Grundzüge der Theoretischen Informatik, WS 21/22: Musterlösung zum 12. Präsenzblatt

Julian Dörfler

Aufgabe P12.1
Ordnen Sie die folgenden Komplexitätsklassen bzgl. $\subseteq$. Entscheiden Sie für alle Inklusionen ob diese echt sind, bzw. ob diese unter einer etablierten Vermutung wie $\mathsf{NP} \neq \mathsf{P}$ echt sind und beweisen Sie Ihre Antworten kurz:

- $\mathsf{DTime}(\mathsf{O}(\mathsf{n}^7))$
- $\mathsf{REC}_{TM} := \{L \subseteq \Sigma^\star \mid \chi_L$ ist durch eine Turingmaschine berechenbar$\}$
- REG
- $\mathsf{NSpace}(\mathsf{O}(\mathsf{n}))$
- $\mathsf{L} := \mathsf{DSpace}(\mathsf{O}(\log \mathsf{n}))$
- $\mathsf{DSpace}(\mathsf{O}(1))$
- $\mathsf{NL} := \mathsf{NSpace}(\mathsf{O}(\log \mathsf{n}))$
- FIN, die Klasse aller endlichen Sprachen
- P
- $\mathsf{NPSpace}$
- coNP
- $\mathsf{DTime}(\mathsf{O}(\mathsf{n}^{42}))$
- $\mathsf{DSpace}(\mathsf{O}(\mathsf{n}))$
- $\mathsf{NP} \cap \mathsf{coNP}$
- PSpace
- NP

Hinweis: Sie werden **KEINE** Totalordnung angeben können. Versuchen Sie die Klassen so gut es geht partiell zu ordnen.
Hinweis 2: Sie dürfen verwenden, dass die Sprache $L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht in $\mathsf{DSpace}(\mathsf{O}(1))$ enthalten ist (haben Sie eine Idee, wieso?).

Lösung P12.1 Die Lösung ist der transitive Abschluss der Relation auf Seite 3. Dabei bedeutet $\subsetneq$, dass es sich garantiert um eine echte Teilmenge handelt und $\subsetneq'$, dass es sich unter der Annahme einer etablierten Hypothese um eine echte Teilmenge handelt. Ferner sind Elemente der Relation mit $\frown$ markiert, falls dafür Wissen aus der Vorlesung Complexity Theory benötigt wird. Diese mit $\frown$ markierten Elemente dienen nur dazu Ihnen den tatsächlichen Stand der Forschung zu präsentieren, für Sie (klausur)relevant ist das entsprechende Diagramm in dem alle mit $\frown$ markierten Elemente durch $\subseteq$ ersetzt werden. Im folgenden rechtfertigen wir jede Inklusion:

(1) Elemente einer endlichen Sprache können auch in DFAs hardgecodet werden. Ferner ist $\{1\}^* \in \mathsf{REG} \setminus \mathsf{FIN}$.

(2) Jede reguläre Sprache kann durch eine Turingmaschine simuliert werden, die außer dem Eingabe Band nur eine einzelne Zelle eines anderen Bandes braucht. Der Kopf steht durchgehend auf dieser Zelle und merkt sich nur den Zustand während die Turingmaschine den DFA simuliert. Die Rückrichtung wird in Complexity Theory bewiesen. Tatsächlich gilt $\mathsf{REG} = \mathsf{DSpace}(\mathsf{o}(\log\log \mathsf{n}))$.

(3) Inklusion folgt aus $O(1) \subseteq O(\log n)$. Echtheit folgt *nicht* aus dem Platzhierarchiesatz, sondern aus der Tatsache, dass $L \in \mathsf{L}$.

(4) Inklusion folgt aus der Tatsache, dass die Größe des Konfigurationsgraphen einer konstant platzbeschränkten Turingmaschine linear in der Eingabelänge beschränkt ist. Folglich ist jede $O(1)$ platzbeschränkte Maschine auch $O(n)$ zeitbeschränkt. Echtheit folgt aus der Tatsache, dass $L \in \mathsf{DTime}(\mathsf{O}(\mathsf{n}^7))$.

(5) Trivial, da $\mathsf{DSpace}(\mathsf{f}) \subseteq \mathsf{NSpace}(\mathsf{f})$ für alle f.

(6) Wie (5), es wird aber vermutet, dass $\mathsf{L} \neq \mathsf{NL}$.

(7) Inklusion folgt aus $O(n^7) \subseteq O(n^{42})$. Echtheit folgt aus dem Zeithierarchiesatz.

(8) Die Inklusion $\mathsf{NL} \subseteq \mathsf{DSpace}(O((\log n)^2))$ folgt direkt aus dem Satz von Savitch. Nun folgt die echte Inklusion $\mathsf{DSpace}(O((\log n)^2)) \subsetneq DSpace(O(n))$ aus dem Platzhierarchiesatz wegen $O((\log n)^2) = o(n)$. aus dem Platzhierarchiesatz, sondern aus der Tatsache, dass $L \in \mathsf{L}$.

