МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
З ДИСЦИПЛІНИ
«ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА»
Частина 1

для студентів
спеціальностей 126 «Інформаційні системи та технології» та
121 «Інженерія програмного забезпечення»

Київ-2020

Навчальний посібник з дисципліни «Дискретна математика» Частина1 для студентів спеціальностей 126 «Інформаційні системи та технології» та 121 «Інженерія програмного забезпечення» / Гавриленко О.В., Клименко О.М., Рибачук Л.В. – Київ: КПІ, 2020. – 75 с.

Автори: Гавриленко Олена Валеріївна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Клименко Олена Миколаївна,
кандидат фізико-математичних наук,
Рибачук Людмила Віталіївна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент: Солдатова М.О., ст. викл. кафедри ТК ФІОТ, к.т.н

Затверджено
вченою радою
ФІОТ

Протокол № 3
від 02.10.2020 р.

Затверджено
на засіданні кафедри
АСОІУ

Протокол № 1
від 28.09.2020 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

«Навчальний посібник з дисципліни “Дискретна математика”» призначений для проведення практичних занять з дисципліни “Спеціальні розділи математики-1. Дискретна математика” для студентів першого курсу спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології» освітньо-професійної програми «Інформаційні управляючі системи та технології» та з дисципліни “Комп’ютерна дискретна математика” студентів першого курсу спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» освітньо-професійної програми «Інженерія програмного забезпечення».

Посібник включає важливий матеріал з таких областей як теорія множин, булеві функції та математична логіка. Кожна тема посібника містить завдання для контролю засвоювання студентами матеріалу. Стисло наводяться необхідні теоретичні відомості з відповідної теми і приклади розв’язання типових задач, які ілюструють теоретичний матеріал. У посібнику подано задачі, розв’язання яких необхідне для успішного оволодіння матеріалом курсу. Завдання призначені для перевірки поточної успішності, а також можуть використовуватися для організації модульного контролю.

Слід зазначити, що посібник має практичне спрямування. Основним його завданням є формування навичок із розв’язування задач. Виклад матеріалу у посібнику є стислим. Для більш глибокого вивчення розглянутих питань наприкінці посібника надається докладний перелік використаних джерел [1–23].

1. ТЕОРІЯ МНОЖИН. ДІАГРАМИ ЕЙЛЕРА-ВЕННА

ЗАВДАННЯ 1.1

Виконати операції об'єднання $\cup$, перерізу $\cap$, різниці \ , доповнення $\bar{\ }$, диз'юнктивної суми $\oplus$ над множинами $A,\ B \subset U$.

1) A= {2,3,5}, B= {3,5,6,9}, U= {2,3,4,5,6,7,8,9},
2) A= {3,4,5}, B= {4,6,7,10}, U= {3,4,5,6,7,8,9,10},
3) A= {4,5,7}, B= {5,7,8,11}, U= {4,5,6,7,8,9,10,11},
4) A= {5,6,8}, B= {6,8,9,12}, U= {5,6,7,8,9,10,11,12},
5) A= {6,7,9}, B= {7,9,10,13}, U= {6,7,8,9,10,11,12,13},
6) A= {7,8,10}, B= {8,10,11,14}, U= {7,8,9,10,11,12,13,14},
7) A= {8,9,11}, B= {9,11,12,15}, U= {8,9,10,11,12,13,14,15},
8) A= {9,10,12}, B= {10,12,13,1б}, U= {9,10,11,12,13.14,15,16},
9) A= {10,11,13}, B= {11,13,14,17}, U= {10,11,12,13,14,15.16,17},
10) A= {11,12,14}, B= {12,14,15,18}, U= {11,12,13,14,15.16,17,18},
11) A= {12,13,15}, B= {13,15,16,19}, U= {12,13,14,15.16,17,18,19},
12) A= {13,14,16}, B= {14.14,17,20}, U= {13,14,15.16,17,18,19,20},
13) A= {14,15,17}, B= {15,17,18,21}, U= {14,15.16,17,18,19,20,21},
14) A= {15,16,18}, B= {16,18,19,22}, U= {15.16,17,18,19,20,21,22},
15) A= {16,17,19}, B= {17,19,20,23}, U= {16,17,18,19,20,21,22,23},
16) A= {17,18,20}, B= {18,20,21,24}, U= {17,18,19,20,21,22,23,24},
17) A= {18,19,21}, B= {19,21,22,25}, U= {18,19,20,21,22,23,24,25},
18) A= {19,20,22}, B= {20,22,23,26}, U= {19,20,21,22,23,24,25,2б},
19) A= {20,21,23}, B= {21,23,24,27}, U= {20,21,22,23,24,25,26,27},
20) A= {21,22,24}, B= {22,24,25,28}, U= {21,22,23,24,25,26,27,28},
21) A= {22,23,25}, B= {23,25,26,29}, U= {22,23,24,25,26,27,28,29},
22) A= {23,24,26}, B= {24,26,27,30}, U= {23,24,25,26,27,28,29,30},
23) A= {24,25,27}, B= {25,27,28,31}, U= {24,25,26,27,28,29,30,31},
24) A= {25,26,28}, B= {26,28,29,32}, U= {25,26,27,28,29,30,31,32},
25) A= {26,27,29}, B= {27,29,30,33}, U= {26,27,28,29,30,31,32,33},
26) A= {27,28,30}, B= {28,30,31,34}, U= {27,28,29,30,31,32,33,34},

27) A= {28,29,31}, B= {29,31,32,35}, U= {28,29,30,31,32,33,34,35},

28) A= {29,30,32}, B= {30,32,33,36}, U= {29,30,31,32,33,34,35,36},

29) A= {30,31,33}, B= {31,33,34,37}, U= {30,31,32,33,34,35,36,37},

30) A= {31,32,34}, B= {32,34,35,38}, U= {31,32,33,34,35,36,37,38}.

Операції над множинами

Нехай *A,B,C...* — будь-які підмножини певної універсальної множини *U*.

1. Об'єднання (сума) множин.

Об'єднанням множин *A* і *B* називається множина всіх таких елементів, які належать принаймні одній з цих множин. Об'єднання множин *A* і *B* позначають $A \cup B$ (або A + B).

Отже, за означенням

$$\boldsymbol{A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}}$$

На рис. 1 зображено діаграму Ейлера-Венна для $A \cup B$. Об'єднання $A \cup B$ заштриховано.

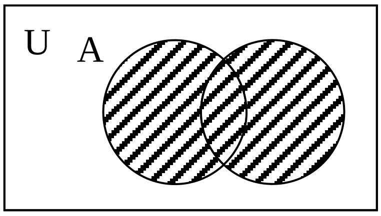


Рис. 1

2. Переріз (перетин, або добуток) множин.

Перерізом множин *A* і *B* називається множина всіх спільних для *A* і *B* елементів, тобто множина всіх таких елементів, які належать і множині *A,* і множині *B*.

Переріз множин *A* і *B* позначають $A \cap B$ (або $A \cdot B$).

Отже, за означенням:

$$\boldsymbol{A \cap B = \{ x \mid} x \in \boldsymbol{A} \wedge x \in \boldsymbol{B \}}$$

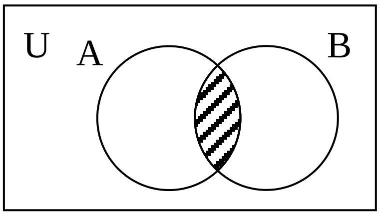


Рис. 2

На рис. 2 зображено діаграму Ейлера-Венна для $A \cap B$. Переріз $A \cap B$ заштриховано.

<u>3. Різниця множин.</u>

Різницею множин A і B називається множина, що складається і усіх елементів A, які не належать множині B.

Різницю множин A і B позначають $A \setminus B$ (або A - B).

Отже, за означенням:

$$\boldsymbol{A \setminus B = \{ x} \mid x \in \mathbf{A} \wedge x \notin \boldsymbol{B \}}$$

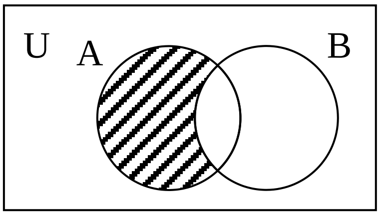


Рис. 3

На рис.3 зображено діаграму Ейлера-Венна для різниці $A \setminus B$. Різницю $A \setminus B$ заштриховано.

<u>4. Доповнення множин.</u>

Нехай A — довільна підмножина універсальної множини U. Різницю $U \setminus A$ називають доповненням множини A і позначають $\neg A$, або $\bar{A}$ (читають «доповнення A», або «не — A»).

Отже, за означенням:

$$\bar{A} = \boldsymbol{U \setminus A = \{ x} \mid x \in \mathbf{U} \wedge x \notin \mathbf{A} \boldsymbol{\}}$$

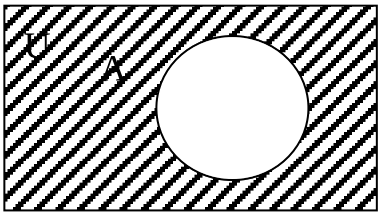


Рис. 4

На рис. 4 зображено діаграму Ейлера-Венна для $\bar{A}$

<u>5. Симетрична різниця множин (або диз'юнктивна (кільцева) сума).</u>

Симетричною різницею (або диз'юнктивною сумою) множин *A* і *B* називається множина, що складається з усіх елементів *A,* які не належать *B,* й усіх елементів *B,* які не належать *A.* Симетричну різницю множин *A* і *B* позначають $A \oplus B$, або $A \Delta B$. Отже, за означенням

$A \oplus B = \{A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

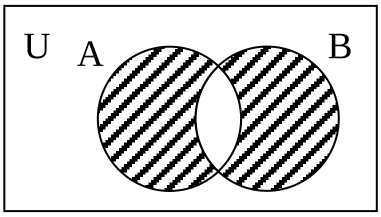


Рис. 5

На рис.5 зображено діаграму Ейлера-Венна для $A \oplus B$. Симетричну різницю $A \oplus B$ заштриховано.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Виконати операції об'єднання $\cup$, перерізу $\cap$, різниці \ , доповнення $\neg$, диз'юнктивної суми $\oplus$ над множинами $A, B \subset U$, якщо $A = \{1,2,4\}$, $B = \{2,4,5,8\}$, $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

<u>Розв'язання</u>.

$A \cup B = \{1,2,4\} \cup \{2,4,5,8\} = \{1,2,4,5,8\}$,

$A \cap B = \{1,2,4\} \cap \{2,4,5,8\} = \{2,4\}$,

$A \setminus B = \{1,2,4\} \setminus \{2,4,5,8\} = \{1\}$,

$B \setminus A = \{2,4,5,8\} \setminus \{1,2,4\} = \{5,8\}$,

$\bar{A} = U \setminus A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \setminus \{1,2,4\} = \{3,5,6,7,8\}$,

$\bar{B} = U \setminus B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \setminus \{2,4,5,8\} = \{1,2,3,6,7\}$,

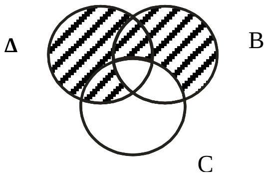
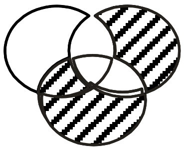
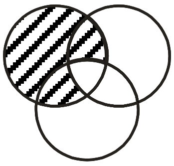
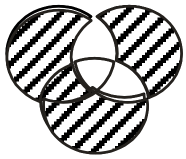
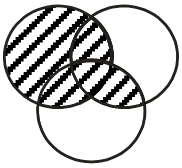
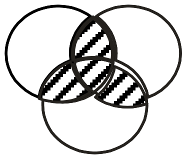
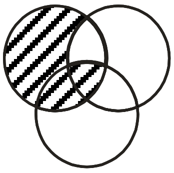
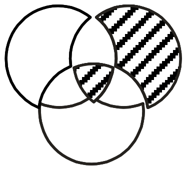
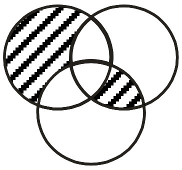
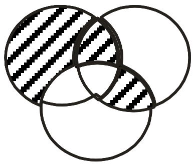
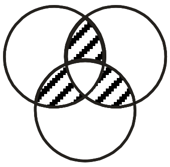
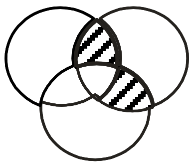
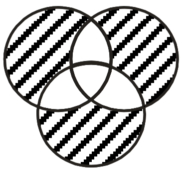
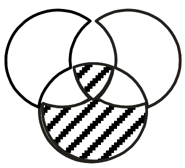
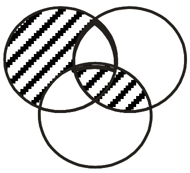
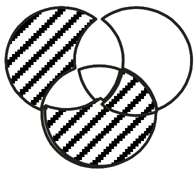
$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1\} \cup \{5,8\} = \{1,5,8\}$.

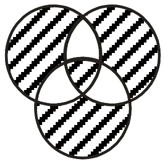
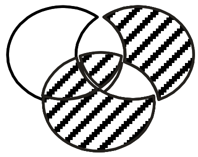
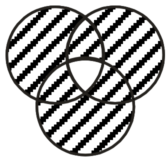
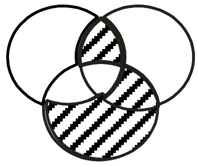
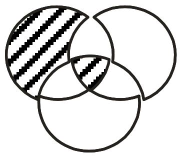
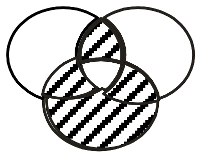
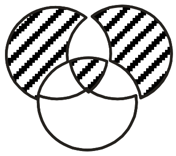
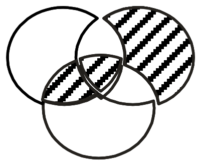
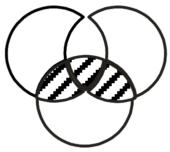
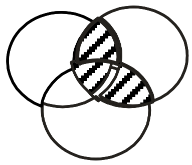
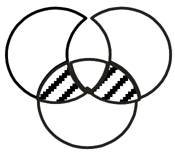
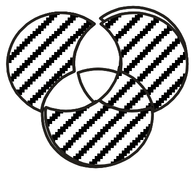
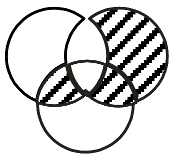
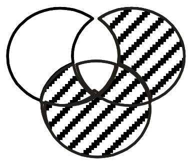
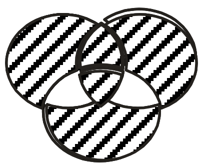
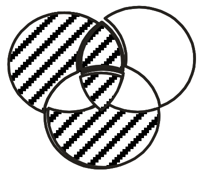
ЗАВДАННЯ 1.2

Виразити символічно (використовуючи знаки операцій перетину, об'єднання і доповнення) множини, заштриховані на діаграмах Ейлера-Венна, відповідно до табл. 1.1.

Номери набору діаграм Ейлера задані в табл. 1.2

Таблиця 1.1

Номер	Діаграма Ейлера	Номер	Діаграма Ейлера
1		17	
2		18	
3		19	
4		20	
5		21	
6		22	
7		23	
8		24	

9		25	
10		26	
11		27	
12		28	
13		29	
14		30	
15		31	
16		32	

Таблиця 1.2

Номер завдання	Номери діаграм Ейлера
1	1,7,14,26
2	2,8,12,25
3	3,9,15,27
4	4,10,17,28
5	5,12,18,29
6	6,11,21,30
7	7,12,19,31
8	8,13,20,32
9	9,14,23,25
10	10,15,22,32
11	11,16,26,2
12	12,17,26,3
13	13,18,27,4
14	14,19,28,9
15	15,20,29,10
16	16,21,32,8
17	17,22,30,2
18	18,23,31,4
19	19,24,13,3
20	20,25,1430
21	21,29,9,2
22	22,30,11,1
23	23,31,10,4
24	24,28,14,7
25	25,29,15,9
26	26,30,13,17
27	27,31,14,18
28	28,32,6,2
29	29,10,20,1
30	30,11,21,25

Геометричне тлумачення множин. Діаграми Ейлера-Венна

Для наочного зображення співвідношень між підмножинам універсальної множини U використовуються графічні ілюстрації, які називаються діаграмами Ейлера-Венна.

На цих діаграмах універсальна множина U зображається у вигляді точок деякого прямокутника, а її будь-яка підмножина — у вигляді круга (або іншої замкненої фігури) всередині прямокутника.

Побудова діаграми Ейлера-Венна полягає в розбитті зазначеного прямокутника на 2^n областей за допомогою n фігур (кругів). Кожна фігура (круг) на діаграмі зображує окрему множину, n — число зображуваних множин. При цьому кожна наступна фігура повинна мати одну і тільки одну загальну область — перетин із кожною з раніш побудованих фігур. Ми вже зустрічалися з діаграмами Ейлера-Венна для двох множин в означеннях операцый над множинами.

