Grundzüge der Theoretischen Informatik

17.12.2021

Markus Bläser

Universität des Saarlandes

Kapitel 19: Komplexitätsklassen

Deterministische Zeitkomplexität

- Sei M eine DTM, M halte auf x.
- Es gibt eine (eindeutige) haltende Konfiguration C_t mit $SC(x) \vdash_M^* C_t$
- Sei $SC(x) \vdash_M C_1 \vdash_M \cdots \vdash_M C_t$ die Berechnung von M auf x.
- t ist die Anzahl der Schritte von M auf x, $t =: \mathrm{Time}_M(x)$.
- Es sei $\mathrm{Time}_M(n) := \max\{\mathrm{Time}_M(x) \mid |x| = n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Definition

Sei $t : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.
M ist t-zeitbeschränkt, falls $\mathrm{Time}_M(n) \leq t(n)$ für alle n.

"worst-case-Komplexität"

Deterministische Platzkomplexität

- Zu einer Konfiguration $C = (q, (p_1, x_1), \dots (p_k, x_k))$ sei $\mathrm{Space}(C) = \max_{1 \le \kappa \le k} |x_\kappa|$.

$L = \{x \in \{0,1\}^* \mid$ Anzahl der 1en in x ist gleich der Anzahl der 0en$\}$ kann mit Platz $O(\log n)$ erkannt werden.
Problem: Eingabe ist n lang.

- Extra-Eingabeband, read-only,
- zählt bei der Berechnung von $\mathrm{Space}(C)$ nicht mit.

Deterministische Platzkomplexität (2)

- Sei M eine DTM, M halte auf x.
- Sei $\mathrm{SC}(x) \vdash_M C_1 \vdash_M \cdots \vdash_M C_t$ die Berechnung von M auf x.
- $\mathrm{Space}_M(x) = \max\{\mathrm{Space}(C_\tau) \mid 1 \leq \tau \leq t\}$.
- Falls M nicht auf x hält, dann wird über das Maximum über unendlich viele Konfigurationen genommen.
- $\mathrm{Space}_M(x) = \infty$, falls das Maximum nicht existiert.
- $\mathrm{Space}_M(n) := \max\{\mathrm{Space}_M(x) \mid |x| = n\}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Definition

Sei $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
M ist s-platzbeschränkt, falls $\mathrm{Space}_M(n) \leq s(n)$ für alle n.

"worst-case-Komplexität"

Deterministische Zeitklassen

- L ist *deterministisch* t *zeit-entscheidbar*, falls es eine DTM M gibt, so dass $L = L(M)$ und $\mathrm{Time}_M(n) \leq t(n)$ für alle n.
- Zeitbeschränkte DTMs halten immer.

Definition (19.2)

Sei $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{DTime}(t) &= \{L \mid L \text{ ist deterministisch } t\text{-zeit-entscheidbar}\},\\
\mathrm{DTime}_k(t) &= \{L \mid \text{es gibt eine } t\text{-zeitbeschränkte}\\
&\qquad\qquad k\text{-Band-DTM mit } L = L(M)\}.
\end{aligned}$$

- Zu einer Menge T von Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei $\mathrm{DTime}(T) = \bigcup_{t \in T} \mathrm{DTime}(t)$.

Deterministische Platzklassen

- L ist *deterministisch* s*-platz-erkennbar*, falls es eine DTM M gibt, so dass $L = L(M)$ und $\mathrm{Space}_M(n) \leq s(n)$ für alle n.
- Eine platz-beschränkte DTM muss nicht auf $x \notin L(M)$ halten.

Definition (19.3)

Sei $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{DSpace}(s) &= \{L \mid L \text{ ist deterministisch } s\text{-platz-erkennbar}\},\\ \mathrm{DSpace}_k(s) &= \{L \mid \text{es gibt eine } s\text{-platz-beschränkte}\\ &\qquad k\text{-Band-DTM } M \text{ mit } L = L(M)\}.\end{aligned}$$

In der Definition von $\mathrm{DSpace}(s)$ haben die TMs ein Extra-Eingabeband.

- Zu einer Menge S von Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei $\mathrm{DSpace}(S) = \bigcup_{s \in S} \mathrm{DSpace}(s)$.

Nichtdeterministische Turingmaschinen

Statt

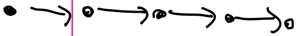
$$\delta : Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, S, R\}^k,$$

nun

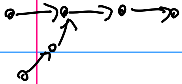
$$\delta : Q \times \Gamma^k \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma^k \times \{L, S, R\}^k).$$

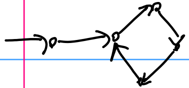
- Eine Konfiguration hat nun mehrere Nachfolgekonfigurationen.
- Berechnungsbaum auf Eingabe x:
  - Wurzel ist mit $\mathrm{SC}(x)$ beschriftet.
  - Ist ein Knoten mit C beschriftet und sind $C_1, \ldots, C_s$ die Nachfolge-Konfigurationen von C, so sind die Kinder mit $C_1, \ldots, C_s$ beschriftet.

