## 2. Відношення

### 2.1. Декартів добуток

Означення 2.1. Нехай $A$ і $B$ – дві множини. Розглянемо множину $C = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$. Ця множина називається **декартовим добутком множин** $A$ і $B$ та позначається $A \times B$. Якщо множини $A$ і $B$ скінченні і складаються відповідно із $m$ і $n$ елементів, то очевидно, що $C$ складається із $m \cdot n$ елементів.

Нехай $A = \{1,2\}$ і $B = \{2,3,4\}$. Тоді $A \times B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4)\}$.

Елементами декартового добутку є **упорядковані пари**, де перший елемент пари належить першій множині, а другий – другій. Порядок входження пар може бути будь-яким, але розташування елементів у кожній парі визначається порядком множин, що перемножуються. Тому $A \times B \neq B \times A$, тобто декартів добуток властивості комутативності не має.

Окремий інтерес викликає випадок, коли множини $A$ і $B$ рівні між собою. Тоді елементами упорядкованої пари множини $A \times B$ будуть об'єкти, які складаються із двох не обов'язково різних елементів множини $A$. Також важливим залишається порядок елементів у парі. Для наведеної вище множини $A$, упорядковані пари (1,2) та (2,1) слід вважати різними.

Означення 2.2. Множина $C = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \text{A}\}$ всіх впорядкованих пар елементів із множини $A$ називається **декартовим квадратом множини *A*** і позначається $A^2$.

Поняття упорядкованої пари можна розширити на упорядковані трійки елементів $(a_1, a_2, a_3)$, упорядковані четвірки $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ і т.д. Взагалі, упорядкована $n$-ка елементів із множини $A$ – це $n$ не обов'язково різних між собою елементів із $A$, заданих в певній послідовності.

Наведене вище означення декартового добутку двох множин і декартового квадрату множини можна звичайним способом узагальнити і на випадок довільної скінченної сукупності множин.

**Декартовим добутком** $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називається сукупність послідовностей (тобто сукупність упорядкованих $n$-ок елементів) виду $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, де $a_i \in A_i$, $i = 1,..,n$.

Елементи декартового добутку називають також **кортежами** або **векторами** довжиною $n$.

Якщо $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, то декартів добуток $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ називається **декартовим добутком *n*-го ступеню множини *A*** ($A^n$).

Властивості асоціативності для декартового добутку не виконуються, але виконується властивість дистрибутивності відносно об'єднання, перерізу і різниці:

$$(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B)$$
$$(A_1 \cap A_2) \times B = (A_1 \times B) \cap (A_2 \times B)$$
$$(A_1 \setminus A_2) \times B = (A_1 \times B) \setminus (A_2 \times B)$$

Операція декартового добутку відрізняється від операцій, введених раніше, тим, що елементи добутку множин суттєво відрізняються від елементів співмножників і є об'єктами іншої природи. Наприклад, якщо $R$ – множина дійсних чисел, то декартів добуток $R \times R$ – множина всіх точок площини.

### 2.2. Відношення

Означення 2.3. Довільна підмножина множини $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ називається **відношенням**, заданим або визначеним на множинах $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Якщо $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, тобто річ йде про декартів добуток $n$-ого степеню множини $A$, то відношення $R$, яке задано на множинах $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$, називається ***n*-арним відношенням на множині *A***.

Коли $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$, то говорять, що елементи $a_i$ ($i = 1,..,n$) знаходяться між собою у відношенні $R$ або відношення $R$ істинне для $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Якщо $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \notin R$, то вважають, що $R$ хибне для $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

При $n$=1 відношення називається **унарним**, при $n$=2 – **бінарним**, при $n$=3 – **тернарним**.

Загалом відношення означає який-небудь зв'язок між предметами або поняттями. Приклади бінарних відношень: відношення належності, включення множин, рівності дійсних чисел, нерівності, бути братом, ділитися на яке-небудь натуральне число, входити до складу якого-небудь колективу.

