Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи з дисципліни

«КОМП'ЮТЕРНА ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА»

для студентів усіх форм навчання напрямку

6.050103 – Програмна інженерія

ЗАТВЕРДЖЕНО
кафедрою ПЗ ЕОМ
Протокол №___
від "___" ______

Харків 2010

Методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни «Комп’ютерна дискретна математика» для студентів усіх форм навчання напрямку 6.050103 – Програмна інженерія /Упоряд.: Н.В. Білоус, І. В. Куцевич, Т.А. Разівілова. – Харків: ХНУРЕ, 2010. – 98 с.

Упорядники: Н.В. Білоус,
І. В. Куцевич
Т.А. Разівілова

Рецензент А.Д. Тевяшев, д-р техн. наук, проф. каф. ПММ

ЗМІСТ

Вступ 4
1 Мета і задачі дисципліни 5
1.1 Мета навчальної дисципліни 5
1.2 Програма завдань і умінь 5
2 Робоча програма дисципліни 7
2.1 Лекційні заняття 7
2.2 Розділи програми, що пропонуються студентам для самостійного вивчення 13
2.3 Теми лабораторних робіт 14
2.4 Теми практичних занять 15
2.5 Самостійна робота 16
2.6 Система атестації 16
2.7 Рекомендована література 18
3 Огляд рекомендованої літератури 19
4 Методичні вказівки до вивчення дисципліни 21
5 Методичні вказівки до тем для самостійного вивчення 34
6 Перелік тем, за якими буде включень завдання до підсумкового тесту 37
7 Типи тестових завдань, які буде включено до підсумкового тесту 38
8. Приклад завдань для домашніх та контрольних робіт 39
8. Приклад розв’язання деяких типових завдань 66
Рекомендована література 96

ВСТУП

Метою дисципліни „Комп’ютерна дискретна математика” є фундамент-тальна підготовка студентів в області теорії дискретних структур (discrete structures). Дискретні структури є фундаментальною основою програмної інженерії. Говорячи «фундаментальна», вважається, що порівняно невелика кількість вчених безпосередньо працюватимуть в даній області, але при цьому багато інших розділів програмної інженерії вимагають уміння працювати з концепціями дискретних структур.

«Комп’ютерна дискретна математика» включає важливий матеріал з таких областей як теорія множин, логіка, теорія графів і комбінаторика. Відомості з теорії комп’ютерної дискретної математики широко використовуються не тільки в структурах даних й алгоритмах, але й у всіх інших розділах інформатики. Наприклад, при перевірці формальних специфікацій, верифікації, а також у криптографії необхідно вміти створювати й розуміти формальні докази. Поняття теорії графів використовуються в мережах, операційних системах і компіляторах. Теорія множин знаходить застосування в програмній інженерії й базах даних.

Основними задачами дисципліни є: навчити студентів глибоко розуміти проблеми, що виникають під час автоматизації процесів обробки дискретної інформації, прищепити навички застосування формальних методів дискретної математики під час проектування автоматизованих систем обробки інформації та керування, комп'ютерних систем проектування, створити надійний теоретичний фундамент для наступних курсів.

Згідно з планом, на вивчення дисципліни відводиться 180 години. З них на лекції – 50 годин, на лабораторні роботи – 20, на практичні заняття – 20, на самостійну роботу – 90 годин.

Дисципліна розрахована на 1 семестр. Після опрацювання декількох лекцій виконується лабораторна робота та проводяться практичні заняття для закріплення матеріалу. Лабораторні роботи проводяться в обчислювальному центрі ХНУРЕ, де студенти забезпечені відповідною технічною базою. Матеріали, які є додатковими відомостями з теми, що вивчається, і потрібні для більш детального та повного засвоєння дисципліни, виносяться на самостійне опрацювання студентів. Після вивчення даної дисципліни семестровий контроль відбувається у формі комбінованого іспиту.

1 МЕТА І ЗАДАЧІ ДИСЦИПЛІНИ

1.1 Мета навчальної дисципліни

– Ознайомити студентів з основами дискретної математики та її використаннями в інформатиці;

– підготувати надійний теоретичний фундамент для вивчення наступних курсів професійної спрямованості;

– навчити студентів глибоко розуміти проблеми, які виникають при автоматизації процесів обробки дискретної інформації;

– прищеплювати навички природничого використання формальних методів дискретної математики, пов'язаних з розробкою та експлуатацією засобів обчислювальної техніки та програмного забезпечення;

– ознайомити з широким спектром методів комп'ютерної дискретної математики;

– навчити розуміти проблеми, що виникають при синтезі пристроїв обробки дискретної інформації, при побудові алгоритмів та програм для таких пристроїв.

1.2 Програма знань і вмінь

За результатом вивчення дисципліни студенти повинні:

знати:

– історію розвитку математичного апарату, орієнтованого на формалізацію дискретних процесів;

– мову теорії множин та відношень, алгебри логіки, математичної логіки,теорії графів, основи комбінаторики;

– методи дискретної математики в галузі опису та формалізації дискретних процесів;

– методи дискретної математики у сфері побудови пристроїв для обробки дискретної інформації.

вміти:

– аналізувати логічну та алгоритмічну структуру фізичних та технологічних процесів, процесів обробки інформації в природі та суспільстві;

– використовувати апарат дискретної математики для формалізації та математичного опису задач, що виникають у сфері науки та виробництва;

– поєднати прикладні задачі з відповідними моделями множин, функцій та відношень, а також давати інтерпретацію відповідних операцій;

– виконувати аналіз та синтез дискретних об'єктів та процесів, використовуючи поняття і закони теорії множин та теорії відношень;

– використовувати формальні методи символічної логіки висловлювань та логіки предикатів;

– використовувати формальні засоби символічної логіки для моделювання алгоритмів та реальних життєвих ситуацій;

– використовувати формальні логічні докази та логічні судження для вирішення прикладних задач;

– виконувати аналіз та синтез дискретних об’єктів та процесів, використовуючи елементи теорії графів;

– моделювати задачі інформатики з використанням дерев та графів;

– поєднати графи та дерева із структурами даних, алгоритмами та обчислюваннями;

– виконувати аналіз та синтез дискретних об’єктів та процесів, використовуючи елементи теорії комбінаторного аналізу;

– вирішувати типові рекурентні відношення;

– аналізувати задачу з метою побудови відповідних рекурентних рівнянь або виявляти пов’язані з цим обчислювальні питання.

2 РОБОЧА ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ

2.1 Лекційні заняття

Дана дисципліна побудована за модульною структурою: всього 1 змістовний модуль та 3 залікових кредити.

Кожен модуль складається з набору лекцій (табл. 2.1), практичних занять (табл. 2.4), лабораторних робіт (табл. 2.3) і тем для самостійного вивчення (табл. 2.2).

Таблиця 2.1 – Теми лекційних занять

Номер теми	Назва та зміст змістовного модуля	Розподіл часу за видами занять, год.				
		лк	лб	пз	срс	
						кз
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1.	**Вступ**	**0,5**			**0**	
	1.1. Цілі і задачі курсу, його місце в системі підготовки фахівців із комп'ютерних наук. 1.2. Внесок вчених у розвиток дискретної математики, історія її зародження і становлення.					
2.	**Основні поняття теорії множин. Алгебра множин**	**2,5**	**2**	**2**	**5,5**	
	2.1. Основні визначення. 2.2. Способи завдання множин. 2.3. Операції над множинами. 2.4. Рівність множин. 2.5. Підмножини. 2.6. Потужність множин. 2.7. Скінченні і нескінченні множини. 2.8. Застосування апарату теорії множин. 2.9. Формули і тотожності алгебри множин. 2.10. Еквівалентні перетворення формул. 2.11. Геометрична інтерпретація множин: кола Ейлера та діаграми Венна. 2.12. Рівнопотужні або еквівалентні множини. 2.13. Зчисленні, незчисленні, континуальні множини.					

Продовження табл. 2.1

1	2	3	4	5	6	7
3.	**Відношення та їх властивості**	**4**	**2**	**1**	**5**	
	3.1. Декартов добуток множин. 3.2. Кортежі. 3.3. Упорядковані пари. 3.4. Поняття відношення. 3.5. Бінарні відношення. 3.6. Властивості бінарних відношень. 3.7. Операції над відношеннями. 3.8. Зворотне відношення. 3.9. Композиція відношень. 3.10. Відношення еквівалентності. 3.11. Відношення порядкові. 3.12. Відношення толерантності. 3.13. Способи завдання відношень.					
4.	**Відображення та функції**	**3**		**1**	**2,5**	
	4.1. Функціональні відношення. 4.2. Відображення. 4.3. Типи відображень – ін'єкція, бієкція, сюр'єкція. 4.4. Реляційна модель даних та реляційна алгебра. 4.5. Операції алгебри відношень. 4.6. Принцип Діріхле. 4.7. Аналітичне доведення тотожностей.					
5.	**Булеві функції та алгебра логіки**	**4**	**1**	**2**	**5**	
	5.1. Ізоморфізм алгебри множин та булевої алгебри. 5.2. Булеві змінні, булеві функції. 5.3. Кількість різних наборів аргументів та булевих функцій на *n* булевих змінних. 5.4. Способи завдання булевих функцій. 5.5. Булеви функції від однієї та двох змінних. 5.6. Властивості операцій (комутативність, асоціативність, дистрибутивність, наявність 0 і 1). 5.7. Елементарні функції алгебри логіки. 5.8. Закони і тотожності алгебри логіки. 5.9. Еквівалентні перетворення формул алгебри логіки. Математична індукція.					

Продовження табл. 2.1

1	2	3	4	5	6	7
6.	**Двоїстість булевих функцій**	**1**	**1**		**1,5**	
	6.1. Двоїсті булеві функції. 6.2. Самодвоїсті булеві функції. 6.3. Принцип двоїстості. 6.4. Правило побудови двоїстих формул.					
7.	**Нормальні форми**	**2**	**2**		**5**	
	7.1. Теорема про диз'юнктивне розкладання функції алгебри логіки. 7.2. ДНФ, ДДНФ. 7.3.Використання теореми про розкладання і її висновки для спрощення формул алгебри логіки і навпаки. 7.4. Перехід від таблиці булевої функції до формули алгебри логіки і навпаки.					
8.	**Алгебра Жегалкіна**	**1**			**0,5**	
	8.1. Тотожності алгебри Жегалкіна. 8.2. Формули переходу від алгебри логіки до Алгебри Жегалкіна і навпаки. 8.3. Поліном Жегалкіна та правило його побудови. 8.4. Лінійні булеві функції.					
9.	**Функціональна повнота наборів булевих функцій**	**2**	**1**		**2**	
	9.1. Поняття повноти набору булевих функцій. 9.2. Поняття замкненого класу булевих функцій. 9.3. Монотонні булеві функції. 9.4. Булеві функції, що зберігають 0 і 1. 9.5. Замкнені класи булевих функцій. 9.6. Теорема Поста про функціональну повноту набору булевих функцій.					
10.	**Методи мінімізації булевих функцій**	**2**		**2**	**9**	
	10.1. Критерії мінімізації; карти Карно для булевих функцій від 3, 4, 5 і 6 змінних. 10.2. Частково-завдані булеві функції. 10.3. Правила склеювання контурів карт Карно.					

Продовження табл. 2.1

1	2	3	4	5	6	7
11.	**Основи математичної логіки**	**1**			**0,5**	
	11.1. Історія математичної логіки; типи логік. 11.2. Внесок вчених у формування сучасної математичної логіки. 11.3. Поняття числення, складові.					
12.	**Логіка висловлювань**	**3**	**1**	**1**	**3,5**	
	12.1. Висловлювання. 12.2. Поняття атома, молекули, формули. 12.3. Логічні зв'язки. 12.4. Побудова складних формул. 12.5. Область дії логічних зв'язок. 12.6. Загальнозначущі і суперечливі формули. 12.7. Істиннісне значення висловлення. 12.8. Інтерпретація формул у логіці висловлювань. 12.9. Логічні наслідки. 12.10. Правила дедуктивних висновків логіки висловлень.					
13.	**Логіка предикатів**	**4**	**1**	**1**	**6**	дкр1
	13.1. Поняття терма, предиката; зміст вільних і зв'язаних змінних в алгебрі предикатів. 13.2. Правильно побудовані формули. 13.3. Інтепретація формул у логіці предикатів. 13.4. Логічні наслідки в логіці предикатів. 13..5. Квантори. 13.6. Випереджені нормальні форми (ВНФ), перетворення вільної формули до ВНФ. 13.7. Закони логіки першого порядку.					
	Контрольна точка № 1	**30**	**11**	**10**	**46**	

Продовження табл. 2.1

1	2	3	4	5	6	7
14.	**Основні поняття теорії графів**	**3**	**1**	**1**	**6,5**	
	14.1. Походження графів. 14.2. Визначення графа. 14.3. Види графів. 14.4. Способи задання графів. 14.5. Орієнтовані і неорієнтовані графи. 14.6. Маршрут, ланцюг, цикл, шлях, контур. 14.7. Зв'язність графів, компонента зв'язності, сильнозв'язані графи. 14.8. Ступінь вершини. 14.9. Сума ступенів вершин графа. 14.10. Досяжність. 14.11. Визначення ізоморфізму графів. 14.12. Ізоморфізм як відношення еквівалентності на множині графів. 14.13. Приклади ізоморфних графів.					
15.	**Ейлерові та Гамільтонові ланцюги і цикли**	**2**		**1**	**5**	
	15.1. Теорема Ейлера. 15.2. Алгоритм знаходження ейлерова циклові. 15.3. Гамільтонові ланцюги і цикли. 15.4. Умови існування гамільтонових ланцюгів і циклів на графі.					
16.	**Планарність графів**	**2**		**2**	**3**	
	16.1. Плоскі та планарні графи. 16.2. Гомеоморфні графи. 16.3. Теорема Понтрягіна-Курантовського. 16.4. Теореми про особливості планарних графів. 16.5. Жорданова крива. 16.6. Побудова плоского зображення графа.					

Продовження табл. 2.1

1	2	3	4	5	6	7
17.	**Відстані на графах**	**2**	**1**		**6**	
	17.1. Аксіоми метрики. 17.2. Графи з числовими характеристиками ребер (дуг). 17.3. Відстань між двома вершинами на графі. 17.4. Алгоритм визначення відстані між вершинами на графі з одиничними довжинами ребер. 17.5. Алгоритм Дійкстри визначення відстані між вершинами на графі з довільними довжинами ребер.					
18.	**Дерева**	**3**	**2**		**6,5**	
	18.1. Визначення дерева, властивості дерев, ліс. 18.2. Підрахунок числа дерев у графі. 18.3. Остовні дерева. 18.4. Дерево мінімальної вартості. 18.5. Алгоритм Борувки. 18.6. Символ (код) дерева. 18.7. Кодування, декодування дерев. 18.8. Бінарні дерева: основні визначення. 18.9. Правила обходу бінарних дерев. 18.10. Еквівалентні бінарні дерева.					
19.	**Транспортні мережі**	**2**	**2**	**2**	**7**	
	19.1. Транспортні мережі та їх властивості. 19.2. Розріз мережі. 19.3. Задача про найбільший потік у мережі. 19.4. Теорема про найбільший потік і розріз із найменшою пропускною спроможністю. 19.5. Алгоритм Форда-Фалкерсона.					
20.	**Основи комбінаторного аналізу**	**2**	**1**	**1**	**3**	
	20.1.Загальні правила і задачі комбінаторики. 20.2. Вибірка. 20.3. Правила суми і добутку.					

Продовження табл. 2.1

1	2	3	4	5	6	7
21.	**Формули простого перелічення**	**2**	**2**	**1**	**4**	
	21.1. Перестановки, розміщення, сполучення. 21.2. Рекурентні співвідношення. Елементарні методи вирішення. 21.3. Числа Фібоначчі.					
22.	**Формула включення та виключення**	**2**		**2**	**3**	дкр2
	Контрольна точа № 2	**20**	**9**	**10**	**44**	
	Підсумок	**50**	**20**	**20**	**90**	

2.2 Розділи програми, що пропонуються студентам для самостійного вивчення

На самостійне опрацювання студентів виносяться матеріали, які є додатковими відомостями з тем, що вивчаються, і потрібні для більш детального та повного опанування дисципліни. Перелік тем для самостійного вивчення наведено у табл. 2.2.

Таблиця 2.2 – Перелік тем для самостійного вивчення

Номер	Форми самостійної роботи	Обсяг, годин
1	**2**	**3**
1	**Теорема про кон'юнктивне розкладання функції алгебри логіки; КНФ, ДКНФ.**	**2**
2	**Методи мінімізації булевих функцій**: – метод Квайна-Мак-Класкі, метод Порецького-Блейка; – метод суттєвих змінних.	**4**
3	**Синтез комбінаційних схем**: – перемикальні ланцюги; – дво- і багатоступінчасті комбінаційні схеми.	**2**
4	**Багатозначна логіка**. Основні поняття і функції k-значної логіки.	**2**
5	**Основні поняття теорії графів: операції над графами.**	**3**
6	**Задача комівояжера**: – задача комівояжера; приклади практичних задач, що зводяться до задачі комівояжера; метод галузей і границь про знаходження гамільтонового циклу; алгоритм Флері знаходження ейлерова циклу.	**3**

Продовження табл. 2.2

1	2	3
7	**Розфарбування графів**: – хроматичне число, теорема про біхроматичний граф; – алгоритм розфарбування вершин графа; – реберне хроматичне число (хроматичний клас); – алгоритм реберного розфарбування; – теорема Брукса та її наслідки для оцінки хроматичного числа; – теореми Шеннона і Візінга для оцінки реберного хроматичного числа; – гіпотеза про чотири фарби; теорема про п’ять фарб.	**4**
8	**Цикломатика графів**: – цикломатичне число та його властивості; – цикломатична матриця; – базис циклів; – алгоритм побудови базису циклів.	**3**
9	**Розрізи графів**: – розріз і множина, що розрізає; – ранг розрізу; – базис розрізів графа; – алгоритм одержання базису розрізів.	**2**

2.3 Теми лабораторних робіт

У табл. 2.3 наведено теми лабораторних робіт.

Таблиця 2.3 – Теми лабораторних робіт

Назва	Назва розділу або теми	Обсяг, год.
1	2	3
1	Множини. Алгебра множин.	**2**
2	Відношення. Функції. Відображення.	**2**
3	Булеві функції.	**1**
4	Двоїсті булеві функції. Самодвоїстіть.	**1**
5	Нормальні форми.	**1**
6	Теорема про розкладання булевих функцій.	**1**
7	Теорема Поста про функціональну повноту набору булевих функцій.	**1**
8	Логіка висловлювань.	**1**
9	Логіка предикатів.	**1**

Продовження табл. 2.3

1	2	3
10	Основні поняття теорії графів.	**1**
11	Відстані на графах.	**1**
12	Дерева.	**2**
13	Транспортна задача. Алгоритм Форда-Фалкерсона.	**2**
14	Формули простого перелічення.	**1**
15	Рекурентні співвідношення.	**2**
	Загальна кількість годин.	**20**

Підготовка до виконання та здачі лабораторних робіт є самостійною роботою і включає в себе вивчення відповідного лекційного матеріалу і рекомендованої літератури та оформлення звіту. Згідно з програмою, на підготовку до кожної лабораторної роботи та оформлення звіту відводиться 2 години. Звіти оформлюються на аркушах формату А4 згідно з ДСТУ 3008-95.

2.4 Теми практичних занять

У табл. 2.4 наведено теми практичних занять.

Таблиця 2.4 – Теми практичних занять

Номер теми	Назва розділу або теми	Обсяг год.
1	Рівність множин. Алгебра множин.	**2**
2	Відношення. Відображення.	**2**
3	Спрощення формул алгебри логіки. Метод математичної індукції для доведення тотожностей алгебри логіки.	**2**
4	Мінімізація булевих функцій. Карти Карно. Метод Квайна-Мак-Класкі.	**2**
5	Математична логіка. Логічні наслідки. Правила дедуктивних висновків.	**2**
6	Основні понятя теорії графів. Ейлерові та гамільтонові цикли та ланцюги. Розфарбування графів.	**2**
7	Планарність графів. Розфарбування графів.	**2**
8	Цикломатика. Розрізи.	**2**
9	Основи комбінаторного аналізу.	**2**
10	Формули включення-виключення.	**2**
	Загальна кількість годин.	**20**

2.5 Самостійна робота

На підготовку до лекцій відводиться з розрахунку 0,5 години самостійної роботи студента на 1 годину аудиторного навантаження, 1 година самостійної роботи студента на 1 годину практичних чи лабораторних робіт. У табл. 2.5 наведено структуру самостійної роботи студентів над дисципліною.

Таблиця 2.5 – Структура самостійної роботи студента

Номер	Форми самостійної роботи	Обсяг, годин
1	Підготовка до лекцій	**25**
2	Підготовка до практичних занять	**20**
3	Підготовка до лабораторних робіт	**20**
4	Теми для самостійного вивчення	**25**
Всього		**90**

2.6 Система атестації

Форма контролю знань – комбінований іспит. Це означає, що студент повинен виконати всі завдання кожного модуля та всі вимоги до вивчення дисципліни. Після одержання позитивної оцінки за семестр (від 60 балів) студенти виконують екзаменаційний тест. Розрахунок оцінки за семестр здійснюється за допомогою таблиці 2.6.

Таблиця 2.6 – Рейтингова оцінка за семестр

Вид заняття / контрольний захід	**Рейтингова оцінка**
1	**2**
Пз № 2	0-2
Пз № 3	0-2
Пз № 4	0-2
Пз № 5	0-2
Дкр1	0-13
Лб № 1	0-3
Лб № 2	0-3
Лб № 3	0-3
Лб № 4	0-3
Лб № 5	0-3
Лб № 6	0-3
Лб № 7	0-3
Лб № 8	0-3
Конспект лекцій	0-3
Робота на лекційних заняттях	0-3
Контрольна точка I	**0-51**

Продовження табл. 2.6

1	2
Пз № 6	0-2
Пз № 7	0-2
Пз № 8	0-2
Пз № 9	0-2
Пз № 10	0-2
Дкр2	0-13
Лб № 9	0-3
Лб № 10	0-3
Лб № 11	0-3
Лб № 12	0-3
Лб № 13	0-3
Лб № 14	0-3
Лб № 15	0-3
Конспект лекцій	0-3
Робота на лекційних заняттях	0-2
Контрольна точка II	**0-49**
Підсумок	**0-100**

Загальна оцінка за семестр визначається за формулою: 0,6·(оцінка за семестр)+0,4·(оцінка за екзаменаційний тест).

Протягом семестру всього нараховується 2 контрольні точки. Підсумковий бал за дисципліну враховує роботу студентів у обох контрольних точках. Для успішного доступу до іспиту потрібно виконати всі види діяльності, які наведено у табл. 2.7.

Таблиця 2.7 – Види навчальної діяльності студента

Найменування видів навчальної діяльності студента	За КТ 1, %	За КТ 2, %
1. Здача теоретичного матеріалу: - відвідування лекцій; - відвідування практичних занять; - ведення конспекту лекцій.	6	5
2. Відпрацювання усіх практичних занять (виконано завдання кожного практичного заняття і за кожне одержано позитивну оцінку).	21	23
3. Відпрацювання та захист усіх лабораторних робіт з підготовкою звітів з лабораторних робіт.	24	21

Без виконання усіх без винятку пунктів табл. 2.6 студент до іспиту допущений не буде. Оцінка виставляється, виходячи з табл. 2.7.

Таблиця 2.7 – Методика виставлення оцінки

За шкалою ESTS		За національною шкалою	За шкалою навчального закладу
A	Superior	5 (відмінно)	96-100
B			90-95
C	Average	4 (добре)	75-89
D	Below Average	3 (задовільно)	66-74
E			60-65
FX	Failure	2 (незадовільно)	35-59
F	Failure		1-34

2.7 Рекомендована література

Основна література

1. Комп’ютерна дискретна математика: Підручник / Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. – Харків: «Компанія СМІТ», 2004. – 480 с.

2. Компьютерная дискретная математика: Учебник / Бондаренко М.Ф., Белоус Н.В., Руткас А.Г. – Харьков: «Компания СМИТ», 2004. – 480 с.

3. Оре О. Теория графов. 1-е изд. – М.: Наука, 1980. – 408 с.

Додаткова література

4. Андерсон Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 960 с : ил. – Парал. тит. англ.

5. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. – М.: Энергия, 1980. – 342 с.

6. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. – Киев: Техника, 1977. – 766 с.

7. Новиков Ф.А., Дискретная математика для программистов. – СПб: Питер, 2000. – 304 с.

8. Харари Ф. Теория графов / пер. с англ. И предисл. В.П. Козірева. Под ред.. Г.П. Гаврилова. Изд. 2-е. – М: Едиториал УРСС, 2003. – 296 с.

9. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969. – 328 с.

Методичні посібники та вказівки:

10. Методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни «Комп’ютерна дискретна математика» для студентів усіх форм навчання напрямку 0804 – Комп’ютерні науки спеціальностей 8.080402 – Інформаційні технології проектування, 8.080404 – Інтелектуальні системи прийняття рішень, 8.080403 – Програмне забезпечення автоматизованих систем, 8.080401 – Інформаційні

управляючі системи та технології /Упоряд.: Н.В. Білоус, І. В. Куцевич, І.Ю. Шубін – Харків: ХНУРЕ, 2007. – 56 с.

11. Методичні вказівки до лабораторних роботи з дисципліни «Комп’ютерна дискретна математика» для студентів усіх форм навчання напрямку 0804 – Комп’ютерні науки спеціальностей 8.080402 – Інформаційні технології проектування, 8.080404 – Інтелектуальні системи прийняття рішень, 8.080403 – Програмне забезпечення автоматизованих систем, 8.080401 – Інформаційні управляючі системи та технології /Упоряд.: Н.В. Білоус, І. В. Куцевич – Харків: ХНУРЕ, 2007. – 28 с.

12. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Комп’ютерна дискретна математика» для студентів усіх форм навчання напрямку 0804 – Комп’ютерні науки спеціальностей 8.080402 – Інформаційні технології проектування, 8.080404 – Інтелектуальні системи прийняття рішень, 8.080403 – Програмне забезпечення автоматизованих систем, 8.080401 – Інформаційні управляючі системи та технології /Упоряд.: Н.В. Білоус, І. В. Куцевич, І.Ю. Шубін – Харків: ХНУРЕ, 2007. – 80 с.

13. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Шубін І.Ю. Збірник тестових завдань з дискретної математики: Навч. посібник. – Харків: ХТУРЕ, 2000. – 156 с.

14. Белоус Н.В., Гетьманова Е.Е., Дударь З.В., Захарченко В.Ф., Красноголовец М.А., Лесная Н.С., Семенец В.В., Стороженко В.А., Харьковская А.А. Тесты. Физика. Математическая логика. – Харьков: ХТУРЭ, 1998. – 152 с.

15. Білоус Н.В., Шубін І.Ю. Конспект лекцій з дисципліни «Основи дискретної математики». Розділ «Комбінаторика». – Харків: ХТУРЕ, 1998. – 40 с.

16. Білоус Н.В., Дудар З.В., Лісна Н.С., Шубін І.Ю. Основи комбінаторного аналізу. Навч. посібник. – Харків: ХТУРЕ, 1999. – 96 с.

3 ОГЛЯД РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп’ютерна дискретна математика. – В підручнику викладено основні розділи дискретної математики – теорія множин, теорія відношень, математична логіка, алгебраїчні структури, автомати, алгоритми, формальні мови, теорія графів та комбінаторика.

Теоретичний матеріал проілюстровано прикладами з різних областей знань. Наведено велику кількість вправ і задач для набуття практичного досвіду.

Підручник призначено для студентів різних спеціальностей, які вивчають дискретну математику, аспірантів і спеціалістів, які використовують відповідні математичні і комп’ютерні методи.

2. Бондаренко М.Ф., Белоус Н.В., Руткас А.Г. Компьютерная дискретная математика. – У підручнику викладено основні розділи дискретної математики – теорія множин, теорія відношень, математична логіка, алгебраїчні

структури, автомати, алгоритми, формальні мови, теорія графів і комбінаторика.

Теоретичний матеріал проілюстровано прикладами з різних областей знань. Наведено велику кількість вправ і задач для набуття практичного досвіду.

Підручник призначено для студентів різних спеціальностей, які вивчають дискретну математику, аспірантів і спеціалістів, які використовують відповідні математичні і комп'ютерні методи.

3. Оре О. Теория графов. – Перші п'ять глав присвячені наочному матеріалу і містять основні поняття і властивості графів. У шостому розділі даються основи теорії цілком упорядкованих множин, що використовується в подальшому для строго абстрактного розгляду нескінченних графів. Особливо докладно у главі 7 викладається питання про паросполучення; природним її продовженням є глава 12. У главах 8 – 11 розглядаються орієнтовані графи, і потім мовою орієнтованих графів вивчаються частково упорядковані множини. три глави (13 – 15) знову присвячено наочному матеріалу.

Книга дає досить повне уявлення про напрямки досліджень у теорії графів; наводяться вправи і невирішені задачі; зроблена спроба внести систематичну термінологію. Написано книгу зрозумілою і досить доступною математичною мовою. Вона цікава і потрібна фахівцям-математикам, інженерам, що займаються прикладними задачами, і студентам старших курсів університетів і технічних вузів.

4. Андерсон Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика. – Ця книга являє собою сучасний підручник з дискретної математики. Крім таких розділів, як математична логіка, теорія множин, комбінаторика, теорія графів, теорія алгоритмів та обчислень, що традиційно включаються в основний курс дискретної математики, вона містить відомості з теорії ймовірностей, алгебри й теорії чисел. Особлива увага приділена теорії доказів. Читання книги вимагає деякої математичної культури, хоча для вивчення основних глав достатньо знань з математики в обсязі середньої школи. Матеріал супроводжується численними прикладами, наприкінці кожного розділу наводиться велика кількість вправ.

Книга адресована в першу чергу викладачам і студентам технічних спеціальностей. Вона буде також корисна тим, хто цікавиться дискретною математикою й бажає вивчити її самостійно.

5. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. – У книзі викладаються основні поняття теорії множин, загальної алгебри, алгебри логіки, комбінаторики та теорії графів, що становлять апарат дискретної математики. Викладаються основи теорії формальних систем. Докладно розглядається поняття алгоритму і наводяться різні уточнення цього поняття. Викладаються основи теорії автоматів. Розглядаються дискретні екстремальні завдання і методи їх вирішення.

Книга призначена для інженерів, що спеціалізуються у галузі автоматичного керування, обчислювальної техніки, систем передачі інформації, а також студентів і аспірантів відповідних спеціальностей.

6. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. – У книзі викладені практично важливі розділи апарата сучасної математики, що використовуються в інженерній справі: множини, матриці, графи, логіка, ймовірності. Теоретичний матеріал ілюструється прикладами з різних галузей техніки. Призначена для інженерно-технічних працівників і може бути використана студентами відповідних спеціальностей.

