Grundzüge der Theoretischen Informatik

Kapitel 21 und 22

Markus Bläser

Universität des Saarlandes

Platz = # besuchter Felder

Zeit = # Schritte

Kapitel 21: Zeit versus Platz, Determinismus versus Nichtdeterminismus

Konstruierbare Funktionen

$$1^n = \underbrace{1 \ldots\ldots 1}_{n}$$

Definition (21.1)

Seien $s, t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

1. t ist *zeitkonstruierbar*, falls es eine $O(t)$-zeitbeschränkte DTM M gibt, die die Funktion $1^n \mapsto \text{bin}(t(n))$ berechnet.
2. s ist *platzkonstruierbar*, falls es eine $O(s)$-platzbeschränkte DTM M gibt (mit Extra-Eingabeband), die die Funktion $1^n \mapsto \text{bin}(s(n))$ berechnet.

Statt der Ausgabe in binär wird in vielen Büchern auch die Ausgabe in unär (also $1^{t(|x|)}$ bzw. $1^{s(|x|)}$) verlangt.

Hot or not?

$1^n \to \mathrm{bin}(\log n)$

in ~~Zeit~~ Platz $O(\log n)$

Welche Funktionen sind zeitkonstruierbar, welche platzkonstruierbar?

Wie lang ist $\mathrm{bin}(n)$?

- $\log n$
- n ← rechne $\mathrm{bin}(n)$ aus.
- n^2 ← rechne $\mathrm{bin}(n^2)$ → Multiplikation von Zahlen der Länge $O(\log n)$
- $n^2 + n^3$
- $n^2 + \chi_{H_0}(n) \cdot n^3$ nicht berechenbar.
- $\log \log n$

Schwache versus starke Beschränktheit

Nichtdeterminismus

schwach t-zeitbeschränkt : Für alle Eingaben x in L

gilt es einen akz. Pfad im Berechnungsbaum der Länge $\leq t(|x|)$

Lemma (21.2)

Sei t *zeitkonstruierbar und* s *platzkonstruierbar.*

1. *Falls* $L \in \mathrm{NTime}(t)$, *dann gibt es eine stark* $O(t)$*-zeitbeschränkte NTM* N *mit* $L = L(N)$.
2. *Falls* $L \in \mathrm{NSpace}(s)$, *dann gibt es eine stark* $O(s)$*-platzbeschränkte NTM* N *mit* $L = L(N)$.

stark t-zeitbeschränkt: alle Pfade sind

$\leq t(|x|)$ lang

Beweis (nur erste Aussage)

M sei eine schwach t-zeitbeschränkte NTM M mit $L(M) = L$.

Konstruiere N wie folgt:

- Konstruiere $\mathrm{bin}(t(|x|))$ auf einem zusätzlichen Band. $O(t(|x|))$
- Simuliere M Schritt für Schritt
  Zähle die Schritte auf dem Zusatzband. $O(t(|x|))$
  amortisierte Analyse!
- Falls $> t(|x|)$ Schritte simuliert wurden, dann halte und verwerfe.
- Falls M vorher hält, dann halte und akzepiere, wenn M akzeptiert. Sonst verwerfe.

Warum funktioniert das?

1) Sei $x \in L(M)$. Es gibt einen akz. Berechnungspfad im Berechnungsbaum von M auf x, der die Länge $\leq t(|x|)$.

Dieser Pfad wird von N zu Ende simuliert.

Damit akzeptiert N auch x

2) Sei $x \notin L(M)$. Dann gibt es keinen akz. Berechnungspfad. Dann hat aber auch N keinen akz. Berechnungspfad.

Der Konfigurationsgraph

Konfiguration

$(q, (x_1, p_1), (x_2, p_2), \ldots)$

- Sei M eine TM.
- Der Konfigurationsgraph ist $\mathrm{CG}_M = (\mathrm{Conf}_M, \vdash_M)$.
  $(\vdash_M \subseteq \mathrm{Conf}_M \times \mathrm{Conf}_M)$

  $C \vdash_M C'$
- CG_M ist gerichtet und unendlich.
- M akzeptiert x, falls es einen Pfad von $\mathrm{SC}_M(x)$ zu einer akzeptierenden Konfiguration gibt.

  $SC(x) \vdash C_1 \vdash C_2 \vdash \ldots \vdash C_t$

  akz.
- Im Allgemeinen ist das unentscheidbar.

Lemma (21.3)

Sei M eine s-platzbeschränkte TM mit $s(n) \geq \log n$ für alle n. Dann gibt es eine Konstante c (abhängig von M), so dass M auf Eingabe x höchsten $c^{s(|x|)}$ Konfigurationen von $\mathrm{SC}(x)$ erreichen kann.

$(q, (x_1, p_1), \dots (x_k, p_k))$, $1 \leq p_x \leq |x_x|$

M ist s-platzbeschränkt $\Rightarrow |x_x| \leq s(n)$

$n = 2^{\log_2 n}$

$|Q| \cdot |\Gamma|^{k s(n)} \cdot s(n)^k (n+2)$

$(|\Gamma|^k)^{s(n)}$

$\tilde{c}^{s(n)} \geq s(n)$ für $\tilde{c}$ groß genug

$(\tilde{c}^k)^{s(n)}$

$\hat{a}^{s(n)} \cdot \hat{b}^{s(n)} \cdot \hat{c}^{s(n)} \cdot \hat{d}^{s(n)} = (abcd)^{s(n)}$

$c^{s(n)}$

Der Konfigurationsgraph (2)

Korollar (21.4)

Sei $s(n) \geq \log n$ für alle n. Wenn eine s-platzbeschränkte DTM auf x hält, dann kann sie höchstens $c^{s(|x|)}$ Schritte auf x machen.

Korollar (21.5)

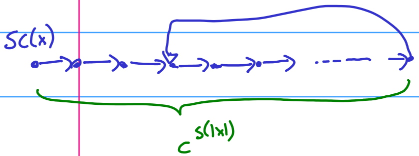
Sei $s(n) \geq \log n$ platzkonstruierbar. $\text{DSpace}(s)$ ist abgeschlossen unter Komplement, d.h. falls $L \in \text{DSpace}(s)$, dann auch $\bar{L}$.

Bemerkung (21.6)

- Korollar 21.5 gilt trivialer Weise für deterministische Zeitklassen.
- Offen für nichtdeterministische Zeitklassen.
- Gilt nicht-trivialer Weise für nichtdeterministische Platzklassen. (Immerman-Szelepcsényi-Theorem)

Beweis 21.4

Was passiert, wenn M (echt) mehr als $c^{s(|x|)}$ Schritte auf x macht?



M hält nicht auf x.

Beweis 21.5

Sei M eine s-platzbeschränkte DTM mit $L(M)=L$.

Wir konstruieren eine s-platzbeschränkte DTM $\bar{M}$ mit $L(M)=L(\bar{M})$, die immer hält.

- $\bar{M}$ simuliert M Schritt für Schritt
- Wenn M hält, dann hält auch $\bar{M}$

  Wenn M akz., dann verwirft $\bar{M}$

  " verwirft, " akz. "
- Problemfall: M kann nicht auf x halten, dann muss $\bar{M}$ auf x halten und akzeptieren.

Dann zählt $\bar{M}$ die Schritte von M.

Macht M mehr als $c^{s(|x|)}$ Schritte,

so ist M in einer Endlosschleife.

Dann hält $\bar{M}$ und akzeptiert

$\bar{M}$ soll s-platzbeschränkt sein

$\rightarrow$ c-närer Zähler $\square$