Розглянемо діаграми Ейлера-Венна для трьох множин *A, B, C.* Три круги *A, B, C (у загальному положенні, тобто такі круги, що взаємно перетинаються)* поділяють універсальну множину на 2^3= 8 підмножин (частин) (рис. 6):

1) $A \cap B \cap C$, 2) $A \cap B \cap \bar{C}$, 3) $\bar{A} \cap B \cap C$, 4) $A \cap \bar{B} \cap C$,

5) $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$, 6) $\bar{A} \cap B \cap \bar{C}$, 7) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap C$, 8) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$.

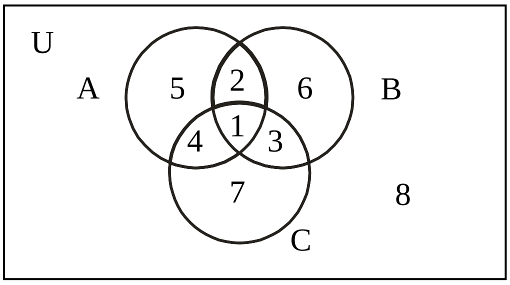


Рис. 6

ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ

Виразити символічно (використовуючи знаки операцій перетину, об'єднання і доповнення) множину, заштриховану на діаграмі Ейлера-Венна (рис. 7)

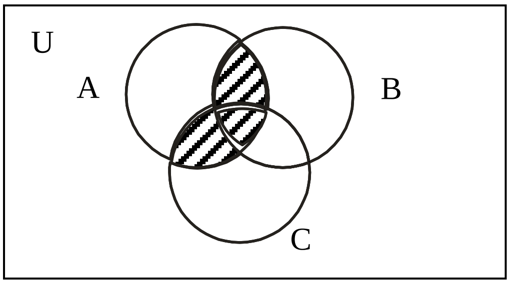


Рис. 7

Розв'язання.

Заштриховану множину можна знайти, виконавши, наприклад, спочатку об'єднання множин *B* і *C,* а потім — перетин цього об'єднання з множиною *A*. Тобто заштриховану множину виразити символічно можна, наприклад , як

$A \cap (B \cup C)$.

Або, наприклад, так:

$(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Зауваження. Рис. 6 дає можливість побачити, що це сукупність областей

1) $A \cap B \cap C$, 2) $A \cap B \cap \overline{C}$, 4) $A \cap \overline{B} \cap C$,

тобто

$A \cap (B \cup C)=(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C)$

2. ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАЦІЙ НАД МНОЖИНАМИ

ЗАВДАННЯ 2.1

Довести тотожність, використовуючи властивості операції над множинами:

1) $(A\cap B) \cup (A\cap \overline{B}) \cup(\overline{A}\cap B) \cup(\overline{A}\cap \overline{B}) = U$

2) $((A\backslash B) \cup A) \oplus (B\oplus A) = B$

3) $(A\backslash B) \cup (B\backslash C) \cup (C\backslash A) \cup (A\cap B\cap C) = A\cup B\cup C$

4) $B\cup(A\backslash (B \oplus (B\cup A))) = B$

5) $(A \oplus B) \oplus (A\cup B) = A\cap B$

6) $\overline{(\overline{A} \cup \overline{B} \cup C)} \cup \overline{(\overline{A} \cup B)} \cup (\overline{A} \cup C) = U$

7) $(C\oplus A) = (B\cap C) \oplus (B\cap A)$

8) $B\cup(C\oplus A) = ((B\cup C) \oplus (B\cup A)) \cup B$

9) $(B\cup C) \backslash (B\cap C) = (B\backslash C) \cup (C\backslash B)$

10) $B \cap (B \backslash (B \oplus (B\oplus C))) = B\backslash C$

11) $B \backslash (C\oplus A) = (B \oplus (C\backslash A)) \backslash ((B\oplus C) \backslash (B\oplus A))$

12) $(B\backslash C) \cap(\overline{B}\oplus (C\oplus B)) = \varnothing$

13) $B \oplus (C\cup A) = ((B\oplus C)\cup(B\oplus A)) \backslash ((B\cap C)\cup(B\cap A))$

14) $B \backslash (C\cup A) = (B \backslash C) \backslash A$

15) $B \oplus (C\cap A) = ((B\oplus C) \cap (B\oplus A)) \cup ((B\cap C) \oplus (B\cap A))$

16) $(B\cap C) \backslash A = (B\cap C) \backslash (B\cap A)$

17) $(A\cup B) \backslash (A\cap B) = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$

18) $(A\cap C) \cup (B\cap C) \cup (A\cap D) \cup (B\cap D) = (A\cup B) \cap (C\cup D)$

19) $\mathrm{A}\backslash(\mathrm{B}\cup\mathrm{C}) = (\mathrm{A}\backslash\mathrm{B}) \cap (\mathrm{A}\backslash\mathrm{C})$

20) $(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cap \overline{(\overline{A} \cap B)} \cap (\overline{A} \cap C) = \varnothing$

21) $\mathrm{A} \backslash (\mathrm{B}\backslash\mathrm{C}) = (\mathrm{A}\backslash\mathrm{B}) \cup (\mathrm{A}\cap\mathrm{C})$

22) $A \cup B \cup (C \cap \overline{(A \cup \overline{B} \cup \overline{C})}) = A \cup B$

23) $\mathrm{A}\cap (\mathrm{B}\backslash\mathrm{C}) = (\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\backslash\mathrm{C}$

24) $(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) \backslash \mathrm{C} = (\mathrm{A}\backslash\mathrm{C}) \cup (\mathrm{B}\backslash\mathrm{C})$

25) $(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \cup (\mathrm{A}\backslash\mathrm{B}) = \mathrm{A}$

26) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$

27) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$

28) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

29) $((A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup C)) \setminus (\overline{B} \cup C) = \varnothing$

30) $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$

Властивості операції над множинами.

Для будь-яких множин A, B та C справедливі наступні властивості (де **U** універсальна множина, A' ще одне позначення заперечення A):

ідемпотентність (*самопоглинання*)

1а) $A \cup A = A$ 1б) $A \cap A = A$

комутативність

2а) $A \cup B = B \cup A$ 2б) $A \cap B = B \cap A$

асоціативність

3а) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ 3б) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

дистрибутивність

4а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 4б) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

властивості $\varnothing$ *та* **U**

5а) $A \cup \varnothing = A$ 5б) $A \cap \varnothing = \varnothing$

6а) $A \cup A' = \mathbf{U}$ 6б) $A \cap A' = \varnothing$

7а) $A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$ 7б) $A \cap \mathbf{U} = A$

8а) $\varnothing' = \mathbf{U}$ 8б) $\mathbf{U}' = \varnothing$

поглинання

9а) $A \cup (A \cap B) = A$ 9б) $A \cap (A \cup B) = A$

закони де Моргана

10а) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ 10б) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

властивості доповнення, різниці та рівності

11) $A \cup B = \mathbf{U}$ & $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow B = A'$

12) $A'' = A$ (*інволютивність*)

13) $A \setminus B = A \cap B'$

14) $A \div B = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$

15) $A \div B = B \div A$

16) $(A \div B) \div C = A \div (B \div C)$

17) $A \div \varnothing = \varnothing \div A = A$

18) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B' = \varnothing$

19) $A = B \Leftrightarrow (A \cap B') \cup (A' \cap B) = \varnothing$

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Довести тотожність, використовуючи властивості операції над множинами

$(A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup B' \cup C' = \mathbf{U}$

Розв'язання.

$(A \cap B \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup B' \cup C' =$ (*дистрибутивність* 4б)

$= [(A \cup A') \cap B \cap C] \cup B' \cup C' =$ (6а)

$= (\mathbf{U} \cap B \cap C) \cup B' \cup C' =$ (7б)

$= (B \cap C) \cup B' \cup C' =$ (*закон де Моргана* 10б)

$= (B \cap C) \cup (B \cap C)' =$ (6а)

$= \mathbf{U}$

ЗАВДАННЯ 2.2

Скоротити вирази алгебри множин:

1) $((A \cup B) \cap (A \cup U)) \cup ((A \cup B) \cap (B \cup \varnothing))$;
2) $((A \cup B) \cap (B \cup U)) \cup (A \cup \varnothing)$;
3) $A \cup (A \cap B) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C \cap D) \cup (B \cap C \cap D) \cup (C \cap D) \cup D$;
4) $(A \cup B) \cap (A \cup B')$;
5) $(A' \cap B' \cap C)' \cap (A' \cap B)' \cap (A' \cap C)$;
6) $A \cup B \cup (C \cap (A \cup B' \cup C')')$;
7) $(A \backslash B) \cup (B \backslash C) \cup (A \cap B \cap C)$;
8) $(A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D)$;
9) $(A \cup B) \cap (B \cup U) \cap (A \cup \varnothing)$;
10) $(A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$;
11) $(A \cap B) \cup (A \backslash B)$;
12) $(A \cup B) \cap (A \cup B') \cap (A' \cup B)$;
13) $((A \cup B') \cap (A' \cup C)) \backslash (B' \cup C)$;
14) $((A \backslash B) \cap (A' \cup B))'$;
15) $(A' \cup B' \cup C)' \cup (A' \cup B)' \cup (A' \cup C)$.

Даний тип задач розв’язується аналогічно попередньому типу.

3. СИСТЕМИ СПІВВІДНОШЕНЬ

ЗАВДАННЯ 3.1

Розв’язати систему співвідношень відносно множини X:

№	Система	№	Система	№	Система
1	$\begin{cases} B \cap X = A \\ B \cup X = C \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$	**2**	$\begin{cases} (A \triangle X) \cup B = C \\ C \setminus X = A \cup B \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$	**3**	$\begin{cases} B \setminus X = A \\ B \cup X = C \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$
4	$\begin{cases} (A \triangle C) = X \cap B \\ X \setminus B = A \setminus C \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$	**5**	$\begin{cases} C \setminus X = B \setminus A \\ B \cup X = C \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$	**6**	$\begin{cases} B \triangle C = C \setminus X \\ X \cup A = C \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$
7	$\begin{cases} A \cap X = B \\ A \triangle X = C \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$	**8**	$\begin{cases} X \setminus B = C \setminus A \\ A \triangle X = C \triangle B \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$	**9**	$\begin{cases} C \setminus X = A \cup (C \setminus B) \\ A \cup X = B \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$
10	$\begin{cases} X \setminus B = C \setminus A \\ C \cap X = A \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$	**11**	$\begin{cases} B \setminus X = A \\ B \cup X = C \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$	**12**	$\begin{cases} X \cup (B \setminus A) = C \\ C \setminus X = A \cap B \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$
13	$\begin{cases} B \triangle X = C \setminus A \\ A \cap X = C \cap B \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$	**14**	$\begin{cases} A \triangle X = C \setminus B \\ A \cup X = B \cap X \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$	**15**	$\begin{cases} A \setminus B = C \setminus X \\ B \cup X = C \setminus A \\ A \subseteq B \subseteq C \end{cases}$
16	$\begin{cases} C \setminus X = A \triangle B \\ X \cap A = X \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$	**17**	$\begin{cases} C \setminus X = A \cup (C \setminus B) \\ X \cap B = X \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$	**18**	$\begin{cases} C \setminus X = C \setminus (A \cup B) \\ A \setminus B = X \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$
19	$\begin{cases} C \setminus X = A \cap B \\ X \setminus A = B \triangle C \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$	**20**	$\begin{cases} C \setminus X = A \cup B \\ X \setminus B = C \setminus A \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$	**21**	$\begin{cases} A \cap X = A \setminus B \\ X \triangle B = A \\ A \cup B \subseteq C \end{cases}$

№	Система	№	Система	№	Система
22	$\begin{cases} B\cup X=C \\ X\cap B=A \\ A\cup B\subseteq C \end{cases}$	**23**	$\begin{cases} (A\Delta X)\cup B=C \\ C\setminus X=A\cup B \\ A\cup B\subseteq C \end{cases}$	**24**	$\begin{cases} B\setminus X=A \\ X\cup B=C \\ A\cup B\subseteq C \end{cases}$
25	$\begin{cases} X\cup(B\setminus A)=C \\ C\setminus X=A\cap B \\ A\cup B\subseteq C \end{cases}$	**26**	$\begin{cases} C\setminus A=X\Delta B \\ X\cap A=B\cap C \\ A\cup B\subseteq C \end{cases}$	**27**	$\begin{cases} C\setminus A=X\Delta B \\ X\cup B=A\cap X \\ A\cup B\subseteq C \end{cases}$
28	$\begin{cases} C\setminus A=X\Delta B \\ (A\Delta B)\cup X=C \\ A\cup B\subseteq C \end{cases}$	**29**	$\begin{cases} A\cap X=C\Delta B \\ X\setminus A=B\setminus C \\ A\cup B\subseteq C \end{cases}$	**30**	$\begin{cases} C\setminus X=A\Delta C \\ X\cup B=C \\ A\cup B\subseteq C \end{cases}$

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Розв'язати систему співвідношень відносно множини X:

$$\begin{cases} B\Delta C=X\cap A \\ X\setminus C=A\cap B \\ C\subseteq A\cap B \end{cases}$$

<u>Розв'язання.</u> Побудуємо множини загального положення *A*, *B*, *X* та множину *C* (рис. 3.1) такі, що $C\subseteq A\cap B$ і $C \between X$.

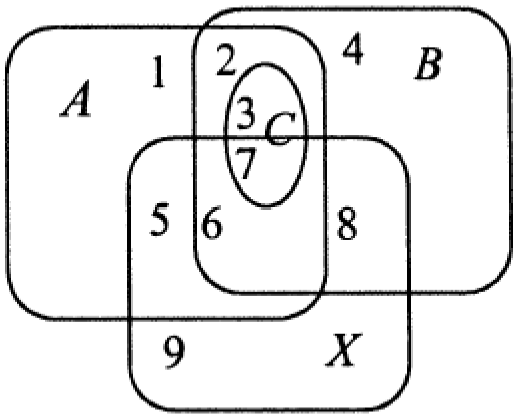


Рис. 3.1

Символом 1 позначимо список елементів множини *A*, що не потрапили ні в одну з множин *B*, *C*, *X*, символом 7 – список елементів, що потрапили в кожну з множин A, B, C, X і т.д. Будемо мати: $A = \{1,2,3,5,6,7\}$, $B = \{2,3,4,6,7,8\}$, $C = \{3,7\}$, $X = \{5,6,7,8,9\}$.

1. $B \vartriangle C = \{2,4,6,8\}$, $X \cap A = \{5,6,7\}$. Ці множини рівні за першим рівнянням системи, отже, списки елементів 2,4,5,7 і 8 є порожніми. Отримуємо: $A = \{1,3,6\}$, $B = \{3,6\}$, $C = \{3\}$, $X=\{6,9\}$.

2. $X \setminus C = \{6,9\}$, $A \cap B = \{3,6\}$. Дані множини рівні за другим рівнянням системи, отже, списки елементів 3 і 9 порожні. Множини набудуть наступний вигляд:

$$A = \{1,6\},\ B = \{6\},\ C = \varnothing,\ X=\{6\}.$$

Таким чином, $X = B$, $B \subseteq A$, $C = \varnothing$.

II. Перевіримо, що множина $X = B$ є розв’язком даної системи.

Якщо $C = \varnothing$ і $B \subseteq A$, то $C \subseteq A \cap B$, і можемо записати: $B = \{b\}$, $A = \{a, b\}$, де a, b – списки елементів.

Нехай $X = B = \{b\}$, тоді: $B \vartriangle C = X \cap A = \{b\}$, $X \setminus C = A \cap B = \{b\}$.

Таким чином, всі співвідношення системи виконуються, тобто множина $X = B$ є розв’язком даної системи при виконанні умов $B \subseteq A$, $C = \varnothing$.