7. Новиков Ф.А., Дискретная математика для программистов. – У підручнику викладені основні розділи дискретної математики й описані найважливіші алгоритми на дискретних структурах даних. Підґрунтя книги становить матеріал лекційного курсу, який автор читає в Санкт-петербурзькому державному технічному університеті останні півтора десятиліття.

Для студентів вузів, що практикують програмістів і всіх бажаючих вивчити дискретну математику.Додаткова література

8. Харари Ф. Теория графов. Покрытия, укладки, турниры. – Ідеї і методи теорії графів все глибше використовуються як у класичній галузі застосування цієї теорії, наприклад, в електротехніці, так і у нових галузях, наприклад, соціології та медицині. Широко використовуються в додатках такі поняття теорії графів, як "число схрещувань", "рід графа", "фактори", "паросполучення".

Дана книга містить роботи останнього часу, що відносяться до деяких розділів теорії графів. Більшість статей містить остаточні результати, маловідомі читачам.

Книга зацікавить широке коло математиків та інженерів, що займаються теорією графів і її додатків. Аспіранти і студенти технічних вузів та університетів зможуть використовувати її як навчальний посібник.

9. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – У запропонованій книзі про комбінаторні проблеми розповідається у цікавій, популярній формі. Проте в ній розбираються й деякі досить складні комбінаторні завдання, наводяться поняття про методи рекурентних співвідношень і твірних функцій.

4 МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Тема 1. Вступ

У повсякденному житті та практичній діяльності часто доводиться говорити про деякі сукупності різних об’єктів: предметів, понять, чисел, символів тощо. Наприклад, сукупність деталей механізму, аксіом геометрії, чисел натурального ряду, літер абетки. На основі інтуїтивних уявлень про подібні сукупності сформувалося математичне поняття множини. Значний внесок до теорії множин зробив Георг Кантор. Згодом завдяки його дослідженням теорія множин стала цілком визначеною та обґрунтованою галуззю математики, а на сьогодні вона набула фундаментального значення [1, с. 9 – 11; 2, с. 9 – 11].

Тема 2. Основні поняття теорії множин. Алгебра множин

Множина є настільки загальним і водночас початковим поняттям, що її чітке визначення через більш прості поняття дати важко. Тому слідом за Г. Кантом ми приймаємо інтуїтивне уявлення про множину як сукупність деяких елементів, цілком визначених у випадку кожної конкретної множини.

Способи задання множин.

1. Простий перелік елементів $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n,\}$.

2. Опис елементів визначеною властивістю: $X=\{x|P(x)\}$, де $P(x)$ означає, що елемент x має властивість $P(x)$.

3. Рекурсивно завданням способу послідовного проходження його елементів.

Операції на множинах:

1) об'єднання (сума) $A \cup B$;

2) перетин (добуток) $A \cap B$;

3) різниця $A \backslash B$;

4) доповнення (заперечення) $\overline{A}$.

Множина 2^U всіх підмножин універсальної множини U із заданими на ній чотирма операціями складає алгебру множин. Під час вивчення теми необхідно ознайомитися з матеріалом підручників [1, с. 14 – 26; 2, с. 14 – 26; 4, с. 67 – 89; 6, с. 86 – 96; 7, с. 19 – 33; 12, с. 16 – 35; 5, с. 9 – 18].

Тема 3. Відношення та їх властивості

Відношення реалізують у математичних термінах на абстрактних множинах реальні зв'язки між реальними об'єктами. Відношення застосовуються при побудові комп'ютерних баз даних, які організовані у вигляді таблиць даних. Зв'язки між групами даних у таблицях описуються мовою відношень. Самі дані обробляються і перетворюються мовою відношень.

Під n-арним відношенням R на множині X розуміють підмножину n-го ступеня цієї множини $R \subset X^n$. Якщо $n=1$, то відношення називається унарним, якщо $n=2$ – бінарним.

Способи задання бінарних відношень.

1. Будь-яке бінарне відношення може бути задане у вигляді списку, елементами якого є пари, з яких складається відношення.

2. Бінарне відношення R на множинах X і Y може бути задане за допомогою матриці ($W=W(R)$), рядки якої відповідають елементам множини X, стовпчики – елементам множини Y.

3. Бінарне відношення R на множинах X, Y може бути задане графічно.

Операції над відношеннями: декартовий добуток відношень, обернене відношення, композиція відношень, степінь відношення, переріз відношення, фактор-множина.

Властивості бінарних відношень: рефлексивність, антирефлексивність, симетричність, асиметричність, антисиметричність, транзитивність, антитранзитивність. Бінарні відношення включають особливі класи: відношення еквівалент-ності, порядку та толерантності. При вивченні теми необхідно ознайомитися з матеріалом підручників [1, с. 30 – 54; 2, с. 30 – 54; 4, с. 90 – 112; 5, с. 29 – 35; 6, с. 97 – 105, с. 115 – 137; 7, с. 33 – 38, с. 41 – 48].

Тема 4. Відображення та функції

Відношення R між множинами X і Y ($R \subseteq X \times Y$) є функціональним, якщо всі його елементи (упорядковані пари) різні за першим елементом: кожному $x \in X$ або відповідає тільки один елемент $y \in Y$, такий, що xRy, або такого елемента y взагалі не існує.

Нехай F – функціональне відношення, $F \subseteq X \times Y$. Відповідність $x \to y$ від першого до другого елемента кожної пари $(x,y) \in F$ відношення F називається функцією f або відображення f множини D_f в Y і позначається як $f\colon D_f \to Y$, або як $D_f \xrightarrow{f} Y$.

Види відображень.

1. Функція $f\colon X \to Y$ називається сюр’єктивним відображенням, якщо $R_f = Y$.

2. Функція $f\colon X \to Y$ називається ін’єктивним відображенням, якщо з $x_1 \neq x_2$ виходить $f(x_1) \neq f(x_2)$.

3. Функція $f\colon X \to Y$ називається бієктивним відображенням, якщо вона сюр’єктивна та ін’єктивна.

Під час підготовки вивчення теми необхідно ознайомитися з матеріалом підручників [1, с. 54 – 72; 2, с. 54 – 72; 4, с. 156 – 160; 5, с. 19 – 28; 7, с. 38 – 41].

Тема 5. Булеві функції та алгебра логіки

Для зображення інформації в комп’ютерах використовується двійкова система числення. Таким чином, всі операції, які виконує комп’ютер, проводяться на множині $\{0,1\}$. Ці перетворення зручно формально зобразити за допомогою апарата двійкової логіки, який був розроблений Джорджем Булем у середині XIX століття.

Функція виду $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, аргументи x_i і значення y якої належить множині B, називається n-місною булевою функцією. Такі функції також називають логічними або перемикальними функціями.

Таблиці, в яких кожній інтерпретації (тобто набору аргументів) функції поставлено у відповідність її значення, називаються таблицями істинності булевої функції.

Булева алгебра – це алгебраїчна структура $(A, \cdot, +, \bar{\ }, 0, 1)$ з бінарними операціями $\cdot, +\colon A^2 \to A$, унарною операцією «$\bar{\ }$»: $A \to A$ і виділеними елементами $0,1$ в носії A. При вивченні теми рекомендується використовувати [1, с. 99 – 111, с. 115 – 120; 2, с. 99 – 111, с. 115 – 120; 5, с. 52 – 58; 7, с. 79 – 85].

Тема 6. Двоїстість булевих функцій

Функція $f^*(x_1,\dots,x_n)$ називається двоїстою до функції $f(x_1,\dots,x_n)$, якщо $f^*(x_1,\dots,x_n)=\overline{f(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})}$.

Функція, двоїста сама собі, тобто $f=f^*$, називається самодвоїстою.

Нехай функція F задана як суперпозиція функцій f_0 і функцій $f_1,\dots,f_n$: $F=f_0(f_1,\dots,f_n)$. Функцію F^*, що двоїста F, можна одержати, замінивши у формулі F функції $f_0; f_1,\dots,f_n$ на двоїсті до них $f^*_0; f^*_1,\dots,f^*_n$.

Зазначимо функції, що двоїсті до „елементарних” функцій логіки $\wedge,\vee,\ \overline{\ }$, константа 0, константа 1:

$f(x,y)=x\wedge y$; $\qquad f^*(x,y)=\overline{\overline{x}\wedge\overline{y}}=x\vee y$;

$f(x)=\overline{x}$; $\qquad f^*(x)=\overline{\overline{\overline{x}}}=\overline{x}=f(x)$;

$f(x)=0$; $\qquad f^*(x)=\overline{0}=1=\overline{f(x)}$.

Під час вивчення теми рекомендується використовувати [1, с. 111 – 115; 2, с. 111 – 115; 5, с. 60 – 61; 7, с. 86 – 87].

Тема 7. Нормальні форми

Серед множин еквівалентних формул, що зображують обрану функцію f, виділяється одна формула, яка називається досконалою нормальною формою функції f. Вона має регламентовану логічну структуру і однозначно визначається за функцією f, а її побудова заснована на рекурентному застосуванні теореми про спеціальні розкладання булевої функції за змінними.

Теорема. Про диз’юнктивне розкладання булевої функції $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ за k змінними.

Будь-яку булеву функцію $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ можна зобразити в такій формі:

$$f(x_1,\dots,x_k,\ x_{k+1},\dots,x_n)=\bigvee_{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_k} x_1^{\sigma_1}\wedge x_2^{\sigma_2}\wedge\dots\wedge x_k^{\sigma_k}\wedge f(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_k,x_{k+1},\dots,x_n).$$

Досконалою диз’юнктивною нормальною формою (ДДНФ) булевої функції називається формула, зображена у вигляді диз’юнкції конституент одиниці даної функції.

Для кожної інтерпретації функції існують єдині відповідні їй конституента одиниці та конституента нуля. Тому різних конституент одиниці та нуля для функції n змінних $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ існує стільки ж, скільки й інтерпретацій цієї функції – 2^n.

Кількість різних булевих функцій від n змінних також становить 2^{2^n}. Отже, для кожної булевої функції існує єдина ДДНФ.

Під час вивчення теми рекомендується використовувати [1, с. 120 – 138; 2, с. 120 – 138; 5, с. 59 – 61].

Тема 8. Алгебра Жегалкіна

Алгебра (B,$\wedge$,$\oplus$,0,1), що утворена множиною $B=\{0,1\}$ разом з операціями $\wedge$ (кон'юнкції), $\oplus$ (XOR – от eXclusiva OR, сума за модулем 2) і константами $0,1$, називається алгеброю Жегалкіна.

Серед усіх еквівалентних зображень функції в алгебрі Жегалкіна виділяється особливий вид формул, що називаються поліномом Жегалкіна.

Поліномом Жегалкіна називається скінченна сума за модулем 2 попарно різних елементів кон'юнкцій над множиною змінних $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$. Кількість змінних, що входять до елементарної кон'юнкції, називається рангом елементарної кон'юнкції.

Кількість попарно різних елементарних кон'юнкцій у поліномі називається довжиною полінома.

Булева функція називається лінійною, якщо її поліном Жегалкіна не містить кон'юнкцій змінних.

Під час вивчення теми необхідно ознайомитися з матеріалом підручників [1, с. 138 – 145; 2, с. 138 – 145; 5, с. 66 – 67;7, с. 88 – 94].

Тема 9. Функціональна повнота наборів булевих функцій

Замкненням множин Σ булевих функцій називається множина $[\Sigma]$, що складається з функцій, які можна одержати суперпозицією функцій з Σ. Якщо $\Sigma=[\Sigma]$, то множина булевих функцій Σ називається замкненим класом. Іншими словами можна сказати, що множина Σ називається замкненим класом, якщо будь-яка суперпозиція функцій з Σ також належить Σ.

Система булевих функцій $\Sigma=\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$ називається функціонально повною, якщо $[\Sigma]=P_2$.

Булева функція $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ називається функцією, що зберігає 0, якщо на нульовому наборі вона дорівнює 0: $f(0,0,\ldots,0)=0$.

Булева функція $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ називається функцією, що зберігає 1, якщо на одиничному наборі вона дорівнює 1: $f(1,1,\ldots,1)=1$.

Булева функція f називається монотонною, якщо для будь-яких пар наборів значень змінних $(a_1,\ldots,a_n)$ і $(b_1,\ldots,b_n)$, для яких виконується відношення $(a_1,\ldots,a_n) \leq (b_1,\ldots,b_n)$, правильна і нерівність $f(a_1,\ldots,a_n)\leq f(b_1,\ldots,b_n)$.

Система Σ булевих функцій повна, якщо вона містить хоча б одну функцію, що не зберігає нуль, хоча б одну функцію, що не зберігає одиницю, хоча б одну несамодвоїсту функцію, хоча б одну немонотонну функцію і хоча б одну нелінійну функцію. Під час підготовки до практичного заняття необхідно вивчити відповідний розділ конспекту лекцій та ознайомитися з матеріалом підручників [1, с. 145 – 155; 2, с. 145 – 155; 7, с. 94 – 98].

Тема 10. Методи мінімізації булевих функцій

Пошук найпростішої логічної формули булевої функції має велике значення при формуванні запитів до баз даних, у логічному програмуванні, в інтелектуальних системах.

Задача мінімізації складається з пошуку найпростішої, згідно з обраним критерієм мінімізації, формули. Критерії можуть бути різними, наприклад: кількість змінних у формулі, кількість знаків кон’юнкції та диз’юнкції або комбінація подібних критеріїв.

Карта Карно для ДНФ (діаграма Вейча – для КНФ) є аналогом таблиці істинності, зображеній у спеціальній формі. Значення змінних розташовані у заголовках рядків і стовпчиків карти.

Для конкретної булевої функції карта Карно заповнюється так. У клітинках, відповідних інтерпретаціям, на яких функція дорівнює одиниці, записують одиниці. Ці клітинки відповідають конституентам одиниці, що присутні у ДДНФ функції. В інші клітинки записують нулі.

Під час вивчення теми необхідно ознайомитися з матеріалом підручників [1, с. 155 – 182; 2, с. 155 – 182; 4, 50 – 55].

Тема 11. Основи математичної логіки

Ідею математизації логіки висловив ще у XVII ст. великий німецький вчений Лейбниць. Він сформулював задачу створення нової логіки, яка була б «мистецтвом обчислення».

Тільки у середині XIX ст. ірландський математик Дж. Буль частково втілив у життя ідею Лейбниця.

Математична логіка займається формалізацією деякої області людського мислення, у тому числі з метою надання можливості написання програми для обчислювальної машини, яка в цьому розумінні отримає здатність міркувати. Під час підготовки до практичного заняття крім конспекту лекцій рекомендується використовувати [1, с. 183 – 185; 2, с. 183 – 185].

Тема 12. Логіка висловлювань

Висловлення – це оповідальне речення, про яке можна сказати, істинне воно чи хибне, але не те й інше водночас.

Істина або хибність, яка приписана деякому висловленню, називається істиннісним значенням цього висловлення. Позначається: *„Істина” – I, T (True)* або *1*, *„Хибність” – X*, *F (False)* або *0*.

Атомами (елементарними висловлюваннями) називаються висловлення, які відповідають простим оповідальним реченням, тобто не мають складових частин.

Логіка висловлювань – це алгебраїчна структура $(\{X,I\},\wedge,\vee,\overline{},\to,\sim,X,I)$ з носієм – війковою множиною *{X: ”Хибність”, I: ”Істина”}*, операціями –

логічними зв'язками ($\wedge$ – кон'юнкція ,$\vee$ – диз'юнкція, $\bar{\ }$ – заперечення, $\to$ - імплікація, $\sim$ – еквівалентність) і константами: X – хибність і I – істина.

У логіці висловлювань правильно побудована формула визначається рекурсивно так:

1. Атом є формулою.

2. Якщо A і B – формули, то $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\to B)$, $(A\sim B)$ і $\neg A$ – також формули.

3. Ніяких формул, крім породжених вказаними вище правилами, не існує.

Під час вивчення теми необхідно ознайомитися з матеріалом підручників [1, 183 – 207; 2, с. 183 – 207; 4, с. 15 – 49; 7, с. 100 – 117].

Тема 13. Логіка першого порядку (ЛПП)

У деяких задачах постає необхідність удосконалити логіку висловлень з тим, щоб вона повніше пояснювала здібності людини робити логічні висновки. Для цього до логіки предикатів введено додаткові, нові порівняно з логікою висловлювань логічні поняття, а саме: терм, предикат і квантор.

Визначено деякий предикат, якщо:

а) задана деяка (довільна) множина M, що називається областю визначення предиката (предметна область);

б) фіксована множина $\{0,1\}$, що називається областю значень;

в) вказане правило, за допомогою якого кожному елементу, що взятий з предметної області, ставиться у відповідність один з двох елементів з області значень.

Предикат P, що має n аргументів, називається n-місним предикатом, позначається $P(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

Кількість аргументів предиката $P(x_1,x_2,\dots,x_n)$ називається його порядком.

Аргументи предиката називаються термами. Терм визначається рекурсивно таким чином:

1. Константа є термом.

2. Змінна є термом.

3. Якщо f є n-місним функціональним символом, а $t_1,t_2,\dots,t_n$ – терм, то $f(t_1,t_2,\dots,t_n)$ є термом.

4. Ніяких термів, крім породжених за допомогою зазначених вище правил, не існує.

Нехай $P(x)$ – предикат, визначений на M. Висловлення „для всіх $x\in M$, $P(x)$ істинне" позначається $\forall xP(x)$. Знак $\forall$ називається квантором загальності.

Висловлення „існує таке $x\in M$, що $P(x)$ істинне" позначається $\exists xP(x)$, де знак $\exists$ називається квантором існування.

Всі закони і тотожності, справедливі у логіці висловлень, залишаються справедливими і у логіці предикатів. Крім того, у логіці предикатів існують додаткові закони, призначені для еквівалентного перетворення формул, що містять квантори та змінні.

Правильно побудованими формулами логіки предикатів називаються формули, які можна рекурсивно визначити так:

1. Атом є формулою.
2. Якщо F і G – формули, то $(\neg F)$, $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $(F \to G)$, $(F \sim G)$ також є формулами.
3. Якщо F – формула, а x – вільна змінна, то $(\forall x)F$ і $(\exists x)F$ також формули.
4. Ніяких формул, крім породжених вказаними вище правилами, не існує.

Частина формули, на яку поширюється дія квантора, називається областю дії квантора.

Формула F у логіці предикатів знаходиться у випередженій нормальній формі (ВНФ) тоді і тільки тоді, коли вона може бути зображена у вигляді $(Q_1x_1)\ldots(Q_nx_n)(M)$, де кожне (Q_ix_i), $i=1,\ldots,n$, є або $(\forall x)$, або $(\exists x)$, а M – формула, що не містить кванторів. Причому $(Q_1x_1)\ldots(Q_nx_n)$ називається префіксом, а M – матрицею формули F.

Під час вивчення теми рекомендується використовувати [1, с. 207 – 230; 2, с. 207 – 230; 4, с. 113 – 138; 5, с. 74 – 82, 7, с. 118 – 138].

Тема 14. Основні поняття теорії графів

Граф – це упорядкована пара множин $\{V,E\}$, де V – множина вершин, E – множина ребер. Графи підрозділяються на орієнтовані й неорієнтовані.

Виділяють такі види графів: порожній, повний, тотожній, симетричний, регулярний (однорідний), дуальний, нуль-граф, псевдограф, мультиграф.

Графи можна задати:

- графічно;
- переліком елементів;
- матрицею суміжності;
- матрицею інциденцій.

Під час вивчення теми необхідно ознайомитися з матеріалом підручників [1, с. 239 – 246, с. 248 – 260; 2, с. 239 – 246, с. 248 – 260; 3, с. 11 – 53; 3, с. 89 – 102; 4, с. 244 – 258; 7, с. 189 – 209; 8, с. 17 – 35].

Тема 15. Ейлерові та гамільтонові ланцюги і цикли

Прийнято пов’язувати зародження теорії графів як математичної дисципліни з роботою Леонарда Ейлера 1736 р., у якій знайдено умову існування у зв’язному графі циклу, що містить всі ребра графа (без повторень). Такий цикл тепер називається ейлеровим. Як показує простий приклад, є графи, що не містять ейлерові цикли.

Є простий алгоритм (так званий алгоритм Флері) для знаходження ейлерова циклу (звичайно, якщо цей цикл існує), який полягає в наступному: починаємо з будь-якої вершини і "стираємо" пройдені ребра. При цьому по мосту (перешийку) проходимо тільки, якщо немає інших можливостей.

Очевидно, що для того щоб побудувати Ейлером шлях достатньо використовувати алгоритм Флері, який треба почати з вершини, що має непарну ступінь.

Гамільтоновим циклом у графі G=(X,Y) називається простий цикл Q=(X,Y0), який містить всі вершини графа, незалежно від того, чи є G орієнтованим. Вимога простоти циклу є принциповою: за гамільтоновим циклом Q можна обійти всі вершини x графа G, відвідуючи кожну проміжну (тобто не початкову і не кінцеву) вершину тільки один раз. Сам граф G, в якому існує гамільтонів цикл, називається гамільтоновим графом. Для побудови гамільтонова циклу використовується алгоритм Робертса-Флореса.

Під час вивчення теми необхідно ознайомитися з матеріалом підручників [1, с. 246 – 248, с. 304 – 322; 2, с. 246 – 248, с. 304 – 322; 3, с. 53 – 77; 5, с. 320 – 325; 8, с. 36 – 50].

Тема 16. Планарність графів

Граф $G=(X,Y)$ називається повним, якщо він не містить петель і кратних ребер, а також кожна пара вершин суміжна. Повний граф позначається K_n, де n – кількість вершин.

Дводольним графом називається граф, у якого множину вершин можна розбити на дві непересічні підмножини так, що ребра з'єднують вершини з різних підмножин.

Повний дводольний граф – це граф, у якого будь-які дві вершини, що входять у різні множини вершин, суміжні. Повний дводольний граф позначається $K_{m,n}$, де m та n – кількість вершин у кожній з долів.

Граф G є плоским, якщо його ребра перетинаються лише у вершинах.

Граф G_1 є планарним, якщо існує ізоморфний до нього граф G, який є плоским.

Графи K_5 і $K_{3,3}$ відіграють фундаментальну роль у теорії планарності. Їх називають графами Понтрягіна-Курантовського. Граф G_1 є планарним лише тоді, коли він не містить підграфів Понтрягіна-Курантовського.

Під час вивчення теми необхідно ознайомитися з матеріалом підручників [1, с. 242; 2, с. 242; 4, с. 270 – 277; 3, с. 53 – 77; 8, с. 36 – 50].

Тема 17. Відстані на графах

Найменша довжина ланцюга, що з'єднує вершини a і b графа G, називається відстанню між ними. Позначається $d(a,b)$.

Відстань має властивості, що відповідають аксіомам метрики.

1. Якщо між вершинами a і b існує відстань, то вона більше нуля, причому відстань від однієї вершини до цієї ж вершини дорівнює нулю.

$$d(a,b)\geq 0;\ d(a,a)=0.$$

2. Відстань між вершинами a і b дорівнює відстані між вершинами b і a.

$$d(a,b)=d(b,a).$$

3. Якщо існує три вершини *a*, *b* і *c*, причому *c* знаходиться між вершинами *a* і *b*, то відстань між вершинами *a* і *b* буде менше або дорівнюватиме сумі відстаней між вершинами *a* і *c* та вершинами *c* і *b*.

$$d(a,c)+ d(c,b) \le d(a,b).$$

У деяких графах ребрам приписані числові характеристики (пропускна здатність, ціна, вага, довжина). У цих випадках довжиною ланцюга є сума числових характеристик ребер, що входять у ланцюг. Відстанню між *a* і *b* буде довжина найкоротшого ланцюга.

Задачі відшукання найкоротших відстаней між вершинами графа (мережі) із заданими вагами ребер часто зустрічаються на практиці і мають очевидний економічний зміст. Це саме можна сказати і про задачі пошуку оптимальних шляхів в орієнтованих мережах. Один з ефективних алгоритмів розв'язку таких задач – алгоритм Дейкстри.

Під час вивчення теми необхідно ознайомитися з матеріалом підручників [1, с. 292 – 304; 2, с. 292 – 304; 4, с. 611 – 623; 7, с. 228 – 231].

Тема 18. Дерева

Зв'язний граф *T* без циклів називається деревом. Орієнтація може не враховуватися, і тоді говорять про ребра дерева y_i. Якщо орієнтація враховується, то говорять про дуги дерева, а саме дерево називається орієнтованим, наприклад, дерево логічних можливостей, генеалогічне дерево.

Формула А. Келі (1897 р.). Число τ_n позначених дерев з *n* вершинами дорівнює n^{n-2}.

Основними операціями над деревами є кодування та декодування. Ці операції використовуються для відображення дерев у пам'яті комп'ютера.

Існує три способи обходу дерев: „у глибину”; у шир”; кінцевий порядок обходу.

Під час вивчення теми необхідно ознайомитися з матеріалом підручників [1, с. 269 – 286; 2, с. 269 – 286; 4, с. 259 – 268, с. 664 – 690; 8, 57 – 73].

Тема 19. Транспортні мережі

У цій темі дається зважений граф – граф, кожній дузі якого приписано потік деякої речовини. Такий граф є зручною моделлю під час дослідження цілого ряду задач у транспорті, зв'язку та інших областях, пов'язаних з дійсним або уявним рухом товарів, інформації або людей. Введемо визначення і позначення, типові для цього кола питань.

Транспортна мережа – це зв'язний орієнтований граф без петель і паралельних ребер, у якому:

1. Є тільки одна вершина, в яку не заходить жодна дуга, яка називається витоком x_s.

2. Є тільки одна вершина, з якої не виходить жодна дуга, яка називається стоком x_t.

3. Кожній дузі $u = (x_i, x_j)$ присвоєна числова характеристика $c(u) \geq 0$, яка називається пропускною здатністю дуги *u*.

Зазначимо, що потоки у неорієнтованих графах можна зобразити у вигляді потоків у відповідних орієнтованих; потоки у незв'язних графах можуть вивчатися покомпонентно; потік у петлі не впливає на розподіл потоку між вершинами.

Для вирішення задачі побудови максимального потоку у мережі використовується алгоритм Форда-Фалкерсона. Алгоритм Л.Форда та Д.Фалкерсона використовується, наприклад, при вирішенні транспортної задачі: необхідно перевезти з початкової вершини мережі у кінцеву вантаж по дугах мережі за мінімальний час. При цьому по кожній дузі неможна перевозити вантажі, більші за фіксований обсяг.

Під час вивчення теми необхідно ознайомитися з матеріалом підручників [1, с. 322 – 337; 2, с. 322 – 337; 4, с. 694 – 724; 7, с. 220 – 226; 8, с. 163 – 172].

Тема 20. Основи комбінаторного аналізу

Комбінаторика, чи комбінаторний аналіз – галузь дискретної математики, що вивчає комбінації та переміщення предметів, взаємоположення часток скінченних множин предметів довільного походження, а також нескінченних множин, що відповідають деяким умовам підпорядкованості, виникла у XVII столітті. Але у самостійну наукову дисципліну комбінаторний аналіз сформувався лише у XX столітті. Комбінаторні методи застосовуються в теорії ймовірностей, випадкових процесах, статистиці, математичному програмуванні, плануванні експериментів.

Правило суми. Якщо множина *M* є об'єднанням множин $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_k$, що не перетинаються попарно, тоді

$$|M| = |M_1| + \ldots + |M_k|.$$

Правило добутку. Якщо $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_k$ – скінченні множини і $M = M_1 \cdot M_2 \cdot \ldots \cdot M_k$, – їх декартів добуток, то

$$|M| = |M_1 \cdot M_2 \cdot \ldots \cdot M_k| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \ldots \cdot |M_k|.$$

Під час вивчення теми необхідно ознайомитися з матеріалом підручників [1, с. 413 – 418; 2, с. 413 – 418; 9, с. 9 – 25; 7, с. 134 – 137].

Тема 21. Формули простого перелічення

Нехай $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – фіксована множина. Упорядковані підмножини з *k* елементів $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ множини *M* називаються перестановками *k* елементів. Інакше *k*-перестановка $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ – це розміщення в певному порядку *k* елементів із множини *M*. *k*-перестановки множини з *n* елементів називаються розміщеннями із *n* по *k* елементів.

Якщо в перестановці беруть участь всі елементи множини, то використовують термін перестановки, а кількість n-перестановок позначають через P_n.

Нехай A_n^k – кількість k-розміщень n-множини M (читається A із n по k).

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Якщо $n=k$, тоді A_n^n — кількість усіх способів упорядкування цих елементів: $P_n = A_n^n = n!$.

Розміщення і перестановки обов'язково враховують порядок елементів.

Розміщенням з повтореннями з n елементів по k (k-розміщенням з повторенням) називається кортеж (вибірка з повторенням) довжини k. Кількість k-розміщень з повтореннями обчислюється за формулою: $\overline{A_n^k} = n^k$.

Кількість різноманітних перестановок із зазначеними повтореннями $n_1, n_2, ... n_k$ дорівнює $P(n_1, n_2, .., n_k) = \dfrac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}$, де $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$.

Сполученням з n елементів по k (k-сполученням з n) називають різноманітні k-розташування (або k-вибірки) з цих елементів, які відрізняються між собою лише складом елементів без урахування їх порядку. Кількість k-сполучень з n елементів позначається C_n^k , або $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, читається "кількість сполучень з n по k".

З неупорядкованої множини елементів $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ik}$ можна утворити $k!$ упорядкованих k-розміщень позначених елементів. Тому кількість C_n^k всіх k-сполучень з n елементів у $k!$ разів менше, ніж кількість A_n^k всіх упорядкованих розміщень із n елементів по k:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

Кількість k-сполучень з повтореннями з елементів n типів $\overline{C_n^k}$ дорівнює кількості $P(k, n-1)$ перестановок з повтореннями з k одиниць та $n-1$ нулів:

$$\overline{C_n^k} = P(k, n-1) = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k \ .$$

Розбиттям числа n називається його подання у вигляді (1), коли порядок додатків n_i не враховується.

$$n = n_1 + n_2 + ... + n_k, \text{ де } k \geq 1, \ n_i \geq 1. \quad (1)$$

Підрахунок кількості розбиттів еквівалентний завданню про кількість розподілу n однакових предметів за однаковими непорожніми комірками.

Додатки n_i у розбиттях називаються частинами; кількість входжень кожної частини до суми (1) називається її кратністю. Розбиття числа n на k додатків $n_1,n_2,...,n_k$ можна розглядати як k-сполучення (з повтореннями) цих чисел, що задовольнить умову (1). Інколи для пошуку композицій числа n (або обчислення їхньої кількості) зручно вирішити цю саму задачу для його розбиттів, а після цього перейти до композицій.

Нехай дана деяка послідовність чисел $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$. Якщо степеневий ряд $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...)$ збігається при деяких x до функції $f(x)$, то $f(x)$ називається продуктивною функцією для послідовності $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$. Операціям над продуктивними функціями відповідають певні операції над відповідними послідовностями.

