・線形逆問題

$$d(\mathbf{r}) = \int s(\mathbf{r}')\, g(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}$$

$\downarrow$ 離散化

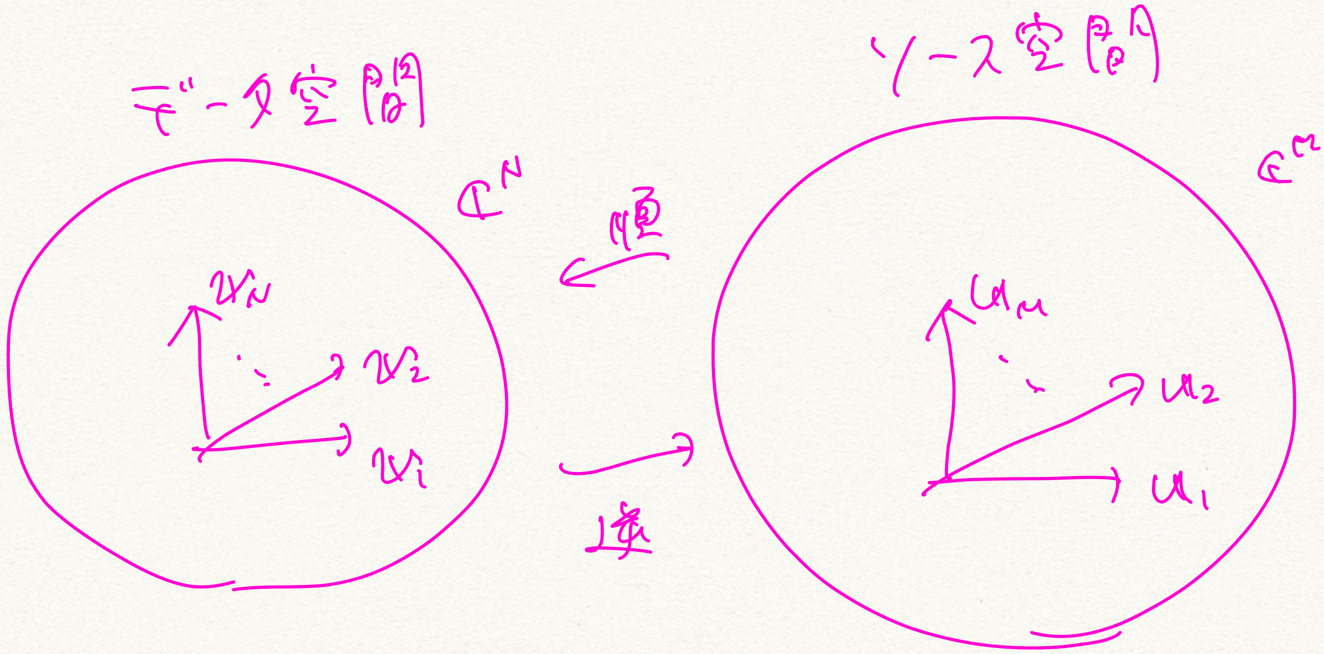
$$\begin{pmatrix} d(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ d(\mathbf{r}_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_1') & \cdots & g(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_M') \\ \vdots & & \vdots \\ g(\mathbf{r}_N-\mathbf{r}_1') & \cdots & g(\mathbf{r}_N-\mathbf{r}_M') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s(\mathbf{r}_1') \\ \vdots \\ s(\mathbf{r}_N') \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n(\mathbf{r}_1') \\ \vdots \\ n(\mathbf{r}_N') \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} N \cdots \text{データの数} \\ M \cdots \text{ソースが存在する点の数} \end{cases}$$

$N < M$ → 劣決定

$N > M$ → 優決定（解が無限）

(ii) 逆問題の構造



(iii) SVD (Singular Value Decomposition)

$G \in \mathbb{C}^{N \times M}$ はユニタリ行列 U, V を用いて以下のように分解できる

$$G = \sum_{k=1}^{R} \lambda_k v_k u_k^H$$

$$= (v_1 \cdots\cdots v_N) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_R & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^H \\ \vdots \\ u_M^H \end{pmatrix}$$

$$= \underset{N\times N}{V} \; \underset{N\times M}{\Lambda} \; \underset{M\times M}{U^H}$$

