Задача A

Условие

Найти значения переменных в формуле 3SAT, при которых наибольшее число скобок принимают истинное значение.

Доказательство NPH

Надо доказать, что $3SAT \leq_p MAX3SAT$. Допустим мы умеем решать $MAX3SAT$, то есть мы нашли такой набор $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ при котором максимальное число скобок (обозначим k) истинно. Этот набор X и будет решением $3SAT$, если $k =$ числу скобок. $k \neq$ числу скобок, то $3SAT$ не разрешима.

Задача R

Условие

Рассмотрим такой алгоритм построения максимальной клики: будем каждый раз удалять из графа вершину минимальной степени, пока не получим полный граф. Докажите или опровергните, что такой алгоритм дает решение, не более чем в X раз отличающееся от оптимального.

Решение

Утверждение. Если клика размера N, то все входящие в нее вершины имеет степень $= N - 1$. Доказательство очевидно.

Утверждение. Для любого n можно построить граф, в котором степень хотя бы одной вершины будет n, а всех остальных вершин будет $\geq n$, а размер максимальной клики будет 2.
Таким графом будет n-мерный куб. Степень каждой вершины в него входящий будет равна n, так как хроматическое число n-мерного куба равно 2. Если хроматическое число графа равно 2, то в нем по определению не существует клик размера больше 2.

Утверждение. Для любого N, существует граф, в котором есть клика размера N и используя этот алгоритм будет получаться клика размера 2.
Возьмем клику C размера $N+1$. Возьмем граф G, в котором существует вершина v, степень которой N, а степень всех остальных вершин $\geq N$. Соединим C и G любым ребром, главное, чтобы оно не касалось вершины v. В получившемся графе минимальная степень вершины N и существует вершина степени N, входившая в граф C. Допустим алгоритм начнет удаление именно с этой вершины. Затем он будет постоянно удалять все вершины графа C, так как при удалении вершины графа C, степень всех вершин графа C уменьшиться на 1. Таким образом граф C будет полностью удален и задача сведется к нахождению максимальной клики в графе G. А у этого графа максимальная клика имеет размер 2 по определению.

Вывод

Последнее утверждение опровергает существование константы X.

Задача U

Условие

Предложить $\frac{1}{2}$-приближенный алгоритм для решения следующей задачи. Требуется разбить множество вершин неориентированного графа $G = (V, E)$ на два непересекающихся множества S и T таким образом чтобы число ребер $(u, v) : u \in S$ и $v \in T$ было максимально.

Решение

Начинаем со случайного разбиения. На каждой итерации алгоритма из одного множества переносим вершину в другое множество, таким образом, что бы решение улучшалось. Как только решение перестает улучшаться, алгоритм останавливается. Во время остановки алгоритма верно, что для каждой вершины половина (или больше) ребер ведут в другое множество. Если бы это было не так, то мы могли бы перенести эту вершину и улучшить решение. Это значит, что как минимум половина ребер ведут из одного множества в другое, а значит это $\frac{1}{2}$-приближенный алгоритм.

Использована информация из: Ссылка на источник .

z-test для оценки доли: $t = \frac{\overline{p}-p_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}, \overline{p} = mean(X)$

Нам известна ширина интервала w и погрешность $\alpha : w = 2t_{\alpha/2}\sqrt{\sigma^2/n}, t-$ распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы, но можно это заменить на нормальное распределение с параметрами p_0 и σ. Тогда

$$n = \frac{z_{\alpha/2*\sigma}}{w}$$