Grundzüge der Theoretischen Informatik

5. November 2021

Markus Bläser

Universität des Saarlandes

Kapitel B: Äquivalenzrelationen

Relationen

- Seien A und B Mengen.
- $R \subseteq A \times B$ heißt (binäre) Relation.
- $(a, b) \in R$: "a und b stehen in Relation bzgl. R"
- Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt *reflexiv* falls $(a, a) \in R$ für alle $a \in A$.
- R heißt *symmetrisch* falls aus $(a, b) \in R$ auch $(b, a) \in R$ folgt für alle $(a, b) \in A \times A$.
- R heißt *transitiv* falls aus $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ auch $(a, c) \in R$ folgt für alle $a, b, c \in A$.

Definition

Eine Relation heißt *Äquivalenzrelation*, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Äquivalenzklassen

- Sei R eine Äquivalenzrelation.
  Die *Äquivalenzklasse* $[a]_R$ von a ist $\{b \in A \mid (a, b) \in R\}$.
- Jedes Element einer Äquivalenzklasse heißt *Repräsentant*.

Lemma

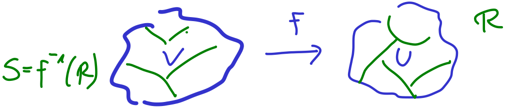
Sei R eine Äquivalenzrelation. Für alle $a, b \in A$ gilt: aRb genau dann wenn $[a]_R = [b]_R$.

Lemma

Die Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation R auf A bilden eine Partition von A, d.h. jedes $a \in A$ ist in genau einer Klasse.

- Der *Index* einer Äquivalenzrelation R ist die Anzahl der Äquivalenzklassen von R und wird mit $\mathrm{index}(R)$ bezeichnet.
- Falls die Anzahl der Klassen unendlich ist, dann ist $\mathrm{index}(R)$ unendlich.

Abgeleitete Klassen



Lemma

Seien U *und* V *Mengen,* R *eine Äquivalenzrelation auf* U *und sei* f *eine totale Funktion* $V \to U$*. Dann ist die Relation*

$$S = \{(x, y) \mid (f(x), f(y)) \in R\}$$

eine Äquivalenzrelation auf V*.*

Notation: $S = f^{-1}(R)$.

Lemma

Seien $R_1, R_2, R_3, \dots$ *Äquivalenzrelationen auf* U*. Dann ist* $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} R_i$ *auch eine Äquivalenzrelation.*

Beweis

S ist reflexiv:

Sei $x \in V$ beliebig. Dann ist $(x,x) \in S$, da $(f(x), f(x)) \in R$, weil R reflexiv ist

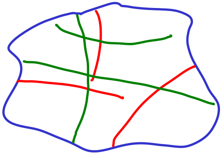
S ist symmetrisch.

Seien $x,y \in V$ mit $(x,y) \in S$. Da $(x,y) \in S$ muss $(f(x), f(y)) \in R$ ist. Da R symmetrisch ist, gilt $(f(y), f(x)) \in R$ und damit gilt, dass $(y,x) \in S$

S ist transitiv: genauso. $\square$

Beweis

Sei $S := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} R_i$



S ist reflexiv:

Sei $x \in U$ beliebig. Es gilt $(x,x) \in S$, weil jedes R_i reflexiv ist. Dann gilt $(x,x) \in R_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und damit gilt $(x,x) \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} R_i$

S ist symmetrisch:

Seien $x, y \in U$ beliebig mit $(x,y) \in S = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} R_i$.

Da jedes R_i symmetrisch ist, ist auch $(y,x) \in R_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und damit $(y,x) \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} R_i$

Kapitel 5: Das Myhill-Nerode-Theorem

Nur wenige Dinge sind geistig so brutal wie das Pumping-Lemma-Spiel.

