ВМ-1. Лекція 1 за 21.09.20.

Лекцію 1 переписати в зошит для конспекту лекцій з ВМ-1 (ЛА-АГ).
Обов'язково на кожній сторінці конспекту напишіть у верхньому правому куті сторінки ваше прізвище та ініциали.

Лекція 1. Визначники.

Означення матриці.

Матрицею A *розміром* $m \times n$ називають прямокутну таблицю чисел a_{ij} розташованих у m рядках та n стовпцях, і позначають

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} називаються *елементами матриці,* перший індекс i означає номер рядка ($i = 1, 2, \cdots m$), другий індекс j номер стовпця ($j = 1, 2, \cdots n$) на перетині яких стоїть даний елемент. Елементами a_{ij} матриці можуть бути функції або алгебраїчні вирази.

Матрицю позначають також так $A = (a_{ij})$ або $A_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n}$.

i -й рядок (*завдовжки* n) матриці $A_{m\times n}$ позначають $\overleftarrow{a}_i$=$(a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in})$.

j -й стовпець (*заввишки* m) матриці A позначають $\vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$.

Матриця A має m рядків $\overleftarrow{a}_1, \overleftarrow{a}_2, \cdots, \overleftarrow{a}_k$ та n стовпців $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_n$.

Приклад. Розглянемо матрицю A розміру 2×2 та випишимо її елементи, рядки та стовпці.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \ \ a_{11} = 1, \ \ a_{12} = 2, a_{21} = 5, a_{22} = 7.$$

Рядки: $\overleftarrow{a}_1 = (1 \quad 2)$, $\overleftarrow{a}_2 = (5 \quad 7)$. Стовпці: $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. ■

Якщо $m \neq n$, то матрицю A називають прямокутною, якщо $m = n$, тобто кількість рядків дорівнює кількісті стовпців, то A – *квадратна матриця n –го порядку:*

$$A = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матриця A в прикладі 1 це квадратна матриця 2 – го порядку.
Для квадратних матриць вводиться поняття головної та побічної діагоналі.
Елементи $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ розташовані на *головній діагоналі,* елементи $a_{1n}, \ \cdots, a_{n1}$ на *побічній діагоналі*.

Визначники.

Розглянемо довільну квадратну матрицю n -го порядку $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$.

Визначником (*детермінантом*) квадратної матриці A називається певне число, що позначається символами

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ або } \Delta_n, \qquad detA$$

та обчислюється за наведеними далі правилами.

Елементи a_{ij} матриці A називаються *елементами визначника,* а рядки та стовпці матриці A – рядками та стовпцями визначника.

Зауваження. **1.** Визначник для неквадратної матриці не означують.

2. Будьте уважні щодо позначення матриці A та її визначника $detA$, наприклад,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, дужки круглі; $detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$, дужки прямі!!

Правила обчислення визначників матриць 1-го, 2-го та 3-го порядку.

1. Визначник 1-го порядку матриці $A = (a_{11})$:

$$detA = |a_{11}| = a_{11}.$$

Приклад 1. $A = (-5)$, $detA = |-5| = -5$.

2. Визначник 2-го порядку матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ обчислюється за формулою:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Для обчислення визначника 2-го порядку потрібно *від добутку елементів, що стоять на головній діагоналі, відняти добуток елементів, розміщених на побічній діагоналі.* Схематично це правило зображають так:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \circ \\ \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet \\ \bullet & \circ \end{vmatrix}$$

Приклад 2. Обчислити визначник.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 1\cdot(-3) = 8 + 3 = 11. \quad \blacksquare$$

3. Правило трикутників для обчислення визначника 3-го порядку.

Схематично це правило зображають так:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}$$

За правилом трикутників визначник 3-го порядку дорівнює сумі 6 доданків, перші три доданки зі знаком плюс є добутками елементів, що стоять на головній діагоналі і в вершинах двох трикутників, у яких одна сторона паралельна головній діагоналі. Аналогічно утворюються доданки зі знаком мінус, де за основу береться побічна діагональ.

Приклад 3. Обчислити визначник за правилом трикутників

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 5 - 1 \cdot 4 \cdot 4 =$$

$$= 5 - 8 + 24 + 3 - 20 - 16 = 32 - 44 = -12. \ \blacksquare$$

Обчислення визначників методом розкладу за елементами рядка або стовпця.

Означення. *Мінором* M_{ij} *елемента* a_{ij} визначника n –го порядку називається *визначник* $(n-1)$ –го порядку, отриманий з даного визначника викресленням i –го рядка та j –го стовпця, тобто рядка та стовпця на перетині яких стоїть елемент a_{ij}.