Під час вивчення теми необхідно ознайомитися з матеріалом підручників [1, с. 418 – 426, с. 438 – 453; 2, с. 418 – 426, с. 437 – 453; 4, с. 331 – 362, с. 523 – 555; 9, с. 31 – 63, с. 90 – 121; 7, с. 138 – 147].

Тема 22. Формула включення та виключення

Поставимо задачу: "Нехай є N предметів, деякі з яких мають властивості $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$. При цьому кожен предмет може або мати, або не мати жодної з цих властивостей, або мати одну з властивостей, чи властивості $\alpha_i,\alpha_j,...,\alpha_h$ і, можливо, деякі з інших властивостей". Позначимо через $N(\alpha_i,\alpha_j,...,\alpha_h)$ кількість предметів, що мають властивості $\alpha_i,\alpha_j,...,\alpha_h$. Якщо предмети не мають властивості α_k, позначимо її штрихом α_k'. Наприклад,

$N(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3')$ — кількість предметів із властивостями α_1, α_2, що не мають властивості α_3. Про інші властивості нам невідомо, є вони чи немає.

Загальна формула включень і виключень рахує кількість предметів, позбавлених всіх без винятку властивостей і має вигляд:

$$N(\alpha_1',\alpha_2',...,\alpha_n') = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - ... - N(\alpha_n) + N(\alpha_1,\alpha_2) + ... + N(\alpha_1,\alpha_n) + ...$$
$$... + N(\alpha_{n-1},\alpha_n) - N(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) - ... - N(\alpha_{n-2},\alpha_{n-1},\alpha_n) + ... + (-1)^n N(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n).$$

Якщо $(\alpha_i,\alpha_j,...,\alpha_k,\alpha_n)$ — комбінація властивостей без урахування їх порядку, знак "+" у формулі ставиться за умови, що кількість властивостей парна, та "-" — якщо непарна. Наприклад, член $N(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_8,\alpha_{11})$ входить зі знаком "+", а член $N(\alpha_2,\alpha_4,\alpha_6)$ — зі знаком "-".

Під час вивчення теми необхідно ознайомитися з матеріалом підручників [1, с. 426 – 431; 2, с. 426 – 431; 9, с. 25 – 27, с. 59; 7, с. 151 – 152].

5 МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ТЕМ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИВЧЕННЯ

Тема 1. Теорема про кон'юнктивне розкладання функції алгебри логіки

Теорема. Про кон’юнктивне розкладання булевої функції $f(x_1,x_2,...,x_n)$ за k змінними.

Будь-яку булеву функцію $f(x_1,x_2,...,x_n)$ можна зобразити у такій формі:

$$f(x_1,...,x_k, x_{k+1},...,x_n)=\bigwedge_{\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_k} x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee ... \vee x_k^{\sigma_k} \vee f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_k,x_{k+1},...,x_n).$$

Досконалою кон’юнктивною нормальною формою (ДКНФ) функції називається формула, зображена у вигляді кон’юнкції конституент нуля даної функції.

Для кожної інтерпретації функції існують єдині відповідні їй конституента одиниці та конституента нуля. Тому різних конституент одиниці та нуля для функції n змінних $f(x_1,x_2,...,x_n)$ існує стільки ж, скільки й інтерпретацій цієї функції – 2^n.

Кількість різних булевих функцій від n змінних також становить 2^{2^n}. Отже, для кожної булевої функції існує єдина ДКНФ.

Під час вивчення рекомендується використовувати [1, с. 125 – 129; 2, с. 125 – 129].

Тема 2. Методи мінімізації булевих функцій

Метод мінімізації Квайна – Мак-Класкі реалізує перехід від ДДНФ до мінімальної ДНФ з використанням операцій склеювання та поглинання. Він був запропонований В. Квайном, а потім удосконалений Мак-Класкі.

Недолік методу мінімізації булевих функцій Квайна – Мак-Класкі полягає у необхідності записувати ДДНФ функції, яка вже при семи змінних може містити більше ста конституент одиниці. Наступний метод дозволяє здійснювати диз’юнктивну мінімізацію, вихідну довільну ДНФ функції.

Метод мінімізації Порецького-Блейка реалізує перехід від довільної ДНФ до скороченої ДНФ за допомогою операцій узагальненого склеювання та поглинання.

Метод Порецького-Блейка полягає у застосуванні операцій узагальненого склеювання до ДНФ функції. Потім в одержаній формулі здійснюються всі можливі операції поглинання. Ознайомитися з методами мінімізації булевих функцій та навчитися застосовувати ці знання на практиці [1, с.165 – 175; 2, с.166 – 175].

Тема 3. Синтез комбінаційних схем

Логічні схеми у комп'ютерах та інших електронних пристроях оперують з наборами вхідних і вихідних даних, що складаються з нулів та одиниць. Булева алгебра і булеві функції зображують математичний апарат для роботи з такими даними і використовуються для аналізу та синтезу логічних схем (ланцюгів). Основою побудови логічних схем є набір логічних елементів. Кожен логічний елемент реалізує деяку булеву функцію. Його входи відповідають булевим змінним, а вихід – значенню функції.

Вартість логічного ланцюга залежить від його складності. Оскільки економічно рентабельно робити логічні ланцюги мінімальної вартості, булеві функції, за якими здійснюється побудова ланцюгів, мають бути попередньо мінімізовані. Тому перед побудовою логічного ланцюга необхідно одержати мінімальне зображення функції.

Ознайомитися з правилами побудови перемикальних ланцюгів і навчитися будувати їх на різних елементах комбінаційних схем [1, с. 177 – 181; 2, с. 177 – 182; 4, с. 56 – 66].

Тема 4. Багатозначна логіка

Багатозначна (k-значна) логіка – це логіка, в якій змінна може приймати одне з k значень істинності, де k – будь-яке ціле число, більше за 1. Функції k-значної логіки визначені і приймають значення, які входять до деякої множини $B_k=\{0,1,..., k-1\}$, що називається алфавітом цієї логіки.

Функцію k-значної логіки однозначно визначає її таблиця значень (істинності). Множину всіх функцій k-значної логіки позначають P_k. Кількість функцій P_k, що залежить від n змінних, дорівнює k^{k^n}. Як і у двозначній логіці, висловлення зображуються у вигляді формул k-значної логіки. Елементарні функції зображують узагальнення аналітичних функцій двозначної логіки.

Розглянути основні поняття і функції k-значної логіки [1, с. 230-239; 2, с. 231-238].

Тема 5. Основні поняття теорії графів: операції над графами.

Основними операціями над графами є такі:
- доповнення;
- об'єднання;
- поєднання;
- перетин;
- кільцева сума;
- приєднання, композиція;
- видалення вершини;
- видалення ребра;

– замикання;
– стягування.

Розглянути основні операції над графами [1, с. 253 – 256; 2, с. 254 – 257].

Тема 6. Задача комівояжера

Загальна задача комівояжера полягає в тому, щоб, використовуючи задану систему транспортних повідомлень (доріг і т.ін.) між пунктами (містами, фірмами тощо) у конкретній зоні обслуговування, відвідати всі пункти в такій послідовності, щоб пройдений маршрут був найкоротшим з усіх можливих. В орієнтованому зваженому графі *G* зустрічається задача пошуку загального орієнтованого маршруту комівояжера – найкоротшого орієнтованого маршруту, що містить усі вершини графа, і, відповідно, орієнтованого шляху або контуру комівояжера.

Дослідження проблем перебору показує, що серед розв'язуваних задач можуть бути добре, і погано реалізовані. Найбільш типовим обчислювальним методом скорочення перебору є метод галузей і границь. Ефективність же методу може залежати від конкретних даних завдання, і в "поганих" випадках привести до того ж повного перебору.

Розглянути задачу комівояжера та деякі інші алгоритми знаходження ейлерова та гамільтонового циклу [1, с. 314 – 321; 2, с. 314 – 321; 3, с. 53 – 70; 5, с. 320 – 335].

Тема 7. Розфарбування графів

Різноманітні задачі, що виникають при плануванні виробництва, складанні графіків упакування, збереження і транспортування продукції, можуть бути представлені як задача розфарбування графів, у якій визначається хроматичне число і хроматичне реберне число (хроматичний клас) графів. Алгоритми визначення цих числових характеристик графів мають велике прикладне значення.

Граф *G* називається *k*-розфарбовуваним, якщо існує правильне розфарбування ребер у *k* кольорів. Граф *G* називається реберно *k*-хроматичним, якщо хроматичний індекс дорівнює *k*.

Гіпотеза п'яти фарб формулюється так: «Для кожного планарного графа *G* справедлива нерівність $h(G) \le 5$».

Гіпотеза чотирьох фарб формулюється так: «Будь-який планарний граф може бути розфарбований за допомогою чотирьох фарб».

Навчитися розфарбовувати графи та визначити основні галузі застосування алгоритмів розфарбовування [1, с. 260 – 269; 2, с. 260 – 269; 3, с. 53 – 70; 5, с. 320 – 335; 8, с. 101 – 125].

Тема 8. Цикломатика графів

Для графа G на n вершинах і m ребрах, що містить k компонент зв'язності ранг (позначається через $p(G)$) визначається як n-k.

Цикломатичне число графа G ($\mu(G)$) визначається як m-n+k.

Справедливо, що $p(G)+\mu(G)=m$. З визначення лісу і ко-лісу випливає, що ранг $p(G)$ графа дорівнює кількості ребер лісу графа G, а цикломатичне число $\mu(G)$ – кількості ребер ко-лісу графа G. Ранг і цикломатичне число є одними з найбільш важливих характеристик графа – вони визначають розмірність підпросторів циклів і розрізів графа.

Розглянути поняття цикломатики графів. Навчитися будувати базис циклів [1, с. 286 – 292; 2, с. 286 – 292; 3, с. 87 – 88].

Тема 9. Розрізи графів

Перерізом (розрізом) S графа G називається певна підмножина дуг, видалення якої збільшує кількість компонент зв'язності.

Підмножини вершин, що не перетинаються, утворюють розбиття множини усіх вершин графа G. Для перерізу довільно вводиться орієнтація – напрямок від одного боку перерізу до іншого.

Матриця S, рядки якої утворюють максимальний лінійно-незалежний набір вектор-перерізів, називається матрицею перерізів графа G. Стовпчики матриць перерізів і циклів нумеруються однаково – дугами графа, а кількість їх рядків у загальному випадку різне.

Навчитися знаходити розрізи графів, ранг розрізів та будувати базис розрізів [1, с. 286 – 292; 2, с. 286 – 292].

6 ПЕРЕЛІК ТЕМ, ЗА ЯКИМИ БУДЕ ВКЛЮЧЕНО ЗАВДАННЯ ДО ПІДСУМКОВОГО ТЕСТУ

1. Основні поняття теорії множин. Алгебра множин.
2. Відношення та їх властивості.
3. Відображення та функції.
4. Булеві функції та алгебра логіки.
5. Двоїстість булевих функцій.
6. Нормальні форми.
7. Алгебра Жегалкіна.
8. Функціональна повнота наборів булевих функцій.
9. Методи мінімізації булевих функцій.
10. Логіка висловлювань.
11. Логіка предикатів.
12. Випереджені нормальні форми.
13. Основні поняття теорії графів. Ейлерові та Гамільтонові ланцюги та цикли.

14. Способи завдання графів.
15. Ейлерові та Гамільтонові ланцюги і цикли.
16. Планарність графів.
17. Розфарбування графів.
18. Відстані на графах. Алгоритм Дейкстри.
19. Дерева.
20. Цикломатика та розрізи графів.
21. Транспортні мережі.
22. Основи комбінаторного аналізу.
23. Формули простого перелічення.
24. Рекурентні співвідношення.
25. Формула включення та виключення.
26. Продуктивні функції.

7 ТИПИ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ, ЯКІ БУДЕ ВКЛЮЧЕНО ДО ПІДСУМКОВОГО ТЕСТУ

Для перевірки рівня знань студентів з предмета «Комп’ютерна дискретна математика» до підсумкового тесту буде включено тестові завдання різних типів. Різноманітність типів тестових завдань дозволяє мінімізувати ймовірність угадування відповідей і охопити різні види знань і умінь студентів. До підсумкового тесту буде включено тестові завдання таких типів:

1. Тестові завдання закритого типу – завдання із запропонованими варіантами відповідей, з яких вибирають одну (чи декілька) правильну. Закриті тестові завдання поділяються на багатоальтернативні й одноальтернативні. Ця форма тестових завдань є розповсюдженою, тому що завдання вимагають менше часу як для виконання, так і для їхньої розробки в порівнянні з тестовими завданнями інших типів.

Одноальтернативні тестові завдання являють собою тестові завдання, що містять 3 – 5 варіантів відповіді, один із яких правильний. Багатоальтернативні тестові завдання являють собою завдання, що містять 5 – 8 варіантів відповіді, два і більше з яких правильні. Одноальтернативні тестові завдання часто вважають найлегшими, але насправді за необхідності їх завжди можна ускладнити, використовуючи, так звані, "пастки" чи збільшити кількість правильних відповідей у тестовому завданні. "Пастка" – це варіант відповіді, дуже схожий на правильний за будь-якою окремою ознакою, що пропонується разом з дійсно правильною відповіддю, зовні сприйманою менш привабливо з погляду поверхневих чи неповних знань.

2. Тестові завдання відкритого типу – це завдання з вільно конструйованими відповідями. Тестові завдання відкритого типу передбачають введення відповідей студентом. Ці тестові завдання не передбачають варіантів відповіді. Студент виконує відкриті тестові завдання за власним уявленням, тому що за змістом вони є твердженням з невідомою змінною. Тестові завдання закритого типу є найважчими, тому що вони вимагають самостійного

відтворення відповіді без будь-якої підказки у вигляді варіантів для вибору. Однак, з їхньою допомогою можна перевірити лише знання команд, термінології, фактів. Уміння самостійно застосовувати засвоєне в нових ситуаціях, глибину розуміння матеріалу оцінити за допомогою цього типу тестових завдань неможливо.

3. Тестові завдання на установлення відповідності між елементами завдання. Тестові завдання даного типу являють собою дві (чи більш) групи понять, назв команд, характеристик, графічних зображень, цифрових чи літерних позначень, що задані у формі двох (чи більше) стовпців. Студент повинен установити змістовну відповідність між їх елементами і виразити її у відповіді за допомогою встановлення відповідності між кодами елементів з різних стовпців.

4. Тестові завдання на встановлення правильної послідовності дій. Використовують, як правило, у вигляді моделі дій. У цих тестових завданнях від студента вимагається визначити правильну послідовність приведених команд, дій, подій, етапів, що пропонуються у тестовому завданні. У цих тестових завданнях більший навчальний потенціал, ніж у закритих тестових завданнях.

8 ПРИКЛАД ЗАВДАНЬ ДЛЯ ДОМАШНІХ ТА КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

Тема 1. Алгебра множин

1. Задана універсальна множина *U={1,2,3,4,…,25}* та три її підмножини *A*, *B*, *C* (табл. 8.1).

Таблиця 8.1 – Підмножини *A*, *B*, *C*

Варі-ант	*A*	*B*	*C*
1	*{1,9,10,11,15,16,17,22}*	*{1,4,5,6,7,8,13,14,18,19,23}*	*{1,2,3,4,5,16, 18,19,24,25}*
2	*{1,2,5,11, 13,16,17,20,24}*	*{1,2,6,7,8,15,16,17,18,23}*	*{1,2,3,4,5,6,7,14,15,16,22}*
3	*{1,2,7,8,9,11,12,19,20,21}*	*{1,2,3,4,5,6,14,15,16,17,23}*	*{1,4,5,6,7,13,14,19,20,24}*
4	*{1,2,3,10,11,12,13,20,25}*	*{1,2,3,14,15,16,17,18,23}*	*{1,4,5,12,13,18,19,20,25}*
5	*{1,2,4,13, 15,16,20,21,25}*	*{1,2,3,4,5,6,7,13,20,21,25}*	*{1,2,3,4,5,6,13,14,15,16,21}*
6	*{1,2,3,5,6,7,11,12,13,17,18}*	*{1,2,3,4,5,13,14,16,20,24}*	*{1,9,10,11,12,13,17,18,22}*
7	*{1,4,5,6,7,15,16,17,18,25}*	*{1,2,6,7,8,9,14,16,20,21,25}*	*{1,5,6,7,12,13,18,19,24,25}*
8	*{1,5,6,9,10,14,15,1621,22}*	*{1,2,11,16,17,20,21,24,25}*	*{1,2,6,7,8,12,17,21,22,25}*
9	*{3,4,5,6,7,13,14,17,18,25}*	*{4,5,7,8,9,10,11,19,23,25}*	*{1,6,7,8,9,13,14,18,19,23}*
10	*{1,2,3,4,5,11,12,17, 19,22}*	*{1,2,3, 6,7, 13,14,17,18,24}*	*{1,2,3,13,15,16,20,21,25}*
11	*{1,4,5,6,13,14,18,19,20,25}*	*{1,2,3,4,11,12,13,20,21,25}*	*{1,2,6,7,12,13,14,15,21,22}*
12	*{8,9,10,11,12,16,17,22,25}*	*{3,4,5,6,11,12,13,17,19,20}*	*{1,4,5,6,12,13,16,17,18,22}*
13	*{1,2,3,4,13,14, 16,17,21}*	*{1,3,4,5,6,13,14,15,20,21}*	*{1,9,10,11,12,13,18,19,24}*
14	*{1,3,4,5,11,12,15,16,22,25}*	*{1,2,15,16,17,22,23,24,25}*	*{1,2,9,10,11,16,17,21,22,23}*
15	*{1,2,3,7,8,9,10,18,19,20,24}*	*{1,8,9,10,13,17,18,21,24,25}*	*{1,2,3,4, 14,15,18, 20,24,25}*
16	*{1,4,5,12,13,14,15,16,21,22}*	*{1,2,3,4,5,6,11,12,13,17,18}*	*{1,13,14,19,20,22,23,24,25}*
17	*{1,2,3,8,9,10,11,14,18,20,24}*	*{1,2,3,4,5,6,13,16,17,21,25}*	*{1,10,11,12,13,17,20,21,24}*
18	*{2,4,5,7,12,13,18,20,24,25}*	*{1,2,7,11,12,16,17,21,22}*	*{5,9,10,14,15,19,20,24,25}*
19	*{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}*	*{1,2,3,4,5,6,7,22,23,24,25}*	*{11,12,13,14,15,16,24,25}*

Продовження табл. 8.1

Варі-ант	*A*	*B*	*C*
20	*{1,8,14,18,19,22,23,24,25}*	*{1,4,5,10,11,17,18,23,25}*	*{1,10,11,12,15,19,2024,25}*
21	*{1,2,3,4,8,9,10,16,19,20,21}*	*{4,5,6,7,10,16,17,18,22,25}*	*{1,2,10,11,16,17,21,22,25}*
22	*{1,2,7,8,9,10,15,16,21,22}*	*{1,2,13,14,15,19,20, 23,24}*	*{1,2,3,4,5,11,12,13,14,15,25}*
23	*{7,8,9,10,14,15,18,19,22,23}*	*{1,6,7,8,9,15,16,20,21,25}*	*{1,2,3,4, 12,15,19,22,23}*
24	*{1,2,3,4,12,13,16,20,24,25}*	*{1,2,3,4,9,10,11,16,17,22,25}*	*{6,7,8,14,15,16,19,22,25}*
25	*{1,6,7,8,9,13,14,15,19,20,24}*	*{1,2,3, 5,6,7,13,18,19,20,23}*	*{1,2,12,13,14,15,19,20,25}*
26	*{7,8,9,12,15,16,23,24,25}*	*{1,2,3,4,5,6,15,16,21,24,25}*	*{18,19,20,21,22,23,24,25}*
27	*{3,4,5,6,7,14,18,19,20,24,25}*	*{1,2,3,4,5,6,7, 14,16,21,22}*	*{1,2,3,4,5,6,7,9,16,17,23,24}*
28	*{8,9,10,11,17,18,23,24,25}*	*{1,7,8,9,10,15,16,20,24,25}*	*{1,2,3,4,12,13,22,23,24,25}*
29	*{1,2,3,13,23,24,25}*	*{4,5,6,7,12,13,18,19,20,23}*	*{1,2,3,10,11,12,15,19,20,25}*
30	*{10,11,12,13,14,15,16,17 }*	*{1,2,3,4,13,14,18,19,20,24}*	*{1,2,3,4,14,15,16,20,21}*

- записати елементи, які входять до множин *A*, *B*, *C*;
- за допомогою кругів Ейлера відобразити відношення між множинами *U*, *A*, *B*, *C*;
- спростити функцію *F,* яку наведено у таблиці 8.2;
- знайти потужність множини, відповідної до функції *F*.

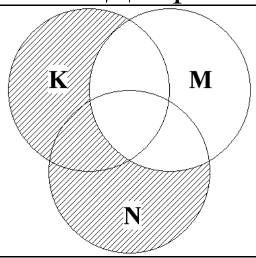
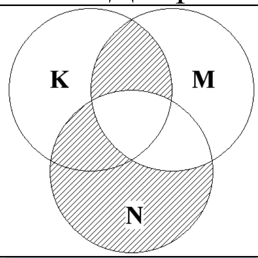
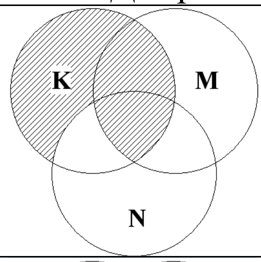
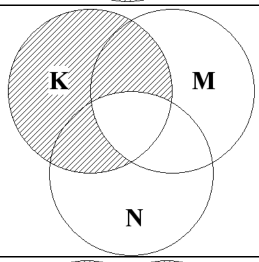
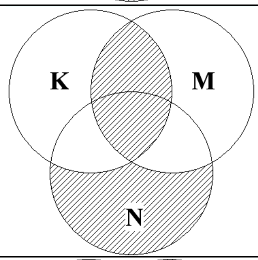
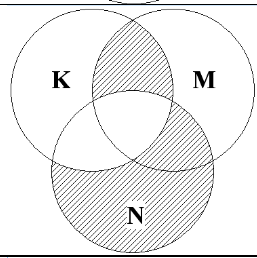
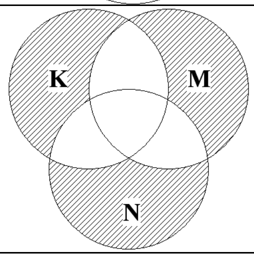
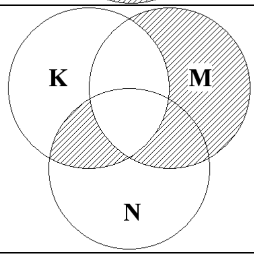
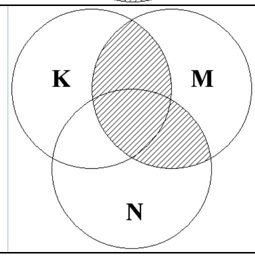
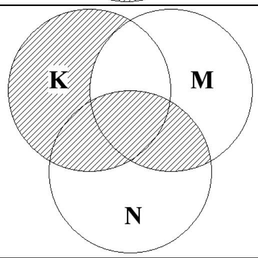
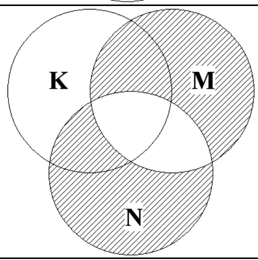
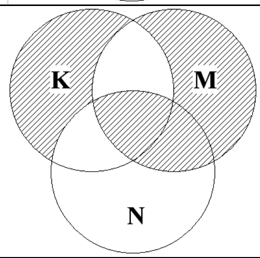
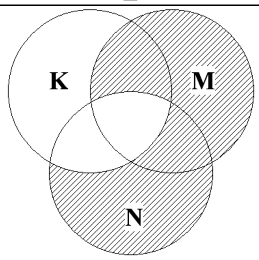
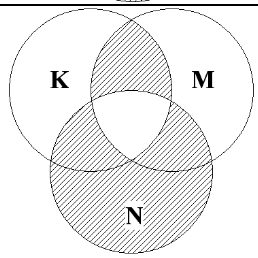
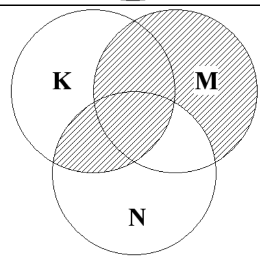
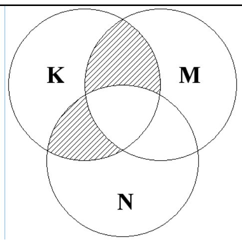
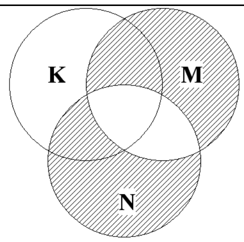
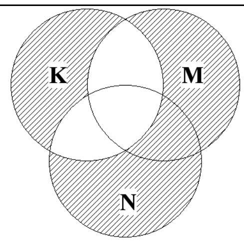
Таблиця 8.2 – Функція *F*

№	Множина	№	Множина
1.	$\overline{A\cap\overline{B}}\setminus A\cap C$	2.	$(\overline{A\cup B})\setminus A\cup B\cup C$
3.	$\overline{A\cap\overline{B}}\setminus\overline{A}\cap\overline{C}$	4.	$(\overline{A\cap\overline{B}})\setminus A\cup B\cup C$
5.	$((\overline{\overline{A}\cap\overline{B}})\setminus A\cap\overline{B})\cup C$	6.	$((\overline{A\cap\overline{B}})\setminus A\cup B)\cup C$
7.	$(\overline{A\cup\overline{B}})\setminus A\cup B\cap C$	8.	$(\overline{A\cup\overline{B}})\setminus A\cap\overline{B\cup C}$
9.	$((\overline{A\cup\overline{B}})\setminus A\cup B)\cup\overline{C}$	10.	$((\overline{A\cap\overline{B}})\setminus\overline{A}\cap B)\cup C$
11.	$((A\cup\overline{B})\setminus A\cap B)\setminus\overline{C}$	12.	$((\overline{A\setminus\overline{B}})\setminus A\cup B)\setminus\overline{C}$
13.	$((A\cup C)\setminus C\cup B)\setminus\overline{C}$	14.	$((A\setminus\overline{B})\setminus A\cup B)\setminus\overline{C}$
15.	$\overline{\overline{A\cap\overline{B}}\setminus A\cap C}$	16.	$((A\cup\overline{B})\cap\overline{A\setminus B})\setminus\overline{C}$
17.	$(\overline{A\cup B})\setminus\overline{A\cup\overline{B}}\cup C$	18.	$\overline{((A\setminus\overline{B})\setminus\overline{A}\cup B)\setminus\overline{C}}$
19.	$\overline{A\cup\overline{B}}\setminus\overline{A}\cap\overline{C}$	20.	$A\cup B\setminus A\cap C$
21.	$(\overline{A\cap\overline{B}})\setminus\overline{A}\cup(B\setminus\overline{C})$	22.	$A\cap\overline{B\cap C}\setminus A$
23.	$(\overline{A\cap\overline{B}})\setminus A\cup\overline{B\cup C}$	24.	$A\cup A\cap B\cup\overline{C}$
25.	$((\overline{A\cap\overline{B}})\setminus\overline{A\cup B})\setminus C$	26.	$\overline{\overline{C\setminus A}\cup\overline{\overline{B\cup C}}}$
27.	$((A\cup\overline{B})\setminus\overline{A\cap\overline{B}})\setminus\overline{C}$	28.	$A\setminus A\cap B\cup\overline{C}$
29.	$((A\cup C)\setminus\overline{C}\cup B)\setminus\overline{B}$	30.	$C\setminus A\cup\overline{B\cup C}$

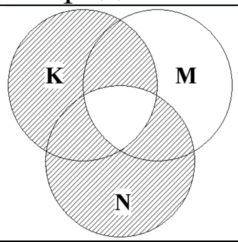
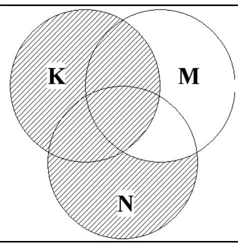
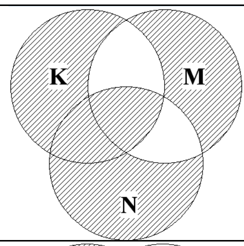
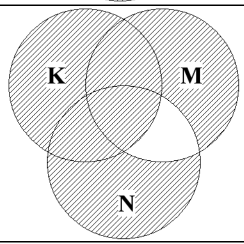
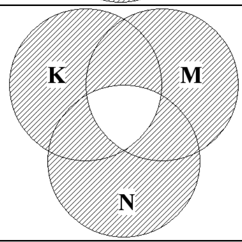
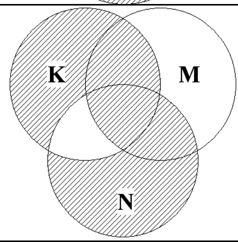
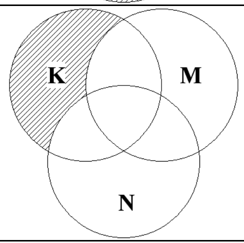
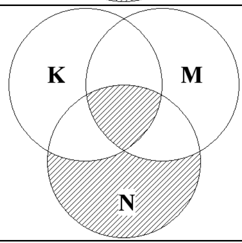
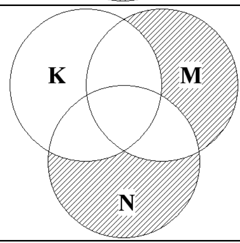
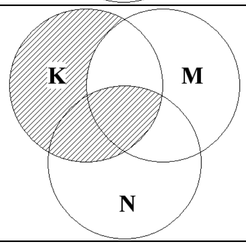
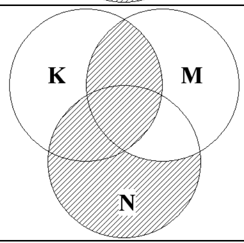
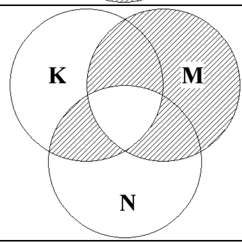
2. Для формул, наведених у таблиці 8.2, побудувати діаграми Венна.

3. Записати формули, відповідні до діаграм Венна, які наведено у таблиці 8.3.

Таблиця 8.3 – Діаграми Венна

№	Діаграма		Діаграма	№	Діаграма
1.		2.		3.	
4.		5.		6.	
7.		8.		9.	
10.		11.		12.	
13.		14.		15.	
16.		17.		18.	

Продовження табл. 8.3

19.		20.		21.	
22.		23.		24.	
25.		26.		27.	
28.		29.		30.	

4. В результаті опитування виявлена реакція деякої кількості глядачів на одну телевізійну передачу. Усіх глядачів і їх реакцію можна виразити в термінах таких чотирьох категорій: *Ч* (чоловічої статі), *Д* (дорослі), *С* (сподобалося), *Ду* (дуже). Результати розподілення глядачів наведено у таблиці 8.4.