ЗАВДАННЯ 3.2

Розв’язати систему співвідношень відносно множини X або довести її несумісність

№	Система	№	Система	№	Система
1	$\begin{cases} A \cup X = B \cap X \\ A \cap X = C \cup X \\ \overline{A} \setminus X = C \setminus A \end{cases}$	2	$\begin{cases} A \setminus X = X \setminus B \\ X \setminus A = C \setminus X \\ \overline{B \cup X} = X \setminus A \end{cases}$	3	$\begin{cases} A \cap X = B \setminus X \\ X \setminus A = C \cup X \\ X \setminus C = A \cup B \end{cases}$
4	$\begin{cases} A \cup X = B \setminus X \\ X \setminus B = C \cup X \\ \overline{A} \setminus C = X \setminus A \end{cases}$	5	$\begin{cases} A \cup X = B \Delta \overline{C} \\ X \setminus C = B \cup X \\ \overline{B \cap X} = C \setminus A \end{cases}$	6	$\begin{cases} B \setminus C = A \Delta X \\ B \setminus X = A \setminus C \\ C \cap X = A \cap B \end{cases}$

№	Система	№	Система	№	Система
7	$\begin{cases} B\setminus X = A\cap C \\ A\setminus X = C\setminus B \\ X\setminus C = A\cup B \end{cases}$	**8**	$\begin{cases} B\cup X = B\cap C \\ A\cup C = C\cap X \\ A\cup B = X\cap C \end{cases}$	**9**	$\begin{cases} A\cap X = B\cap A \\ C\setminus X = \overline{A\cup B} \\ \overline{A} = A\setminus B \end{cases}$
10	$\begin{cases} \overline{B\cap X} = X\cap C \\ B\cap C = B\setminus X \\ A\setminus(B\cup C) = C\setminus B \end{cases}$	**11**	$\begin{cases} X\setminus C = A\setminus B \\ A\setminus C = \overline{X\cap C} \\ (B\setminus X)\setminus A = A\setminus C \end{cases}$	**12**	$\begin{cases} C\cup X = A\setminus B \\ A\cap B = B\cup C \\ B\setminus A = X\cap C \end{cases}$
13	$\begin{cases} C\setminus X = A\setminus B \\ B\cup\overline{C} = X\cap C \\ X\cup\overline{B} = X\cap B \end{cases}$	**14**	$\begin{cases} B\cup X = C\cap X \\ B\cap X = A\cup X \\ \overline{B}\setminus X = A\setminus B \end{cases}$	**15**	$\begin{cases} B\setminus X = X\setminus C \\ X\setminus B = A\setminus X \\ \overline{C}\cap\overline{X} = X\setminus B \end{cases}$
16	$\begin{cases} B\cap X = C\setminus X \\ X\setminus B = A\cup X \\ X\setminus A = C\cup B \end{cases}$	**17**	$\begin{cases} B\cup X = C\setminus X \\ X\setminus C = A\cup X \\ \overline{B}\setminus A = X\setminus B \end{cases}$	**18**	$\begin{cases} B\cup X = C\Delta\overline{A} \\ X\setminus A = C\cup X \\ \overline{C\cap X} = A\setminus B \end{cases}$
19	$\begin{cases} C\setminus A = B\Delta X \\ C\setminus X = B\setminus A \\ A\cap X = B\cap C \end{cases}$	**20**	$\begin{cases} C\setminus X = B\cap A \\ B\setminus X = A\setminus C \\ X\setminus A = B\cup C \end{cases}$	**21**	$\begin{cases} C\cup X = C\cap A \\ B\cup A = A\cap X \\ B\cup C = X\cap A \end{cases}$
22	$\begin{cases} B\cap X = C\cap B \\ A\setminus X = \overline{C\cup B} \\ \overline{B} = B\setminus C \end{cases}$	**23**	$\begin{cases} \overline{C\cap X} = X\cap A \\ A\cap C = C\setminus X \\ B\setminus(C\cup A) = A\setminus C \end{cases}$	**24**	$\begin{cases} X\setminus A = B\setminus C \\ B\setminus A = \overline{X\cap A} \\ (C\setminus X)\setminus B = B\setminus A \end{cases}$
25	$\begin{cases} A\cup X = B\setminus C \\ B\cap C = A\cup C \\ C\setminus B = X\cap A \end{cases}$	**26**	$\begin{cases} A\setminus X = B\setminus C \\ C\cup\overline{A} = A\cap X \\ X\cup\overline{C} = X\cap C \end{cases}$	**27**	$\begin{cases} C\setminus X = X\setminus A \\ X\setminus C = B\setminus X \\ \overline{A\cup X} = X\setminus C \end{cases}$
28	$\begin{cases} C\cup X = A\setminus X \\ X\setminus A = B\cup X \\ \overline{C}\setminus B = X\setminus C \end{cases}$	**29**	$\begin{cases} A\setminus X = C\cap B \\ C\setminus X = B\setminus A \\ X\setminus B = A\cup C \end{cases}$	**30**	$\begin{cases} B\cup X = C\setminus A \\ A\cap C = A\cup B \\ A\setminus C = X\cap B \end{cases}$

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Розв'язати систему співвідношень відносно множини X або довести її несумісність

$$\begin{cases} A \vartriangle X = B \setminus C \\ C \cap X = A \cup X \\ B \setminus X = A \setminus X \end{cases}$$

Розв'язання. Побудуємо множини загального положення *A*, *B*, *C*, *X*, що є підмножинами універсальної множини U. Для цього випишемо всі 16 двійкових наборів розмірності 4. Нехай розряди цих наборів зліва направо відповідають множинам *A*, *B*, *C*, *X* (Табл. 3.1).

Таблиця 3.1

№	*A*	*B*	*C*	*X*
1	0	0	0	0
2	0	0	0	1
3	0	0	1	0
4	0	0	1	1
5	0	1	0	0
6	0	1	0	1
7	0	1	1	0
8	0	1	1	1
9	1	0	0	0
10	1	0	0	1
11	1	0	1	0
12	1	0	1	1
13	1	1	0	0
14	1	1	0	1
15	1	1	1	0
16	1	1	1	1

Символом 1 позначимо список елементів універсальної множини U, що не потрапили ні в одну з множин *A*, *B*, *C*, *X*, символом 4 – список

елементів, що не потрапили ні в A, ні в B, але потрапили і в C, і в X, і т.д. Будемо мати:

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\},$$
$$A = \{9,10,11,12,13,14,15,16\},$$
$$B = \{5,6,7,8,13,14,15,16\},$$
$$C = \{3,4,7,8,11,12,15,16\},$$
$$X = \{2,4,6,8,10,12,14,16\}.$$

1. $A \vartriangle X = \{2,4,6,8,9,11,13,15\}$, $B \setminus C = \{5,6,13,14\}$. Ці множини рівні відповідно до першого рівняння системи, значить, списки елементів 2, 4, 5, 8, 9, 11, 14 і 15 є порожніми. Отримуємо:

$$A = \{10,12,13,16\},\ B = \{6,7,13,16\},\ C = \{3,7,12,16\},\ X = \{6,10,12,16\}.$$

2. $C \cap X = \{12,16\}$, $A \cup X = \{6,10,12,13,16\}$.

Ці множини рівні відповідно до другого рівняння системи, отже, списки елементів 6, 10, 13 є порожніми. Множини матимуть вигляд:

$$A = \{12,16\},\ B = \{7,16\},\ X = \{12,16\},\ C = \{3,7,12,16\}.$$

3. $B \setminus X = \{7\}$, $A \setminus X = \varnothing$, за третім рівнянням системи отримуємо, що список 7 є порожнім, і $C = \{3,12,16\}$, $B = \{16\}$, $A = \{12,16\} = X$, $U = \{1,3,12,16\}$.

Отже, маємо, що $X = A$, $B \subseteq A \subseteq C \subseteq U$.

ІІ. Перевіримо, що множина $X = A$ є розв'язком даної системи.

Якщо виконані включення $B \subseteq A \subseteq C \subseteq U$, то можемо записати: $B = \{b\}$, $A = \{a, b\}$, $C = \{a, b, c\}$, $U = \{a, b, c, u\}$, де a, b, c, u – списки елементів.

Нехай $X = A = \{a, b\}$, тоді: $A \vartriangle X = \varnothing = B \setminus C$, $B \setminus X = \varnothing = A \setminus X$, $C \cap X = \{a, b\} = A \cup X$.

Таким чином, всі співвідношення системи виконуються, тобто множина $X = A$ є розв'язком даної системи при виконанні включень $B \subseteq A \subseteq C \subseteq U$.

4. ДОВЕДЕННЯ ТОТОЖНОСТІ МОДЕЛЬНИМ ШЛЯХОМ

ЗАВДАННЯ 4.1

Довести тотожність модельним шляхом:

1) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$
2) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times D) \cap (B \times C)$
3) $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \times D) \cap (B \times C)$
4) $((A \cup B) \times C) \setminus (A \times (C \cup D)) = (B \times C) \setminus (A \times (C \cup D))$
5) $(A \times (C \cup D)) \setminus ((A \cup B) \times C) = (A \times D) \setminus ((A \cup B) \times C)$
6) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
7) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
8) $(A \oplus B) \times C = (A \times C) \oplus (B \times C)$
9) $((A \setminus D) \times C) \setminus (A \times (B \setminus C)) = ((A \cup D) \setminus D) \times C$
10) $((A \cup D) \times C) \setminus (A \times (B \setminus C)) = ((A \setminus D) \cup D) \times C$
11) $B \times (A \setminus C) = (B \times A) \oplus (B \times (A \cap C))$
12) $A \times (C \cap (B \oplus C)) = (A \times C) \oplus (A \times (C \cap B))$
13) $A \times C = (A \times (C \cup B)) \setminus (A \times (B \setminus C))$
14) $A \times (B \cap C) = (A \times (B \cup C)) \setminus (A \times (B \oplus C))$
15) $B \times (A \setminus C) = (B \times A) \oplus (B \times (A \cap C))$
16) $C \times B = (C \times (B \setminus A)) \cup (C \times (B \cap A))$
17) $C \times (A \setminus B) = (C \times A) \oplus (C \times (A \cap B))$
18) $B \times A = (B \times (A \setminus C)) \cup (B \times (A \cap C))$
19) $(A \oplus B) \cup (A \cap B) = A \cup B$
20) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) = A \cup B \cup C$
21) $((A \cup B) \cap (A \cup \boldsymbol{U})) \cup ((A \cup B) \cap (B \cup \varnothing)) = A \cup B$
22) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup D) \cap (C \cup D) = (A \cap D) \cup (B \cap C)$
23) $(A \cap B) \setminus C = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$
24) $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup \overline{B} \cup \overline{C} = U$
25) $(A \cap B) \setminus (A \cup B) = \varnothing$

26) $\overline{(A \setminus B) \cap (\overline{A} \cup B)} = U$

27) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

28) $(A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D) = (A \cup B) \cap (C \cup D)$

29) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

30) $(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cap \overline{(\overline{A} \cap B)} \cap (\overline{A} \cap C) = \varnothing$

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Довести тотожність модельним шляхом

$C \oplus D = (C \cup D) \setminus (C \cap D)$

Модельний шлях доведення тотожностей базується на визначеннях операцій над множинами (наведені в розділі 2) та властивостями логічних операцій. Властивості логічних операцій розглянуті у конспекті лекцій (тема 9. Булеві функції) та розділі 8 даного посібника.

Розв'язання.

Пояснення до логічних символів:

$\wedge$ - логічне «і»

$\vee$ - логічне «або»

Звернення до властивостей булевих функцій

$$
\begin{gathered}
(y \in C \oplus D) \Leftrightarrow (y \in (C \cap \overline{D}\ ) \cup (D \cap \overline{C}\ )) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow ((y \in C) \wedge (y \notin D)) \vee ((y \notin C) \wedge (y \in D)) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow ((y \in C) \vee (y \notin C)) \wedge ((y \in C) \vee (y \in D)) \wedge ((y \notin D) \vee \\
\vee (y \notin C)) \wedge ((y \notin D) \vee (y \in D)) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow 1 \wedge ((y \in C) \vee (y \in D)) \wedge ((y \notin D) \vee (y \notin C)) \wedge 1 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow ((y \in C) \vee (y \in D)) \wedge ((y \notin D) \vee (y \notin C)) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (y \in (D \cup C)) \wedge \neg((y \in D) \wedge (y \in C)) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (y \in (C \cup D)) \wedge \neg(y \in (C \cap D)) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (y \in (C \cup D) \setminus (C \cap D)).
\end{gathered}
$$

5. ВІДНОШЕННЯ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ

ЗАВДАННЯ 5.1

Для бінарних відношень, що задані на множині *X,* визначити їх властивості. Для відношень еквівалентності знайти класи еквівалентності та фактор-множину *X*/*R*.

1) Відношення визначено на множині *NxN*:
$$(a,b)P(c,d) \Leftrightarrow \begin{cases} ab = dc,\ якщо\ b \neq 0,\ d \neq 0 \\ a = c,\ якщо\ b = 0,\ d = 0 \end{cases}$$
2) Відношення визначено на множині *Z*: $xPy \Leftrightarrow x \leq y + 1$
3) Відношення визначено на множині N: $xPy \Leftrightarrow$ НСД$(x,y) \neq 1$
4) Відношення визначено на множині дійсних чисел *R*: $xPy \Leftrightarrow y = |x|$
5) Відношення визначено на множині цілих чисел *Z*: $xPy \Leftrightarrow (x^2 - y^2)$ ділиться на 5 без остачі
6) Відношення визначено на множині натуральних чисел *N*: $xPy \Leftrightarrow x/y$ (x ділиться на y без остачі)
7) Відношення визначено на множині R: $xPy \Leftrightarrow |x - 2y| \in$ N;
8) Відношення визначено на множині Z: $xPy \Leftrightarrow$ 2x = 3y;
9) Відношення визначено на множині N: $xPy \Leftrightarrow y = |x + 5| \geq |x - y|$;
10) Відношення визначено на множині R: $xPy \Leftrightarrow xy > 1$;
11) Відношення визначено на множині Z: $xPy \Leftrightarrow 3 / (x - y)$;
12) Відношення визначено на множині N: $xPy \Leftrightarrow (x - y) / m,\ m > 0$;
13) Відношення визначено на множині Z: $xPy \Leftrightarrow 3 / (x + y)$;
14) Відношення визначено на множині N: $xPy \Leftrightarrow$ НСД(x,y) = x;
15) Відношення визначено на множині *NxN*:
$< a,b > P < c,d > \Leftrightarrow a + d = b + c$;
16) Відношення визначено на множині {5, 7, 9, 10, 13, 15, 18, 19, 20} $xPy \Leftrightarrow |x - y|/5$;
17) Відношення визначено на множині {5, 8, 9, 12, 13, 16, 18, 19, 20} $xPy \Leftrightarrow |x - y|/4$;
18) Відношення визначено на множині {7, 9, 10, 14, 15, 18, 19, 21}

$xPy \Leftrightarrow |x - y|/7$;

19) Відношення визначено на множині {6, 9, 10, 12, 15, 18, 19, 20}

$xPy \Leftrightarrow |x - y|/6$;

20) Відношення визначено на множині {2, 2.5, 3, 3.5, 5, 5.5, 8, 8.5}

$xPy \Leftrightarrow |x - y| = k \in N$.

Властивості відношень

Нехай R – бінарне відношення у множині A ($R \subseteq A \times A$). Тоді відношення R є:

рефлексивним, якщо $I \subseteq R$, тобто, іншими словами, воно завжди виконується між елементом і ним самим ($\forall a \in A$, aRa). Як приклад такого відношення можна навести відношення нестрогої нерівності на множині натуральних або дійсних чисел.

антирефлексивним (іррефлексивним), якщо $R \cap I = \varnothing$, тобто якщо співвідношення $a_i R a_j$ виконується, то $a_i \neq a_j$. Це, наприклад, відношення строгої нерівності на множинах натуральних або дійсних чисел, відношення "бути старшим" у множині людей.

симетричним, якщо $R = R^{-1}$, тобто при виконанні співвідношення $a_i R a_j$ виконується співвідношення $a_j R a_i$. Як приклад такого відношення можна навести відстань між двома точками на площині, відношення "бути рідним" на множині людей.

асиметричним, якщо $R \cap R^{-1} = \varnothing$, тобто із двох співвідношень $a_i R a_j$ та $a_j R a_i$ щонайменше одне не виконується. Як приклад такого відношення можна навести відношення "бути батьком" у множині людей, відношення строгого включення в множині всіх підмножин деякого універсуму. Очевидно, якщо відношення асиметричне, то воно й антирефлексивне.

антисиметричним, якщо $R \cap R^{-1} \subseteq I$, тобто обидва співвідношення $a_i R a_j$ та $a_j R a_i$ одночасно виконуються тоді й тільки тоді, коли $a_j = a_i$. Як приклад можна навести нестрогу нерівність.

транзитивним, якщо $R\circ R\subseteq R$, тобто з виконання співвідношень a_iRa_j та a_jRa_k випливає виконання співвідношення a_iRa_k. Як приклад можна навести відношення "бути дільником" на множині цілих чисел, "бути старшим" на множині людей.

Бінарне відношення на множині A називається **відношенням еквівалентності**, якщо це відношення є рефлексивним, симетричним та транзитивним.

Нехай елемент $a_i\in A$. **Перерізом відношення А за елементом a_i** називається множина елементів b з B, для яких пара $(a_i, b)\in R$:

$R(a_i) = \{b\in B \mid (a_i,b)\in R\}$.

Множину всіх перерізів відношення R називають **фактор-множиною** множини B за відношенням R і позначають B/R. Вона повністю визначає відношення R.

