

WYDZIAŁ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLITECHNIKA WROCŁAWSKA

SYSTEM WSPOMAGAJĄCY  
GRE W DARTA  
Z WYKORZYSTANIEM  
ANALIZY OBRAZU  
W CZASIE RZECZYWISTYM

PIOTR ANDRZEJEWSKI  
NR INDEKSU: 244931

Praca inżynierska napisana  
pod kierunkiem  
dr. Marcina Zawady



Politechnika  
Wrocławskiego

WROCŁAW 2020



# Spis treści

<b>1 Wstęp</b>	<b>1</b>
<b>2 Analiza problemu</b>	<b>3</b>
2.1 Gra w darta . . . . .	3
2.2 Wykrycie rzutu i przypisanie do segmentu . . . . .	4
2.3 Aplikacja mobilna . . . . .	4
2.4 Ograniczenia . . . . .	5
<b>3 Teoretyczne rozwiązanie problemu</b>	<b>7</b>
3.1 Idea rozwiązania . . . . .	7
3.2 Podstawy fotografii . . . . .	8
3.3 Triangulacja . . . . .	9
3.4 Stelaż . . . . .	10
3.5 Obliczenia . . . . .	14
<b>4 Projekt systemu</b>	<b>21</b>
4.1 Przypadki użycia . . . . .	21
4.2 Urządzenia i komponenty . . . . .	21
4.3 Diagramy aktywności . . . . .	21
4.4 Diagramy sekwencji . . . . .	22
4.5 Opis protokołów . . . . .	22
4.6 Algorytm przetwarzania obrazu . . . . .	23
<b>5 Implementacja systemu</b>	<b>27</b>
5.1 Opis urządzeń . . . . .	27
5.1.1 Raspberry Pi . . . . .	27
5.1.2 Kamery . . . . .	27
5.2 Technologie . . . . .	28
5.3 Struktura projektu . . . . .	29
5.4 Efekt końcowy . . . . .	30
5.5 Testy . . . . .	32
5.6 Problemy . . . . .	32
5.7 Prowadzenie projektu . . . . .	33
<b>6 Instalacja i wdrożenie</b>	<b>35</b>
<b>7 Podsumowanie</b>	<b>37</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>39</b>
<b>A Zawartość płyty CD</b>	<b>41</b>



# Wstęp

—tu będzie wstęp—

Wymagania funkcjonalne:

- wykrywanie momentu wbicia rzutki
- obliczanie pozycji wbitej rzutki
- analiza kilku rzutów bez konieczności wyciągania lotek z tarczy
- wyświetlanie informacji dotyczących rzutu w aplikacji mobilnej
- zaznaczanie pozycji rzutki na diagramie tarczy

Wymagania niefunkcjonalne:

- działanie w czasie rzeczywistym, pozwalające na płynną grę
- niski koszt
- duże możliwości konfiguracji



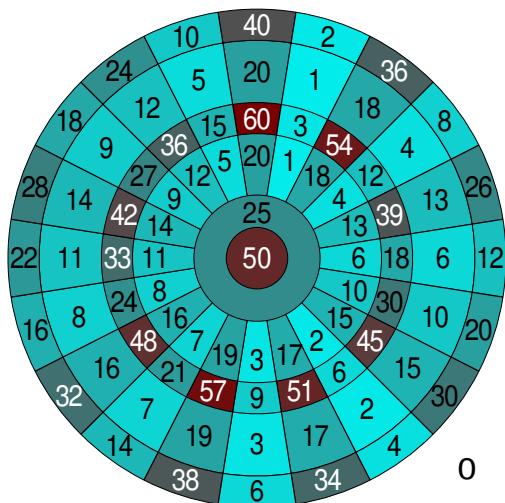
# Analiza problemu

W tym rozdziale przeanalizowano problemy zawarte w tematyce niniejszej pracy oraz przedstawiono wszystkie okoliczności, w jakich system będzie funkcjonował. Omówiono podstawy gry w darta, potrzebne do zrozumienia trudności, którym trzeba sprostać przy projektowaniu i implementacji systemu. Następnie głębiej zbadano wymagania funkcjonalne, wymienione we wstępie. Zostały wprowadzone pewne matematyczne modele, które pomogą w reprezentacji rozwiązania. Podano cel stworzenia aplikacji mobilnej i jej role. Dokładnej analizie zostały poddane ograniczenia i wymagania niefunkcjonalne systemu.

## 2.1 Gra w darta

Dart, znany w Polsce również pod nazwą „rzutki” lub „lotki”, jest grą, w której zawodnicy rzucają lotkami do oddalonej od nich tarczy, w celu zdobycia punktów.

Tarcza, zazwyczaj wykonana z sизalu, znajduje siê na wysoko¶ci 173 cm, w odleg³o¶ci 237 cm od gracza. Ma kszta³t ko³a o średnicy 45 cm i sk³ada siê z pól, którym przyporządkowane s¹ wartości punktowe. Dzieli siê ona na 20 wycinków ko³owych, punktowanych od 1 do 20 (pola standardowe). S¹ one jednak przecie¿ dwoma pierścieniami: *double* (zewnętrzny) i *treble* (wewnętrzny). Trafienie w zewnętrzny pierścieñ oznacza podwojenie liczby punktów przypisanych do danego pola standardowego, a wewnętrzny – potrojenie. Na tarczy znajdują siê tak¿e segmenty *inner bull*, czyli koło znajdujące siê w środku, dające 50 punktów oraz *outer bull* – pierścieñ okalaj±cy środkowe koło, za którego trafienie przyznaje siê 25 punktów. Rzut poza wymienione pola jest liczony za zero punktów. Tarcza wraz z liczbą punktów przypisaną do każdego z pól jest pokazana na rysunku 2.1.



Rysunek 2.1: Tarcza do darta z przypisaniem punktów

Źródło: Cmglee, CC BY-SA 4.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=49462410>

Najpopularniejszym wariantem darta jest 501, w którym gracze rozpoczynają rozgrywkę, mając na koncie



501 punktów. Każdy z nich wykonuje w jednej turze 3 rzuty, a suma zdobytych punktów jest odejmowana od stanu ich konta. Wygrywa ten, kto jako pierwszy osiągnie dokładnie 0 punktów. Innym znany wariantem jest *Round The Clock* – gracze mają za zadanie trafić w każde pole na tarczy z zakresu od 1 do 20 w kolejności zgodnej z ruchem wskazówek zegara, a na końcu w pole *inner bull* (tj. 20, 1, 18, ..., 12, 5, 50).

## 2.2 Wykrycie rzutu i przypisanie do segmentu

Głównym problemem, jakim zajmuje się niniejsza praca, jest wykrycie rzutu przez system, a następnie uzyskanie segmentu, w jaki trafila lotka. Po włączeniu systemu powinien on nieustannie analizować dane wejściowe i wysyłać sygnał, gdy rozpozna, że rzutka wbiła się w tarczę. Sygnał ten rozpoczęcie procesowania danych wejściowych pod kątem obliczenia konkretnej pozycji rzutki. Najczęstszy scenariusz gry w darta wygląda tak, że każdy z graczy rzuca kolejno 3 razy, wyciąga swoje rzutki i tura przechodzi na kolejnego gracza. Z tego powodu do wygody użytkowania potrzebna jest obsługa kilku rzutów (przynajmniej trzech) bez wyciągania rzutki po każdym rzucie. Idealną sytuacją byłaby taka, gdyby bez interwencji użytkownika system był w stanie reagować na poprawne rzuty, ale ignorować wyciąganie lotek z tarczy pomiędzy turami.

Docelową daną wyjściową, którą ma dostarczać system, jest numer jednego z segmentów tarczy. W tym wypadku, zbiorem możliwych rozwiązań byłby

$$W = \{0, 25, 50\} \cup A \cup B \cup C, \text{ gdzie } A = \{1, \dots, 20\}, B = \{2 \cdot a : a \in A\}, C = \{3 \cdot a : a \in A\}.$$

Trzeba jednak zauważyć, że taki sposób reprezentacji powodowałby stratę pewnych informacji. Mianowicie, dla każdego  $w \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$  nie można by było jednoznacznie stwierdzić, jaki segment na tarczy reprezentuje. Przykładowo, pole numer 14 z podwójnego pierścienia (podwojona siódemka), byłoby tak samo przedstawiane jak standardowe pole 14. Należy zatem doprecyzować sposób reprezentacji rzutu: każdy rzut jest przedstawiany jako para  $(w, t)$ , gdzie  $w \in W$  to liczba punktów za rzut, a  $t \in \{S, D, T\}$ .  $S$  oznacza pole standardowe ( $\in A \cup \{0, 25, 50\}$ ),  $D$  – pole podwójne (*double*,  $\in B$ ),  $T$  – pole potrójne (*triple*,  $\in C$ ). Dzięki temu unika się wyżej przedstawionej niejednoznaczności: jeden segment oznacza się jako  $(14, D)$ , a drugi jako  $(14, S)$ .

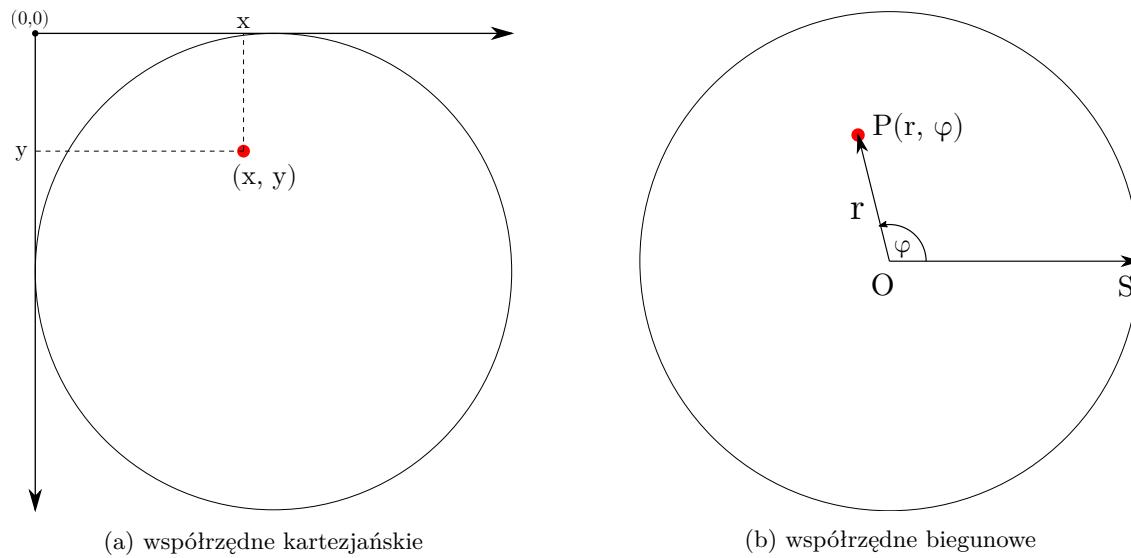
Dodatkowo, przydatne może okazać się zapisanie również pośredniej reprezentacji pozycji rzutki, nie jako konkretnego pola na tarczy, ale dokładnego punktu wbicia. Nie każde rozwiązanie wymaga posiadania takich informacji, ale większość prawdopodobnie będzie je musiała wyliczyć. W takiej sytuacji punkt można przedstawić za pomocą:

- (a) współrzędnych kartezjańskich, tj.  $(x, y)$ , gdzie punkt  $(0, 0)$  to np. lewy górny róg kwadratu opisanego na okręgu tarczy
- (b) współrzędnych biegunowych, tj.  $(r, \varphi)$ , gdzie biegunem  $O$  jest środek tarczy, a oś biegunowa  $OS$  przechodzi przez punkt  $S$  – najbardziej wysunięty na prawo punkt tarczy

Oba podejścia są pokazane na rysunku 2.2.

