# Grundzüge der Theoretischen Informatik

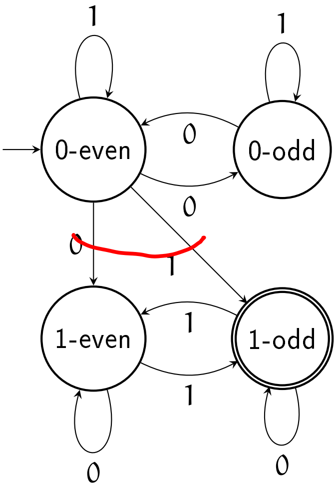
27. Oktober 2021

Markus Bläser

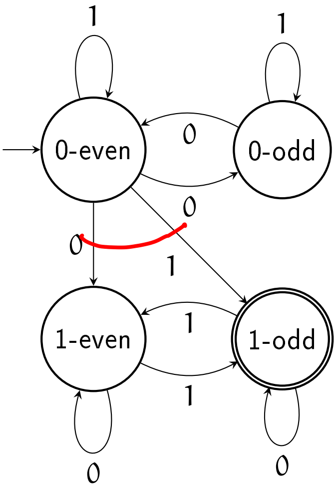
Universität des Saarlandes

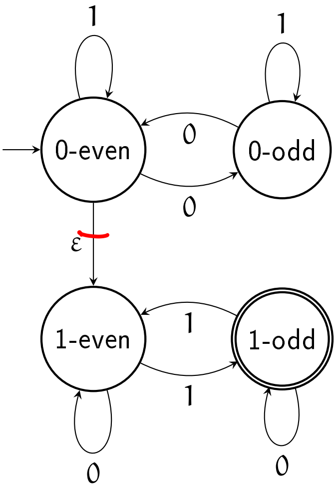
# Kapitel 2: Nichtdeterministische endliche Automaten

# ε-Transitionen



# ε-Transitionen



# Nichtdeterministische endliche Automaten

$\Sigma_\varepsilon = \{\varepsilon\} \cup \Sigma$

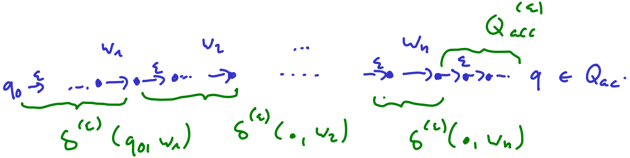
## Definition (2.3)

Ein *nichtdeterministischer endlicher Automat* ist ein 5-Tupel $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_{acc})$:

1. $Q$ ist eine endliche Menge, die *Zustandsmenge*.
2. $\Sigma$ ist eine endliche Menge, das *Eingabealphabet*.
3. $\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \to \mathcal{P}(Q)$ ist die *Übergangsfunktion*.
4. $q_0 \in Q$ ist der *Startzustand*.
5. $Q_{acc} \subseteq Q$ ist die Menge der *akzeptierenden Zustände*.

Falls $\delta$ eine Funktion $Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ ist, dann heißt $M$ nichtdeterministischer endlicher Automat *ohne $\varepsilon$-Transitionen*.

# Entfernen von ε-Transitionen




$$
\begin{aligned}
\delta^{(\varepsilon)} : \quad Q \times \Sigma \quad &\to \quad \mathcal{P}(Q) \\
(q, \sigma) \quad &\mapsto \quad \{r \mid \text{ es gibt } k \geq 0 \text{ und } s_0 = q, s_1, \dots, s_k, \text{ so dass} \\
&\qquad\qquad s_{\kappa+1} \in \delta(s_\kappa, \varepsilon),\ 0 \leq \kappa < k \text{ und } r \in \delta(s_k, \sigma)\}.
\end{aligned}
$$

$\delta^{(\varepsilon)}(q,\sigma)$ = alle Zustände, die ich von q erreiche mit ε-Transition und einem σ-Übergang am Ende

$$
\begin{aligned}
R^{(\varepsilon)} = \{r \in Q \mid \quad &\text{es gibt } k \geq 0 \text{ und } s_0 = r, s_1, \dots s_k, \text{ so dass} \\
&s_{\kappa+1} \in \delta(s_\kappa, \varepsilon),\ 0 \leq \kappa < k \text{ und } s_k \in R.\}.
\end{aligned}
$$

$R^{(\varepsilon)}$ = alle Zustände, von denen aus ich einen Zustand aus R erreichen kann mit ε-Transitionen

# Enfernen von ε-Transitionen (2)

## Lemma (2.6)

*If* $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_{acc})$ *is a nondeterministic finite automaton, then* $M' = (Q, \Sigma, \delta^{(\varepsilon)}, q_0, Q_{acc}^{(\varepsilon)})$ *is a nondeterministic finite automaton without ε-transitions such that* $L(M) = L(M')$.

