ÁLGEBRA BOOLEANA

Fundamentos y Aplicaciones

¿QUÉ ES?

Sistema matemático basado en valores binarios (0 y 1). Utiliza operaciones lógicas para representar proposiciones, circuitos y decisiones. Base de la electrónica digital y computación moderna.

ORIGEN

George Boole (1815-1864) creó el sistema. Claude Shannon (1938) demostró su implementación con circuitos eléctricos, dando origen a la computación digital moderna.

Valores Binarios y Operaciones

Valores Binarios

0 = Falso / Apagado

1 = Verdadero / Encendido

0 1 0 1

Operaciones Fundamentales

NOT (¬A)
Invierte el valor. Ej: A=1 → ¬A=0

AND (A·B)
Solo es 1 cuando ambos son 1. Ej: 1·0 = 0

OR (A + B)
Es 1 si al menos uno es 1. Ej: 0 + 1 = 1

AND: 1 · 1 = 1
Ambos verdaderos

OR: 0 + 1 = 1
Al menos uno verdadero

NOT: ¬1 = 0
Inversión del valor

Operadores Adicionales

NAND: Negación de AND

NOR: Negación de OR

XOR: Verdadero si solo uno lo es

XNOR: Verdadero si ambos son iguales

Reglas de la Lógica Matemática Aplicadas en el Álgebra Boleana

1. Doble Negación

Negar dos veces devuelve el valor original.

$\neg(\neg A) = A$

2. Leyes de De Morgan

Distribuyen la negación sobre AND u OR.

$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

3. Conmutación

El orden no cambia el resultado.

$A \vee B = B \vee A$

4. Asociación

Se pueden reagrupar sin alterar.

$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$

5. Distribución

Una operación se distribuye sobre otra.

$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

6. Tercero Excluido

Toda proposición es verdadera o falsa.

$A \vee \neg A = 1$

7. No Contradicción

Una proposición y su negación no pueden ser ambas verdaderas.

$A \wedge \neg A = 0$

8. Identidad Lógica

Combinación con verdadero o falso.

$A \wedge 1 = A$; $A \vee 0 = A$

Leyes del Álgebra Booleana (1/4)

1. Ley Conmutativa

Definición: El orden no altera el resultado.

$$A + B = B + A$$

$$A \cdot B = B \cdot A$$

3. Ley Distributiva

Definición: Una operación se distribuye sobre otra.

$$A \cdot (B + C) = AB + AC$$

$$A + (B \cdot C) = (A + B)(A + C)$$

2. Ley Asociativa

Definición: Se pueden reagrupar términos sin alterar el resultado.

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

Leyes del Álgebra Booleana (2/4)

4. Ley de Identidad

Definición: Elementos neutros que no cambian el valor de la expresión.

A + 0 = A
OR con falso

A · 1 = A
AND con verdadero

5. Ley de Dominación

Definición: Valores que fuerzan el resultado sin importar la otra variable.

A + 1 = 1
OR con verdadero

A · 0 = 0
AND con falso

Demostración

$A + 1$

$= (A + 1) \cdot 1$

$= (A + 1) \cdot (A + A)$

$= A + (1 \cdot A)$

$= 1$

6. Ley de Idempotencia

Definición: Repetir la variable no altera la expresión booleana.

A + A = A
OR con sí mismo

A · A = A
AND con sí mismo

Estas leyes permiten simplificar expresiones booleanas complejas en circuitos digitales.

Leyes del Álgebra Booleana (3/4)

7. Ley del Complemento

Definición: Una variable y su negación cubren todos los casos posibles.

A + ¬A = 1
La suma de una variable y su negación siempre es verdadera.

A · ¬A = 0
El producto de una variable y su negación siempre es falso.

8. Ley de Doble Negación

Definición: Negar dos veces una variable devuelve su valor original.

¬(¬A) = A
Dos negaciones se anulan mutuamente, restaurando el valor original.

Ley del Complemento

A = 1	¬A = 0
Verdadero	Falso

1 + 0 = 1 ✓
1 · 0 = 0 ✓

Doble Negación

A

↓ ¬

¬A

↓ ¬

¬(¬A) = A

Leyes del Álgebra Booleana (4/4)

9. Ley de Absorción

Definición: Un término "absorbe" otro más complejo.

Ejemplo 1: A + A·B = A

Ejemplo 2: A·(A + B) = A

10. Leyes de De Morgan

Definición: Transforman la negación de AND ↔ OR.