## 2.3 Aplikacja mobilna

Dodatkową częścią systemu jest aplikacja mobilna, która ma na celu atrakcyjną prezentację danych użytkownikowi, urozmaicenie rozgrywki oraz poprawę użyteczności (*user experience*). W wersji podstawowej, będzie ona przede wszystkim stanowić interfejs graficzny dla systemu wbudowanego. Dzięki aplikacji mobilnej, będzie można oglądać wyniki poszczególnych rzutów oraz oglądać miejsca wbicia rzutki na wirtualnej tarczy. W rozbudowanej wersji, można do aplikacji dodać wiele innych funkcjonalności, np. wpływanie na stan gry lub wyświetlanie statystyk.



Rysunek 2.2: Rodzaje reprezentacji pozycji rzutki.

Źródło: Opracowanie własne.

## 2.4 Ograniczenia

Podczas tworzenia systemu należy pamiętać o ograniczeniach, które należy spełnić, by osiągnąć wszystkie wymagania, również te niefunkcjonalne. Oczywiście ograniczeniem, a jednocześnie wyznacznikiem jakości jest dokładność analizy rzutu. Może być wyrażona w różny sposób, ale ma na celu ukazanie, jak duże i/lub częste są błędy w określaniu pozycji rzutki. Bez względu na rozwiązywanie, dokładność może ważyć się i zależeć od wielu czynników, jednakże uśrednione dane dają natychmiastową informację o tym, na ile użyteczny jest to moduł. Głównym celem niniejszej pracy nie jest maksymalizowanie dokładności, lecz powinna być ona na poziomie pozwalającym na podstawową rozgrywkę.

Innym, istotnym wskaźnikiem działania systemu jest szybkość jego działania. Jednym z celów jest możliwość opisania go jako *system czasu rzeczywistego*. Oznacza to, że jego poprawność nie zależy jedynie od dokładności zwracanych wyników, lecz również od czasu, jaki upłynął od nadejścia danych wejściowych do otrzymania wyniku. Sytuacja z analizą rzutów odzwierciedla taką sytuację – gracz nie chce rzucać wielu rzutek, a następnie, po czasie, zobaczyć statystyki rzutów. Aplikacja powinna działać na zasadzie akcja-reakcja: po każdym z rzutów, w krótkim czasie, powinna się pojawić informacja o wyniku. Efektem pożądanym jest sytuacja, gdy gracz nie będzie musiał czekać z następnym rzutem na zakończenie analizy poprzedniego. W przypadku, gdy oczekiwanie na wynik będzie zbyt długie, system stanie się bezużyteczny, nawet jeśli rezultaty będą bardzo dokładne. Należy zachować balans pomiędzy dokładnością a szybkością działania programu.

Rozwiązywanie powinno być łatwo i szeroko konfigurowalne. Z pewnością pojawią się w nim parametry specyficzne dla np. konkretnej tarczy lub rzutek. Wszystkie tego typu części należy dobrze udokumentować oraz zapewnić prostotę modyfikacji, tak by jeden kod źródłowy mógł być z łatwością używany przez wiele osób, nawet jeśli ich lokalne parametry nie pokrywają się z tymi, które występowały u autora rozwiązania.

Ostatnią, bardziej pragmatyczną restrykcją jest kwestia ceny całego przedsięwzięcia. Tym, co ma wyróżniać niniejsze rozwiązanie od innych jest fakt, że będzie wykonane przy użyciu łatwo dostępnych i możliwie tanich komponentów.



# Teoretyczne rozwiązanie problemu

Ten rozdział ma za zadanie przedstawić teoretyczną (matematyczną) część rozwiązania głównego problemu – uzyskania pozycji rzutki. Na początku zaprezentowany i podzielony na części został ogólny pomysł rozwiązania. Pokazane zostały również alternatywne propozycje podejścia do problemu, wraz z uzasadnieniem, dlaczego nie zostały one wybrane. Następnie omówiono podstawowe terminy i zagadnienia, których znajomość potrzebna jest do pełnego zrozumienia dalszych tematów. Główną częścią rozdziału jest prezentacja wszystkich kluczowych obliczeń i operacji, które zachodzą podczas analizy rzutu, krok po kroku. Detale dotyczące niektórych algorytmów zostaną przedstawione w późniejszych rozdziałach, w tym zaś uznaje się je za tzw. czarne skrzynki (ang. *black box*), to znaczy elementy programu, które przyjmują pewne dane wejściowe i zwracają wyniki, lecz ich implementacja nie jest rozważana.

## 3.1 Idea rozwiązania

Pierwszą decyzją, jaką należało podjąć podczas tworzenia rozwiązania, było ustalenie, na podstawie jakich danych wejściowych system powinien rozpoznawać rzut. Postawiono na ten sam typ danych, którym człowiek posługuje się przy ocenie rzutu, czyli obraz. W systemie rolę wzroku pełnią kamery, które co określony czas dostarczają zdjęcia tarczy. Dzięki ciągłe porównywaniu następujących po sobie klatek, system wykrywa rzut i rozpoczyna przetwarzanie obrazu z wbitym lotką. Do określenia dokładnej pozycji rzutki wykorzystano metodę triangulacji. Pozwala ona na obliczenie dystansu do obiektu za pomocą zdjęć z dwóch kamer. Tarcza i kamery są zamocowane w stelażu o znanych wymiarach. Kamery w ustalonej odległości od siebie, a ich soczewki są ustalone prostopadle do powierzchni tarczy. Następnie, po zmianie układu współrzędnych, dzięki znanym dokładnym wymiarom tarczy, pozycja rzutki jest przyporządkowywana do konkretnego segmentu punktowego.

Pomysłem również opartym na przetwarzaniu obrazu, jest próba uzyskania miejsca wbicia rzutki z użyciem tylko jednej kamery, która jest umiejscowiona przed tarczą, naprzeciw jej. Obniżyłoby to koszty i ułatwiło obliczenia, jednak byłoby niepraktyczne, ponieważ to gracz musi stać na wprost tarczy, a kamera znajdowałaby się pomiędzy nim a tarczą, w środku strefy lotu. Cechowałaby się to także małą przenosalnością, trudno byłoby zawsze ustawić kamerę idealnie na wysokość środka tarczy. Gdyby jednak kamera była przesunięta względem półprostej prostopadłej do płaszczyzny tarczy, przechodzącej przez jej środek, to przetwarzanie obrazu i obliczenia mocno by się utrudniły, gdyż kamera patrzyłaby pod pewnym kątem na tarczę. Trudniejsze byłoby również mocowanie kamery.

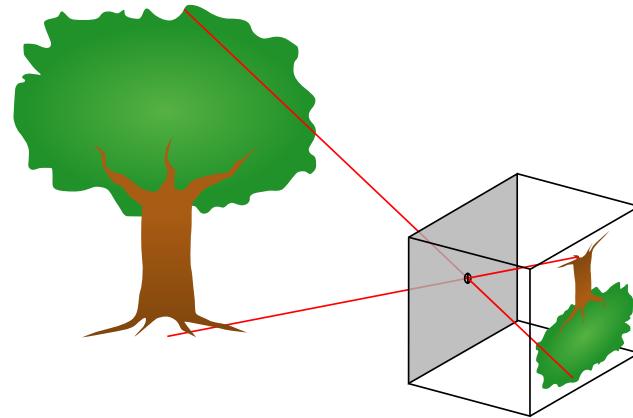
Kolejnym wariantem, branym pod uwagę przy nakreślaniu rozwiązania, było zastosowanie techniki multilateracji, która polega na określaniu położenia obiektu za pomocą mierzenia różnic w czasie dotarcia sygnału do kilku odbiorników. W omawianym przypadku można by użyć mikrofonów na obrzeżach tarczy, które oczekiwali by dźwięk wydany przez wbicie się rzutki. Następnie porównując różnice w czasie wykrycia dźwięku, system mógłby wyliczyć pozycję rzutki. To rozwiązanie również obniżyłoby koszty systemu, lecz dawałoby gorsze rezultaty. Tego typu techniki są przede wszystkim stosowane w geodezji, przy dużych odległościach między odbiornikami a emiterem. Tutaj różnice pomiędzy przybyciem dźwięku do poszczególnych mikrofonów byłyby minimalne, przez co trudne byłoby zachowanie wystarczającej precyzji. Wąskim gardłem byłby również przetwornik analogowo-cyfrowy, ponieważ różnice te mogłyby być mniejsze od różnic w czasie pomiędzy dwiema kolejnymi próbками, powstałymi podczas procesu próbkowania w przetworniku.

Pod uwagę brano również analizę obrazu z użyciem sztucznej inteligencji. Potencjalnie można by wytrenować sieć neuronową na podstawie wielu zdjęć tarczy z wbitym lotką. Najważniejszymi wadami tego rozwiązania w stosunku do metody triangulacji są ograniczone możliwości poprawy w przypadku niesaldo-

walających wyników oraz trudność debugowania. Zaimplementowany ostatecznie sposób można było dużo łatwiej podzielić na części, sprawdzić małe elementy systemu, dzięki czemu błędy w działaniu programu są szybciej lokalizowane i naprawiane. W każdym momencie autor kodu źródłowego jest świadomym, jakie procesy zachodzą w systemie i może na nie wpływać, ograniczona jest rola tzw. czarnych skrzynek. Prawdopodobnie, gdyby użyto sztucznej inteligencji, niemożliwe byłoby uzyskanie np. pozycji rzutki we współrzędnych kartezjańskich, a jedyną daną wyjściową byłoby pole, w jaki trafila lotka.

## 3.2 Podstawy fotografii

Urządzeniem, które jest w stanie dostarczać optyczne odzwierciedlenia ograniczonego wycinka przestrzeni trójwymiarowej za pomocą dwuwymiarowych zdjęć, jest aparat fotograficzny. Z biegiem czasu stawał się on coraz bardziej zaawansowany technologicznie, jednak do potrzeb niniejszej pracy wystarczającym modelem jest pierwszy model aparatu, czyli aparat otworkowy (*camera obscura*). Jego budowa jest bardzo prosta: w zaciemnionym pudełku, na jednej z jego ścian tworzy się niewielki otwór, za pomocą którego wpada światło. Na przeciwniej ścianie tworzy się obrócony obraz tego, co znajduje się na wprost pudelka. Schemat działania aparatu otworkowego pokazany jest na rysunku 3.1.



