

# Билеты по матану

Автор1, ..., АвторN

19 июня 2020 г.

## Содержание

|  |          |
|--|----------|
| <b>1. Интегральное исчисление</b>  | <b>1</b> |
| 1.1 Билет 1: ! Дробление, ранг, оснащение, сумма Римана. . . . .   | 1        |
| 1.2 Билет 2: Оценка разности интеграла и интегральной суммы. Интеграл как предел интегральных сумм. Интегрируемость по Риману. . . . . | 2        |
| 1.3 Билет 3: Эквивалентная для суммы $\sum_{k=1}^n k^p$ . Формула трапеций. . . . .  | 3        |
| 1.4 Билет 4: Формула Эйлера-Маклорена (для второй производной). . . . .  | 4        |
| 1.5 Билет 5: NAME . . . . .  | 5        |
| 1.6 Билет 6: NAME . . . . .  | 5        |
| 1.7 Билет 7: NAME . . . . .  | 5        |
| 1.8 Билет 8: NAME . . . . .  | 5        |
| 1.9 Билет 9: Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признак сравнения. Следствия. . . . .                                 | 5        |
| 1.10 Билет 10: Абсолютная сходимость. Признак Дирихле. . . . .   | 7        |
| 1.11 Билет 11: NAME . . . . .  | 7        |
| <b>2. Метрические и нормированные пространства</b>   | <b>8</b> |
| 2.1 Билет 12: Метрические пространства. Примеры. Шары в метрических пространствах. . . . .   | 8        |
| 2.2 Билет 13: Открытые множества: определение и свойства. . . . .  | 9        |
| 2.3 Билет 14: Внутренние точки и внутренность множества. Свойства. . . . .   | 10       |
| 2.4 Билет 15: Замкнутые множества: определение и свойства. Замыкание множества, связь со внутренностью. . . . .                        | 11       |
| 2.5 Билет 16: Свойства замыкания. Предельные точки. Связь с замыканием множества. . . . .  | 13       |
| 2.6 Билет 17: Индуцированная метрика. Открытые и замкнутые множества в пространстве и в подпространстве. . . . .                       | 16       |
| 2.7 Билет 18: Скалярное произведение и норма. Свойства и примеры. Неравенство Коши–Буняковского. . . . .                               | 17       |
| 2.8 Билет 19: Предел последовательности в метрическом пространстве. Определение и основные свойства. . . . .                           | 20       |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 2.9  | Билет 20: Арифметические свойства пределов последовательности векторов. Покоординатная сходимость. . . . .   | 21 |
| 2.10 | Билет 21: Фундаментальные последовательности. Свойства. Полнота. Полнота $\mathbb{R}^d$  | 23 |
| 2.11 | Билет 22: Покрытия. Компактность. Компактность в пространстве и в подпространстве. Простейшие свойства компактных множеств. . . . .  | 24 |
| 2.12 | Билет 23: Теорема о пересечении семейства компактов. Следствие о вложенных компактах. . . . .  | 25 |
| 2.13 | Билет 24: Секвенциальная компактность. Компактность и предельные точки. Секвенциальная компактность компакта. . . . .  | 26 |
| 2.14 | Билет 25: Лемма Лебега. Число Лебега. Связь между компактностью и секвенциальной компактностью. . . . .  | 27 |
| 2.15 | Билет 26: $\varepsilon$ -сети и вполне ограниченность. Свойства. Связь с компактностью (теорема Хаусдорфа). Теорема о характеристике компактов в $\mathbb{R}^d$ . Теорема Больцано-Вейерштрасса. . . . . | 27 |
| 2.16 | Билет 27: NAME . . . . .   | 29 |
| 2.17 | Билет 28: NAME . . . . .   | 29 |
| 2.18 | Билет 29: NAME . . . . .   | 29 |
| 2.19 | Билет 30: NAME . . . . .   | 29 |
| 2.20 | Билет 31: NAME . . . . .   | 29 |
| 2.21 | Билет 32: NAME . . . . .   | 29 |
| 2.22 | Билет 33: NAME . . . . .   | 29 |
| 2.23 | Билет 34: NAME . . . . .   | 29 |
| 2.24 | Билет 35: NAME . . . . .   | 29 |
| 2.25 | Билет 36: NAME . . . . .   | 29 |
| 2.26 | Билет 37: NAME . . . . .   | 29 |
| 2.27 | Билет 38: NAME . . . . .   | 29 |
| 2.28 | Билет 39: NAME . . . . .   | 29 |

### 3. Числовые и функциональные ряды 30

|      |                          |    |
|------|--------------------------|----|
| 3.1  | Билет 40: NAME . . . . . | 32 |
| 3.2  | Билет 41: NAME . . . . . | 32 |
| 3.3  | Билет 42: NAME . . . . . | 32 |
| 3.4  | Билет 43: NAME . . . . . | 32 |
| 3.5  | Билет 44: NAME . . . . . | 32 |
| 3.6  | Билет 45: NAME . . . . . | 32 |
| 3.7  | Билет 46: NAME . . . . . | 32 |
| 3.8  | Билет 47: NAME . . . . . | 32 |
| 3.9  | Билет 48: NAME . . . . . | 32 |
| 3.10 | Билет 49: NAME . . . . . | 32 |
| 3.11 | Билет 50: NAME . . . . . | 32 |
| 3.12 | Билет 51: NAME . . . . . | 32 |

|  |           |
|--|-----------|
| 3.13 Билет 52: NAME . . . . .  | 32        |
| 3.14 Билет 53: NAME . . . . .  | 32        |
| 3.15 Билет 54: NAME . . . . .  | 32        |
| 3.16 Билет 55: NAME . . . . .  | 32        |
| 3.17 Билет 56: NAME . . . . .  | 32        |
| 3.18 Билет 57: NAME . . . . .  | 32        |
| 3.19 Билет 58: NAME . . . . .  | 32        |
| 3.20 Билет 59: NAME . . . . .  | 32        |
| 3.21 Билет 60: NAME . . . . .  | 32        |
| 3.22 Билет 61: NAME . . . . .  | 32        |
| 3.23 Билет 62: NAME . . . . .  | 32        |
| 3.24 Билет 63: NAME . . . . .  | 32        |
| 3.25 Билет 64: NAME . . . . .  | 32        |
| 3.26 Билет 65: NAME . . . . .  | 32        |
| 3.27 Билет 66: NAME . . . . .  | 32        |
| 3.28 Билет 67: Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда. Теорема Абеля. . . . .   | 32        |
| 3.29 Билет 68: Почленное интегрирование суммы степенного ряда. . . . .   | 34        |
| 3.30 Билет 69: Комплексная дифференцируемость. Дифференцирование степенного ряда. . . . .  | 34        |
| 3.31 Билет 70: Формула для коэффициентов разложения в ряд аналитической функции. Несовпадение классов бесконечно дифференцируемых и аналитических функций. . . . . | 35        |
| 3.32 Билет 71: NAME . . . . .  | 37        |
| 3.33 Билет 72: NAME . . . . .  | 37        |
| <b>4. Функции нескольких переменных</b>  | <b>38</b> |
| 4.1 Билет 73: NAME . . . . .   | 38        |
| 4.2 Билет 74: NAME . . . . .   | 38        |
| 4.3 Билет 75: NAME . . . . .   | 38        |
| 4.4 Билет 76: NAME . . . . .   | 38        |
| 4.5 Билет 77: NAME . . . . .   | 38        |
| 4.6 Билет 78: NAME . . . . .   | 38        |
| 4.7 Билет 79: Теорема Лагранжа для векторнозначных функций. . . . .  | 38        |
| 4.8 Билет 80: Связь частных производных и дифференцируемости. . . . .  | 38        |
| 4.9 Билет 81: NAME . . . . .   | 40        |
| 4.10 Билет 82: NAME . . . . .  | 40        |
| 4.11 Билет 83: NAME . . . . .  | 40        |
| 4.12 Билет 84: NAME . . . . .  | 40        |
| 4.13 Билет 85: NAME . . . . .  | 40        |
| 4.14 Билет 86: NAME . . . . .  | 40        |

|                               |           |
|-------------------------------|-----------|
| 4.15 Билет 87: NAME . . . . . | 40        |
| 4.16 Билет 88: NAME . . . . . | 40        |
| 4.17 Билет 89: NAME . . . . . | 40        |
| 4.18 Билет 90: NAME . . . . . | 40        |
| 4.19 Билет 91: NAME . . . . . | 40        |
| 4.20 Билет 92: NAME . . . . . | 40        |
| 4.21 Билет 93: NAME . . . . . | 40        |
| 4.22 Билет 94: NAME . . . . . | 40        |
| 4.23 Билет 95: NAME . . . . . | 40        |
| 4.24 Билет 96: NAME . . . . . | 40        |
| 4.25 Билет 97: NAME . . . . . | 40        |
| 4.26 Билет 98: NAME . . . . . | 40        |
| <b>5. Теория меры</b>         | <b>41</b> |
| 5.1 Билет 99: NAME . . . . .  | 41        |
| 5.2 Билет 100: NAME . . . . . | 41        |
| 5.3 Билет 101: NAME . . . . . | 41        |
| 5.4 Билет 102: NAME . . . . . | 41        |

# 1. Интегральное исчисление

А разве можно всё упростить, всё обобщить? И вообще, разве по чужому желанию можно обобщать и упрощать?

---

Джером Дэвид Сэлинджер, "Над пропастью во ржи"

Привет, Путник! Я рад сопровождать тебя в начале твоего долгого и тяжёлого пути к (не) отчислению. Запасись терпением. А лучше корвалолом.

## 1.1. Билет 1: ! Дробление, ранг, оснащение, сумма Римана.

### Определение 1.1.

Дробление отрезка  $[a, b]$  – это набор точек  $\tau$ , такой что

$$\tau = \{x_k\}_{k=0}^n : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

Ранг (мелкость) дробления –  $\max_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = |\tau|$

Оснащение – набор точек, такой что

$$\{\xi_k\}_{k=0}^{n-1} : \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

Пара  $(\tau, \xi)$  – оснащённое дробление

### Определение 1.2.

Сумма Римана (интегральная сумма)

$f : [a, b] \mapsto R$  и оснащённое дробление  $(\tau, \xi)$

$$S(f, \tau, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

Какой короткий и классный билет :)

Ну, удачи...

## 1.2. Билет 2: Оценка разности интеграла и интегральной суммы. Интеграл как предел интегральных сумм. Интегрируемость по Риману.

