x && \text{| 1-Element} \end{aligned}$$

Beweis für (1):

$$
\begin{aligned}
(x+y)\cdot(\neg x\cdot\neg y) &= ((x+y)\cdot\neg x)\cdot\neg y && |\ \text{Assoziativität}\\
&= ((x\cdot\neg x)+(y\cdot\neg x))\cdot\neg y && |\ \text{Distributivität}\\
&= ((y\cdot\neg x)+(x\cdot\neg x))\cdot\neg y && |\ \text{Kommutativität}\\
&= (y\cdot\neg x)\cdot\neg y && |\ \text{Komplement}\\
&= (\neg x\cdot y)\cdot\neg y && |\ \text{Kommutativität}\\
&= \neg x\cdot(y\cdot\neg y) && |\ \text{Assoziativität}\\
&= \neg x\cdot 0 && |\ \text{0-Element}\\
&= 0 && |\ \text{0-Element, s.o}
\end{aligned}
$$

Beweis für (2):

$$
\begin{aligned}
(x+y)+(\neg x\cdot\neg y) &= x+(y+(\neg x\cdot\neg y)) && |\ \text{Assoziativität}\\
&= x+((y+\neg x)\cdot(y+\neg y)) && |\ \text{Distributivität}\\
&= x+((y+\neg x)\cdot 1) && |\ \text{1-Element}\\
&= x+(y+\neg x) && |\ \text{1-Element}\\
&= x+(\neg x+y) && |\ \text{Kommutativität}\\
&= (x+\neg x)+y && |\ \text{Assoziativität}\\
&= 1+y && |\ \text{1-Element}\\
&= y+1 && |\ \text{Kommutativität}\\
&= 1 && |\ \text{1-Element}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1.3: Boolesche Ausdrücke 2

Betrachten Sie die folgenden Booleschen Ausdrücke:

(a) $(x+(\neg z))\cdot(\neg y)$

(b) $(\neg y\cdot x)+\neg(z+y)$

(c) $\neg x+(z\cdot(\neg y))$

(d) $\neg((\neg x)+y)+((\neg y)\cdot(\neg z))$

(e) $(z+(\neg x))\cdot\neg(y\cdot x)$

1. Geben Sie für jeden Ausdruck die Wertetabelle an. Welche der Ausdrücke sind zueinander äquivalent?
2. Können Sie die Äquivalenz auch durch Umformungen mithilfe der Axiome der Booleschen Algebra sowie der in der Vorlesung daraus abgeleiteten Regeln (z.B. De Morgan) zeigen? Geben Sie die Umformungen explizit an.

Lösungsvorschlag:

Wertetabellen

x	y	z	$(a),(b),(d)$	$(c),(e)$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0

Mit Umformungen

Im folgenden wurden triviale Umformungen (Assoziativität) größtenteils übersprungen und nur die wesentlichen Umformungen angegeben.

- $(a) \equiv (b)$

$$\begin{aligned}
(a) =& (x + \neg z) \cdot (\neg y) \\
=& (x \cdot (\neg y)) + (\neg z \cdot (\neg y)) && \mid \text{Distributivität} \\
=& (x \cdot (\neg y)) + \neg(z + y) && \mid \text{De Morgan} \\
=& (\neg y \cdot x) + \neg(z + y) && \mid \text{Kommutativität} \\
=& (b)
\end{aligned}$$

- $(b) \equiv (d)$

$$\begin{aligned}
(b) =& (\neg y \cdot x) + \neg(z + y) \\
=& (x \cdot \neg y) + \neg(y + z) && \mid \text{2 x Kommutativität} \\
=& \neg((\neg x) + y) + ((\neg y) \cdot (\neg z)) && \mid \text{doppelte Negation, 2 x De Morgan} \\
=& (d)
\end{aligned}$$

