

۱. الف) نقاط منفرد (تکین یا غیرعادی) معادله دیفرانسیل زیر را مشخص کنید و سپس نوع هر یک را تعیین نمایید.

ب) با استفاده از روش سری های توانی جواب معادله دیفرانسیل زیر را حول نقطه داده شده دست آورید و برای جواب دوم فقط فرم کلی را بنویسید.

$$0) (1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0, \quad x = 1.$$

$$1) (x^2 - x)y'' - xy' + y = 0, \quad x = 0.$$

$$2) 4x^2y'' - 8x^2y' + (1 + 4x^2)y = 0, \quad x = 0.$$

$$3) x^2y'' - x(2 - x)y' + (2 + x^2)y = 0, \quad x = 0.$$

4 الف) نقاط منفرد (تکین یا غیرعادی) معادله دیفرانسیل $x(x - 1)^3y'' + (x - 1)y' + (x + 1)y = 0$ را تعیین کنید و سپس مشخص کنید کدام نقاط منفرد منظم و کدام نقاط منفرد نامنظم هستند.

ب) جواب معادله دیفرانسیل $5(x - 2)y' - 4y = 0$ با استفاده از سری های توانی حول نقطه $x = 0$ حل کنید.

5 با استفاده از روش سری های توانی جواب معادله دیفرانسیل زیر را حول نقطه $x = 0$ بدست آورید. برای جواب دوم فقط فرم کلی را بنویسید.

$$2xy'' + (1 + 2x)y' - 5y = 0$$

۲. معادلات زیر را به کمک تغییر متغیر داده شده حل کنید.

$$0) y'' + (e^x - 5) y = 0, \quad e^x = \frac{z^2}{4}$$

$$1) 4x^2 y'' + 4xy' + (x - a^2)y = 0, \quad u = \sqrt{x}$$

$$2) y'' + \left(e^x - \frac{4}{9}\right) y = 0, \quad u = 2e^{\frac{x}{2}}$$

$$3) y'' \sin x + y' \cos x + 12 y \sin x = 0, \quad z = \cos x$$

4) تابع $f(x) = x^4 - 3x$ را بر حسب چندجمله ای های لژاندر تا چهار جمله اول بسط دهید.

5) مقدار انتگرال $\int_{-1}^1 (x^2 - 1)P_n(x)dx$ را محاسبه کنید.

۳. الف) تبدیل لاپلاس های زیر را محاسبه کنید.

$$0) \quad L\left\{t \int_0^t e^{-x} \frac{1 - \cos x}{x} dx\right\}$$

$$1) \quad L\left\{te^{-t} \int_0^t \frac{1 - \cos x}{x} dx\right\}$$

$$2) \quad L\left\{t \int_0^t e^{-3x} \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} dx\right\}$$

$$3) \quad L\left\{te^{-3t} \int_0^t \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} dx\right\}$$

$$4) \quad L\left\{te^{4t} \int_0^t \frac{\sin 3x}{x} dx\right\}$$

$$5) \quad L\left\{t \int_0^t e^{4x} \frac{\sin 3x}{x} dx\right\}$$

۴. لاپلاس معکوس عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

$$0) F(s) = \operatorname{arc} \cot(s + 4)$$

$$1) F(s) = \ln \left(\frac{s^2 + 4}{s^2} \right)$$

$$2) F(s) = \ln \left(\frac{s^2 + 1}{s(s + 1)} \right)$$

$$3) F(s) = e^{-2s} \ln \left(\frac{s}{s + 1} \right)$$

$$4) F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 4s + 20}$$

$$5) F(s) = \frac{3s - 1}{s^2 + 4s + 8}$$

۵. معادلات زیر را به کمک لاپلاس حل کنید.

$$0) \ y'' + y = 4 \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 0$$

$$1) \ y'' + 4y = 16t, \quad y(0) = 3, \ y'(0) = -6.$$

$$2) \ y''' + y' = e^x, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

$$3) \ y'' + 110y' + 1000y = -90\delta(t - 1), \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 90.$$

$$4) \ ty'' + y' + 4ty = 0, \quad y(0) = 3, \ y'(0) = 0.$$

$$5) \ y'' - y = \sin(2x), \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

۶. معادلات انتگرالی زیر را حل کنید.

$$0) y(t) = 2 + \int_0^t e^{t-u} y'(u) du, \quad y(0) = 2$$

$$1) f(t) = 3t^2 - e^{-t} - \int_0^t e^{t-\lambda} f(\lambda) d\lambda$$

$$2) \int_0^t y(u) y(t-u) du = \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t)$$

$$3) y(t) = 3 \cos t + 5 \int_0^t \sin(t-u) y(u) du$$

$$4) y(t) = 2e^{3t} - \int_0^t e^{2(t-\lambda)} y(\lambda) d\lambda$$

$$5) f'(t) + 2f(t) + \int_0^t f(\lambda) d\lambda = 0, \quad f(0) = 1$$