ВМ-1. Лекція 3 за 02.10.20.

Лекцію 3 переписати в зошит для конспекту лекцій з ВМ-1 (ЛА-АГ).

Обов'язково на кожній сторінці конспекту напишіть у верхньому правому куті сторінки ваше прізвище та ініциали. Зробіть якісне фото кожної сторінки Л-2 на **Office Lens,** підпишіть файл: Ваше прізвище. Л-3, наприклад, Іванов. Л -3.**pdf ,** розмістити на Google диску групи в вашій **особистій папці Лекції** до понеділка 05.10.20. Не забувайте при переписуванні написати, як заголовок , **Лекція 2. Дії над матрицями. 02.10.20,** та переписувати назви розділів лекції, виділені в тексті блакитним кольором.

Лекція 3. **Ранг матриці. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.** 02.10.20.

3.1. Математична символіка.

Для скорочення і уточнення математичних записів використовують логічну символіку.

1. *Символ існування:* $\exists$ (перевернута перша буква англійського слова Exist) відповідає словам «*існує*», «*знайдеться*». Вираз «існує *x* такий, що виконано *A*(*x*)» скорочено записують як $\exists x: A(x)$.

2. *Символ спільності:* $\forall$ (перевернута перша буква англійського слова All) відповідає словам «для будь-якого», «для всіх», «для кожного». Вираз «для будь-якого *x* виконано *A*(*x*)» скорочено записують як $\forall x$: $A(x)$.

3. *Символ слідування*: $\Rightarrow$ Замість виразів «з *A* випливає *B* », «якщо *A*, то *B* » пишуть $A \Rightarrow B$. B називають *необхідною умовою* для A, в свою чергу A — *достатня умова* для B.

4. *Символ еквівалентності (рівносильності):* $\Leftrightarrow$ Якщо одночасно $A \Rightarrow B$ та $B \Rightarrow A$, то пишуть $A \Leftrightarrow B$, та читають «для того щоб A *необхідно і достатньо* щоб B», або «A тоді і тільки тоді, коли B» та кажуть що B є *необхідною і достатньою умовою для A.*

5. *Символ:* $\stackrel{\text{def}}{=}$ читається «за означенням» (від англійського слова definition).

$$\sum_{n=1}^{k} a_n \stackrel{\text{def}}{=} a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k. \quad \sum - \text{"сигма", знак суми.}$$

6. $\blacksquare$ — кінець доведення.

3.2. Ранг матриці.

Поняття визначника $\exists$ тільки для квадратної матриці, але в прямокутних матрицях теж можна утворити визначники.

Нехай задано матрицю $A = (a_{ij})$ розміру $m \times n$. Виділимо в матриці *A* будь-які *k* рядків та *k* стовпців, де *k* — число, не більше чисел m і n, тобто $1 \le k \le \min(m, n)$.

Означення. *Визначник* k − го порядку, утворений з елементів, що стоять на перетині виділених k рядків і k стовпців, називається *мінором k-го порядку матриці A* і позначається M_k.

Приклад 1. Розглянемо матрицю A розміру 3× 4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Обчислимо деякі її відмінні від нуля мінори. В матриці A $\exists$ мінор 1-го порядку, наприклад, $M_1 = |1| = 1 \neq 0$, $\exists$ мінор 2-го порядку, наприклад, $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 10 = -3 \neq 0$. Але всі мінори (визначники) 3-го порядку $M_3 = 0$, бо містять рядок нулів. Отже найбільший з порядків відмінних від нуля мінорів матриці A дорівнює 2. ■

Якщо в матриці A існує хоча б один мінор порядку r не рівний нулю $M_r \neq 0$, а *всі* мінори вищих порядків дорівнюють нулю $M_k = 0, \forall k > r$, то кажуть, що *ранг матриці A* дорівнює r і позначають $rangA = r$.
В прикладі 1 $rangA = 2$.
Означення. Найбільший з порядків відмінних від нуля мінорів матриці A називається *рангом матриці A* та позначається $rangA$.
Ранг нульової матриці $\left(\forall\ a_{ij} = 0\right)$ вважають рівним нулю.
З означення випливає, що ранг існує для будь-якої матриці $A_{m \times n}$, причому $0 \leq rangA \leq \min(m,n)$, де $\min(m,n)$ найменше з чисел m та n.

Приклад 2. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \exists\ M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \forall\ M_4 = 0 \Rightarrow rangA = 3.\ ■$$

Обчислення рангу матриці методом Гауса (елементарних перетворень).

Елементарними перетвореннями матриці називаються:
1) Переставлення місцями двох рядків (стовпців);
2) Множення всіх елементів деякого рядка (стовпця) на число $\lambda \neq 0$.
3) Додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне і те саме число λ.

Теорема. При елементарних перетвореннях *ранг матриці не змінюється.*

Означення. Матриця B, отримана з матриці A за допомогою елементарних перетворень називається *еквівалентною матриці A* і позначається $A \sim B$.

При обчисленні рангу матриці A методом Гауса (Лекція 1) робимо в кожному стовпці за допомогою елементарних перетворень рівними нулю всі елементи матриці, розташовані нижче діагонального. Важливо перевіряти на кожному кроці що ведучий *діагональний елемент $a_{ii} \neq 0$*.

Отримаємо *еквівалентну матриці* A матрицю B *східчастого (або трапецієподібного) вигляду,* у якої в лівому верхньому куті розташована квадратна матриця $r-$го порядку, всі елементи якої нижче від головної діагоналі дорівнюють нулю, а рядки нижче $r-$го рядка нульові або відсутні.

Визначник квадратної матриці $r-$го порядку, тобто мінор $r-$го порядку $M_r = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{rr} \neq 0$, а *всі* мінори вищих порядків дорівнюють нулю, бо містять рядок нулів. Отже $rangA = rangB = r$.

Зауваження. Ранг східчастої матриці дорівнює кількості ненульових рядків.

Приклад 3. Знайти ранг матриці методом Гауса.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & 1 & 5 \\ 15 & -5 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_{11} = 9 \neq 0 \\ \overleftarrow{a}_2 \to 3\overleftarrow{a}_2 - 2\overleftarrow{a}_1 \\ \overleftarrow{a}_3 \to 3\overleftarrow{a}_3 - 5\overleftarrow{a}_1 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 9 & -3 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -9 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -9 & 7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} a_{11} = 0 \\ \vec{a}_2 \leftrightarrow \vec{a}_3 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 9 & 5 & -3 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -9 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -9 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} a_{22} = -1 \neq 0 \\ \overleftarrow{a}_3 \to \overleftarrow{a}_3 - \overleftarrow{a}_2 \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} 9 & 0 & -3 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

В отриманій матриці B існує мінор $M_2 = \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 9 \cdot (-1) = -9 \neq 0, \forall M_3 = 0,$ отже $rangB = 2 \Rightarrow rangA = rangB = 2.$ ■

Нехай $rangA = r > 0$. Будь який відмінний від нуля мінор M_r називається *базисним мінором,* а рядки і стовпці, що утворюють цей мінор, називають *базисними рядками* і *стовпцями*.

Теорема. Базисні стовпці (рядки) матриці *A* лінійно незалежні. Всі інші стовпці (рядки) матриці *A* є лінійною комбінацією її базисних стовпців (рядків).

3.3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні поняття.

Переписати далі з файлу Posibnyk LA+AG.pdf: стр. 34-35. **4.1. Основні поняття.**

На стр. 35 замість **Означення 4.1** *пишіть* **Означення. … . Означення 4.4** *пишіть* **Означення.**