Таблиця 8.4 – Розподілення глядачів за категоріями

Глядачі	Дуже сподобалося	Сподобалося, але не дуже	Не сподобалося, але не дуже	Дуже не сподобалося
Чоловіки	1	3	5	10
Жінки	6	8	3	1
Хлопці	5	5	3	2
Дівчата	8	5	1	1

Обчислити кількість глядачів, що попадають у задану категорію (табл.8.5).

Таблиця 8.5 – Виділення груп глядачів

№	Категорія	№	Категорія
1.	$Ч \cap С \cap \overline{Ду} \cap Д$	2.	$(Ч \cap Д) \cup (\overline{С \cup Ду})$
3.	$\overline{Ч} \cup \overline{Д}$	4.	$Ч \cap С$
5.	$\overline{Ч} \cap \overline{Д}$	6.	$\overline{Ч} \cap С \cap Ду$
7.	$Ч \cap С \cup \overline{Ч} \cup \overline{С}$	8.	$Ч \cap С \cap Ду \cup \overline{Ч} \cap \overline{Д}$
9.	$Ч \cap \overline{Ду} \cup \overline{Ч} \cap Ду$	10.	$Ч \cup \overline{Д} \cap С$
11.	$Ч \cap С \cap \overline{Ду} \cup \overline{Ч}$	12.	$Д \cup Ч \cap С$
13.	$Д \cap (Ч \cup С)$	14.	$С \cap \overline{Ду} \cup Ду \cap С$
15.	$\overline{Ч} \cap \overline{Д} \cap С$	16.	$\overline{Ч} \cap \overline{Д} \cap \overline{С} \cup Ч \cap С \cap Ду$
17.	$\overline{Ч} \cap Ду \cap С$	18.	$Ч \cap \overline{С} \cap Ду$
19.	$Ч \cap \overline{Д}$	20.	$Ч \cap С \cup \overline{Ч} \cup \overline{Ду}$
21.	$Ч \setminus С \cap Ду$	22.	$С \cap \overline{Ду} \cup \overline{С} \cap Ду$
23.	$\overline{Ч} \cup Ч \cap С$	24.	$Ч \cap Ду \cap \overline{С} \cup \overline{С}$
25.	$Ч \cap С \cap \overline{Ду} \cup \overline{Ч}$	26.	$Д \cap (Ч \cup \overline{С})$
27.	$\overline{Ч} \cup \overline{Д}$	28.	$\overline{Ч} \cap \overline{Д} \cup С$
29.	$Ч \cap Д \cup \overline{Ч} \cap С$	30.	$\overline{Ч} \cup Ду \cap С$

Тема 2. Відношення. Відображення

1. Задано множини A та B (табл. 8.6). Знайти декартовий добуток $A \times B$, A^2.

Таблиця 8.6 – Множини A та B

№	Множини	№	Множини
1.	$A=\{1,2,3\}$; $B=\{3,5\}$	2.	$A=\{2,5,4,6\}$; $B=\{3,5,4,5\}$
3.	$A=\{1,5,6,7\}$; $B=\{2,4\}$	4.	$A=\{1,3,5\}$; $B=\{2,6\}$
5.	$A=\{1,4,6\}$; $B=\{2,6\}$	6.	$A=\{3,5\}$; $B=\{3,6,7\}$
7.	$A=\{1,5,7,9\}$; $B=\{0,6,7\}$	8.	$A=\{1,3,4\}$; $B=\{2,4\}$
9.	$A=\{1,3,4\}$; $B=\{5,6,3\}$	10.	$A=\{1,2\}$; $B=\{1,2\}$
11.	$A=\{1,2,3\}$; $B=\{1,2,3\}$	12.	$A=\{1,4,6\}$; $B=\{1,4,8\}$
13.	$A=\{1,8,9\}$; $B=\{6,8\}$	14.	$A=\{1,2,3\}$; $B=\{4,5,6\}$
15.	$A=\{4,7,9\}$; $B=\{1,2,5\}$	16.	$A=\{2,5,8\}$; $B=\{3,6,7\}$
17.	$A=\{4,5,8\}$; $B=\{1,2,3,4\}$	18.	$A=\{1,2\}$; $B=\{1,2,3,4,5\}$
19.	$A=\{4,5,7\}$; $B=\{3,5,9\}$	20.	$A=\{1,2\}$; $B=\{1,2,3,4,8\}$
21.	$A=\{7,5\}$; $B=\{4,9\}$	22.	$A=\{7,8,4\}$; $B=\{1,2,3\}$
23.	$A=\{1,5,9\}$; $B=\{7,5,3\}$	24.	$A=\{1,2\}$; $B=\{3,5,4\}$
25.	$A=\{1,7,4\}$; $B=\{4,7,1\}$	26.	$A=\{2,4,8\}$; $B=\{3,7\}$
27.	$A=\{5,8\}$; $B=\{2,5,4\}$	28.	$A=\{1,4\}$; $B=\{1,2,5\}$
29.	$A=\{4,7\}$; $B=\{3,5,9\}$	30.	$A=\{0,2\}$; $B=\{1,2,3\}$

2. Задано бінарне відношення R_1 як перелік елементів на множині $A=\{1,2,3,4\}$, $R_1 \subseteq A^2$ (табл. 8.7).

Таблиця 8.7 – Бінарні відношення

Варіант	Відношення
1.	$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$
2.	$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$
3.	$R_1 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
4.	$R_1 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$
5.	$R_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$
6.	$R_1 = \{(4,3)\}$
7.	$R_1 = \{(3,4)\}$
8.	$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,2),(3,3),(4,4)\}$
9.	$R_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3)\}$
10.	$R_1 = \{(1,1),(2,1),(2,2),(2,3)\}$
11.	$R_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$
12.	$R_1 = \{(1,3),(3,1)\}$
13.	$R_1 = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4)\}$
14.	$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
15.	$R_1 = \{(1,2), (2,3),(3,4)\}$
16.	$R_1 = \{(2,4),(4,2)\}$
17.	$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
18.	$R_1 = \{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$
19.	$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}$
20.	$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
21.	$R_1 = \{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(4,4)\}$
22.	$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}$
23.	$R_1 = \{(1,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$
24.	$R_1 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
25.	$R_1 = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(4,3)\}$
26.	$R_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
27.	$R_1 = \{(1,1), (1,4),(2,2) (2,3),(3,3),(4,4)\}$
28.	$R_1 = \{(1,1),(1,4),(2,1),(2,2),(4,1),(4,4)\}$
29.	$R_1 = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,3)\}$
30.	$R_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$

- Задати відношення за допомогою матриці та графа.
- Записати властивості відношення. Перевірити чи є відношення відношенням еквівалентності, толерантності, порядку.
- Визначити, чи є дане відношення функціональним, відображенням. Якщо є, визначити тип відображення. Відповідь обґрунтувати.

3. Аналітично довести або спростувати істинність виразу (табл. 8.8).

Таблиця 8.8 – Тотожності

№	Тотожність	№	Тотожність
1.	$(A\times B)\setminus C=(A\setminus C)\times(B\setminus C)$	2.	$(\overline{A\cap B})\times C=(\bar{A}\times C)\cup(\bar{B}\times C)$
3.	$(A\times B)\cap C=(A\cup C)\times(B\cup C)$	4.	$(\overline{A\cup B})\times C=(\bar{A}\times C)\cap(\bar{B}\times C)$
5.	$(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$	6.	$\bar{A}\cap(\bar{B}\times C)=(\bar{A}\cap\bar{B})\times(\bar{A}\cap C)$
7.	$(B\setminus A)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$	8.	$\bar{A}\cup(B\times\bar{C})=(\bar{A}\cup B)\times(\bar{A}\cup\bar{C})$
9.	$(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$	10.	$\bar{A}\setminus(B\times C)=(\bar{A}\setminus B)\times(\bar{A}\setminus C)$
11.	$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$	12.	$(\bar{A}\times\bar{B})\cap\bar{C}=(\bar{A}\cap\bar{C})\times(\bar{B}\cap\bar{C})$
13.	$A\cap(B\times C)=(A\cap B)\times(A\cap C)$	14.	$(\bar{A}\times B)\setminus C=(\bar{A}\setminus C)\times(B\setminus C)$
15.	$A\cup(B\times C)=(A\cup B)\times(A\cup C)$	16.	$(\bar{A}\times B)\cup\bar{C}=(\bar{A}\cup\bar{C})\times(B\cup\bar{C})$
17.	$A\setminus(B\times C)=(A\setminus B)\times(A\setminus C)$	18.	$(\bar{A}\setminus B)\times\bar{C}=(\bar{A}\times\bar{C})\setminus(B\times\bar{C})$
19.	$A\times B\times C=A\times C\times B$	20.	$(\bar{B}\setminus A)\times\bar{C}=(A\times\bar{C})\setminus(\bar{B}\times\bar{C})$
21.	$(A\times B)\cap\bar{C}=(A\cap\bar{C})\times(B\cap\bar{C})$	22.	$(A\cap\bar{B})\times\bar{C}=(A\times\bar{C})\cap(\bar{B}\times\bar{C})$
23.	$(A\times B)\setminus\bar{C}=(A\setminus\bar{C})\times(B\setminus\bar{C})$	24.	$(A\cup\bar{B})\times\bar{C}=(A\times\bar{C})\cup(\bar{B}\times\bar{C})$
25.	$(A\times B)\cup C=(\bar{A}\cap\bar{C})\times(\bar{B}\cap\bar{C})$	26.	$A\cap(\bar{B}\times\bar{C})=(A\cap\bar{B})\times(A\cap\bar{C})$
27.	$(\overline{A\setminus B})\times C=(\bar{A}\times C)\cup(B\times C)$	28.	$\bar{A}\cup(B\times\bar{C})=(\bar{A}\cup B)\times(\bar{A}\cup\bar{C})$
29.	$(\overline{B\setminus A})\times C=(A\times C)\cup(\bar{B}\times C)$	30.	$\bar{A}\setminus(\bar{B}\times C)=(\bar{A}\setminus\bar{B})\times(\bar{A}\setminus C)$

Тема 3. Алгебра логіки

1. Задана формула *f(x,y,z)* булевої алгебри (табл. 8.9).
- Спростити формулу *f(x,y,z)*.
- Побудувати таблицю істинності до заданої формули.
- Записати ДДНФ та ДКНФ для заданої формули.
- Записати диз'юнктивне розкладання функції за змінними *x*,*z*.
- Записати кон'юнктивне розкладання функції за змінними *y,z*.
- Визначити, чи є задана функція самодвоїстою.
- Перевірити задану функцію на збереження *0*, збереження *1*, монотонність, лінійність.

Таблиця 8.9 – Формули *f(x,y,z)* булевої алгебри

№	Формула	№	Формула
1.	$x\cdot(\overline{y\cdot z\cdot x}\to\overline{y\cdot z})\cdot y\cdot x$	2.	$y\cdot\overline{y\cdot x\cdot z\to(\bar{z}\cdot x)}\vee y\cdot x$
3.	$x\cdot y\cdot\overline{z\to z\cdot x}\to(z\cdot x\cdot y)$	4.	$\overline{y\cdot\overline{x\cdot z}\vee y\cdot x\to x\cdot\bar{y}}$
5.	$x\cdot\overline{\bar{y}\cdot z}\vee(z\cdot\overline{y\to x\cdot z})$	6.	$\overline{y\cdot z}\cdot x\vee\overline{\overline{x\to y\cdot z}\to z\cdot y}$
7.	$x\cdot\overline{y\cdot z\cdot x}\to x\cdot\bar{y}\vee y\cdot z$	8.	$\overline{z\cdot x\to z\cdot x}\to\overline{z\cdot x\cdot y}$
9.	$\overline{x\cdot\bar{t}\cdot y}\to y\cdot x\cdot\overline{x\cdot z}$	10.	$(y\cdot(x\cdot\overline{z\cdot x}\to\overline{x\cdot z\cdot y}))\cdot y$

Продовження табл. 8.9

11.	$\overline{y \to z \cdot x} \to x \cdot \bar{z} \vee y \cdot \overline{z \cdot t}$	12.	$(\overline{x \cdot z \cdot y} \to \overline{y} \cdot x) \cdot \overline{x \cdot z \cdot \overline{y}}$
13.	$\bar{z} \cdot x \cdot (\bar{y} \cdot \overline{z \to y}) \to z \cdot y$	14.	$(\overline{x \cdot y \cdot z} \to \overline{x \cdot y}) \vee y \cdot z$
15.	$\overline{x \cdot y} \to (y \cdot z \cdot \overline{x \cdot y \to z} \vee x)$	16.	$\overline{z \cdot y \cdot x \to z} \to y \cdot \overline{z \cdot x}$
17.	$\overline{x \cdot y \to x} \to (\overline{\overline{x \cdot y} \cdot z \vee x})$	18.	$(z \cdot y \to \overline{z \cdot \bar{y} \vee \overline{z \cdot y}}) \cdot \bar{x}$
19.	$x \cdot \overline{y \cdot z} \to \overline{x \cdot z} \to x \cdot z$	20.	$(x \cdot \bar{z} \cdot y \to \overline{z \cdot x \to x}) \cdot z$
21.	$\bar{x} \cdot y \to (\bar{z} \cdot \overline{x \to z}) \to x \cdot z \vee y$	22.	$(\overline{x \cdot y \to z} \cdot z) \cdot y \cdot x \to z$
23.	$(x \cdot \overline{y \cdot z} \vee x \cdot \overline{y \to z}) \vee y \cdot z$	24.	$x \cdot (y \cdot \overline{x \cdot z} \to \overline{x \cdot y}) \to y \cdot x$
25.	$(x \cdot \bar{y} \cdot z \to \overline{y \cdot z}) \to \overline{x \cdot y \cdot z}$	26.	$z \cdot x \cdot (\overline{y \to y \cdot z}) \to (y \cdot z \cdot x)$
27.	$\overline{x \cdot z \to y} \cdot (x \cdot y) \to \overline{x \cdot y} \cdot z$	28.	$\overline{x \cdot y} \cdot z \to y \cdot z \cdot \overline{(x \cdot y) \cdot z}$
29.	$\overline{x \cdot y \to x} \to \overline{x \cdot z} \cdot (x \to \overline{x \cdot z})$	30.	$x \cdot (y \to x \cdot y) \vee \overline{z \cdot x \to x \cdot z}$

2. Визначити, чи є наведена функція функціонально повним набором (табл. 8.10).

Таблиця 8.10 – Функція алгебри логіки

№	Функція	№	Функція	№	Функція
1.	f_{132}	2.	f_{190}	3.	f_{220}
4.	f_{144}	5.	f_{192}	6.	f_{224}
7.	f_{151}	8.	f_{194}	9.	f_{226}
10.	f_{163}	11.	f_{197}	12.	f_{229}
13.	f_{182}	14.	f_{200}	15.	f_{230}
16.	f_{174}	17.	f_{202}	18.	f_{232}
19.	f_{176}	20.	f_{207}	21.	f_{233}
22.	f_{188}	23.	f_{210}	24.	f_{235}
25.	f_{189}	26.	f_{212}	27.	f_{236}
28.	F_{196}	29.	f_{218}	30.	f_{239}

Тема 4. Мінімізація булевих функцій. Карти Карно. Метод Квайна-Мак-Класкі

Функція *f(x,y,z,t)* задана за допомогою конституент одиниці, що закодовані десятковими еквівалентами (табл. 8.11).

1. Заповнити карту Карно (діаграму Вейча) для заданої функції. Обрати контури склеювання та записати мінімальну ДНФ або мінімальну КНФ.
2. Провести мінімізацію методом Квайна-Мак-Класкі.
3. За мінімальною ДНФ / КНФ, одержаних у завданні 2, побудувати перемикальний ланцюг у базисі ТА-НІ.

Таблиця 8.11 – Конституенти одиниці, відповідні до булевих функцій

№	Конституенти одиниці	№	Конституенти одиниці
1.	*0,2,6,7,8,9,13,15*	2.	*0,2,3,4,6,7,9,13,14,15*
3.	*0,2,3,5, 7,8,10,13*	4.	*0,2,3,4,7,8,9,11,12,15*
5.	*0,4,5,7,12,14,15*	6.	*0,2,3,4,5,8,9,14,15*
7.	*0,2,3,4,6,8,9,12,13*	8.	*0,2,3,4,5,13,14,15*
9.	*0,2,3,4,8,9,12,15*	10.	*0,2,3,4,5,7,9,13,14,15*
11.	*0,2,7,8,9,12,13,15*	12.	*0,2,3,4,5,7,14,15*
13.	*0,2,3,4,6,7,8,13,14*	14.	*0,2,3,4,5,7,8,11,12*
15.	*0,2,3,4,6,10,11,15*	16.	*0,2,3,4,5,7,8,10,15*
17.	*0,2,3,6,7,8,9,10,15*	18.	*0,2,3,4,5,7,8,10,11*
19.	*0,2,3,4,5,7,8,9,14*	20.	*0,2,3,4,7,8,9,10,15*
21.	*0,1,2,3,5,6,11,12,15*	22.	*0,2,3,4,7,8,9,10,11*
23.	*0,1,3,4,6,7,12,15*	24.	*0,2,3,4,7,8,9,10,11*
25.	*0,1,3,4,6,7,11,13,15*	26.	*0,2,3,4,6,8,9,13,15*
27.	*1,2,3,8,10,14,15*	28.	*0,2,3,4,5,8,10,11,15*
29.	*0,2,7,9,10,13,14*	30.	*0,2,3,4,7,9,10,11,12*

Тема 5. Математична логіка

1. Визначити яких висловлювань (Істинне, Хибне, або ні те, ні інше) стосуються формули, наведені у таблиці 8.12 відповідно до заданого варіанта.

Таблиця 8.12 – Висловлювання

№	Формула	№	Формула
1.	$(p \sim q) \to \overline{p}$	2.	$\overline{\overline{\overline{p} \to p} \to p}$
3.	$(p \to \overline{q}) \to (q \to \overline{p})$	4.	$\overline{p \leftrightarrow \overline{p \to p}}$
5.	$(p \vee q) \sim pq$	6.	$\overline{\overline{p \leftrightarrow p} \to p}$
7.	$(((p \to q) \to p) \to p)$	8.	$\overline{p \to q} \leftrightarrow q$
9.	$\overline{p \vee q} \sim \overline{p} \vee \overline{q}$	10.	$\overline{p \leftrightarrow q} \to p$
11.	$(p \sim p) \vee (q \sim q)$	12.	$p \to \overline{p \leftrightarrow q}$
13.	$p \sim \overline{q} \vee p$	14.	$p \vee q \wedge (p \to q)$
15.	$(p \to \overline{q}) \leftrightarrow (q \to \overline{p})$	16.	$\overline{p \vee q} \leftrightarrow q$
17.	$p \leftrightarrow \overline{p}$	18.	$p \vee q \leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$
19.	$(((p \to q) \to pq) \to p)$	20.	$pq \sim \overline{p}\overline{q}$
21.	$p \leftrightarrow q \leftrightarrow p \leftrightarrow q$	22.	$pq \to \overline{p}\overline{q}$
23.	$(pq \to p) \to q$	24.	$(p \leftrightarrow q) \vee (p \to q)$
25.	$(\overline{p}q \to p) \leftrightarrow q$	26.	$(p \to q) \vee (q \to p)$
27.	$(p \leftrightarrow q) \vee (\overline{p} \leftrightarrow \overline{q})$	28.	$\overline{(p \to \overline{q}) \vee q}$
29.	$q \to \overline{p \to \overline{p \leftrightarrow q}}$	30.	$\overline{\overline{(q \to p)} \vee \overline{(p \leftrightarrow q)}}$

2. Формалізувати речення.

1. Я піду додому або залишуся тут і вип'ю чашку чаю, я не піду додому, отже, я залишуся і вип'ю чашку чаю.

2. Якщо Олег ляже сьогодні пізно, він буде вранці в отупінні, якщо він ляже не пізно, то йому здаватиметься, що не варто жити, отже, або Олег буде завтра в отупінні, або йому здаватиметься, що не варто жити.

3. Заперечення диз’юнкції двох висловлювань еквівалентно кон’юнкції заперечень кожного з цих висловлювань.

4. Якщо 2 – просте число, то це найменше просте число, якщо 2 – найменше просте число, то 1 не є прости числом; число 1 не є простим числом, отже, 2 – просте число.

5. Ігор або втомився, або хворий, якщо він втомився, то він злий; він не злий, отже, він хворий.

6. Якщо завтра буде холодно, я одягну тепле пальто, якщо рукав буде полагоджений; завтра буде холодно, а рукав не буде полагоджений, отже, я не одягну тепле пальто.

7. Ні Північ, ні Південь не перемогли в громадянській війні.

8. Людину не підкупують лестощі, якщо розум у людини є.

9. Іван прийде на іспит і він або Сергій отримає п’ятірку.

10. Якщо не можеш визнати похвали заслуженими, то вважай їх лестощами.

11. Якщо буде гарна погода, то я подзвоню друзям, і ми поїдемо до моря.

12. Якщо я втомився або голодний, я не можу займатися.

13. Натуральне число n ділиться на 3 тоді і лише тоді, коли сума цифр числа n ділиться на 3.

14. Якщо вранці буде злива, то я або залишуся вдома, або вимушений буду взяти таксі.

15. Сьогодні наша команда не виграла і, отже, не вийшла у фінал.

16. Якщо я сьогодні встану і піду на заняття, моя мама буде задоволена, а якщо я не встану, то мама не буде задоволена.

17. Якщо він хоче досягти мети, він повинен багато знати і бути удачливим.

18. Сьогодні ясно, отже сьогодні не йде ні дощ, ні сніг.

19. Вчора було похмуро, а сьогодні тепло і ясно.

20. Якщо сьогодні хмарно, то це означає, що завтра буде дощ, або вітер розганятиме хмари.

21. Ти успішно складеш іспит тоді і лише тоді, коли добре підготуєшся; якщо ти не складеш іспит успішно, то позбудешся стипендії.

22. Математичні відомості можуть застосовуватися вміло і бути корисними лише в тому випадку, якщо вони засвоєні творчо.

23. Якщо у розпалі пристрасті розум сумнівається, то коли пристрасть остигне, він засудить твій вчинок.

24. Якщо головний визначник системи лінійних рівнянь не дорівнює нулю, то система рівнянь визначена, тобто має єдине вирішення.

25. Другом можна вважати того і лише того, хто щасливий, якщо щасливий його друг, і зажурений, якщо той зажурений.

26. Якщо я успішно закінчу школу і вступлю до інституту, то я зможу

скласти іспит по математиці тоді і лише тоді, коли я багато займатимуся або викладач буде поблажливий.

27. Ти зрозумієш цю тему, якщо прийдеш сьогодні на заняття або прочитаєш підручник, інакше тобі зможе допомогти друг тоді і лише тоді, коли зрозуміє цю тему сам.

28. Якщо "Пірати" або "Цуценята" програють і "Велетні" виграють, то "Увертиши" втратять перше місце і, крім того, я програю парі.

29. Якщо робітники або адміністрація упираються, то страйк буде врегульований тоді і лише тоді, коли уряд доб’ється судової заборони, але війська не будуть послані на завод.

30. Хліби уціліють тоді і лише тоді, коли будуть вириті іригаційні канави; якщо хліби не уціліють, то фермери збанкрутують і залишать ферми.

3.Записати у вигляді ПНФ формули з таблиці 8.12.

Таблиця 8.12 – Формули алгебри предикатів

№	Формула для перетворення у ВНФ	№	Формула для перетворення у ВНФ
1.	$\forall x P(x) \sim \exists x \exists y Q(x,y)$	2.	$\exists x P(x) \wedge \exists y P(y) \rightarrow \exists x \forall y Q(x,y)$
3.	$(\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x,y)) \wedge \exists y P(y)$	4.	$(\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x,y)) \rightarrow \exists y P(y)$
5.	$(\forall x P(x) \vee \exists x Q(x,y)) \sim \exists y P(y)$	6.	$\exists x P(x) \vee \exists y P(y) \sim \exists x \forall y Q(x,y)$
7.	$\forall x P(x) \rightarrow \exists x \exists y Q(x,y)$	8.	$(\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x,y)) \sim \exists y P(y)$
9.	$(\forall x P(x) \vee \exists x Q(x,y)) \rightarrow \exists y P(y)$	10.	$\exists x P(x) \wedge \exists y P(y) \sim \exists x \forall y Q(x,y)$
11.	$(\forall x P(x) \sim \exists x Q(x,y)) \wedge \exists y P(y)$	12.	$\exists x P(x) \vee \exists y P(y) \rightarrow \exists x \forall y Q(x,y)$
13.	$(\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x,y)) \vee \exists y P(y)$	14.	$(\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x,y)) \sim \exists y P(y)$
15.	$\forall x \exists y (P(x,y) \rightarrow Q(x,y)) \vee \exists x \exists y (P(x,y) \rightarrow Q(y))$		
16.	$\forall x \exists y (P(x,y) \vee Q(x,y)) \rightarrow \exists x \exists y (P(x,y) \sim Q(y))$		
17.	$\forall x \exists y (P(x,y) \vee Q(x,y)) \rightarrow \exists x \exists y (P(x,y) \sim Q(y))$		
18.	$\forall x \exists y (P(x,y) \rightarrow Q(x,y)) \wedge \exists x \exists y (P(x,y) \rightarrow Q(y))$		
19.	$\forall x \exists y (P(x,y) \wedge Q(x,y)) \rightarrow \exists x \exists y (P(x,y) \sim Q(y))$		
20.	$\forall x \exists y (P(x,y) \rightarrow Q(x,y)) \wedge \exists x \exists y (P(x,y) \sim Q(y))$		
21.	$\forall x \exists y (P(x,y) \sim Q(x,y)) \sim \exists x \exists y (P(x,y) \sim Q(y))$		
22.	$\forall x \exists y (P(x,y) \wedge Q(x,y)) \sim \exists x \exists y (P(x,y) \rightarrow Q(y))$		
23.	$\forall x \exists y (P(x,y) \vee Q(x,y)) \sim \exists x \exists y (P(x,y) \rightarrow Q(y))$		
24.	$\forall x \exists y (P(x,y) \sim Q(x,y)) \vee \exists x \exists y (P(x,y) \sim Q(y))$		
25.	$\forall x \exists y (P(x,y) \sim Q(x,y)) \sim \exists x \exists y (P(x,y) \rightarrow Q(y))$		
26.	$\forall x \exists y (P(x,y) \rightarrow Q(x,y)) \vee \exists x \exists y (P(x,y) \sim Q(y))$		
27.	$\forall x \exists y (P(x,y) \sim Q(x,y)) \wedge \exists x \exists y (P(x,y) \sim Q(y))$		
28.	$(\forall x P(x) \sim \exists x Q(x,y)) \rightarrow \exists y P(y)$		
29.	$\forall x \exists y (P(x,y) \sim Q(x,y)) \wedge \exists x \exists y (P(x,y) \rightarrow Q(y))$		
30.	$\forall x \exists y (P(x,y) \rightarrow Q(x,y)) \rightarrow \exists x \exists y (P(x,y) \rightarrow Q(y))$		

4. Задано предикати *P(x,y)* та *Q(x,y)* у предметній області *D{a,b}* таблицею:

x	a	a	a	a
y	a	b	a	b
P	0	1	0	1
Q	1	0	0	1

Визначте, чи є формули з таблиці 8.13 істинними або хибними. Відповідь обґрунтувати.

Таблиця 8.13 – Формули алгебри предикатів

Варіант	Формула 1	Формула 2
1.	$\forall x P(x,a)$	$\forall x \forall y (P(x,y) \vee Q(x,y))$
2.	$\forall x P(x,x)$	$\forall x \exists y (P(x,a) \vee Q(y,y))$
3.	$\forall P(x,b)$	$\forall x \forall y (\overline{P(x,y) \wedge Q(x,y)} \rightarrow P(x,y))$
4.	$\forall x \neg P(x,a)$	$\forall x \exists y (\neg P(x,y) \vee Q(x,y))$
5.	$\forall x \neg P(x,b)$	$\exists x \forall y (P(x,y) \vee Q(x,y))$
6.	$\forall x \neg P(x,x)$	$\exists x \forall y (P(x,y) \vee \neg Q(x,y))$
7.	$\exists x \forall y \neg P(x,y)$	$\exists x \forall y (P(x,y) \sim Q(x,y))$
8.	$\forall y P(a,y)$	$\exists x \forall y (P(x,y) \sim \neg Q(x,y))$
9.	$\forall y P(b,y)$	$\exists x \forall y (\neg P(x,y) \vee \neg Q(x,y))$
10.	$\exists y P(y,y)$	$\exists x \forall y (\neg P(x,y) \sim Q(x,y))$
11.	$\forall x \exists y P(x,y)$	$\exists x \forall y (\neg P(x,y) \vee \neg Q(x,y))$
12.	$\exists y \neg P(a,y)$	$\exists x \forall y (\neg P(x,y) \vee Q(x,y))$
13.	$\forall y \neg P(b,y)$	$\forall x \exists y (P(x,y) \rightarrow Q(x,y))$
14.	$\forall y P(y,y)$	$\forall x \exists y (\neg P(x,y) \rightarrow Q(x,y))$
15.	$\forall x \exists y \neg P(x,y)$	$\forall x \exists y (Q(x,y) \rightarrow P(x,y))$
16.	$\forall x Q(x,a)$	$\forall x \exists y (\neg P(x,y) \rightarrow \neg Q(x,y))$
17.	$\forall x Q(x,x)$	$\forall x \exists y (P(x,y) \rightarrow \neg Q(x,y))$
18.	$\forall Q(x,b)$	$\forall x \exists y (\neg Q(x,y) \rightarrow P(x,y))$
19.	$\forall x \neg Q(x,a)$	$\forall x \exists y (\neg Q(x,y) \rightarrow \neg P(x,y))$
20.	$\forall x \neg Q(x,b)$	$\forall x \exists y (P(x,y) \wedge Q(x,y))$
21.	$\forall x \neg Q(x,x)$	$\forall x \exists y (P(x,y) \vee Q(x,y))$
22.	$\exists x \forall y \neg Q(x,y)$	$\exists x \forall y (P(x,y) \rightarrow Q(x,y))$
23.	$\forall y Q(a,y)$	$\exists x \exists y (\neg P(x,y) \wedge Q(x,y))$
24.	$\forall y Q(b,y)$	$\forall x \forall y (P(x,y) \sim Q(x,y))$
25.	$\forall y Q(y,y)$	$\exists x \forall y (P(x,y) \rightarrow P(x,y) \wedge Q(x,y))$
26.	$\forall x \exists y Q(x,y)$	$\exists x \forall y (\neg P(x,y) \rightarrow \neg Q(x,y))$
27.	$\exists y \neg Q(a,y)$	$\forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow P(x,y) \vee Q(x,y))$
28.	$\forall y \neg Q(b,y)$	$\exists x \exists y (P(x,y) \sim Q(x,y))$
29.	$\forall y Q(y,y)$	$\exists x \forall y (P(x,y) \rightarrow Q(x,y) \rightarrow P(x,y))$
30.	$\forall x \exists y \neg Q(x,y)$	$\exists x \forall y ((P(x,y) \sim Q(x,y)) \rightarrow Q(x,y))$

Тема 6. Основні поняття теорії графів. Ейлерові та гамільтонові цикли та ланцюги

Неорієнтований граф на 6 вершинах заданий вектором R_{mn} (табл. 8.14), де m та n – номера вершин графа, $m=\overline{1,6}$ та $n=\overline{1,6}$. Елементи вектора R_{mn} відповідають кількості ребер між відповідними вершинами m та n. Для заданого графа необхідно:

1. Побудувати матрицю суміжності та матрицю інцидентності для заданого графа. Побудувати граф.
2. Визначити тип графа.
3. Виписати усі ейлерові та гамільтонові ланцюги та цикли (якщо є). Відповідь обґрунтувати.
4. Визначити хроматичне число та реберне хроматичне число графа.
5. Розфарбувати вершини та ребра графа.

