・函数論 … 波動と密接に関係

工学応用例がまだ少ない.

先進的な分野 (エキサイティング!)

(iii) 逆問題の不適切性 (ill-posedness)

Well-posed

① Solution exists

② a solution is unique

③ the solution's behavior changes continuously with the initial conditions.

例

点光源 $\delta(x, y)$ を撮像したとき

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi a^2} & x^2 + y^2 \leq a^2 \\ 0 & x^2 + y^2 > a^2 \end{cases}$$

インパルス応答
点応答関数
Green関数

となる撮像系を考える.

この撮像系で原画像 $s(x,y)$ を撮像し、

$$\underset{\text{(data)}}{d(x,y)} = \underbrace{\iint \overset{\text{(source)}}{s(x',y')}\, g(x-x',y-y')\,dx'dy'}_{\substack{\text{たたみこみ} \\ \text{(ぼけた画像)}}} + n(x,y)$$

が得られたとする

$$d(x,y) \longrightarrow s(x,y)$$

を復元する。

解

両辺 Fourier 変換すると

$$D(u,v) = S(u,v)\,G(u,v) + N(u,v)$$

よって、

推定値

$$\hat{S}(u,v) = \frac{D(u,v)}{G(u,v)}$$

$$= S(u,v) + \frac{N(u,v)}{G(u,v)}$$

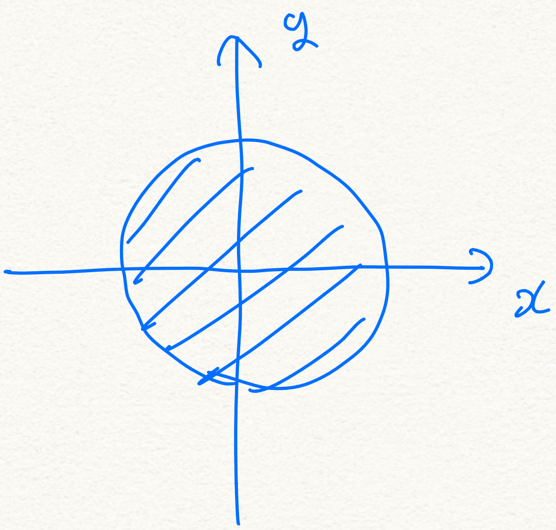
不適切性の原因

$\boxed{\text{G(u, v) がローパスフィルタ特性をもっていると、ノイズの高周波成分が増幅される}}$

微小なノイズが混入しただけで推定値が大きく変化する。

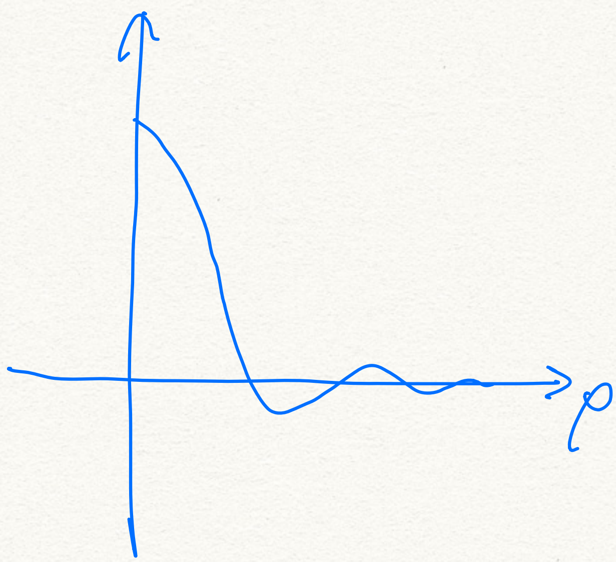
g(x, y) の Fourier 変換

g(x, y)