Det:



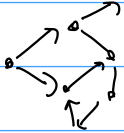
Ausgrad ist ≤ 1





Ausgrad ist $\leq B$

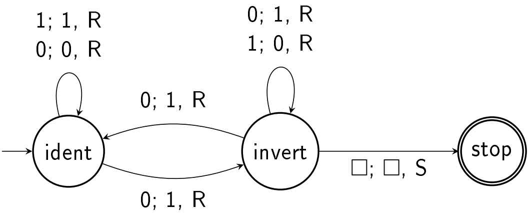
Nicht det.



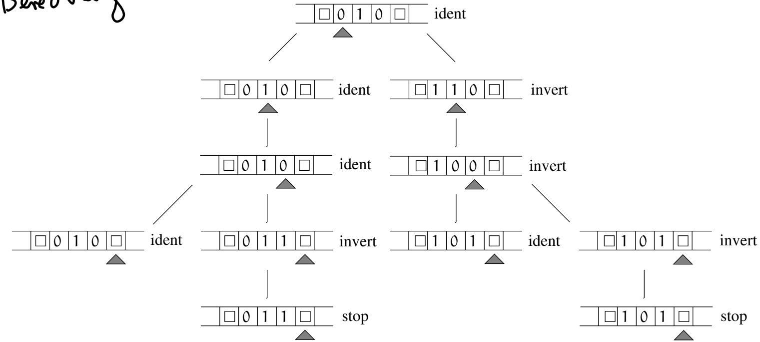
Kanten $\overset{?}{=}$

$\vdash_M$

Beispiel



Berechnungsbaum



Nichtdeterministische Komplexität

- Ein Pfad zu der Wurzel zu einem Blatt heißt *Berechnungspfad*.
- Der Pfad heißt akzeptierend, falls die Konfiguration im Blatt akzeptierend ist.
- Ist die Konfiguration verwerfend, so heißt der Pfad verwerfend.
- Unendliche Pfade sind verwerfend.
- Eine NTM M akzeptiert eine Eingabe x, falls der Berechnungsbaum auf x einen akzeptierenden Pfad hat.
- $L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid M \text{ akzeptiert } x\}$.
- Bei DTMs sind Berechnungsbäume Pfade.

Nichtdeterministische Zeitklassen

- $\mathrm{Time}_M(x)$ ist die Länge einer kürzesten Berechnung von M auf x.
- $\mathrm{Time}_M(n) = \max\{\mathrm{Time}_M(x) \mid |x| = n,\ \ x \in L(M)\}$.
- Sei $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. M ist *schwach t-zeit-beschränkt*, falls $\mathrm{Time}_M(n) \le t(n)$ für alle n.

Definition (19.5)

Sei $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{NTime}(t) = \{L \mid\ &\text{es gibt eine schwach } t\text{-zeit-beschränkte}\\ &\text{NTM } M \text{ mit } L = L(M)\},\\ \mathrm{NTime}_k(t) = \{L \mid\ &\text{es gibt eine schwach } t\text{-zeit-beschränkte}\\ &k\text{-Band-NTM } M \text{ mit } L = L(M)\}.\end{aligned}$$

Nichtdeterministische Platzklassen

- $\mathrm{Space}_M(x)$ ist das Minimum über alle akzeptierenden Pfade des maximalen Platzverbrauchs auf diesem Pfad.
- $\mathrm{Space}_M(n) = \max\{\mathrm{Space}_M(x) \mid |x| = n,\ \ x \in L(M)\}$.
- Sei $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. M ist *schwach s-platz-beschränkt*, falls $\mathrm{Space}_M(n) \leq s(n)$ für alle n.