Beweis: $M'$ hat offensichtlich keine ε-Transitionen

"$\subseteq$": $M$ akzeptiert $w$; $|w| = n$ d.h. wir können $w$ schreiben als $w = u_1 u_2 \dots u_m$ mit $u_\mu \in \Sigma_\varepsilon$, $1 \leq \mu \leq m$ und es gilt Zustände $s_0 = q_0, s_1, \dots, s_m$ so dass gilt: $s_{\mu+1} \in \delta(s_\mu, u_\mu)$ für alle $\mu$.

Seien $i_1, \dots, i_n$ so dass $u_{i_1} \dots u_{i_n} = w$

Sei $i_0 := 0$. Es gilt nach Konstruktion:

$\delta^{(\varepsilon)}(s_{i_\nu}, u_{i_{\nu+1}}) = s_{i_{\nu+1}}$ für alle $0 \leq \nu < n$

$s_{i_n} \in Q_{acc}^{(\omega)}$, da $M$ $w$ akzeptiert ✓

„$\supseteq$" genauso nur rückwärts ✓

# Erweiterte Übergangsfunktionen

$\delta^* : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$

$\delta^*(R, w) = \bigcup_{r \in R} \delta^*(r, w)$

$$\delta^* : Q \times \underline{\Sigma^*} \to \underline{\mathcal{P}(Q)}$$

$$\begin{aligned}
\delta^*(q, \varepsilon) &= \{q\} && \text{für alle } q \in Q, \\
\delta^*(q, w\sigma) &= \bigcup_{r \in \delta^*(q,w)} \delta^{(\varepsilon)}(r, \sigma) && \text{für alle } q \in Q,\ w \in \Sigma^*,\ \sigma \in \Sigma.
\end{aligned}$$

$\Sigma$

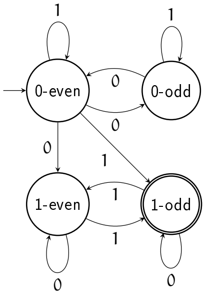
“$\delta^*(q, x)$ enthält alle Zustände, die von $q$ aus mit $x$ erreicht werden können, wenn man nach dem Lesen des letzten Symbols von $x$ keine $\varepsilon$-Transition machen darf.”

**Beobachtung:** $M$ akzeptiert $x \iff \delta^*(q_0, x) \cap Q_{acc}^{(\varepsilon)} \neq \emptyset$.

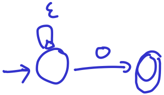
es gibt mindestens einen Zustand, den ich von $q_0$ aus erreichen kann und von dem ich mit $\varepsilon$-Trans. nach $Q_{acc}$ komme.

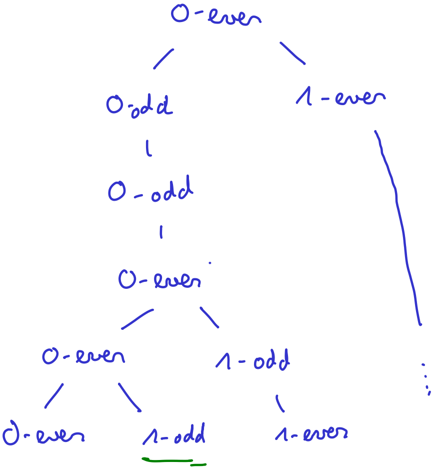
# Berechnungsbäume

Systematischer Weg, alle Berechnungen auf ein Wort zu notieren.




