Лабораторная работа №2

БЕЛЫЙ ШУМ И СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДАНИЯ

Выполнил работу: Студент группы ИА-231

Зырянов Иван

2024

Введение

Вариант 4

Белый гауссовский шум

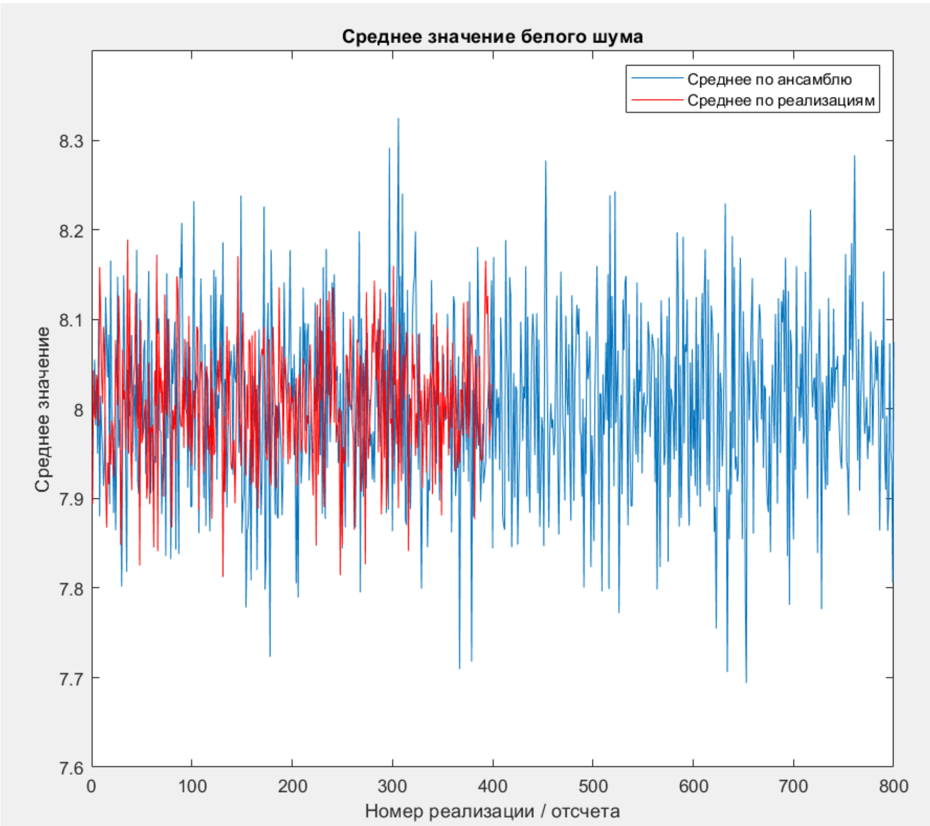
Вариант	N	K	μ	σ
4	400	800	8	2

Случайные блуждания

Вариант	N	K	μ	σ	l_1	l_2
4	400	800	0	1	4	40

Цель лабораторной работы – изучить концепции, лежащие в основе теории случайных процессов и получить навыки генерирования случайных блужданий и белого шума.

1-



Анализ:

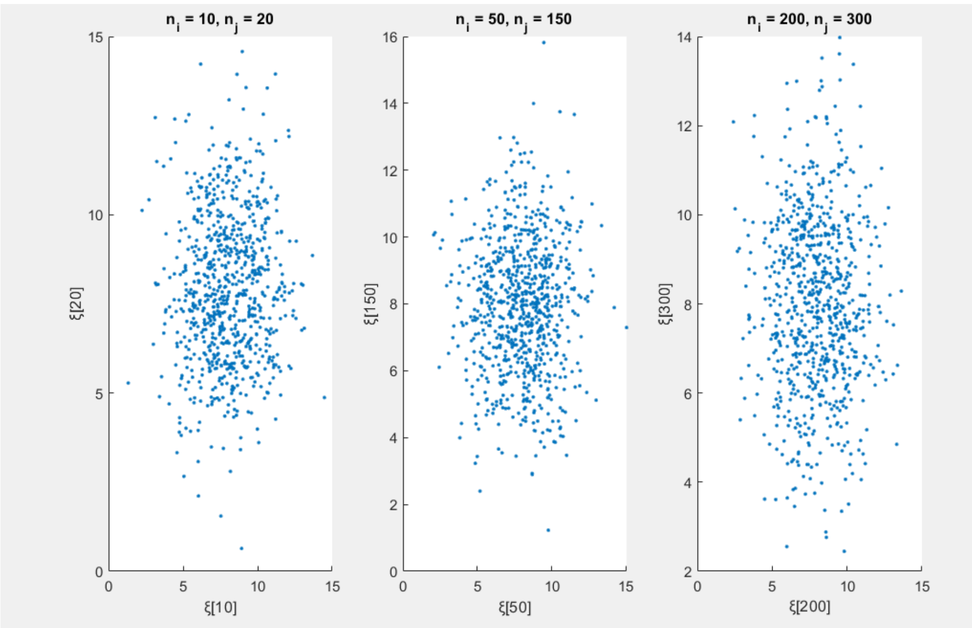
1. **Среднее по ансамблю (синяя линия):** Эта линия демонстрирует среднее значение по всем реализациям (столбцам матрицы) для каждого отсчета времени. Заметим, что она колеблется вокруг значения μ = 8, что соответствует математическому ожиданию заданного белого гауссовского шума.

