⑪ アレイ信号処理

① 問題設定

狭帯域波源 $s_1(t)e^{j\omega t}, \cdots, s_M(t)e^{j\omega t}$ が

位置 $\mathbb{r}_1, \cdots, \mathbb{r}_M$ にあり、

これを位置 $\mathbb{R}_1 \cdots \mathbb{R}_N$ にあるセンサで観測

$s_i(t)$ の変動が搬送波の ω での変化に対し、ゆるやか。

$$s_1\left(t-\frac{\|\mathbb{R}_1-\mathbb{r}_1\|}{c}\right)\frac{1}{\|\mathbb{R}_1-\mathbb{r}_1\|}e^{j\omega\left(t-\frac{\|\mathbb{R}_1-\mathbb{r}_1\|}{c}\right)}$$

$$\underset{\text{狭帯域}}{\simeq}\ \frac{s_1(t)e^{j\omega t}}{\|\mathbb{R}_1-\mathbb{r}_1\|}e^{-jk\|\mathbb{R}_1-\mathbb{r}_1\|}$$

(c: 波の伝播速度
$k=\frac{\omega}{c}$: 波数)

⑪ 観測方程式

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_N \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ n \end{array}\begin{array}{c} m \\ \begin{pmatrix} \cdots \frac{e^{-jk\|\mathbb{R}_n-\mathbb{r}_m\|}}{\|\mathbb{R}_n-\mathbb{r}_m\|} \end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix} s_1(t)e^{j\omega t} \\ \vdots \\ s_M(t)e^{j\omega t} \end{pmatrix}$$

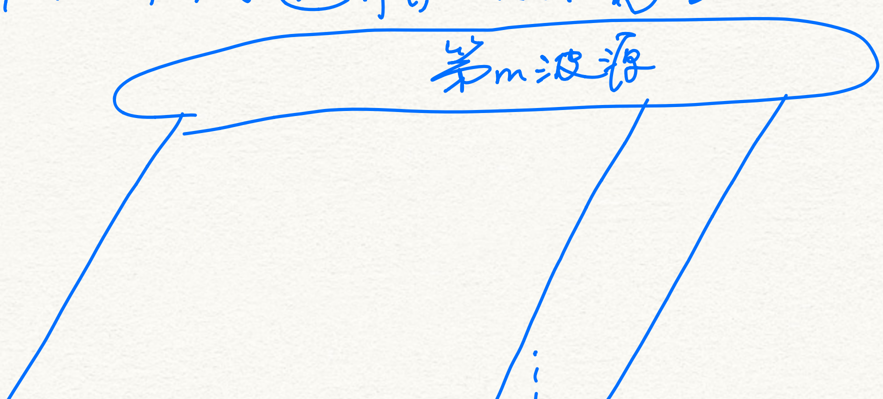
$$+\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_N \end{pmatrix}$$

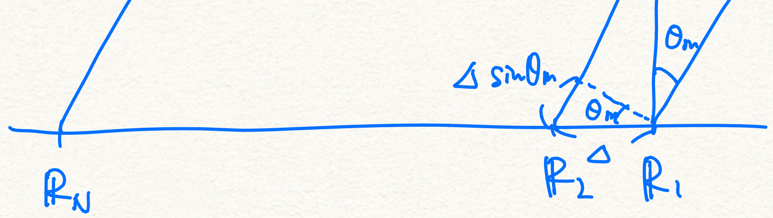
$G = (g_1 \cdots\cdots g_M)$ とすると,

$$g_m = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{-jk\|\mathbf{R}_1-\mathbf{r}_m\|}}{\|\mathbf{R}_1-\mathbf{r}_m\|} \\ \vdots \\ \dfrac{e^{-jk\|\mathbf{R}_N-\mathbf{r}_m\|}}{\|\mathbf{R}_N-\mathbf{r}_m\|} \end{pmatrix} \leftarrow \text{振幅1の第m波源がセンサアレイ上につくる波動のパターン}$$

また、特に

- 波源が十分遠方 → 平面波
- 波源とセンサアレイが同一平面上
- センサアレイが直線上の場合





推定したい未知量：平面波の到来方向 $\theta_1 \cdots \theta_M$

$$
g_m \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-jk\Delta\sin\theta_m} \\ e^{-2jk\Delta\sin\theta_m} \\ \vdots \\ \vdots \\ e^{-(N-1)jk\Delta\sin\theta_m} \end{pmatrix} \frac{e^{-jk\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_m\|}}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_m\|}
$$