### Теорема 1.1.

$$|S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f| \leq (b - a)\omega_f(|\tau|)$$

( $\omega_f$  – модуль непрерывности)

### Доказательство.

$$\begin{aligned} \Delta &:= S(f, \tau, \xi) - \int_a^b f \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - \int_a^b f \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(\xi_k) - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(\xi_k) - f(t)) dt \\ |\Delta| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(\xi_k) - f(t)) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(\xi_k) - f(t)| dt \quad \text{по определению } \omega_f : |\xi_k - t| < |\tau| \Rightarrow |f(\xi_k) - f(t)| < \omega_f(|\tau|) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega_f(|\tau|) dt \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_f(|\tau|)(x_{k+1} - x_k) \\ &\leq \omega_f(|\tau|)(b - a) \end{aligned}$$

□

### Следствие.

$f \in C([a, b])$ , тогда

Для любой последовательности оснащённых дроблений  $(\tau, \xi)_n$ , такой что  $|\tau_n| \rightarrow 0$ , верно:

$$\lim S(f, \tau_n, \xi_n) = \int_a^b f$$

### Доказательство.

$$f \in C([a, b]) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \omega_f(x) = 0 \Rightarrow \lim \omega_f(|\tau_n|)(b - a) = 0$$

□

### Определение 1.3.

Функция интегрируема по Риману, если:

Для любой последовательности оснащённых дроблений  $(\tau, \xi)_n$ , такой что  $|\tau_n| \rightarrow 0$ , верно:

$$\lim S(f, \tau_n, \xi_n) = I$$

И для всех последовательностей  $I$  – одинаковый

$I$  – интеграл Римана

### 1.3. Билет 3: Эквивалентная для суммы $\sum_{k=1}^n k^p$ . Формула трапеций.

**Пример.**

$$S_n(p) = 1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p$$

$$\text{Ограничим } S_n(p) \text{ сверху: } S_n(p) < n \cdot n^p = n^{p+1}$$

Чтобы ограничить снизу, возьмем только вторую половину слагаемых. Заметим, что каждое слагаемое  $\geq \frac{n}{2}$ . Получаем:  $S_n(p) > \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2}\right)^p = \frac{n^{1+p}}{2^{1+p}}$

$$\frac{n^{1+p}}{2^{1+p}} < S_n(p) < n^{p+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(p)}{n^{p+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 f(t) dt$$

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(t) = t^p$$

$$\xi_k = \frac{k}{n}$$

Мелкость дробления  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ .

$$\implies \frac{S_n(p)}{n^{p+1}} \rightarrow \int_0^1 t^p dt = \frac{1}{p+1} \implies S_n(p) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}$$

При  $p = -1$  считаем, что  $\frac{1}{p+1} = \infty$ .

**Лемма.**

$f \in C^2[a, b]$ . Тогда:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt - \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}(\beta - \alpha) = -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t)(t - \alpha)(\beta - t) dt$$

**Доказательство.**

$$\gamma := \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt &= \int_{\alpha}^{\beta} f(t)(t - \gamma)' dt = f(t)(t - \gamma) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(t - \gamma) dt = f(\beta)(\beta - \gamma) - f(\alpha)(\alpha - \gamma) - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(t - \gamma) dt \\ \gamma) dt &= \frac{f(\beta) + f(\alpha)}{2}(\beta - \alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(t - \frac{\alpha + \beta}{2}) dt \\ ((t - \alpha)(\beta - t))' &= \alpha + \beta - 2t = -2(t - \gamma) \\ \Delta &= - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t)(t - \gamma) dt = - \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) \left(-\frac{1}{2}\right) ((t - \alpha)(\beta - t))' dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f'(t) ((t - \alpha)(\beta - t))' dt = \\ &= \frac{1}{2} f'(t)(t - \alpha)(\beta - t) \Big|_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t)(t - \alpha)(\beta - t) dt = -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f''(t)(t - \alpha)(\beta - t) dt \quad \square \end{aligned}$$

**Теорема 1.2** (оценка погрешности в ф-ле трапеций).

$f \in C^2[a, b]$  и  $\tau$ - дробление. Тогда:

$$\left| \int_a^b f - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) \right| \leq \frac{|\tau|^2}{8} \int_a^b |f''|$$

В частности, если дробление на равные отрезки

$$\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{n} \left( \frac{f(x_0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{f(x_n)}{2} \right) \right| S \leq \frac{(b-a)^2}{8n^2} \int_a^b |f''|$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \Delta &:= \int_a^b f - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \left( \int_{x_{k-1}}^{x_k} f - \frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2} (x_k - x_{k-1}) \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f''(t) (t - x_{k-1})(x_k - t) dt \\ |t - x_{k-1}| |x_k - t| &\leq \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{4} \leq \frac{|\tau|^2}{4} \\ |\Delta| &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)| (t - x_{k-1})(x_k - t) dt \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)| \frac{|\tau|^2}{4} dt = \frac{|\tau|^2}{8} \int_a^b |f''| \end{aligned}$$

□

## 1.4. Билет 4: Формула Эйлера-Маклорена (для второй производной).

**Теорема 1.3.** (Формула Эйлера-Маклорена для второй производной)

$$f \in C^2[m, n] \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int_m^n f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\}) dt$$

**Доказательство.**

Подставим в формулу  $m = k, n = k + 1$ . Получим:

$$f(k) + f(k+1) = \frac{f(k)+f(k+1)}{2} + \int_k^{k+1} f(t) dt + \frac{1}{2} \int_k^{k+1} f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\}) dt$$

Выразим отсюда  $f(k)$ :

$$f(k) = \int_k^{k+1} f(t) dt + \frac{f(k)-f(k+1)}{2} + \frac{1}{2} \int_k^{k+1} f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\}) dt$$

Просуммируем от  $m$  до  $n - 1$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n-1} f(k) &= \frac{f(m)-f(n)}{2} + \int_m^n f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\}) dt \\ f(n) + \sum_{k=m}^{n-1} f(k) &= f(n) + \frac{f(m)-f(n)}{2} + \int_m^n f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\}) dt = \\ &= \frac{f(m)+f(n)}{2} + \int_m^n f(t) dt + \frac{1}{2} \int_m^n f''(t) \cdot \{t\}(1 - \{t\}) dt \end{aligned}$$

Т.е. достаточно лишь проверить формулу для  $f(k) = \dots$

Заметим, что выражение не зависит от  $k$  ( $f(t+k) = g(t)$ )  $\implies$  можно "сдвинуть". Будем считать, что  $k = 0$ . Тогда  $\{t\} = t$ .

$$f(0) = \int_0^1 f(t) dt + \frac{f(0)-f(1)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 f''(t) \cdot t(1-t) dt$$

$$\int_0^1 f(t) dt - \frac{f(0)+f(1)}{2} = -\frac{1}{2} \int_0^1 f''(t-0) \cdot t(1-t) dt$$

Верно по лемме из билета 3:  $\alpha = 0, \beta = 1$ .

□



**1.5. Билет 5: NAME****1.6. Билет 6: NAME****1.7. Билет 7: NAME****1.8. Билет 8: NAME****1.9. Билет 9: Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признак сравнения. Следствия.****Теорема 1.4.**

$$f \geq 0 \quad f \in C[a, b)$$

Тогда сходимость  $\int_a^b f(x) dx$  равносильна ограниченности сверху первообразной  $F$ .

**Доказательство.**

$$F(y) := \int_a^y f$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b-} F(c) - F(a), \quad F(a) = 0 \quad (\text{из утверждения выше})$$

$$F(z) = F(y) + \int_y^z f \geq F(y), \quad \text{где } \int_y^z f \geq 0 \text{ при } y < z \implies F(y) \text{ монотонно возрастает.}$$

Итого,  $F(y)$  имеет предел и монотонно возрастает. Для монотонно возрастающих функция существование предела равносильно ограниченности сверху

□

**Следствие.**

$$f, g \in C[a, b) \quad 0 \leq f \leq g$$

$$1. \text{ Если } \int_a^b g \text{ сходится, то } \int_a^b f \text{ сходится.}$$

$$2. \text{ Если } \int_a^b f \text{ расходится, то } \int_a^b g \text{ расходится.}$$

**Доказательство.**

$$G(y) := \int_a^y g, \quad F(y) := \int_a^y f \implies F \leq G$$

$$1. \int_a^b g \text{ сходится} \implies G \text{ ограничена сверху} \implies F \text{ ограничена сверху} \implies \int_a^b f \text{ сходится.}$$

$$2. \text{ От противного. Пусть } \int_a^b g \text{ сходится, тогда и } \int_a^b f \text{ сходится по первому пункту. Противоречие.}$$

□

**Замечание.** 1. Неравенству  $f \leq g$  достаточно выполнения для аргументов, близких к  $b$ .

**Доказательство.**

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Для второго слагаемого  $f \leq g$ , используем следствие. □

2. Вместо  $f \leq g$  можно использовать и  $f = O(g)$

**Доказательство.**

$$\int_a^b Cg = C \int_a^b g - \text{сходится.}$$

□

3. Если  $f \geq 0$ ,  $f \in C[a, +\infty)$  и  $f = O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}})$  при  $\varepsilon > 0$ , то  $\int_a^{+\infty} f$  сходится.

**Доказательство.**

$$f \in O(\frac{1}{x^{1+\varepsilon}}) \implies f \leq M \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} =: g$$

Надо доказать, что  $\int_a^{+\infty} g$  сходится.

$$\int_a^{+\infty} M \cdot \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} = M \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\varepsilon}} - \text{сходится.}$$

□

**Следствие.**

$f, g \geq 0$ ,  $f, g \in C[a, b)$  и  $f \sim g$  при  $x \rightarrow b-$

Тогда  $\int_a^b f$  и  $\int_a^b g$  ведут себя одинаково.

**Доказательство.**

$f \sim g \implies$  найдется такое  $c$ , что  $\frac{g}{2} \leq f \leq 2g$  при  $x > c$

Если  $\int_a^b g$  сходится, то  $f \leq 2g \implies \int_a^b f$  сходится.

Если  $\int_a^b f$  сходится, то  $g \leq 2f \implies \int_a^b g$  сходится.

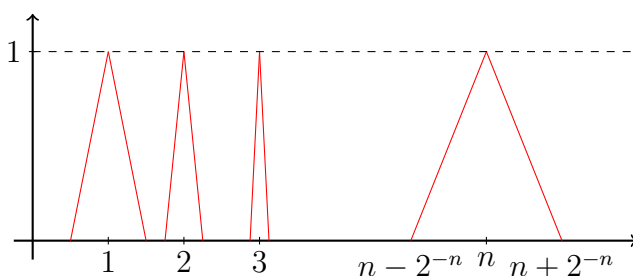
□

**Замечание.**

$f \geq 0$ ,  $f \in C[a, +\infty)$  и  $\int_a^{+\infty} f$  сходится.

Это НЕ значит  $f(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$

Дана функция, изображенная на графике (спасибо за это Герману). Площади треугольников убывают:  $S_1 = \frac{1}{2}$ ,  $S_2 = \frac{1}{4}$ ,  $S_3 = \frac{1}{8}$ , ...,  $S_n = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^{-n} = \frac{1}{2^n}$



## 1.10. Билет 10: Абсолютная сходимость. Признак Дирихле.

**Определение 1.4** (Абсолютная сходимость.).

$$f \in C[a, b)$$

$$\int_a^b f \text{ абсолютно сходится, если } \int_a^b |f| \text{ сходится.}$$

**Теорема 1.5.**

$$\text{Если } \int_a^b f \text{ абсолютно сходится, то } \int_a^b f \text{ сходится.}$$

**Доказательство.**

$$0 \leq f_{\pm} \leq |f|$$

$$\int_a^b f \text{ абсолютно сходится} \implies \int_a^b |f| \text{ сходится} \implies \int_a^b f_{\pm} \text{ сходится}$$

$$\int_a^b f = \int_a^b (f_+ - f_-) = \int_a^b f_+ - \int_a^b f_- \implies \int_a^b f \text{ сходится.}$$

□

**Теорема 1.6** (признак Дирихле).

$$f, g \in C[a, +\infty)$$

$$1. \exists M : \left| \int_a^c f \right| \leq M \text{ при всех } c > a.$$

$$2. g - \text{монотонная функция.}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

$$\text{Тогда } \int_a^{+\infty} fg \text{ сходится.}$$

**Доказательство.**

$$\text{Лишь для } g \in C^1[a, +\infty).$$

$$\text{Пусть } F(y) := \int_a^y f$$

$$\text{По условию } |F| \leq M$$

$$\int_a^c fg = \int_a^c F'g = Fg|_a^c - \int_a^c Fg'$$

Надо доказать, что существует предел при  $c \rightarrow +\infty$

Распишем первое слагаемое как:  $F(c)g(c) - F(a)g(a)$ . Тогда  $F(c)g(c) \rightarrow 0$  при  $c \rightarrow +\infty$ , так как это произведение бесконечно малой на ограниченную.