01011



# Nichtdeterminismus versus Determinismus

**Theorem (2.8)**

*Sei* $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_{\mathrm{acc}})$ *ein nichtdeterministicher endlicher Automat. Dann gibt es einen deterministischen endlichen Automaten* $\hat{M} = (\hat{Q}, \Sigma, \hat{\delta}, \hat{q}_0, \hat{Q}_{\mathrm{acc}})$*, so dass* $L(M) = L(\hat{M})$.

Beweis 2.8.

O.E. habe $M$ keine $\varepsilon$-Trans.

$$\hat{Q} := \mathcal{P}(Q)$$

$$\hat{q}_0 := \{q_0\}$$

$$\hat{Q}_{acc} := \{ R \in \hat{Q} \mid R \cap Q_{acc} \neq \emptyset \}$$

$$\hat{\delta}(R, \sigma) = \bigcup_{r \in R} \delta(r, \sigma)$$

Intuition: $R \in \hat{Q}$ speichert alle Zustände in die $M$ gelangen kann mit irgendeiner Berechnung.

$$\boxed{\hat{\delta}^*(R, w) = \bigcup_{r \in R} \delta^*(r, w)}$$ für alle $R \subseteq Q$ und $w \in \Sigma^*$

Beweis per Induktion in der Länge von $w$.

Für $w = \varepsilon$ gilt

$$\hat{\delta}^*(R, \varepsilon) = R = \bigcup_{r \in R} \underbrace{\delta^*(r, \varepsilon)}_{\{r\}}$$

Für den Induktionsschritt schreiben wir $w = x\sigma \in \Sigma$

$$\hat{\delta}^*(R, w) = \hat{\delta}(\hat{\delta}^*(R, x), \sigma) = \hat{\delta}\Big(\bigcup_{r \in R} \delta^*(r, x), \sigma\Big)$$

$$= \bigcup_{\boxed{s \in \bigcup_{r \in R} \delta^*(r, x)}} \hat{\delta}(s, \sigma) = \bigcup_{r \in R} \bigcup_{s \in \delta^*(r, x)} \hat{\delta}(s, \sigma)$$

$$= \bigcup_{r \in R} \delta^*(r, w)$$

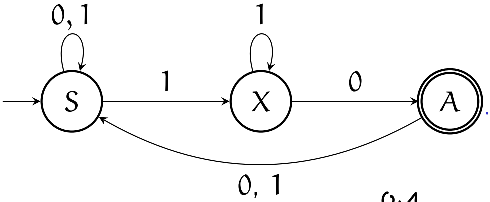
$\hat{M}$ akz. $w$ $\iff$ $\hat{\delta}^*(\hat{q}_0, w) \in \hat{Q}_{acc}$

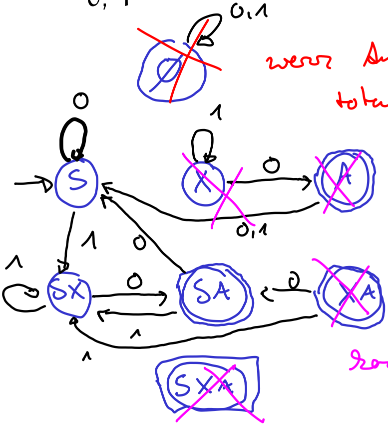
$$\Updownarrow$$

$M$ akz $w$ $\iff$ $\delta^*(q_0, w) \cap Q_{acc} \neq \emptyset$

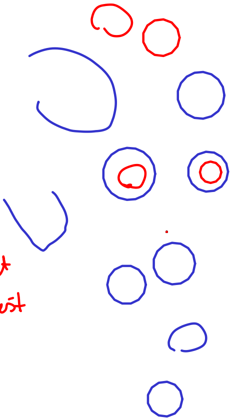
$\Rightarrow$ $L(M) = L(\hat{M})$. $\square$

# Beispiel




wenn Automat total ist

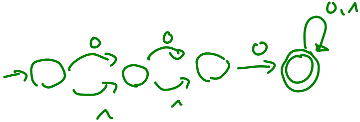


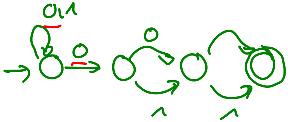
korrekt in diesem Bsp.

