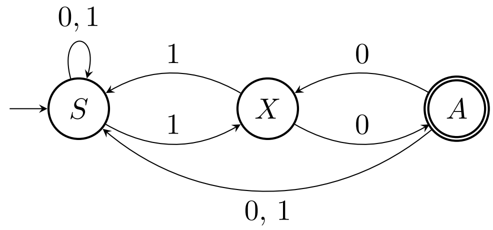
Grundzüge der Theoretischen Informatik, WS 21/22: Musterlösung zum 2. Übungsblatt

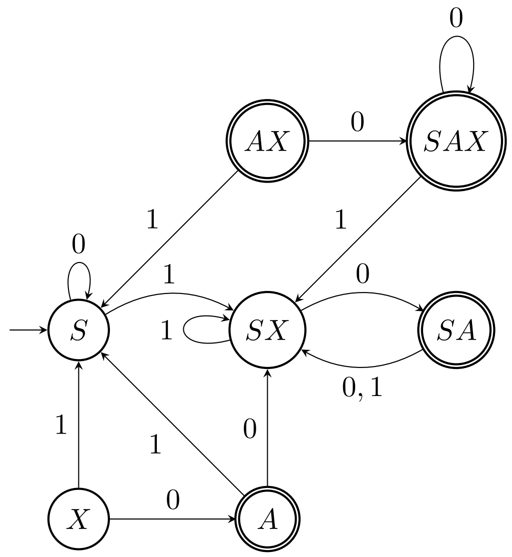
Julian Dörfler

Aufgabe A2.1 (Potenzmengenkonstruktion) *(4 Punkte)*
Konstruieren Sie einen zu folgendem Automaten äquivalenten deterministischen endlichen Automaten. Führen Sie dazu die Potenzmengenkonstruktion explizit durch. Vereinfachen Sie danach den Automaten, wenn möglich, und geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die Sprache erkennt.

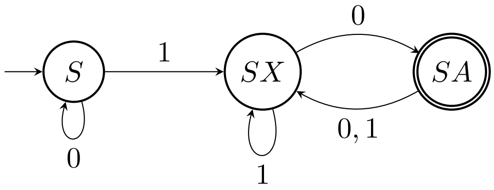
Hinweis: Sie können in der expliziten Konstruktion auf den Zustand, der der leeren Menge entspricht, verzichten. Nehmen Sie aber *keine* weiteren Vereinfachungen des Potenzmengen-Automaten vor. Geben Sie den neuen Zuständen sinnvolle Namen, nicht etwa A, B, C, . . .



Lösung A2.1 (Potenzmengenkonstruktion)
Der Potenzmengenautomat hat die folgenden Zustände:
$\emptyset, \{S\}, \{A\}, \{X\}, \{S, A\}, \{S, X\}, \{A, X\}, \{S, A, X\}$. Auf $\emptyset$ wurde der Einfachheit halber verzichtet.



Nach Entfernen nicht erreichbarer Zustände erhalten wir folgenden Automaten.

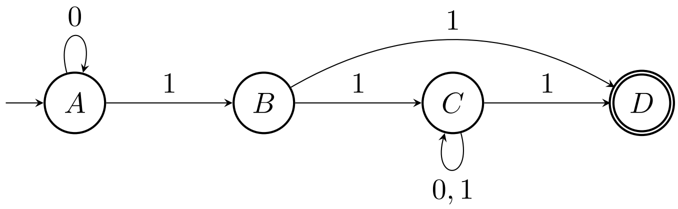


Hieraus können wir ablesen, dass der Automat alle Wörter akzeptiert die auf 10^k enden, wobei k ungerade ist. Die Sprache lässt sich ebenfalls wie folgt durch einen regulärer Ausdruck beschreiben: $L((0+1)^\star 10(00)^\star)$.

Aufgabe A2.2 (Reguläre Sprachen) *(4 Punkte)*

(a) Geben Sie einen endlichen Automaten für den regulären Ausdruck $(c(a^\star + b))^\star b$ an.

