1

معادله لژاندر و چندجمله ای لژاندر

معادله $\lambda \in \mathbb{R}$ ، $\boxed{(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda+1)y = 0}$ را یک معادله

لژاندر مرتبه λ می نامیم. نقطه $x=0$ یک نقطه عادی این معادله است، بنابراین

معادله دارای جواب به فرم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ است.

با قرار دادن y ، y' و y'' در معادله رابطه بازگشتی به صورت زیر به دست می آید:

$$a_{n+2} = \frac{(n-\lambda)(n+\lambda+1)}{(n+1)(n+2)} a_n .$$

اگر $\lambda = n$ باشد، آنگاه بنا به رابطه بازگشتی فوق، یکی از جوابهای معادله، یک چندجمله‌ای درجه n خواهد بود که آن را چندجمله‌ای لژاندر درجه n می‌نامیم و با $P_n(x)$ نشان می‌دهیم. $P_n(x)$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

* فقط این رابطه حفظ شود.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n \cdot k! \, (n-k)! \, (n-2k)!} x^{n-2k}$$

در نتیجه:

$$\boxed{\begin{array}{ll} n=0 \longrightarrow P_0(x)=1, & n=2 \longrightarrow P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \\ n=1 \longrightarrow P_1(x)=x, & n=3 \longrightarrow P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x) \end{array}}$$

- خواص چندجمله‌ای‌های لژاندر

تعریف: مجموعه توابع $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$ را در فاصله $[a, b]$ متعامد

گوییم هرگاه برای هر دو تابع متفاوت از این مجموعه داشته باشیم

$$\int_a^b f_m(x) \cdot f_n(x)\, dx = 0 \quad , \quad m \neq n$$

خاصیت ۱: چندجمله‌ای‌های لژاندر متعامد می‌باشند. یعنی:

$$\boxed{\int_{-1}^{1} P_m(x) \cdot P_n(x)\, dx = 0, \qquad m \neq n} \xrightarrow{\text{نتیجه مهم}} \boxed{\int_{-1}^{1} P_n(x)\, dx = 0 \quad n \neq 0}$$

چرا؟!

خاصیت ۲:

$$\boxed{\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2\, dx = \frac{2}{2n+1}}$$

(حالت $m = n$)

خاصیت ۳: برای n زوج، $P_n(x)$ تابعی زوج و برای n فرد، $P_n(x)$ تابعی فرد است.

بنابراین نتایج زیر را داریم:

$$\int_{-1}^{1} \overbrace{\underbrace{x^{2n}}_{\text{زوج}} \cdot \underbrace{P_{2n+1}(x)}_{\text{فرد}}}^{\text{فرد}}\, dx = 0$$

$$\int_{-a}^{a} \underbrace{f(x)}_{\text{فرد}}\, dx = 0$$

یادآوری

$$\int_{-1}^{1} x^{2n+1} \cdot P_n(x)\, dx = 0$$

$$\int_{-a}^{a} \underbrace{f(x)}_{\text{زوج}}\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$$

3

مثال ۱: مقدار انتگرال های زیر را بیابید.

الف) $\int_0^{\pi} \left(P_4(\cos u)\right)^2 \sin u \, du$

ب) $\int_{-1}^{1} \underbrace{(2x^4 - 8x^2)}_{\text{تابع زوج}} \cdot \overbrace{P_5(x)}^{\text{تابع فرد}} \, dx \xrightarrow{\text{خاصیت ۳}} = 0$

حل الف) حل به کمک تغییر متغیر.

$$\int_0^{\pi} \left(P_4(\cos u)\right)^2 \cdot \sin u \, du = -\int_1^{-1} \left(P_4(t)\right)^2 dt = \int_{-1}^{1} \left(P_4(t)\right)^2 dt$$

$$\xrightarrow{\text{خاصیت ۲}} = \frac{2}{2 \times 4 + 1} = \boxed{\frac{2}{13}}$$

مثال ۲: اگر a، b، c اعداد ثابت باشند، مقدار انتگرال زیر را بیابید.

$$\int_{-1}^{1} (x^3 + ax^2 + bx + c) \cdot P_2(x)\, dx$$

حل:

$$I = \underbrace{\int_{-1}^{1} \overset{\text{فرد}}{x^3} \cdot \overset{\text{زوج}}{P_2(x)}\, dx}_{=0} + \int_{-1}^{1} ax^2 P_2(x)\, dx + b\underbrace{\int_{-1}^{1} \overset{\text{فرد}}{x} \overset{\text{زوج}}{P_2(x)}\, dx}_{=0} + c\underbrace{\int_{-1}^{1} P_2(x)\, dx}_{=0}$$