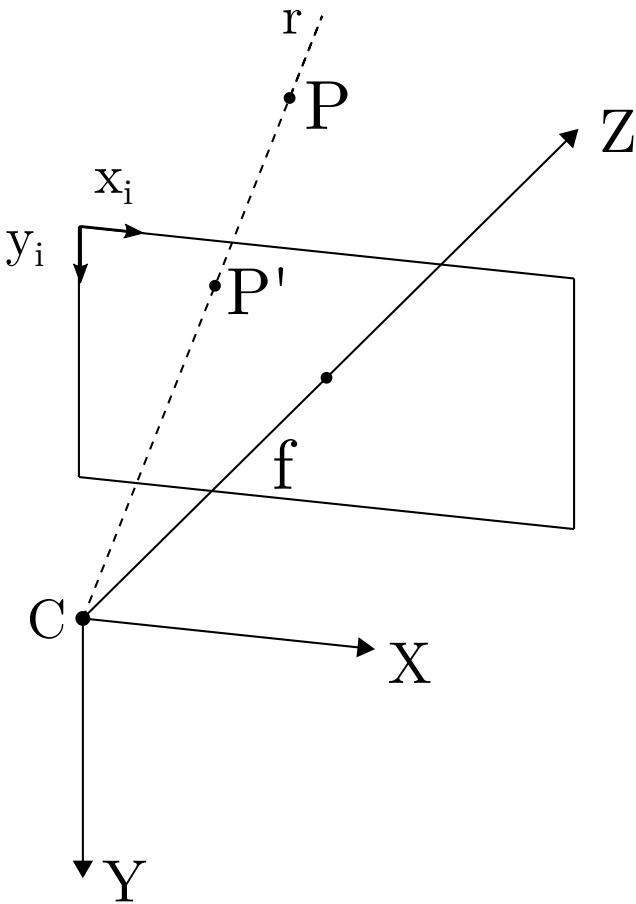
Rysunek 3.1: Zasada działania aparatu otworkowego

Źródło: <http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Pinhole-camera.png>

W schematach (zwłaszcza związanych z grafiką komputerową) często przedstawia się powyższy model w uproszczonej formie, gdzie obraz tworzy się pomiędzy środkiem aparatu (otworem) a fotografowanym obiektem [10]. Przykład takiego schematu jest widoczny na rysunku 3.2. Osie  $XYZ$  reprezentują trójwymiarowy układ współrzędnych, którego początkiem jest środek aparatu, oznaczony jako  $C$ . W tym samym układzie jest fotografowany obiekt (punkt), zaznaczony literą  $P$ . W odległości  $f$  od środka kamery, zwanej jako ogniskowa, znajduje się fragment płaszczyzny, nazywanej płaszczyzną obrazu (eng. *image plane*), na której powstaje obraz. Oś  $Z$  jest do niej prostopadła i przechodzi przez jej środek. Z płaszczyzną związany jest dwuwymiarowy układ współrzędnych. Odzwierciedleniem punktu  $P$  na obrazie jest punkt  $P'$ . Powstaje on na skutek przecięcia się półprostej (eng. *ray*, na rysunku jako  $r$ ) przechodzącej przez środek kamery i punkt  $P$  z płaszczyzną obrazu. Jest to analogia do pojedynczego promienia światła, które wpada przez otwór w aparacie otworkowym. Ponieważ trójwymiarowe punkty są przedstawiane w dwuwymiarowym układzie, tracone są informacje o głębokości, a punkt na obrazie reprezentuje nieskończoną liczbę punktów znajdujących się na prostej  $r$ .

W systemie zostały użyte kamery, dzięki którym można zaobserwować ruch. Ich fizyczna budowa nie różni się od aparatu, są one jedynie przystosowane do tego, by robić wiele zdjęć w krótkim czasie, dzięki czemu, po wyświetleniu zdjęć jeden po drugim, mózg interpretuje je jako ciągły ruch.

Przed przedłożeniem całego procesu przetwarzania i analizy obrazu, należy zrozumieć, czym jest obraz z informatycznego punktu widzenia. Zdjęcie cyfrowe (w grafice rastrowej) interpretowane jest jako macierz  $A_{m \times n} = [a_{ij}]$ , gdzie każdy element  $a_{ij}$  odpowiada jednemu pikselowi, czyli kwadratowi wypełnionemu jed-



Rysunek 3.2: Diagram optyczny aparatu otworkowego  
Źródło: Opracowanie własne

nolitym kolorem. Piksele powstają z podzielenia płaszczyzny obrazu na gęstą siatkę niewielkich kwadratów. Kolor piksela najczęściej reprezentowany jest jako trójką uporządkowana  $(r, g, b)$ , gdzie  $r$  oznacza intensywność koloru czerwonego,  $g$  – zielonego, a  $b$  – niebieskiego. Standardowo, każda z trzech składowych koloru jest zapisywana na 8 bitach i przyjmuje wartości od 0 do 255. Złożenie na siebie tych trzech barw podstawowych w różnym stopniu nasycenia pozwala na przedstawianie dowolnej barwy.

### 3.3 Triangulacja

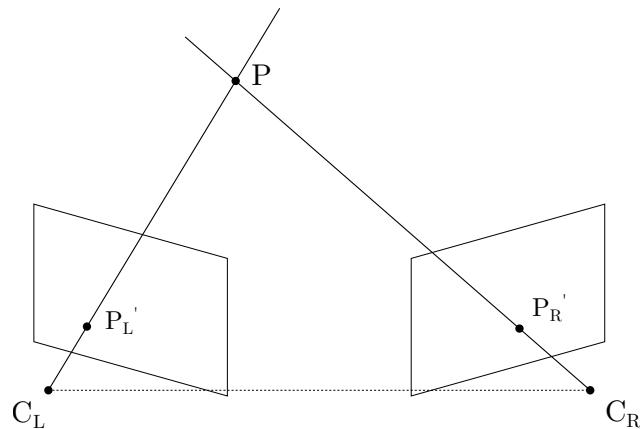
Pojęcie triangulacji jest różnie rozumiane w zależności od okoliczności, w jakich jest używane. W geometrii (podobnie jak w grafice komputerowej) oznacza ono proces podziału figury na trójkąty, w socjologii metodę prowadzenia badań społecznych, zaś w teorii grafów triangulację grafu  $G$  można nazywać maksymalny planarny nadgraf grafu  $G$ . Należy zatem jasno podkreślić, w jaki sposób rozumiany jest ten termin w niniejszej pracy. Wiąże się on z dwoma dziedzinami: geodezją i rozpoznawaniem obrazów (lub widzeniem komputerowym, od ang. *computer vision*). W obu przypadkach oznacza on wyznaczenie pozycji lub odległości do obiektu za pomocą danych z dwóch miejsc, pomiędzy którymi dystans jest znany.

Triangulacja w geodezji jest używana od wielu lat, dzięki niej uzyskano przybliżone wymiary Ziemi oraz skonstruowano wiele map. Znając położenie punktów  $A$  i  $B$ , możliwe jest uzyskanie pozycji punktu  $C$ , widocznego z  $A$  i  $B$ . W tym celu, oblicza się kąty  $\angle CAB$  z punktu  $A$  i  $\angle CBA$  z punktu  $B$ . Następnie, konstruuje się trójkąt  $ABC$ . Znając długość odcinka  $|AB|$  i oba kąty z nim sąsiadujące, możliwe jest jednoznaczne



wyznaczenie wszystkich boków trójkąta, dzięki czemu uzyskuje się odległość do mierzonego obiektu. Dzięki powtarzaniu tej metody, gdzie nowo zmierzony punkt staje się daną wejściową do kolejnego pomiaru, możliwe jest tworzenie całych sieci triangulacyjnych, np. pomiędzy miastami.

Rozpoznawanie obrazów interpretuje triangulację bezpośrednio w odniesieniu do zdjęć. Do wytłumaczenia pojęcia w tym kontekście często używa się geometrii epipolarnej (wielobiegunowej). Polega ona na umieszczeniu dwóch modeli z rysunku 3.2 w jednym układzie. Typowy, prosty model tej geometrii, przedstawiono na rysunku 3.3. Widać na nim dwa aparaty (model otworkowy), ustawione pod kątem 45 stopni do czytelnika, gdzie kąt pomiędzy jednym a drugim aparatem wynosi 90 stopni. Na podstawie danych z jednej kamery można uzyskać informację o półprostej przechodzącej przez szukany punkt. Dwie kamery dają dwie takie półproste, których miejsce przecięcia określi jednoznacznie położenie obiektu. Niestety, w rzeczywistości wiele etapów powstawania i przetwarzania obrazu jest narażone na błędy, przez co półproste w praktyce nigdy nie będą idealnie odzwierciedlać rzeczywistości. Wpływają na to zniekształcenia wprowadzane przez soczewkę optyczną, błędy pomiarów odległości między kamerami czy zaawansowanie technologiczne kamer (nie są one zgodne z modelem otworkowym, a także zawierają np. oprogramowanie sprzętowe zmieniające zdjęcie w celu jego poprawy). Powoduje to jednak nie tylko zmniejszenie dokładności, ale sytuację, gdzie przeprowadzenie triangulacji nie będzie w ogóle możliwe, gdyż półproste mogą się nie przeciąć, przez co nie uda się uzyskać pożądanego punktu. Wprowadzi to konieczność przetwarzania półprostych w takim celu, by zminimalizować błąd i znaleźć najlepsze przybliżenie szukanego punktu. Stosuje się w tym celu różne metody, których opis przekracza zakres tej pracy.



Rysunek 3.3: Geometria epipolarna  
Źródło: Opracowanie własne

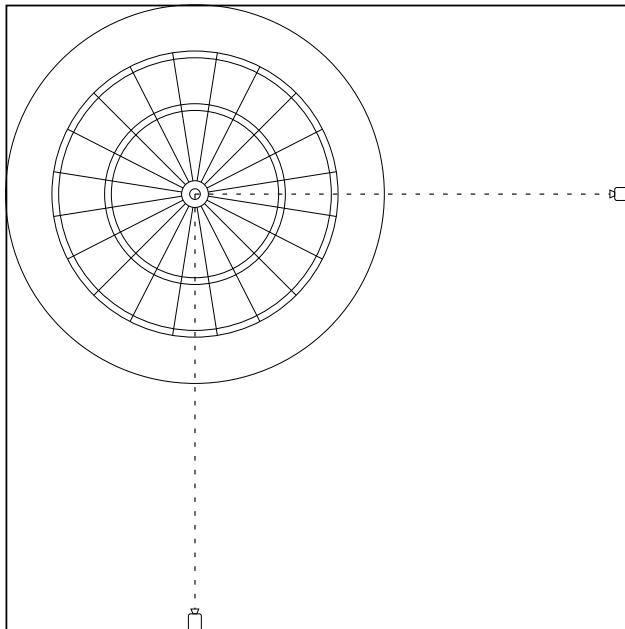
Metoda triangulacji zaimplementowana w obecnej wersji systemu jest połączeniem obu metod. Działa ona w oparciu o dwie kamery skierowane do siebie pod kątem prostym i analizuje dwuwymiarowe obrazy przez nie dostarczone, przetwarza współrzędne pikseli. Różni się ona jednak od klasycznego podejścia do triangulacji, używanego w widzeniu komputerowym: zamiast wyznaczania półprostych ze środka kamery, przechodzących przez punkt na obrazie, a następnie prób wyznaczenia przecięcia tychże półprostych, wyznaczane i poddane obliczeniom są przybliżone kąty dla każdej z kamer, analogicznie jak w wyżej przedstawionym, geodezyjnym podejściu do problemu. Początkowo planowano zaimplementowanie tej wersji jedynie jako pierwsze przybliżenie pozycji rzutki z powodu mniejszej liczby dodatkowych problemów do rozwiązania, ale okazała się ona na tyle dokładna, że pozostawiono ją. Jest to jednak pole do dalszych badań, mogących podnieść skuteczność systemu.

### 3.4 Stelaż

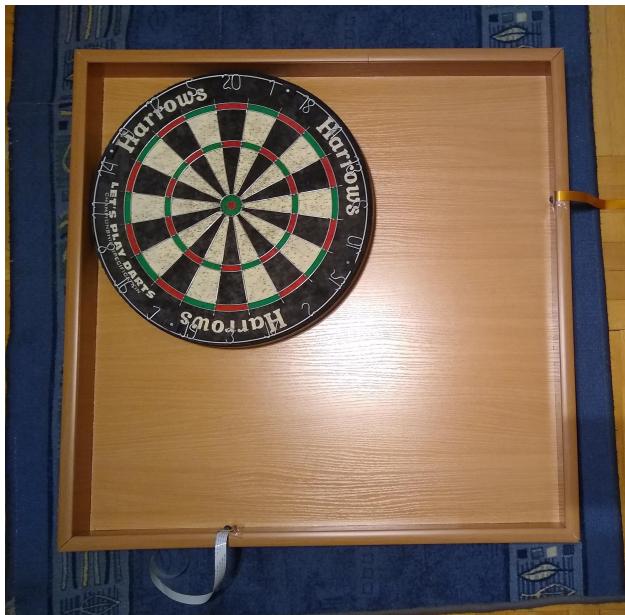
W systemie, w którym dokładność ma tak duże znaczenie, podczas każdego etapu projektowania i implementacji, należy pamiętać o zminimalizowaniu ewentualnych błędów. Stąd wynika konieczność stabilizacji

układu tarcza-kamera-kamera, tak by wszystkie wymiary konieczne do przeprowadzenia triangulacji były ustalone i nie zmieniały się pomiędzy poszczególnymi testami.