Частіше за все бінарні відношення записуються у вигляді співвідношень $aRb$, де $R$ – відношення, яке встановлює зв'язок між елементами $a \in A$ та $b \in B$.

Наведемо ще декілька прикладів бінарних відношень.

1. Якщо $A$ – множина дійсних чисел, то $\{(x,y) \mid x \in A, y \in A, x^2+y^2=4\}$ є бінарне відношення на $A$.
2. Нехай $A$ – множина товарів в магазині, а $B$ – множина дійсних чисел. Тоді $\{(x,y) \mid x \in A, y \in B, y$ – ціна $x\}$ – відношення на множинах $A$ та $B$.
3. Якщо $A$ – множина людей, то $\{(x,y) \mid x \in A, y \in A, y$ є рідним $x\}$ є бінарне відношення на $A$.

Означення 2.4. **Область визначення** відношення $R$ на $A$ та $B$ є множина всіх $a \in A$ таких, що для деяких $b \in B$ маємо $(a, b) \in R$. Іншими словами, область визначення $R$ є множина всіх перших координат впорядкованих пар із $R$.

**Множина значень** відношення $R$ на $A$ та $B$ є множина всіх $b \in B$ таких, що $(a, b) \in R$ для деяких $a \in A$. Іншими словами, множина значень $R$ є множина всіх других координат впорядкованих пар із $R$.

В наведених прикладах вище, у (1) область визначення і множина значень співпадають із множиною $\{t: t \in [-2;2]\}$. В (2) область визначення є множина $A$, а множина значень є множина всіх дійсних чисел, кожне з яких співпадає із ціною деякого товару в магазині. В (3) область визначення і множина є множиною всіх людей, які мають рідних.

Цікавими є такі окремі випадки відношень на $A$.

1. **Повне (універсальне)** відношення $U = A \times A$, яке справджується для будь-якої пари $(a_1, a_2)$ елементів з $A$. Наприклад, $U$ – відношення "вчитися в одній групі" у множині $A$, де $A$ – множина студентів групи ІС-21.
2. **Тотожне (діагональне)** відношення $I$, що виконується тільки між елементом і ним самим. Наприклад, рівність на множині дійсних чисел.
3. **Порожнє** відношення, яке не задовольняє жодна пара елементів з $A$. Наприклад, $R$ – відношення "бути братом" у множині $A$, де $A$ – множина жінок.

Оскільки відношення, задані на $A$ та $B$ – підмножини $A \times B$, то для них визначені операції об'єднання, перерізу, різниці і доповнення (наступне справедливо для загального випадку відношення):

- $(a, b) \in R_1 \cup R_2 \Leftrightarrow (a, b) \in R_1$ або $(a, b) \in R_2$
- $(a, b) \in R_1 \cap R_2 \Leftrightarrow (a, b) \in R_1$ і $(a, b) \in R_2$
- $(a, b) \in R_1 \backslash R_2 \Leftrightarrow (a, b) \in R_1$ або $(a, b) \notin R_2$
- $(a, b) \in R' \Leftrightarrow (a, b) \notin R$ (заперечення)

Крім того, виділяються специфічні для відношень операції: обернення (симетризація) і композиція.

Означення 2.5. Нехай $R \subseteq A \times B$ є відношення на $A \times B$. Тоді відношення $R^{-1}$ на $B \times A$ визначається наступним чином

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

Іншими словами, $(b, a) \in R^{-1}$ тоді і тільки тоді, коли $(a, b) \in R$, або, що рівнозначно, $bR^{-1}a$ тоді і тільки тоді, коли $aRb$. Відношення $R^{-1}$ називається **оберненим (симетричним) відношенням** до даного відношення $R$.

