Grundzüge der Theoretischen Informatik - Probeklausur

22. Februar 2022

Julian Dörfler

Universität des Saarlandes

Aufgabe 1 - Quiz

Aufgabe 1 - Quiz

$\subset \mathbb{N}$ $\subseteq \mathbb{N}$

Quizfrage (a): Es existiert eine Bijektion von V_0 auf H_0.

Bij

Ja, V_0 ist abzählbar unendlich

H_0 ist abzählbar unendlich.

$V_0 \Leftrightarrow \mathbb{N}$

$\Updownarrow$ id

$H_0 \Leftrightarrow \mathbb{N}$

Bij.

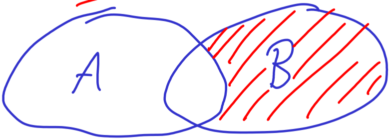
Aufgabe 1 - Quiz

Quizfrage (b): Seien $A, B \subseteq \Sigma^\star$, wobei $A \notin \mathrm{REG}$ und B endlich ist. Dann ist ebenfalls $A \cup B \notin \mathrm{REG}$.

Ja,

Angenommen $\underline{A \cup B \in \mathrm{REG}}$ $(*)$ gilt nicht

$\Rightarrow A \cup B \notin \mathrm{REG}$



$$\underbrace{(A \cup B)}_{\text{nach } (*) \text{ regulär}} \setminus \underbrace{(B \setminus A)}_{\text{endl.} \Rightarrow \text{regulär}} = A$$

nach Abschlusseig.

$\Rightarrow A \in \mathrm{REG}$ ↯

$A = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\underbrace{B = \{0,1\}^*}_{\text{nicht endlich}}$

Aufgabe 1 - Quiz

Quizfrage (c): Sei $L \leq_P L'$ und $L' \in \mathrm{REG}$. Dann ist $L \in \mathrm{REG}$.

Falsch. Gegenbeispiel:

$L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\quad$ $L' = \{\varepsilon\} \in \mathrm{REG}$

$L \leq_p L'$:

Geg. x prüfe ob x die Form $0^n 1^n$ hat

ja $\rightarrow$ gib ε zurück

nein $\rightarrow$ gib 0 zurück

Polyzeit berechenbar.

Aufgabe 1 - Quiz

Quizfrage (d): Mindestens eine der Inklusionen
$L \subseteq NL \subseteq P \subseteq NP \subseteq PSPACE$ ist strikt.

Wahr. Ang. (für Widerspr.) $L = NL = P = NP = PSPACE$

$L = PSPACE$

$O(\log n)$ $O(n^i)$ Platz (det.)

$\log n \in o(p(n))$ für (nicht konstante) Polynome p

Platzhierarchie $L \subsetneq PSPACE$ ↯

Aufgabe 1 - Quiz

Quizfrage (e): Sei $L \subseteq H_0$ unendlich. Dann ist L unentscheidbar.

Falsch. Gegenbsp: $L = \{ göd(P_i) \mid i \in \mathbb{N} \}$

$P_i : x_0 := i$

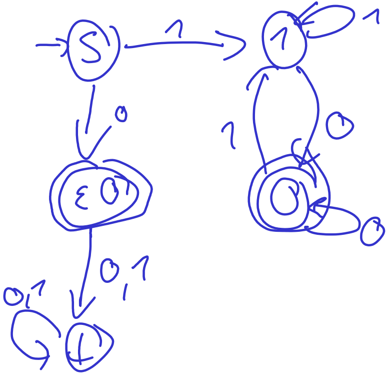
L ist unendlich. $L \subseteq H_0$

L ist entscheidbar.

Aufgabe 2 - Reguläre Sprachen

Aufgabe 2 - Minimalautomat

Minimalautomat für $L_1 = \{\text{bin}(n) \in \{0,1\}^\star \mid n \equiv 0 \mod 2\}$.