$\mathcal{F}$

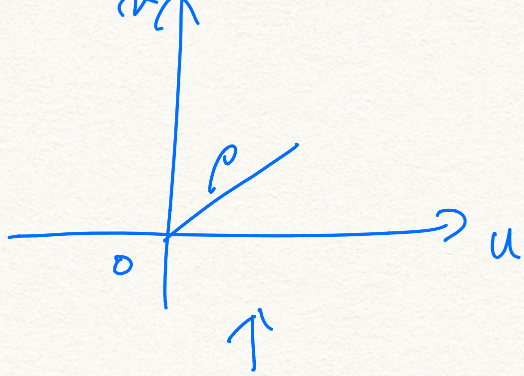
Jinc 関数



$$\left(\frac{J_1(2\pi a\rho)}{\pi a\rho} \right)$$

J_1: 第1種ベッセル関数

ρ の意味　$\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$



$\begin{cases} \cdot\ \text{ローパスフィルタ} \propto \dfrac{1}{\rho} \\ \cdot\ \text{ゼロ点がある} \end{cases}$

$\downarrow$ 発散!!

(iii) $g(x, y)$ を実際に Fourier 変換

$$G(u, v) = F[g(x, y)]$$

$\downarrow$ 極座標系の FT

$$= \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi a^2} e^{-2\pi j(ur\cos\theta + vr\sin\theta)} r\, d\theta\, dr$$

$$= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a r \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-2\pi j r\sqrt{u^2+v^2}\cos(\theta+\alpha)} d\theta}_{\substack{\shortparallel \\ J_0(2\pi j \rho r)}} dr$$

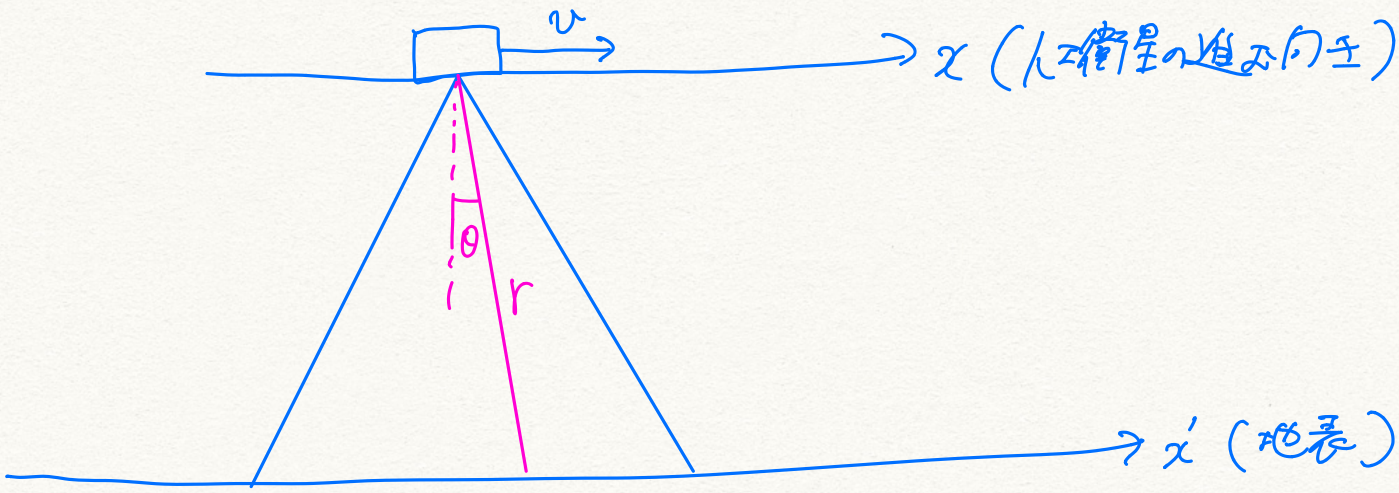
$$= \frac{J_1(2\pi a\rho)}{\pi a\rho}$$

(iii) 逆問題の設計（$G(u,v)$ がローパスじゃなくすればよい）

→ 高周波までゲインが落ちないような計測系を使うのが得策

→ 積分核の選択

(例) 合成開口レーダー（よくできている）



地表面の反射率：$\underbrace{f(x')}_{\text{信号源}}$

- 人工衛星からマイクロ波（GHz）を地表に放射し、反射波が戻ってくるまでに移動するキョリ

$$\delta \equiv v\frac{2r}{c} \ll 2r$$

は十分小さく（$v \ll c$）、送受信は同地点で行うものとする。

- ただし、時刻 t における受信波の位相は

$$e^{j\omega\left(t-\frac{2r}{c}\right)} = e^{j\left(\omega t - 2\pi\frac{2r}{\lambda}\right)} \leftarrow \frac{\omega}{c}=\frac{2\pi}{\lambda}$$