Перехід від $R$ до $R^{-1}$ здійснюється взаємною перестановкою координат кожної впорядкованої пари. Наприклад, відношення $R$ - "$x$ дільник $y$", має обернене до нього $R^{-1}$ – "$x$ кратне $y$". А відношення $R = \{(1,2), (3,4), (5,6)\}$ буде мати обернене відношення $R^{-1}=\{(2,1), (4,3), (6,5)\}$. При переході від $R$ до $R^{-1}$ область визначення стає областю значення і навпаки.

Означення 2.6. Нехай $R \subseteq A \times B$ – відношення на $A \times B$, а $S \subseteq B \times C$ – відношення на $B \times C$. **Композицією** відношень $R$ та $S$ є відношення $T \subseteq A \times C$, визначене наступним чином:

$$T = \{(a, c) \mid a \in A,\ c \in C \text{ та } \exists b \in B,\ (a, b) \in R \text{ та } (b, c) \in S\}.$$

Це відношення позначається $T = R \circ S$.

Наприклад, нехай $R = \{(1,2), (3,4), (5,6)\}$ та $S=\{(2,3), (2,7), (4,1), (6,9)\}$, тоді $T_1 = R \circ S = \{(1,3), (1,7), (3,1), (5,9)\}$ та $T_2 = S \circ R = \{(2,4), (4,2)\}$.

Інший приклад: $R = \{(x, x^2) \mid x \in N\}$ та $S = \{(x, x+2) \mid x \in N\}$, тоді $T_1 = R \circ S = \{(x, x^2+2) \mid x \in N\}$ та $T_2 = S \circ R = \{(x, (x+2)^2) \mid x \in N\}$.

Слід зазначити, що операція композиції відношень може бути і невизначеною, якщо в множині $B$ для заданих елементів $a$ із $A$ та $c$ із $C$ не існує відповідного елемента $b$. Але якщо $A = B = C$, то ця операція завжди визначена.

Означення 2.7. Нехай $R$ – відношення на множині $A$. Ступенем відношення $R$ на множині $A$ є його композиція із самим собою. Позначається:

$$R^n = R \circ \ldots (n \text{ разів}) \ldots \circ R.$$

Відповідно, $R^0 = I$, $R^1 = R$, $R^2 = R \circ R$ і взагалі $R^n = R^{n-1} \circ R$.

Теорема 2.1. Якщо $R$, $R_1$, $R_2$ – бінарні відношення, задані на множині $A$, то:

а) $(R_1 \cup R_2) \circ R = R_1 \circ R \cup R_2 \circ R$; $R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow R_1 \circ R \subseteq R_2 \circ R$.

б) $(R^{-1})^{-1} = R$; $R \subseteq R_1 \Rightarrow R^{-1} \subseteq R_1^{-1}$.

в) $(R_1 \circ R_2)^{-1} = (R_2^{-1}) \circ (R_1^{-1})$.

г) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = (R_1^{-1}) \cap (R_2^{-1})$.

д) $(R \circ R_1) \circ R_2 = R \circ (R_1 \circ R_2)$.

*Доведення.* а) Якщо $(a, b) \in (R_1 \cup R_2) \circ R$, то існує елемент $c \in A$ такий, що $(a, c) \in R_1 \cup R_2$ і $(c, b) \in R$. Значить, $(a, c) \in R_1$ або $(a, c) \in R_2$ і $(c, b) \in R$. Звідси маємо, що $(a, b) \in R_1 \circ R$ або $(a, b) \in R_2 \circ R$, тобто $(a, b) \in R_1 \circ R \cup R_2 \circ R$. Обернене включення доводиться аналогічно.

Друга частина твердження випливає з того, що коли $R_1 \subseteq R_2$, то $R_1 \cup R_2 = R_2$, звідки маємо (в силу вище доведеного), що $(R_1 \cup R_2) \circ R = R_1 \circ R \cup R_2 \circ R = R_2 \circ R$, тобто $R_1 \circ R \subseteq R_2 \circ R$.

