نکته ها:

۱. با استفاده از این رابطه مقدار نیرو به دست می آید. بنابراین علامت بارها را در آن منظور نمی کنیم از علامت بارها فقط برای تعیین جهت نیرو استفاده می کنیم

۲- معمولاً بار برحسب میکروکولن و یا نانوکولن و فاصله برحسب سانتی متر و یا میلی متر داده می شود. برای تبدیل آن ها از ضرایب زیر استفاده می کنیم.

$cm \xrightarrow{\times 10^{-2}} m$

$mm \xrightarrow{\times 10^{-3}} m$

$\mu C \xrightarrow{\times 10^{-6}} C$

$nC \xrightarrow{\times 10^{-9}} C$

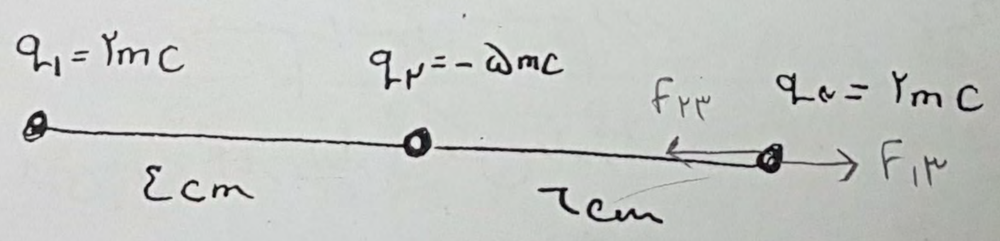
سئوالات فصل اول بار الکتریکی

۱- ۲ بار $q_1 = 5\mu C$ و $q_2 = -8\mu C$ در فاصله ی $10\,cm$ از هم قرار دارند. نیرویی که دو بار بر یکدیگر وارد می کنند را به دست آورید.

$q_1 = 5\mu C \qquad q_2 = -8\mu C \qquad r = 10\,cm = 0/1\,m$

$$F_{\text{جاذبه}} = K\frac{q_1 q_2}{r^2} = 9\times10^9\left(\frac{N.m^2}{C^2}\right)\times\frac{5\times10^{-6}(C)\times 8\times10^{-6}(C)}{(0/1\,m)^2} = 360\times10^{-1} = 36\,N$$

۲- سه بار نقطه ای مطابق شکل زیر در جای خود ثابت نگه داشته شده اند. برآیند نیروهای وارد بر q_3 را به دست آورید.

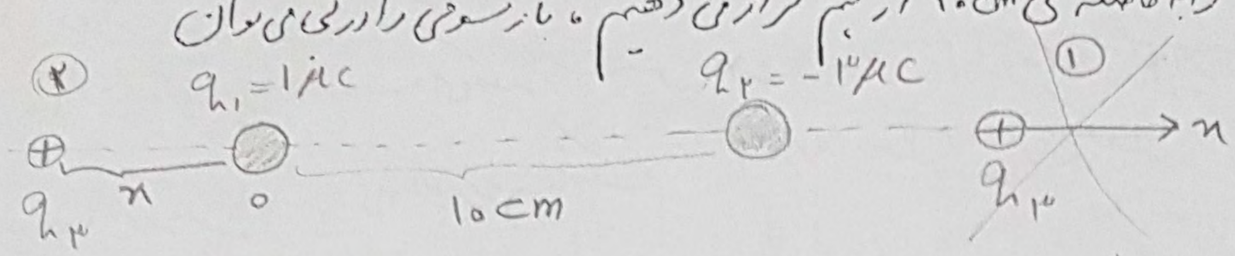


$$F_{\text{جاذبه}\,13} = \frac{K q_1 q_2}{r_{13}^2} = 9\times10^9\,\frac{N.m^2}{C^2}\,\frac{2\times10^{-3}(C)\times 2\times10^{-3}(C)}{(0/1\,m)^2} = 36\times10^5\,(N)$$

$$F_{\text{جاذبه}\,23} = \frac{K q_2 q_3}{r_{23}^2} = 9\times10^9\left(\frac{N.m^2}{C^2}\right)\frac{5\times10^{-3}(C)\times 2\times10^{-3}(C)}{(0/04\,m)^2} = \frac{1}{4}\times10^8 = 25\times10^6\,(N)$$

$$F_T = F_{13} + F_{23} \Rightarrow F_T = F_{23} - F_{13} = 214\times10^5\,(N)$$

۳- دو بار ثابت $q_1 = 1\mu C$ و $q_2 = -3\mu C$ را به فاصله‌ی 10cm از هم قرار می‌دهیم. بار سومی را در کجا می‌توان قرار داد تا هیچ نیرویی بر آن وارد نشود.



① $F_{13} = k\dfrac{q_1 q_3}{r_{13}^2}$ $\quad q_2 > q_1$

$F_{23} = k\dfrac{q_1 q_3}{r_{23}^2}$ $\quad r_{23} \overset{?}{>} r_{13}$

② $F_{13} = k\dfrac{q_1 q_3}{r_{13}^2}$ $\quad q_2 > q_1$

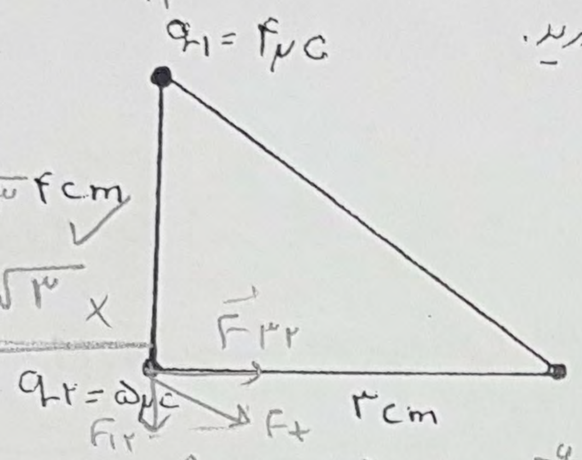
$F_{23} = k\dfrac{q_2 q_3}{r_{23}^2}$ $\quad r_{23} \overset{?}{>} r_{13}$

$F_{13} = F_{23} \Rightarrow \dfrac{k q_1 q_3}{r_{13}^2} = k\dfrac{q_2 q_3}{r_{23}^2} \rightarrow \dfrac{1\mu C}{x^2} = \dfrac{3}{(10+x)^2} \Rightarrow 100 + x^2 + 20x = 3x^2 \rightarrow 2x^2 - 20x - 100 = 0$

$x^2 - 10x - 50 = 0$

$x = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 + 200}}{2} = \dfrac{10 \pm 10\sqrt{3}}{2} \begin{cases} 5 + 5\sqrt{3} \ 8cm \ \checkmark \\ 5 - 5\sqrt{3} \ \times \end{cases}$

مثال ۲ ۴- در شکل زیر برآیند نیروهای وارد بر بار q_2 را به دست آورید.



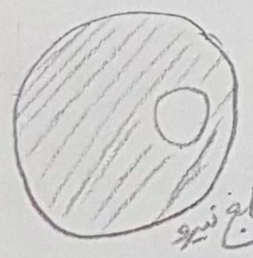
دافعه $F_{12} = k\dfrac{q_1 q_2}{r_{12}^2} = 9\times10^9 \dfrac{Nm^2}{C^2} \dfrac{4\times10^{-6}(C)\times5\times10^{-6}(C)}{(0/04)^2} = \dfrac{450}{4}(N) = 112/5\ N$

جاذبه $F_{32} = k\dfrac{q_3 q_2}{r_{32}^2} = 9\times10^9 \dfrac{N.m^2}{C^2} \dfrac{2\times10^{-6}(C)\times5\times10^{-6}(C)}{(0/03m)^2} = 100(N)$

$\vec{F}_t = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32}$

$F_t = \sqrt{F_{12}^2 + F_{32}^2} = \sqrt{(112/5)^2 + (100)^2} = 150/51\ (N)$

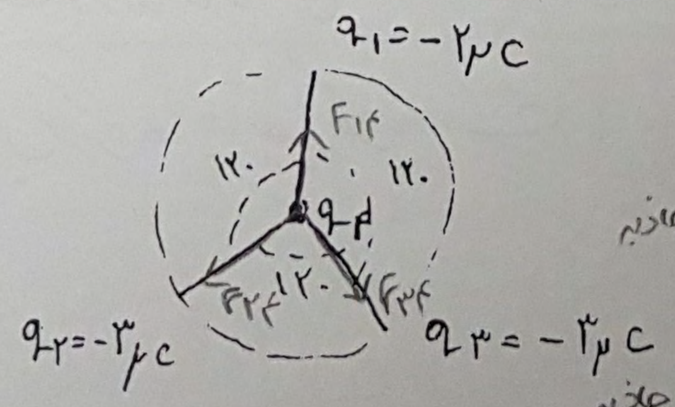
۵- بار الکتریکی Q به دو قسمت q و Q-q تقسیم می‌شود. در صورتی که نیروی دافعه‌ی کولنی (هم‌نام از) میان دو قسمت که به فاصله‌ی معینی (فاصله ثابت) از هم قرار دارند بیشینه باشد رابطه‌ی میان q و Q چیست؟



تابع نیرو $F = \dfrac{k q_1 q_2}{r^2} = \dfrac{k(Q-q)(q)}{r^2} = \dfrac{k}{r^2}(Qq - q^2)$

تعریف پیوان یک تابع $\dfrac{dF}{dq} = 0 \rightarrow \dfrac{k}{r^2}(Q - 2q) = 0 \rightarrow Q = 2q \rightarrow q = \dfrac{Q}{2}$

مثال ۲ و ۴ ۶- سه بار نقطه‌ای مطابق شکل روی دایره‌ای به شعاع 10cm قرار دارند بار q_4 روی مرکز دایره است نیروهای وارد بر این بار را به دست آورید.



$q_4 = +2\mu C$

جاذبه $F_{14} = \dfrac{k q_1 q_4}{r^2} = 3/6\ (N)$

جاذبه $F_{24} = 5/4\ (N)$ $\quad$ جاذبه $F_{34} = 5/4\ N$

$F_{t_{2,3}} = 2F_{24}\cos\left(\dfrac{\theta}{3}\right) = 2\times5/4(N)\times\dfrac{1}{2} = 5/4(N)$

$F_t = F_{t_{2,3}} - F_{14} = 5/4 - 3/6 = 1/8\ (N)$

۷- * دو کره رسانای مشابه که در جایی ثابتند هنگامی که فاصله‌ی بین آن‌ها ۵۰cm است با نیروی الکترواستاتیک ۰/۱۰۸N یکدیگر را جذب می‌کنند. سپس کره‌ها را با سیم نازکی به هم متصل می‌کنیم. هنگامی که سیم برداشته می‌شود کره‌ها همدیگر را با نیروی الکترواستاتیک ۰/۰۳۶ نیوتن دفع می‌کنند. بار اولیه روی کره‌ها چقدر بوده است؟

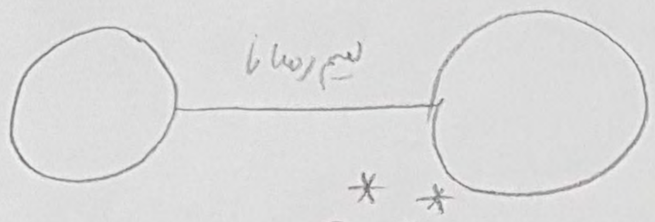
الکترون آزاد

قبل از اتصال: جذب ← یک بار + ، یک بار −

$F = 0/108\ (N)$

بعد از اتصال: دافعه ← هر دو بار هم علامت

$F = 0/036\ N$



قبل از اتصال: $F = \frac{K q_1 q_2}{r^2} = 0/108\ (N)$

$9\times10^9 \left(\frac{N m^2}{C^2}\right) \frac{q_1 q_2}{(0/50 m)^2} = 0/108\ (N) \rightarrow q_1 q_2 = -3\times10^{-12}\ (C)^2$ (جذب)

بعد از اتصال: $F = K \frac{q_1^* q_2^*}{r^2} = 0/036\ (N) \rightarrow 9\times10^9 \left(\frac{N\cdot m^2}{C^2}\right) \frac{q_1^* q_2^*}{(0/50 m)^2} = 0/036\ (N)$

$q_1^* q_2^* = \frac{36\times25\times10^{-2}}{9\times10^{11}} = 10^{-12}\ (C^2) \rightarrow q_1^* q_2^* = 10^{-12}\ (C)$

$q_1^* q_2^* = 10^{-12}\ (C)$

قبل از اتصال $q_t = q_1 + q_2 = q_1^* + q_2^* = 2q_1^* = 2q_2^* \Rightarrow q_1^* = q_2^* = \frac{q_1+q_2}{2}$

۸- * بارهای q_1 و q_2 روی محور x به ترتیب در نقاط $x=-a$ و $x=+a$ قرار دارند.

الف) برای اینکه نیروی الکترواستاتیکی خالص وارد بر بار $+Q$ در نقطه $x=+\frac{a}{2}$ صفر شود، رابطه‌ی بین q_1 و q_2 چگونه است؟

$\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right)^2 = 10^{-12}\ (C) \rightarrow \frac{q_1+q_2}{2} = 10^{-6} \rightarrow q_1+q_2 = 2\times10^{-6}\ (C^2)$

ب) بند الف را برای حالتی که بار $+Q$ در $x=+\frac{3}{2}a$ قرار داشته باشد تکرار کنید.

$q_1 + q_2 = 2\times10^{-6}\ (C^2)$

$q_1 q_2 = -3\times10^{-12}\ (C^2)$

$q_1 + \frac{-3\times10^{-12}}{q_1} = 2\times10^{-6} \rightarrow q_1^2 - 2\times10^{-6} q_1 - 3\times10^{-12} = 0$

$q_1 = \frac{2\times10^{-6} \pm \sqrt{4\times10^{-12} + 12\times10^{-12}}}{2}$

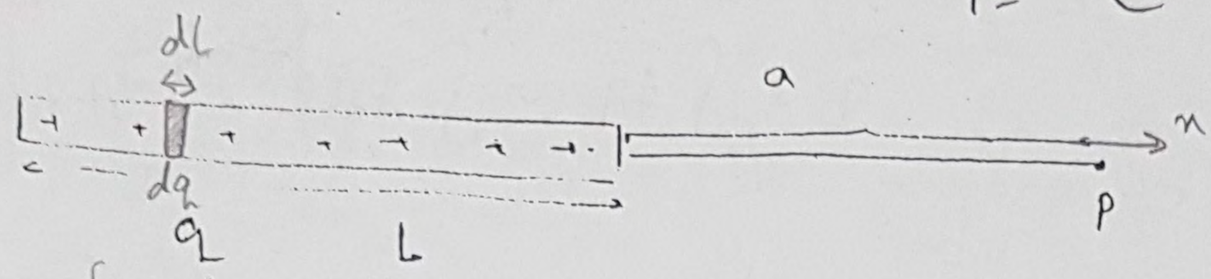
$q_1 = 3\times10^{-6}\ (C)$ ✓

$q_1 = -1\times10^{-6}\ (C)$ ✓

۹- * فاصله‌ی بین دو رسانای فلزی مشابه در مقایسه با قطر آن‌ها خیلی زیاد است. نیروی الکترواستاتیکی که از سوی یکی از کره‌ها بر کره‌ی دیگر وارد می‌شود F است. فرض کنید که کره‌ی سوم مشابه با آن‌ها که دستگیره‌ای عایق داشته و در آغاز خنثی است در ابتدا با یکی از آن‌ها و سپس با کره‌ی دوم تماس پیدا می‌کند و برداشته می‌شود. نیروی بین کره‌ها چه تغییر کرده است؟

مسائل فصل دوم میدان:

مسئله ۱: یک میله‌ی نازک (توزیع بار خطی) رسانا نیست) حامل داریم شدت میدان الکتریکی ناشی از این میله‌ی باردار را که با λ ثابت است q را به طور یکنواخت در طول L توزیع کرده‌ایم را در نقطه‌ی P به دست آورید.



$$E = \frac{kq}{r^2} \Rightarrow dE = k\frac{dq}{r^2}$$

فیزیک تمام: $E = \int dE = \int k\frac{dq}{r^2}$

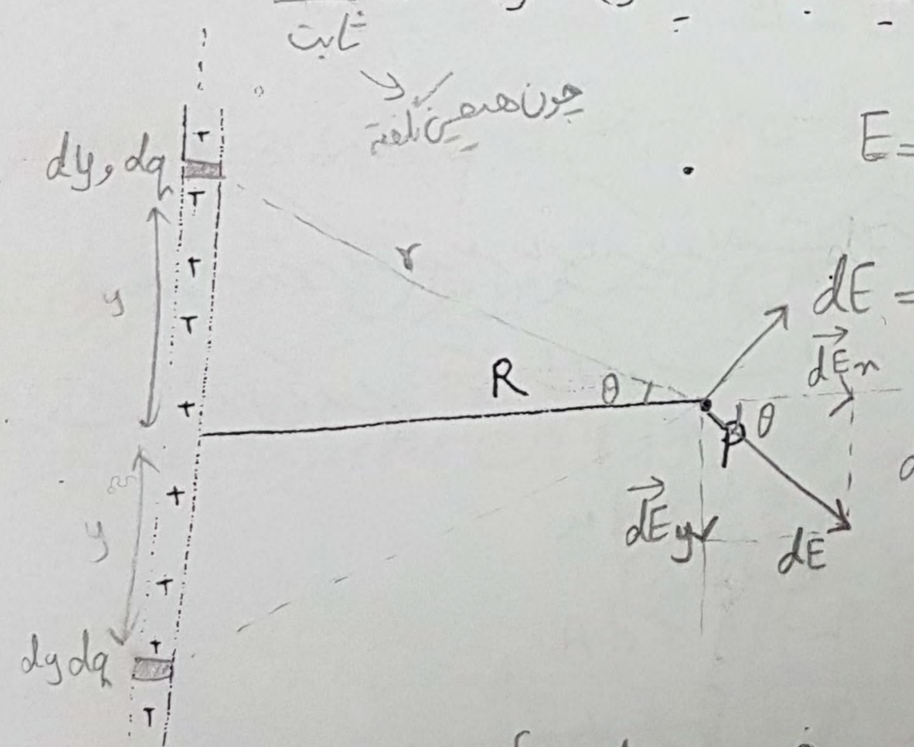
ریاضی: $E = \int k\frac{dq}{r^2}$

$$\lambda = \frac{q}{L} = \frac{dq}{dl} \rightarrow dq = \lambda dl = \lambda dx$$

$$E = \int k\frac{\lambda dx}{x^2} = k\lambda\int_a^{L+a}\frac{dx}{x^2} = k\lambda\left(\frac{-1}{x}\right)\Big|_a^{a+L} = k\lambda\left[\frac{-1}{a+L}+\frac{1}{a}\right]$$

$$= k\lambda\frac{-a+a+L}{a(a+L)} = \frac{k\lambda L}{a(a+L)} = \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 a(a+L)}$$

۲- شدت میدان را در فاصله‌ی R از یک محور باردار (توزیع بار خطی) نهایت بلند که چگالی خطی بار آن λ (ثابت) است به دست آورید.



$$E = k\frac{q}{r^2}$$

$$dE = k\frac{dq}{r^2} \rightarrow \cancel{E = \int dE}$$

برداری است

به ازای هر جزء در بالای مرکز، یک جزء در پایین وجود دارد که yها با هم خنثی و xها با هم تقویت می‌شوند، پس E_y صفر است

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + \cancel{d\vec{E}_y}$$

$$E = E_x + E_y \rightarrow E_x = \int dE_x = \int dE\cos\theta = \int k\frac{dq}{r^2}\cos\theta$$

$$\rightarrow \cancel{E_y = \int dE_y = \int dE\sin\theta} = \int \frac{k\,dq}{r^2}\sin\theta \Rightarrow 0$$

ریاضی: $E_x = \int k\frac{dq}{r^2}\cos\theta$

$$\lambda = \frac{q}{L} = \frac{dq}{dl} \rightarrow dq = \lambda dy \quad , \quad r^2 = R^2 + y^2$$

$$E_x = \int k\frac{\lambda dy}{(R^2+y^2)}\frac{R}{(R^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = k\lambda R\int\frac{dy}{(R^2+y^2)^{3/2}}$$

تغییر متغیر: $tg\theta = \frac{y}{R} \rightarrow y = R\,tg\theta \rightarrow dy = R(1+tg^2\theta)\,d\theta$

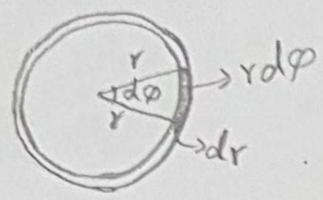
$$E_x = k\lambda R\int\frac{R(1+tg^2\theta)\,d\theta}{(R^2+R^2tg^2\theta)^{3/2}} = \frac{k\lambda}{R}\int\frac{(1+tg^2\theta)\,d\theta}{(1+tg^2)^{\cancel{3/2}\,\frac{1}{2}}} = \frac{k\lambda}{R}\int\frac{d\theta}{\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{k\lambda}{R}\int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}}\cos\theta\,d\theta$$

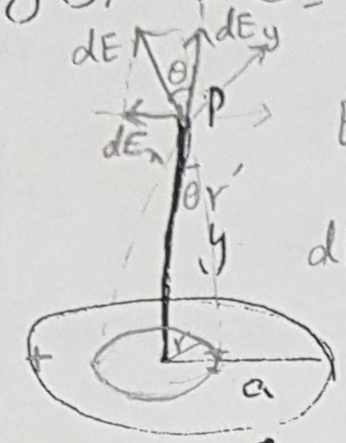
$$E_x = \frac{k\lambda}{R}\left(\sin\theta\Big|_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}}\right) = \frac{k\lambda}{R}(1-(-1)) = \frac{2k\lambda}{R} \qquad E_x = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

جزء صفحه را طوری می‌گیریم که با کوچک و بزرگ‌ترین جزء، کل شکل میدان صفحه‌ی σ پوشش داده شود و حداقل تعداد متغیر را داشته باشیم

۲- قرص باریکی به شعاع a و چگالی بار سطحی σ در نظر بگیرید. شدت میدان در نقطه‌ی y از قرص را در امتداد محور مرکزی آن بیابید.

ثابت چون مقدار زاویه





$$E = k\frac{q}{r^2}$$

$$dE = k\frac{dq}{r'^2} \rightarrow \cancel{E = \int dE}$$

$$\sigma \quad dE = dE_x + dE_y \rightarrow E = \cancel{E_x}^{\,0} + E_y$$

$$\cancel{E_x = \int dE_x} = \int dE \sin\theta = \int k\frac{dq}{r'^2}\sin\theta \rightarrow 0$$

$$E_y = \int dE_y = \int dE\cos\theta = \int k\frac{dq}{r'^2}\cos\theta$$

$$E_y = \int k\frac{dq}{r'^2}\cos\theta$$

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{dq}{dA} \rightarrow dq = \sigma dA = \sigma(r\,dr\,d\varphi) \rightarrow dA = r\,dr\,d\varphi$$

$$A = \iint r\,dr\,d\varphi = \left(\int_0^a r\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) = 2\pi\int_0^a r\,dr = \int_0^a 2\pi r\,dr$$

$$r'^2 = y^2 + r^2$$

روش دوم

$$dq = \sigma(2\pi r\,dr)$$

$$E_y = \int k\frac{\sigma(2\pi r\,dr)}{(y^2+r^2)}\frac{y}{(y^2+r^2)^{\frac{1}{2}}} = \sigma k y 2\pi\int\frac{r\,dr}{(y^2+r^2)^{3/2}}$$

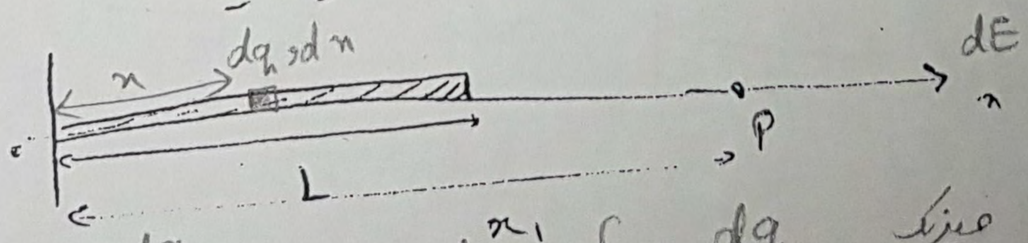
تغییر متغیر $tg\theta = \frac{r}{y} \rightarrow r = y\,tg\theta \rightarrow dr = y(1+tg^2\theta)d\theta \rightarrow E_y = 2\pi\sigma k y\int\frac{y^2 tg\theta(1+tg^2\theta)d\theta}{y^2(1+tg^2\theta)^{3/2}\frac{1}{2}}$

$$= 2\pi\sigma k\int\frac{tg\theta\,d\theta}{(1+tg^2\theta)^{\frac{1}{2}}} \rightarrow E_y = 2\pi\sigma k\int_0^{tg^{-1}(\frac{a}{y})}\sin\theta\,d\theta = 2\pi\sigma k\left[-\cos\theta\right]_0^{tg^{-1}(\frac{a}{y})} = 2\pi\sigma k\left[1-\cos\left(tg^{-1}\frac{a}{y}\right)\right]$$

۴- میله‌ای به طول L روی محور x قرار دارد. باری با چگالی غیریکنواخت $\lambda = \lambda_0 x$ روی میله قرار دارد.

چگالی توزیع بار خطی

میدان الکتریکی را در نقطه‌ی P روی محور x که به فاصله‌ی x_1 از آن قرار دارد، بیابید.



$$E = k\frac{q}{r^2} \rightarrow dE = k\frac{dq}{r^2} \rightarrow E = dE = \int k\frac{dq}{r^2}$$

میزنیک

$$\text{یا}: E = \int k\frac{dq}{r^2} \Big/ \lambda = \frac{q}{x} = \frac{dq}{dx} \rightarrow dq = \lambda\,dx = \lambda_0 x\,dx \Big/ r = x_1 - x$$

$$E = \int k\frac{\lambda_0 x_0\,dx}{(x_1-x)^2} = k\lambda_0\int\frac{x\,dx}{(x_1-x_0)^2}$$

تغییر متغیر: $u = x_1 - x \rightarrow du = -dx$

$$E = k\lambda_0\int\frac{(x_1-u)(-du)}{u^2} = k\lambda_0\int\frac{-x_1du + u\,du}{u^2} = k\lambda_0\left[\int\frac{-x_1du}{u^2} + \int\frac{du}{u}\right]$$

$$E = k\lambda_0\left[-x_1\left(\frac{-1}{u}\right) + \ln u\right] = k\lambda_0\left[\frac{x_1}{x_1-x}\Big|_0^L + \ln(x_1-x)\Big|_0^L\right] = k\lambda_0\left[\left(\frac{x_1}{x_1-L}-1\right) + \left[\ln(x_1-L) - \ln x_1\right]\right]$$

$$E = k\lambda_0\left[\frac{L}{x_1-L} + \ln\left(\frac{x_1-L}{x_1}\right)\right]$$

⑨ الکترون آزاد → رسانا

مشابه → $r_1 = r_2 = r$

فاصله دو کره $d \gg r_1, r_2$

$q_{1} = q_{2} = q$

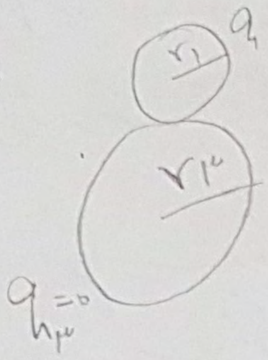
$F_{AC} = ?$

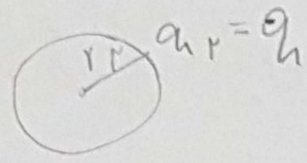
کره سوم خنثی $q_{3} = 0$

$r_{13} = r_1 = r_2 = r$

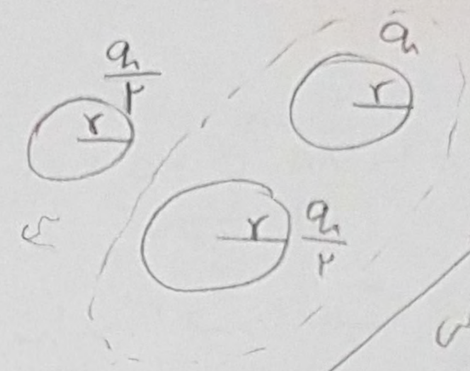
کره سوم مشابه دو کره دیگر

F_{bc} نیروی قبل از اتصال



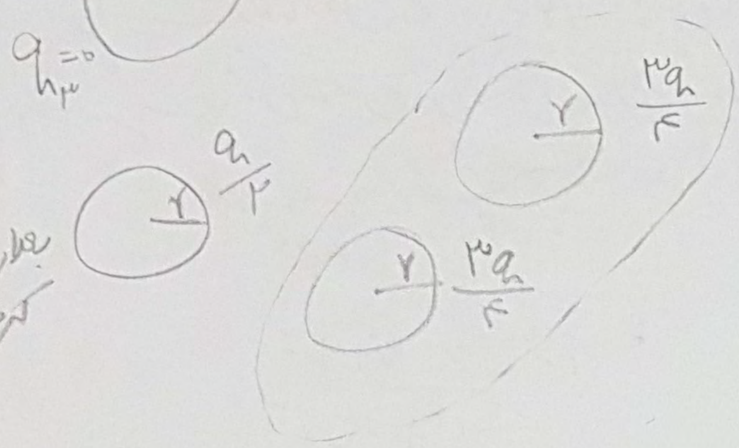


بعد از اتصال به کره اول



$q_{کل} = q + \frac{q}{2} = \frac{3q}{2}$

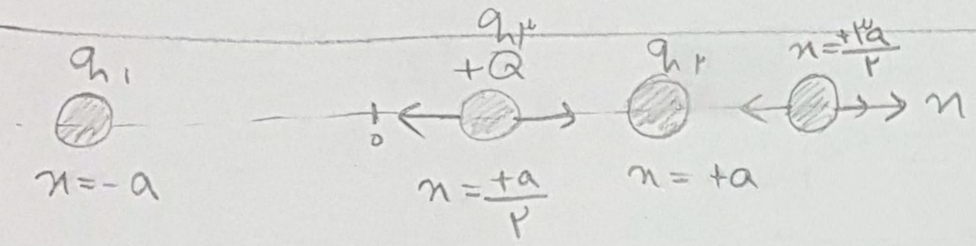
اصل پایستگی بار الکتریکی قبل و بعد از اتصال



$q_t = \frac{3q}{4} + \frac{3q}{4} = \frac{3q}{2}$

بعد از اتصال به کره دوم

⑧



با فرض منفی بودن q_1 و q_2 (در حالت الف بارها باید هم علامت باشند)

$$F_{13} = k\frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} = k\frac{q_1 Q}{\left(\frac{3a}{2}\right)^2} \qquad F_{23} = \frac{k\, q_1 q_3}{r_{23}^2} = \frac{k\, q_2 Q}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

برای صفر شدن برآیند اثر نیروها بر بار q_3 باید

$$F_{23} = F_{13} \Rightarrow \frac{k\, q_1 Q}{\frac{9a^2}{4}} = \frac{k\, q_2 Q}{\frac{a^2}{4}} \longrightarrow q_1 = 9 q_2$$

(در حالت ب بارها باید مختلف العلامه باشند)

$$F_{13} = \frac{k\, q_1 q_3}{r_{13}^2} = k\frac{q_1 Q}{\left(\frac{5a}{2}\right)^2} \qquad F_{23} = k\frac{q_2 q_3}{r_{23}^2} = k\frac{q_2 Q}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

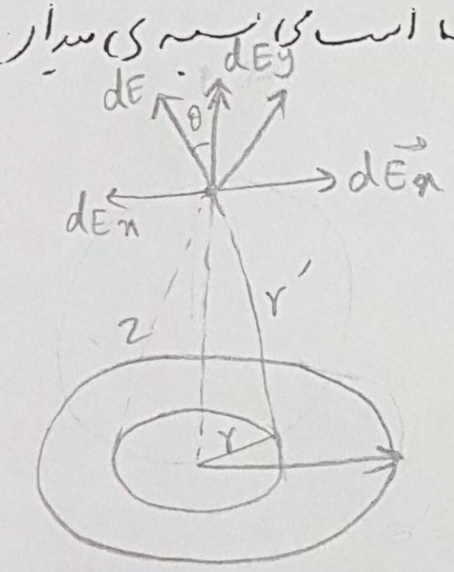
برای صفر شدن برآیند اثر نیروها بر q_3 باید

$$F_{13} = F_{23} \Rightarrow \frac{k\, q_1 Q}{\frac{25a^2}{4}} = k\frac{q_2 Q}{\frac{a^2}{4}} \Rightarrow q_1 = 25 q_2$$

از حالتی: ۳، ۶، ۱۰، ۱۵، ۲۲ ...