- $(c) \equiv (e)$

$$\begin{aligned}
(c) =& \neg x + (z \cdot (\neg y)) \\
=& ((\neg x) + z) \cdot (\neg x + (\neg y)) && \mid \text{Distributivität} \\
=& (z + (\neg x)) \cdot (\neg y + (\neg x)) && \mid \text{2 x Kommutativität} \\
=& (z + (\neg x)) \cdot \neg(y \cdot x) && \mid \text{De Morgan} \\
=& (e)
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.4: Consensus-Regel

Folgern Sie aus den Axiomen der Booleschen Algebra sowie der in der Vorlesung daraus abgeleiteten Regeln (z.B. De Morgan):

$$\forall x, y, z : (x \cdot y) + ((\neg x) \cdot z) = (x \cdot y) + ((\neg x) \cdot z) + (y \cdot z)$$

Lösungsvorschlag:

$$
\begin{aligned}
& (x \cdot y) + ((\neg x) \cdot z) + (y \cdot z) \\
=& (x \cdot y) + ((\neg x) \cdot z) + (y \cdot z) \cdot (x + (\neg x)) && \mid \text{Komplementregel} \\
=& (x \cdot y) + ((\neg x) \cdot z) + (x \cdot y \cdot z) + (\neg x \cdot y \cdot z) && \mid \text{Distributivität} \\
=& (x \cdot y + x \cdot y \cdot z) + (\neg x \cdot z + \neg x \cdot y \cdot z) && \mid \text{Assoziativität} \\
=& (x \cdot y \cdot 1 + x \cdot y \cdot z) + (\neg x \cdot z \cdot 1 + \neg x \cdot y \cdot z) && \mid \text{Existenz Neutrales Element} \\
=& (x \cdot y \cdot 1 + x \cdot y \cdot z) + (\neg x \cdot z \cdot 1 + \neg x \cdot z \cdot y) && \mid \text{Kommutativität} \\
=& x \cdot y \cdot (1 + z) + \neg x \cdot z \cdot (1 + y) && \mid \text{Distributivität} \\
=& x \cdot y + \neg x \cdot z && \mid \text{Existenz Neutrales Element}
\end{aligned}
$$

SAARLAND UNIVERSITY
COMPUTER SCIENCE

Prof. Dr. Jan Reineke
Dr. Andreas Abel
Lucas Biehl

System Architecture SS 2021

Tutorial Sheet 1 (Suggested Solutions)

***Note:* This task sheet was created by tutors. The tasks are neither relevant nor irrelevant for the exam, the suggested solutions are neither correct nor incorrect.**

Problem 1.1: Structural Induction

The number of left and right parentheses in a Boolean expression a is (obviously) always equal. Prove this assertion by structural induction.

Simplifying, you may assume that the expression is fully parenthesized, that is, that no parentheses have been omitted due to clear precedent. Thus a is always in one of the following forms:

1. 0, 1 or $x_i \in X_n$.
2. $(g + h)$ or $(g \cdot h)$, where g and h are again fully parenthesized Boolean expressions.
3. $(\neg g)$, where g is again a fully parenthesized Boolean expression.

Suggested solution:

$$\forall a : l(a) = r(a)$$

Base cases
$l(a) = 0 = r(a)$ for $a \in \{0, 1, x_i\}$ $(x_i \in X_n)$

Inductive hypothesis
We assume that the assertion holds for two Boolean expressions g and h.

Inductive step
Let a be of the form $(g + h)$ or $(g \cdot h)$. Then :

$$l(a) = l(g) + l(h) + 1 \overset{IH}{=} r(g) + r(h) + 1 = r(a)$$

Let a be of the form $(\neg g)$. Then :

$$l(a) = l(g) + 1 \overset{IH}{=} r(g) + 1 = r(a)$$

Problem 1.2: Boolean Expressions 1

1. Prove De Morgan's laws $(\neg(x + y) = (\neg x) \cdot (\neg y))$ using truth tables.
2. Prove De Morgan's laws using the axioms (commutativity, associativity, absorption, distributivity, and complements) of Boolean algebra (and only using these!).

