Grundzüge der Theoretischen Informatik

21. Oktober 2021

Markus Bläser

Universität des Saarlandes

Kapitel 1: Endliche Automaten

Produktautomat

$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$: $\quad Q_{acc} = Q_1 \times Q_{acc,2} \cup Q_{acc,1} \times Q_2$

Lemma (1.7)

Seien $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{0,1}, Q_{\text{acc},1})$ *und* $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{0,2}, Q_{\text{acc},2})$ *zwei endliche Automaten, so dass* δ_1 *und* δ_2 *total sind. Die Funktion* Δ *definiert durch*

$$\begin{array}{rrcc} \Delta : & (Q_1 \times Q_2) \times \Sigma & \to & Q_1 \times Q_2 \\ & ((q_1, q_2), \sigma) & \mapsto & (\delta_1(q_1, \sigma), \delta_2(q_2, \sigma)) \end{array}$$

erfüllt

$$\Delta^*((q_1, q_2), w) = (\delta_1^*(q_1, w), \delta_2^*(q_2, w))$$

für alle $q_1 \in Q_1$, $q_2 \in Q_2$ *und* $w \in \Sigma^*$.

M_1 akz. $w \Leftrightarrow \delta_1^*(q_{0,1}, w) \in Q_{acc,1}$

$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$: $\quad Q_{acc} = Q_{acc,1} \times Q_{acc,2}$

Q_1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ Q_2

δ_1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ δ_2

$Q_1 \times Q_2$

$$\delta(q_1, q_2) = (\delta(q_1), \delta(q_2))$$

Abschlusseigenschaften

Theorem (1.8)

REG *ist abgeschlossen unter Schnitt, Vereinigung und Mengendifferenz, d.h. sind* $A, B \subseteq \Sigma^*$ *regulär, so auch* $A \cap B$, $A \cup B$ *und* $A \setminus B$.

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$$

$$Q_{acc} = Q_{acc,1} \times (Q_2 \setminus Q_{acc,2})$$

Kapitel 2: Nichtdeterministische endliche Automaten

Konkatenation und Kleenesche Hülle

$A = \{a, ab\} \qquad B = \{bb, ba, \varepsilon\}$

$AB = \{abb, aba, a, abbb, abba, ab\}$

Definition (2.1)

Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$.

1. Die *Konkatenation* von A und B ist

$$AB = \{wx \mid w \in A, x \in B\}.$$

2. Die *Kleenesche Hülle* von A ist

$$A^* = \{x_1 x_2 \dots x_m \mid m \geq 0 \text{ und } x_\mu \in A,\ 1 \leq \mu \leq m\}.$$

$A^i := A \cdot A^{i-1}$

$A^1 := A$

$A^0 = \{\varepsilon\}$

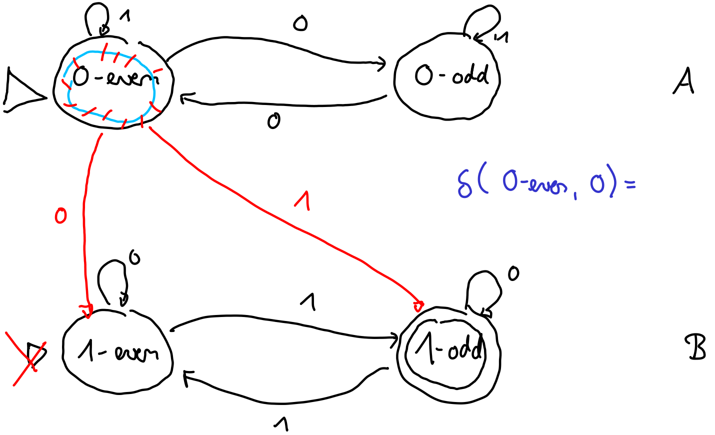
$A^* = A^1 \cup A^2 \cup A^3$

$A^0 = \{\varepsilon\}$

$\emptyset A = \emptyset$

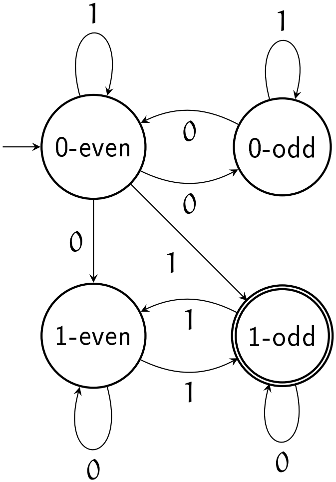
Nichtdeterminismus

$$A = \{x \in \{0,1\}^* \mid \text{die Anzahl der 0en in } x \text{ ist gerade}\},$$
$$B = \{y \in \{0,1\}^* \mid \text{die Anzahl der 1en in } y \text{ ist ungerade}\}.$$



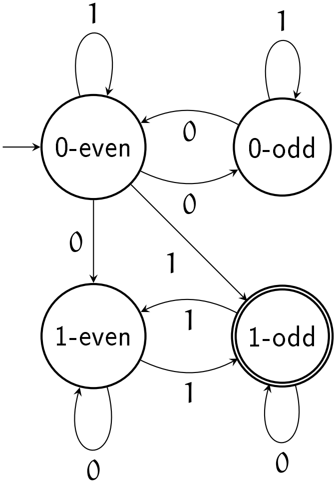
$\delta($ 0-even, $0) =$

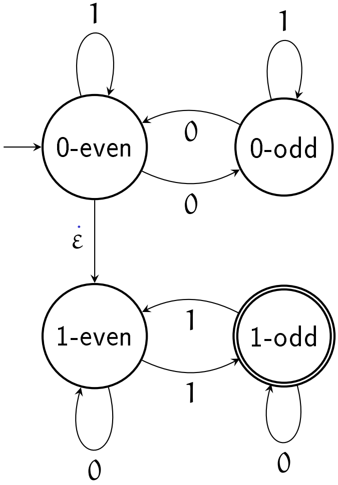
ε-Transitionen



ε-Transitionen

00|0110|111 00|10 00 ε 10 ε





Nichtdeterministische endliche Automaten

det : $\delta : Q \times \Sigma \to Q$

$\delta(\text{0-even}, 0) = \{\text{0-odd}, \text{1-even}\}$

Definition (2.3)

