⑪ アレイ信号処理

問題設定

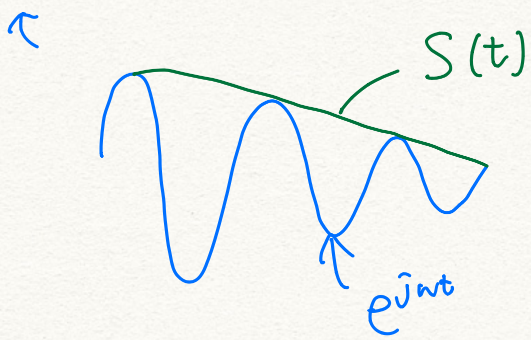
狭帯域波源 $S_1(t)e^{j\omega t}, \cdots\cdots, S_M(t)e^{j\omega t}$

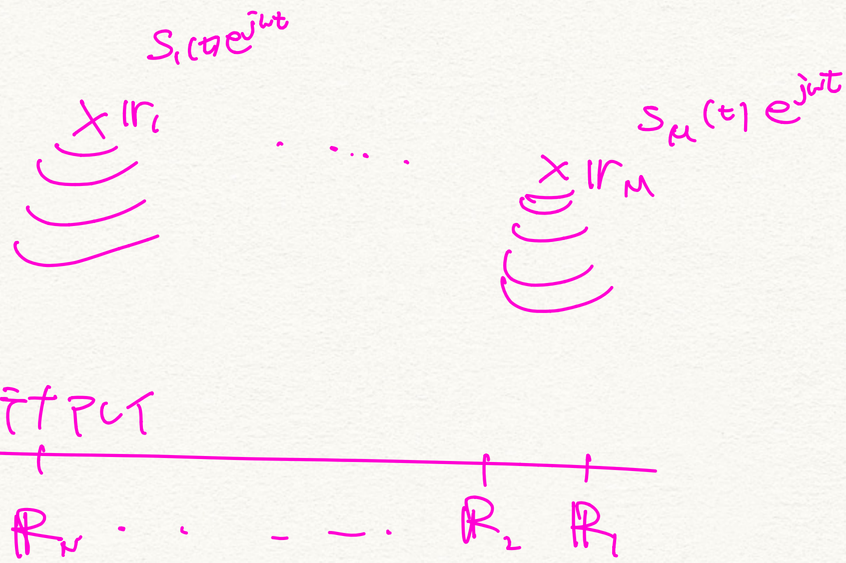
が位置 $r_1 \cdots r_M$ にあり、これを

位置 $R_1 \cdots R_N$ にあるセンサで観測するとする

帯域がせまい

⇒ $S_1(t)$ の変動が、搬送波の角周波数 ω での変化に対して十分ゆるやか





第1波源により生じる波動は第1センサにおいて、

位相ズレ

$$\frac{s_1\left(t-\frac{|\mathbb{R}_1-\mathbb{r}_1|}{c}\right)e^{j\omega\left(t-\frac{|\mathbb{R}_1-\mathbb{r}_1|}{c}\right)}}{\underbrace{|\mathbb{R}_1-\mathbb{r}_1|}_{\text{減衰}}}$$

一周期のあいだに $s_1(t)$ は
ほとんど変動しない（狭帯域性）

$$\simeq \frac{s_1(t)e^{j\omega t}}{|\mathbb{R}_1-\mathbb{r}_1|}e^{-jk|\mathbb{R}_1-\mathbb{r}_1|} \qquad \left(k=\frac{\omega}{c}\right)$$

とかける。したがって、

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_N \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ n \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} m \\ \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \dfrac{e^{-jk|\mathbb{R}_n-\mathbb{r}_m|}}{|\mathbb{R}_n-\mathbb{r}_m|} & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} s_1(t)e^{j\omega t} \\ \vdots \\ s_M(t)e^{j\omega t} \end{pmatrix}$$

未知

$\mathbf{d}$ $\quad$ $\mathbf{G}$ $\quad$ $\mathbf{s}$

$$+ \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_N \end{pmatrix}$$

$\mathbf{n}$

$G = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 & \cdots & \mathbf{g}_M \end{pmatrix}$ としたとき

$$\mathbf{g}_m = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{-jk|\mathbf{R}_1 - \mathbf{r}_m|}}{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{r}_m|} \\ \vdots \\ \dfrac{e^{-jk|\mathbf{R}_N - \mathbf{r}_m|}}{|\mathbf{R}_N - \mathbf{r}_m|} \end{pmatrix}$$

