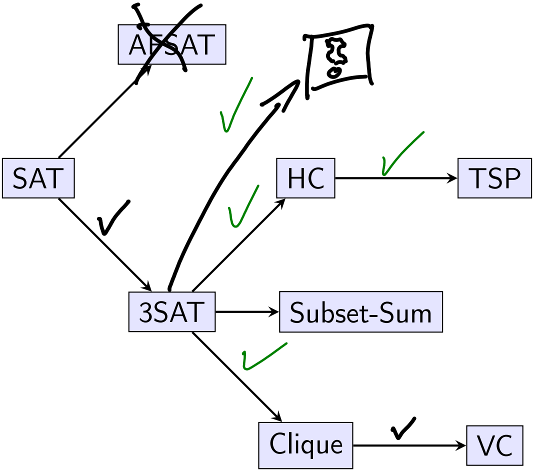
Grundzüge der Theoretischen Informatik

19. Januar 2022

Markus Bläser

Universität des Saarlandes

Reduktionsstrategie



NP-Vollständigkeit (2)

Satz (Cook–Karp–Levin, 23.7)

SAT *ist* NP*-vollständig.*

Lemma

23.9 Für alle $\ell \geq 3$ *ist* $\ell\mathrm{SAT}$ NP*-schwer.* ✓

Lemma

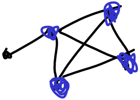
23.10 $\ell\mathrm{SAT} \leq_{\mathrm{P}} \mathrm{Clique}$. → jetzt

3SAT

Lemma

23.11 $\mathrm{Clique} \leq_{\mathrm{P}} \mathrm{VC}$. ✓

Beweis Lemma 23.10



4-Clique

x_1 —— x_1

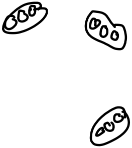
x_1 —— $\overline{x_2}$

- Sei

$$\phi = (\ell_{1,1} \vee \ell_{1,2} \vee \ell_{1,3}) \wedge \cdots \wedge (\ell_{m,1} \vee \ell_{m,2} \vee \ell_{m,3}).$$

~~x_i —— $\overline{x_i}$~~

- Zu konstruieren: (G, k), so dass G eine k-Clique hat genau dann wenn ϕ erfüllbar ist.



- $V = \{\underbrace{(1,1),(1,2),(1,3)}_{\text{Klausel } 1}, \underset{i}{\ldots}, \underbrace{(m,1),(m,2),(m,3)}_{\text{Klausel } m}\}$
- Alle Kanten der Form $\{(i,s),(j,t)\}$, so dass $i \neq j$ und $\ell_{i,s} \neq \overline{\ell}_{j,t}$.

Können gleichzeitig erfüllt sein.

- $k = m$

Aus jeder Klausel ist genau ein Knoten gewählt

Ist Φ erfüllbar. Dann gibt es eine erfüllende Belegung
$x_1, \dots, x_n$.

Wähle die Knoten, die zu erfüllten Literalen gehören, genau 1 pro Klausel (bei mehreren ein beliebiges)

$\Rightarrow$ Es ist niemals ein Literal und seine Negation gewählt.

$\Rightarrow$ Es existieren paarweise alle Kanten in G.

$\Rightarrow$ Die Knoten bilden eine m-Clique $(G, k) \in Clique$
$$\overset{\shortparallel}{(G, m)}$$

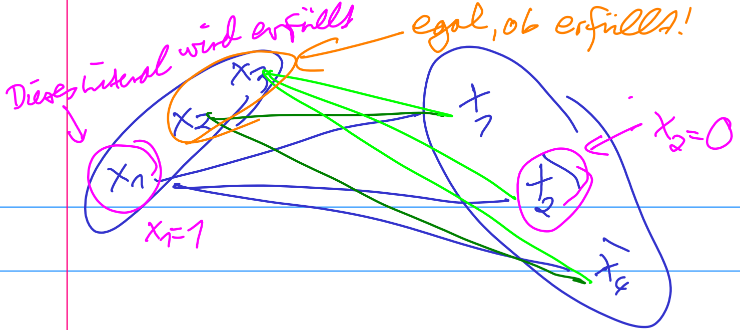
Sei C eine m-Clique.

