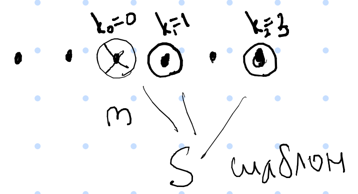
Дан дифференциальный оператор $L: C^N(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^N(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$Lu = \sum_{i=0}^{p} d_i u^{(i)}$$

Нужно построить его разностную аппроксимацию в точках

$$x_1, \dots, x_N$$

Выбираем шаблон - соседние точки, используемые для аппроксимации оператора L в точке x_m



Записываем аппроксимацию оператора L в точке x_m по выбранным точкам шаблона с неопределенными коэффициентами

k_j - сдвиги:

$m-1 \quad m \quad m+1$

$k = [-1, 0, 1]$

$m-1 \quad m \quad m+1$

$k = [-1, 1]$

$$(1) \qquad [Lu]_m \approx \sum_{k_j \in S} c_j u_{m+k_j} = \sum_{j=0}^{q} c_j u_{m+k_j}$$

Раскладываем в ряд Тейлора значения функции в точках шаблона относительно точки x_m

$$u_{m+k_j} = \sum_{i=0}^{p} u_m^{(i)} \frac{(x_{m+k_j} - x_m)^i}{i!} + \underbrace{O\left((x_{m+k_j} - x_m)^p\right)}_{R_j}$$

Подставляем эти разложения в (1) (полученное выражение зависит от точки x_m)

$$[Lu]_m \approx \sum_{j=0}^{q} c_j \sum_{i=0}^{p} u_m^{(i)} \frac{(x_{m+k_j} - x_m)^i}{i!} + \sum_{j=0}^{q} c_j R_j$$

Сравния с дифференциациальным оператором L, получаем систему уравнений:

$$\sum_{j=0}^{q} c_j \sum_{i=0}^{p} u_m^{(i)} \frac{(x_{m+k_j} - x_m)^i}{i!} + \overbrace{\sum_{j=0}^{q} c_j R_j}^{(*)} = \sum_{i=0}^{p} d_i u^{(i)}$$

В матричной форме получаем:

$$A\vec{c} + \vec{r}\vec{c} = \vec{d} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_p \end{bmatrix}, \quad r = \begin{bmatrix} R_0 \\ R_1 \\ \vdots \\ R_q \end{bmatrix}$$

$$A_{i,j} = \frac{(x_{m+k_j} - x_m)^i}{i!}, \quad \begin{matrix} j = 0, \dots, q \\ i = 0, \dots, p \end{matrix}$$

Пренебрегая ошибкой rc, получим систему линейных уравнений.

Если q < p (количество точек в шаблоне не больше максимального порядока среди производных в операторе L), то система не имеет решений.

Если q > p, то дополним вектор d нулями, чтобы получить квадратную матрицу A (p = q).

При p = q система имеет единственное решение.

При аппроксимации производной порядка k на равномерной сетке, сходимость порядка (q+1-k), т.е. на единицу больше количества нулей в конце вектора d.