となり、$\frac{2r}{\lambda}$。したがって位相変化は無視できない

$$\begin{pmatrix} 300\mathrm{MHz} \to 1\mathrm{m} \\ 3\mathrm{GHz} \to 0.1\mathrm{m} \end{pmatrix}$$

- より正確には、地点 x から送信され地表の x' で反射され、戻ってきた電波は

$$\underbrace{a(\theta)}_{\text{アンテナの指向性}} A \frac{e^{j(\omega t - \overbrace{2kr}^{\text{キョリ}2r\text{移動する際の位相}})}}{\underbrace{r}_{\text{往路減衰}}} \underbrace{S(x')}_{\text{反射率}} \underbrace{\frac{1}{r}}_{\text{復路減衰}} \underbrace{a(\theta)}_{\text{受信の指向性}}$$

として計測される

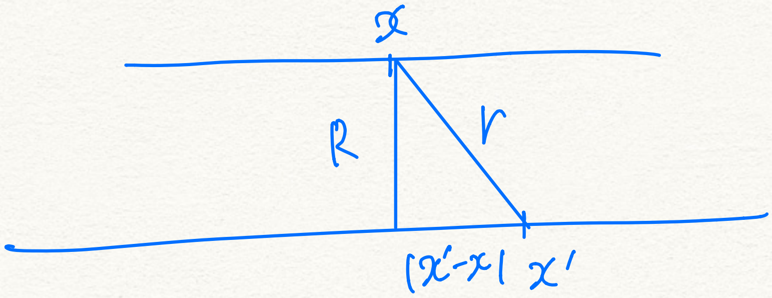
- したがって、地表の全地点からの反射の和として、

$$d(x) = \int A \frac{e^{j(\omega t - 2kr)}}{r^2} S(x')\, a^2(\theta)\, dx'$$

得られるデータ

が観測される。

・ここで、rは、



$$r = \sqrt{R^2+(x-x')^2}$$

$$= R\left(1+\left(\frac{x-x'}{R}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

なので、これを代入し、Taylor展開すると、

$$d(x) \simeq \int A\frac{1}{R^2}\left(1-\underbrace{\left(\frac{x-x'}{R}\right)^2}_{\text{1に対し無視できる}}\right) S(x')\, e^{j\left(\omega t-2kR\left(1+\frac{(x-x')^2}{2R^2}\right)\right)}\, a^2(x-x')\, dx'$$

無視できない

$$\left(k\frac{(x-x')^2}{R} = 2\pi\frac{x-x'}{\lambda}\frac{x-x'}{R}\right)$$

$$= \frac{Ae^{j(\omega t-2kR)}}{R^2}\underbrace{\int S(x')\, e^{-jk\frac{(x-x')^2}{R}}\, a^2(x-x')\, dx'}$$

Convolutionを作れた!!