# Ist der exponentielle Blowup nötig?

$$S_n = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{das } n\text{-te Symbol von rechts ist eine } 0\}.$$

3
~~n~~-te Symbol von links,



# Abschlusseigenschaften II

**Theorem (2.10)**

REG *ist abgeschlossen unter Konkatenation und Kleenescher Hülle, d.h. sind* $A, B \in \mathsf{REG}$, *so auch* $AB, A^* \in \mathsf{REG}$.

# Abschlusseigenschaften II

## Theorem (2.10)

REG *ist abgeschlossen unter Konkatenation und Kleenescher Hülle, d.h. sind* $A, B \in$ REG, *so auch* $AB, A^* \in$ REG.

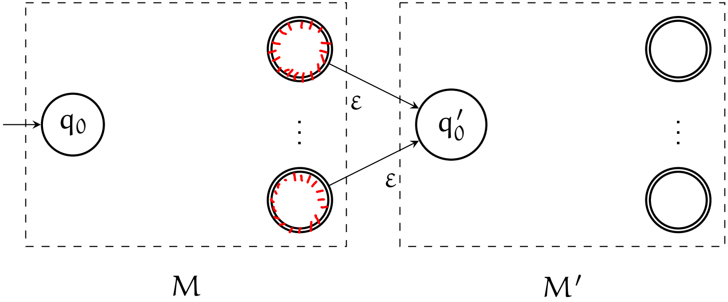
- $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_{\mathrm{acc}})$ DEA für $A$
- $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', Q'_{\mathrm{acc}})$ DEA für $B$
- $Q \cap Q' = \emptyset$.

# Abschlusseigenschaften II

## Theorem (2.10)

REG *ist abgeschlossen unter Konkatenation und Kleenescher Hülle, d.h. sind* $A, B \in$ REG, *so auch* $AB, A^* \in$ REG.

- $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_{acc})$ DEA für $A$
- $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', Q_{acc}')$ DEA für $B$
- $Q \cap Q' = \emptyset$.



$, AB$

$N_1 = (Q \cup Q', \Sigma, \delta_1, q_0, Q'_{acc})$

$$\delta_1(q,\sigma) = \begin{cases} \delta(q,\sigma) & \text{falls } q \in Q, \sigma \neq \varepsilon \\ \delta'(q,\sigma) & \text{falls } q \in Q', \sigma \neq \varepsilon \\ q_0' & \underline{\text{falls } q \in Q_{acc} \wedge \sigma = \varepsilon} \\ \text{undef} & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $x \in A$ und $\underset{q_0}{\overset{}{s_0}}, \dots, s_m$ $\in Q_{acc}$ eine akz. Ber. in $M$

$y \in B$ und $s_0', \dots, s_n'$ " $M'$

$s_0' = q_0'$, $s_n' \in Q'_{acc}$

Dann ist $s_0, \dots, s_m \mid s_0', \dots, s_n'$ eine akz. Ber.

von $N_1$ auf $xy$

$\Rightarrow xy \in L(N_1) \Rightarrow AB \subseteq L(N_1)$

$L(N_1) \subseteq AB$

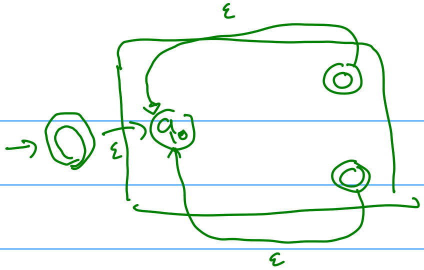
$z \in L(N_1)$ und $\overset{a_0}{\overset{\shortparallel}{t_0}}, t_1, .., t_m$ ist eine akzeptierende Berechnung von $N_1$ auf $z$.

Dann gilt es genau ein $i$ : $t_i \in Q$ und $t_{i+1} \in Q'$

Dann ist $t_i \in Q_{acc} \Rightarrow z_1 .. z_i \in A$

Nach Konstruktion ist $t_{i+1} = q_0'$ und dies geht nur mit $\varepsilon$-Trans.

$t_{i+1}, .., t_m$ eine akz. Ber von $M'$ auf $z_{i+1} .. z_m \Rightarrow \in B$


ε
$q_0$
ε
ε