(9) Inklusion folgt aus dem Satz 21.10, Echtheit wird vermutet (und in Complexity Theory behandelt).

(10) Inklusion ist trivial, Echtheit folgt aus dem Zeithierarchiesatz.

(11) Inklusion folgt aus $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP}$ und der Tatsache, dass P abgeschlossen bzgl. Komplement ist. Echtheit wird vermutet, da sonst z.B. das RSA-Cryptosystem unsicher wäre.

(12) Inklusion ist trivial. Gleichheit würde implizieren, dass $\mathsf{NP} = \mathsf{coNP}$, was *vermutlich* falsch ist.

(13) Inklusion ist trivial, Echtheit folgt aus der Kombination des Satzes von Savitch mit dem Platzhierarchiesatz (Siehe Exkurs: Nondeterministic Hierarchies auf Seite 212 des Vorlesungsskripts).

(14) Wie (13).

(15) Die Inklusion $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{NPSpace}$ folgt aus $\mathsf{NTime}(f) \subseteq \mathsf{NSpace}(f)$ für alle f. Dann folgt die zu zeigende Inklusion mit (18). Echtheit wird vermutet (und in Complexity Theory behandelt).

(16) Inklusion folgt aus (16) und der Abgeschlossenheit von PSpace unter Komplement. Echtheit wird vermutet (und in Complexity Theory behandelt).

(17) Übungsblatt 11, Aufgabe 11.1.

(18) Inklusion ist trivial. Echtheit folgt z.B. mit dem Platzhierarchiesatz.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & \mathsf{DSpace(O(n))} & \subseteq_5 & \mathsf{NSpace(O(n))} & \subsetneq_{13} & \mathsf{NPSpace} & & & & & & \\
 & & & & & & & & \subsetneq_8 & & & & & =_{17} & & & & & \\
\mathsf{FIN} & \subsetneq_1 & \mathsf{REG} & =_2 & \mathsf{DSpace(O(1))} & \subsetneq_3 & \mathsf{L} & \hat{\subsetneq}'_6 & \mathsf{NL} & \hat{\subsetneq}'_9 & \mathsf{P} & \subsetneq'_{11} & \mathsf{NP} \cap \mathsf{coNP} & \subsetneq'_{12} & \mathsf{NP} & \hat{\subsetneq}'_{15} & \mathsf{PSPACE} & \subsetneq_{18} & \mathsf{REC}_{TM} \\
 & & & & & \subsetneq_4 & & & & \subsetneq_{10} & & & \subsetneq'_{14} & & & \hat{\subsetneq}'_{16} & & & \\
 & & & & & & \mathsf{DTime(O(n^7))} & \subsetneq_7 & \mathsf{DTime(O(n^{42}))} & & & & & & \mathsf{coNP} & & & &
\end{array}
$$

Aufgabe P12.2 (NP**-Reduktion)**
Zeigen Sie die Korrektheit der Reduktion $\mathsf{HC} \leq_{\mathrm{P}} \mathsf{TSP}$ aus der Vorlesung.

Zur Erinnerung: Wir bilden $G = (V, E)$ ab auf $H = (V, \binom{V}{2}, w)$ und $b = n$ mit

$$
w(e) = \begin{cases} 1 & \text{falls } e \in E \\ 2 & \text{falls } e \notin E \end{cases}
$$

für alle Kanten $e \in \binom{V}{2}$.

Lösung P12.2 (NP**-Reduktion)**
Sei $G = (V, E) \in \mathsf{HC}$. Wir schreiben $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Dann existiert eine Permutation π, so dass $\{v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}\} \in E$ für $1 \leq i \leq n-1$ und $\{v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}\} \in E$. Nun ergibt diese Permutation einen Kreis mit Gewicht n in H, es gilt also $(H, b) \in \mathsf{TSP}$.

Sei umgekehrt $(H, b) \in \mathsf{TSP}$ mit Knotenmenge V. Wir schreiben $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Dann existiert eine Permutation π, so dass die Kanten $\{v_{\pi(i)}, v_{\pi(i+1)}\}$ für $1 \leq i \leq n-1$ und $\{v_{\pi(n)}, v_{\pi(1)}\}$ ergibt, so dass die Summe aller Gewichte n nicht überschreitet. Dann muss jede dieser Kanten aber schon Gewicht genau 1 haben, alle diese Kanten sind also in G ebenfalls enthalten. π ergibt also einen Hamiltonkreis in G, es gilt also $G \in \mathsf{HC}$.

Weiterhin ist die Reduktion in Polynomialzeit berechenbar.