$R = \{\varepsilon, 0, 1, 10, 00\}$

Aufgabe 2 - Minimalautomat

Minimalautomat für $L_1 = \{\mathrm{bin}(n) \in \{0,1\}^\star \mid n \equiv 0 \mod 2\}$.

$$R = \{\varepsilon, 0, 1, 10, 00\}$$

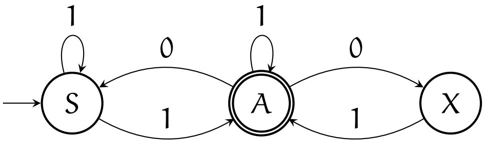
suche $z \in \{0,1\}^*$

$xz \in L_1 \not\Leftrightarrow$

$yz \in L_1$

$x \backslash y$	ε	$\bar{0}$	1	$\overline{10}$	00
ε	–	ε	00	ε	0
0		–	ε	0	ε
1			–	ε	0
10				–	ε
00					–

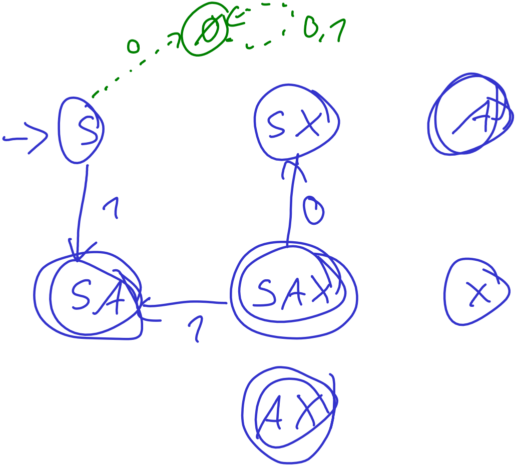
Aufgabe 2 - Potenzmengenkonstruktion



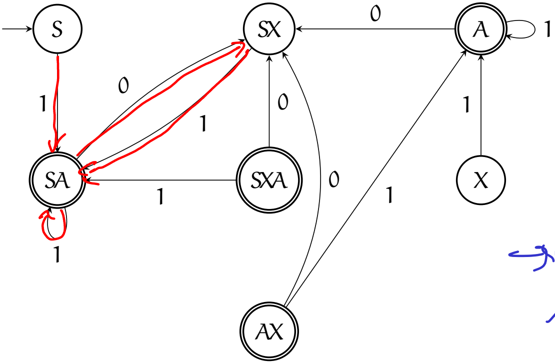
3 Zustände

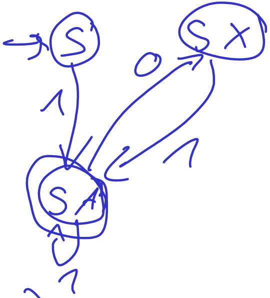
Potenzmenge: $2^3 = 8$ Zustände

Leere Menge $\Rightarrow$ 7/8 Zustände



Aufgabe 2 - Potenzmengenkonstruktion





$L(1(1+01)^*)$

Aufgabe 2 - Nicht reguläre Sprachen

$$L_2 = \{0^n 1 2^m \mid n \neq m\}.$$

Cheat sheet

$\{0^n 1^m \mid n \neq m\} \notin REG$

Pumpen

$(0^* 1 2^*) \setminus L_2 = \{0^n 1 2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Hom: $h(0) = 0$

$h(1) = \varepsilon$

$h(2) = 1$

Präs. blatt

$h(L_2) = \{0^n 1^m \mid n \neq m\} \notin REG$

Ang. $L_2 \in REG \Rightarrow h(L_2) \in REG$ ↯

MH-N. $R = \{0^n 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$

Sei $x, y \in R$ mit $x \neq y$. $x = 0^i 1$, $y = 0^j 1$ mit $i \neq j$

R unendl.