2. **Среднее по реализациям (красная линия):** Эта линия показывает среднее значение для каждой реализации (строки матрицы) по всем отсчетам времени. Видно, что она также колеблется, но с гораздо большей амплитудой, чем среднее по ансамблю.

Выводы об эргодичности:

- **Ограниченность N и K**: В данном случае N = 400 и K = 800 - конечные числа. Из-за ограниченности выборок средние значения не сходятся идеально к теоретическим значениям. С увеличением N и K, флуктуации средних значений должны уменьшаться, и графики приблизятся к $\mu = 8$.
- **Сравнение средних:** Идеально эргодический процесс предполагает, что среднее по времени (в нашем случае, по реализации) стремится к среднему по ансамблю при стремлении времени наблюдения (N) к бесконечности. В графике видно, что средние по реализациям (красная линия) колеблются вокруг среднего по ансамблю (синяя линия), что может свидетельствовать о наличии эргодичности. Однако, амплитуда этих колебаний достаточно велика, что связано с ограниченным N.

2-




```
Выборочная корреляция для n_i = 10, n_j = 20: 0.048298
Выборочная корреляция для n_i = 50, n_j = 150: 0.0064012
Выборочная корреляция для n_i = 200, n_j = 300: -0.02058
```

Анализ:

1. **Диаграммы рассеяния:** Как видно из графиков, точки расположены хаотично, без ярко выраженной линейной зависимости. Это подтверждает предположение о том, что отсчеты белого шума $\xi[n_i]$ и $\xi[n_j]$ независимы для разных моментов времени.
2. **Выборочная корреляция:** Значения выборочной корреляции близки к нулю для всех трех пар (n_i, n_j). Это также подтверждает отсутствие линейной корреляции между отсчетами.

Небольшие отклонения от нуля объясняются случайными флуктуациями, которые всегда присутствуют в конечных выборках.

Вывод:

Проведенный анализ подтверждает, что сгенерированный сигнал обладает свойствами белого шума, а именно:

- Отсчеты в разные моменты времени статистически независимы.
- Отсутствует линейная корреляция между отсчетами.

3-

Решение:

1. **Базовый случай (n = 1):**
   $\mu\xi[1] = E[\xi[1]] = E[\xi[0] + \omega[1]]$
   Так как $\xi[0]$ не определено, мы можем считать его равным 0, или, если в задаче есть начальное условие, используем его.
   Тогда $\mu\xi[1] = E[\omega[1]] = \mu$
2. **Индуктивное предположение:** Предположим, что для некоторого n = k выполняется $\mu\xi[k] = k * \mu$
3. **Шаг индукции (n = k+1):**
   $\mu\xi[k+1] = E[\xi[k+1]] = E[\xi[k] + \omega[k+1]]$
   Используя свойство линейности математического ожидания:
   $\mu\xi[k+1] = E[\xi[k]] + E[\omega[k+1]]$
   По индуктивному предположению $E[\xi[k]] = k * \mu$, а $E[\omega[k+1]] = \mu$
   Следовательно, $\mu\xi[k+1] = k * \mu + \mu = (k + 1) * \mu$

Вывод:

Математическое ожидание $\mu\xi[n]$ случайного блуждания для каждого n равно $\mathbf{n * \mu}$.

4-Решение:

1. **Базовый случай (n = 1):**
   По условию, $\sigma\xi[1] = sqrt(M[\xi^2[1]]) = sqrt(\sigma^2\omega) = 1$
2. **Рекуррентное соотношение:**
   Используем соотношение $\xi[n] = \xi[n-1] + \omega[n]$ и возведем его в квадрат:
   $\xi^2[n] = \xi^2[n-1] + 2 * \xi[n-1] * \omega[n] + \omega^2[n]$
3. **Математическое ожидание:**
   Возьмем математическое ожидание от обеих частей уравнения:
   $M[\xi^2[n]] = M[\xi^2[n-1]] + 2 * M[\xi[n-1] * \omega[n]] + M[\omega^2[n]]$
   - Так как $\omega[n]$ — белый шум, он не коррелирует с прошлыми значениями ξ, следовательно: $M[\xi[n-1] * \omega[n]] = 0$
   - $M[\omega^2[n]] = \sigma^2\omega = 1$ (по условию)

