ВМ-1. Лекція 2 за 25.09.20.

Лекцію 2 переписати в зошит для конспекту лекцій з ВМ-1 (ЛА-АГ).

Обов'язково на кожній сторінці конспекту напишіть у верхньому правому куті сторінки ваше прізвище та ініциали. Зробіть якісне фото кожної сторінки Л-2 на **Office Lens,** підпишіть файл: Ваше прізвище. Л-1, наприклад, Іванов. Л -1.**pdf ,** розмістити на Google диску групи в вашій **особистій папці Лекції** до понеділка 28.09.20. Не забувайте при переписуванні написати, як заголовок , **Лекція 2. Дії над матрицями. 02.10.20,** та переписувати назви розділів лекції, виділені в тексті блакитним кольором.

Лекція 2. Дії над матрицями. 25.09.20.

2.1. Лінійні дії над матрицями.

Поняття рівності, суми та різниці матриць вводиться тільки *для матриць однакового розміру.*

Розглянемо матриці $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ та $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ розміром $m \times n$.

1. Матриці A та B називають *рівними,* якщо вони однакового розміру і мають рівні відповідні елементи, тобто

$$A = B \;\Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}.$$

2. *Сумою матриць* A та B розміром $m \times n$ називають матрицю $A + B$ розміром $m \times n$, кожен елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць доданків, тобто

$$A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{m\times n}.$$

3. *Різницею матриць* A та B називають матрицю $A - B$, кожен елемент якої дорівнює різниці відповідних елементів матриць доданків, тобто

$$A - B = \left(a_{ij} - b_{ij}\right)_{m\times n}.$$

4. *Добутком матриці* A розміром $m \times n$ *на* дійсне *число* λ називають матрицю λA розміром $m \times n$, кожен елемент якої дорівнює добуткові відповідного елемента матриці A на число λ, тобто

$$\lambda A = \left(\lambda a_{ij}\right)_{m\times n}$$

Основні властивості. 1) $A + B = B + A$; 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Приклад 1. Для матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ знайти матриці $A + B, 2A, A + C$.

Матриці A та B мають однакові розміри 2×2. Отже, їх можна додавати:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ -3+2 & 4+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$2A = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 8 \end{pmatrix};$$

$A + C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ не визначено, бо матриці A та C *різного розміру*. ■

2.2. Множення матриць.

Операція множення двох матриць вводиться лише для *узгоджених матриць*.

Матрицю *A* називають *узгодженою* з матрицею *B*, якщо кількість стовпців першої матриці *A* дорівнює кількості рядків другої матриці *B* («довжина» матриці *A* дорівнює «висоті» матриці *B*). Для узгоджених матриць кількість елементів в рядку матриці *A* дорівнює кількості елементів в стовпці матриці *B.*

Приклади *узгоджених матриць.*

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6\\ 1\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6 & 4 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

Нехай $A_{k\times n}=(a_{ij})$ та $B_{n\times m}=(b_{ij})$ узгоджені матриці, матриця *A* має *n* стовпців, матриця *B* має *n* рядків, тобто *кількість елементів в рядку* $\overleftarrow{a_i}$ *матриці A дорівнює кількості елементів в стовпці* $\overrightarrow{b_j}$ *матриці B та дорівнює n.* Добутком *i*-го рядка матриці *A* на *j*-й стовпець матриці *B* називають число, яке позначається $\overleftarrow{a_i}\cdot\overrightarrow{b_j}$, та дорівнює сумі добутків елементів рядка $\overleftarrow{a_i}$ на відповідні елементи стовпця $\overrightarrow{b_j}$.

$$\overleftarrow{a_i}\cdot\overrightarrow{b_j}=(a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in})\cdot\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

Означення. *Добутком матриці* $A_{k\times n}=(a_{ij})$ *на узгоджену з нею матрицю* $B_{n\times m}=(b_{ij})$ *називається матриця* $AB=C_{k\times m}=(c_{ij})$, *кожний елемент* c_{ij} *якої дорівнює добуткові i -го рядка матриці A на j -й стовпець матриці B.*

$$c_{ij}=\overleftarrow{a_i}\cdot\overrightarrow{b_j}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

Це означення називають *правилом множення рядка на стовпець*.

Для обчислення добутку

$$AB=C_{k\times m}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{km}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overleftarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{b_1} & \overleftarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{b_2} & \cdots & \overleftarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{b_m}\\ \overleftarrow{a_2}\cdot\overrightarrow{b_1} & \overleftarrow{a_2}\cdot\overrightarrow{b_2} & \cdots & \overleftarrow{a_2}\cdot\overrightarrow{b_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \overleftarrow{a_k}\cdot\overrightarrow{b_1} & \overleftarrow{a_k}\cdot\overrightarrow{b_2} & \cdots & \overleftarrow{a_k}\cdot\overrightarrow{b_m}\end{pmatrix}$$

потрібно виконати такі дії.