Надо доказать, что  $\int_a^c Fg'$  сходится. Докажем, что он абсолютно сходится, то есть, что  $\int_a^c |F| \cdot |g'|$  сходится.

$$\int_a^c |F| \cdot |g'| \leq M \int_a^c |g'| = M \left| \int_a^c g' \right| = M |g|_a^c = M |g(c) - g(a)| \leq M |g(a)| \implies \int_a^{+\infty} |F'g| \text{ сходится.}$$

□

## 1.11. Билет 11: NAME

## 2. Метрические и нормированные пространства

### 2.1. Билет 12: Метрические пространства. Примеры. Шары в метрических пространствах.

#### Определение 2.1.

Метрическое пространства - пара  $\langle X, \rho \rangle$ , где  $X$  - множество,  $\rho : X \times X \mapsto \mathbb{R}$  - метрика,  $\rho$  обладает следующими свойствами:

1.  $\rho(x, y) \geq 0$ , и  $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$
2.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3.  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$  (неравенство треугольника,  $\triangle$ )

#### Пример.

Обычная метрика на  $\mathbb{R}$ :  $\langle \mathbb{R}, \rho(x, y) = |x - y| \rangle$ .

#### Пример.

«Метрика лентяя» на произвольном множестве:  $\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$

#### Пример.

Обычная метрика на  $\mathbb{R}^2$  - длина отрезка:  $\rho(\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

#### Пример.

Множество - точки на поверхности сферы, метрика - кратчайшая дуга между точками.

#### Пример.

Манхэттанская метрика на  $\mathbb{R}^2$ :  $\rho(\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ .

#### Пример.

Французкая железнодорожная метрика: Есть центральный объект, от него есть несколько «лучей».

Если  $A$  и  $B$  на одном луче, то  $\rho(A, B) = AB$

Если на разных:  $\rho(A, B) = AP + PB$ , где  $P$  - центральный объект.

#### Доказательство.

При условии что расстояния между объектами на одном луче являются метрикой, докажем что ФЖМ - метрика:

Если  $A$  и  $B$  находятся на одном луче, всё тривиально следует из того, что расстояние на луче - метрика.

Пусть  $A, B$  - на разных лучах  $\implies A \neq B, A, B \neq P$ .

$$\rho(A, B) = AP + PB > 0 \iff AP, PB > 0.$$

$$\rho(A, B) = AP + PB = PB + AP = BP + PA = \rho(B, A).$$

Пусть  $C$  лежит на одной ветке с  $A$ :

$$\rho(A, C) + \rho(C, B) = AC + (CP + PB) = (AC + CP) + PB \geq AP + PB = \rho(A, B).$$

Пусть  $C$  лежит на собственной ветке:

$$\rho(A, C) + \rho(C, B) = (AP + PC) + (CP + PB) \geq AP + PB = \rho(A, B). \quad \square$$

### Определение 2.2.

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство.

Открытым шаром радиуса  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  с центром в  $a \in X$  называется  $B_r(a) = \{x \in X \mid \rho(a, x) < r\}$ .

Замкнутым шаром радиуса  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  с центром в  $a \in X$  называется  $\overline{B}_r(a) = \{x \in X \mid \rho(a, x) \leq r\}$ .

### Свойства.

$$B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(a) = B_{\min\{r_1, r_2\}}(a)$$

Если  $a \neq b$ , то  $\exists r > 0 \quad B_r(a) \cap B_r(b) = \emptyset$ .

### Доказательство.

Возьмём  $r = \frac{\rho(a, b)}{2}$ .

Пусть  $x \in B_r(a) \cap B_r(b)$ .

Тогда  $\rho(a, x) < \frac{\rho(a, b)}{2}$  и  $\rho(x, b) < \frac{\rho(a, b)}{2}$ .

Но тогда  $\rho(a, x) + \rho(x, b) < \rho(a, b)$ , противоречие с  $\Delta$ .  $\square$

Аналогичная пара свойств есть и у  $\overline{B}$ .

## 2.2. Билет 13: Открытые множества: определение и свойства.

### Определение 2.3.

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство,  $A \subset X$ .

Точка  $a \in A$  называется внутренней если  $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A$ .

Множество внутренних точек называется внутренностью множества, и обозначается  $\text{Int } A$ .

### Определение 2.4.

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство,  $A \subset X$ .

$A$  называется открытым, если все его точки внутренние.

### Свойства.

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство.

1.  $\emptyset, X$  - открытые множества.
2. Объединение любого количества открытых множеств открыто

### Доказательство.

Пусть  $\forall \alpha \in I \quad A_\alpha$  - открытое множество.  $A := \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ . Возьмём точку  $a$ ,  $\exists \beta \in I \quad a \in A_\beta$ .

Так-как  $A_\beta$  открытое,  $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A_\beta \subset A$ .  $\square$

## 3. Пересечение конечного количества открытых множеств открыто

*Доказательство.*Пусть  $I = [1; n]$ ,  $\forall k \in I \quad a \in A_k$ ,  $A_k$  - открытое.Тогда  $\forall k \in I \quad \exists r_k > 0 \quad B_{r_k}(a) \subset A_k$ .Пусть  $r = \min_k r_k > 0$ .Тогда  $\forall k \in I \quad B_r(a) \subset B_{r_k}(a) \subset A_k \implies B_r(a) \subset \bigcap_{k=1}^n A_k$ . □4.  $\forall a \in X \quad \forall r \in \mathbb{R} \quad B_r(a)$  - открытое множество.*Доказательство.*Пусть  $x \in B_r(a)$ ,  $\tilde{r} = r - \rho(x, a)$ .Покажем что  $B_{\tilde{r}}(x) \subset B_r(a)$ :

$$\begin{aligned}
y \in B_{\tilde{r}}(x) &\implies \rho(y, x) < \tilde{r} \\
&\implies \rho(y, x) < r - \rho(x, a) \\
&\implies \rho(y, x) + \rho(x, a) < r \\
&\stackrel{\triangle}{\implies} \rho(y, a) < r \\
&\implies y \in B_r(a)
\end{aligned}$$
□

**2.3. Билет 14: Внутренние точки и внутренность множества. Свойства.***Определение 2.5* (повтор).Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство,  $A \subset X$ .Точка  $a \in A$  называется внутренней если  $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset A$ .Множество внутренних точек называется внутренностью множества, и обозначается  $\text{Int } A$ .*Свойства.*Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство,  $A \subset X$ .

1.  $\text{Int } A \subset A$
2.  $\text{Int } A$  - объединение всех открытых множеств содержащихся в  $A$ .

*Доказательство.*Пусть  $G = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ , где  $U_\alpha \subset A$  - открытое. $G \subset \text{Int } A$ :

$$\begin{aligned}
x \in G &\implies \exists \alpha \in I \quad x \in U_\alpha \\
&\implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset U_\alpha \subset A \\
&\implies x \in \text{Int } A
\end{aligned}$$

$\text{Int } A \subset G$ :  $x \in \text{Int } A \implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset A$ .  $B_r(x)$  - открытое множество, значит  $\exists \alpha \in I \quad U_\alpha = B_r(x) \implies x \in G$ . □

3.  $\text{Int } A$  - открытое множество

*Доказательство.*

$A$  - объединение открытых множеств, значит открыто. □

4.  $\text{Int } A = A \iff A$  - открыто

*Доказательство.*

Необходимость ( $\implies$ ):  $\text{Int } A$  открыто.

Достаточность ( $\impliedby$ ):  $A$  открыто  $\implies$  все точки внутренние  $\implies A = \text{Int } A$ . □

5.  $A \subset B \implies \text{Int } A \subset \text{Int } B$

6.  $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$

*Доказательство.*

В сторону  $\subset$ :

$$\left. \begin{array}{l} A \cap B \subset A \implies \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int } A \\ A \cap B \subset B \implies \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int } B \end{array} \right\} \implies \text{Int}(A \cap B) \subset \text{Int } A \cap \text{Int } B$$

В сторону  $\supset$ :

$$\begin{aligned} x \in \text{Int } A \cap \text{Int } B &\implies \left\{ \begin{array}{l} x \in \text{Int } A \implies \exists r_1 : B_{r_1}(x) \subset A \\ x \in \text{Int } B \implies \exists r_2 : B_{r_2}(x) \subset B \end{array} \right\} \implies B_{\min\{r_1, r_2\}}(x) \subset A \cap B \implies \\ &\implies x \in \text{Int}(A \cap B) \end{aligned}$$

□

7.  $\text{Int } \text{Int } A = \text{Int } A$

*Доказательство.*

Заметим, что  $\text{Int } A$  - открытое по 3, дальше по 4 видно равенство. □

## 2.4. Билет 15: Замкнутые множества: определение и свойства. Замыкание множества, связь со внутренностью.

### Определение 2.6.

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство,  $A \subset X$ .

$A$  называется замкнутым, если  $X \setminus A$  - открыто.

### Свойства.

1.  $\emptyset, X$  - замкнуты.
2. Пересечение любого количества замкнутых множеств замкнуто

*Доказательство.*

$$X \setminus \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X \setminus A_\alpha)$$

□

Так как  $\forall \alpha \quad X \setminus A_\alpha$  - открытое, то  $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$  - открытое, значит  $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$  - замкнутое.

### 3. Объединение конечного количества замкнутых множеств замкнуто

*Доказательство.*

$$X \setminus \bigcup_{k=1}^n A_k = \bigcap_{k=1}^n (X \setminus A_k)$$

□

$X \setminus A_k$  открыто, значит их конечное пересечение открыто, значит  $\bigcup_{k=1}^n A_k$  - замкнуто.

### 4. $\forall a \in X \quad \forall r > 0 \quad \overline{B}_r(a)$ - замкнутое множество.

*Доказательство.*

Покажем что  $X \setminus \overline{B}_r(a) = \{x \in X \mid \rho(x, a) > r\}$  - открыто.

Пусть  $x \in X \setminus \overline{B}_r(a)$ .  $\tilde{r} = \rho(x, a) - r$ . Тогда докажем что  $B_{\tilde{r}}(x) \cap \overline{B}_r(a) = \emptyset$ :

Пусть  $y \in B_{\tilde{r}}(x) \cap \overline{B}_r(a)$ , тогда  $\rho(x, y) < \tilde{r}$ ,  $\rho(y, a) < r$ .

$$\rho(x, a) \stackrel{\Delta}{\leq} \rho(x, y) + \rho(y, a) < \tilde{r} + r = \rho(x, a).$$

Получили противоречие, значит  $B_{\tilde{r}}(x) \cap \overline{B}_r(a) = \emptyset \implies B_{\tilde{r}}(x) \subset X \setminus \overline{B}_r(a)$ , значит  $X \setminus \overline{B}_r(a)$  - открытое. □

### Определение 2.7.

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство.