ویراست ۱۰

۵- حلقه‌ای به شعاع R و چگالی سطحی σ_0 یکنواخت است. پس پس در نظر بگیرید مطلوب است محاسبه‌ی میدان روی محور عمود بر صفحه و به فاصله‌ی Z از آن



$$E = k\frac{q}{r^2} \rightarrow dE = k\frac{dq}{r'^2}$$

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y \rightarrow \vec{E} = \cancel{\vec{E}_x} + \vec{E}_y$$

فیزیک

$$E_y = \int dE_y = \int dE\cos\theta = \int k\frac{dq}{r'^2}\cos\theta$$

$$r'^2 = Z^2 + r^2$$

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{dq}{dA} \rightarrow dq = \sigma dA = \frac{\sigma_0}{\cancel{r}}(2\pi \cancel{r} dr) = 2\pi\sigma_0 dr$$

$$E_y = \int k\frac{2\pi\sigma_0 dr}{(Z^2+r^2)}\frac{Z}{(Z^2+r^2)^{\frac{1}{2}}} = 2\pi k\sigma_0 Z\int\frac{dr}{(Z^2+r^2)^{3/2}}$$

تغییر متغیر: $tg\theta = \frac{r}{Z} \rightarrow r = Z\,tg\theta \rightarrow dr = Z(1+tg^2\theta)\,d\theta$

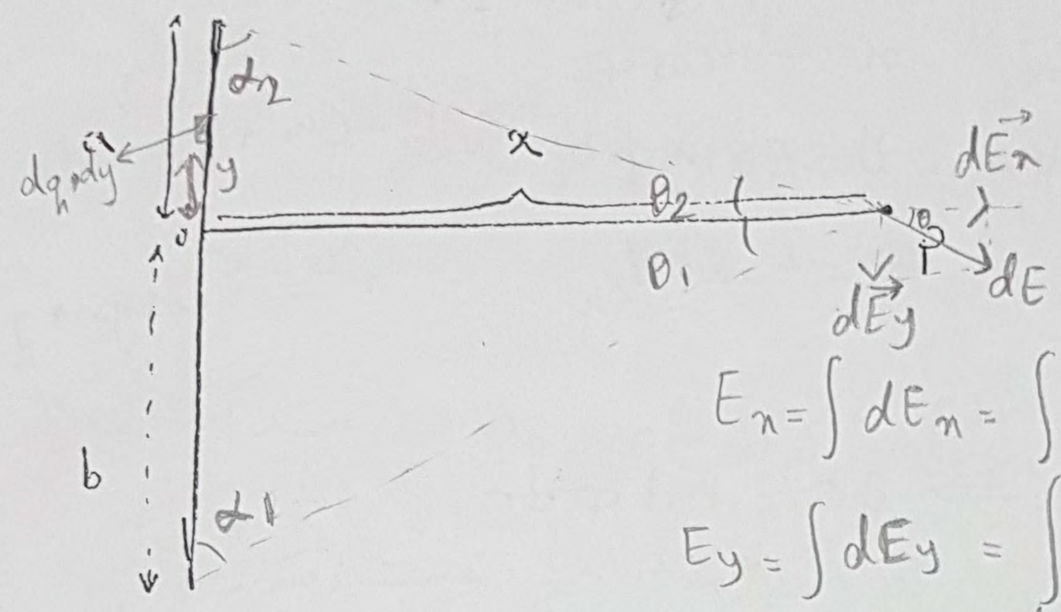
$$E_y = 2\pi k\sigma_0 Z\int\frac{Z(1+tg^2\theta)\,d\theta}{(Z^2+Z^2tg^2\theta)^{3/2}}$$

$$E_y = 2\pi k\sigma_0 Z\int\frac{Z(1+tg^2\theta)\,d\theta}{Z^3(1+tg^2\theta)^{3/2}} = \frac{2\pi k\sigma_0}{Z}\int_0^{tg^{-1}\frac{R}{Z}}\cos\theta\,d\theta = \frac{2\pi k\sigma_0}{Z}\left(\sin\theta\Big|_0^{tg^{-1}\frac{R}{Z}}\right)$$

$$E_y = \frac{2\pi k\sigma_0}{Z}\sin\left(tg^{-1}\frac{R}{Z}\right)$$

میدان صفحه‌ی ۲

*۶- شکل زیر میله‌ای به طول L را نشان می‌دهد. اگر باری با چگالی یکنواخت λ روی آن توزیع شود میدان E را در نقطه P که فاصله عمودی آن تا میله برابر با x است برحسب زاویه‌های α_1 و α_2 به دست آورید.



$$E = k\frac{q}{r^2} \rightarrow dE = \frac{k\,dq}{r^2}$$

$$dE = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y \qquad \vec{E} = \vec{E}_x + \vec{E}_y$$

فیزیک

$$E_x = \int dE_x = \int dE\cos\theta = \int k\frac{dq}{r^2}\cos\theta$$

$$E_y = \int dE_y = \int dE\sin\theta = \int k\frac{dq}{r^2}\sin\theta$$

$$\lambda = \frac{q}{y} = \frac{dq}{dy} \rightarrow dq = \lambda\,dy \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

ریاضی: $E_x = \int k\frac{dq}{r^2}\cos\theta$

$$E_x = \int \frac{k\lambda\,dy}{(x^2+y^2)} \times \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = k\lambda x\int\frac{dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

تغییر متغیر $tg\theta = \frac{y}{x} \rightarrow y = x\,tg\,\theta \rightarrow dy = x(1+tg^2\theta)d\theta$

$$E_x = k\lambda x\int\frac{x\cancel{(1+tg^2\theta)}d\theta}{(x^2+x^2tg^2\theta)^{3/2}\,\frac{1}{2}} = \frac{k\lambda x^2}{x^2}\Big|_{-\theta_1}^{\theta_2}\cos\theta\,d\theta$$

$$E_x = \frac{kq}{x}\sin\Big|_{-\theta_1}^{\theta_2} = \frac{k\lambda}{x}(\sin\theta_2 + \sin\theta_1)$$

$$\begin{cases}\alpha_2 + \theta_2 + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_2\\ \alpha_1 + \theta_1 + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1\end{cases}$$

$$E_x = \frac{k\lambda}{x}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_2\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_1\right)\right] \rightarrow E_x = \frac{k\lambda}{x}\left[\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\right]$$

$$E_y = \int k\frac{dq}{r^2}\sin\theta = \int k\frac{\lambda\,dy}{x^2+y^2}\,\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = k\lambda\int\frac{y\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

تغییر متغیر $tg\theta = \frac{y}{x} \rightarrow y = x\,tg\theta \rightarrow dy = x(1+tg^2\theta)d\theta$

$$E_y = k\lambda\int\frac{x^2 tg\theta\,\cancel{(1+tg^2\theta)}d\theta}{(x^2+x^2tg^2\theta)^{3/2}\,\frac{1}{2}} = \frac{k\lambda x^2}{x^3}\Big|_{-\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\,d\theta = \frac{k\lambda}{x}\left(-\cos\theta\Big|_{-\theta_1}^{\theta_2}\right) =$$

$$\frac{k\lambda}{x}(-\cos\theta_2 + \cos\theta_1) = \frac{k\lambda}{x}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_2\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha_1\right)\right] = \frac{k\lambda}{x}\left[-\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right]$$

$$= \frac{k\lambda}{x}\left[\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2\right]$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left[\frac{k\lambda}{x}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)\right]^2 + \left[\frac{k\lambda}{x}(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)\right]^2} = \frac{k\lambda}{x}\sqrt{\left[\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2\right]^2 + \left[\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2\right]^2}$$

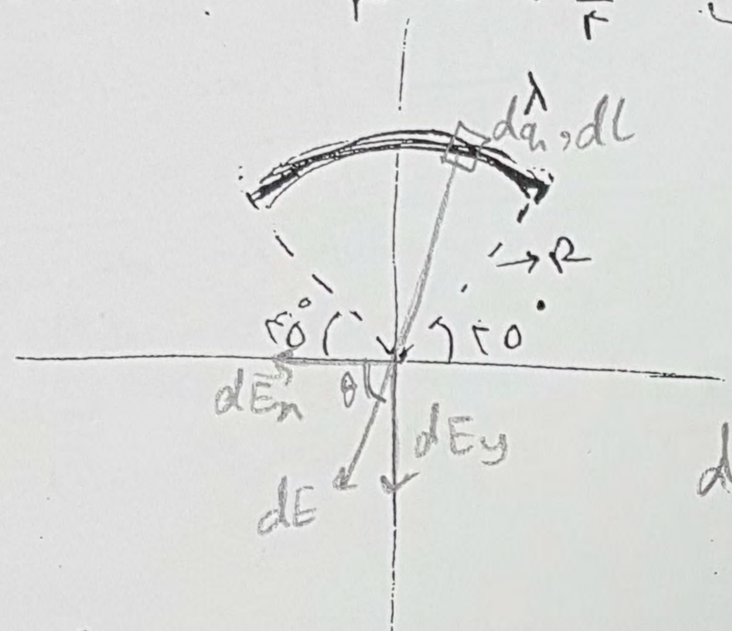
میدان - صفحه‌ی هشت $\vec{r} = r\hat{r}$ $r>0$ $0<\varphi<2\pi$ $0<\theta<\pi$

$r = (x^2+y^2+z^2)$ $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$

$\hat{r} = \hat{i}\sin\theta\cos\varphi + \hat{j}\sin\theta\sin\varphi + \cos\theta\,\hat{k}$

$dv = dr \times r d\theta \times r\sin\theta\, d\varphi \Rightarrow dv = r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr$

سئوال ۷ : نیم دایره‌ای مطابق شکل دارای چگالی بار خطی غیر یکنواخت $\lambda = \lambda_0 \sin\theta$ می‌باشد که در آن λ_0 مقداری ثابت و مثبت و θ زاویه نسبت به محور x است. $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ، جهت و مقدار میدان الکتریکی را در نقطه‌ی O بدست آورید؟



$E = \frac{kq_h}{r^2} \Rightarrow dE = k\frac{dq_h}{r^2}$

$\vec{dE} = \vec{dE_x} + \vec{dE_y}$

$E_y = -\int dE_y = -\int dE\sin\theta$ چون جهت میدان منفی است بالا منفی کاشته داده شود

$E_y = \int k\frac{dq}{r^2}\sin\theta$ $\lambda = \frac{q_h}{L} \rightarrow \frac{dq_h}{dL} \Rightarrow dq = \lambda dL = \lambda_0 \sin\theta (R d\theta)$

$$E_y = \int \frac{k\lambda_0 \sin\theta (R d\theta)}{R^2}\sin\theta = \frac{k\lambda_0}{R}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2\theta\, d\theta = \frac{k\lambda_0}{R}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)\, d\theta$$

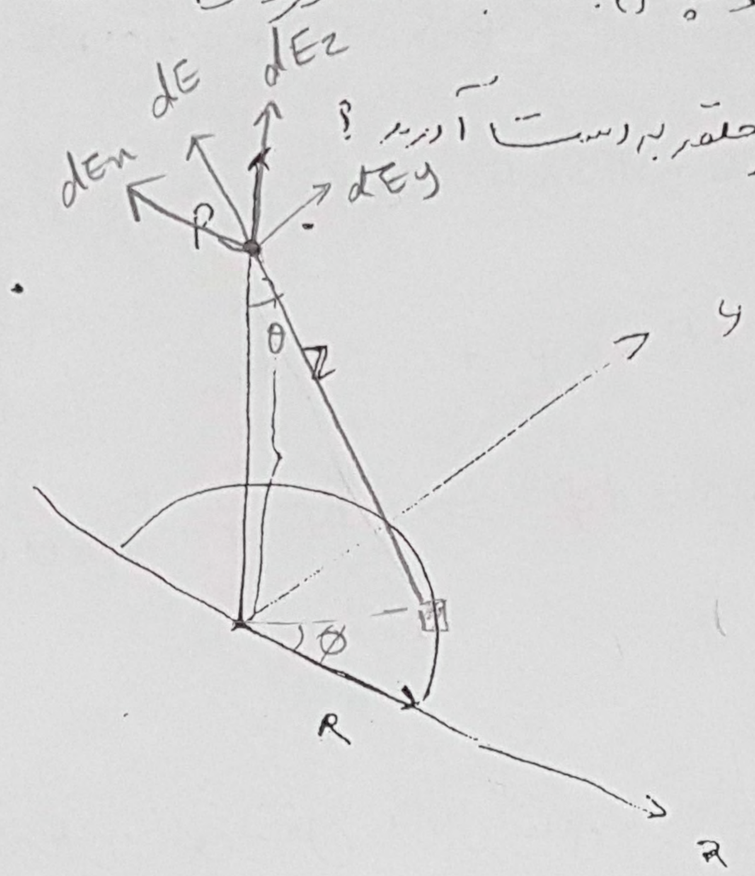
$$\frac{k\lambda_0}{R}\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta\right] = \frac{k\lambda_0}{R}\left[\theta\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1-\cos^2\theta}{2}\, d\theta\right]$$

$$\frac{k\lambda_0}{R}\left[\frac{\pi}{2} - \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{2}\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos 2\theta\, d\theta\right]\right] = \frac{k\lambda_0}{R}\left[\frac{\pi}{2} - \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right]\right]$$

$$\frac{k\lambda_0}{R}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right] = \frac{k\lambda_0}{R}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right] = \frac{-k\lambda_0(\pi+2)}{4R}$$ جهت میدان منفی

سئوال ۸ : یک نیم حلقه‌ی باردار مطابق شکل به شعاع R و چگالی بار ثابت λ مفروض است.

الف) میدان الکتریکی را روی محور حلقه و به فاصله‌ی z از مرکز حلقه به دست آورید؟



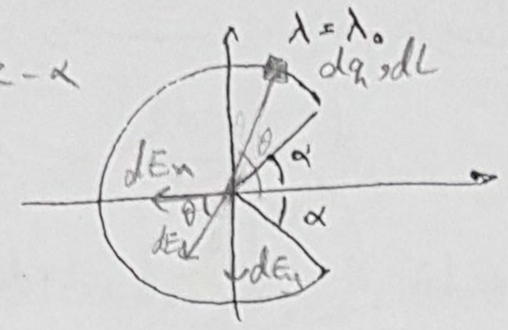
$$E = \frac{kq}{r^2}$$

$$dE = \frac{k\,dq}{r^2} \qquad d\vec{E} = d\vec{E}_n + d\vec{E}_y + d\vec{E}_z$$

میدان - صفحه ۹

سئوال ۹: بار الکتریکی با چگالی $\lambda = \lambda_0$ روی حلقه‌ای به شعاع R توزیع شده است. مطلوب است محاسبه‌ی میدان در مرکز حلقه؟

$\alpha < \theta < 2\pi - \alpha$



$$E = \frac{kq}{r^2}$$

$$dE = \frac{k\,dq}{r^2} \qquad E = \int dE$$

$$d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$$

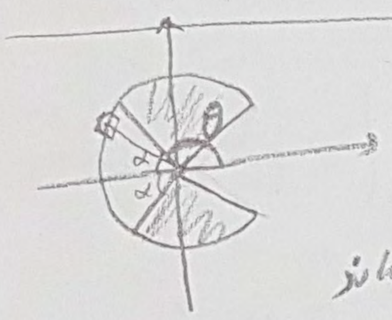
$$\vec{E} = \vec{E}_x + \cancel{\vec{E}_y}^{\,0} \rightarrow E_x = -\int dE_x = -\int dE\cos\theta = -\int \frac{k\,dq}{r^2}\cos\theta$$

$$dq = \lambda\, dL = \lambda_0 R\, d\theta$$

$$E_x = \int \frac{-k\lambda_0 R\, d\theta}{R^2}\cos\theta = \frac{-k\lambda_0}{R}\int_{\alpha}^{2\pi-\alpha}\cos\theta\, d\theta = \frac{-k\lambda_0}{R}\left(\sin\theta\right)\Big|_{\alpha}^{2\pi-\alpha}$$

چون جواب مثبت است جهت میدان در جهت مثبت محور x است

$$= \frac{-k\lambda_0}{R}\left[\cancel{\sin(2\pi-\alpha)} - \sin\alpha\right] = \frac{2k\lambda_0}{R}\sin\alpha$$

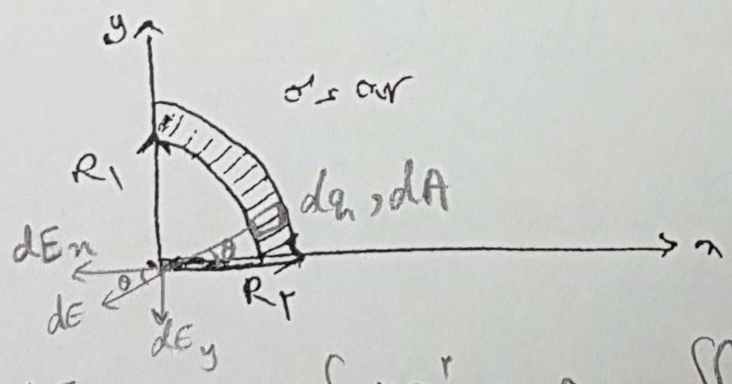


می‌توان گفت دو قسمت هاشور خورده یکدیگر را حذف می‌کنند و فقط قطعه 2α باقی می‌ماند که در این حالت فقط E_x به جهت مثبت باقی می‌ماند

$$E_x = \int dE_x = \int dE\cos\theta = \int \frac{k\,dq}{r^2}\cos\theta$$

$$= \int \frac{k\lambda_0 R\, d\theta}{R^2}\cos\theta = \frac{k\lambda_0}{R}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\, d\theta$$

سئوال ۱۰: صفحه‌ای باردار به شکل ربع دایره محصور بین شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 با توزیع چگالی بار سطحی $\sigma = ar$ مطابق شکل مفروض است که r فاصله از مرکز دایره تا نقطه‌ای معلوم می‌باشد. میدان الکتریکی بار در مرکز دایره به دست آورید.



$$E = \frac{kq}{r^2}$$

$$dE = \frac{k\,dq}{r^2} \rightarrow d\vec{E} = d\vec{E}_x + d\vec{E}_y$$

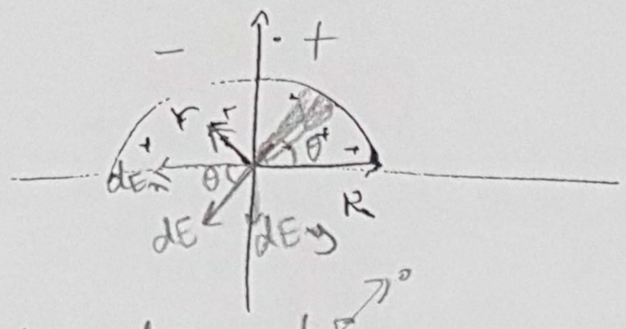
$$E_x = -\int dE_x = -\int dE\cdot\cos\theta = -\int \frac{k\,dq}{r^2}\cos\theta = -\iint \frac{k\,ar\,r\,dr\,d\theta}{r^2}\cos\theta = -ka\int_{R_1}^{R_2} dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta$$

$$\boxed{\sigma = \frac{q}{A} \Rightarrow dq = \sigma\, dA = ar\, dA = ar\, r\, dr\, d\theta}$$

$$= -ka(R_2 - R_1)\left(\underbrace{\sin\tfrac{\pi}{2} - \sin 0}_{1}\right)$$

$$E_y = -\int \frac{k\,dq}{r^2}\sin\theta = -\iint \frac{k\,ar\,r\,dr\,d\theta}{r^2}\sin\theta = -ka\int_{R_1}^{R_2} dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\, d\theta = -ka(R_2 - R_1)\left(\underbrace{-\cos\tfrac{\pi}{2} + \cos 0}_{1}\right)$$

مثال ۱۱: نیم‌دایره‌ای مطابق شکل دارای چگالی بار سطحی نیر یکنواخت $\sigma = \sigma_0 r^2 \cos\theta$ می‌باشد که در آن σ_0 مقداری ثابت و مثبت و r فاصله هر نقطه از مرکز O می‌باشد. جهت و مقدار میدان الکتریکی را در نقطه‌ی O به دست آورید.



$$dE = \frac{k\,dq}{r^2} \qquad E = \frac{kq}{r^2}$$

$$\sigma = \frac{q}{A} \Rightarrow dq = \sigma dA = \sigma_0 r^2 \cos\theta \, r\,dr\,d\theta$$

$$dE = dE_x + \cancel{dE_y}^{\,0}$$

$$E_x = \int -dE_x = \int -dE\cos\theta = \int -\frac{k\,dq}{r^2}\cos\theta = -\iint \frac{k\sigma_0 r^3 \cos\theta\, dr\, d\theta}{r^2}\cos\theta$$

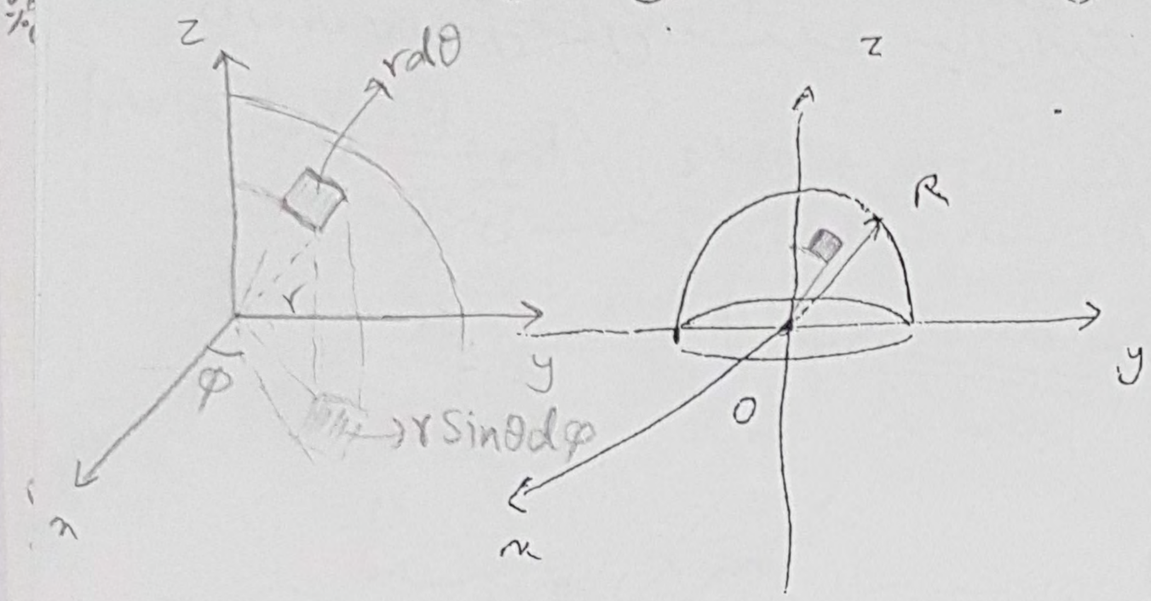
$$= -k\sigma_0 \int_0^{\pi} \cos^2\theta\, d\theta \int_0^R r\,dr = -k\sigma_0 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\sin\theta \Big|_0^{\pi}\right]\left[\frac{r^2}{2}\right] = \frac{-k\sigma_0 R^2 \pi}{4}$$

میان‌ترم ۱۰

سئوال ۱۲: پوسته‌ای نیمکره شکل، بشعاع R دارای چگالی بار سطحی $\sigma = \sigma_0 \sin\theta$ مطابق شکل مفروض است که در آن σ_0 عددی مثبت و ثابت است.

الف) کل بار موجود در نیمکره را بدست آورید.

ب) میدان الکتریکی را در نقطه‌ی O مرکز نیمکره بدست آورید.



چگالی توزیع سطحی $\sigma = \sigma_0 \sin\theta$

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{dq}{dA} \qquad dA = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$dq = \sigma \sin\theta \, r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = r^2 \sigma_0 \sin^2\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$q_T = \int dq = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_0 r^2 \sin^2\theta \, d\theta \, d\varphi = \sigma_0 r^2 \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^2\theta}_{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} d\theta \right)$$

$$q_T = 2\pi \sigma_0 r^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta \right) d\theta = 2\pi \sigma_0 r^2 \left(\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\theta}_{\frac{\pi}{4}} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos 2\theta \, d\theta}_{\frac{1}{4}\sin 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}} \right)$$

$$= r^2 \times 2\pi \sigma_0 \frac{\pi}{4} = \frac{\sigma_0 r^2 \pi^2}{2}$$

ب) $E = \frac{kq}{r^2} \longrightarrow dE = k\frac{dq}{r^2} \Rightarrow d\vec{E} = \overbrace{d\vec{E}_x + d\vec{E}_y}^{\text{تقارن}} + d\vec{E}_z \Rightarrow E_T = E_z$

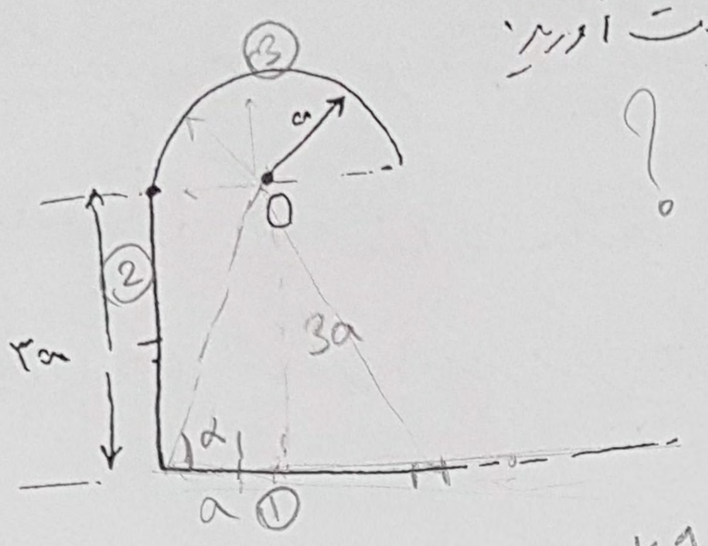
$$E_z = \int dE_z = \int dE \cos\theta = \int \frac{k\,dq}{r^2}\cos\theta = \frac{k}{R^2} \int R^2 \sigma_0 \sin^2\theta \, d\theta \, d\varphi \cos\theta$$

$$= k\sigma_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \cos\theta \, d\theta \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \qquad u = \sin\theta \Rightarrow du = \cos\theta \, d\theta$$

$$E_z = k\sigma_0 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2 du = k\sigma_0 2\pi \left(\frac{u^3}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = k\sigma_0 2\pi \left(\frac{\sin^3 x}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$E_z = k\sigma_0 2\pi \frac{\sin^3 \frac{\pi}{2}}{3} = \frac{1}{3} \times k\sigma_0 2\pi$$

سئوال ۱۳: بر روی سیم نازکی مطابق شکل بار الکتریکی یکنواخت با چگالی بار λ توزیع شده است با توجه به داده های داخل شکل، شدت میدان الکتریکی را در نقطه ی O به دست آورید.

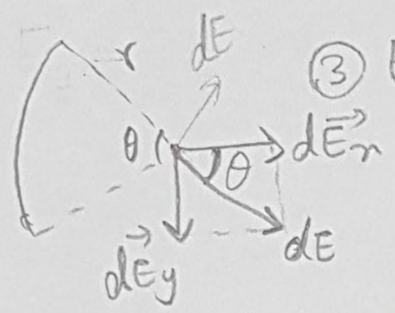


؟ سیم متناهی $E=\frac{K\lambda}{x}\left(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2\right)$ / $E_y=\frac{K\lambda}{x}\left(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2\right)$

① $E_{1x}=\frac{K\lambda}{3a}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+9a^2}}+1\right)$

② $E_{2x}=\frac{K\lambda}{a}\left(\frac{3a}{\sqrt{a^2+9a^2}}+0\right)$

③ $E=K\frac{q}{r}$ $\quad dE=K\frac{dq}{r^2}\rightarrow d\vec{E}=d\vec{E}_x+\cancel{d\vec{E}_y}^{\,0}\Rightarrow \vec{E}_t=\vec{E}_x$



$E_x=\int dE_x=\int dE\cos\alpha=\int K\frac{dq}{r^2}\cos\alpha=\frac{K}{r^2}\int\lambda r\,d\alpha\cos\alpha$

$=\frac{\lambda K}{r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\,d\alpha$ $\qquad \lambda=\frac{q}{L}=\frac{dq}{dL}\Rightarrow dq=\lambda dL=\lambda(r\,d\theta)$

$E_x=\frac{K\lambda}{r}\sin\alpha\Big|_{-\frac{\theta}{2}}^{\frac{\theta}{2}}=\frac{K\lambda}{2}\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\rightarrow E_x=\frac{2K\lambda}{r}\sin\frac{\theta}{2}$

③ $E_{3x}=\frac{2K\lambda}{a}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{2K\lambda}{a}$

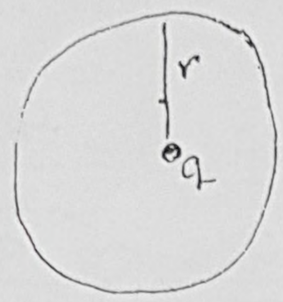
① $E_{1y}=\frac{K\lambda}{3a}\left(\frac{3a}{\sqrt{a^2+9a^2}}+0\right)$ $\qquad$ ② $E_{2y}=\frac{K\lambda}{a}\left(1+\frac{a}{\sqrt{a^2+9a^2}}\right.$

$\vec{E}_{xt}=\vec{E}_{x1}+\vec{E}_{x2}+\vec{E}_{x3}\rightarrow\vec{E}_t=\vec{E}_{xt}+\vec{E}_{yt}$

$\vec{E}_{yt}=\vec{E}_{y1}+\vec{E}_{y2}$

قانون گاوس و قانون کولن

- می‌توان قانون کولن را با استفاده از قانون گاوس به دست آورد.



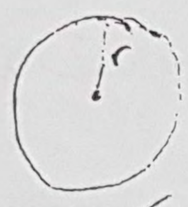
$$\oint E \cdot dA = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E \oint dA = q/\varepsilon_0 \Rightarrow E \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

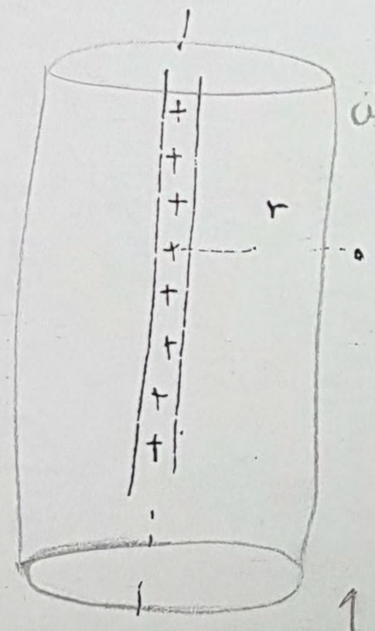
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow E = \frac{kq}{r^2}$$

$$A = \int dA = \int r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = r^2 \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi r^2$$

$$dv = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr = v = \int dv = \int r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr = \frac{4}{3}\pi r^3$$



مسئوال یک: شکل روبرو یک خط نامتناهی بار با چگالی بار یکنواخت λ را نشان می‌دهد. میدان الکتریکی E را در فاصله‌ی r از این خط پیدا کنید.



قانون کولن $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$

$$\int E \, dA \cos\theta = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$E \int dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \rightarrow \underset{\text{سطح گوسی}}{EA} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \qquad E = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0 A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0 (2\pi r h)}$$

تقارن عبوری دارد

$$\lambda = \frac{q}{L} = \frac{dq}{dL} \rightarrow dq = \lambda \, dL$$

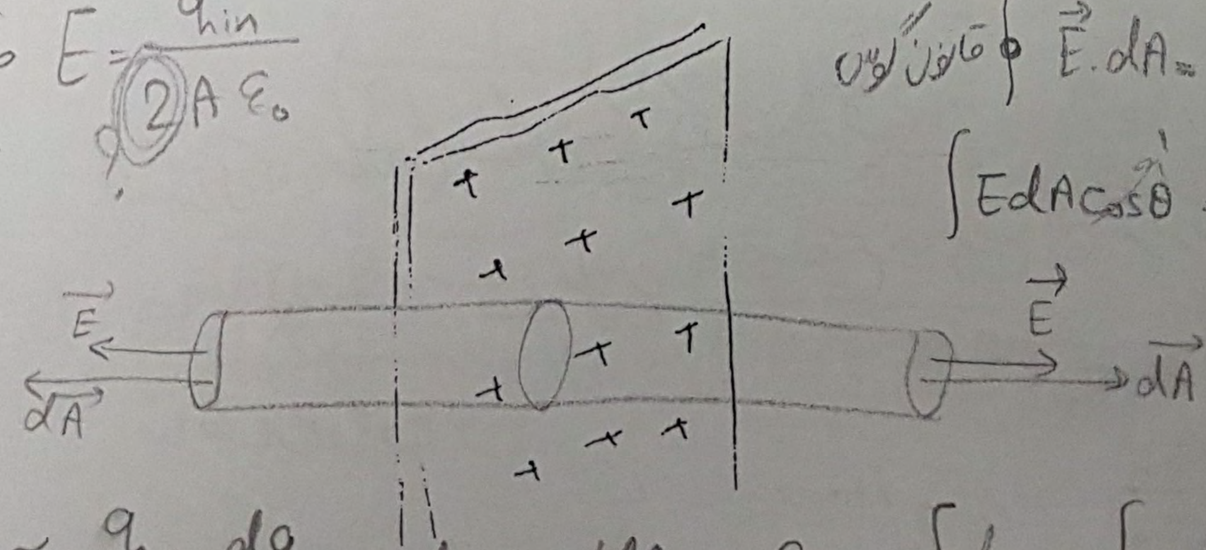
$\lambda =$ ثابت چگالی توزیع بار خطی

$$\rightarrow dq = \int dq = \int \lambda \, dL = \lambda \int dL = \lambda h$$

$$E = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0 A} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0 (2\pi r h)} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$$

مسئوال دو: شکل زیر یک ورقه‌ی نارسانای نازک با بار دار با چگالی سطح ثابت σ را نشان می‌دهد. میدان الکتریکی E را در نقاطی نزدیک به این برگه محاسبه کنید.

$$E = \frac{q_{in}}{2A\varepsilon_0}$$



قانون گوس $\oint \vec{E} \cdot dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$

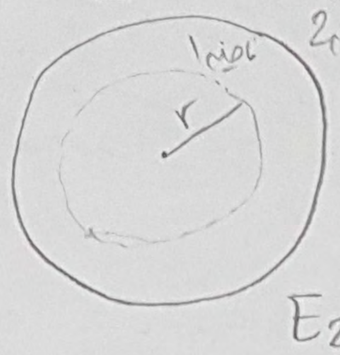
$$\int E \, dA \cos\theta = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \rightarrow E \int dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{q_{in}}{2A\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma A'}{2A'\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} =$$ یکنواخت = ثابت

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{dq}{dA} \rightarrow dq = \sigma \, dA \rightarrow q_{in} = \int dq = \int \sigma \, dA = \sigma \int dA = \sigma A$$

رسانا میدان الکتریکی درونش صفره

سئوال ۳: میدان الکتریکی را در نقاط داخل و خارج از پوسته کروی رسانا باردار دارای بار q را به دست آورید



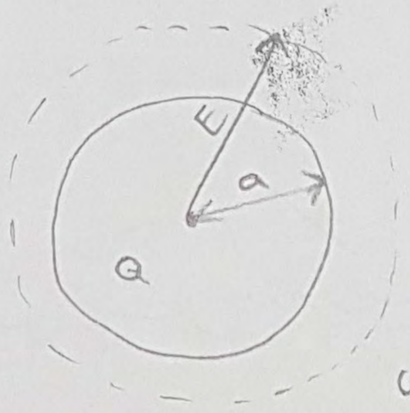
چون $q_{in}=0$

① قانون گوس: $\oint \vec{E}_1 dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \rightarrow E_1 = 0$

② قانون گوس $\oint \vec{E}_2 \cdot dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \int E_2 dA \cos\theta = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$

$E_2 \int dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$ $\quad E_2 A = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \rightarrow E_2 = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0 A} = \frac{q}{\varepsilon_0 4\pi r^2}$

سئوال ۴: بار Q را به صورت یکنواخت (تقارن بار) در داخل کره‌ای به شعاع a توزیع کرده‌ایم. (مرکز کره‌ی نارسانا) (چگالی توزیع بار حجمی) شدت میدان الکتریکی را با استفاده از قانون گاوس برای نقاط داخل و خارج کره برحسب فاصله از مرکز به دست آورید



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$\int E\, dA \cos\theta = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E \int dA = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{A\varepsilon_0}$$

$$E_{\text{خارجی}} = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi a^3}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

شرط استفاده از قانون گاوس شکل و همچنین توزیع بار متقارن می‌باشد

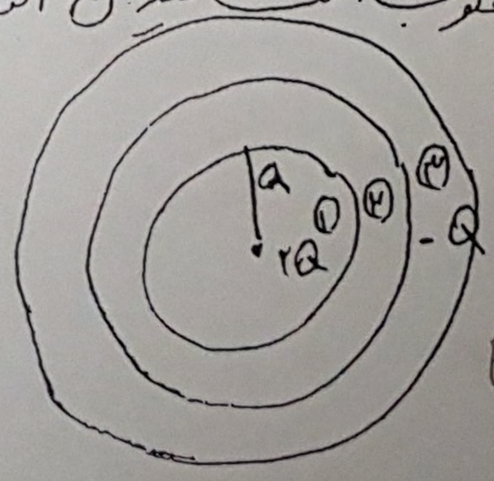
شرط کافی بتوانیم نقطه‌ای را در نظر بگیریم که از سطح گاوسی بگذرد و میدان در تمام نقاط آن یکسان باشد

$$\oint \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \int E\, dA \cos 0 = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E \cdot A = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$\rho = \frac{dq}{dv} \Rightarrow dq = \rho\, dv \Rightarrow q_{in} = \int dq = \int \rho\, dv = \rho v$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho v}{\varepsilon_0 A} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0 4\pi r^2} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

سئوال ۵: مطابق شکل یک کره‌ای رسانای باردار با بار 2Q و شعاع a در داخل پوسته‌ی کروی رسانایی با بار -Q و شعاع داخلی b و شعاع خارجی c قرار گرفته است. مطلوب است میدان الکتریکی در نقاط ۱، ۲، ۳ و ۴؟



① $\oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \rightarrow E_1 = 0 \rightarrow q_{in} = 0$ چون داخل رسانا بار وجود ندارد

② $\oint \vec{E}_2\, d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \rightarrow \int E_2\, dA \cos\theta = \frac{2Q}{\varepsilon_0}$

$E_2 \int dA = \frac{+2Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E_2 A = \frac{2Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E_2 = \frac{+2Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$

سطح گوسی شعاع عمودی دارد

قانون گاوس - ضمیمه ۴

$$\oint \vec{E}_4\, dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \rightarrow \int E_4\, dA \cancel{\cos\theta} = \frac{+2Q-Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E_4 \int dA = \frac{+Q}{\varepsilon_0} \rightarrow E_4 \underbrace{A}_{\text{سطح گاوسی شعاع عبور می‌دارد}} = \frac{+Q}{\varepsilon_0}$$

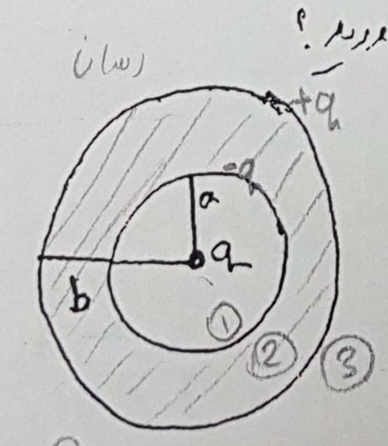
$$\rightarrow E_4 = \frac{+Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

قانون گوس $\oint \vec{E}_3\, d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \int E_3\, dA \cos\theta = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_3 \int dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \rightarrow E_3 \underbrace{A}_{\text{سطح گاوسی شعاع عبور می‌دارد}} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$

$$E_3 = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0 4\pi r^2} = 0$$

نتیجه: میدان داخل رسانا، همواره صفر است

سئوال ۶: یک پوسته‌ی کروی (چگالی سطحی) فلزی به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b در اختیار است. بار q را در مرکز این پوسته قرار داده، شدت میدان را در تمام نقاط فضا به دست آورید؟



① $\oint \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \int E\, dA \cancel{\cos\theta} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{\varepsilon_0 A} = \frac{q}{\varepsilon_0 4\pi r^2}$

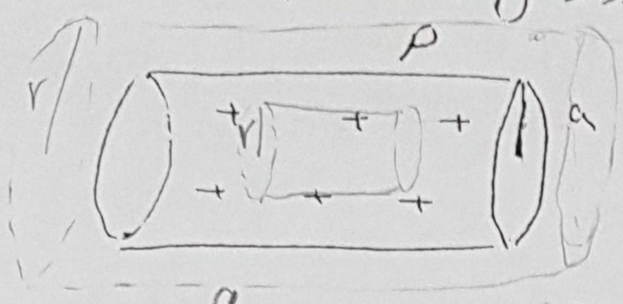
② $\oint \vec{E}_2\, d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{q-q}{\varepsilon_0} =$ صفر است چون بار درون سطح گوسی صفر است $E_2 = 0$

③ $\oint \vec{E}_3\, d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_3 = \frac{q}{\varepsilon_0 A} = \frac{q}{\varepsilon_0 4\pi r^2}$

استوانه باید نامتناهی باشد

ثابت

۷ - میدان الکتریکی را برای استوانه‌ای نارسانا با چگالی حجمی ρ در نواحی $r<a$ ، $r>a$ بدست آورید.



