Grundzüge der Theoretischen Informatik, WS 21/22: Musterlösung zum 6. Übungsblatt

Julian Dörfler

In den folgenden Lösungen werden wir der Übersicht halber, gegeben eine Gödelisierung g eines `WHILE`-Programms, nicht mehr zwischen g und dem Programm P mit $\text{göd}(P) = g$ unterscheiden. Wenn wir also beispielsweise schreiben

Wir führen g auf n aus.

meinen wir damit

Wir nutzen das universelle `WHILE`-Programm um, gegeben g, P auf n auszuführen.

Aufgabe A6.1 (Abzählbarkeit) *(3 Punkte)*
Welche der folgenden Mengen sind abzählbar? Beweisen Sie Ihre Antworten kurz.

(a) $A = \Sigma^\star$, wobei Σ ein beliebiges endliches Alphabet ist.

(b) Die Menge B der Folgen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit endlichem Träger, d.h. es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $f(n) = 0$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

(c) Die Menge C aller monoton steigenden Folgen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Lösung A6.1 (Abzählbarkeit)

(a) $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma^n$ ist als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen abzählbar.

Alternativer Beweis: Wir verwenden Teilaufgabe (b) und erinnern uns, dass jedes Wort $a \in A$ als Funktion $a : \{1, \ldots, |a|\} \to \{0, 1\}$ definiert ist. Diese können wir auf beliebige Eingaben aus $\mathbb{N}$ erweitern indem wir

$$a'(i) := \begin{cases} a(i) & \text{wenn } 1 \leq i \leq |a| \\ 2 & \text{wenn } i = |a| + 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definieren. a' hat einen endlichen Träger, also $a' \in B$. Für $a' = b'$ ist gibt es nur ein i, sodass $a'(i) = b'(i) = 2$. Daher ist $|a| = |b|$ und somit direkt $a = b$. Somit können wir A injektiv auf B abbilden und aus der Abzählbarkeit von B folgt die Abzählbarkeit von A.

(b) Wir bilden Elemente $f \in B$ auf Stacks ab. Sei also $n_0 \in \mathbb{N}$ minimal mit $f(n) = 0$ für alle $n \geq n_0$. Dann bilden wir f auf den Stack ab, der genau die Elemente $f(0), f(1), \ldots, f(n_0 - 1)$ enthält und von dort gemäß unserer Implementierung der Stacks auf $\mathbb{N}$. Beide Abbildungen sind injektiv, also ist B abzählbar.

(c) C ist nicht abzählbar. Beweis durch Widerspruch: Sei $g : \mathbb{N} \to C$ eine Surjektion. Wir definieren $U(i) := 1 + \sum_{j=0}^{i} g(j)(j)$. Nun ist U eine monoton steigende Folge, da

$$U(i) = 1 + \sum_{j=0}^{i} g(j)(j) \leq 1 + \sum_{j=0}^{i+1} g(j)(j) = U(i+1) \; .$$

Nun exisiert durch die Surjektivität von g ein $x \in \mathbb{N}$ mit $g(x) = U$. Nun gilt:

$$g(x)(x) = U(x) = 1 + \sum_{j=0}^{x} g(j)(j) > g(x)(x)$$

was ein Widerspruch ist. Also existiert keine Surjektion $g : \mathbb{N} \to C$ womit C nicht abzählbar ist.

Aufgabe A6.2 (Spezielles Halteproblem) *(2 Punkte)*
Hier zeigen wir, dass das spezielle Halteproblem tatsächlich ein Spezialfall des allgemeinen Halteproblems ist.

Zeigen Sie dazu, dass $H_0 \leq H$ indem Sie *eine* totale Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ angeben, die *alle* folgenden Eigenschaften erfüllt:

(a) f ist `WHILE`-berechenbar.

(b) Wenn $g \in H_0$ ist, dann gilt $f(g) \in H$.

(c) Wenn $g \notin H_0$ ist, dann gilt $f(g) \notin H$.

Hinweis: Vergessen Sie nicht, diese Eigenschaften auch zu beweisen.