Częścią, która spełnia te potrzeby, jest stelaż wykonany z drewna. Ma on kształt niskiego, otwartego prostopadłościanu (bez jednej ściany). W jego lewym górnym rogu umiejscowiona jest tarcza. Jedna kamera znajduje się na prawym (patrząc z góry) boku prostopadłościanu, na linii poziomej, przechodzącej przez środek tarczy, druga zaś na dolnym boku, na linii pionowej. Schematyczny rzut z góry na stelaż pokazany jest na rysunku 3.4a, a zdjęcie wykonanego stelażu na rysunku 3.4b.



(a) Szkic stelażu (rzut z góry)  
Źródło: Opracowanie własne

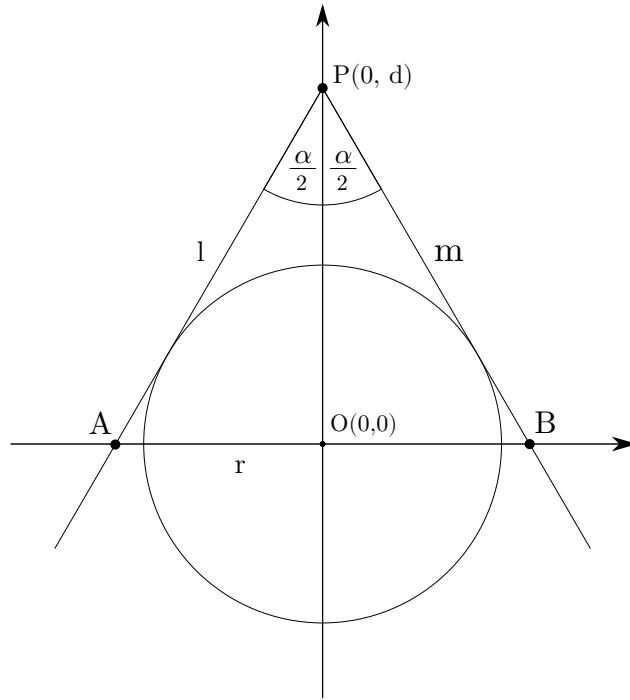


(b) Ukończony stelaż  
Źródło: Opracowanie własne



Przed wykonaniem stelaża należało określić, jakie powinien mieć wymiary. Podstawowym warunkiem było to, że kamera musi obejmować cały obszar tarczy, a jednocześnie cały stelaż powinien być jak najmniejszy. Dlatego pierwszym krokiem było odpowiedzenie na pytanie:

**Pytanie 3.1** *W jakiej minimalnej odległości od środka tarczy w kształcie koła o promieniu  $r$  powinna znaleźć się kamera o kącie widzenia  $\alpha$ , by na zdjęciu cała tarcza była widoczna?*



Rysunek 3.5: Rysunek pomocniczy  
Źródło: Opracowanie własne

Do przedstawienia rozwiązania pomocny jest rysunek 3.5.  $P$  oznacza środek kamery,  $O$  to środek tarczy (początek układu współrzędnych),  $d$  to odległość pomiędzy  $P$  a  $O$ . Przyjmuje się, że kamera jest zwrócona dokładnie na wprost tarczy, dlatego odcinek  $OP$  jest dwusieczną kąta  $APB$ . Pole wyznaczone przez półproste  $l$  i  $m$  to pole widzenia kamery. By cała tarcza była widoczna, koło musi być zawarte w tym polu. Ponieważ zadaniem jest znalezienie minimalnej odległości, wystarczy by proste  $l$  i  $m$  były styczne do okręgu.

Kąty:

$$\angle PAO = \angle PBO = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

Równania prostych i okręgu:

$$l : y = a_1 x + b_1$$

$$m : y = a_2 x + b_2$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ponieważ współczynnik kierunkowy prostej jest równy tangensowi kąta nachylenia do osi  $OX$ , otrzymuje się:

$$a_1 = \tan\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right)$$

$$a_2 = \tan\left(\pi - \frac{\pi - \alpha}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi + \alpha}{2}\right)$$



Półproste  $l$  i  $m$  przecinają się w punkcie  $P(0, d)$ :

$$\begin{aligned} a_1 \cdot 0 + b_1 &= a_2 \cdot 0 + b_2 \\ b_1 &= b_2 = d \end{aligned}$$

Proste przecinają się z osią  $OY$  w tym sam punkcie, więc mają ten sam wyraz wolny, równy  $d$ .

$$\begin{aligned} l : y &= \tan\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right)x + d \\ m : y &= \tan\left(\frac{\pi + \alpha}{2}\right)x + d \end{aligned}$$

Teraz wystarczy, by następujący układ równań miał jedno rozwiązanie (można by również użyć równania drugiej prostej, nie ma to znaczenia):

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ y &= \tan\left(\frac{\pi + \alpha}{2}\right)x + d \end{aligned}$$

Podstawienie:

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\tan\left(\frac{\pi + \alpha}{2}\right)x + d\right)^2 - r^2 &= 0 \\ x^2 + \tan^2\left(\frac{\pi + \alpha}{2}\right)x^2 + 2\tan\left(\frac{\pi + \alpha}{2}\right)dx + d^2 - r^2 &= 0 \\ [\tan^2\left(\frac{\pi + \alpha}{2}\right) + 1]x^2 + 2\tan\left(\frac{\pi + \alpha}{2}\right)dx + d^2 - r^2 &= 0 \end{aligned}$$

To równanie kwadratowe musi mieć dokładnie jedno rozwiązanie, dlatego  $\Delta = 0$ :

$$\begin{aligned} \Delta &= [2\tan\left(\frac{\pi + \alpha}{2}\right)d]^2 - 4 \cdot [\tan^2\left(\frac{\pi + \alpha}{2}\right) + 1] \cdot (d^2 - r^2) = \\ &= 4\tan^2\left(\frac{\pi + \alpha}{2}\right)d^2 - 4[\tan^2\left(\frac{\pi + \alpha}{2}\right)d^2 - \tan^2\left(\frac{\pi + \alpha}{2}\right)r^2 + d^2 - r^2] = \\ &= 4[\tan^2\left(\frac{\pi + \alpha}{2}\right)d^2 - \tan^2\left(\frac{\pi + \alpha}{2}\right)d^2 + \tan^2\left(\frac{\pi + \alpha}{2}\right)r^2 - d^2 + r^2] = \\ &= 4[(\tan^2\left(\frac{\pi + \alpha}{2}\right) + 1)r^2 - d^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 0 \\ 4[(\tan^2\left(\frac{\pi + \alpha}{2}\right) + 1)r^2 - d^2] &= 0 \\ (\tan^2\left(\frac{\pi + \alpha}{2}\right) + 1)r^2 - d^2 &= 0 \\ d^2 &= (\tan^2\left(\frac{\pi + \alpha}{2}\right) + 1)r^2 \\ d_1 &= r\sqrt{\tan^2\left(\frac{\pi + \alpha}{2}\right) + 1} \vee d_2 = -r\sqrt{\tan^2\left(\frac{\pi + \alpha}{2}\right) + 1} \end{aligned}$$

Ponieważ  $d > 0$  (z rysunku), to można odrzucić rozwiązanie  $d_2$  – wyrażenie pod pierwiastkiem jest dodatnie (kwadrat zwiększyły o jeden), promień również jest dodatni, więc całe  $d_2 < 0$ . Ostatecznie:

$$d = r\sqrt{\tan^2\left(\frac{\pi + \alpha}{2}\right) + 1}$$

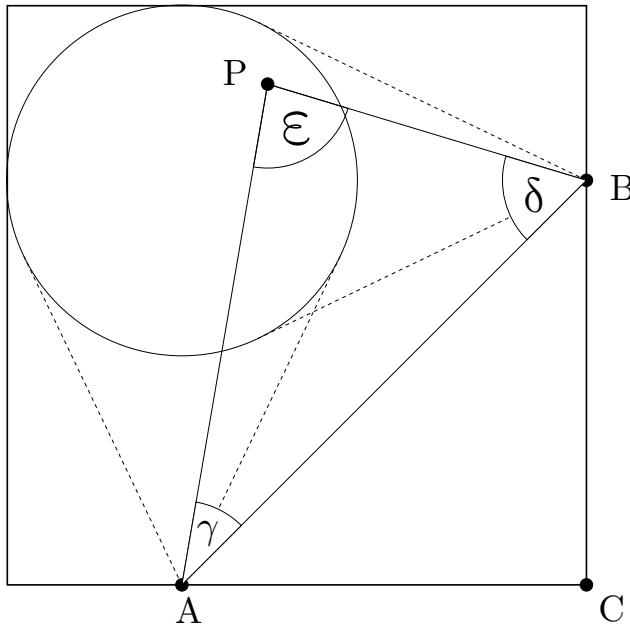
Dla tarczy i kamery użytych w systemie, gdzie  $r = 22,5$  cm, a  $\alpha = 53,37^\circ$ ,  $d = 50,1$  cm.

Na podstawie tej wartości ustalono wymiary całego stelażu. Najmniejsze możliwe wymiary, to  $(d+r) \times (d+r)$ , czyli  $72,6$  cm  $\times$   $72,6$  cm. Wykonany stelaż jest nieco większy ( $74,5$  cm  $\times$   $74,5$  cm), m.in. z powodu uwzględnienia niezerowej grubości kamery oraz pozostawienia zapasu na ewentualne modyfikacje i pomyłki.



### 3.5 Obliczenia

Zgodnie z wcześniej przedstawioną ideą, rozwiązywanie zostało oparte na stworzeniu trójkąta z dwoma znymi kątami i jednym znany bokiem, co pozwala później na obliczenie wszystkich boków trójkąta. Zobrazowane jest to na rysunku 3.6, do którego kolejne części pracy często będą nawiązywać. Wspomnianym trójkątem jest  $\triangle ABP$ . A i B to położenia kamer, a P to miejsce wbicia rzutki, które jest celem obliczeń. Kąty  $\gamma$  i  $\delta$  obliczane są na podstawie pozycji pikseli, a odległość pomiędzy kamerami jest znana lub łatwa do obliczenia z twierdzenia Pitagorasa w  $\triangle ABC$ .



Rysunek 3.6: Szukany trójkąt w układzie stelaża

Źródło: Opracowanie własne

Oto etapy obliczeń, składających się na rozwiązywanie głównego problemu:

- uzyskanie pozycji piksela, który reprezentuje miejsce wbicia rzutki (dla każdej z kamer)
- obliczenie (ze współrzędnych piksela) kąta pomiędzy kamerą a rzutką (dla każdej z kamer)
- umiejscowienie kątów w układzie związanym z kamerami, sformułowanie trójkąta kamera-kamera-rzutka
- obliczenie nieznanych kątów i boków trójkąta
- obliczenie pozycji  $(x, y)$  rzutki, a następnie zamiana układu odniesienia na taki, gdzie  $(0, 0)$  to środek tarczy
- zamiana współrzędnych kartezjańskich na biegunowe
- przyporządkowanie współrzędnych biegunowych  $(r, \varphi)$  do pola punktowego (segmentu) na tarczy

Pierwszą fazą analizy rzutu jest przetwarzanie obrazu, którego wynikiem są dane o dwóch pikselach, uznanych za miejsce wbicia lotki, po jednym przez każdą z kamer. Jest to trudne zadanie, które zostanie szerzej omówione w następnym rozdziale.