基底同士の関係を考えればよい！

例1 u_1の像を見てみる

$$G u_1 = \sum_{k=1}^{R} \lambda_k v_k u_k^T u_1$$

$$= \lambda_1 v_1 \quad (u_1 \cdots u_M \text{の正規直交性})$$

同様に,

$$u_1 \longrightarrow \lambda_1 v_1$$
$$u_2 \longrightarrow \lambda_2 v_2$$
$$\vdots$$
$$u_R \longrightarrow \lambda_R v_R$$
$$u_{R+1} \longrightarrow 0$$
$$\vdots$$

(iii) Moore-Penrose の逆行列

$$G = \sum_{k=1}^{R} \lambda_k v_k u_k^T$$

$$u_1 \to \lambda_1 v_1 \qquad v_1 \to \frac{1}{\lambda_1} u_1$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$u_R \to \lambda_R v_R \qquad v_R \to \frac{1}{\lambda_R} u_R$$
$$u_{R+1} \to 0 \qquad v_{R+1} \to 0$$

$$G^{+} = \sum_{k=1}^{R} \frac{1}{\lambda_k} u_k v_k^{T}$$

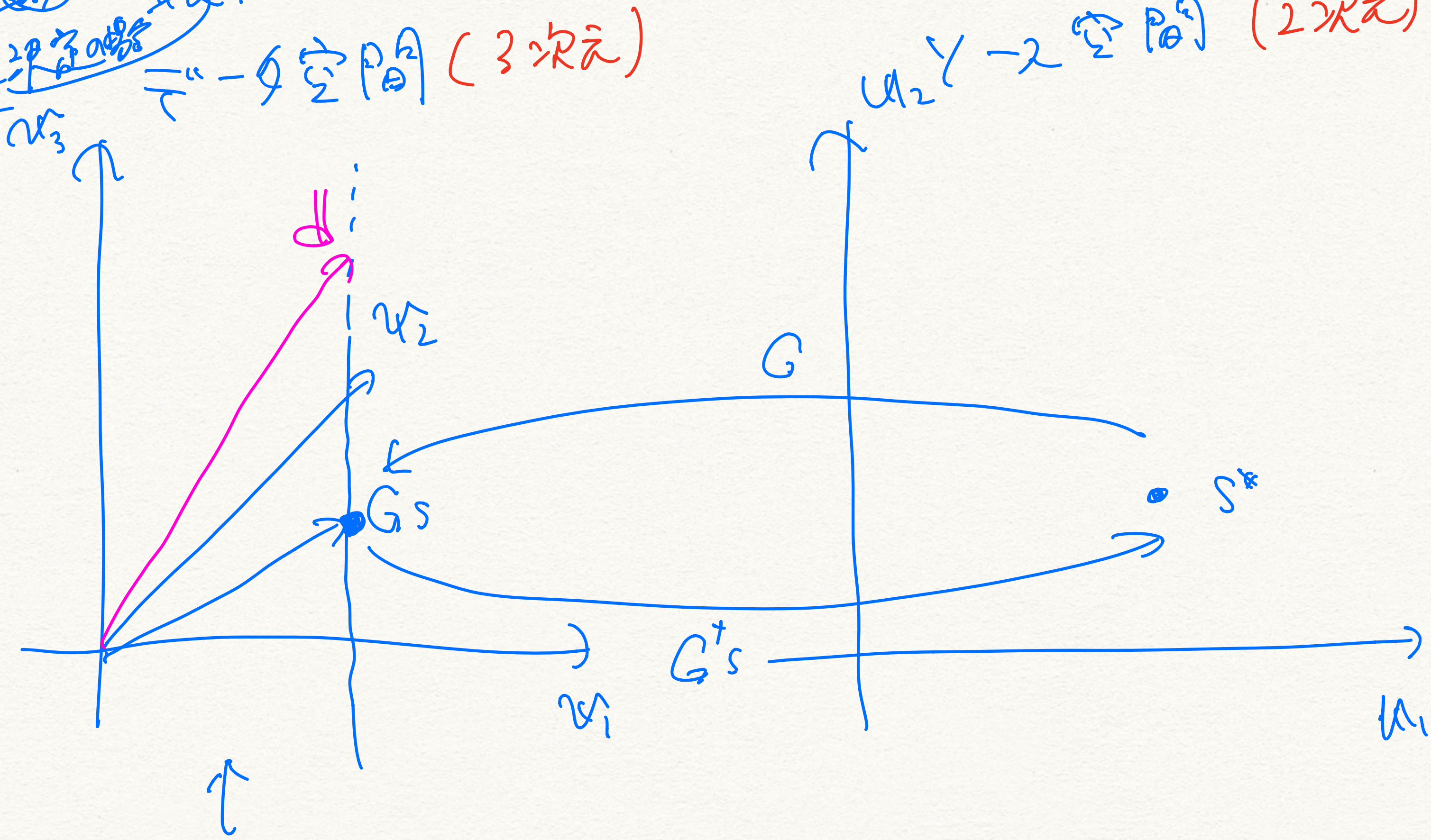
MP 一般逆行列.