Зауваження. Мінор M_{ij} називають також *доповняльним мінором.*

Означення. *Алгебраїчним доповненням* A_{ij} *елемента* a_{ij} визначника називається його мінор M_{ij}, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Приклад 4. Для визначника Δ_3 з **прикладу 3** обчислити мінор та алгебраїчне доповнення елементів a_{11} та a_{12}.

Для обчислення мінора M_{11} викреслюємо з визначника Δ_3 1-й рядок та 1-й стовпець, отримаємо визначник 2-го порядку, якому за означенням дорівнює мінор M_{11}:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 4 \cdot 4 = -11, \ \ A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = -11.$$

Для обчислення мінора M_{12} викреслюємо з Δ_3 1-й рядок та 2-й стовпець

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-1) \cdot 4 = 14, \ \ A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = -14. \ \blacksquare$$

Теорема. (про розклад визначника за елементами рядка (стовпця)). *Визначник* n *–го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.*

Застосуємо теорему до визначника 3-го порядку

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Напишемо деякі формули для обчислення Δ_3.

1) Розкладом за елементами 1-го рядка: $\Delta_3 = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$.

2) Розкладом за елементами 2-го рядка: $\Delta_3 = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$.

3) Розкладом за елементами 3-го стовпця: $\Delta_3 = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$.

Зауваження. При обчисленні визначника розкладом за будь-яким рядком або стовпцем *отримаємо одне й теж число*.

Приклад 5. Обчислити визначник методом розкладу за елементами 1-го рядка.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = [a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}] = 1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{12} + 3 \cdot A_{13}.$$

Обчислимо алгебраїчне доповнення A_{13}, оскільки $A_{11} = -11$ та $A_{12} = -14$ відомо з прикладу 4.

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 1 = 9, \quad A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13} = 9.$$

Отже $\Delta_3 = A_{11} + 2A_{12} + 3A_{13} = -11 - 28 + 27 = -12$. Отримали таку відповідь, як при обчисленні цього визначника за правилом трикутників в прикладі 3. ■

Властивості визначників.

Заміну рядків матриці її відповідними стовпцями, а стовпців — відповідними рядками, називають *транспонуванням* матриці.

Означення. Матрицю розміром $n \times m$, яку одержують з матриці *A* розміром $m \times n$ транспонуванням стовпців (рядків), називають *транспонованою матрицею* до *A* і позначають A^T.

Приклади. 1) $A = (1 \quad 2 \quad 3)$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Розглянемо (на прикладі визначників другого порядку) основні властивості визначників.

1) (*Рівноправність рядків та стовпців*). Транспонування матриці не змінює її визначника:

$$detA = detA^T, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

З властивості 1) випливає, що всі подальші властивості справедливі і для рядків і для стовпців.

2) Якщо *переставити місцями* два стовпці (рядки) визначника, то він *змінить знак на протилежний*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = [\vec{a}_1 \leftrightarrow \vec{a}_2] = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

3) Спільний множник, що міститься в усіх елементах *одного* стовпця (рядка) можна виносити за знак визначника:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

4) (*Умови рівності нулю визначника*). Визначник дорівнює нулю, якщо він містить:
1) нульовий стовпець (рядок);
2) два однакові стовпці (рядки);
3) пропорційні стовпці (рядки):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

5) (*Лінійність*). Якщо стовпець (рядок) визначника є сумою двох стовпців (рядків), то визначник дорівнює сумі двох відповідних визначників:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

6) *Визначник не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = [\overleftarrow{a}_2 \to \overleftarrow{a}_2 + k\overleftarrow{a}_1] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{vmatrix}.$$

Доведення 6):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{vmatrix} = [\text{за власт. } 5)] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} =$$

$$= [\text{за власт. } 4)] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \blacksquare$$

7). (*Теорема анулювання*). Сума добутків елементів стовпця (рядка) визначника на алгебричні доповнення відповідних елементів іншого стовпця (рядка) дорівнює нулю.

Обчислення визначника методом Гауса (зведенням до трикутного вигляду).

Означення. Визначник n *–го* порядку , всі елементи якого розташовані нижче від головної діагоналі дорівнюють нулю, називають визначником *трикутного вигляду.*

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} - \text{визначник } 3 - \text{го порядку трикутного вигляду}.$$

Теорема. Визначник трикутного вигляду дорівнює добутку елементів, розташованих на головній діагоналі.

$$\Delta_n = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

Доведення.(для визначника 3 − го порядку).