Наприклад, нехай $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4,5,6\}$. Відношення $R=\{(1,2),(1,4),(2,3),(3,3),(3,6)\}$. Очевидно, $R(1)=\{2,4\}$, $R(2)=\{3\}$, $R(3)=\{3,6\}$. Множина $\{R(1), R(2), R(3)\}$ є фактор-множиною B/R.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Для бінарних відношень, що задані на множині X, визначити їх властивості. Для відношень еквівалентності знайти класи еквівалентності та фактор-множину X/R. Відношення визначено на множині Z:

$xPy \Leftrightarrow x = y \ (mod\ 3)$

Розв'язання.

Це відношення означає, що різниця x – y ділится на 3 без остачі. $xPy \Leftrightarrow (x - y)/3 = k \in$ Z.

1) Рефлексивність: $xPx \Leftrightarrow (x - x)/3 = 0/3 = 0$.Відношення рефлексивно.
2) Відношення не є антирефлексивним (бо відношення рефлексивне).
3) Симетричність: $xPy \Leftrightarrow yPx$, *якщо* xPy, *то* yPx.

Нехай $(x - y)/3 = k \in$ Z, тоді $(y - x)/3 = - k \in$ Z. Випливає, що умова симетричності виконується.

4) Асиметричність не виконується (бо відношення симетричне).

5) Антиметричність не виконується (бо відношення симетричне).

6) Транзитивність: якщо *xPy та yPz, то xPz.*

Нехай $(x - y)/3 = k_1 \in$ Z тобто $(x - y) = 3k_1$ та $(y - z)/3 = k_2 \in$ Z тобто $(y - z) = 3k_2$. Розв'яжемо цю систему рівнянь, склавши ці рівняння:

$(x - y) + (y - z) = 3k_1 + 3k_2 \in$ Z. Умова транзитивності виконується.

Задане відношення є відношенням еквівалентності.

Знайдемо класи еквівалентності.

Довільне число x можна записати у вигляді $3q + r$, $0 \le r < 3$, де q – частка, r остача від ділення числа x на 3. В один і той же класс єквівалентності попадуть усі числа, які дають при діленні однакове число r в остачі. Ми отримаємо три класи еквівалентності.[0] = {0, 3, 6, 9, 12, …}; [1] = {1, 4, 7, 10, 13, …}; [2] = {2, 5, 8, 11, 14, …}.

Кожний клас можна охарактеризувати одним представником цього класу, і в даному випадку таким представником найкраще вибрати остачу r. Отже, фактор-множиною заданного відношення Z/R = {[0], [1], [2]}.

6. ВІДНОШЕННЯ ПОРЯДКУ

ЗАВДАННЯ 6.1

Для бінарних відношень, що задані на множині X, визначити їх властивості.

Чи є задане відношення відношенням порядку?

Строгого чи не строго?

Чи є множина, на якій задане відношення це відношення порядку, ланцюгом?

Знайти мінімальні та максимальні елементи.

Знайти, де це можливо, найбільший та найменший елементи.

Побудувати діаграму Хассе.

1) Відношення визначено на множині {2, 3, 5, 8, 9, 12, 15, 16, 18, 20}

   $xPy \Leftrightarrow x/y$ (ділиться без остачі);

2) Відношення визначено на множині {1, 2, 3, 5, 6, 15, 20}

   $xPy \Leftrightarrow x/y$ (ділиться без остачі);

3) Відношення визначено на множині {1, 2, 3, 4, 6, 12, 15}

   $xPy \Leftrightarrow x/y$ (ділиться без остачі);

4) Відношення визначено на множині {1, 2, 3, 6, 12, 16, 18}

   $xPy \Leftrightarrow x/y$ (ділиться без остачі);

5) Відношення визначено на множині {1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 16}

   $xPy \Leftrightarrow x/y$ (ділиться без остачі);

6) Відношення визначено на множині {8, 11, 12, 13, 16, 18, 21, 22, 23}: $xPy \Leftrightarrow x(mod\ 4) < y(mod\ 4)$;

7) Відношення визначено на множині X={{a}, {b}, {a, b}, {a, b, c}}:

   $xPy \Leftrightarrow x \square y$;

8) Відношення визначено на множині {88, 65, 55, 52, 39, 26, 13, 11}

   $xPy \Leftrightarrow$ *x кратне y*;

9) Відношення визначено на множині відрізків віссі Ox X={[0; 3], [0,5; 3,5], [1, 2], [1, 3], [1,5; 2], [3, 3], [0, 7], [7, 8]}

   $xPy \Leftrightarrow$ *відрізок x > відрізка y*;

10) Відношення визначено на множині {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 120}

$xPy \Leftrightarrow x^2+9 <= y^2+9$;

11) Відношення визначено на множині {5, 8, 9, 12, 13, 16, 18, 19, 20}: $xPy \Leftrightarrow x \le y+1$

12) Відношення визначено на множині {7, 10, 11, 14, 15, 18, 20, 21, 22}: $xPy \Leftrightarrow |x - y|$ ділиться на 4 без остачі.

13) Відношення визначено на множині {0, 1, 2, 3, 4, 5}: $xPy \Leftrightarrow 5 / (x+y)$ (ділиться без остачі).

14) Відношення визначено на множині {7, 9, 10, 14, 15, 18, 19, 21}: $xPy \Leftrightarrow y = |x + 5| \ge |x - y|$;

15) Відношення визначено на множині {5, 7, 9, 10, 13, 15, 18, 19, 20}: $xPy \Leftrightarrow |x+5| \ge |3-y|$;

16) Відношення визначено на множині {5, 7, 9, 10, 13, 15, 18, 19, 20} $xPy \Leftrightarrow |x - y|/5$ (ділиться без остачі);

17) Відношення визначено на множині {5, 8, 9, 12, 13, 16, 18, 19, 20} $xPy \Leftrightarrow |x - y|/4$ (ділиться без остачі);

18) Відношення визначено на множині {7, 9, 10, 14, 15, 18, 19, 21} $xPy \Leftrightarrow |x - y|/7$ (ділиться без остачі);

19) Відношення визначено на множині {6, 9, 10, 12, 15, 18, 19, 20} $xPy \Leftrightarrow |x - y|/6$ (ділиться без остачі);

20) Відношення визначено на множині {2, 2.5, 3, 3.5, 5, 5.5, 8, 8.5, 9, 12} $xPy \Leftrightarrow x/y$ (ділиться без остачі).

Властивості відношень наведені в попередньому розділі "ВІДНОШЕННЯ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ".

Бінарне відношення на множині *A* називається відношенням **нестрогого порядку**, якщо воно рефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Бінарне відношення на множині *A* називається відношенням **строгого порядку**, якщо воно асиметричне та транзитивне.

Множина, в якій визначено відношення порядку (строгого або нестрогого), називається **упорядкованою**, і кажуть, що порядок уведено цим відношенням.

Множина A називається **лінійно** (**абсолютно**) **впорядкованою**, якщо для будь-яких двох її елементів x та y виконується $x<y$ або $y<x$ ($x\le y$ або $y\le x$). Лінійно впорядкована множина зі строгим порядком також називається **ланцюгом**.

Мінімальним (**максимальним**) елементом множини A, на якій задано відношення порядку $\le$, називається такий елемент $x\in A$, що для всякого елемента $y\in A$, що порівнюється з x, має місце $x\le y$ ($y\le x$).

Елемент $x\in A$ називається **найменшим** (**найбільшим**), якщо для кожного елемента $y\in A$ виконується $x\le y$ ($y\le x$).

Діаграма Гассе – це граф відношення порядку, що не містить транзитивно замкнутих дуг та петель, які відображають рефлексивніть відношення, тому діаграма впорядкованої множини може бути отримана із орієнтованого графа відношення порядку видаленням петель та транзитивно замкнутих дуг.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Відношення визначено на множині X={-5, -3, -2, 0, 1, 2, 4, 5, 6}:

$xPy \Leftrightarrow |x| < |y|$

Визначити його властивості.

Чи є задане відношення відношенням порядку?

Строгого чи не строго?

Чи є множина, на якій задане відношення це відношення порядку, ланцюгом?

Знайти мінімальні та максимальні елементи.

Знайти, де це можливо, найбільший та найменший елементи.

Побудувати діаграму Хассе.

Розв'язання.

1) Відношення не є рефлексивним, бо не виконується $|x| < |x|$ для будь-якого x.

2) Відношення є антирефлексивним.

3) Не є симетричним, бо якщо $|x| < |y|$, то $|y| < |x|$ не виконується .

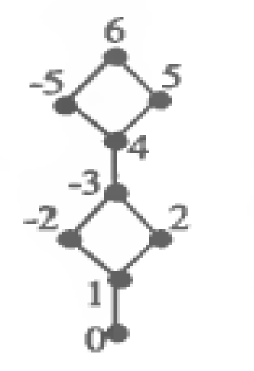
4) Асиметричне.

5) Антиметричність не виконується.

6) Транзитивність виконується, бо якщо $|x| < |y|$ та $|y| < |z|$, то $|x| < |z|$.

Задане відношення є відношенням строгого порядку.

Множина X, з заданим на ній відношенням строгого порядку, не є ланцюгом, в ній є незрівняльні елементи -2 та 2, бо $|-2| = |2|$. Діаграму Хассе представлена на рисунку. Мінімальним та найменшим елементом є 0, максимальним та найбільшим елементом є 6.



7. ВІДОБРАЖЕННЯ

ЗАВДАННЯ 7.1

Побудувати композиції відображень $(f \circ g)$ і $(g \circ f)$, перевірити чи є вони сюр'єктивними, ін'єктивними, бієктивними.

1) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ y = x^2 + 5,\ g: \mathbf{R} \to \mathbf{Z},\ y = [x]$;
2) $f: \mathbf{C} \to \mathbf{R}^+,\ y = |x|^2 + 12,\ g: \mathbf{R} \to N,\ y = [x^2 + 1]$;
3) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ y = \log_2(x^2 + 3),\ g: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ y = x^3 + 3x$;
4) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ y = 3^{x+1},\ g: \mathbf{R} \to \{0,1\},\ y = [x]\ mod\ 2$;
5) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ y = x^3 + 5x,\ g: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ y = \log_2(x^2 + 2)$;
6) $f: \mathbf{C} \to \mathbf{R}^+,\ y = |x|^2,\ g: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ y = e^{x-3}$;
7) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{Z},\ y = 4[x] + 5,\ g: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z},\ y = 4x + 5$;
8) $f: \mathbf{Q} \to \mathbf{Z},\ y = [17x^3],\ g: \mathbf{Z} \to N,\ y = |x| + 1$;
9) $f: \mathbf{C} \to \mathbf{R}^+,\ y = |x|^2 + 2|x| + 1,\ g: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ y = \dfrac{1}{e^x}$;
10) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{Z},\ y = [x + 13],\ g: \mathbf{Z} \to N,\ y = |x| + 1$;
11) $f: N \to N,\ y = x^2 + 2,\ g: N \to \{0, 1\},\ y = (x + 7)^2\ mod\ 2$;
12) $f: \mathbf{Q} \to \mathbf{Q},\ y = 11x + 2,\ g: \mathbf{Q} \to \mathbf{Z},\ y = [x^7 + 14] - 2$;
13) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ y = x^3 + 3x,\ g: \mathbf{R} \to \mathbf{C},\ y = \sqrt{x} + 3$;
14) $f: N \to \mathbf{R},\ y = x^2 + \sqrt[3]{x+2},\ g: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ y = e^x$;
15) $f: \mathbf{C} \to \mathbf{R}^+,\ y = |x|^2,\ g: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ y = \log_2(x^2 + 3)$.

У функціональному відношенні f перша координата a впорядкованої пари $(a,b) \in f$ є **прообразом** (аргументом, змінною), а друга b – **образом** (значенням).

Якщо відображення $f{:}A \to B$, $g{:}B \to C$, то їх **композиція** $(g \circ f){:}A \to C$, причому $(g \circ f)(a) = g(f(a))$. Іншими словами, якщо існує множина пар $(a,b) \in f$ та $(b,c) \in g$, то множина пар $(a,c) \in f \circ g$ утворює композицію $(g \circ f)$. Запис $(g \circ f)$ проводиться в порядку, який є зворотнім до того, в якому виконується операції $f{:}A \to B$, $g{:}B \to C$. Таким чином, в математиці прийнято правило, згідно з яким композицію відображень $(g \circ f)$ треба починати з виконання операції f, яка розташована справа.

Наприклад, якщо $f = \sin$, $g = \ln$, то $(g \circ f)(a) = (\ln \circ \sin)(a) = \ln(\sin(a))$.

Якщо для відображення $f{:}A \to B$ будь-який елемент b з B є образом принаймні одного елементу a з A, тобто:

$$\forall b \in B\ \exists a \in A : b = f(a),$$

то кажуть, що множина A накриває множину B, а відображення буде мати назву **сюр'єкції**.

Якщо для відображення $f{:}A \to B$ для будь-яких двох різних елементів a_1 та a_2 з A їх образи b_1 та b_2 також різні, то відображення f називається **ін'єкцією**. Іншим чином це можна записати як:

$$b = f(a_1) \text{ та } b = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Відображення, яке одночасно є сюр'єктивним та ін'єктивним називається **бієкцією**

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Побудувати композицію відображень $(g \circ f)$, перевірити чи є $(g \circ f){:}R \to R$ сюр'єктивною, ін'єктивною, бієктивною.

$f{:}R \to R \Leftrightarrow y=x-1;\ g{:}R \to R \Leftrightarrow y= e^x$

Композиція $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{2(x-1)}$ не є сюр'єкцією, бо немає жодного $x \in R$, для якого $y=0$ є образ. Композиція функцій є ін'єкцією, бо кожному $x \in R$ відповідає тільки один елемент $y \in R$. Отже композиція не буде бієкцією.

8. БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ

ЗАВДАННЯ 8.1

Задана формула *f(x,y,z)* булевої алгебри (табл. 8.1).

- Спростити формулу *f(x,y,z)*.
- Побудувати таблицю істинності до заданої формули.
- Вказати, які змінні є фіктивними, а які істотними.
- Записати ДДНФ та ДКНФ для заданої формули.
- Записати диз'юнктивне розкладання функції за змінними *x,z*.
- Записати кон'юнктивне розкладання функції за змінними *y,z*.
- Представити функцію у вигляді полінома Жегалкіна.

Таблиця 8.1 – Формули *f(x,y,z)* булевої алгебри

№	Формула	№	Формула
1.	$x\cdot(\overline{y\cdot z\cdot x}\to\overline{y\cdot z})\cdot y\cdot x$	2.	$y\cdot\overline{y\cdot x\cdot z\to(\bar z\cdot x)}\vee y\cdot x$
3.	$x\cdot y\cdot\overline{z\to z\cdot x}\to(z\cdot x\cdot y)$	4.	$\overline{y\cdot\overline{x\cdot z}\vee y\cdot x\to x\cdot\bar y}$
5.	$x\cdot\overline{\bar y\cdot z}\vee(z\cdot\overline{y\to x\cdot z})$	6.	$\overline{y\cdot z}\cdot x\vee\overline{\overline{x\to y\cdot z}\to z\cdot y}$
7.	$x\cdot\overline{y\cdot z\cdot x}\to x\cdot\bar y\vee y\cdot z$	8.	$\overline{z\cdot x\to z\cdot x}\to\overline{z\cdot x\cdot y}$
9.	$\overline{x\cdot\bar z\cdot y}\to y\cdot x\cdot\overline{x\cdot z}$	10.	$(y\cdot(x\cdot\overline{z\cdot x}\to\overline{x\cdot z\cdot y}))\cdot y$
11.	$\overline{y\to z\cdot x}\to x\cdot\bar z\vee y\cdot\overline{z\cdot x}$	12.	$(\overline{x\cdot z\cdot y}\to\bar y\cdot x)\cdot\overline{x\cdot z\cdot\bar y}$
13.	$\bar z\cdot x\cdot(\bar y\cdot\overline{z\to y})\to z\cdot y$	14.	$(\overline{x\cdot y\cdot z}\to\overline{x\cdot y})\vee y\cdot z$
15.	$\overline{x\cdot y}\to(y\cdot z\cdot\overline{x\cdot y\to z}\vee x)$	16.	$\overline{z\cdot y\cdot x\to z}\to y\cdot\overline{z\cdot x}$
17.	$\overline{x\cdot y\to x}\to(\overline{\overline{x\cdot y}\cdot z}\vee x)$	18.	$(z\cdot y\to\overline{z\cdot\bar y\vee\overline{z\cdot y}})\cdot\bar x$
19.	$x\cdot\overline{y\cdot z}\to\overline{x\cdot z}\to x\cdot z$	20.	$(x\cdot\bar z\cdot y\to\overline{z\cdot x\to x})\cdot z$
21.	$\bar x\cdot y\to(\bar z\cdot\overline{x\to z})\to x\cdot z\vee y$	22.	$(\overline{x\cdot y\to z}\cdot z)\cdot y\cdot x\to z$
23.	$(x\cdot\overline{y\cdot z}\vee x\cdot\overline{y\to z})\vee y\cdot z$	24.	$x\cdot(y\cdot\overline{x\cdot z}\to\overline{x\cdot y})\to y\cdot x$
25.	$(x\cdot\bar y\cdot z\to\overline{y\cdot z})\to\overline{x\cdot y\cdot z}$	26.	$z\cdot x\cdot(\overline{y\to y\cdot z})\to(y\cdot z\cdot x)$
27.	$\overline{x\cdot z\to y}\cdot(x\cdot y)\to\overline{x\cdot y}\cdot z$	28.	$\overline{x\cdot y}\cdot z\to y\cdot z\cdot\overline{(x\cdot y)\cdot z}$
29.	$\overline{x\cdot y\to x}\to\overline{x\cdot z}\cdot(x\to\overline{x\cdot z})$	30.	$x\cdot(y\to x\cdot y)\vee\overline{z\cdot x\to x}\cdot z$

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Задана формула $f(x,y,z)=\overline{z\sim y}\vee\overline{\bar x\vee\overline{xy\to\bar z}\vee x\bar y\bar z}$ булевої алгебри.