$z = 2^i$ $\to xz = 0^i 1 2^i \notin L_2$

$\to yz = 0^j 1 2^i \in L_2$, da $i \neq j$

paarweise: $0^i 1 \not\sim_{L_2} 0^j 1$ $\xrightarrow{\text{MH-N}}$ $L_2 \notin REG$

$\sim$: gerade vs ungerade

$0 \sim 1 \sim 2 \sim 3 \sim 4 \ldots \ldots$

$0 \sim 2$

Aufgabe 2 - Grammatiken

$$L_2 = \{0^n 1 2^m \mid n \neq m\}.$$

unabhängig $n > m$ $n < m$

G K

$$S \to 0G \mid K2$$

$$G \to 1 \mid 0G2 \mid 0G$$

$$K \to 1 \mid 0K2 \mid K2$$

linklinear $\hat{=}$ rechtslinear $\hat{=}$ regulär

$\Rightarrow$ L_2 hat keine linkslin. Gram.

Aufgabe 3 - Berechenbarkeitstheorie

Aufgabe 3 - Nicht-triviale Indexmenge

$$B = \{i \in \mathbb{N} \mid \operatorname{im} \varphi_i \text{ ist letztendlich periodisch}\}.$$

Sei $i \in B$ und $j \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_i = \varphi_j$. $\Rightarrow \operatorname{im} \varphi_i = \operatorname{im} \varphi_j$,
also ist $\operatorname{im} \varphi_j$ auch letztendlich periodisch. $\Rightarrow j \in B$

$\operatorname{im} \varphi_\Omega = \emptyset$

$\Omega \in B$, Sei P ein Programm, das die Quadratfkt. berechnet. $\operatorname{im} \varphi_P = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\{0^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär,

außerdem unäre Spr $\subseteq 1^*$ regulär $\Leftrightarrow$ für letztendlich periodisch auf $\mathbb{N}$

$P \notin B$

Ω

-hältnie

-dom $\varphi_\Omega = \emptyset$

-im $\varphi_\Omega = \emptyset$

$\{0\}$

$n_0 = 1 \quad p = 1$

$n \geq 1: \; n \in U \Leftrightarrow n+1 \in U$

$\notin U \qquad \notin U$

A endl. $\quad n_0 = (\max A) + 1$

✓	x	✓	x	x	✓	x	x	✓
1	2	3	4	5	6	7	8	...

Aufgabe 3 - Entscheidbarkeit

$$B = \{i \in \mathbb{N} \mid \operatorname{im} \varphi_i \text{ ist letztendlich periodisch}\}.$$

Aus (a) und dem Satz von Rice folgt $B \notin REC$.

Aufgabe 3 - Rekursive Aufzählbarkeit

$$\mathrm{B} = \{\mathrm{i} \in \mathbb{N} \mid \mathrm{im}\,\varphi_\mathrm{i} \text{ ist letztendlich periodisch}\}.$$

Aus PS.1 und B nicht-triviale Indexmenge und $\Omega \in B$ folgt $\overline{H_0} \leq B \Rightarrow B \notin RE$

Wir reduzieren $H_0 \leq \overline{B}$: $f(i) = göd(P_i)$, wobei P_i:

Gegeben m, führe i auf i aus. Danach gib m^2 aus.

$i \in H_0 \Rightarrow i$ hält auf i und $\mathrm{im}\,\varphi_{P_i} = \mathrm{im}\,\varphi_P$, welches nicht letztendlich periodisch ist. $\Rightarrow f(i) \in \overline{B}$.

$i \notin H_0 \Rightarrow i$ hält nicht auf i und $\mathrm{im}\,\varphi_{P_i} = \emptyset$. $\Rightarrow f(i) \notin \overline{B}$

Da $H_0 \notin$ co-RE und f offensichtlich WHILE-berechenbar, gilt $\overline{B} \notin$ co-RE $\Leftrightarrow B \notin RE$.

