

⑩ Euler の 同 次 方 程 式

↑ 説明 形式と積分形式
下記簡単な問題解法.

⑪ 不 磁 気 双 子 定 位 逆 問 題

P : 双子モーティト
 r_0

距離が遠い時、 $\propto -2(2r^2 - 1)$
と表せる = $\propto r^{-2}$ となる。

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3P \cdot (r - r_0)}{|r - r_0|^5} (r - r_0) - \frac{P}{|r - r_0|^3} \right)$$

⑫ Euler の 同 次 関 数

$t \in \mathbb{R}, (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$

$z, f(x, y, z)$ で

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$$

のとき、 $f(x, y, z)$ は n 次 同 次 関 数 である。

(341)

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$f(tx, ty, tz) = \frac{1}{t\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = t^{-1} f(x, y, z)$$

球対称 \rightarrow 球面上のベクトル相似

場の範囲が距離の -1 倍で減衰する

示してみる。

(342)

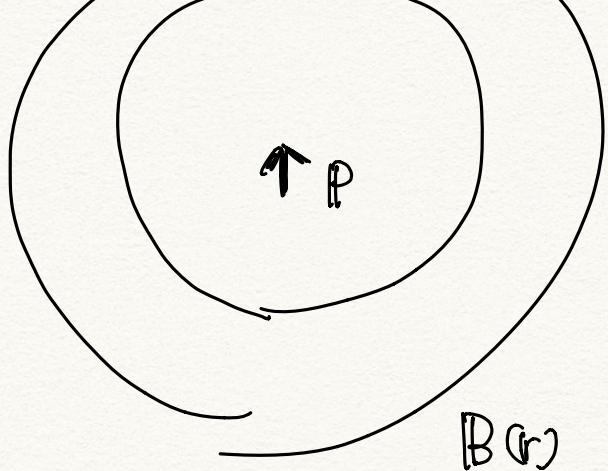
$$\text{7) 積分 } \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\Sigma} \vec{n} \cdot d\vec{\sigma} = f(r) = \frac{p \cdot r}{|r|^3} = \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

\downarrow
-2 次(1 次関数)

球面の半径を k 倍する。範囲は $\frac{1}{k^2}$ 倍

つまり p は k の k^2 倍

④ (343) : 磁気双極子は磁石場



$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3P \cdot r}{|r|^5} |r - \frac{P}{|r|^3}| \right)$$

$$\begin{aligned} B(t|r) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3P \cdot tr}{t^5|r|^5} tr - \frac{P}{t^3|r|^3} \right) \\ &= t^{-3} B(r) \end{aligned}$$

→ 3次同次関係式

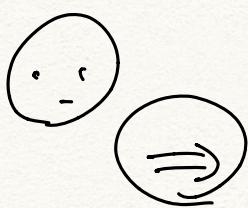
(11) Eulerの同次関係式

$f(x, y, z)$ の n 次同次関係式

$$\Leftrightarrow f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$$

for $\forall t \in \mathbb{R}, (x, y, z) \in (-\infty, \infty)$

$$\Leftrightarrow \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) f(x, y, z) = n f(x, y, z)$$



x, y, z を 固定し。

$$U(t) = tx, \quad V(t) = ty, \quad W(t) = tz \quad \text{を} \quad$$

$$f(U(t), V(t), W(t)) = t^n f(x, y, z)$$

$t \in t^2$ 後々

$$\frac{\partial f}{\partial u} x + \frac{\partial f}{\partial v} y + \frac{\partial f}{\partial w} z = n t^{n-1} f(x, y, z)$$

t の $\{x, y, z\}$, $x=1$ の $\{y, z\}$.