Таблиця 8.14 – Неорієнтований граф

Варі-	m	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5
ант	n	2	3	4	5	6	3	4	5	6	4	5	6	5	6	6
1	R_{mn}	1	2	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1
2	R_{mn}	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	2
3	R_{mn}	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1
4	R_{mn}	1	0	1	0	0	1	1	0	2	0	0	1	0	2	0
5	R_{mn}	2	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0
6	R_{mn}	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	2	2
7	R_{mn}	1	1	1	0	0	0	2	0	2	0	0	1	0	1	0
8	R_{mn}	0	2	0	2	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1
9	R_{mn}	1	2	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0
10	R_{mn}	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1
11	R_{mn}	1	2	0	0	1	1	1	0	0	2	1	0	1	0	0
12	R_{mn}	0	0	0	1	1	1	0	0	2	0	0	1	1	0	2
13	R_{mn}	0	1	0	1	0	0	1	2	0	1	0	0	0	1	1
14	R_{mn}	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1
15	R_{mn}	1	0	2	0	2	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
16	R_{mn}	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	2
17	R_{mn}	1	0	0	0	0	1	1	2	0	0	0	1	1	0	1
18	R_{mn}	2	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1
19	R_{mn}	1	1	0	0	0	2	1	0	2	1	0	0	1	1	1
20	R_{mn}	2	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	2	1
21	R_{mn}	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0
22	R_{mn}	2	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0
23	R_{mn}	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0
24	R_{mn}	0	0	1	0	1	2	1	0	1	1	0	1	0	1	0
25	R_{mn}	2	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1
26	R_{mn}	0	2	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
27	R_{mn}	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1
28	R_{mn}	2	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1
29	R_{mn}	1	0	1	0	2	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0
30	R_{mn}	1	1	0	0	0	2	0	1	2	1	0	0	1	0	0

Тема 7. Планарність графів. Відстані на графах

Задано зважений неорієнтований граф ***G*** переліком вагових коефіцієнтів ребер між вершинами *m* та *n* (табл. 8.15). Значення 0 у табл. 8.15 означає, що ребро між вершинами *m* та *n* відсутнє.

1. Побудувати плоску укладку графа (табл. 8.15), визначити кількість граней графа *G*.
2. Визначити відстань від вершини *A* до усіх інших вершин графа.
3. Побудувати дерево мінімальної вартості *T*, виписати відповідні для нього хорди.
4. Задати код дерева *T*, побудованого у завданні 3.
5. За заданим кодом (табл. 8.16) побудувати дерево.

Таблиця 8.15 – Перелік вагових коефіцієнтів ребер

m	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5
n	2	3	4	5	6	3	4	5	6	4	5	6	5	6	6
1	0	9	0	2	9	8	0	0	0	0	0	0	0	5	9
2	4	6	0	0	3	7	1	2	0	8	0	0	2	8	0
3	0	5	0	0	0	7	3	1	3	2	0	4	0	6	0
4	4	8	5	0	4	0	7	9	0	0	0	5	1	6	0
5	9	6	8	0	0	3	9	8	0	9	0	0	5	2	0
6	5	9	0	9	8	2	0	4	0	3	0	0	9	2	0
7	5	5	1	1	0	0	4	1	0	0	9	6	6	7	6
8	0	2	0	0	0	7	2	6	9	0	0	9	0	4	0
9	6	1	7	7	9	0	0	8	0	3	0	5	6	1	9
10	0	0	0	9	0	6	2	9	2	0	0	0	0	0	3
11	0	6	0	4	0	9	0	0	0	1	0	0	0	4	6
12	0	0	2	9	4	9	7	0	9	0	0	5	0	0	8
13	7	2	4	8	2	0	3	3	0	0	0	5	7	8	3
14	0	6	3	6	0	0	0	4	0	6	0	2	0	2	1
15	9	9	9	4	8	5	8	0	8	0	0	0	6	4	7
16	3	6	0	0	0	3	7	5	3	0	4	0	4	4	0
17	9	3	4	9	3	0	0	0	0	7	5	0	9	5	3
18	0	0	0	8	5	3	0	0	0	6	0	0	0	0	3
19	8	7	0	0	9	1	5	1	2	8	7	0	8	1	0
20	9	8	2	6	0	0	7	9	0	5	0	0	5	8	6
21	0	9	1	9	0	0	9	4	0	4	0	7	0	6	5
22	7	7	5	0	6	9	3	0	0	5	0	0	9	5	2
23	0	2	5	7	0	1	0	6	0	0	0	0	0	3	3
24	6	8	3	0	3	8	4	0	0	0	0	6	3	4	0
25	0	1	3	9	0	0	9	0	0	2	6	2	0	6	2
26	1	7	2	2	0	0	2	0	0	5	0	7	7	5	7
27	0	5	2	0	0	0	2	2	0	6	2	8	0	5	0
28	0	8	0	4	2	0	6	5	0	0	0	0	0	2	9
29	0	0	1	0	0	1	0	2	2	6	5	0	0	0	0
30	6	0	0	5	1	5	0	0	6	0	0	5	9	3	5

Таблиця 8.16 – Коди дерева

№	Код дерева	№	Код дерева	№	Код дерева
1.	*3,4,2,5,4,3,5,1,1,1*	2.	*2,4,5,5,3,1,2,2,3,6*	*3.*	4,5,6,3,2,3,4,5,5,6
4.	*3,2,3,4,5,6,4,5,6,6*	5.	*6,5,4,5,7,8,8,2,3,4*	*6.*	*6,5,4,2,3,4,4,6,5,5*
7.	*4,5,6,5,4,5,6,6,7,1*	8.	*5,6,7,7,3,4,5,5,6,6*	*9.*	*6,3,2,3,4,5,4,5,5,5*
10.	*3,4,2,3,4,5,5,3,2,3*	11.	*6,6,7,4,4,3,6,7,8,8*	*12.*	*6,2,3,3,4,5,5,6,1,2*
13.	*3,4,4,3,2,2,1,1,1,2*	14.	*1,2,4,4,5,3,3,4,4,1*	*15.*	*5,4,4,5,6,6,1,2,3,1*
16.	*3,4,5,4,3,4,4,5,2,3*	17.	*8,7,7,6,7,8,8,9,6,7*	*18.*	*1,9,1,8,1,7,1,6,1,5*
19.	*4,5,3,2,2,3,4,4,5,4*	20.	*2,4,5,6,6,7,7,8,3,4*	*21.*	*4,6,7,8,9,3,4,6,8,1*
22.	*5,4,5,5,6,2,1,2,2,1*	23.	*5,4,6,6,7,2,3,6,7,8*	*24.*	*4,5,4,7,2,6,7,2,4,3*
25.	*2,4,5,6,4,3,3,2,5,6*	26.	*7,8,9,7,7,8,4,5,7,1*	*27.*	*4,7,6,7,2,4,6,7,4,5*
28.	*4,5,6,7,7,5,4,3,4,4*	29.	*1,5,2,5,2,5,3,5,4,5*	*30.*	*4,7,6,7,4,5,3,8,5,9*

Тема 8. Цикломатика. Розрізи

Неорієнтований граф на 6 вершинах заданий вектором R_{mn} (табл. 8.14), де m та n – номера вершин графа, $m=\overline{1,6}$ та $n=\overline{1,6}$. Елементи вектора R_{mn} відповідають кількості ребер між відповідними вершинами m та n. Для заданого графа необхідно:

1. Знайти цикломатичне число та ранг графа.
2. Побудувати базис циклів та базис розрізів для заданого графа.
3. Записати 1 небазисний цикл та 1 небазисний розріз через базисні.

Тема 9. Транспортні мережі

Задана транспортна мережа за допомогою матриць пропускних спроможностей та потоків, що проходять по дугам (табл. 8.17). x_0 – вхід мережі, z – вихід. Знайти найбільший потік та найменший розріз мережі.

Таблиця 8.17 – Транспортні мережі

№	Матриця пропускних спроможностей								Матриця потоків							
		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
1.	x_0		5	7	6				x_0		3	3	3			
	x_1			3		8	2	5	x_1			1		1	1	3
	x_2				4			9	x_2				0			5
	x_3		5						x_3		3					
	x_4			4			3	6	x_4			0			0	1
	x_5			5	6				x_5			1	0			
	z								z							
		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
2.	x_0		4		5	6	7		x_0		4		2	2	2	
	x_1			6	8		8	2	x_1			4	0		0	2
	x_2					5		4	x_2					2		2
	x_3							6	x_3							2
	x_4		2				5	7	x_4		2				0	2
	x_5							8	x_5							2
	z								z							

Продовження табл. 8.17

3.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		6	5	4	3		
x_1					6	8	
x_2							3
x_3			5		6	8	1
x_4			5			7	9
x_5							7
z							

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		3	0	2	0		
x_1					3	0	
x_2							0
x_3			0		1	1	0
x_4			0			1	3
x_5							2
z							

4.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		3	5	8			
x_1				8		5	
x_2					4		3
x_3						4	5
x_4		2	3	9			6
x_5					5		9
z							

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		2	3	2			
x_1				2		2	
x_2					4		2
x_3						4	0
x_4		2	3	0			2
x_5					3		3
z							

5.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		5		10		5	
x_1			4		2	7	
x_2						3	5
x_3		8					4
x_4			7	1			8
x_5				7	8		
z							

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		1		3		1	
x_1			2		2	3	
x_2						3	1
x_3		6					2
x_4			2	1			2
x_5				4	3		
z							

6.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		5	5	10	5		
x_1			20				
x_2					7	10	
x_3		3			5		8
x_4		10					15
x_5		7			7		5
z							

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		1	1	2	0		
x_1			5				
x_2					3	3	
x_3		0			0		2
x_4		3					2
x_5		1			2		0
z							

7.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		8		10		15	
x_1					8		
x_2		9					5
x_3							11
x_4			15				
x_5			7		8		12
z							

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		0		0		3	
x_1					5		
x_2		5					1
x_3							0
x_4			9				
x_5			0		1		2
z							

Продовження табл. 8.17

8.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0			7		10	6	
x_1					13		12
x_2		7					13
x_3		11					8
x_4			8	5			
x_5		10			14		
z							

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0			1		4	4	
x_1					5		4
x_2		7					2
x_3		0					3
x_4			8	3			
x_5		2			2		
z							

9.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		12	15			8	
x_1				10	8		
x_2		15					11
x_3			8			14	
x_4			7				12
x_5				9			6
z							

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		1	1			4	
x_1				1	3		
x_2		3					2
x_3			2			1	
x_4			2				1
x_5				2			3
z							

10.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		12		8		7	
x_1				11			14
x_2		5			12		6
x_3			10				5
x_4		8				11	
x_5			9	8			
z							

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		3		2		1	
x_1				1			3
x_2		1			3		3
x_3			3				0
x_4		0				3	
x_5			4	0			
z							

11.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		4	5	13			
x_1						9	6
x_2					10		12
x_3		10					7
x_4		12				11	
x_5			11	8			
z							

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		4	5	13			
x_1						9	6
x_2					10		12
x_3		10					7
x_4		12				11	
x_5			11	8			
z							

12.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0			11	10	12		
x_1			6				14
x_2			10				8
x_3		5			14		5
x_4			9			13	
x_5		6					
z							

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0			3	4	5		
x_1			1				4
x_2			1				5
x_3		0			1		3
x_4			1			5	
x_5		5					
z							

Продовження табл. 8.17

13.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		11	8	11			
x_1			6		7		10
x_2						8	10
x_3		7					5
x_4				12			
x_5		4			5		
z							

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		5	5	2			
x_1			3		4		6
x_2						6	2
x_3		7					4
x_4				9			
x_5		1			5		
z							

14.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0				10	5	5	
x_1					10		5
x_2		9		14			5
x_3					15		5
x_4			12			7	
x_5		6	10	8			
z							

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0				5	2	1	
x_1					2		3
x_2		4		0			4
x_3					5		1
x_4			3			6	
x_5		1	5	1			
z							

15.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		5		5		5	
x_1				12	8		6
x_2		11			7		
x_3			11			5	6
x_4			12	9			
x_5					5		6
z							

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		1		3		3	
x_1				5	6		1
x_2		11			5		
x_3			8			5	1
x_4			8	6			
x_5					3		5
z							

16.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		12	12		8		
x_1				14		13	10
x_2		10					
x_3			8				
x_4		12					6
x_5					5		5
z							

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		5	2		3		
x_1				3		4	4
x_2		5					
x_3			3				
x_4		1					5
x_5					3		1
z							

17.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		6	6	5			
x_1					7	7	10
x_2							8
x_3		7	7				10
x_4			7	7			
x_5					7		
z							

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		3	2	2			
x_1					1	7	2
x_2							4
x_3		7	1				1
x_4			1	7			
x_5					7		
z							

Продовження табл. 8.17

18.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		6	8	10			
x_1			5				5
x_2					5	8	10
x_3		7	10				
x_4				7			8
x_5					8		
z							

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		3	2	6			
x_1			5				2
x_2					5	2	5
x_3		4	5				
x_4				3			4
x_5					2		
z							

19.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		7	8	8			
x_1			14				13
x_2				11	5	15	
x_3		10			10		11
x_4			14			9	
x_5				12			8
z							

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		3	5	5			
x_1			8				5
x_2				11	5	5	
x_3		10			7		4
x_4			8			4	
x_5				5			4
z							

20.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0			8	8	8		
x_1							9
x_2		7		10			9
x_3		8			10		9
x_4			8			10	
x_5				8			
z							

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0			2	3	4		
x_1							4
x_2		0		2			4
x_3		4			5		1
x_4			4			5	
x_5				5			
z							

21.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		5			10	11	
x_1		5		8			
x_2			5		5		5
x_3						5	12
x_4		10					5
x_5			5	10	5		
z							

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		0			3	5	
x_1		5		5			
x_2			5		3		2
x_3						5	4
x_4		5					2
x_5			5	4	1		
z							

22.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		10		10		10	
x_1			11		14		12
x_2				12			12
x_3		10				14	
x_4				10			13
x_5			14		8		
z							

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		5		5		5	
x_1			5		5		5
x_2				5			5
x_3		10				5	
x_4				5			5
x_5			5		5		
z							

Продовження табл. 8.17

23.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0			8		8	8	
x_1				6	7		
x_2		4				7	10
x_3							10
x_4			15				10
x_5		5			10		
z							

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0			5		1	2	
x_1				3	4		
x_2		4				7	3
x_3							3
x_4			9				2
x_5		3			6		
z							

24.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		15	17	6			
x_1				8			14
x_2					9		13
x_3			10			10	12
x_4				10			
x_5					10		
z							

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		5	1	5			
x_1				2			3
x_2					6		5
x_3			10			4	3
x_4				10			
x_5					4		
z							

25.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		11		12		13	
x_1			10				8
x_2					6		5
x_3		10					17
x_4		10		11			
x_5					12		
z							

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		2		1		7	
x_1			6				3
x_2					6		0
x_3		5					7
x_4		2		11			
x_5					7		
z							

26.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0			10	8	9		
x_1					5		10
x_2		11				6	8
x_3			12				9
x_4				13			
x_5					14		
z							

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0			4	5	2		
x_1					5		4
x_2		9				2	5
x_3			12				2
x_4				9			
x_5					2		
z							

27.

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		11			12	10	
x_1			12				
x_2				10			10
x_3		8			7		11
x_4			10			5	8
x_5				6			6
z							

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
x_0		5			3	4	
x_1			10				
x_2				8			3
x_3		5			7		2
x_4			1			5	4
x_5				6			3
z							

Продовження табл.8.17

№		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
28.	x_0			12	12	5			x_0			3	5	3		
	x_1						13		x_1						4	
	x_2		13					13	x_2		4					5
	x_3			13		13		13	x_3			1		3		5
	x_4			11				13	x_4			5				1
	x_5				13				x_5				4			
	z								z							
29.		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
	x_0		5		11		11		x_0		1		3		3	
	x_1			18					x_1			10				
	x_2		6		12		10	11	x_2		2		8		0	0
	x_3						9	11	x_3						9	2
	x_4		7		13			11	x_4		7		0			5
	x_5					12			x_5					12		
	z								z							
30.		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z
	x_0			10	5	10			x_0			4	1	3		
	x_1				8			6	x_1				6			2
	x_2		7			8		12	x_2		6			6		3
	x_3			6			8	6	x_3			4			7	3
	x_4		7		7				x_4		2		7			
	x_5			7					x_5			7				
	z								z							

Тема 10. Основи комбінаторного аналізу

1. Є колода з 52 карт. Визначити кількість комбінацій для заданих операцій.

1) Скількома способами можна витягнути з колоди 5 карт так, щоб 3 з них були однієї масті (порядок карт не має значення)?

2) Скількома способами можна витягнути 36 карт, враховуючи їх порядок?

3) В одній стопці 10 карт, в іншій – 12. Скількома способами можна 4 карти з однієї стопки перемінити на 3 карти з іншої(враховуючи порядок)?

4) Скількома способами можна викласти усю колоду на стіл?

5) Скількома способами можна витягнути з колоди 5 карт так, щоб хоча б 3 з них були однієї масті (порядок карт не має значення)?

6) Скількома способами можна витягнути з колоди 3 карти однієї масті (порядок карт не має значення)?

7) Скількома способами можна витягнути з колоди 3 карти бубнової масті (порядок карт не має значення)?

8) Скількома способами можна викласти колоду на стіл так, щоб після кожного короля йшов туз тієї ж масті?

9) Скількома способами можна розкласти 15 обраних (без врахування порядку) карт?

10) Скількома способами можна витягнути з колоди 15 карт, враховуючи їх порядок?

11) Скількома способами можна викласти карти на стіл, якщо карти повинні йти за зростанням: спочатку двійки, трійки,…, туз?

12) Скількома способами можна витягнути з колоди 2 карти так, щоб вони були різної масті (порядок карт не має значення)?

13) Скількома способами можна викласти колоду, якщо спочатку повинні йти дами (порядок дам не має значення)?

14) Скількома способами можна витягнути з колоди 5 карт так, щоб серед них було 3 вісімки (порядок карт не має значення)?

15) Скількома способами можна витягнути з колоди 5 карт, щоб серед них було не менше, ніж 3 вісімки (порядок карт не має значення)?

16) Скількома способами можна витягнути 5 карт так, щоб серед них були дами, але не більше, ніж 3 (порядок карт не має значення)?

17) Скількома способами з колоди можна витягнути 4 карти різних мастей (порядок карт не враховувати) ?

18) Скількома способами з колоди можна витягнути 4 карти однієї масті, враховуючи їх порядок?

19) Скількома способами з колоди можна витягнути 4 карти, так, щоб серед них було 2 короля та 2 дами (враховуючи порядок)?

20) Скількома способами можна витягнути з колоди 3 карти різних мастей (враховуючи порядок)?

21) Скількома способами можна витягнути з колоди 2 карти різних мастей, одна з яких – туз (враховуючи порядок)?

22) Скількома способами можна витягнути з колоди 4 карти різних мастей так, щоб серед них була одна вісімка та одна дама будь-яких мастей (порядок карт не має значення)?

23) Скількома способами можна витягнути з колоди 4 карти бубнової масті так, щоб серед них обов’язково буда дама (порядок карт не має значення)?

24) Скількома способами можна викласти колоду на стіл так, щоб після кожного туза йшов король іншої масті?

25) Скількома способами можна розкласти 8 обраних карт?

26) Скількома способами можна витягнути з колоди 15 карт, не враховуючи їх порядок?

27) Скількома способами можна витягнути з колоди 5 карт так, щоб не більш, ніж 3 з них були однієї масті (порядок карт не має значення)?

28) Скількома способами можна витягнути з колоди 5 карт так, щоб 3 з них були однієї масті (порядок карт не має значення)?

29) Скількома способами можна витягнути з колоди 5 карт так, щоб серед них була хоча б одна дама (порядок карт не має значення)?

30) Скількома способами з колоди можна витягнути 5 карт так, щоб серед них обов’язково була лише одна дама (порядок карт не має значення)?

2. Кодовий замок має m однакових комірок, кожну з яких можна встановити у n стійких положень (p цифр, q літер). Скільки різноманітних комбінацій необхідно перебрати, щоб не знаючи коду відчинити замок, якщо відомі додаткові умови (табл. 8.18).

Таблиця 8.18 – Параметри для завдання

№	m	n	p	q	Додаткові умови
1.	10	12	6	6	Символи не повинні повторюватися
2.	8	20	10	10	Не менше, ніж 3 символи можуть повторюватися
3.	6	17	7	10	3 перші символи однакові
4.	5	20	10	10	Числа та літери чергуються (наприклад, ф1в1ф)
5.	12	8	4	4	Друга половина коду дублює першу
6.	8	10	5	5	Друга половина коду протилежна до першої (наприклад, ф1в11в1ф)
7.	6	20	7	13	Дві останні позиції однакові
8.	4	26	10	16	Три останні позиції літери, інші можуть бути як літерами, так і цифрами
9.	8	26	10	16	5 перших позицій цифри, інші – літери
10.	10	10	10	0	На парних позиціях можуть бути лише парні числа, на непарних – непарні
11.	7	10	10	0	Числа коду ідуть за зростанням
12.	8	20	10	10	Перші 3 позиції – парні числа
13.	14	30	10	20	Перші 4 позиції – числа, причому кожне наступне на 1 більше, ніж попереднє
14.	20	30	10	20	Перші 4 позиції – числа, інші – літери
15.	15	25	10	15	Перші 5 позицій – числа, інші – літери
16.	8	10	10	0	На парних позиціях стоять числа, які дорівнюють номеру позиції
17.	8	10	5	5	Перша та остання позиції однакові
18.	8	20	10	10	Перша позиція – цифра, яка більше не з'являється у коді
19.	6	10	10	0	Сума цифр першої половини коду дорівнює сумі шифр другої половини коду. Цифри у коді не повторюються
20.	8	10	10	0	Перша позиція у 2 рази більша за другу
21.	8	10	10	0	На парних позиціях можуть бути лише непарні числа, на непарних – парні
22.	14	20	10	10	Перші 3 позиції – числа, причому кожне наступне на 2 менше, ніж попереднє
23.	20	30	10	20	4 перші символи однакові
24.	15	25	10	15	На парних позиціях можуть бути лише непарні числа, на непарних – парні числа або літери
25.	5	10	10	0	Числа коду ідуть за зменшенням

Продовження табл.8.18

№	m	n	p	q	Додаткові умови
26.	6	20	7	13	5 перші символи однакові
27.	14	26	10	16	Чотири останні позиції однакові
28.	8	15	10	5	Три останні позиції однакові
29.	10	18	10	8	6 перших позицій літери, інші можуть бути як літерами, так і цифрами
30.	7	20	10	10	Останні 4 позиції непарні числа

Тема 11. Біном Ньютона. Формули включення та виключення, рекурентні співвідношення, продуктивні функції

1. Задано поліном: $(a\cdot x^b+c\cdot y^d)^e$ за допомогою бінома Ньютона. Визначити у розкладанні бінома Ньютона коефіцієнт C, який відповідає елементу $C\cdot x^f\cdot y^g$ (табл. 8.19).

Таблиця 8.19 – Параметри для завдання

№	$(a\cdot x^b+c\cdot y^d)^e$	$C\cdot x^f\cdot y^g$	№	$(a\cdot x^b+c\cdot y^d)^e$	$C\cdot x^f\cdot y^g$
1.	$(5x^3+4y^7)^{12}$	$Cx^{21}y^{35}$	16.	$(3x^3-y^2)^{12}$	$Cx^{27}y^6$
2.	$(2x^3+2y^5)^{18}$	$Cx^{27}y^{45}$	17.	$(2x^4-8y^2)^{11}$	Cx^8y^{18}
3.	$(5x^5+2y^4)^{13}$	$Cx^{50}y^{12}$	18.	$(8x^5-2y^3)^{16}$	$Cx^{55}y^{15}$
4.	$(3x^2+y^2)^{16}$	$Cx^{12}y^{20}$	19.	$(5\acute{o}^2-2x^2)^{15}$	$Cx^{16}y^{14}$
5.	$(4x+10y^4)^{14}$	$Cx^{10}y^{16}$	20.	$(8y^3-3x^5)^{19}$	$Cx^{36}y^{35}$
6.	$(8x^2+4y^3)^{12}$	$Cx^{10}y^{21}$	21.	$(2x^2+4y^4)^{18}$	$Cx^{24}y^{24}$
7.	$(2x^3+5y^3)^{11}$	$Cx^{30}y^3$	22.	$(3x^2+8y^6)^{16}$	$Cx^{12}y^{60}$
8.	$(8x^3+y^2)^{10}$	$Cx^{18}y^8$	23.	$(11x^4+10y^2)^{13}$	$Cx^{28}y^{12}$
9.	$(4x^4+8y^2)^{18}$	$Cx^{40}y^{16}$	24.	$(15x^3+4y^3)^{12}$	$Cx^{27}y^9$
10.	$(2x^2+11y^5)^{14}$	Cx^8y^{50}	25.	$(2x^2+3y^2)^{14}$	$Cx^{10}y^{18}$
11.	$(4x^5+8y^4)^{16}$	$Cx^{45}y^{28}$	26.	$(x^2+4y^4)^{18}$	$Cx^{22}y^{28}$
12.	$(11x^4+8y^3)^{19}$	Cxy	27.	$(x^5+3y^4)^{12}$	$Cx^{25}y^{28}$
13.	$(10x^3+2y^2)^{13}$	$Cx^{21}y^{12}$	28.	$(5x+2y^3)^{13}$	Cx^8y^{15}
14.	$(12x^2-2y^4)^{15}$	$Cx^{14}y^{32}$	29.	$(2x^2+8y^4)^{15}$	$Cx^{12}y^{36}$
15.	$(8x^4-y^3)^{14}$	$Cx^{36}y^{15}$	30.	$(4x^5+3y^2)^{17}$	$Cx^{40}y^{18}$

2. У a – процесорний ЕОМ b мікропроцесорів обробляють текстову інформацію, c – графічну, d – символьну, e мікропроцесорів одночасно обробляють графічну та текстову, f – текстову та символьну, g – графічну та символьну, а частина мікропроцесорів одночасно обробляють графічну, текстову та символьну інформацію (табл. 8.20). Визначити кількість способів виконання заданої у таблиці 8.21 категорії, чи можлива реалізація такої категорії?

Таблиця 8.20 – Значення параметрів *a, b, c, d, e, f, g*

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*		*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
1	50	12	45	23	7	9	20	16	198	15	77	125	9	10	6
2	152	13	77	123	8	10	50	17	165	22	45	125	15	11	10
3	120	15	89	97	4	11	70	18	89	28	52	40	16	12	8
4	210	28	130	120	7	12	50	19	99	20	52	51	5	13	7
5	140	57	46	80	9	10	32	20	141	18	30	120	9	14	10
6	140	75	45	74	8	10	40	21	198	16	42	150	2	5	5
7	120	21	44	90	7	8	25	22	59	32	35	30	8	22	15
8	120	35	70	85	6	14	55	23	89	25	55	39	10	12	10
9	140	41	90	95	5	15	70	24	56	19	30	40	10	15	15
10	120	39	85	103	7	33	73	25	58	35	36	25	15	17	18
11	85	15	50	44	8	10	10	26	57	27	25	30	9	12	10
12	140	45	80	40	7	11	10	27	52	15	37	20	8	11	5
13	210	47	150	50	15	19	9	28	251	14	107	150	7	12	8
14	310	45	140	155	12	12	8	29	255	18	108	150	9	11	4
15	200	25	100	98	7	10	7	30	128	25	43	80	8	7	7

Таблиця 8.21 – Перелік категорій

	Кількість способів…
1.	Обрати 3 мікропроцесора, які обробляють тільки графічну інформацію (без урахування порядку)
2.	Обрати 2 мікропроцесора, які обробляють тільки текстову інформацію (без урахування порядку)
3.	Обрати 25 мікропроцесорів, які обробляють тільки графічну інформацію (з урахуванням порядку)
4.	Обрати 3 мікропроцесора, які обробляють тільки символьну інформацію (без урахування порядку)
5.	Обрати 15 мікропроцесорів, які обробляють тільки текстову інформацію (з урахуванням порядку)
6.	Обрати 17 мікропроцесорів, які обробляють тільки символьну інформацію (з урахуванням порядку)
7.	Розмістити мікропроцесори, які обробляють на мікросхемі тільки графічну інформацію
8.	Розмістити мікропроцесори, які обробляють тільки текстову інформацію, на мікросхемі
9.	Розмістити мікропроцесори які обробляють на мікросхемі тільки символьну інформацію
10.	Обрати 2 мікропроцесора, кожний з яких обробляє тільки 1 вид інформації

Продовження табл.8.21

	Кількість способів…
11.	Обрати 2 мікропроцесора, кожний з яких обробляє більш одного виду інформації
12.	Обрати 2 універсальних мікропроцесора
13.	Розмістити мікропроцесори, які обробляють символьну інформацію, на мікросхемі за умовою, що спочатку повинні йти універсальні мікропроцесори, потім ті, які обробляють 2 видами інформації, потім ті, які обробляють тільки символьну інформацію.
14.	Обрати 15 мікропроцесорів, які обробляють тільки графічну інформацію (без урахування порядку)
15.	Обрати 7 мікропроцесорів, які обробляють тільки текстову інформацію (без урахування порядку)
16.	Обрати 9 мікропроцесорів, які обробляють тільки символьну інформацію (без урахування порядку)
17.	Обрати 25 мікропроцесорів, які обробляють тільки графічну інформацію (з урахуванням порядку)
18.	Обрати 15 мікропроцесора, які обробляють тільки текстову інформацію (з урахуванням порядку)
19.	Обрати 17 мікропроцесора, які обробляють тільки символьну інформацію (з урахуванням порядку)
20.	Розмістити мікропроцесори, які обробляють на мікросхемі тільки графічну інформацію
21.	Розмістити мікропроцесори, які обробляють на мікросхемі тільки текстову інформацію
22.	Розмістити мікропроцесори, які обробляють на мікросхемі тільки символьну інформацію
23.	Обрати 2 мікропроцесора, кожний з яких обробляє тільки 1 вид інформації
24.	Обрати 2 мікропроцесора, кожний з яких обробляє більш одного виду інформації
25.	Обрати 2 універсальних мікропроцесора
26.	Обрати 3 мікропроцесора, які обробляють тільки графічну інформацію (без урахування порядку)
27.	Обрати 3 мікропроцесора, які обробляють тільки символьну інформацію (без урахування порядку)
28.	Обрати 2 мікропроцесора, які обробляють тільки текстову інформацію (без урахування порядку)
29.	Обрати 25 мікропроцесорів, які обробляють тільки графічну символьну інформацію (з урахуванням порядку)
30.	Обрати 15 мікропроцесорів, які обробляють тільки текстову інформацію (з урахуванням порядку)

3. Скільки дільників мають числа, які наведено у таблиці 8.22.