б) $(a, b) \in R^{-1} \Leftrightarrow (b, a) \in (R^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (b, a) \in R$. Звідки випливає, що $(R^{-1})^{-1} = R$.

Для доведення другої частини зауважимо, що $(a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R^{-1}$, $(a, b) \in R \Rightarrow (a, b) \in R_1 \Rightarrow (b, a) \in R^{-1} \Rightarrow (b, a) \in R_1^{-1}$, тобто $R^{-1} \subseteq R_1^{-1}$.

в) $(a, b) \in (R_1 \circ R_2)^{-1} \Leftrightarrow (b, a) \in (R_1 \circ R_2) \Rightarrow (\exists c \in A \mid (b, c) \in R_1 \text{ і } (c, a) \in R_2)$. Але тоді $(c, b) \in R_1^{-1}$ і $(a, c) \in R_2^{-1} \Rightarrow (a, b) \in (R_2^{-1} \circ R_1^{-1})$, тобто $(R_1 \circ R_2)^{-1} \subseteq (R_2^{-1}) \circ (R_1^{-1})$. Обернене включення доводиться аналогічно.

г) $(a, b)\in(R_1\cap R_2)^{-1} \Leftrightarrow (b, a)\in R_1\cap R_2 \Leftrightarrow (b, a)\in R_1$ і $(b, a)\in R_2 \Leftrightarrow (a, b)\in R_1^{-1}$ і $(a, b)\in R_2^{-1}$, тобто $(R_1\cap R_2)^{-1} = (R_1^{-1})\cap(R_2^{-1})$.

д) Нехай $(a, d)\in(R\circ R_1) \circ R_2$, тоді існує $c\in A$ такий, що $(a, c)\in R\circ R_1$ і $(c, d)\in R_2$. Отже існує такий $b$, що $(a, b)\in R$, $(b, c)\in R_1$ і $(c, d)\in R_2$, а це означає, що $(b, d)\in R_1\circ R_2$ і $(a,d)\in R\circ(R_1\circ R_2)$, тобто $(R\circ R_1)\circ R_2 \subseteq R\circ(R_1\circ R_2)$. Обернене включення доводиться аналогічно. ►

### 2.3. Способи задання відношень

Означення 2.8. Розглянемо відношення $R\subseteq A\times B$. Нехай елемент $a_i\in A$. **Перерізом відношення $R$ за елементом $a_i$** називається множина елементів $b$ з $B$, для яких пара $(a_i, b)\in R$:

$$R(a_i) = \{b\in B \mid (a_i,b)\in R\}.$$

Множину всіх перерізів відношення $R$ називають **фактор-множиною** множини $B$ за відношенням $R$ і позначають $B/R$. Вона повністю визначає відношення $R$.

Наприклад, нехай $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Відношення $R = \{(1,2), (1,4), (2,3), (3,3), (3,6)\}$. Очевидно, $R(1) = \{2, 4\}$, $R(2) = \{3\}$, $R(3) = \{3, 6\}$. Множина $B/R = \{R(1), R(2), R(3)\}$ є фактор-множиною множини $B$ за відношенням $R$.

Об'єднання перерізів за елементами деякої підмножини $C\subseteq A$ є перерізом $R(C)$ відношення $R$ за підмножиною $C$, тобто

$$R(C) = \bigcup_{a\in C} R(a).$$

Так для $C = \{1, 2\}$, маємо $R(C) = \{2, 3, 4\} = R(1)\cup R(2)$.

З попереднього зрозуміло, що відношення може бути подане за допомогою фактор-множини. Розглянемо ще два способи подання скінченного бінарного відношення: за допомогою матриці та графа.

**Матричний спосіб** ґрунтується на поданні відношення $R\subseteq A\times B$ відповідною йому прямокутною таблицею (матрицею), що складається з нулів та одиниць, де рядки – перші координати, а стовпці – другі, причому на перетині $i$-го рядка і $j$-го стовпця буде 1, якщо виконується співвідношення $a_iRb_j$, або 0 – якщо воно не виконується.