بنابر خاصیت ۱

$$\left(\int_{-1}^{1} P_n(x)\, dx = 0 \right) \quad n \neq 0$$

برای محاسبه $\int_{-1}^{1} ax^2 P_2(x)\, dx$ مقدار چندجمله‌ای $P_2(x)$ را جایگذاری می‌کنیم.

$$\int_{-1}^{1} ax^2 \cdot \left(\frac{1}{2}(3x^2 - 1)\right) dx = \frac{a}{2} \int_{-1}^{1} 3x^4 - x^2\, dx$$

$$= \frac{a}{2} \left(\frac{3}{5}x^5 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{1} \right) = \frac{4a}{15}$$

$$\frac{a}{2} \times 2 \int_{0}^{1} (3x^4 - x^2)\, dx = \frac{4a}{15}$$

مثال ۳: مقدار انتگرال $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2} P_n(x)\,dx$ را بیابید.

حل: بنابه خواص گفته شده، می‌دانیم اگر n فرد باشد مقدار انتگرال فوق صفر است

اما برای nهای زوج در حالت کلی اطلاعاتی نداریم. همچنان مثال $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2} P_{1,2}(x)\,dx$

در این گونه مسائل چندجمله‌ای داده شده را بر حسب یک $P_n(x)$ ای می‌نویسیم.

$\frac{x^2}{2} \rightarrow$ چندجمله‌ای درجه ۲

می‌دانیم $P_2(x)$ نیز شامل چندجمله‌ای درجه دوم است.

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \rightarrow P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$P_2(x) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}x^2$$

$$\rightarrow \underbrace{\frac{1}{3}\left(P_2(x) + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}x^2}$$

$\frac{x^2}{2}$ را بر حسب چندجمله‌ای لژاندر $P_2(x)$ نوشتیم.

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2} P_n(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{3}\left(P_2(x) + \frac{1}{2}\right) \cdot P_n(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} P_2(x) P_n(x)\,dx + \frac{1}{6}\underbrace{\int_{-1}^{1} P_n(x)\,dx}_{=0}$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} P_2(x) P_n(x)\,dx + \frac{1}{6}\int_{-1}^{1} P_0(x) P_n(x)\,dx$$

3

حالت های زیر را داریم :

$$\text{if } n=0 \Rightarrow I = \frac{1}{3}\overbrace{\int_{-1}^{1} P_2(x)\,P_0(x)\,dx}^{\overset{(m\neq n)}{=0}} + \frac{1}{4}\underbrace{\int_{-1}^{1} (P_0(x))^2\,dx}_{=\frac{2}{2n+1}\overset{n=0}{=}2} = 2$$

$$\text{if } n=2 \Rightarrow I = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} (P_2(x))^2\,dx + \frac{1}{4}\underbrace{\int_{-1}^{1} P_0(x)\cdot P_2(x)\,dx}_{=0}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2\times 2+1} = \frac{2}{15}$$

$$\text{if } n\neq 2,0 \Rightarrow I = \frac{1}{3}\underbrace{\int_{-1}^{1} P_2(x)\,P_n(x)\,dx}_{n\neq 2 \to \int P_2 P_n\,dx=0} + \frac{1}{4}\underbrace{\int_{-1}^{1} P_0(x)\,P_n(x)\,dx}_{n\neq 0 \to \int P_0 P_n\,dx=0} = 0$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2} P_n(x)\,dx = \begin{cases} 2 & n=0 \\ \frac{2}{15} & n=2 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

قضیه: اگر تابع $f(x)$ در بازه $[-1,1]$ قطعه به قطعه پیوسته باشد و در نقاط ناپیوستگی مشتق چپ و راست آن موجود باشد، در هر نقطه پیوستگی f در بازه $(-1,1)$ تابع f را می‌توان برحسب چندجمله‌ای لژاندر به صورت زیر نوشت:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$$

بسط یک تابع به کمک چندجمله‌ای های لژاندر

که در آن

$$c_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\, P_n(x)\, dx$$

مثال ۴: تابع
$$f(x)=\begin{cases}0 & -1\le x<0\\ x & 0\le x<1\end{cases}$$
را برحسب چندجمله‌ای های لژاندر تا سه جمله اول بنویسید.

حل:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \xrightarrow{\text{سه جمله اول}} f(x)=c_0P_0(x)+c_1P_1(x)+c_2P_2(x)$$

که در آن $P_0(x)=1$ ، $P_1(x)=x$ ، $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$.

