# حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری ها

# حل معادله به کمک سری ها:

چنانچه جواب یک معادله دیفرانسیل به صورت صریح، ضمنی و یا پارامتری برحسب توابع مقدماتی ممکن نباشد، نظیر معادله آیرس $y'' + xy = 0$ روشهای در پیش گفته شده به کار نمی‌آیند. دو روش کلی برای این وضعیت وجود دارد: روش عددی و روش سریها. در روش عددی، جواب مساله به طور تقریبی با تقریب مناسب به دست می‌آید. موضوع این فصل، روش دوم یعنی روش سریها است. برای پرداختن به این بحث نیاز به آشنایی با سریهای تبلور می‌باشد.

**تعریف** سری توان عبارتی است به شکل:

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots ,$$

که $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ اعداد ثابتند و ضرایب سری نامیده می‌شوند.

سری توان بالا را به صورت خلاصه با نماد $\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-x_0)^i$ نیز نشان می‌دهند.

**قضیه** فرض $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ یک سری توان است. عدد $R\in[0,+\infty]$ با تعریف:

$$\boxed{R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \quad \text{یا} \quad R=\lim_{n\to\infty} 1\equiv \sqrt[n]{|s_{n+1}|},}$$

را شعاع همگرایی سری می‌نامیم.

**نکته:**

الف) اگر $|x_1-x_0|<R$، آنگاه سری به ازای $x=x_1$ همگرای مطلق است. به این معنی که سری عددی $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n(x_1-$
$x_0|<R$ همگرا است.

ب) اگر $|x_1-x_0|>R$، آنگاه سری به ازای $x=x_0$ واگرا است.

**تعریف** فرض کنید $y=f(x)$ در $n=x_0$ بینهایت بار مشتق پذیر است. سری تیلور $f$ در $x_0$ را به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)$$

را سری تیلور $f$ در $x_0$ می‌نامیم. اگر $x_0=0$، سری را مک لورن می‌نامم.
اگر این سری در یک همسایگی از $x_0$ با خود تابع $y=f(x)$ برابر باشد، می‌گوییم تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=x_0$ تحلیلی است.

**مثال** سریهای مک لورن زیر در ادامه به کار می‌آیند:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots, \qquad DC=\mathbb{R},$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}-\cdots, \qquad DC=\mathbb{R},$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{6!}+\cdots, \qquad DC=\mathbb{R},$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{4}+\cdots, \qquad DC=(-1,1],$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots, \qquad DC=(-1,1).$$

**قضیه** فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ یک سری توان با شعاع همگرایی $R$ است. در این صورت

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dx}(x-x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1},$$

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b (x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^n\Big|_a^b.$$

شعاع همگرایی هر دو سری حاصل بزرگتر یا مساوی شعاع همگرایی سری $R$ است.

در این فصل قصد داریم معادلاتی به فرم زیر را با استفاده از سری های توانی حل کنیم.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

- تعریف: نقطه $x_0$ را برای معادله فوق یک نقطه عادی گوییم هرگاه توابع Q(x), P(x) در $x_0$ تحلیلی باشند یا به عبارت دیگر حدود زیر موجود و متناهی باشند و در غیر این صورت آن را نقطه غیرعادی ( تکین ) می نامیم.

- $\lim_{x \to x_0} P(x) \quad , \quad \lim_{x \to x_0} Q(x)$

تعریف: نقطه $x_0$ را برای معادله مذکور یک نقطه غیرعادی (تکین ) منظم گوییم هرگاه توابع Q(x), P(x) در نقطه $x_0$ تحلیلی باشند و یا بع عبارت دیگر حدود زیر موجود و متناهی باشند و در غیر این صورت آن را نقطه تکین نامنظم می نامیم.

