ІА-41, ІА-42. Домашня робота №1.

(Переписати в зошит по практичним заняттям).

Обчислити границі. ($n\in N$, $n\to\infty \Leftrightarrow n\to+\infty$)

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+3n^2}{15n^2+7n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$ [виносимо n в найвищому степені в чисельнику та знаменнику за дужки]

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\frac{2}{n^2}+3\right)}{n^2\left(15+\frac{7}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\underbrace{\frac{2}{n^2}}_{\to 0}+3}{15+\underbrace{\frac{7}{n}}_{\to 0}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^2+1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1.$$

3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{(2n+1)(3n+2)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n\cdot n\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}}{\left(2+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\right)\left(3+\underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}\right)} = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}.$$

4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\,(2n)!}{(2n+2)!\;n!} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left[\begin{aligned}&(n+1)! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n(n+1) = n!\,(n+1)\\ &(2n+2)! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n)(2n+1)(2n+2) =\\ &\quad = (2n)!\,(2n+1)(2n+2)\end{aligned}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,(n+1)(2n)!}{(2n)!\,(2n+1)(2n+2)\cdot n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\right)}{n\cdot n\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot 2\cdot 2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n} = 0.$$

5) $$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+3}-n\right) = \left(\infty(\infty-\infty)\right) =$$

$=$ [для розкриття невизначеності $(\infty-\infty)$ домножимо та поділимо на $(\sqrt{n^2+3}+n)$] $=$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3}+n\right)}{\sqrt{n^2+3}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(n^2+3-n^2\right)}{\sqrt{n^2+3}+n} =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3}+n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$ [виносимо в знаменнику n в найвищому степені за дужки] $=$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+1\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{3}{n^2}}_{\to 0}}+1} = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}.$$

6) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right) = \left(\infty(\infty-\infty)\right) =$$

$=$ [для розкриття невизначеності $(\infty-\infty)$ домножимо та поділимо на $(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})$] $=$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\,(n+2-n)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$ [виносимо в знаменнику $\sqrt{n}$ за дужки]

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}}+1} = \frac{2}{1+1} =$$

Друга визначна границя: (1^∞)

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

В задачах на числові ряди 2-га визначна границя часто зустрічається в такому вигляді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

7) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)(n+1)^n}{(2n+5)\,n^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+5}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\cdot 1^\infty\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n(3+\frac{1}{n})}{n(2+\frac{5}{n})}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{2+\frac{5}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot e = \frac{3e}{2}.$$

Правило розкриття невизначеності 1^∞.

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} u(n) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} v(n) = \infty$ (або $+\infty$ чи $(-\infty)$),

тоді границя

$\lim\limits_{n\to\infty} u(n)^{v(n)}$ є невизначеністю (1^∞).

$\lim\limits_{n\to\infty} u^v$ (1^∞)

Для обчислення границі $\lim\limits_{n\to\infty} u^v$ використовуємо правило:

$$1^\infty: \boxed{\lim_{n\to\infty} u^v = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(u-1)v}}$$

8) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^n = \left[1^\infty: \lim_{n\to\infty} u^v = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(u-1)v}\right] =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+3}-1\right)n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-n-3}{n+3}\right)n} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n}{n+3}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n}{n(1+\frac{3}{n})}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2}{1+\frac{3}{n}}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

9) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{4n} = \left[1^\infty: \lim_{n\to\infty} u^v = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(u-1)v}\right] =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+3}-1\right)\cdot 4n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1-2n-3}{2n+3}\right)4n} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2\cdot 4n}{2n+3}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-8n}{n(2+\frac{3}{n})}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-8}{2+\frac{3}{n}}} = e^{-4} = \frac{1}{e^4}$$

При обчисленні наступних границь треба використовувати такі відомі границі показникової функції.

Нехай $q\in R$, $q\neq\pm 1$, тоді

а) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$, коли $q\in(-1;1) \Leftrightarrow \lvert q\rvert<1$
б) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, коли $q>1$, $q\in R$
в) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \infty$, коли $q<-1$, $q\in R$

Приклади: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{5}\right)^n=0$; $\lim\limits_{n\to\infty}2^n=+\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty}(-3)^n=\infty$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{3}\right)^n=+\infty$.

10) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{2n-3}\right)^n=\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{+\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left(3+\frac{1}{n}\right)}{n\left(2-\frac{3}{n}\right)}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}{2-\underset{\to 0}{\frac{3}{n}}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=\left[\begin{array}{l}q=\frac{3}{2}>1\\ \lim\limits_{n\to\infty}q^n=+\infty,\ q>1\end{array}\right]$$

$=+\infty$. ∎

11) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-5}\right)^n=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{+\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(3-\frac{5}{n}\right)}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}{3-\underset{\to 0}{\frac{5}{n}}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\left[\begin{array}{l}q=\frac{2}{3};\ q\in(-1;1)\\ \lim\limits_{n\to\infty}q^n=0,\ q\in(-1;1)\end{array}\right]$$

$=0$. ∎

Застосування еквівалентних нескінченно малих функцій до обчислення границь.