Obliczenie kąta pomiędzy kamerą a rzutką jest oparte na prostym założeniu, iż kamera liniowo dystrybuje miejsce na zdjęciu w stosunku do kąta, pod jakim znajduje się punkt. Oznacza to, że piksele wysunięte

najbardziej na lewo odpowiadają kątowi zerowemu, najbardziej na prawo – maksymalnemu kątowi widzenia kamery ( $\alpha$ ), a wszystkie pomiędzy nimi są proporcjonalnie mniejsze lub większe (liniowa interpolacja). Założenie jest dość silne, ponieważ przy niektórych obiektywach, np. typu rybie oko, fragmenty położone przy brzegach obrazu są w innym stopniu powiększone, niż te, które są bliskie środka (dystorsja). W takich przypadkach przyjęcie takiego założenia skutkowałoby dużymi błędami.

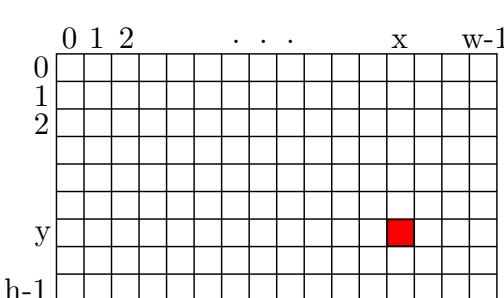
Dla zdjęcia o wymiarach  $w \times h$  pikseli, zrobionego przez kamerę o kącie widzenia  $\alpha$ , na którym rozważany jest piksel o pozycji  $(x, y)$ , zachodzi proporcja:

$$\frac{x}{w} = \frac{\beta}{\alpha}$$

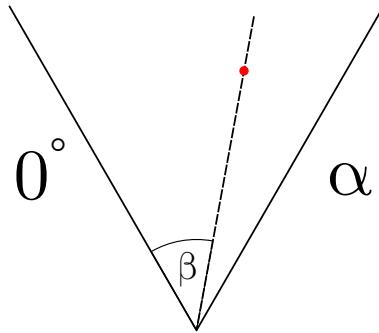
gdzie  $\beta$  oznacza kąt od kamery do rzutki. Stąd:

$$\beta = \frac{x \cdot \alpha}{w}$$

Warto zauważyć, że wartość  $y$  nie ma w tej sytuacji znaczenia, wpływ na wynik ma tylko pozycja na osi pionowej. Na rysunku 3.7a pokazana jest siatka pikseli z oznaczeniami rzędów i kolumn, wraz z zaznaczonym pojedynczym pikselem. Rysunek 3.7b przedstawia, jaką informację udaje się otrzymać na podstawie pozycji owego piksela – kąt  $\beta$ .



(a) siatka pikseli



(b) przybliżony kąt

Rysunek 3.7: Użycie współrzędnych piksela do wyznaczenia kąta  
Źródło: Opracowanie własne.

Jednak otrzymany kąt  $\beta$  nie odpowiada na razie kątom zaznaczonym na rysunku 3.6. Należy go poddać jeszcze niewielkim transformacjom.

$$\gamma = 45^\circ - (\beta_A - \frac{\alpha}{2})$$

$$\delta = 45^\circ + \beta_B - \frac{\alpha}{2},$$

gdzie  $\beta_A, \beta_B$  to kąty  $\beta$  odpowiednio dla kamery  $A$  i  $B$ .

Aby zrozumieć powyższe przekształcenia, dobrze jest posłużyć się przykładem, gdy punkt  $P$  znajduje się dokładnie na środku tarczy. Wtedy trójkąt  $ABP$  jest równoramiennym trójkątem prostokątnym, a więc  $\gamma = \delta = 45^\circ$ , lecz  $\beta_A = \beta_B = \frac{\alpha}{2}$ . Należy przyjąć tę sytuację jako sytuację wyjściową do kolejnych obliczeń. Dlatego pierwszym krokiem jest zmiana zbioru wartości, które przyjmuje  $\beta$ : zakres, zamiast od 0 do  $\alpha$ , powinien wynosić od  $-\frac{\alpha}{2}$  do  $\frac{\alpha}{2}$ . Ta zmiana dokonuje się przez odjęcie od wyliczonego kąta wartości  $\frac{\alpha}{2}$ . Jest to teraz kąt nie od lewego ramienia do prostej przecinającej punkt  $P$ , lecz od prostej biegającej przez środek obrazu do prostej przecinającej punkt  $P$ . Dzięki temu, dla punktu z przykładu, kąt wynosi  $0^\circ$ , ponieważ znajduje się dokładnie na wprost kamery. Kolejną zależnością, którą należy uwzględnić, jest fakt, iż im większy jest kąt  $\beta_A$ , tym mniejszy jest kąt  $\gamma$ . Stąd wynika konieczność zmiany znaku kąta dla kamery  $A$ , przez co pierwszy (licząc od lewej) piksel będzie oznaczał kąt  $\frac{\alpha}{2}$ , a ostatni  $-\frac{\alpha}{2}$  (a nie odwrotnie). Dla kamery  $B$  nie ma potrzeby takiej zmiany: im większy kąt  $\beta_B$ , tym większy kąt  $\delta$ . Po przedstawionych transformacjach należy dodać jeszcze  $45^\circ$ , tak by punkt znajdujący się na wprost kamery był ostatecznie interpretowany jako  $45^\circ$ .



Dzięki powyższym obliczeniom, dostępne są wszystkie dane potrzebne do jednoznacznego wyznaczenia trójkąta  $ABP$ . Jego trzeci kąt można obliczyć, korzystając z własności, że suma kątów w trójkącie wynosi  $180^\circ$ :

$$\angle APB = \varepsilon = 180^\circ - \gamma - \delta$$

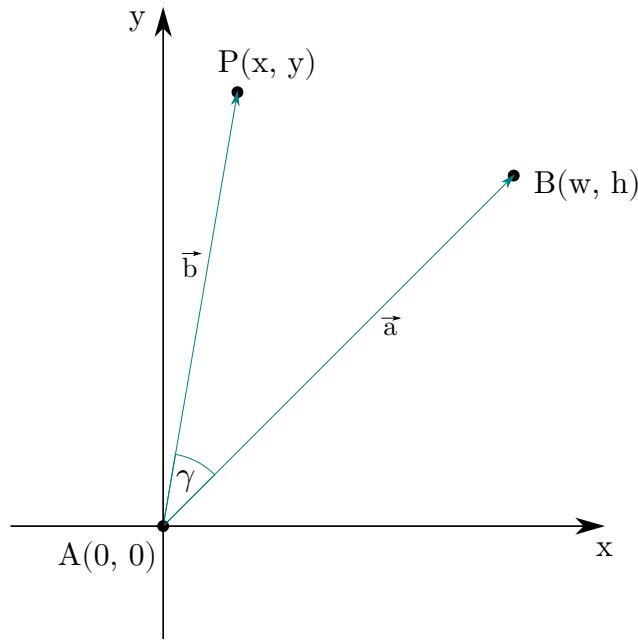
Długości boków uzyskuje się za pomocą twierdzenia sinusów:

$$\frac{|AB|}{\sin \varepsilon} = \frac{|BP|}{\sin \gamma} = \frac{|AP|}{\sin \delta}$$

$$|BP| = \frac{|AB| \cdot \sin \gamma}{\sin \varepsilon}$$

$$|AP| = \frac{|AB| \cdot \sin \delta}{\sin \varepsilon}$$

Na podstawie danych o trójkącie  $ABP$ , należy obliczyć pozycję punktu  $P$ , umieszczając trójkąt w układzie współrzędnych, w którym punkt  $A$  jest początkiem. Szkic pomocniczy znajduje się na rysunku 3.8. Pozycja punktu  $B$  jest określona przy tworzeniu stelaża – najczęściej będzie to  $(d, d)$ , jednak w poniższych obliczeniach zakłada się ogólniejszy przypadek, gdzie współrzędne punktu na obu osiach nie muszą się sobie równać. Przyjęto oznaczenie  $B(w, h)$ . Jedynymi szukanymi w tym podproblemie są  $x$  oraz  $y$ , czyli współrzędne punktu  $P$ . Obliczenia opierają się na działaniach wektorowych: wyznacza się wektor  $\overrightarrow{AP} = \vec{b}$  oraz  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ .



Rysunek 3.8: Układ współrzędnych o środku w  $A$

Źródło: Opracowanie własne

Główne równanie wynika z wzoru na kąt między wektorami:

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{[w, h] \circ [x, y]}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{wx + hy}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \gamma = wx + hy$$

$$x = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \gamma - hy}{w}$$

Drugą zależnością, z której należy skorzystać, jest wzór na długość wektora:

$$|\vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|\vec{b}|^2 = x^2 + y^2$$

Podstawienie:

$$|\vec{b}|^2 = \left( \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \gamma - hy}{w} \right)^2 + y^2$$

$$|\vec{b}|^2 = \frac{(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \gamma - hy)^2}{w^2} + y^2$$

$$|\vec{b}|^2 = \frac{1}{w^2} \left( |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cos^2 \gamma - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| h \cos \gamma y + h^2 y^2 \right) + y^2$$

$$|\vec{b}|^2 = \frac{1}{w^2} |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cos^2 \gamma - \frac{2}{w^2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| h \cos \gamma y + \left( 1 + \frac{h^2}{w^2} \right) y^2$$

$$\left( 1 + \frac{h^2}{w^2} \right) y^2 - \frac{2}{w^2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| h \cos \gamma y + |\vec{b}|^2 \left( \frac{|\vec{a}|^2 \cos^2 \gamma}{w^2} - 1 \right) = 0$$

Otrzymano równanie kwadratowe postaci  $a_2y^2 + a_1y + a_0$ , gdzie:

$$a_2 = 1 + \frac{h^2}{w^2}$$

$$a_1 = -\frac{2}{w^2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| h \cos \gamma$$

$$a_0 = |\vec{b}|^2 \left( \frac{|\vec{a}|^2 \cos^2 \gamma}{w^2} - 1 \right)$$

Wzory na pierwiastki tego równania nie są podawane, ponieważ również w implementacji korzysta się z zewnętrznej biblioteki do wyliczania pierwiastków, odpornej na błędy numeryczne. W przypadku, gdy równanie ma dwa rozwiązania, wybierane jest  $y > 0$ .

Pierwsza współrzędna obliczana z wcześniej już przedstawionego wzoru:

$$x = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \gamma - hy}{w}$$

Następnie należy przenieść układ współrzędnych w taki sposób, by jego początkiem był środek tarczy. Przekształceniem, które to zapewnia, jest funkcja  $f$ :

$$f(x, y) = (x, y + h)$$

W celu łatwiejszego przyporządkowania pozycji rzutki do pola na tarczy, warto przedstawić ją za pomocą współrzędnych biegunowych, tzn. promienia  $r_p$  od środka tarczy ( $O$ ) do punktu  $P$  oraz kąta  $\varphi$  pomiędzy półprostą  $OB$  a wektorem  $\overrightarrow{OP}$ .

Promień  $r_p$  wyliczany jest ze wzoru na długość wektora (z tw. Pitagorasa):

$$r_p = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Wzór na wartość kąta  $\varphi$  jest zależny od ćwiartki układu, w jakiej znajduje się punkt:

$$\varphi = \begin{cases} \arctg(\frac{y}{x}) & \text{gdy } x > 0 \wedge y \geq 0 \\ \arctg(\frac{y}{x}) + 2\pi & \text{gdy } x > 0 \wedge y < 0 \\ \arctg(\frac{y}{x}) + \pi & \text{gdy } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{gdy } x = 0 \wedge y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{gdy } x = 0 \wedge y < 0 \end{cases}$$



Ostatnim etapem jest przypisanie wspólnym biegunowym konkretnego pola na tarczy. Patrząc na kołową budowę tarczy łatwo zauważać, że kąt  $\varphi$  wskazuje, w który wycinek kołowy trafiła rzutka, a promień  $r_p$  pozwala określić, czy jest to pole standardowe, podwójne, potrójne itd. Do reprezentacji segmentu będzie używana notacja z sekcji 2.2.

