

PHƯƠNG PHÁP GAUSS GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Thực hiện: Đỗ Trung Tuyển - 20206312

1. Nội dung phương pháp

- Phương pháp Gauss là việc thực hiện những phép biến đổi tương đương trên ma trận mở rộng của hệ phương trình tuyến tính, hoặc phép thế để giải hệ phương trình này.

- Ta tách hệ phương trình thành dạng ma trận: $A.X=B$

⇒ Xây dựng được ma trận bổ sung

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

- Thực hiện phương pháp Gauss theo 2 quá trình
 - + Quy trình thuận
 - + Quy trình nghịch

⇒ Nghiệm của hệ phương trình

2. Thuật toán

Input: Ma trận bổ sung

Output: Nghiệm của hệ phương trình đã cho

Quy trình thuận: Biến đổi ma trận về dạng bậc thang: Cho $i = 1; j = 1$

Bước 1: Tìm phần tử khác 0 đầu tiên

- Lặp liên tục đến khi $a_{[i][j]}$ khác 0 thì dừng:

+ Nếu $a_{[i][j]} = 0$ thì tăng i sau đó kiểm tra nếu $i = m+1$ thì cho $i =$

1 tăng j và lúc này nếu $j = n+2$ thì dừng vòng lặp (đã xét hết ma trận mà vẫn là số 0).

- Sau khi dừng vòng lặp thì có được vị trí đầu tiên của ma trận

khác 0 ($a_{[i][j]} \neq 0$ với j bé nhất, i bé nhất)

- Nếu $i \neq 1$ thì đảo hàng i và 1.

Bước 2: Bắt đầu lặp từ cột thứ j vừa tìm được ở trên

- Vòng lặp for từ j tìm được ở bước 1, tăng j đến $n+1$:
 - + Vòng lặp với hàng i , $i = 2$ đến $i = m$, nếu $a_{[i][j]}$ khác 0 thì bắt đầu tìm hàng k để khử hàng hiện tại:

1. Khởi tạo một biến $\text{flag} = \text{false}$

2. vòng lặp for $k = i - 1$ đến $k = 1$:

Nếu $a_{[k][j]}$ khác 0 và $a_{[k][0]} = j - 1$ thì gán $\text{flag} = \text{true}$ và thoát vòng lặp.

3. Nếu $\text{flag} = \text{true}$ thì:

a. gán $\text{ratio} = a_{[i][j]} / a_{[k][j]}$

b. Chạy vòng lặp for $z = j$ đến $z = n+1$, gán $a_{[i][z]} = a_{[i][z]} - \text{ratio} * a_{[k][z]}$

4. Sau khi khử xong cột, sắp xếp lại hàng thành dạng bậc thang.

Chú ý: Ở đây ta có sử dụng gói sắp xếp: Gói sắp xếp: (sắp xếp từ hàng i trở xuống)

$\text{updatezeros}(i)$: (cập nhật lại số 0 ở đầu hàng kể từ hàng i trở xuống)

Sau đó bắt đầu sắp xếp

Vòng lặp for từ $z = i$ đến $z < m$

Gán $\text{MIN} = z$, vòng lặp for từ $k = z + 1$ đến $k \leq m$, nếu $a_{[k][0]} < a_{[\text{MIN}][0]}$ thì cho $\text{MIN} = k$, sau khi tìm được hàng có số 0 nhỏ nhất là hàng MIN đổi chỗ hàng $a_{[\text{MIN}]}$ với hàng $a_{[z]}$.

+) **Quy trình nghịch:**

Phần 1: Xác định loại nghiệm Cho $\text{rank } A = \text{rank } \bar{A} = m$

Vòng lặp for từ $i = m$ đến 1, nếu $a_{[i][0]} = n$ (hàng i full 0) thì:

Giảm rank A , nếu $a_{[i][n+1]} = 0$ thì giảm rank \bar{A}

ngược lại thì hàng i có phần tử khác 0, dừng vòng lặp và ta có rank A .

Nếu $\text{rank } A = \text{rank } \bar{A} < n$ là Vô số nghiệm

Nếu $\text{rank } A = \text{rank } \bar{A} = n$ là Nghiệm duy nhất

Còn lại là Vô nghiệm. \rightarrow In ra “vô nghiệm”.

Phần 2: Tìm ra nghiệm (Hệ có nghiệm)

Tạo gói tìm nghiệm cho 3TH:

+ Nghiệm duy nhất

\Rightarrow In ra nghiệm

+ Vô số nghiệm

+ Thế nghiệm này bằng nghiệm kia

Thu được vecto nghiệm, sau đó in ra nghiệm.

II. Ví dụ

1. Hpt có duy nhất một nghiệm:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$$

```
3 3
1 1 -1 1
0 1 0 3
0 0 1 -1
|
```

```
C:\Users\pvd\Dropbox\PC\Downloads\Gauss (1).exe
Vi tri dau tien khac 0: 1 1
0 : 1.0000    1.0000    -1.0000    1.0000
1 : 0.0000    1.0000    0.0000    3.0000
2 : 0.0000    0.0000    1.0000    -1.0000
-----
He co nghiem duy nhat
x_1 = -3.0000
x_2 = 3.0000
x_3 = -1.0000

---> True

-----
Process exited after 0.062 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .
```

2. Hệ cấp 10x9, TH hệ phương trình vô nghiệm

12	19	18	5	17	3	10	10	20	1
14	1	2	12	13	19	15	12	9	19
14	14	7	19	1	2	3	10	7	14
15	2	1	6	4	7	19	2	19	15
7	18	1	14	11	3	5	1	1	4
18	4	5	15	5	12	2	6	19	1
14	19	2	12	16	1	12	3	9	16
6	5	12	20	7	15	17	7	7	14
17	2	4	20	12	5	6	4	17	3
14	4	15	9	10	17	20	5	14	14

```

10 9
12 19 18 5 17 3 10 10 20 1
14 1 2 12 13 19 15 12 9 19
14 14 7 19 1 2 3 10 7 14
15 2 1 6 4 7 19 2 19 15
7 18 1 14 11 3 5 1 1 4
18 4 5 15 5 12 2 6 19 1
14 19 2 12 16 1 12 3 9 16
6 5 12 20 7 15 17 7 7 14
17 2 4 20 12 5 6 4 17 3
14 4 15 9 10 17 20 5 14 14

```

Đầu ra:

```

C:\Users\pvd\duy\Dropbox\PC\Downloads\Gauss (1).exe
Vi tri dau tien khac 0: 1 1
0 : 12.0000  19.0000  18.0000  5.0000  17.0000  3.0000  10.0000  10.0000  20.0000  1.0000
1 : 0.0000  -21.1667  -19.0000  6.1667  -6.8333  15.5000  3.3333  0.3333  -14.3333  17.8333
2 : 0.0000  0.0000  -6.6693  10.7874  -16.1969  -7.4803  -9.9528  -1.7953  -10.8031  5.9528
3 : 0.0000  0.0000  0.0000  -9.7834  -5.4286  -10.4604  6.0242  -10.3105  11.9298  -6.3388
4 : 0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  43.8305  37.0958  16.1184  12.4773  -4.9156  3.1990
5 : 0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  -0.0019  -11.9370  -6.1181  4.5978  -20.4435
6 : 0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  31792.6364  16302.0704  -12254.3578  54467.8240
7 : 0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  -34.6002  29.5861  -49.3013
8 : 0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  6.9928  -25.3041
9 : 0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  -39.5862
-----
No Solution
-----
Process exited after 0.09704 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .

```

3.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

```

3 4
1 2 3 5 0
2 4 6 7 0
3 6 5 4 0
|

```

Đầu vào:

Đầu ra:

```
C:\Users\pvd\Dropbox\PC\Downloads\Gauss (1).exe
Vi tri dau tien khac 0: 1 1
0 : 1.0000    2.0000    3.0000    5.0000    0.0000
2 : 0.0000    0.0000   -4.0000   -11.0000   0.0000
3 : 0.0000    0.0000    0.0000   -3.0000    0.0000
-----
Rank A: 3
x_1 = 0.0000 -2.0000x_2
x_2 = 0.0000 +1.0000x_2
x_3 = 0.0000
x_4 = -0.0000

---> True

-----
Process exited after 0.0643 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .
```