(b) Geben Sie einen regulären Ausdruck für den folgenden Automaten an:

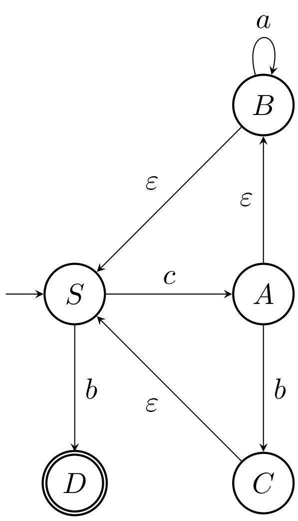


(c) Geben Sie einen regulären Ausdruck und einen endlichen Automaten an, die jeweils die folgende Sprache beschreiben. Hierbei bezeichet "$\equiv_2$"die Kongruenz modulo 2:

$$L = \{x \in \{0,1\}^\star \mid \text{Anzahl 1en in } x \equiv_2 \text{Anzahl 0en in } x\}$$

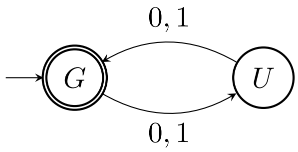
Lösung A2.2 (Reguläre Sprachen)

(a) Wir bauen einen NEA direkt anhand der Struktur des regulären Ausdrucks.



(b) Es ergibt sich der reguläre Ausdruck $0^\star 1(1+1(0+1)^\star 1)$.

(c) Diese Sprache enthält genau die Wörter $x \in \{0,1\}^\star$ mit gerader Länge und somit folgender DEA.



Daraus ergibt sich der reguläre Ausdruck $((0+1)(0+1))^\star$.

Aufgabe A2.3 (Transduktoren) *(4 Punkte)*
Wir definieren uns eine neue Form von Automaten, die sogenannten deterministischen endlichen Transduktoren[1]:

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, f, q_0, Q_{\mathrm{acc}})$$

wobei $Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_{\mathrm{acc}}$ wie bei einem DEA zu interpretieren sind. Γ ist ein zusätzliches endliches Alphabet, genannt das Ausgabealphabet. Der zusätzliche Eintrag $f : Q \times \Sigma \to \Gamma^\star$ ist eine (möglicherweise partielle) Ausgabefunktion. Hierbei sind δ und f für genau die gleichen Eingaben definiert. Weiterhin definieren wir die erweiterte Ausgabefunktion $f^\star$ für alle $q \in Q, v \in \Sigma^\star$ und $\sigma \in \Sigma$:

$$f^\star(q, \varepsilon) = \varepsilon$$

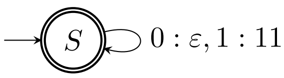
$$f^\star(q, \sigma v) = \begin{cases} f(q,\sigma) f^\star(\delta(q,\sigma), v) & \text{falls } f(q,\sigma), \delta(q,\sigma) \text{ und } f^\star(\delta(q,\sigma), v) \text{ definiert sind} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Nun berechnet M die (partielle) Funktion $f_M : \Sigma^\star \to \Gamma^\star$ definiert durch

$$f_M(x) = \begin{cases} f^\star(q_0, x) & \text{falls } f^\star(q_0, x) \text{ und } \delta^\star(q_0, x) \text{ definiert sind und } \delta^\star(q_0, x) \in Q_{\mathrm{acc}} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Intuitiv ist $f_M(x)$ die Konkatenation der Ausgaben an den Kanten, die bei einer akzeptierenden Berechnung des Wortes x durchlaufen werden.

Wir stellen Transduktoren identisch zu endlichen Automaten dar, nur dass wir für jeden Zustand $q \in Q$ an die ausgehenden Kanten $\sigma : f(q, \sigma)$ schreiben anstelle von $\sigma \in \Sigma$. Beispielsweise entfernt der folgende Transduktor alle Vorkommen des Zeichens 0 und verdoppelt alle Vorkommen des Zeichens 1:



[1] Diese Automaten sind ähnlich der Mealy Automaten, die Sie eventuell schon in anderen Vorlesungen kennengelernt haben, jedoch kann eine Transition hier ein beliebiges Wort ausgeben und nicht nur ein einzelnes Zeichen

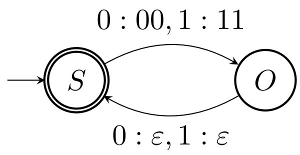
Konstruieren Sie nun deterministische endliche Transduktoren, die die folgenden Funktionen über $\{0,1\}^\star$ berechnen und erläutern Sie Ihre Konstruktionen kurz:

(a) $f_{M_1}(x_1x_2\cdots x_{2n-1}x_{2n}) = x_1x_1x_3x_3x_5x_5\cdots x_{2n-1}x_{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

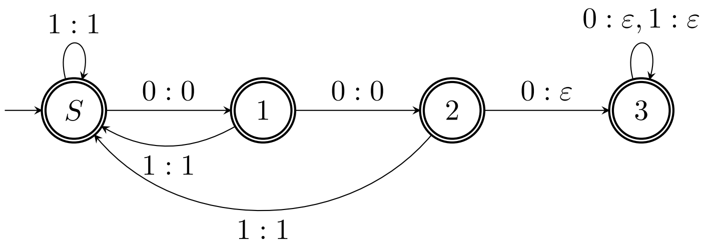
(b) $f_{M_2}(x)$ ist das längste Präfix von x, das das Teilwort 000 nicht enthält.

Lösung A2.3 (Transduktoren)

(a) Der Transduktor muss sich unterschiedlich verhalten, je nachdem, ob wir aktuell eine gerade oder ungerade Anzahl an Zeichen gelesen haben, in ersterem Fall verdoppeln wir das gelesene Zeichen, im zweiten Fall löschen wir das Zeichen. Weiterhin akzeptieren wir nur Wörter gerader Länge, da f_{M_1} nur für diese definiert ist.



(b) Dieser Transduktor ist von einem DEA abgeleitet, der erkennt ob ein Wort das Teilwort 000 enthält. Sobald dies erkannt wurde, werden alle weiteren Zeichen, sowie die letzte 0 durch ε ersetzt. Alle Zustände sind akeptierend, da f_{M_2} total ist.



Aufgabe A2.4 (Homomorphismen) *(4 Punkte)*
Ein *Homomorphismus* ist eine Abbildung $h : \Sigma^\star \to \Sigma^\star$ mit der Eigenschaft $h(xy) = h(x)h(y)$ für alle $x, y \in \Sigma^\star$.

(a) Zeigen Sie, dass jeder Homomorphismus $h(\varepsilon) = \varepsilon$ erfüllt. Zeigen Sie, dass h bereits eindeutig bestimmt ist, wenn $h(a)$ für alle $a \in \Sigma$ gegeben ist.

(b) Sei $L \subseteq \Sigma^\star$ eine reguläre Sprache. Zeigen Sie, dass dann auch

$$h(L) = \{h(x) \mid x \in L\}$$

eine reguläre Sprache ist.

(c) Sei $L \subseteq \Sigma^\star$ eine reguläre Sprache. Zeigen Sie, dass dann auch

$$h^{-1}(L) = \{x \mid h(x) \in L\}$$

eine reguläre Sprache ist.

(d) Sei $\mathsf{COPY} = \{xx \mid x \in \{0,1\}^\star\}$. Die Sprache COPY ist nicht regulär[2].

Finden Sie den Fehler in folgendem (falschen) Beweis, dass COPY doch regulär ist: Sei $h : \{0,1\}^\star \to \{\#\}^\star$ ein Homomorphismus gegeben durch $h(0) = h(1) = \#$. Dann ist $h(\mathsf{COPY}) = L\big((\#\#)^\star\big)$ eine reguläre Sprache. Wegen Aufgabenteil (c) ist dann auch $h^{-1}(h(\mathsf{COPY})) = \mathsf{COPY}$ regulär.

Lösung A2.4 (Homomorphismen)
Sei $|x| = n$.

(a) Beweis per Induktion über n. Sei $h(a)$ für alle $a \in \Sigma$ definiert.

IA, $x = \varepsilon$: $h(\varepsilon) = h(\varepsilon\varepsilon) = h(\varepsilon)h(\varepsilon) \Rightarrow h(\varepsilon) = \varepsilon$.

IV: Die Behauptung gelte für n.

IS: $h(xa) = h(x)h(a)$ ist eindeutig bestimmt, da h ein Homomorphismus ist, und $h(x)$ und $h(a)$ eindeutig bestimmt sind.

