Grundzüge der Theoretischen Informatik, WS 21/22: Musterlösung zum 3. Präsenzblatt

Julian Dörfler

Aufgabe P3.1 (Mehr Transduktoren)
Konstruieren Sie Transduktoren, die die folgenden Funktionen über $\{0,1\}^\star$ berechnen:

(a) $f_{M_1}(x_1x_2\dots x_n) = (x_1 \oplus x_2)(x_2 \oplus x_3)\cdots(x_{n-1} \oplus x_n)$ wobei $\oplus$ die Addition in $\mathbb{F}_2$ darstellt[1].

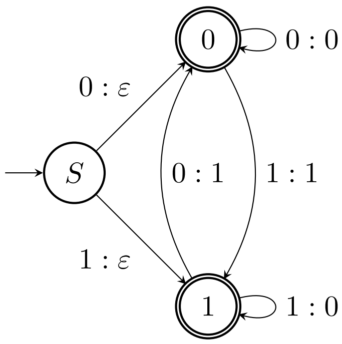
(b) $f_{M_2}(x_1x_2\dots x_{n-1}x_n) = x_1x_2\dots x_{n-1}$

(c) $f_{M_3}(x_1x_2\dots x_{n-1}x_n) = x_2\dots x_{n-1}x_n$

(d) $f_{M_4}(x) = \begin{cases} x & \text{falls } |x| \text{ gerade ist} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$

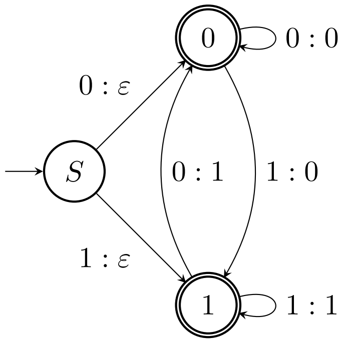
Lösung P3.1 (Mehr Transduktoren)
Wir interpretieren $f_{M_1}(\varepsilon) = f_{M_2}(\varepsilon) = f_{M_3}(\varepsilon) = \text{undefiniert}$.

(a) Die Zustände 0 und 1 speichert jeweils das zuletzt gelesene Zeichen. Das Transitionen von S ausgehend geben nur ε aus, da die Ausgabe ein Zeichen kürzer als die Eingabe ist.

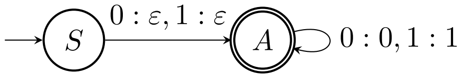


(b) Die Zustände 0 und 1 speichern jeweils das zuletzt gelesene Zeichen. Dieses wird dann bei der nächsten Transition wieder ausgegeben.

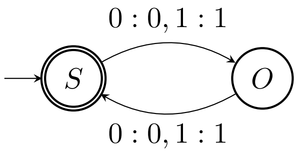
[1]Das heißt $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$ und $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$



(c) Das erste Zeichen wird ignoriert, danach geben wir genau die Eingabe aus.



(d) Wir akzeptieren nur Wörter gerader Länge und geben jedes Zeichen das wir lesen direkt wieder aus.



Aufgabe P3.2 (Endliche Automaten)

(a) Zeigen Sie: Ist M ein DEA mit k Zuständen über einem Alphabet Σ mit $L(M) \neq \emptyset$ und $L(M) \neq \Sigma^\star$, dann gibt es Strings $x \in L(M)$ und $y \in \Sigma^\star \setminus L(M)$ mit $|x| < k$ und $|y| \leq k$.

(b) Zeigen Sie: Ist M ein NEA mit k Zuständen über einem Alphabet Σ mit $L(M) \neq \emptyset$, dann gibt es einen String $x \in L(M)$ mit $|x| < k$.

(c) Zeigen Sie: Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ und einen NEA M mit k Zuständen über dem Alphabet $\{1\}$, so dass $L(M) \neq \{1\}^\star$ und der kürzeste String $y \in \{1\}^\star \setminus L(M)$ hat Länge mindestens $k + 1$.

Hinweis: Versuchen Sie es mit einem Automaten mit acht Zuständen. Verwenden Sie fünf Zustände für einen Zyklus, zwei für einen weiteren Zyklus und den verbleibenden als Startzustand, so dass der kürzeste nicht akzeptierte String die Länge 9 hat.

(d) Geben Sie eine Konstruktion von nichtdeterministischen endlichen Automaten M über dem Alphabet $\{1\}$ mit beliebig großer Anzahl Zuständen, so dass die Länge des kürzesten Strings aus $\{1\}^\star \setminus L(M)$ superpolynomiell wächst in der Anzahl der Zustände von M.

Hinweis: Verallgemeinern Sie die Konstruktion aus Aufgabenteil (c) mit Hilfe des chinesischen Restsatzes.

