④ 三次元空間中の位置 $\mathbb{r}_1 (= (x_1, y_1, z_1)) \cdots \mathbb{r}_M$ に強度 $q_1 \cdots q_M$ のポテンシャル点ソースがあった時

$$\phi(\mathbb{r}) = \sum_{k=1}^{M} \frac{q_k}{|\mathbb{r} - \mathbb{r}_k|}$$

これに対して、n階の複素微分は

$$\partial^n \phi(\mathbb{r}) = (-1)^n (2n-1)!! \sum_{k=1}^{M} \frac{q_k}{|\mathbb{r}-\mathbb{r}_k|} \left(\frac{w - w_k}{|\mathbb{r} - \mathbb{r}_k|^2} \right)^n$$

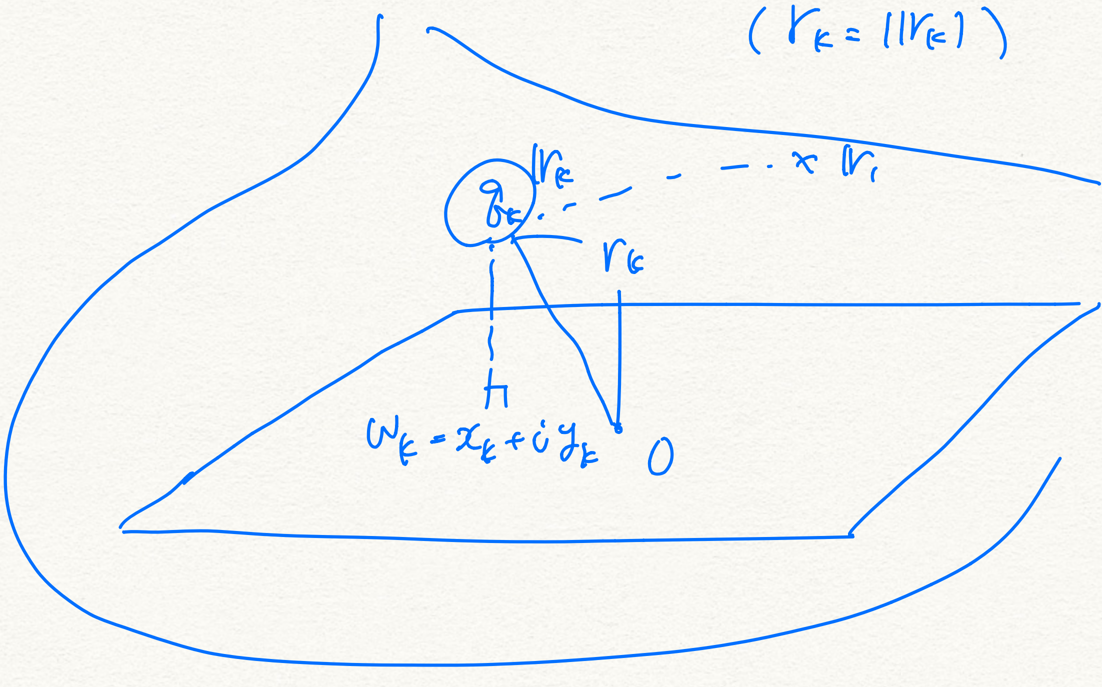
となる。ただし、

$$\begin{cases} w = x + iy \\ w_k = x_k + iy_k \end{cases}$$

観測点を原点にとる。: $\mathbb{r} = 0$

$$\partial^n \phi(0) = (-1)^n (2n-1)!! \sum_{k=1}^{N} \frac{q_k}{r_k} \left(\frac{w_k}{r_k^2} \right)^n$$

$(r_k = |\mathbb{r}_k|)$



これは、

◎ モーメント問題

$$C_n = \sum_{k=1}^{M} m_k z_k^n \quad (n = 0, 1, \cdots\cdots)$$

未知数 : m_k, z_k.
既知数 : C_0, C_1 ……

であり、Prony 法により解ける。

Analogy 的には

m_k = 質量

質量 $m_1 \sim m_M$ の質点が
平面上にちらばっている。
↓
n 次モーメント C_n が得られたときに、質点の分布を求めるのが、モーメント問題

⑪ 単一周波数 波動場 に対する複素微分

↑ Helmholz 方程式に従う.