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{обчислимо розкладом за} \\ \text{елементами 1 − го стовпця} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} =$$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} M_{11} + 0 = a_{11} \cdot M_{11} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}. \blacksquare$$

Метод Гауса зведення визначника до трикутного вигляду полягає в перетворенні визначника до вигляду, коли всі елементи, розташовані нижче від головної діагоналі, дорівнюють нулю, *але всі діагональні елементи* $a_{ii} \neq 0$. Для цього застосовують властивості **2), 3)** та **6)** визначника.

Нехай $\Delta_n = detA$ визначник матриці $A = (a_{ij})$ n - го порядку .

Метод Гауса:

Крок 1. Ведучий рядок перший $\overleftarrow{a}_1 = (a_{11} \quad \cdots \quad a_{1n})$, ведучий елемент a_{11}.

1) Якщо $a_{11} = 0$, то треба переставити 1-й стовпець з будь-яким стовпцем, розташованим правіше ніж 1-й, або переставити 1-й рядок з будь-яким рядком, розташованим нижче ніж 1-й. При цьому визначник змінить знак на протилежний.

Нехай $a_{11} \neq 0$. Робимо за допомогою першого рядка рівними нулю всі елементи 1-го стовпця, розташовані нижче діагонального a_{11}:

2) Від елементів 2-го рядка віднімаємо відповідні елементи 1-го рядка, помножені на число $\frac{a_{21}}{a_{11}}$. Позначаємо це так: $\overleftarrow{a}_2 \to \overleftarrow{a}_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} \overleftarrow{a}_1$.

3) Від елементів 3-го рядка віднімаємо відповідні елементи 1-го рядка, помножені на число $\frac{a_{31}}{a_{11}}$. Позначаємо це так: $\overleftarrow{a}_3 \to \overleftarrow{a}_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} \overleftarrow{a}_1$.

4) Від елементів 4-го рядка віднімаємо відповідні елементи 1-го рядка, помножені на число $\frac{a_{41}}{a_{11}}$. Позначаємо це так: $\overleftarrow{a}_4 \to \overleftarrow{a}_4 - \frac{a_{41}}{a_{11}} \overleftarrow{a}_1$.

Продовжуємо так далі до останнього n -го рядка.

Крок 2. Ведучий рядок другий $\overleftarrow{a}_2$, ведучий елемент a_{22}.

1) Якщо $a_{22} = 0$, то треба переставити 2-й стовпець з будь-яким стовпцем, розташованим правіше ніж 2-й, або переставити 2-й рядок з будь-яким рядком, розташованим нижче ніж 2-й. При цьому визначник змінить знак на протилежний.

Нехай $a_{22} \neq 0$. Робимо за допомогою 2-го рядка рівними нулю всі елементи 2-го стовпця, розташовані нижче діагонального a_{22}:

2) Від елементів 3-го рядка віднімаємо відповідні елементи 2-го рядка, помножені на число $\frac{a_{32}}{a_{22}}$. Позначаємо це так: $\overleftarrow{a}_3 \to \overleftarrow{a}_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}}\overleftarrow{a}_2$.

3) Від елементів 4-го рядка віднімаємо відповідні елементи 2-го рядка, помножені на число $\frac{a_{42}}{a_{22}}$. Позначаємо це так: $\overleftarrow{a}_4 \to \overleftarrow{a}_4 - \frac{a_{42}}{a_{22}}\overleftarrow{a}_2$.

Продовжуємо так далі до останнього n -го рядка.

Крок 3. Ведучий рядок другий $\overleftarrow{a}_3$, ведучий елемент a_{33}.

Виконується аналогічно.

Крок $(n-1)$. Ведучий рядок другий $\overleftarrow{a}_{n-1}$, ведучий елемент a_{n-1n-1}.

Виконується аналогічно. Це останній Крок.

Приклад 6. Обчислити визначник зведенням до трикутного вигляду

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 5 & -7 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} = 1 \neq 0 \\ \overleftarrow{a}_2 \to \overleftarrow{a}_2 - 4\overleftarrow{a}_1 \\ \overleftarrow{a}_4 \to \overleftarrow{a}_4 - 5\overleftarrow{a}_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} = 1 \neq 0 \\ \overleftarrow{a}_3 \to \overleftarrow{a}_3 - 2\overleftarrow{a}_2 \\ \overleftarrow{a}_4 \to \overleftarrow{a}_4 + 2\overleftarrow{a}_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} a_{33} = -2 \neq 0 \\ \overleftarrow{a}_4 \to \overleftarrow{a}_4 + 2\overleftarrow{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{визначник трикутного вигляду} \\ \text{дорівнює добутку елементів,} \\ \text{розташованих на головній діагоналі} \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot (-14) = 28. \blacksquare$$