# Статистический анализ данных / Python

## Задание 1

**Правила:**

- Дедлайн **17 ноября 23:59**. После дедлайна работы не принимаются кроме случаев наличия уважительной причины.
- Выполненную работу нужно отправить на почту `mipt.stats@yandex.ru` , указав тему письма `"[MADE19] Фамилия Имя - задание 1"` . Квадратные скобки обязательны. Если письмо дошло, придет ответ от автоответчика.
- Прислать нужно ноутбук и его pdf-версию (без архивов), которую можно сделать с помощью печати в файл через инструменты браузера.
- Для выполнения задания используйте этот ноутбук в качествие основы, ничего не удаляя из него.
- Разделяйте код вычислений и отрисовки графиков. Так будет удобнее вам и проверяющим.

In [9]:

```
import numpy as np
import pandas as pd
import seaborn as sns
import scipy.stats as sps
import matplotlib.pyplot as plt
from statsmodels.sandbox.stats.multicomp import multipletests

red = '#FF3300'
blue = '#0099CC'
green = '#00CC66'

%matplotlib inline
```

### Задача 1. (5 баллов)

Пусть $X_1, ..., X_n$ --- выборка из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$. На занятии было получено, что оценка $X_{(n)}$ является оценкой максимального правдоподобия параметра $\theta$. Покажите, что она является состоятельной оценкой $\theta$:

$$\mathsf{P}_{\theta}(X_{(n)} < \theta - \varepsilon) = \mathsf{P}_{\theta}(X_1 < \theta - \varepsilon) * \mathsf{P}_{\theta}(X_2 < \theta - \varepsilon) * ... * \mathsf{P}_{\theta}(X_n < \theta - \varepsilon) = $$
$$(\mathsf{P}_{\theta}(X_1 < \theta - \varepsilon))^n = (F_{X_1}(\theta - \varepsilon))^n = \left ( \frac{\theta - \varepsilon}{\theta} \right )^n \rightarrow 0, \ \forall \varepsilon > 0,\ n \rightarrow \infty $$

*Указание.* Вспомните определение $X_{(n)}$ и воспользуйтесь независимостью.

В чем практический смысл состоятельности?

**Ответ:** По состоятельным оценкам можно делать точные выводы при достаточном объеме выборки.

Оценка $X_{(n)}$ не является асимптотически нормальной, но в данном случае можно доказать свойство круче: $$n\left(\theta - X_{(n)}\right) \stackrel{d_\theta}{\longrightarrow} Exp\left(1/\theta\right).$$
Вам нужно убедиться в этом, сгенерировав множество выборок, посчитав по каждой из них оценку $X_{(n)}$ параметра $\theta$ в зависимости от размера выборки и визуализировав рассматриваемое свойство.

Сгенерируйте множество выборок $X^1, \dots, X^{300}$ из равномерного распределения на отрезке $[0, 1]$: $\; X^j = (X^j_1, \dots, X^j_{500}), 1 \leq j \leq 300$.
По каждой из них посчитайте оценки $\widehat{\theta}_{jn} = \max(X^j_1, \dots, X^j_n)$ для $1 \leq n \leq 500$, то есть оценку параметра $\theta$ по первым $n$ наблюдениям $j$-й выборки. Для этих оценок посчитайте статистики $T_{jn} = n \left( \theta - \widehat{\theta}_{jn} \right)$, где $\theta = 1$.

