Grundzüge der Theoretischen Informatik, WS 21/22: Musterlösung zum 1. Übungsblatt

Julian Dörfler

Um endliche Automaten digital zu erstellen, finden Sie einen Link in den Materialien der Vorlesung. Denken Sie zusätzlich daran, dass Sie nur noch bis zum *27. Oktober um 23:59 Uhr* Abgabegruppen im CMS bilden können.

Aufgabe A1.1 (Endliche Automaten) *(4 Punkte)*
Konstruieren Sie endliche Automaten, die die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\{0, 1\}$ erkennen und erläutern Sie Ihre Konstruktionen kurz.

(a) *(1 Punkt)* $A = \{x \mid \text{es gibt in } x \text{ genau fünf Nullen}\}$

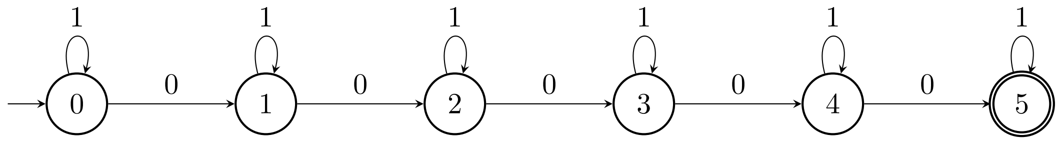
(b) *(1 Punkt)* $B = \{x \mid \text{es gibt in } x \text{ mindestens drei aufeinanderfolgende Einsen}\}$

(c) *(1 Punkt)* $C = \{x \mid \text{die Anzahl der Nullen in } x \text{ ist durch 3 teilbar}\}$

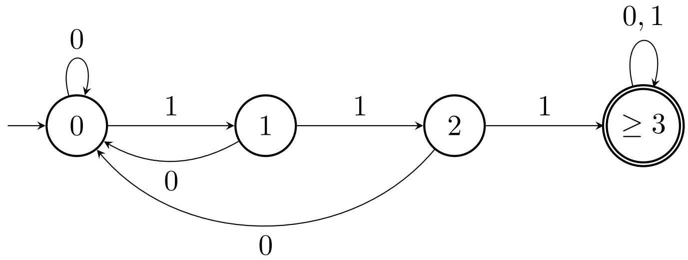
(d) *(1 Punkt)* $D = \{x \mid |x| \text{ ist durch 4 teilbar}\}$

Lösung A1.1 (Endliche Automaten)

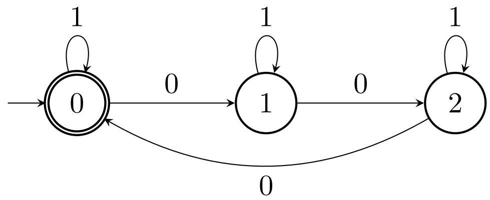
(a)



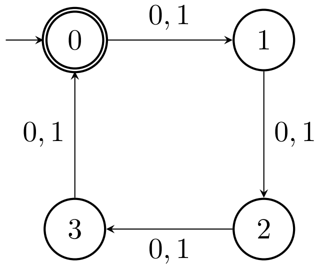
(b)



(c)



(d)



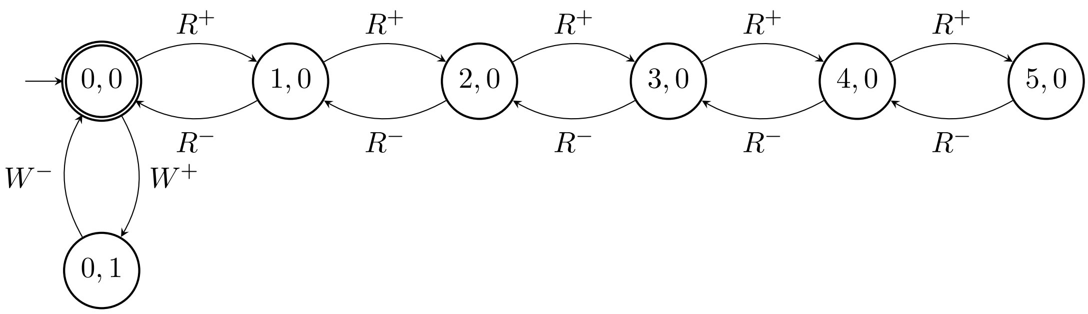
Aufgabe A1.2 (Modellierung) *(4 Punkte)*
Wir betrachten eine Menge von Benutzern einer geteilten Datei. Diese führen nun eine Folge von Lese-und Schreibzugriffen durch, welche durch die folgenden Operationen charakterisiert sind:

- R^+: Ein Lesezugriff wird begonnen.
- R^-: Ein Lesezugriff wird beendet.
- W^+: Ein Schreibzugriff wird begonnen.
- W^-: Ein Schreibzugriff wird beendet.