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)P(x) \quad , \quad \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 Q(x)$$

**مثال ۱:** نقاط **عادی و غیرعادی** معادله $(x-1)x^2y''-y\sin x=0$ **را تعیین کنید.**

$$y''-\frac{\sin x}{(x-1)x^2}y=0\Rightarrow p(x)=0\ ;\ Q(x)=\frac{-\sin x}{(x-1)x^2}$$

**ریشه های ضریب** $y''$ **برابر است** $x=0,\ x=1$

برای تعیین این که نقطه $x=0$ , $x=1$ عادی یا غیر عادی است، باید دو حد $\lim_{x\to 0}P(x);\lim_{x\to 0}Q(x);\lim_{x\to 1}P(x);\lim_{x\to 1}Q(x)$ را تشکیل دهیم:

ابتدا به بررسی نقطه $x=0$ می‌پردازیم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}P(x)=0\\[2ex] \lim\limits_{x\to 0}Q(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{(x-1)x^2}=\infty\end{array}\right\}\Rightarrow$$ نقطه غیر عادی است

حال برای تعیین نوع نقطه غیر عادی باید $\lim_{x\to 0}(x-0)P(x)$ ; $\lim_{x\to 0}(x-0)^2.Q(x)$ را تعیین کنیم:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x.P(x) = \lim_{x\to 0} x.0 = 0 \;;\; \lim_{x\to 0} x^2.Q(x) = \lim_{x\to 0} x^2.\frac{\sin x}{(x-1)x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{(x-1)} = 0$$

پس نقطه $x=0$ یک نقطه غیر عادی (تکین) از نوع منظم است.

حال به بررسی نقطه $x=1$ می‌پردازیم:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 1} P(x) = 0 \\ \lim_{x\to 1} Q(x) = \lim_{x\to 1}\frac{\sin x}{(x-1)x^2} = \infty \end{array}\right\} \Rightarrow$$

پس نقطه $x=1$ یک نقطه غیر عادی است.

برای تعیین نوع نقطه غیر عادی باید $\lim_{x\to 1}(x-1).P(x)$ و $\lim_{x\to 1}(x-1)^2.Q(x)$ را تعیین کنیم:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}(x-1).P(x) = \lim_{x\to 1}(x-1).0 = 0$$

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^2.Q(x) = \lim_{x\to 1}(x-1)^2.\frac{\sin x}{(x-1).x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1).\sin x}{x^2} = 0$$

پس نقطه $x=1$ یک نقطه غیر عادی (تکین) از نوع منظم است.

**مثال ۲**: معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید و نوع نقطه $x=0$ را برای آن تعیین کنید.

$$x^2y''+\left(e^x-1\right)y'+\left(\sin^2 x\right)y=0$$

برای تعیین این که آیا نقطه $\mathbf{x}=0$ عادی یا غیر عادی است، باید $\lim\limits_{x\to0}P(x)$ و $\lim\limits_{x\to0}Q(x)$ را تعیین کنیم:

$$y''+\frac{\left(e^x-1\right)}{x^2}y'+\frac{\sin^2 x}{x^2}y=0\Rightarrow P(x)=\frac{\left(e^x-1\right)}{x^2}\quad;\ Q(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}P(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(e^x-1\right)}{x^2}=\dfrac{0}{0}\quad \text{مبهم}\quad \xrightarrow{H}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{2x}=\infty\\ \lim\limits_{x\to0}Q(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}=\dfrac{0}{0}\quad \text{مبهم}\quad \xrightarrow{H}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x.\cos x}{2x}=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

نقطه $\mathbf{x}=0$ از نوع غیر عادی است.

برای تعیین نوع نقطه غیر عادی (منظم یا نامنظم) باید $\lim\limits_{x\to0}(x-0)P(x)$ و $\lim\limits_{x\to0}(x-0)^2.Q(x)$ را تعیین کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0}(x-0)P(x)=\lim\limits_{x\to0}x.\dfrac{\left(e^x-1\right)}{x^2}=\dfrac{0}{0}\quad \text{مبهم}\quad \xrightarrow{H}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x}{1}=1\\ \lim\limits_{x\to0}(x-0)^2.Q(x)=\lim\limits_{x\to0}x^2.\dfrac{\sin^2 x}{x^2}=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

پس نقطه $x=0$ یک نقطه غیر عادی از نوع منظم است.