Замыкание множества  $A \subset X$  - пересечение всех замкнутых множеств, содержащих  $A$ . Обозначается  $\text{Cl } A$  или  $\overline{A}$ .

### Теорема 2.1.

$$\text{Cl } A = X \setminus \text{Int}(X \setminus A).$$

*Доказательство.*

Будем доказывать в виде  $X \setminus \text{Cl } A = \text{Int}(X \setminus A)$ :

Знаем, что  $\text{Int}(X \setminus A) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$  по всем  $U_{\alpha}$  таким, что  $U_{\alpha} \subset (X \setminus A)$  и  $U_{\alpha}$  открыто.

Пусть  $C$  - замкнутое множество, такое, что  $A \subset C$ . Тогда  $X \setminus C$  - открытое, и  $(X \setminus A) \subset (X \setminus C) \implies \exists \alpha \quad U_{\alpha} = X \setminus C$ .

Аналогично в другую сторону -  $\forall \alpha \quad X \setminus U_{\alpha}$  - замкнутое надмножество  $A$ .

Пусть  $C_{\alpha} = X \setminus U_{\alpha}$ .

$$X \setminus \text{Cl } A = X \setminus \bigcap_{\alpha} C_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (X \setminus C_{\alpha}) = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = \text{Int}(X \setminus A).$$

□



## 2.5. Билет 16: Свойства замыкания. Предельные точки. Связь с замыканием множества.

*Свойства.*

1.  $A \subset \text{Cl } A$
2.  $\text{Cl } A$  - замкнутое множество

*Доказательство.*

По определению,  $\text{Cl } A$  - пересечение замкнутых множеств. □

3.  $\text{Cl } A = A \iff A$  замкнуто

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} A = \text{Cl } A &\iff X \setminus A = X \setminus \text{Cl } A \\ &\iff X \setminus A = \text{Int}(X \setminus A) \\ &\iff X \setminus A \text{ открыто} \\ &\iff A \text{ замкнуто} \end{aligned} \quad \square$$

4.  $A \subset B \implies \text{Cl } A \subset \text{Cl } B$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} A \subset B &\implies (X \setminus B) \subset (X \setminus A) \\ &\implies \text{Int}(X \setminus B) \subset \text{Int}(X \setminus A) \\ &\implies X \setminus \text{Int}(X \setminus A) \subset X \setminus \text{Int}(X \setminus B) \\ &\implies \text{Cl } A \subset \text{Cl } B \end{aligned} \quad \square$$

5.  $\text{Cl}(A \cup B) = \text{Cl } A \cup \text{Cl } B$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \text{Cl}(A \cup B) &= X \setminus \text{Int}(X \setminus (A \cup B)) \\ &= X \setminus \text{Int}((X \setminus A) \cap (X \setminus B)) \\ &= X \setminus (\text{Int}(X \setminus A) \cap \text{Int}(X \setminus B)) \\ &= (X \setminus \text{Int}(X \setminus A)) \cup (X \setminus \text{Int}(X \setminus B)) \\ &= \text{Cl } A \cup \text{Cl } B \end{aligned} \quad \square$$

6.  $\text{Cl}(\text{Cl } A) = \text{Cl } A$

*Доказательство.*

$\text{Cl } A$  замкнуто по свойству 2, равенство следует из свойства 3. □

**Теорема 2.2.**

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство,  $A \subset X$ .

$$a \in \text{Cl } A \iff \forall r > 0 \quad B_r(a) \cap A \neq \emptyset.$$

**Доказательство.**

Необходимость ( $\implies$ ):

Предположим что  $\exists r > 0 \quad B_r(a) \cap A = \emptyset$ .

Тогда  $a \notin A$  и  $B_r(a) \subset X \setminus A$ , значит  $a \in \text{Int}(X \setminus A) \implies a \notin X \setminus \text{Int}(X \setminus A) \implies a \notin \text{Cl } A$ .

Достаточность ( $\impliedby$ ):

Пусть  $a \notin \text{Cl } A$ , тогда  $\exists F$  - замкнутое надмножество  $A$ , такое, что  $a \notin F \implies a \in X \setminus F$ .

При этом,  $X \setminus F$  открыто.

Тогда  $\exists r > 0 \quad B_r(a) \subset X \setminus F \subset X \setminus A$ .

Но тогда  $B_r(a) \cap A = \emptyset$ . □

**Следствие.**

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство,  $A \subset X$ , а  $U \subset X$  - открытое множество. При этом  $A \cap U = \emptyset$ .

Тогда  $\text{Cl } A \cap U = \emptyset$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} x \in \text{Cl } A \cap U &\implies x \in U \\ &\implies \exists r > 0 \quad B_r(x) \subset U \\ &\implies B_r(x) \cap A \subset U \cap A = \emptyset \\ &\implies x \notin \text{Cl } A \\ &\implies x \notin \text{Cl } A \cap U \end{aligned}$$

Получили противоречие, значит таких  $x$  не существует. □

**Определение 2.8.**

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство.

Проколотой окрестностью радиуса  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  с центром в  $a \in X$  называется  $\mathring{B}_r(a) := B_r(a) \setminus \{a\} = \{x \in X \mid 0 < \rho(x, a) < r\}$ .

**Определение 2.9.**

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство,  $A \subset X$ .

$a \in A$  называется предельной точкой, если  $\forall r > 0 \quad \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset$ .

Множества предельных точек множества  $A$  обозначается  $A'$ .

**Свойства.**

$$1. \text{Cl } A = A \cup A'$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}
a \in \text{Cl } A &\iff \forall r > 0 \quad B_r(a) \cap A \neq \emptyset \\
&\iff \begin{cases} a \in A \\ \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a \in A \\ a \in A' \end{cases}
\end{aligned}$$

□

$$2. A \subset B \implies A' \subset B'$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
a \in A' &\implies \forall r \quad \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \\
&\implies \mathring{B}_r(a) \cap B \neq \emptyset \\
&\implies a \in B'
\end{aligned}$$

□

$$3. (A \cup B)' = A' \cup B'$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
A \subset A \cup B &\implies A' \subset (A \cup B)' \\
B \subset A \cup B &\implies B' \subset (A \cup B)' \\
&\implies A' \cup B' \subset (A \cup B)'
\end{aligned}$$

Покажем другое включение: возьмём  $x \in (A \cup B)'$ .

Пусть  $x \notin A'$ : Тогда  $\exists R > 0 \quad \mathring{B}_R(x) \cap A = \emptyset$ .

Заметим, что  $\forall 0 < r \leq R \quad \mathring{B}_r(x) \cap A \subset B_R(x) \cap A = \emptyset$ , значит  $\forall r > 0 \quad \exists 0 < R_r < r \quad B_{R_r}(x) \cap A = \emptyset$ .

Так-как  $\mathring{B}_{R_r}(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ , значит  $\mathring{B}_{R_r}(x) \cap B \neq \emptyset$ . Тогда

$$\forall r > 0 \quad \mathring{B}_r(x) \cap B \supset \mathring{B}_{R_r}(x) \cap B \neq \emptyset.$$

Значит,  $x \in B'$

□

$$4. A' \subset A \iff A - \text{замкнутое}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
A - \text{замкнутое} &\iff A = \text{Cl } A \\
&\iff A = A \cup A' \\
&\iff A' \subset A
\end{aligned}$$

□

### Теорема 2.3.

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство,  $A \subset X$ .

$$a \in A' \iff \forall r > 0 \quad B_r(a) \cap A \text{ содержит бесконечно много точек.}$$

**Доказательство.**

Необходимость ( $\Rightarrow$ ):

Знаем, что  $\mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset$ , возьмём точку  $x_1 \in \mathring{B}_r(a) \cap A$ , возьмём  $r_2 = \rho(x_1, a)$ , знаем, что  $\mathring{B}_{r_2}(a) \cap A \neq \emptyset$ , можем взять точку оттуда, и вообще повторять бесконечное число раз.

Достаточность ( $\Leftarrow$ ):  $B_r(a) \cap A$  содержит бесконечно много точек  $\Rightarrow \mathring{B}_r(a) \cap A$  содержит бесконечно много точек  $\Rightarrow \mathring{B}_r(a) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow a \in A'$ .  $\square$

## 2.6. Билет 17: Индуцированная метрика. Открытые и замкнутые множества в пространстве и в подпространстве.

**Определение 2.10.**

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство,  $Y \subset X$ .

Тогда пара  $\langle Y, \rho|_{Y \times Y} \rangle$  называется метрическим подпространством  $X$ .

Далее, при разговоре о подпространствах обычно будет указываться только множество, а метрика использоваться та-же что и для основного пространства.

**Теорема 2.4.**

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство,  $Y$  - его подпространство.

$A \subset Y$  открыто в  $Y$  тогда и только тогда, когда  $\exists G$  открытое в  $X$ , такое, что  $A = G \cap Y$

**Доказательство.**

Необходимость ( $\Rightarrow$ ):

$$\begin{aligned} A \text{ - открыто в } Y &\Rightarrow \forall a \in A \quad \exists r_a > 0 \quad B_{r_a}^Y(a) \subset A \\ &\Rightarrow A = \bigcup_{a \in A} B_{r(a)}^Y(A) \subset \bigcup_{a \in A} B_{r(a)}^X(a) =: G \end{aligned}$$

$G$  - подходящее множество - оно открыто как объединение открытых, покажем что  $A = G \cap Y$ :

$$B_r^Y(x) = B_r^X(x) \cap Y.$$

$$G \cap Y = Y \cap \bigcup_{a \in A} B_{r(a)}^X(a) = \bigcup_{a \in A} B_{r(a)}^Y(a) = A.$$

Достаточность ( $\Leftarrow$ ):

Пусть  $A = G \cap Y$ . Возьмём  $a \in A$ .

$$\begin{aligned} G \text{ открыто в } X &\Rightarrow \exists r > 0 \quad B_r^X(a) \subset G \\ &\Rightarrow B_r^X(a) \cap Y \subset G \cap Y \\ &\Rightarrow B_r^Y(a) \subset A \\ &\Rightarrow A \text{ открыто в } Y \end{aligned} \quad \square$$

**Теорема 2.5.**

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство,  $Y$  - его подпространство.

$A \subset Y$  замкнуто тогда и только тогда, когда  $\exists F$  замкнутое в  $X$ , такое, что  $A = F \cap Y$ .

