Grundzüge der Theoretischen Informatik

Markus Bläser

Universität des Saarlandes

26.11.2021

Kapitel 13: Reduktionen

Weitere Probleme

- Programmäquivalenz (allgemeine Verifikation)

$$V = \{\langle i, j\rangle \mid \varphi_{\text{göd}^{-1}(i)} = \varphi_{\text{göd}^{-1}(j)}\}.$$

- Spezielles Verfikationsproblem

$$V_0 = \{i \mid \varphi_{\text{göd}^{-1}(i)}(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{N}\}.$$

- Terminierungsproblem

$$T = \{i \mid \varphi_{\text{göd}^{-1}(i)} \text{ is total}\}.$$

Idee:

Wir zeigen z.B.: $V \in \text{REC} \Longrightarrow H_0 \in \text{REC}$

Reduktionen

Definition (13.1)

Seien $L, L' \subseteq \mathbb{N}$.

1. Eine WHILE-berechenbare totale Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißt *many-one-Reduktion* von L auf L', falls

$$\text{für alle } x \in \mathbb{N}: \quad x \in L \iff f(x) \in L'.$$

2. Falls solch ein f existiert, dann heißt L *rekursiv many-one-reduzierbar* auf L'. "$L \leq L'$"

Reduktionen (2)

$$\chi_L = \chi_{L'} \circ f$$
$$\chi'_L = \chi'_{L'} \circ f$$

Lemma (13.3)

Seien $\mathrm{L}, \mathrm{L}' \subseteq \mathbb{N}$ *und* $\mathrm{L} \leq \mathrm{L}'$. *Dann gilt:*

1. *Falls* $\mathrm{L}' \in \mathrm{RE}$, *dann ist* $\mathrm{L} \in \mathrm{RE}$.
2. *Falls* $\mathrm{L}' \in \mathrm{REC}$, *dann ist* $\mathrm{L} \in \mathrm{REC}$.

Corollary (13.4)

Seien $\mathrm{L}, \mathrm{L}' \subseteq \mathbb{N}$ *und* $\mathrm{L} \leq \mathrm{L}'$. *Dann gilt:*

1. *Falls* $\mathrm{L} \notin \mathrm{RE}$, *dann ist* $\mathrm{L}' \notin \mathrm{RE}$.
2. *Falls* $\mathrm{L} \notin \mathrm{REC}$, *dann ist* $\mathrm{L}' \notin \mathrm{REC}$.

Reduktionen (3)

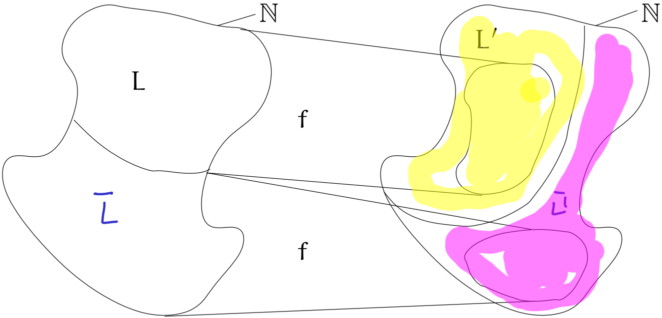
$L \le L' \wedge L' \le L''$

$\Rightarrow L \le L''$

Lemma (13.6)

$\leq$ *ist eine transitive Relation.*

$L \le L'$



$\bar{L} \le \bar{L}'$

Beweis 13.6

Sei: $L \leq L'$ und $L' \leq L''$ und seien F und g die entsprechenden Reduktionen

Gesucht: Eine Reduktion von L auf L''

Bew.: $h := g \circ F$ ist die gesuchte Reduktion

z.z.:
- h ist WHILE-berechenbar ✓
- $\forall x \in \mathbb{N}: \quad x \in L \Leftrightarrow h(x) \in L''$

Wenn $x \in L$, dann ist $F(x) \in L'$.

Wenn $\underset{= F(x)}{y} \in L'$, dann ist $\underset{= g(F(x)) = h(x)}{g(y)} \in L''$

Wenn $x \notin L$, dann ist $F(x) \notin L'$

Wenn $y \notin L'$, dann ist $g(y) \notin L''$. $\square$

Anwendungen

Lemma (13.7)

$H_0 \leq V_0$.

Lemma (13.8)

$V_0 \leq V$.

Lemma (13.9)

$V_0 \leq T$.

Lemma (13.10)

$\bar{H}_0 \leq V_0$.