← (振幅の)第m波源がセンサアレイ上につくる波動のパターン

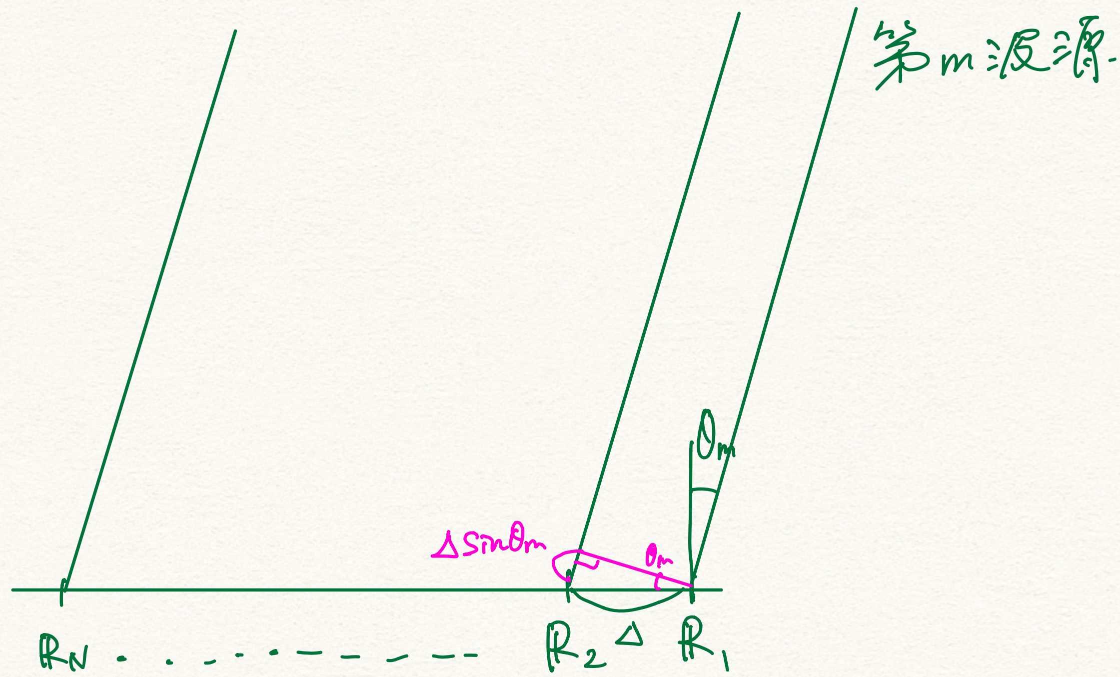
↑

コイルアレイの場合といっしょ!!

また特に,

- 波源が十分遠方にあり.
- 波源とセンサアレイが同一平面上にあり、
- センサアレイは直線状, 等間隔 Δ

の場合.



$\mathbb{r}_1 \cdots \mathbb{r}_M$ は未知だったので, 上の3つの仮定を入れると

$\theta_1 \cdots \theta_M$ の推定問題になる!!

Direction of Arrival (DOA)

$$g_m \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-jk\Delta\sin\theta_m} \\ e^{-2jk\Delta\sin\theta_m} \\ \vdots \\ e^{-(N-1)jk\Delta\sin\theta_m} \end{pmatrix} \frac{e^{-jk|\mathbb{R}_1 - \mathbb{r}_1|}}{|\mathbb{R}_1 - \mathbb{r}_1|}$$

振幅値は共通と近似

$z_m = e^{-jk\Delta\sin\theta_m}$ とおくと

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \ddots & z_M \\ z_1^2 & z_2^2 & & z_M^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_M^{N-1} \end{pmatrix}$$

Vandermonde行列となる.

じゃあどうやって解く?

→ (i) ビームフォーマー法.