Для наведеного вище відношення матриця буде мати такий вигляд:

| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Матриця повного (універсального) відношення – це квадратна матриця, що складається лише з одиниць. Матриця тотожного (діагонального) відношення – це квадратна матриця, яка складається з нулів та одиниць по головній діагоналі. Матриця порожнього відношення – це квадратна матриця, що складається лише з нулів.

Відношення $R \subseteq A \times B$ можна також зображати за допомогою **орієнтованого графа**. Елементи множин $A$ та $B$ зображуються точками на площині (вершини), а впорядковані пари – лінією зі стрілкою (дуги), яка направлена від $a$ до $b$, якщо $aRb$.

Для наведеного вище відношення граф буде мати наступний вигляд:

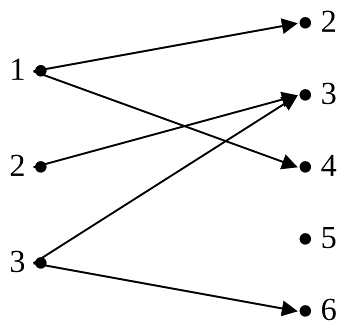


Рис 2.1. Приклад представлення відношення за допомогою графа.

Граф бінарного відношення – це дводольний граф. Відношення в $A$ зображується графом із вершинами, що відповідають елементам цієї множини. Якщо $a_iRa_j$ і $a_jRa_i$, то вершини зв'язуються двома протилежно спрямованими дугами, які умовно можна замінювати однією не спрямованою дугою (ребром). Співвідношенню $a_iAa_i$ відповідає петля.

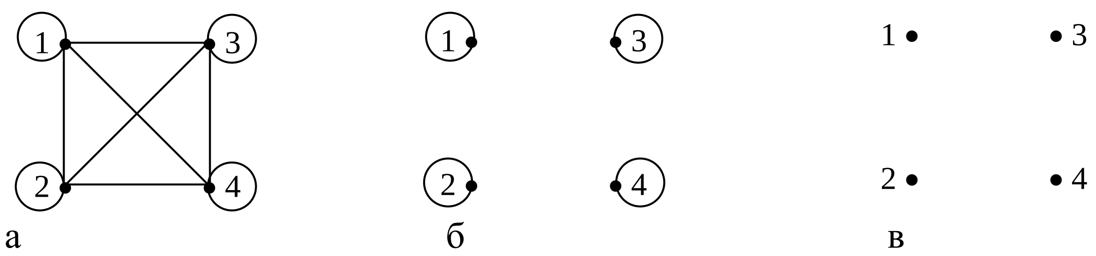


Рис 2.2. Графи універсального (а), тотожного (б) та порожнього (в) відношень.

Нехай $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Тоді граф універсального відношення на $A$ зображено на рис. 2.2,а, граф тотожного відношення на $A$ – на рис. 2.2,б, а граф порожнього відношення на $A$ – на рис 2.2,в.

Матриця оберненого відношення $R^{-1}$ для відношення $R$ – це транспонована матриця відношення $R$. Граф оберненого відношення $R^{-1}$ утворюється із графа відношення $R$ заміною всіх дуг на протилежні.

Матриця композиції відношень $T = R\circ S$ утворюється як добуток матриць відношень $R$ та $S$ з подальшою заміною відмінних від нуля елементів одиницями.

Справді, елемент $t_{ik}$ матриці композиції знайдемо як суму добутків відповідних елементів матриць $R$ та $S$ (відповідно до правила множення матриць):

$$t_{ik} = r_{i1}s_{1k} + r_{i2}s_{2k} + \ldots + r_{in}s_{nk} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}s_{jk}\ .$$

Очевидно, така сума відмінна від нуля тоді й тільки тоді, коли хоча б один доданок відмінний від нуля, тобто дорівнює одиниці:

$$r_{ij}s_{jk} = 1 \Leftrightarrow r_{ij} = 1 \text{ та } s_{jk} = 1 \Leftrightarrow a_iRb_j \text{ та } b_jSc_k \Leftrightarrow a_iR\circ Sc_k.$$

Якщо у виразі $t_{ik}$ не один, а кілька одиничних доданків, то кожен з них відповідає одному й тому самому співвідношенню $a_iR\circ Sc_k$, через що їх сума має бути замінена одиницею.