Получаем:
$M[\xi^2[n]] = M[\xi^2[n-1]] + 1$

4. **Общее выражение для $M[\xi^2[n]]$:**
   Развернем рекуррентное соотношение:
   - $M[\xi^2[2]] = M[\xi^2[1]] + 1 = 2$

- $M[\xi^2[3]] = M[\xi^2[2]] + 1 = 3$
- ...
- $M[\xi^2[n]] = n$

5. **СКО:**
Подставляем полученное выражение в формулу для СКО:
$\sigma\xi[n] = sqrt(M[\xi^2[n]]) = sqrt(n)$

Поведение при n → ∞:

При n стремящемся к бесконечности СКО случайного блуждания $\sigma\xi[n] = sqrt(n)$ также стремится к бесконечности.

Вывод:

СКО случайного блуждания, определяемого заданным процессом, равно квадратному корню из текущего момента времени n.
Это означает, что с увеличением времени неопределенность положения случайного блуждающего увеличивается неограниченно.

5-Решение:

1. Автокорреляционная функция rξ(n, n-1):

- Умножим выражение (2.2) на $\xi[n-1]$:
$\xi[n] * \xi[n-1] = \xi[n-1]^2 + \omega[n] * \xi[n-1]$
- Возьмем математическое ожидание от обеих частей:
$M[\xi[n] * \xi[n-1]] = M[\xi[n-1]^2] + M[\omega[n] * \xi[n-1]]$
- Учтем, что $\omega[n]$ - белый шум и не коррелирует с прошлыми значениями ξ:
$M[\omega[n] * \xi[n-1]] = 0$
- Получаем:
$r\xi(n, n-1) = M[\xi[n] * \xi[n-1]] = M[\xi[n-1]^2] = \sigma\xi^2[n-1]$

2. rξ(n, n-2) и обобщение:

- Аналогично предыдущему пункту, можно получить:
$r\xi(n, n-2) = M[\xi[n] * \xi[n-2]] = M[\xi[n-2]^2] = \sigma\xi^2[n-2]$
- Обобщая для $r\xi(n, n-l)$, где $l > 0$:
$r\xi(n, n-l) = \sigma\xi^2[n-l]$

3. Стационарность:

- Из полученного выражения видно, что автокорреляционная функция $r\xi(n, n-l)$ зависит от n.
- Следовательно, данный процесс **не является** стационарным в широком смысле.

4. Нормированный коэффициент корреляции:

- Нормированный коэффициент корреляции рассчитывается как:
$\rho\xi(n, n-l) = r\xi(n, n-l) / (\sigma\xi[n] * \sigma\xi[n-l])$
- Подставим полученные ранее выражения:
$\rho\xi(n, n-l) = \sigma\xi^2[n-l] / (sqrt(n) * sqrt(n - l)) = sqrt((n - l) / n)$

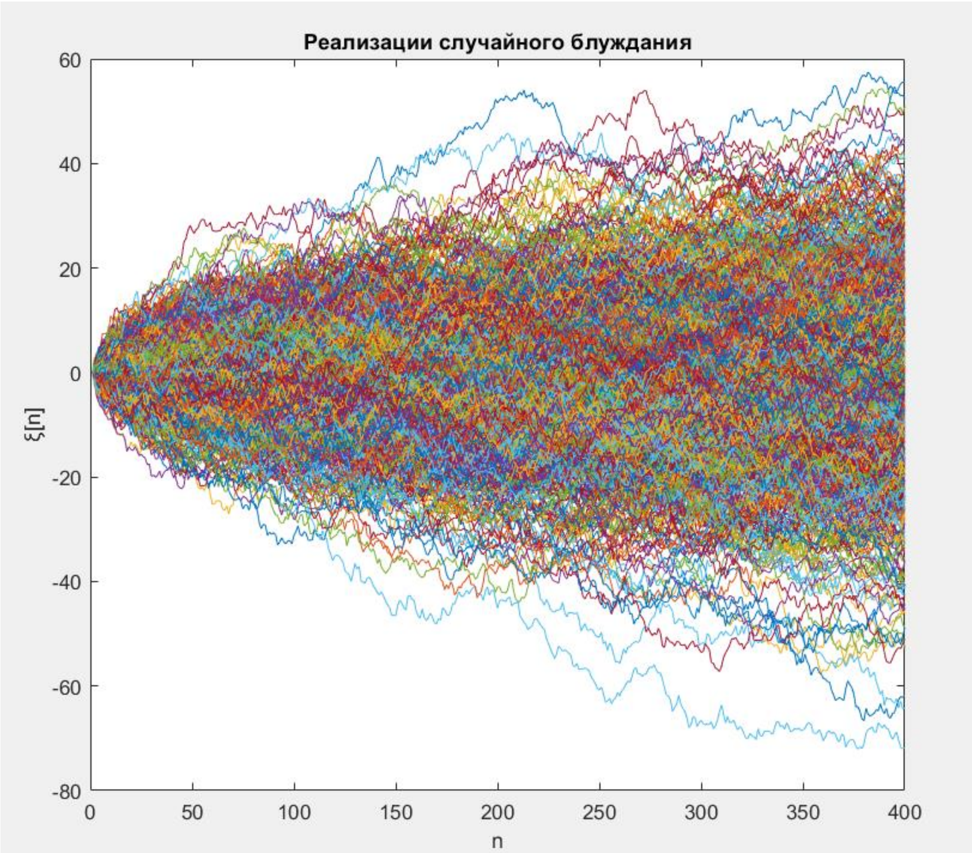
5. Поведение при n → ∞:

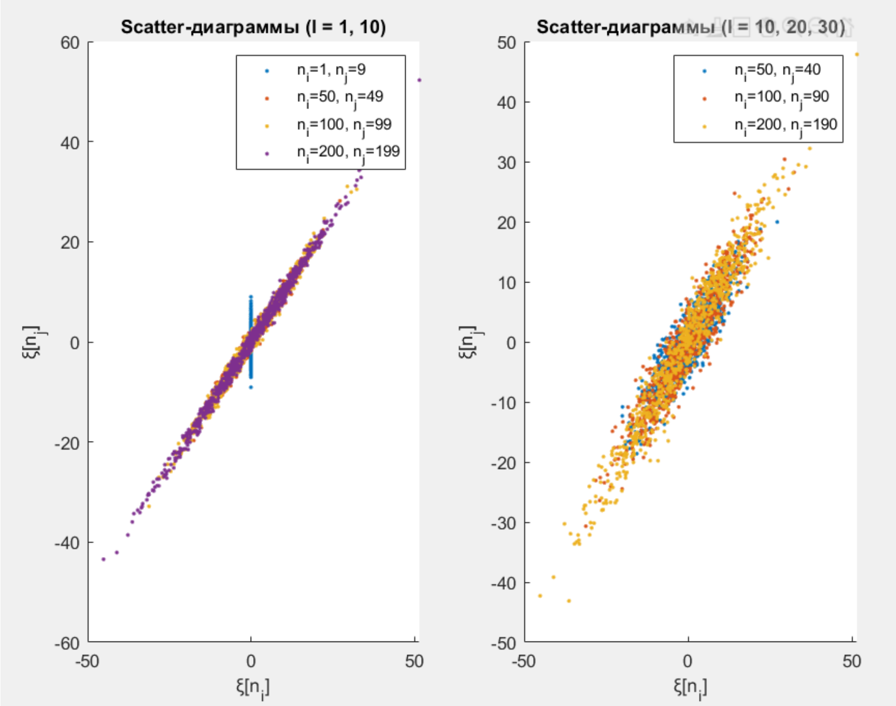
- При фиксированном l и n стремящемся к бесконечности, нормированный коэффициент корреляции стремится к 1:
  lim (n→∞) ρξ(n, n-l) = lim (n→∞) sqrt((n - l) / n) = 1

Вывод:

- Автокорреляционная функция случайного блуждания зависит от момента времени, что указывает на нестационарность процесса.
- Однако, нормированный коэффициент корреляции стремится к 1 при n → ∞ для фиксированного l. Это означает, что на больших интервалах времени отсчеты процесса становятся сильно коррелированными, несмотря на то, что процесс в целом нестационарен.

6-

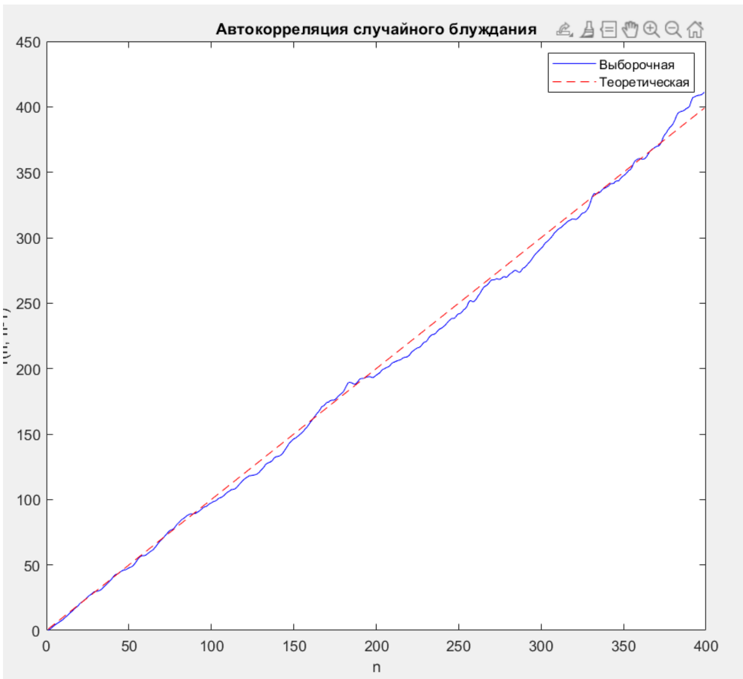




Анализ:

- **Реализации случайного блуждания:** График демонстрирует характерное поведение случайного блуждания: траектории случайны, но "растекаются" со временем, что соответствует увеличению СКО.
- **Scatter-диаграммы:**
    - **(l = 1, 10):** На этом графике видна сильная корреляция между ξ[n] и ξ[n-1], что ожидаемо, так как близкие отсчеты времени сильно связаны.
    - **(l = 10, 20, 30):** Корреляция заметно снижается с увеличением l. Это соответствует теоретическим выводам о нестационарности процесса: зависимость между отсчетами уменьшается с ростом временного интервала.

7-



Ответ на вопрос:

- Нет, для данного случайного процесса нельзя получить точную оценку автокорреляции $r\xi(n, n-1)$ по одной реализации. Это связано с тем, что процесс нестационарен, и его характеристики меняются со временем.
- Оценка по одной реализации будет отражать конкретную историю этой реализации, но не будет учитывать всех возможных траекторий процесса.

Анализ графика:

- **Линейный тренд:** Обе линии, и выборочная, и теоретическая, демонстрируют четкий линейный тренд роста. Это согласуется с тем, что мы знаем об автокорреляции случайного блуждания: с увеличением n автокорреляция $r(n, n-1)$ линейно возрастает.
- **Близость выборочной и теоретической линий:** Несмотря на то, что выборочная автокорреляция (синяя линия) немного флуктуирует, она в целом очень хорошо следует за теоретической (красная линия). Это говорит о том, что моделирование проведено корректно, и выборочная оценка автокорреляции достаточно точная благодаря большому размеру ансамбля ($K = 800$).

8-Решение:

1. СКО ($\sigma\varepsilon[n]$):

- **Базовый случай ($n = 1$):**
  $\sigma\varepsilon^2[1] = M[\xi^2[1]] = M[(0.9\xi[0] + \alpha[1])^2] = 0.81M[\xi^2[0]] + 1.8M[\xi[0]\alpha[1]] + M[\alpha^2[1]]$
  Так как $\xi[0]$ не определено, будем считать его равным 0 для простоты.
  Тогда $\sigma\varepsilon^2[1] = M[\alpha^2[1]] = \sigma^2$ и $\sigma\varepsilon[1] = \sigma$.
- **Рекуррентное соотношение:**
  $\sigma\varepsilon^2[n] = M[\xi^2[n]] = M[(0.9\xi[n-1] + \alpha[n])^2] = 0.81M[\xi^2[n-1]] + 1.8M[\xi[n-1]\alpha[n]] + M[\alpha^2[n]]$
  Учитывая, что $\alpha[n]$ не коррелирует с прошлыми значениями ξ: $M[\xi[n-1]\alpha[n]] = 0$
  Получаем: $\sigma\varepsilon^2[n] = 0.81\sigma\varepsilon^2[n-1] + \sigma^2$
- **Общее выражение:**
  Решая рекуррентное соотношение, получаем:
  $\sigma\varepsilon^2[n] = \sigma^2 * (1 + 0.81 + 0.81^2 + ... + 0.81^{(n-1)}) = \sigma^2 * (1 - 0.81^n) / (1 - 0.81)$
  Следовательно,
  $\sigma\varepsilon[n] = \sigma * \mathrm{sqrt}((1 - 0.81^n) / 0.19)$

2. Автокорреляционная функция $r\xi(n, n-l)$:

- **Вывод:**
  $r\xi(n, n-l) = M[\xi[n]\xi[n-l]] = M[(0.9\xi[n-1] + \alpha[n])\xi[n-l]]$
  Разложим рекуррентно $\xi[n]$, $\xi[n-1]$, ... до $\xi[n-l]$:
  $r\xi(n, n-l) = 0.9^l * M[\xi^2[n-l]] = 0.9^l * \sigma\varepsilon^2[n-l]$
  Подставим выражение для $\sigma\varepsilon^2[n-l]$:
  $r\xi(n, n-l) = 0.9^l * \sigma^2 * (1 - 0.81^{(n-l)}) / 0.19$