**Доказательство.**

$F := X \setminus G$ , где  $G$  - открытое в  $X$  такое, что  $G \cap Y = Y \setminus A$  существование которого эквивалентно открытости  $Y \setminus A \iff$  замкнутости  $A$ .

$$\begin{aligned} F \cap Y &= (X \setminus G) \cap Y \\ &= (X \cap Y) \setminus G \\ &= Y \setminus G \\ &= Y \setminus (G \cap Y) \\ &= Y \setminus (Y \setminus A) \\ &= A \end{aligned}$$

□

## 2.7. Билет 18: Скалярное произведение и норма. Свойства и примеры. Неравенство Коши–Буняковского.

**Определение 2.11.**

Нормированным пространством над  $\mathbb{R}$  называется пара  $\langle X, \|\cdot\| \rangle$ , где  $X$  - линейное пространство над  $\mathbb{R}$  (далее одно и то же обозначение используется для линейного пространства и его множества векторов), а  $\|\cdot\| : X \mapsto \mathbb{R}$  - норма, обладающая следующими свойствами  $\forall x, y \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$  .

1.  $\|x\| \geq 0$  и  $\|x\| = 0 \iff x = \vec{0}$
2.  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  ( $\Delta$ )

**Пример.**

$$X = \mathbb{R}, \|x\| = |x|$$

**Пример.**

На  $X = \mathbb{R}^d$  можно задать бесконечно много норм:

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sum_{i=1}^d |x_i|. \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^d |x_i|^2}. \\ \|x\|_n &= \sqrt[n]{\sum_{i=1}^d |x_i|^n}. \\ \|x\|_\infty &= \max_{i \in \{1, \dots, d\}} |x_i|. \end{aligned}$$

**Пример.**

$$X = C[a, b], \|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

**Доказательство.**

Докажем неравенство треугольника:

$$\begin{aligned}
 \|f + g\| &= \max_{x \in [a, b]} |f(x) + g(x)| \\
 &= |f(x_0) + g(x_0)| \\
 &\leq |f(x_0)| + |g(x_0)| \\
 &\leq \max_{x \in [a, b]} |f(x)| + \max_{x \in [a, b]} |g(x)| \\
 &= \|f\| + \|g\|
 \end{aligned}$$

□

**Определение 2.12.**

Пусть  $X$  - линейное пространство, тогда функция  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \mapsto \mathbb{R}$  называется скалярным произведением, если удовлетворяет следующим свойствам  $\forall x, y, z \in X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$  :

1.  $\langle x, x \rangle \geq 0$  и  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \vec{0}$ .
2.  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
3.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
4.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

**Замечание.**

Аналогичные определения можно дать над  $\mathbb{C}$ , тогда надо ещё потребовать  $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$ , и третий пункт примет вид  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ .

**Пример.**

$$X = \mathbb{R}^d, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$$

**Пример.**

Пусть  $w_1, \dots, w_d > 0$ , тогда

$$X = \mathbb{R}^d, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d w_i x_i y_i$$

**Пример.**

$$X = C[a, b], \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

**Свойства.**

1.  $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$  и  $\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle$
2. Неравенство Коши-Буняковского:  $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$

**Доказательство.**

Пусть  $t \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}
 \langle x + ty, x + ty \rangle &\geq 0. \\
 \langle x + ty, x + ty \rangle &= \langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle.
 \end{aligned}$$

Это квадратное уравнение имеет корень только если  $x + ty = 0$ , значит не более одного корня. Его дискриминант  $\leq 0$ :

$$(2 \langle x, y \rangle)^2 - 4 \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \leq 0 \implies \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle.$$

□

3.  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  - норма

*Доказательство.*

(а) Первое свойство переносится напрямую, из аналогичных свойств для  $\langle x, x \rangle$  и  $\sqrt{\cdot}$ .

(b)  $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = \lambda \|x\|$

(с)

$$\begin{aligned} \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| &\iff \sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle} \\ &\stackrel{.2}{\iff} \langle x + y, x + y \rangle \leq \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\ &\iff \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\iff \langle x, y \rangle \leq \sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle} \\ &\iff \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

Последнее неравенство - неравенство Коши-Буняковского. □

*Свойства.*

1.  $\rho(x, y) = \|x - y\|$  - метрика

*Доказательство.*

(а) Первое свойство переходит прямо

(b)  $\rho(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |(-1)|\|x - y\| = \rho(x, y)$

(с)  $\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$  ( $\Delta$  для нормы).

□

2.  $|||x| - |y||| \leq \|x - y\|$

*Доказательство.*

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \stackrel{\Delta}{\leq} \|x - y\| + \|y\|.$$

$$\|y\| = \|(y - x) + x\| \stackrel{\Delta}{\leq} \|y - x\| + \|x\| = \|x - y\| + \|x\|.$$

$$\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\| \implies \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

$$\|y\| \leq \|x - y\| + \|x\| \implies \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|.$$

□

## 2.8. Билет 19: Предел последовательности в метрическом пространстве. Определение и основные свойства.

### Определение 2.13.

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство,  $x_n \in X$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon.$$

### Определение 2.14.

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство,  $E \subset X$ .

$E$  называется ограниченным если  $\exists r > 0 \quad \exists a \in X \quad E \subset B_r(a)$ .

### Свойства.

1. Предел единственен

#### Доказательство.

Пусть  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ ,  $a \neq b$ .

Возьмём  $\varepsilon = \frac{\rho(a,b)}{2}$ ,  $a \neq b \implies \varepsilon > 0$ , возьмём  $N = \max\{N_a, N_b\}$ , где  $N_a, N_b$  -  $N$  из соответствующих определений предела при подстановке  $\varepsilon$ .

Тогда,  $\rho(x_N, a) < \varepsilon$  и  $\rho(x_N, b) < \varepsilon$ .

Но тогда  $\rho(a, b) \stackrel{\Delta}{\leq} \rho(a, x_N) + \rho(x_N, b) < 2\varepsilon = \rho(a, b)$ . Противоречие, значит предел единственен.  $\square$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0$

#### Доказательство.

Определения посимвольно совпадают.  $\square$

3. Если последовательность имеет предел, она ограничена

#### Доказательство.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, a) = 0 \\ &\implies \rho(x_n, a) - \text{ограниченная последовательность вещественных чисел} \\ &\implies \exists R > 0 \quad \rho(x_n, a) < R \\ &\implies \{x_n\} \subset B_R(a) \end{aligned} \quad \square$$

4. Если  $a$  - предельная точка множества  $A$ , то можно выбрать последовательность  $x_n \in A$ , такую что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , и  $\rho(x_n, a)$  строго монотонно убывает.

#### Доказательство.

По определению предельной точки,  $\forall r > 0 \quad \dot{B}_r(a) \neq \emptyset$ .

Пусть  $r_1 = 1$ ,  $r_n = \min\{\frac{1}{n}, \rho(x_{n-1}, a)\}$ ,  $x_n \in \dot{B}_{r_n}(a)$  - такой  $x_n$  всегда можно выбрать, так как окрестность непуста. Тогда  $\rho(x_n, a) < r \implies \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \implies \rho(x_n, a) \rightarrow 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , и при этом  $\rho(x_n, a) < r_n < \rho(x_{n-1}, a)$ .  $\square$



5.  $A \subset X$ ,  $x_n \in A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \implies a \in A \cup A' = \text{Cl } A$ .

*Доказательство.*

Если  $a \notin A$ :

Предположим что  $a \notin A' \implies \exists \varepsilon > 0 \quad \mathring{B}_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset \implies \nexists x \in A \quad 0 < \rho(x, a) < \varepsilon$ .

Но, если подставить этот  $\varepsilon$  в определение предела, то получим что  $\exists N \quad \rho(x_N, a) < \varepsilon$  и  $x_N \in A \implies x_N \neq a \implies \rho(x_N, a) > 0$ . Противоречие, значит  $a \in A'$ .  $\square$

## 2.9. Билет 20: Арифметические свойства пределов последовательности векторов. Покоординатная сходимость.

**Теорема 2.6.**

Пусть  $\langle X, \|\cdot\| \rangle$  - нормированное пространство,  $x_n, y_n, a, b \in X$ ,  $\lambda_n, \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $x_n \rightarrow a$ ,  $y_n \rightarrow b$ ,  $\lambda_n \rightarrow \lambda$ .

Тогда:

$$\|x_n - a\| \rightarrow 0.$$

$$\|y_n - b\| \rightarrow 0.$$

1.  $x_n + y_n \rightarrow a + b$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|(x_n + y_n) - (a + b)\| \\ &= \|(x_n - a) + (y_n - b)\| \\ &\triangleq \|x_n - a\| + \|y_n - b\| \\ &\rightarrow 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$\square$

2.  $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda a$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\lambda_n x_n - \lambda a\| \\ &= \|\lambda_n x_n - \lambda_n a + \lambda_n a - \lambda a\| \\ &= \|\lambda_n(x_n - a) + (\lambda_n - \lambda)a\| \\ &\leq \|\lambda_n(x_n - a)\| + \|(\lambda_n - \lambda)a\| \\ &= |\lambda_n| \|x_n - a\| + |(\lambda_n - \lambda)| \|a\| \\ &\rightarrow |\lambda| \cdot 0 + 0 \cdot \|a\| = 0 \end{aligned}$$

$\square$

3.  $x_n - y_n \rightarrow a - b$

*Доказательство.*

$$-y_n = -1 \cdot y_n \implies -1 \cdot b = -b, \quad x_n + (-y_n) \rightarrow a + (-b) = a - b.$$

$\square$

4.  $\|x_n\| \rightarrow \|a\|$

*Доказательство.*

$$0 \leq \|x\| - \|a\| \leq \|x - a\| \rightarrow 0.$$

□

5. Если задано скалярное произведение и  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , то  $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle a, b \rangle$ .

*Доказательство.*

Заметим следующий факт:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) &= \frac{1}{4} (\langle x + y, x + y \rangle - \langle x - y, x - y \rangle) \\ &= \frac{1}{4} (\langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle - (\langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle)) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 4\langle x, y \rangle \\ &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Теперь:

$$\begin{aligned} \langle x_n, y_n \rangle - \langle a, b \rangle &= \langle x_n, y_n \rangle - \langle x_n, b \rangle + \langle x_n, b \rangle - \langle a, b \rangle \\ &= \langle x_n, y_n - b \rangle - \langle x_n - a, y_n \rangle \\ &= \frac{1}{4} (\|x_n + y_n - b\|^2 - \|x_n - y_n + b\|^2 - \|x_n - a + y_n\|^2 + \|x_n - a - y_n\|^2) \\ &\rightarrow \frac{1}{4} (\|a\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2 + \|b\|^2) = 0 \end{aligned}$$

□

### Определение 2.15.

Пусть  $x_n \in \mathbb{R}^d$ ,  $x_n = (x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(d)})$ .

Тогда  $x_n$  покоординатно сходится к  $x_0$ , если

$$\forall k \in [1, d] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(k)} = x_0^{(k)}.$$

### Теорема 2.7.

В  $\mathbb{R}^d$  с евклидовой нормой сходимость по норме эквивалентна координатной.

*Доказательство.*

Необходимость (норма  $\implies$  коорд):

$$\forall k \in [1, d] \quad 0 \leq (x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2 \leq \sum_{j=1}^d (x_n^{(j)} - x_0^{(j)})^2 = \|x_n - x_0\|^2 \rightarrow 0.$$

Достаточность (коорд  $\implies$  норма)

$$0 \leq \|x - x_0\|^2 = \sum_{k=1}^d (x_n^{(k)} - x_0^{(k)})^2 \rightarrow 0.$$

□

## 2.10. Билет 21: Фундаментальные последовательности. Свойства. Полнота. Полнота $\mathbb{R}^d$

Тут что-то странное с порядком билетов, рекомендуется сначала прочитать билет 22

### Определение 2.16.

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство.