داخلی $\oint \vec{E}\,\vec{dA} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \oint E\,dA\cos\theta = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$

$\rho = \frac{dq}{dv} \Rightarrow dq = \rho\,dv \Rightarrow q = \int dq = \int \rho\,dv = \rho v$

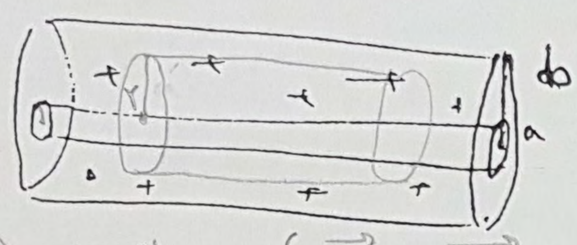
$\Rightarrow EA = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho v}{A\varepsilon_0} = \frac{\rho \pi r^2 h}{\varepsilon_0 2\pi r h} = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$

اطراف سیلندر

خارج: $\oint \vec{E}\,\vec{dA} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \int E\cdot dA\cos\theta = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\int dA = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow EA = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{A\varepsilon_0}$

$E = \frac{\rho \pi a^2 h}{2\pi r h \varepsilon_0} = \frac{\rho a^2}{2r\varepsilon_0}$

سئوال ۸ : استوانه‌ای نارسانا به شعاع b داریم که حفره‌ای به شعاع a وسط آن قرار دارد. میدان الکتریکی را در نواحی $r<a$ ، $a<r<b$ ، $r>b$ پیدا کنید.



① $r<a$: $\oint \vec{E}\cdot\vec{dA} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$ $\quad E_1 = 0 \Leftarrow q_{in} = 0$

② $a<r<b$ $\quad \oint \vec{E}_2\cdot\vec{dA} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \int E_2\,dA\cos\theta = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2\int dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow E_2 = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0 A} = \frac{\rho(r^2-a^2)\pi r h}{\varepsilon_0 2\pi r h} = \frac{\rho(r^2-a^2)}{2\varepsilon_0 r}$

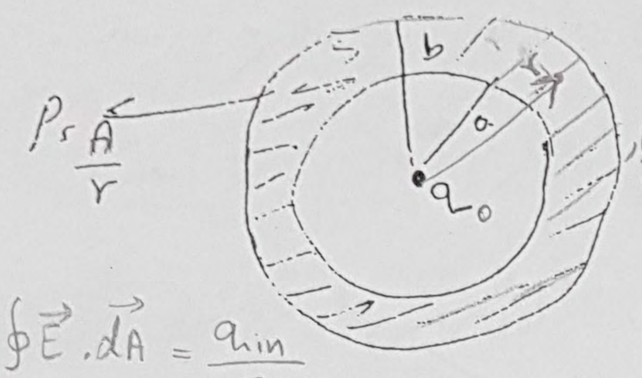
$\rho = \frac{dq}{dv} \Rightarrow \int dq = \int \rho\,dv \Rightarrow q = \rho v \Rightarrow q = \rho(r^2-a^2)\pi r h$

③ $r>b \Rightarrow \oint \vec{E}_3\,\vec{dA} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \int E_3\,dA\cos\theta = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_3\int dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_3 = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0 A}$

$\rho = \frac{dq}{dv} \Rightarrow dq = \rho\,dv \Rightarrow q_{in} = \rho\int dv \Rightarrow q = \rho\pi(b^2-a^2)h$

$E = \frac{\rho\pi(b^2-a^2)h}{\varepsilon_0 2\pi r h} = \frac{\rho(b^2-a^2)}{2\varepsilon_0 r}$

سئوال ۹: شکل زیر یک پوسته ی کروی نارسانا به شعاع داخلی a و شعاع بیرونی b و چگالی حجمی بار $\rho = \frac{A}{r}$ را در فضای قشر نشان می دهد که A یک ثابت و r فاصله از مرکز پوسته است. افزون بر این یک بار نقطه ای q_0 نیز در مرکز آن واقع است. برای آنکه میدان الکتریکی در پوسته در ناحیه ی $a < r < b$ یکنواخت باشد A چقدر باید باشد؟



$\rho = \frac{A}{r}$ چگالی توزیع بار حجمی

قانون گوس: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$

$$\int E\, dA \cos\theta = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \to E\int dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\underbrace{A}_{\text{سطح گاوسی تنها وجود دارد}} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0 A}$$

$$\rho = \frac{q}{v} = \frac{dq}{dv} \to dq = \rho\, dv \to q = \int dq = \int \underbrace{\rho}_{\text{ثابت}} dv = \int \frac{A}{r}\, dv \to v = \frac{4}{3}\pi r^3 \to dv = 4\pi r^2 dr$$

$$q = \int \frac{A}{\cancel{r}}(4\pi r^{\cancel{2}} dr) = 4\pi A \int_a^r r\, dr \to q = 4\pi A \left.\frac{r^2}{2}\right|_a^r$$

$$q = 2\pi A(r^2 - a^2) \to q_{in} = q + q_0 = 2\pi A(r^2 - a^2) + q_0$$

$$E = \frac{2\pi A(r^2 - a^2) + q_0}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

$$\frac{dE(r)}{dr} = 0 \to \frac{dE(r)}{dr} = \frac{4\pi A r(4\pi r^2 \varepsilon_0) - 8\pi r \varepsilon_0 [2\pi A(r^2 - a^2) + q_0]}{(4\pi r^2 \varepsilon_0)^2} = 0$$

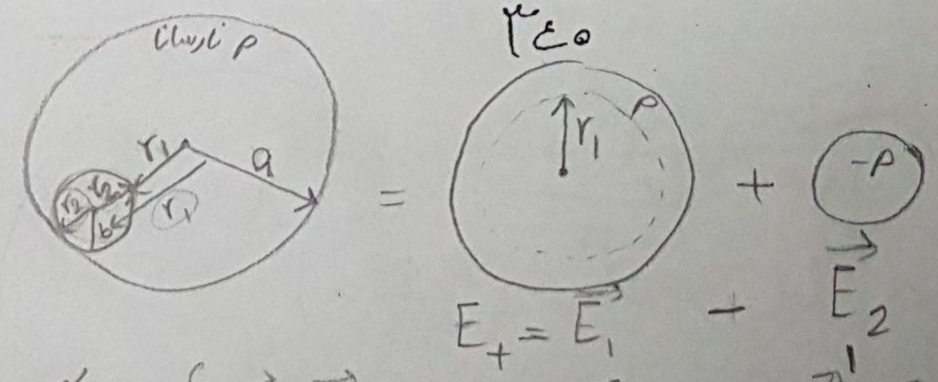
$$4\pi A r(4\pi r^2 \varepsilon_0) = 8\pi r \varepsilon_0 [2\pi A(r^2 - a^2) + q_0] \qquad 2\pi r^2 A = 2\pi A r^2 - 2\pi A a^2 + q_0$$

$$q_0 = 2\pi A a^2 \to A = \frac{q_0}{2\pi a^2}$$

سئوال ۱۰: در یک کره ی عایق بارهای الکتریکی به طور یکنواخت با چگالی حجمی ρ گسترده شده اند. یک حفره کروی از عایق پاک شده برمی داریم نشان دهید که میدان الکتریکی در تمام نقاط حفره برابر است با:

$$E = \frac{\rho \vec{a}}{3\varepsilon_0}$$

$\vec{a}$: برداری است که مرکز کره را به مرکز حفره وصل می کند.



$$\rho = \frac{q}{v} = \frac{dq}{dv} \to dq = \rho\, dv$$

$$q = \int dq = \int \rho\, dv = \rho \int dv \to q_{in} = \rho v$$

قانون گوس: $\oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \int E_1\, dA \cos\theta = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \to E_1 \int dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 \underbrace{A}_{\text{سطح گاوسی تنها وجود دارد}} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$

$$E_1 = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0 A} = \frac{\rho(\frac{4}{3}\pi r_1^3)}{\varepsilon_0 4\pi r_1^2} \to E_1 = \frac{\rho r_1}{3\varepsilon_0}$$

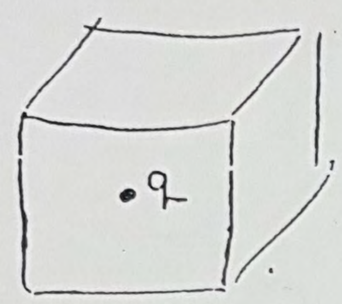
قانون گوس $\oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \to \int E_2\, dA \cos\theta = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = -E_2 \int dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = -E_2 \underbrace{A}_{\text{سطح گاوسی تنها وجود دارد}} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$

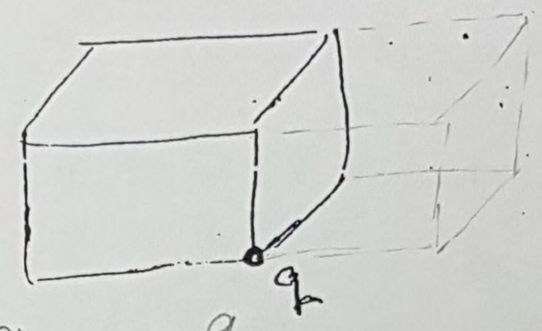
$$E_2 = \frac{-q_{in}}{\varepsilon_0 A} = -\frac{\rho v}{\varepsilon_0 A} = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi r_2^3\right)}{\varepsilon_0 4\pi r_2^2} = \frac{\rho r_2}{3\varepsilon_0}$$

$$E = |E_1 - E_2| = \left|\frac{\rho r_1}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho r_2}{3\varepsilon_0}\right| = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left|r_1 + (-r_2)\right| = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} a$$

۱۱- شار الکتریکی گذرنده از هر وجه مکعب های زیر را بدست آورید؟

الف)





8 تا مکعب مثل قبل

قانون گوس $\varphi_t = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

$\varphi_t = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

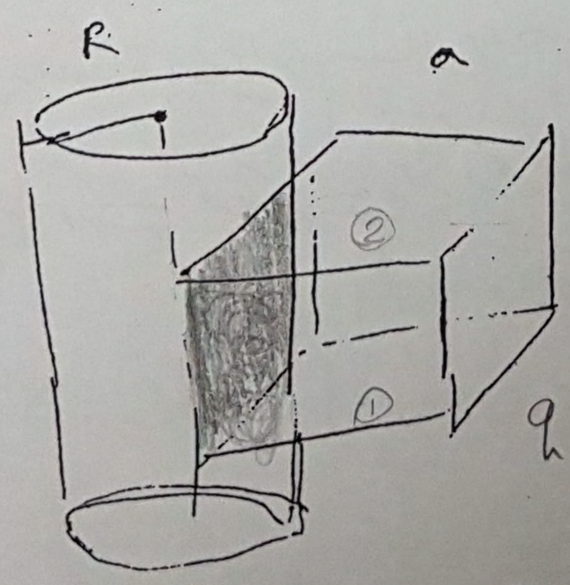
هر وجه $\varphi = \frac{\varphi_t}{6} = \frac{q}{6\varepsilon_0}$

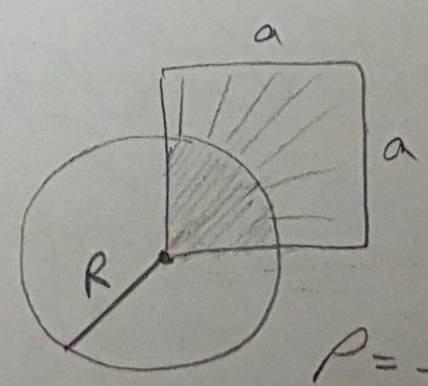
هر مکعب $\varphi = \frac{\varphi_t}{8} = \frac{q}{8\varepsilon_0}$

هر وجه $\varphi = \frac{\varphi_{\text{مکعب}}}{3} = \frac{q}{24\varepsilon_0}$

۱۲- استوانه‌ی طولانی به شعاع R دارای چگالی بار حجمی یکنواخت ρ می‌باشد. یکی از وجوه مکعبی به طول a بر روی محور استوانه قرار گرفته است ($a > R$) مطلوب است شار گذرنده از هر یک از اضلاع مکعب!

$a > R$





$$\varphi_t = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \rightarrow \cancel{\varphi_1}^{0} + \cancel{\varphi_2}^{0} + \cancel{\varphi_3}^{0} + \cancel{\varphi_4}^{0} + \varphi_5 + \varphi_6 = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$2\varphi = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \rightarrow \underset{\text{هر وجه}}{\varphi} = \frac{q_{in}}{2\varepsilon_0}$$

$$\rho = \frac{q}{v} = \frac{dq}{dv} \rightarrow dq = \rho dv$$

$$q = \int dq = \int \rho dv = \rho \int dv = \rho v = \rho\left(\frac{\pi R^2}{4} a\right)$$

$$\varphi = \frac{\frac{1}{4}\pi R^2 a \rho}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{8}\rho \pi R^2 a$$

محاسبه ی میدان از پتانسیل :

$$V = -\int \vec{E} \cdot ds$$

* مؤلفه ی میدان الکتریکی (E) در هر جهت منفی آهنگ تغییر پتانسیل الکتریکی نسبت به فاصله در آن جهت است.

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{dV}{dx} \\ E_y = -\dfrac{dV}{dy} \\ E_z = -\dfrac{dV}{dz} \end{cases}$$

تابع پتانسیل او مدهتما از این استفاده کن

مثال: میدان الکتریکی ناشی از پتانسیل روبرو را به دست آورید.

$$V = -3x^2z + 5x^2yz - 2z^5y^2$$

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -(-6xz + 10xyz)$$

$$E_y = -\frac{dV}{dy} = -(5x^2z - 12x^5y)$$

$$E_z = -\frac{dV}{dz} = -(-3x^2 + 5x^2y - 30z^4y^2)$$

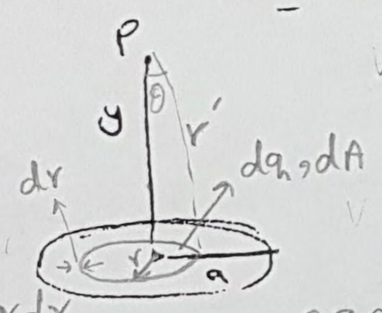
$$\vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$$

A | 0, 1, 4

مثلاً دلخواه

مسئله ۱: دیسکی به شعاع a و چگالی سطحی بار σ در اختیار داریم پتانسیل را در فاصله ی y از سطح دیسک به دست آورید؟



$$V = k\frac{q}{r}$$

$$dV = \frac{k\,dq}{r} \rightarrow V = \int dV = \int \frac{k\,dq}{r}$$

تغییر

$$V_{\text{ریاضی}} = \int k\frac{2\pi\sigma r\,dr}{(y^2+r^2)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow V = 2\pi\sigma k\int_0^a \frac{r\,dr}{(r^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

تغییر متغیر $r^2 + y^2 = u \rightarrow du = 2r\,dr$

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{dq}{dA} \rightarrow dq = \sigma dA = \sigma(2\pi r\,dr)$$

$$V = 2\pi\sigma k\int \frac{\frac{du}{2}}{u^{\frac{1}{2}}} = \pi\sigma k\int u^{-\frac{1}{2}}du = \pi\sigma k\, 2u^{\frac{1}{2}}\Big| = 2\pi\sigma k\,(r^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^a$$

$$V = 2\pi\sigma k\left[(a^2+y^2)^{\frac{1}{2}} - y\right]$$

برعکس مثال:

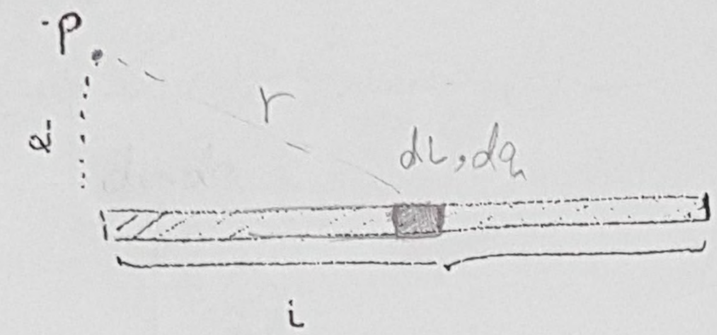
$$E_x = 6xz - 10xyz = -\frac{dV}{dx} \xrightarrow{\text{انتگرال}} -V(x,y,z) = 3x^2z - 5x^2yz + f(y,z) \rightarrow 6z^5y^2$$

$$E_y = -5x^2z + 12z^5y = -\frac{dV}{dy} \xrightarrow{\text{"}} -V(x,y,z) = -5x^2yz + 6z^5y^2 + f(x,z) \rightarrow 3x^2z$$

$$E_z = 3x^2 - 5x^2y + 30z^4y^2 = -\frac{dV}{dz} \xrightarrow{\text{"}} -V(x,y,z) = 3x^2z - 5x^2yz + 6z^5y^2 + f(x,y)$$

$$V(x,y,z) = -3x^2z + 5x^2yz - 6z^5y^2$$

مسئله ۲. شکل زیر یک میله‌ی نازک به طول L دارای بار مثبت (چگالی توزیع بار خطی) به چگالی یکنواخت λ است. پتانسیل الکتریکی (ثابت) حاصل از این میله را در نقطه‌ی P که در فاصله‌ی d از انتهای چپ میله قرار دارد پیدا کنید. پتانسیل ۴:



$$V = k\frac{q}{r} \rightarrow dV = \frac{k\,dq}{r} \rightarrow V = \int dV = \int \frac{k\,dq}{r}$$ ضیزیک

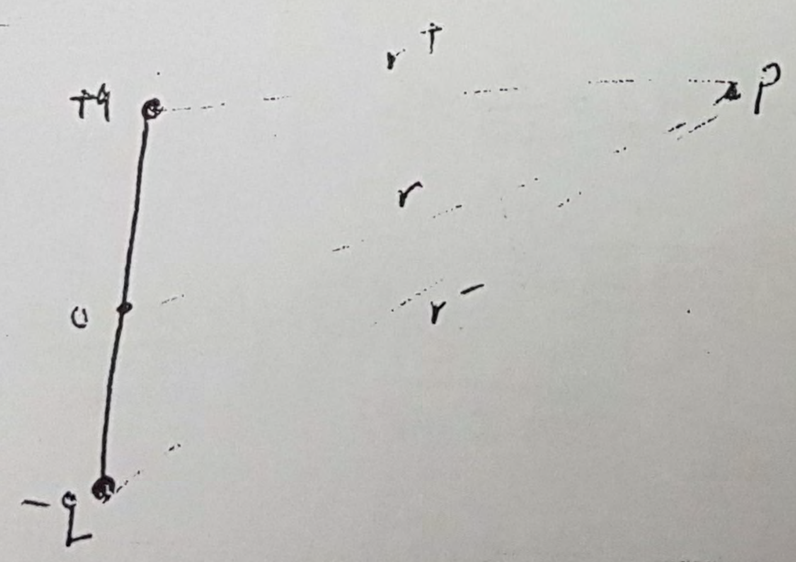
$$\lambda = \frac{q}{L} \Rightarrow \Rightarrow dq = \lambda\, dL \qquad r = \sqrt{x^2+d^2}$$

$$\int \frac{k\,dq}{r} = \int \frac{k\lambda\,dx}{\sqrt{x^2+d^2}} = k\lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+d^2}} = \left[k\lambda \ln u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right]_0^L$$

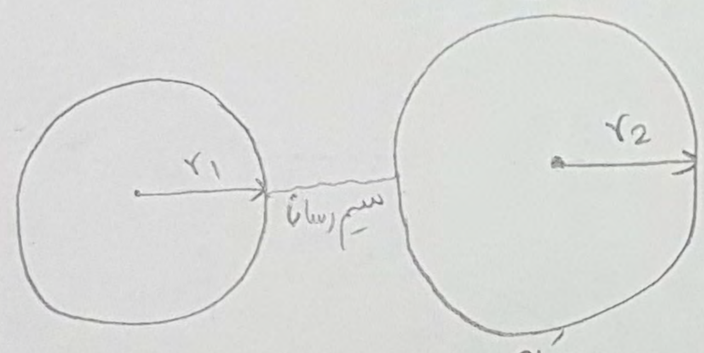
$$V = k\lambda\left(\ln\left|L+\sqrt{L^2+d^2}\right| - \ln|d|\right) \rightarrow V = k\lambda \ln\left|\frac{L+\sqrt{L^2+d^2}}{d}\right|$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{u^2 \pm a^2}}\,du = \ln\left|u+\sqrt{u^2 \pm a^2}\right|$$

مسئله ۳: پتانسیل حاصل از ۲ قطبی الکتریکی زیر را در نقطه‌ی P و همچنین در نقطه‌ی ۱ بسیار دور از دوقطبی پیدا کنید.



مسئله ۴: در شکل زیر فرض کنید $r_1 = 1cm$ و $r_2 = 2cm$ ، قبل از آن که کره‌ها به وسیله‌ی یک سیم نازک رسانا به هم وصل شوند بار $0.2\mu C$ روی کره‌ی کوچکتر قرار دارد و کره‌ی بزرگتر بدون بار است مطلوب است محاسبه‌ی الف) بار ب) چگالی سطحی بار ج) پتانسیل هر کره بعد از متصل شدن آنها



$q_1 + q_2 = 0.2\mu C$

سطح رسانا یک سطح هم پتانسیل است

بعد از اتصال $V_1 = V_2 \Rightarrow k\frac{q'_1}{r_1} = k\frac{q'_2}{r_2} \Rightarrow \frac{q'_1}{1cm} = \frac{q'_2}{2cm} \Rightarrow q'_2 = 2q'_1$

اصل پایستگی بار $q'_1 + q'_2 = q_1 + q_2 = 0.2\mu C$

$\Rightarrow q'_1 + 2q'_1 = 0.2\mu C \Rightarrow q'_1 = \frac{2}{30}\mu C \quad q'_2 = \frac{2}{15}\mu C$

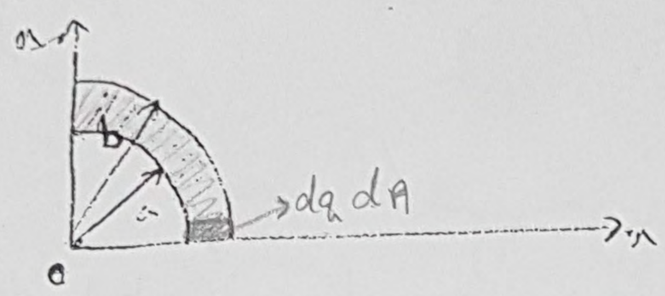
$$\sigma_1 = \frac{q'_1}{A_1} = \frac{\frac{1}{15}(\mu C)}{4\pi r_1^2} = \frac{10^{-4}(C)}{60\pi\, 10^{-4}(m^2)} = \frac{1\,(C)}{6000\pi\,(m^2)}$$

$$\sigma_2 = \frac{q'_2}{A_2} = \frac{\frac{2}{15}(\mu C)}{4\pi r_2^2} = \frac{10^{-4}(C)}{30\pi \times 4\times 10^{-4}(m^2)} = \frac{1\,(C)}{12000\pi\,(m^2)} =$$

$$V_1 = V_2 = k\frac{q'_1}{r_1} = k\frac{q'_2}{r_2} = 9\times 10^{-9}\left(\frac{N.m^2}{C^2}\right)\frac{\frac{1}{15}\times 10^{-6}(C)}{10^{-2}(m)} = \frac{3}{5}\times 10^{5}\left(\frac{N.m}{C}\right) = \frac{3}{5}10^{5}(V)$$

چگالی توابع سطحی

مسئله‌ی ۵: بار Q را روی یک طوق دایره‌ای شکل نازک به شعاع داخلی a و شعاع خارجی b توزیع کرده‌ایم، این بار چنان توزیع شده است که چگالی بار آن از رابطه‌ی $\sigma = \sigma_0 r^2$ بدست می‌آید که در آن r فاصله‌ی هر نقطه از مرکز طوق است. نشان دهید که پتانسیل مرکز طوق برابر است با: $V = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{a+b}{ab}\right)$ پتانسیل ۵:



$$V = \frac{kq}{r} \longrightarrow dV = \frac{k\,dq}{r}$$

$$dA = r\,d\theta\,dr \qquad \sigma = \frac{q}{A} \Rightarrow \sigma dA = dq \Rightarrow dq = \frac{\sigma_0}{r^3} r\,dr\,d\theta$$

$$dV = \frac{k \times \frac{\sigma_0}{r^2}\,dr\,d\theta}{r} \Rightarrow dV = k\frac{\sigma_0}{r^3}\,dr\,d\theta \Rightarrow \int dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_a^b k\frac{\sigma_0}{r^3}\,dr\,d\theta$$

$$V = k\sigma_0\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^b \frac{1}{r^3}\,dr = k\sigma_0\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\left(\frac{-1}{2r^2}\right]_a^b = k\sigma_0\left(\frac{\pi}{2}\right)\left[\frac{-1}{2a^2}+\frac{1}{2b^2}\right]$$

$$\frac{-\pi k\sigma_0}{4}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right) = \frac{-\pi k\sigma_0}{4}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}\right) = \frac{-\sigma_0}{16\varepsilon_0}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}\right) \Rightarrow \star$$

$$\int dq = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_a^b \frac{\sigma_0}{r^3} r\,dr\,d\theta = \sigma_0\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^b \frac{1}{r^2}\,dr = \sigma_0 \times \frac{\pi}{2}\left[\frac{-1}{r}\right]_a^b$$

$$= \sigma_0 \times \frac{\pi}{2}\left[\frac{-1}{b}+\frac{1}{a}\right] \Rightarrow Q = \frac{\sigma_0\pi}{2}\left(\frac{b-a}{ab}\right)$$

$$\star \Rightarrow \frac{-\sigma_0}{16\varepsilon_0}\left(\frac{(a+b)(a-b)}{abab}\right) \xrightarrow{\times\frac{\pi}{\pi}} \frac{-\sigma_0\pi}{\underbrace{16}_{2\times 8}\varepsilon_0\pi}\left(\frac{a-b}{ab}\right)\left(\frac{a+b}{ab}\right) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{a+b}{ab}\right)$$

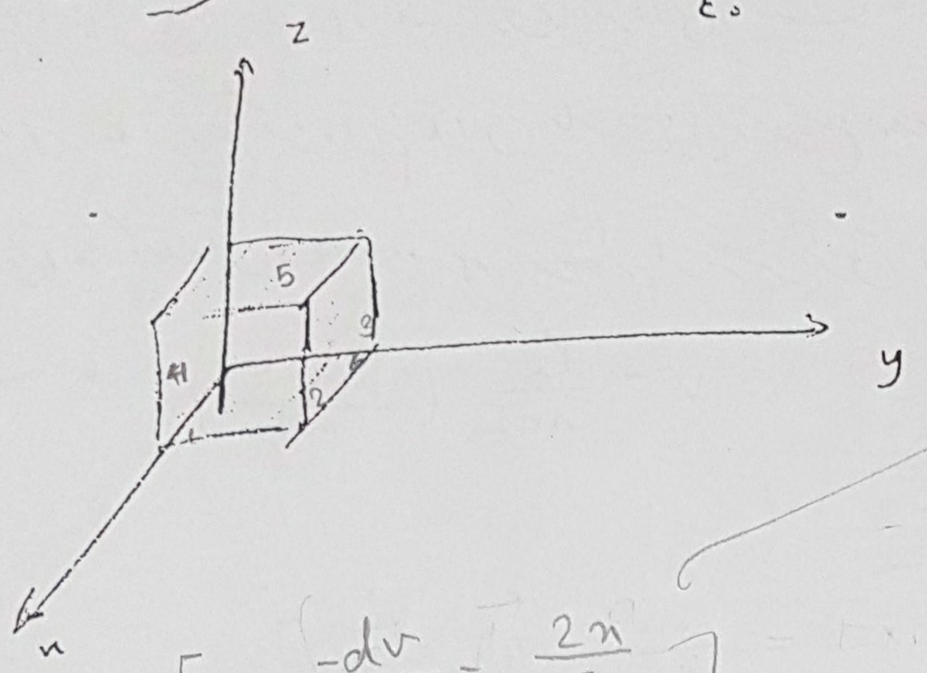
مسئله ۶: فضای میان دو کره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های a و b از ماده‌ی نارسانایی با چگالی بار یکنواخت ρ پر شده است. پتانسیل الکتریکی را به صورت تابعی از فاصله‌ی r از مرکز دو کره در فضاهای زیر به دست آورید:

$$dV = \qquad \rho = \frac{q}{V}$$

$$V = \frac{kq}{r} \rightarrow dV = \frac{k\,dq}{r}$$

الف) $r > b$ ب) $a < r < b$ ج) $r < a$ د)

مسئله‌ی ۷: تابع پتانسیل الکتریکی در هر نقطه از فضا به صورت $V = -\frac{(x^2+y^2)}{\varepsilon_0}$ است. بار الکتریکی موجود در داخل مکعبی به ضلع a را مطابق شکل به دست آورید.