Lösung A6.2 (Spezielles Halteproblem) Wir definieren f wie folgt:

$$f(g) = \langle g, g \rangle$$

Wir weisen nun die Eigenschaften formal nach:

(a) f ist `WHILE`-berechenbar, da die Paarfunktion `WHILE`-berechenbar ist.

(b) Sei $g \in H_0$. Dann hält g auf Eingabe g, also ist $\langle g, g \rangle \in H$.

(c) Sei $g \notin H_0$. Dann hält g auf Eingabe g nicht, also ist $\langle g, g \rangle \notin H$.

Aufgabe A6.3 (RE) *(4 Punkte)*
Sei $L = \{i \mid i \in \mathbb{N} \text{ und } \text{göd}^{-1}(i) \text{ hält bei Eingabe } 0\}$.

(a) Zeigen Sie $L \in \mathsf{RE}$

(b) Zeigen Sie $\overline{L} \notin \mathsf{RE}$

Lösung A6.3 (RE)

(a) Das folgende WHILE-Programm P berechnet χ'_L:

Gegeben g, simuliere g auf Eingabe 0. Falls diese Simulation hält, gib 1 aus.

Sei $g \in L$. Dann hält g bei Eingabe 0. Somit produziert P bei Eingabe g die Ausgabe 1.

Sei $g \notin L$. Dann hält g bei Eingabe 0 nicht. Somit divergiert P bei Eingabe g.

(b) Wir zeigen dazu $\overline{H_0} \leq \overline{L}$. Da $\overline{H_0} \notin \mathsf{RE}$ folgt daraus dann $\overline{L} \notin \mathsf{RE}$.

Gegeben g, geben wir die Gödelisierung des folgenden Programms P_g aus:

Gegeben m, simuliere g auf g.

Diese Reduktionsfunktion ist offensichtlich WHILE-berechenbar.

Sei nun $g \in \overline{H_0}$. Dann hält g nicht bei Eingabe g. In diesem Fall hält P_g bei keiner Eingabe, insbesondere nicht bei 0, also göd$(P_g) \in \overline{L}$.

Sei nun $g \notin \overline{H_0}$. Dann hält g auf Eingabe g. Daher hält P_g auf jeder Eingabe, also insbesondere bei Eingabe 0, also göd$(P_g) \notin \overline{L}$.

Aufgabe A6.4 (Rekursive Aufzählbarkeit) *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass folgende Aussagen über Mengen $A \subseteq \mathbb{N}$ äquivalent sind:

(RE-A) A ist rekursiv aufzählbar.

(RE-B) Es gibt ein WHILE-Programm P mit $A = \mathrm{dom}(\varphi_P)$.

(RE-C) Es gibt ein WHILE-Programm P mit $A = \mathrm{im}(\varphi_P)$.

(RE-D) Es gibt ein FOR-Programm P mit $A = \mathrm{im}(\varphi_P)$ oder $A = \emptyset$.

Zur Erinnerung: Für eine partielle Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definieren wir

$$\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{N} \mid f(x) \text{ ist definiert}\} \text{ und}$$
$$\mathrm{im}(f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{N} \text{ und } f(x) \text{ ist definiert}\}.$$

Lösung A6.4 (Rekursive Aufzählbarkeit)

RE-A $\Rightarrow$ RE-B: Es sei P ein WHILE-Programm mit $\varphi_P(n) = 1$ für $n \in A$ und $\varphi_P(n) = 0$ oder undefiniert sonst. Dann ist folgende Funktion f ebenfalls WHILE-berechenbar:

$$f(n) \begin{cases} = 1 & \text{falls } \varphi_P(n) = 1 \text{ und} \\ \text{undef.} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion f lässt sich etwa durch folgendes WHILE-Programm berechnen:

1: P
2: **while** $x_0 = 0$ **do**
3: do nothing
4: **od**

Es ist $\mathrm{dom}(f) = \{n \mid \varphi_P(n) = 1\} = A$.

