Grundzüge der Theoretischen Informatik

Markus Bläser

Universität des Saarlandes

3.12.2021

Kapitel 14: Mehr zu Reduktionen

Wir dürfen ab jetzt φ_i statt $\varphi_{\text{göd}^{-1}(i)}$ schreiben,
d.h. wir identifizieren Gödelnummer und Programm.

Das S-m-n-Theorem

Theorem (S-m-n-Theorem)

Für alle $m, n \geq 1$ *gibt es eine FOR-berechenbare Funktion* $S_n^m : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$, *so dass für alle* $g \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}^m$ *und* $z \in \mathbb{N}^n$

$$\varphi_g^{m+n}(y, z) = \varphi^n_{S_n^m(g,y)}(z)$$

gilt.

Kapitel 15: Der Satz von Rice

Das Rekursionstheorem

Theorem (Rekursionstheorem, 15.1)

Für jede WHILE-berechenbare Funktion $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ *gibt es ein* $g \in \mathbb{N}$, *so dass*

$$\varphi_g^n(z) = f(g, z) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{N}^n.$$

15.1

$h(y,z) = f(S^1_n(y,y), z)$ für $y \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{N}^n$

h ist WHILE-ber., weil f und S^1_n WHILE-ber. sind.

Sei e eine Gödelnummer für h

S-m-n-Thm: $\varphi_e^{n+1}(y,z) = \varphi_{S^1_n(e,y)}(z)$

für alle $z \in \mathbb{N}^n$

Wir setzen $y = e$ und $g = S^1_n(e,e)$. Dann gilt

$$f(g,z) = f(S^1_n(e,e), z) = h(e,z)$$
$$= \varphi_e^{n+1}(e,z)$$
$$= \varphi_{S^1_n(e,e)}(z) = \varphi_g(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{N}^n.$$

$\square$

Quines

C:

```
#include <stdio.h>
char*f=”#include <stdio.h>%cchar*f=%c%s%c;main()
{printf(f,10,34,f,34,10);}%c”;main()
{printf(f,10,34,f,34,10);}
```

Python:

```
a=”a=%c%s%c;print(a%%(34,a,34))”;print(a%(34,a,34))
```

HQ9+:

```
Q
```

(alles von Wikipedia)

Quines in WHILE

$\varphi^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $n \geq 1$

$$s : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$$

$$s(y, z) = y \qquad \text{für alle } y, z \in \mathbb{N}$$

s ist WHILE-berechenbar

Rekursionsthm: $\exists g$: $\varphi_g(z) = f(g, z) = g$

für alle $z \in \mathbb{N}$.

$h(y,z) = s^1_{\cancel{1}\,0}(y,y)$

Sei e eine Gödelnummer von h

Dann ist $g = s^1_{\cancel{1}\,0}(e,e)$

Quines in WHILE

$$\begin{aligned} s : \ & \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \\ & s(y, z) = y \qquad \text{für alle } y, z \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Quines existieren in allen akzeptablen Programmiersystemen!

Quines - Howto

b = sys.argv[1]

- e Sourcecode von $S^1_0(y,y)$
- Dann ist $S^1_0(e,e)$ ein Quine

s   y

smn.py: s

```
import sys; a = sys.argv[1]; b = chr(115) + chr(121) +
chr(115) + chr(46) + chr(97) + chr(114) + chr(103) +
chr(118) + chr(91) + chr(49) + chr(93); a =
a.replace(b, chr(34) + a + chr(34)); print a
```

```
> python smn.py "import.sys [...] print a"
```

erzeugt einen Quine:

Quines - Howto

quine1.py:

```
import sys; a = "import sys; a = sys.argv[1]; b = chr(115)
+ chr(121) + chr(115) + chr(46) + chr(97) + chr(114) +
chr(103) + chr(118) + chr(91) + chr(49) + chr(93); a =
a.replace(b,chr(34) + a + chr(34)); print a"; b = chr(115)
+ chr(121) + chr(115) + chr(46) + chr(97) + chr(114) +
chr(103) + chr(118) + chr(91) + chr(49) + chr(93); a =
a.replace(b,chr(34) + a + chr(34)); print a
```

```
> python quine1.py
import sys; a = "import sys; a = sys.argv[1]; b = chr(115)
+ chr(121) + chr(115) + chr(46) + chr(97) + chr(114) +
chr(103) + chr(118) + chr(91) + chr(49) + chr(93); a =
a.replace(b,chr(34) + a + chr(34)); print a"; b = chr(115)
+ chr(121) + chr(115) + chr(46) + chr(97) + chr(114) +
chr(103) + chr(118) + chr(91) + chr(49) + chr(93); a =
a.replace(b,chr(34) + a + chr(34)); print a
```