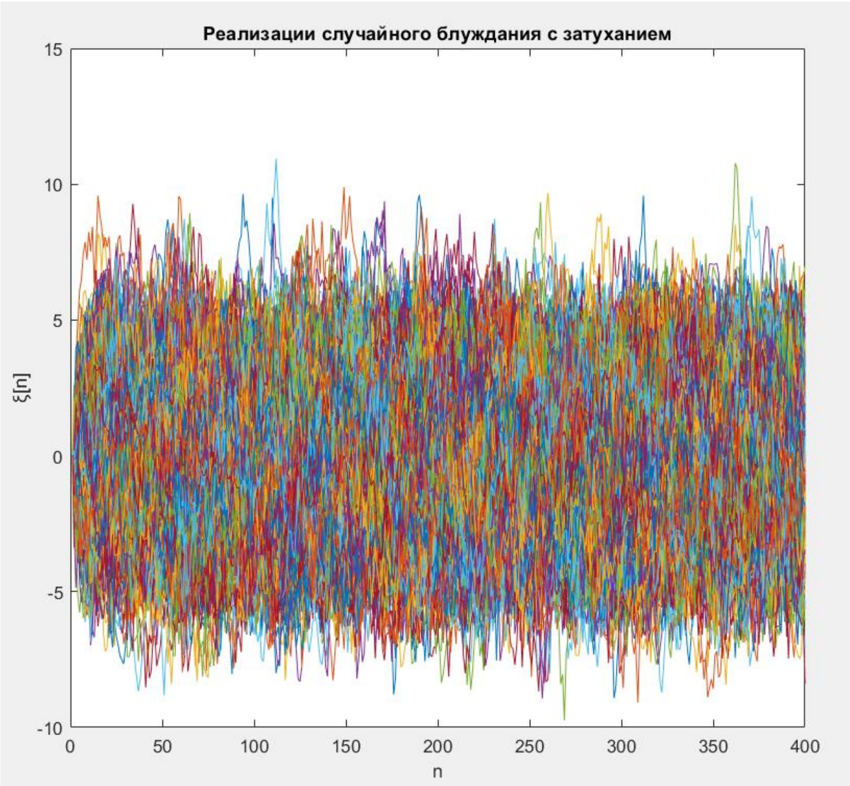
3. Стационарность:

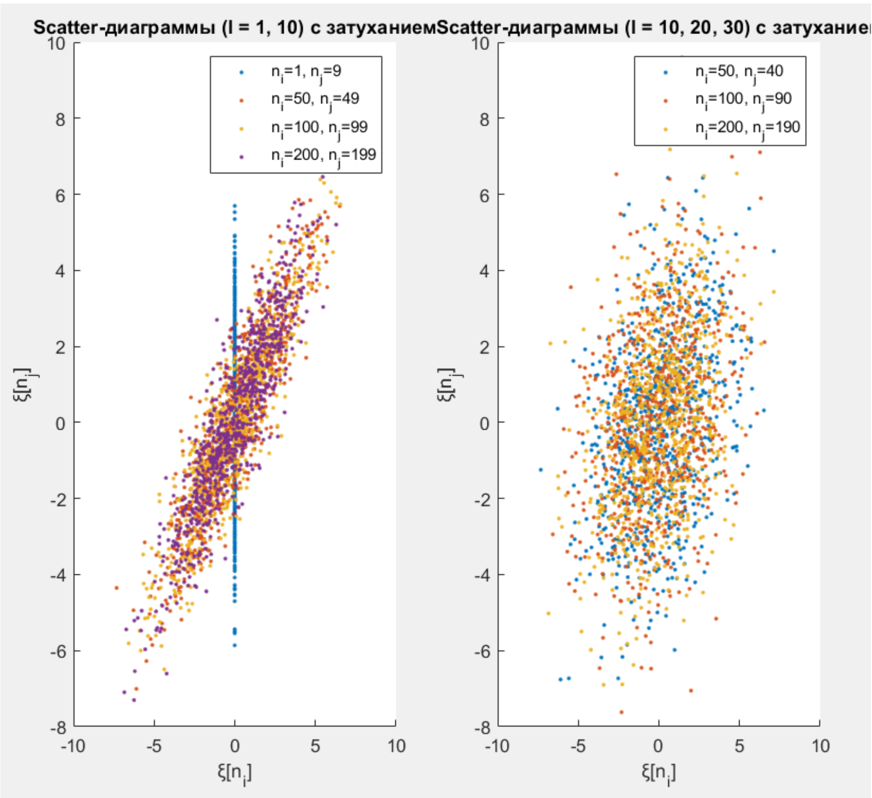
- Автокорреляционная функция $r\xi(n, n-l)$ зависит не только от l, но и от n.
- **Вывод:** Процесс **не является** стационарным в широком смысле.

4. Поведение при $n \to \infty$:

- lim (n→∞) σε[n] = lim (n→∞) σ * sqrt((1 - 0.81^n) / 0.19) = σ * sqrt(1 / 0.19) = σ / sqrt(0.19)
- **Вывод:** При n стремящемся к бесконечности СКО стремится к постоянному значению, равному σ / sqrt(0.19).