**مثال ۳**: نقطه $x=0$ برای معادله دیفرانسیل $x^3y''+x^2y'+y=0$ چه نوع نقطه‌ای است؟

برای تعیین این که آیا نقطه $x=0$ عادی یا غیر عادی است، باید $\lim\limits_{x\to 0} P(x)$ ; $\lim\limits_{x\to 0} Q(x)$ را تشکیل دهیم:

$$x^3y''+x^2y'+y=0\Rightarrow y''+\frac{1}{x}y'+\frac{1}{x^3}y=0\Rightarrow P(x)=\frac{1}{x};Q(x)=\frac{1}{x^3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} P(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty\\ \lim\limits_{x\to 0} Q(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}=\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \text{نقطه } x=0 \text{ از نوع غیر عادی است}$$

برای تعیین این که آیا نقطه $x=0$ (غیر عادی) از نوع منظم یا نامنظم است باید دو حد $\lim\limits_{x\to 0}(x-0).P(x)$ ; $\lim\limits_{x\to 0}(x-0)^2.Q(x)$ را تشکیل دهیم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}(x-0).P(x)=\lim\limits_{x\to 0}x.\frac{1}{x}=1\\ \lim\limits_{x\to 0}(x-0)^2.Q(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2.\frac{1}{x^3}=\infty\end{array}\right\}\Rightarrow \text{پس نقطه } x=0 \text{ یک نوع نقطه غیر عادی (تکین) از نوع نامنظم است.}$$

# حل معادله با کمک سری ها:

- $$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$
- قضیه:
- هرگاه در این معادله توابع Q(x) و P(x) در نقطه $x_0$ تحلیلی باشند و این نقطه یک نقطه عادی باشد آنگاه جواب معادله را می توان به صورت سری توانی نوشت :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

- در اینجا $c_n$ها مجهولند و باید با جایگذاری y در معادله بدست آیند.

**مثال** معادله $y' = y$ را به روشهای سریها حل کنید.

حل : چون هیچ نقطه ای تعیین نشده است پس $x_0 = 0$ را به عنوان نقطه عادی سری در نظر گرفته و سری را حول این نقطه می نویسیم:

فرض کنیم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ یک جواب معادله است. در این صورت $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ و لذا:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

$$\sum_{n=a}^{b} c_n = \sum_{n=a-1}^{b-1} c_{n+1} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+1) a_{n+1} - a_n) x^n = 0$$

$$(a_1 - a_0) + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2)x^2 + \cdots \quad = \quad 0.$$

بنابراین، باید کلیه ضرایب صفر باشند:

ضریب $x^0$
$$a_1 - a_0 = 0, \quad \Longrightarrow \quad a_1 = a_0,$$

ضریب $x^1$
$$2a_2 - a_1 = 0, \quad \Longrightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}a_0,$$

$$3a_3 - a_2 = 0, \quad \Longrightarrow \quad a_3 = \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{6}a_1 = \frac{1}{6}a_0,$$

$$na_n - a_{n-1} = 0, \quad \Longrightarrow \quad a_n = \frac{1}{n}a_{n-1} = \frac{1}{n}\frac{1}{n-1}\cdots\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{n!}a_0,$$

و در مجموع داریم:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{n!}x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = a_0 e^x,$$

## گام ها حل معادله با سری:

- اول: تعیین نقطه
- دوم: جایگذاری در معادله
- سوم: یکی کردن توان x ها
- چهارم: یکی کردن حد پایین ها
- پنجم: محاسبه ضرایب سری

**مثال** معادله $y'' + xy' + y = 0$ را به روش سریها حل کنید.

**حل:** فرض کنیم $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ یک جواب معادله است. دراین صورت

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}\, x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\underbrace{(2)(1)a_2 + a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}\, x^n + n a_n x^n + a_n x^n = 0$$