Крок 1. Множимо 1-й рядок матриці *A* на 1-й, 2-й, … , m-й стовпець матриці *B*. Отримаємо 1-й рядок $(c_{11}\ \ c_{12}\ \ \cdots\ \ c_{1m})$ матриці *AB.*
Крок 2. Множимо 2-й рядок матриці *A* на 1-й, 2-й, … , m-й стовпець матриці *B*. Отримаємо 2-й рядок $(c_{21}\ \ c_{22}\ \ \cdots\ \ c_{2m})$ матриці *AB.*
Далі множимо 3-й, 4-й, … , *к*-й рядок матриці *A* на стовпці матриці *B*. Отримаємо 3-й, 4-й, … , *к*-й рядок матриці *AB.*
Обчислена таким чином матриця *AB* має *k* рядків та m стовпців.

Приклад 2. Задано матриці:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}5 & 6 & -3\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Знайти добуток: 1) $\overleftarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{b_1}$, 2) *AB,* 3) *BA.*

1) *Щоб помножити рядок на узгоджений з ним стовпець, треба перемножити їхні відповідні елементи і добутки додати.*

$$\overleftarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{b_1}=(1\quad 2)\cdot\begin{pmatrix}5\\ -2\end{pmatrix}=1\cdot 5+2\cdot(-2)=5-4=1$$

2) *Матриці A та B узгоджені, бо кількість елементів в рядку матриці A дорівнює кількості елементів в стовпці матриці B. Щоб обчислити AB:*
Крок 1. множимо 1-й рядок матриці A на 1-й, 2-й, 3-й стовпець матриці B, отримаємо 1-й рядок $(c_{11}\ \ c_{12}\ \ c_{13})$ *матриці AB.*
Крок 2. множимо 2-й рядок матриці A на 1-й, 2-й, 3-й стовпець матриці B, отримаємо 2-й рядок $(c_{21}\ \ c_{22}\ \ c_{23})$ *матриці AB.*
Крок 3. множимо 3-й рядок матриці A на 1-й, 2-й, 3-й стовпець матриці B, отримаємо 3-й рядок $(c_{31}\ \ c_{32}\ \ c_{33})$ *матриці AB.*

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 6 & -3\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 5+2\cdot(-2) & 1\cdot 6+2\cdot 2 & 1\cdot(-3)+2\cdot 1\\ (-1)\cdot 5+0\cdot(-2) & (-1)\cdot 6+0\cdot 2 & (-1)\cdot(-3)+0\cdot 1\\ 3\cdot 5+4\cdot(-2) & 3\cdot 6+4\cdot 2 & 3\cdot(-3)+4\cdot 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 10 & -1\\ -5 & -6 & 3\\ 7 & 26 & -5\end{pmatrix}.$$

3) *Матриці B та A узгоджені, бо кількість елементів в рядку матриці B дорівнює кількості елементів в стовпці матриці A.*

$$BA=\begin{pmatrix}5 & 6 & -3\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 1+6\cdot(-1)+(-3)\cdot 3 & 5\cdot 2+6\cdot 0+(-3)\cdot 4\\ (-2)\cdot 1+2\cdot(-1)+1\cdot 3 & (-2)\cdot 2+2\cdot 0+1\cdot 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5-6-9 & 10+0-12\\ -2-2+3 & -4+0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & -2\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Зауваження. Для матриць *A* та *B* з прикладу $AB\neq BA$, це загальна властивість добутку матриць. Якщо $AB=BA$, то матриці *A* та *B* називають *переставними* або *комутуючими*.

Властивості множення матриць.

1. $\boldsymbol{AB\neq BA}$;

2. $\boldsymbol{A(BC)=(AB)C}$;

3. $\boldsymbol{(\lambda A)B=A(\lambda B)=\lambda(AB)}$, де $\lambda\in R$, стала;

4. $\boldsymbol{C(A+B)=CA+CB,\ \ (A+B)C=AC+BC}$;

5. $(\boldsymbol{AB})^T$=$\boldsymbol{A^TB^T}$;

6. $\boldsymbol{A_{k\times n}E_n=E_kA_{k\times n}=A_{k\times n}}$, $\boldsymbol{A_{n\times n}E_n=E_nA_{n\times n}=A_{n\times n}}$,

де $\boldsymbol{E_n}$ - *одинична матриця n- го порядку*, тобто квадратна матриця *n*- го порядку, всі діагональні елементи якої дорівнюють одиниці, а всі інші елементи дорівнюють нулю:

$$E_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \ E_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Одинична матриця $\boldsymbol{E_n}$ *n- го порядку переставна з будь-якою квадратною матрицею* $\boldsymbol{A}$ *того ж порядку* $\boldsymbol{AE_n=\ \ E_nA}$.

Піднесення до степеню. Матричні многочлени.

