

1. В памяти компьютера расположен массив неотрицательных чисел  $a_1, \dots, a_n$ , в котором все числа встречается дважды, кроме одного, которое встречается в массиве единожды. Например,  $[x, y, y, z, u, x, u]$ . Найдите уникальное число за  $O(n)$  времени и  $O(1)$  дополнительной памяти.
2. В памяти компьютера расположен массив неотрицательных чисел  $a_1, \dots, a_n$ , в котором все числа встречается дважды, кроме **двух**, которое встречается в массиве единожды. Например,  $[x, y, x, z, u, u]$ . Найдите два уникальных числа за  $O(n)$  времени и  $O(1)$  дополнительной памяти.
3. В памяти компьютера расположена матрица  $n \times m$ , причём в каждой её строке и в каждом её столбца числа строго возрастают. По данному числу  $x$  определите, встречается ли оно в матрице, за  $O(n + m)$  времени и  $O(1)$  дополнительной памяти.
4. Даны  $n$  бинарных строк длины  $n$ . Найдите ещё какую-нибудь бинарную строку длины  $n$ , которая не совпадает ни с одной из данных.
5. Дан массив длины  $n$ , в котором какое-то число встречается больше  $n/2$  раз. Найдите это число за  $O(n)$  времени и  $O(1)$  дополнительной памяти.
6. Дан массив  $a_1, \dots, a_n$ , все элементы которого — целые числа от 1 до  $n - 1$ . Какое-то число встречается дважды, а все остальные — единожды. Найдите кратный элемент за  $O(n)$  времени и  $O(1)$  дополнительной памяти.

1. Ответ есть  $a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n$ .
2. Также найдите XOR всех чисел. Он будет равен  $x \oplus y$  для искомым  $x, y$ . Поскольку  $x \neq y$ , то в  $x \oplus y$  будут какие-то ненулевые биты. Пусть  $i$  — номер какого-то ненулевого бита. Найдите XOR всех чисел со включённым  $i$ -м битом, и отдельно — с выключенным.
3. Что-то в стиле двух указателей. В первой строке найдите последнее число, меньшее  $x$ . Спуститесь во вторую строку. Двигайтесь влево, пока опять не найдёте самое правое число (в строке), меньшее  $x$ .
4. Диагональный метод.
5. Алгоритм Мисры—Гриса (Misra—Gries). Поддерживаем текущего кандидата на ответ и число его вхождений. Если встретилось такое же число, увеличиваем число вхождений. Иначе уменьшаем. Если число становится отрицательным, заменяем кандидата на текущее число, проставляем число вхождений в 1.
6. Посчитайте сумму элементов массива.