همچنان ضرایب c_i از روابط زیر به دست می‌آید:

$$n=0\rightarrow c_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,\overbrace{P_0(x)}^{1}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cancel{\int_{-1}^{0} \underbrace{f(x)}_{0}\,dx}+\int_{0}^{1} \underbrace{f(x)}_{x}\,dx\right)$$

$$\Rightarrow\quad c_0=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{4}$$

5

به همین ترتیب داریم:

$$n=۱ \rightarrow c_{۱} = \frac{۳}{۲} \int_{-۱}^{۱} f(x) \cdot P_{۱}(x)\, dx = \frac{۳}{۲} \int_{۰}^{۱} x \cdot x \, dx = \frac{۳}{۲} \left(\frac{x^{۳}}{۳} \right) \Big|_{۰}^{۱}$$

$$= \boxed{\frac{۱}{۲}}$$

$$n=۲ \rightarrow c_{۲} = \frac{۵}{۲} \int_{-۱}^{۱} f(x) P_{۲}(x)\, dx = \frac{۵}{۲} \int_{۰}^{۱} x \cdot \left(\frac{۱}{۲} (۳x^{۲}-۱) \right) dx$$

$$= \frac{۵}{۲} \left(\frac{۳x^{۴}}{۴} - \frac{x^{۲}}{۲} \right) \Big|_{۰}^{۱} = \frac{۵}{۲} \left(\frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۲} \right)$$

$$= \boxed{\frac{۵}{۱۶}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲} x + \frac{۵}{۱۶} \cdot \left(\frac{۱}{۲} (۳x^{۲}-۱) \right)$$

معادله بسل

معادله به فرم $x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$ را یک معادله بسل از مرتبه p $(p\geq 0)$

می‌نامیم و جواب‌های این معادله به توابع بسل معروف‌اند.

* توضیح کلی برای مطالعه دانشجویان *

چون $x=0$ یک نقطه تکین منظم معادله است. بنابراین معادله دارای یک جواب به فرم $y=x^r\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ است. با حل معادله شاخص معادله، ریشه‌های آن $r=\pm p$ هست؟ با $r=p$ حاصل می‌شود. بنابراین جواب متناظر $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+p}$ است که با جایگذاری (y, y', y'') در معادله بسل، به رابطه بازگشتی زیر می‌رسیم:

$$c_n=-\frac{c_{n-2}}{n(n+2p)}$$

محاسبات نشان می‌دهد $c_0\neq 0$ و $c_1=0$ است، بنابراین تمام ضرایب فرد صفر می‌باشند و داریم:

$$c_{2n}=\frac{(-1)^n}{2^{2n}\cdot n!\,(p+1)(p+2)\cdots(p+n)}c_0$$

بنابراین

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n}n!\,(p+1)\cdots(p+n)}c_0x^{2n+p}$$

جایگذاری

فرض کنیم $c_0=\frac{1}{2^p\cdot p!}$ خواهیم داشت:

$$y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(p+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(p+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

تابع فوق را تابع بسل نوع اول می‌نامیم و با $J_p(x)$ نشان می‌دهیم.

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(p+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

$J_p(x)$ یک جواب خصوصی از معادله بسل است. جواب عمومی به فرم

$$y = a\,J_p(x) + b\,Y_p(x)$$

است که در آن $Y_p(x)$ را تابع بسل نوع دوم می‌نامیم و اگر p عدد صحیح نباشد آنگاه $Y_p(x) = J_{-p}(x)$ است. اما اگر p یک عدد صحیح باشد ثابت شده است

$$Y_p(x) = \frac{J_p(x)\cos p\pi - J_p(x)}{\sin p\pi}$$

* معادله $x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$ یک معادله بسل از مرتبه p است.

* اگر p یک عدد صحیح نباشد، جواب عمومی معادله به صورت

$$y=aJ_p(x)+bJ_{-p}(x)$$

است که در آن $J_p(x)$ تابع بسل نوع اول است

* اگر p یک عدد صحیح باشد، جواب عمومی معادله به صورت

$$y=aJ_p(x)+bY_p(x)$$

است که در آن $Y_p(x)$ تابع بسل نوع دوم نامیده می‌شود.

۳) $x^2y''+xy'+x^2y=0 \to p=0\in Z$

$y=aJ_0(x)+bY_0(x)$

مثال ۵: معادلات زیر را حل کنید.