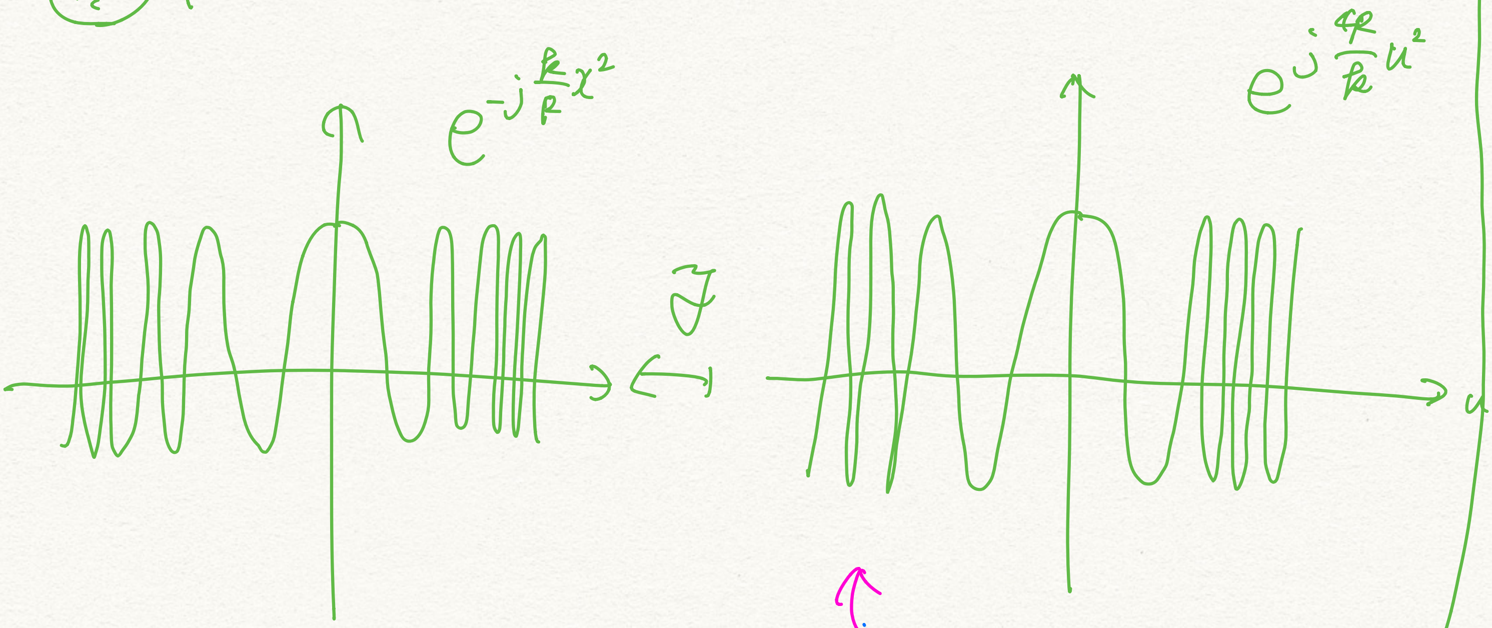
• Convolution のカーネルは、

$$g(x) = a(x)\cdot \underbrace{e^{-j\frac{k}{R}x^2}}_{}$$

Frenel 核

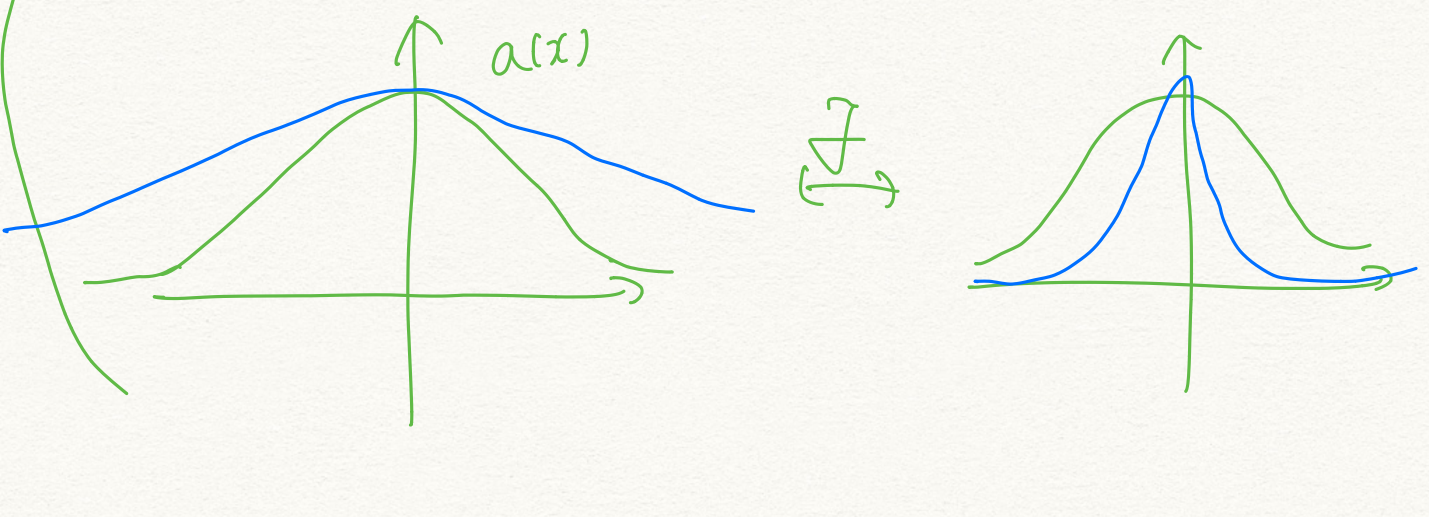
であり、これが計測系の Green 関数である。

※ FT of Frenel 核 = Frenel

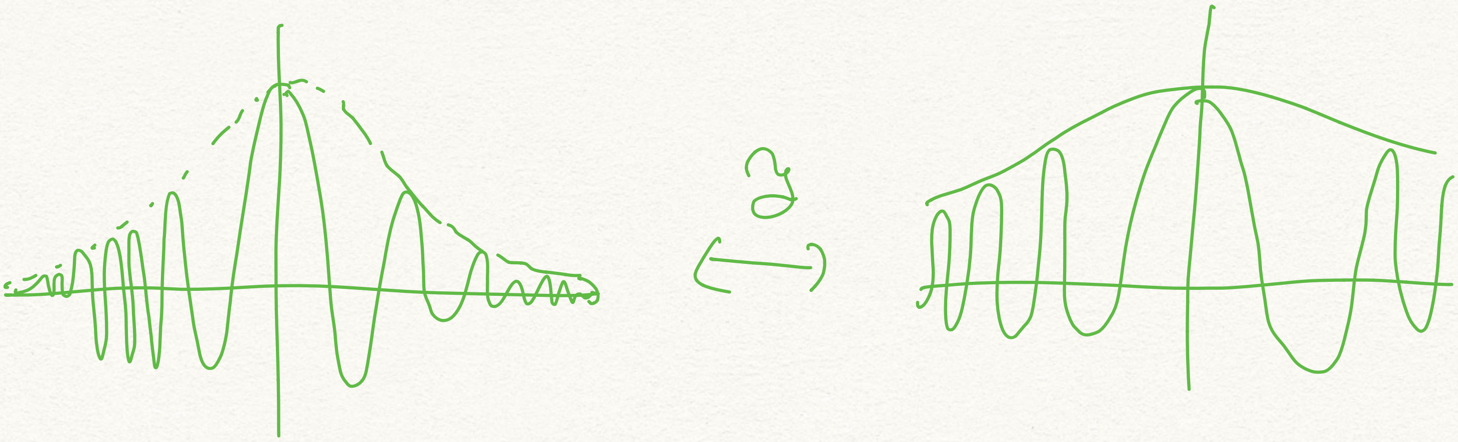


高周波領域でも減衰していない!!

※ a(x) が Gaussian の場合



$g(x) = e^{-j\frac{k}{R}x^2} a(x)$ $\qquad$ $G(u) = A * e^{j\frac{4R}{k}u^2}$



結論

アンテナの指向特性を広く取ることにより、
高周波域の減衰を小さくすることができる

・次に、$a(x) = 1$ の場合に逆フィルタを考える

$$g(x) = e^{-j\frac{k}{R}x^2} \longleftrightarrow G(u) = e^{j\frac{4R}{k}u^2}$$

$$e^{j\frac{k}{R}x^2} \longleftrightarrow \frac{1}{G(u)} = e^{-j\frac{4R}{k}u^2}$$