Таблиця 8.22

№	Число	№	Число	№	Число	№	Число
1.	2541	2.	2541	3.	7584	4.	*5214*
5.	1214	6.	2542	7.	1257	8.	*2365*
9.	2541	10.	1236	11.	8551	12.	*1225*
13.	1254	14.	4521	15.	2655	16.	*2233*
17.	1214	18.	9521	19.	5512	20.	*2566*
21.	2545	22.	3258	23.	1145	24.	*2584*
25.	9541	26.	1255	27.	2586	28.	*2266*
29.	2548	30.	2258	31.	1199	32.	*2158*

4. Знайти ряд, для якого продуктивною є функція, яку наведено у таблиці 8.23.

Таблиця 8.23 – Продуктивна функція

№	Функція	№	Функція	№	Функція
1.	e^{2x}	2.	$1+e^{x}$	3.	$\frac{x^2}{(1-2x)^4}$
4.	$\frac{x^3}{(1-x)^5}$	5.	$\frac{x^2}{1-x}$	6.	$2e^{x}$
7.	$e^{\frac{x}{2}}$	8.	$\frac{x}{(1-x)^3}$	9.	$\frac{x}{4-x}$
10.	xe^{x}	11.	e^{3x}	12.	x^3e^{8x}
13.	$1-e^{\frac{x}{2}}$	14.	x^2e^{2x}	15.	e^{4x}
16.	$e^{\frac{x}{2}}-2$	17.	$\frac{1}{1-2x}$	18.	$\frac{x}{x-1}$
19.	$\frac{x}{(1+2x)^2}$	20.	$\frac{x-1}{(1-2x)^2}$	21.	$\frac{1}{1-3x}$
22.	$\frac{x^5}{(1-x)^6}$	23.	e^{x+1}	24.	$\frac{x^2}{1-x^2}$
25.	$\frac{x}{(5-x)^3}$	26.	$\frac{x^3}{x-1}$	27.	$\frac{x^3}{1-x^3}$
28.	$\frac{3x}{1-3x}$	29.	$2e^{2x-1}$	30.	$\frac{x^4}{1-4x^2}$

5. Знайти послідовність, яка задовольняє рекурентне співвідношення $a\cdot f(n+2)+b\cdot f(n+1)+c\cdot f(n)=0$, *f(1)=d, f(2)=e.* Значення параметрів *a, b, c, d, e* наведено у таблиці 8.24.

Таблиця 8.24 – Значення параметрів *a, b, c, d, e*

	a	b	c	d	e		a	b	c	d	e
1	2	3	-14	1	2	16	2	-7	-4	2	8
2	2	1	-21	3	9	17	1	-7	6	1	6
3	1	4	-21	27	81	18	-1	4	-3	1	3
4	1	-6	8	4	16	19	3	-8	-3	6	18
5	1	-1	-2	6	12	20	3	-10	-8	8	32
6	-2	4	6	45	135	21	2	-9	-5	10	50
7	1	-4	-5	0,2	1	22	-2	7	4	12	48
8	-1	1	56	8	64	23	2	-7	6	0,5	1
9	-1	6	-8	4	16	24	-1	7	8	8	64
10	1	-7	-18	9	81	25	2	-5	-3	24	72
11	1	-4	-5	5	25	26	1	-5	4	40	160
12	1	-6	5	20	100	27	2	-3	-2	7	14
13	1	-4	-5	1	5	28	1	-2	-3	21	63
14	2	-5	-3	9	27	29	1	-4	-5	4	20
15	3	-10	-8	2	8	30	1	2	-15	4	12

9 ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ТИПОВИХ ЗАВДАНЬ

Завдання 1. Задано універсальну множину U та чотири її підмножини A, B, C, D.

$U = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$;

$A=\{a \in U \mid a=5 \cdot i\}$;

$B=\{b \in U \mid b=8 \cdot i\}$;

$C=\{c \in U \mid c=6 \cdot i\}$;

$i=1,2,3,\dots n$.

Якщо $i=1,\dots,6$, то $A = \{5 \cdot i\} = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$.

Якщо $i=1,\dots, 3$, то $B = \{8 \cdot i\} = \{8, 16, 24\}$.

Якщо $i=1,\dots,5$, то $C = \{6 \cdot i\} = \{6, 12, 18, 24, 30\}$.

Для відображення множин за допомогою кругів Ейлера (рис. 9.1) знайдемо вирази $A \cap B$, $A \cap C$ та $B \cap C$.

$A \cap B = \{\varnothing\}$;

$A \cap C = \{30\}$;

$B \cap C = \{24\}$.

Таким чином, розподіл елементів на кругах Ейлера можна зобразити наступним чином (рис. 9.1).

Спростимо функцію.

$$F = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \setminus C \cap B = (\overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}}) \cap (\overline{C \cap B}) = A \cap B \cap (\overline{C} \cup \overline{B}) =$$

$$A \cap B \cap \overline{C} \cup A \cap B \cap \overline{B} = A \cap B \cap \overline{C} \cup A \cap \varnothing = A \cap B \cap \overline{C} \cup \varnothing = A \cap B \cap \overline{C}$$

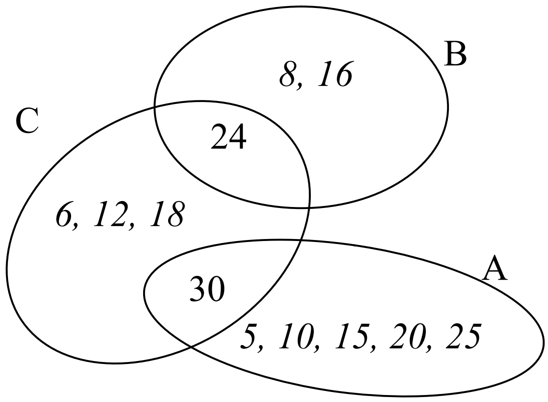


Рисунок 9.1 – Відображення множин за допомогою кругів Ейлера

Знайдемо потужність множини $A \cap B \cap \overline{C}$.

F= $\varnothing$*;*

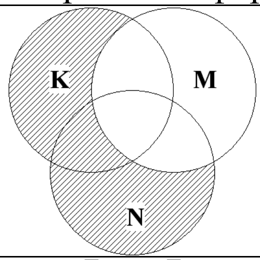
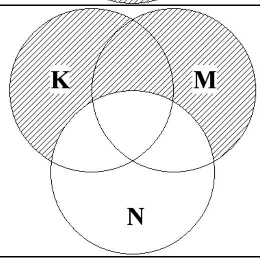
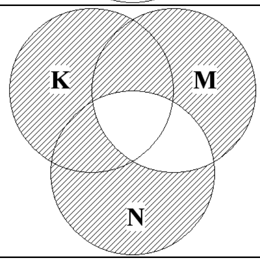
$|F| = 0$.

Завдання 2.

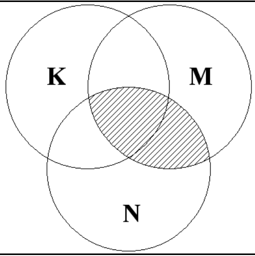
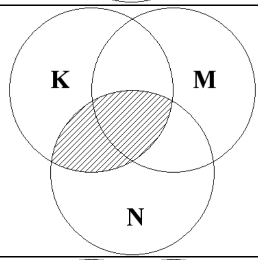
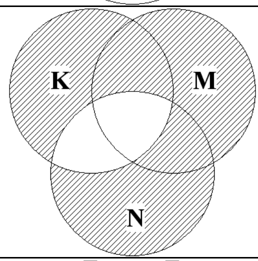
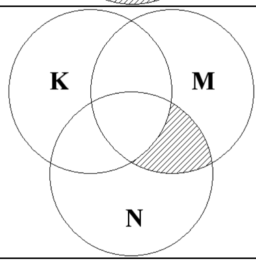
Для формули $F = \overline{\overline{M} \cup \overline{N}} \cap \overline{K \cap N}$ побудувати діаграму Венна.

Проілюструємо на діаграмі Венна задану формулу, виконавши спочатку доповнення множини *M*, потім доповнення множини *N*, об’єднання $\overline{M} \cup \overline{N}$, доповнення $\overline{\overline{M} \cup \overline{N}}$, перетин множин *K* і *N*, доповнення $\overline{K \cap N}$, перетин $\overline{\overline{M} \cup \overline{N}} \cap \overline{K \cap N}$. Ілюстрація цих дій наведена у таблиці 9.1.

Таблиця 9.1 – Спрощення формули $F = \overline{\overline{M} \cup \overline{N}} \cap \overline{K \cap N}$ за допомогою діаграм Венна

Номер кроку	Формула	Зображення формули
1	$\overline{M}$	
2	$\overline{N}$	
3	$\overline{M} \cup \overline{N}$	

Продовження табл.9.1

Номер кроку	Формула	Зображення формули
4	$\overline{\overline{M} \cup \overline{N}}$	
5	$K \cap N$	
6	$\overline{K \cap N}$	
7	$\overline{\overline{M} \cup \overline{N}} \cap \overline{K \cap N}$	

Завдання 3. Записати формулу для діаграми Венна, яку зображено на рисунку 9.2.

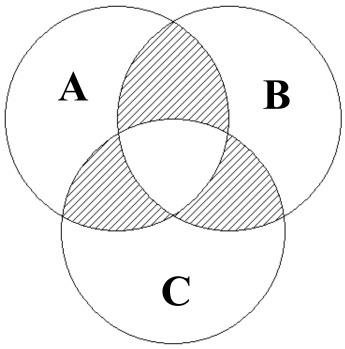
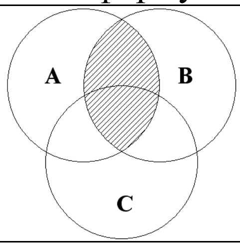
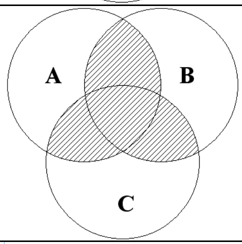
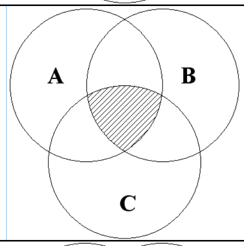
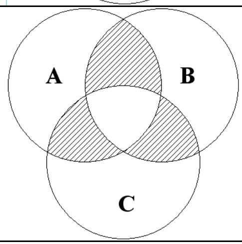


Рисунок 9.2 – Діаграма Венна

Запишемо формулу пошарово. Розрахунки подамо за допомогою таблиці 9.2

Таблиця 9.2 – Запис формули за допомогою діаграм Венна

<table>
<tr><th>Номер кроку</th><th>Зображення формули</th><th>Формула</th></tr>
<tr><td>1</td><td>
</td><td>$A \cap B$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>
</td><td>$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>
</td><td>$A \cap B \cap C$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>
</td><td>$(A \cap B \cup A \cap C \cup B \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)$</td></tr>
</table>

Таким чином, одержуємо формулу, відповідну до заданої діаграми Венна: $((A \cap B \cup A \cap C \cup B \cap C) \setminus A \cap B \cap C)$.

Завдання 4. В результаті опитування виявлено реакцію деякої кількості глядачів на одну телевізійну передачу. Усіх глядачів і їх реакцію можна виразити в термінах таких чотирьох категорій: *Ч* (чоловічої статі), *Д* (дорослий), *С* (сподобалося), *Ду* (дуже). Результати розподілення глядачів наведено у таблиці 9.3. Обчислити кількість глядачів, що попадають у категорію $\overline{Ч} \cap С \cap \overline{Ду}$.

Таблиця 9.3 – Розподілення глядачів за категоріями

Глядачі	Дуже сподо-балося	Сподо-балося, але не дуже	Не сподо-балося, але не дуже	Дуже не сподо-балося
Чоловіки	1	3	5	10
Жінки	6	8	3	1
Хлопці	5	5	3	2
Дівчата	8	5	1	1

Виділимо у таблиці 9.3 елементи, які відповідають категоріям: $\overline{Ч} \cap C \cap \overline{Ду}$ – не чоловіки, яким не дуже сподобалося (табл. 9.4).

Таблиця 9.4 – Розподілення глядачів за категоріями

Глядачі	Дуже сподобалося	Сподобалося, але не дуже	Не сподобалося, але не дуже	Дуже не сподобалося
Чоловіки	1	3	5	10
Жінки	6	8	3	1
Хлопці	5	5	3	2
Дівчата	8	5	1	1

Обчислимо кількість людей, які потрапляють до заданої категорії: *3+5=8*.

Завдання 5. Задано множини $A=\{4,2,0\}$; $B=\{3,1\}$. Знайти декартовий добуток $A \times B$, A^2, A^3.

$A \times B=\{(4,3),(4,1),(2,3),(2,1),(0,3),(0,1)\}$.

$A^2=\{(4,4),(4,2),(4,0),(2,4),(2,2),(2,0),(0,4),(0,2),(0,0)\}$.

$A^3=\{(4,4,4),(4,4,2),(4,4,0),(4,2,4),(4,2,2),(4,2,0),(4,0,4),(4,0,2),(4,0,0),$
$(2,4,4),(2,4,2),(2,4,0),(2,2,4),(2,2,2),(2,2,0),(2,0,4),(2,0,2),(2,0,0),$
$(0,4,4),(0,4,2),(0,4,0),(0,2,4),(0,2,2),(0,2,0),(0,0,4),(0,0,2),(0,0,0)\}$.

Завдання 6. Задано бінарне відношення $R=\{(1,1),(2,2), (3,1),((4,4)\}$ як перелік елементів на множині $A=\{1,2,3,4\}$, $R_1 \subseteq A^2$.

1. Задати відношення R за допомогою матриці та графа.

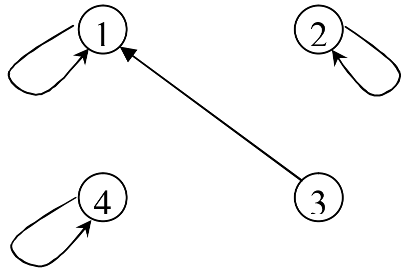
2. Записати властивості відношення R. Перевірити чи є відношення R відношенням еквівалентності, толерантності, порядку?

3. Визначити, чи є дане відношення функціональним, відображенням? Якщо є, визначити тип відображення. Відповідь обґрунтувати.

1. Задамо бінарне відношення за допомогою матриці.

$$R= \begin{array}{c|c|c|c|c|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & & & \\ \hline 2 & & 1 & & \\ \hline 3 & 1 & & & \\ \hline 4 & & & & 1 \\ \hline \end{array}$$

Задамо бінарне відношення за допомогою графа.



2. Перевіримо властивості, яким відповідає відношення.

Рефлексивність. Матриця відношення не має усі одиниці на головній діагоналі. Задане відношення не є рефлексивним.

Антирефлексивність. Матриця відношення не має усі нулі на головній діагоналі. Задане відношення не є антирефлексивним.

Симетричність. У заданому відношенні маємо упорядковану пару (1,4). Упорядкована пара (4,1) відсутня. Задане відношення не є симетричним.

Антисиметричність. У заданому відношенні не маємо симетричні упорядковані пари та маємо петлі. Задане відношення є антисиметричним.

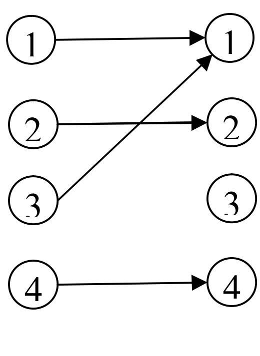
Асиметричність. У заданому відношенні не маємо симетричні упорядковані пари, але має петлі. Задане відношення не є асиметричним.

Транзитивність. У заданому відношенні маємо упорядковані пари (3,1),(1,1). Упорядкована пара (3,1) присутня. Задане відношення є транзитивним.

Антитранзитивність. У заданому відношенні маємо упорядковані пари (3,1),(1,1). Упорядкована пара (3,1) присутня у відношенні. Задане відношення не є антитранзитивним.

Задане відношення не є відношенням еквівалентності, толерантності, часткового порядку або строгого порядку. Таким чином, це відношення є відношенням загального порядку.

3. Перевіримо чи є дане відношення функціональним. У заданому відношенні не маємо упорядковані пари*,* які спільні за своєю першою координатою. Таким чином, задане відношення є функціональним.



У заданому відношенні не маємо відповідність від першого до другого елементу кожної пари. Дане відношення не є відображенням.

Завдання 7. Довести або спростувати істинність виразу *$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$*.

Позначимо ліву частину виразу як X, праву – Y.

$$\underbrace{(A\cup B)\times C}_{X}=\underbrace{(A\times C)\cup(B\times C)}_{Y}$$

$$X=Y <=> \begin{cases} X\subseteq Y \\ Y\subseteq X \end{cases}$$

Розглянемо ліву частину тотожності,яка містить декартовий добуток, елементами якого є упорядковані пари вигляду (a, b).

$$(a,b)\in X;(a,b)\in(A\cup B)\times C\Rightarrow\begin{cases} a\in(A\cup B) \\ b\in C \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a\in A \\ a\in B \end{array}\right. \\ b\in C \end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l} (a,b)\in A\times C \\ (a,b)\in B\times C \end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(a,b)\in(A\times C)\cup(B\times C)\Rightarrow(a,b)\in Y$$

Розглянемо праву частину тотожності.

$$y\in Y;y\in(A\times C)\cup(B\times C)\Rightarrow\left[\begin{array}{l} y\in A\times C \\ y\in B\times C \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} (a,b)\in A\times C \\ (a,b)\in B\times C \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\in A \\ b\in C \end{cases} \\ \begin{cases} a\in B \\ b\in C \end{cases} \end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} a\in(A\cup B) \\ b\in C \end{cases}\Rightarrow(a,b)\in(A\cup B)\times C\Rightarrow(a,b)\in X$$

Таким чином, даний вираз є істинним.

Завдання 8. Задана формула $f(x,y,z)=\overline{z\sim y}\vee\overline{\bar{x}\vee\overline{xy\to\bar{z}}\vee x\bar{y}\bar{z}}$ булевої алгебри.

1. Спростити формулу *f(x,y,z).*
2. Побудувати таблицю істинності.
3. Записати ДДНФ та ДКНФ для заданої функції.
4. Записати диз’юнктивне розкладання функції за змінними *x,y*.
5. Записати кон’юнктивне розкладання функції за змінними *y,z*.
6. Визначити, чи є задана функція самодвоїстою.

Розв’язання

1. Спростимо формулу *f(x,y,z).*

$$f(x,y,z) = \overline{z \sim y} \vee \overline{\bar{x} \vee \overline{xy \to \bar{z}} \vee x\bar{y}\bar{z}} =$$

$$\overline{(yz \vee \bar{y}\bar{z})} \vee \overline{\bar{x} \vee \overline{\overline{xy} \vee \bar{z}} \vee x\bar{y}\bar{z}} =$$

$$= ((\bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (y \vee z)) \vee (\bar{\bar{x}} \wedge \overline{\overline{\overline{xy} \vee \bar{z}}} \wedge \overline{x\bar{y}\bar{z}}) =$$

$$= ((\bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (y \vee z)) \vee (x \wedge (\overline{xy} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{\bar{y}} \vee \bar{\bar{z}})) =$$

$$= ((\bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (y \vee z)) \vee (x \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z)) =$$

$$= ((\bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (y \vee z)) \vee (x \wedge (\bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z)) =$$

$$= ((\bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (y \vee z)) \vee (x \wedge (\bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (y \vee z)) =$$

$$= ((\bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (y \vee z)) \wedge (1 \vee x) =$$

$$= ((\bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (y \vee z)) \wedge 1 = (\bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (y \vee z)$$

2. Побудуємо таблицю істинності для заданої функції (табл.9.5).

Таблиця 9.5 – Таблиця істинності булевої функції

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

3. Запишемо ДДНФ та ДКНФ для заданої функції.

З табл. 9.6 отримаємо ДДНФ:

$$f(x, y, z) = x^0 y^0 z^1 \vee x^0 y^1 z^0 \vee x^1 y^0 z^1 \vee x^1 y^1 z^0 = \bar{x}\,\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$$

З табл. 9.6 отримаємо ДКНФ:

$$f(x,y,z) = (x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{0}}) \wedge (x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{1}} \vee z^{\bar{1}}) \wedge (x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{0}}) \wedge (x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{1}} \vee z^{\bar{1}}) =$$

$$= (x^1 \vee y^1 \vee z^1) \wedge (x^1 \vee y^0 \vee z^0) \wedge (x^0 \vee y^1 \vee z^1) \wedge (x^0 \vee y^0 \vee z^0) =$$

$$= (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$$

4. Запишемо диз’юнктивне розкладання функції *f(x,y,z)* за змінними *x,y*: $f(x,y,z) = (\bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (y \vee z)$.

$$f(x,y,z) = (\bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (y \vee z) = f(0,0,z) \wedge x^0 \wedge y^0 \vee f(0,1,z) \wedge x^0 \wedge y^1 \vee$$

$$\vee f(1,0,z) \wedge x^1 \wedge y^0 \vee f(1,1,z) \wedge x^1 \wedge y^1$$

Визначимо значення функції на кожній з інтерпретацій:

$$f(0,0,z) = (\overline{0} \vee \overline{z}) \wedge (0 \vee z) = z$$

$$f(0,1,z) = (\overline{1} \vee \overline{z}) \wedge (1 \vee z) = \overline{z}$$

$$f(1,0,z) = (\overline{0} \vee \overline{z}) \wedge (0 \vee z) = z$$

$$f(1,1,z) = (\overline{1} \vee \overline{z}) \wedge (1 \vee z) = \overline{z}$$

Підставимо значення функції на кожній з інтерпретацій.

$$f(x,y,z) = f(0,0,z) \wedge x^0 \wedge y^0 \vee f(0,1,z) \wedge x^0 \wedge y^1 \vee f(1,0,z) \wedge x^1 \wedge y^0 \vee$$

$$\vee f(1,1,z) \wedge x^1 \wedge y^1 = z \wedge x^0 \wedge y^0 \vee \overline{z} \wedge x^0 \wedge y^1 \vee z \wedge x^1 \wedge y^0 \vee \overline{z} \wedge x^1 \wedge y^1 =$$

$$= \overline{x}\ \overline{y}\ z \vee \overline{x}\ y\overline{z}\ \vee x\overline{y}\ z \vee xy\overline{z}$$

5. Запишемо кон'юнктивне розкладання функції за змінними *x,z*.

$$f(x,y,z) = (\overline{y} \vee \overline{z}) \wedge (y \vee z) = (f(0,y,0) \vee x^{\overline{0}} \vee z^{\overline{0}}) \wedge (f(0,y,1) \vee x^{\overline{0}} \vee z^{\overline{1}}) \wedge$$

$$(f(1,0,0) \vee x^{\overline{1}} \vee z^{\overline{0}}) \wedge (f(1,0,1) \vee x^{\overline{1}} \vee z^{\overline{1}})$$

Визначимо значення функції на кожній з інтерпретацій:

$$f(0,y,0) = (\overline{y} \vee \overline{0}) \wedge (y \vee 0) = y$$

$$f(0,y,1) = (\overline{y} \vee \overline{1}) \wedge (y \vee 1) = \overline{y}$$

$$f(1,y,0) = (\overline{y} \vee \overline{0}) \wedge (y \vee 0) = y$$

$$f(1,y,1) = (\overline{y} \vee \overline{1}) \wedge (y \vee 1) = \overline{y}$$

Підставимо значення функції на кожній з інтерпретацій.

$$f(x,y,z) = (f(0,y,0) \vee x^{\overline{0}} \vee z^{\overline{0}}) \wedge (f(0,y,1) \vee x^{\overline{0}} \vee z^{\overline{1}}) \wedge$$

$$(f(1,0,0) \vee x^{\overline{1}} \vee z^{\overline{0}}) \wedge (f(1,0,1) \vee x^{\overline{1}} \vee z^{\overline{1}}) =$$

$$= (y \vee x^{\overline{0}} \vee z^{\overline{0}}) \wedge (\overline{y} \vee x^{\overline{0}} \vee z^{\overline{1}}) \wedge (y \vee x^{\overline{1}} \vee z^{\overline{0}}) \wedge (\overline{y} \vee x^{\overline{1}} \vee z^{\overline{1}}) =$$

$$= (y \vee x \vee z) \wedge (\overline{y} \vee x \vee \overline{z}) \wedge (y \vee \overline{x} \vee z) \wedge (\overline{y} \vee \overline{x} \vee \overline{z})$$

6. Визначимо, чи є задана функція самодвоїстою. Перевіримо аналітично самодвоїстість функції.

$$f^*(x,y,z) = \overline{(\overline{\overline{y}} \vee \overline{\overline{z}}) \wedge (\overline{y} \vee \overline{z})} = (\overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (y \wedge z) = (\overline{y} \vee z) \wedge (\overline{y} \vee z);$$

$$f \neq f^*.$$

Таким чином, дана функція не є самодвоїстою.

Завдання 9. Визначити, чи є функція f_{155} функціонально повним набором.

Запишемо дану функцію за допомогою таблиці істинності (табл. 9.7).

Функція не зберігає *0*, оскільки $f(0,0,0) = 1$.

Функція не зберігає *1*, оскільки $f(1,1,1) = 0$.

Для перевірки самодвоїстості побудуємо двоїсту функцію f^* до заданої функції f_{155} (табл.9.6). З таблиці істинності видно, що функція та двоїста до неї функція не співпадають. Тобто задана функція не є самодвоїстою.

Таблиця 9.6 – Таблиця істинності булевої функції

x	y	z	f_{155}	f^{*}_{155}
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0

Перевіримо задану функцію на монотонність. Для того, щоб булева функція f_{155} була монотонною, треба, щоб виконувалася умова: якщо A, B – набори значень змінних булевої функції та, якщо $A \geq B$, то $f(A) \geq f(B)$.

$A \geq B$	$f(A)$	$f(B)$	$f(A) \geq f(B)$
$(1,1,1) \geq (1,1,0)$	$f(1,1,1)=1$	$f(1,1,0)=1$	$f(1,1,1) \geq f(1,1,0)$
$(1,1,1) \geq (1,0,1)$	$f(1,1,1)=1$	$f(1,0,1)=0$	$f(1,1,1) \geq f(1,0,1)$
$(1,1,1) \geq (1,0,0)$	$f(1,1,1)=1$	$f(1,0,0)=1$	$f(1,1,1) \geq f(1,0,0)$
$(1,1,1) \geq (0,1,1)$	$f(1,1,1)=1$	$f(0,1,1)=1$	$f(1,1,1) \geq f(0,1,1)$
$(1,1,1) \geq (0,1,0)$	$f(1,1,1)=1$	$f(0,1,0)=0$	$f(1,1,1) \geq f(0,1,0)$
$(1,1,1) \geq (0,0,1)$	$f(1,1,1)=1$	$f(0,0,1)=0$	$f(1,1,1) \geq f(0,0,1)$
$(1,1,1) \geq (0,0,0)$	$f(1,1,1)=1$	$f(0,0,0)=1$	$f(1,1,1) \geq f(0,0,0)$
$(1,1,0) \geq (1,0,0)$	$f(1,1,0)=1$	$f(1,0,0)=1$	$f(1,1,0) \geq f(1,0,0)$
$(1,1,0) \geq (0,1,0)$	$f(1,1,0)=1$	$f(0,1,0)=0$	$f(1,1,0) \geq f(0,1,0)$
$(1,1,0) \geq (0,0,0)$	$f(1,1,0)=1$	$f(0,0,0)=1$	$f(1,1,0) \geq f(0,0,0)$
$(1,0,1) \geq (1,0,0)$	$f(1,0,1)=0$	$f(1,0,0)=1$	$f(1,0,1) < f(1,0,0)$
$(1,0,1) \geq (0,0,1)$	$f(1,0,1)=0$	$f(0,0,1)=0$	$f(1,0,1) \geq f(0,0,1)$
$(1,0,1) \geq (0,0,0)$	$f(1,0,1)=0$	$f(0,0,0)=1$	$f(1,0,1) < f(0,0,0)$
$(1,0,0) \geq (0,0,0)$	$f(1,0,0)=1$	$f(0,0,0)=1$	$f(1,0,0) \geq f(0,0,0)$
$(0,1,1) \geq (0,1,0)$	$f(0,1,1)=1$	$f(0,1,0)=0$	$f(0,1,1) \geq f(0,1,0)$
$(0,1,1) \geq (0,0,1)$	$f(0,1,1)=1$	$f(0,0,1)=0$	$f(0,1,1) \geq f(0,0,1)$
$(0,1,1) \geq (0,0,0)$	$f(0,1,1)=1$	$f(0,0,0)=1$	$f(0,1,1) \geq f(0,0,0)$
$(0,1,0) \geq (0,0,0)$	$f(0,1,0)=0$	$f(0,0,0)=1$	$f(0,1,0) < f(0,0,0)$
$(0,0,1) \geq (0,0,0)$	$f(0,0,1)=0$	$f(0,0,0)=1$	$f(0,0,1) < f(0,0,0)$

Умова не виконується на наборах $(1,0,1) \geq (1,0,0)$, $(1,0,1) \geq (0,0,0)$, $(0,1,0) \geq (0,0,0)$, $(0,0,1) \geq (0,0,0)$. Робиться висновок: функція не є монотонною.

Перевіримо, чи лінійна функція. Для цього знайдемо поліном Жегалкіна для цієї функції. Запишемо задану функцію за допомогою ДДНФ.

$$f(x,y,z)=\bar{x}y\bar{z}\vee x\bar{y}z\vee xy\bar{z}=y\bar{z}(\bar{x}\vee x)\vee x\bar{y}z=y\bar{z}\wedge 1\vee x\bar{y}z=$$
$$=y\bar{z}\vee x\bar{y}z=y\bar{z}x\bar{y}z\oplus y\bar{z}\oplus x\bar{y}z=y\bar{z}\oplus x\bar{y}z=y(z\oplus 1)\oplus x(y\oplus 1)z=$$
$$=yz\oplus y\oplus xyz\oplus xz=xyz\oplus xz\oplus yz\oplus y$$

Оскільки поліном Жегалкіна має кон’юнкцію змінних, то функція не є лінійною.

