Grundzüge der Theoretischen Informatik, WS 21/22: Musterlösung zum 14. Präsenzblatt

Julian Dörfler

Aufgabe P14.1 (Grammatiken)
Geben Sie Grammatiken an, die die folgenden Sprachen erkennen:

(a) $L_1 = \{0^n 1^m 2^m 3^n \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

(b) $L_2 = \{0^n 1 2^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

(c) $L_3 = \{0^n 1^m \mid n \geq m\}$

(d) $L_4 = \{0^n 1^m \mid n > m\}$

Lösung P14.1 (Grammatiken) (a) $G_1 = (\{S, I\}, \{0, 1, 2, 3\}, P_1, S)$ wobei P_1 gegeben ist durch:

$$S \to I \mid 0S3$$
$$I \to \varepsilon \mid 1I2$$

(b) $G_2 = (\{S\}, \{0, 1, 2\}, P_2, S)$ wobei P_2 gegeben ist durch:

$$S \to 1 \mid 0S22$$

(c) $G_3 = (\{S\}, \{0, 1\}, P_3, S)$ wobei P_3 gegeben ist durch:

$$S \to \varepsilon \mid 0S \mid 0S1$$

(d) $G_4 = (\{S\}, \{0, 1\}, P_4, S)$ wobei P_4 gegeben ist durch:

$$S \to 0 \mid 0S \mid 0S1$$

Aufgabe P14.2 (Abschlusseigenschaften kontextfreier Sprachen)
Untersuchen Sie inwiefern kontextfreie Sprache abgeschlossen sind unter

(a) Konkatenation

(b) Kleenscher Hülle

(c) Schnitt

(d) Vereinigung

(e) Komplement

(f) Reversierung

(g) Bild unter Homomorphismen

Hinweis: Kontextfreie Sprachen sind unter mindestens einer dieser Eigenschaften nicht abgeschlossen.

Lösung P14.2 (Abschlusseigenschaften kontextfreier Sprachen) Im Verlauf dieser Aufgabe können alle konstruierten kontextfreien Grammatiken auch ε-Produktionen enthalten, dass wir diese aber entfernen können haben wir schon in der Vorlesung gezeigt. Weiterhin zeigen wir eine formale Korrektheit der Grammatik Konstruktionen der Übersicht halber nur einmalig am Beispiel der Konkatenation, die anderen Konstruktionen lassen sich ähnlich beweisen.

(a) Kontextfreie Sprachen sind unter Konkatenation abgeschlossen. Seien hierzu $G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1)$ und $G_2 = (V_2, \Sigma, P_2, S_2)$ kontextfreie Grammatiken mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Sei nun S eine neue Variable, die weder in V_1 noch in V_2 liegt. Nun ist $G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1S_2\}, S)$ eine kontextfreie Grammatik und erkennt $L(G_1)L(G_2)$.

    Beweis: Sei $x \in L(G_1)$ und $y \in L(G_2)$. Dann gilt $S_1 \Rightarrow^*_{G_1} x$ und $S_2 \Rightarrow^*_{G_2} y$ und somit auch $S_1 \Rightarrow^*_G x$ und $S_2 \Rightarrow^*_G y$. Weiterhin gilt somit aber $S \Rightarrow_G S_1S_2 \Rightarrow^*_G xy$, also $xy \in L(G)$.

    Sei umgekehrt $z \in L(G)$. Dann ist der erste Schritt einer Ableitung $S \Rightarrow S_1S_2 \Rightarrow^*_G z$. Da aber alle Variablen die aus S_1 resultieren und solche, die aus S_2 resultieren disjunkt sind muss es nun schon ein z' und ein z'' mit $z = z'z''$ geben, so dass $S_1 \Rightarrow^*_G z'$ und $S_2 \Rightarrow^*_G z''$. Dies impliziert aber nach Konstruktion direkt $S_1 \Rightarrow^*_{G_1} z'$ und $S_2 \Rightarrow^*_{G_2} z''$, also $z' \in L(G_1)$ und $z'' \in L(G_2)$.