وقتی تابع پتانسیل میده حتماً از این فرمولا می‌ری

$$E_x = \frac{-dv}{dx} = \frac{2x}{\varepsilon_0}$$

$$E_y = \frac{-dv}{dy} = \frac{2y}{\varepsilon_0}$$

$$E_z = \frac{-dv}{dz} = 0$$

$$\vec{E} = E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k}$$

قانون گاوس: $\varphi = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \int_1 \vec{E}\cdot d\vec{A}_1 + \int_2 \vec{E}\cdot d\vec{A}_2 + \int_3 \vec{E}\cdot d\vec{A}_3 + \int_4 \vec{E}\cdot d\vec{A}_4 + \int_5 \vec{E}\cdot d\vec{A}_5 + \int_6 \vec{E}\cdot d\vec{A}_6 = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$

$$\vec{dA}_1 = dy\,dz\,\hat{i}$$
$$\vec{dA}_2 = dx\,dz\,\hat{j}$$
$$\vec{dA}_3 = dy\,dz\,(-\hat{i})$$
$$\vec{dA}_4 = dx\,dy\,(-\hat{j})$$
$$\vec{dA}_5 = dx\,dy\,\hat{k}$$
$$\vec{dA}_6 = dx\,dy\,(-\hat{k})$$

$$\iint_1 \frac{2x}{\varepsilon_0}\,dy\,dz + \iint_2 \frac{2y}{\varepsilon_0}\,dx\,dz + \iint_3 \frac{-2x}{\varepsilon_0}\,dy\,dz + \iint_4 \frac{-2y}{\varepsilon_0}\,dx\,dz$$

$$\int_5 0 + \int_6 0 = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

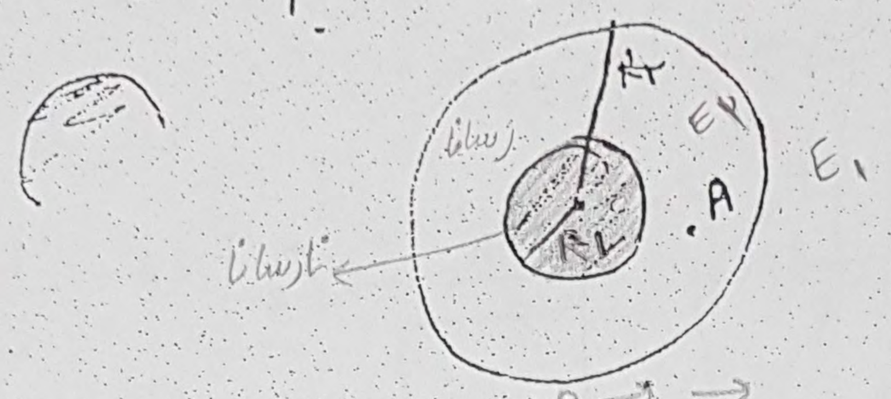
$$\Rightarrow q_{in} = (2xa^2)\Big|_{x=a} + (2ya^2)\Big|_{y=a} + (-2xa^2)\Big|_{x=0} + (2ya^2)\Big|_{y=0}$$

$$q_{in} = 2a^3 + 2a^3 + 0 + 0 = 4a^3$$

برای محاسبه قانون گاوس گاهاً از خود بردارها استفاده می‌کنیم نه از $E \times A \times \cos\theta$

مسئله ۸: یک کره‌ی با دوار به شعاع R_1 و چگالی بار $\rho = \frac{B}{r^2}$ مفروض است که پوسته‌ی کروی رسانا با بار Q و شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجی R_2 با آن هم مرکز می‌کنیم، پتانسیل الکتریکی را در نقطه‌ی A به دست آوریم

نارسانا



اولین راهی که به ذهن میاد

$$\Delta V = V_P - V_\infty = -\int_\infty^P \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\left[\int_\infty^{R_2} \vec{E}_1\cdot d\vec{s} + \cancelto{0}{\int_{R_2}^{R_1} \vec{E}_2\cdot d\vec{s}}\right]$$

درون رسانا

قانون گاوس

$$\oint \vec{E}_1\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \int E_1\, dA \cancelto{0}{\cos\theta} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_1 \int dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 A = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{q_{in}}{A\varepsilon_0} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0 4\pi r^2}$$

سطح کره‌ای که شعاع r دارد

$$= \frac{Q + \int \rho\, dv}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad v = \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow dv = 4\pi r^2 dr$$

$$E_1 = \frac{Q + \int_0^{R_1} \frac{B}{r'^2}\times 4\pi r'^2 dr'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q + 4\pi B\int_0^{R_1} dr'}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q + 4\pi B R}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

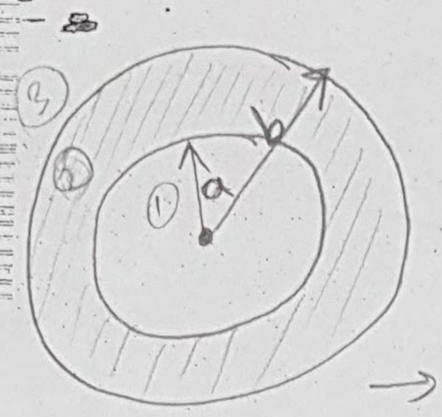
$$V_A = -\int_\infty^{R_2} E_1\, ds \cancelto{1}{\cos\theta} = -\int_\infty^{R_2} \frac{Q + 4\pi B R_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr = -\frac{Q + 4\pi B R_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^{R_2} \frac{dr}{r^2}$$

زاویه داده نشده ⇐ ۱۸۰ یا صفر گرفت فرق نداره

$$V_A = -\frac{Q + 4\pi B R_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{r}\right)\Bigg|_\infty^{R_2} = \frac{Q + 4\pi B R_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

مسئله 6

تابع سینوسی



$$\rho = \frac{q}{V} \quad \text{ثابت}$$

مسیر برای فرار: $\infty \to r$

③ $$\Delta V = V_r - V_\infty = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{s} \to$$

$$\to V_r = -\int_\infty^r \vec{E}_r \cdot d\vec{s}$$

قانون گاوس $$\oint \vec{E}_3 d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \longrightarrow \int E_3 dA \cancel{\cos\theta}^{1} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_3 \int dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

سطح گوسی تقارن عمود بار دارد $$E_3 A = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \longrightarrow E_3 = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0 A}$$

$$E_3 = \frac{\frac{4}{3}\pi\left[b^3 - a^3\right]\rho}{\varepsilon_0 4\pi r^2} = \frac{\rho(b^3-a^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$\rho = \frac{q}{V} = \frac{dq}{dv} \longrightarrow dq = \rho dv \longrightarrow q_{in} = \int dq = \int \rho dv = \rho \int dv = \rho V_{\text{جمع}}$$

---

② $$\bar{V}_r = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\left[\int_\infty^b \bar{E}_3 \cdot d\vec{s} + \int_b^r \bar{E}_2 \cdot d\vec{s}\right]$$

گاوس $$\oint \bar{E}_2 d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \longrightarrow \int E_2 dA \cancel{\cos\theta}^{1} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \to E_2 \int dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \to E_2 A = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

سطح گوسی تقارن عمود بار دارد

$$E_2 = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0 A} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi(r^3 - a^3)}{\varepsilon_0 4\pi r^2} \Rightarrow E_2 = \frac{\rho(r^3-a^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$\bar{V}_r = -\left[\int_\infty^b \frac{\rho(b^3-a^3)}{3\varepsilon_0 r^2} dr + \int_b^r \frac{\rho(r^3-a^3)}{3\varepsilon_0 r^2} dr\right]$$

$$= -\left[\frac{\rho(b^3-a^3)}{3\varepsilon_0}\int_\infty^b \frac{dr}{r^2} + \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\int_b^r r\,dr - \int_b^r \frac{a^3}{r^2} dr\right]\right]$$

$$\bar{V}_r = -\frac{\rho(b^3-a^3)}{3\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{r}\right)\Big|_\infty^b - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\left(\frac{r^2}{2}\right)\Big|_b^r - a^3\left(\frac{-1}{r}\right)\Big|_b^r\right]$$

$$= \frac{\rho(b^3-a^3)}{3\varepsilon_0 b} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^2-b^2}{2}\right) - \left[\frac{a^3}{r} - \frac{a^3}{b}\right]$$

---

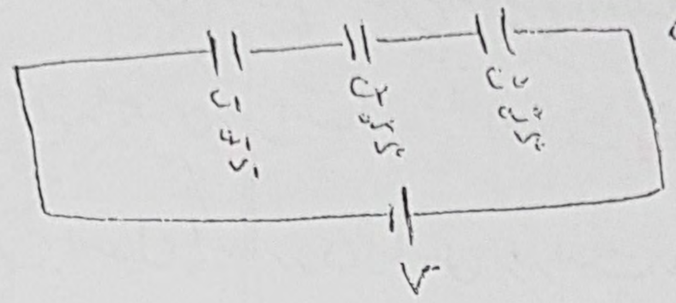
① $$V_2 = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\left[\int_\infty^b \bar{E}_2 \cdot d\vec{s} + \int_b^a E_2 \cdot d\vec{s} + \cancel{\int_a^r \vec{E}_1 \cdot ds}^{0}\right]$$

به طور مشابه با قسمت 2 با تغییر متغیر $a \to r$

$$\bar{V}_{r_3} = \frac{\rho(b^3-a^3)}{3\varepsilon_0 b} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right) - \left(a^2 - \frac{a^3}{b}\right)$$

نحوه ی بهم بستن خازن ها:

خازن های سری: هرگاه اختلاف پتانسیل اعمال شده به سر ترکیب آن ها برابر با مجموع اختلاف پتانسیل های دو سر خازن باشد. خازن های متصل به هم متوالی نامیده می شوند



$$q = q_1 = q_2 = q_3$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

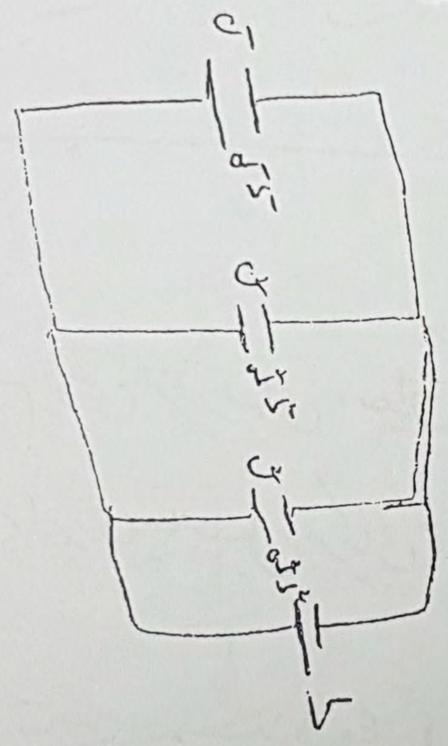
$$\frac{q}{C_t} = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3}$$

$$\frac{1}{C_t} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$i_t = i_1 = i_2 = \dots = i_n$$

C_t مجموع از ظرفیت های خازن ها کوچکتر است.

خازن های موازی: خازن های متصل شده به هم وقتی موازی نامیده می شوند که اختلاف پتانسیل اعمال شده بر دو سر ترکیب باعث ایجاد اختلاف پتانسیل در دو سر خازن شود.



$$V = V_1 = V_2 = V_3$$

$$q = q_1 + q_2 + q_3$$

$$C_T V = C_1 V_1 + C_2 V_2 + C_3 V_3$$

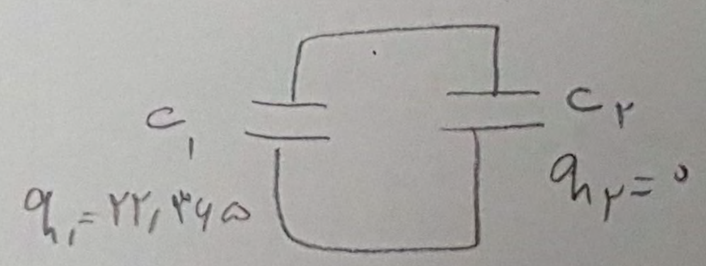
$$\Rightarrow C_T = C_1 + C_2 + C_3$$

$$i_t = i_1 + i_2 + \dots + i_n$$

ظرفیت کل از ظرفیت تک تک خازن ها بزرگتر است.

مثال: با استفاده از باتری ۶٫۲V خازن C_1 با ظرفیت ۳٫۵۰μF تا حین اختلاف پتانسیل باردار شده است. سپس باتری را برمی داریم و به خازن بدون بار C_2 با ظرفیت ۸٫۹۰μF متصل می کنیم. اختلاف پتانسیل بعد از اتصال چقدر است؟

$$q_1 = C_1 V = 3.50(\mu F) \times 6.2(V) = 22.36(\mu C)$$



$$q_1^* + q_2^* = q_1 + q_2 = 22.36\ \mu C \quad (1)$$

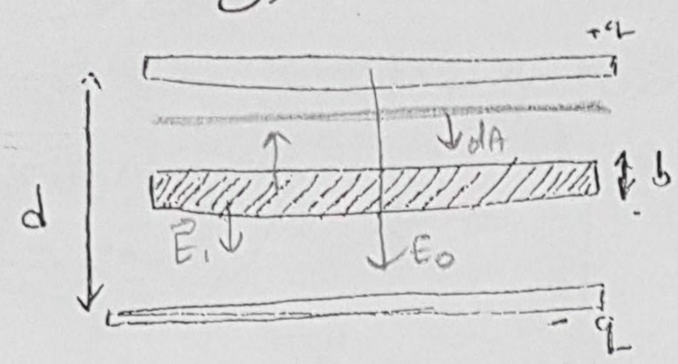
بعد از اتصال $V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{q_1^*}{C_1} = \frac{q_2^*}{C_2} \Rightarrow \frac{q_1^*}{3.50\mu F} = \frac{q_2^*}{8.90\mu F}$

$$q_2^* = \frac{8.90}{3.50} q_1^* \Rightarrow q_2^* = 2.521\, q_1^* \quad (2)$$

$q_1^* =$ ۸) $q_2^* =$

$$\xrightarrow{(1),(2)} q_1^* + 2.521 q_1^* = 22.36 \times 10^{-6}\ (C) \qquad q_1^* = \frac{22.36}{3.521}\ \mu C = 6.351\ \mu C \qquad q_2 = 14.01\ \mu C$$

خازن - ۵



الف) ظرفیت C_0 پیش از گذاشتن این تیغه چقدر است؟

ب) بار آزاد ظاهر شده روی این صفحه چقدر است؟

ج) میدان الکتریکی E_0 در فضای بین صفحه‌های دی الکتریک چقدر است؟

د) میدان الکتریکی E_1 در تیغه‌ی دی الکتریک چقدر است؟

هـ) اختلاف پتانسیل V در بین صفحه‌ها پس از گذاشتن تیغه چقدر است؟

الف) $C_0 = \frac{K\varepsilon_0 A}{d} \xrightarrow{K=1} C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = 8{,}21\ (pF)$

ب) $C_0 = \frac{q_0}{V_0} \Rightarrow q_0 = C_0 V_0 \simeq 702\ (pC)$

ج) $\oint K\vec{E}\,d\vec{A} = \frac{q_0}{\varepsilon_0} \xrightarrow{K=1} \int E_0\, dA \overset{1}{\cos\theta} = \frac{+q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \int dA = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$

د) $\oint K\vec{E}_{1t}\,d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \int K \underbrace{E_{1t}}_{E_{1t} = E_0 - E_1} dA \overset{-1}{\cos\theta} = \frac{-q}{\varepsilon_0}$

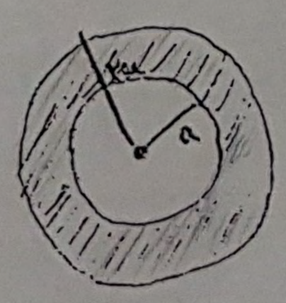
$K E_{1t} \int dA = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow K E_{1t} A = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_{1t} = \frac{q}{\varepsilon_0 A K}$

هـ) $\Delta V = \overset{<0}{V - V} = -\int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{L} \Rightarrow -\Delta V = -\int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{L} \rightarrow \Delta V = \int_+^- \vec{E}\, d\vec{L} = \int_+^- (\vec{E}_0 + \vec{E}_{1t})\, d\vec{L}$

$\Delta V = \int_+^- \vec{E}_0 \cdot d\vec{L} + \int_+^- \vec{E}_{1t}\, d\vec{L} = \int_+^- E_0\, dL \overset{1}{\cos\theta} + \int_+^- E_{1t}\, dL \overset{1}{\cos\theta}$

$= E_0 \int_+^- dL + E_{1t} \int_+^- dL = E_0 (d - b) + E_{1t}\, b$

مسئله‌ی یک: فضای بین دو پوسته‌ی رسانای کروی هم مرکز به شعاع a و 2a با عایقی با ضریب دی الکتریک متغیر $k = \frac{r}{a}$ پر شده است. r فاصله‌ی هر نقطه از دی الکتریک تا مرکز کره است. اگر اختلاف پتانسیل الکتریکی بین دو پوسته برابر با V_0 باشد:



الف) میدان الکتریکی بین دو پوسته را بدست آورید؟ $\oint \vec{E}_0 \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_0 = \frac{q_{in}}{A\varepsilon_0} = \frac{r}{a^2}$

ب) ظرفیت الکتریکی خازن را بدست آورید؟

ج) انرژی الکترواستاتیک را برای ناحیه‌ی $a < r < \frac{3}{2}a$ بدست آورید. $C_0 = \frac{K\varepsilon_0 A}{d} = \frac{r}{a^2}\varepsilon_0 A$

11) $q = C_0 V_0 = \frac{r}{a^2}\varepsilon_0 A \qquad u = \frac{q^2}{2C}$

الف) $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow EK\int dA = EK\int_0^r 8\pi r\,dr\cos\theta = \frac{q}{\varepsilon_0}$

$A = 4\pi r^2 \rightarrow dA = 8\pi r\,dr$

$\Rightarrow \frac{8E_0\pi r}{a\times a}\int_0^r r\,dr = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{8E_0\pi r}{a^2}\cdot\frac{r^2}{2}\Big|_0^r = \frac{q}{\varepsilon}$

وقتی استاد هم به سوال های جزوه خودش مسلط نیست :)

$E_0 = \frac{a q_0}{\varepsilon_0 4\pi r^3}$

ب) $C = \frac{q}{V}$ $\quad V_0 = -\int_i^f \vec{E}\,d\vec{L} = -\int_+^- E\cdot dL\cos\theta = \int_a^{2a}\frac{a q}{4\varepsilon_0\pi r^3}dr$

$= \frac{3qa}{4\varepsilon_0\pi}\int_a^{2a}\frac{dr}{r^3} = \frac{-3qa}{4\varepsilon_0\pi}\times\frac{1}{2r^2}\Big|_a^{2a} = \frac{-3qa}{8\varepsilon_0\pi}\left(\frac{1}{4a^2}-\frac{4}{4a^2}\right) = \frac{3q}{32\varepsilon_0\pi a}$

$\Downarrow$

$q = V_0\frac{32}{3}\varepsilon_0\pi a$

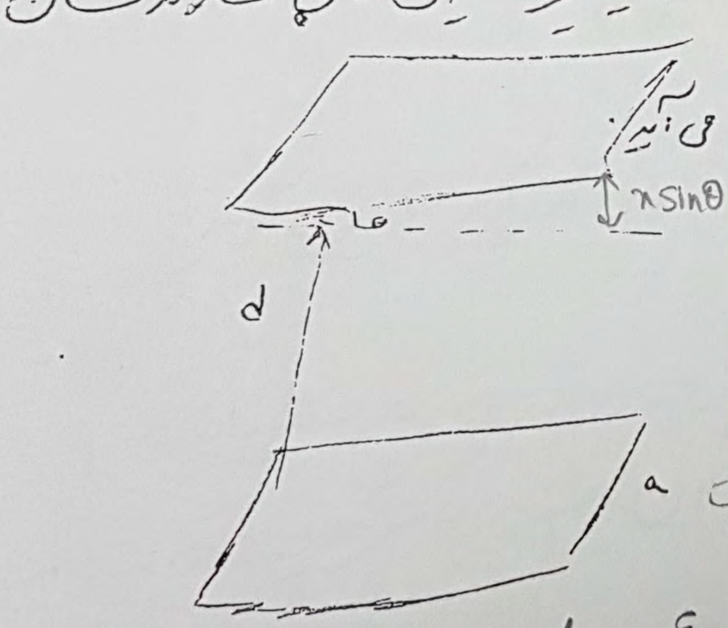
$C = \frac{q}{\frac{3q}{32\varepsilon_0\pi a}} = \frac{32\varepsilon_0\pi a}{3}$

ج) $U = \int dU = \int k\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dV = \int_a^{\frac{3}{2}a}\frac{\varepsilon_0 64 V_0^2 a^4\times 4\pi r^2}{18 a r^6}dr = \frac{64\varepsilon_0 V_0^2 a^3\times 4\pi}{18}\int_a^{\frac{3}{2}a}\frac{dr}{r^3}$

$\frac{-128\varepsilon_0 V_0^2 a^3\pi}{9}\cdot\frac{1}{2r^2}\Big|_a^{\frac{3}{2}a} = \frac{320}{81}a\pi r_0^2\varepsilon_0$

$E_0 = \frac{32 V_0\varepsilon_0\pi a^2}{12\varepsilon_0\pi r^3} = \frac{8V_0 a^2}{3r^3} \rightarrow V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow dV = 4\pi r^2 dr$

مسئله‌ی ۲: خازنی مطابق شکل زیر دارای صفحه‌های مربعی به ضلع a است که با یکدیگر زاویه‌ی θ می‌سازند نشان دهید که برای زاویه‌ی کوچک θ ظرفیت خازن از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید



$C = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d}\left(1-\frac{a\theta}{2d}\right)$

~~قانون گاوس~~ متفاوت نیست

$C = \frac{q}{V} \rightarrow \Delta V = -\int_i^f \vec{E}\,d\vec{A}$

$C = k\varepsilon_0\frac{A}{d} \xrightarrow{k=1} \varepsilon_0\frac{A}{d}$

$dC = \varepsilon_0\frac{A\,dx}{d} = \varepsilon_0\frac{a\,dx}{d+x\sin\theta}$? $\xrightarrow[\sin\theta\simeq\theta]{\theta\ll 1}\varepsilon_0\frac{a\,dx}{d+x\theta}$

چون اتصال خازن‌های جزئی، موازی است

$C = \int dC = \int_0^a\frac{\varepsilon_0 a\,dx}{d+x\theta} = \varepsilon_0 a\int_0^a\frac{dx}{d+x\theta} = \varepsilon_0 a\int_a^a\frac{\frac{du}{\theta}}{u}$

تغییر متغیر $u = d+x\theta \rightarrow du = \theta\,dx \Rightarrow dx = \frac{du}{\theta}$

$C = \frac{\varepsilon_0 a}{\theta}\int_0^a\frac{du}{u} = \frac{\varepsilon_0 a}{\theta}\ln u\Big|_0^a = \frac{\varepsilon_0 a}{\theta}\ln(d+x\theta)\Big|_0^a \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 a}{\theta}\left[\ln(d+a\theta)-\ln d\right]$

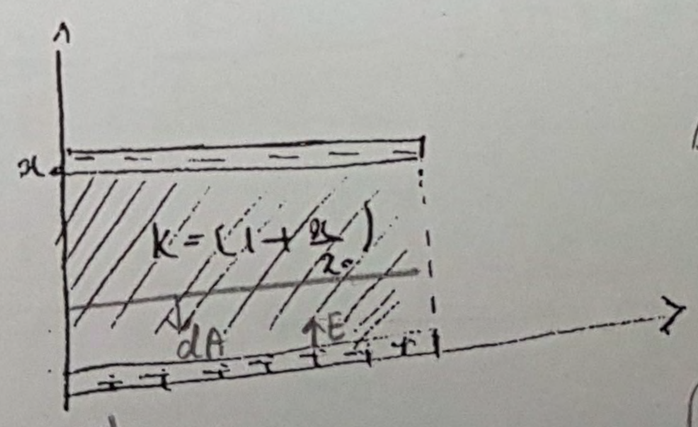
$C = \frac{\varepsilon_0 a}{\theta}\ln\left(1+\frac{a\theta}{d}\right) = \frac{\varepsilon_0 a}{\theta}\left[\frac{a\theta}{d}-\frac{1}{2}\frac{a^2\theta^2}{d^2}\right] = \frac{\varepsilon_0 a^2}{d}\left[1-\frac{1}{2}\frac{a\theta}{d}\right]$

خازن ۶

مسئله‌ی ۳: برای تشکیل کره‌ای با چگالی حجمی ρ و بار کل q و شعاع R چه میزان انرژی لازم است؟

مسئله‌ی ۴: دو سطح هادی (رسانا) به موازات هم قرار دارند و مساحت صفحات (A) هست. اگر فضای میان دو صفحه با ماده‌ی دی‌الکتریک $K=(1+\frac{x}{x_0})$ پر شده باشد ظرفیت خازن حاصل را بیابید.

$$C=\frac{q}{V}$$



$$\Delta V=-\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}=-\int_+^- E\,ds\,\cancel{\cos\theta}^{\,1}$$

$$\Delta V=\int_+^- E\,ds \qquad \oint K\vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$\int\left(1+\frac{x}{x_0}\right)E\,dA\,\cancel{\cos\theta}^{\,-1}=\frac{-q}{\varepsilon_0}\rightarrow\left(1+\frac{x}{x_0}\right)E\int dA=\frac{q}{\varepsilon_0}\Rightarrow\frac{x_0+x}{x_0}EA=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\rightarrow E=\frac{q x_0}{A\varepsilon_0(x+x_0)} \qquad \Delta V=\int_0^{x_0}\frac{q x_0}{A\varepsilon_0(x+x_0)}dx=\frac{q x_0}{A\varepsilon_0}\int_0^{x_0}\frac{dx}{x+x_0}$$

$$\text{۱۴)}=\frac{q x_0}{A\varepsilon_0}\left(\ln(x+x_0)\Big]_0^{x_0}\right)=\frac{q x_0}{A\varepsilon_0}\left(\ln(2x_0)-\ln x_0\right)=\frac{q x_0\ln 2}{A\varepsilon_0}$$

$$C=\frac{q}{V}\rightarrow C=\frac{q}{\frac{q x_0\ln 2}{A\varepsilon_0}}\Rightarrow C=\frac{A\varepsilon_0}{x_0\ln 2}$$ ۹۴

مسئله‌ی ۵: تابع پتانسیل در فضای آزاد به صورت $V = 4x^2 + 4y^2$ داده شده است. انرژی ذخیره شده در مکعبی به ابعاد $0 \le x \le 1$ و $0 \le y \le 1$ و $0 \le z \le 1$ را به دست آورید.

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -8x \qquad E_y = -\frac{dV}{dy} = -8y \qquad E_z = -\frac{dV}{dz} = 0$$

$$\vec{E} = \vec{E}_x \hat{i} + \vec{E}_y \hat{j} + \vec{E}_z \hat{k} \qquad E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 8\sqrt{x^2+y^2}$$

$$= -8x\hat{i} - 8y\hat{j}$$

$$u = \int du = \int \frac{1}{2} K \varepsilon_0 E^2 dv \overset{K=1}{=\!=} \int \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 dv = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left[64(x^2+y^2)\right] dx\,dy\,dz$$

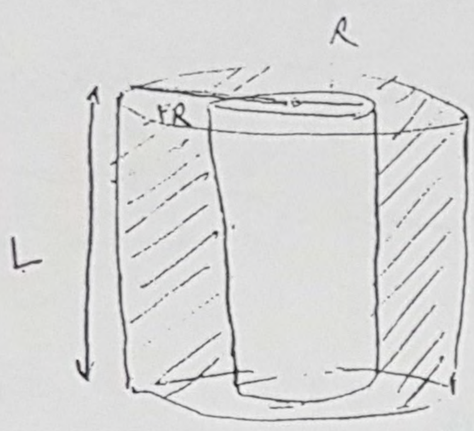
$$= 32\varepsilon_0 \left[\int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz\right] = 32\varepsilon_0 \int_0^1\int_0^1 \frac{x^3}{3} + xy^2 \Big|_0^1 dy\,dz$$

$$= 32\varepsilon_0 \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{3} + y^2\,dy\,dz = 32\varepsilon_0 \int_0^1 \frac{1}{3}y + \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 dz = 32\varepsilon_0 \int_0^1 \frac{2}{3}\,dz$$

$$= \frac{64}{3}\varepsilon_0 \int_0^1 dz \qquad u = \frac{64}{3}\varepsilon_0$$

مسئله‌ی ۷: خازن استوانه‌ای طویل به طول L و شعاع‌های داخلی R و خارجی 2R با ماده‌ی دی‌الکتریک با ضریب $k(r)=\left(\frac{r}{R}\right)^2$ پر شده است که در آن r فاصله از محور استوانه است و $2R < L$ می‌باشد. بنابراین می‌توان از سرریز میدان الکتریکی در دو انتهای استوانه‌ها صرف‌نظر کرد. اگر بار روی صفحات خازن q باشد.

الف) ظرفیت خازن؟ ب) انرژی الکتریکی ذخیره شده تا شعاع $\frac{3}{2}R$؟



$$C=\frac{q}{V}$$

$$V=\int_+^- \vec{E}\,d\vec{s}=\int_+^- E\,ds\cos\theta=\int_+^- E\,ds$$

قانون گاوس

$$\oint k\,\vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{q_{in}}{\varepsilon_0}=\int kE\,dA\cos\theta=\frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$\int kE\,dA=\frac{q}{\varepsilon_0}\xrightarrow{k=\left(\frac{r}{R}\right)^2}EA\frac{r^2}{R^2}=\frac{q}{\varepsilon_0}\Rightarrow E=\frac{R^2q}{r^2\times 2Rr2L\varepsilon_0}=\frac{R^2q}{2Rr^3L\varepsilon_0}$$

$$\Delta V=\int_+^- E\,ds=\int\frac{R^2q}{2Rr^3L\varepsilon_0}dr=\frac{R^3q}{2RL\varepsilon_0}\int_R^{2R}\frac{dr}{r^3}=\frac{-R^2q}{2RL\varepsilon_0}\times\frac{1}{2r^2}\Big]_R^{2R}$$

$$=\frac{-R^2q}{2RL\varepsilon_0}\left(\frac{1}{8R^2}-\frac{1}{2R^2}\right)=\frac{-q}{2RL\varepsilon_0}\left(\frac{-\cancel{6}^{3}}{16}\right)=\frac{3q}{16RL\varepsilon_0}$$

$$C=\frac{q}{V}=\frac{q}{\frac{3q}{16RL\varepsilon_0}}=\frac{16RL\varepsilon_0}{3}$$

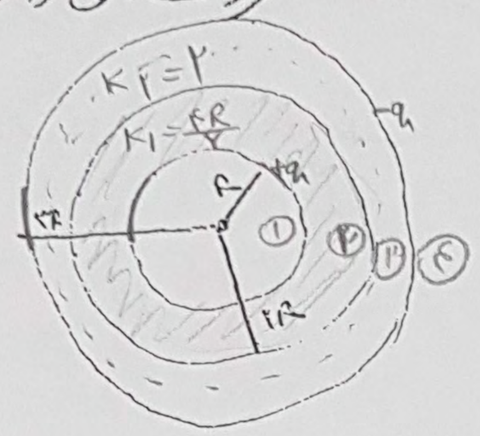
$$U=\int dU=\int_0^{\frac{3}{2}R}\frac{1}{2}k\varepsilon_0E^2dv=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_0^{\frac{3}{2}R}kE^2dv=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left[\int_0^R kE_1^2dv+\int_R^{\frac{3}{2}R}kE_2^2dv\right]$$

$$=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_0^{\frac{3}{2}R}\frac{r^2}{R^2}\frac{R^4q^2}{4R^2r^4L^2\varepsilon_0^2}\times 2Rr2L\,dr=\frac{1}{2}\frac{2Rq^2\times R^2}{4R^2L\varepsilon_0}\int_R^{\frac{3}{2}R}\frac{dr}{r^3}\quad\frac{q^2R^2}{4RL\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{2r^2}\right|_R^{\frac{3}{2}R}$$

$$=\frac{-q^2R^2}{8R\varepsilon_0L}\left[\frac{4}{9R^2}-\frac{9}{9R^2}\right]=\frac{5q^2}{72R\varepsilon_0L}$$

خازن ۷

مسئله‌ی ۶: فضای بین دو رسانای یک خازن کروی به شعاع‌های R و ۳R با دو نوع عایق با ثابت دی‌الکتریک $k_1 = \frac{4R}{r}$ ، $R < r < 2R$ و $k_2 = 2$ برای $2R < r < 3R$ پر شده است. اگر رسانای داخلی دارای بار q و رسانای خارجی دارای بار $-q$ باشد:



الف) میدان الکتریکی را در تمامی نواحی به دست آورید!

ب) انرژی الکتریکی ذخیره شده تا شعاع 2R چیست؟

ج) مطلوب است محاسبه‌ی ظرفیت این خازن کروی؟

$$\oint k\vec{E}_1 \cdot d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \int k E_1 dA \cos\theta = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \rightarrow E_1 = \frac{q_{in}}{k\varepsilon_0 A} = 0$$

$$\int k E_2 dA = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E_2 = \frac{q}{kA\varepsilon_0} = \frac{+q}{\frac{4R}{r} \times 4Rr^2 \varepsilon_0} = \frac{q}{16Rr\pi\varepsilon_0}$$

$$\int k E_3 dA = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E_3 = \frac{q}{kA\varepsilon_0} = \frac{q}{2 \times 4Rr^2 \varepsilon_0} = \frac{q}{8Rr^2\varepsilon_0}$$

$$\int k E_4 dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{+q-q}{\varepsilon_0} = 0$$

ب) $$U = \int u\, dv = \int_0^{2R} \frac{1}{2}\varepsilon_0 k E^2 dv = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left[\int_0^R k E_1^2 dv + \int_R^{2R} k E_2^2 dv \right]$$

$v = \frac{4}{3}\pi r^3$

$dv = 4\pi r^2 dr$

$$\rightarrow U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_R^{2R} \frac{4R}{r} \left(\frac{q}{16Rr\pi\varepsilon_0} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{\varepsilon_0 q^2 \times R}{2 \times 16 \times \pi \times R^2 \varepsilon_0} \int_R^{2R} \frac{1}{r} dr$$

$$= \frac{q^2}{32\pi R\varepsilon_0} (\ln 2R - \ln R) \Rightarrow U = \frac{q^2}{32\pi R\varepsilon_0} \ln 2$$

ج) $C = \frac{q}{V}$

$$\Delta V = -\int_E^f \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_R^{2R} E_2\, ds + \int_{2R}^{3R} E_3\, ds = \int_R^{2R} E_2\, ds \cos\theta + \int_{2R}^{3R} E_3\, ds \cos\theta$$

$$= \int_R^{2R} \frac{q}{16\pi r R\varepsilon_0} dr + \int_{2R}^{3R} \frac{q}{8\pi r^2 \varepsilon_0} dr = \frac{q}{16\pi R\varepsilon} \int_R^{2R} \frac{dr}{r} + \frac{q}{8\pi\varepsilon} \int_{2R}^{3R} \frac{1}{r^2} dr$$

$$\Delta V = \frac{q}{16\pi R\varepsilon_0} \times \ln 2 + \frac{q}{8\pi\varepsilon_0} \frac{1}{4R} = q \left[\frac{\ln 2}{16\pi\varepsilon_0 R} + \frac{1}{64\pi\varepsilon_0 R} \right]$$

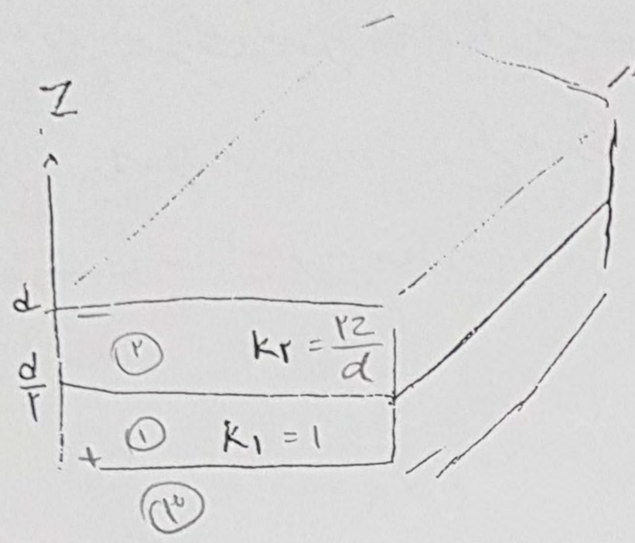
$$C = \frac{q}{V} = \frac{64\pi\varepsilon_0 R}{3\ln 2 + 1}$$

مسئله‌ی ۸: خازن سطحی با مساحت A مطابق شکل از ۲ عایق با ثابت دی الکتریک خازن ۸
$k_1=1$ و $k_2=\frac{2z}{d}$ تشکیل شده است.

الف) با فرض آن که بار روی صفحات خازن q باشد، میدان الکتریکی را در تمام نواحی بدست آورید؟

ب) اختلاف پتانسیل دو سطح خازن را بدست آورید.