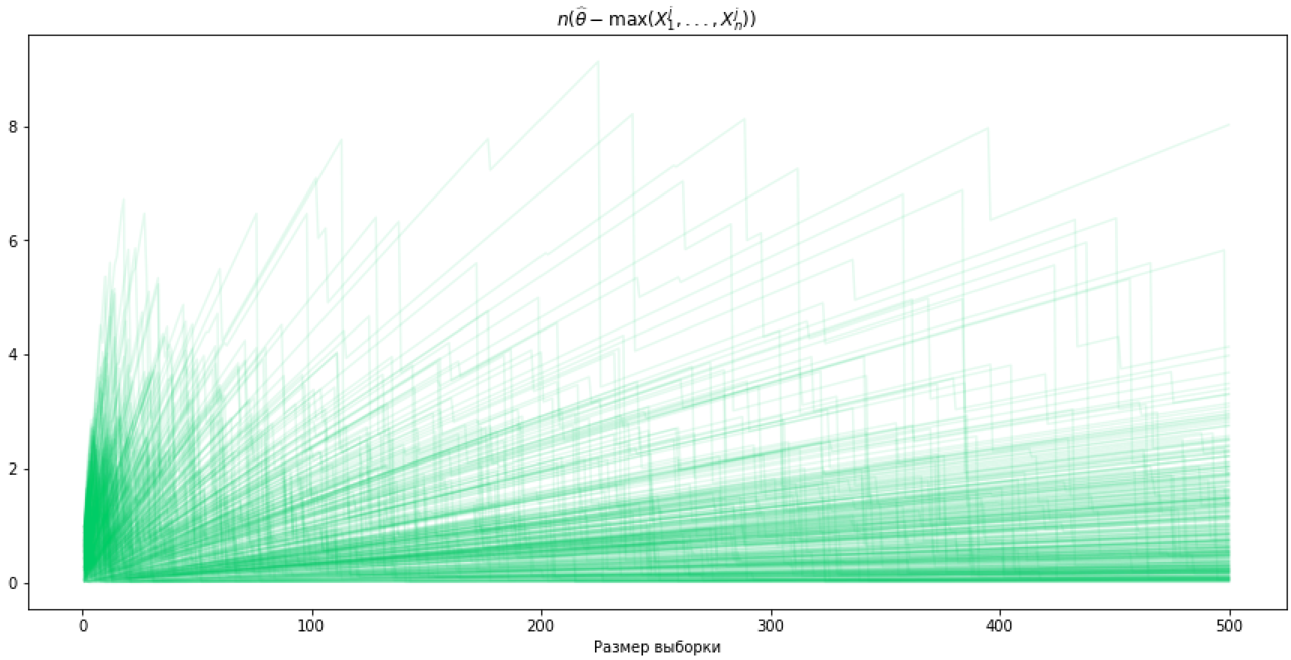
In [2]:

```
samples_count = 300
size = 500

samples = sps.uniform(loc=0, scale = 1).rvs(size=(samples_count, size))
theta = np.maximum.accumulate(samples, axis=1)
T = np.array([np.arange(1, size+1)] * samples_count) * (1 - theta)
# T = size * (1 - theta)
```

Для каждого $j$ нанесите на один график зависимость $T_{jn}$ от $n$ с помощью `plt.plot` . Все кривые должны быть нарисованы *одним и тем же цветом* с прозрачностью `alpha=0.1` . Сходятся ли значения $T_{jn}$ к какой-либо константе?

In [3]:

```
plt.figure(figsize=(15, 7))
for i in range(samples_count):
    plt.plot(np.arange(size) + 1, T[i],
             color=green, alpha=0.1)
plt.title('$n(\\widehat{\\theta} - \max(X_1^j, ..., X_n^j))$')
plt.xlabel('Размер выборки')
plt.show()
```