۱) $x^2y''+xy'+(x^2-4)y=0 \to \boxed{p=2}\in Z$

جواب عمومی معادله $\to y=aJ_2(x)+bY_2(x)$

۲) $x^2y''+xy'+(x^2-3)y=0 \to \boxed{p=\sqrt{3}\notin Z}$

$y=aJ_{\sqrt{3}}(x)+bJ_{-\sqrt{3}}(x)$

خواص تابع بسل :

خاصیت ۱ : اگر p عددی زوج باشد، آنگاه تابع $J_p(x)$ زوج و اگر p عددی فرد باشد آنگاه $J_p(x)$ تابعی فرد است. در نتیجه داریم :

$$\int_{-1}^{1} x^{2n} J_{2n+1}(x)\,dx = 0 \quad , \quad \int_{-1}^{1} x^{2n+1} J_{2n}(x)\,dx = 0$$

خاصیت ۲ : مشتق از تابع بسل

۱) $$\left(x^{p} J_{p}(x)\right)' = x^{p} J_{p-1}(x)$$

۲) $$\left(x^{-p} J_{p}(x)\right)' = -x^{-p} J_{p+1}(x) \xrightarrow[\text{نتیجه}]{p=0} J_0'(x) = J_1(x)$$

خاصیت ۳ : انتگرال از تابع بسل

۱) $$\int x^{p} J_{p-1}(x)\,dx = x^{p} J_{p}(x)$$

۲) $$\int x^{-p} J_{p+1}(x)\,dx = -x^{-p} J_{p}(x)$$

مثال ۶: هر یک از انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

تمرین

$$1)\ \int x^3 J_0(x)\,dx \qquad 2)\ \int x^4 J_1(x)\,dx \qquad 3)\ \int J_3(x)\,dx$$

حل: از روابط ① $\int x^p J_{p-1}(x)\,dx = x^p J_p(x)$, ② $\int x^{-p} J_{p+1}(x)\,dx = -x^{-p} J_p(x)$ استفاده می‌کنیم.

توجه کنیم که در هر دو رابطه تفاوت اندیس تابع بسل و توان x ، ۱ واحد می‌باشد. بنابراین سعی می‌کنیم فرم‌های فوق را ظاهر کنیم.

$$1)\ \int x^3 J_0(x)\,dx = \int \underbrace{x^2}_{u} \cdot \underbrace{x J_0(x)\,dx}_{dv} \overset{\text{جزء به جزء}}{=} x^3 J_1(x) - \int 2x^2 J_1(x)\,dx \overset{①}{=} x^3 J_1(x) - 2x^2 J_2(x)$$

$$\begin{cases} u = x^2 \rightarrow du = 2x\,dx \\ x J_0(x)\,dx = dv \xrightarrow{\int} v = \int x J_0(x)\,dx \overset{①}{=} x J_1(x) \end{cases}$$

۲۱

۳) $\int J_3(x)\,dx = \begin{cases} \xrightarrow{1} \int x^{-4}\cdot x^{4} J_3(x)\,dx & \times \text{ (چرا؟)} \\ \to \int x^{2}\cdot x^{-2} J_3(x)\,dx & \checkmark \end{cases}$

$$\int J_3(x)\,dx = \int \underbrace{x^{2}}_{u}\cdot \underbrace{x^{-2} J_3(x)\,dx}_{dv} \overset{\text{جزبجز}}{=} -J_2(x) + \int 2x\cdot x^{-2} J_2(x)$$

$$= J_2(x) + \int 2x^{-1} J_2(x)$$

$$\overset{(2)}{=} -J_2(x) - 2x^{-1} J_1(x)$$

$$\begin{cases} u = x^{2} \longrightarrow du = 2x\,dx \\ dv = x^{-2} J_3(x)\,dx \xrightarrow{\int} v = -x^{-2} J_2(x) \end{cases}$$

(۲) ~ شا

↑ العز

معادلات قابل تبدیل به معادله بسل:
(مهم)

معادله دیفرانسیل به فرم کلی $x^2y''+xy'+(\lambda^2x^2-p^2)y=0$ با تغییر متغیر $u=\lambda x$ قابل تبدیل به معادله بسل می باشد که دارای جواب عمومی زیر است:

$$y=a\,J_p(u)+b\,Y_p(u)$$

همچنین دسته وسیعی از معادلات که در فرم های دیگر ظاهر می شوند، قابل تبدیل به معادله بسل هستند.
$\underbrace{}$ با تغییر متغیر مناسب

در این گونه مسائل تغییر متغیر داده می شود.

مثال ۷: معادله $x^2y''+xy'+(2x^2-5)y=0$ را حل کنید.