ج) ظرفیت این خازن و انرژی ذخیره شده در آن چقدر است؟



$E_2=0 \Leftarrow q_{in}=0$

$$E_1=\oint kE_1\,dA\cos\theta=\frac{q_{in}}{\varepsilon_0}=kE_1\oint dA=\frac{q}{\varepsilon_0}\qquad E_1=\frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

$$\oint kE_2\,dA=\frac{-q}{\varepsilon_0}=\oint kE_2\,dA\cos\theta=\frac{-q}{\varepsilon_0}$$

$$kE_2\int dA=\frac{q}{\varepsilon_0}\Rightarrow E_2=\frac{qd}{2Az\varepsilon_0}$$

$$\Delta V=\int_+^-\vec{E}\cdot\vec{ds}=\int_+^-\vec{E}\cdot\vec{ds}+\int_+^-\vec{E}_2\,\vec{ds}=\int_+^- E_1\,ds\cos\theta+\int_+^- E_2\,ds\cos\theta$$

$$=\int_0^{\frac{d}{2}}E_1\,dz+\int_{\frac{d}{2}}^{d}E_2\,dz=\frac{q}{\varepsilon_0 A}\int_0^{\frac{d}{2}}dz+\frac{dq}{2\varepsilon_0 A}\int_{\frac{d}{2}}^{d}\frac{dz}{z}=\frac{dq}{2\varepsilon_0 A}+\frac{dq}{2\varepsilon_0 A}\ln 2$$

$$=\frac{dq}{2\varepsilon_0 A}(1+\ln 2)$$

$$C=\frac{q}{V}=\frac{2q\varepsilon_0 A}{dq(1+\ln 2)}=\frac{2\varepsilon_0 A}{d(1+\ln 2)}$$

$$U=\int\frac{k}{2}\varepsilon_0 E^2\,dv=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int kE^2\,dv=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left[\int k_1E_1^2\,dv+\int k_2E_2^2\,dv\right]$$

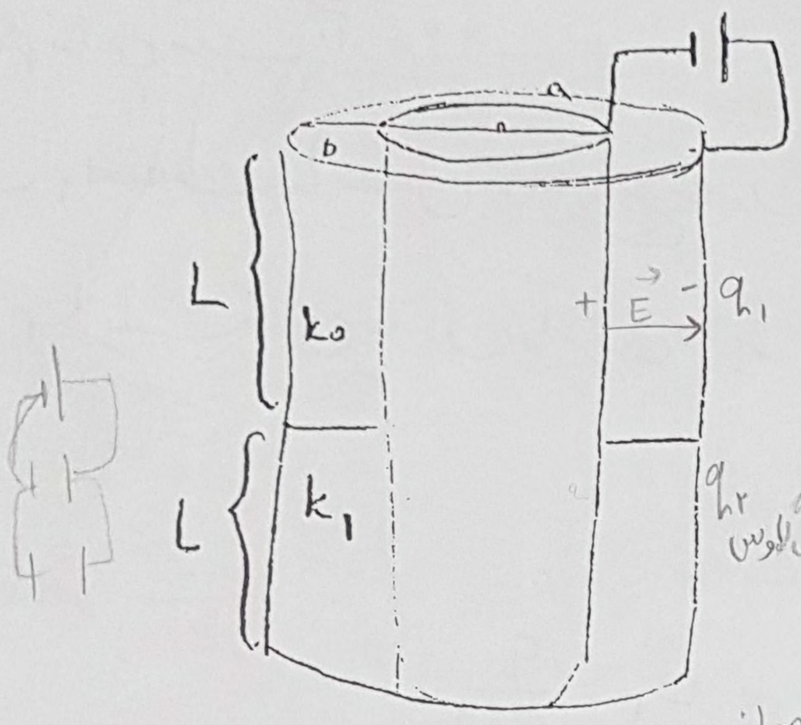
$$\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\int_0^{\frac{d}{2}}\frac{q^2}{\varepsilon_0^2A^2}A\,dz+\int_{\frac{d}{2}}^{d}\frac{2zd^2q^2}{4d\varepsilon_0^2A^2z^2}A\,dz\right)=\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{q^2}{\varepsilon_0^2A}\frac{d}{2}+\frac{dq^2}{2\varepsilon_0^2A}\ln z\Big]_{\frac{d}{2}}^{z=d}\right)$$

$$\frac{q^2d}{4\varepsilon_0 A}(1+\ln 2)\qquad V=Az,\quad dV=A\,dz$$

۱۴)

مسئله‌ی ۹: نیمی از یک خازن استوانه‌ای مطابق شکل روبرو با ضریب دی‌الکتریک ثابت k_0 و نیمی دیگر با ضریب دی‌الکتریک متغیر $k_1 = \alpha r$ پر شده است. اختلاف پتانسیل ثابت V_0 بین استوانه داخلی به شعاع a و استوانه خارجی به شعاع b برقرار است. مطلوبست:

الف) ظرفیت معادل این خازن



$$C = \frac{q}{V}$$

$$\Delta V = V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

قانون گاوس $\oint K\vec{E}\,d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$

در خازن موازی $C_t = C_1 + C_2$

$$\Delta V_1 = V_0 = \int_+^- \vec{E}_1\cdot d\vec{l}$$

$$C_1 = \frac{q_1}{\Delta V_1} \qquad \Delta V_1 = V_- - V_+ = -\int_+^- \vec{E}_1\cdot d\vec{l} = V_0$$

قانون گاوس: $\oint K_0\vec{E}_1\,d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \int K_0 E_1 A\cos\theta = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} \Rightarrow K_0 E_1 \int dA = \int \frac{\sigma\, dA}{\varepsilon_0}$

$$\Delta V = V_0 = \int E\,dL\cos\theta$$

$$\longrightarrow K_0 E_1 A = \frac{q_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{q_1}{\varepsilon_0 K_0 2\pi r h}$$

سطح گاوسی

$$= \int_a^b \frac{q_1\, dr}{2\pi\varepsilon_0 K_0 r h} = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0 K_0 h}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \qquad C_1 = \frac{q_1}{\Delta V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 K_0 h}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$C_2 = \frac{q_2}{\Delta V_2} \qquad \Delta V_2 = V_- - V_+ = -\int_+^- \vec{E}_2\, d\vec{l} = V_0$$

$$\Delta V_2 = V_0 = \int_+^- \vec{E}_2\, d\vec{l}$$

قانون گاوس: $\oint K_1\vec{E}_2\, d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \int K_1 E_2\, dA\cos\theta = \frac{q_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow K_1 E_2\, dA\cos\theta = \frac{q_2}{\varepsilon_0}$

$$K_1 E_2 A = \frac{q_2}{\varepsilon_0} \longrightarrow E_2 = \frac{q_2}{K_1\varepsilon_0 2\pi r h}$$

$$\Delta V = V_0 = \int_+^- E_2\, dL\cos\theta = \int_+^- \frac{q_1\, dr}{K_1\varepsilon_0 2\pi r h} = \frac{q_2}{h 2\pi\varepsilon_0\alpha}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{q_2}{2\pi\varepsilon_0\alpha h}\left(\frac{-1}{r}\right)\Big|_a^b$$

$$= \frac{q_2}{2\pi\varepsilon_0\alpha h}\left(\frac{b-a}{ab}\right) \qquad C_2 = \frac{2\pi\varepsilon_0\alpha h ab}{b-a}$$

نیرو

$$F = \frac{k q_1 q_2}{r^2}$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{q}{L} & \text{خطی} \\ \sigma = \frac{q}{A} & \text{سطحی} \\ \rho = \frac{q}{V} & \text{حجمی} \end{cases}$$

$$k = 9\times10^{9}\ \frac{Nm^2}{C^2} \Big/ \varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\ \frac{C^2}{Nm^2}$$

d	10^{-1}
c	10^{-2}
m	10^{-3}
μ	10^{-6}
n	10^{-9}

$$|R| = \sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}$$

$\vec{R} = \vec{A}+\vec{B}$ هم‌جهت

$\vec{R} = \vec{B}-\vec{A}$ خلاف‌جهت

$R = \sqrt{A^2+B^2}$ عمود بر هم

$R = 2A\cos\frac{\theta}{2}$ ۲ بردار هم اندازه

$e = -1.6\times10^{-19}\,C$

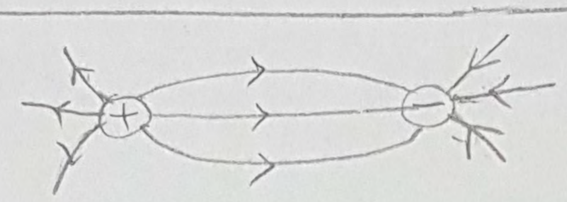
$q = \pm ne$

میدان

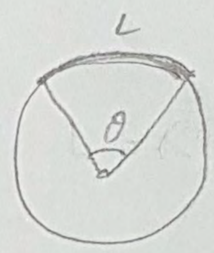
میدان الکتریکی داخل رسانا صفر است

۳ تا سطوح

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{k q_0}{r^2}$$



$\int \cos\theta = \sin\theta$ $\quad$ $\int \sin\theta = -\cos\theta$



$dL = R\,d\theta$

$(\tan\theta)' = 1+\tan^2\theta$

دایره/کره $dA = r\,dr\,d\theta$

$dA = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi$

$$\begin{cases} \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \end{cases}$$

گاوس

$$\oint E\cdot dA = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{cases} S = a^2 \quad V = a^3 & \text{مکعب} \\ S = 2\pi R^2 + 2\pi R h \quad V = \pi R^2 h & \text{استوانه} \\ S = 4\pi R^2 \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3 & \text{کره} \\ S = 2r\pi \quad V = r^2\pi & \text{دایره} \end{cases}$$

بار درون سطح گوسی صفر است؟
اگر رسانا باشد

$\frac{dE(r)}{dr} = 0$ $\Leftarrow$ میدان یکنواخت

پتانسیل

$$V = \frac{U}{q} \qquad \Delta V = \frac{-W}{q} \qquad V_f - V_i = \int_i^f E\cdot ds \qquad V = \frac{kq}{r}$$

$$\begin{cases} E_x = \frac{-dV}{dx} \\ E_y = \frac{-dV}{dy} \\ E_z = \frac{-dV}{dz} \end{cases}$$

مشتق پتانسیل اوه

هم‌پتانسیل $\rightarrow$ رسانا

- اگر بار ΔQ در مدت زمان Δt از مداری عبور کند داریم:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

- با جایگذاری رابطه $\Delta Q = I\Delta t$ در رابطه‌ی انرژی $\Delta U = \Delta Q \Delta V$

$$\Delta U = \Delta V I \Delta t$$

توان الکتریکی:

آهنگ تبدیل انرژی الکتریکی به انرژی گرمایی در رسانا را توان الکتریکی آن رسانا می‌نامند و با P نشان داده می‌شود.

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}\Delta V = I\Delta V$$

با استفاده از قانون اهم، $\Delta V = IR$، رابطه‌ی فوق را می‌توان به صورت‌های زیر بیان کرد:

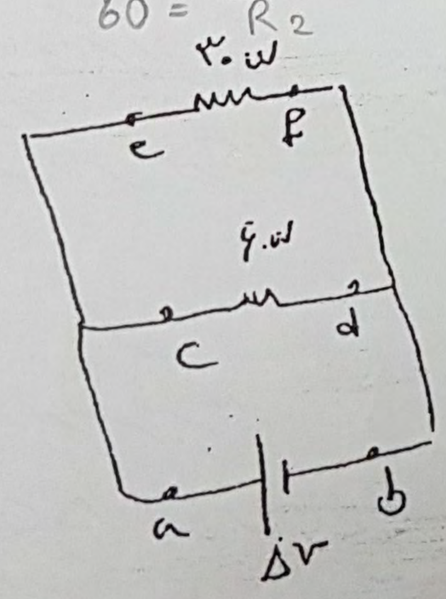
$$P = RI^2 = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$

مثال: اختلاف پتانسیل یک فن برق و لامپ حبابی با توان‌های ۳۰W و ۶۰W اعمال شده است، جریان و هم‌چنین مقاومت کدام یک بیشتر است؟

$$P = I\Delta V \rightarrow \begin{cases} 30 = I_1 \Delta V \\ 60 = I_2 \Delta V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = \frac{30}{\Delta V} \\ I_2 = \frac{60}{\Delta V} \end{cases} \Rightarrow I_2 = 2I_1$$

یکسان

$$P = \frac{\Delta V^2}{R} \Rightarrow \begin{cases} 30 = \frac{\Delta V^2}{R_1} \\ 60 = \frac{\Delta V^2}{R_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = \frac{\Delta V^2}{30} \\ R_2 = \frac{\Delta V^2}{60} \end{cases} \Rightarrow R_1 = 2R_2$$



مثال ۲: الف) شدت جریان را در شاخه ab، cd، ef از بیشترین به کمترین مرتب کنید.

ب) کدام لامپ پرنورتر است.

$$P = I\Delta V$$

ثابت

$$I_{cd} > I_{cf}$$

مثال: یک گرم کننده‌ی برقی با اعمال اختلاف پتانسیل $\Delta V = 120V$ به یک سیم پیچ گرم که دارای مقاومت الکتریکی $R = 8\Omega$ است، ساخته شده است. جریان عبوری از سیم و توان الکتریکی که توسط گرم کننده تحویل داده می‌شود را بیابید.

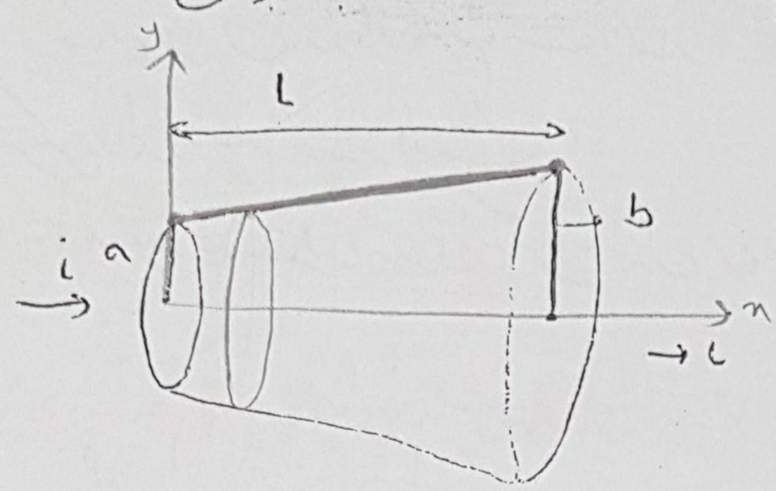
$P = ?$ $I = ?$

$$P = \frac{\Delta V^2}{R} = \frac{\cancel{120}^{15} \times 120}{\cancel{8}} = 1800$$

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{120}{8} = 15$$

$$P = I\Delta V \Rightarrow 1800 = I \times 120 \Rightarrow I = 15$$

مسئله ۱: مقاومت به شکل یک مخروط ناقص قائم است (مطابق شکل ۱) با فرض ثابت بودن جریان ۵ چگالی جریان در تمامی مقاطع، مقاومت جسم را حساب کنید.



$$dy = \left(\frac{b-a}{L}\right) dx$$

$$R = \int \rho_c \frac{\left(\frac{L}{b-a}\right) dy}{\pi y^2} = \frac{L\rho_c}{(b-a)\pi} \int_a^b \frac{dy}{y^2}$$

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow R = \rho_c \frac{L}{A} \Rightarrow dR = \rho_c \frac{dL}{A}$$

$$R = \int dR = \int \rho_c \frac{dL}{A} = \int \rho_c \frac{dx}{\pi y^2}$$

چون مقاومت‌ها جزئی باهم سری هستند

$$\theta\Big|_a^0 \qquad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$\theta\Big|_b^L \qquad y - a = \frac{b-a}{L-0}(x - 0)$$

$$y - a = \left(\frac{b-a}{L}\right) x \Rightarrow y = \left(\frac{b-a}{L}\right) x + a$$

$$= \frac{L\rho_c}{(b-a)\pi}\left(\frac{-1}{y}\right)\Big|_a^b = \frac{L\rho_c}{(b-a)\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$\boxed{R = \frac{L\rho_c}{ab\pi}}$$

مسئله ۲: چگالی جریان در یک رسانای استوانه‌ای به شعاع R مطابق با معادله‌ی زیر تغییر می‌کند $J = J_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)$ جریان را برحسب J_0 و مساحت مقطع رسانا $A = \pi R^2$ محاسبه کنید.

$$J = \frac{I}{A} = \frac{dI}{dA} \rightarrow dI = J\,dA \rightarrow I = \int dI = \int J\,dA' \Rightarrow I = \int J_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)(2\pi r\,dr)$$

$$= 2\pi J_0 \int_0^R \left(r - \frac{r^2}{R}\right) dr \Rightarrow I = 2\pi J_0 \left[\int_0^R r\,dr - \int_0^R \frac{r^2}{R}\,dr\right] = 2\pi J_0 \left[\frac{r^2}{2}\Big|_0^R - \frac{r^3}{3R}\Big|_0^R\right]$$

$$\boxed{A' = \pi r^2 \rightarrow dA' = 2\pi r\,dr}$$

$$= 2\pi J_0 \left[\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{3}\right] = 2\pi J_0 \frac{R^2}{6} = \frac{\pi R^2 J_0}{3} = \frac{A J_0}{3}$$

مسئله ۳: یک قطعه سیم مسی به طول $4m$ و سطح مقطع $2\times10^{-6}\,m^2$ در دست است اگر جریان الکتریکی سیم $i=2A$ باشد و چگالی جریان در طول سیم ثابت باشد،

الف) میدان الکتریکی در طول سیم چقدر است؟

ب) در مدت ۳۰ دقیقه چه مقدار انرژی به گرما تبدیل می شود؟ مقاومت ویژه مس $\rho=1{,}69\times10^{-8}\,\Omega.m$ است.

الف) $E=\rho_c J=\rho_c \dfrac{I}{A}=1{,}69\times10^{-8}(\Omega m)\times\dfrac{2A}{2\times10^{-6}\,m^2}$

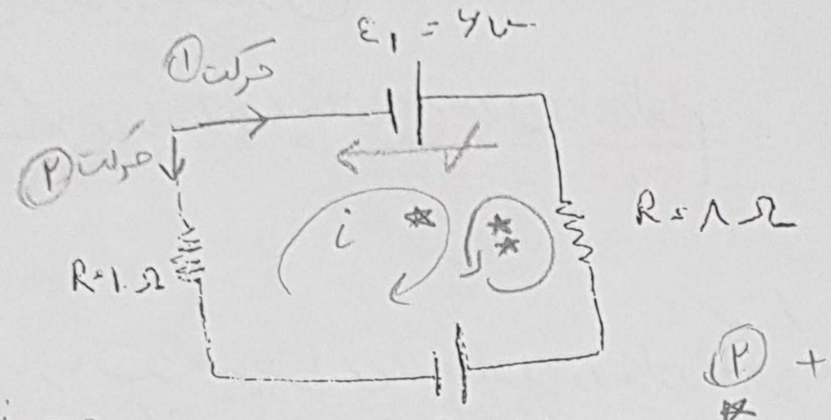
ب) $P=RI^2=VI=\dfrac{V^2}{R}=\left[1{,}69\times10^{-8}(\Omega m)\times\dfrac{4m}{2\times10^{-6}m^2}\right](2)^2$

$R=\rho_c\dfrac{L}{A}=-1{,}69\times10^{-8}(\Omega m)\times\dfrac{4m}{2\times10^{-6}m^2}$

$P=\dfrac{\Delta U}{\Delta t}$ α

مثال: یک مدار تک حلقه‌ای مرکب از ۲ مقاومت و ۲ باتری است که در شکل زیر نشان داده شده است (از مقاومت داخلی باتری‌ها صرف‌نظر کنید.)

مدار ۳



الف) جریان در این مدار را پیدا کنید.

ب) توان هر مقاومت چقدر است؟

① ★ $+6 - 8i - 12 - 10i = 0$

$-18i - 6 = 0 \Rightarrow i = \frac{-6}{18} = \frac{-1}{3} A$

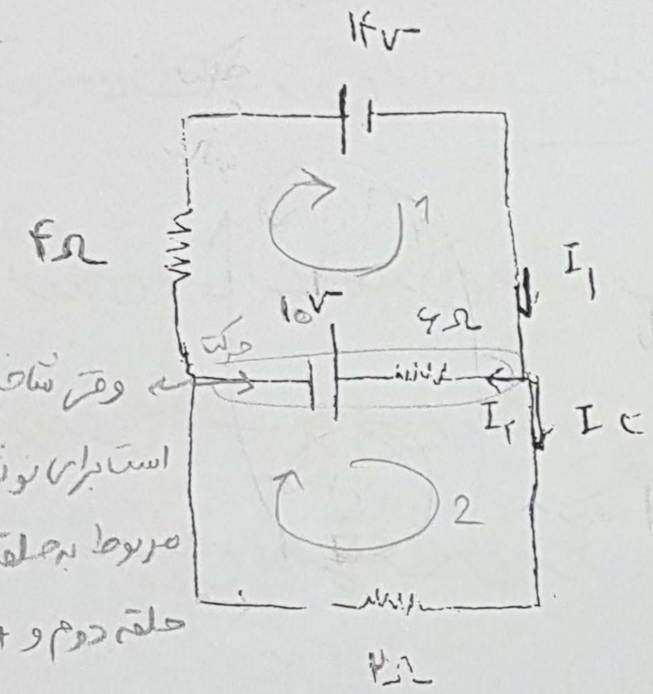
② ★ $+10i + 12 + 8i - 6 = 0$

$18i + 6 = 0 \Rightarrow i = \frac{-1}{3} A$

② ★★ $-10i + 12 - 8i - 6 = 0$

$-18i + 6 = 0 \Rightarrow i = \frac{1}{3} A$

مثال: جریان های I_1، I_2 و I_3 در مدار روبرو بدست آورید.



وقتی شاخه‌ای داریم که در دو حلقه مشترک است برای نوشتن معادلات آن ابتدا I مربوط به حلقه خودمان را می‌نویسیم و بعد I حلقه دوم و + یا - بودن بین آنها را از هم‌سو بودن و یا خلاف سو بودن جریان تشخیص می‌دهیم.

$1: 4I_1 + 10 + 6I_2 + 14 = 0$

$2: 2I_3 + 6I_2 - 10 = 0$

$I_1 = I_2 + I_3$

$10 - 6I_2 - 2I_3 = 0 \xrightarrow{-2\alpha} 3I_2 + I_3 = 5$

$10 + 6I_2 + 14 + 4I_1 = 0 \Rightarrow 10I_2 + 4I_3 = -24 \Rightarrow 5I_2 + 2I_3 = -12$

$$\begin{cases} -6I_2 - 2I_3 = -10 \\ 5I_2 + 2I_3 = -12 \end{cases} \Rightarrow -I_2 = -24$$

$$\Rightarrow -2\alpha \begin{cases} 10I_2 + \cancel{4I_3} = -24 \\ 6I_2 + 2I_3 = 10 \end{cases} \rightarrow -12I_2 - \cancel{4I_3} = -20$$

$-2I_2 = -44 \Rightarrow I_2 = 22$?

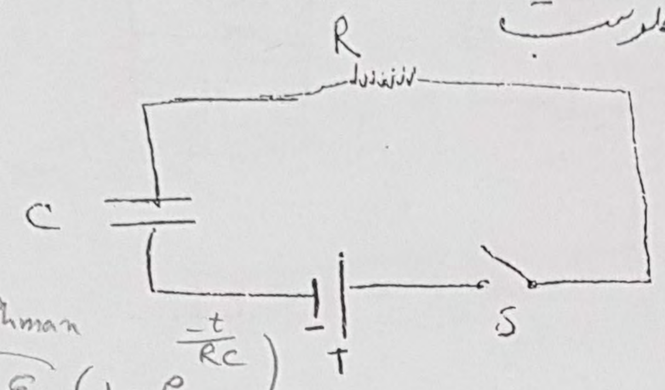
$40I_1 + \cancel{24I_3} = -96$

$18I_1 - \cancel{24I_3} = 30$

$58I_1 = -36$

مدار ۵

مسئله ۱: یک خازن خالی بدون بار و یک مقاومت مطابق شکل به یک باتری وصل شده اند. اگر نیروی محرکه ۱۲V، ظرفیت خازن ۶μF و مقاومت $8\times10^{5}\,\Omega$ باشد مطلوبست



الف) ثابت زمانی مدار

ب) بیشینه ی بار روی صفحات خازن

ج) بیشینه ی جریان در مدار؟

د) تابع و نمودار تغییرات بار؟

هـ) تابع و نمودار تغییرات شدت جریان

و) مقدار بار ذخیره شده در ثابت زمانی مدار

ز) شدت جریان در ثابت زمانی مدار؟

حل مسئله $q(t)=\overbrace{C\mathcal{E}_0}^{q_{man}}\left(1-e^{\frac{-t}{RC}}\right)$

$v(t)=\overbrace{\mathcal{E}}^{v_{man}}\left(1-e^{\frac{-t}{RC}}\right)$ $\quad i(t)=\overbrace{\frac{\mathcal{E}}{R}}^{i_{man}}e^{\frac{-t}{RC}}$

بدست آوردن ثابت زمانی مدار:

برای بدست آوردن ثابت زمانی مربوط به هر خازن، خازن را از آن مکان برداشته و از آن جایگاه به مدار نگاه می کنیم همچنین کلیه ی منابع ولتاژ را صفر می کنیم یعنی منابع ولتاژ را با اتصال کوتاه جایگزین می کنیم با این عمل مدار به یک مدار صرفا مقاومتی تبدیل می شود که بایستی از سمتی که به مدار نگاه می کردیم مقاومت معادل محاسبه شود آنگاه ثابت زمانی برابر می شود با

$\tau = R_{eq}C$

برداشته شده

الف) $\tau = RC = 8\times10^{5}(\Omega)\times1\times6\times10^{-6}(F)=4(s)$

ب) $q_{max}=C\mathcal{E}=6\times10^{-6}(F)\times12(V)=70(\mu C)$

2) $i_{max}=\frac{\mathcal{E}}{R}=\frac{12(V)}{8\times10^{5}\,\Omega}=15\times10^{-6}A=15\,\mu A$

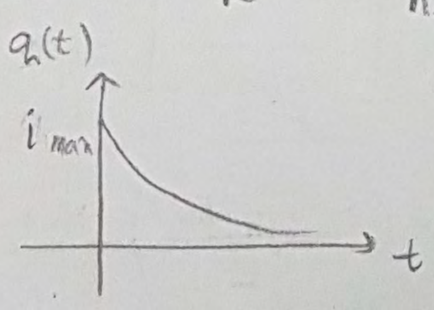
د) $q(t=RC)=C\mathcal{E}(1-e^{-1})=0.63C\mathcal{E}$

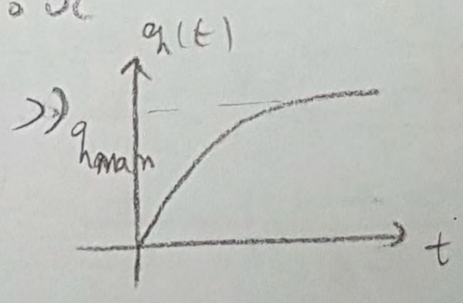
$=0.63\,q_{max}=0.63\times70(\mu C)=37.8\,\mu C$

2) $i(t=RC)=\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-1}=0.37\frac{\mathcal{E}}{R}$

$=0.37\,i_{max}=0.37\times15\,\mu C$

و)





مسئله ی ۲: خازنی با ظرفیت C را در نظر بگیرید که از طریق مقاومت R در حال دشارژ شدن می باشد.

الف) بعد از چند ثابت زمانی بار روی صفحات خازن به $\frac{1}{4}$ مقدار اولیه اش می رسد؟

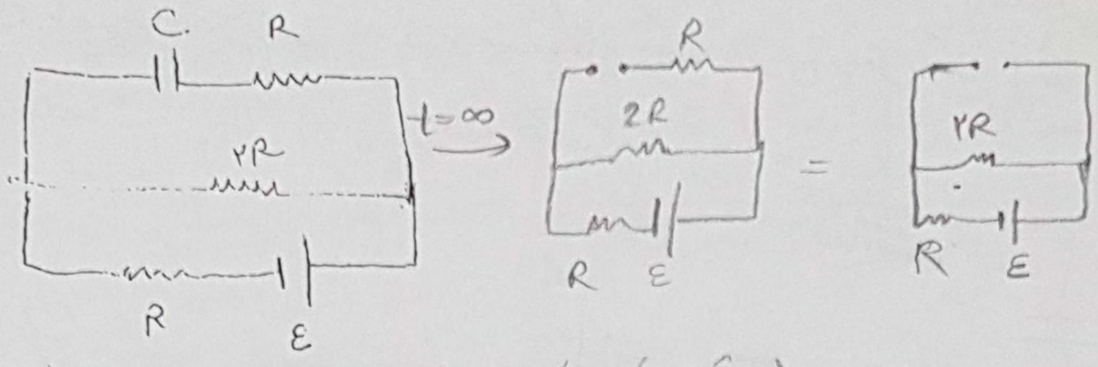
ب) انرژی ذخیره شده در خازن نیز با زمان در طول دشارژ خازن کاهش می یابد. بعد از چند ثابت زمانی انرژی ذخیره شده در خازن به $\frac{1}{4}$ مقدار اولیه اش کاهش می یابد.

$q(t)=q_{max}e^{\frac{-t}{RC}}$

الف) $\frac{1}{4}\cancel{q_{max}}=\cancel{q_{max}}e^{\frac{-t}{RC}}\Rightarrow\frac{1}{4}=e^{\frac{-t}{RC}}\xrightarrow{Ln}Ln\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{-t}{RC}=\frac{-t}{\tau}\Rightarrow Ln1-Ln4=-\frac{t}{\tau}\Rightarrow t=Ln4\,\tau$

ب) $U=\frac{q^2}{2C}=\frac{q_{max}^2e^{\frac{-2t}{RC}}}{2C}=U_0e^{\frac{-2t}{\tau}}\rightarrow\frac{1}{4}U_0=U_0e^{\frac{-2t}{\tau}}\xrightarrow{Ln}Ln\frac{1}{4}=\frac{-2t}{\tau}\rightarrow Ln1-Ln4=\frac{-2t}{\tau}\rightarrow t=\frac{Ln4}{2}\tau$

مسئله‌ی ۳: در مدار شکل مقابل در زمان $t=\infty$ بار ذخیره شده در خازن را محاسبه کنید

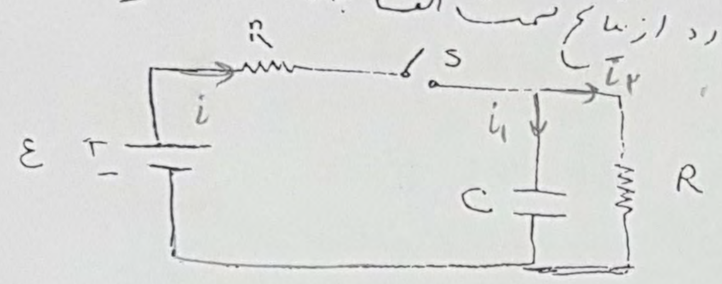


$$q(t=\infty)=CV(t=\infty)=CV_{2R}=C(2Ri)=2RC\left(\frac{\varepsilon}{3R}\right)=\frac{2}{3}C\varepsilon$$

مسئله‌ی ۴: در مدار شکل زیر خازن C ابتدا بدون بار الکتریکی است در لحظه‌ی $t=0$ کلید S را می‌بندیم.

الف) معادله‌ی بار خازن برحسب زمان را بدست آورید.

