10.7. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОСТАВКАМИ СЫРЬЯ

Для ритмичной работы предприятия необходимо систематическое пополнение запаса сырья C, расходуемого при производстве продукции. Потребность в сырье C по месяцам рассматриваемого планового периода выражается числами 150, 50, 100 и 100 ед. Пополнение запаса производится партиями, кратными 50 ед. На начало планового периода на складах предприятия имеется запас сырья в 100 ед. Складские помещения не позволяют хранить одновременно более 300 ед. сырья. К концу планового периода весь запас должен быть израсходован, поскольку предприятие переходит на выпуск новой продукции, для которой сырье C не потребуется. Затраты на пополнение запаса зависят от объема x партии поставки и описываются функцией $P(x)$, заданной табл. 10.21. Затраты на хранение сырья зависят от среднего уровня $\overline{m}$ запаса сырья в данном месяце, определяемого по формуле $\overline{m} = D/2 + j$, где D — объем потребления сырья в данном месяце, j — остаток сырья к концу этого месяца. Затраты на хранение описываются функцией $\varphi(\overline{m})$, заданной табл. 10.22.

Таблица 10.21

x	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300
$P(x)$	0	50	48	44	40	36	32	27	24	22	21	21	20

Таблица 10.22

$\overline{m}$	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300	325
$\varphi(\overline{m})$	0	3	8	15	30	36	41	46	50	51	52	53	54	56

Требуется так организовать процесс пополнения и хранения сырья на предприятии в плановом периоде, чтобы суммарные затраты минимизировались при непременном условии бесперебойного функционирования производства.

Функциональные уравнения Беллмана для рассматриваемой задачи имеют следующий вид:

для $n = 1$

$$f_1(i) = P_1(x) + \varphi_1(d_1/2), \tag{10.23}$$

где $i = 0, 50, 100, \ldots;\ \min(d_1; M);\ \ x = d_1 - i$;
для $n = 2, 3, 4$

$$f_n(i) = \min_{i,x}(P_n(x) + \varphi_n(d_n/2 + (i + x - d_n) + f_{n-1}(i + x - d_n)), \quad (10.24)$$

где $i = 0, 50, 100, \ldots;\ \ \min(d_1 + \ldots + d_n; M);\ \ d_n - i \leqslant x \leqslant \leqslant d_1 + d_2 + \ldots + d_n - i$.

Если в условии поставленной задачи нумерация месяцев планового периода осуществляется в прямом направлении: от начала периода к его концу, т. е. $t = 1, 2, 3, 4$, то в уравнениях (10.23), (10.24) используется, как это принято в динамическом программировании, встречная нумерация: от конца к началу, т. е. $n = 1, 2, 3, 4$. В уравнениях (10.23), (10.24) i — уровень запаса сырья на начало месяца; x — объем партии поставки сырья; d_n — объем потребления сырья в n-м месяце; M — вместимость складских помещений предприятия; $f_n(i)$ — минимальные суммарные затраты на пополнение и хранение сырья за последние n месяцев планового периода при уровне запаса на начало n-го месяца в i ед.; $i + x - d_n$ — уровень запаса сырья на конец n-го месяца (одновременно это и уровень запаса сырья на начало $(n - 1)$-го месяца).

В уравнении (10.24) первое слагаемое в правой части характеризует затраты в n-м месяце на пополнение запаса сырья в объеме x ед., второе — затраты на хранение сырья в этом месяце, если средний уровень запаса составляет $(d_n/2 + (i + x - d_n))$ ед., третье — минимальные суммарные затраты на пополнение и хранение сырья за $n - 1$ последних месяцев планового периода.

Используем функциональные уравнения (10.23), (10.24) для решения поставленной задачи.

Пусть $n = 1$. Функциональное уравнение (10.23) примет вид

$$f_1(i) = P_1(x) + \varphi(100/2), \quad (10.25)$$

где i — уровень запаса сырья на начало последнего месяца (первого от конца) — может принимать значения 0, 50 или 100, а x будет равняться 100, 50 или 0 соответственно, что и записано в первых двух столбцах табл. 10.23. В последнем столбце в соответствии с уравнением (10.25) приведены суммарные минимальные затраты на пополнение запаса (см. табл. 10.21) и его хранение (см. табл. 10.22).