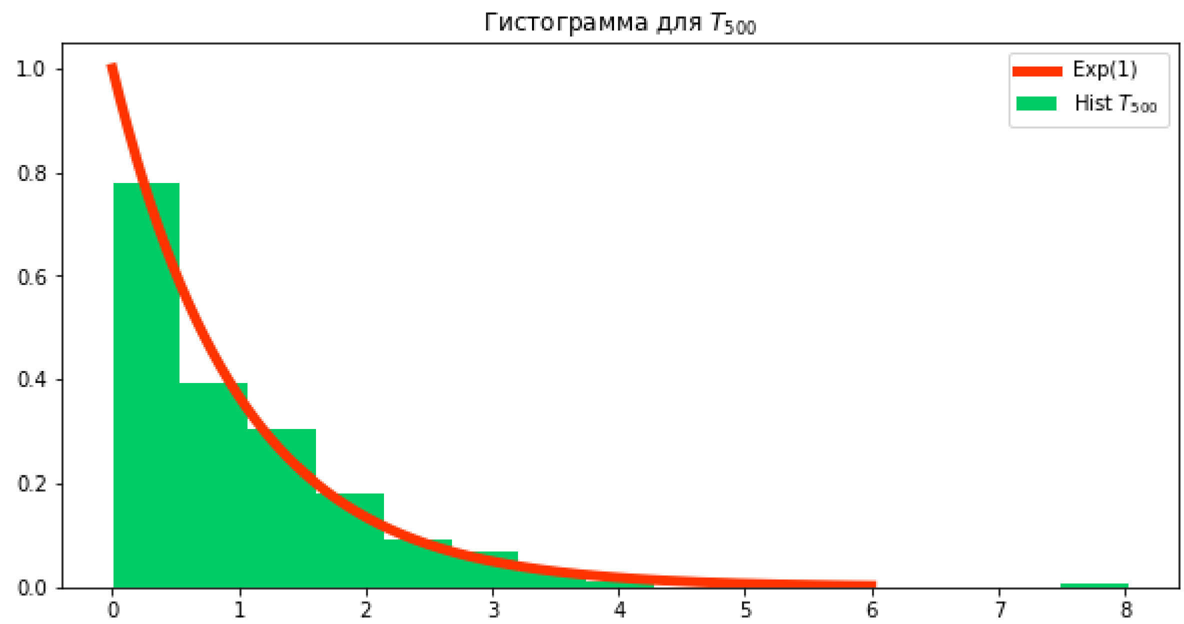



**Ответ:** Нет

Для $n=500$ по выборке $T_{1,500}, ..., T_{300,500}$ постройте гистограмму и график плотности распределения $Exp(1)$. Не забудьте сделать легенду.

In [4]:

```
grid = np.linspace(0, 6, 1000)

plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.hist(T[:, -1], bins=15, density=True, color=green)
plt.plot(grid, sps.expon(scale=1).pdf(grid), lw=5, color=red)
plt.title('Гистограмма для $T_{500}$')
plt.legend( ("Exp(1)", "Hist $T_{500}$") )
plt.show()
```




Сделайте вывод по задаче и ответьте на вопросы:

- Хорошо ли гистограмма приближает плотность распределения $Exp(1)$?
- Подтверждают ли проведенные эксперименты свойство $n\left(\theta - X_{(n)}\right) \stackrel{d_\theta}{\longrightarrow} Exp\left(1/\theta\right)$?
- Чем это свойство круче асимптотической нормальности и как это может быть полезно на практике?

**Вывод:**

1. Да, гистограмма достаточно хорошо приближает плотность распределения $Exp(1)$
2. Строго говоря, мы проверили только для $\theta = 1$, и мы можем сказать, что при $\theta = 1$ выполняется $n\left(\theta - X_{(n)}\right) \stackrel{d_\theta}{\longrightarrow} Exp\left(1/\theta\right)$
3. Кажется, что это свойство можно назвать "ассимпотической экспоненциальностью". Возможно, это свойство круче асимпотической нормальности, потому что домножение на $n$, а не на $\sqrt{n}$.

## Задача 2. (5 баллов)

В этом задании нужно сделать оценку ОМП для многомерного нормального распределения по датасету химического анализа вин трех разных сортов в Италии.

Скачайте данные по ссылке http://archive.ics.uci.edu/ml/machine-learning-databases/wine (http://archive.ics.uci.edu/ml/machine-learning-databases/wine) и загрузите их с помощью библиотеки pandas

In [5]:

```
data = pd.read_csv('wine.data', header=None)
data.columns = ['target', 'Alcohol', 'Malic acid', 'Ash', 'Alcalinity of ash',   'Magnesi
um', 'Total phenols', 'Flavanoids', 'Nonflavanoid phenols', 'Proanthocyanins', 'Color int
ensity', 'Hue', 'OD280/OD315 of diluted wines', 'Proline']
data.head()
```