ب) بار نهایی و ثابت زمانی خازن در مدار را با استفاده از نتایج قسمت الف به دست آورید.



$$-Ri-Ri_2+\varepsilon=0 \quad (1)$$

$$-Ri_2+V_C=0 \rightarrow -Ri_2+\frac{q}{C}=0 \rightarrow i_2=\frac{q}{RC} \quad (2)$$

$$i=i_1+i_2 \quad (3)$$

$$(1),(3) \rightarrow -R(i_1+i_2)-Ri_2+\varepsilon=0 \Rightarrow -Ri_1-2Ri_2+\varepsilon=0$$

$$-Ri_1-\cancel{2R}\frac{q}{\cancel{R}C}+\varepsilon=0 \rightarrow -R\frac{dq}{dt}-\frac{2q}{C}+\varepsilon=0$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر } -R} \frac{dq}{dt}=\frac{2q}{RC}-\frac{\varepsilon}{R}=0 \longrightarrow \frac{dq}{dt}=\frac{\varepsilon}{R}-\frac{2q}{RC}=\frac{C\varepsilon-2q}{RC}$$

$$\rightarrow \frac{dq}{C\varepsilon_0-2q}=\frac{dt}{RC} \rightarrow \int_0^q \frac{dq}{C\varepsilon-2q}\times\frac{-2}{-2}=\int_0^t\frac{dt}{RC} \rightarrow \frac{-1}{2}\ln(C\varepsilon_0-2q)\Big|_0^q=\frac{t}{RC}\Big|_0^t$$

$$\frac{-1}{2}\left[\ln(C\varepsilon-2q)-\ln C\varepsilon\right]=\frac{t-0}{RC} \rightarrow \frac{-1}{2}\ln\left(\frac{C\varepsilon-2q}{C\varepsilon}\right)=\frac{t}{RC} \Rightarrow \ln\left(\frac{C\varepsilon-2q}{C\varepsilon}\right)=\frac{-2t}{RC}$$

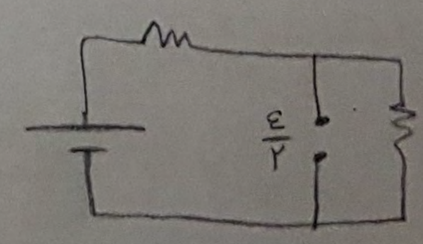
$$\xrightarrow{\exp} \frac{C\varepsilon-2q}{C\varepsilon}=e^{\frac{-2t}{RC}} \Rightarrow C\varepsilon-2q=C\varepsilon e^{\frac{-2t}{RC}}$$

$$q(t)=\frac{C\varepsilon}{2}\left(1-e^{\frac{-2t}{RC}}\right)=\frac{C\varepsilon}{2}\left(1-e^{\frac{-t}{\frac{RC}{2}}}\right)$$

ب) $\tau=\frac{RC}{2}$

$$q(t=\infty)=CV_C(t=\infty)=CV_R=C(i_\infty R)$$

$$=C\left(\frac{\varepsilon}{2R}\right)R=\frac{\varepsilon C}{2}$$



$t=\infty$

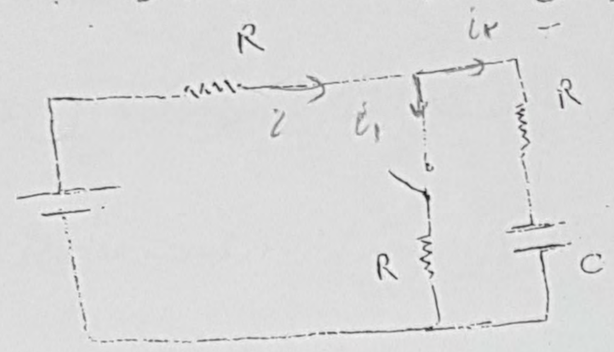
چک کردن:

$$\begin{cases} i=\frac{\varepsilon}{2R} \\ V_C=V_R=\frac{\varepsilon}{2R}\times R=\frac{\varepsilon}{2} \\ q=CV=C\frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

مسئله ۵: در مدار الکتریکی زیر کلید S در لحظه $t=0$ بسته می‌شود. مطلوبست:

الف) تغییرات جریان و ولتاژ خازن پس از بسته شدن کلید

ب) انرژی ذخیره شده در خازن پیش از بسته شدن کلید و پس از گذشت زمان طولانی از بسته شدن کلید



$$-Ri - Ri_2 - \frac{q}{C} + \mathcal{E} = 0 \quad (1)$$

$$-Ri_2 - \frac{q}{C} + Ri_1 = 0 \longrightarrow \boxed{i_1 = i_2 + \frac{q}{RC}} \quad (2)$$

$$i = i_1 + i_2 \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(1),(3)} -R(i_1+i_2) - Ri_2 - \frac{q}{C} + \mathcal{E} = 0 \rightarrow -Ri_1 - 2Ri_2 - \frac{q}{C} + \mathcal{E} = 0 \quad (4)$$

$$\xrightarrow{(2),(4)} -R\left(i_2 + \frac{q}{RC}\right) - 2Ri_2 - \frac{q}{C} + \mathcal{E} = 0 \rightarrow -3Ri_2 - \frac{2q}{C} + \mathcal{E} = 0$$

$$-3R\frac{dq}{dt} - \frac{2q}{C} + \mathcal{E} = 0 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } -3R} \frac{dq}{dt} + \frac{2q}{3RC} - \frac{\mathcal{E}}{3R} = 0$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{3R} - \frac{2q}{3RC} = \frac{C\mathcal{E} - 2q}{3RC} \rightarrow \frac{dq}{C\mathcal{E} - 2q} = \frac{dt}{3RC}$$

$$\xrightarrow{\text{انتگرال}} \frac{-1}{2}\int_{C\mathcal{E}}^{q} \frac{-2\,dq}{C\mathcal{E} - 2q} = \int_0^t \frac{dt}{3RC} \rightarrow \frac{-1}{2}\ln(C\mathcal{E} - 2q)\Big|_{C\mathcal{E}}^{q} = \frac{t}{3RC}\Big|_0^t$$

$$= \ln(C\mathcal{E} - 2q) - \ln(-C\mathcal{E}) = \frac{-2(t-0)}{3RC} \rightarrow \ln\left(\frac{C\mathcal{E} - 2q}{-C\mathcal{E}}\right) = \frac{-2t}{3RC}$$

$$\xrightarrow{\exp} \frac{C\mathcal{E} - 2q}{-C\mathcal{E}} = e^{\frac{-2t}{3RC}} \rightarrow C\mathcal{E} - 2q = -C\mathcal{E}e^{\frac{-2t}{3RC}}$$

$$q(t) = \frac{C\mathcal{E}}{2}\left(1 + e^{\frac{-2t}{3RC}}\right) = \frac{C\mathcal{E}}{2}\left(1 + e^{\frac{-t}{\frac{3RC}{2}}}\right)$$

$$v(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{\mathcal{E}}{2}\left(1 + e^{\frac{-t}{\frac{3RC}{2}}}\right)$$

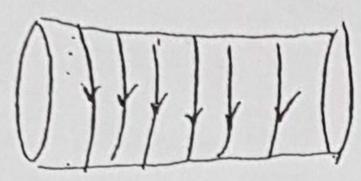
$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{C\mathcal{E}}{2}\left(\frac{-2}{3RC}\right)e^{\frac{-t}{\frac{3RC}{2}}} = \frac{-\mathcal{E}}{3R}e^{\frac{-t}{\frac{3RC}{2}}}$$

$$t=0: U = \frac{1}{2}Cv^2 = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$$

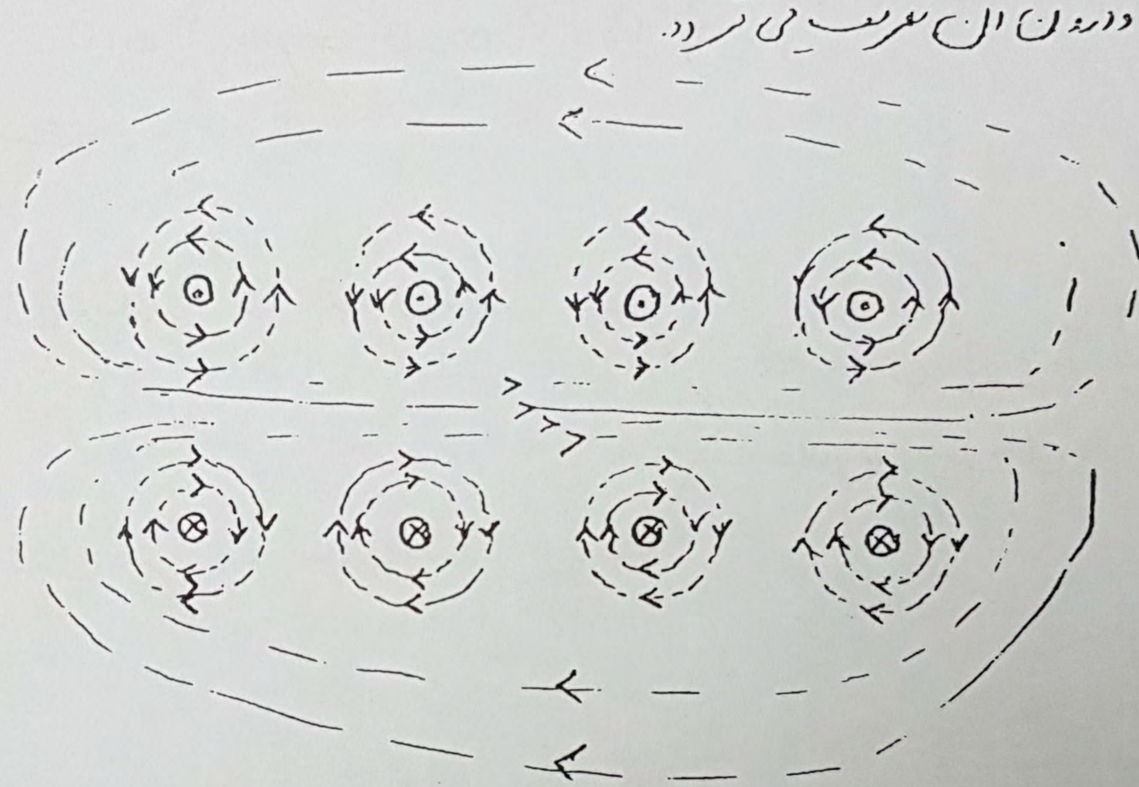
$$t=\infty: U = \frac{1}{2}Cv^2 = \frac{1}{2}C\frac{\mathcal{E}^2}{4} = \frac{1}{8}C\mathcal{E}^2$$

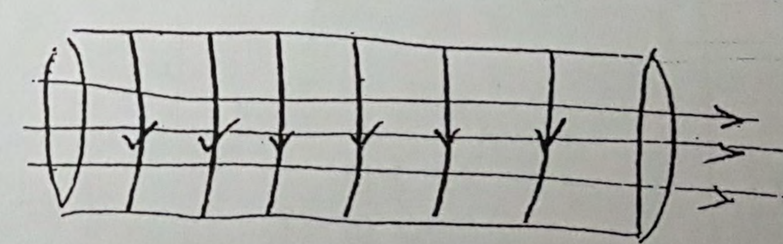
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\theta$$

میدان مغناطیسی سیم لوله :



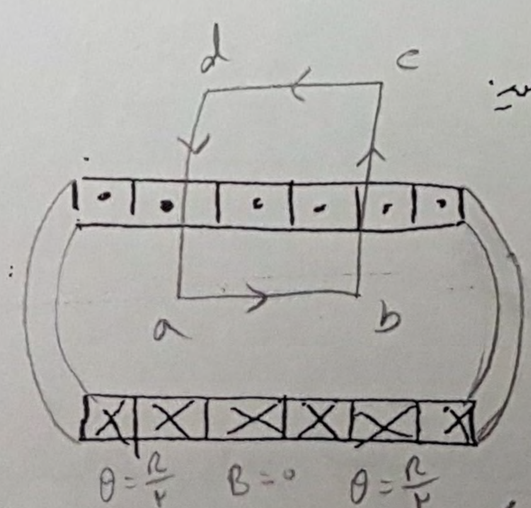
سیم لوله ایده آل ، سیملوله ایست که طول سیملوله نسبت به شعاع آن خیلی بزرگ و حلقه های آن به هم فشرده شده است . میدان مغناطیسی سیملوله ایده آل به صورت یکنواخت و درون آن تعریف می گردد.





خطوط میدان مغناطیسی

با استفاده از قانون آمپر میدان مغناطیسی داخل سیملوله را بیابید:



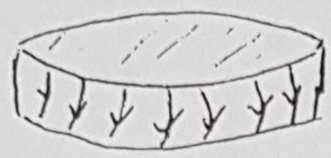
قانون آمپر $\oint \vec{B}\, d\vec{L} = \mu_0 i_{inc}$

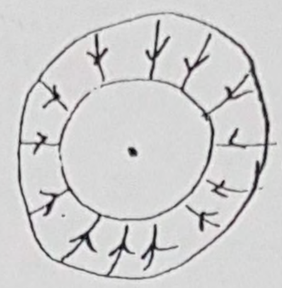
$$\int_{ab} \vec{B}\cdot d\vec{L} + \int_{bc} \vec{B}\cdot d\vec{L} + \int_{cd} \vec{B}\cdot d\vec{L} + \int_{da} \vec{B}\cdot d\vec{L} = \mu i_{inc}$$

$$\oint_{ab} B\,dL + 0 + 0 + 0 = \mu_0 i_{inc} \qquad B\int_{ab} dL = \mu_0 i_{inc}$$

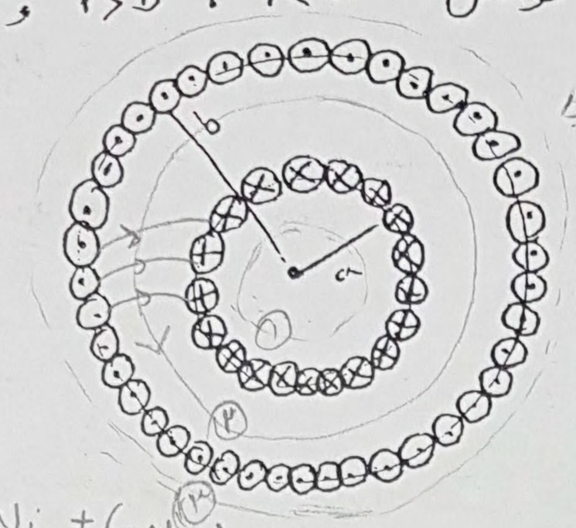
$$Bh = \mu_0 i_{inc} \longrightarrow B = \frac{\mu_0 i_{inc}}{h} = \frac{\mu_0}{h}\underbrace{\left(i\frac{N}{L}h\right)}_{?} = \frac{\mu_0 N}{L} i$$

- میدان مغناطیسی چنبره :





میدان مغناطیسی داخل مقاطع چنبره زیر را بیابید؟ فواصل $r<a$ ، $r>b$ و $a<r<b$



قانون آمپر $\oint \vec{B}\cdot d\vec{L} = \mu_0 i_{inc}$

ناحیه ۱ : $i_{inc} = 0 \xrightarrow[-1]{\text{then}} B_1 = 0$

ناحیه ۲ : $\int B\,dL\,\cancel{\cos\theta} = \mu_0 i_{inc}$?

$\int B\,dL\,(-1) = \mu_0(-Ni)$

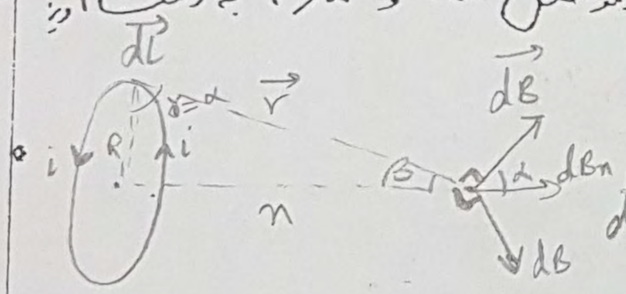
$= B\int dL = \mu_0 Ni$

$\underset{\text{طول حلقه آمپری}}{BL} = \mu_0 Ni \Rightarrow B_2 = \dfrac{\mu_0 Ni}{2\pi r}$

ناحیه ۳ : $i_{inc} = Ni + (-Ni) = 0$

$\xrightarrow{\text{then}} B_3 = 0$

۱- یک سیم طویلی به شعاع a حامل جریان I می باشد میدان مغناطیسی را در فواصل $r<a$ و $r>a$ به دست آورید. قبلاً حل شده در ص ۹-۲



$d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\times\dfrac{i\,dL\,\cancel{\sin\theta}}{r^2}$, $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\cdot\dfrac{i\,\vec{r}\times d\vec{L}}{r^2}$

$d\vec{B} = d\vec{B}_x + \cancel{d\vec{B}_y}^{\,0}$ $\quad \vec{B} = \vec{B}_x + \cancel{\vec{B}_y}^{\,0}$

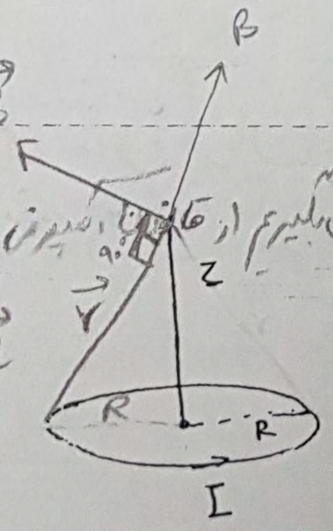
$\int B_x = \int dB_x = \int dB\cos\alpha = \int \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{i\,dL}{r^2}\cos\alpha$

$\alpha+\beta+\dfrac{\pi}{2}=\pi \Rightarrow \alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$

$\gamma+\beta+\dfrac{\pi}{2}=\pi \Rightarrow \gamma+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \alpha=\gamma$

$B_x = \int \dfrac{\mu_0}{4\pi}\cdot\dfrac{iR\,dL}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\mu_0 iR^2}{2(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

۲- میدان مغناطیسی یک پیچه را در فاصله‌ی z از مرکز آن بیابید. چون نمی توان حلقه طولی مستطیلی بگیریم از قانون بیوساوار استفاده می کنیم.



$d\vec{B} \propto \vec{r}\times d\vec{L}$

قانون بیوساوار $B = \int \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{i\,dL\,\cancel{\sin\theta}}{r^2}$

$B = \int \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{i\,dL}{r^2} = \dfrac{\mu_0 i}{4\pi}\int\dfrac{dL}{r^2}$

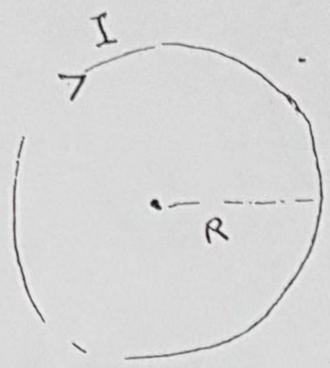
$B = \dfrac{\mu_0 i}{4\pi r^2}\int dL = \dfrac{\mu_0 i}{4\pi r^2}(2\pi R)$ $\quad B = \dfrac{\mu_0 i}{4\pi(R^2+z^2)}\,2\pi R$

۳

جواب سوال ۲ $B = \dfrac{\mu_0 iR}{2(R^2+z^2)} \xrightarrow[z=0]{\text{for}} B = \dfrac{\mu_0 iR}{2R^2}$

$= \dfrac{\mu_0 i}{2R}$ جواب سوال ۳

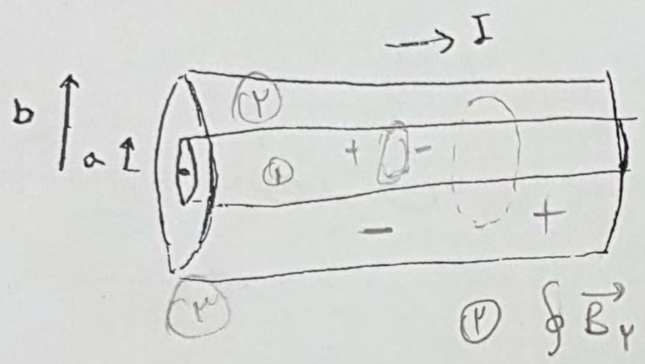
۳- میدان مغناطیسی را در مرکز یک دایره به شعاع R بدست آورید؟



مثل مسئله قبل

$$z=0 \Rightarrow B=\frac{\mu_0 i R}{2R^2}=\frac{\mu_0 i}{2R}$$

۴- یک استوانه‌ی فلزی به شعاع b در اختیار است. حفره‌ای در محور آن به شعاع a خارج کرده‌ایم اگر دانسیته‌ی جریان (J) به صورت $J=kr$ باشد. میدان مغناطیسی در تمام نقاط فضا بدست آورید.



قانون آمپر $\oint \vec{B}\,d\vec{L}=\mu_0 I_{in}$

① چون $I_{in}=0 \rightarrow B_1=0$

② $\oint \vec{B}_2\,d\vec{L}=\mu_0 I_{in}=\int B_2\,dL\cos\theta=\mu_0 I_{in}$

$B_2\int dL=\mu_0 I_{in}$ $\quad B_2(2\pi r)=\mu_0 I_{in}$ $\quad B_2=\frac{\mu_0 I_{in}}{2\pi r}=\frac{\mu_0}{2\pi r}\frac{2\pi k}{3}(r^3-a^3)=\frac{\mu_0 k(r^3-a^3)}{3r}$

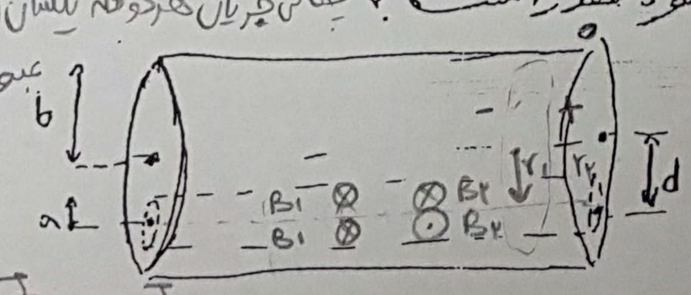
$J=kr$ $\quad dI=J\,dA$ $\quad I_{in}=\int dI=\int J\,dA$, $A=\pi r^2$

$I_{in}=\int(kr)(2\pi r\,dr)=2\pi k\int_a^r r^2\,dr=2\pi k\frac{r^3}{3}\Big]_a^r$ $\quad I_{in}=\frac{2\pi k}{3}(r^3-a^3)$

③ $\oint \vec{B}_3\cdot d\vec{L}=\mu_0 I_{in}\rightarrow\int B_3\,dL\cos\theta=\mu_0 I_{in}\rightarrow B_3\int dL=\mu_0 I_{in}$

$B_3(2\pi r)=\mu_0 I_{in}$ $\quad B_3=\frac{\mu_0 I_{in}}{2\pi r}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}=\frac{\mu_0}{2\pi r}\frac{2\pi k}{3}(b^3-a^3)=\frac{\mu_0 k}{3r}(b^3-a^3)$

۵- استوانه‌ای فلزی حامل جریان I و شعاع b در اختیار است یک حفره به شعاع a ایجاد کرده‌ایم. فاصله‌ی محور حفره تا محور استوانه d است. میدان مغناطیسی در داخل حفره چقدر است؟ چگالی جریان هر دو که یکسان است ولی لزوماً جریان عبوری از آنها یکسان نیست

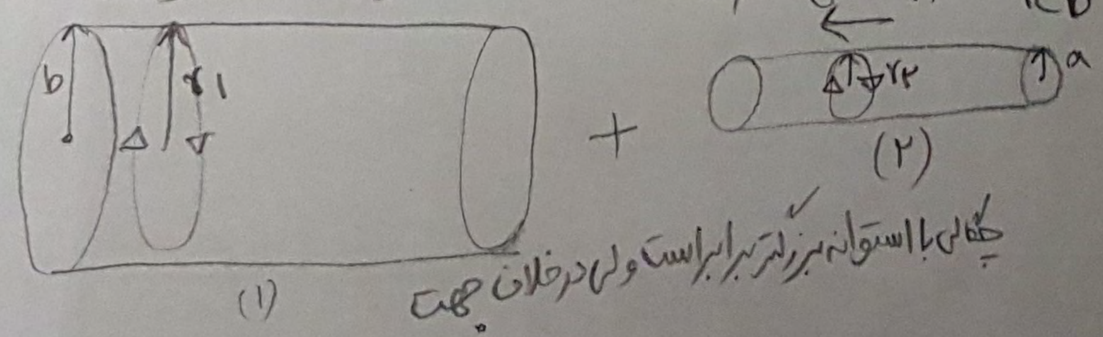


قانون آمپر $\oint \vec{B}\,dl=\mu_0 I_{in}\rightarrow B_1\int dl=\mu_0 I_{in}$

$B_1 L=\mu_0 I_{in}$ $\quad B_1=\frac{\mu_0 I_{in}}{L}=\frac{\mu_0 I_{in}}{2\pi r}$

$=\left(\frac{r_1}{b}\right)^2\frac{I}{2\pi r_1}=\frac{I r_1\mu_0}{2\pi b^2}$

B_1 $\quad J=\frac{I}{A}=\frac{I}{\pi b^2}$ $\quad B_2$ $\quad J=\frac{I}{A}=\frac{I}{\pi b^2}$



چگالی با استوانه بزرگتر برابر است ولی در خلاف جهت

$I \quad \pi b^2$

$I_{in} \quad \pi r_1^2$

$\rightarrow I_{in}=\left(\frac{r^2}{b^2}\right)I$

40

38

32

$$J_A = \frac{I}{\pi b^2}\left(\pi r_2^2\right) = \frac{r_2^2 I}{b^2}$$

برای 2 تا اینجا مثل قبلی ← بقیش

$$J = \frac{I}{A} = \frac{dI}{dA} \rightarrow dI = J\,dA \qquad I_{in} = \int dL = \int J\,dA = J\pi r^2$$

$$\frac{I}{\pi b^2}\pi r^2 = \frac{I r^2}{b^2} \qquad \oint \vec{B}_2 d\vec{L} = I_{in} \rightarrow \int B_2\, dL \underbrace{\cos\theta}_{-1} = I_{in}\mu_0$$

$$B_2\left(2\pi r_2\right) = \mu_0 I_{in} \rightarrow B_2 = \frac{\mu_0 I_{in}}{2\pi r_2} \qquad B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi r_2}\left(\frac{r_2^2}{b^2}\right) I = \frac{\mu_0 I r_2}{2\pi b^2}$$

$\vec{B}_1 + \vec{B}_2$ $\qquad$ $\vec{r}_1 + (-\vec{r}_2)$

نباید باشد؟

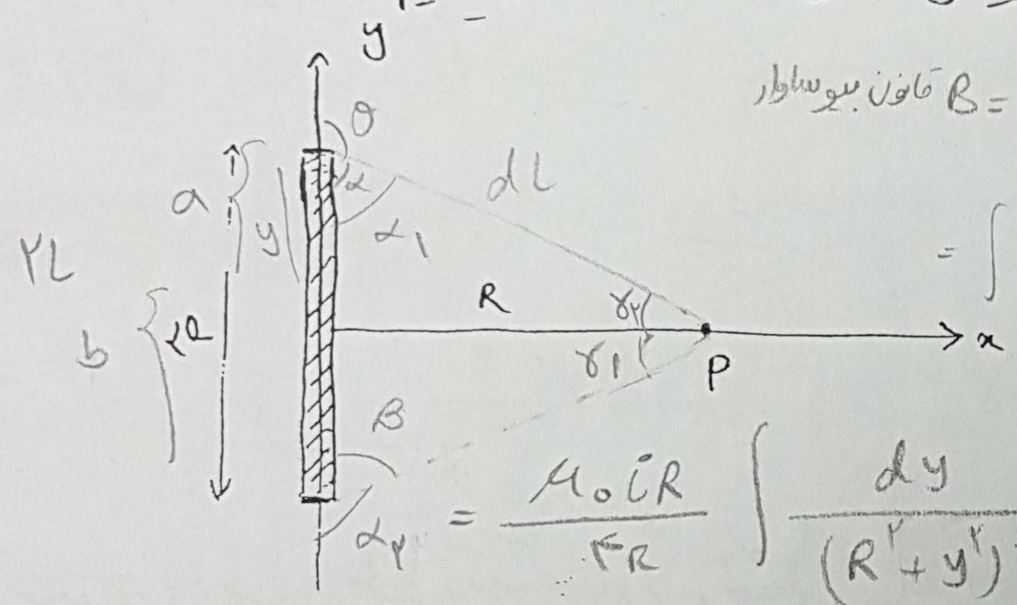
بالای محور استوانه کوچک

$$B_t = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi b^2}\left(r_1 + r_2\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi b^2} d$$

بالای محور استوانه کوچک

$$B_t = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi b^2}\left(r_1 - r_2\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi b^2} d$$

۶- سیمی به طول 2L و جریان I داریم میدان مغناطیسی را روی عمود منصف این سیم و به فاصله‌ی R از آن به دست آورید.



قانون بیوساوار $B = \int \frac{\mu_0}{4\pi} = \frac{i\,dL \sin\theta}{r^2}$

$$= \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,dy \sin\alpha}{(R^2 - y^2)} = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,dy\,R}{(R^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\mu_0 i R}{4\pi R}\int \frac{dy}{(R^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

تغییر متغیر $tg\alpha = \frac{R}{y}$

$$y = R\,cotg\alpha \rightarrow dy = -R(1+cot^2\alpha)\,d\alpha = \frac{-R\,d\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$B = \frac{\mu_0 i R}{4\pi R}\int \frac{\frac{-R}{\sin^2\alpha}\,d\alpha}{(R^2+R^2cot^2\alpha)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\mu_0 i}{4\pi R}\int \sin\alpha\, d\alpha$$

$$\alpha = \gamma + \frac{\pi}{2} = \pi \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \gamma \rightarrow d\alpha = -d\gamma$$

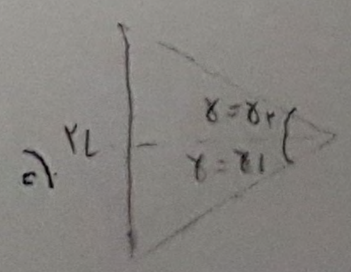
$$B = \frac{-\mu_0 i}{4\pi R}\int \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)(-d\gamma) = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \cos\gamma\, d\gamma = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\left(\sin\gamma\Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2}\right)$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\left(\sin\gamma_2 - \sin\gamma_1\right)$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\cos\alpha\Big|_{\alpha_2}^{\alpha_1} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right) \qquad \cos\alpha_2 = \cos(\pi - \beta) = -\cos\beta$$

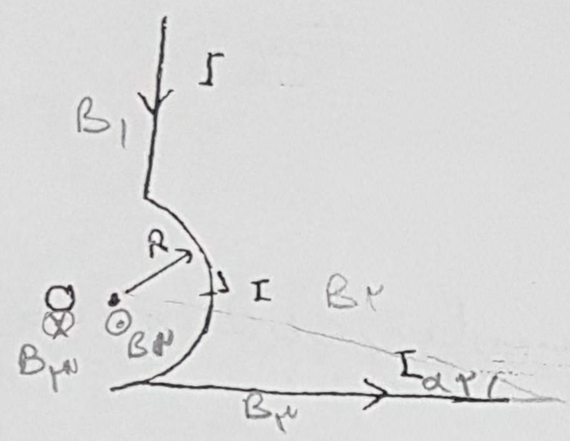
عمود منصف $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\left(2\sin\gamma\right) = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\left(\frac{L}{(R^2+L^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$



چون محدوده از قانون آمپر نمی‌شه استفاده کرد

۷ - در شکل زیر میدان مغناطیسی وارد بر مرکز دایره به شعاع R را به دست آورید.



$$\vec{B}_t = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

$$B_t = |B_2 - B_3|$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\pi = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left[\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2\right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left[\cos\frac{\pi}{2} + \cos 30\right]$$

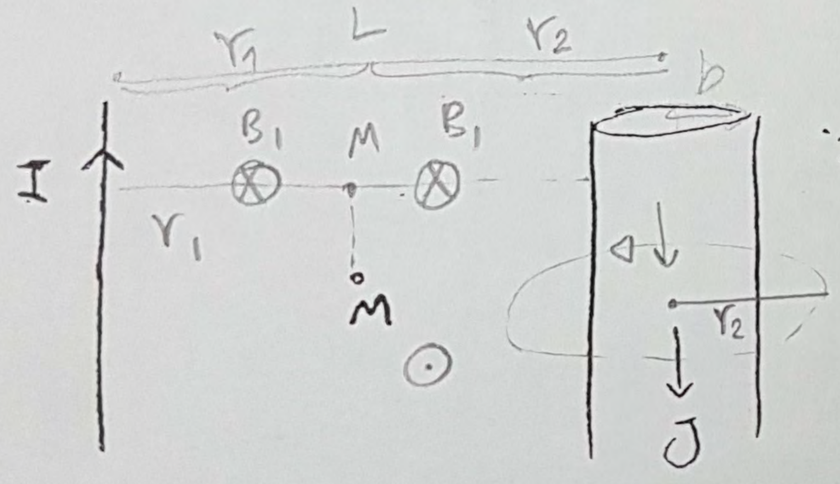
سیم $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left[\cos\alpha_1 + \cos\alpha_3\right]$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

دایره $B = \frac{\mu_0 I \varphi}{4\pi r}$

$$B_t = B_2 - B_3 = \frac{\mu_0 I}{4R}\left[1 - \frac{1}{\pi}\right]$$

۸ - از استوانه ی بسیار طویل توپر جریانی به چگالی $J = Ar$ می گذرد. سیم بسیار طویل دیگری حامل جریان I بوده و به موازات محور استوانه و به فاصله ی L از مرکز استوانه قرار دارد. میدان مغناطیسی را در نقطه ی M و در فاصله ی بین سیم و استوانه به دست آورید.



قانون آمپر $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}$ $\quad \oint \vec{B}_2 \cdot d\vec{L} = \mu_0 I_{in}$

$$\int B_2\, dL \underbrace{\cos\theta}_{-1} = \mu_0 I_{in} \qquad B_2 \int dL = \mu_0 I_{in}$$

$$B_2 (2\pi r_2) = \mu_0 I_{in}$$

$$J = \frac{I}{A} = \frac{dI}{dA} \rightarrow dI = J\,dA \rightarrow I_{in} = \int dI = \int J\,dA$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_{in}}{2\pi r_2}$$

$$= \int Ar(2\pi r\,dr) = 2\pi A \int_0^b r^2\,dr = 2\pi A \frac{b^3}{3}$$

$$B_t = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} + \frac{\mu_0 b^3 A}{3 r_2} \xrightarrow{r_1 + r_2 = L}$$

می شود جواب را برحسب L نوشت
اگر در متن مسئله $r_1 + r_2 = L$ بود

۹- ب) $F_B = I\,|\vec{L}\times\vec{B}| = ILB\sin\theta$

برای جزء dL: $dF_B = I\,dL\,B\sin\theta = I\,dL\left(\frac{\mu_0 J_0 R^2}{4r}\right) \rightarrow dF_B = \frac{\mu_0 I J_0 R^2}{4r}dr$

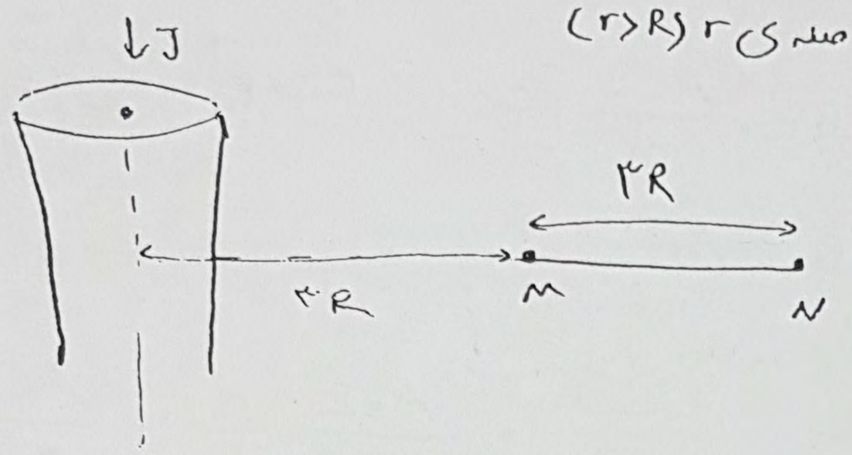
$$F_B = \int dF_B = \int_{3R}^{6R} \frac{\mu_0 I J_0 R^2}{4r}dr \rightarrow F_B = \frac{\mu_0 J_0 I R^2}{4}\int_{3R}^{6R}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 J_0 I R^2}{4}\ln 2$$

$A = \pi r^2 \rightarrow dA = 2\pi r\,dr$

۹- استوانه‌ی رسانای توپر بسیار طویلی به شعاع R مفروض است که دارای چگالی جریان $J = J_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$ می‌باشد. سیم MN به طول 3R حامل جریان I مطابق شکل در جهت شعاعی و به فاصله‌ی 3R از محور استوانه قرار دارد:

الف) محاسبه‌ی میدان در نقطه‌ای خارج از استوانه و به فاصله‌ی r (r>R)

ب) تعیین جهت و اندازه‌ی نیروی وارد بر سیم MN:



الف) $\oint B\cdot dL = \mu_0 I_{in} = \int BL\cos\theta = \mu_0(-I_{in}) = B(2\pi r) = \mu_0 I_{in} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_{in}}{2\pi r}$ (1)

$J = \frac{I}{A} = \frac{dI}{dA} \rightarrow dI = J\,dA \rightarrow I_{in} = \int dI = \int J\,dA$

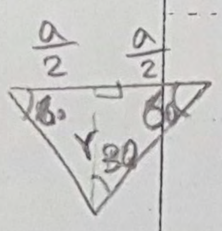
$$I_{in} = \int_0^R J_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)(2\pi r\,dr) = 2\pi J_0\int_0^R\left(r-\frac{r^3}{R^2}\right)dr$$

$$= 2\pi J_0\left[\int_0^R r\,dr - \frac{1}{R^2}\int_0^R r^3\,dr\right] = 2\pi J_0\left[\frac{r^2}{2}\Big|_0^R - \frac{1}{R^2}\frac{r^4}{4}\Big|_0^R\right]$$

$$= 2\pi J_0\left[\left(\frac{R^2}{2}\right)-\left(\frac{R^2}{4}\right)\right] = 2\pi J_0\left[\frac{R^2}{4}\right] = \frac{\pi J_0 R^2}{2} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)(2)} B = \frac{\mu_0}{2\pi r}\left(\frac{\pi J_0 R^2}{2}\right) \rightarrow B = \frac{\mu_0 J_0 R^2}{4r}$$

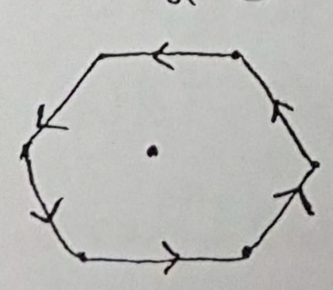
۱۰- میدان مغناطیسی را در مرکز یک ۶ ضلعی منتظم به دست آورید. میدان یکی از اضلاع را حساب کرده و ۶ برابر می‌کنیم



$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{r}{a}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r}{a}$

$r = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

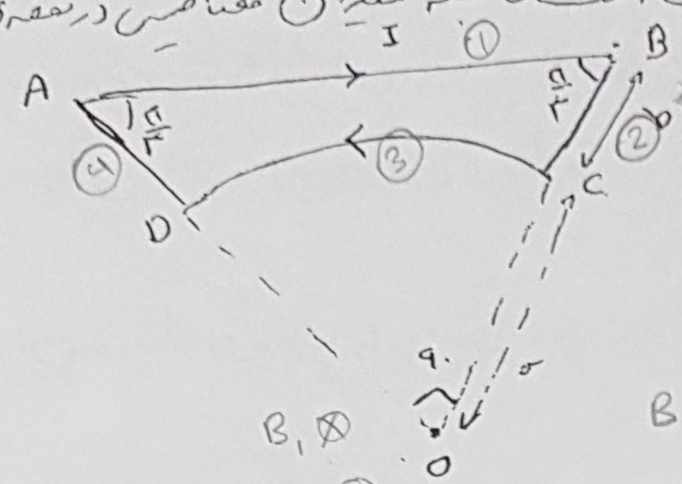


$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a\sqrt{3}}$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left[\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2\right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)}\left[\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}\right]$$

$$B_t = 6B_1 = \frac{3\mu_0 I}{\pi a\sqrt{3}}$$

۱۱- از مدار شکل مقابل جریان ثابت I می‌گذرد. مطلوب است محاسبه میدان مغناطیسی در نقطه‌ی O، مرکز کمان ۹۰°؟ B_2 و B_4 چون در جهت O هستند میدان آنها صفر می‌شود



$$\vec{B}_t = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4 \qquad B_t = |B_1 - B_3|$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{r}{a+b}$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left[\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2\right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)\right)}\left[\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{r}{a+b}$$