Умови теореми Поста виконуються, тому функція *f(x,y,z)* є функціонально повним набором.

Завдання 10. Функція *f(x,y,z,t)* задана за допомогою конституент одиниці, що закодовані десятковими еквівалентами: *0,1,2,3,5,7,8,10,11,12,13*.

1. Заповнити карту Карно для заданої функції. Обрати контури склеювання та записати мінімальну ДНФ.
2. Провести мінімізацію методом Квайна-Мак-Класкі.
3. За мінімальною ДНФ побудувати перемикальний ланцюг у базисі *ТА-НІ.*

1. У табл. 9.7 запишемо конституенти одиниці даної функції десятковими еквівалентами у перший стовпчик, у вигляді двійкових кодів у другий стовпчик. У третій стовпчик запишемо відповідні конституенти одиниці функції *f(x,y,z,t).*

Таблиця 9.7

Номер	Набір значень змінних *x, y, z, t*	Конституенти одиниці функції *f(x,y,z,t)*
0	0 0 0 0	$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t}$
1	0 0 0 1	$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,t$
2	0 0 1 0	$\bar{x}\,\bar{y}\,z\,\bar{t}$
3	0 0 1 1	$\bar{x}\,\bar{y}\,z\,t$
5	0 1 0 1	$\bar{x}\,y\,\bar{z}\,t$
7	0 1 1 1	$\bar{x}\,y\,z\,t$
8	1 0 0 0	$x\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t}$
10	1 0 1 0	$x\,\bar{y}\,z\,\bar{t}$
11	1 0 1 1	$x\,\bar{y}\,z\,t$
12	1 1 0 0	$x\,y\,\bar{z}\,\bar{t}$
13	1 1 0 1	$x\,y\,\bar{z}\,t$

Побудуємо карту Карно для функції ***f(x,y,z,t)*** (рис. 9.3).

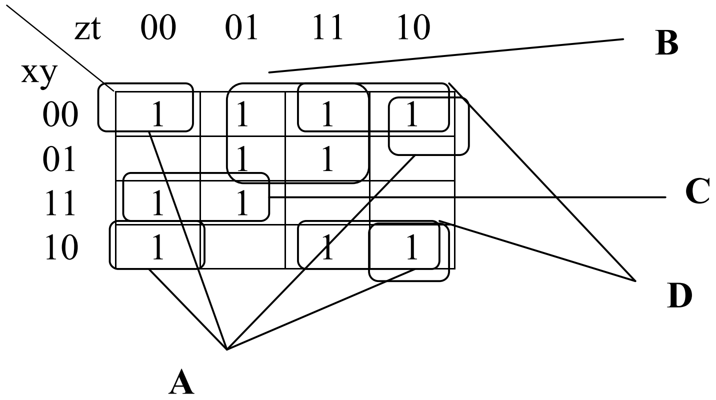


Рисунок 9.3 – Карта Карно

Запишемо мінімальну ДНФ, об'єднавши диз'юнкцією прості імпліканти *A, B, C, D* відповідно:

$A = \overline{y}\,\overline{t}$;

$B = \overline{x}t$;

$C = xy\overline{z}$;

$D = \overline{y}z$.

Таким чином одержуємо мінімальну ДНФ:

$f(x, y, z, t) = \overline{y}\,\overline{t} \vee \overline{x}t \vee xy\overline{z} \vee \overline{y}z$

2. Відповідно до методу Квайна – Мак-Класкі здійснимо такі кроки:

1. Згрупуємо двійкові коди імплікант з однаковою кількістю одиниць (табл. 9.10). Назвемо кількість одиниць *m* індексом групи. Упорядкуємо групи в порядку зростання індексу *m*.

2. Починаючи з *m* = 0, зробимо порівняння кожного двійкового коду в групі з індексом *m* з кожним кодом з групи з індексом *m+1.* Якщо порівнювані двійкові коди відрізняються тільки в одному розряді, то у наступний стовпчик таблиці запишемо відповідний до них двійковий код з порожньою позначкою «–» на місці зазначеного розряду. Напроти кожного нового коду запишемо номери кодів двох імплікант, які брали участь у порівнянні, і у наступному стовпчику ці імпліканти позначимо знаком «*V*», оскільки вони не є простими імплікантами. Всі коди, які залишилися непозначеними знаком «*V*», відповідають простим імплікантам, тому позначимо їх знаком «*X*».

3. Якщо серед знов одержаних імплікант є однакові, то з них для подальшого використання залишаємо тільки одну.

4. Повторюємо кроки 1 – 3 доти, доки існує можливість одержувати нові коди імплікант.

Результат виконання описаних кроків наведено у табл. 9.8.

Спочатку заповнюємо стовпчики нульового циклу: *m* (десятковий індекс групи), двійковий код імпліканти, номер імпліканти. Імпліканти розділяємо на групи за значенням *m.*

Таблиця 9.8

ЦИКЛ 0

m	Код імпл.	№ імпл.	Вид імпл.
0	0000	0	V
1	0001	1	V
	0010	2	V
	1000	8	V
2	0011	3	V
	0101	5	V
	1010	10	V
	1100	12	V
3	0111	7	V
	1011	11	V
	1101	13	V

ЦИКЛ 1

m	Код	№	Вид
0	000-	0,1	V
	00-0	0,2	V
	-000	0,8	V
1	00-1	1,3	V
	0-01	1,5	V
	001-	2,3	V
	-010	2,10	V
	10-0	8,10	V
	1-00	8,12	X
2	0-11	3,7	V
	-011	3,11	V
	01-1	5,7	V
	-101	5,13	X
	101-	10,11	V
	110-	12,13	X

ЦИКЛ 2

m	Код	№	Вид
0	00--	(0,1),(2,3)	X
	~~00--~~	~~(0,2),(1,3)~~	
	-0-0	(0,2),(8,10)	X
	~~-0-0~~	~~(0,8),(2,10)~~	
1	0--1	(1,3),(5,7)	X
	~~0--1~~	~~(1,5),(3,7)~~	
	-01-	(2,3),(10,11)	X
	~~-01-~~	~~(2,10),(3,11)~~	

Потім здійснимо порівняння першої імпліканти з групи m = 0 (імпліканта 0000) з першою імплікантою з групи m = 1 (імпліканта 0001). Вони відрізняються тільки в одному розряді, тому робимо їх склеювання та одержуємо нову імпліканту з кодом 000-. Записуємо даний код у стовпчик коду імпліканти циклу 1, а напроти імплікант 0000 і 0001 ставимо позначки «V», оскільки вони не є простими. Їх номери вказуємо поряд з кодом 000-. Потім порівнюємо імпліканту 0000 з другою імплікантою з групи $m=1$ – імплікантою 0010 тощо.

Коли порівняння всіх кодів імплікант стовпчика «цикл 0» завершено, аналізуємо стовпчик виду імпліканти. Напроти всіх імплікант ставимо позначення «V», оскільки в циклі 0 кожна імпліканта припускає склеювання і не є простою. Далі розділяємо на групи $m=0$, $m=1$ і $m=2$ коди імплікант циклу 1. Потім попарно порівнюємо ці імпліканти й одержуємо стовпчик коду імплікант «цикл 2». Коди, що містять знаки «-», можуть утворювати нові імпліканти, тільки якщо вони містять знаки «-» в одних і тих самих розрядах. Закінчивши порівняння, виділяємо прості імпліканти у стовпчику «вид» «циклу 1», які не мають позначки «*V*», і позначаємо їх позначкою «*X*». У стовпчику «код» «циклу 2» є однакові імпліканти, тому довільно викреслюємо один з однакових рядів, щоб кожна імпліканта зустрічалася тільки один раз. Порівнюючи коди імплікант у «циклі 2», приходимо до висновку, що методом склеювання з них неможливо одержати нові імпліканти. Всі коди циклу 2 відповідають простим імплікантам, отже, побудову таблиці завершено.

Для знаходження тупикових ДНФ побудуємо імплікантну таблицю, в рядках якої розташовуємо двійкові коди, що відповідають простим імплікантам, а в стовпчиках – коди, що відповідають конституентам одиниці.

Якщо двійковий код рядка є частиною коду стовпчика (позиції із знаком «-» не порівнюються), то у відповідну клітинку таблиці записуємо знак «*» (табл. 9.9).

Таблиця 9.9

	0000	0001	0010	0011	0101	0111	1000	1010	1011	1100	1101
1-00							*			*	
-101					*						*
110-										*	*
00--	*	*	*	*							
-0-0	*		*				*	*			
0--1		*		*	*	*					
-01-			*	*				*	*		

Позначимо стовпчики таблиці, які містять по одному знаку «*». Відповідні до них прості імпліканти є диз'юнктивними ядрами. Викреслюємо рядки таблиці, що відповідають ядрам, і стовпчики, покриті ядрами, як зображено у таблиці 9.10.

Таблиця 9.10

	0000	0001	0010	0011	0101	0111	1000	1010	1011	1100	1101
1-00							*			*	
-101					*						*
110-										*	*
00--	*	*	*	*							
-0-0	*		*				*	*			
0--1		*		*	*	*					
-01-			*	*				*	*		

Одержуємо спрощену імплікантну таблицю (табл. 9.11).

Таблиця 9.11

		0000	1000	1100	1101
A	1-00		*	*	
B	-101				*
C	110-			*	*
D	00--	*			
E	-0-0	*	*		

Тепер знайдемо всі тупикові ДНФ функції $f(x,y,z,t)$ і оберемо з них мінімальну. Згідно з методом Петрика, кожній з імплікант таблиці приписуємо літерове позначення і записуємо формулу покриття конституент одиниці простими імплікантами.

Конституента одиниці з кодом 0000 може бути покрита імплікантою D або імплікантою E, тобто диз'юнкцією: $D \vee E$. Конституента одиниці з кодом 1000 може бути покрита імплікантою A або імплікантою E: $A \vee E$. Аналогічно

1100 може бути покрита $A\vee C$, а 1101 – диз'юнкцією $B\vee C$. Таким чином, покриття конституент одиниці спрощеної імплікантної таблиці функції *f(x,y,z,t)* простими імплікантами можна записати у вигляді формули покриття:

$(D\vee E)(A\vee E)(A\vee C)(B\vee C)$.

Якщо у цій формулі розкрити дужки, то отримаємо символьне зображення всіх можливих наборів простих імплікант для тупикових ДНФ, що не включає диз'юнктивні ядра:

$$(D\vee E)(A\vee E)(A\vee C)(B\vee C)=(DA\vee EA\vee DE\vee E)(AB\vee CB\vee AC\vee C)=(DA\vee E(A\vee D\vee 1))(AB\vee C(B\vee A\vee 1))=(DA\vee E)(AB\vee C)=ABD\vee ACD\vee ABE\vee CE$$

В одержаній формулі кожна кон'юнкція літерних позначень відповідає набору імплікант у деякій тупиковій ДНФ, до якої обов'язково входять також диз'юнктивні ядра. Для того щоб одержати мінімальну ДНФ, необхідно вибрати набір з мінімальною кількістю імплікант (у даному прикладі це *EC)* і додати імплікантні ядра (0--1, -01-). Одержуємо мінімальну ДНФ вихідної функції:

МДНФ $f(x,y,z,t)=\bar{y}\bar{t}\vee xy\bar{z}\vee \bar{x}t\vee \bar{y}z$.

Таким чином, за допомогою метода Квайна–Мак-Класкі одержана мінімальна ДНФ функції *f(x, y, z, t),* яка містить лише 4 елементарні кон'юнкції замість 11 конституент одиниці ДДНФ.

3. За мінімальною ДНФ $f\left(x,y,z\right)$ побудуємо перемикальний ланцюг у базисі ТА-НІ-АБО.

$f(x,y,z,t)=\bar{y}\bar{t}\vee xy\bar{z}\vee \bar{x}t\vee \bar{y}z$.

Використовуючи логічні елементи „НІ”, „ТА” та „АБО”, формуємо суперпозицію, що відповідає даній функції. Одержаний логічний ланцюг зображено на рис. 9.4.

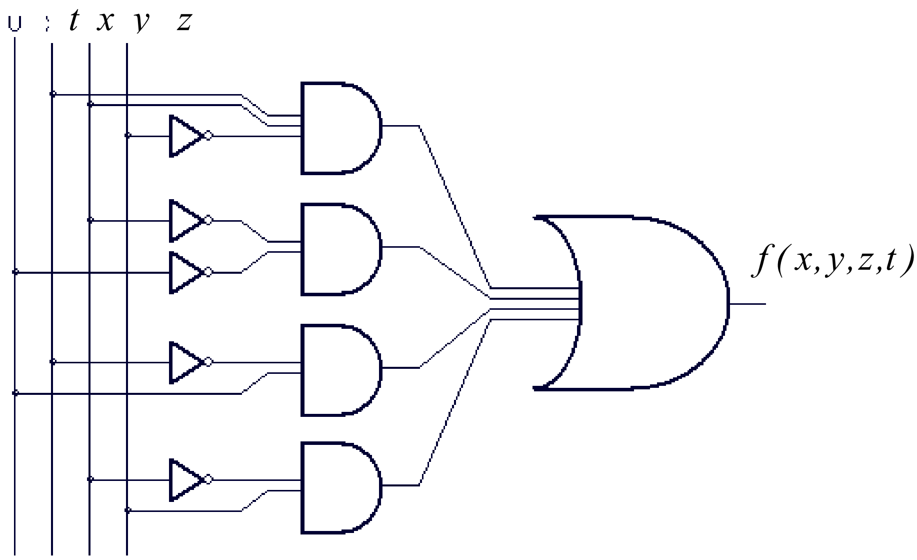


Рисунок 9.4 – Перемикальний ланцюг

Завдання 11. Визначити до яких висловлювань (Істинне, Хибне, або ні те, ні інше) відносяться формули: $(P\to Q)\wedge\neg Q\to\neg P$ і $(P\to Q)\wedge\neg Q\wedge P$.

Спосіб 1.

Побудуємо таблиці істинності для функцій $(P\to Q)\wedge\neg Q\to\neg P$ і $(P\to Q)\wedge\neg Q\wedge P$ (табл. 9.12).

Таблица 9.12

P	Q	$P\to Q$	$\neg Q$	$(P\to Q)\wedge\neg Q$	$\neg P$	$(P\to Q)\wedge\neg Q\to$ $\to\neg P$	$P\to Q$	$(P\to Q)\wedge$ $\wedge\neg Q\wedge P$
I	*I*	*I*	*X*	*X*	*X*	*I*	*I*	*X*
I	*X*	*X*	*I*	*X*	*X*	*I*	*X*	*X*
X	*I*	*I*	*X*	*X*	*I*	*I*	*I*	*X*
X	*X*	*I*	*I*	*I*	*I*	*I*	*I*	*X*

Таблиця 9.12 показує, що $(P\to Q)\wedge\neg Q\to\neg P$ істинна при всіх інтерпретаціях. Одже, $(P\to Q)\wedge\neg Q\to\neg P$ істиннісне висловлювання.

Розглянемо формулу $(P\to Q)\wedge\neg Q\wedge P$. З таблиці 9.12 робимо висновок, що $(P\to Q)\wedge\neg Q\wedge P$ хибне висловлювання, оскільки $(P\to Q)\wedge\neg Q\wedge P$ хибна у кожній інтерпретації.

Спосіб 2.

Доведемо істинність формули шляхом перетворення її у кон'юнктиву нормальну форму:

$$((P\to Q)\wedge\neg Q)\to\neg P=\neg((P\to Q)\wedge\neg Q)\vee\neg P=\neg((\neg P\vee Q)\wedge\neg Q)\vee\neg P=$$
$$=\neg((\neg P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg Q))\vee\neg P=\neg((\neg P\wedge\neg Q)\vee 0)\vee\neg P=\neg(\neg P\wedge\neg Q)\vee\neg P=(P\vee Q)\vee\neg P=$$
$$=(Q\vee P)\vee\neg P=Q\vee(P\vee\neg P)=Q\vee 1=1.$$

Таким чином, $((P\to Q)\wedge\neg Q)\to\neg P$ істиннісне висловлювання.

Доведемо хибність формули $(P\to Q)\wedge\neg Q\wedge P$ шляхом її перетворення у диз'юнктивну нормальну форму:

$$(P\to Q)\wedge\neg Q\wedge P=(\neg P\vee Q)\wedge\neg Q\wedge P=(\neg P\wedge\neg Q\wedge P)\vee(Q\wedge\neg Q\wedge P)=0\vee 0=0.$$

Таким чином, $(P\to Q)\wedge\neg Q\wedge P$ – хибне висловлювання.

Завдання 12. Студент у день іспиту вирішив встати раніше, зробити зарядку, після іспиту здати книжки в бібліотеку або сходити в кінотеатр і, якщо добре складе іспит, сходити на дискотеку. Використовуючи апарат логіки висловлювань, визначити, в якому випадку план студента не буде виконаний.

Виділяємо прості висловлення у складі вхідного складного:

X: «Студент у день іспиту встав раніше»;

Y: «Студент у день іспиту зробив зарядку»;

Z: «Студент після іспиту здав книжки в бібліотеку»;

T: «Студент після іспиту сходив у кінотеатр»;

U: «Студент склав іспит добре»;

V: «Студент після іспиту сходив у дискотеку».

Формула вхідного складного висловлення: $X\wedge Y\wedge(Z\vee T)\wedge(U\to V)$.

План студента виконаний, якщо значення цього складного висловлення дорівнює 1. Якщо план студента не виконаний, то значення цього складного висловлення дорівнює 0, а його заперечення – 1:

$$\overline{X \wedge Y \wedge (Z \vee T) \wedge (U \to V)} = \overline{X} \vee \overline{Y} \vee (\overline{Z} \wedge \overline{T}) \vee (\overline{U \to V}) = \overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}\ \overline{T} \vee U\overline{V} = 1$$

Підставляючи замість змінних прості висловлювання, одержимо відповідь на запитання. Вона відповідає інтуїтивному розумінню ситуації.

Завдання 13. Одержати випереджену нормальну форму (ВНФ) для формули

$(\forall x)(\forall y)((\forall z)P(x,y)\wedge P(y,z)\to(\exists z)Q(x,y,z))$.

Скористаємося алгоритмом.

$(\forall x)(\forall y)((\forall z)P(x,y)\wedge P(y,z)\to(\exists z)Q(x,y,z))=$

$(\forall x)(\forall y)(\neg((\forall z)P(x,z)\wedge P(y,z))\vee(\exists z)Q(x,y,z))=$

$=(\forall x)(\forall y)((\exists z)(\neg P(x,y)\vee\neg P(y,z))\vee(\exists u)Q(x,y,u))=$

$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\exists u)(\neg P(x,y)\vee\neg P(y,z)\vee Q(x,y,u))$.

Завдання 14. Неорієнтований граф мультиграф на 9 вершинах заданий вектором R_{mn} (табл. 9.13), де m та n – номера вершин графа. Неорієнтований граф заданий вектором R_{mn} (табл. 9.13), де m та n – номера вершин графа, $m=\overline{1,9}$ та $n=\overline{1,9}$. Елементи вектора R_{mn} відповідають кількості ребер між відповідними вершинами m та n.

Таблиця 9.13

m	1	1	2	1	2	3	3	4	5	6	7	8
n	3	2	5	4	7	7	8	6	6	8	8	9
$\boldsymbol{R_{mn}}$	3	1	2	3	2	2	3	1	2	3	2	2

Для заданого графа необхідно:

– побудувати матрицю суміжності, діаграму графа;

– знайти у графі ейлерів та (або) гамільтонів цикли, якщо вони є;

– визначити числові характеристики графа: хроматичне число, реберне хроматичне число, цикломатичне число;

– побудувати деяке остовне дерево графа;

– записати код остовного дерева;

– побудувати базис розрізів графа, базис циклів графа.

Запишемо матрицю суміжності (табл. 9.14).

Таблиця 9.14

n \\ *m*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	0	1	3	3	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	2	0	2	0	0
3	3	0	0	0	0	0	2	3	0
4	3	0	0	0	0	1	0	0	0
5	0	2	0	0	0	2	0	0	0
6	0	0	0	1	2	0	0	3	0
7	0	2	2	0	0	0	0	2	0
8	0	0	3	0	0	3	2	0	2
9	0	0	0	0	0	0	0	2	0

З матриці суміжності видно, що граф матиме 26 ребер і 9 вершин. З таблиці можна побудувати діаграму графа та його матрицю інциденції.

Гамільтонів цикл відсутній, оскільки граф має точку счленення V_8. Число компонент зв'язності – 1.

Визначимо степені усіх вершин.

deg v_1=7;	deg v_4=4;	deg v_7=6;
deg v_2=5;	deg v_5=4;	deg v_8=10;
deg v_3=8;	deg v_6=6;	deg v_9=2.

Заданий граф має 2 вершини з непарним степенем. Враховуючи достатні умови існування ейлеревих ланцюгів, у заданому графі присутній ланцюг. Знайдемо даний ланцюг, використовуючи алгоритм Фльорі.

Обираємо вершину з непарним степенем V_1 та ребро e_1. Додаємо ребро в ейлерів ланцюг. Видаляємо ребро e_1 з графа. Обираємо наступне ребро так, щоб воно не входило у попередню вершину V_1 та щоб воно не було мостом. Продовжуємо операцію доти, доки не буле видалено усі ребра. Таким чином одержуємо ейлерів ланцюг $e_1, e_{15}, e_{17}, e_{19}, e_{20}, e_{25}, e_{13}, e_{14}, e_{12}, e_{16}, e_{18}, e_{26}, e_2, e_3, e_9, e_6, e_{10}, e_{11}, e_5, e_8, e_7, e_{22}, e_{24}, e_4, e_{23}, e_{21}$.

Визначимо хроматичне, реберне хроматичне та цикломатичне числа, для чого зробимо розфарбовування вершин та ребер графа. Розфарбуємо вершини графа.

Вершина v_8 має найбільший степінь. Присвоюємо їй колір1. Також колір1 присвоюємо вершинам v_1 та v_5, оскільки вони не суміжні з вершиною v_8 і не суміжні між собою. Обираємо вершину з найбільшим степенем з тих, що залишилися не розфарбованими. Це вершина v_3. Присвоюємо їй колір2. Також колір2 присвоюємо вершинам v_6, v_2 та v_9. Вершини v_7, v_4 та v_5 отримають колір3. Таким чином, вершини наведеного графа можна розфарбувати у 3 кольори. Отже, хроматичне число $h(G)=3$. Аналогічно знаходимо реберне хроматичне число $H(G)=10$.

Для визначення цикломатичного числа застосуємо формулу знаходження цикломатичного числа: $v(G)= m-n+p=26-9+1=18$.

Побудуємо заданий граф G та деяке відповідне до нього остове дерево T (рис. 7.4).

Запишемо код дерева T.

Обираємо вершину з найменшим степенем V_2. Записуємо у код номер вершини, суміжної з вершиною V_2 – 7. Видаляємо з остовного дерева ребро e_{20} та вершину V_2.

Знаходимо з кінцевих вершин вершину з найменшим степенем – V_5. У код записуємо 6. Видаляємо ребро e_{17} та вершину V_5.

Наступна кінцева вершина з мінімальним степенем V_6. Записуємо код 4. Видаляємо ребро e_{15} вершину V_6.

Продовжуємо до тих пір, доки не залишиться 2 вершини V_8 та V_9 і ребро e_{13}.

Таким чином одержуємо код 7 – 6 – 4 – 1 – 3 – 8 – 8.

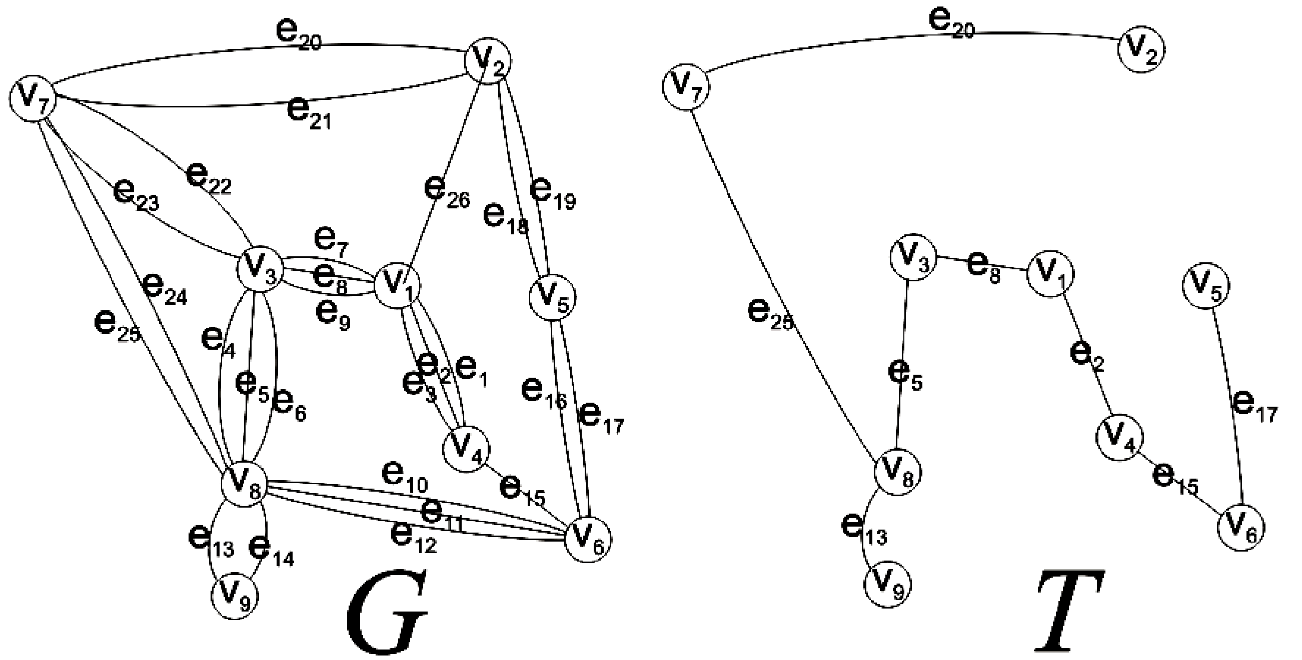


Рисунок 9.5

Побудуємо базис розрізів графа. Знайдемо ранг розрізів: $\chi(G)= m-\nu =8$. Ранг розрізів відповідає кількості базисних розрізів для графа *G*.

e_{20}: $V_1=\{ v_2 \}$; $V_2=\{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$,

$c_1=\{ e_{18}, e_{19}, e_{20}, e_{21}, e_{26}\}$;

e_{25}: $V_1=\{ v_2, v_7 \}$; $V_2=\{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6, v_8, v_9 \}$,

$c_2=\{ e_{18}, e_{19}, e_{22}, e_{23}, e_{24}, e_{25}, e_{26}\}$;

e_{13}: $V_1=\{v_9\}$; $V_2=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$,

$c_3=\{e_{13}, e_{14}\}$;

e_5: $V_1=\{v_2, v_7, v_8, v_9\}$; $V_2=\{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6\}$,

$c_4=\{e_4, e_5, e_6, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{18}, e_{19}, e_{22}, e_{23}, e_{26}\}$;

e_8: $V_1=\{ v_2, v_3, v_7, v_8, v_9\}$; $V_2=\{ v_1, v_4, v_5, v_6\}$,

$c_5=\{ e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{18}, e_{19}, e_{26}\}$;

e_2: $V_1=\{ v_1, v_2, v_3, v_7, v_8, v_9\}$; $V_2=\{ v_4, v_5, v_6\}$,

$c_6=\{e_1, e_2, e_3, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{18}, e_{19}\}$;

e_{15}: $V_1=\{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_8, v_9\}$; $V_2=\{ v_5, v_6\}$,

$c_7=\{ e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{15}, e_{18}, e_{19}\}$;

e_{17}: $V_1=\{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7, v_8, v_9\}$; $V_2=\{ v_5\}$,

$c_8=\{ e_{16}, e_{17}, e_{18}, e_{19}\}$.

Побудуємо матрицю розрізів (табл. 9.15).

Виразимо 3 небазисні розрізи через базисні.

$c_9 = c_2 \oplus c_4$

$$\begin{array}{r} 01000000000000000001101111 \\ \oplus\ \underline{00010000001100111001101101} \\ 01010000001100111000000010 \end{array}$$

$c_9=\{e_{25},e_5, e_4,e_6, e_{10},e_{11}, e_{12},e_{24}\}$

Таблиця 9.15 – Матриця розрізів

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8
e_{20}	1							
e_{25}		1						
e_{13}			1					
e_5				1				
e_8					1			
e_2						1		
e_{15}							1	
e_{17}								1
e_1						1		
e_3						1		
e_4				1				
e_6				1				
e_7					1			
e_9					1			
e_{10}				1	1	1	1	
e_{11}				1	1	1	1	
e_{12}				1	1	1	1	
e_{14}			1					
e_{16}								1
e_{18}	1	1		1	1	1	1	1
e_{19}	1	1		1	1	1	1	1
e_{21}	1							
e_{22}		1		1				
e_{23}		1		1				
e_{24}		1						
e_{26}	1	1		1	1			

$c_{10} = c_4 \oplus c_5$

$$\oplus\frac{\begin{array}{l}00010000001100111001101101\\00001000000011111001100001\end{array}}{00011000001111000000001100}$$

$c_{10}=\{e_5,e_8, e_4,e_6, e_7,e_9, e_{22},e_{23}\}$

$c_{11} = c_9 \oplus c_{10} = c_2 \oplus c_4 \oplus c_4 \oplus c_5 = c_2 \oplus c_5$

$$\oplus\frac{\begin{array}{l}01000000000000000001101111\\00001000000011111001100001\end{array}}{01001000000011111000001110}$$

$c_{11}=\{e_{25},e_8, e_7,e_9, e_{10},e_{11}, e_{12},e_{22},e_{23},e_{24}\}$

Побудуємо базис циклів графа *G*. Кількість базисних циклів відповідає цикломатичному числу для заданого графа. Отже, у заданому графі є 18 базисних циклів.

Для побудови базису циклів додаємо до остовного дерева *T* кожну з хорд у порядку їхнього зростання, виділяємо простий цикл і формуємо базис циклів графа (у вигляді послідовності ребер, що утворять кожний з базисних циклів).

Таким чином отримуємо 18 базисних циклів.