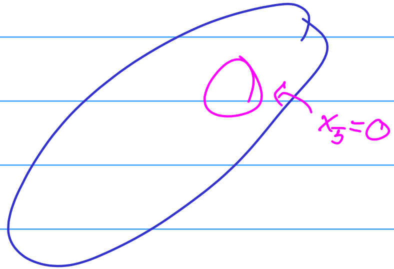
C enthält pro Klausel exakt 1 Knoten und kein Literal + Negation.

Wähle $x_i = 1$, wenn x_i in C positiv vorkommt.

$\Rightarrow$ Alle Klauseln werden erfüllt. $\Rightarrow \Phi \in 3\text{-SAT}$

$\overline{x_i}$ wird von $x_i := 0$ erfüllt


Dieses Literal wird erfüllt
egal, ob erfüllt!
x1
x2
x3
x1
x2
x4
x1=1
x2=0


0
x5=0

NP-Vollständigkeit (3)

Gibt es einen Kreis, der jeden Knoten des Graphen genau 1x besucht

Hamilton Kreis

geg. ein vollst. unger. Graph, ∃ Kreis durch alle Knoten mit Gewicht ≤ b

Traveling Salesmen Problem.

Lemma (23.14)

HC $\leq_P$ TSP.

- Sei $G = (V, E)$.
- Sei $H = (V, \binom{V}{2}, w)$. $b = n$

alle ungeordneten Paare zw. 2 unterschiedl. Knoten aus V

Definiere für alle $e \in \binom{V}{2}$: $w(e) = \begin{cases} 1 & \text{falls } e \in E \\ 2 & \text{falls } e \notin E \end{cases}$

Idee: Ein Hamilton Kreis hat Gewicht n,
jeder andere Kreis hat Gewicht mindestens n+1

formaler Beweis: Übung

NP-Vollständigkeit (4)

Satz (23.15)

Clique, VC, Subset-Sum, HC, TSP, SAT *und* 3SAT *sind* NP-*vollständig.*

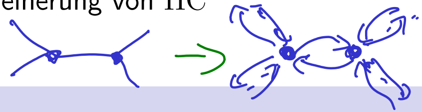
Kapitel 24: Kompliziertere Reduktionen

Gerichtetes Hamiltonsches Kreisproblem

- Gerichteter Graph $G = (V, E)$, $E \subseteq V \times V$.
- Sei $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$.
- Ein gerichteter Hamiltonscher Kreis ist eine Permutation π so dass $(v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}) \in E$ für alle $1 \leq i < n$ und $(v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}) \in E$.

  Ein Kreis der alle Knoten genau 1x besucht

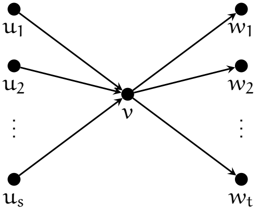
- Dir-HC ist eine Verallgemeinerung von HC
- Es gilt $\mathrm{HC} \leq_P \text{Dir-HC}$.



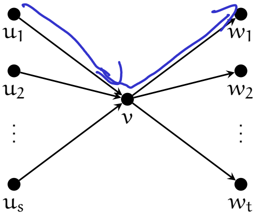
Lemma (24.1)

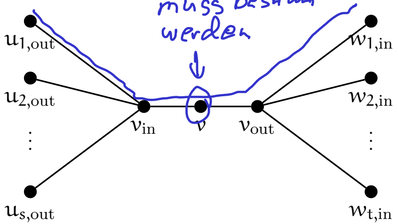
$\text{Dir-HC} \leq_P \mathrm{HC}$.

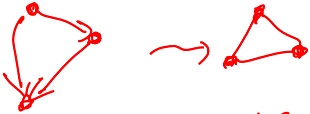
Proof of Lemma 24.1



Proof of Lemma 24.1



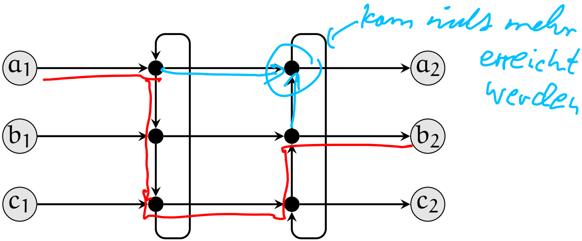




$\nexists$ dir HC $\Leftrightarrow$ $\exists$ HC

$\Rightarrow$ Nur Kanten ungerichtet machen reicht nicht aus.