RE-B $\Rightarrow$ *RE-C:* Sei P ein `WHILE`-Programm mit $A = \mathrm{dom}(\varphi_P)$. Betrachte folgendes `WHILE`-Programm Q:

1: $y := x_0$
2: P
3: $x_0 := y$

Nun hält Q genau dann, wenn P auf Eingabe n hält. In diesem Fall ist $\varphi_Q(n) = n$. Also ist $\mathrm{im}(\varphi_Q) = \{n \mid \varphi_P(n) \text{ ist definiert}\} = A$.

RE-C $\Rightarrow$ *RE-D:* Ist A leer, dann ist nichts zu zeigen. Sei also $A \neq \emptyset$ und $a \in A$ ein beliebiges Element von A. Sei P ein `WHILE`-Programm mit $\mathrm{im}(\varphi_P) = A$. Dann ist folgende Funktion f `FOR`-berechenbar:

$$f(\langle x, t\rangle) = \begin{cases} n & \text{falls } P \text{ auf } x \text{ in höchstens } t \text{ Schritten mit } \varphi_P(x) = n \text{ hält und} \\ a & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun ist $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{im}(\varphi_P) = A$. Es bleibt $\mathrm{im}(f) \supseteq A$ zu zeigen. Sei also $n \in A$. Dann gibt es ein x mit $\varphi_P(x) = n$. Damit existiert ein t, so dass P auf Eingabe x innerhalb von t Schritten hält, woraus $f(\langle x, t\rangle) = n$, also $n \in \mathrm{im}(f)$ folgt.

RE-D $\Rightarrow$ *RE-A:* Im Fall $A = \emptyset$ ist A trivial rekursiv aufzählbar durch das Programm

1: $x_0 := 0$

Für $A \neq \emptyset$ sei P ein `FOR`-Programm mit $\mathrm{im}(\varphi_P) = A$. Dann ist folgendes Programm Q ein `WHILE`-Programm mit $\varphi_Q(n) = 1$ für $n \in A$ und $\varphi_Q(n) = 0$ oder undefiniert sonst:

Bei Eingabe m: Zähle einen Zähler z von 0 aus hoch und führe nacheinander P mit Eingabe z aus. Falls P hierbei jemals m ausgibt, dann terminiere mit Ausgabe 1.

Wenn $m \in \mathrm{im}(\varphi_P)$, dann gibt es eine Eingabe z mit $\varphi_P(z) = m$ und Q auf Eingabe m terminiert nach der z-ten Simulation von P mit Ausgabe 1, da jede Simulation von P terminiert, da P ein `FOR`-Programm ist. Wenn $m \notin \mathrm{im}(\varphi_P)$, dann gibt es keine Eingabe z mit $\varphi_P(z) = m$, Q wird also auf Eingabe m kontinuierlich z hochzählen und niemals terminieren.

Aufgabe A6.5 (Diagonales Denken) *(3 Punkte)*
Betrachten Sie die folgende Aussage:

Dieser Satz ist falsch.

Machen Sie sich intuitiv klar, warum diese Aussage weder wahr noch falsch sein kann.

(a) Sei P die folgende Menge

$$P = \{M \mid M \notin M\}\,.$$

Zeigen Sie, dass P nicht wohldefiniert ist[1].

(b) Sei F eine Menge von Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ und $g : F \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Wir definieren

$$U : \mathbb{N} \to F, \quad U(n)(x) := g^{-1}(n)(x)\,.$$

Konstruieren Sie (mithilfe von U) eine Funktion $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die *nicht* in F enthalten ist.

Lösung A6.5 (Diagonales Denken)
Wenn der Satz falsch ist, ist er wahr, und wenn er wahr ist, dann ist er falsch.

(a) P ist nicht wohldefiniert, da $P \in P \Leftrightarrow P \notin P$.

(b) Wir definieren $p(n) := U(n)(n) + 1$. Angenommen $p \in F$:

$$U(g(p))(g(p)) = g^{-1}(g(p))(g(p)) = p(g(p)) = U(g(p))(g(p)) + 1\,,$$

womit die Annahme zu einem Widerspruch geführt wurde. Es folgt also, dass $p \notin F$.

[1] Es ist also zu zeigen, dass P nicht existieren kann.