遠方場直線アレイの場合の g_m に対して.

$$w(\theta_m) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{jk\Delta\sin\theta_m} \\ \vdots \\ \vdots \\ e^{(N-1)jk\Delta\sin\theta_m} \end{pmatrix}$$

という重みとの内積をとれば.

位相が補正され,絶対値は大きな値となるだろう.

そこで、θ を未知数とする重みベクトル

$$w(\theta) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-jk\Delta\sin\theta} \\ \vdots \\ e^{-(N-1)jk\Delta\sin\theta} \end{pmatrix}$$

H：エルミート転置。
エルミート転置をとってきて
eの頭が正になる様に。負とれ

を考え、

$$y(\theta) = E\left[\,|w^H(\theta)\,d|^2\,\right] \rightarrow \max$$

データ d にノイズが乗っているので、
d は確率変数 → 期待値

となる θ を到来方向とする。

$w(\theta)$：θ 方向に、センサアレイの感度を上げるための重み。

$$y(\theta) = E\left[\,w^H d\,(w^H d)^*\,\right]$$

$$= E\left[\,w^H d\,d^H w\,\right]$$

$$= w^H(\theta)\,\underbrace{E\left[\,d\,d^H\,\right]}_{R}\,w(\theta)$$

データの相関行列。
エルゴード性を仮定して、時間平均でおきかえる

$$R = E[\mathbf{d}\mathbf{d}^H]$$

$$= \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & E[d_i d_j^*] & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} & & \\ & \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} d_i(t_l)\, d_j^*(t_l) & \\ & & \end{pmatrix}$$

エルゴード性

例 単一波源 $S_1(t) = S_1 e^{j\omega t}$ が $\theta = \theta_1$ にあるとき.

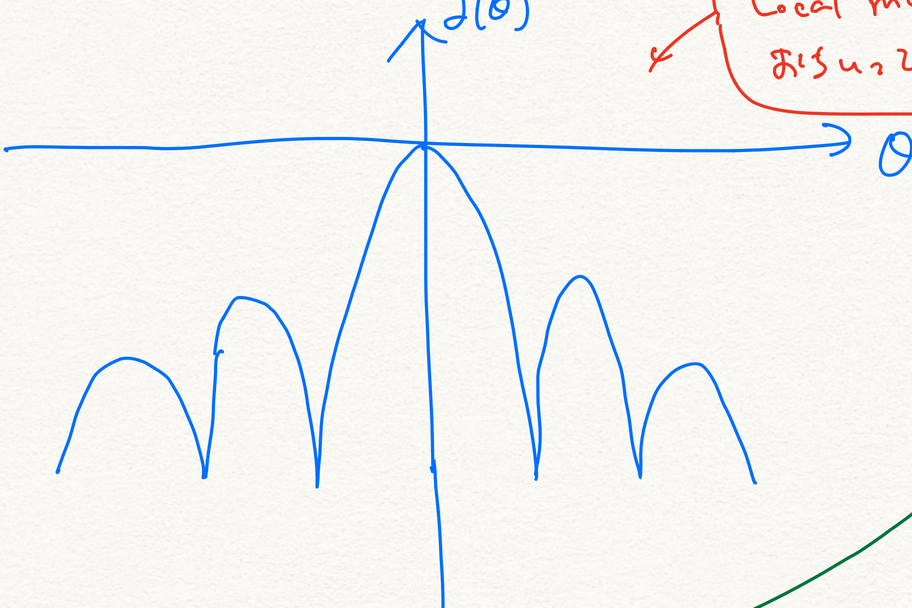
$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-jkd\sin\theta_1} \\ \vdots \\ e^{-(N-1)jkd\sin\theta_1} \end{pmatrix} \frac{S_1 e^{-jk|\mathbb{R}_1 - \mathbb{r}_1|}}{|\mathbb{R}_1 - \mathbb{r}_1|}$$

であり,

$$y(\theta) = E\left[\,|w^H(\theta)\, d|^2\right]$$

$$= E\left[\left|\frac{S_1}{|R_1 - r_1|}\right|^2\right] \left|\underbrace{1 + e^{jk\Delta(\sin\theta - \sin\theta_1)} + \cdots + e^{(N-1)jk\Delta(\sin\theta - \sin\theta_1)}}_{= \frac{1 - e^{jkN\Delta(\sin\theta - \sin\theta_1)}}{1 - e^{jk\Delta(\sin\theta - \sin\theta_1)}}}\right|^2$$

$$\propto \underbrace{\left|\frac{\sin\frac{kN\Delta}{2}(\sin\theta - \sin\theta_1)}{\sin\frac{k\Delta}{2}(\sin\theta - \sin\theta_1)}\right|^2}$$



極大点がたくさんあるので、
Local maximum に
おちいってしまうことが多い!