1. Спростити формулу *f(x,y,z)*.

2. Побудувати таблицю істинності до заданої формули.
3. Вказати, які змінні є фіктивними, а які істотними.
4. Записати ДДНФ та ДКНФ для заданої формули.
5. Записати диз’юнктивне розкладання функції за змінними *x,z*.
6. Записати кон’юнктивне розкладання функції за змінними *y,z*.
7. Представити функцію у вигляді полінома Жегалкіна.

Розв’язання

1. Спростимо формулу *f(x,y,z)*.

$$f(x,y,z)=\overline{z\sim y}\vee\overline{\bar{x}\vee\overline{xy\to\bar{z}}\vee x\bar{y}\bar{z}}=$$

$$\overline{(yz\vee\bar{y}\bar{z})}\vee\overline{\bar{x}\vee\overline{\overline{xy}\vee\bar{z}}\vee x\bar{y}\bar{z}}=$$

$$=((\bar{y}\vee\bar{z})\wedge(y\vee z))\vee(\bar{\bar{x}}\wedge\overline{\overline{\overline{xy}\vee\bar{z}}}\wedge\overline{x\bar{y}\bar{z}})=$$

$$=((\bar{y}\vee\bar{z})\wedge(y\vee z))\vee(x\wedge(\overline{xy}\vee\bar{z})\wedge(\bar{x}\vee\bar{\bar{y}}\vee\bar{\bar{z}}))=$$

$$=((\bar{y}\vee\bar{z})\wedge(y\vee z))\vee(x\wedge(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z})\wedge(\bar{x}\vee y\vee z))=$$

$$=((\bar{y}\vee\bar{z})\wedge(y\vee z))\vee(x\wedge(\bar{y}\vee\bar{z})\wedge(\bar{x}\vee y\vee z))=$$

$$=((\bar{y}\vee\bar{z})\wedge(y\vee z))\vee(x\wedge(\bar{y}\vee\bar{z})\wedge(y\vee z))=$$

$$=((\bar{y}\vee\bar{z})\wedge(y\vee z))\wedge(1\vee x)=$$

$$=((\bar{y}\vee\bar{z})\wedge(y\vee z))\wedge 1=(\bar{y}\vee\bar{z})\wedge(y\vee z)$$

Оскільки у спрощеному вигляді функція не має змінної x, то це означає, що дана змінна є **фіктивною**, а змінні y, z є **істотними**.

2. Побудуємо таблицю істинності для заданої функції (табл.8.2). Для цього виконаємо усі операції окремо:

1. $\bar{y}$,
2. $\bar{z}$,
3. $\bar{y}\vee\bar{z}$,
4. $y\vee z$,
5. $(\bar{y}\vee\bar{z})\wedge(y\vee z)$=*f(x,y,z)*

Таблиця 8.2 – Таблиця істинності булевої функції

	x	y	z	1	2	3	4	5
0	0	0	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1	1
2	0	1	0	0	1	1	1	1
3	0	1	1	0	0	0	1	0
4	1	0	0	1	1	1	0	0
5	1	0	1	1	0	1	1	1
6	1	1	0	0	1	1	1	1
7	1	1	1	0	0	0	1	0

Фіктивність змінної *x* можна перевірити наступним чином: перебираємо всі протилежні кортежі для цієї змінної і дивимося, які значення приймає функція на цих кортежах. Бачимо, що *f(0,0,0)=f(1,0,0)=0; f(0,0,1)=f(1,0,1)=1; f(0,1,0)=f(1,1,0)=1; f(0,1,1)=f(1,1,1)=1*.

3. Оскільки на всіх протилежних кортежах значення функцій співпадають, то змінна *x* є **фіктивною**, як і було показано вище. В противному разі змінна **є істотною**.

4. Запишемо ДДНФ та ДКНФ для заданої функції.

Досконалою диз'юнкти́вною нормальною формою (ДДНФ) булевої функції називається диз'юнкція тих конституент одиниці (мінтермів), які перетворюються в одиницю на тих самих наборах змінних, що й задана функція.

З табл. 8.2 випишемо кортежі, на яких функція набуває значення один: це кортежі під номерами 1, 2, 5, 6. Складаємо мінтерми за наступним принципом: якщо значення змінної дорівнює 0, то вона записується з інверсією, якщо значення змінної дорівнює 1, то вона записується без інверсії.

Таким чином отримаємо ДДНФ:

$$f(x, y, z) = \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}.$$

Досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ) булевої функції називається кон'юнкція тих конституент нуля (макстермами), які перетворюються в нуль на тих самих наборах змінних, що й задана функція.

З табл. 8.2 випишемо кортежі, на яких функція набуває значення нуль: це кортежі під номерами 0, 3, 4, 7. Складаємо макстерми за наступним принципом: якщо значення змінної дорівнює 0, то вона записується без інверсії, якщо значення змінної дорівнює 1, то вона записується з інверсією.

Таким чином отримаємо ДКНФ:

$$f(x, y, z) = (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

5. Запишемо диз'юнктивне розкладання функції *f(x,y,z)* за змінними x, y.

Представимо її у вигляді:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (\bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (y \vee z) \\ &= (f(0,0,z) \wedge \bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (f(0,1,z) \wedge \bar{x} \wedge y) \vee (f(1,0,z) \wedge x \wedge \bar{y}) \\ &\vee (f(1,1,z) \wedge x \wedge y). \end{aligned}$$

Визначимо значення функції на кожній з інтерпретацій:

$$\begin{aligned} f(0,0,z) &= (\bar{0} \vee \bar{z}) \wedge (0 \vee z) = z \\ f(0,1,z) &= (\bar{1} \vee \bar{z}) \wedge (1 \vee z) = \bar{z} \\ f(1,0,z) &= (\bar{0} \vee \bar{z}) \wedge (0 \vee z) = z \\ f(1,1,z) &= (\bar{1} \vee \bar{z}) \wedge (1 \vee z) = \bar{z} \end{aligned}.$$

Підставимо значення функції на кожній з інтерпретацій.

$$f(x,y,z) = \bar{x}\;\bar{y}\;z \vee \bar{x}\;y\bar{z} \vee x\bar{y}\;z \vee xy\bar{z}.$$

6. Запишемо кон'юнктивне розкладання функції за змінними *x, z*.

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (\bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (y \vee z) \\ &= (f(0,y,0) \vee x \vee z) \wedge (f(0,y,1) \vee x \vee \bar{z}) \wedge (f(1,y,0) \vee \bar{x} \vee z) \\ &\wedge (f(1,y,1) \vee \bar{x} \vee \bar{z}). \end{aligned}$$

Визначимо значення функції на кожній з інтерпретацій:

$$f(0,y,0)=(\overline{y}\vee\overline{0})\wedge(y\vee 0)=y$$
$$f(0,y,1)=(\overline{y}\vee\overline{1})\wedge(y\vee 1)=\overline{y}$$
$$f(1,y,0)=(\overline{y}\vee\overline{0})\wedge(y\vee 0)=y$$
$$f(1,y,1)=(\overline{y}\vee\overline{1})\wedge(y\vee 1)=\overline{y}\ .$$

Підставимо значення функції на кожній з інтерпретацій.

$$f(x,y,z)=(y\vee x\vee z)\wedge(\overline{y}\vee x\vee\overline{z})\wedge(y\vee\overline{x}\vee z)\wedge(\overline{y}\vee\overline{x}\vee\overline{z})\ .$$

7. Представимо функцію у вигляді поліному Жегалкіна.

За **методом трикутника**:

- Будується повна таблиця істинності, в якій рядки йдуть в порядку зростання двійкових кодів від 000 ... 00 до 111 ... 11.
- Будується допоміжна трикутна таблиця, в якій перший стовпець збігається зі стовпцем значень функції в таблиці істинності.
- Комірка в кожному наступному стовпці виходить шляхом сумування за модулем два двох комірок попереднього стовпчика, що стоять в тому ж рядку і рядком нижче.
- Стовпці допоміжної таблиці нумеруються двійковими кодами в тому ж порядку, що і рядки таблиці істинності.
- Кожному двійкового коду ставиться у відповідність один з членів полінома Жегалкіна в залежності від позицій коду, в яких стоять одиниці.
- Якщо у верхньому рядку будь-якого стовпчика стоїть одиниця, то відповідний член присутній в поліномі Жегалкіна

	x	y	z	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	
2	0	1	0	1	1	1	0	0	0		
3	0	1	1	0	0	1	0	0			
4	1	0	0	0	1	1	0				
5	1	0	1	1	0	1					
6	1	1	0	1	1						
7	1	1	1	0							

Таким чином, $f(x, y, z) = y \oplus z$.

Аналогічний результат ми отримаємо методом швидкісного **перетворення Фур'є**.

Будуємо таблицю, що складається з $2N$ стовпців і $N+1$ рядків, де N - кількість змінних у функції. У верхньому рядку таблиці розміщуємо вектор значень функції, тобто останній рядок таблиці істинності.

Кожен рядок отриманої таблиці розбиваємо на блоки. У першому рядку блок займає одну клітку, у другому рядку - дві, в третій - чотири, в четвертій - вісім і т. д. Кожному блоку в деякій рядку, який ми будемо називати «нижній блок», завжди відповідає рівно два блоки в попередній рядку. Будемо називати їх «лівий верхній блок» і «правий верхній блок».

Побудова починається з другого рядка. Вміст лівих верхніх блоків без зміни переноситься до відповідних клітини нижнього блоку). Потім над правим верхнім і лівим верхнім блоками проводиться операція «додавання по модулю два», і отриманий результат переноситься до відповідних клітини правій частині нижнього блоку. Ця операція проводиться з усіма рядками зверху вниз і з усіма блоками в кожному рядку. Після закінчення побудови в нижньому рядку виявляється рядок чисел, які є коефіцієнтами полінома Жегалкіна, записаними в тій же послідовності, що і в методі трикутника.

0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	0	0
000	001	010	011	100	101	110	111

$f(x, y, z) = y \oplus z.$

9. МІНІМІЗАЦІЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

ЗАВДАННЯ 9.1

Функція $f(x, y, z, w)$ задана за допомогою конституент одиниці, що закодовані десятковими еквівалентами (табл. 9.1). Знайти мінімальні ДНФ та КНФ за допомогою діаграм Карно-Вейча.

Таблиця 9.1. Конституенти одиниці, відповідні до булевих функцій

№	Конституенти одиниці	№	Конституенти одиниці
1.	*0,2,6,7,8,9,13,15*	2.	*0,2,3,4,6,7,9,13,14,15*
3.	*0,2,3,5, 7,8,10,13*	4.	*0,2,3,4,7,8,9,11,12,15*
5.	*0,4,5,7,12,14,15*	6.	*0,2,3,4,5,8,9,14,15*
7.	*0,2,3,4,6,8,9,12,13*	8.	*0,2,3,4,5,13,14,15*
9.	*0,2,3,4,8,9,12,15*	10.	*0,2,3,4,5,7,9,13,14,15*
11.	*0,2,7,8,9,12,13,15*	12.	*0,2,3,4,5,7,14,15*
13.	*0,2,3,4,6,7,8,13,14*	14.	*0,2,3,4,5,7,8,11,12*
15.	*0,2,3,4,6,10,11,15*	16.	*0,2,3,4,5,7,8,10,15*
17.	*0,2,3,6,7,8,9,10,15*	18.	*0,2,3,4,5,7,8,10,11*
19.	*0,2,3,4,5,7,8,9,14*	20.	*0,2,3,4,7,8,9,10,15*
21.	*0,1,2,3,5,6,11,12,15*	22.	*0,2,3,4,7,8,9,10,11*
23.	*0,1,3,4,6,7,12,15*	24.	*0,2,3,4,7,8,9,10,11*
25.	*0,1,3,4,6,7,11,13,15*	26.	*0,2,3,4,6,8,9,13,15*
27.	*1,2,3,8,10,14,15*	28.	*0,2,3,4,5,8,10,11,15*
29.	*0,2,7,9,10,13,14*	30.	*0,2,3,4,7,9,10,11,12*

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Функція $f(x, y, z, w)$ задана за допомогою конституент одиниці, що закодовані десятковими еквівалентами $0,1,2,3,4,5,7,8,10$. Знайти мінімальні ДНФ та КНФ за допомогою діаграм Карно-Вейча.

<u>Розв'язання.</u> Таблиця істинності даної функції має вигляд

	x	y	z	w	$f\left(x, y, z, w\right)$
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

Побудуємо діаграму Карно-Вейча для функції $f\left(x, y, z, w\right)$.

Діаграма Карно-Вейча є аналогом таблиці істинності, зображеній у спеціальній формі. Значення змінних розташовані у заголовках рядків і стовпців карти. Кожній конституенті одиниці функції відповідає одна клітка комірка таблиці. Нуль або одиниця в клітці визначає значення функції на даній інтерпретації. Значення змінних розташовані так, щоб сусідні рядки і стовпці таблиці відрізнялись значенням тільки однієї змінної: (0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0). У цій послідовності перша та остання інтерпретації також відрізняються значенням тільки однієї змінної, тому перший і останній рядки (стовпці) таблиці вважаються сусідніми (протилежні границі таблиці вважаються співпадаючими). При такому розташуванні конституенти одиниці, до яких застосовна операція склеювання, розташовуються у сусідніх клітках карти, і склеювання проводиться графічно за допомогою об'єднання кліток у групи.

При знаходженні мінімальної ДНФ на діаграмі Карно-Вейча клітки об'єднуються у групи, що позначають операції склеювання. В об'єднанні беруть участь тільки сусідні клітки, в яких знаходяться одиниці. Одиниці, що розміщені в сусідніх клітках, відрізняються значенням лише однієї змінної, отже вони склеюються за цією змінною і утворюють імпліканту. В групу можна об'єднати тільки кількість кліток, що дорівнює 2^n, $n=1, 2, 3, \dots$ (при цьому група може мати тільки прямокутну або квадратну форму). Спочатку знаходять покриття, які містять максимальну кількість одиниць, а потім покриття, що включають одиниці, що залишились, таким чином, щоб вони також були максимальні за величиною та при видаленні цього покриття хоча б одна одиниця функції залишилась непокритою. При цьому деякі одиниці можуть бути покриті неодноразово. Диз'юнкція всіх одержаних простих імплікант зображує результат мінімізації формули і є мінімальною ДНФ.

При знаходженні мінімальної ДНФ функції $f(x, y, z, w)$заповнюємо діаграму Карно-Вейча і покриваємо одиниці як зображено на рис. 10.1).

xy \ zw	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

Рис. 10.1

Отримаємо мінімальну ДНФ: $f(x, y, z, w) = \bar{x}\,\bar{z} \vee \bar{x}w \vee \bar{y}\,\bar{w}$.

Мінімальна КНФ будується аналогічно побудові мінімальної ДНФ за діаграмою Карно-Вейча, що заповнена конституентами нуля у відповідних клітках. Після цього проводиться склеювання кліток, що містять нулі і формування мінімальної КНФ (рис. 10.2)). Склеювання кліток здійснюється за тими ж правилами, що й при диз'юнктивній мінімізації. Кожна група кліток, що одержана в результаті склеювання, відповідає диз'юнкції тільки тих змінних, які мають однакове значення для всіх кліток групи. Змінні беруться без заперечення, якщо їм відповідає нульове значення, і із запереченням — в іншому випадку. Кон'юнкція одержаних елементарних диз'юнкцій є результатом мінімізації формули.