Ejemplo 1: ¬(A·B) = ¬A + ¬B

Ejemplo 2: ¬(A + B) = ¬A·¬B

Absorción Visual

A absorbe **A·B**

Si A es verdadero, entonces A·B depende de B

De Morgan: Transformación

¬(A·B) → ¬A + ¬B

¬(A+B) → ¬A·¬B

Simplificación
Estas leyes permiten transformar y simplificar expresiones complejas.

Teoremas del Álgebra Booleana

Parte 1/3: Teorema de Simplificación

Teorema de Simplificación

Definición: Reduce expresiones redundantes eliminando términos innecesarios mediante la aplicación de leyes booleanas.

Este teorema es fundamental para **optimizar circuitos digitales** y simplificar cálculos lógicos complejos.

Ejemplos de Simplificación

Ejemplo 1:

$A + A \cdot B = A + B$

El término A absorbe A·B, resultando en A + B

Ejemplo 2:

$A(A+B) = AB$

Se distribuye A y se simplifica eliminando redundancias

Expresión Original

$A + A \cdot B$

↓

Aplicar Simplificación

$A + B$

Beneficio:
Menos compuertas lógicas = circuitos más simples y eficientes

Teoremas del Álgebra Booleana (2/3)

Teorema del Complemento Único

Definición: Cada variable booleana tiene un único complemento que satisface las propiedades fundamentales.

Propiedades del Complemento Único

Para cualquier variable A, existe un único ¬A que cumple:

$A + \neg A = 1$ $A \cdot \neg A = 0$

Ejemplo

Si $A = 1$, entonces $\neg A = 0$ es el único complemento válido.

Teorema de Absorción Generalizada

Definición: Extiende el concepto de absorción a múltiples términos, donde un término puede absorber varios términos más complejos.

Forma General

Cuando una variable aparece en múltiples términos, puede absorberlos todos:

$A + A \cdot B + A \cdot C = A$

Ejemplo Práctico

Expresión: $A + A \cdot B + A \cdot C + A \cdot D$

Simplificación: **A**

El término A absorbe todos los demás términos que lo contienen.

Importancia

Estos teoremas son esenciales para simplificar expresiones booleanas complejas y optimizar circuitos digitales.

Teoremas del Álgebra Booleana (3/3)

Teorema de Redundancia

Definición: Si un término cubre ambos casos de otra variable, ese término se simplifica y la variable redundante se elimina.

Ejemplo Práctico

A·B + A·¬B = A

El término A aparece en ambos casos (cuando B es verdadero y cuando es falso), por lo que B es redundante y se elimina.

Teorema de Dualidad

Definición: Intercambiar AND ↔ OR y 0 ↔ 1 en una expresión válida genera otra expresión dual igualmente válida.

Transformación Dual

Expresión Original:A + 0 = A

Expresión Dual:A · 1 = A

Redundancia Visual

A·B (cuando B=1)

+

A·¬B (cuando B=0)

↓

Resultado: A

Transformación Dual

Original:
A + B·C

⇄

Dual:
A·(B+C)

Simetría
La dualidad refleja la simetría fundamental del Álgebra Booleana.

Ejercicio Práctico

Aplicaciones Prácticas

⚡ Circuitos Digitales

Diseño y optimización de compuertas lógicas y circuitos electrónicos para sistemas digitales.

🔧 Compuertas Lógicas

Implementación de operaciones AND, OR, NOT, NAND, NOR, XOR en hardware.

➕ Sumadores y Multiplexores

Construcción de sumadores binarios, multiplexores y decodificadores para procesamiento de datos.

🖥️ CPU y ALU

Implementación de operaciones aritméticas y lógicas en unidades de procesamiento central.

🔀 Algoritmos

Toma de decisiones y control de flujo en programación mediante lógica booleana.

✓ Verificación

Validación lógica de sistemas de software y hardware para garantizar corrección.

CONCLUSIÓN

Fundamento de la Lógica Digital

El Álgebra Booleana es el **lenguaje fundamental** que permite representar, simplificar y optimizar sistemas lógicos digitales.

Simplificación y Optimización

Mediante sus leyes y teoremas, permite **reducir expresiones complejas** en circuitos más simples y eficientes.

Base de la Computación Moderna

Es la **base de toda la electrónica digital**, desde circuitos lógicos hasta procesadores y sistemas computacionales complejos.

El Álgebra Booleana es más que una rama de las matemáticas

Es la **herramienta esencial** que permite a los ingenieros y programadores diseñar, optimizar y verificar los sistemas digitales que transforman el mundo.

¡Gracias!

Estas diapositivas fueron realizadas con ayuda de Manus AI