Lösung P3.2 (Endliche Automaten)

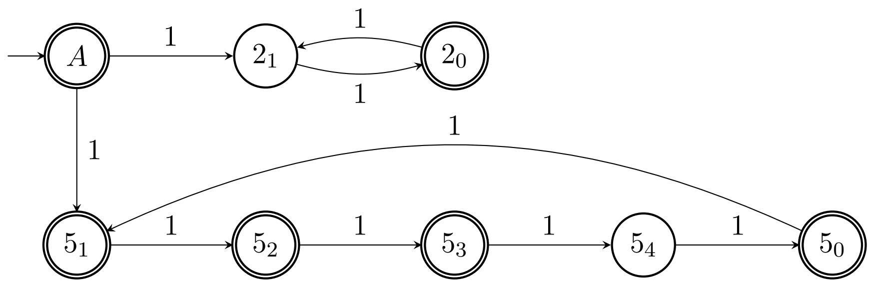
(a) Sei $x \in L(M)$. Gilt $|x| < k$ so sind wir fertig. Ansonsten gilt $|x| \geq k$, dann besuchen wir bei Ausführung von M auf x nach dem Schubfachprinzip einen Zustand q von M mindestens zweimal. Sei q_0 der Startzustand von M und δ die Zustandsübergangsfunktion. Sei $q_1 = \delta^\star(q_0, x)$ der Zustand von M, mit dem wir x akzeptieren. Wir können x schreiben als $x = uzv$ mit $z \neq \varepsilon$, $\delta^\star(q_0, u) = q$, $\delta^\star(q, z) = q$ und $\delta^\star(q, v) = q_1$. Nun ist aber auch $uv \in L(M)$ und $|uv| < |x|$. Wir können dieses Argument fortführen, bis wir einen String der Länge höchstens $k - 1$ haben.

Sei $y \in \Sigma^\star \setminus L(M)$. Ist $|y| \leq k$, dann ist nichts zu zeigen. Ansonsten ist entweder $\delta^\star(q_0, y)$ undefiniert oder $\delta^\star(q_0, y)$ ist kein akzeptierender Zustand. Im ersten Fall sei $y'a$ ein Präfix von y, so dass $\delta^\star(q_0, y'a)$ undefiniert und $\delta^\star(q_0, y')$ definiert ist. Ist $|y'| < k$, dann sind wir fertig, da $|y'a| \leq k$ und $y'a \in \Sigma^\star \setminus L(M)$. Ansonsten kommt bei der Ausführung von M auf y' ein Zustand mindestens zweimal vor. Der Rest dieses Falles ist analog zur Analyse von $x \in L(M)$.

Ist $\delta^\star(q_0, y)$ definiert, aber kein akzeptierender Zustand, dann lässt sich, ebenfalls analog zur Analyse von $x \in L(M)$, zeigen, dass es ein y' mit $|y'| < k$ und $y' \in \Sigma^\star \setminus L(M)$ gibt.

(b) Sei $x \in L(M)$ beliebig mit $\ell = |x|$. Ist $\ell < k$, dann ist nichts zu zeigen. Sei ansonsten $q_0, q_1, \ldots, q_\ell$ eine akzeptierende Folge von Zuständen, die M auf Eingabe x besucht. Ist $\ell \geq k$, dann gibt es $i < j$ mit $q_i = q_j$. In diesem Fall wir aber auch der String $x' = x_1 x_2 \ldots x_i x_{j+1} x_{j+2} \ldots x_\ell$ akzeptiert. Wir können dieses Argument iterieren, bis wir einen String der Länge höchstens $k - 1$ haben.

(c) Der folgende Automat mit acht Zuständen akzeptiert die Sprache $\{1^j \mid j \not\equiv -1 \pmod{\ell}$ für alle $\ell \in \{2, 5\}\}$, also insbesondere $\varepsilon, 1, 11, \ldots, 1^8$, aber nicht 1^9.



(d) Seien $p_1, \ldots, p_\ell$ die ersten ℓ Primzahlen. Wir konstruieren, analog zu Aufgabenteil (c) einen Automat, der die Sprache $\{1^j \mid j \not\equiv -1 \pmod{p_i}$ für alle $i\}$ erkennt. Der

Automat hat $1 + \sum_{i=1}^{\ell} p_i$ Zustände. Der kürzeste nicht akzeptierte String hat die Länge $\prod_{i=1}^{\ell} p_i - 1$.

Der Automat hat $O(\ell^2 \log \ell)$ Zustände. Andererseits ist $\prod_{i=1}^{\ell} p_i - 1 \geq 2^{\ell}$ für $\ell \geq 3$.