Последовательность  $x_n$  называется фундаментальной

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

### Лемма.

Фундаментальная последовательность ограничена

### Доказательство.

Подставим  $\varepsilon = 1$ , получим  $\forall n \geq N \quad \rho(x_N, x_n) < 1 \implies x_n \in B_1(N)$ , пусть

$$r = \max\{1, \max_{k < N} \{\rho(x_N, x_k)\}\}.$$

Тогда  $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in B_r(x_N)$ . □

**TODO:** Это все свойства фундаментальной последовательности?

### Определение 2.17.

Метрическое пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность имеет предел.

### Лемма.

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство.

Пусть  $x_n \in X$  - фундаментальна, а  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ . Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

### Доказательство.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq M \quad \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon.$$

$$x_n - \text{фундаментальна} \implies \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Пусть  $L = \max\{N, n_M\}$ .

Тогда  $\forall n > L \quad \exists k \quad \rho(x_n, a) < \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < 2\varepsilon$ .

Значит,  $\rho(x_n, a) \rightarrow 0 \implies x_n \rightarrow a$ . □

### Следствие.

1.  $\mathbb{R}^d$  - полное

### Доказательство.

Пусть  $x_n \in \mathbb{R}^d$  - фундаментальная последовательность.

Тогда  $x_n$  ограничена  $\implies \exists x_{n_k}$  - сходящаяся к точке из  $\mathbb{R}^d$  подпоследовательность (Больцано-Вейерштрасс из следующего билета), пусть  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ .

Тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}^d$ . □

2.  $K$  - компакт в  $\langle X, \rho \rangle \implies \langle K, \rho \rangle$  - полное.

*Доказательство.*

$K$  - компакт,  $x_n \in K$  - фундаментальна.

$$\exists x_{n_k} \in K \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a \in K \implies \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in K.$$

□

## 2.11. Билет 22: Покрывтия. Компактность. Компактность в пространстве и в подпространстве. Простейшие свойства компактных множеств.

### Определение 2.18.

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство.

Семейство множеств  $U_\alpha \subset X$  называется открытым покрытием множества  $A$  (покрытием  $A$  открытыми множествами), если

1.  $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$
2.  $\forall \alpha \in I \quad U_\alpha$  - открытое.

### Определение 2.19.

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство.

$K \subset X$  называется компактом, если из любого открытого покрытия можно выбрать конечное открытое покрытие.

### Теорема 2.8.

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство,  $Y \subset X$  - подпространство.

Тогда компактность  $K \subset Y$  в  $Y$  и в  $X$  равносильны.

*Доказательство.*

$Y \implies X$ :

Пусть  $G_\alpha \subset X$  - открытое покрытие  $K$  в  $X$ .

Тогда  $U_\alpha = G_\alpha \cap Y$  - открытое покрытие  $K$  в  $Y$ .

Можем выбрать конечное  $U_{\alpha_k}$ .

$$U_{\alpha_k} \subset G_{\alpha_k} \implies G_{\alpha_k} - \text{конечное открытое покрытие.}$$

$X \implies Y$ :

Пусть  $U_\alpha \subset Y$  - открытое покрытие  $K$  в  $Y$ .

Тогда  $\exists G_\alpha$  открытое в  $X \quad U_\alpha = G_\alpha \cap Y$ .

$$U_\alpha \subset G_\alpha \implies G_\alpha - \text{открытое покрытие } K \text{ в } X.$$

Значит, можем выбрать конечное  $G_{\alpha_k}$ . Тогда

$$\bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k} = \bigcup_{k=1}^n (G_{\alpha_k} \cap Y) = Y \cap \bigcup_{k=1}^n G_{\alpha_k} \supset Y \cap K = K.$$

Значит,  $U_{\alpha_k}$  - конечное покрытие  $K$  в  $Y$ .

□

### Теорема 2.9.

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство,  $K$  - компакт. Тогда

1.  $K$  - замкнуто

*Доказательство.*

Возьмём  $a \in X \setminus K$ .

Заметим, что  $\forall x \in K \quad B_{\frac{\rho(x,a)}{2}} \cap B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x) = \emptyset$ .

Возьмём открытое покрытие  $K$ :  $K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\frac{\rho(x,a)}{2}}(x)$ .

Выберем конечное:  $K \subset \bigcup_{k=1}^n B_{\frac{\rho(a,x_k)}{2}}(x_k)$ .

Тогда, при  $r := \min_k \{\frac{\rho(x_k,a)}{2}\}$ ,  $B_r(a) \cap K = \emptyset \implies B_r(a) \subset X \setminus K \implies a \in \text{Int}(X \setminus K) \implies X \setminus K$  открыто  $\implies K$  замкнуто.  $\square$

2.  $K$  - ограничено

*Доказательство.*

Возьмём  $a \in K$ .

Тогда  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a)$  - открытое покрытие.

Выберем конечное:  $K \subset \bigcup_{k=1}^m B_{n_k}(a) = B_r(a)$ ,  $r := \max_k \{n_k\}$ .  $\square$

*Следствие.*

Если  $K$  - компакт и  $\tilde{K} \subset K$  - замкнуто, то  $\tilde{K}$  - компакт.

*Доказательство.*

Пусть  $U_{\alpha}$  - открытое покрытие  $\tilde{K}$ .

Тогда, если добавить к нему  $X \setminus \tilde{K}$  (которое открыто так-как  $\tilde{K}$  замкнуто), получится открытое покрытие  $K$ . Выберем конечное.

$$\bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k} \cup (X \setminus \tilde{K}) \supset K \supset \tilde{K} \implies \bigcup_{k=1}^n U_{\alpha_k} \supset \tilde{K} \quad \square.$$

## 2.12. Билет 23: Теорема о пересечении семейства компактов. Следствие о вложенных компактах.

**Теорема 2.10.**

Пусть  $K_{\alpha}$  - семейство компактов, и для любого конечного набора компактов пересечение непусто.

Тогда  $\bigcap_{\alpha \in I} K_{\alpha} \neq \emptyset$ .

*Доказательство.*

Предположим  $\bigcap_{\alpha \in I} K_{\alpha} = \emptyset$ .

Тогда  $\exists \alpha_0 \in I \quad K_{\alpha_0} \subset X \setminus \bigcap_{\alpha \in I, \alpha \neq \alpha_0} K_{\alpha} = \bigcup_{\alpha \in I, \alpha \neq \alpha_0} (X \setminus K_{\alpha})$  - получилось открытое покрытие.

Выберем конечное:  $K_{\alpha_0} \subset \bigcup_{k=1}^n (X \setminus K_{\alpha_k}) = X \setminus \bigcap_{k=1}^n K_{\alpha_k}$ .

Но тогда  $\bigcap_{k=0}^n K_{\alpha_k} = \emptyset$ , противоречие.  $\square$

**Следствие.**

Пусть  $K_1 \supset K_2 \supset K_3, \dots$  - непустые компакты.

Тогда  $\bigcap_{k=1}^{\infty} K_k \neq \emptyset$ .

**Доказательство.**

Пересечение конечного числа компактов - компакт с максимальным номером  $\neq \emptyset$ . □

## 2.13. Билет 24: Секвенциальная компактность. Компактность и предельные точки. Секвенциальная компактность компакта.

**Определение 2.20.**

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство.

$K \subset X$  называется секвенциально компактным, если из любой последовательности точек из  $K$  можно выбрать подпоследовательность сходящуюся к точке из  $K$ .

**Теорема 2.11.**

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство,  $K \subset X$  секвенциально компактно.

Тогда всякое бесконечное множество точек из  $K$  имеет хотя-бы одну предельную точку в  $K$ .

**Доказательство.**

Выберем последовательность  $x_n$  из этого подмножества,  $x_n \in K$ , значит можем выбрать сходящуюся подпоследовательность, а сходится она может только к предельной точке. □

**Теорема 2.12.**

Пусть  $\langle X, \rho \rangle$  - метрическое пространство,  $K \subset X$  - компакт.

Тогда  $K$  секвенциально компактно.

**Доказательство.**

Пусть  $x_n \in K$  - последовательность.  $D = \{x_n\}$  (множество элементов).

Если  $D$  конечно, то какая-то точка встречается в последовательности бесконечное количество раз, выберем подпоследовательность состоящую только из этой точки, она сходится.

Заметим, что в  $D$  обязательно есть предельная точка:

Пусть нету. Тогда  $D = D \cup \emptyset = D \cup D' = \text{Cl } D \implies D$  замкнуто. Замкнутое подмножество компакт - компакт.

Так-как  $\forall n \quad x_n$  не предельная в  $D$ , можем выбрать  $r_n$ , такие, что  $\overset{\circ}{B}_{r_n}(x_n) \cap D = \emptyset \implies \overset{\circ}{B}_{r_n}(x_n) \cap D = \{x_n\}$ .

Покроем  $D$  такими шарами. Каждый шар покрывает ровно одну точку и точек бесконечно  $\implies$  нельзя выбрать конечное покрытие. Противоречие.

Значит,  $\exists a \in D'$ .

Возьмём произвольную точку из последовательности  $x_{n_1}$ . Пусть  $r_k := \min\{\frac{1}{k}, \min_{n < k} \{x_n\}\}$ .

Будем брать  $x_{n_k}$  как произвольную точку из  $\overset{\circ}{B}_{r_{k-1}}(a)$ . Так-как он ближе к  $a$  чем все предыдущие,  $n_k > n_{k-1}$ , значит получится подпоследовательность.

При этом,  $\rho(x_{n_k}, a) < \frac{1}{k-1} \implies \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ . При этом,  $D \subset K \implies \text{Cl } D \subset \text{Cl } K = K$ . А  $a \in D' \subset \text{Cl } D \subset K \implies a \in K$ . □

## 2.14. Билет 25: Лемма Лебега. Число Лебега. Связь между компактностью и секвенциальной компактностью.

**TODO:** Не могу найти ни у себя ни у Ани ничего про это.

## 2.15. Билет 26: $\varepsilon$ -сети и вполне ограниченность. Свойства. Связь с компактностью (теорема Хаусдорфа). Теорема о характеристике компактов в $\mathbb{R}^d$ . Теорема Больцано-Вейерштрасса.

**TODO:** Сети и Хаусдорфа опять не видно не у меня не у Ани.

### Определение 2.21.

Пусть  $a, b \in \mathbb{R}^d$ .

Замкнутый параллелепипед:  $[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_d, b_d]$ .

Открытый параллелепипед:  $(a, b) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_d, b_d)$ .

### Теорема 2.13 (О вложенных параллелепипедах).

Пусть  $P_1 \supset P_2 \supset P_3 \supset \dots$  - замкнутые параллелепипеды.

Тогда  $\bigcap_{n=1}^{\infty} P_n \neq \emptyset$ .

### Доказательство.

Обозначим  $P_n =: [a^{(n)}, b^{(n)}]$ .

По теореме о вложенных отрезках:

$$\forall k \in [1, n] \quad \exists c_k \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_k^{(n)}, b_k^{(n)}] \quad .$$

Тогда,  $c = (\forall n \quad c_1, \dots, c_d) \in P_n$

□

### Теорема 2.14.

Замкнутый куб (замкнутый параллелепипед, все координаты углов которого равны для данного угла) в  $\mathbb{R}^d$  - компакт.