Definition (19.6)

Sei $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{NSpace}(s) = \{L \mid{} & \text{es gibt eine schwach } s\text{-platz-beschränkte} \\ & \text{NTM } M \text{ mit } L = L(M)\}, \\ \mathrm{NSpace}_k(s) = \{L \mid{} & \text{es gibt eine schwach } s\text{-platz-beschränkte} \\ & k\text{-Band-NTM } M \text{ mit } L = L(M)\}.\end{aligned}$$

$L \in DSpace(O(\log n))$

$L \in DTime(O(n^2))$

TM können unterschiedlich sein

$L \in NTime(O(n \log n))$

$DTimeSpace(t, s)$

Kapitel 20: Bandreduktion, Kompression und Beschleunigung

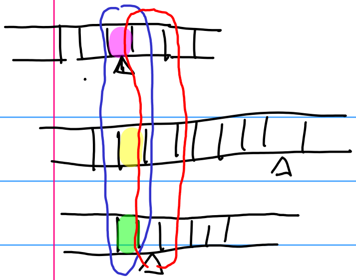
Bandreduktion

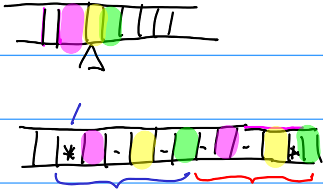
Definition (20.1)

Eine DTM M *simuliert* eine TM M', falls $L(M) = L(M')$ und für alle Eingaben x hält M genau dann, wenn M' hält.

Theorem

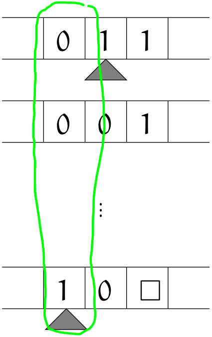
Jede DTM M kann durch eine 1-Band-DTM S simuliert werden.



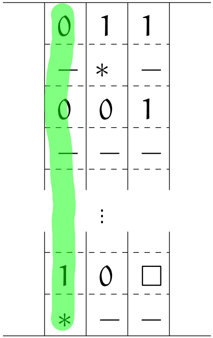


Beweis

- Wir stellen uns das Band in 2k-Spuren aufgeteilt vor.
- $\Gamma' = \underline{(\Gamma \times \{*, -\})^k} \cup \underline{\Sigma \cup \{\Box\}}$.

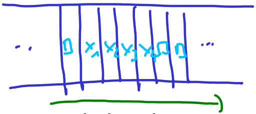


(0,-, 0,-, …, 1,*)



Beweis (2)

Eingabe $\in \Sigma^*$



- S ersetzt die Eingabe x, d.h. x_1 wird durch $(x_1, *, \Box, *, \dots, \Box, *)$ und jedes andere x_ν durch $(x_\nu, -, \Box, -, \dots, \Box, -)$ ersetzt.
- S speichert den Zustand von M in seiner endlichen Kontrolle.
- Solange M nicht hält, wiederholt S das folgende:
  - S geht nach rechts bis zum ersten Blank und speichert in seiner endlichen Kontrolle, welche Zeichen M liest.
  - S simuliert nun einen Schritt von M. Der neue Zustand von M wird gespeichert.
  - S geht nun nach links bis zum ersten Blank, ersetzt die gelesenen Zeichen und bewegt die Köpfe von M durch Neupositionieren der $*$.
    Bewegt S einen Marker $*$ auf eine Zelle mit einem $\Box$, dann wird dies vorher durch $(\Box, -, \dots, \Box, -)$ ersetzt.
- Falls M akzeptiert, so akzeptiert S. Sonst verwirft S.

Beispiel: Erste Phase von S

Zustände haben die Form $\{\text{collect}\} \times Q \times (\Gamma \cup \{/\})^k$.

η_1 = Zeile

η_2 = $*$ oder $-$

$$\begin{aligned}\delta'((\text{collect}, q, \gamma_1, \ldots, \gamma_k), (\eta_1, \ldots, \eta_{2k}))\\ = ((\text{collect}, q, \gamma'_1, \ldots, \gamma'_k), (\eta_1, \ldots, \eta_{2k}), R)\end{aligned}$$

für alle $q \in Q, \gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \Gamma \cup \{/\}$, wobei

$$\gamma'_\kappa = \begin{cases} \gamma_\kappa & \text{if } \eta_{2\kappa} = - \\ \eta_{2\kappa-1} & \text{if } \eta_{2\kappa} = * \end{cases}$$

Bandreduktion

Definition (20.6)

Seien $t, s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{DTimeSpace}(t,s) = \{L \mid\ & \text{es gibt eine } t\text{-zeit-beschränkte und} \\ & s\text{-platz-beschränkte} \\ & \text{DTM } M \text{ mit } L = L(M)\}.\end{aligned}$$

Ebenso $\mathrm{DTimeSpace}_k(t,s)$ und $\mathrm{NTimeSpace}(t,s), \ldots$

Bandreduktion (2)

Theorem (20.7)

Für alle $t, s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *gilt*

$$\mathrm{DTimeSpace}(t, s) \subseteq \mathrm{DTimeSpace}_1(O(ts), O(s)),$$
$$\mathrm{NTimeSpace}(t, s) \subseteq \mathrm{NTimeSpace}_1(O(ts), O(s)).$$