Матрицю A можна помножити саму на себе тоді й лише тоді, коли вона квадратна. Тому піднесення до натурального степеня визначено тільки для *квадратних матриць*.
Натуральний степінь *к* квадратної матриці A розуміють так:

$A^2=AA,\ A^3=AAA=A\cdot A^2,\ A^k=AA\ \cdots A,\quad k$ *множників.*

Для $k=0$ вважають $A_n^0=E_n$.
Якщо $f(x)=ax^2+bx+c$, то многочлен 2-го степеня $f(A)$ від квадратної матриці A визначається так:
$\boldsymbol{f(A)=aA^2+bA+cE}$, *де* E *одинична матриця такого ж порядку, як* A $(A_n^0=E_n)$.

2.3. Обернена матриця.

Означення. Квадратна матриця A називається *невиродженою,* якщо $detA\neq 0$, та *виродженою,* якщо $detA=0$.
Обернена матриця існує тільки у *невиродженої* матриці.
Означення. Квадратна матриця A^{-1} n *–го* порядку називається *оберненою матрицею* до квадратної *невиродженої* матриці A n *–го* порядку, якщо виконується умова

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E,$$

де E – *одинична* матриця такого ж порядку, як матриця A.

Знаходження оберненої матриці методом приєднаної матриці.

Розглянемо на прикладі матриці A *3-го* порядку:

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}.$$

Крок 1. Обчислимо визначник матриці A. Якщо $detA=0$, то A^{-1} не існує.
Нехай $detA\neq 0$, A *невироджена,* A^{-1} існує.
Крок 2. Знаходимо алгебраїчні доповнення A_{ij} всіх елементів a_{ij} визначника матриці A:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Складаємо матрицю алгебраїчних доповнень (A_{ij}):

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Крок 3. Транспонуємо матрицю алгебраїчних доповнень. Отримана матриця $(A_{ij})^T$ називається *приєднаною матрицею до матриці A*.

$$(A_{ij})^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Крок 4. Обернену до A матрицю знаходимо за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}(A_{ij})^T.$$

Крок 5. Перевіряємо правільність обчислень. Переконуємость, що $A^{-1}A = E$.
Зауваження.
1) Оскільки метод приєднаної матриці потребує обчислення великої кількості визначників, то його застосовують частіше для теоретичних міркувань й обернення матриць 2-го та 3-го порядків.
2) Обернену матрицю до матриць 3-го та *вищих* порядків знаходять ще методом Ґауса — Йордана. (Posibnyk LA-AG.pdf, стр. 32-33;
та BM-1PraktykumLA-AG.pdf, стр. 84-85).

Властивості оберненої матриці**.**

1. $(A^{-1})^{-1} = A$. **2.** $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3. $det(A^{-1}) = \frac{1}{detA}$. **4.** $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Приклад 3.(ТР ЛА-ЛГ, Зад. 3. *б)*). Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Крок 1. Обчислимо визначник матриці A.

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{за правилом} \\ \text{трикутників} \end{bmatrix} = -4 + 8 + 4 + 8 - 8 - 2 = 6.$$

Отже $detA = 6 \neq 0$. A *невироджена* матриця, A^{-1} існує.

Крок 2. Знаходимо *алгебраїчні доповнення* A_{ij} всіх елементів a_{ij} визначника матриці A за формулою $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Мінори M_{ij} дістаємо викреслюванням з визначника i*-го* рядка та j*-го* стовпця.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6.$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 8) = 0.$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6.$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4 - 2) = -2.$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 8 = -4.$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 4) = 3.$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4.$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 4) = 2.$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3.$$

Складаємо *матрицю алгебраїчних доповнень* (A_{ij}):

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Крок 3. Транспонуємо матрицю алгебраїчних доповнень.

$$(A_{ij})^T = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ -2 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Отримана матриця $(A_{ij})^T$ називається *приєднаною матрицею до матриці A*.

Крок 4. Обернену до A матрицю знаходимо за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} (A_{ij})^T.$$

Оскільки $detA = 6$, то

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\left(A_{ij}\right)^T = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Крок 5. Перевіряємо, що $A^{-1}A = E$. Для спрощення обчислення $A^{-1}A$ краще застосувати таку властивість добутку матриць: $(\alpha B)A = \alpha(BA)$, де α −стала.

$$A^{-1}A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \left[\text{множимо } \left(A_{ij}\right)^T A\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6-4+16 & -6+2+4 & -12-4+16 \\ 0-8+8 & 0+4+2 & 0-8+8 \\ 6+6-12 & 6-3-3 & 12+6-12 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Відповідь: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. ■

Властивості обернення матриць.

1) $(A^{-1})^{-1} = A$; 2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$; 3) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Матричні рівняння.

Матричні рівняння, це рівняння такого вигляду

$$AX = B \text{ або } XA = B,$$

де A, B — відомі матриці, X — невідома.

Якщо A квадратна невироджена матриця, то існує єдиний розв’язок цих рівнянь:

$$AX = B \iff X = A^{-1}B,$$

$$XA = B \iff X = BA^{-1}.$$ ■