### Доказательство.

Пусть  $K$  - замкнутый куб и  $U_\alpha$  - его открытое покрытие. Предположим что выбрать конечное нельзя.

Разобьём  $K$  на  $2^d$  кубов, со стороной равной половине стороны  $K$ .  $U_\alpha$  - открытое покрытие каждого такого куба.

Хотя-бы один маленький куб нельзя будет покрыть конечным покрытием, назовём его  $K_1$ , повторим для него, получим последовательность  $K_1 \supset K_2 \supset \dots$

По теореме о вложенных параллелепипедах,  $\exists c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$  .

$\exists \alpha_0 \quad c \in U_{\alpha_0}, U_{\alpha_0}$  открытое  $\implies \exists r > 0 \quad B_r(c) \subset U_{\alpha_0}$ .

Заметим, что длина ребра  $K_n = \frac{l}{2^n} \rightarrow 0$  ( $l$  - длина ребра  $K$ )  $\implies$  максимальное расстояние между точками -  $\sqrt{d} \frac{l}{2^n} \rightarrow 0$  (какой-то факт о евклидовой метрике).

Тогда,  $\exists n \quad \sqrt{d} \frac{l}{2^n} < r$ . Значит,  $\exists n \quad K_n \subset B_r(c) \subset U_{\alpha_0}$ . Но это противоречит тому, что для  $K_n$  нельзя выбрать конечное покрытие. Значит  $K$  - компакт.

□

**Теорема 2.15.**

Пусть  $K \subset \mathbb{R}^d$  с евклидовой метрикой. Тогда следующие условия эквивалентны:

1.  $K$  - компакт
2.  $K$  - замкнуто и ограничено
3.  $K$  секвенциально компактно.

**Доказательство.**

$1 \implies 2$  и  $1 \implies 3$  уже были.

$2 \implies 1$ :  $K$  ограничено  $\implies K \subset B_r(a) \subset \text{куб}$ .  $K$  - замкнутое подмножество компакта  $\implies K$  - компакт.

$3 \implies 2$ :

Пусть  $K$  не замкнуто. Тогда есть предельная точка не в  $K$ . Можем выбрать сходящуюся к ней последовательность, но тогда любая подпоследовательность сходится к ней  $\implies$  не можем выбрать сходящуюся к точке из  $K$ . Противоречие  $\implies K$  замкнуто.

Пусть  $K$  не ограничено  $\implies \forall n > 0 \quad K \not\subset B_n(0)$ .

Тогда, можем выбрать последовательность вида  $x_n \in K \setminus B_n(0)$ . Тогда  $\rho(0, x_n) \geq n$ .

Выберем сходящуюся к  $a \in K$  подпоследовательность  $x_{n_k}$ . Тогда  $x_{n_k}$  ограничена, причём ограничивающий шар с центром в  $a$  точно существует:  $x_{n_k} \in B_r(a) \implies \rho(x_{n_k}, a) < r \xrightarrow{\Delta} \rho(x_{n_k}, 0) < r + \rho(0, a)$ . Противоречие, значит  $K$  ограничено. □

**Замечание.**

$3 \implies 1$  верно для произвольного пространства, но доказательство сложное.

$2 \implies 1$  в общем случае неверно:

Рассмотрим  $\mathbb{R}$  с метрикой лентяя.  $[0, 1] \subset B_2(0)$ , и есть замкнутость.

Но из  $\bigcup_{x \in [0, 1]} B_{\frac{1}{2}}(x)$  нельзя выбрать конечное покрытие, так-как каждый шар содержит лишь одну точку.

**Теорема 2.16 (Больцано-Вейерштрасса).**

Из всякой ограниченной последовательности в  $\mathbb{R}^d$  можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

**Доказательство.**

$\{x_n\}$  ограничено  $\implies \{x_n\} \subset B_R(a) \subset \overline{B}_R(a)$  - замкнуто и ограничено  $\implies$  компакт  $\implies$  секвенциально компактно  $\implies$  можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. □



**2.16. Билет 27: NAME**

**2.17. Билет 28: NAME**

**2.18. Билет 29: NAME**

**2.19. Билет 30: NAME**

**2.20. Билет 31: NAME**

**2.21. Билет 32: NAME**

**2.22. Билет 33: NAME**

**2.23. Билет 34: NAME**

**2.24. Билет 35: NAME**

**2.25. Билет 36: NAME**

**2.26. Билет 37: NAME**

**2.27. Билет 38: NAME**

**2.28. Билет 39: NAME**

### 3. Числовые и функциональные ряды



3.1. Билет 40: NAME

3.2. Билет 41: NAME

3.3. Билет 42: NAME

3.4. Билет 43: NAME

3.5. Билет 44: NAME

3.6. Билет 45: NAME

3.7. Билет 46: NAME

3.8. Билет 47: NAME

3.9. Билет 48: NAME

3.10. Билет 49: NAME

3.11. Билет 50: NAME

3.12. Билет 51: NAME

3.13. Билет 52: NAME

3.14. Билет 53: NAME

3.15. Билет 54: NAME

3.16. Билет 55: NAME

3.17. Билет 56: NAME

3.18. Билет 57: NAME

3.19. Билет 58: NAME

3.20. Билет 59: NAME

3.21. Билет 60: NAME

3.22. Билет 61: NAME

3.23. Билет 62: NAME

3.24. Билет 63: NAME

3.25. Билет 64: NAME

3.26. Билет 65: NAME

3.27. Билет 66: NAME

$R$  – радиус сходимости,  $0 < r < R$ . Тогда в круге  $|z| \leq r$  ряд сходится равномерно.

**Доказательство.**

$r < R \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$  сходится абсолютно. Для ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $|z| \leq r$  воспользуемся признаком Вейерштрасса.  $|a_n z^n| \leq |a_n| r^n$ ,  $|a_n| r^n$  сходится  $\implies$  по признаку Вейерштрасса  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $|z| \leq r$  сходится равномерно.  $\square$

**Замечание.**

Равномерной сходимости во всем круге может не быть.

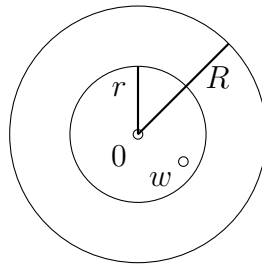
Контрпример  $R = 1$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ , хвост ряда  $\sum_{k=n}^{\infty} z^k = \frac{z^n}{1-z} \not\rightarrow 0$ , т.к. можем одновременно приблизить числитель к единице, а знаменатель к нулю, и дробь получается сколь угодно большой.

**Следствие.**

Сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости.

**Доказательство.**

Возьмем произвольную точку  $w$  из круга сходимости, достаточно доказать лишь непрерывность в окрестности. Берем  $r$ , т.ч.  $|w| < r < R$ . Знаем, что в круге  $|z| < r$  ряд равномерно сходится. Есть равномерная сходимость и каждое слагаемое это непрерывная функция  $\implies$  в круге  $|z| < r$  сумма непрерывна  $\implies$  есть непрерывность суммы и в  $w$ . В силу произвольности  $w$  сумма непрерывна в любой точке  $|z| < R$ .



$\square$

**Теорема 3.2 (Абеля).**

Пусть  $R$  – радиус сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  и ряд сходится при  $z = R$ . Тогда на отрезке  $[0, R]$  ряд сходится равномерно.

**Доказательство.**

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x}{R}\right)^n$ . Применим признак Абеля.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$  сходится равномерно (нет зависимости от  $x$ ),  $\left(\frac{x}{R}\right)^n \in [0, 1] \implies$  равномерно огранич.,  $\left(\frac{x}{R}\right)^n$  монотонно убывает, тогда по признаку Абеля  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  сходится равномерно.  $\square$

**Следствие.**

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , если выполнены условия теоремы, то  $f(x) \in C[0, R]$ , т.к. равномерная сходимость влечет непрерывность. В частности,  $\lim_{x \rightarrow R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ .

### 3.29. Билет 68: Почленное интегрирование суммы степенного ряда.

**Лемма.**

$x_n, y_n \in \mathbb{R}$  и  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \in (0, +\infty)$ . Тогда  $\overline{\lim} x_n y_n = \lim x_n \overline{\lim} y_n$ .

**Доказательство.**

$A = \lim x_n, B = \overline{\lim} y_n, C = \overline{\lim} x_n y_n$ . (Напоминание: верхний предел это наибольший из частичных).

$\exists n_k$ , т.ч.  $x_{n_k} y_{n_k} \rightarrow C$ .  $\lim x_{n_k} y_{n_k} = \lim x_{n_k} \lim y_{n_k}$ , равенство есть, т.к. существует предел слева и предел  $x_{n_k}$ . Из равенства следует, что  $\lim y_{n_k} = \frac{C}{A} \leq B \implies C \leq AB$ .

$\exists m_k$ , т.ч.  $y_{m_k} \rightarrow B$ .  $\lim x_{m_k} y_{m_k} = \lim x_{m_k} \lim y_{m_k} \implies \lim x_{m_k} y_{m_k} = AB \leq C$ .

Итого равенство. □

**Следствие.**

Радиусы сходимости рядов  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}$  совпадают.

**Доказательство.**

Домножение на  $z$  не влияет на радиус, поэтому докажем для рядов  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n+1}, \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^n$ .

$$R_1 = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}, R_2 = \frac{1}{\overline{\lim} \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n]{n+1}}}, R_3 = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \sqrt[n]{n}}$$

$\lim \sqrt[n]{n+1} = \lim \sqrt[n]{n} = 1$ , по лемме можем вытащить из под верхнего предела и окажется, что  $R_1 = R_2 = R_3$ . □

**Теорема 3.3** (Почленное интегрирование степенного ряда).

$R$  – радиус сходимости ряда  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ . Тогда при  $|x - x_0| < R$

$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$  и полученный ряд имеет тот же радиус сходимости.

**Доказательство.**

На  $[x_0, x]$  ряд сходится равномерно (теорема из билета 67)  $\implies f \in C[x_0, x]$  и можно интегрировать почленно  $\int_{x_0}^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_0}^x (t - x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ . □

### 3.30. Билет 69: Комплексная дифференцируемость. Дифференцирование степенного ряда.

**Определение 3.1.**

$f: E \mapsto \mathbb{C}, E \subset \mathbb{C}, z_0 \in \text{Int} E$ . Если существует  $k \in \mathbb{C}$ , такое что  $f(z) = f(z_0) + k(z - z_0) + o(z - z_0)$  при  $z \rightarrow z_0$ , то  $f$  – **комплексно-дифференцируема в точке**  $z_0$  и  $k$  – **производная**  $f$  в точке  $z_0$ .