(aus dem Terminal kopiert, isch schwör)

Bsp. Rekursions Thm:

$\exists\, \cancel{j}_g \in \mathbb{N}: \quad \mathrm{dom}\, \varphi_{\cancel{j}_g} = \{\cancel{j}_g\}$

$F: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$$F(y,z) = \begin{cases} 1 & \text{falls } y = z \\ \text{undef.} & \text{sonst} \end{cases}$$

F ist WHILE-ber

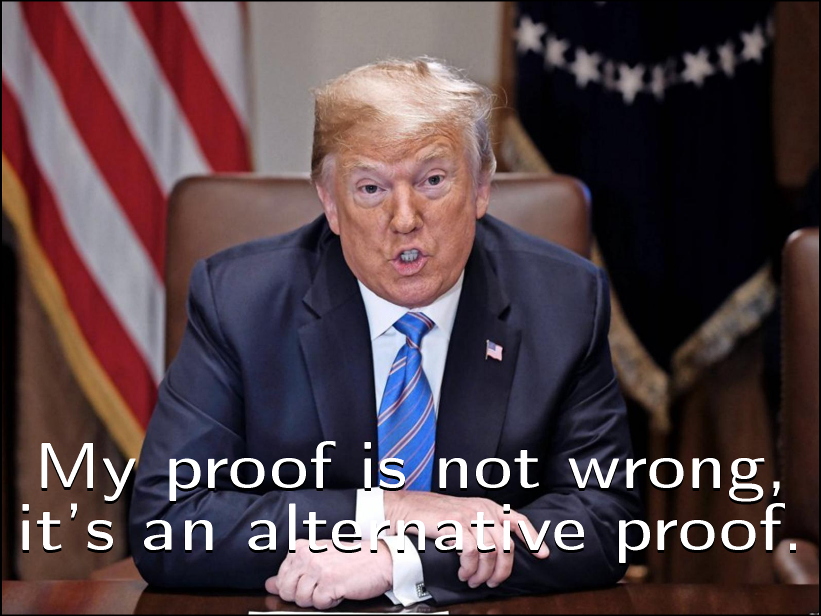
Rek. Thm: $\exists g: \quad \varphi_g(z) = F(g,z)$ für alle $z \in \mathbb{N}$.

$\varphi_g(g) = F(g,g) = 1 \quad \Rightarrow \quad g \in \mathrm{dom}\, \varphi_g$

$\forall h \neq g: \quad \varphi_g(h) = F(g,h)$ ist undef

$\Rightarrow \quad h \notin \mathrm{dom}\, \varphi_g.$

Alternativer Beweis für die Unentscheidbarkeit von H_0


My proof is not wrong,
it's an alternative proof.

Alternativer Beweis für die Unentscheidbarkeit von $H_{\cancel{0}}$

$f: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$$f(e,x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \varphi_e(x) \text{ undefiniert} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Ann: H sei entscheidbar

$\Rightarrow$ f ist WHILE-ber

Rekthm: $\exists e_0 : \varphi_{e_0}(x) = f(e_0, x)$ für alle x

Was ist $\varphi_{e_0}(e_0)$?

1) $\varphi_{e_0}(e_0)$ ist definiert:

$f(e_0, e_0) = \varphi_{e_0}(e_0)$ ist undef. ↯

2) $\varphi_{e_0}(e_0)$ ist undef:

$f(e_0, e_0) = \varphi_{e_0}(e_0) = 0$ ist def. ↯

$\Rightarrow$ H ist unentscheidbar.

Code-Minimierung

$$\mathrm{Min} = \{g \mid \text{für alle } g' \text{ mit } \varphi_g = \varphi_{g'} \text{ gilt } g \leq g'\}$$

Theorem (15.3)

$\mathrm{Min} \notin \mathsf{RE}$.

Beweis 15.3.

Ann: Min $\in$ RE

$\exists$ WHILE-ber. Fkt. h total so dass im h = Min.

Sei $F : (g, w) \mapsto \varphi_k(w)$

wobei $k = h(j)$ und

$j = \min\{ i \mid g < h(i) \}$

F ist WHILE-ber.

Um j zu finden, zählen wir $h(0), h(1), h(2), \ldots$ auf bis wir ein j finden mit $g < h(j)$. Dies terminiert da h total ist und Min unendlich ist.

Rek. Thm.: $\exists e: \varphi_e(w) = F(e,w) = \varphi_z(w)$ für alle $w \in \mathbb{N}$.