Formalnie, należy sformułować funkcję  $g$ , która każdej parze  $(r_p, \varphi)$  przyporządkuje parę  $(w, t)$ :

$$g : \mathbb{R}_+^0 \times [0, 2\pi] \rightarrow W \times T$$

W tym celu wprowadza się pomocnicze funkcje:  $g_1$  oraz  $g_2$ . Pierwsza z nich na podstawie długości promienia określa, z którego pierścienia pochodzi miejsce wbicia rzutki. Na rysunku 3.9 wprowadzono oznaczenia  $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ , które oznaczają długości promieni kolejnych okręgów na tarczy. Są to wartości charakterystyczne dla danej tarczy, które należy uzyskać z największą dokładnością, tak by precyzyjnie przeprowadzić ten etap obliczeń.

$$g_1 : \mathbb{R}_+^0 \rightarrow T \cup \{\text{inner bull}, \text{outer bull}, \text{null}\}$$

$$g_1(r_p) = \begin{cases} \text{inner bull} & \text{gdy } r_p \leq r_1 \\ \text{outer bull} & \text{gdy } r_1 < r_p \leq r_2 \\ S & \text{gdy } r_2 < r_p \leq r_3 \vee r_4 < r_p \leq r_5 \\ T & \text{gdy } r_3 < r_p \leq r_4 \\ D & \text{gdy } r_5 < r_p \leq r_6 \\ \text{null} & \text{gdy } r_p > r_6 \end{cases}$$

Funkcja  $g_2$  określa, na którym spośród dwudziestu wycinków kołowych znajduje się lotka. Ciąg  $(a_n)$ , indeksowany od zera, zawiera wartości od 1 do 20 w kolejności ich występowania na tarczy zgodnie z ruchem przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, zaczynając od pola nr 6. Na podstawie kąta wyliczany jest indeks elementu ciągu, który reprezentuje szukany wycinek kołowy. Dzieje się to za pomocą prostej interpolacji: kąt pełny to  $2\pi$ , więc pojedynczy wycinek ma kąt  $\frac{2\pi}{20}$ . Kąt  $\varphi$  (pomniejszony o połowę kąta wycinka numer 6) jest dzielony przez wielkość kąta pojedynczego wycinka, co jednoznacznie przyporządkowuje kąt do wycinka.

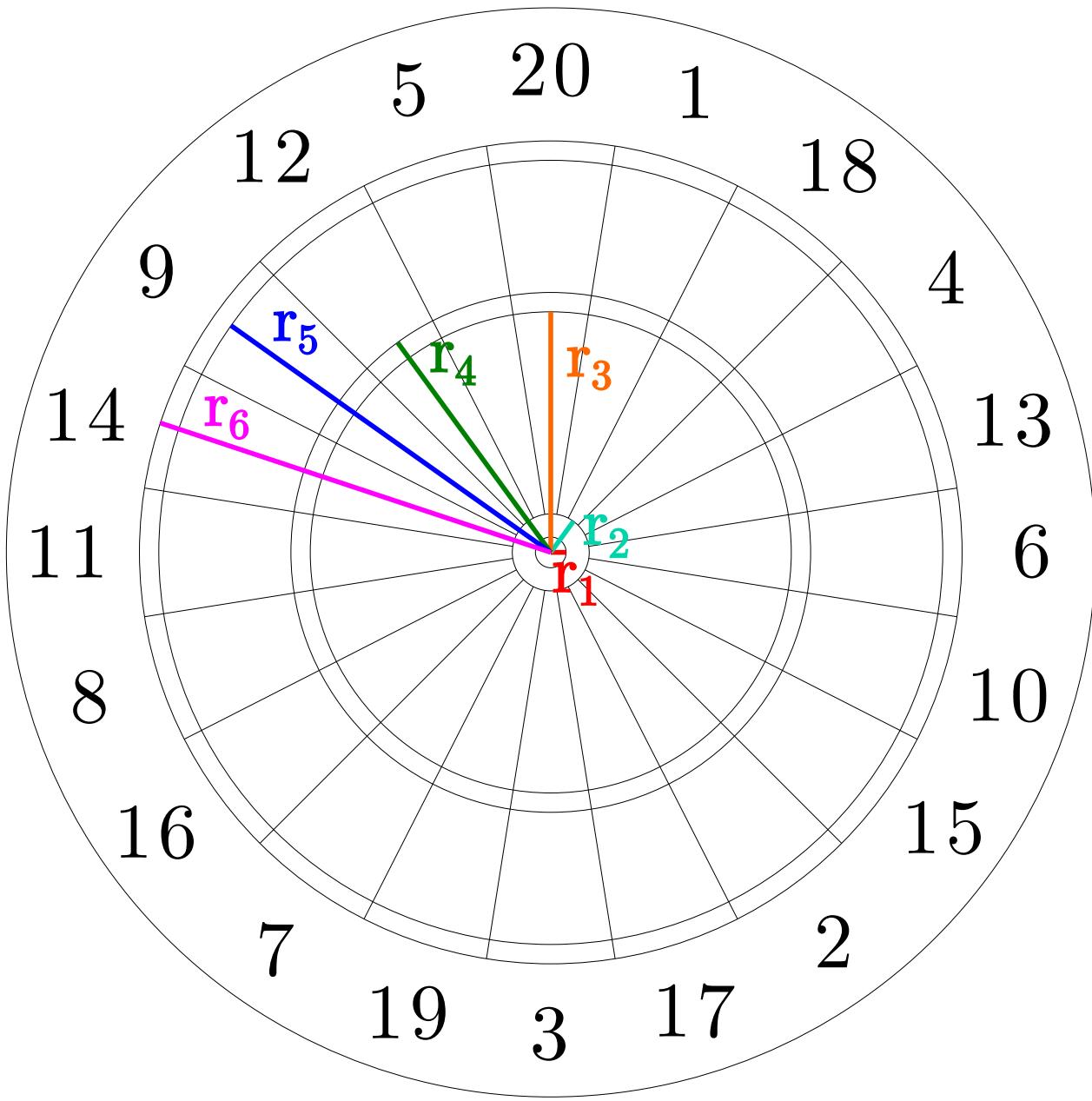
$$g_2 : [0, 2\pi] \rightarrow A$$

$$(a_n) = (6, 13, 4, \dots, 2, 15, 10)$$

$$g_2(\varphi) = a \left\lfloor \frac{\left( \varphi + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{20} \right) \bmod 2\pi}{\frac{2\pi}{20}} \right\rfloor$$

Ostatecznie, korzystając z pomocniczych funkcji,  $g_1$  określa pole punktowe w następujący sposób:

$$g(r_p, \varphi) = \begin{cases} (0, S) & \text{gdy } g_1(r_p) = \text{null} \\ (25, S) & \text{gdy } g_1(r_p) = \text{inner bull} \\ (50, S) & \text{gdy } g_1(r_p) = \text{outer bull} \\ (g_2(\varphi), S) & \text{gdy } g_1(r_p) = S \\ (2 \cdot g_2(\varphi), D) & \text{gdy } g_1(r_p) = D \\ (3 \cdot g_2(\varphi), T) & \text{gdy } g_1(r_p) = T \end{cases}$$



Rysunek 3.9: Tarcza z zaznaczonymi promieniami

Źródło: Opracowanie własne



# Projekt systemu

Niniejszy rozdział traktuje o procesach systemu, jego składowych i powiązaniach między nimi. Do ich przedstawienia używane są opisy słowne oraz diagramy UML. Istotnym elementem jest prezentacja sposobu, w jaki przetwarzane są obrazy w systemie oraz algorytmów z tym związanych.

## 4.1 Przypadki użycia

Powiązany z systemem jest obecnie jeden, główny przypadek użycia. Aktorem jest gracz, który po uruchomieniu aplikacji mobilnej łączy się z systemem wbudowanym podłączonym do tarczy. Po informacji o ustaleniu połączenia, może on zacząć wykonywać rzuty. Po każdym rzucie, w krótkim czasie, otrzymuje on informację o polu, w jakie trafił oraz wizualizację miejsca lotki na graficznym schemacie tarczy. Aplikacja, w razie potrzeby, sygnalizuje problemy z połączeniem na linii klient-serwer.

## 4.2 Urządzenia i komponenty

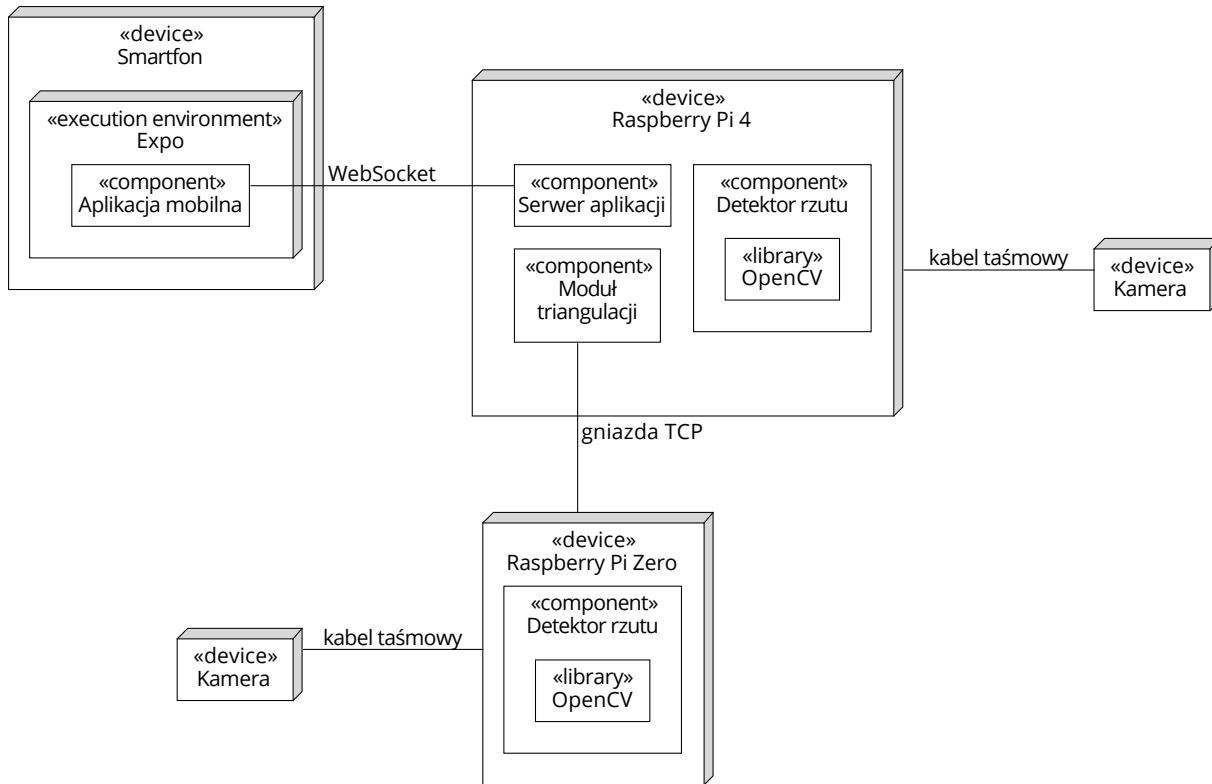
W systemie występują następujące urządzenia:

- minikomputer **Raspberry Pi 4 B**
- minikomputer **Raspberry Pi Zero W**
- dwie kamery **Camera Module v1 (OmniVision OV5647)**
- smartfon

Na diagramie wdrożenia (4.1) pokazano te urządzenia wraz z połączeniami między nimi oraz komponentami, jakie wchodzą w ich skład. **Raspberry Pi 4** jest najważniejszym urządzeniem, które synchronizuje pracę innych oraz dokonuje obliczeń. Łączy się z kamerą za pomocą kabla taśmowego, a używa jej do wykrywania rzutu za pomocą biblioteki **OpenCV**. Analogicznie wygląda to w przypadku **Pi Zero**, na którym znajduje się druga instancja detektora rzutu. Informacje wysyłane są z **Pi Zero** do **Pi 4** z użyciem gniazd TCP. Na **Pi 4** tworzony jest również serwer dla aplikacji mobilnej, która uruchamiana jest na smartfonie w środowisku Expo [7]. Połączenie następuje zgodnie ze standardem WebSocket.

