Grundzüge der Theoretischen Informatik, WS 21/22: Musterlösung zum 4. Präsenzblatt

Julian Dörfler

Aufgabe P4.1 (Sprachen)
Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest. Welche der folgenden Sprachen sind regulär? Beweisen Sie Ihre Antworten.

(a) $A = \{0^n 1^m \mid 2n = m\}$

(b) $B = \{0^n 0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

(c) $C = \{1^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$

(d) $D_k = \{0^n 1^n \mid n \leq k\}$

(e) $E_k = \{0^n 1^n \mid n \geq k\}$

(f) $F = \{0^n 1^m \mid n \neq m\}$

(g) $G_k = \{0^{k \cdot n} 1^{2 \cdot k \cdot n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

(h) $H = L((01 + 1)^\star)$

(i) $I = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$

(j) $J = \{0^n 1^m \mid 2^n \neq m\}$

(k) $K_k = \{0^n 1^m \mid n - m \leq k\}$

(l) $L_k = \{0^n 1^m \mid n \geq m \text{ und } m \leq k\}$

(m) $M_k = \{0^n 1^m \mid n \geq m \text{ und } m \geq k\}$

(n) $N = \{0^p \mid p \text{ ist prim}\}$.

(o) $O = \{0^{p-2} \mid p \text{ ist prim}\}$.

(p) $P = \{(0^\star 1)^p \mid p \text{ ist prim}\}$.

(q) $Q = \{(0^\star)^p \mid p \text{ ist prim}\}$.

(r) $R = \{x \in \{0,1\}^\star \mid |x| \text{ ist prim}\}$.

(s) $S = \{0^i 1^j 2^k \mid i = j \wedge i = k \wedge k = j\}$.

(t) $T = \{(0^\star 1)^n (2341^\star)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(u) $U = \{0^i 1^j 2^k 3^\ell \mid i + j = k + \ell\}$.

Lösung P4.1 (Sprachen)

(a) A ist nicht regulär. Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ beliebig. Wähle $uvw = 0^n 1^{2n} \in A$ mit $u = 0^n$, $v = 1^n$ und $w = 1^n$. Sei nun $v = xyz$ mit $|y| = \ell > 0$ beliebig. Wir wählen $i = 0$. Dann ist $uxy^izw = 0^n 1^{2n-\ell} \notin A$, da $2n > 2(n - \ell)$.

A lässt sich also nicht pumpen und ist damit nicht regulär.

(b) B ist regulär und wird vom regulären Ausdruck $(00)^\star$ erkannt.

(c) C ist nicht regulär. Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ beliebig. Wähle $uvw = 1^{n^2} \in C$ mit $u = 1^{n^2-n}$, $v = 1^n$ und $w = \varepsilon$. Sei nun $v = xyz$ mit $|y| = \ell > 0$ beliebig. Wir wählen $i = 2$. Dann ist $uxy^izw = 1^{n^2-n}1^{n+\ell} = 1^{n^2+\ell} \notin C$, da $(n+1)^2 = n^2+2n+1 > n^2+\ell > n^2$.

C lässt sich also nicht pumpen und ist damit nicht regulär.

(d) D_k ist für fixes $k \in \mathbb{N}$ regulär, da D_k in diesem Fall endlich ist.

(e) E_k ist nicht regulär. Ansonsten wäre $D_k \cup E_k = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ als Vereinigung regulärer Sprachen ebenfalls regulär. Dies ist aber ein Widerspruch, wie in der Vorlesung gezeigt.

(f) Wir verwenden die Abgeschlossenheit von REG unter Schnitt und Komplement. Es gilt

$$\Sigma^\star \setminus F \cap L(0^\star 1^\star) = \{0^n 1^m \mid n = m\} = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Da $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ aber nicht regulär ist (siehe Skript) kann F nicht regulär sein.

Alternative Lösung: Wir verwenden das Pumping-Lemma. Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ beliebig. Wähle $uvw = 0^n 1^{n+n!} \in F$ mit $u = \varepsilon$, $v = 0^n$ und $w = 1^{n+n!}$. Sei nun $v = xyz$ mit $|y| = \ell > 0$ beliebig. Wir wählen $i = \frac{n!}{\ell} + 1$. Da $\ell \leq n$ gilt $i \in \mathbb{N}$. Dann ist $uxy^izw = 0^{n+\ell\cdot(i-1)}1^{n+n!} = 0^{n+n!}1^{n+n!} \notin F$.

C lässt sich also nicht pumpen und ist damit nicht regulär.