$xy \backslash zw$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	1	1	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

Рис. 10.2

Мінімальна КНФ буде мати наступний вигляд:

$$f\left(x, y, z, w\right)=\left(\bar{x} \vee \bar{y}\right) \wedge \left(\bar{x} \vee \bar{w}\right) \vee \left(\bar{y} \vee \bar{z} \vee w\right).$$

10. ФУНКЦІОНАЛЬНА ПОВНОТА СИСТЕМИ ФУНКЦІЙ

ЗАВДАННЯ 10

Перевірити, чи функції $f(x, y, z)$ та $g(x, y, z)$ є лінійними, монотонними, самодвоїстими, чи зберігають 0 та/або 1. Зробити висновок щодо функціональної повноти набору функцій $f(x, y, z)$ та $g(x, y, z)$.

№	f	g	№	f	g
1	1100 0111	1101 1000	16	0010 0100	1000 1110
2	1110 1010	00110101	17	1101 1110	1011 0011
3	0100 1101	1100 1110	18	1101 0000	1101 0100
4	1111 0100	1001 0110	19	1100 0001	1101 1110
5	0110 1001	1101 0100	20	1001 1000	1110 1000
6	1000 0010	0000 1101	21	1011 0011	1100 0110
7	1011 1101	1100 0100	22	1000 1100	0011 1010
8	1111 1010	0101 1111	23	0001 0110	1111 0010
9	1000 0001	1110 1010	24	1100 1110	1000 0001
10	1101 1100	0001 1010	25	1100 0011	1101 1100
11	0010 0000	1100 1000	26	1001 1110	0101 0100
12	1001 0000	1000 0011	27	0111 1010	1011 1010
13	0111 1110	1101 0000	28	1101 0000	1110 1001
14	1110 0000	1011 0011	29	1111 0111	1011 1100
15	1110 1111	1100 0010	30	1000 1100	1001 0111

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Перевірити, чи є задані функції лінійними, монотонними, самодвоїстими, чи зберігають 0 та/або 1. Зробити висновок щодо функціональної повноти заданого набору функцій

$$xy \vee xz \vee yz,\ \ x \oplus y \oplus z,\ 1.$$

Розв’язання. Для перевірки повноти системи функцій застосовують теорему Поста.

Теорема Поста. Для того, щоб система булевих функцій була повною, необхідно і достатньо, щоб вона містила:

1) хоча б одну функцію, що не зберігає нуль;
2) хоча б одну функцію, що не зберігає одиницю;
3) хоча б одну несамодвоїсту функцію;
4) хоча б одну немонотонну функцію;
5) хоча б одну нелінійну функцію.

Інакше кажучи, для повноти системи функцій необхідно і достатньо, щоб для кожного з п’яти замкнених класів T_0, T_1, S, M, L вона містила функцію, яка цьому класу не належить.

Класи функцій. Існують п’ять класів булевих функцій: T_0, T_1, S, M, L, які називають класами Поста.

T_0 — клас функцій, що зберігають нуль;

T_1 — клас функцій, що зберігають одиницю;

S — клас самодвоїстих функцій;

M — клас монотонних функцій;

L — клас лінійних функцій.

Для перевірки повноти даної системи функцій складемо таблицю Поста. Для цього необхідно з’ясувати, чи належать функції $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ до кожного з класів Поста.

1. Складемо таблицю істинності функції $\varphi_1(x, y, z) = xy \vee xz \vee yz$.

x	y	z	xy	xz	yz	φ_1
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

Булеву функцію $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають ***функцією, що зберігає 0***, якщо на нульовому наборі вона дорівнює 0: $f(0, 0, ..., 0) = 0$.

Булеву функцію $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають ***функцією, що зберігає 1***, якщо на нульовому наборі вона дорівнює 1: $f(1, 1, ..., 1) = 1$.

1.1. Функція зберігає нуль, оскільки $\varphi_1(0, 0, 0) = 0$.

1.2. Функція зберігає одиницю, оскільки $\varphi_1(1, 1, 1) = 1$.

1.3. ***Самодвоїстість***. Функцію $f^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають **двоїстою** до функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, якщо $f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_n})}$.

Функцію, що двоїста сама собі, тобто $f = f^*$, називають **самодвоїстою**.

Щоб побудувати таблицю істинності функції, що двоїста даній, необхідно побудувати таблицю істинності заданої функції, кожне значення булевої функції замінити на протилежне і записати одержаний стовпчик у зворотній послідовності.

Для стовпця значень функції $\varphi_1 = (00010111)$ генеруємо набір протилежних (інверсійних) значень (11101000). Записавши його у зворотній послідовності, одержимо стовпчик значень двоїстої функції

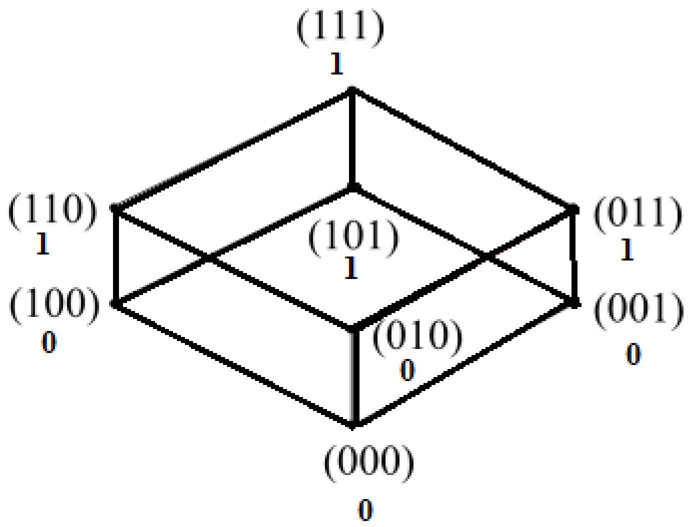
x	y	z	φ_1	φ_1^*
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

$\varphi_1 = \varphi_1^*$, отже, φ_1 є самодвоїстою функцією.

1.4. **Монотонність**. Нехай $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ та $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ – будь-які набори. Для двох наборів $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ та $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ виконується ***відношення передування***, якщо $\alpha_1 \le \beta_1, \alpha_2 \le \beta_2, ..., \alpha_n \le \beta_n$. Наприклад, набори $\alpha = (0, 1, 0, 1)$ й $\beta = (1, 1, 0, 1)$ знаходяться у відношенні передування, тобто значення набору не зменшується. Набори $(0, 1)$ та $(1, 0)$ не знаходяться у відношенні передування.

Функцію $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ називають ***монотонною***, якщо для будь-яких двох наборів α і β, що знаходяться у відношенні передування (тобто значення набору не зменшується), справджується нерівність $f(\alpha) \le f(\beta)$.

Для перевірки монотонності функції φ_1 побудуємо діаграму Хассе (гіперкуб):



Таким чином, функція є монотонною, оскільки для всіх порівнюваних наборів $(a_1, a_2, a_3) \le (b_1, b_2, b_3)$ виконується нерівність $f(a_1, a_2, a_3) \le f(b_1, b_2, b_3)$ (інакше кажучи, на всіх зростаючих наборах функція не є спадаючою).

1.5. **Лінійність**. Булеву функцію називають ***лінійною***, якщо її поліном Жегалкіна не містить кон'юнкцій змінних.

Побудову поліному Жегалкіна детально розглянуто у попередньому розділі.

Щоб перевірити, чи є функція φ_1 лінійною, побудуємо поліном Жегалкіна методом трикутника.

x	y	z	000	001	010	011	100	101	110	111
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	
0	1	0	0	1	0	0	1	1		
0	1	1	1	1	0	1	0			
1	0	0	0	1	1	1				
1	0	1	1	0	0					
1	1	0	1	0						
1	1	1	1							

Таким чином, $\varphi_1(x, y, z) = yz \oplus xz \oplus xy$. Оскільки поліном Жегалкіна містить кон'юнкції змінних, то функція не є лінійною.

2. Складемо таблицю істинності функції $\varphi_2(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$

x	y	z	$x \oplus y$	φ_2	φ_2^*
0	0	0	0	**0**	0
0	0	1	0	**1**	1
0	1	0	1	**1**	1
0	1	1	1	**0**	0
1	0	0	1	**1**	1
1	0	1	1	**0**	0
1	1	0	0	**0**	0
1	1	1	0	**1**	1

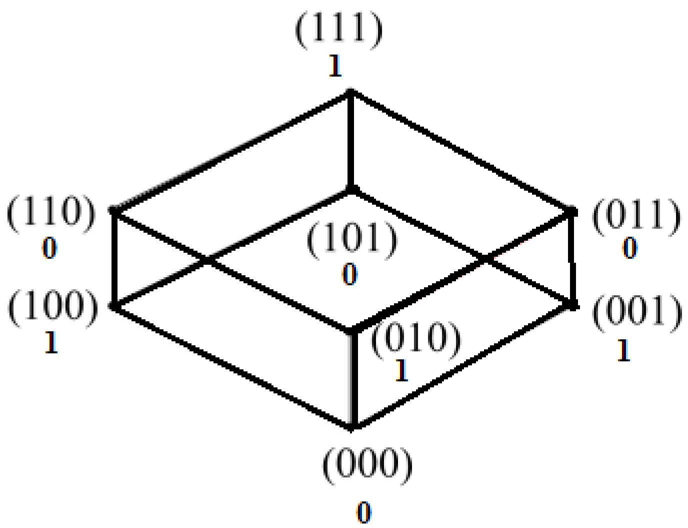
2.1. Функція зберігає нуль, оскільки $\varphi_2(0,0,0) = 0$.

2.2. Функція зберігає одиницю, оскільки $\varphi_2(1,1,1) = 1$.

2.3. Самодвоїстість. $\varphi_2 = \varphi_2^*$, отже, φ_2 є самодвоїстою функцією.

2.4. Монотонність.

Побудуємо діаграму Хассе (гіперкуб):



Таким чином, наприклад $(0,0,1) \le (0,1,1)$, а $g_2(0,0,1) \ge g_2(0,1,1)$, тобто функція g_2 не є монотонною.

2.5. Функція $\varphi_2(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$ є лінійною, оскільки задається поліномом Жегалкіна, що не містить кон'юнкцій змінних.

3. Функція $\varphi_3 = 1$ не зберігає константу 0, є несамодвоїстою, монотонною й лінійною.

Щоб перевірити, чи виконуються для скінченної системи функцій $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ умови теореми Поста, складають ***таблицю Поста***. Її рядки позначають функціями системи, а стовпці – назвами п'яти основних замкнених класів. У клітках таблиці Поста ставлять знак "+" або "–" залежно від того, чи належить функція відповідному замкненому класу. Для повноти системи функцій необхідно і достатньо, щоб у кожному стовпці таблиці Поста стояв хоча б один знак "–".

За результатами досліджень складемо таблицю Поста:

	T_0	T_1	S	M	L
$\varphi_1 = xy \vee xz \vee yz$	+	+	+	+	–
$\varphi_2 = x \oplus y \oplus z$	+	+	+	–	+
$\varphi_3 = 1$	–	+	–	+	+

За теоремою Поста для повноти системи функцій необхідно і достатньо, щоб у кожному стовпці таблиці Поста стояв хоча б один знак "–".

Таким чином, заданий набір функцій не є функціонально повним, оскільки не містить хоча б одну функцію, що не зберігає одиницю.

11. ЛОГІКА ВИСЛОВЛЮВАНЬ

ЗАВДАННЯ 11.1

Записати формулу, яка відповідає висловлюванням:

1) Я піду додому або залишуся тут і вип'ю чашку чаю, я не піду додому, отже, я залишуся і вип'ю чашку чаю.

2) Якщо Олег ляже сьогодні пізно, він буде вранці в отупінні, якщо він ляже не пізно, то йому здаватиметься, що не варто жити, отже, або Олег буде завтра в отупінні, або йому здаватиметься, що не варто жити.

3) Заперечення диз’юнкції двох висловлювань еквівалентно кон’юнкції заперечень кожного з цих висловлювань.

4) Якщо 2 – просте число, то це найменше просте число, якщо 2 – найменше просте число, то 1 не є прости числом; число 1 не є простим числом, отже, 2 – просте число.

5) Ігор або втомився, або хворий, якщо він втомився, то він злий; він не злий, отже, він хворий.

6) Якщо завтра буде холодно, я одягну тепле пальто, якщо рукав буде полагоджений; завтра буде холодно, а рукав не буде полагоджений, отже, я не одягну тепле пальто.

7) Ні Північ, ні Південь не перемогли в громадянській війні.

8) Людину не підкупують лестощі, якщо розум у людини є.

9) Іван прийде на іспит і він або Сергій отримає п’ятірку.

10) Якщо не можеш визнати похвали заслуженими, то вважай їх лестощами.

11) Якщо буде гарна погода, то я подзвоню друзям, і ми поїдемо до моря.

12) Якщо я втомився або голодний, я не можу займатися.

13) Натуральне число n ділиться на 3 тоді і лише тоді, коли сума цифр числа n ділиться на 3.

14) Якщо вранці буде злива, то я або залишуся вдома, або вимушений буду взяти таксі.

15) Сьогодні наша команда не виграла і, отже, не вийшла у фінал.

16) Якщо я сьогодні встану і піду на заняття, моя мама буде задоволена, а якщо я не встану, то мама не буде задоволена.

17) Якщо він хоче досягти мети, він повинен багато знати і бути удачливим.

18) Сьогодні ясно, отже сьогодні не йде ні дощ, ні сніг.

19) Вчора було похмуро, а сьогодні тепло і ясно.

20) Якщо сьогодні хмарно, то це означає, що завтра буде дощ, або вітер розганятиме хмари.

21) Ти успішно складеш іспит тоді і лише тоді, коли добре підготуєшся;

22) якщо ти не складеш іспит успішно, то позбудешся стипендії.

23) Математичні відомості можуть застосовуватися вміло і бути корисними лише в тому випадку, якщо вони засвоєні творчо.

24) Якщо у розпалі пристрасті розум сумнівається, то коли пристрасть остигне, він засудить твій вчинок.

25) Якщо головний визначник системи лінійних рівнянь не дорівнює нулю, то система рівнянь визначена, тобто має єдине вирішення.

26) Другом можна вважати того і лише того, хто щасливий, якщо щасливий його друг, і зажурений, якщо той зажурений.

27) Якщо я успішно закінчу школу і вступлю до інституту, то я зможу скласти іспит по математиці тоді і лише тоді, коли я багато займатимуся або викладач буде поблажливий.

28) Ти зрозумієш цю тему, якщо прийдеш сьогодні на заняття або прочитаєш підручник, інакше тобі зможе допомогти друг тоді і лише тоді, коли зрозуміє цю тему сам.

29) Якщо "Пірати" або "Цуценята" програють і "Велетні" виграють, то "Увертиши" втратять перше місце і, крім того, я програю парі.

30) Якщо робітники або адміністрація упираються, то страйк буде врегульований тоді і лише тоді, коли уряд доб’ється судової заборони, але війська не будуть послані на завод.

31) Хліби уціліють тоді і лише тоді, коли будуть вириті іригаційні канави; якщо хліби не уціліють, то фермери збанкрутують і залишать ферми.

ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ

Записати формулу, яка відповідає висловлюванням:

1) "Якщо Іван пропустить лекцію з дискретної математики або не повторить матеріал самостійно, то він погано напише модуль".

2) "Оскільки Петро пізно ліг спати, то він проспав і через це не встиг на автобус та спізнився на пару"

<u>Розв’язання</u>.

1) Виділимо елементарні висловлювання, які входять до складу нашого першого складного висловлювання:

A — "Іван пропустить лекцію з дискретної математики",

B — "Іван повторить матеріал самостійно",

C — "Іван напише модуль погано".

Тоді структуру складного висловлювання описує формула

$$A \vee \overline{B} \Rightarrow C.$$

2) Елементарні висловлювання:

A — "Петро пізно ліг спати";

B — "Петро проспав";

C — "Петро встиг на автобус";

D — "Петро _спізнився на пару".