$$v_1 = G G^{+} v_1$$

①

最小二乗解

優決定の解

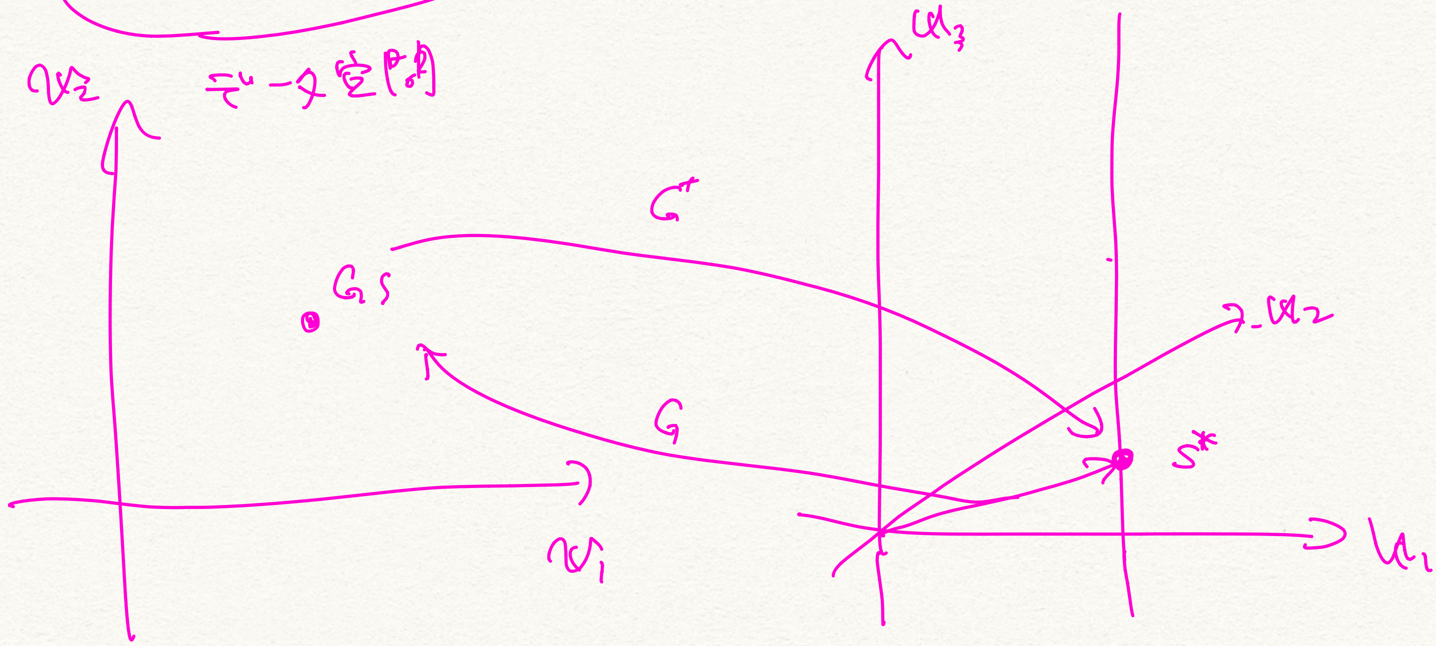


データ d を $v_1 v_2$ 平面に射影したものが Gs

⑪ MP一般逆行列の性質 ② ノルム最小解を与える

$d = Gs$ の中で $\|s\|$ 最小のもの

劣決定の場合



$$\min.\ \|s\|^2$$
$$\text{s.t.}\quad d = Gs$$
を解けば同じ解が得られる

$$J(s) = \|s\|^2 + \lambda^T (d - Gs)$$
$$= s^T s + \lambda^T d - \lambda^T G s$$