$C_{e1}=\{ e_1, e_2\};$ $C_{e6}=\{e_5, e_6\};$

$C_{e3}=\{e_2, e_3\};$ $C_{e7}=\{e_7, e_8\};$

$C_{e4}=\{e_4, e_5\};$ $C_{e9}=\{e_8, e_9\};$

$C_{e10}=\{e_5, e_8, e_2, e_{15}, e_{10}\};$ $C_{e19}=\{e_{17}, e_{15}, e_2, e_8, e_5, e_{25}, e_{20}, e_{19}\};$

$C_{e11}=\{e_5, e_8, e_2, e_{15}, e_{11}\};$ $C_{e21}=\{ e_{20}, e_{21}\};$

$C_{e12}=\{e_5, e_8, e_2, e_{15}, e_{12}\};$ $C_{e22}=\{e_5, e_{25}, e_{22}\};$

$C_{e14}=\{e_{13}, e_{14}\};$ $C_{e23}=\{e_5, e_{25}, e_{23}\};$

$C_{e16}=\{e_{16}, e_{17}\};$ $C_{e24}=\{e_{24}, e_{25}\};$

$C_{e18}=\{e_{17}, e_{15}, e_2, e_8, e_5, e_{25}, e_{20}, e_{18}\};$ $C_{e26}=\{ e_8, e_5, e_{25}, e_{20}, e_{26}\}.$

Побудуємо матрицю циклів (табл. 9.16).

Таблиця 9.16 – Матриця циклів

	C_{e1}	C_{e3}	C_{e4}	C_{e10}	C_{e11}	C_{e12}	C_{e14}	C_{e16}	C_{e18}	C_{e6}	C_{e7}	C_{e9}	C_{e19}	C_{e21}	C_{e22}	C_{e23}	C_{e24}	C_{e26}
e_1	1																	
e_2	1	1		1	1	1			1				1					
e_3		1																
e_4			1															
e_5			1	1	1	1			1	1			1		1	1		1
e_6										1								
e_7											1							
e_8				1	1	1			1		1	1	1					1
e_9												1						
e_{10}				1														
e_{11}					1													
e_{12}						1												
e_{13}							1											
e_{14}							1											
e_{15}				1	1	1			1				1					
e_{16}								1										
e_{17}								1	1				1					
e_{18}								1										
e_{19}													1					
e_{20}									1				1	1				1
e_{21}														1				
e_{22}															1			
e_{23}																1		
e_{24}																	1	
e_{25}									1				1		1	1	1	1
e_{26}																		1

Виразимо 3 небазисні цикли через базисні.

$$\begin{array}{r} 11000000000000000000000000 \\ \oplus\ \underline{01100000000000000000000000} \\ 10100000000000000000000000 \end{array}$$

$$C_1 = C_{e_1} \oplus C_{e_{23}} = \{e_1, e_3\}$$

$$\begin{array}{r l} & 01100000000000000000000000 \\ \oplus & \underline{00011000000000000000000000} \\ & 01111000000000000000000000 \end{array}$$

$$C_2 = C_{e_3} \oplus C_{e_4} = \{e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

$$\begin{array}{r l} & 01001001010000100000000000 \\ \oplus & \underline{01001001001000100000000000} \\ & 00000000011000000000000000 \end{array}$$

$$C_3 = C_{e_{10}} \oplus C_{e_{11}} = \{e_{10}, e_4\}$$

Завдання 15. Задано неорієнтований мультограф переліком вагових коефіцієнтів ребер.

m	v_1	v_1	v_1	v_1	v_1	v_1	v_1	v_2	v_2	v_2	v_2	v_2	v_3	v_3	v_3	v_3	v_4	v_4	v_4	v_5	v_5
n	v_2	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_4	v_5	v_6	v_7	v_5	v_6	v_7	v_6	v_7
	4	6	0	5	0	2	3	0	8	0	6	0	2	0	0	0	4	0	0	7	0

Визначити відстані від вершини v_3 до інших вершин. Побудувати на вершинах графа дерево мінімальної вартості.

Побудуємо графічно заданий граф (рис. 9.6).

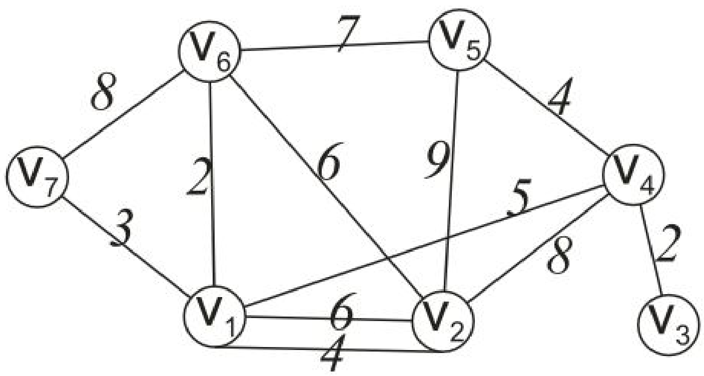


Рисунок 9.6

Для пошуку відстані від вершини v_3 скористаємося алгоритмом Дейкстри. У кожному стовпчику вибираємо мінімальну відстань (перша цифра – номер вершини, друга – відстань).

v_1	∞	(4,7)	(4,7)			
v_2	∞	(4,10)	(4,10)	(4,10)	(4,10)	
v_3	0					
v_4	(3,2)					
v_5	∞	(4,6)				
v_6	∞	∞	(5,13)	(1,19)		
v_7	∞	∞	∞	(1,10)	(1,10)	(1,10)

$d(v_3,v_1)=7;$ $d(v_3,v_3)=0;$ $d(v_3,v_5)=6;$ $d(v_3,v_7)=10.$

$d(v_3,v_2)=10;$ $d(v_3,v_4)=2;$ $d(v_3,v_6)=9;$

Для побудови дерева мінімальної вартості упорядкуємо ребра в порядку зростання їхніх ваг. Після цього включаємо в остовне дерево ребра в порядку зростання їхніх ваг, якщо знову включене ребро утворить цикл з раніше включеними ребрами, то його пропускаємо (рис. 9.7).

$v_1 - v_6 = 2;$	$v_4 - v_5 = 4;$	$v_5 - v_6 = 7;$
$v_4 - v_3 = 2;$	$v_1 - v_4 = 5;$	$v_6 - v_7 = 8;$
$v_1 - v_7 = 3;$	$v_1 - v_2 = 6;$	$v_2 - v_4 = 8;$
$v_1 - v_2 = 4;$	$v_2 - v_6 = 6;$	$v_2 - v_5 = 9.$

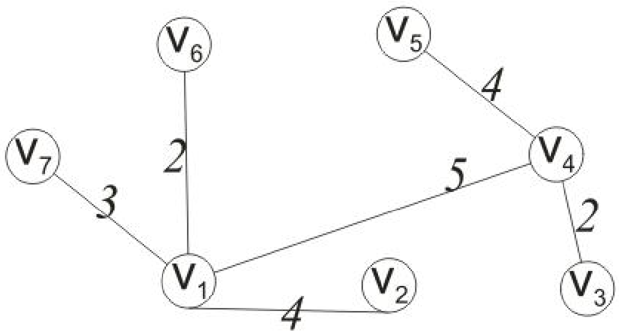


Рисунок 9.7

Завдання 16. Задано транспортну мережу за допомогою матриць пропускних спроможностей та потоків, що проходять по дугам. x_0 – вхід мережі, z – вихід. Знайти найбільший потік та найменший розріз мережі.

Матриця пропускних спроможностей							Матриця потоків						
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	z		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	z
x_0		10	5	3			x_0		7	2	2		
x_1			2		7		x_1			1		6	
x_2			11				x_2			9			
x_3						16	x_3						11
x_4			7	3		1	x_4			6	0		0
z							z						

1. Зобразимо транспортну мережу графічно (рис. 9.8).

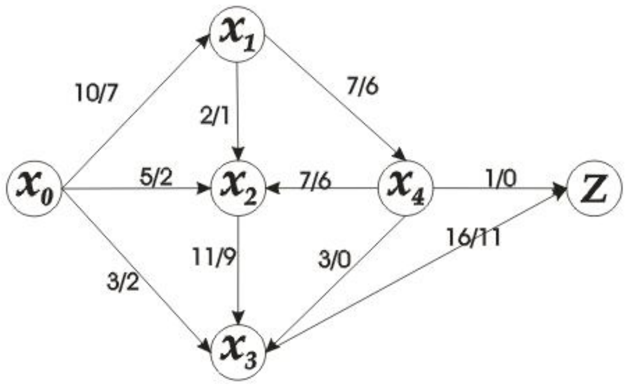


Рисунок 9.8

Розмір початкового потоку у мережі $\varphi_z = 11$.

По черзі розглянемо всі шляхи між *x₀* та *z*. Для кожної дуги обраного шляху знайдемо різницю між пропускною здатністю дуги і потоком, що проходить по дузі. Потім збільшимо потік таким чином, щоб шлях, що веде з x_0 у *z,* містив хоча б одну насичену дугу.

Для кожної дуги обраного шляху додаємо до чисельника мінімальну отриману різницю. В результаті цієї дії хоча б одна дуга шляху стає насиченою. Після цього вибираємо наступний шлях. Повторюємо ці дії доти, доки не одержимо повний потік у мережі.

$\mu_1 = x_0, x_1, x_4, z$ (рис. 9.9).

$\varphi_z = 12$; $\mu_2 = x_0, x_1, x_2, x_3, z$ (рис. 9.10).

$\varphi_z = 13$; $\mu_3 = x_0, x_2, x_3, z$ (рис. 9.11).

$\varphi_z = 14$; $\mu_3 = x_0, x_3, z$ (рис. 9.12).

$\varphi_z = 15$.

Всі існуючі і розглянуті шляхи від x_0 до *z* містять потік $\varphi_z = 15$, який є повним.

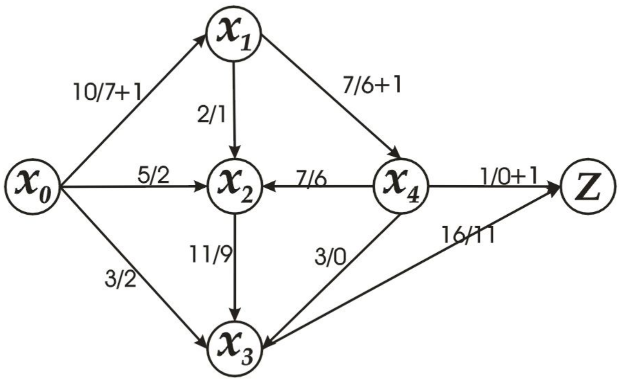


Рисунок 9.9

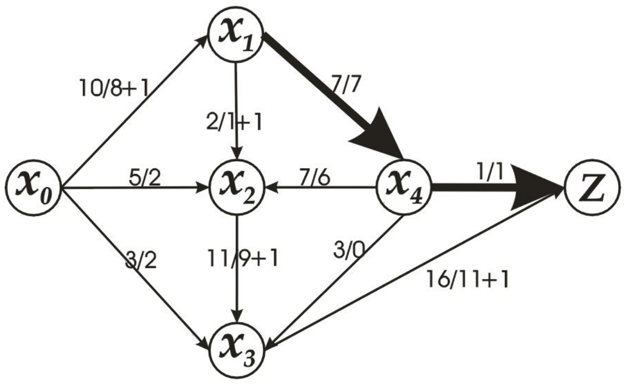


Рисунок 9.10

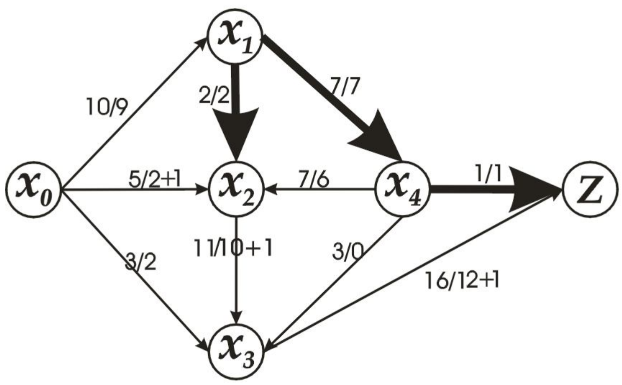


Рисунок 9.11

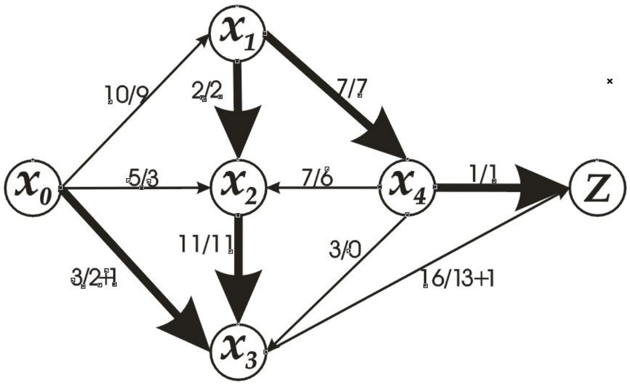


Рисунок 9.12

2. Збільшення потоку φ_z мережі полягає в розмітці вершин індексами, що вказують шлях, за яким можливо змінити потік. Якщо розмітка досягає вершини *z*, то потік можна збільшити по шляху, що відповідає отриманій розмітці. Збільшення потоку можливо доти, доки в результаті розмічування

вершина z одержує позначки.

Процедура розмітки вершин:

Крок 1. Позначаємо x_0 індексом $\boxed{0}$.

Крок 2. Якщо x_i вже має позначку, то:

– позначка $\boxed{+i}$ приписується всім непозначеним вершинам, які зв'язані з x_i ненасиченою дугою, що веде з x_i до даної вершини;

– позначку $\boxed{-i}$ отримують усі непозначені вершини, пов'язані зайнятою дугою, що йде з даної вершини у вершину x_i.

Таким чином, позначку $\boxed{+i}$ отримують усі вершини y, що задовольняють умови: $(x_i, y) \in U,\ \varphi(x_i, y) < C(x_i, y)$, y – непозначена, $\boxed{-i}$ отримують усі вершини y, що задовольняють умови $(y, x_i) \in U,\ \varphi(x_i, y) > 0$, y – непозначена.

Крок 3. Якщо в результаті такої розмітки виявиться позначена вершина z, то переходимо до пункту 4. У протилежному випадку, потік, який було отримано на попередньому циклі, був максимальним.

Крок 4. Будуємо шлях μ від x_0 до z, усі вершини якого відповідають номерам позначок попередніх вершин з точністю до знаку. Побудова шляху μ починається від вершини z. Потік у всіх дугах шляху μ змінюється за такими правилами:

$$\varphi'(u) = \begin{cases} \varphi(u), & \text{якщо } u \notin \mu; \\ \varphi(u)+1, & \text{якщо напрямок дуги } u \text{ і напрямок потоку у мережі} \\ & \text{співпадають;} \\ \varphi(u)-1, & \text{якщо напрямок дуги } u \text{ і напрямок потоку у мережі} \\ & \text{протилежні.} \end{cases}$$

Як результат отримуємо новий потік у мережі, який дорівнює $\varphi'_z = \varphi_z + 1$.

Переходимо до пункту 1. Маємо шлях μ_5, яким можливе збільшення потоку: $\mu_5 = x_0, x_2, x_4, x_3, z$. Збільшимо потік на 1 по дугах $(x_0, x_2), (x_4, x_3), (x_3, z)$ й зменшимо на 1 по дузі (x_4, x_2) (рис. 9.13).

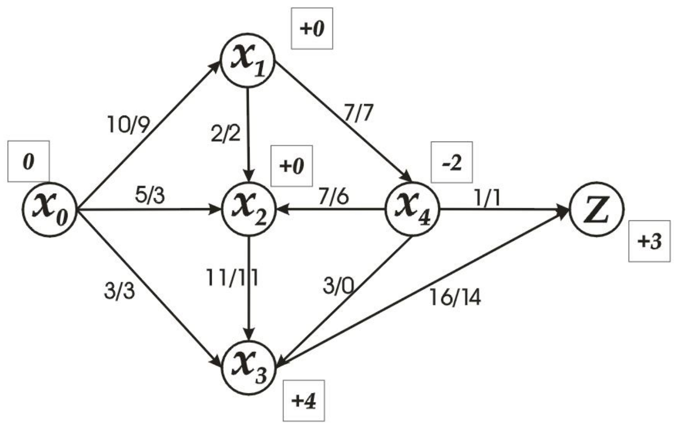


Рисунок 9.13

Повторимо розмітку.

Одержимо потік $\varphi(z)=17$. При подальшій розмітці позначки одержують тільки вершини x_0 і x_1 (рис. 9.14 позначки, виділені жирною рамкою).

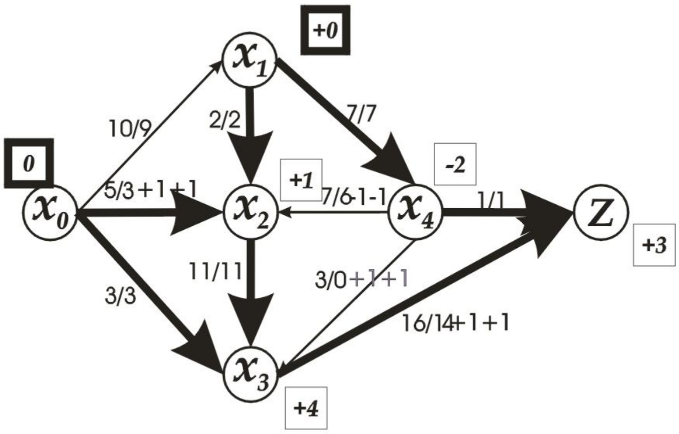


Рисунок 9.14

Оскільки розмітка не досягає вершини z, потік $\varphi(z)=17$ – максимальний. Для знаходження мінімального розрізу використовують позначки, що передаються від входу всіма можливими способами. Вершини, які при цьому не одержують позначок, утворять множину вершин розрізу A. Позначені вершини утворять множину $\overline{A}$.

Усі дуги, що йдуть з вершин множини $\overline{A}$ у вершини множини A, і утворюють мінімальний розріз. У нашому прикладі: $A=\{x_2, x_3, x_4, z\}$, $\overline{A}=\{x_0, x_1\}$. Розріз утворить дуги: $(x_1, x_4), (x_1, x_2), (x_0, x_2), (x_0, x_3)$.

Пропускна здатність цього розрізу дорівнює сумі пропускних здатностей вхідних у нього дуг, тобто 17.

З прикладу видно, що розмір максимального потоку мережі дорівнює розміру мінімального розрізу, що емпірично доводить теорему Форда-Фалкерсона.

Завдання 17. Скількома способами студент може добратися до ХНУРЕ, якщо є такі варіанти: пішки, двома тролейбусами (різних маршрутів), метро або на таксі.

Оскільки студент може добратися до ХНУРЕ лише одним способом, застосовується правило суми, по якій кількості способів N визначається як: $N=1+2+1+1=5$.

Завдання 18. Скільки можна скласти перестановок з n елементів, в яких дані m елементів не стоять поряд у будь-якому порядку.

Всього $n!$ Перестановок заданих елементів.

Елементи усередині m елементів можна переставляти $m!$ способами.

Розрахуємо, скільки розміщень заданої групи з m елементів можна здійснити, якщо m елементів стоять поряд у будь-якому порядку. Для цього розглянемо m елементів як один елемент, тобто маємо $(n-m+1)$ елементів, які можна переставляти один з одним, кількість таких розміщень $A^{1}_{n-m+1} = \dfrac{(n-m+1)!}{1!\cdot((n-m+1)-1)!} = n-m+1$.

Всього перестановок, де m елементів розташовано поряд $m!\cdot(n-m+1)$.

Тоді кількість перестановок, де m елементів не розташовано поряд дорівнює $n! - m!\cdot(n-m+1)$.

Завдання 19. У студента є 3 лабораторні по C++ і 2 – по Java, які потрібно захистити. Щодня протягом 5 днів підряд він захищає по одній лабораторній. Скількома способами він може це зробити?

$$P(5;3,2) = \frac{5!}{3!\cdot 2!}.$$

Завдання 20. З групи у 15 чоловік потрібно відібрати бригаду, в яку повинно входити менше 5 чоловік. Скільки є варіантів вибору?

Підрахуємо число сприятливих комбінацій вибору, тобто складемо варіанти бригад з 1, 2, 3, 4 чоловік. Їх кількість дорівнює:

$$C^{1}_{15}+C^{2}_{15}+C^{3}_{15}+C^{4}_{15} = 15+105+455+1365 = 1940.$$

Завдання 21. Написати розкладання бінома Ньютона *(12x-8)³*.

При *n=3* формула бінома Ньютона має вигляд:

$$(a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} C_3^k \cdot a^{3-k} \cdot b^k = C_3^0 \cdot a^3 \cdot b^0 + C_3^1 \cdot a^2 \cdot b^1 + C_3^2 \cdot a^1 \cdot b^2 + C_3^3 \cdot a^0 \cdot b^3.$$

$$(12x-8)^3 = 1\cdot(12x)^3\cdot 8^0 + 3\cdot(12x)^2\cdot 8^1 + 3\cdot(12x)^1\cdot 8^2 + 1\cdot(12x)^0\cdot 8^3 =$$

$$= 1728x^3 + 3654x^2 + 2304x + 512.$$

Завдання 22. Знайти коефіцієнт при a^3b для бінома $(a+b)^4$.

За формулою бінома Ньютона знаходимо:

$$a^3b = C^{3}_{4} = \frac{4!}{3!1!} = 4.$$

Завдання 23. На потоці факультету КН навчається 100 чоловік. З них 48 знають мову C#, 35 – мову Java і 27 – обидві мови. Скільки чоловік не знають жодної мови?

Результат можна отримати наступним чином.

Нехай *A* – студенти, які знають мову C#;

B – студенти, які знають мову Java;

$A\cap B$ – студенти, які знають обидві мови програмування;

$A\cup B$– студенти, які знають хоча б одну мову програмування.

Тоді $N(A)=48;$

$N(B)=35;$

$N(A\cap B)=27.$

За допомогою формули включення-виключень маємо:

$N(A\cup B)= N(A)+ N(B)- N(A\cap B)= 48 + 35 - 27 = 56.$

Кількість студентів, які не знають жодної мови програмування визначається як $100 - N(A\cup B)= 100 - 56=44.$

Побудуємо діаграму (рис. 9.15), на якій відобразимо прямокутник, який відповідає загальній кількості студентів (100 чол.) і дві пересічні області A та B по 48 та 35 чоловік відповідно (знаючих C# та Java).

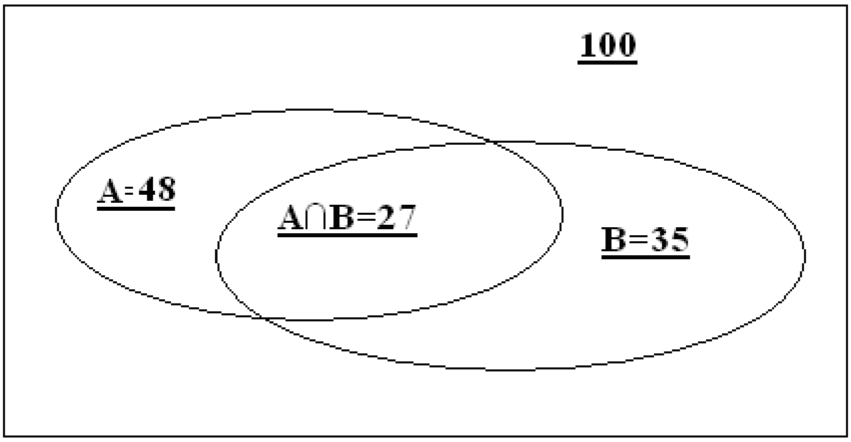


Рисунок 9.15 – Діаграма вирішення задачі

На діаграмі загальна частина цих двох областей відповідає 27 – кількості студентів, які знають обидві мови. Потрібно знайти область прямокутника, що не входить ні в область A, ні в область B, відповідну кількості студентів, що не знають обидві мови програмування.

Очевидно, що $N = 100 - 48 - 35 + 27 = 44$.

До розглянутих мов додамо мову C++. Нехай тепер 20 чоловік знають C++, 12 – C# та C++, 11 – C# та Java, 5 – всі три мови.

Введемо наступні позначення:

A – студенти, які знають мову C#;

B – студенти, які знають мову Java;

C– студенти, які знають мову C++;

$A \cap B$ – студенти, які знають мови програмування C# та Java;

$C \cap B$ – студенти, які знають мови програмування C++ та Java;

$A \cap C$ – студенти, які знають мови програмування C# та C++;

$A \cap B \cap C$ – студенти, які знають три мови програмування;

$A \cup B \cup C$– студенти, які знають хоча б одну мову програмування.

$N(A)=48;$

$N(B)=35;$

$N(C)=20;$

$N(A \cap B)=27.$

$N(C \cap B)=11.$

$N(A \cap C)=12.$

$N(A \cap B \cap C)=5.$

За допомогою формули включення-виключень маємо:

$N(A \cup B \cup C)= N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(C \cap B) - N(A \cap C) + N(A \cap B \cap C)= 48 + 35 + 20 – 27 – 11 – 12 + 5= 58.$

Відповідно до формули включень та виключень кількість чоловік, що не знають жодної з трьох перерахованих мов (але може бути, що знають мову Delphi), дорівнює $N = 100 - N(A \cup B \cup C) = 42$.

Завдання 24. Знайти ряд, що відповідає до продуктивної функції $e^{\frac{x}{2}}$.

Скористаємося експоненціальною продуктивною функцією:

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{a^2 \cdot x^2}{2!} + \ldots + \frac{a^n \cdot x^n}{n!}.$$

Для заданого у завданні ряду:

$$a = \frac{1}{2}$$

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{a^2 \cdot x^2}{2!} + \ldots + \frac{a^n \cdot x^n}{n!} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot x^2}{2!} + \ldots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot x^n}{n!} =$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{(2)^2 \cdot 2!} + \ldots + \frac{x^n}{(2)^n \cdot n!} =$$

Завдання 25. Пара кроликів приносить раз на місяць приплід з двох кроленят (самиці та самця), причому новонароджені кроленята через два місяці після народження вже приносять приплід. Скільки кроликів з'явиться через рік, якщо на початку року була одна пара кроликів?

З умови завдання виходить, що через місяць буде дві пари кроликів.

Через два місяці приплід дасть тільки перша пара кроликів, і вийде 3 пари.

Ще через місяць приплід дадуть і початкова пара кроликів, і пара кроликів що з'явилася два місяці тому. Тому усього буде 5 пар кроликів.

Позначимо через $F(n)$ кількість пар кроликів після закінчення n місяців з початку року. Через $n\text{-}1$ місяців будуть ці $F(n)$ пар і ще стільки новонароджених пар кроликів, скільки було у кінці місяця $n\text{-}1$, тобто ще $F(n\text{-}1)$ пар кроликів. Іншими словами, має місце рекурентне співвідношення

$F(n+1) = F(n) + F(n-1)$

Оскільки, з умови, $F(0) = 1$ та $F(1) = 2$, то послідовно знаходимо

$F(2) = 2+1=3$,

$F(3) ==3+2=5$,

$F(4) = 5+3=8$,

…

$F(12) = 377$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Комп'ютерна дискретна математика: Підручник / Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. – Харків: «Компанія СМІТ», 2004. – 480 с.

2. Компьютерная дискретная математика: Учебник / Бондаренко М.Ф., Белоус Н.В., Руткас А.Г. – Харьков: «Компания СМИТ», 2004. – 480 с.

3. Оре О. Теория графов. 1-е изд. – М.: Наука, 1980. – 408 с.

4. Андерсон Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003.-960 с : ил. – Парал. тит. англ.

5. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. – М.: Энергия, 1980. – 342 с.

6. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. – Киев: Техника, 1977. – 766 с.

7. Новиков Ф.А., Дискретная математика для программистов. – СПб: Питер, 2000. – 304 с.

8. Харари Ф. Теория графов / пер. с англ. и предисл. В.П. Козирева. Под ред. Г.П. Гаврилова. Изд. 2-е. – М: Едиториал УРСС, 2003. – 296 с.

9. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969. – 328 с.

10. Методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни «Комп'ютерна дискретна математика» для студентів усіх форм навчання напрямку 0804 – Комп'ютерні науки спеціальностей 8.080402 – Інформаційні технології проектування, 8.080404 – Інтелектуальні системи прийняття рішень, 8.080403 – Програмне забезпечення автоматизованих систем, 8.080401 – Інформаційні управляючі системи та технології /Упоряд.: Н.В. Білоус, І. В. Куцевич, І.Ю. Шубін – Харків: ХНУРЕ, 2007. – 56 с.

11. Методичні вказівки до лабораторних роботи з дисципліни «Комп'ютерна дискретна математика» для студентів усіх форм навчання напрямку 0804 – Комп'ютерні науки спеціальностей 8.080402 – Інформаційні технології проектування, 8.080404 – Інтелектуальні системи прийняття рішень, 8.080403 – Програмне забезпечення автоматизованих систем, 8.080401 – Інформаційні управляючі системи та технології /Упоряд.: Н.В. Білоус, І. В. Куцевич – Харків: ХНУРЕ, 2007. – 28 с.

12. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Комп'ютерна дискретна математика» для студентів усіх форм навчання напрямку 0804 – Комп'ютерні науки спеціальностей 8.080402 – Інформаційні технології проектування, 8.080404 – Інтелектуальні системи прийняття рішень, 8.080403 – Програмне забезпечення автоматизованих систем, 8.080401 – Інформаційні управляючі системи та технології /Упоряд.: Н.В. Білоус, І. В. Куцевич, І.Ю. Шубін – Харків: ХНУРЕ, 2007. – 80 с.

13. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Шубін І.Ю. Збірник тестових завдань з дискретної математики: Навч. посібник. – Харків: ХТУРЕ, 2000. – 156 с.

14. Белоус Н.В., Гетьманова Е.Е., Дударь З.В., Захарченко В.Ф., Красноголовец М.А., Лесная Н.С., Семенец В.В., Стороженко В.А., Харьковская А.А. Тесты. Физика. Математическая логика. – Харьков: ХТУРЭ,

1998. – 152 с.

15. Білоус Н.В., Шубін І.Ю. Конспект лекцій з дисципліни «Основи дискретної математики». Розділ «Комбінаторика». – Харків: ХТУРЕ, 1998. – 40 с.

16. Білоус Н.В., Дудар З.В., Лісна Н.С., Шубін І.Ю. Основи комбінаторного аналізу. Навч. посібник. – Харків: ХТУРЕ, 1999. – 96 с.

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи з дисципліни

«КОМП'ЮТЕРНА ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА»

для студентів усіх форм навчання напрямку

6.050103 – Програмна інженерія

Упорядники: БІЛОУС Наталія Валентинівна
КУЦЕВИЧ Ірина Віталіївна
РАЗІВІЛОВА Тамара Анатоліївна

Відповідальний випусковий З.В. Дудар

Редактор Б.П. Косіковська

План 2010, поз.16

Підп. до друку 29.01.10 Формат 60×84 1/16. Спосіб друку – ризографія.
Умов.друк.арк. Облік. вид.арк. Тираж 40 прим.
Зам. № 1-16 Ціна договірна.

ХНУРЕ. Україна. 61166, Харків, просп. Леніна, 14

Віддруковано в навчально-науковому
видавничо-поліграфічному центрі ХНУРЕ
61166, Харків, просп. Леніна, 14