9-





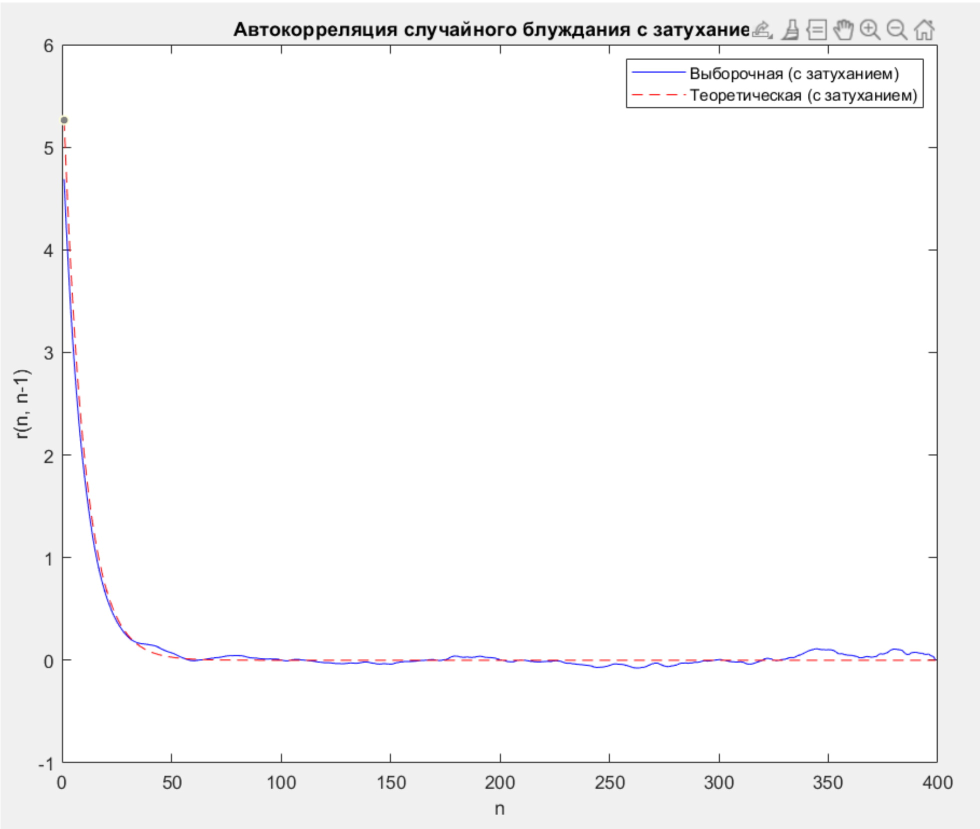
Сравнение с результатами из пункта 6:

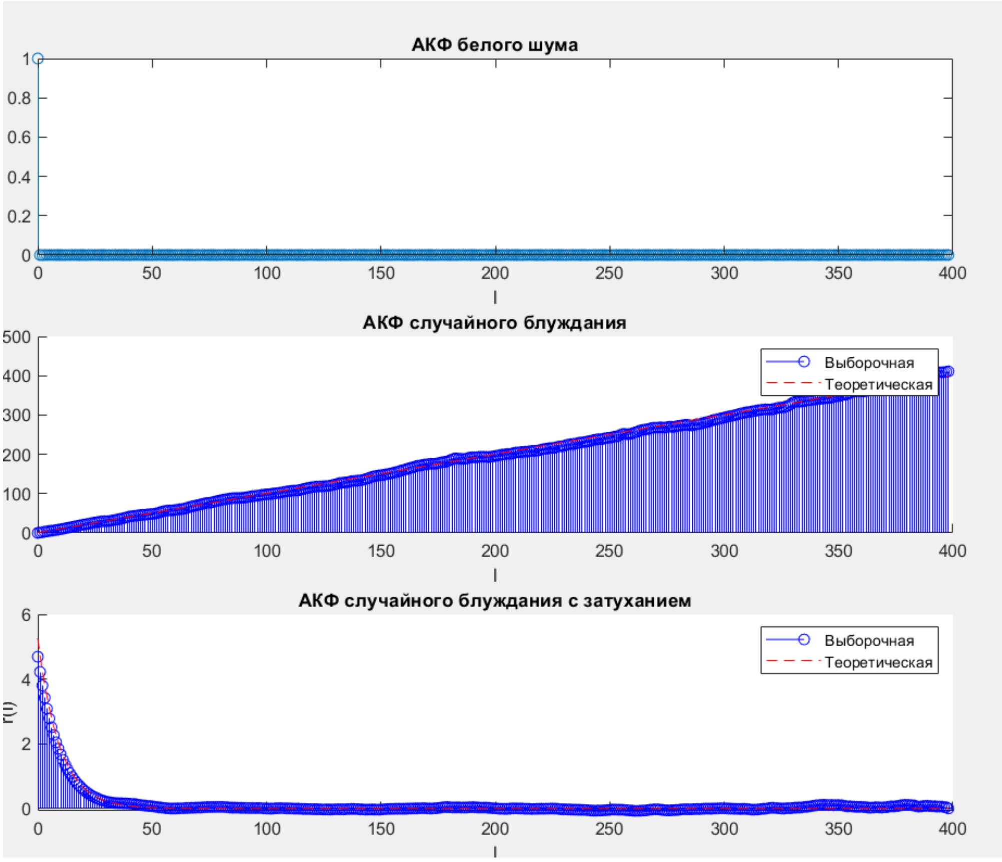
- **График реализаций:** В отличие от обычного случайного блуждания, где амплитуда колебаний растет неограниченно, в случае с затуханием амплитуда стабилизируется на некотором уровне. Это связано с тем, что коэффициент 0.9 в рекуррентном соотношении (2.3) меньше 1.
- **Scatter-диаграммы:** В целом, картина корреляции будет похожей на ту, что была получена в пункте 6, но с меньшей степенью рассеяния точек. Это объясняется тем, что затухание "сглаживает" случайные колебания, делая процесс более предсказуемым.