Lemma 13.7 $\quad H_0 \leq V_0 = \{ i \mid \varphi_{\text{göd}^{-1}(i)}(x) = 0$ für alle $x \}$

Allgemeines Prinzip

WHILE-ber.

total

$$i \xrightarrow{f} j = f(i)$$

$$i \in H_0 \Longrightarrow j \in V_0$$

Wenn $\text{göd}^{-1}(i)$ auf i hält, dann gibt $\text{göd}^{-1}(j)$ immer 0 aus

$$i \notin H_0 \Longrightarrow j \notin V_0$$

Wenn $\text{göd}^{-1}(i)$ nicht auf i hält $\Rightarrow$ $\exists\, x \in \mathbb{N}: \varphi_{\text{göd}^{-1}(j)}(x) \neq 0$

$P := göd^{-1}(i)$

Q_i: 1. $x_0 := i$;

2. P

3. $x_0 := 0$

Q_i ignoriert die Eingabe

gesuchte Red.

$i \mapsto göd(Q_i)$

$i \in H_0$

Wenn P auf die eigene Gödelnummer i hält,

dann gibt Q_i wir 0 aus $\Rightarrow göd(Q_i) \in V_0$

$i \notin H_0$

Wenn P nicht auf die eigene Gödelnummer hält, dann hält Q_i auf keine Eingabe,

insbesondere ist $göd(Q_i) \notin V_0$

Es bleibt zu zeigen: Die Abbildung

$i \mapsto göd(Q_i)$ ist WHILE-berechenbar

Q_i: $\quad x_0 := i \qquad \langle 2, \langle 0, i \rangle\rangle_5$

$\qquad P \qquad i$

$\qquad x_0 := 0 \qquad \langle 2, \langle 0, 0 \rangle\rangle_5$

$$\overbrace{i \mapsto \langle 4, \langle 2, \langle 0, i \rangle\rangle_5, \langle 4, \langle i, \langle 2, \langle 0, 0 \rangle\rangle_5 \rangle_5 \rangle_5}^{=F}$$

ist WHILE-berechenbar, da die Paarfunktionen WHILE-berechenbar sind. □

Bem. Der Nachweis, dass F WHILE-berechenbar ist, muss nicht so explizit durchgeführt werden. Beschreibung mit Worten reicht i. A.

Lemma 13.8.

$V_0 = \{ i \mid \varphi_{göd^{-1}(i)}(x) = 0 \text{ für alle } x \}$

$V = \{ \langle i, j \rangle \mid \varphi_{göd^{-1}(i)} = \varphi_{göd^{-1}(j)} \}$

$i \longmapsto \langle i', j' \rangle$

Wenn $göd^{-1}(i)$ nicht immer 0 ausgibt, dann berechnen $göd^{-1}(i')$ und $göd^{-1}(j')$ nicht die gleiche Fkt.

$i' := i$

j' ist irgendeine Gödelnummer, so dass $göd^{-1}(j)$ immer 0 ausgibt, z. B. $göd(x_0 := 0)$ $\square$

$i \longmapsto \langle i, göd(x_0 := 0) \rangle$

Lemma 13.9.

$V_0 = \{ i \mid \varphi_{göd^{-1}(i)}(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{N} \}$

$T = \{ i \mid \varphi_{göd^{-1}(i)} \text{ ist total} \}$

Gesucht ist eine Reduktion $F: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

1) F ist total und WHILE-ber.

2) Wenn $i \in V_0$, dann ist $F(i) \in T$

Wenn $i \notin V_0$, dann ist $F(i) \notin T$

Wenn $göd^{-1}(i) =: P$ auf alle Eingaben 0 ausgibt,
dann hält $göd^{-1}(F(i)) =: J_i$ auf alle Eingaben

Wenn P auf mind. eine Eingabe nicht 0 ausgibt,
dann hält T auf mind. eine Eingabe nicht

$P \longrightarrow J_i$

1: P
2: while $x_0 \neq 0$ do
3: $\quad x_0 := 1$
4: od

Wenn P auf alle Eingaben 0 ausgibt, dann hält J_i auf alle Eingaben.

Wenn P auf eine Eingabe x nicht 0 ausgibt, dann hält entweder P und gibt einen Wert $\neq 0$ aus. In diesem Fall hält J_i auf x nicht, da in Zeile 2 - 4 in eine Endlosschleife gegangen wird.

Oder P hält auf x nicht. In diesem Fall hält J_i auf x nicht, da P in Zeile 1 nicht hält.

Das zeigt, dass $i \mapsto göd(J_i)$ die gewünschte Reduktionseigenschaft hat.

Die Abb $i \mapsto göd(J_i)$ ist offensichtlich total.

Die Abb -"- ist auch WHILE-berechenbar

$i \mapsto \langle 4, \langle i, \underset{\text{Zeilen 2-4}}{\text{Gödelnummer von}} \rangle\rangle_5$

$\square$

Zwischenfrage

Sei: $L \leq L'$

Was kann ich über $\overline{L}$ und $\overline{L'}$ sagen?

Es gilt $\overline{L} \leq \overline{L'}$ mit der gleichen Reduktion.

Was bedeutet $L \leq L'$?

$\forall x \in \mathbb{N}$ gilt: $x \in L \iff f(x) \in L'$

$x \notin L \iff f(x) \notin L'$

$x \in \overline{L} \iff f(x) \in \overline{L'}$