پس باید ضریب همه توانهای $x$ صفر باشد.

$$2a_2 + a_0 = 0, \quad \Longrightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2}a_0,$$

$$
\begin{aligned}
6a_3 + a_1 + a_1 = 0, &\quad \Longrightarrow \quad a_3 = -\frac{1}{3}a_1, \\
12a_4 + 2a_2 + a_2 = 0, &\quad \Longrightarrow \quad a_3 = -\frac{1}{3}a_1, \\
\vdots &\qquad\quad\ \vdots \\
(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0, &\quad \Longrightarrow \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+2}a_n.
\end{aligned}
$$

بنابراین، داریم:

$$
\begin{aligned}
y &= a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots + a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots \\
&= a_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \cdots + (\frac{-1}{2})(\frac{-1}{4})\cdots(\frac{-1}{2n})2x^{2n} + \cdots\right) \\
&\quad + a_0\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{15}x^4 - \cdots + (-\frac{1}{3})(-\frac{1}{5})\cdots(-\frac{1}{2k+1}x^{2k} + \cdots\right) \\
&= a_0\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{15}x^4 - \cdots + (\frac{-1}{3})(\frac{-1}{5})\cdots(\frac{-1}{2k+1})x^{2k} + \cdots\right) \\
&= a_0\sum^{\infty} k = 0\frac{(-1)^k}{2\times4\times\cdots\times(2k)}x^{2k} + a_1\sum^{\infty} k = 0\frac{(-1)^k}{3\times5\times\cdots\times(2k+1)}x^{2k+1}.
\end{aligned}
$$

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xy'' + (1 + x)y' - y = 0$ را بصورت سری، حول $x_0 = 1$ بیابید.

$$X = x - 1 \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dX} \rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dX^2}$$

تغییرمتغیر فوق را در معادله جایگذاری می کنیم:

$$(X+1)\frac{d^2y}{dX^2} + (X+2)\frac{dy}{dX} - y = 0$$

حال جواب این معادله را حول $X = 0$ می یابیم.

$$y=\sum_{n=0} a_n X^n \quad , \quad y'=\sum_{n=1} n a_n X^{n-1} \quad , \quad y''=\sum_{n=2} n(n-1)a_n X^{n-2}$$

$$(X+1)\sum_{n=2} n(n-1)a_n X^{n-2}+(X+2)\sum_{n=1} n a_n X^{n-1}-\sum_{n=0} a_n X^n=0$$

$$\rightarrow \sum_{n=2} n(n-1)a_n X^{n-1}+\sum_{n=2} n(n-1)a_n X^{n-2}+\sum_{n=1} n a_n X^n+\sum_{n=1} 2n a_n X^{n-1}-\sum_{n=0} a_n X^n=0$$

$$\rightarrow \sum_{n=1} n(n+1)a_{n+1} X^n+\sum_{n=0} (n+1)(n+2)a_{n+2} X^n+\sum_{n=1} n a_n X^n+\sum_{n=0} 2(n+1)a_{n+1} X^n$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n=0$$

$$2a_2+2a_1-a_0+\sum_{n=1}[n(n+1)a_{n+1}+(n+1)(n+2)a_{n+2}+na_n+2(n+1)a_{n+1}-a_n]X^n=0$$

$$\rightarrow\begin{cases}2a_2+2a_1-a_0=0\rightarrow a_0=2(a_1+a_2)\rightarrow a_2=\frac{1}{2}a_0-a_1\\ (n+1)(n+2)a_{n+2}+(n+1)(n+2)a_{n+1}+(n-1)a_n=0\rightarrow a_{n+2}=a_{n+1}+\frac{n-1}{(n+1)(n+2)}a_n\end{cases}$$

$$\begin{cases}n=1\rightarrow a_3=-a_2\\ n=2\rightarrow a_4=a_3+\frac{1}{12}a_2\xrightarrow{a_3=-a_2}a_4=\frac{-11}{12}a_2\end{cases}$$

$$y=\sum_{n=0}a_nX^n\xrightarrow{X=x-1}y=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2-a_2(x-1)^3-\frac{11}{12}a_2(x-1)^4+\ldots$$