(g) Für $k = 0$ gilt $G_k = \{\varepsilon\} \in \mathsf{REG}$. Für $k \geq 1$ gilt jedoch G_k ist nicht regulär. Wir verwenden den Homomorphismus $h_k : \{0,1\} \to \{0,1\}$ definiert durch $h_k(0) = 0^k$ und $h_k(1) = 1^{2k}$. Nun ist $G_k = h_k(A)$ und $A = h^{-1}(G_k)$. Falls also G_k regulär wäre müsste A also ebenfalls regulär sein. Das dies nicht der Fall ist haben wir schon gezeigt.

(h) H ist regulär, da H durch einen regulären Ausdruck gegeben ist.

(i) I ist nicht regulär. Der Homomorphismus $h : \{a,b\} \to \{0,1\}$ definiert durch $h(a) = 0$ und $h(b) = 1$ hat die Eigenschaft $h(I) = F$. Falls also I regulär wäre, so wäre auch F regulär; ein Widerspruch.

Allgemein gilt: Wann immer wir nur die Zeichen im Alphabet 1 zu 1 austauschen, so gibt es immer einen Homomorphismus zwischen den beiden Sprachen, welcher sogar bijektiv ist. Somit wird Regularität unter solchem Austauschen nicht beeinflusst.

(j) Wir verwenden die Abgeschlossenheit von REG unter Schnitt und Komplement. Es gilt

$$J' = \Sigma^\star \setminus J \cap L(0^\star 1^\star) = \{0^n 1^m \mid 2^n = m\}.$$

Wenn J also regulär wäre, so wäre J' auch regulär.

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ beliebig. Wähle $uvw = 0^n 1^{2^n} \in J'$ mit $u = \varepsilon$, $v = 0^n$ und $w = 1^{2^n}$. Sei nun $v = xyz$ mit $|y| = \ell > 0$ beliebig. Wir wählen $i = 0$. Dann ist $uxy^izw = 0^{n-\ell}1^{2^n} \notin J'$, da $2^{n-\ell} \neq 2^n$.

J' lässt sich also nicht pumpen und ist damit nicht regulär. Daraus folgt dann, dass J auch nicht regulär sein kann.

Alternative Lösung:

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ beliebig. Wähle $uvw = 0^n 1^{2^{n+n!}} \in J$ mit $u = \varepsilon$, $v = 0^n$ und $w = 1^{2^{n+n!}}$. Sei nun $v = xyz$ mit $|y| = \ell > 0$ beliebig. Wir wählen $i = \frac{n!}{\ell} + 1$. Da $\ell \leq n$ gilt $i \in \mathbb{N}$. Dann ist $uxy^izw = 0^{n+\ell\cdot(i-1)}1^{2^{n+n!}} = 0^{n+n!}1^{2^{n+n!}} \notin J$.

J lässt sich also nicht pumpen und ist damit nicht regulär.

(k) K_k ist nicht regulär. Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ beliebig. Wähle $uvw = 0^n 1^n \in K_k$ mit $u = \varepsilon$, $v = 0^n$ und $w = 1^n$. Sei nun $v = xyz$ mit $|y| = \ell > 0$ beliebig. Wir wählen $i = k + 2$. Dann ist $uxy^izw = 0^{n+\ell\cdot(i-1)}1^n \notin K_k$, da $n + \ell \cdot (k+1) - n > k$

K_k lässt sich also nicht pumpen und ist damit nicht regulär.

(l) L_k ist für fixes $k \in \mathbb{N}$ regulär und wird vom regulären Ausdruck $\sum_{i=0}^k 0^i 0^\star 1^i$ erkannt. Hierbei ist $\sum_{i=0}^k E_i = E_0 + E_1 + \cdots + E_k$ und $\sigma^i = \underbrace{\sigma\sigma\ldots\sigma}_{i \text{ mal}}$ für $\sigma \in \Sigma$.

(m) M_k ist nicht regulär. Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ beliebig. Wähle $uvw = 0^{n+k}1^{n+k} \in M_k$ mit $u = \varepsilon$, $v = 0^{n+k}$ und $w = 1^{n+k}$. Sei nun $v = xyz$ mit $|y| = \ell > 0$ beliebig. Dann ist $uxy^0zw = 0^{n+k-\ell}1^{n+k} \notin M_k$, da $n + k - \ell < n + k$.

M_k lässt sich also nicht pumpen und ist damit nicht regulär.

(n) N ist nicht regulär. Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ beliebig. Wähle $uvw = 0^p \in N$ mit $p \geq n$ sowie $u = \varepsilon$, $v = 0^p$ und $w = \varepsilon$. Sei nun $v = xyz$ mit $|y| = \ell > 0$ beliebig. Wir wählen $i = p + 1$. Dann ist $uxy^izw = 0^{p-\ell}0^{(p+1)\ell} = 0^{p(\ell+1)} \notin N$, da $p(\ell + 1)$ wegen $p \geq 2$ und $\ell + 1 \geq 2$ keine Primzahl ist.