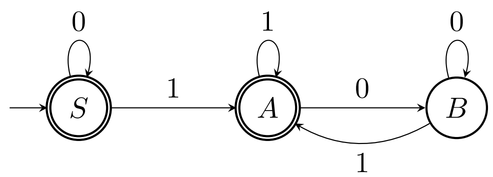
Eine solche Abfolge von Zugriffen können wir nun durch ein Wort über dem Alphabet $\Sigma = \{R^+, R^-, W^+, W^-\}$ darstellen. Konstruieren Sie einen DEA, der überprüft ob eine Abfolge von Zugriffen gültig ist und erläutern Sie Ihre Konstruktion kurz. Wir bezeichnen eine Abfolge von Zugriffen als gültig unter den folgenden Bedingungen:

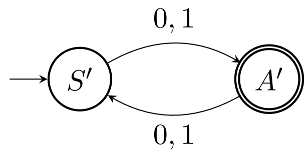
- Jeder Zugriff der begonnen wurde, wurde später auch beendet.
- Es wurden keine Zugriffe beendet, die vorher nicht begonnen wurden.
- Findet ein Schreibzugriff statt, darf währenddessen weder ein Lesezugriff noch ein weiterer Schreibzugriff stattfinden.
- Es finden maximal 5 Lesezugriffe zeitgleich statt. (Der Netzwerkserver auf dem die Datei liegt hat leider keine besonders starke Internetanbindung)

Lösung A1.2 (Modellierung) Der Zustand des Systems ist vollständig durch die Anzahl aktiver Lese-und Schreibzugriffe charakterisiert. Wir benennen die Zustände daher r, w für r aktive Lesezugriffe und w aktive Schreibzugriffe. Es ergibt sich folgender DEA:

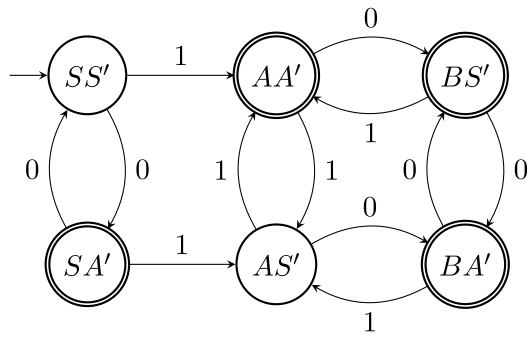


Aufgabe A1.3 (Produktautomat) *(4 Punkte)*
Konstruieren Sie den Produktautomaten $M_1 \times M_2$ aus den beiden gegebenen endlichen Automaten M_1 und M_2. Hierbei soll $L(M_1 \times M_2)$ genau die Wörter $x \in \{0,1\}^\star$ enthalten, für die die Implikation $x \in L(M_1) \implies x \in L(M_2)$ gilt.





Lösung A1.3 (Produktautomat) Es ergibt sich folgender endlicher Automat:



Aufgabe A1.4 (Abschlusseigenschaften) *(4 Punkte)*
Beweisen Sie, dass für alle regulären Sprachen $L \subseteq \Sigma^\star$ und beliebigen Sprachen $L' \subseteq \Sigma^\star$ die folgenden Sprachen ebenfalls regulär sind.

(a) $L_{\text{rev}} = \{x \mid \exists \ell \in \mathbb{N} : \ x = x_1 \dots x_\ell \text{ und } x_\ell x_{\ell-1} \dots x_1 \in L\}$.

(b) ${}^{L}/{}_{L'} = \{x \mid \exists y \in L' : xy \in L\}$.

(c) ${}_{L}\backslash{}^{L'} = \{y \mid \exists x \in L' : xy \in L\}$.
Hinweis: Verwenden Sie hierzu die beiden vorhergehenden Teilaufgaben, auch wenn Sie diese nicht bewiesen haben

Lösung A1.4 (Abschlusseigenschaften)
Es sei für alle Teilaufgaben $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_{\text{acc}})$ ein deterministischer endlicher Automat mit $L(M) = L$.