そこで

⑪ Capon法

Linear Constraint Minimum Variance 法

(LCMV法)

θ方向の波源からの波動パターンは通過させるために

$$w^H a(\theta) = 1$$

という制約を設けた上で（こうすると、θ方向波源がs(t)のときセンサアレイ出力は $w^H s(t) a(\theta) = s(t)$ となり、信号が取り出せる）

他の方向の波源からの波動に関しては、センサアレイ出力を小さくするために

$$E[|w^H d|^2] \to \min.$$

となるような重み w を求める。

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\min. \quad E\left[|w^H d|^2\right] = w^H R w \\ &\text{s.t.} \quad w^H g = 1 \end{aligned}}$$

Lagrangian は

$$J(w) = w^H R w + \lambda (1 - w^H g)$$

$$\frac{\partial J}{\partial w^*} = R w - \lambda g(\theta) = 0$$

よって、Rが正則と仮定すれば、

$$w = \lambda R^{-1} g(\theta)$$

制約条件より

$$\begin{aligned} 1 &= g^H w \\ &= \lambda g^H R^{-1} g \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{1}{g^H R^{-1} g}$$

$$W(\theta) = \frac{R^{-1} g(\theta)}{g^H(\theta) R^{-1} g(\theta)}$$

ここで、このWを用いると、センサアレイ出力の自乗平均は

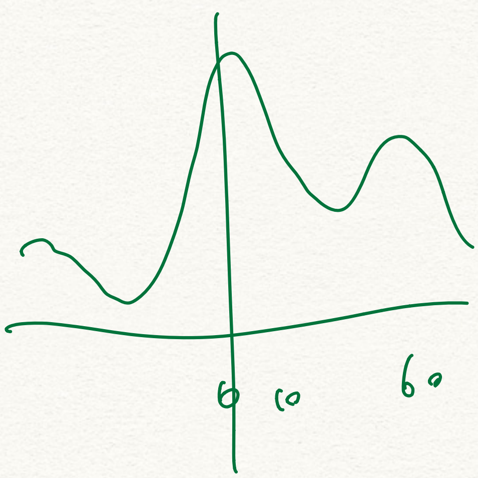
$$y(\theta) = E\left[|W^H d|^2 \right]$$

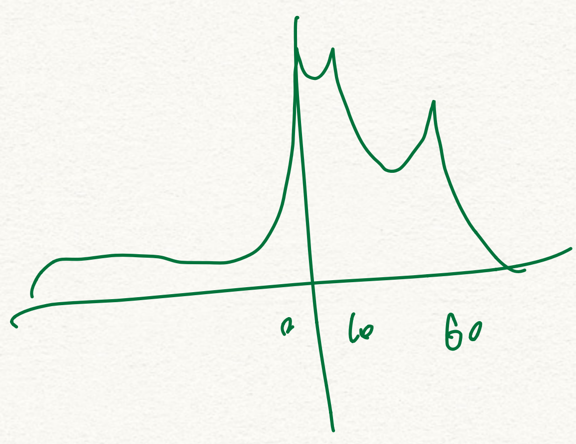
$$= W^H R W$$

$$= \frac{g^H \overset{R^{-1}}{R^{-H}}}{g^H R^{-1} g} R \frac{R^{-1} g}{g^H R^{-1} g}$$

$$= \frac{1}{g^H R^{-1} g}$$

この $y(\theta)$ を極大にする θ をDOAとする.





beamformer

⑫ MUSIC

Multiple Signal Classification

予備的考察

いっそ、すべての波源に感度のNULLを向けるような w を設計しては？ （$\|w^H d\|$ が小さくなる）

単に $\min.\ E[|w^H d|^2]$ とすると、$w=0$ というトリビアルな解しか出ないので

$$\boxed{\begin{aligned} &\min.\ E[|w^H d|^2] \\ &\text{s.t.}\ \ \|w\|^2 = 1 \end{aligned}}$$