Out[5]:

| | target | Alcohol | Malic acid | Ash | Alcalinity of ash | Magnesium | Total phenols | Flavanoids | Nonflavanoid phenols | Proanthocyanin |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 1 | 14.23 | 1.71 | 2.43 | 15.6 | 127 | 2.80 | 3.06 | 0.28 | 2.2 |
| **1** | 1 | 13.20 | 1.78 | 2.14 | 11.2 | 100 | 2.65 | 2.76 | 0.26 | 1.2 |
| **2** | 1 | 13.16 | 2.36 | 2.67 | 18.6 | 101 | 2.80 | 3.24 | 0.30 | 2.8 |
| **3** | 1 | 14.37 | 1.95 | 2.50 | 16.8 | 113 | 3.85 | 3.49 | 0.24 | 2.1 |
| **4** | 1 | 13.24 | 2.59 | 2.87 | 21.0 | 118 | 2.80 | 2.69 | 0.39 | 1.8 |

Пусть выборка $(X_1, \dots, X_n)$ такова, что каждый ее элемент имеет многомерное нормальное распределение со вектором средних $\mu \in \mathbb {R} ^d$ и матрицей ковариаций $\Sigma \in \mathbb {R} ^ {d \times d}$. Можно показать, то оценками максимального правдоподобия являются $$\widehat{\mu} = \overline{X},\ \ \ \widehat{\Sigma}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \left(X_i - \widehat{\mu}\right)\left(X_i - \widehat{\mu}\right)^T$$

Рассмотрим колонки "Alcalinity of ash", "Proanthocyanins", "Hue". Предположим, что данные в них образуют выборку из многомерного нормального распределения с неизвестными параметрами, которые вам нужно оценить.

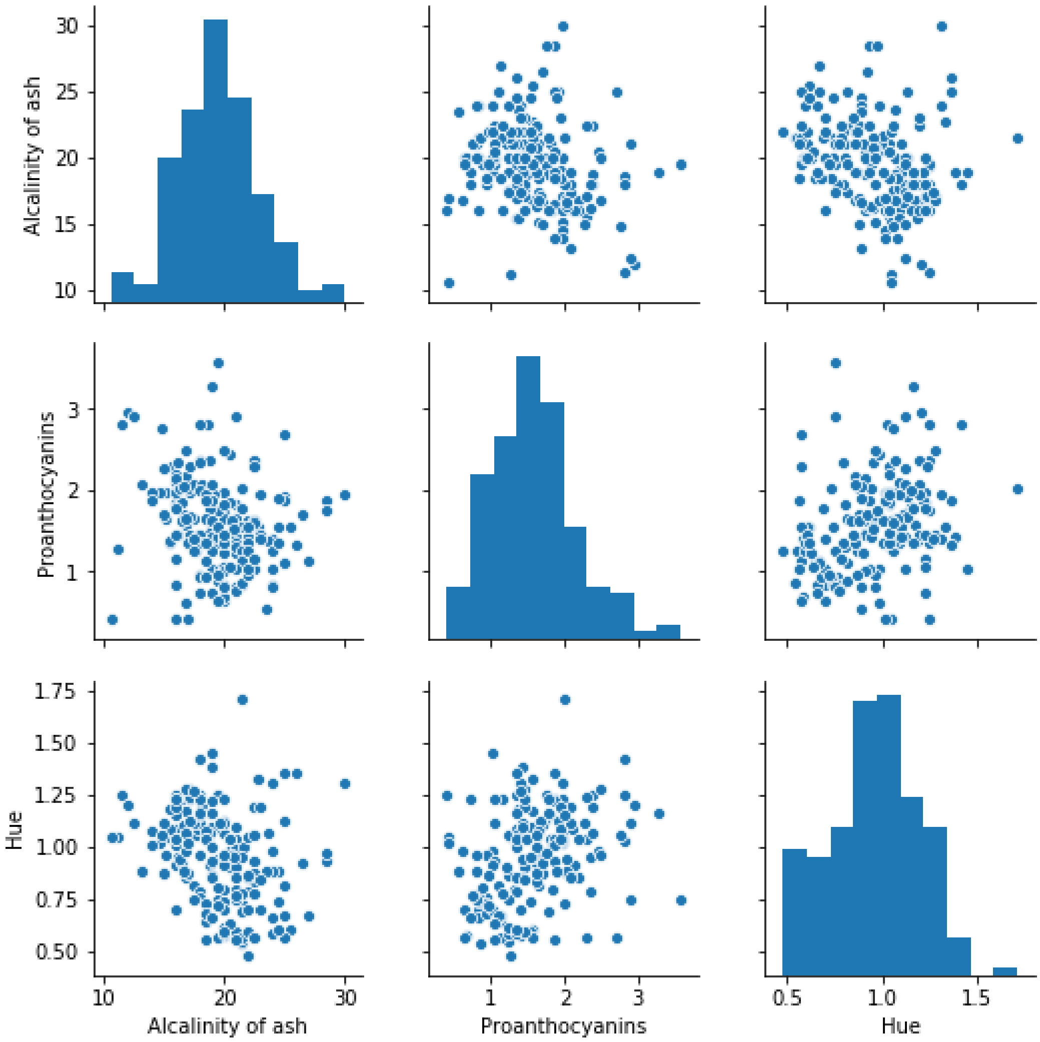
Визуализируйте рассматриваемые данные с помощью `seaborn.pairplot` , чтобы убедиться в том, что данные визуально похожи на нормальное распределение:

In [9]:

```
sns.pairplot(data[["Alcalinity of ash", "Proanthocyanins", "Hue"]])
```

Out[9]:

```
<seaborn.axisgrid.PairGrid at 0x121723b00>
```



In [180]:

```

```

Out[180]:

```
Index(['Alcohol', 'Malic acid', 'Ash', 'Alcalinity of ash', 'Magnesium',
       'Total phenols', 'Flavanoids', 'Nonflavanoid phenols',
       'Proanthocyanins', 'Color intensity', 'Hue',
       'OD280/OD315 of diluted wines', 'Proline'],
      dtype='object')
```

In [185]:

```
sps.shapiro([1,2,3,4,5] * 100)
```

Out[185]:

```
(0.8877304196357727, 1.2804311272741621e-18)
```

In [190]:

```
features = ["Alcalinity of ash", "Proanthocyanins", "Hue"]

p_vals = []

for feat in features:
    _, p_val = sps.shapiro(data[feat])
    p_vals.append(p_val)

for i, el in enumerate(multipletests(p_vals)[1]):
    print(features[i], ' : ', el)
```

```
Alcalinity of ash  :  0.26386943459510803
Proanthocyanins  :  0.042736454380242206
Hue  :  0.042736454380242206
```

Напишите функцию подсчета оценки максимального правдоподобия для вектора средних $\mu$ и матрицы ковариаций $\Sigma$ по выборке:

In [19]:

```
def mle_for_mean(sample):
    """
    :param sample: выборка из многомерного нормального распределения
    :return: ОМП для вектора средних
    """

    sample = pd.DataFrame(sample)

    return sample.mean().values
```

In [124]:

```
def mle_for_covariance_matrix(sample):
    """
    :param sample: выборка из многомерного нормального распределения
    :return: ОМП для матрицы ковариаций
    """

    X = sample.values

    return 1 / (len(sample) - 1) * \
            np.sum([np.dot((el - mle_for_mean(X)).reshape(-1,1),
                           (el - mle_for_mean(X)).reshape(1,-1)) for el in X], axis=0)
```

In [191]:

```
mu = mle_for_mean(data[["Alcalinity of ash", "Proanthocyanins", "Hue"]])
sigma = mle_for_covariance_matrix(data[["Alcalinity of ash", "Proanthocyanins", "Hue"]])
```

Визуализируйте полученный результат. Для каждой пары признаков постройте график, на котором будут:

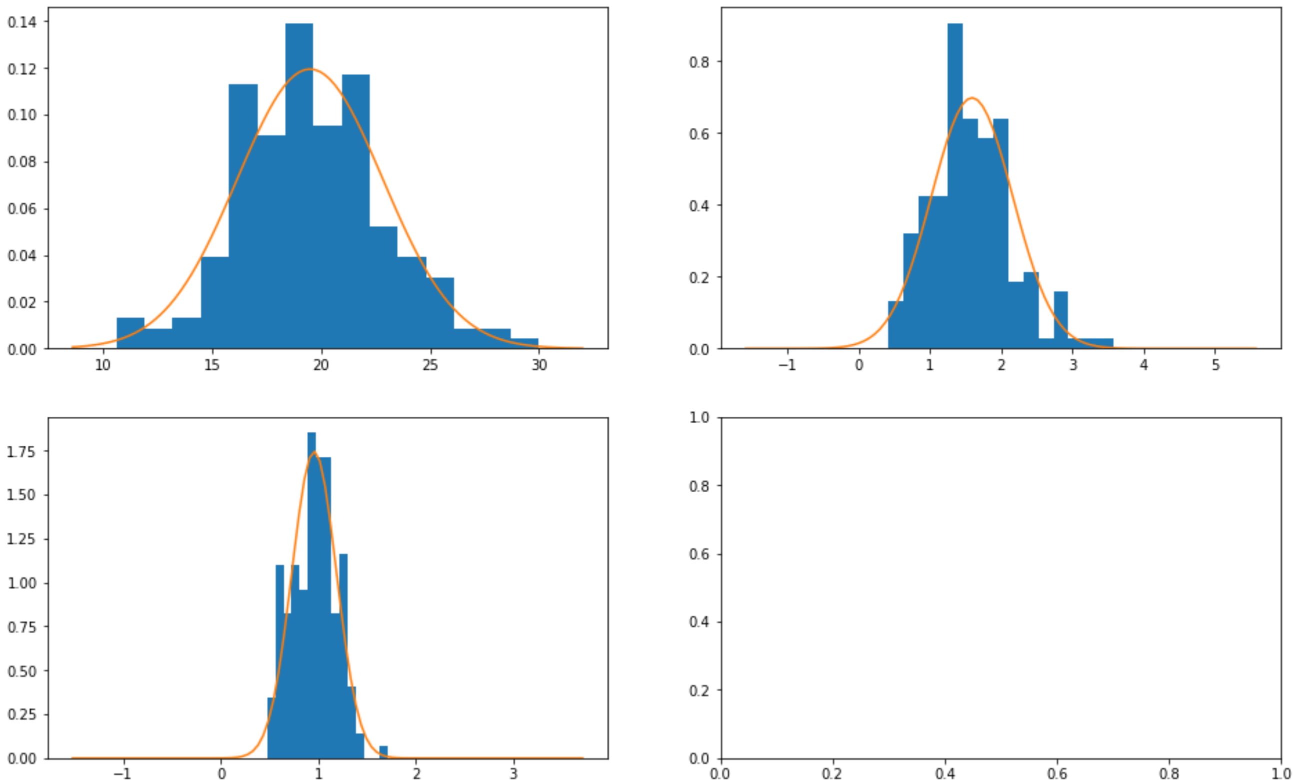
1) Точки выборки

2) Плотность нормального распредления с оцененными параметрами в виде линий уровня

**hint:** используйте функции `plt.pcolormesh` и `plt.clabel`

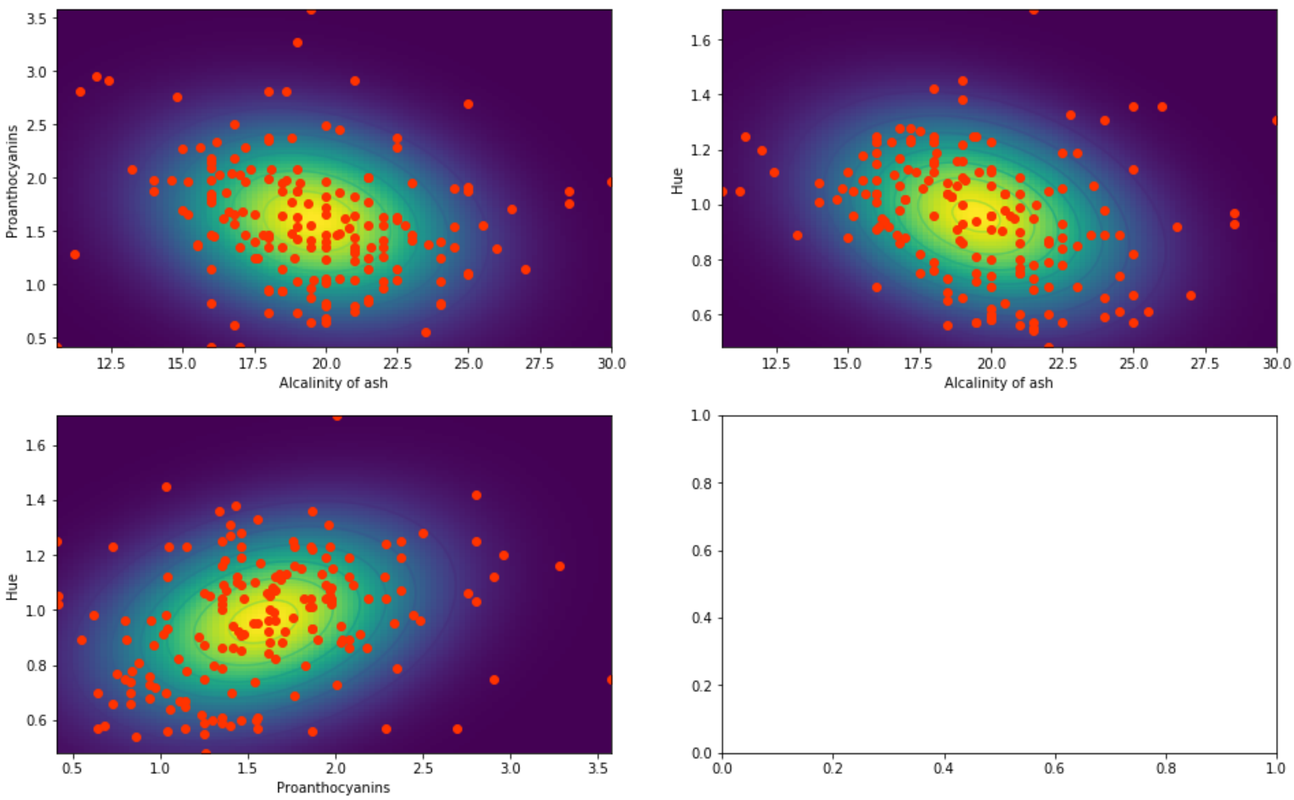
In [192]:

```
features = ["Alcalinity of ash", "Proanthocyanins", "Hue"]
fig, axs = plt.subplots(2, 2, figsize=(16,10))

for idx in range(3):
    feat = features[idx]

    distr = sps.norm(
                    mle_for_mean(data[[feat]])[0],
                    np.sqrt(mle_for_covariance_matrix(data[[feat]])[0])
                )

    axs[idx // 2,idx % 2].hist(data[feat], bins=15, density=True)
    axs[idx // 2,idx % 2].plot(np.linspace(data[feat].min()-2,data[feat].max()+2, 100),
                                distr.pdf(np.linspace(data[feat].min()-2,data[feat].max()+
2, 100)))

plt.show()
```



In [193]:

```
features = ["Alcalinity of ash", "Proanthocyanins", "Hue"]

my_range = [[0, 0, features[0], features[1]], [0, 1, features[0], features[2]],
            [1, 0, features[1], features[2]]]
fig, axs = plt.subplots(2, 2, figsize=(16,10))

for i1, i2, f1, f2 in my_range:

    x = np.linspace(min(data[f1]), max(data[f1]), 100)
    y = np.linspace(min(data[f2]), max(data[f2]), 100)
    X,Y = np.meshgrid(x,y)

    pos = np.array([X.flatten(),Y.flatten()]).T



    rv = sps.multivariate_normal(mle_for_mean(data[[f1, f2]]),
                                 mle_for_covariance_matrix(data[[f1, f2]]))

    axs[i1, i2].contour(X,Y,rv.pdf(pos).reshape(100,100))
    axs[i1, i2].pcolormesh(X,Y,rv.pdf(pos).reshape(100,100))
    axs[i1, i2].plot(data[f1], data[f2], 'bo', c=red)
    axs[i1, i2].set(xlabel=f1, ylabel=f2)


plt.show()
```




Сделайте вывод по задаче и предложите способ уточнения модели, возможно, добавив другие признаки.

**Выводы:** Распределения этих трех признаков достаточно неплохо описываются нормальным распределением.