Suggested solution:

1. We put everything into a truth table.

x	y	$x+y$	$\neg(x+y)$	$\neg x$	$\neg y$	$(\neg x)\cdot(\neg y)$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

2. It is necessary to show:

$$\neg(x+y) = (\neg x \cdot \neg y)$$

For this, the uniqueness of complements is used

$$\forall x, y : (x \cdot y = 0 \wedge x + y = 1) \to y = \neg x.$$

It must then be shown that:

$$(x+y)\cdot(\neg x \cdot \neg y) = 0 \tag{3}$$
$$(x+y)+(\neg x \cdot \neg y) = 1. \tag{4}$$

We start with some auxiliary results.

Neutral element 0:

$$\begin{aligned} x + 0 &= x + (x \cdot \neg x) && \mid \text{Def. } 0 \\ &= x && \mid \text{complements} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \cdot 0 &= 0 \cdot x && \mid \text{commutativity} \\ &= 0 \cdot (x + 0) && \mid \text{see left} \\ &= 0 \cdot (0 + x) && \mid \text{commutativity} \\ &= 0 && \mid \text{absorption} \end{aligned}$$

Neutral element 1:

$$\begin{aligned} x \cdot 1 &= x \cdot (x + \neg x) && \mid \text{Def. } 1 \\ &= x && \mid \text{complements} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 1 &= 1 + x && \mid \text{commutativity} \\ &= 1 + (x \cdot 1) && \mid \text{see left} \\ &= 1 + (1 \cdot x) && \mid \text{commutativity} \\ &= 1 && \mid \text{absorption} \end{aligned}$$

Uniqueness of complements:

Assuming $x \cdot y = 0$ and $x + y = 1$, show $y = \neg x$.

$$\begin{aligned} y &= y \cdot (x + \neg x) && \mid \text{complements} \\ &= y \cdot x + y \cdot (\neg x) && \mid \text{distribution} \\ &= x \cdot y + (\neg x) \cdot y && \mid \text{commutativity} \\ &= 0 + (\neg x) \cdot y && \mid x \cdot y = 0 \\ &= (x \cdot \neg x) + (\neg x) \cdot y && \mid \text{neutral element 0} \\ &= ((\neg x) \cdot x) + (\neg x) \cdot y && \mid \text{commutativity} \\ &= (\neg x) \cdot (x + y) && \mid \text{distributivity} \\ &= (\neg x) \cdot 1 && \mid x + y = 1 \\ &= \neg x && \mid \text{neutral element 1} \end{aligned}$$

Proof for (1):

$$
\begin{aligned}
(x+y)\cdot(\neg x\cdot\neg y) &= ((x+y)\cdot\neg x)\cdot\neg y && \mid \text{associativity}\\
&= ((x\cdot\neg x)+(y\cdot\neg x))\cdot\neg y && \mid \text{distributivity}\\
&= ((y\cdot\neg x)+(x\cdot\neg x))\cdot\neg y && \mid \text{commutativity}\\
&= (y\cdot\neg x)\cdot\neg y && \mid \text{complement}\\
&= (\neg x\cdot y)\cdot\neg y && \mid \text{commutativity}\\
&= \neg x\cdot(y\cdot\neg y) && \mid \text{associativity}\\
&= \neg x\cdot 0 && \mid \text{neutral element 0}\\
&= 0 && \mid \text{neutral element 0, see above}
\end{aligned}
$$

Proof for (2):

$$
\begin{aligned}
(x+y)+(\neg x\cdot\neg y) &= x+(y+(\neg x\cdot\neg y)) && \mid \text{associativity}\\
&= x+((y+\neg x)\cdot(y+\neg y)) && \mid \text{distributivity}\\
&= x+((y+\neg x)\cdot 1)) && \mid \text{neutral element 1}\\
&= x+(y+\neg x) && \mid \text{neutral element 1}\\
&= x+(\neg x+y) && \mid \text{commutativity}\\
&= (x+\neg x)+y && \mid \text{associativity}\\
&= 1+y && \mid \text{neutral element 1}\\
&= y+1 && \mid \text{commutativity}\\
&= 1 && \mid \text{neutral element 1}
\end{aligned}
$$