とする。

$$J(w) = w^H R w + \lambda (1 - w^H w)$$

$$\frac{\partial J}{\partial w^*} = Rw - \lambda w = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad Rw = \lambda w$$

データの相関行列の固有ベクトル
が、$J(w)$の極小値の候補となる。

また、このとき、

$$y = w^H R w$$

$$= w^H \lambda w$$

$$= \lambda$$

アレイ出力の自乗平均は
Rの固有値そのものとなる。

そこで、Rの固有構造を調べる

ノイズレスの場合。

$$d = G s$$

$$R = E[d d^H]$$

$$= E[G s s^H G^H]$$

$$= G\, E[\mathbf{s}\mathbf{s}^H]\, G^H$$

ここで、

$G = (\mathbf{g}_1 \cdots\cdots \mathbf{g}_M)$ のランクは、

センサアレイ位置と波源位置が特殊でない限り

Mである。よって、

$$G = \sum_{k=1}^{M} \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{u}_k^H$$

SVD

とかける。また、

$$\mathbf{s} = \sum_{k=1}^{M} \alpha_k \mathbf{u}_k$$

と展開できる。よって、

$$R = \sum_{k=1}^{M} \lambda_k \mathbf{v}_k \mathbf{u}_k^H \, E\left[\sum_{k=1}^{M} |\alpha_k|^2 \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^H\right] \sum_{k=1}^{M} \lambda_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^H$$

$$= \sum_{k=1}^{M} |\alpha_k|^2 \lambda_k^2 \mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^H$$

となる。よって

(N×N)の

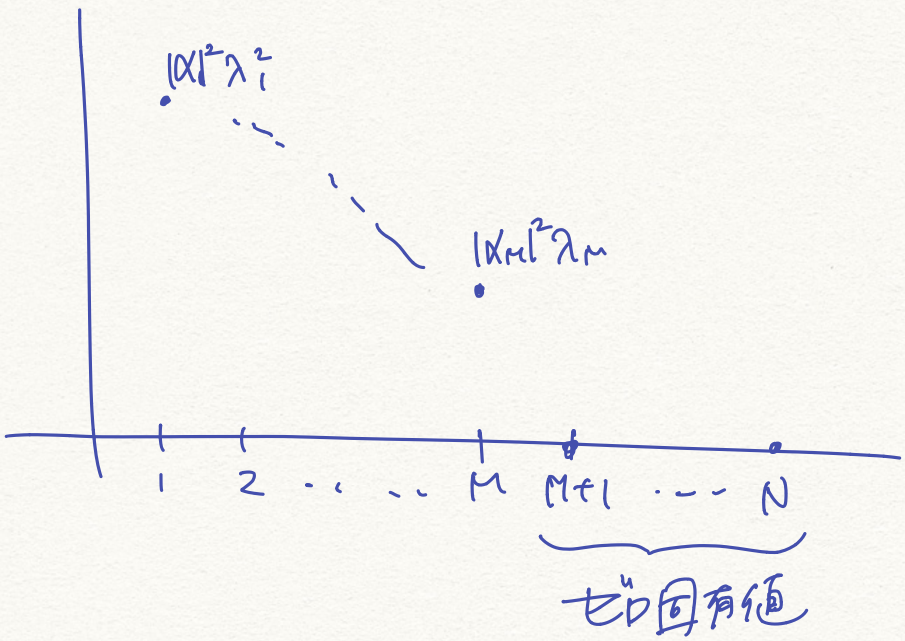
$$R \mathbf{v}_k = |\alpha_k|^2 \lambda_k^2 \mathbf{v}_k$$

$$(k = 1, \cdots, M, M+1, \cdots, N)$$

$$(\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_M, \quad \lambda_{M+1} = \cdots \lambda_N = 0)$$

したがって

- Rの固有ベクトルはGの左特異ベクトル
- Rの固有値は



よって

$$y = w^H R w = \lambda = 0$$

とするには、ゼロ固有値に対応するRの固有ベクトル

$$w = v_{M+1} \cdots v_N$$

を重みとすればよいだろう.