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = n f(x, y, z)$$

③

←

$$g(t) = f(tx, ty, tz) - t^n f(x, y, z)$$

を $\{x, y, z\}$ の $\{tx, ty, tz\}$ に置き換える

≠?

$$\begin{aligned} \frac{dg(t)}{dt} &= \left(x \frac{\partial}{\partial u} + y \frac{\partial}{\partial v} + z \frac{\partial}{\partial w} \right) f(U(t), V(t), W(t)) \\ &\quad - n t^{n-1} f(x, y, z) \end{aligned}$$

$$= t^{-1} \left(\left(u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v} + w \frac{\partial}{\partial w} \right) f(u, v, w) - n t^n f(x, y, z) \right)$$

$$= t^{-1} \left(n f(u, v, w) - n t^n f(x, y, z) \right)$$

$$= t^{-1} \left(n f(tx, ty, tz) - n t^n f(x, y, z) \right)$$

$$= t^{-1} n g(t)$$

$$\therefore \frac{dg}{dt} = \frac{n}{t} g$$

$$\frac{dg}{g} = \frac{n}{t} dt$$

$$\log g(t) = n \log t + C$$

$$g(t) = C t^n$$

$$\downarrow \quad g(0) = 0 \text{ 且 } C = 0$$

$$g(t) = 0 \quad \text{(a)}$$

④ Euler の 同次関係式の意味

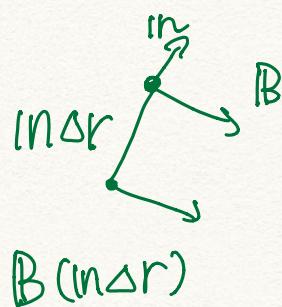
$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) f = nf$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{lr \cdot \nabla f}_\text{r方向微分} = nf \quad (lr = (x, y, z)^\top)$$

\Rightarrow 球面上で相似なパラメータの差分も

やはり相似

⑤ 磁気ダイポール推定における同次関係式



$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(p \cdot m)m - p}{r^3}$$

相似移動しても分子
分母も同じ

相似度数3を減算
3を2で

$$B(r\Delta r) - B = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\rho \cdot n)m - P}{r^3} \Delta r$$

$$= -\frac{3}{r} B \Delta r \quad \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^3} = -\frac{3}{r} \cdot \frac{1}{r^3} \right)$$

位置 r_0 を中心とする相似変換 - パンツアーリー

同次関係式(2)

$$(r - r_0) \cdot \nabla B = -3B$$

相似変換
Y-2の関連

$$\Leftrightarrow ((x-x_0)\partial_x + (y-y_0)\partial_y + (z-z_0)\partial_z) \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \partial_x B_x & \partial_y B_x & \partial_z B_x \\ \partial_x B_y & \partial_y B_y & \partial_z B_y \\ \partial_x B_z & \partial_y B_z & \partial_z B_z \end{pmatrix} (r - r_0) = -3 \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

位置 $r = r_0 + 3$ 磁場の関係式

(勾配を計算)

$\nabla B \cdot r = 0$

これが角周(アーチロード)つまり.

free: $|r_0| = \rho^{\frac{1}{2}}$ の線形方程式

↓ Euler の次関係式を用いる

線形方程式の意味!

勾配テンソル = 微分行列

(III) 勾配テンソル G が下をもつ.

$$\det G = \left(\frac{3\mu_0}{4\pi|r_0|^5} \right)^3 (P \cdot r_0)^3 (1 + \sec^2 \theta)$$

$P \times r_0$ が直交するとき半特異.



(II) G_a 特異値分解

$$G \Big|_{P \cdot r_0 = 0} = - \frac{3\mu_0}{4\pi|r_0|^5} (P r_0^\top + r_0 P^\top)$$

$$= - \frac{3\mu_0 |P|}{4\pi |r_0|^4} \left(\frac{P}{|P|} \frac{|r_0^\top|}{|r_0|} + \frac{|r_0|}{|r_0|} \frac{P^\top}{|P|} \right)$$

↑
2つの非零特異値
(2等しい)