Problem 1.3: Boolean Expressions 2

Consider the following Boolean expressions:

(a) $(x+(\neg z))\cdot(\neg y)$

(b) $(\neg y\cdot x)+\neg(z+y)$

(c) $\neg x+(z\cdot(\neg y))$

(d) $\neg((\neg x)+y)+((\neg y)\cdot(\neg z))$

(e) $(z+(\neg x))\cdot\neg(y\cdot x)$

1. For each expression, give the truth table. Which of the expressions are equivalent to each other?
2. Can you also show the equivalence by transformations using the axioms of Boolean algebra as well as the laws derived from them in the lecture (e.g. De Morgan's law)? State the used laws explicitly.

Suggested solution:

Truth tables

x	y	z	$(a),(b),(d)$	$(c),(e)$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0

With transformations

In the following, trivial transformations (associativity) were mostly skipped and only the essential transformations were given.

- $(a) \equiv (b)$

$$\begin{aligned}(a) =&(x + \neg z) \cdot (\neg y) && \\ =&(x \cdot (\neg y)) + (\neg z \cdot (\neg y)) && \mid \text{distributivity} \\ =&(x \cdot (\neg y)) + \neg(z + y) && \mid \text{De Morgan} \\ =&(\neg y \cdot x) + \neg(z + y) && \mid \text{commutativity} \\ =&(b) &&\end{aligned}$$

- $(b) \equiv (d)$

$$\begin{aligned}(b) =&(\neg y \cdot x) + \neg(z + y) && \\ =&(x \cdot \neg y) + \neg(y + z) && \mid \text{2 x commutativity} \\ =&\neg((\neg x) + y) + ((\neg y) \cdot (\neg z)) && \mid \text{double negation, 2 x De Morgan} \\ =&(d) &&\end{aligned}$$

- $(c) \equiv (e)$

$$\begin{aligned}(c) =&\neg x + (z \cdot (\neg y)) && \\ =&((\neg x) + z) \cdot (\neg x + (\neg y)) && \mid \text{distributivity} \\ =&(z + (\neg x)) \cdot (\neg y + (\neg x)) && \mid \text{2 x commutativity} \\ =&(z + (\neg x)) \cdot \neg(y \cdot x) && \mid \text{De Morgan} \\ =&(e) &&\end{aligned}$$

Problem 1.4: Consensus Theorem

Infer from the axioms of Boolean algebra as well as the laws derived from them in the lecture (e.g. De Morgan's law):

$$\forall x, y, z : (x \cdot y) + ((\neg x) \cdot z) = (x \cdot y) + ((\neg x) \cdot z) + (y \cdot z)$$

Suggested solution:

$$
\begin{aligned}
& (x \cdot y) + ((\neg x) \cdot z) + (y \cdot z) && \\
=& (x \cdot y) + ((\neg x) \cdot z) + (y \cdot z) \cdot (x + (\neg x)) && \mid \text{complements} \\
=& (x \cdot y) + ((\neg x) \cdot z) + (x \cdot y \cdot z) + (\neg x \cdot y \cdot z) && \mid \text{distributivity} \\
=& (x \cdot y + x \cdot y \cdot z) + (\neg x \cdot z + \neg x \cdot y \cdot z) && \mid \text{associativity} \\
=& (x \cdot y \cdot 1 + x \cdot y \cdot z) + (\neg x \cdot z \cdot 1 + \neg x \cdot y \cdot z) && \mid \text{existence of neutral elements} \\
=& (x \cdot y \cdot 1 + x \cdot y \cdot z) + (\neg x \cdot z \cdot 1 + \neg x \cdot z \cdot y) && \mid \text{commutativity} \\
=& x \cdot y \cdot (1 + z) + \neg x \cdot z \cdot (1 + y) && \mid \text{distributivity} \\
=& x \cdot y + \neg x \cdot z && \mid \text{existence of neutral elements}
\end{aligned}
$$