Nach Konstruktion von F gilt, dass $e < z$.

Aber es gilt auch, dass $z \in \mathrm{Min}$, denn $z \in \mathrm{im}\, h$

Dies ist ein Widerspruch, denn $\varphi_e = \varphi_z$, aber $e < z$

$\square$

Fixpunktsatz

$h(z) = z$ Fixpkt

$g(z) = z+1$ hat keinen Fixpkt.

Theorem (15.4, Fixpunktsatz)

Für alle WHILE-berechenbaren totalen Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *und alle* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, *gibt es ein* $e \in \mathbb{N}$ *mit*

$$\varphi^n_{f(e)} = \varphi^n_e.$$

$F: \quad P \mapsto P;\ x_0 := x_0 + 1$

Beweis 15.4

Sei $g(z, y) = \varphi^n_{f(z)}(y)$ für $z \in \mathbb{N}$ und $y \in \mathbb{N}^n$

g ist WHILE-ber. da f WHILE-ber. und total ist. (+ universelles Program)

Rek. Thm: $\exists e: \varphi_e^n(y) = g(e, y)$

$= \varphi^n_{f(e)}(y)$ für alle $y \in \mathbb{N}^n$.

□

Indexmengen

Satz von Rice: "Jede nicht-triviale semantische Programmeigenschaft ist unentscheidbar".

Definition (15.5, Indexmenge)

$I \subseteq \mathbb{N}$ heißt *Indexmenge*, falls

$$\text{für alle } i, j \in \mathbb{N} \text{ gilt: } i \in I \text{ und } \varphi_i = \varphi_j \implies j \in I.$$

Eine Indexmenge I ist *nicht-trivial*, falls zusätzlich $I \neq \emptyset$ und $I \neq \mathbb{N}$ gilt.

Indexmengen sind durch semantische Eigenschaften definiert:

Bemerkung

I ist Indexmenge genau dann, wenn es eine Menge F von WHILE-berechenbaren Funktionen gibt mit $I = \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i \in F\}$.

Hot or not?

$\forall i,j: \quad i \in I \ \wedge \ \varphi_i = \varphi_j \ \Rightarrow \ j \in I$

Welche Mengen sind Indexmengen?

1. $V_0 = \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{N}\}$. ✓
2. $N_1 = \{g \in \mathbb{N} \mid g \leq 10000\}$ ✗
3. $N_2 = \{g \in \mathbb{N} \mid \varphi_g(0) = 0$ und $g \geq 10000\}$ ✗
4. $T = \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i$ ist total$\}$ ✓
5. H_0, das spezielle Halteproblem ✗
6. $D_c = \{i \in \mathbb{N} \mid |\mathrm{dom}\, \varphi_i| \geq c\}$ für alle $c \in \mathbb{N}$, ✓
7. $\mathrm{Mon} = \{i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i$ ist monoton$\}$ ✓
8. H, das Halteproblem oder nicht

$H = \{ \langle i, x \rangle \mid \varphi_i(x)$ ist def. $\}$

$H_0 \in H$? ✗ $\quad i \in H_0 \Rightarrow \langle i, i \rangle \in H_0$

1. Sei $i \in V_0$ und $\varphi_i = \varphi_j$.

Da $i \in V_0$ gilt $\varphi_i(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{N}$

$$\underset{\varphi_j(x)}{\overset{\Downarrow}{}}$$

$\Rightarrow j \in V_0$

2. Zu jeder WHILE-ber. Fkt. gibt es ∞ - viele WHILE-Programme

3. Es gibt ein $g \leq 10\,000$ mit $\varphi_g(0) = 0$

god ($x_0 := x_0 + x_0$) $= 0$

4. Sei $i \in T$ und $\varphi_i = \varphi_j$.

Da $i \in T$ ist φ_i total. Da $\varphi_i = \varphi_j$ ist auch φ_j total. $\Rightarrow j \in T$.

5. Wir haben ein g konstruiert mit der $\varphi_g = \{g\}$

$g \in H_0$.

Aber gilt $\varphi_g = \varphi_j$, $j \neq g$, dann ist

$\varphi_j(j) = \varphi_g(j)$ undef. $\Rightarrow$ $j \notin H_0$

Der Satz von Rice

Theorem (15.8, Satz von Rice)

Jede nicht-triviale Indexmenge ist unentscheidbar

“Jede nicht-triviale semantische Programmeigenschaft ist unentscheidbar”

Der Satz von Rice liefert einen alternativen Beweis, dass V_0, V, T, $D_c, \ldots$ unentscheidbar sind.