Grundzüge der Theoretischen Informatik, WS 21/22: Musterlösung zum 6. Präsenzblatt

Julian Dörfler

Aufgabe P6.1 (Noch mehr syntaktischer Zucker)
Zeigen Sie, wie Sie einen **return** Befehl in `FOR`, bzw. in `WHILE` implementieren können. Dieser Befehl legt das Ergebnis fest und beendet das Programm.

Lösung P6.1 (Noch mehr syntaktischer Zucker)
Wir merken uns mit x_{res} welches Ergebnis berechnet wurde und mit x_{set} ob bereits ein Ergebnis berechnet wurde. Wir initialisieren x_{set} auf 0 am Anfang des Programmes.

Nun ersetzen wir jedes **return** x_i durch folgenden Code.

if $x_{set} = 0$ **then**
  $x_{res} := x_i$;
  $x_{set} := 1$
fi

Als letzten Befehl fügen wir nun ein Überschreiben von x_0 (der Ergebnis-Variable) ein, falls frühzeitig ein Ergebnis gefunden wurde.

if $x_{set} \neq 0$ **then**
  $x_0 := x_{res}$
fi

Für `WHILE` müssen wir nun noch die Terminierung garantieren, also fügen wir als letzten Befehl in jeder Schleife mit Bedingung $x_j \neq 0$ den folgenden Befehl ein:

if $x_{set} \neq 0$ **then**
  $x_j := 0$
fi

Aufgabe P6.2 (Abzählbarkeit)

(a) Seien A, B und C beliebige Mengen. Zeigen Sie, dass wenn $f : A \to B$ und $g : B \to C$ jeweils injektiv sind, auch $g \circ f : A \to C$ injektiv ist.

(b) Seien A und B abzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass $A \times B$ ebenfalls abzählbar ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}$ abzählbar ist.

(d) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ abzählbar ist.

Lösung P6.2 (Abzählbarkeit)

(a) Nehmen wir an, dass $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(a')$ für $a, a' \in A$. Das ist nach Definition $g(f(a)) = g(f(a'))$. Da g injektiv ist, muss also gelten $f(a) = f(a')$. Mit der Injektivität von f folgt nun aber auch $a = a'$ und somit die Injektivität von $g \circ f$.

(b) Wir nutzen hierzu, dass injektive Funktionen $f : A \to \mathbb{N}$ und $g : B \to \mathbb{N}$ existieren und unsere Paarfunktion injektiv ist. Nun ist die Funktion $h(a,b) := \langle f(a), g(b)\rangle$ injektiv, da aus $\langle f(a), g(b)\rangle = \langle f(a'), g(b')\rangle$ direkt $f(a) = f(a')$ und $g(b) = g(b')$ folgen durch die Injektivität der Paarfunktion.

(c) Wir bilden $n \in \mathbb{Z}$ zuerst auf $(\operatorname{sgn}(n), |n|)$ ab, wobei $\operatorname{sgn}(n)$ das Vorzeichen von n ist, also

$$\operatorname{sgn}(n) := \begin{cases} -1 & \text{wenn } n < 0 \\ 0 & \text{wenn } n = 0 \\ 1 & \text{wenn } n > 0 \end{cases}$$

Dies ist eine injektive Abbildung $\mathbb{Z} \to \{-1, 0, 1\} \times \mathbb{N}$. Nach Teilaufgabe (b) existiert aber auch eine Injektion $\{-1, 0, 1\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, da $\{-1, 0, 1\}$ als endliche Menge abzählbar ist. Nach Teilaufgabe (a) ist ihre Komposition dann auch eine injektive Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, womit $\mathbb{Z}$ abzählbar ist.

(d) Wir können die rationalen Zahlen injektiv auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ abbilden und von dort aus injektiv auf $\mathbb{N}$ abbilden, indem wir vollständig gekürzte Brüche $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ auf (p, q) abbilden. Nun nutzen wir die voherigen Teilaufgaben um eine Injektion $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zu erhalten. Nach Teilaufgabe (a) ist ihre Komposition dann auch eine injektive Abbildung $\mathbb{Q} \to \mathbb{N}$, womit $\mathbb{Q}$ abzählbar ist.

Aufgabe P6.3 (Potenzmenge)
Beweisen Sie, dass für jede Menge A gilt, dass A und die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ nicht gleichmächtig sind.

Lösung P6.3 (Potenzmenge)
Wir zeigen, dass es keine surjektive Funktion $f : A \to \mathcal{P}(A)$ geben kann. Angenommen f existiere. Dann definieren wir

$$M := \{x \mid x \notin f(x)\}.$$

Da f surjektiv ist, muss es ein $a \in A$ geben mit $f(a) = M$. Dann führen die Annahmen $a \in M$ und $a \notin M$ aber jeweils zu einem Widerspruch, denn aus $a \in M = f(a)$ folgt dass $a \notin M$ nach Definition von M. Umgekehrt folgt aus $a \notin M = f(a)$ direkt $a \in M$ nach Definition von M.

Aufgabe P6.4 (Hilberts Hotel)
Wir betrachten Hilberts bekanntes Hotel: Dies ist ein Hotel mit unendlich vielen Zimmern, durchnummeriert mit den natürlichen Zahlen, jedoch ist jeder einzelne Raum belegt. Wie müssen Sie nun die Gäste in den Zimmern verschieben, so dass Sie alle Gäste in den folgenden Szenarien in das Hotel aufnehmen können?

(a) Es kommt ein einzelner weiterer Gast an dem Hotel an.

(b) Es kommt ein Bus mit abzählbar unendlich vielen Gästen am Hotel an.

(c) Es kommt eine abzählbar unendliche Menge an Bussen mit jeweils abzählbar unendlich vielen Gästen am Hotel an.

(d) Welche Eigenschaft müsste ein Bus haben (oder die Anzahl dieser), so dass die Gäste nicht mehr untergebracht werden könnten?

Lösung P6.4 (Hilberts Hotel)

(a) Wir verschieben den Gast aus Raum n jeweils nach Raum $n + 1$. Danach ist Raum 0 leer und kann den neuen Gast aufnehmen.

(b) Wir verschieben den Gast aus Raum n jeweils nach Raum $2n$. Nun sind alle ungeraden Räume frei und wir können den m-ten neuen Gast in Raum $2m+1$ verschieben.

(c) Wir verschieben den Gast aus Raum n nach Raum $2n$. Nun verschieben wir den m-ten Gast aus dem k-ten Bus in den Raum $2(\langle m, k\rangle) + 1$. Da die Paarfunktion injektiv ist, kriegt hierbei jeder Gast einen eigenen Raum zugewiesen.

(d) Wenn entweder die Anzahl Busse oder die Anzahl der Gäste in mindestens einem der Busse überabzählbar unendlich sind könnte man die Gäste nicht mehr in dem Hotel unterbringen, da dieses nur abzählbar unendlich viele Zimmer hat.