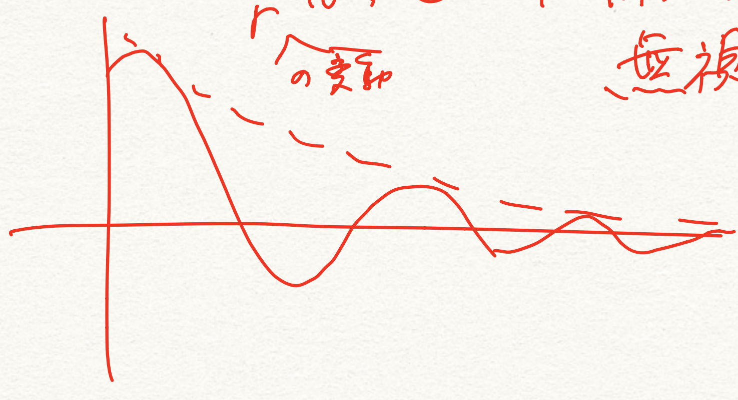
原点にある単一周波数 ω の単位点波源による場 $\frac{e^{ikr}}{r}$
$\left(k = \frac{\omega}{c}\right)$

において, 波源と観測点の距離は, 波長よりも
十分長く (遠方場, $kr = 2\pi \frac{r}{\lambda} >> 1$)

↑ 波を考えるときは, 波長との
関係が大事!

$\frac{1}{r}$ は 観測位置によらず $\frac{1}{R}$ とする

↑ $\frac{1}{r}$ は, e^{ikr} の位相変調に対して
無視できる.



このとき. e^{ikr} に対して Dbar 微分をとると.

$$\bar{\partial} e^{ikr} = e^{ikr} \bar{\partial}(ikr)$$

$$= e^{ikr} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} ik (w\bar{w} + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= e^{ikr}\, ik \frac{\omega}{2(\omega\bar{\omega}+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= e^{ikr}\, ik \frac{\omega}{2r}$$

2階微分は、

$$\bar{\partial}^2 e^{ikr} = \bar{\partial}\left(e^{ikr}\, ik \frac{\omega}{2r} \right)$$

$$= \left(\bar{\partial} e^{ikr}\right)\frac{ik\omega}{2r} + e^{ikr}\, ik\omega \left(\bar{\partial}\frac{1}{r}\right)$$

$$= e^{ikr}\left(\frac{ik\omega}{2r}\right)^2 - e^{ikr}\, ik\omega \frac{\omega}{2r^3}$$

となる。

ここで、

$$\left|\frac{\text{第2項}}{\text{第1項}}\right| = \frac{\left| -e^{ikr}\, ik\omega \frac{\omega}{2r^3} \right|}{\left| e^{ikr}\left(\frac{ik\omega}{2r}\right)^2 \right|}$$

$$= \frac{1}{kr} \ll 1$$

遠方場

であるので、第1項が支配的になる。

$$\bar{\partial}^2 e^{ikr} \simeq e^{ikr}\left(\frac{ik\omega}{2r}\right)^2$$

同様にして、

$$\bar{\partial}^n e^{ikr} = e^{ikr}\left(\frac{ik\omega}{2r}\right)^n\left(1+o\left(\frac{1}{kr}\right)\right)$$ を得る。

よって、

$$\underbrace{\bar{\partial}^n}_{n\text{階微分}} e^{ikr} = e^{ikr}\underbrace{\left(\frac{ik\omega}{2r}\right)^n}_{n\text{乗}}$$

(iii)

十分遠方の位置 $\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_M$ に、単一周波数 ω の点波源 $g_1, \cdots, g_M$ があり、位置 $\mathbf{r}$ に平面波が到来するとき、観測される波動場は

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{M} \frac{g_k}{R} e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k|}$$

となる。n階複素微分は、

$$\bar{\partial}^n \phi(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{M} \frac{g_k}{R} e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k|}\left(\frac{ik(\omega-\omega_k)}{2|\mathbf{r}-\mathbf{r}_k|}\right)^n$$