Aufgabe 3 - Corekursive Aufzählbarkeit

$$B = \{i \in \mathbb{N} \mid \mathrm{im}\,\varphi_i \text{ ist letztendlich periodisch}\}.$$

Es gilt $B \notin$ co-RE. $H_0 \leq B$: $f(i) = göd(P_i)$, wobei P_i:

Gegeben m, führe i auf i aus für m Schritte. Hält diese Simulation bis dort nicht, gib m^2 aus, sonst divergiere.

$i \in H_0 \Rightarrow$ Dann gibt es ein c, so dass i nach genau c Schritten hält. Dann ist $\mathrm{im}\,\varphi_{P_i}$ endlich und damit letztendlich periodisch $\Rightarrow f(i) \in B$.

$i \notin H_0 \Rightarrow$ Dann hält i nie auf i, also $\mathrm{im}\,\varphi_{P_i} = \mathrm{im}\,\varphi_P$. $f(i) \notin B$.

Da $H_0 \notin$ co-RE und f offensichtlich WHILE-berechenbar gilt $B \notin$ co-RE.

Aufgabe 3 - Rekursionstheorem

Sei $g \in B$. Zeigen Sie: Es gibt ein $i \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall x \in \mathbb{N} : \varphi_i(x) = \begin{cases} 1 & i \cdot x \boxed{\in \text{im}}\, \varphi_g \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

$$f(i,x) = \begin{cases} 1 & i \cdot x \in \text{im}\, \varphi_g \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

z.Z.: f ist WHILE-berechenbar.

Bei Eingabe y prüfe $y < n_0$. Falls ja, können wir eine hardgecodete Antwort ausgeben, ob $y \in \text{im}\, \varphi_g$.
Andernfalls berechne das minimale $y' \in \mathbb{N}$ so dass $y' \geq n_0$ und $y = y' + k \cdot p$ für irgendein $k \in \mathbb{N}$. Nun gib eine hardgecodete Antwort aus, ob $y' \in \text{im}\, \varphi_g$.

Die Aussage folgt nun aus dem Rekursionstheorem.

Aufgabe 4 - Komplexitätstheorie

Aufgabe 4 - PosSAT $\in$ P

$$\text{PosSAT} := \{\phi \mid \phi \in \text{SAT} \wedge \phi \text{ ist eine positive CNF}\}$$

Progr.: Prüfe ob Φ eine positive CNF ist

ja → $\in$ PosSAT

nein → $\notin$ PosSAT

→ Polyzeit

$\Rightarrow$ PosSAT $\in$ P

Belegung $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

$$\underbrace{(x_1 \vee x_2)}_{\text{jedes Literal ist } 1} \wedge (\; . \; . \; . \;)$$

jede Klausel erfüllt

$\Rightarrow$ Φ ist immer erfüllbar

Aufgabe 4 - WPos2SAT $\in$ NP

$$\text{WPos2SAT} := \{(\phi, k) \mid \phi \text{ ist eine positive 2CNF und hat eine erfüllende Belegung mit } \textbf{genau } k \text{ Einsen}\}$$

NTM: Geg Φ in pos. 2CNF und ein $k \in \mathbb{N}$

rate k versch. Variablen von Φ. Setze diese Var. auf 1, den Rest auf 0.

Prüfe ob diese Bel. erfüllend ist $\xrightarrow{\text{ja}}$ akzept.

$\xrightarrow{\text{nein}}$ verw.

Polynomialzeit $\Rightarrow$ WPos2SAT $\in$ NP

Aufgabe 4 - WPos2SAT NP-schwer

$$\text{WPos2SAT} := \{(\phi, k) \mid \phi \text{ ist eine positive 2CNF und hat eine erfüllende Belegung mit } \textbf{genau } k \text{ Einsen}\}$$

Reduktion von VC mit Eingabe $G = (V, E)$ und k.