N lässt sich also nicht pumpen und ist damit nicht regulär.

(o) O ist nicht regulär. Nehmen wir an O sei regulär, dann wäre auch O konkateniert mit $\{00\}$ regulär. Wir haben aber schon bewiesen, dass $O\{00\} = \{0^p \mid p \text{ ist prim}\} = N$ nicht regulär ist.

(p) P ist nicht regulär. Nehmen wir an P sei regulär, dann ist auch $P \cap L(1^\star) = \{1^p \mid p \text{ ist prim}\}$ regulär. Dies ist aber die gleiche Sprache wie N, nur mit Nullen und Einsen vertauscht und somit ebenfalls nicht regulär.

(q) Q ist regulär und wird vom regulären Ausdruck $0^\star$ erkannt.

(r) R ist nicht regulär. Betrachten wir den Homomorphismus $h : \{0,1\} \to \{0\}$ definiert durch $h(0) = h(1) = 0$, so ist $h(R) = N$. Wäre R also regulär, so müsste N ebenfalls regulär sein. Das dies nicht der Fall ist, haben wir schon bewiesen.

(s) S ist nicht regulär. Betrachten wir den Homomorphismus $h : \{0,1,2\} \to \{0,1\}$ definiert durch $h(0) = 0$ und $h(1) = h(2) = 1$, so gilt

$$h(S) = \{0^i 1^j 1^k \mid i = j \wedge i = k \wedge k = j\} = \{0^n 1^m \mid 2n = m\} = A\,.$$

Wäre also S regulär, so wäre A ebenfalls regulär. Das dies nicht der Fall ist, haben wir schon bewiesen.

(t) T ist nicht regulär. Zuerst verwenden wir die Abgeschlossenheit von REG unter Schnittbildung. Falls T also regulär wäre, so wäre $T \cap L(1^\star(234)^\star) = \{1^n(234)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ebenfalls regulär.

Betrachten wir nun den Homomorphismus $h : \{0,1\} \to \{1,2,3,4\}$ definiert durch $h(0) = 1$ und $h(1) = 234$, so müsste

$$h^{-1}(\{1^n(234)^n \mid n \in \mathbb{N}\}) = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}\,.$$

ebenfalls regulär sein. Das dies nicht der Fall ist, haben wir in der Vorlesung bewiesen.

(u) U ist nicht regulär. Betrachten wir den Homomorphismus $h : \{0,1,2,3\} \to \{0,1\}$ definiert durch $h(0) = h(1) = 0$ und $h(2) = h(3) = 1$, so müsste

$$h^(U) = \{0^i 0^j 1^k 1^\ell \mid i + j = k + l\} = \{0^n 1^m \mid n = m\} = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

ebenfalls regulär sein. Das dies nicht der Fall ist, haben wir in der Vorlesung bewiesen.

Aufgabe P4.2 (Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen)
Bestimmen Sie die Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen der Sprache L, die durch den regulären Ausdruck $(0+1)^\star(1+1(0+1))$ gegeben ist.
Konstruieren Sie daraus dann den minimalen deterministischen Automaten, der diese Sprache erkennt.

Lösung P4.2 (Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen) Wir behaupten, dass die Sprache genau die folgenden Myhill-Nerode-Äquivalenzklassen hat:

- $L_1 = \{x1 \mid x \in \{0,1\}^\star\}$
- $L_{10} = \{x10 \mid x \in \{0,1\}^\star\}$
- $L_{00} = \{x00 \mid x \in \{0,1\}^\star\} \cup \{0, \varepsilon\}$

Wenn x mit einer 1 endet, ist $xz \in L$ genau dann, wenn

$$z \in \{\varepsilon, 0\} \cup \{z'1 \mid z' \in \{0,1\}^\star\} \cup \{z'10 \mid z' \in \{0,1\}^\star\}.$$

Wenn x auf 10 endet, ist $xz \in L$ genau dann, wenn

$$z \in \{\varepsilon\} \cup \{z'1 \mid z' \in \{0,1\}^\star\} \cup \{z'10 \mid z' \in \{0,1\}^\star\}.$$

Wenn x auf 00 endet oder $x = 0$ oder $x = \varepsilon$, ist $xz \in L$ genau dann, wenn

$$z \in \{z'1 \mid z' \in \{0,1\}^\star\} \cup \{z'10 \mid z' \in \{0,1\}^\star\}.$$

Somit sind unsere 3 Mengen tatsächlich die Äquivalenzklassen von L mit den Repräsentanten 1, 10, ε.

Damit ergibt sich dann folgender minimaler deterministischer Automat: