Методические указания к выполнению лабораторных работ

Лабораторная работа № 1. **Построение и исследование моделей на основе фундаментальных законов природы. Модель движения лодки. Движение точки под действием центральных сил. Колебательное движение механической системы**

Цель работы. Построение и численное решение моделей на основе фундаментальных законов природы (законы Ньютона, закон всемирного тяготения).

Один из подходов к решению моделей заключается в замене некоторым способом дифференциального уравнения исходной задачи системой линейных или нелинейных алгебраических уравнений. При этом для решения больших систем уравнений пользуются специальными вычислительными методами, реализованными в виде соответствующих программ для ПЭВМ.

Задания

а) Рассматривается движение лодки в воде с начальной горизонтальной скоростью $\boldsymbol{v_0}$ под действием силы тяжести $\boldsymbol{mg}$, архимедовой выталкивающей силы $\boldsymbol{N_A}$ и силы сопротивления движению $\boldsymbol{F_C}$, приложенных к центру масс (рис. 1.1). Так как лодка держится на плаву (движение по вертикали отсутствует), то архимедова выталкивающая сила $\boldsymbol{N_A}$ уравновешивает силу тяжести $\boldsymbol{mg}$. Движение лодки под действием приложенной системы сил подчиняется основному уравнению динамики (второму закону Ньютона). Величина сопротивления воды $\boldsymbol{F_C}$ прямо пропорциональна скорости лодки и противоположна по направлению: $\boldsymbol{F_C} = -\boldsymbol{\mu v}$, где $\boldsymbol{\mu}$ – коэффициент пропорциональности (величина постоянная).

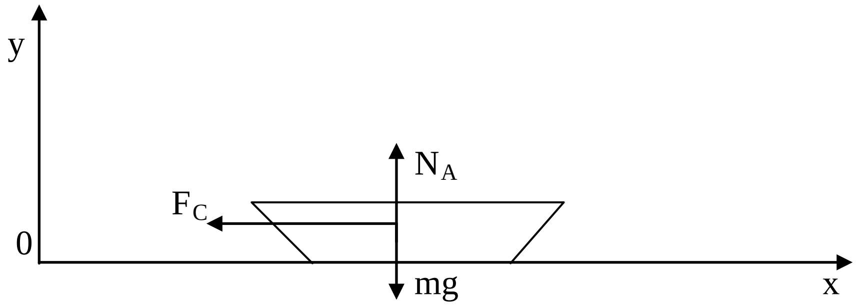

Рис. 1.1. Схема движения лодки

Требуется определить скорость лодки как функцию времени и графически отобразить эту зависимость.

Математическая постановка задачи

Требуется найти решение задачи Коши, записанной в виде

$$m\frac{dv}{dt} = mg + F_C + N_A,$$

при следующих начальных условиях $v(0) = v_0$.

Строится разностный аналог уравнения движения $v(t+\Delta t) = v(t) - \frac{\mu}{m} v(t)\Delta t$, задается шаг интегрирования и проводятся расчеты до требуемого момента времени. Проверяем сходимость численного решения.

Аналитическое решение $v = v_0 \exp\left(-\dfrac{\mu}{m}t\right)$ можно принять в качестве точного решения этой задачи. Результатом решения задачи должны быть вычисления и построение графика для разных шагов интегрирования и сравнение с точным решением.

Время выполнения лабораторной работы № 1а – 2 часа.

б) Движение точки под действием центральных сил. Действующая на движущуюся материальную точку или тело сила называется центральной, если линия ее действия проходит через одну и ту же неподвижную точку. В качестве таких сил можно использовать силы притяжения, электростатического взаимодействия. Под действием центральных сил движутся многие объекты, представляющие интерес для исследования (например, электроны вокруг ядра атома, планеты в Солнечной системе). Решение подобных практически важных прикладных задач целенаправленно формирует в сознании студента убеждение в том, что вычислительная техника является точным и мощным инструментом, многократно усиливающим интеллектуальный и творческий потенциал исследователя.

Космический корабль массой m движется из положения с координатами x_0, y_0 с начальной скоростью v_0 под действием силы притяжения $\boldsymbol{F}$, направленной к неподвижному центру (рис. 1.2).

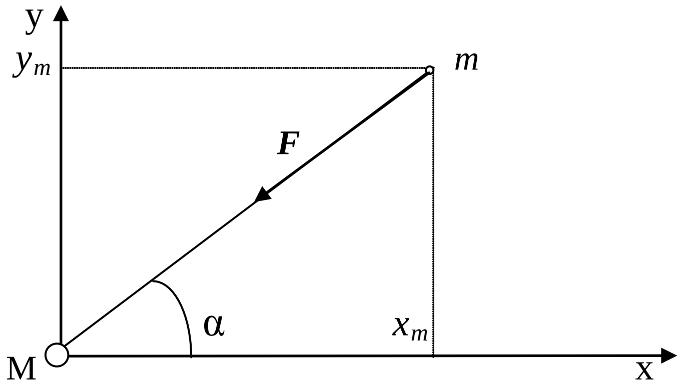

Рис. 1.2. Схема задачи

Требуется определить координаты и компоненты вектора скорости космического корабля вблизи планеты как функции времени, а также траекторию его движения. Масса, начальное положение и начальная скорость корабля известны.

Математическая постановка задачи

Найти решение задачи Коши для следующей системы уравнений движения космического корабля:

$$\begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = F_X = -\gamma\dfrac{mM}{r^2}\cos\alpha, & \dfrac{dx}{dt} = v_x, \\ m\dfrac{dv_y}{dt} = F_Y = -\gamma\dfrac{mM}{r^2}\sin\alpha, & \dfrac{dy}{dt} = v_y, \\ r = \sqrt{x^2+y^2}, & \end{cases}$$

при начальных условиях $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $v_x(0) = v_{x0}$, $v_y(0) = v_{y0}$.

Требуется определить координаты и компоненты вектора скорости космического корабля как функции времени, а также траекторию его движения.

Строятся разностные уравнения движения космического корабля:

$$\begin{cases} v_x(t+\Delta t) = v_x(t) - \gamma\, M x(t)\Delta t / r^3(t), \\ v_y(t+\Delta t) = v_y(t) - \gamma\, M y(t)\Delta t / r^3(t), \\ x(t+\Delta t) = x(t) + v_x(t)\Delta t, \\ y(t+\Delta t) = y(t) + v_y(t)\Delta t, \\ r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}. \end{cases}$$

Задается шаг интегрирования Δt = 0,01 с и проводятся расчеты при следующих данных: $M = 6 \cdot 10^{24}$ кг (масса Земли), космический корабль находится в начальной точке с координатами $x(0)$ = 0 м, $y(0) = 6{,}4 \cdot 10^6$ м, $\gamma = 6{,}672 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – гравитационная постоянная. Начальная скорость направлена по горизонтали вправо.

Результатом решения задачи должны быть вычисления и построение траектории движения корабля при разных начальных скоростях: $v_x(0)$ = 7500 м/с, $v_x(0)$ = 7923 м/с, $v_x(0)$ = 10000 м/с, $v_x(0)$ = 11206 м/с.

Время выполнения лабораторной работы № 1б – 2 часа.

в) Требуется исследовать движение планеты в системе двух звезд. Массы планеты, звезд и их начальное положение и скорости известны.

Планета массой m движется из положения с координатами x_0, y_0 с начальной скоростью v_0 под действием сил притяжения $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$ звезд неподвижной двойной системы (рис. 1.3).

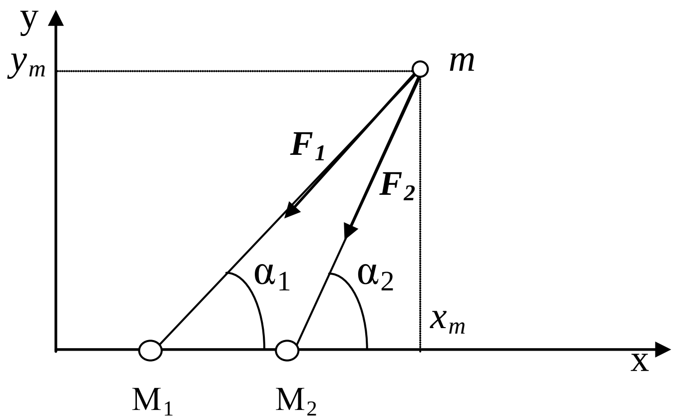

Рис. 1.3. Схема задачи

Положения и массы звезд определяются величинами X_1, Y_1, M_1 и X_2, Y_2, M_2 соответственно. Требуется определить координаты и скорость планеты как функции времени, а также траекторию ее движения.

Построение модели выполним при следующих допущениях:

♦ объектом исследования является планета, принимаемая за материальную точку;

♦ параметрами модели являются координаты ($\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$) и скорость $\boldsymbol{v}$ планеты;

♦ движение планеты происходит в одной плоскости и подчиняется основному уравнению динамики (второму закону Ньютона): $m d\boldsymbol{v}/dt = \boldsymbol{F}$;

♦ величина (модуль) силы притяжения к центру звезды определяется законом всемирного тяготения $\boldsymbol{F} = \gamma m M/\boldsymbol{r}^2$, где γ – гравитационная постоянная; $\boldsymbol{r}$ – расстояние между центром планеты и центром звезды.

Математическая постановка задачи – найти решение задачи Коши для следующей системы уравнений

$$\begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = -\gamma\dfrac{mM_1}{r_1^2}cos(\alpha_1) - \gamma\dfrac{mM_2}{r_2^2}cos(\alpha_2), \quad \dfrac{dx}{dt} = v_x, \\ m\dfrac{dv_y}{dt} = -\gamma\dfrac{mM_1}{r_1^2}sin(\alpha_1) - \gamma\dfrac{mM_2}{r_2^2}sin(\alpha_2), \quad \dfrac{dy}{dt} = v_y, \end{cases}$$

где $r_1 = \sqrt{(x - X_1)^2 + (y - Y_1)^2}$, $r_2 = \sqrt{(x - X_2)^2 + (y - Y_2)^2}$

при начальных условиях $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $v_x(0) = v_{x0}$, $v_y(0) = v_{y0}$.

Для решения задачи использовать численный метод. Заменяя производные разностными аналогами, получаем следующую систему разностных уравнений:

$$\begin{cases} v_x(t+\Delta t) = v_x(t) - \gamma M_1(x(t) - X_1)\Delta t / r_1^3(t) - \gamma M_2(x(t) - X_2)\Delta t / r_2^3(t), \\ v_y(t+\Delta t) = v_y(t) - \gamma M_1(y(t) - Y_1)\Delta t / r_1^3(t) - \gamma M_2(y(t) - Y_2)\Delta t / r_2^3(t), \\ x(t+\Delta t) = x(t) + v_x(t)\Delta t, \\ y(t+\Delta t) = y(t) + v_y(t)\Delta t, \\ r_1(t) = \sqrt{(x(t) - X_1)^2 + (y(t) - Y_1)^2}, \\ r_2(t) = \sqrt{(x(t) - X_2)^2 + (y(t) - Y_2)^2}. \end{cases}$$

При проведении расчетов принять, что первый центр притяжения M_1 находится в начале системы координат ($X_1 = Y_1 = 0$), второй центр притяжения M_2 расположен в точке $X_2 = 3{\cdot}10^6$ м, $Y_2 = 3{\cdot}10^6$ м, планета находится в начальной точке с координатами $x(0) = 4{,}8{\cdot}10^6$ м, $y(0) = 6{,}4{\cdot}10^6$ м и имеет начальную скорость, направленную по горизонтали вправо ($v_{y0} = 0$). Шаг интегрирования по времени во всех вариантах $\Delta t = 1$ с.

Результат решения задачи – вычисления и построение траектории движения планеты при разной начальной скорости и разных массах звезд.

Варианты заданий:

1) $M_1 = 2{\cdot}10^{23}$ кг, $M_2 = 2{\cdot}10^{23}$ кг, $v_{x0} = 1{,}2{\cdot}10^3$ м/с;
2) $M_1 = 5{\cdot}10^{22}$ кг, $M_2 = 2{,}5{\cdot}10^{23}$ кг, $v_{x0} = 1{,}25{\cdot}10^3$ м/с;
3) $M_1 = 2{\cdot}10^{24}$ кг, $M_2 = 2{\cdot}10^{24}$ кг, $v_{x0} = 6{\cdot}10^3$ м/с;
4) $M_1 = 2{\cdot}10^{24}$ кг, $M_2 = 2{\cdot}10^{24}$ кг, $v_{x0} = 5{\cdot}10^3$ м/с;
5) $M_1 = 3{\cdot}10^{23}$ кг, $M_2 = 3{\cdot}10^{23}$ кг, $v_{x0} = 1{,}1{\cdot}10^3$ м/с;
6) $M_1 = 4{\cdot}10^{23}$ кг, $M_2 = 4{\cdot}10^{23}$ кг, $v_{x0} = 1{,}3{\cdot}10^3$ м/с;
7) $M_1 = 2{\cdot}10^{23}$ кг, $M_2 = 2{\cdot}10^{24}$ кг, $v_{x0} = 1{,}4{\cdot}10^3$ м/с;
8) $M_1 = 3{\cdot}10^{23}$ кг, $M_2 = 2{\cdot}10^{23}$ кг, $v_{x0} = 1{,}1{\cdot}10^3$ м/с;
9) $M_1 = 4{\cdot}10^{23}$ кг, $M_2 = 2{\cdot}10^{23}$ кг, $v_{x0} = 4{\cdot}10^3$ м/с;
10) $M_1 = 6{\cdot}10^{23}$ кг, $M_2 = 2{\cdot}10^{24}$ кг, $v_{x0} = 3{\cdot}10^3$ м/с;
11) $M_1 = 2{,}5{\cdot}10^{23}$ кг, $M_2 = 2{\cdot}10^{23}$ кг, $v_{x0} = 1{,}5{\cdot}10^3$ м/с;
12) $M_1 = 2{\cdot}10^{24}$ кг, $M_2 = 2{\cdot}10^{24}$ кг, $v_{x0} = 5{,}5{\cdot}10^3$ м/с;
13) $M_1 = 8{\cdot}10^{23}$ кг, $M_2 = 2{\cdot}10^{24}$ кг, $v_{x0} = 1{,}6{\cdot}10^3$ м/с;
14) $M_1 = 2{,}5{\cdot}10^{23}$ кг, $M_2 = 2{,}5{\cdot}10^{23}$ кг, $v_{x0} = 1{,}1{\cdot}10^3$ м/с;
15) $M_1 = 2{\cdot}10^{23}$ кг, $M_2 = 3{\cdot}10^{23}$ кг, $v_{x0} = 1{,}7{\cdot}10^3$ м/с.

Время выполнения лабораторной работы № 1в – 2 часа.