↓ 観測点を原点にとる。

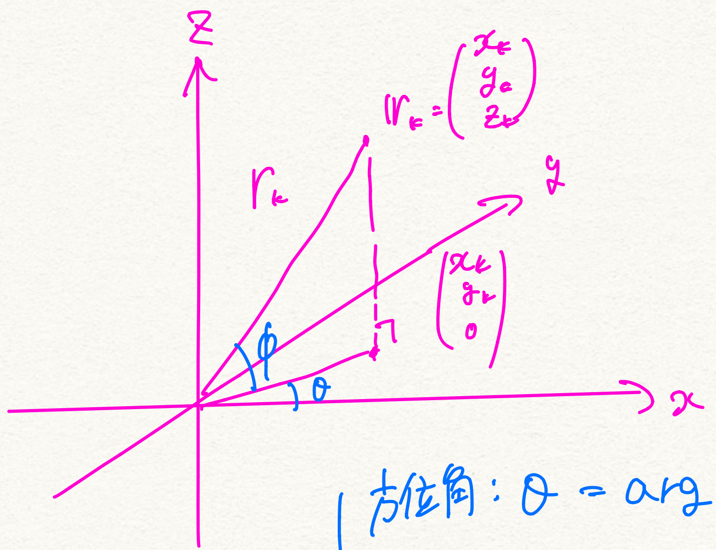
$$\partial^n \phi(0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{g_k}{R} e^{ikr_k} \left(\frac{ikw_k}{r_k}\right)^n$$

モーメント問題に帰着できる！

↓

$\frac{g_k}{R} e^{ikr_k}$ と $\frac{w_k}{r_k}$ が求まる

② $\frac{w_k}{r_k} = \frac{x_k + iy_k}{r_k}$ の幾何的意味



方位角 : $\theta = \arg\left(\frac{w_k}{r_k}\right)$

仰角 : $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x_k^2+y_k^2}}{r_k}\right) = \tan^{-1}\left|\frac{w_k}{r_k}\right|$

遠方場の場合、振幅が小さすぎて
距離を推定することは難しい。

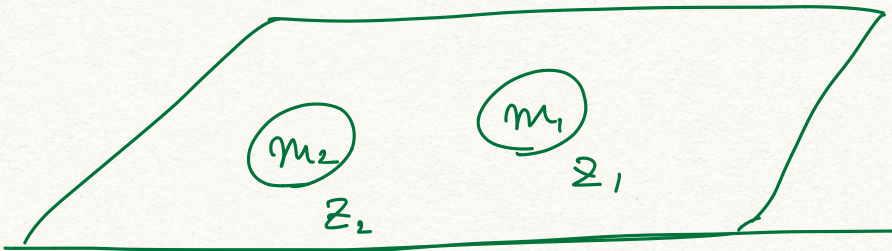
→ 到来方向が求まれば十分

(iii) モーメント問題に対する Prony 法

M = 2 の場合（一般化は簡単）

$$C_n = \sum_{j=1}^{2} m_j z_j^n$$

$$\begin{cases} C_0 = m_1 + m_2 \\ C_1 = m_1 z_1 + m_2 z_2 \\ C_2 = m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2 \\ C_3 = m_1 z_1^3 + m_2 z_2^3 \end{cases}$$



問：$C_0 \sim C_3$ から，z_1，z_2，m_1，m_2 を定めよ．

方針：C_n に関する漸化式を作る

$$C_2 = m_1 z_1^2 + m_2 z_2^2$$

$$= (m_1 z_1 + m_2 z_2)(z_1 + z_2) - m_1 z_1 z_2 - m_2 z_2 z_1$$

$$= (m_1 z_1 + m_2 z_2)(z_1 + z_2) - (m_1 + m_2) z_1 z_2$$

$$= c_1 (z_1 + z_2) - c_0 z_1 z_2$$

同様にして、

$$c_3 = c_2 (z_1 + z_2) - c_1 z_1 z_2$$

↓ 行列で表す

$$\begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z_1 z_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

これは、$z_1 + z_2$、$-z_1 z_2$ に対する線形方程式になる。

$$\det \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = m_1 m_2 (z_1 - z_2)^2 \neq 0$$

Hankel 行列

ゆえ、

$$\begin{pmatrix} -z_1 z_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad z^2 - \alpha z - \beta = 0$$

