

Leyes de las Proposiciones y Reglas de Inferencia

MATEMÁTICAS DISCRETAS

Las Leyes de las Proposiciones

Las leyes de las proposiciones son **tautologías**, es decir, proposiciones siempre verdaderas sin importar el valor de verdad de sus variables. Permiten **simplificar y transformar proposiciones** sin alterar su valor lógico.

Esencial en

Lógica matemática y programación

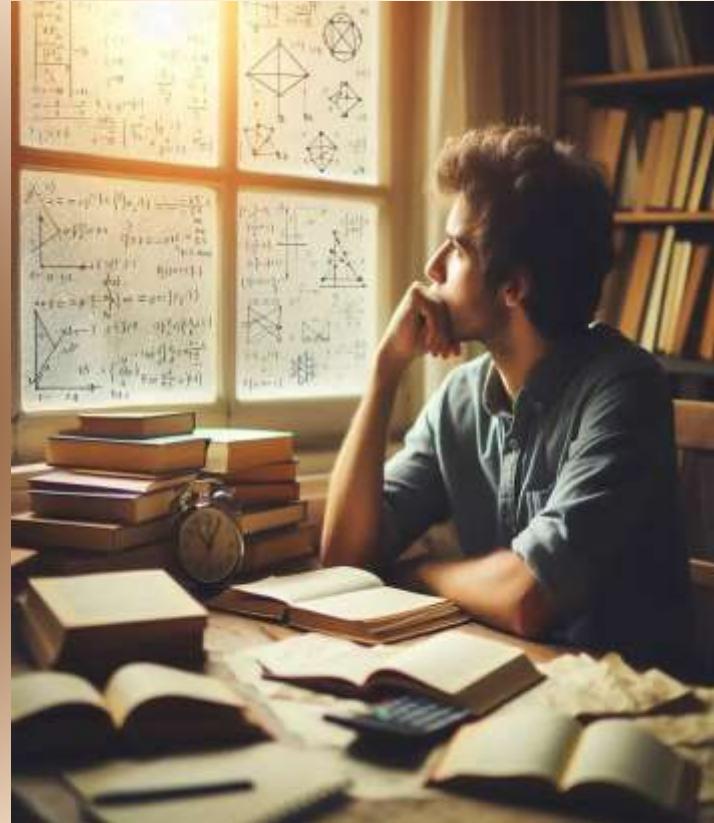
Función

Simplificar expresiones complejas

Ejemplo

$p \equiv p$ (Ley de Identidad)

→ “Una proposición siempre es equivalente a sí misma.”



Leyes Lógicas Básicas

Las leyes fundamentales de la lógica proposicional establecen las reglas básicas para manipular y transformar proposiciones manteniendo su valor lógico.

Las leyes lógicas son los pilares sobre los que se construye todo razonamiento válido en matemáticas.

$$p \equiv p$$

$$p \vee \top \equiv \top$$

Ley de Identidad

Una proposición es siempre igual a sí misma

Si $p =$ "Hoy llueve", entonces "Hoy llueve" es igual a "Hoy llueve".

Ley de Dominación

La verdad domina cualquier disyunción

Ej: Estudio o $2+2=4$ siempre es verdadero.

$$p \vee p \equiv p$$

Ley de Idempotencia

Una proposición unida consigo misma es equivalente a sí misma.

Aplicación: "Estudio o estudio" \equiv "Estudio"

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

Ley Comutativa

El orden de los operandos no altera el resultado en conjunciones y disyunciones
"Estudio o leo" \equiv "Leo o estudio".

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Ley Distributiva

La conjunción se distribuye sobre la disyunción

"Trabajo y (estudio o descanso)" \equiv "(Trabajo y estudio) o (Trabajo y descanso)".

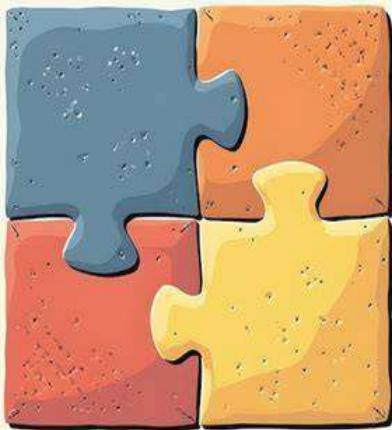
$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

Ley Asociativa:

El orden de agrupación no altera el resultado.

Ejemplo de la L.Asociativa: "(Leo o estudio) o descanso" \equiv "Leo o (estudio o descanso)".

MÁS LEYES IMPORTANTES



Leyes Complementarias: De Negación y Absorción

Las leyes de negación permiten transformar proposiciones complejas en formas más simples, eliminando negaciones anidadas y aplicando equivalencias fundamentales.

La negación de la negación nos devuelve a la verdad original.

$$\neg(\neg p) \equiv p$$

Doble Negación

Elimina negaciones anidadas

"No es falso que apruebo" \equiv "Apruebo".

$$p \vee \neg p \equiv V$$

Tercero Excluido

Una proposición es verdadera o falsa; no hay tercera opción.