Для композиції відношень $R$ = {(1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (3,4)} та $S$ = {(1,1), (1,2), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (4,2) (4,3)} матриця утворюється так:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Нехай $R\subseteq A\times B$ та $S\subseteq B\times C$. Щоб побудувати граф $T = R\circ S$, потрібно до графа відношення $R$ добудувати граф відношення $S$. Граф композиції відношень дістанемо, якщо вилучимо вершини, які відповідають елементам множини $B$. При вилученні вершини $b_j$ кожний шлях, що проходить через неї від вершин множини $A$ до вершин множини $C$, замінюється однією дугою з тим самим напрямком.

Для останнього прикладу маємо наступний граф:

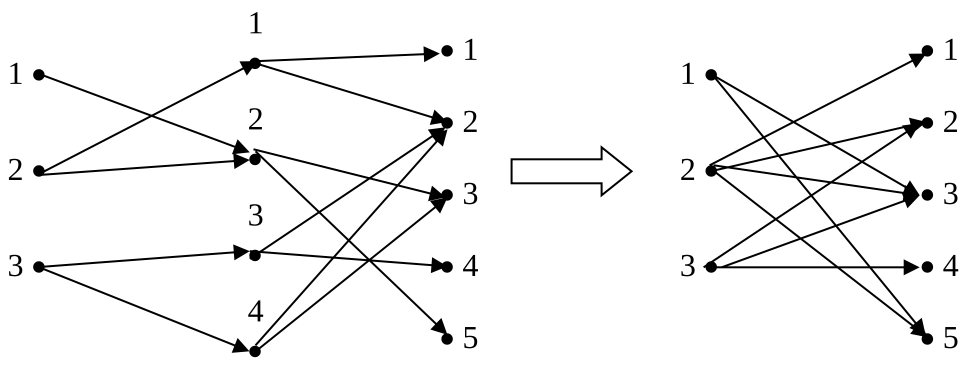


Рис 2.3. Граф композиції відношень.

### 2.4. Властивості відношень

Означення 2.9. Нехай $R$ – бінарне відношення у множині $A$ ($R \subseteq A \times A$). Тоді відношення $R$ є:

- **рефлексивним**, якщо $I \subseteq R$, тобто, іншими словами, воно завжди виконується між елементом і ним самим ($\forall a \in A,\ aRa$). Як приклад такого відношення можна навести відношення нестрогої нерівності на множині натуральних або дійсних чисел.

Матриця рефлексивного відношення характеризується тим, що всі елементи її головної діагоналі – одиниці. Граф рефлексивного відношення – тим, що петлі є у всіх вершинах.

- **антирефлексивним (іррефлексивним)**, якщо $R \cap I = \varnothing$, тобто якщо співвідношення $a_i R a_j$ виконується, то $a_i \neq a_j$. Це, наприклад, відношення строгої нерівності на множинах натуральних або дійсних чисел, відношення "бути старшим" у множині людей.

Матриця антирефлексивного відношення характеризується тим, що всі елементи її головної діагоналі – нулі. Граф антирефлексивного відношення не має жодної петлі.

- **симетричним**, якщо $R = R^{-1}$, тобто при виконанні співвідношення $a_i R a_j$ виконується співвідношення $a_j R a_i$. Як приклад такого відношення можна навести відстань між двома точками на площині, відношення "бути рідним" на множині людей.