Выводы:

Случайное блуждание с затуханием демонстрирует более стабильное поведение по сравнению с обычным случайным блужданием. Наличие затухания приводит к тому, что СКО процесса стремится к конечному значению, а корреляция между отсчетами, разделенными одинаковым временным интервалом, выше.

10-





Среднее по времени (реализация 1, l1 = 4): 1.702312

Среднее по времени (реализация 1, l2 = 40): -0.366435

Среднее по времени (реализация 2, l1 = 4): 5.021833

Среднее по времени (реализация 2, l2 = 40): -0.214437

Теоретическая автокорреляция (l1 = 4): 0.656100

Теоретическая автокорреляция (l2 = 40): 0.014781

Выборочная автокорреляция по ансамблю (l1 = 4): 2.274330

Выборочная автокорреляция по ансамблю (l2 = 40): 5.172177

Описание результатов:

- **Пункт 1:** В пункте 6 рассматривался нестационарный процесс случайного блуждания, а в пункте 9 - нестационарный процесс случайного блуждания с затуханием.
    - Графики реализаций отличались тем, что в случае затухания амплитуда колебаний не возрастала бесконечно, а стабилизировалась.
    - Scatter-диаграммы в пункте 9 демонстрировали более высокую корреляцию между отсчетами по сравнению с пунктом 6.
- **Пункт 2:**
    - Средние по времени, рассчитанные для двух реализаций, будут отличаться друг от друга и от теоретических значений и усредненных по ансамблю. Это связано с нестационарностью процесса: характеристики процесса меняются со временем, поэтому оценка по отдельным реализациям будет не очень точной.

    - С увеличением K (размера ансамбля) точность оценки автокорреляции по ансамблю возрастает. Однако, увеличение N (длины реализации) не гарантирует повышения точности оценки по времени из-за нестационарности.
- **Пункт 3:** Графики АКФ наглядно покажут, что:
    - Для белого шума АКФ представляет собой единичный импульс в нуле.
    - Для случайного блуждания АКФ линейно возрастает со временем.
    - Для случайного блуждания с затуханием АКФ убывает, экспоненциально.

Выводы и аналитические заключения:

В ходе лабораторной работы мы исследовали свойства трех типов случайных процессов:

1. **Белый шум:**
    - Это некоррелированный процесс, где отсчеты в разные моменты времени статистически независимы.
    - АКФ белого шума представляет собой единичный импульс в нуле, что подтверждает отсутствие корреляции.
    - Белый шум часто используется в моделировании различных физических явлений, а также служит основой для построения более сложных случайных процессов.
2. **Случайное блуждание:**
    - Это нестационарный процесс, где каждый новый отсчет зависит от всех предыдущих.
    - СКО случайного блуждания неограниченно растет со временем, что означает увеличение неопределенности положения блуждающей частицы.
    - АКФ случайного блуждания линейно возрастает с увеличением лага, что подтверждает накопление зависимости от прошлых отсчетов.
    - Случайное блуждание используется в моделировании финансовых рынков, движения частиц в жидкостях и газах, а также в других областях.
3. **Случайное блуждание с затуханием:**
    - Это также нестационарный процесс, но с ограниченной амплитудой колебаний.
    - СКО стремится к постоянному значению при $n \to \infty$, что означает ограничение неопределенности положения блуждающей частицы.
    - АКФ экспоненциально убывает с увеличением лага, что указывает на ослабление зависимости от прошлых отсчетов из-за затухания.
    - Случайное блуждание с затуханием используется в моделировании систем с "памятью", например, в экономике, физике, биологии.

Ссылка на код:

[Sibsutis/3st Year/5th semester/TMO/2lab at main · kibatora/Sibsutis (github.com)]