Falls $s(n) = O(n)$, *dann hat die 1-Band-TM ein Extra-Eingabeband.*

Corollary (20.8)

$s(n) \le t(n)$

Für alle $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *gilt*

$$\mathrm{DTime}(t) \subseteq \mathrm{DTime}_1(O(t^2)),$$
$$\mathrm{NTime}(t) \subseteq \mathrm{NTime}_1(O(t^2)).$$

Die Sprache COPY

$$\text{COPY} = \{w\#w \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

- COPY kann von einer $O(n^2)$-zeit-beschränkten 1-Band-DTM erkannt werden.
- COPY kann von einer $O(n)$-zeit-beschränkten 2-Band-DTM erkannt werden
- Es gibt keine $o(n^2)$-zeit-beschränkte 1-Band-DTM für COPY.

Fun fact: $\overline{\text{COPY}}$ kann von einer 1-Band-NTM in Zeit $O(n \log n)$ erkannt werden.

Bandreduktion auf zwei Bänder

Theorem (Hennie & Stearns, ohne Beweis)

Jede t-zeit- und s-platz-beschränkte k-Band-DTM kann durch eine $O(t \log t)$-zeit- und $O(s)$-platz-beschränkte 2-Band-DTM simuliert werden.

Offene Problem:

- Geht dies besser? Vielleicht mit drei Bändern?
- Superlineare untere Schranke für die Zeitkomplexität einer "einfachen" und "natürlichen" Sprache.
  $\longrightarrow$ Zeithierarchie-Satz

Bandkompression

Theorem (20.9)

Für alle $0 < \epsilon \leq 1$ *und* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *gilt*

$$\mathrm{DSpace}(s(n)) \subseteq \mathrm{DSpace}_1(\lceil \epsilon s(n) \rceil),$$
$$\mathrm{NSpace}(s(n)) \subseteq \mathrm{NSpace}_1(\lceil \epsilon s(n) \rceil).$$

Falls $s(n) = O(n)$, *dann hat die 1-Band-TM ein Extra-Eingabeband.*

Beweis

$s(n) \to \quad \epsilon s(n)$

- Sei $c = \lceil 1/\epsilon \rceil$.
- Sei M eine k-Band-DTM mit Bandalphabet Γ.
- Die simulierende DTM M' hat Bandalphabet $\Gamma' = \Gamma^c \cup \Sigma \cup \{\square\}$
- c Zellen von M werden in einer Zelle von M' gespeichert.
- Falls M kein Extra-Eingabeband hat, dann muss zuerst die Eingabe in das komprimierte Format gebracht werden.

$c = 3$

M' merkt sich die Konf innerhalb der c Zellen im Zustand $\ldots \times \{1,\ldots,c\}^k$

Alphabetreduktion

Space $\longleftrightarrow$ Alphabetgröße

Aufgabe

Für jede s-platz- und t-zeit-beschränkte TM M mit Eingabealphabet $\{0, 1\}$ gibt es eine $O(s)$-platz- und $O(t)$-zeit-beschränkte TM mit Arbeitsalphabet $\{0, 1, \square\}$.

$\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \square\}$

Repräsentiere $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ durch Bitstrings der Länge $\lceil \log m \rceil$

$|\gamma|$

$\underbrace{\boxed{0 \mid 1 \cdots \mid 0 \mid 1}}_{}$

Länge ist konstant

Beschleunigung

$s(n) \to \varepsilon s(n)$

Aufgabe

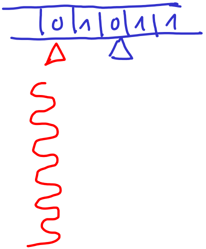
Für alle $k \geq 2$, alle $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und alle $0 < \epsilon \leq 1$ gilt

$$\mathrm{DTime}_k(t(n)) \subseteq \mathrm{DTime}_k(n + \epsilon(n + t(n)))$$
$$\mathrm{NTime}_k(t(n)) \subseteq \mathrm{NTime}_k(n + \epsilon(n + t(n))).$$

$\Gamma \to \Gamma^c$

M'

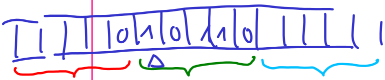
M

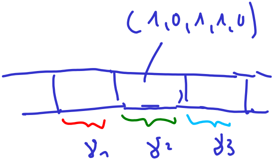


$\times \{\cancel{\gamma}\}^1$

$\delta(q, (\gamma_1, \dots, \gamma_c))$

$= (q', (\gamma_1'', \dots, \gamma_c''), \dots)$





Speichere γ_1, γ_2 und γ_3 in dem Zustand

$\times\, \Gamma^c \times \Gamma^c \times \Gamma^c$