**تمرینات** هر یک از معادلات زیر را به روش سریها حل کنید:

1) $y'' + 2y' = 0,$

2) $(1+x)y'' - y = 0,$

3) $y'' + 2y' + y = 0,$

4) $(1-x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0,$

5) $y'' + 4y = 0,$

6) $(x^2-1)y'' + 2xy - 2y = 0,$

7) $y'' - 3y' + 2y = 0,$

8) $x(x+1)y'' + (x+1)y' - y = 0,$

9) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0,$

10) $xy'' - (x+2)y' + 2y = 0,$

11) $(1-x^2)y'' - xy' + 4y = 0,$

12) $(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = 0,$

13) $x^2y'' - 2xy' + (2-x^2)y = 0,$

14) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$

**۹.۲.۴. قضیه (قضیه فروبینیوس)** فرض کنید $x = x_0$ یک نقطه تکین منظم معادله دیفرانسیل:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

است. در این صورت حداقل یک جواب به شکل:

$$\boxed{y = (x-x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+r}.} \tag{۴.۴}$$

برای این معادله وجود دارد، که $r$ عددی حقیقی و ثابت است.

**۱۱.۲.۴. قضیه** فرض کنید $\mathscr{E} : y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ معادله‌ای دیفرانسیل است و $x = x_0$ یک نقطه تکین عادی آن است. فرض کنید:

$$u := \lim_{x \to x_0} (x - x_0)\ p(x) \qquad v := \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2\ q(x)$$

فرض کنیم معادله مشخصه

$$\boxed{C_{\mathscr{E}} : r(r-1) + ur + v = 0,} \tag{۵.۴}$$

دارای دو ریشه حقیقی $r_1$ و $r_2$ است که $r_2 \le r_1$. در این صورت

الف) اگر تفاضل $r_1 - r_2$ با عددی صحیح مثبت و یا صفر برابر نباشد ($r_1 - r_2 \neq 0, 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$). در این معادله $\mathscr{E}$ دو جواب به شکل

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad y_2 = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n,$$

است که $a_0 \neq 0 \neq b_n$.

ب) اگر $r_1 - r_2$ عددی صحیح و مثبت باشد $(r_1 - r_2 = 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots)$. در این صورت $\epsilon$ دارای یک جواب به شکل

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

است که $a_0 \neq 0$. جواب دیگر این معادله ممکن استبه شکل $x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ یا

$$y_2 = C y_1 \ln(x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n,$$

که $C$ و $b_0$ اعداد مخالف صفرند، باشد.

ج) اگر $r_1 = r_2$، در این صورت $\mathscr{E}$ تنها یک جواب به شکل:

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

که $a_0 \neq 0$. جواب دیگر این معادله به شکل

$$y_2 = y_1 \ln(x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n,$$

است که $b_0 \neq 0$ می‌باشد.

**مثال** معادله $2x^2y'' + 3xy' - (1+x)y = 0$ را در نظر گرفته و فقط فرم کلی جواب عمومی را بیابید.

**حل:** نقطه $x = 0$ تنها نقطه تکین معادله است و این نقطه، یک نقطه تکین منظم است. در این مساله:

$$
\begin{aligned}
u &= \lim_{x\to 0} x a_1(x) = \lim_{x\to 0} x.\frac{3}{2x} = \frac{3}{2},\\
v &= \lim_{x\to 0} x^2 a_0(x) = \lim_{x\to 0} x^2.\frac{-1-x}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(-1-x)}{2} = -1/2,
\end{aligned}
$$

و معادله مشخصه آن چنین است:

$$
C_{\mathscr{E}} : r(r-1) + \frac{3}{2}r - \frac{1}{2} = 0, \Rightarrow \ 2r^2 + r + 1 = 0.
$$