**Замечание.**

$$1. k = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

## 2. Существование производной равносильно дифференцированию

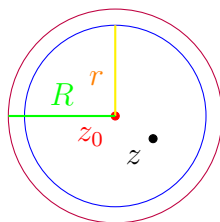
**Теорема 3.4.**

$R$  – радиус сходимости ряда  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$

Тогда  $f$  – бесконечно дифференцируема в круге  $|z - z_0| < R$  и

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)a_n(z - z_0)^{n-m}$$

**Доказательство.**



Докажем индукцию по  $m$ . Рассмотрим  $m = 1$  и  $z_0 = 0$  (про  $z_0$  для простоты). Возьмем  $|z| < R$  и подберем такое  $r$ , что  $|z| < r < R$  (картинка выше для пояснения). Возьмем  $|w| < r$

$$f'(z) = \lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \lim_{w \rightarrow z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n w^n - a_n z^n}{w - z} = \lim_{w \rightarrow z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1})$$

Первое равенство – просто вынесли ряд. Второе – просто поделили (что-то похожее на алгебре делали). Осталось доказать равномерную сходимость по  $|w| < r$  последнего ряда, чтобы поменять местами предел и сумму. Проверять будем с помощью признака Вейерштрасса:

$$|a_n(w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1})| \leq |a_n|(|w|^{n-1} + |w|^{n-2}|z| + \dots + |z|^{n-1}) \leq |a_n|nr^{n-1}$$

Второе неравенство, так как  $|w| < r$  и  $z < r$ . Но ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|nr^{n-1}$  сходится, так как у ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1}$  радиус сходимости  $R > r$ . Значит применился признак сходимости и мы можем поменять местами сумму с предлом.

$$\lim_{w \rightarrow z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{w \rightarrow z} a_n (w^{n-1} + w^{n-2}z + \dots + z^{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

Если применить эту формулу  $m$  раз, то получим искомую формулу. □

### 3.31. Билет 70: Формула для коэффициентов разложения в ряд аналитической функции. Несовпадение классов бесконечно дифференцируемых и аналитических функций.

**Теорема 3.5** (единственность разложения функции в степенной ряд).

Пусть  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  при  $|z - z_0| < R$  – радиус сходимости.

Тогда ряд раскладывается единственным образом, причем коэффициенты в этом ряду будут выглядеть так:  $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

**Доказательство.**

По предыдущей теореме:

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1) \dots (n-m+1) a_n (z-z_0)^{n-m}$$

Подставим  $z = z_0$ . Тогда все слагаемые кроме первого занулятся и получим:

$$f^{(m)}(z_0) = m(m-1) \dots 1 \cdot a_m = m! a_m$$

. Отсюда  $a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}$ . □

**Определение 3.2.**

**Ряд Тейлора** функции  $f$  в точке  $z_0$  называется ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$

**Определение 3.3.**

Функция называется **аналитической** в точке  $z_0$ , если она является суммой своего ряда Тейлора для точки  $z_0$  в окрестности точки  $z_0$ .

Ряд Тейлора мы можем писать только, если функция бесконечно дифференцируема. Но бывают бесконечно дифференцируемые функции, которые не являются аналитическими, например:

**Пример.**

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{при } x \neq 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим точки  $x \neq 0$ :

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$$

Идем по индукции ( $n \rightarrow n+1$ ), проверяем есть ли формула для разных производных:

**База:** Для  $f: f = P_0 e^{-1/x^2}$ , то есть  $P_0 \equiv 1$

**Переход:**

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' = (P_n(x) x^{-3n} e^{-1/x^2})' = \\ &= P_n(x) x^{-3n} e^{-1/x^2} \frac{1}{x^3} + P_n'(x) x^{-3n} e^{-1/x^2} + P_n(x) (-3n) x^{-3n-1} e^{-1/x^2} = \frac{e^{-1/x^2}}{x^{3n+3}} P_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Найдем  $f^{(n)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x}$  Докажем по индукции ( $n-1 \rightarrow n$ ), что  $f^{(n)}(0) = 0$ .

**Переход:**

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} \frac{P_n(x)}{x^{3n+1}} = \lim_{y=1/x} e^{-y^2} y^{3n+1} P_n \left( \frac{1}{y} \right) = 0$$

$$P_n \left( \frac{1}{y} \right) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} P_n(0) - \text{константа}$$

$$e^{-y^2} y^{3n+1} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0, \text{ так как } e^{-y^2} \text{ убывает быстрее.}$$

Значит ряд Тейлора равен 0, но функция не 0 в точках  $x \neq 0$ . Значит функция не аналитическая.



**3.32. Билет 71: NAME**

**3.33. Билет 72: NAME**

## 4. Функции нескольких переменных

4.1. Билет 73: NAME

4.2. Билет 74: NAME

4.3. Билет 75: NAME

4.4. Билет 76: NAME

4.5. Билет 77: NAME

4.6. Билет 78: NAME

4.7. Билет 79: Теорема Лагранжа для векторнозначных функций.

**Теорема 4.1.**

$f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^m$  непрерывна и дифференцируема на  $(a, b)$ . Тогда  $\exists c \in (a, b)$ , такая что  $\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\| (b - a)$

*Доказательство.*

$$\varphi(x) := \langle f(x), f(b) - f(a) \rangle : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$$

$\varphi(x)$  удовлетворяет условию одномерной теоремы Лагранжа

$$\exists c \in (a, b), \text{ т.ч. } \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b - a) = \langle f'(c), f(b) - f(a) \rangle (b - a)$$

$$\varphi'(x) = \langle f'(x), f(b) - f(a) \rangle + \langle f(x), (f(b) - f(a))' \rangle = \langle f'(x), f(b) - f(a) \rangle$$

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \langle f(b), f(b) - f(a) \rangle - \langle f(a), f(b) - f(a) \rangle = \langle f(b) - f(a), f(b) - f(a) \rangle = \|f(b) - f(a)\|^2$$

$$\|f(b) - f(a)\|^2 = \langle f'(c), f(b) - f(a) \rangle (b - a) \leq \|f'(c)\| \|f(b) - f(a)\| (b - a) \quad (\text{Коши-Буняковский})$$

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\| (b - a)$$

□

Замечание. Равенство может никогда не достигаться

$$f(x) = (\cos x, \sin x) : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2$$

$$f(0) = (1, 0) = f(2\pi)$$

$$f(2\pi) - f(0) = (0, 0) \implies \|f(2\pi) - f(0)\| = 0$$

$$f'(x) = ((\cos x)', (\sin x)') = (-\sin x, \cos x)$$

$$\|f'(x)\| = 1 \implies \|f'(c)\| (2\pi - 0) = 2\pi > \|f(2\pi) - f(0)\| = 0$$

4.8. Билет 80: Связь частных производных и дифференцируемости.

**Теорема 4.2.**

$$f : E \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, a \in \text{Int} E.$$

В окрестности точки  $a$  существуют все частные производные и они непрерывны в точке  $a$ .

Тогда  $f$  дифференцируема в точке  $a$ .

**Доказательство.**

По сути, мы знаем, как должно быть устроено линейное отображение из определения дифференцируемости, т.к. нам известны частные производные (подробнее об этом написано в билете 76)

$$R(h) := f(a + h) - f(a) - \sum_{k=1}^n f'_{x_k}(a)h_k$$

Надо доказать, что  $\frac{R(h)}{\|h\|} \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$

Заведем вспомогательные вектора:  $b_k = (a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$ , заметим, что тогда получается  $b_0 = a, b_n = a + h$

Рассмотрим вспомогательные функции одной переменной  $F_k(t) := f(b_{k-1} + th_k e_k)$ , здесь  $e_k$  - это стандартный вектор

Запишем в координатном виде:  $F_k(t) := f(a_1 + h_1, \dots, a_{k-1} + h_{k-1}, a_k + th_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$

Применим одномерную теорему Лагранжа:  $\underbrace{F_k(1) - F_k(0)}_{f(b_k) - f(b_{k-1})} = F'_k(\Theta_k) = h_k f'_{x_k}(a_1 + h_1, \dots, a_{k-1} +$

$h_{k-1}, a_k + \Theta_k h_k, a_{k+1}, \dots, a_n) = h_k f'_{x_k}(c_k)$  для некоторой  $\Theta_k \in (0, 1)$

Получили, что  $f(b_k) - f(b_{k-1}) = h_k f'_{x_k}(c_k)$ . Сложим все получившиеся равенства:  $f(b_n) - f(b_0) = f(a + h) - f(a) = \sum_{k=1}^n h_k f'_{x_k}(c_k) = \sum_{k=1}^n h_k f'_{x_k}(a) + \sum_{k=1}^n h_k (f'_{x_k}(c_k) - f'_{x_k}(a))$

Заметим, что  $\sum_{k=1}^n h_k (f'_{x_k}(c_k) - f'_{x_k}(a))$  - формула для остатка  $R(h)$

$$|R(h)| \leq \|h\| \left( \sum_{k=1}^n (f'_{x_k}(c_k) - f'_{x_k}(a))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ (КБШ)}$$

$$\iff \frac{R(h)}{\|h\|} \leq \left( \sum_{k=1}^n (f'_{x_k}(c_k) - f'_{x_k}(a))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0 \text{ по непрерывности частных производных}$$

□

Замечание 1. В формулировке теоремы интересуемся дифференцируемостью скалярной функции, но дифференцируемость векторнозначной функции равносильна дифференцируемости каждой ее координатной функции, которая есть скалярная функция.

Замечание 2. Можно не требовать непрерывность ровно одной из частных производных

**Доказательство.**

Не требуем непрерывность  $f'_{x_1}$  в точке  $a$ . Необходимо, чтобы  $f'_{x_1}(c_1) - f'_{x_1}(a) \rightarrow 0$ .

Нас интересует разность  $f(b_1) - f(b_0) = f(a_1 + h, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)$ . То есть получили функцию, у которой последние координаты зафиксированы, а первую меняем. Такая функция дифференцируема в точке  $a_1$  по определению частной производной.

$$f(a_1 + h, a_2, \dots, a_n) = f(a_1, \dots, a_n) + f'_{x_1}(a_1, \dots, a_n)h_1 + o(h_1)$$

$$f(b_1) - f(b_0) = f'_{x_1}(a)h_1 + o(h_1)$$

□

Замечание 3. Дифференцируемость в точке не дает существование част.производных в окрестности и тем более их непрерывность

**Пример.**

$f(x, y) = x^2 + y^2$ , если ровно одно из чисел  $x$  или  $y$  рационально

$f(x, y) = 0$  иначе

$f$  непрерывна только в точке  $(0, 0)$ , в остальных точках нет непрерывности ни по какому направлению

Проверим дифференцируемость в  $(0, 0)$ :  $f(h, k) = \underbrace{f(0, 0)}_{=0} + Ah + Bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$

$$f(h, k) = o(\sqrt{h^2 + k^2}), \text{ верно, т.к. } 0 \leq f(h, k) \leq h^2 + k^2$$

4.9. Билет 81: NAME

4.10. Билет 82: NAME

4.11. Билет 83: NAME

4.12. Билет 84: NAME

4.13. Билет 85: NAME

4.14. Билет 86: NAME

4.15. Билет 87: NAME

4.16. Билет 88: NAME

4.17. Билет 89: NAME

4.18. Билет 90: NAME

4.19. Билет 91: NAME

4.20. Билет 92: NAME

4.21. Билет 93: NAME

4.22. Билет 94: NAME

4.23. Билет 95: NAME

4.24. Билет 96: NAME

4.25. Билет 97: NAME

4.26. Билет 98: NAME

## 5. Теория меры

5.1. Билет 99: NAME

5.2. Билет 100: NAME

5.3. Билет 101: NAME

5.4. Билет 102: NAME