Тоді структуру другого складного висловлювання описує формула

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow \overline{C} \wedge D.$$

ЗАВДАННЯ 11.2

Побудувати таблицю істинності формули (табл. 11.1):

Таблиця 11.1 Формули

№	Формула	№	Формула
1.	$(p \sim q) \to \overline{p}$	2.	$\overline{\overline{\overline{p} \to p} \to p}$
3.	$(p \to \overline{q}) \to (q \to \overline{p})$	4.	$\overline{p \leftrightarrow \overline{p \to p}}$
5.	$(p \vee q) \sim pq$	6.	$\overline{\overline{p \leftrightarrow p} \to p}$
7.	$(((p \to q) \to p) \to p)$	8.	$\overline{p \to q} \leftrightarrow q$
9.	$\overline{p \vee q} \sim \overline{p} \vee \overline{q}$	10.	$\overline{p \leftrightarrow q} \to p$
11.	$(p \sim p) \vee (q \sim q)$	12.	$p \to \overline{p \leftrightarrow q}$
13.	$p \sim \overline{q} \vee p$	14.	$p \vee q \wedge (p \to q)$
15.	$(p \to \overline{q}) \leftrightarrow (q \to \overline{p})$	16.	$\overline{p \vee q} \leftrightarrow q$
17.	$p \leftrightarrow \overline{p}$	18.	$p \vee q \leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$
19.	$(((p \to q) \to pq) \to p)$	20.	$pq \sim \overline{p}\,\overline{q}$
21.	$p \leftrightarrow q \leftrightarrow p \leftrightarrow q$	22.	$pq \to \overline{p}\,\overline{q}$
23.	$(pq \to p) \to q$	24.	$(p \leftrightarrow q) \vee (p \to q)$
25.	$(\overline{p}q \to p) \leftrightarrow q$	26.	$(p \to q) \vee (q \to p)$
27.	$(p \leftrightarrow q) \vee (\overline{p} \leftrightarrow \overline{q})$	28.	$\overline{(p \to \overline{q}) \vee q}$
29.	$q \to \overline{p \to \overline{\overline{p \leftrightarrow q}}}$	30.	$\overline{\overline{(q \to p)}} \vee \overline{\overline{(p \leftrightarrow q)}}$

ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ

Побудувати таблицю істинності формули:

$$\varphi = \overline{\overline{A} \vee B} \Rightarrow \left(C \Leftrightarrow B \wedge \overline{A}\right).$$

Розв’язання.

Поставимо у відповідність кожній підформулі формули окремий стовпчик таблиці.

A	B	C	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee B$	$\overline{\bar{A} \vee B}$	$B \wedge \bar{A}$	$C \Leftrightarrow B \wedge \bar{A}$	φ
0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0	1

ЗАВДАННЯ 11.3

Перевірити, чи є формула тавтологією:

1) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$;
2) $(A \to B) \to ((C \to B) \to (A \vee C \to B))$;
3) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;
4) $(\neg A \to \neg B) \to (A \to B)$;
5) $((A \to B) \to A) \to ((A \to B) \to B)$;
6) $(A \to C) \to (A \to B \vee C)$;
7) $(\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$;
8) $((A \to B) \to (A \to C)) \to (A \to (B \to C))$;
9) $(B \to C) \to (B \to (A \to C))$;
10) $(B \to A) \to (A \vee B \to A)$;
11) $A \,\&\, B \to (C \to B)$;
12) $(B \to A \vee C) \to ((B \to C) \to ((D \to C) \to (B \vee D \to C)))$;
13) $((B \to A) \to C) \to (A \to C)$;
14) $(A \,\&\, B) \vee (C \,\&\, D) \to (A \vee B) \,\&\, (C \vee D)$;
15) $(A \to B) \,\&\, (C \to D) \to (A \vee C \to B \vee D)$;
16) $(A \vee B \to C) \to (A \to C) \vee (B \to C)$;
17) $(A \,\&\, B \to C) \to ((A \to C) \to (B \to C))$;
18) $(A \to B) \,\&\, (C \to D) \to (A \,\&\, C \to B \,\&\, D)$;
19) $(A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$;
20) $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$;
21) $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$;
22) $A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$;
23) $\neg(A \,\&\, B) \to (A \,\&\, B \to B)$;
24) $(B \to C) \to (A \vee C \to (B \to C))$;
25) $(A \to (B \to C)) \to (A \vee B \to C)$.

26) $\vdash ((A \to B) \to A) \to ((A \to B) \to B)$;
27) $\vdash (A \to C) \to (A \to B \vee C)$;
28) $\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$;
29) $\vdash ((A \to B) \to (A \to C)) \to (A \to (B \to C))$;
30) $\vdash (B \to C) \to (B \to (A \to C))$;

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Перевірити, чи є формула $A \to \big((A \to B) \to B\big)$ тавтологією.

Розв'язання.

1 спосіб. За допомогою таблиці істинності.

A	B	$A \to B$	$(A \to B) \to B$	$A \to \big((A \to B) \to B\big)$
F	F	T	F	T
F	T	T	T	T
T	F	F	T	T
T	T	T	T	T

З таблиці бачимо, що функція скрізь набуває значення T. Тобто, вона є тавтологією.

2 спосіб. Метод редукції.

Припустимо що, $A \to \big((A \to B) \to B\big) = F$.

Це можливо тільки коли $(A \to B) \to B = F$ та $A = T$.

Тобто з першого виразу маємо, що $A \to B = T$ та $B = F$. З чого отримуємо, що $A = F$.

Раніше ми отримали, що $A = T$. Отже, ми прийшли до суперечності. Таким чином, можемо констатувати, що наше припущення було невірне, тобто формула є тавтологією.

3 спосіб. Метод Квайна.

Нехай $A = T$, тоді $T \to ((T \to B) \to B)$.

Якщо $B = T$, то $T \to ((T \to T) \to T) = T$.

Якщо $B = F$, то $T \to ((T \to F) \to F) = T$.

Нехай $A = F$, тоді $F \to ((F \to B) \to B)$.

Якщо $B = T$, то $F \to \big((F \to T) \to T\big) = T$.

Якщо $B = F$, то $F \to ((F \to F) \to F) = T$.

Таким чином, можемо констатувати, що формула є тавтологією.

ЗАВДАННЯ 11.4

Довести теорему в рамках логіки L.

1) $\vdash ((A \to B) \to A) \to ((A \to B) \to B)$;
2) $\vdash (A \to C) \to (A \to B \vee C)$;
3) $\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$;
4) $\vdash ((A \to B) \to (A \to C)) \to (A \to (B \to C))$;
5) $\vdash (B \to C) \to (B \to (A \to C))$;
6) $\vdash (B \to A) \to (A \vee B \to A)$;
7) $\vdash A \,\&\, B \to (C \to B)$;
8) $\vdash (B \to A \vee C) \to ((B \to C) \to ((D \to C) \to (B \vee D \to C)))$;
9) $\vdash ((B \to A) \to C) \to (A \to C)$;
10) $\vdash (A \to B) \,\&\, (B \to C) \to (A \to C)$;
11) $\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$;
12) $\vdash \neg A \to (B \to \neg(B \to A))$;
13) $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$;
14) $\vdash B \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$;
15) $\vdash (A \,\&\, B \to C) \to (A \to (B \to C))$;
16) $\vdash (A \to (B \to C)) \to (A \,\&\, B \to C)$;
17) $\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$;
18) $\vdash \neg(A \vee B) \to \neg A \,\&\, \neg B$;
19) $\vdash A \vee (B \vee C) \to (A \vee B) \vee C$;
20) $\vdash (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C) \to A \,\&\, (B \vee C)$;
21) $\vdash (A \to \neg B) \to ((A \to B) \to \neg A)$;
22) $\vdash (A \to B) \to ((C \to B) \to (A \vee C \to B))$;
23) $\vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$;
24) $\vdash (A \to (B \to \neg(A \to \neg B)))$;
25) $\vdash (C \to (A \to B)) \to (C \to (\neg B \to \neg A))$.
26) $\vdash ((A \to \neg B) \to A) \to ((A \to \neg B) \to \neg B)$;
27) $\vdash (A \to \neg C) \to (A \to B \vee \neg C)$;
28) $\vdash (\neg A \to \neg C) \to (C \to A)$;
29) $\vdash ((A \to B) \to (A \to \neg C)) \to (A \to (B \to \neg C))$;
30) $\vdash (B \to C) \to (B \to (\neg A \to C))$;

Для виконання цього завдання перерахуємо основні аксіоми та теореми логіки L.

1) *Алфавіт* включає пропозиційні літери: $A, B, C,\ldots$ з індексами або без; пропозиційні зв'язки: $\neg$ (заперечення) та $\rightarrow$ (імплікація); допоміжні символи: (та);
2) Визначення формули числення L:
   - Довільна пропозиційна літера є формулою.
   - Якщо A та B формули, то формулами також є $(\neg A)$ та $(A\rightarrow B)$.
   - Інших формул в численні L не існує.
3) У численні L визначена нескінченна множина аксіом, які будуються за допомогою трьох **схем аксіом**:

   A1. $A\rightarrow (B\rightarrow A)$;

   A2. $(A\rightarrow(B\rightarrow C)) \rightarrow ((A\rightarrow B) \rightarrow (A\rightarrow C))$;

   A3. $(\neg B\rightarrow\neg A) \rightarrow ((\neg B\rightarrow A) \rightarrow B)$.
4) У численні L визначено єдине правило виведення MP: $A, A\rightarrow B \vdash B$.

Інші формули замінюємо за допомогою наступних тверджень:

- $A\wedge B$ означає $\neg(A\rightarrow\neg B)$;
- $A\vee B$ означає $\neg A\rightarrow B$;
- $A\sim B$ означає $\neg((A\rightarrow B) \rightarrow \neg(B\rightarrow A))$.

Теорема $L1$. $\vdash A\rightarrow A$

Теорема $L2$. $A \vdash B\rightarrow A$

Теорема $L3$. $\vdash (\neg A\rightarrow A) \rightarrow A$

Теорема дедукції Ербрана: Нехай Г – множина формул, А і В – формули, а також $\Gamma, A \vdash B$. Тоді $\Gamma \vdash A\rightarrow B$.

Зворотня теорема дедукції: Якщо існує вивід $\Gamma\vdash A\rightarrow B$, то формула виводиться з Γ та A, тобто якщо $\Gamma\vdash A\rightarrow B$, то $\Gamma, A\vdash B$.

Наслідок 1 (правило силогізму). $A\rightarrow B, B\rightarrow C\vdash A\rightarrow C$.

Наслідок 2 (правило видалення середньої посилки). $A\rightarrow(B\rightarrow C), B \vdash A\rightarrow C$.

Теорема $L4$. $\vdash \neg\neg A\rightarrow A$

Теорема $L5$. $\vdash A\rightarrow\neg\neg A$

Теорема $L6$. $\vdash \neg A\rightarrow (A\rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A, A\vdash B$

Теорема $L7$. $\vdash (\neg A\rightarrow\neg B) \rightarrow (B\rightarrow A) \Leftrightarrow \neg A\rightarrow\neg B\vdash B\rightarrow A$

Теорема $L8$. $\vdash (B\rightarrow A) \rightarrow (\neg A\rightarrow\neg B) \Leftrightarrow B\rightarrow A\vdash \neg A\rightarrow\neg B$

Теорема $L9$. $\vdash A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg(A\rightarrow B)) \Leftrightarrow A\vdash \neg B \rightarrow \neg(A\rightarrow B)$

Теорема $L10$. $\vdash (A\rightarrow B) \rightarrow ((\neg A\rightarrow B) \rightarrow B) \Leftrightarrow A\rightarrow B, \neg A\rightarrow B\vdash B$.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Довести теорему в рамках логіки L.

1) $A \to ((A \to B) \to (B \to A))$.

2) $\neg A \to (A \to B)$.

3) $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$.

4) $A \to B, A \to (B \to C) \vdash A \to C$;

Розв'язання.

1. За зворотньою теоремою дедукції $A \vdash ((A \to B) \to B)$. Якщо ще раз застосуємо її, то отримаємо $A, (A \to B) \vdash B$.

1. A Г1.
2. $A \to B$ Г2.
3. B MP(1,2).

Що й треба було довести.

2. За зворотньою теоремою дедукції, яку ми застосуємо двічі, отримаємо $\neg A, A \vdash B$.

1.	$\neg A$	Г1
2.	A	Г2
3.	$(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$	A3
4.	$\neg A \to (\neg B \to \neg A)$	A1
5.	$A \to (\neg B \to A)$	A1
6.	$\neg B \to \neg A$	MP(1,4)
7.	$\neg B \to A$	MP(2,5)
8.	$(\neg B \to A) \to B$	MP(3,6)
9.	B	MP(7,8)

Що й треба було довести.

3. За зворотньою теоремою дедукції $(A \to \neg B) \vdash (B \to \neg A)$

1.	$A \to \neg B$	Г1.
2.	$(A \to \neg B) \to (\neg\neg B \to \neg A)$	L8.
3.	$\neg\neg B \to \neg A$	MP(1,2).
4.	$B \to \neg\neg B$	L5.

5. $B \to \neg A$. Правило силогізму (3,4).

Що й треба було довести.

4. За зворотньою теоремою дедукції

1. $A \to B$ Г1.
2. $A \to (B \to C)$. Г2.
3. A ЗТД(1)
4. B МР(1,3).
5. $A \to C$ Правило силогізму (3,4) або наслідок 2 (2,4).

Що й треба було довести.

12. ЛОГІКА ПРЕДИКАТІВ

ЗАВДАННЯ 12.1

Представити висловлювання у вигляді формул логіки предикатів:

1) Деякі романи написано у віршах.
2) Жоден підручник не написано у віршах.
3) Жоден студент не написав підручник або посібник.
4) Усі конспекти – підручники.
5) Деякі вірші – сонети.
6) Деякі студенти ФІОТ працюють в ІТ-компаніях.
7) Ніхто не любить говорити по телефону.
8) Усі люблять спілкуватися в соціальних мережах.
9) Усі студенти ФІОТ люблять програмування.
10) Деякі студенти ФІОТ не люблять математику.
11) Усі студенти люблять знімати відео та читати книжки.
12) Всі студенти пишуть конспекти і реферати.
13) Деякі студенти не відвідують лекції і лабораторні роботи.
14) Деякі люди пишуть вірші або прозові романи.
15) Усі поети люблять читати вірші.
16) Усі ті, хто пише романи, - письменники.
17) Деякі студенти ФІОТ навчаються за спеціальністю «Програмна інженерія» або «Системна інженерія».
18) Деякі студенти пишуть шпаргалки.
19) Деякі люди люблять котів та собак.
20) Усі, хто має Айфон, куплять собі Айпад або Макбук.
21) Усі професори та доценти пишуть підручники.
22) Деякі люди люблять собак і не люблять котів.
23) Деякі доценти викладають математику та програмування.
24) Весь тиждень або йшов дощ, або було хмарно.
25) Всі кінологи люблять собак та всі фелінологи люблять котів.
26) Деякі професори, а також студенти пишуть наукові статті.

27) Вільям Шекспір і Роберт Бернс писали тільки вірші.

28) Всі, хто вчиться на ФІОТ – гарні програмісти або аналітики.

29) Усі студенти, які пишуть конспекти, не пишуть шпаргалки.

30) Всі, хто любить птахів і звірів, - зоологи.

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Представити висловлювання у вигляді формул логіки предикатів:

а) кожний другокурсник успішно склав іспит з історії або програмування;

б) сума двох додатних чисел — додатне число;

в) кожне дійсне число крім нуля має обернене число, яке визначається однозначно.

Розв'язання.

а) Нехай A — множина усіх другокурсників. Розглянемо наступні предикати на множині A:

$f(x)$: x склав іспит з історії;

$g(x)$: x склав іспит з програмування.

Тоді речення можна записати у вигляді $\forall x\left(f(x)\vee g(x)\right)$.

Якщо ж нас цікавлять інші особи крім другокурсників, то потрібно додатково розглянути предикат $h(x)$: x — другокурсник. Тоді речення можна записати у вигляді $\forall x\left(h(x)\Rightarrow f(x)\vee g(x)\right)$.

Цей приклад можна розв'язати, замінивши одномісні предикати $f(x)$ та $g(x)$ більш загальним двомісним предикатом $l(x,y)$: x склав іспит з дисципліни y, визначеним, на приклад, на множинах людей та навчальних дисциплін. Тоді отримаємо запис

$$\forall x\left(h(x)\Rightarrow l(x,\text{історія})\vee l(x,\text{програмування})\right)$$

б) Уведемо змінні x та y та перепишемо це речення так: "Два довільні додатні числа x та y дають у сумі додатне число". Тоді отримаємо шуканий запис

$$\forall x \forall y \left((x > 0) \wedge (y > 0) \Rightarrow (x + y > 0) \right).$$

Базисною множиною є множина дійсних чисел.

в) Для запису першої частини речення можна спочатку переписати його у вигляді "Для кожного дійсного числа x, відмінного від нуля, існує таке дійсне число y, що $xy = 1$". Для опису однозначності можемо скористатися тим, що для довільного z, яке є оберненим до x має виконуватися умова $z = y$. Остаточно отримуємо:

$$\forall x \left((x \neq 0) \Rightarrow \exists y \left((xy = 1) \wedge \forall z \left((xz = 1) \Rightarrow z = y \right) \right) \right).$$

ЗАВДАННЯ 12.2

Задано предикати *P(x,y), Q(x,y)* у предметній області *D{a,b}* таблицею:

x	a	a	b	b
y	a	b	a	b
P	T	T	F	F
Q	T	F	T	F

Визначте, чи є формули з таблиці 12.1 істинними або хибними. Відповідь обґрунтувати.