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha(n)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_1(n)=0$ дві н.м.ф.. Вони називаються еквівалентними якщо

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha(n)}{\alpha_1(n)}=\left(\frac{0}{0}\right)=1} \Leftrightarrow \alpha(n)\sim\alpha_1(n),\ n\to\infty$$

Теорема. Нехай $\alpha(n)\sim\alpha_1(n)$ та $\beta(n)\sim\beta_1(n)$, $n\to\infty$, тоді

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha(n)}{\beta(n)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_1(n)}{\beta_1(n)}}$$

Таблиця еквівалентних н.м.ф.

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty}u(n)=0$, тобто $u\to0$ коли $n\to\infty$.

$\sin u\sim u,\ u\to0$	$e^u-1\sim u,\ u\to0$
$\operatorname{tg}u\sim u,\ u\to0$	$a^u-1\sim u\ln a,\ u\to0$
$1-\cos u\sim\frac{u^2}{2},\ u\to0$	$\ln(1+u)\sim u,\ u\to0$
$\arcsin u\sim u,\ u\to0$	$\sqrt[n]{1+u}-1\sim\frac{1}{n}u,\ u\to0$
$\operatorname{arctg}u\sim u,\ u\to0$	

12) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+3}\sin\frac{1}{n}=\left[\begin{array}{l}\sin u\sim u,\ u\to0\\ \sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n},\ n\to\infty\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+3}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\underset{\to0}{\frac{3}{n}}}=1.\ ∎$$

13) $$\lim_{n\to\infty}3^n\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{5^n}=\left[\begin{array}{l}u=\frac{1}{5^n}\to0,\ n\to\infty;\ \operatorname{tg}u\sim u,\ u\to0.\\ \operatorname{tg}\frac{1}{5^n}\sim\frac{1}{5^n},\ n\to\infty\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}3^n\cdot\frac{1}{5^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n=\left[\begin{array}{l}q=\frac{3}{5};\ |q|<1\\ \lim\limits_{n\to\infty}q^n=0,\end{array}\right]=0.$$

14) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2+1)\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)=(\infty\cdot 0)=\left[\begin{matrix}1-\cos u\sim\frac{u^2}{2}, u\to 0\\ 1-\cos\frac{1}{n}\sim\frac{1}{2n^2}, n\to\infty\end{matrix}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+1)\cdot\frac{1}{2n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{2n^2}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}\to 0}{2}=\frac{1}{2}.$ $\blacksquare$

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{e}-1\right)(n+2)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)(n+2)=(0\cdot\infty)=$

$=\left[\begin{matrix}e^u-1\sim u, u\to 0\\ e^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}, n\to\infty\end{matrix}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n}=1.$ $\blacksquare$

16) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\sqrt[n]{3}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n\left(3^{\frac{1}{n}}-1\right)=(\infty\cdot 0)=$

$=\left[\begin{matrix}a^u-1\sim u\ln a, u\to 0\\ 3^u-1\sim u\ln 3, u\to 0, \quad 3^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}\ln 3, n\to\infty\end{matrix}\right]=$

$=\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n}\ln 3=\ln 3.$ $\blacksquare$

17) $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=(\infty\cdot 0)=\left[\begin{matrix}\ln(1+u)\sim u, u\to 0\\ \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\sim\frac{-1}{n}, n\to\infty\end{matrix}\right]=$

$=\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{-1}{n}\right)=-1.$ $\blacksquare$

18) $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\ln\frac{n}{n+1}=(\infty\cdot 0)=\left[\ln\frac{n}{n+1}=\ln\frac{n+1-1}{n+1}=\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\left[\begin{matrix}\ln(1+u)\sim u, u\to 0\\ \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\sim\frac{-1}{n+1}, n\to\infty\end{matrix}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\cdot\left(\frac{-1}{n+1}\right)=-1.$ $\blacksquare$

19) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\ln(n^2+2)-\ln(n^2+1)\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{n^2+2}{n^2+1}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{n^2+1+1}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)=\left[\ln(1+u)\sim u, u\to 0\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0.$ $\blacksquare$

20) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}-1\right)=(\infty\cdot 0)=\left[\begin{matrix}\sqrt[n]{1+u}-1\sim\frac{1}{n}\cdot u, u\to 0\\ \sqrt[4]{1+\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n}, n\to\infty\end{matrix}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{4n}=\frac{1}{4}.$ $\blacksquare$

Правило Лопіталя.

Для невизначеності $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ границя відношення двох функцій дорівнює границі відношення їх похідних

$$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f'(n)}{g'(n)}; \quad \left(\frac{0}{0}\right) \text{ або } \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

21) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[5]{n}}{\ln n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[5]{n})'}{(\ln n)'}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{5}n^{\frac{1}{5}-1}}{\frac{1}{n}}=$

$=\frac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{-\frac{4}{5}}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^{\frac{4}{5}}}=\frac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[5]{n}=+\infty.$ $\blacksquare$

22) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n+n}{n^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left[\begin{matrix}\text{Правило}\\ \text{Лопіталя}\end{matrix}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(5^n+n)'}{(n^3)'}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n\ln 5+1}{3n^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left[\begin{matrix}\text{Правило}\\ \text{Лопіталя}\end{matrix}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n\ln 5\cdot\ln 5}{6n}=$

$=\left[\begin{matrix}\text{Правило}\\ \text{Лопіталя}\end{matrix}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n\ln^3 5}{6}=+\infty.$ $\blacksquare$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}5^n=+\infty\right)$