پس $(2r-1)(r+1) = 0$ و بنابراین $r_1 = 1/2$ و $r_2 = -1$. چون $r_1 - r_2 = \frac{3}{2}$ صحیح مثبت و یا صفر نیست. بنابراین

$$
y_1 = x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad y_2 = x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n
$$

**مثال** معادله $\mathscr{E}: x^2y'' + x(2+3x)y' - 2y = 0$ را در نظر گرفته و فقط فرم کلی جواب عمومی را بیابید.

**حل:** تنها نقطه تکین معادله $\mathscr{E}$ نقطه $x=0$ است که آن هم منظم است. به علاوه

$$\begin{aligned} u &= \lim_{x\to 0} x.a_1(x) = \lim_{x\to 0} x.\frac{2+3x}{x} = \lim_{x\to 0}(2+3x) = 0, \\ v &= \lim_{x\to 0} x^2.a_2(x) = \lim_{x\to 0} x^2.\frac{-2}{x^2} = -2, \end{aligned}$$

در نتیجه

$$C_{\mathscr{E}}: r(r-1)+2r-2=0, \implies r^2+2r-2=0, \implies r_1 = 1, \ r_2 = -2.$$

پس $r_1 - r_2 = 3$ و عددی صحیح و مثبت است. بنابراین

$$y_1 = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad y_2 = CLny_1 + x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

**مثال** معادله $\mathscr{E}: x^2y'' + x(x-1)y' + (1-x)y = 0$ را به روش سریها در حوالی نقطه $x = 0$ حل کنید.

**حل:** در این مساله:

$$\begin{aligned} u &= \lim_{x\to 0} x.a_1(x) = \lim_{x\to 0} x.\frac{x-1}{x} = \lim_{x\to 0}(x-1) = -1, \\ v &= \lim_{x\to 0} x^2.a_0(x) = \lim_{x\to 0} x^2.\frac{1-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}(1-x) = 1. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$C_{\mathscr{E}} : r(r-1) - r + 1 = 0, \implies r^2 - 2r + 1 = 0, \implies r_1 = r_2 = 1.$$

تفاضل دو ریشه صفر است. بنابراین

$$y_1 = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad y_2 = Lny_1 + x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

- برای بدست آوردن $a_n$ ,$b_n$ ابتدا فرم کلی جواب را در معادله جایگذاری می کنیم

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \rightarrow \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_n x^n \,, y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n)(n+1)\, a_n x^{n-1}$$

جایگذاری در معادله

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n)(n+1)\, a_n x^{n-1} + x(x-1) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_n x^n + (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n)(n+1)\, a_n x^{n+1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_n x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_n x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n)(n+1)\, a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_n x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n x^{n+2} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\, a_{n-1}\, x^{n+1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\, a_{n-1}\, x^{n+1} = 0$$

$$a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} [n^2 a_n + (n-1)\, a_{n-1}] x^{n+1} = 0$$

پس $a_0$ دلخواه است، و به ازای هر $n \geq 1$ ای:

$$a_n = -\frac{n-1}{n^2} a_{n-1},$$

و لذا همه $a_n$ های با $n \geq 1$ صفرند. در نتیجه جواب $y = a_0 x$ است. پس $y_1 = x$ یک جواب $\mathscr{E}$ است.

**تمرینات** هر یک از معادلات داده شده را به روش فروبینیوس در حوالی نقطه صفر حل کنید:

1) $x^2y'' - xy' + y = 0,$

2) $x^2y'' + xy' = 0,$

3) $x^2y'' + 3xy' + y = 0,$

4) $4x^2y'' + y = 0,$

5) $4xy'' + 2y' + y = 0,$

6) $2x^2y'' + x(2x+1)y' + 2xy = 0,$

7) $xy'' + (3+2x)y' + 4y = 0,$

8) $(2x^2 - x^2)y'' + (6x^2 - 4x)y' = 2y,$

9) $(x+3x^2)y'' + 2y' = 6xy,$

10) $xy'' + 2y' = xy,$