## 4.3 Diagramy aktywności

Na diagramie aktywności (4.2) przedstawiono logikę procesu zachodzącego w systemie z zachowaniem wysokiego poziomu ogólności. System rozpoczyna działanie od rozwidlenia na przetwarzanie obrazu z użyciem kamery dolnej oraz prawej. W obu przypadkach wygląda to identycznie - w pętli wykonywane są zdjęcia i poddawane analizie. W przypadku wykrycia rzutu pętla zostaje przerwana, a program synchronizuje się z drugą kamerą i przeprowadza obliczenia prowadzące do pozycji rzutki, która zostaje wyświetlona w aplikacji mobilnej. Następnie proces rozpoczyna się od początku.



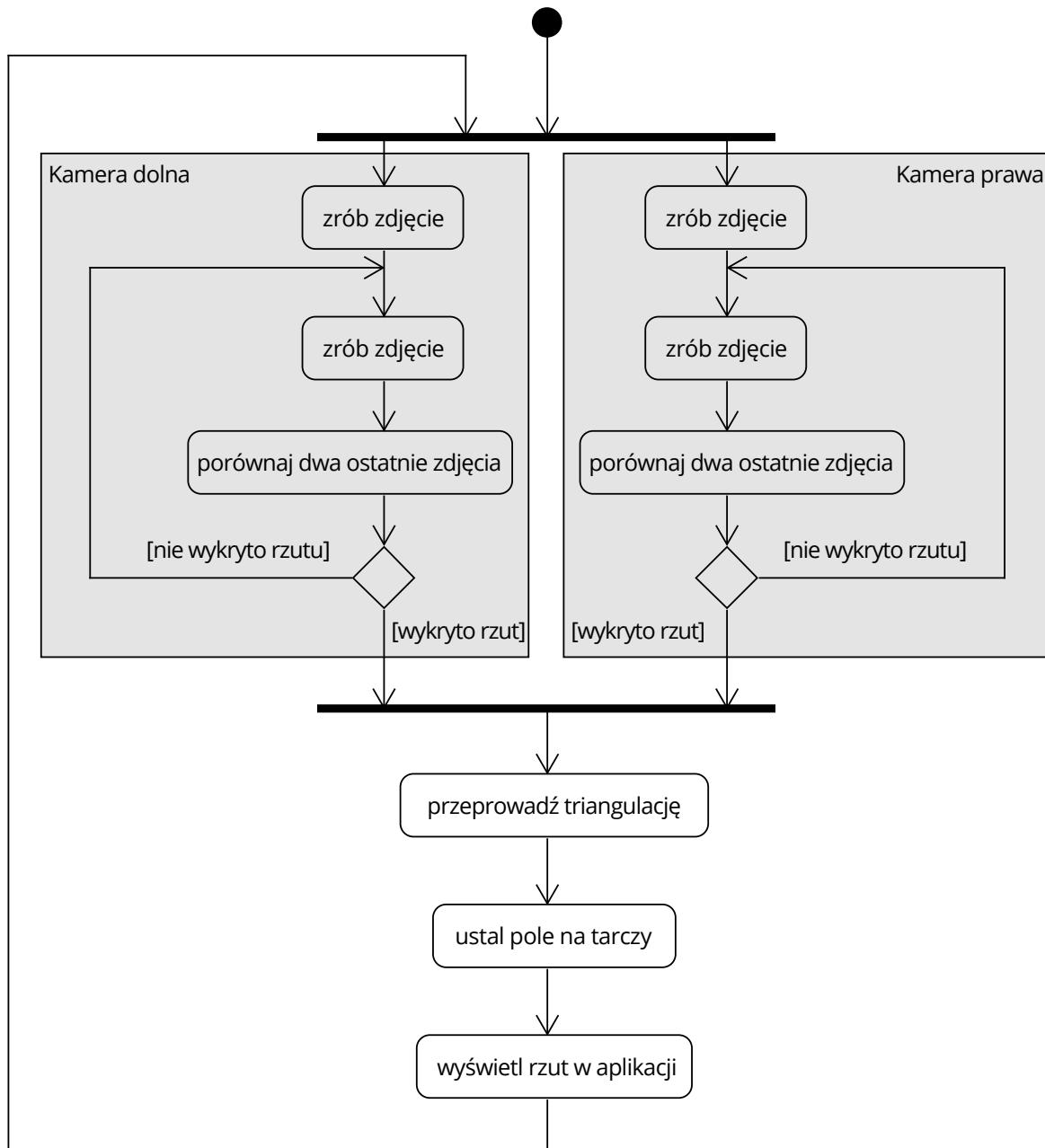
Rysunek 4.1: Diagram wdrożeniowy  
Źródło: Opracowanie własne

## 4.4 Diagramy sekwencji

Diagram sekwencji (4.3) pokazuje, w jaki sposób odbywa się komunikacja pomiędzy poszczególnymi komponentami. Jako pierwszy startuje program na Raspberry Pi 4. Najpierw czeka on na połaczenie z drugim minikomputerem, Pi Zero oraz w osobnym wątku tworzy serwer dla aplikacji mobilnej. Gracz może wtedy włączyć aplikację, która natychmiastowo połączy się z tymże serwerem. W tym momencie gracz może zacząć wykonywanie rzutów. Pi 4 oraz Pi Zero równolegle wykrywają rzut, lecz po wykryciu rzutu przez pierwszego z nich, czeka on na dane o położeniu piksela, nadchodzące z drugiego. Później, po przeprowadzeniu obliczeń, informacje o rzucie są przesyłane od serwera do aplikacji mobilnej. Możliwe jest podłączenie wielu klientów – serwer posiada listę podłączonych użytkowników i wysyła informacje do każdego z nich.

## 4.5 Opis protokołów

W systemie do komunikacji używa się dwóch protokołów: TCP [8] i WebSocket [9]. Pierwszy z nich używany jest do wysłania informacji z Pi Zero do Pi 4 w sposób binarny: 3 liczby całkowite (pozycja  $x$ , pozycja  $y$  oraz liczba porządkowa rzutki), po 4 bajty na liczbę, w formacie *big endian*. Drugi protokół stosuje się przy przekazaniu komunikatu o wyliczonej pozycji rzutki. Jego treść jest w formacie JSON i została pokazana na listingu 1.

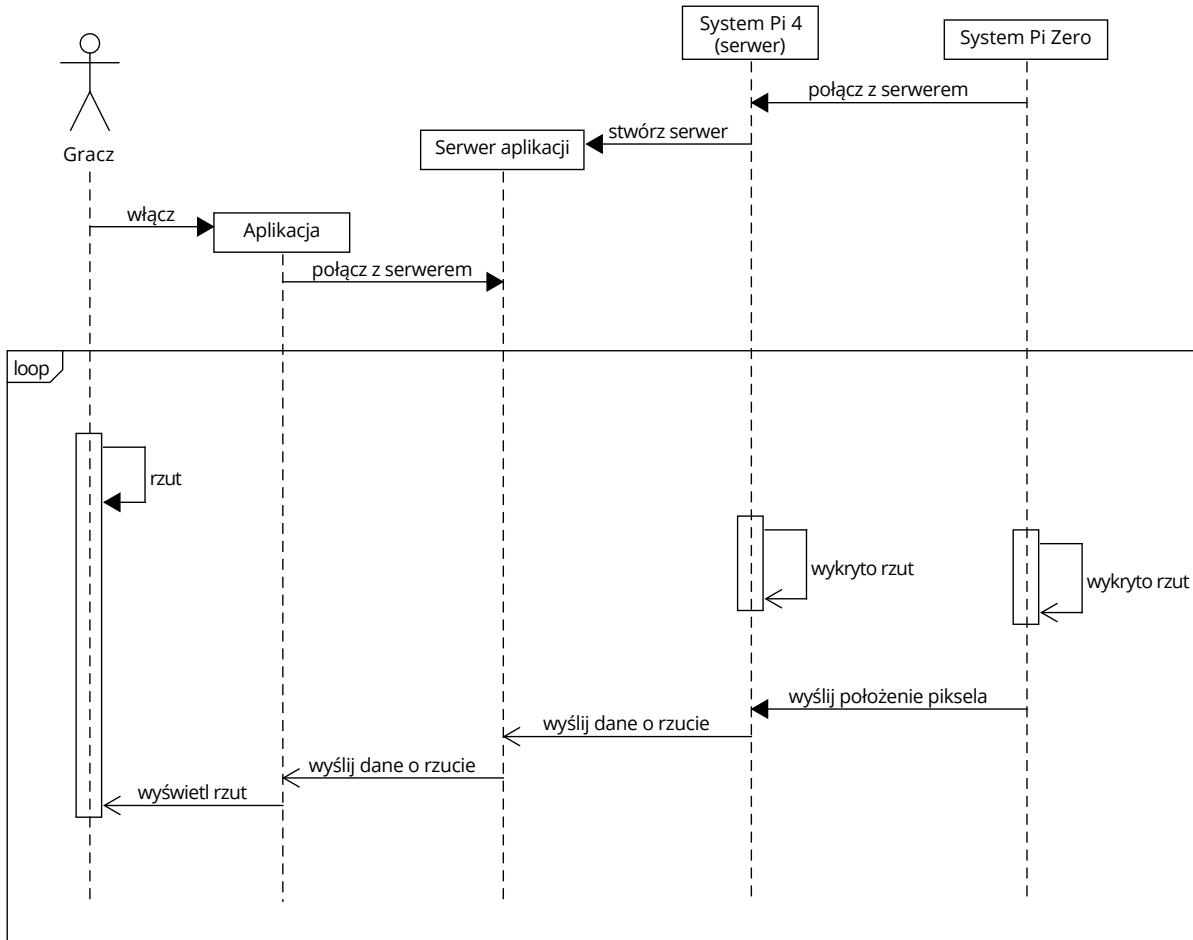


Rysunek 4.2: Diagram aktywności

Źródło: Opracowanie własne

## 4.6 Algorytm przetwarzania obrazu

Podstawowym algorytmem, który nie został opisany w poprzednim rozdziale, jest proces przetwarzania obrazu. Zadaniem, które należy wykonać za pomocą metod związanych z tą dziedziną, jest odjęcie tła (ang. *background subtraction*). Polega ono na wyodrębnieniu elementów pojawiających się na pierwszym planie,



Rysunek 4.3: Diagram sekwencji  
Źródło: Opracowanie własne

```

1  {
2      "x": 23.123516,
3      "y": 5.7825,
4      "segment": 20
5  }

```

Listing 1: Przykładowy komunikat o wykrytej rzutce

na podstawie następujących po sobie zdjęć. W prezentowanym systemie użyte zostało w celu wykrycia rzutu, a następnie ustalenia samej pozycji rzutki na zdjęciu. W ogólności jest to zadanie trudne, ze względu na możliwe zmiany tła, spowodowane m.in. minimalnym ruchem lub zmianą warunków oświetlenia. Podejść do jego rozwiązania jest wiele [11], jednak w niniejszej pracy, z powodu niewielkiej liczby tego typu czynników, zastosowano jedno z najprostszych - odejmowanie od siebie kolejnych klatek.