"O está lloviendo o no está lloviendo."

Siempre verdadero.

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

De Morgan

Al negar una conjunción o disyunción, se invierte el conectivo y se niega cada

*"~~No~~ es cierto que estudio y trabajo" \equiv
"No estudio o no trabajo".*

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

Absorción

Simplifica disyunciones

Si una proposición ya cubre parte de la otra, se puede simplificar.

"Estudio o (estudio y trabajo)" \equiv "Estudio".

MÁS LEYES IMPORTANTES

Leyes de implicación y bicondicional

Las leyes de implicación y bicondicional establecen equivalencias fundamentales para transformar proposiciones condicionales, permitiendo simplificar argumentos lógicos complejos.

La implicación es el corazón del razonamiento deductivo en matemáticas.

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

Ley de Implicación

Transforma implicación en disyunción equivalente

Ej: "Si estudio, apruebo" \equiv "No estudio o apruebo."

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

Ley Contrarrecíproca

La implicación es equivalente a su contrarrecíproca

Ej: "Si estudio, apruebo" \equiv "Si no apruebo, no estudié."

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Ley Bicondicional

Bicondicional como conjunción de dos implicaciones

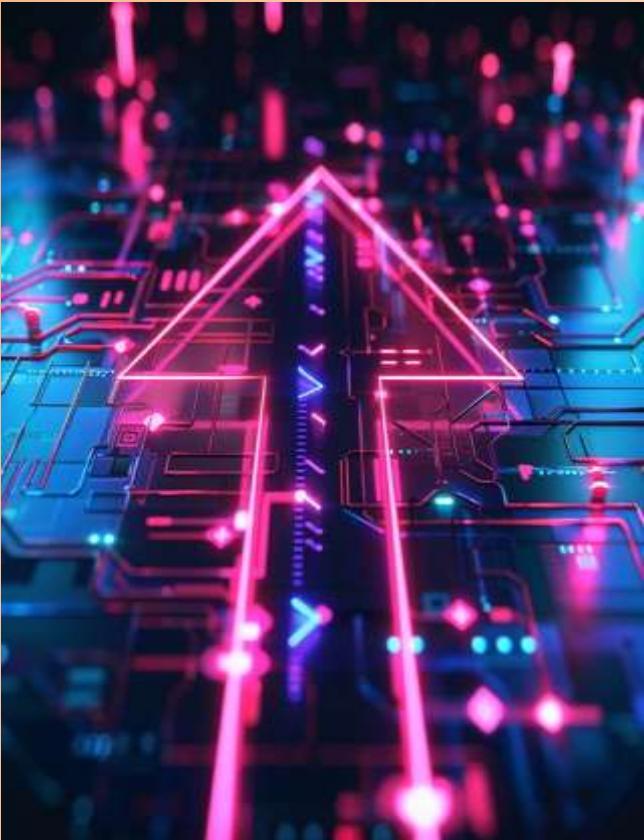
Ej: "Aprobé si y solo si estudié."

$$p \wedge \neg p \equiv \perp$$

Ley de no contradicción

Una proposición y su negación no pueden ser verdaderas al mismo tiempo.

"No puede ser cierto que esté lloviendo y que no esté lloviendo al mismo tiempo."



¿Para qué sirven las leyes proposicionales?

Las leyes lógicas se aplican en:

- ◆ Simplificación lógica: reducir expresiones complejas.
- ◆ Programación: optimizar condiciones y estructuras booleanas.
- ◆ Circuitos digitales: diseño de compuertas lógicas AND, OR, NOT.
- ◆ Demostraciones matemáticas: evitar el uso de tablas de verdad largas.



Reglas de Inferencia

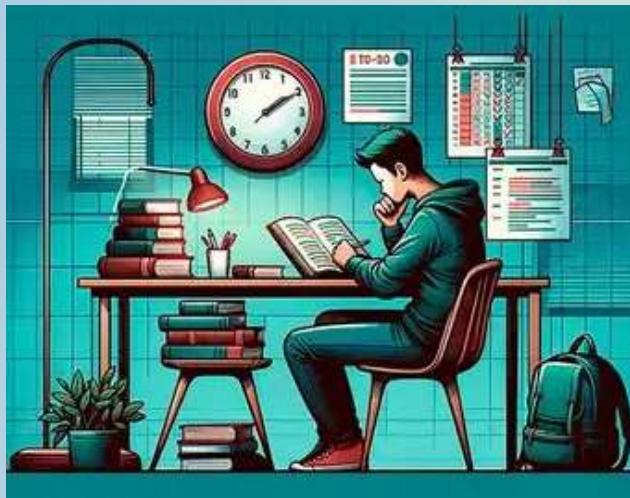
Las reglas de inferencia son patrones de razonamiento válidos que permiten deducir conclusiones verdaderas a partir de premisas verdaderas. Son fundamentales en lógica matemática y demostraciones formales.