Ein *nichtdeterministischer endlicher Automat* ist ein 5-Tupel $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_{acc})$:

1. Q ist eine endliche Menge, die *Zustandsmenge*.
2. Σ ist eine endliche Menge, das *Eingabealphabet*.
3. $\delta : Q \times \underline{\Sigma_\varepsilon} \longrightarrow \underline{\mathcal{P}(Q)}$ ist die *Übergangsfunktion*.
4. $q_0 \in Q$ ist der *Startzustand*.
5. $Q_{acc} \subseteq Q$ ist die Menge der *akzeptierenden Zustände*.

Falls δ eine Funktion $Q \times \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}(Q)$ ist, dann heißt M nichtdeterministischer endlicher Automat *ohne ε-Transitionen*.

$\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$

$\mathcal{P}(Q)$ = Potenzmenge von Q

Berechnungen

$010 = 0\varepsilon10 = 010\varepsilon\varepsilon$

Definition (2.4)

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_{\mathrm{acc}})$ ein nichtdeterministischer endlicher Automat. Sei $w \in \Sigma^*$, $w = w_1 \ldots w_n$.

1. $s_0, s_1, \ldots, s_m \in Q$ heißt *Berechnung* von M auf w, falls $w = u_1u_2 \ldots u_m$ geschrieben werden kann mit $u_\mu \in \Sigma_\varepsilon$, so dass

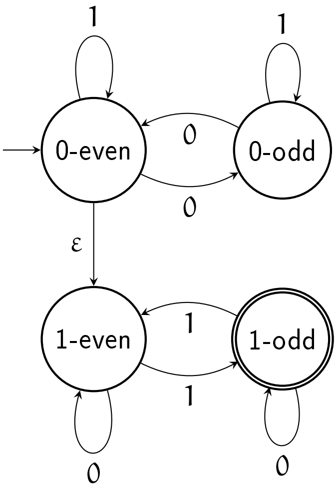
   det "="

   1.1 $s_0 = q_0$,

   1.2 für alle $0 \leq \mu < m$ ist $s_{\mu+1} \in \delta(s_\mu, u_{\mu+1})$.

2. Die Berechnunge heißt *akzeptierend*, falls $s_m \in Q_{\mathrm{acc}}$. Sonst heißt sie *verwerfend*.

Beispiel



|0101|1

0-even, $\overset{0}{\curvearrowright}$ 0-odd, $\overset{1}{\curvearrowright}$ 0-odd, $\overset{0}{\curvearrowright}$

0-even, $\overset{1}{\curvearrowright}$ 0-even, $\overset{\varepsilon}{\curvearrowright}$ 1-even, $\overset{1}{\curvearrowright}$ 1odd

+ 1 Möglichkeit

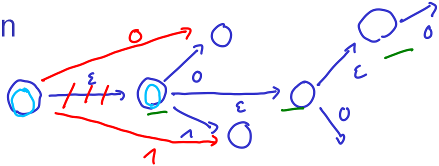
0-even, $\overset{\varepsilon}{\curvearrowright}$ 1-even, ...

Berechnungen (2)

Definition

1. Ein nichtdeterministischer endlicher Automat M *akzeptiert* ein Wort w, falls es eine akzeptierende Berechnung von M auf w gibt. Sonst verwirft M w.
2. $L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid M \text{ akzeptiert } w\}$ ist die von M erkannte Sprache.

Entfernen von ε-Transitionen



$$\begin{array}{rcll} \delta^{(\varepsilon)}: & Q \times \Sigma & \to & \mathcal{P}(Q) \\ & (q,\sigma) & \mapsto & \{r \mid \text{ es gibt } k \geq 0 \text{ und } s_0 = q, \underline{s_1, \ldots, s_k}, \text{ so dass} \\ & & & \quad s_{\kappa+1} \in \delta(s_\kappa, \varepsilon),\ 0 \leq \kappa < k \text{ und } r \in \delta(s_k, \sigma)\}. \end{array}$$

$\delta(q,\sigma) =$ alle Zustände, die ich von q erreichen kann durch beliebig viele ε-Trans. und eine Transition mit σ am Ende.

$$R^{(\varepsilon)} = \{r \in Q \mid \text{ es gibt } k \geq 0 \text{ und } s_0 = r, s_1, \ldots s_k, \text{ so dass } s_{\kappa+1} \in \delta(s_\kappa, \varepsilon),\ 0 \leq \kappa < k \text{ und } s_k \in R.\}.$$

$R^{(\varepsilon)}$ = alle Zustände, von denen aus ich einen Zustand in R erreichen kann mit beliebig vielen ε-Trans.

Enfernen von ε-Transitionen (2)

Lemma (2.6)

If $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_{acc})$ *is a nondeterministic finite automaton, then* $M' = (Q, \Sigma, \delta^{(\varepsilon)}, q_0, Q_{acc}^{(\varepsilon)})$ *is a nondeterministic finite automaton without* ε*-transitions such that* $L(M) = L(M')$.