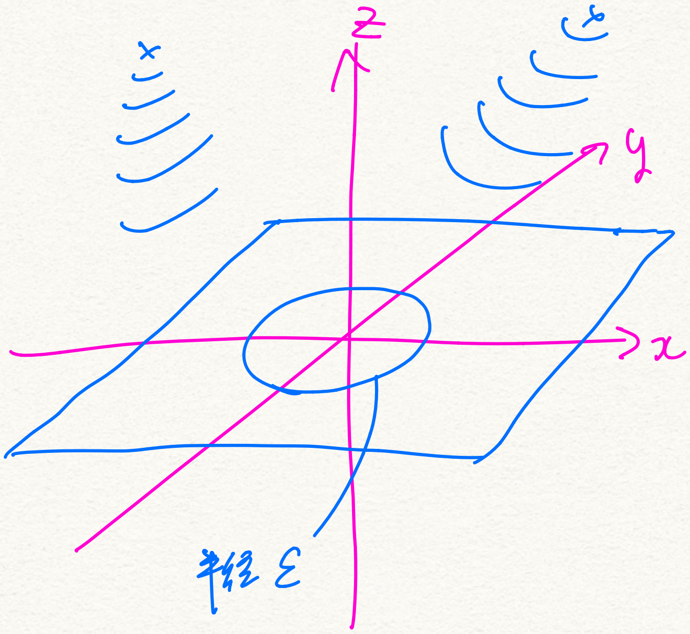
を解けば z_1, z_2 は求まる.

m_1, m_2 は.

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$$

を解けば良い.

⑪ 複素微分とフーリエ係数



xy 平面上、半径 ε の円周上に場 $f(x, y, 0)$ のセンサを配置する.

ポテンシャル場 or 波動場

$f(x, y)$ と略記する

$f(x, y)$ を原点まわりでテイラー展開する

$$f(x, y) = f(w, \bar{w})$$

$$= f(0,0) + \overbrace{w \partial f(0,0) + \bar{w} \bar{\partial} f(0,0)}^{x \partial_x f(0,0) + y \partial_y f(0,0)}$$

$$+\frac{1}{2}\left(w^2\partial^2 f(0,0)+2w\bar{w}\,\partial\bar{\partial} f(0,0)+\bar{w}^2\bar{\partial}^2 f(0,0)\right)$$

$$+\cdots\cdots$$

半径 ε の円周上で観測した f に、$w=\varepsilon e^{i\theta}$ をかけて積分すると、

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(w,\bar{w})\,w\,d\theta$$

$$=\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(w,\bar{w})\,e^{i\theta}\,d\theta$$ … f の円周上の1次フーリエ係数

$$=\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(0,0)\,\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta}_{=0}+\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon e^{i\theta}\,\partial f(0,0)\,\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta}_{=0}$$

$$+\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon e^{-i\theta}\,\bar{\partial} f(0,0)\,\varepsilon e^{i\theta}\,d\theta}_{=\bar{\partial} f(0,0)\,\varepsilon^2}$$

$w\bar{w}^2$ など、w をかけて消える ような項をもつものだけ残る

$$+\cdots\cdots$$

$$=\bar{\partial} f(0,0)\,\varepsilon^2+\frac{1}{3!}\cdot 3\;\partial\bar{\partial}^2 f(0,0)\,\varepsilon^4+\cdots$$

$$= \varepsilon^2 \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\partial\bar\partial + Q\varepsilon^4 (\partial\bar\partial)^2 + \cdots \right) \bar\partial f(0.0)$$

$$= \varepsilon^2 \left(1 + o(\varepsilon^2)\right) \bar\partial f(0.0)$$

したがって.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon\cos\theta.\ \varepsilon\sin\theta)\, e^{i\theta}\, d\theta \simeq \varepsilon\,\bar\partial f(0.0)$$

すなわち. 1階のDbar微分が1階の円周フーリエ係数で計測できる.

同様にして

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\, e^{in\theta}\, d\theta \simeq \varepsilon^n\, \bar\partial^n f(0.0)$$

n階のDbar微分が

n次フーリエ係数において計れる

注

$$\partial\bar\partial = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)\,\frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$$

$$= \frac{1}{4}(\partial_x^2 + \partial_y^2) \quad \cdots \quad \text{2D Laplacian}$$

$f = \frac{1}{r}$ (ポテンシャル場) のとき. ← $\Delta^2 f = 0$

$$\partial\bar{\partial} f = \frac{1}{4}(\partial_x^2 + \partial_y^2) f = -\frac{1}{4}\partial_z^2 f$$

$f = \dfrac{e^{ikr}}{r}$（波動場）のとき

Helmholtz方程式

$\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 = k^2$

$$\partial\bar{\partial} f = \frac{1}{4}(\partial_x^2 + \partial_y^2) f = -\frac{1}{4}(\partial_z^2 + k^2) f$$

$k\varepsilon \ll 1$ となる ε をとる必要がある