であるから、

$$d(x) = \frac{A e^{j(\omega t - 2kR)}}{R^2} \underbrace{\int \delta(x') e^{-j\frac{k}{R}(x-x')^2} dx'}_{=\tilde{d}(x)}$$

とすると、

$$\delta(x') = \int \underbrace{\tilde{d}(x)}_{\text{計測値}} e^{j\frac{k}{R}(x-x')^2} dx$$

放射と受信の間でおきる位相のズレを修正するみたいなイメージ。

計測値と Frenel 核の convolution をとるだけで、反射率を推定できる！

能動逆問題

= 積分核 $g(x)$ を選択できる。

ベイズの事前確率っぽい？

⑪ ブラックホール撮影

$$g(x) = \underbrace{a(x)}_{\text{指向性}} \underbrace{e^{-j\frac{k}{R}x^2}}_{\text{Fresnel核}}$$

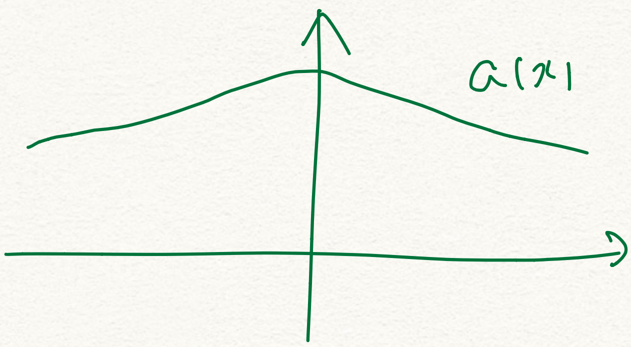
※ 指向性が高いほど高解像度

指向性が高い

↓

$$a(x) = B\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$ (ガウシアン)

の分散 σ^2 が大きい

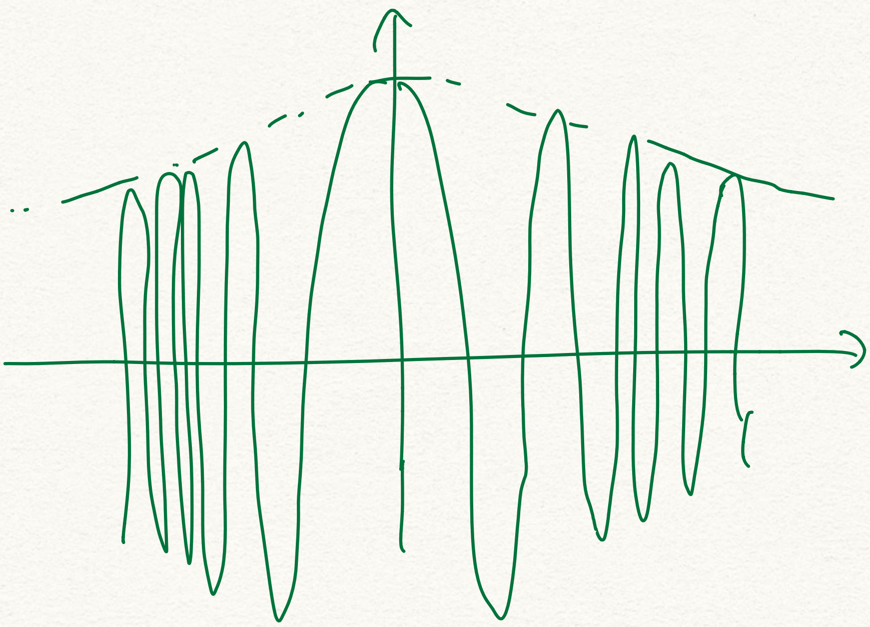


↓

g(x) はこんな感じ

g(x)のフーリエ変換 G(u)はこんな感じ…

$$G(u) = A * e^{i\frac{4\pi}{b}u^2}$$



高周波成分の減衰が少ない

→ 高解像度!

↓

つまり、ブラックホールを撮像する際、アンテナの指向性を高くすれば良いのだが、1つのアンテナでは口径に限度がある

↓

複数のアンテナを世界各地に配置すれば良い!!