Das Gadget



Lemma (24.2)

Pfade von a_1 enden bei a_2, $b_1 \ldots b_2$, $c_1 \ldots c_2$

Sei G *der obige Graph.*

1. *Für jede* nicht leere *Teilmenge* $S \subseteq \{(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)\}$*, gibt es knoten-disjunkte Pfade von* s *nach* t *für alle* $(s, t) \in S$*, so dass alle inneren Knoten von* G *auf einem dieser Pfade liegen.*
2. *Für alle anderen Teilmengen* $T \subseteq \{a_1, b_1, c_1\} \times \{a_2, b_2, c_2\}$*, gibt es solche Pfade nicht.*

Die Reduktion

Lemma (24.3)

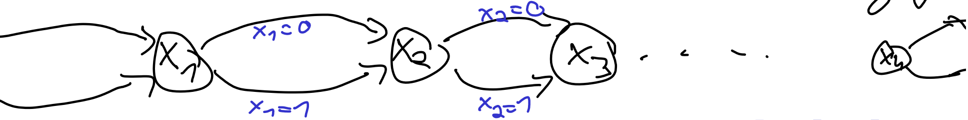
3SAT $\leq_P$ Dir-HC.

Ziel:

- Gegeben eine Formel ϕ in 3-CNF, konstruiere einen Graph G, so dass ϕ erfüllbar ist genau dann wenn G einen Hamiltonschen Kreis hat

Konstruktion:

- Jedes Variable x_i wird durch einen Knoten repräsentiert.
- Jede Klausel c_j durch eine Kopie C_j des Graphen G. → Klauselgadget



Beispiel

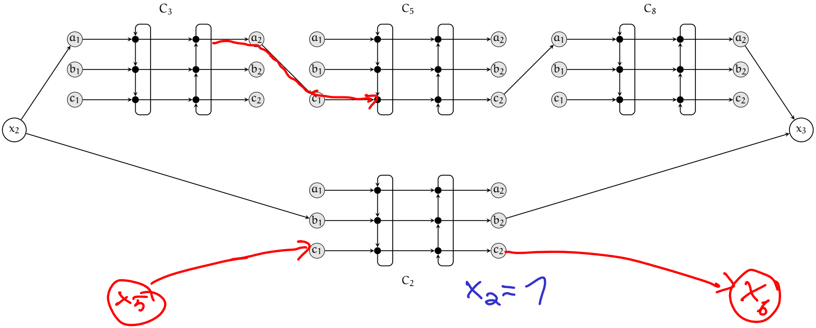
$C_3: \overline{X_2} \vee . . \vee$

$C_5: .. \vee .. \vee \overline{X_2}$

$C_8: \overline{X_2} \vee ... \vee ...$

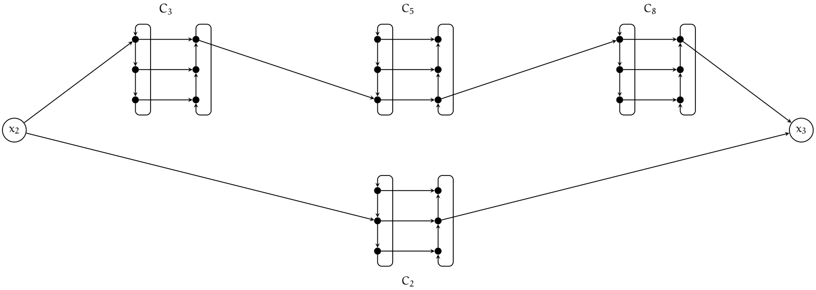
$X_2 = 0$

$C_2: ... \vee X_2 \vee X_5$



- x_2 ist das erste Literal in c_3, das dritte Literal in c_5 und das erste in c_8.
- $\bar{x}_1$ ist das zweite Literal von c_2.

Beispiel (2)



- x_2 ist das erste Literal in c_3, das dritte Literal in c_5 und das erste in c_8.
- $\bar{x}_1$ ist das zweite Literal von c_2.