$\frac{\partial J}{\partial s} = 0$ とすると、 $s = \frac{1}{2} G^T \lambda$

これを $d = Gs$ に代入

$$d = \frac{1}{2} G G^T \lambda$$

$$\lambda = 2 (G G^T)^{-1} d$$

$$\therefore \quad s = \frac{1}{2} G^T \, 2 (G G^T)^{-1} d$$

$$= \underbrace{G^T (G G^T)^{-1}} d$$

(iii) 条件数

$$d = Gs + n$$

$$s^* = G^+ d$$

$$= G^+ G s + G^+ n$$

$$= \underbrace{G^+ d_0}_{s_0} + \underbrace{G^+ n}_{s_n}$$

推定誤差 $\left|\frac{s_n}{s_0}\right|$ をデータの推定誤差 $\left|\frac{n}{d_0}\right|$ で評価したい

$$d_0 = \sum_{k=1}^{N} d_k v_k$$ と表すと、

$$s_0 = G^{+} d_0$$

$$= \sum_{k=1}^{R} \frac{1}{\lambda_k} u_k v_k^{T} \sum_{k=1}^{N} d_k v_k$$

$$= \sum_{k=1}^{R} \frac{d_k}{\lambda_k} u_k$$

と書ける。u_k は正規直交規定だから

$$\|s_0\|^2 = \sum_{k=1}^{R} \left(\frac{d_k}{\lambda_k}\right)^2$$

同様にして、$n = \sum_{k=1}^{N} n_k v_k$ は

$$\|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^{R} \left(\frac{n_k}{\lambda_k}\right)^2$$

特異値が小さいと、
誤差の"悪さ"が大きくなる

$$\frac{\|S_n\|}{\|S_0\|} = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{R}\left(\frac{n_k}{\lambda_k}\right)^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{R}\left(\frac{d_k}{\lambda_k}\right)^2}} \leq \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{R}\left(\frac{n_k}{\lambda_R}\right)^2}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{R}\left(\frac{d_k}{\lambda_1}\right)^2}} = \frac{\lambda_1\|n\|}{\lambda_R\|d\|}$$

$$\uparrow$$

$$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_R$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\|S_n\|}{\|S_0\|} = \underbrace{\frac{\lambda_1}{\lambda_R}}_{\text{係数（条件数）}} \underbrace{\frac{\|n\|}{\|d\|}}_{\text{データのSN比}}$$

$$\mathrm{cond}\, G = \frac{\lambda_1}{\lambda_R} = \frac{\min(\lambda)}{\max(\lambda)}$$

⑪ 推定誤差分散

$\mathbf{n} \sim N(0, \sigma^2 I)$ と仮定

$s_n = G^+ \mathbf{n}$ の共分散行列を求める。

$$E[s_n s_n^T]$$

$$= E[(G^+ n)(G^+ n)^T]$$

$$= E[G^+ n n^T G^{+T}]$$

$$= G^+ E[n n^T] G^{+T}$$

$$= \sigma^2 G^+ G^{+T}$$

$$= \sigma^2 \sum_{k=1}^{R} \frac{1}{\lambda_k} u_k u_k^T \sum_{k=1}^{R} \frac{1}{\lambda_k} u_k u_k^T$$

$$= \underbrace{\sigma^2 \sum_{k=1}^{R} \frac{1}{\lambda_k^2} u_k u_k^T}$$

→ 特異値が小さいと推定誤差分散が大きくなる

⑪ 周波数成分と特異値の関係

たたみこみ積分 $d(x)=\int_{-\infty}^{\infty} s(x')g(x-x')dx'$ は

$$d(x) = \int_{-\infty}^{\infty} D(u)\, e^{2\pi jux}\, du$$

Inverse FT

$$\left(D(u) = \int_{-\infty}^{\infty} d(x)\, e^{-2\pi jux}\, dx \right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G(u)\, S(u)\, e^{2\pi jux}\, du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G(u) \int_{-\infty}^{\infty} s(x')\, e^{-2\pi jux'}\, dx'\; e^{2\pi jux}\, du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G(u)\, e^{2\pi jux} \langle e^{2\pi jux'}, s(x') \rangle\, du$$

周波数分解　　　　SVD

$$d(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(u)\, e^{2\pi jux} \langle e^{2\pi jux'}, s(x') \rangle\, du \qquad d = \sum_{k=1}^{R} \lambda_k v_k u_k$$

$u \longleftrightarrow k$

$G(u) \longleftrightarrow \lambda_k$

$\longleftrightarrow$

$e^{2\pi j u x} \longleftrightarrow v_k$

$e^{2\pi j u x'} \longleftrightarrow u_k$

(4) 循環たたみこみ

$s(x'),\ g(x),\ d(x)$：周期 M の周期関数

$$d[x] = \sum_{x'=0}^{M-1} s[x']\, g[x-x']$$

↑

たたみこみのハンイが有限