Симетричність відношення спричиняє також симетричність матриці. Також для такого відношення вершини графа можуть бути пов'язані тільки парами протилежно спрямованих дуг (тобто ребрами).

- **асиметричним**, якщо $R \cap R^{-1} = \varnothing$, тобто із двох співвідношень $a_i R a_j$ та $a_j R a_i$ щонайменше одне не виконується. Як приклад такого відношення можна навести відношення "бути батьком" у множині людей, відношення строгого включення в множині всіх підмножин деякого універсуму. Очевидно, якщо відношення асиметричне, то воно й антирефлексивне.

Матриця асиметричного відношення характеризується тим, що всі елементи її головної діагоналі – нулі й немає жодної пари одиниць на місцях, симетричних відносно головної діагоналі. У графа такого відношення петлі відсутні, а вершини можуть бути пов'язані тільки однією спрямованою дугою.

- **антисиметричним**, якщо $R \cap R^{-1} \subseteq I$, тобто обидва співвідношення $a_i R a_j$ та $a_j R a_i$ одночасно виконуються тоді й тільки тоді, коли $a_j = a_i$. Як приклад можна навести нестрогу нерівність.

Матриця антисиметричного відношення має ті самі властивості, що й асиметричного, за винятком вимоги рівності нулю елементів головної діагоналі. У графі такого відношення можуть бути петлі, але зв'язок між вершинами, якщо він є, також відбувається тільки однією спрямованою дугою.

- **транзитивним**, якщо $R{\circ}R\subseteq R$, тобто з виконання співвідношень $a_iRa_j$ та $a_jRa_k$ випливає виконання співвідношення $a_iRa_k$. Як приклад можна навести відношення "бути дільником" на множині цілих чисел, "бути старшим" на множині людей.

Матриця транзитивного відношення характеризується тим, що коли $R_{ij}$=1 й $R_{jk}$=1, то $R_{ik}$=1, причому наявність одиничних елементів на головній діагоналі не порушує транзитивність матриці. Граф транзитивного відношення характеризується тим, що коли через деяку сукупність вершин графа проходить шлях, то існують дуги, які з'єднують будь-яку пару вершин з цієї сукупності в напрямку шляху. Як правило, на графі транзитивного відношення зображують тільки цей шлях, а зумовлені транзитивністю дуги опускають. Такий граф називають **графом редукції** або **кістяковим графом**.

Означення 2.10. Нехай $R$ – бінарне відношення на множині $A$. **Рефлексивним замкненням** $R$ є найменше рефлексивне відношення на $A$, що містить $R$ як підмножину. **Симетричне замкнення** $R$ є найменше симетричне відношення на $A$, що містить $R$ як підмножину. **Транзитивне замкнення** $R$ є найменше транзитивне відношення на $A$, яке містить $R$ як підмножину.

Теорема 2.2. Нехай $R$ – бінарне відношення на множині $A$ і $I$ – тотожне відношення на $A$. Тоді:

а) $R\cup I$ є рефлексивним замкненням $R$.

б) $R\cup R^{-1}$ є симетричним замкненням $R$.

в) якщо $A$ – кінцева множина, що містить $n$ елементів, то відношення $R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^n$ є транзитивним замкненням $R$.

*Доведення*. Доведення тверджень (а) та (б) залишаємо на самостійну роботу.

Позначимо транзитивне замкнення $R$ через $R^{\mathrm{T}}$. Для доведення твердження (в) спочатку покажемо, що $R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^n\subseteq R^{\mathrm{T}}$. Проведемо індукцію по $n$. Для $n$=1 маємо $R\subseteq R^{\mathrm{T}}$, що безумовно істинно. Нехай $R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^k\subseteq R^{\mathrm{T}}$. Необхідно показати, що $R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^k\cup R^{k+1}\subseteq R^{\mathrm{T}}$ або, що теж саме, $R^{k+1}\subseteq R^{\mathrm{T}}$. Нехай $(a, c)\in R^{k+1}$. Тоді існує $b$ таке, що $(a, b)\in R^k$ і $(b, c)\in R$. Але, згідно індуктивного припущення, $(a, b)$ і $(b, c)\in R^{\mathrm{T}}$. Оскільки $R^{\mathrm{T}}$ транзитивне, $(a, c)\in R^{\mathrm{T}}$. Тому $R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^{k+1}\subseteq R^{\mathrm{T}}$. Для того, щоб показати, що $R^{\mathrm{T}}\subseteq R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^n$, просто покажемо, що $R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^n$ транзитивне. Нехай $(a, b)\in R^j$ і $(b,c)\in R^k$. Тоді