B_3 ⊙

$B_2 = B_4 = 0$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(a+b)}$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I \phi}{4\pi r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\mu_0 I}{8a}$$

$\alpha_1 + \alpha_2$ جمع

$$B_t = \left|\frac{\mu_0 I}{2}\left(\frac{1}{4a} - \frac{1}{2\pi(a+b)}\right)\right|$$

۱۲- یک الکترون با انرژی جنبشی ۲۲۵eV وارد ناحیه‌ای با میدان مغناطیسی یکنواخت B به بزرگی 4.50×10^{-4} T می‌شود. زاویه‌ی بین جهت B و سرعت الکترون (v) برابر ۶۵/۵° است. گام مسیر پیچ طی شده توسط الکترون چقدر است؟

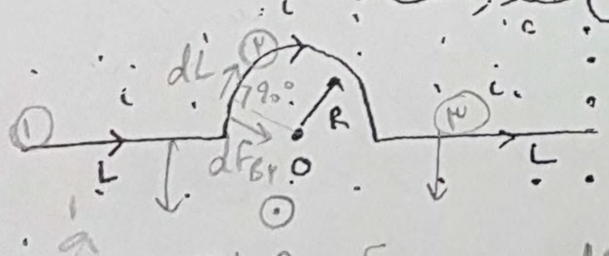
گام پیچ $d = \frac{2v\sin\theta\, RM}{qB}$ $\qquad K = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = ?$

میدان در هر حلقه بسته صفر است

۱۳- شکل زیر طرحی از یک سیم با کمان نیم دایره در وسط آن را، در یک میدان مغناطیسی یکنواخت B که به سمت خارج صفحه شکل است نشان می‌دهد. اگر از سیم جریان I عبور کند، نیروی F وارد بر آن چقدر است؟

B ⊙

نیروی سیم کمانی مرکز گرا است که پس از برآیندگیری جهت آن به سمت پایین می‌شود



$dL = Rd\theta$

$$\vec{F}_t = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \qquad F_B = I|\vec{L}\times\vec{B}| = ILB\sin\theta$$

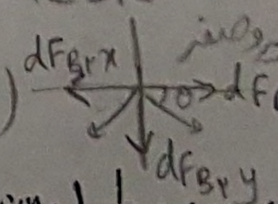
$$F_{B_1} = ILB\sin\theta = ILB = F_{B_3} \qquad dF_{B_2} = I|\vec{dL}\times\vec{B}| = IdLB\sin\theta = IdLB \qquad F_{B_2} = -\int dF_{B_2 y} = -\int_0^{\pi} dF_{B_2}\sin\theta$$

$$= -\int_0^{\pi} IdLB\sin\theta = -\int_0^{\pi} IB\sin\theta(Rd\theta) = -IBR\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta = +IBR(\cos\theta\,]_0^{\pi}) \Rightarrow F_{B_2} = -2IBR$$

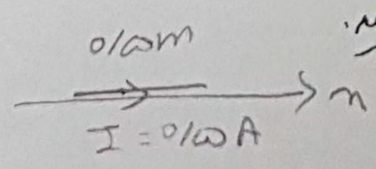
اگر حلقه کامل بود کمترین زاویه 0 تا 2π می‌شد و نیرو صفر

$$F_{B_t} = F_{B_1} + F_{B_2} + F_{B_3} = 2ILB + 2IRB = 2IB(L+R)$$

چون نیروها هم جهت‌اند



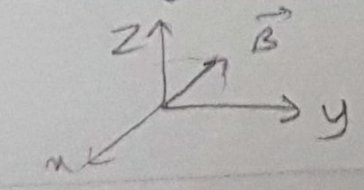
۱۴- سیمی به طول 50cm در راستای محور x قرار دارد و حامل جریان 0/5A در جهت x مثبت است. این سیم در یک میدان مغناطیسی قرار دارد که برحسب T برابر است با $B = 0.03\hat{j} + 0.1\hat{k}$. مؤلفه‌های نیروی وارد بر سیم را بیابید.



$$F_B = I|\vec{L}\times\vec{B}| = ILB\sin\theta$$

$B = 0/03\hat{j} + 0/1\hat{k}$

$$\vec{L} = L\hat{i} = 0/5\hat{i} \qquad \vec{L}\times\vec{B} = (0/5\hat{i})\times(0/03\hat{j} + 0/1\hat{k}) = 0/015\hat{k} + 0/005(-\hat{j})$$



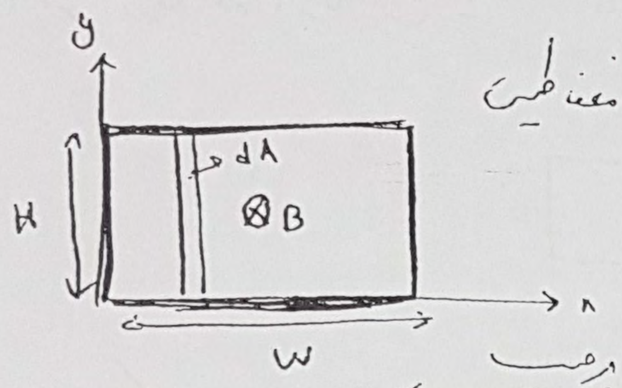
$$\vec{F}_B = I(\vec{L}\times\vec{B}) = 0/5[-0/005\hat{j} + 0/015\hat{k}] = -0/0025\hat{j} + 0/0075\hat{k}$$

$$\varepsilon = -N\frac{d\varphi}{dt} = \frac{-d\varphi}{dt} \qquad \varphi = \int \vec{B}\,d\vec{A} = \int B\,dA\cos\theta = B\int dA = B\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)$$

$$\varphi = (4t^2+2t+3)\frac{\pi r^2}{2} \Rightarrow \varepsilon = -\frac{d(4t^2+2t+3)}{dt}\cdot\frac{\pi r^2}{2}$$

$$R = 2\Omega \qquad \varepsilon = -(8t+2)\frac{\pi r^2}{2} \Rightarrow \varepsilon(t=1s) = 1.46 \qquad I = 0.16\,A$$

$$V_0 = \varepsilon - Ir \qquad 0 = 0.16 - 2I - 2.4 \Rightarrow I = \frac{0.16-2.4}{2}$$

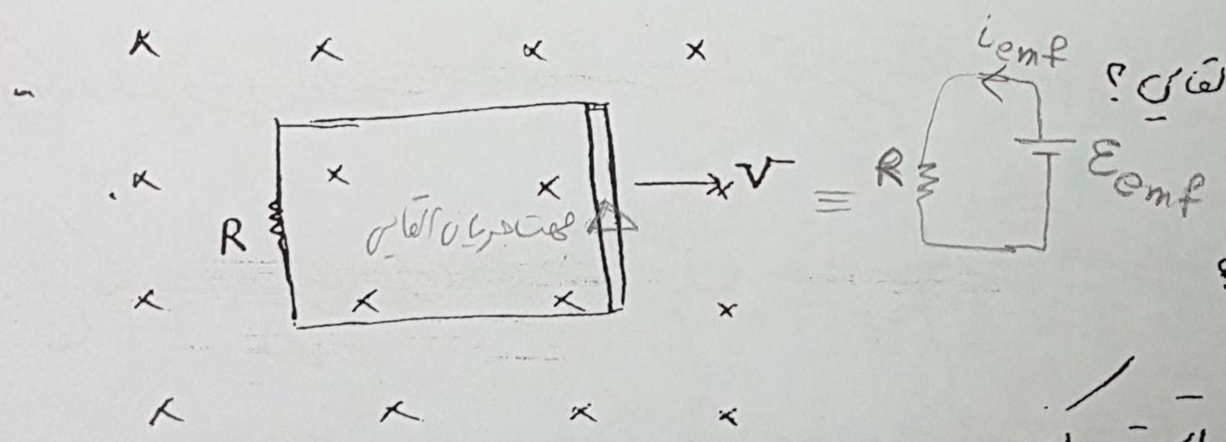


مثال: شکل روبرو یک حلقه‌ی سیم مستطیلی را نشان می‌دهد که در یک میدان مغناطیسی یکنواخت و متغیر B که عمود بر صفحه‌ی کاغذ و به سمت داخل آن است قرار دارد. بزرگی میدان با رابطه‌ی $B = 4x^2t^2$ داده می‌شود که B برحسب تسلا و t برحسب ثانیه و x برحسب متر است. عرض حلقه $w = 3m$ و ارتفاع آن $H = 2m$ است. بزرگی و جهت emf القایی در $t = 1s$ در حلقه کدام است؟ (فقط برای جواب در صفحه‌ی بعد در نظر گرفته شده است.)

جواب در صفحه بعد

مسئله انتقال انرژی متقابل:

در این مدار وقتی میله به طول l با سرعت v روی میله‌های لغزد مطلوبست



الف) محاسبه‌ی نیروی محرکه‌ی القایی؟

ب) مقدار و سوی جریان القایی؟

ج) اصل پایستگی انرژی در این مدار را تحقیق کنید.

$$\varepsilon = -N\frac{d\varphi}{dt} = \frac{-d\varphi}{dt}$$

$$\varphi = \int \vec{B}\,d\vec{A} = \int B\,dA\cos\theta = \int_0^3 4x^2t^2 \times H\,dx \qquad dA = H\,dx$$

$$\varphi = 4Ht^2\int_0^3 x^2\,dx = 4\times 2t^2 \times \frac{x^3}{3}\Big]_0^3 = 8t^2\times 9 = 72t^2$$

$$\varepsilon_{emf} = -144t \xrightarrow{t=0.1s} \varepsilon_{emf} = -14.4\,V$$

الف) $\varepsilon = -N\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}$

مطابق جواب مثال صفحه‌ی قبل $\varphi = \int \vec{B}\,d\vec{A} = \int B\,dA\cos\theta = B\int dA\cos\theta = B\int dA \times BA = B(Lx)$

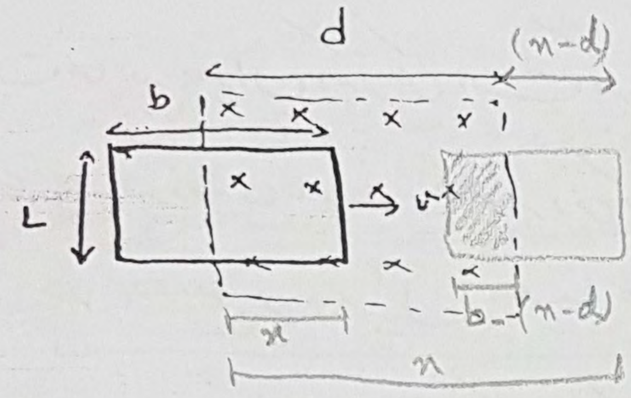
$\varepsilon = \frac{d(BLx)}{dt} = BL\frac{dx}{dt} = BLV$

ب) $I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{BLV}{R}$

ج) اصل پایستگی $P_R = P_\varphi$

$P_R = RI^2 = R\left(\frac{BVL}{R}\right)^2 = \frac{B^2V^2L^2}{R} = \frac{RB^2V^2L^2}{R^2} = \frac{B^2V^2L^2}{R}$

$P_\varphi = \varphi I = \varphi\frac{BVL}{R} = BVL \times \frac{BVL}{R} = \frac{B^2V^2L^2}{R}$



مثال: شکل روبرو یک حلقه‌ی رسانای مستطیل شکل با مقاومت R پهنای b و طول b را نشان می‌دهد که از میان میدان مغناطیسی یکنواخت B که به وسیله‌ی یک آهربای الکتریکی ایجاد شده است با تندی ثابت V کشیده می‌شود. فرض کنید $L = 40mm$ ، $b = 10cm$ ، $d = 15cm$ و $R = 1.6\Omega$

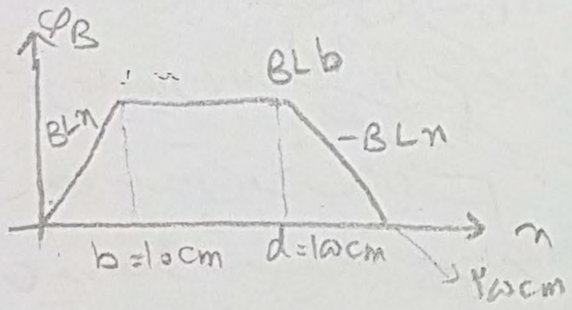
$\varphi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int B\,dA\cos\theta = B\int dA = BA \rightarrow \varphi_B = BLx$

$B = 2T$ و $V = 1m/s$ است

الف) شار φ_B را که از حلقه می‌گذرد برحسب تابعی از مکان x فاصله از سمت راست حلقه رسم کنید.

ب) نمودار emf القایی را برحسب تابعی از مکان حلقه رسم کنید. جهت emf القایی را مشخص کنید.

ج) آهنگ تولید انرژی گرمایی در حلقه را به صورت تابعی از مکان حلقه رسم کنید.



$\varphi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int B\cdot A\cdot\cos\theta = B\int dA = BA$

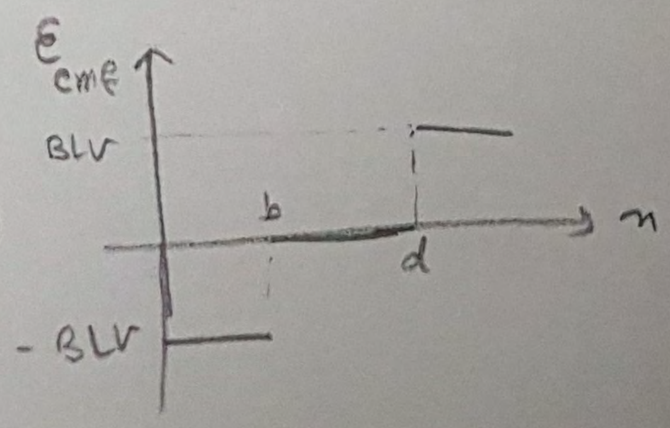
$\varphi_B = B\left[L(b-x+d)\right] = BL(-x+b+d) \rightarrow \varphi_B = (-BLx) + BL(b+d)$

ب) $\varepsilon_{emf} = -N\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}$

قسمت اول $\varepsilon_{emf} = \frac{-d}{dt}(BLx) = -BLV$

قسمت دوم $\varepsilon_{emf} = \frac{-d}{dt}(\text{عدد ثابت}) = 0$

قسمت سوم $\varepsilon_{emf} = \frac{-d}{dt}\left(-BLx + BL(b+d)\right) = BLV$

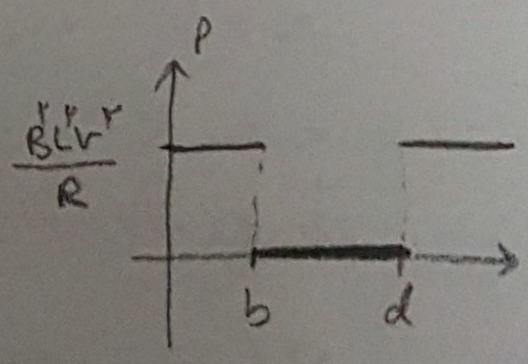


ج) $P = Ri^2 = R\left(\frac{\varepsilon_{emf}}{R}\right)^2 = \frac{\varepsilon_{emf}^2}{R}$

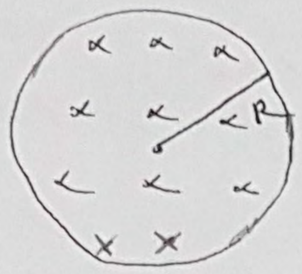
قسمت اول $P = \frac{(-BLV)^2}{R}$

قسمت دوم $P = \frac{0}{R} = 0$

قسمت سوم $P = \frac{(BLV)^2}{R}$



مسئله‌ی ۱: در شکل زیر میدان الکتریکی القایی را برای $r<R$ و $r>R$ بدست آورید. $\left(\frac{dB}{dt}\neq 0\right)$



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{L} = -N\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}$$

$$r<R:\ \int E\cdot dL\cos\theta = \frac{-d}{dt}\left(\int \vec{B}\cdot d\vec{A}\right) \Rightarrow E\int dL = \frac{-d}{dt}\left(\int B\,dA\cos\theta\right)$$

$$= \frac{-d}{dt}\left(B\int dA\right).\quad EL = \frac{-d}{dt}(BA)$$

طول حلقه‌های فرضی، r متغیره اما برون مشتق گیری بیرون می‌آوریم زیرا برای یک جایگاه ثابت در نظر می‌گیریم

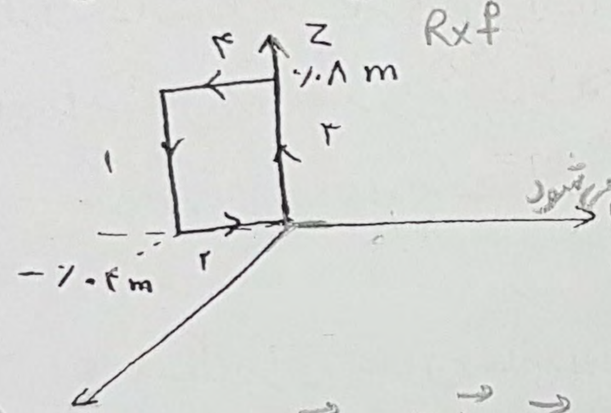
$$E(2\pi r) = \frac{-d}{dt}(B\pi r^2) = -\pi r^2\frac{dB}{dt} \Rightarrow E = \frac{-r}{2}\frac{dB}{dt}$$

$$r>R:\ \int E\,dL\cos\theta = \frac{-d}{dt}\left(\int B\,dA\cos\theta\right) \Rightarrow E\int dL = \frac{-d}{dt}\left(B\int dA\right) = \frac{-d}{dt}(BA) \Rightarrow EL = \frac{-d}{dt}(BA)$$

$$E(2\pi r) = \frac{-d}{dt}(B\pi R^2) = -\pi R^2\frac{dB}{dt} \Rightarrow E = \frac{-R^2}{2r}\frac{dB}{dt}$$

مسئله ۲: حلقه‌ی مستطیلی در صفحه‌ی zy قرار دارد و روی محور z لولا شده است. این حلقه در میدان $B = \frac{0.5}{\sqrt{2}}(\hat{i}+\hat{j})$ قرار گرفته است. از حلقه جریان 5A می‌گذرد. گشتاور نیرو حول محور z چقدر است؟

Rxf



نیروی بالا و پایین حلقه یکدیگر را خنثی می‌کنند و تاثیری در گشتاور و حرکت حلقه ندارد

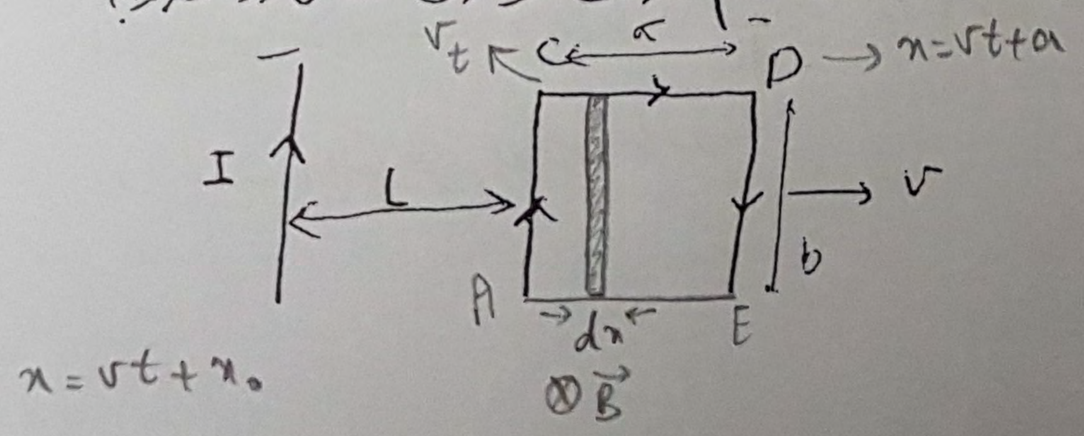
نیروی هم که روی لولا قرار دارد بی‌اثر است فقط گشتاور ضلع چپ نسبت به لولا بررسی می‌شود

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}_B \rightarrow \vec{\tau} = rF\sin\theta \rightarrow \vec{F}_B = I\vec{L}\times\vec{B} = 5\,(A)\,(-0.08\,(m)\hat{k})\left[\frac{0.05}{\sqrt{2}}(\hat{i}+\hat{j})\right] = \frac{-0.02}{\sqrt{2}}\hat{k}(\hat{i}+\hat{j})$$

$$= \frac{-0.02}{\sqrt{2}}\left[\hat{j}-\hat{i}\right] \qquad \vec{F}_B = \frac{0.02}{\sqrt{2}}(\hat{i}-\hat{j})$$

$$\vec{\tau} = 0.04\,(m)\,\hat{j}\times\left[\frac{0.02}{\sqrt{2}}(\hat{i}-\hat{j})\right] = \frac{-8\times10^{-4}}{\sqrt{2}}\left[-\hat{k}\right] = \frac{8\times10^{-4}}{\sqrt{2}}\hat{k}$$

مسئله‌ی ۴: سیم نازک مستقیم و بسیار طولانی حامل جریان I است. حلقه‌ی مستطیل شکل فلزی ACDE مطابق شکل مقابل آن قرار دارد. حلقه را با سرعت v به حرکت درمی‌آوریم. نیروی محرکه‌ی القایی در حلقه را به دست آورید. در صورتی که مقاومت حلقه R باشد مقدار جهت جریان القایی را نیز بدست آورید. طول حلقه b و عرض آن a می‌باشد.



$$\varepsilon_{emf} = -N\frac{d\varphi}{dt} = \frac{-d\varphi}{dt} \qquad \varphi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int B\,dA\,\cancel{\cos\theta}^{\,1}$$

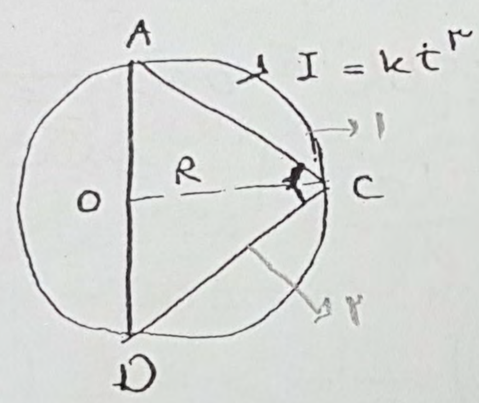
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad \varphi_B = \int d\varphi = \int B\,dA\cos\theta = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(b\,dx) = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+L)}(b\,dx)$$

$$\varphi_B = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\int_{vt}^{vt+a}\frac{dx}{x+L} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\ln x+L\Big]_{vt}^{vt+a} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\ln\left(\frac{vt+a+L}{vt+L}\right)$$

$$\varepsilon_{emf} = \frac{-d}{dt}\left[\frac{\mu_0 I b}{2\pi}\ln\left(\frac{vt+a+L}{vt+L}\right)\right] = \frac{-\mu_0 I b}{2\pi}\left[\frac{v^2t - v^2t - va}{v^2t^2+L^2}\right]\frac{1}{\left(\frac{vt+a+L}{vt+L}\right)}$$

$$\varepsilon_{emf} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi}\,\frac{\frac{a+L}{t}}{vt+a+L} = \frac{\mu_0 I a b + \mu_0 I L b}{2\pi t(vt+a)+L}$$

مسئله‌ی ۵: سیملوله‌ی طولی به طول L و شعاع R دارای N دور سیم می‌باشد. جریان $I = kt^3$ از آن عبور می‌کند. رسانای ACD مطابق شکل عمود بر محور سیم لوله واقع است. نیروی محرکه‌ی القایی در رسانا را برحسب زمان به دست آورید؟



$$\varepsilon_{emf} = -N\frac{d\varphi}{dt} \xrightarrow[\text{تعداد دور حلقه مثلث}]{N=1} \frac{-d\varphi}{dt} \qquad \varphi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int B_1\,dA_2\,\cancel{\cos\varphi}^{\,1}$$ عبوری از مثلث

$$B_1 = \frac{\mu_0 N I}{L} = \frac{\mu_0 N}{L}(kt^3) \qquad \varphi_B = \int \frac{\mu_0 N}{L}(kt^3)\,dA = \frac{\mu_0 N k t^3}{L}\int dA = \frac{\mu_0 N k t^3}{L}A_{\text{مثلث}}$$ سیملوله

$$\varphi_B = \frac{\mu_0 N k t^3}{L}\left(\frac{R\times 2R}{2}\right) = \frac{\mu_0 N k R^2 t^3}{L}$$

$$e_{emf} = \frac{-d}{dt}\left[\frac{\mu_0 N k R^2 t^3}{L}\right] \longrightarrow e_{emf} = \frac{-3\mu_0 N k R^2 t^2}{L}$$

ادامه ۷ $N_1 = \frac{\text{طول سیم}}{\text{محیط استوانه}} = \frac{1884}{2\pi(\frac{d}{2})} = \frac{1884}{\pi(10^{-1})} = \frac{18840}{\pi}$ ★

دایره

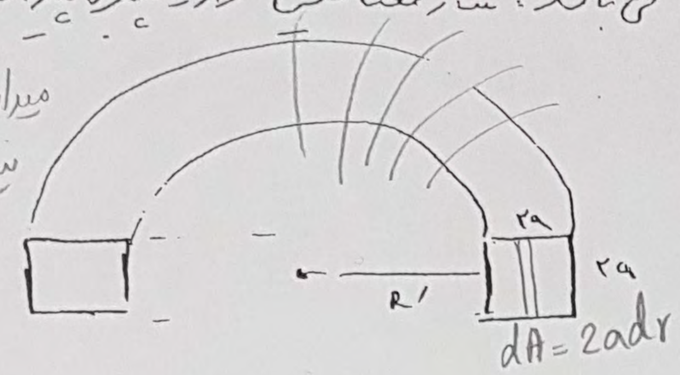
$F = \frac{\mu_0 I_0^2 a N_2 (\ln 2)^2 e^{-4t}}{4\pi^2 R}$

ادامه ۸ $I_{2\,\text{القایی}} = \frac{\mu_0 I_0 a N_2 \ln 2\, e^{-t}}{2\pi R_1} \rightarrow F = \int \frac{\mu_0 I_0 a N_2 \ln 2\, e^{-t}}{2\pi R} \frac{\mu_0 I_0 e^{-t}}{4\pi r} dr$

مسئله‌ی ۶: چنبره‌ای شامل n دور سیم پیچ و در داخل آن یک ماده‌ی مغناطیسی با ضریب μ قرار دارد.

مقطع این چنبره مربعی به ضلع 2a و شعاع اصلی آن R_1 می‌باشد. شار مغناطیسی را در چنبره پیدا کنید.

میدان = شدت نیروی ناشی از آنها



$\varphi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{A} = \int B\, dA \cos\theta = \int \frac{\mu_0 I N}{2\pi r} dA$

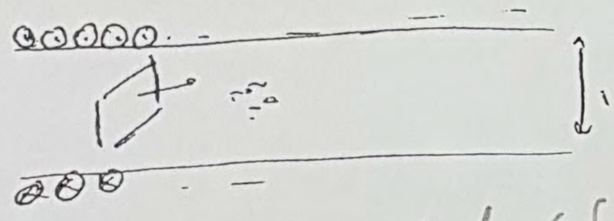
میدان چنبره — مقطعی که میدان از داخل آن عبور می‌کند

$R_1 < r < R_1 + 2a$

$\frac{\mu I N}{2\pi}\int \frac{dA}{r} = \frac{\mu I N}{2\pi}\int_{R_1}^{R_1+2a} \frac{2a\,dr}{r} = \frac{\mu_0 I N}{2\pi} \ln r \Big]_{R_1}^{R_1+2a} = \frac{\mu_0 I N}{\pi} \ln\left(\frac{R_1+2a}{R_1}\right)$

مسئله‌ی ۷: روی یک استوانه به قطر 10cm و طول 3m سیم سی به طول 1884 متر منظم پیچیده شده است و جریان 1A از آن می‌گذرد. پیچه‌ی سطحی شامل 1000 حلقه که سطح حلقه‌های آن $10cm^2$ را در مرکز استوانه قرار می‌دهیم اگر جریان در سیم‌پیچ‌های استوانه‌ای به طور خطی در مدت 0.1s از یک آمپر تا صفر تغییر کند نیروی محرکه‌ی القایی در پیچه را به دست آورید.

N ها رو نمی‌فهمم جلسه‌ی قبل



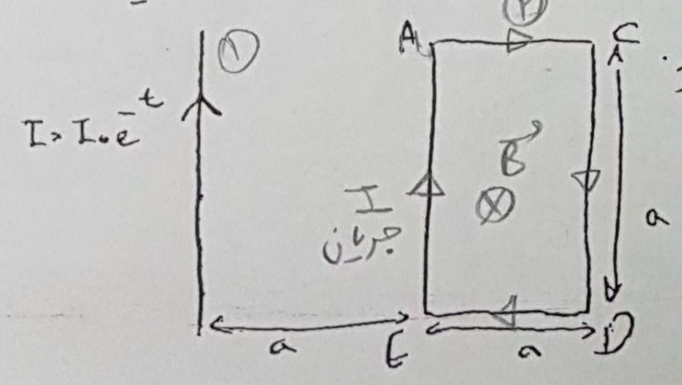
$\mathcal{E}_{\text{پیچه}} = -N_2 \frac{d\varphi}{dt} = -N_2 \frac{d(\int \vec{B}_1 \cdot d\vec{A}_2)}{dt}$

$= -(1000\text{ دور})\left(\frac{d}{dt}\left(\int B_1 dA_2 \cos\theta\right)\right) = (-1000\text{ دور})\frac{d}{dt}\left(\int \frac{\mu_0 N_1 I_1}{L_1} dA_2\right)$

$= -1000\text{ دور}\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 N_1 I_1}{L_1} A_2\right) = -1000\ \frac{\mu_0 N_1 A_2}{L_1} \frac{dI_1}{dt} \rightarrow -10$

$1A \longrightarrow 0.1s \Big\} \frac{dI}{dt} = \frac{-1}{0.1} = -10$ ★ $\mathcal{E}_{\text{پیچه}} = 10^4 \frac{\mu_0 (10\times10^{-4} m^2)}{3m} \times \frac{18840}{\pi}$

★ مسئله: سیم راست طولانی مطابق شکل حامل جریان $I = I_0 e^{-t}$ است. رسانای مربعی شکل به ضلع a و مقاومت الکتریکی R در فاصله‌ی a از سیم واقع است. مقدار نیروی وارد بر ضلع AC را تعیین کنید.



$I = I_0 e^{-t}$ $\vec{F}_{\text{القایی}} = I\vec{L} \times \vec{B} = I_2 L_2 B_1 \sin\theta =$ میدان داره کم میشه

زاویه‌ی L و B = 90

طبق قانون لنز جریان I_2 باید طوری انتخاب شود که از کم شدن آن جلوگیری کند چون همه‌ی نیروها به یک سمت است می‌شود انتگرال گرفت

$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_0 e^{-t}}{2\pi r}$

$dF = I_2 B_1 dL_2$ $F = \int dF = \int I_2 B_1 dL_2$

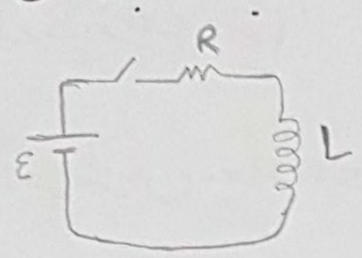
$I_{2\,\text{القایی}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{القایی}}}{R}$ $\mathcal{E}_{\text{القایی}} = -N_2 \frac{d\varphi_1}{dt} = -N_2 \frac{d}{dt}\left(\int \vec{B}_1 \cdot d\vec{A}_2\right)$

$= -N_2 \frac{d}{dt}\left(\int \frac{\mu_0 I e^{-t}}{2\pi r}(a\times dr)\right) = -N_2 \frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 I_0 e^{-t} a}{2\pi}\int_a^{2a} \frac{dr}{r}\right)$

$\mathcal{E}_{\text{القایی}} = -N_2 \frac{d}{dt}\left[\frac{\mu_0 I_0 a e^{-t}}{2\pi} \ln 2\right] = N_2 \frac{\mu_0 I_0 a e^{-t}}{2\pi} \ln 2$

مثال: یک القاگر $L=3.56H$ به طور متوالی با یک مقاومت $R=12.8\Omega$ قرار دارد و سپس به طور ناگهانی یک $\varepsilon=3.24V$ در دو سر این ترکیب برقرار می‌گردد.

الف) در $t=0.278s$ (که برابر یک ثابت زمانی است) پس از اعمال نیروی محرکه، آهنگ P که طبق آن انرژی به وسیله‌ی باتری تأمین می‌شود، چقدر است؟



ب) در $t=0.278s$ با چه آهنگ P_R انرژی گرمایی در مقاومت ظاهر می‌شود؟

پ) در $t=0.278s$، انرژی با چه آهنگ P_B در میدان مغناطیسی ذخیره می‌شود؟

$$P_\varepsilon(t=0.278s)=\varepsilon i=\varepsilon i_{max}\left(1-e^{\frac{-t}{(\frac{L}{R})}}\right)=\varepsilon i_{max}\left(1-e^{-1}\right)$$

$$=\frac{\varepsilon^2}{R}(0.63)=\frac{(3.24)^2}{(12.8)}(0.63)\ (watt)$$

ب) $$P_R=Ri^2=R\left[i_{max}\left(1-e^{\frac{-t}{(\frac{L}{R})}}\right)\right]^2\rightarrow P_R(t=0.278(s))=R\,i_{max}^2\left(1-e^{-1}\right)^2$$

$$=R\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2(0.63)^2=\frac{\varepsilon^2}{R}(0.63)^2=\frac{(3.24)^2}{12.8}(0.63)^2$$

پ) $$P_B=P_\varepsilon-P_R=Li\frac{di}{dt}=L\left[i_{max}\left(1-e^{\frac{-t}{(\frac{L}{R})}}\right)\right]\left[i_{max}\frac{R}{L}e^{\frac{-t}{\frac{L}{R}}}\right]$$

$$P_B(t=0.278(s))=L\left[i_{max}\left(1-e^{-1}\right)\right]\left[i_{max}\frac{R}{L}e^{-1}\right]=Ri_{max}^2(0.63)(0.37)$$

چگالی انرژی میدان مغناطیسی

$$u_B=\frac{U_B}{Al}\qquad U_B=\frac{1}{2}Li^2$$

$$u_B=\frac{Li^2}{2Al}=\frac{L}{l}\frac{i^2}{2A}\qquad \frac{L}{l}=\mu_0 n^2 A$$

$$u_B=\frac{1}{2}\mu_0 n^2 i^2\qquad B=\mu_0 n i$$

$$u_B=\frac{B^2}{2\mu_0}\longrightarrow$$ این معادله چگالی انرژی را در هر نقطه که در آن میدان مغناطیسی B است، به دست می‌دهد اگر ما آن را برای یک حالت خاص، سلیله به دست آوردیم ولی این معادله برای همه‌ی میدان‌های مغناطیسی، بدون توجه به اینکه چگونه تولید شده اند برقرار است.

