Blind deconvolution

$$\mathbf{d} = \underbrace{G}_{\text{未知}}\ \underbrace{\mathbf{s}}_{\text{未知}} + \mathbf{n}$$

のとき、$\mathbf{s}$（とG）を推定する

- 基底（$G = (\mathbf{g}_1 \cdots \mathbf{g}_m)$）に仮定を入れる
- 信号 $\mathbf{s}$ に仮定を入れる.

基底 $G = (\mathbf{g}_1 \cdots \mathbf{g}_m)$ に仮定を入れる方法

- 主成分分析（Principal Component Analysis）

データ列 $\{\mathbf{d}\}$ を正規直交基底 $\{\mathbf{v}_k\}$ で分解する.

$$\underset{\mathbb{R}^N}{\mathbf{d} \in} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} s_k \mathbf{v}_k}_{= \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{v}_k^T \mathbf{d}) \mathbf{v}_k} = \underbrace{(\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n)}_{\shortparallel \atop G} \underbrace{\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}}_{\shortparallel \atop \mathbf{s}}$$

データの自乗誤差が最小となるように、

$$J(\{\mathbf{v}_k\}) = E\left[\left\| \mathbf{d} - \sum_{k=1}^{n} s_k \mathbf{v}_k \right\|^2\right] + \lambda(1 - \mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k)$$

$\to \min$

$$= E\left[\left\| d - \sum_{k=1}^{n} (v_k^T d)\, v_k \right\|^2\right] + \lambda (1 - v_k^T v_k)$$

$$= E\left[\| d \|^2\right] - 2E\left[\sum_{k=1}^{n} (v_k^T d)^2\right] + E\left[\sum_{k=1}^{n} (v_k^T d)^2\right] + \lambda (1 - v_k^T v_k)$$

$$= E\left[\| d \|^2\right] - E\left[\sum_{k=1}^{n} (v_k^T d)^2\right] + \lambda (1 - v_k^T v_k)$$

極値条件は、

$$\frac{\partial J}{\partial v_k} = -2 \underbrace{E\left[d\, d^T\right]}_{=\,R} v_k - 2\lambda v_k = 0$$

データの相関行列(＝共分散行列？)

$$\Leftrightarrow \quad R v_k = -\lambda v_k$$

よって、Rの固有ベクトルとして $\{v_k\}$ をえらべばよいことが分かる

⑪ PCAのICAとの関係

$n = N$ のとき

$$\mathbf{u} = V\mathbf{s}$$

$$V = (v_1 \cdots v_N)$$

$$\hat{\mathbf{s}} = V^{-1}\mathbf{u} = V^T\mathbf{u}$$

このとき $\hat{\mathbf{s}}$ の共分散行列を考える

$$\begin{aligned} E[\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{s}}^T] &= E[V^T\mathbf{u}\mathbf{u}^T V] \\ &= V^T R V \\ &= V^T V \Lambda^2 V^T V \\ &= \Lambda^2 \end{aligned}$$

つまり、PCAにより得られる $\hat{\mathbf{s}}$ の各成分は無相関である。

⑪ スパースコーディング

… なるべく少数個の基底でデータを分解したい

場合.

$$J(g_k, s_k) = \underbrace{E\left[\left\| d - \sum_{k=1}^{n} s_k g_k \right\|^2\right]}_{\text{convex}} + \underbrace{\overbrace{\lambda^2 \sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{s_k^2}{\sigma^2}\right)}^{\text{concave}}}_{\text{スパース解を求めるための正則化項}}$$

($s_k^2 \ll \sigma^2$ のとき $\log\left(1+\frac{s_k^2}{\sigma^2}\right) \simeq 0$)

(1) まず, $\{g_k\}$を固定した上で, Jを最小化する$\{s_k\}$を非線形最適化で求める

(2) $\{s_k\}$を固定した上で, 最急降下方向にg_kを更新する

$$g_k^{(j+1)} = g_k^{(j)} - c \frac{\partial J(g_k^{(j)})}{\partial g_k}$$

◎ 信号sに仮定を入れる方法

- 独立成分分析 (Independent Component Analysis)

瞬時混合.

$$\begin{pmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix}$$

のblind deconvolutionを考える (パーティ会場での話者分離などに用いられる)

仮定

仮定

・ $s_1(t)$ と $s_2(t)$ は独立である

・ $E[\mathbf{s}\mathbf{s}^T] = I$

$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{g}_1}{c_1} & \frac{\mathbf{g}_2}{c_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 s_1(t) \\ c_2 s_2(t) \end{pmatrix}$ という分解で、c_1, c_2 は決まらないので、s_1 s_2 の分散は1であると仮定する

⑪ データの白色化 (whitening)

$\mathbf{d} = G\mathbf{s}$ に対し、行列 W を左からかけて

$$\mathbf{f} = W\mathbf{d} = WG\mathbf{s}$$

が白色信号 ($E[\mathbf{f}\mathbf{f}^T] = I$) となるようにする。

$$\begin{aligned} E[\mathbf{f}\mathbf{f}^T] &= W E[\mathbf{d}\mathbf{d}^T] W^T \\ &= W R W^T \\ &= W V \Lambda^2 V^T W^T \end{aligned}$$

($G = V \Lambda U^T$: 未知だが、

$R = E[\mathbf{d}\mathbf{d}^T] = V\Lambda^2 V^T$ から、

データ $\mathbf{d}$ から V は得られる。

となるから、$W = \Lambda^{-1} V^T$ととれば、$E[\mathbf{f}\mathbf{f}^T] = I$とできる

このとき

$$
\begin{aligned}
\mathbf{f} &= WG\mathbf{s} \\
&= \Lambda^{-1} V^T V \Lambda U^T \mathbf{s} \\
&= U^T \mathbf{s}
\end{aligned}
$$

となる。すなわち、白色化したデータ$\mathbf{f}$のblind deconvolutionでは、基底を並べたU^Tは直交行列を考えればよい。

尖度最大化

$$
\begin{aligned}
J(\{w\}) &= \left| E[(w^T \mathbf{f})^4] - 3 \right| + \lambda (1 - w^T w) \\
&= \left(\mathrm{sgn}\,\mathrm{kurt}(w^T \mathbf{f}) \right) \left(E[(w^T \mathbf{f})^4] - 3 \right) \\
&\quad + \lambda (1 - w^T w)
\end{aligned}
$$