↑
 $G_a \hat{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

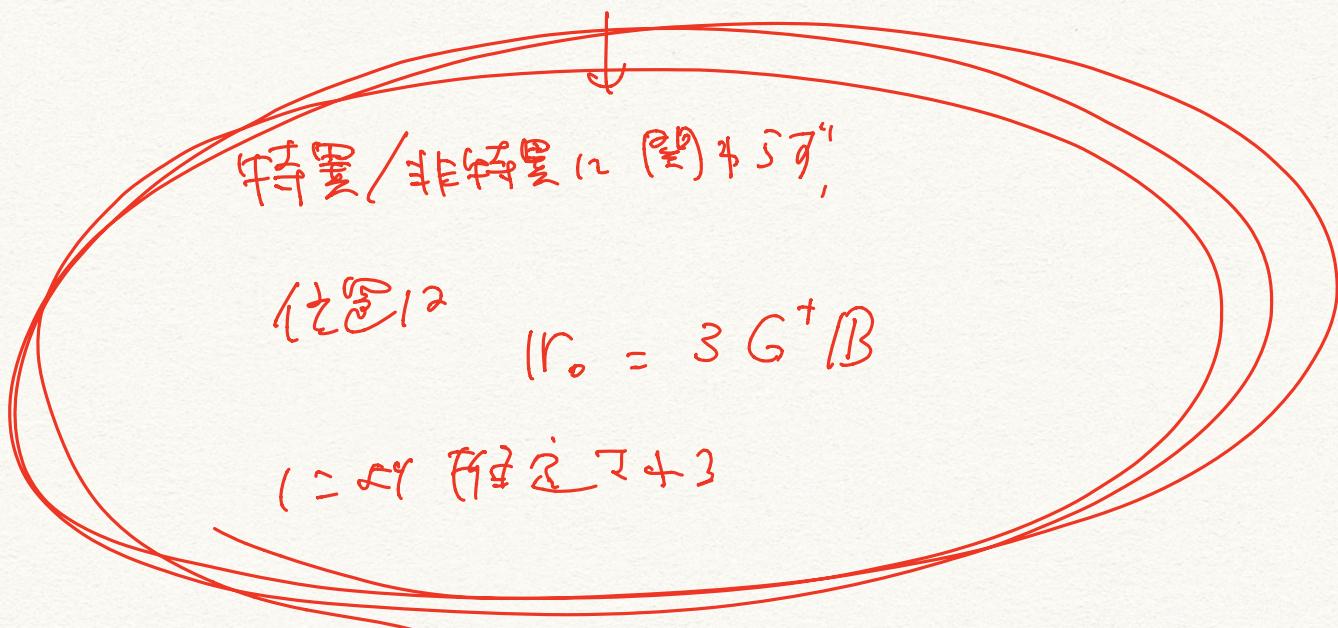
\downarrow
Moore - Penrose - 般化逆行^{3.1}

$$G^+ = \frac{4\pi(r_0)^4}{3\mu_0|P|} \left(\frac{(r_0)}{|(r_0)|} \frac{P^\top}{|P|} + \frac{|P|}{|(P)|} \frac{|r_0|^\top}{|(r_0)|} \right)$$

回次⁽¹⁾ 係式: $G|r_0 = 3B$

特異条件との確執ベクトル: $B = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{P}{|(r_0)|^3}$

$$\therefore 3G^+B = \frac{(r_0)^4}{|P|} \frac{|r_0|}{|(r_0)|} \frac{P^\top}{|P|} \frac{P}{|(r_0)|^3} = r_0$$



$D \times B = 0$ 且し 匀配²-YUVZ 対称

$D \cdot B = 0$ 且し $\text{tr}(G) = 0$

④ 従卵観測量 解消を行って Euler 方程式を div 形式
 (=書き出し)
 差分の観測は難しい。

$$-3 \text{ 次 } \nabla \cdot \text{ Euler 方程式} \quad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \nabla \mathbf{B} + \underbrace{3 \mathbf{B}}_{\mathbf{R} \cdot \mathbf{r}} = 0$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R} \cdot \mathbf{r} &= \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y + \frac{\partial}{\partial z} z \\ &= 3 \\ \mathbf{R}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) &\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \nabla \mathbf{B}_i + \nabla \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \mathbf{B}_i = 0 \quad (i=x,y,z)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\nabla \cdot (\mathbf{B}_i(\mathbf{r}) (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0))}_{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 (= \text{観測した } \mathbf{B} \text{ を } \mathbf{P} \text{ にて } \mathbf{r})} = 0$$

$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 (= \text{観測した } \mathbf{B} \text{ を } \mathbf{P} \text{ にて } \mathbf{r})$

もの (ベクトル場) の div が 0 なら

↓ (任意領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ で) 体積積分

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{B}_i(\mathbf{r}) (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)) \, dv = 0$$