$(a,c)\in R^{j+k}$. Якщо $a = c$, твердження доведено. Інакше існують $b_2, b_3, b_4, ..., b_{j+k-1}\in A$ такі, що $(a, b_2), (b_2, b_3), (b_3, b_4),\ldots,(b_{j+k-2}, b_{j+k-1}), (b_{j+k-1}, c)\in R$. Позначимо $a$ через $b_1$, а $c$ через $b_{j+k}$. Якщо деякі із $b_i$ рівні, наприклад, $b_p = b_q$, із вказаної вище послідовності впорядкованих пар, які знаходяться у відношення $R$, можна видалити $(b_p, b_{p+1}), (b_{p+1}, b_{p+2}), \ldots, (b_{q-1}, b_q)$ і після цього отримати послідовність $a, b_2, b_3, ..., b_{p-1}, b_q, ..., b_{j+k-1}, c$, в якій кожний попередній елемент знаходиться у $R$-відношенні до наступного. Так можна продовжувати до тих пір, поки всі елементи не стануть відмінними, але при цьому кожний з них буде знаходитись у $R$-відношенні до наступного. Оскільки у множині $A$ існує тільки $n$ різних елементів, отримаємо, що $(a, c)\in R^h$, де $h\leq n$ і $R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots\cup R^n$ транзитивне. ►

### 2.5. Алгоритм Уоршелла

Розглянемо алгоритм Уоршелла побудови транзитивного замкнення відношення $R$ на множині $A$, $|A| = n$. На вхід алгоритму подається матриця відношення $R$, а на виході буде матриця транзитивного замкнення $T$.

1. Поточне відношення $S = R$.
2. В якості поточного елементу ($i$) обирається перший елемент множини $A$.
3. Додати до відношення $T$ всі ті впорядковані пари з $A\times A$ $(j,k)$, для яких виконується:
   a. ця впорядкована пара присутня у $S$ ($jSk$) або
   b. в $S$ присутні дві впорядковані пари виду $jSi$ та $iSk$, тобто у $S$ існує відношення між першою координатою впорядкованої пари та поточним елементом, а також між поточним елементом та другою координатою впорядкованої пари.
4. Поточне відношення $S = T$.
5. Якщо є ще не вибрані елементи з $A$, то обрати наступний з них в якості поточного елементу ($i$) та перейти до п.3. Інакше перейти на п.6.
6. Кінець.

У пункті 3 алгоритму до транзитивного замкнення додаються такі пари елементів з номерами $j$ та $k$, для яких існує послідовність проміжних елементів з першого елементу $A$ і до поточного елементу $A$. Дійсно, це вірно у двох можливих випадках: або вже існує послідовність проміжних елементів з номерами у діапазоні від першого до попереднього перед поточним для пари елементів з $(j, k)$, або існує дві послідовності з номерами у діапазоні від першого до попереднього поточного – одна для пари елементів $(j, i)$, а друга – для пари елементів $(i, k)$. Перший випадок відповідає тому, що ми додаємо у транзитивне замкнення всі можливі “шляхи”, будь-якої довжини. Другий випадок на графі відношення буде відповідати тій ситуації, коли між вершинами $j$ та $k$ є зв’язок із декількох дуг і вони проходять через поточний елемент множини $A$.