Die Automatenrelation

- Äquivalenzrelationen R auf Σ^*.
- R heißt *rechtsinvariant* (bzgl. Konkatenation), falls für alle $x, y \in \Sigma^*$,

$$xRy \quad \Longrightarrow \quad xzRyz \text{ für alle } z \in \Sigma^*.$$

Definition (5.1, Automatenrelation)

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_{acc})$ ein DEA, so dass δ total ist. Die Relation $\equiv_M$ ist definiert auf Σ^* durch

$$x \equiv_M y :\Longleftrightarrow \delta^*(q_0, x) = \delta^*(q_0, y).$$

Lemma (5.2)

Für jeden DEA M ist $\equiv_M$ eine Äquivalenzrelation, die rechtsinvariant ist und endlichen Index hat.

Beweis 5.2

1) $\equiv_M$ ist eine Äquivalenz-Relation

$x \equiv_M y \quad :\Longleftrightarrow \quad \delta^*(q_0, x) = \delta^*(q_0, y)$

$\delta^* : \Sigma^* \to Q$

$=$ auf Q ist eine Äq. relation

Lemma B.5

$\Downarrow$

$\equiv_M$ Äq. relation

2) $\equiv_M$ ist rechtsinvariant

Seien $x, y \in \Sigma^*$ mit $x \equiv_M y$

Sei $z \in \Sigma^*$ bel. z.z. $xz \equiv_M yz$

Da $x \equiv_M y$ ist $\delta^*(q_0, x) = \delta^*(q_0, y) =: q$.

Damit gilt

$$\left.\begin{array}{l} \delta^*(q_0, xz) = \delta^*(q, z) \\ \delta^*(q_0, yz) = \delta^*(q, z) \end{array}\right\} \Rightarrow xz \equiv_M yz$$

3) $\equiv_M$ hat endlichen Index

Es kann nicht mehr Klassen als Zustände geben $\square$

Wenn jeder Zustand erreichbar ist, dann ist $\text{Index}(\equiv_M) = |Q|$.

Die Myhill-Nerode-Relation

Definition (5.4, Myhill-Nerode-Relation)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Die *Myhill-Nerode-Relation* $\sim_L$ ist auf Σ^* definiert durch

$$x \sim_L y :\iff [\text{für alle } z \in \Sigma^*\text{: } xz \in L \iff yz \in L].$$

Lemma (5.6)

Für jedes $L \subseteq \Sigma^*$ ist $\sim_L$ eine rechtsinvariante Äquivalenzrelation.

Beweis 5.6.

$\sim_L$ ist Äq.relation:

Sei $z \in \Sigma^*$ fest gewählt.

Definiere die Relation R_z wie folgt

$$x \, R_z \, y \;:\Longleftrightarrow\; [\, xz \in L \Longleftrightarrow yz \in L \,]$$

R_z ist eine Äquivalenz-Relation

$$\hat{x} \, S \, \hat{y} \;:\Longleftrightarrow\; [\, \hat{x} \in L \Longleftrightarrow \hat{y} \in L \,]$$

S ist Äquivalenzrelation.

$$F_z : \Sigma^* \to \Sigma^*$$

$$x \mapsto xz$$

$$R_z = F_z^{-1}(S) \xRightarrow{\text{Lem B.5}} R_z \text{ ist Äq. relation.}$$

$x \sim_L y \iff \forall z \in \Sigma^*: \quad x \, R_z \, y$

$\sim_L = \bigcap_{z \in \Sigma^*} R_z \overset{B.6}{\Longrightarrow} \sim_L$ ist Äq.relation.

$\sim_L$ ist Rechtsinvariant

$x \sim_L y \iff \forall z' \in \Sigma^*: \quad xz' \in L \iff yz' \in L$

Wir müssen zeigen, dass $xw \sim_L yw \quad \forall w \in \Sigma^*$.