"Son razonamientos válidos simples y correctos que permiten derivar conclusiones verdaderas a partir de premisas verdaderas."

— K'areink, 2002



Principales Reglas de Inferencia



$p \rightarrow q, p \Rightarrow q$

Modus Ponens (MPP)

Afirmación del antecedente para deducir el consecuente

Si p implica q y p es verdadero, entonces q también lo es.

Ej: Si estudio, apruebo. Estudio. \Rightarrow Apruebo.

$p \rightarrow q, \neg q \Rightarrow \neg p$

Modus Tollens (MTT)

Negación del consecuente para deducir la negación del antecedente.

Si p implica q y q es falso, entonces p también es falso.

Ej: Si estudio, apruebo. No apruebo. \Rightarrow No estudié.

$p \rightarrow q, q \rightarrow r \Rightarrow p \rightarrow r$

Silogismo Hipotético (SH)

Encadenamiento de implicaciones para obtener conclusión final

La implicación es transitiva.

Ej: Si estudio, apruebo. Si apruebo, me gradúo. \Rightarrow Si estudio, me gradúo.

$p \vee q, \neg p \Rightarrow q$

Silogismo Disyuntivo (SD)

Eliminación de una disyunción negando una alternativa

Si una disyunción es cierta y se niega una parte, la otra es verdadera.

Ej: O estudio o descanso. No estudio. \Rightarrow Descanso.

Principales Reglas de Inferencia

$$p, q \Rightarrow p \wedge q$$

Ley de la Conjunción (LC)

Si dos proposiciones son verdaderas, su conjunción también lo es.

Ej: "Estudio. Trabajo. \Rightarrow Estudio y trabajo."

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Bicondicional (LB)

Define la doble implicación en términos de dos condicionales.

Ej: "Aprobé si y solo si estudié."

$$P \Rightarrow p \vee q$$

Ley de la Adición (LA)

Si una proposición es verdadera, entonces la disyunción también lo es.

Ej: "Estudio. \Rightarrow Estudio o descanso."

$$p \vee q, \neg p \vee r \Rightarrow q \vee r$$

Regla de Resolución

Muy usada en IA y lógica computacional.

Ej: Estudio o trabajo. Si no estudio, descanso. \Rightarrow Trabajo o descanso.



RAZONAMIENTOS INVÁLIDOS

Errores Lógicos y Falacias

No todos los razonamientos son válidos.

Identificar falacias comunes es esencial para evitar conclusiones incorrectas y construir argumentos sólidos en matemáticas y programación.

Un razonamiento inválido puede parecer correcto pero no garantiza la verdad de la conclusión.

$$p \rightarrow q, q \Rightarrow p$$

Afirmar el Consecuente

Si apruebo, estudié. Aprobé. \Rightarrow Estudié.
(Falso: podría haber otras razones)

$$p \rightarrow q, \neg p \Rightarrow \neg q$$

Negar el Antecedente

Si estudio, apruebo. No estudio. \Rightarrow No apruebo. (Falso: podría aprobar igual)



CONCLUSIONES FINALES

Leyes y Reglas: Pilares de la Lógica

Las leyes de las proposiciones y las reglas de inferencia son los fundamentos de la lógica matemática, permitiendo simplificar expresiones complejas y construir razonamientos válidos.

"Leyes → estructura lógica.

Reglas → razonamiento válido."

Aspecto	Leyes de las proposiciones	Reglas de inferencia
Qué son	Tautologías (verdades universales)	Formas válidas de razonamiento
Función	Simplifican proposiciones	Permiten deducir conclusiones
Tipo de verdad	Siempre verdaderas	Verdaderas si las premisas lo son
Ejemplo	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	$p \rightarrow q$, $p \Rightarrow q$

Conclusiones Finales

Las **Leyes de las Proposiciones** definen cómo se comportan las proposiciones y cómo pueden transformarse sin alterar su significado.

Las **Reglas de Inferencia** permiten razonar correctamente para obtener conclusiones válidas.

Ambas son pilares fundamentales de la Lógica Matemática y las Matemáticas Discretas, con aplicaciones en:

- Demostraciones formales
- Programación y algoritmos
- Inteligencia artificial
- Diseño de circuitos digitales



Bibliografía

1. K'areink, R. (2002). *Introducción a la lógica proposicional y reglas de inferencia*. En *Matemáticas Discretas* (4.1.1.3 Reglas de Inferencia). Documento académico interno.
2. Espinoza, J. (2005). *Matemáticas Discretas*. Proyecto educativo institucional. Universidad Nacional de Loja. [Archivo PDF].
3. LibreTexts. (2023). *Logical Equivalences*. En *Discrete Mathematics* (Monroe Community College). Recuperado de https://math.libretexts.org/Courses/Monroe_Community_College/MTH_220_Discrete_Math/2%3A_Logic/2.5%3A_Logical_Equivalences