حل: معادله قابل تبدیل به بسل است. قرار می دهیم

$$\begin{cases} u=\sqrt{2}\,x \\ du=\sqrt{2}\,dx \end{cases}$$

حال باید $\frac{dy}{du}$ را حساب کنیم.

$$\rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\underbrace{\frac{du}{dx}}_{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,\frac{dy}{du}=\sqrt{2}\,\dot{y}$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d}{dx}(\sqrt{2}\,\dot{y})\underset{\text{زنجیره ای}}{=}\frac{d}{du}(\sqrt{2}\,\dot{y})\cdot\underbrace{\frac{du}{dx}}_{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{2}\,\ddot{y}\,(\sqrt{2})=2\,\ddot{y}$$

حال با جایگذاری $u=\sqrt{2}x$ ، $y'=\sqrt{2}\dot{y}$ ، $y''=2\ddot{y}$ در معادله اولیه

$$x^2y''+xy'+(2x^2-5)y=0$$

داریم: $$\frac{u^2}{2}\cdot 2\ddot{y}+\frac{u}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\dot{y}+(u^2-5)y=0$$

$$\rightarrow u^2\ddot{y}+u\dot{y}+(u^2-5)y=0$$

که یک معادله بسل از مرتبه $p=\sqrt{5}$ است و دارای جواب عمومی زیر است

$$p=\sqrt{5}\notin\mathbb{Z}\rightarrow \quad y=aJ_{\sqrt{5}}(u)+bJ_{-\sqrt{5}}(u)\quad ,u=\sqrt{2}x$$

مثال ۸: معادله $x^2y''+xy'+4(x^4-p^2)y=0$ را حل کنید. (راهنمایی: از تغییر متغیر $u=x^2$ استفاده کنید)

حل: قرار می‌دهیم $u=x^2$. حال باید مشتقات y را بر حسب متغیر جدید u بیابیم

$$\left(y'=\frac{dy}{dx}\ ,\quad \dot{y}=\frac{dy}{du}\right)$$

$$\begin{cases} u=x^2\rightarrow du=2x\,dx \\ \rightarrow \dfrac{du}{dx}=2x \end{cases}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\underbrace{\frac{du}{dx}}_{2x}=2x\cdot\dot{y}$$

زنجیره‌ای

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d}{dx}(2x\dot{y})=2\cdot\dot{y}+2x\cdot\overbrace{\frac{d}{dx}(\dot{y})}=2\dot{y}+2x\cdot\overbrace{\frac{d}{du}(\dot{y})}^{\ddot{y}}\cdot\overbrace{\frac{du}{dx}}^{2x}$$

$$\Rightarrow y''=2\dot{y}+4x^2\ddot{y}$$

۱۴

حل با جایگذاری $u = x^2$ ، $y' = 2x\dot{y} = 2\sqrt{u}\,\dot{y}$

$$y'' = 2\dot{y} + 4x^2\ddot{y} = 2\dot{y} + 4u\ddot{y}$$

در معادله اولیه داریم:

$$u(2\dot{y} + 4u\ddot{y}) + 2u\dot{y} + 4(u^2 - p^2)y = 0$$

$$4u^2\ddot{y} + 4u\dot{y} + 4(u^2 - p^2)y = 0$$

$$\xrightarrow{\div 4} \quad u^2\ddot{y} + u\dot{y} + (u^2 - p^2)y = 0$$

معادله بسل از مرتبه p.
دارای جواب عمومی

$$y = a\,J_p(u) + b\,Y_p(u)$$

$$\xrightarrow{1} \quad y = a\,J_p(x^2) + b\,Y_p(x^2)$$

15

تمرین ۱: حاصل انتگرال های زیر را بدست آورید:

الف) $\int x^2 J_2(x)\,dx$

ب) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{3}{2}\cos^3\theta \cdot P_n(\sin\theta)\,d\theta$

ج) $\int_0^{\pi} P_m(\cos t)\cdot P_n(\sin t)\,\sin t\,dt$

تمرین ۲: توابع زیر را برحسب چندجمله‌ای لژاندر بنویسید:

الف) $f(x)=e^x \,, \quad -1<x<1$

ب) $f(x)=\begin{cases} -1 & -1<x<0 \\ x & 0<x\le 1 \end{cases}$

تمرین ۳: معادلات زیر را با تغییر متغیر داده شده حل کنید.

الف) $x^2y'' + xy' + (2x^2 - \frac{1}{4})y = 0$

ب) $4x^2y'' + 4xy' + (x-9)y = 0 \quad , \quad \alpha = \sqrt{x}$