- Eine Variable x_v pro Knoten $v \in V$.
- Eine Klausel $x_u \vee x_v$ für jede Kante $\{u, v\} \in E$.
- $k' = k$

Polyzeit

C Φ (b) (a) $\leadsto$

$(G, k) \mapsto (\Phi, k')$, $k' = k$

$x_a \vee x_b$, $x_a = 1$, $x_b = 0$

Sei $(G, k) \in VC$. Dann ex. ein VertexCover C der größe k. Setze $x_v = \begin{cases} 1 & \text{falls } v \in C \\ 0 & \text{falls } v \notin C \end{cases}$

Diese Belegung erfüllt Φ: $x_u \vee x_v = 1 \Leftrightarrow \{u, v\} \cap C \neq \emptyset \Leftarrow \{u, v\} \in E$

Da C ein VC ist.

" ——— " hat k Einsen

$\Rightarrow (\Phi, k') = (\Phi, k) \in \text{WPos2SAT}$

Aufgabe 4 - WPos2SAT NP-schwer , $\in NP \Rightarrow NP$-vollst.

$$\text{WPos2SAT} := \{(\phi, k) \mid \phi \text{ ist eine positive 2CNF und hat eine erfüllende Belegung mit } \textbf{genau } k \text{ Einsen}\}$$

Reduktion von VC mit Eingabe $G = (V, E)$ und k.

- Eine Variable x_v pro Knoten $v \in V$.
- Eine Klausel $x_u \vee x_v$ für jede Kante $\{u, v\} \in E$.
- $k' = k$

Sei $(\Phi, k) \in$ WPos2SAT. Dann gibt es eine erfüllende Belegung der x_v mit genau k Einsen.

$C = \{v \mid x_v = 1\}$. $|C| = k$

$x_u \vee x_v = 1 \Leftrightarrow \{u, v\} \cap C \neq \emptyset$

$\Leftarrow \{u, v\} \in E$

$\Rightarrow C$ ist VC von $G \Rightarrow (G, k) \in$ VC

Aufgabe 4 - NegSAT $\in$ P

$$\text{NegSAT} := \{\phi \mid \phi \in \text{SAT} \land \phi \text{ ist eine negative CNF}\}$$

Belegung $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Weiterhin alle Literale $= 1$, Rest analog.

Aufgabe 4 - WNeg2SAT $\in$ NP

$$\text{WNeg2SAT} := \{(\phi, k) \mid \phi \text{ ist eine negative 2CNF und hat eine erfüllende Belegung mit } \textbf{genau } k \text{ Einsen}\}$$

n-k Nullen

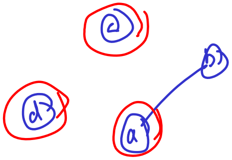
analog

Aufgabe 4 - WNeg2SAT NP-schwer

$$\text{WNeg2SAT} := \{(\phi, k) \mid \phi \text{ ist eine negative 2CNF und hat eine erfüllende Belegung mit } \textbf{genau } k \text{ Einsen}\}$$

Reduktion von IS mit Eingabe $G = (V, E)$ und k.

- Eine Variable x_v pro Knoten $v \in V$.
- Eine Klausel $\overline{x_u} \vee \overline{x_v}$ für jede Kante $\{u, v\} \in E$.
- $k' = k$



$\overline{x_u} \vee \overline{x_v}$

$\overline{x_a} \vee \overline{x_b}$

$= 1 = 0$

$x_u = x_v = 1$

$\Rightarrow u, v$ sind Teil des IS

$\lightning$ zu $\{u, v\} \in E$

Aufgabe 4 - WNeg2SAT NP-schwer

$$\text{WNeg2SAT} := \{(\phi, k) \mid \phi \text{ ist eine negative 2CNF und hat eine erfüllende Belegung mit } \textbf{genau } k \text{ Einsen}\}$$

Reduktion von IS mit Eingabe $G = (V, E)$ und k.

- Eine Variable x_v pro Knoten $v \in V$.
- Eine Klausel $\overline{x_u} \vee \overline{x_v}$ für jede Kante $\{u, v\} \in E$.
- $k' = k$