Таблиця 12.1

Варіант	Формула 1	Формула 2
1.	$\forall x P(x,a)$	$\forall x \forall y (P(x,y) \vee Q(x,y))$
2.	$\forall x P(x,x)$	$\forall x \exists y (P(x,a) \vee Q(y,y))$
3.	$\forall P(x,b)$	$\forall x \forall y (\overline{P(x,y) \wedge Q(x,y)} \to P(x,y))$
4.	$\forall x \neg P(x,a)$	$\forall x \exists y (\neg P(x,y) \vee Q(x,y))$
5.	$\forall x \neg P(x,b)$	$\exists x \forall y (P(x,y) \vee Q(x,y))$
6.	$\forall x \neg P(x,x)$	$\exists x \forall y (P(x,y) \vee \neg Q(x,y))$
7.	$\exists x \forall y \neg P(x,y)$	$\exists x \forall y (P(x,y) \sim Q(x,y))$
8.	$\forall y P(a,y)$	$\exists x \forall y (P(x,y) \sim \neg Q(x,y))$
9.	$\forall y P(b,y)$	$\exists x \forall y (\neg P(x,y) \vee \neg Q(x,y))$
10.	$\exists y P(y,y)$	$\exists x \forall y (\neg P(x,y) \sim Q(x,y))$
11.	$\forall x \exists y P(x,y)$	$\exists x \forall y (\neg P(x,y) \vee \neg Q(x,y))$
12.	$\exists y \neg P(a,y)$	$\exists x \forall y (\neg P(x,y) \vee Q(x,y))$
13.	$\forall y \neg P(b,y)$	$\forall x \exists y (P(x,y) \to Q(x,y))$
14.	$\forall y P(y,y)$	$\forall x \exists y (\neg P(x,y) \to Q(x,y))$
15.	$\forall x \exists y \neg P(x,y)$	$\forall x \exists y (Q(x,y) \to P(x,y))$
16.	$\forall x Q(x,a)$	$\forall x \exists y (\neg P(x,y) \to \neg Q(x,y))$
17.	$\forall x Q(x,x)$	$\forall x \exists y (P(x,y) \to \neg Q(x,y))$
18.	$\forall Q(x,b)$	$\forall x \exists y (\neg Q(x,y) \to P(x,y))$
19.	$\forall x \neg Q(x,a)$	$\forall x \exists y (\neg Q(x,y) \to \neg P(x,y))$
20.	$\forall x \neg Q(x,b)$	$\forall x \exists y (P(x,y) \wedge Q(x,y))$
21.	$\forall x \neg Q(x,x)$	$\forall x \exists y (P(x,y) \vee Q(x,y))$
22.	$\exists x \forall y \neg Q(x,y)$	$\exists x \forall y (P(x,y) \to Q(x,y))$
23.	$\forall y Q(a,y)$	$\exists x \exists y (\neg P(x,y) \wedge Q(x,y))$
24.	$\forall y Q(b,y)$	$\forall x \forall y (P(x,y) \sim Q(x,y))$
25.	$\forall y Q(y,y)$	$\exists x \forall y (P(x,y) \to P(x,y) \wedge Q(x,y))$
26.	$\forall x \exists y Q(x,y)$	$\exists x \forall y (\neg P(x,y) \to \neg Q(x,y))$
27.	$\exists y \neg Q(a,y)$	$\forall x \forall y (P(x,y) \to P(x,y) \vee Q(x,y))$
28.	$\forall y \neg Q(b,y)$	$\exists x \exists y (P(x,y) \sim Q(x,y))$
29.	$\forall y Q(y,y)$	$\exists x \forall y (P(x,y) \to Q(x,y) \to P(x,y))$
30.	$\forall x \exists y \neg Q(x,y)$	$\exists x \forall y ((P(x,y) \sim Q(x,y)) \to Q(x,y))$

ПРИКЛАД РОЗВ’ЯЗАННЯ

1. Задано предикати *P(x,y), Q(x,y)* у предметній області *D{a,b}* таблицею:

x	a	a	b	b
y	a	b	a	b
P	T	T	F	F
Q	T	F	T	F

Визначте, чи є формули

1. $\exists y Q(a,y)$
2. $\exists x \forall y (P(x,y) \wedge Q(x,y))$

істинними або хибними. Відповідь обґрунтувати.

<u>Розв’язання</u>.

Для виконання цього завдання, нагадаємо означення кванторів:

$$\forall x P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n),$$
$$\exists x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n).$$

1. $\exists y Q(a,y) = Q(a,a) \vee Q(a,b) \vee Q(a,a) \vee Q(a,b) = T \vee F \vee T \vee F = T$

Отже, формула є істиною.

2. $\exists x \forall y \big(P(x,y) \wedge Q(x,y)\big) = \exists x((P(x,a) \wedge Q(x,a)) \wedge (P(x,b) \wedge Q(x,b))$
$\wedge (P(x,a) \wedge Q(x,a)) \wedge (P(x,b) \wedge Q(x,b)))\ominus$

$\exists x(P(x,a) \wedge Q(x,a))$=$(P(a,a) \wedge Q(a,a))\vee (P(a,a) \wedge Q(a,a))\vee (P(b,a) \wedge Q(b,a))\vee (P(b,a) \wedge Q(b,a))$=$(T \wedge T) \vee (T \wedge T) \vee (F \wedge T)) \vee (F \wedge T) = T$

$\exists x(P(x,b) \wedge Q(x,b))$=$(P(a,b) \wedge Q(a,b))\vee (P(a,b) \wedge Q(a,b))\vee (P(b,b) \wedge Q(b,b))\vee (P(b,b) \wedge Q(b,b))$=$(T \wedge F) \vee (T \wedge F) \vee (F \wedge F) \vee (F \wedge F) = F$

$\ominus T \wedge T \wedge F \wedge F = F.$

Отже, формула є хибною.

ЗАВДАННЯ 12.3

Побудувати таблицю істинності для предиката на області інтерпретацій *D{a,b}*:

1) $\exists x \forall y (P(x) \vee Q(y) \to R)$;
2) $\forall x (\exists y\, (R \to P(x) \vee Q(y)))$;
3) $\exists x (R \to \forall y (P(x) \to Q(y)))$;
4) $\forall x (R \to \forall y (Q(y) \to P(x)))$;
5) $\exists x (P(x) \to \exists y (R \to Q(y)))$;
6) $\exists x (P(x) \to \forall y (Q(y) \to P(x)))$;
7) $\exists x (P(x)\ \&\ \exists y (Q(y) \to R))$;
8) $\forall x (P(x) \vee \exists y (Q(y) \to R) \to S)$;
9) $\exists x (P(x)\ \&\ \forall y\, Q(y)) \to \forall x\, P(x)$;
10) $\exists x \forall y (P(x) \vee Q(y) \to Q(y))$;
11) $\exists x (P(x)\ \&\ \exists y (Q(y) \to P(x)))$;
12) $\exists x (\forall y (P(x) \to R(y)) \sim Q)$;
13) $\forall x (P(x)\ \&\ \exists z R(z) \to \exists y Q(y))$;
14) $\forall x ((P(x) \sim \exists y Q(y))\ \&\ P(x))$;
15) $\exists y (P(y) \vee \forall x \neg Q(x) \to P(y))$;
16) $\exists y (P(y) \to \forall x R(x)) \sim Q$;
17) $\exists x \forall y (P(x) \vee Q(y)) \to R$;
18) $\exists x P(x) \vee \forall y Q(y) \to R$;
19) $\exists x (P(x) \vee \forall y Q(y) \to R)$;
20) $\exists x (\forall y (R \to P(x) \vee Q(y)))$;
21) $\forall x (P(x) \to \forall y (Q(y) \to P(x)))$;
22) $\forall y (\exists x P(x) \vee Q(y) \to Q(y))$;
23) $\exists x (P(x)\ \&\ \forall y (Q(y) \to P(x)))$;
24) $\exists x (\forall y (P(x) \to (R \sim Q(y))))$;
25) $\exists x ((P(x) \to \forall y Q(y))\ \&\ P(x))$.
26) $\exists x (P(x) \wedge (\exists x (P(x) \to Q(x)) \to \exists x Q(x))$;
27) $(B \to \exists x P(x)) \to \exists x (B \to P(x))$;
28) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \to \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$;
29) $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \to (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$;
30) $(\exists x P(x) \to \exists x Q(x)) \vee \exists x (P(x) \to Q(x))$;

ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ

Побудувати таблицю істинності для предиката на області інтерпретацій *D{a,b}*:

1. $E = \exists x \forall y \big(P(x) \wedge Q(x)\big) \rightarrow R$
2. $E = \forall x \exists y (P(x) \vee Q(x) \wedge R)$
3. $E = \forall x \exists y (P(x) \rightarrow Q(x)) \vee R$

<u>Розв’язання</u>.

Для виконання цього завдання, нагадаємо, що таблиці істинності для предикатів на області інтерпретацій $D\{a,b\}$ виглядають наступним чином:

x	$P_1(\cdot)$	$P_2(\cdot)$	$P_3(\cdot)$	$P_4(\cdot)$
a	F	F	T	T
b	F	T	F	T

$P(\cdot)$	$\exists x P(x)$	$\forall x P(x)$
P_1	F	F
P_2	T	F
P_3	T	F
P_4	T	T

.

Основні рівносильності, які містять квантори:

1. $\overline{\forall x\, P(x)} \sim \exists x\, \overline{P(x)}$
2. $\overline{\exists x\, P(x)} \sim \forall x\, \overline{P(x)}$
3. $\forall x\, P(x) \sim \overline{\exists x\, \overline{P(x)}}$;
4. $\exists x\, P(x) \sim \overline{\forall x\, \overline{P(x)}}$;
5. $\forall x\, (P(x) \wedge S) \sim \forall x\, P(x) \wedge S$;
6. $\forall x\, (S \wedge P(x)) \sim S \wedge \forall x\, P(x)$;
7. $\forall x\, (P(x) \vee S) \sim \forall x\, P(x) \vee S$;
8. $\forall x\, (S \vee P(x)) \sim S \vee \forall x\, P(x)$;

9. $\exists x\,(P(x)\wedge S)\sim\ \exists x\,P(x)\wedge S$;

10. $\exists x\,(S\wedge P(x))\sim\ S\wedge\exists x\,P(x)$;

11. $\exists x\,(P(x)\vee S)\sim\ \exists x\,P(x)\vee S$;

12. $\exists x\,(S\vee P(x))\sim\ S\vee\exists x\,P(x)$;

13. $\forall x\,(P(x)\to S)\sim\ \exists x\,P(x)\to S$;

14. $\forall x\,(S\to P(x))\sim\ S\to\forall x\,P(x)$;

15. $\exists x\,(P(x)\to S)\ \sim\forall x\,P(x)\to S$;

16. $\exists x\,(S\to P(x))\sim S\to\exists x\,P(x)$;

17. $\forall x\,S\sim S$;

18. $\exists x\,S\sim S$;

19. $\forall x\,(P(x)\wedge Q(x))\sim\ \forall x\,P(x)\wedge\forall x\,Q(x)$

20. $\exists x\,(P(x)\vee Q(x))\sim\exists x\,P(x)\vee\exists x\,Q(x)$

21. $\exists x\,(P(x)\wedge Q(x))\ \to\ (\exists x\,P(x)\wedge\exists x\,Q(x))$

22. $(\forall x\,P(x)\vee\forall x\,Q(x))\ \to\ \forall x\,(P(x)\vee Q(x))$

23. $\forall x\,P(x)\sim\forall y\,P(y)$;

24. $\exists x\,P(x)\sim\exists y\,P(y)$;

25. $\forall x\,\forall y\,R(x,y)\sim\forall y\,\forall x\,R(x,y)$

26. $\exists x\,\exists y\,R(x,y)\sim\exists y\,\exists x\,R(x,y)$

27. $\exists y\,\forall x\,R(x,y)\ \to\ \forall x\,\exists y\,R(x,y)$

На основі наведених рівносильностей спрощуємо предикат і заповнюємо таблиці за наступним принципом:

(R=T)

P	P_1	P_1	P_1	P_1	P_2	P_2	P_2	P_2	P_3	P_3	P_3	P_3	P_4	P_4	P_4	P_4
Q	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
R	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
E																

(R=F)

P	P_1	P_1	P_1	P_1	P_2	P_2	P_2	P_2	P_3	P_3	P_3	P_3	P_4	P_4	P_4	P_4
Q	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
R	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*
E																

1. $E = \exists x \forall y \big(P(x) \land Q(x)\big) \to R = \big(\exists x P(x) \land \forall y Q(x)\big) \to R$

Остаточно отримуємо

P	*F*	*F*	*F*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
Q	*F*	*F*	*F*	*T*	*F*	*F*	*F*	*T*	*F*	*F*	*F*	*T*	*F*	*F*	*F*	*T*
R	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
E	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*

P	*F*	*F*	*F*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
Q	*F*	*F*	*F*	*T*	*F*	*F*	*F*	*T*	*F*	*F*	*F*	*T*	*F*	*F*	*F*	*T*
R	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*
E	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*

Це і є таблиці істинності для першого предиката.

2. $E = \forall x \exists y(P(x) \vee Q(x) \wedge R) = \forall x P(x) \vee \exists y Q(x) \wedge R$

Аналогічно, таблиці істинності для другого предиката матимуть вигляд.

P	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*
Q	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*
R	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
E	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*

P	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*
Q	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*
R	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*
E	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*

Це і є таблиці істинності для другого предиката.

3. $E = \forall x \exists y(P(x) \to Q(x)) \vee R$=$(\exists x P(x) \to \exists y Q(x)) \vee R$

Аналогічно, таблиці істинності для третього предиката матимуть вигляд.

P	*F*	*F*	*F*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
Q	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*
R	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
E	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*

P	*F*	*F*	*F*	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
Q	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*
R	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*	*F*
E	*T*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*

Це і є таблиці істинності для третього предиката.

ЛІТЕРАТУРА

1. Андресон Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика: Пер. С англ. - М.: Издательский дом “Вильямс”, 2003. – 958 с.
2. Бардачов Ю.М., СоколоваН.А., В.Є. Ходаков. Дискретна математика: Підручник. - К.: Вища шк., 2002. – 287 с.
3. Базилевич Л. Дискретна математика у прикладах і задачах: Підручник. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков. – 2013. – 487 с.
4. Дискретна математика: Розрахункові роботи [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальностей 124 «Системний аналіз», 122 «Комп’ютерні науки» / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: І. Я. Спекторський, О. В. Стусь, В. М. Статкевич. – Електронні текстові дані (1 файл: 0,6 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 84 с.
5. Донской В.И. Дискретная математика. - Симферополь: СОНАТ, 2000.
6. Капітонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печурін М.К. Основи дискретної математики: Підручник. – К: Наукова думка, 2002. – 579 с.
7. Клини С. Математическая логика. – М.: Мир, 1973. – 480 с.
8. Комп’ютерна дискретна математика: Підручник / М.Ф. Бондаренко, Н.В. Білоус, А.Г. Руткас. - Харків: «Компанія СМІТ», 2004. - 480 с.
9. Коцовський В.М. Дискретна математика та теорія алгоритмів. Частина 1. Конспект лекцій. – Ужгород, 2016.
10. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. - М.: Энергоатомиздат, 1988. - 480с.
11. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. - М.: Мир, 1970.
12. МальцевА.И. Алгебраические системы. - М.: Наука, 1975.
13. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. - М., 1976.
14. Методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни «Комп’ютерна дискретна математика» для студентів усіх форм навчання напрямку 6.050103 – Програмна інженерія / Упоряд.: Н.В. Білоус, І. В. Куцевич, Т.А. Разівілова. - Харків: ХНУРЕ, 2010. - 98 с.
15. Молчановський О.І. Конспект лекцій з дисципліни «Дискретна

математика», Київ, 2016.

16. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю. М. Дискретна математика. - К.: Видавнича група БИУ, 2007.
17. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. Учебник для вузов. 2-е изд. - СПб.: Питер, 2006.
18. Робертс Ф.С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. - М.: Наука, 1986.
19. Таран Т.А. Основы дискретной математики. - К.: Просвіта, 2003.
20. Таран Т.А., Мыценко Н.А., Темникова Е.Л. Сборник задач по дискретной математике. К.: Инрес, 2005. – 64 с.
21. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах. – СПб.: БХВ-Петербург, 2008. – 352 с.
22. Успенский В.А., Верещагин Н.К., Плиско В.Е. Вводный курс математической логики. 2-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
23. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов. – Москва: Техносфера, 2003. – 320 с.