振幅は共通と仮定

③ ビームフォーマー法

遠方場，直線アレイの場合 g_m に対して，

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ e^{jk\Delta\sin\theta_m} \\ e^{2jk\Delta\sin\theta_m} \\ \vdots \\ e^{(N-1)jk\Delta\sin\theta_m} \end{pmatrix}
$$

との内積をとると位相が補正され絶対値は大きくなる → θ_m：未知

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ e^{-jk\sin\theta} \\ \cdots \end{pmatrix}
$$

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} \vdots \\ e^{-(N-1)jk\sin\theta} \end{pmatrix}$$ を考え.

$$y(\theta) = E\left[\|\mathbf{w}^H(\theta)\mathbf{d}\|^2\right] \to \max$$

となる θ を到来方向とする

$\mathbf{w}(\theta)$: θ方向にセンサアレイの感度をあげるための重み.

$$y(\theta) = E\left[(\mathbf{w}^H(\theta)\mathbf{d}(t))(\mathbf{w}^H(\theta)\mathbf{d}(t))^*\right]$$

$$= E\left[\mathbf{w}^H\mathbf{d}\mathbf{d}^H\mathbf{w}\right]$$

$$= \mathbf{w}^H \underbrace{E\left[\mathbf{d}\mathbf{d}^H\right]} \mathbf{w}$$

データの相関行列

エルゴード性を仮定し, 時間平均でおきかえる

$$R \equiv E\left[\mathbf{d}\mathbf{d}^H\right]$$

$$= \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & E[d_i d_j^*] & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Big(\qquad \Big) \Big\downarrow \text{エルゴード性}$$

$$= \begin{pmatrix} & & \\ & \frac{1}{L}\sum_{\ell=1}^{L} d_i(t_\ell) d_j(t_\ell)^* & \\ & & \end{pmatrix}$$

例 $\theta = \theta_1$ に単一波源 $s_1(t) = s_1 e^{j\omega t}$ がある

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-jk_0 \sin\theta_1} \\ \vdots \\ e^{-(N-1)jk_0 \sin\theta_1} \end{pmatrix} \frac{s_1 e^{jk\|R_1 - r_1\|}}{\| R_1 - r_1 \|}$$

$$y(\theta) = E[\| w^H(\theta) d \|^2]$$

$$= E\left[\left\| \frac{s_1}{\|R_1 - r_1\|} \right\|^2\right] \underbrace{\left\| 1 + e^{jk_0(\sin\theta - \sin\theta_1)} + \cdots + e^{j(N-1)k_0(\sin\theta - \sin\theta_1)} \right\|^2}$$

$$\| \quad \frac{1 - e^{jNk_0(\sin\theta - \sin\theta_1)}}{1 - e^{jk_0(\sin\theta - \sin\theta_1)}}$$

$$\propto \left\| \frac{\sin \frac{kN\delta}{2}(\sin\theta - \sin\theta_1)}{\sin \frac{k\delta}{2}(\sin\theta - \sin\theta_1)} \right\|^2$$

ⅲ Capon法

Linear Constraint Minimum Variance 法
(LCMV)

θ方向の波源からの波動パターンは通過させるために
重み $w(\theta)$ を設定

$$w^H g(\theta) = 1$$

という制約を設けた上で

(↑ θ方向波源が $s(t)$ のとき. センサアレイ出力は、
$w^H s(t) g(\theta) = s(t)$ となり, 信号が取り出せる)

他の方向の波源からの波動場に対しては.
センサアレイ出力を小さくするために.

$E[\|w^H d\|^2] \to \min$ とする重み w を求める

↓

Lagrangeの未定乗数法により

$$J(w) = w^H R w + \lambda \left(1 - w^H g(\theta)\right)$$

$$\frac{\partial J}{\partial w^*} = R w - \lambda g(\theta) = 0$$

R：正則と仮定すると、

$$w = \lambda R^{-1} g(\theta)$$

制約条件に代入

$$1 - g^H w(\theta) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{g^H R^{-1} g} \\[2ex] w(\theta) = \dfrac{R^{-1} g(\theta)}{g^H R^{-1} g} \end{cases}$$

センサアレイ出力の自乗平均 ： $y(\theta) = E\left[\| w^H d \|^2\right]$

$$= w^H R w$$

$$= \frac{g^H R^{-H}}{g^H R^{-1} g} R \frac{R^{-1} g}{g^H R^{-1} g}$$

$$= \frac{1}{\mathbf{a}^H R^{-1} \mathbf{a}}$$

$y(\theta)$を極大にする方向を到来方向(DOA)とする.