ВМ-3. Завдання до Лекції 1 за 09.09.22.

Назва кредитного модуля, який ми вивчаємо дистанційно в цьому семестрі «Вища математика. Частина 3. Ряди. Операційне числення». **Зміст кредитного модуля**:

Розділ 1.Ряди.

Тема 1.1. Числові ряди. Тема 1.2. Функціональні ряди. Тема 1.3. Ряди Фур'є та інтеграл Фур'є.

Розділ 2.Функції комплексної змінної та операційне числення.

Тема.2.1. Функції комплексної змінної. Тема 2.2. Операційне числення.

При навчанні в умовах воєнного стану *можна не переписувати* Л-1 в зошит для конспекту лекцій з ВМ-3. ***Прочитайте та вивчіть лекцію на парі***, яка за розкладом в п'ятницю о 8:30. Якщо такої можливості немає, то зробіть це в зручний для вас час. Реалізуйте своє право на якісну освіту незважаючи на умови воєнного стану.

За бажанням, якщо ви краще розумієте матеріал лекції при переписуванні, то перепишить Л-1 в конспект лекцій. Завантажте файл з фото Л-1 на гугл диску групи з ВМ-3 у вашій папці Лекції в зручний для вас час.

Тема 1.1. Числові ряди.

Лекція 1 за 09.09.22. Числові ряди.

Основні поняття.

Нехай задано числову послідовність $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$, вона має безліч членів.

Означення. Вираз

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

називається *числовим рядом (рядом).* Числа $a_1, a_2, \cdots, a_n$ – *членами ряду*, a_n – n-*м (загальним) членом* ряду.

Розглянемо ряд, який називають *гармонічним*.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

$$a_n = \frac{1}{n} - \text{ загальний член ряду,}$$

$$a_1 = 1 - \text{перший член ряду, } a_2 = \frac{1}{2} - \text{ другий , } a_3 = \frac{1}{2} - \text{ третій.}$$

Уточнимо, як розуміють «додавання» нескінченної кількості членів ряду.

Суму n перших членів ряду називають *n -ю частинною сумою* ряду і позначають

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Ряд

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k,$$

який одержують відкиданням з ряду (1) *n* його перших *n* членів, називають *n -м залишком ряду.*

Розглянемо послідовність $\{S_n\} = \{S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots\}$ частинних сум ряду

$$S_1 = a_1, \ S_2 = a_1 + a_2, \ S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \cdots, \ S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Означення. Якщо існує скінченна границя послідовності частинних сум

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S,$$

то ряд (1) називається *збіжним*, а границю S називають *сумою ряду* і пишуть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Якщо послідовність $\{S_n\}$ скінченної границі не має, то ряд (1) називають *розбіжним*.

Отже, для *збіжних* числових рядів поняття суми вводиться шляхом граничного переходу, для *розбіжних* рядів поняття суми ряду не визначено.

Ряд геометричної прогресії.

Це такий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots,$$

де a — *перший член*, q — *знаменник геометричної прогресії*.

Формула суми ряду геометричної прогресії

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & |q| < 1, \\ \text{розбіжний}, & |q| \geq 1. \end{cases}$$

Це дуже важлива формула для теорії числових рядів та розв’язку задач, яку треба вивчити як таблицю похідних та інтегралів.

Ряд *геометричної прогресії* також називають *геометричним* рядом, а формулу суми записують також так

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^{n} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & |q| < 1, \\ \text{розбіжний}, & |q| \geq 1. \end{cases}$$

Доведення. Застосуємо формулу суми n перших членів геометричної прогресії

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}, \qquad |q| \neq 1$$

Розглянемо можливі випадки:

1) якщо $|q| < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \left[\lim_{n\to\infty} q_n = 0, |q| < 1\right] = \frac{a}{1-q} = S.$$

За означенням ряд *збіжний* і має суму $S = \frac{a}{1-q}$.

2) якщо $|q| > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \left[\lim_{n\to\infty} q_n = \infty, |q| > 1\right] = \infty.$$

За означенням ряд *розбіжний*.

Доведення для $q = 1$ та $q = -1$ можна подивитись на стр. 7-8 з файлу KonspektBM3.pdf.

Властивості збіжних рядів.

1. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний і має суму S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n$, де C — стала, також збіжний і має суму CS:

$$\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n = C\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

тобто сталий множник можна віносити за знак суми.

2. Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = T$ збіжні і мають суми S та T, то збіжними є також ряди $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ і суми їх дорівнюють $S \pm T$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

3. Відкидання або приєднання до ряду *скінченної кількості* членів ряду не впливає на його збіжність (розбіжність).

Зауважимо, що після вказаних дій сума ряду може змінитись.

Необхідна умова збіжності ряду.

Теорема. (необхідна умова збіжності ряду). Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Доведення. Оскільки ряд збіжний, то за означенням існує скінченна границя S послідовності частинних сум

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S.$$

Розглянемо частинну суму ряду

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n \Leftrightarrow S_n = S_{n-1} + a_n \Rightarrow \boldsymbol{a_n = S_n - S_{n-1}}.$$

Отже

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Наслідок. (достатня умова розбіжності ряду). Якщо

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0,$$

то ряд розбіжний.

З теореми випливає, що для всіх збіжних рядів $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, тому якщо $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд не є збіжним, тобто ряд розбіжний.

Приклад 1. Дослідити ряд на збіжність $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+3}$.

Розв'язання. Знаходимо

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(2+\frac{3}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

За достатньою умовою розбіжності ряд розбіжний.

Відповідь: ряд розбіжний.

Зауваження. Якщо $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то висновок про збіжність ряду зробити не можна. Ця умова виконується для всіх збіжних рядів, але існує безліч розбіжних рядів, для яких вона теж виконується. Наприклад, *гармонічний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *розбіжний* (Лекція 2), але

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Для дослідження гармонічного ряду на збіжність треба застосувати інші теореми, які розглянемо на Л-2. ■

Зауваження до Л-1. При розв'язку задач по темам числові та функціональні ряди основні проблеми виникають при обчисленні границі числової послідовності. Тому, як додаток до Л-1 прошу студентів гр. ІА-12,13 виконати СР-1. Границі. Це допоможе вам швидко і без помилок виконувати ДКР по цим темам.

Завдання до **СР-1**.

Переписати в зошит по практичним заняттям. все, тобто стр. 1-8 з файлу granitsi.pdf.

Тільки на стр. 1 замість*: ІА-41, ІА-42. Домашня робота №1* напишіть .

СР-1. Границі.

Студента гр. ІА-... .

Ваше прізвище та ініціали.

Зробіть фото СР-1, як один pdf файл. Підпишіть файл так: СР-1. Ваше прізвище.

Розмістіть файл на Google диску у Вашій особистій папці ДКР, яка є в папці ВМ3 групи до 15.09.22.