$xw \sim_L yw \iff \underline{\forall z \in \Sigma^*: \; xwz \in L \iff ywz \in L}$

folgt daraus für $z' = wz$ $\square$

Beispiel

alle Worte mit genau zwei 1en

$$L = L(0^*10^*10^*)$$

z

ε $\qquad \varepsilon\, 11 = 11 \in L$

1 $\qquad 1\, 11 = 111 \notin L$

$\Longrightarrow \quad \varepsilon \not\sim_L 1$

$\left.\begin{array}{l}\varepsilon \\ 0\end{array}\right\}$ haben gleiche Anzahl von 1en

$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l}\varepsilon z = z \\ 0z\end{array}\right\}$ haben auch wieder die gleiche Anzahl von 1en

$A_0 = \{ x \mid x$ hat 0 1en$\}$

$A_1 = \{ \dots \quad 1 \quad .. \}$

$A_2 = \{ \dots \quad 2 \quad \dots \}$

$A_{\geq 3} = \{ \dots \quad \geq 3$ 1en$\}$

Das Myhill-Nerode-Theorem

Theorem (5.8, Myhill-Nerode)

Sei $\mathrm{L} \subseteq \Sigma^*$. Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

ein Teil von allen

1. L *ist regulär.*
2. L *ist die Vereinigung einiger Äquivalenzklassen einer rechtsinvarianten Äquivalenzrelation mit endlichem Index.*
3. $\sim_{\mathrm{L}}$ *hat endlichen Index*

Beweis von 5.8

1) $\Rightarrow$ 2): Sei L regulär. Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q_{acc})$ ein DEA für L. $\equiv_M$ ist eine Äq.relation, $\equiv_M$ is rechtsinvariant und $\equiv_M$ hat endlichen Index.

(Die Klassen von $\equiv_M$ entsprechen Zuständen
$x \equiv_M y$ falls $\delta^*(q_0 x) = \delta^*(q_0, y)$.)

$$L = \{x \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, x) \in Q_{acc}\}$$
$$= \bigcup_{q \in Q_{acc}} \underbrace{\{x \in \Sigma^* \mid \delta^*(q_0, x) = q\}}_{\text{Äqklasse von } \equiv_M}$$

2) $\Rightarrow$ 3)

Sei R eine rechtsinvariante Äq.rel auf Σ^* mit endl. Index, so dass L die Vereinigung einiger Klassen von R ist.

Wir zeigen, dass R eine Verfeinerung von $\sim_L$ ist, d.h. $\forall x,y \in \Sigma^*: xRy \Rightarrow x \sim_L y$

Damit gilt $\text{index}(\sim_L) \leq \text{index}(R) < \infty$.

Seien $x, y \in \Sigma^*$ mit xRy.

Da R rechtsinvariant ist, gilt

$\forall z \in \Sigma^*: \; xz \, R \, yz$

$xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$ $\Bigg] \Rightarrow x \sim_L y$

Da L die Vereinigung einiger Klassen von R ist, gilt, dass R-äquivalente Wörter entweder beide in L sind oder beide nicht in L sind

---

3) $\Rightarrow$ 1) $\sim_L$ hat endlichen Index

Myhill-Nerode-Automat (Minimalautomat)

Q = alle Äquivalenzklassen von $\sim_L$

$\delta([x]_{\sim_L}, \sigma) = [x\sigma]_{\sim_L}$

δ ist wohldefiniert, denn

$x \sim_L y \Rightarrow x\sigma \sim_L y\sigma$

$q_0 = [\varepsilon]_{\sim_L}$

$Q_{acc} = \{ [x]_{\sim_L} \mid x \in L \}$

Es bleibt z.z., dass $L(M) = L$.

Induktion $\rightarrow$ $\delta^*([\varepsilon]_{\sim_L}, x) = [x]_{\sim_L}$

$[x]_{\sim_L} \in Q_{acc} \iff x \in L$.

$$\Rightarrow \Big(x \in L \iff \delta^*([\varepsilon]_{\sim_L}, x) \in Q_{acc}$$

$$\iff x \in L(M) \Big)$$

$\Rightarrow$ $L = L(M)$. $\square$

Der Myhill-Nerode-Automat

- $Q =$ die Menge der Äquivalenzklassen von $\sim_L$,
- $\delta([x]_{\sim_L}, \sigma) = [x\sigma]_{\sim_L}$ für alle $\sigma \in \Sigma$,
- $q_0 = [\varepsilon]_{\sim_L}$,
- $Q_{acc} = \{[x]_{\sim_L} \mid x \in L\}$.