Таблица 10.23

x / i	$x_1^*(i)$	$f_1(i)$
0	100	40+8
50	50	48+8
100	0	0+8

Переходим к анализу периода, состоящего из двух последних месяцев. Полагая в уравнении (10.24) $n = 2$, получаем соответствующее этому периоду функциональное уравнение Беллмана

$$f_2(i) = \min_{i,x}(P_2(x) + \varphi_2(100/2 + (i + x - 100)) + f_1(i + x - 100). \quad (10.26)$$

Уровень i запаса сырья на начало второго (от конца) месяца может составлять 0, 50, 100, 150 или 200 ед., а объем x – поставки сырья соответственно 200, 150, 100, 50 или 0 ед. (табл. 10.24). В клетки основного поля таблицы будем вписывать значения суммы трех слагаемых: P_2, φ_2 и f_1 (см. уравнение (10.26)). Первое слагаемое находим по табл. 10.21, второе – по табл. 10.22, а третье берем из последнего столбца табл. 10.23. Некоторые клетки таблицы останутся незаполненными, так как соответствуют недопустимым сочетаниям i и x. Рассмотрим, например, первую строку табл. 10.24. Она соответствует нулевому уровню запаса сырья на начало второго (от конца) месяца. Поскольку в этом месяце потребуется 100 ед. сырья, то первой заполняемой будет клетка, соответствующая поставке в 100 ед. При этом первое слагаемое $P_2(100) = 40$, второе $\varphi_2(50) = 8$, а третье $f_1(0) = 48$.

Таблица 10.24

x / i	0	50	100	150	200	$x_2^*(i)$	$f_2(i)$
0	–	–	40+8+48	32+30+56	24+41+8	200	73
50	–	48+8+48	40+30+56	32+41+8	–	150	81
100	0+8+48	48+30+56	40+41+8	–	–	0	56
150	0+30+56	48+41+8	–	–	–	0	86
200	0+41+8	–	–	–	–	0	49

Аналогично заполняются и две следующие клетки. Сравнивая суммарные затраты по заполненным клеткам (96, 118 и 73), заключаем, что в рассматриваемой ситуации ($i = 0$) оптимальной во втором месяце будет поставка в 200 ед., ибо ей соответствуют минимальные суммарные затраты в 73 ден. ед. Аналогичным образом заполняются и остальные строки таблицы.

Функциональное уравнение для $n = 3$ имеет вид

$$f_3(i) = \min_{i,x}(P_3(x) + \varphi_3(i + x - 25) + f_2(i + x - 50)),$$

а результаты анализа приемлемых вариантов приведены в табл. 10.25.

Таблица 10.25

$i \backslash x$	0	50	100	150	200	250	$x_3^*(i)$	$f_3(i)$
0	—	124	136	124	156	121	250	121
<u>50</u>	76	144	132	164	124	—	<u>0</u>	76
100	96	140	172	132	—	—	0	96
150	92	180	140	—	—	—	0	92
200	132	148	—	—	—	—	0	132
250	100	—	—	—	—	—	0	100

Последнему шагу оптимизационного анализа ($n = 4$) соответствует функциональное уравнение

$$f_4(100) \min_{100,x}(P_4(x) + \varphi_4(25 + x) + f_3(x - 50)),$$

а результаты помещены в табл. 10.26.

Таблица 10.26

$i \backslash x$	50	100	150	200	250	300	$x_4^*(i)$	$f_4(i)$
<u>100</u>	184	152	174	167	206	175	<u>100</u>	152

Теперь можно подвести окончательные итоги. Из табл. 10.26 видно, что в четвертом (от конца) месяце оптимальной будет поставка $x_4^*(100) = 100$ ед. С учетом начального запаса (см. условие задачи) в 100 ед. общий запас в четвертом месяце составит 200 ед. В этом месяце для нужд производства потребуется 150 ед. сырья, так что к началу третьего месяца уровень запаса будет равен 50 ед. Обращаясь к табл. 10.25 (см. вторую строку, отвечающую $i = 50$), замечаем, что такому уровню соответствует поставка $x_3^*(50) = 0$ ед. Имеющийся запас в 50 ед. будет полностью израсходован в этом месяце, так что к началу второго месяца уровень запаса $i = 0$. Судя по первой строке ($i = 0$) табл. 10.24, во втором месяце необходимо поставить предприятию 200 ед. сырья ($x_2^* = 200$). Из них 100 ед. будет израсходовано в этом месяце, а 100 ед. останется на первый месяц; их будет достаточно для удовлетворения потребности производства в этом месяце. Подтверждением тому служат данные, приведенные в табл. 10.23, из последней строки которой ясно, что в первом месяце сырья приобретать не придется ($x_1^*(100) = 0$).

Итак, суммарные затраты предприятия на пополнение и хранение запаса сырья будут минимальными и составят 152 ден. ед., если в первом месяце будет приобретено 100 ед. сырья, а в третьем — 200 ед. Во втором и четвертом месяцах пополнять запас не придется.