(b) Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_{\text{acc}})$ ein deterministischer endlicher Automat mit $L(M) = L$. Wir konstruieren einen neuen Automat M', indem wir jeden Übergang $\delta(q, a) = q'$ durch einen Pfad ersetzen, der $h(a)$ erkennt:

Sei $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0, Q_{\text{acc}})$ mit $Q' = Q \cup \{q_{h(a)_i} \mid q \in Q, a \in \Sigma, 1 \le i \le |h(a)| - 1\}$ und

$$\begin{aligned}\delta' = {} & \{(q, h(a)_1, q_{h(a)_1}), (q_{h(a)_{|h(a)|-1}}, h(a)_{|h(a)|}, q') \mid (q, a, q') \in \delta, |h(a)| > 1\} \\ & \cup \{(q, h(a), q') \mid (q, a, q') \in \delta, |h(a)| \le 1\} \\ & \cup \{(q_{h(a)_i}, h(a)_{i+1}, q_{h(a)_{i+1}}) \mid a \in \Sigma, 1 \le i \le |h(a)| - 2\}.\end{aligned}$$

Wir zeigen nun $L(M') = h(L)$.

$\supseteq$: Sei also $x \in h(L)$. Dann existiert ein $y \in L$ mit $h(y) = x$. Dann durchläuft M auf Eingabe y die Zustände $q_0, q_1, \ldots, q_{|y|}$, wobei $q_{|y|} \in Q_{\text{acc}}$.

Nach Definition eines Homomorphismus gilt $x = h(y_1)h(y_2)\cdots h(y_{|y|})$. Damit durchläuft M' auf Eingabe x die Zustände

$$\begin{aligned}& q_0, (q_0)_{h(y_1)_1}, (q_0)_{h(y_1)_2}, \ldots, (q_0)_{h(y_1)_{|h(y_1)|-1}}, \\ & q_1, (q_1)_{h(y_2)_1}, (q_1)_{h(y_2)_2}, \ldots, (q_1)_{h(y_2)_{|h(y_2)|-1}}, \\ & \vdots \\ & q_{|y|-1}, (q_{|y|-1})_{h(y_{|y|})_1}, (q_{|y|-1})_{h(y_{|y|})_2}, \ldots, (q_{|y|-1})_{h(y_{|y|})_{|h(y_{|y|})|-1}}, \\ & q_{|y|}\end{aligned}$$

[2] Wie man dies beweist werden wir nächste Woche noch sehen, Sie dürfen dies aber für dieses Übungsblatt einfach als gegeben annehmen

Somit endet M' im Zuständ $q_{|y|} \in Q_{\text{acc}}$ und akzeptiert x.

$\subseteq$: Sei nun $x \in L(M')$. Dann durchläuft M' bei Eingabe x die Zustände $q_0, q_1, \ldots, q_k$, wobei wir die Zustände aus $Q' \setminus Q$ ignorieren.

Nun ist der einzige Weg um von q_{i-1} den Zustand q_i zu erreichen mithilfe eines Pfades $(q_{i-1})_{h(a_i)_j}$ für ein $a_i \in \Sigma$ gehört. Damit gilt aber schon $x = h(a_1)h(a_2)\cdots h(a_k) = h(a_1 a_2 \cdots a_k)$ und $\delta(q_i, a_i) = q_{i+1}$ in M. Da $q_k \in Q_{\text{acc}}$ akzeptiert M also $a_1 a_2 \cdots a_k$ und damit $a_1 a_2 \cdots a_k \in L$ und $x \in h(L)$.

(c) Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_{\text{acc}})$ ein deterministischer endlicher Automat mit $L(M) = L$. Wir konstruieren einen neuen Automat M' mit Zustandsübergängen δ': $\delta'(q, a) = \delta^\star(q, h(a))$. Damit ist

$$\begin{aligned} x = x_1 \ldots x_\ell \in L(M') &\Leftrightarrow \delta^\star(\delta^\star(\ldots \delta^\star(\delta^\star(q_0, h(x_1)), h(x_2)) \ldots, h(x_{\ell-1})), h(x_\ell)) \in Q_{\text{acc}} \\ &\Leftrightarrow h(x) \in L. \end{aligned}$$

(d) Ein Homomorphismus h ist nicht notwendigerweise bijektiv, daher gilt $h^{-1}(h(L)) = L$ im Allgemeinen nicht. In der Tat ist $h^{-1}(h(\mathsf{COPY})) = \{x \in \{0,1\}^\star \mid |x| \text{ gerade}\}$ regulär, aber ungleich COPY.