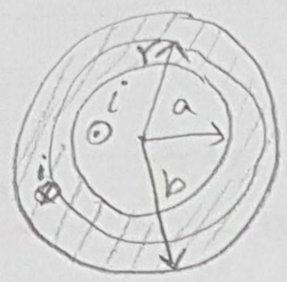
$$u_E=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\qquad u_B=\frac{1}{2\mu_0}B^2$$

$$dU_B=u_B\,dv$$

انرژی مغناطیسی $U_B=\int dU_B=\int u_B\,dv=\int\frac{1}{2\mu_0}B^2\,dv$

انرژی مکانیکی $U_E=\int\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\,dv$

مثال: یک کابل هم محور دراز شامل دو استوانه‌ی رسانای نازک به شعاع‌های a و b است. استوانه‌ی داخلی A حامل جریان i، و استوانه‌ی خارجی B مسیر برگشت جریان را تأمین می‌کند. انرژی ذخیره شده بین استوانه‌ها را برای طول l کابل محاسبه کنید. U و u ؟



انرژی مغناطیسی $U = \frac{1}{2} L i^2$

چگالی انرژی $u = \frac{B^2}{2\mu_0}$

قانون آمپر $\oint \vec{B} \cdot \vec{dL} = \mu_0 i_{in}$

$\int B\, dL \cos\theta = \mu_0 i_{in}$

$B \int dL = \mu_0 i_{in}$

$B(2\pi r) = \mu_0 i \rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$

$u = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\right)^2 = \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2}$

$u = \frac{U}{V} = \frac{dU}{dV} \rightarrow dU = u\, dV$

انرژی مغناطیسی $U = \int dU = \int u\, dV$

$U = \int \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2 r^2}(2\pi r L\, dr) \rightarrow *$

حجم استوانه $V = \pi r^2 L \rightarrow dV = 2\pi r L\, dr$

$* = \int \frac{\mu_0 i^2 L\, dr}{4\pi r}$

$U = \frac{\mu_0 i^2 L}{4\pi}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i^2 L}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \frac{U}{L} = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

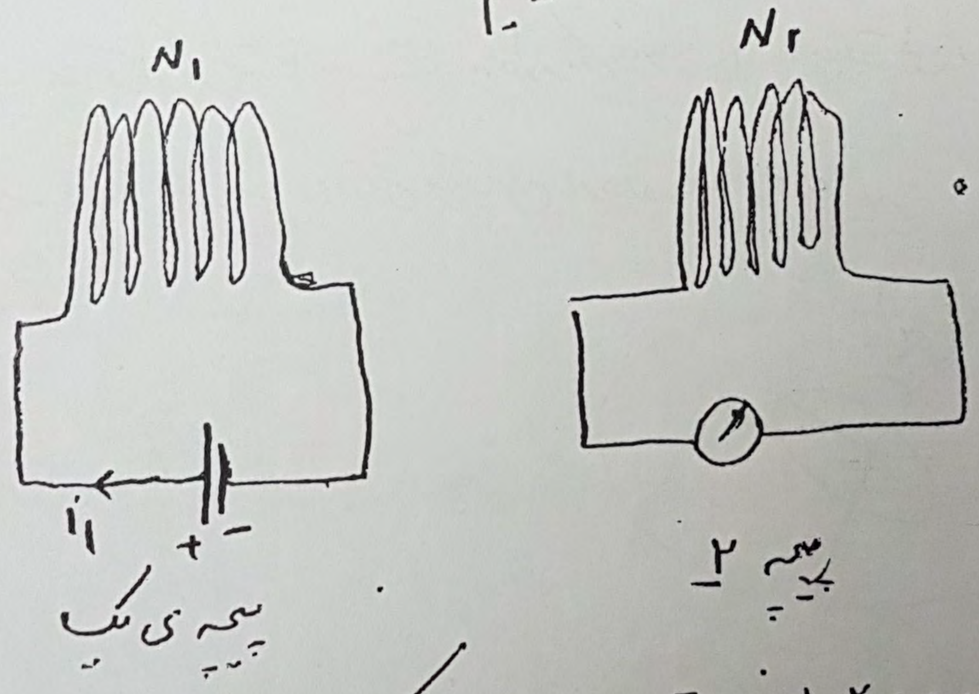
القای متقابل:

دو سیم‌پیچ را مطابق شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1}$

$M_{21} = \frac{N_1 \Phi_{21}}{I_2}$

$M_{12} = M_{21} = M$



القای متقابل M_{21} پیچه‌ی ۲ را نسبت به پیچه‌ی یک به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1} \Rightarrow M_{21} i_1 = N_2 \Phi_{21}$

اگر به وسیله‌ی یک عامل خارجی، باعث تغییر i_1 نسبت به زمان شویم، داریم:

$M_{21} \frac{di_1}{dt} = \underbrace{N_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt}}_{\mathcal{E}_2} \Rightarrow \mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{di_1}{dt}$

اگر اکنون نقش پیچه ۱ و ۲ را عوض کنیم یعنی به وسیله‌ی یک باتری در پیچه ۲ جریان i_2 را برقرار کنیم و این امر شار مغناطیسی Φ_{12} را ایجاد می‌کند و اگر i_2 را نسبت به زمان تغییر دهیم

1) $\mathcal{E}_1 = -M_{21} \frac{di_2}{dt}$

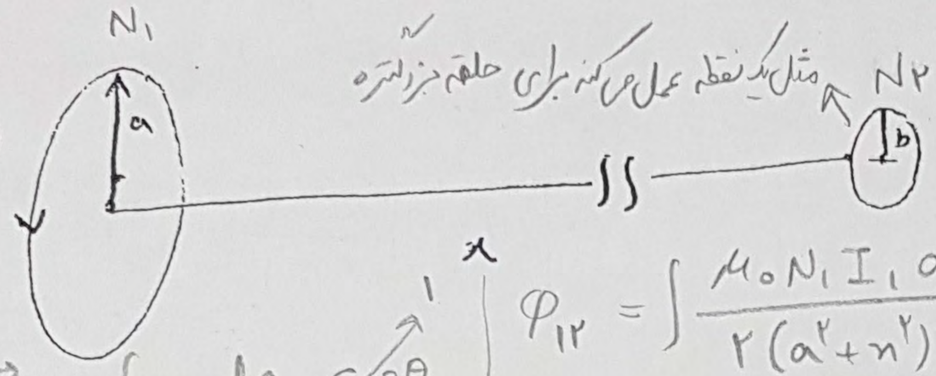
$$M_{21} = M_{12} = M \qquad \mathcal{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt} \quad , \quad \mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt}$$

کپی‌ی SL برای M همانند L، جاری است.

★ مسئله ۱: ضریب القای متقابل M بین دو سیم‌پیچ دایره‌ای هم‌محور را پیدا کنید. شعاع سیم‌پیچ‌ها به ترتیب a و b و تعداد دور سیم‌پیچ‌های آن‌ها به ترتیب N_1 و N_2 می‌باشد ($a>b$) شعاع حلقه‌ها در برابر فاصله‌ی آن‌ها کوچک فرض می‌شود

$a \gg b$

$x \gg (a,b)$



$$M = \frac{N_2\Phi_{12}}{I_1}$$

$$\Phi_{12} = \oint \vec{B}_1 \cdot \vec{dA}_1 = \int B_1\, dA_2 \cancel{\cos\theta}^{\,1}$$

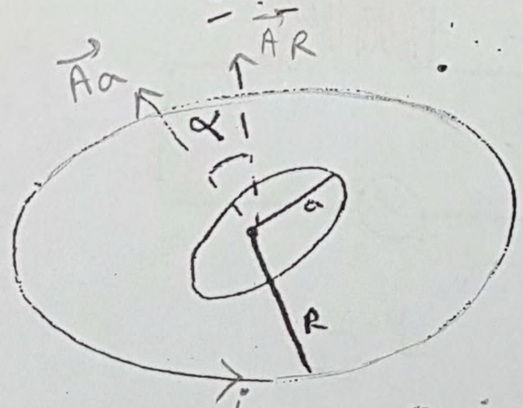
ص ۹۶ مسئله ۲ $B_1 = \dfrac{\mu_0 I_1 a^2}{2(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\xrightarrow[\text{حلقه}]{N_1 \text{ برای}}$ $B_{1t} = N_1 B_1 = \dfrac{\mu_0 N_1 I_1 a^2}{2(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$\Phi_{12} = \int \frac{\mu_0 N_1 I_1 a^2}{2(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dA_2 = \frac{\mu_0 N_1 I_1 a^2}{2(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \int dA_2$$

$$= \frac{\mu_0 N_1 I_1 a^2}{2(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\, \pi b^2$$

$$M = \frac{N_2\Phi_{12}}{I_1} = \frac{N_1}{I_1}\left[\frac{\mu_0 N_1 I_1 \pi a^2 b^2}{2(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi a^2 b^2}{2(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

★ مسئله‌ی ۲: حلقه‌ای از یک سیم دایره شکل به شعاع R تشکیل شده است در مرکز آن حلقه‌ی دایره شکل دیگری با شعاع بسیار کوچک a قرار گرفته است به طوری که $R \gg a$؛ حلقه‌ی دوم طوری است که صفحه‌ی دو حلقه با هم زاویه‌ی α می‌سازند. ضریب القای متقابل دو حلقه M را بیابید.



$$M = \frac{N_0 \Phi_{Ra}}{I_R} = \frac{\Phi_{Ra}}{I_R} = \frac{\Phi_{Ra}}{i}$$

$$\Phi_{Ra} = \oint \vec{B}_R \cdot \vec{dA}_a = \int B_R\, dA_a \cos\theta$$

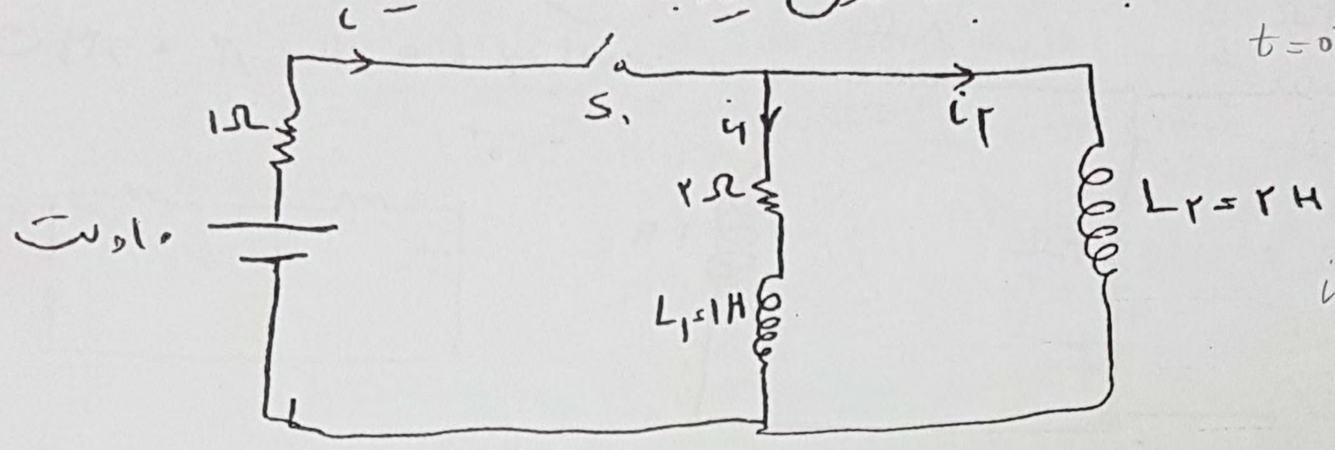
در مرکز دایره $x=0$ $B_R = \dfrac{\mu_0 i R^2}{2R^3} = \dfrac{\mu_0 i}{2R}$

$$\Phi_{Ra} = \int \frac{\mu_0 i}{2R}\, dA_a \cos\alpha = \frac{\mu_0 i}{2R}\cos\alpha \int dA_a = \frac{\mu_0 i}{2R}\cos\alpha\,(\pi a^2) = \frac{\mu_0 i \pi a^2}{2R}\cos\alpha$$

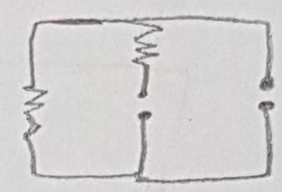
$$\frac{\Phi_{Ra}}{i} = \frac{\frac{\mu_0 i \pi a^2}{2R}\cos\alpha}{i} = \frac{\mu_0 \pi a^2 \cos\alpha}{2R}$$

مسئله ۳:

در مدار شکل زیر سلف‌ها در ابتدا بدون شار (جریان اولیه) هستند. جریان‌های آنها یعنی i_1 و i_2 را بلافاصله بعد از بستن کلید S در مدار و نیز بعد از زمان بسیار زیاد ($t=\infty$) حساب کنید و همچنین مقادیر $\frac{di_1}{dt}$ و $\frac{di_2}{dt}$ را درست بعد از بسته شدن کلید به دست آورید.



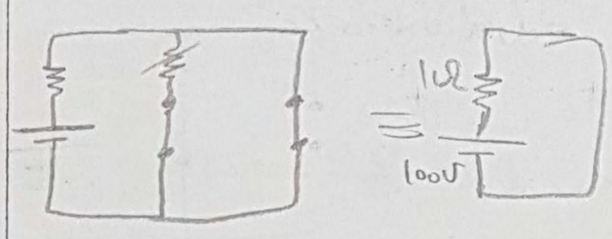
$t=0^+$



$i(0^+)=i_1(0^+)=i_2(0^+)=0$

چون مدار کاملاً قطع می‌باشد

$t=\infty$



$i_1(t=\infty)=0$

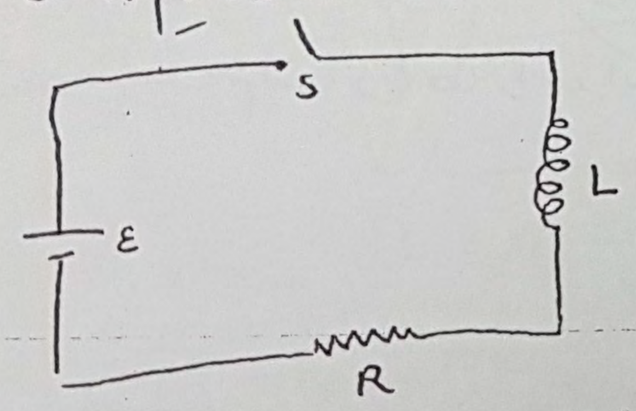
$i_2(t=\infty)=\frac{10V}{1\Omega}=10(A)$

$\frac{di_1}{dt}(t=0^+)=?$ $\quad \frac{di_2}{dt}(t=0^+)=?$ $\quad \varepsilon=L\frac{di}{dt}$

$\varepsilon_{L_1}(t=0^+)=10=L_1\frac{di_1}{dt}(t=0^+)\rightarrow\frac{di}{dt}(t=0^+)=\frac{10}{L_1}=\frac{10}{1}=10\ \frac{A}{S}$

$\varepsilon_{L_2}(t=0^+)=10=L_2\frac{di_2}{dt}(t=0^+)\Rightarrow\frac{di_2}{dt}(t=0^+)=\frac{10}{L_2}=\frac{10}{2}=5\ \frac{A}{S}$

مسئله‌ی ۴: در مدار RL نشان داده شده در شکل زیر در لحظه‌ی $t=0$ کلید S وصل می‌شود و داریم $\varepsilon=36V$ و $R=8\Omega$ و $L=3H$.



الف) نسبت اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت و دو سر سلف را وقتی جریان مدار برابر ۲A است به دست آورید.

ب) وقتی جریان ۴٫۵A است اختلاف پتانسیل دو سر سلف را به دست آورید.

الف) $\frac{V_R}{V_L}=\frac{IR}{\varepsilon-V_R}=\frac{IR}{\varepsilon-IR}=\frac{16V}{(36-16)V}=\frac{16}{20}=0/8$

ب) $\varepsilon=V_R+V_L\Rightarrow 36V=(4/5\times 8)+V_L\Rightarrow V_L=0(V)$

(ادامه) $\int \frac{di_2}{dt} = 5-10i_2 \rightarrow \frac{1}{-10}\int_0^{i_2} \frac{-10\,di_2}{5-10i_2} = \int_0^t dt \quad \frac{-1}{10}\ln(5-10i_2)\Big|_0^{i_2} = t\Big|_0^t \rightarrow \ln\left(\frac{5-10i_2}{5}\right) = -10t$

★ مسئله‌ی ۵: در مدار دو حلقه‌ای نشان داده شده در شکل زیر کلید S در لحظه‌ی $t=0$ بسته می‌شود. سلف قبل از بسته شدن کلید کاملاً خالی از شار مغناطیسی است.

$\xrightarrow{exp} 5-10i_2 = 5e^{-10t}$

$1-2i_2 = e^{-10t} \qquad 2i_2 = 1-e^{-10t}$

الف: جریان سلف درست بعد از بسته شدن کلید ($t=0$) چقدر است؟ $\quad i_2(t) = 0.5(1-e^{-1-t})$

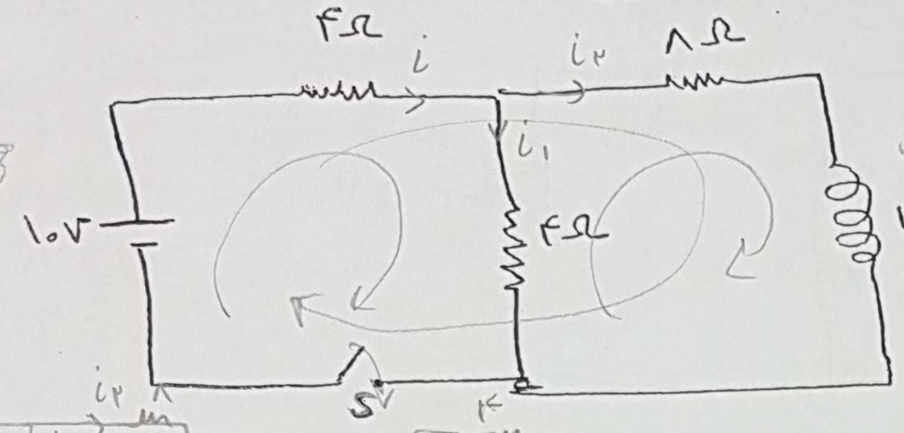
ب: بعد از مدت طولانی از بسته ماندن کلید جریان سلف چقدر است؟ $\quad i_2(t) = 0.5\left(1-e^{\frac{-t}{\frac{1}{10}}}\right) \quad \tau_1 = \frac{1}{10}s$

ج: ثابت زمانی تغییرات جریان سلف چقدر است؟

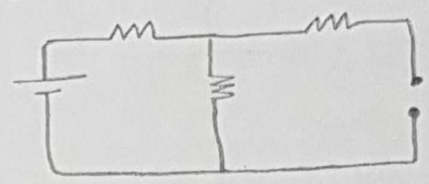
د: به کمک فرض‌های بالا رابطه جریان سلف با زمان را به طور تقریبی بنویسید.

و: جریان در لحظات $\frac{1}{3}$، ۰/۲، ۰ از $t=$ پیدا کنید.

جلسه آخر تست بسیار دیدم



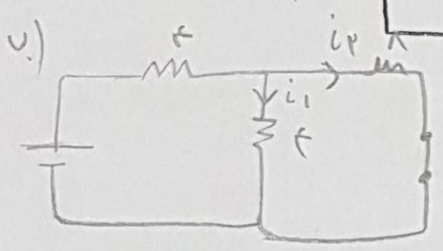
الف) $t=0^+$



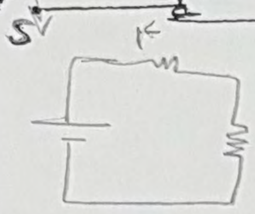
با توجه به شرایط مدار در $t=0^+$ خواهیم داشت:

$i_L(t=0^+) = 0(A)$

ب)



$\equiv$

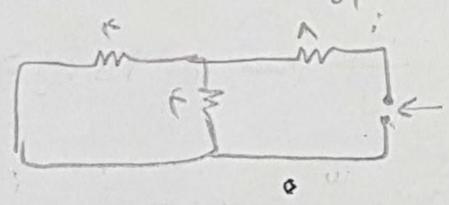


$\frac{4\times 8}{12} = \frac{8}{3}\Omega$

$i = \frac{10V}{4+\frac{8}{3}} = \frac{30}{20} = 1.5(A)$

$4i_1 = 8i_2 \rightarrow \frac{i_1}{i_2} = \frac{8}{4} = 2 \rightarrow i_1 = 2i_2 \qquad i = i_1+i_2 = 3i_2 \rightarrow i_2 = \frac{1.5}{3} = 0.5A$

ج)



$R_t = (4\|4)+8 = \frac{4\times 4}{8}+8 = 10\Omega \qquad$ ثابت زمانی القاگر $\tau = \frac{L}{R} = \frac{1}{10} = 0.1(s)$

KCL: $i = i_1+i_2 \quad (3)$

د) KVL: $-4i-8i_2-V_L+10=0 \rightarrow -4i-8i_2-\frac{di_2}{dt}+10=0 \quad (1)$

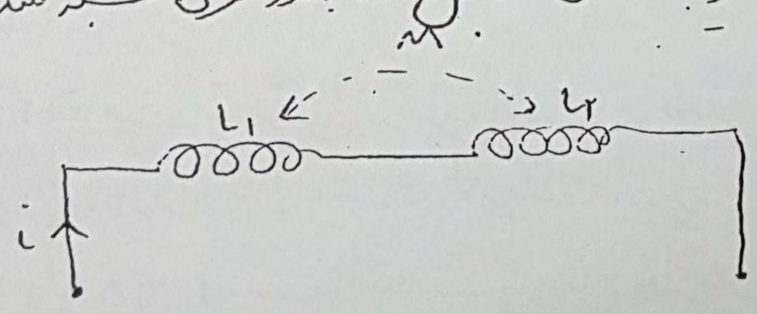
KVL: $-8i_2-V_L+4i_1=0 \rightarrow -8i_2-\frac{di_2}{dt}+4i_1=0 \quad (2)$

KVL: $-4i-4i_1+10=0 \rightarrow -4i-4i_1+10=0 \quad (3)$

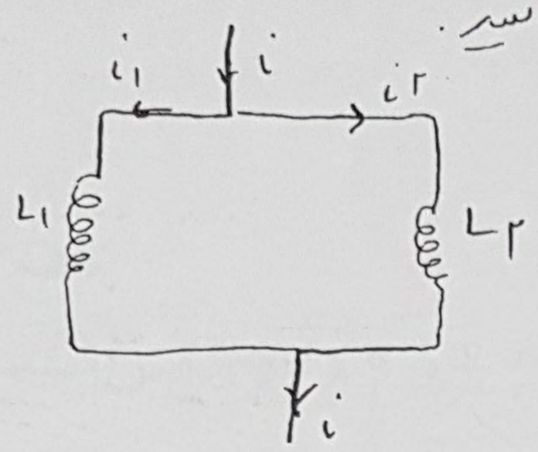
$\xrightarrow{(3),(4)} -4(i_1+i_2)-4i_1+10=0 \rightarrow 4i_1 = 5-2i_2$

$\xrightarrow{5,2} -8i_2-\frac{di_2}{dt}+5-2i_2=0 \rightarrow \frac{di_2}{dt}+10i_2=5$

مسئله‌ی ۶: دو سلف با ضرایب خودالقایی L_1 و L_2 و ضریب القای متقابل M به طور سری بسته شده‌اند. ضریب خودالقای سلف حاصل از آن‌ها را پیدا کنید.



مسئله‌ی ۷: دو سلف L_1 و L_2 با ضریب القای متقابل M به صورت موازی بسته شده‌اند. ضریب خودالقایی سلف هم‌ارز آنها را پیدا کنید.



$M = \frac{N\phi}{i}$

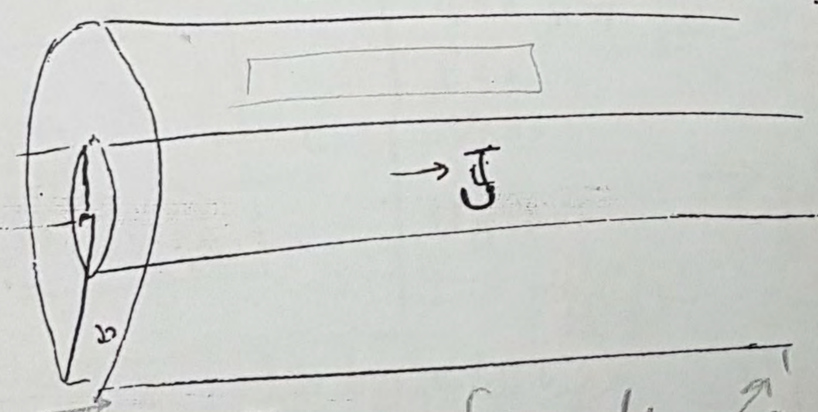
★ مسئله‌ی ۸: در کابل محوری که استوانه داخلی توپر و استوانه خارجی آن توخالی است جریانی به چگالی $J = J_0 r$ می‌گذرد. ضریب خودالقا برای طول L از کابل بدست آورید

خودالقا از این راه بدست می‌آید نه القای متقابل

$L = \frac{N\phi}{I}$

$\phi = \oint \vec{B} \cdot \vec{dA}$

$J = J_0 r$



$U_B = \frac{1}{2} L i^2 = \int u\, dv = \int \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dv$

$U_B = \frac{1}{2\mu_0} \left[\int B_{in}^2 dv + \int B_{out}^2 dv \right] = \frac{1}{2} L \left[\int J dA \right]^2$

قانون آمپر برای محاسبه B_{in}

$\oint \vec{B}_{in} \cdot \vec{dL} = \mu_0 I_{in} \rightarrow \int B_{in}\, dL \cos\theta = \mu_0 \int J dA$

$B_{in}(2\pi r) = \mu_0 \int_0^r (J_0 r)(2\pi r dr) = \mu_0 J_0 2\pi \int_0^r r^2 dr$

$B_{in}(2\pi r) = 2\pi J_0 \frac{\mu_0 r^3}{3} \rightarrow B_{in} = \frac{\mu_0 J_0 r^2}{3}$

قانون آمپر برای محاسبه B_{out}

$\oint \vec{B}_{out} \cdot \vec{dL} = \mu_0 I_{in} = \int B_{out}\, dL \cos\theta = \mu_0 \int J dA$

$B_{out}(2\pi r) = \mu_0 \int_0^a J_0 r (2\pi r dr) \rightarrow B_{out}(2\pi r) = \mu_0 J_0 2\pi \frac{r^3}{3} \Big|_0^a \rightarrow B_{out} = \frac{\mu_0 J_0 a^3}{3r}$

$U_B = \frac{1}{2\mu_0} \left[\int_0^a \frac{\mu_0^2 J_0^2 r^2}{9} (2\pi r L dr) + \int_a^b \frac{\mu_0^2 J^2 a^6}{9 r^2} (2\pi r L dr) \right] = \frac{1}{2} L \left[\int_0^a J_0 r 2\pi r dr \right]^2$

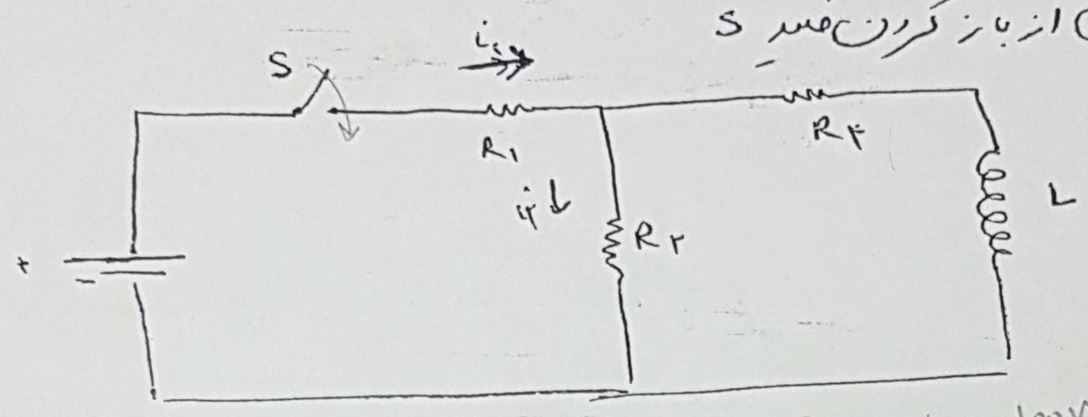
$U_B = \frac{1}{2\mu_0} \left[\frac{\mu_0^2 J_0^2 2\pi L}{9} \times \frac{a^6}{6} + \frac{\mu_0^2 J_0^2 a^6 2\pi L}{9} \times \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right] = \frac{1}{2} L \left[2\pi J_0 \frac{a^3}{3} \right]^2 \rightarrow ★$

$★ \frac{\mu_0^2 J_0^2 2\pi L a^6}{2\mu_0 9} \left[\frac{1}{6} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right] = \frac{1}{2} L \left[4\pi^2 J_0^2 \frac{a^6}{9} \right]$

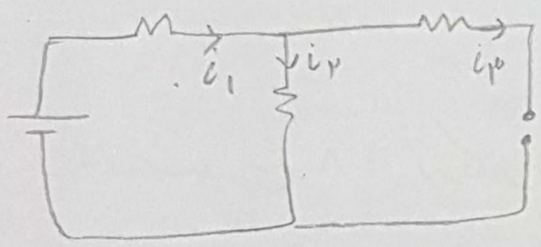
$\mu_0 L \left[\frac{1}{6} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right] = 2\pi L$

$L = \frac{\mu_0 L}{2\pi} \left[\frac{1}{6} + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \right]$

مسئله‌ی ۹: در شکل زیر $E=100V$ ، $R_1=10\Omega$ ، $R_2=20\Omega$ ، $R_3=30\Omega$ و $L=2H$ است مطلوب است مقادیر i_1 و i_2 الف) بلافاصله پس از بستن کلید S ب) مدتی پس از بستن کلید S پ) بلافاصله پس از باز کردن کلید S ت) مدتی پس از باز کردن کلید S



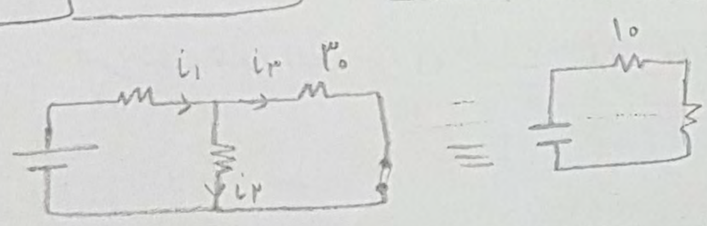
الف) $t=0^+$



$i_3=0$

$$i_1=i_2=\frac{100V}{(10+20)\Omega}=\frac{10}{3}(A)$$

ب) $t=\infty$



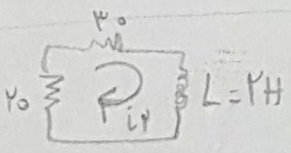
$$\frac{20\times 30}{50}=\frac{60}{50}=12\Omega$$

$$i_1=\frac{100V}{10+12\Omega}=\frac{100}{22}=\frac{50}{11}A$$

$$20i_2=30i_3=\underbrace{12i_1}_{\text{کل (در موازی)}}=12\times\frac{50}{11}\Rightarrow i_2=\frac{12\times 5}{11\times 2}=\frac{30}{11}A$$

$$i_3=i_1-i_2=\frac{50}{11}-\frac{30}{11}=\frac{20}{11}A$$

پ) بعد از باز کردن کلید $i_1=0$



$$-3i_2-V_L-20i_2=0$$

$$50i_2+2\frac{di_2}{dt}=0\rightarrow\frac{2di_2}{dt}=-50i_2\qquad\frac{di_2}{dt}=-25i_2$$

$$\frac{di_2}{i_2}=-25dt\qquad\int_{\frac{20}{11}}^{i_2}\frac{di_2}{i_2}=\int_0^t-25dt\qquad \ln i_2\Big]_{\frac{20}{11}}^{i_2}=-25t\Big]_0^t\qquad \ln\left[\frac{i_2}{\frac{20}{11}}\right]=-25t$$

$$\xrightarrow{\exp}\frac{i_2}{\frac{20}{11}}=e^{-25t}\qquad i_2(t)=\frac{20}{11}e^{\frac{-t}{\frac{1}{25}}}$$

بعد از باز کردن کلید $t=0^+\rightarrow i_2(t=0^+)=\frac{20}{11}(A)$

ت) $i_1=0$ $\quad i_2(t=\infty)=i_3(t=\infty)=0$

میدان الکتریکی $E = \frac{\Delta V}{L}$ اختلاف پتانسیل

$J = \sigma$

فصل ۶

$J = \frac{I}{A}$ $\quad R = \frac{L}{A\sigma} = \frac{\rho L}{A}$

فصل ۷

$P = IV = RI^2 = \frac{\Delta V^2}{R}$

$\frac{dq}{dt} = I$

$q_{\text{تخلیه}} = C\varepsilon e^{\frac{-t}{RC}}$

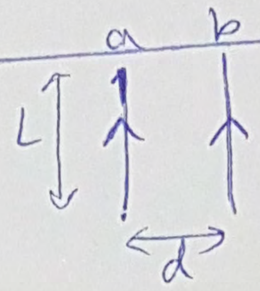
$RC \,/\, q = C\varepsilon\left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right)$

$\frac{q}{C} = V$

$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2$

فصل ۸

$F_B = I\,L \times B = ILB\sin\theta$ سیم



$F = \frac{\mu_0 I_a I_b}{2\pi d}$

$\tau = IAB\sin\theta$ گشتاور مغناطیسی

$\tau = rF = \mu B$ مکانیکی $/ \mu = IA$

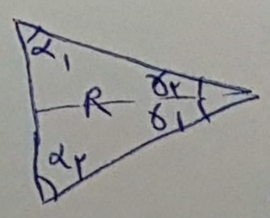
گام بیچ $d = \frac{V_{\parallel}\, 2\pi m}{qB}$

فصل ۹

بیوساوار $\int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\times dl}{r^2} = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,dl\sin\theta}{r^2}$

قانون آمپر $\oint B\cdot dL = \mu_0 I_{in} = \oint BL\cos\theta = \mu_0 I_{in}$

$B = \frac{\mu_0 I\theta}{4\pi r} \xrightarrow{\text{حلقه کامل}} \frac{\mu_0 I\pi}{4\pi r}$

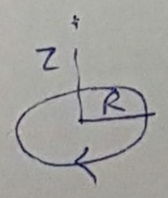


$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)$

$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\sin\gamma_2 - \sin\gamma_1)$

سیم نامتناهی $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

نیم‌متناهی $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}$



$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$

سیم لوله $B = \mu_0 I n = \frac{\mu_0 I N}{L} \longrightarrow i_{in} = \frac{N}{L} i$

دور در طول واحد

چنبره $B = \frac{\mu_0 I N}{2\pi r} \longrightarrow i_{in} = Ni$