Grundzüge der Theoretischen Informatik, WS 21/22: Musterlösung zum 2. Präsenzblatt

Julian Dörfler

Aufgabe P2.1 (Identitäten)
Zeigen Sie die folgenden Identitäten für alle regulären Ausdrücke E, F und G.

(a) $(E + F) + G = E + (F + G)$

(b) $E + E = E$

(c) $\varepsilon E = E\varepsilon = E$

(d) $\emptyset^\star = \varepsilon$

Lösung P2.1 (Identitäten)

(a) Wir verwenden die Assoziativität der Mengenvereinigung:

$$\begin{aligned} L((E + F) + G) &= L(E + F) \cup L(G) \\ &= (L(E) \cup L(F)) \cup L(G) \\ &= L(E) \cup (L(F) \cup L(G)) \\ &= L(E) \cup L(F + G) \\ &= L(E + (F + G)) \end{aligned}$$

(b) Wir verwenden die Idempotenz der Mengenvereinigung.

$$\begin{aligned} L(E + E) &= L(E) \cup L(E) \\ &= L(E) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} L(\varepsilon E) &= L(\varepsilon)L(E) \\ &= \{\varepsilon\}L(E) \\ &= L(E) \\ &= L(E)\{\varepsilon\} \\ &= L(E)L(\varepsilon) \\ &= L(E\varepsilon) \end{aligned}$$

Hierbei folgen die mittleren Schritte aus der Neutralität von ε bezüglich der Stringkonkatenation.

(d) Sei $x \in L(\emptyset^\star)$. Dann existieren $k \in \mathbb{N}$ Wörter $x_1, x_2, \ldots, x_k \in L(\emptyset) = \emptyset$ mit $x = x_1 x_2 \ldots x_k$, es gilt also $k = 0$. Somit ist $x = \varepsilon \in L(\varepsilon)$. Umgekehrt ist für $x \in L(\varepsilon)$ direkt $x = \varepsilon$. ε ist aber eine Konkatenation mit 0 Wörtern aus $L(\emptyset)$, somit $x \in L(\emptyset^\star)$.

Aufgabe P2.2 (Reguläre Sprachen)
Beweisen Sie, dass für alle regulären Sprachen L die Sprache $L^{\text{-}0} = \{xy \mid x0y \in L\}$ regulär ist.

Lösung P2.2 (Reguläre Sprachen)
Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_{\text{acc}})$ ein DEA, der L erkennt. Wir konstruieren nun für $L^{\text{-}0}$ einen nichtdeterministischen endlichen Automaten $M^{\text{-}0} = (Q', \Sigma, \delta', q_0^{(1)}, Q'_{\text{acc}})$, wobei $Q' = \{q^{(i)} \mid q \in Q, i \in \{1,2\}\}$ ist und die akzeptierenden Zustände als $Q'_{\text{acc}} = \{p^{(2)} \mid p \in Q_{\text{acc}}\}$ gewählt werden. Die Zustandsübergangsfunktion δ' ergibt sich durch folgende Übergänge:

- $\delta'(q^{(i)}, \sigma) = \{\delta(q, \sigma)^{(i)}\}$ für alle $q \in Q$, $i \in \{1, 2\}$ und $\sigma \in \Sigma$,
- $\delta'(q^{(1)}, \varepsilon) = \{\delta(q, 0)^{(2)}\}$ für alle $q \in Q$.

Nun ist $L(M^{\text{-}0}) = L^{\text{-}0}$.

$\supseteq$: Sei $x = x_1 x_2 \ldots x_n \in L^{\text{-}0}$.

Dann gibt es ein $k \in \{0, \ldots, n\}$, so dass $x_1 x_2 \ldots x_k 0 x_{k+1} \ldots x_n \in L$.

Dann gibt es $q, q', q'' \in Q$ mit $q = \delta^\star(q_0, x_1 \ldots x_k)$, $q' = \delta(q, 0)$ und schließlich $\delta^\star(q', x_{k+1} \ldots x_n) = q'' \in Q_{\text{acc}}$.

Nun ist $q'^{(2)} \in \delta'(q^{(1)}, \varepsilon)$. Nach Konstruktion ist $q^{(1)} \in \delta'^\star(q_0^{(1)}, x_1 \ldots x_k)$. Wir nehmen die ε-Transition nach $q'^{(2)}$. Schließlich ist $q''^{(2)} \in \delta'^\star(q'^{(2)}, x_{k+1} \ldots x_n)$ und $q''^{(2)} \in Q'_{\text{acc}}$. Somit akzeptiert $M^{\text{-}0}$ das Wort x.

$\subseteq$: Sei $x \in L(M^{\text{-}0})$.

Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ und eine Folge von Zuständen $q_0^{(1)}, \ldots q_k^{(1)}, q_{k+1}^{(2)}, \ldots q_n^{(2)}$, die $M^{\text{-}0}$ auf x durchläuft.

Sei also $x = x_1 \ldots x_k \varepsilon x_{k+1} \ldots x_n$. Nach Konstruktion ist $\delta(q_i, x_i) = q_{i+1}$ für $i \neq k$ und $\delta(q_k, 0) = q_{k+1}$ und $q_n \in Q_{\text{acc}}$. Damit ist $x_1 \ldots x_k 0 x_{k+1} \ldots x_n \in L$, woraus $x \in L^{\text{-}0}$ folgt.

Aufgabe P2.3 (Letztendlich periodisch)
Eine Menge $U \subseteq \mathbb{N}$ heißt *letztendlich periodisch*, wenn es natürliche Zahlen n_0 und p mit $p > 0$ gibt, so dass

$$\forall n \geq n_0 : n \in U \Leftrightarrow n + p \in U\,.$$

Zeigen Sie: Eine unäre Sprache $L \subseteq \{1\}^\star$ ist genau dann regulär, wenn die Menge $E = \{e \in \mathbb{N} \mid 1^e \in L\}$ letztendlich periodisch ist.

Lösung P2.3 (Letztendlich periodisch)

$\Leftarrow$ Seien n_0 und p beliebig, aber fest. Wir schreiben $E = E_{\mathsf{fin}} \cup E_0 \cup \cdots \cup E_{p-1}$, wobei

$E_{\mathsf{fin}} = \{e \in E \mid e < n_0\}$ und

$E_i = \{e \in E \mid e \geq n_0 \wedge e \bmod p = i\}$ für alle $i \in \{0, \ldots, p-1\}$.

Da E letztendlich periodisch ist, gilt für alle $i \in \{0, \ldots, p-1\}$:

$$E_i \neq \emptyset \Leftrightarrow E_i = \{e \in \mathbb{N} \mid e \geq n_0 \wedge e \bmod p = i\}\,.$$

Dann gilt $L = L_{\mathsf{fin}} \cup L_0 \cup \cdots \cup L_{p-1}$, wobei

$L_{\mathsf{fin}} = \{1^e \mid e \in E_{\mathsf{fin}}\}$ und

$L_i = \emptyset \cup L_i = \{1^e \mid e \geq n_0\} \cap \{1^e \mid e \bmod p = i\}$ für alle $i \in \{0, \ldots, p-1\}$.

Da L_{fin} und $\emptyset$ endlich und $\{1^e \mid e \geq n_0\}$ und $\{1^e \mid e \bmod p = i\}$ regulär sind, folgt mit der Abgeschlossenheit unter Schnitt und Vereinigung, dass auch L regulär ist.

$\Rightarrow$ Diese Richtung kann als *Pumping-Lemma für unäre Sprachen* betrachtet werden. Wenn L regulär ist, gibt es einen deterministischen endlichen Automaten M, der L akzeptiert. Da L außerdem unär ist, hat jeder Zustand M höchstens eine ausgehende Transition. Ein solcher Automat *ist ein Pfad, gefolgt von einer Schlaufe.* Formaler gesagt gibt es ein n_0 und ein $p > 0$, so dass M die Zustände $s_0, \ldots, s_{n_0+p-1}$ und Transitionen $s_{i-1} \xrightarrow{1} s_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n_0 + p - 1\}$ hat. Ferner kann es die Transition $s_{n_0+p-1} \xrightarrow{1} s_{n_0}$ geben (wenn nicht, ist die Schlaufe leer und die akzeptierte Sprache ist endlich). Wenn L endlich ist, ist E auch endlich und daher letztendlich periodisch (wähle $n_0 > \max E$). Ansonsten sei $e \in \mathbb{N}$ mit $e \geq n_0$. Um zu zeigen, dass E letztendlich periodisch ist, genügt es zu zeigen, dass

$$1^e \in L \Leftrightarrow 1^{e+p} \in L\,.$$

Sei also $1^e \in L$. Da $e \geq n_0$ befinden wir uns in einem akzeptierenden Zustand innerhalb der Schlaufe. Da die Schlaufe die Länge p hat, befinden wir uns nach dem Lesen von weiteren p 1en im selben akzeptierenden Zustand. 1^{e+p} ist also in L.

Sei nun $1^{e+p} \in L$. Da $e \geq n_0$ und die Schlaufe die Länge p hat, befinden wir uns innerhalb der Schlaufe in einem akzeptierenden Zustand, den wir vor p Schritten schon einmal getroffen haben. Folglich ist $1^e \in L$.