↓

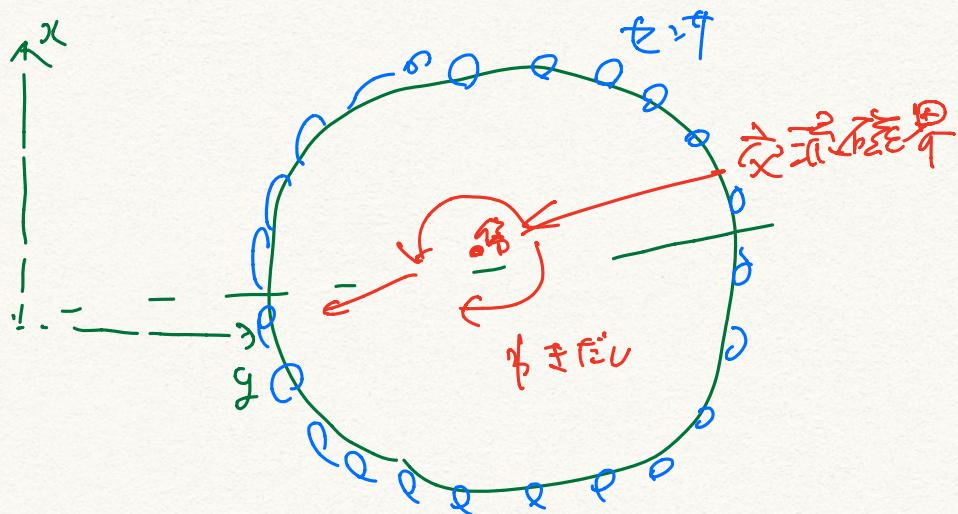
$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{B}_i(\mathbf{r}) (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$

• $(\mathbf{r}_0 (= \mathbf{P}))$ で 線形方程式

• 必要な検査測量 = 2点上のBの荷重平均
 (往復量が一回満足した!)

⑬ Application : 非破壊検査

荷重条件の下での傷を推定する。



⑭ rot型の方程式 ← 弧が円周上に並んでるときの便利

$$\nabla \times (B_z(r)(r - r_0)) = 0$$

(∴)

$$\nabla \times (B_z(r)(r - r_0)) = \nabla B_z(r) \times (r - r_0) + B_z(r) \nabla \times (r - r_0)$$

$$= P_z \frac{r - r_0}{|r - r_0|^5} \times (r - r_0)$$

$$= 0$$

$$\oint_S \left(D \times B_z(r)(|r - r_0|) \right) \cdot dS = 0$$



$$\oint_{\partial S} B_z(r)(|r - r_0|) \cdot dS = 0$$



$|r_0| (= 開口)$ 線形方程式

又零次根測量: B の荷重線垂直

$$dS: \text{円周} \times \text{端点}$$



$$(r \cdot dS = 0)$$

$$\int_{\partial S} B_z(r) |r_0| \cdot dS = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{2\pi} B_z(r) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} R d\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_0}{z_0} = \frac{\int_0^{2\pi} B_z(R \cos\theta, R \sin\theta, 0) \sin\theta d\theta}{\int_0^{2\pi} B_z(R \cos\theta, R \sin\theta, 0) \cos\theta d\theta}$$

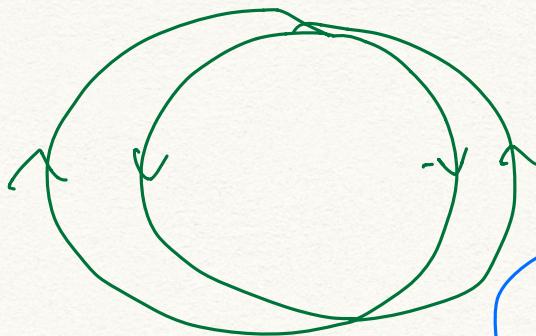


(1)

$\tan\theta_0$

モルタルの 2-4 次元モデル

渦-43 構造モデル： タンク型構造



$$\nabla(wB \cdot (r - r_0))$$

$$= (\nabla w) B \cdot (r - r_0) + w \nabla (B \cdot (r - r_0))$$

④ grad 型 方程式

$$\nabla B \cdot (r - r_0) = \dots = -2B$$

$$\int_P \nabla(wB \cdot (r - r_0)) dS - \int_P (\nabla w) B \cdot (r - r_0) dS$$

$$= \int_P w \nabla B \cdot (r - r_0) dS$$