Subset-Sum

Geg. $(x_1, \ldots x_n, b)$

Ex ein $I \subseteq \{1, \ldots n\}$

$$\sum_{i \in I} x_i = b$$

Lemma (23.12) //

3SAT $\leq_P$ Subset-Sum.

Beweis Lemma 23.12

- $x_1, \dots, x_n$ Variablen in ϕ.
- $c_1, \dots, c_m$ Klauseln in ϕ.
- Für jedes Literal ℓ konstruieren wir eine Zahl $a(\ell)$:

$$a(\ell) = \underbrace{a_0(\ell)}_{\text{Variablen}} + \underbrace{10^n \cdot a_1(\ell)}_{\text{Klauseln}}$$

- Für jede Variable x_ν seien $c_{\mu_1}, \dots, c_{\mu_{s_\nu}}$ die Klauseln, die das Literal x_ν enthalten:

$$a(x_\nu) = 10^{\nu-1} + 10^n(10^{\mu_1 - 1} + \dots + 10^{\mu_{s_\nu}-1}).$$

- Für ein Literal $\bar{x}_\nu$ seien $c_{\bar{\mu}_1}, \dots, c_{\bar{\mu}_{\bar{s}_\nu}}$ die Klauseln, die das Literal $\bar{x}_\nu$ enthalten:

$$a(\bar{x}_\nu) = 10^{\nu-1} + 10^n(10^{\bar{\mu}_1 - 1} + \dots + 10^{\bar{\mu}_{\bar{s}_\nu}-1}).$$

- Zielzahl: $b = b_0 + 10^n b_1$ mit $b_0 = 1 + 10 + \dots + 10^{n-1}$.

Für jede Variable x_i:

Jeder Block summiert sich über alle Zahlen zu ≤ 3

$$\begin{array}{l|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
 & 0 & & & & & n-1 & & & & & & & n+m-1 \\
a(x_1) = & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

(i-1)-te Stelle hat 1

$$\begin{array}{l|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
a(\overline{x_1}) = & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Variablenanteil — Klauselanteil

$c_5 = x_1 \vee \dots$

$c_2 = x_1 \vee \overline{x_4}.$

$c_3 = \overline{x_1} \vee \dots$

jeder Var kommt genau 1x vor.

$$\begin{array}{l|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
b = & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3
\end{array}$$

1. Versuch

2. Versuch

$* \in \{1,2,3\}$

$$\begin{array}{l|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
 & & & & & & & & & & n+\mu-1 & & & \\
c_{\mu,i} = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Slackvariable für die μ-te Klausel.

$c_{\mu,1} = c_{\mu,2} = 10^{n-1+\mu}$

Sei Φ erfüllbar mit Belegung $x_1, \ldots x_n$

Wähle $a(x_i)$ falls $x_i = 1$, sonst $a(\overline{x_i})$

Die Summe dieser Zahlen:

$S = \underbrace{[1, 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | * | * | * | * | *]}$

$* \in \{1, 2, 3\}$

Wähle $c_{\mu,i}$ so, dass "$*$ zu 3 werden"

$\rightarrow$ wähle $c_{\mu,1}$, falls $s[n-1+\mu] = 2$

$c_{\mu,1}$ und $c_{\mu,2}$ " — " $= 1$

resultierende Summe ist b

$(a(x_1), a(\overline{x_1}), \ldots\ldots, b) \in$ SubsetSum

Sei $(a(x_1), \ldots, b) \in$ SubsetSum

Dann ex. eine Teilmenge T an Zahlen mit Summe b.

Entferne alle $c_{\mu,i}$ aus dieser.

Es bleibt folgende Summe übrig

$s = \underbrace{1\,1\,1\,1\,1\,1 \,|\, * \,|\, * \,|\, * \,|\, * \,|\, *}$

$* \in \{1, 2, 3\}$

T enthält genau ein Element aus $\{a(x_i), a(\bar{x}_i)\}$.

Wähle $x_i := 1$ gdw $a(x_i) \in T$

Für Klausel c_μ ex. ein $a(\ell_i)$ mit einer 1 an Stelle $n-1+\mu$.

$\Rightarrow \ell_i$ erfüllt c_μ.

$\Phi \in 3SAT$