(b) Kontextfreie Sprachen sind unter der Kleenschen Hülle abgeschlossen. Sei hierzu $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik und S' eine neue Variable, die in V nicht vorkommt. Nun ist $G' = (V \cup \{S'\}, \Sigma, P \cup \{S' \to \varepsilon, S' \to SS'\}, S')$ eine kontextfreie Grammatik die $L(G)^*$ erkennt.

(c) Kontextfreie Grammatiken sind nicht unter Schnitt abgeschlossen. So sind zum Beispiel $L_1 = \{0^n1^n2^m \mid n \geq 1, m \in \mathbb{N}\}$ und $L_2 = \{0^m1^n2^n \mid n \geq 1, m \in \mathbb{N}\}$ beide kontextfrei:

L_1 wird erkannt von

$$
\begin{aligned}
S &\to 0A1B \\
A &\to \varepsilon \mid 0A1 \\
B &\to \varepsilon \mid 2B
\end{aligned}
$$

L_2 wird erkannt von

$$
\begin{aligned}
S &\to A1B2 \\
A &\to \varepsilon \mid A0 \\
B &\to \varepsilon \mid 1B2
\end{aligned}
$$

Der Schnitt $L_1 \cap L_2 = \{0^n 1^n 2^n \mid n \geq 1\}$ ist jedoch wie in der Vorlesung gezeigt nicht kontextfrei.

(d) Kontextfreie Sprachen sind unter Vereinigung abgeschlossen. Seien hierzu $G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1)$ und $G_2 = (V_2, \Sigma, P_2, S_2)$ kontextfreie Grammatiken mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Sei nun S eine neue Variable, die weder in V_1 noch in V_2 liegt. Nun ist $G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\}, S)$ eine kontextfreie Grammatik und erkennt $L(G_1) \cup L(G_2)$.

(e) Kontextfreie Sprachen sind nicht unter Komplement abgeschlossen. Angenommen kontextfreie Sprachen wären unter Komplement abgeschlossen, dann wäre für beliebige kontextfreie Sprachen A, B nach De-Morgan und der Abgeschlossenheit unter Vereinigung $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$ ebenfalls kontextfrei, wir haben aber schon gezeigt, dass dies nicht gilt.

(f) Kontextfreie Sprachen sind unter Reversieren abgeschlossen. Dies wird erreicht, indem die rechte Seite jeder Produktion reversiert wird, siehe auch die Lösung zu Aufgabe A13.5.

(g) Kontextfreie Sprachen sind unter Bildern von Homomorphismen abgeschlossen: Sei hierzu $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik und $h : \Sigma \to \Sigma$ ein Homomorphismus. Wir konstruieren nun $G' = (V, \Sigma, P', S)$, wobei wir P' aus P konstruieren indem wir alle Terminale σ in den Produktionen durch $h(\sigma)$ ersetzen. Nun gilt $L(G') = h(L(G))$.

Weiterhin sind kontextfreie Sprachen ebenfalls unter Urbildern von Homomorphismen abgeschlossen, dies lässt sich mit Hilfe von Kellerautomaten durch eine ähnliche Konstruktion wie für reguläre Sprachen zeigen. Wir geben hier eine grobe Idee, jedoch keinen formalen Beweis: Sei M ein Kellerautomat, dann konstruieren wir einen Kellerautomat M', der für jedes gelesene Zeichen $\sigma \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ M für die Zeichen $h(\sigma_\varepsilon)_1, \ldots h(\sigma_\varepsilon)_{|h(\sigma_\varepsilon)|}$ simuliert. Die Zeichen, die noch zu verarbeiten sind von $h(\sigma_\varepsilon)$, werden als zweite Komponente in den Zuständen gespeichert.