(a) Zum Beweis konstruieren wir einen nichtdeterministischen endlichen Automaten $M_{\text{rev}} = (Q \cup q_0', \Sigma, \delta', q_0', \{q_0\})$ mit $q_0' \notin Q$, wobei $\delta'(q, x) = \{p \in Q \mid \delta(p, x) = q\}$ für alle $q \in Q$ und $\delta'(q_0', \varepsilon) = Q_{\text{acc}}$. Nun ist $L(M_{\text{rev}}) = L_{\text{rev}}$.

$\supseteq$: Sei $x = x_n x_{n-1} \ldots x_1 \in L_{\text{rev}}$. Dann akzeptiert M den String $x_{\text{rev}} = x_1 x_2 \ldots x_n$, d.h. es gibt Zustände $q_0, q_1, \ldots, q_n$ mit $q_n \in Q_{\text{acc}}$, wobei $\delta(q_i, x_{i+1}) = q_{i+1}$ für alle $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Dann akzeptiert M_{rev} die Eingabe x: Zuerst wechselt M_{rev} mit einer ε-Transition von q_0' zum Zustand q_n. Danach ist $\delta'(q_i, x_i) \ni q_{i-1}$ für $1 \leq i < n$. Der Automat erreicht beim Lesen des letzten Zeichens den Zustand q_0 und akzeptiert damit x.

$\subseteq$: Sei $x = x_n x_{n-1} \ldots x_1 \in L(M_{\text{rev}})$. Dies bedeutet, dass zunächst mit einer ε-Transition in einen Zustand q_n gesprungen wird, und dann werden die Zustände $q_{n-1}, \ldots, q_0$ durchlaufen. Genau dann wird auch $x_{\text{rev}} = x_1 x_2 \ldots x_n$ von M akzeptiert, da hier die Zustände $q_0, \ldots, q_n$ durchlaufen werden und q_n ein akzeptierender Zustand ist. Es folgt, dass $x_{\text{rev}} \in L$ und damit $x \in L_{\text{rev}}$.

(b) Zum Beweis konstruieren wir einen deterministischen endlichen Automaten $M_{/} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_{\text{acc}}')$, wobei die akzeptierenden Zustände als $Q_{\text{acc}}' = \{q \in Q \mid \exists y \in L' : \delta^\star(q, y) \in Q_{\text{acc}}\}$ gewählt werden. Nun ist $L(M_{/}) = {}^{L}/{}_{L'}$.

$\supseteq$: Sei $x \in {}^{L}/{}_{L'}$.
Dann gibt es ein $y \in L'$, so dass $xy \in L$.

Da $xy \in L$ gibt es ein $q \in Q$ mit $q = \delta^\star(q_0, x)$ und $\delta^\star(q, y) \in Q_{\text{acc}}$. Somit ist aber $q \in Q_{\text{acc}}'$ und x wird von $M_{/}$ akzeptiert.

$\subseteq$: Sei $x' \in L(M_{/})$.
Dann gibt es einen Zustand $q \in Q_{\text{acc}}'$ mit $q = \delta^\star(q_0, x)$. Nach Konstruktion gibt es nun ein $y \in L'$ mit $\delta^\star(q, y) \in Q_{\text{acc}}$, also $\delta^\star(q_0, xy) \in Q_{\text{acc}}$. Somit ist $xy \in L$ und ${}^{L}/{}_{L'}$.

(c) Wir verwenden die beiden vorhergehenden Teilaufgaben.

$$\begin{aligned} L \Big\backslash L' &= \left(\left(L \Big\backslash L'\right)_{\text{rev}}\right)_{\text{rev}} \\ &= \{y_{\text{rev}} \mid \exists x \in L' : xy \in L\}_{\text{rev}} \\ &= \{y_{\text{rev}} \mid \exists x_{\text{rev}} \in L'_{\text{rev}} : (y_{\text{rev}} x_{\text{rev}}) \in L_{\text{rev}}\}_{\text{rev}} \\ &= \left(L_{\text{rev}} \Big/ L'_{\text{rev}}\right)_{\text{rev}} \end{aligned}$$

Da L regulär ist, ist somit auch L_{rev} und letztlich $L_{\text{rev}} \Big/ L'_{\text{rev}}$ regulär. Schließlich ist also auch $L \Big\backslash L'$ regulär.