Każda z kamer, co pewien krótki czas, wykonuje zdjęcie. Następnie, dwa ostatnie zdjęcia z danej kamery, są od siebie odejmowane. Dzięki reprezentacji macierzowej, działanie to odbywa się zgodnie z zasadami



bezwzględnego odejmowania macierzy. Jego wynikiem jest nowe zdjęcie, w której piksele niezmienione w czasie pomiedzy wykonaniem klatek powinny być bliskie wartości 0 (piksel czarny), zaś te reprezentujące pojawienie się nowego obiektu – wyraźnie większe od zera. Aby zmniejszyć występujące szумy oraz przekształcić obraz na binarny (czarno-biały), stosuje się następnie funkcję progową (ang. *threshold*), która wszystkie piksele o wartościach niższych od ustalonego progu zamienia na czarne, a wyższe – na piksele białe.

Tak przygotowane zdjęcie należy poddać wykrywaniu konturów. Konturem nazywa się zbiór punktów reprezentujących krzywą [11]. W przypadku problemu omawianego w pracy, celem jest wykrycie konturu wokół rzutki, która pojawiła się na ostatnio wykonanym zdjęciu. Algorytm wykrywania konturów jest dość skomplikowany, jego szczegóły można znaleźć w [12]. Po uzyskaniu listy konturów wybierany jest największy z nich (pod względem powierzchni, którą wyznacza), a następny poddany analizie, czy jest to kontur rzutki. Należy wyznaczyć charakterystyczne cechy lotki na zdjęciu, opierając się na empirycznych danych pochodzących z testów. W obecnej implementacji kontur jest uznawany za kontur rzutki wtedy, gdy powierzchnia przez niego wyznaczona mieści się w określonych doświadczalnie granicach. Innymi sposobami jest na przykład sprawdzanie proporcji długości do szerokości w prostokącie okalającym kontur. Jeśli nie wykryto żadnych konturów lub nie spełniają one warunków, uznaje się, że rzut nie wystąpił pomiędzy badanymi ujęciami.

Ostatnią fazą jest wybranie pojedynczego piksela, którego pozycja będzie reprezentować miejsce wbicia rzutki: jest to najniżej położony piksel konturu (znajdujący się najbliżej tarczy).



# Implementacja systemu

W tym rozdziale opisane są szczegóły implementacyjne projektu. Więcej uwagi poświęcono urządzeniom wchodząącym w skład systemu oraz opisano użyte technologie, wraz z uargumentowaniem, dlaczego to właśnie one zostały wybrane. Kolejnym elementem jest omówienie struktury projektu oraz wypunktowania, co znajduje się w poszczególnych plikach z kodem źródłowym. Zaprezentowano na przykładzie wynik działania systemu, opisano problemy napotkane w trakcie pracy oraz przedstawiono sposób prowadzenia projektu.

## 5.1 Opis urządzeń

### 5.1.1 Raspberry Pi

Programy wykonywane są na urządzeniach z rodziny Raspberry Pi [3]. Są to jednopłytkowe minikomputery, tzw. SoC (ang. *System-on-a-chip*). Ich jednostką obliczeniową jest procesor firmy Broadcom, wykonany w architekturze ARM. Pozwalają na obsługę i komunikację z innymi urządzeniami za pomocą wielu portów i interfejsów: m.in. USB, HDMI, GPIO (40 pinów wejścia/wyjścia ogólnego przeznaczenia), CSI (interfejs kamery), RJ-45, Wi-Fi czy Bluetooth. Nie posiadają one wbudowanej pamięci, wszystkie dane są zapisywane na karcie SD, na której znajduje się również system operacyjny, najczęściej Linux. Organizacja produkcji minikomputery wydaje swoją dystrybucję nazwaną Raspberry Pi OS (wcześniej Raspbian), opartą na Debianie. Wydanych zostało kilka wersji Raspberry różniących się od siebie przeznaczeniem i specyfikacją. W systemie użyto Pi 4 i Pi Zero. Pierwsza z nich to najnowsza wersja, z czterordzeniowym procesorem taktowanym zegarem 1,5 GHz oraz pamięcią RAM 2 GB. Druga zaś jest odpowiedzią na sytuację, gdzie tak duże moce obliczeniowe nie są potrzebne – Pi Zero ma mniejsze wymiary, słabszy procesor oraz mniej pamięci RAM, co skutkuje również mniejszą ceną.

### 5.1.2 Kamery

Kamery użyte w systemie to kamery dedykowane do Raspberry Pi: Camera Module v1 z matrycą Omni-Vision OV5647. Pozwalają na wykonywanie zdjęć w rozdzielcości  $2592 \times 1944$  pikseli, ich poziome pole widzenia do  $53,5^\circ \pm 0,13^\circ$ , a ogniskowa wynosi 3,60 mm. Pełna specyfikacja jest dostępna na stronie producenta [3].

Początkowo planowano użycie jedynie jednego minikomputera, do którego podłączone byłyby dwie kamery USB lub jedna kamera Pi i jedna USB. Pierwszy wariant został odrzucony z powodu wysokiej ceny (lub gorszej jakości) kamer internetowych oraz możliwymi problemami z przepustowością USB. Drugi za to wprowadzałby niepotrzebny brak spójności oraz niemożność reużywania kodu źródłowego, obsługującego kamerę dedykowaną. Dodatkowo, tego typu kamera posiada sprzętowe i programowe wsparcie i oferuje pełną kompatybilność z urządzeniem, co wpływa na szybkość i niezawodność działania. Niemożliwe jest jednak bezpośrednie podłączenie dwóch takich kamer, gdyż Pi 4 posiada jedynie jeden port CSI. Dlatego zdecydowano się na użycie drugiego, tańszego urządzenia z serii Raspberry, do którego można podłączyć drugą kamerę.



## 5.2 Technologie

Użyte technologie:

- Python 3.7
- OpenCV 4.1.0
- picamera 1.13
- WebSocket
- JavaScript ES6
- React Native 0.63
- Expo 39

Kod źródłowy uruchamiany na obu urządzeniach Raspberry został napisany w języku Python 3.7. Został on wybrany z powodu jego prostoty oraz istnienia wielu bibliotek specyficznych dla minikomputera, które napisane są właśnie w tym języku. Wspiera on wiele paradygmatów programowania, dzięki czemu programista ma swobodę w wyborze sposobu implementacji rozwiązań. Automatyczne zarządzanie pamięcią zmniejsza ryzyko błędów, a sprawdzone biblioteki do operacji macierzowych zapewniają szybkość działania.

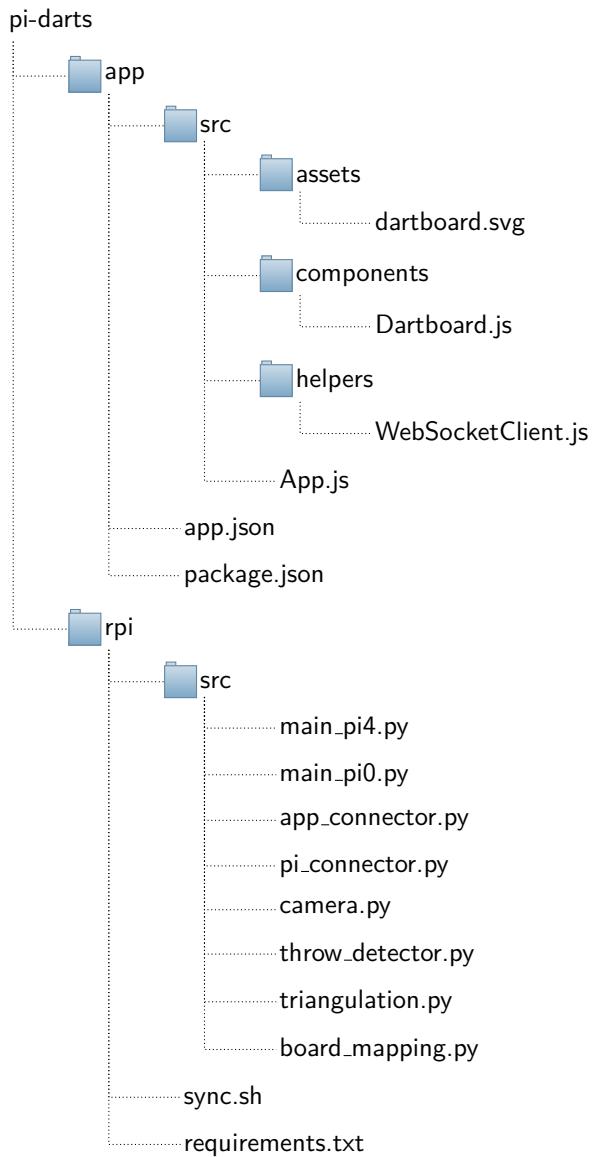
Do przetwarzania obrazu użyto biblioteki OpenCV, która dostarcza wiele gotowych modułów do rozwiązywania najczęstszych problemów związanych z widzeniem komputerowym, zapewniając jednocześnie duże możliwości konfiguracji, poprzez dobieranie parametrów. Biblioteka napisana jest w języku C++, ale posiada nakładki pozwalające na wywoływanie funkcji z poziomu innych języków, m.in. Pythona.

Wykonywanie zdjęć za pomocą kamery dedykowanej do Raspberry Pi byłoby trudne bez interfejsu, który dostarcza metody umożliwiające kontrolę pracy kamery na wysokim poziomie abstrakcji, bez wnikania w szczegóły jej budowy. Rolę tego interfejsu pełni picamera [4], moduł napisany w Pythonie specjalnie do tego celu. Pomimo prostoty użytkowania, daje możliwość zmiany wielu parametrów wpływających na zdjęcie, takich jak: czas naświetlania, liczba klatek na sekundę, rozdzielcość czy balans bieli. Dokumentacja opisuje sposób na przekształcenie zdjęć do formatu zgodnego z wymaganiami OpenCV.

Komunikacja pomiędzy serwerem a aplikacją mobilną odbywa się z użyciem protokołu WebSocket. Po stronie aplikacji wsparcie dla tego sposobu komunikacji jest wbudowane, lecz w języku Python należy wybrać jedną z szeregu zewnętrznych bibliotek, w których można stworzyć serwer. Implementacja została oparta o niewielką i mało popularną bibliotekę SimpleWebSocketServer [5], która jest jednak wystarczająca do obecnych potrzeb.

Do wykonania aplikacji klienckiej użyto platformy programistycznej React Native [6], dzięki której za pomocą jednej wersji kodu źródłowego tworzy się aplikację kompatybilną zarówno z systemem Android, jak i iOS. Z powodu bardzo dużych podobieństw do biblioteki React.js i używania języka JavaScript, tworzenie oprogramowania jest bardzo podobne do tworzenia aplikacji webowej. Środowisko Expo [7] zapewnia za to narzędzia pomocne w rozwijaniu, budowaniu i uruchamianiu aplikacji. Dzięki niemu możliwe jest używanie aplikacji mobilnej również przez przeglądarkę internetową. Wieloplatformowość to zdecydowany atut aplikacji.

## 5.3 Struktura projektu



Folder z projektem o nazwie `pi-darts` zawiera dwie aplikacje: `app` i `rpi`. Pierwsza z nich jest uruchamiana na smartfonie, druga na Pi 4 i Pi 0.

### Opis plików źródłowych

- `main_pi4.py` – główny skrypt uruchamiany na Pi 4, konfiguruje pozostałe moduły i zawiera główną pętlę programu.
- `main_pi0.py` – główny skrypt uruchamiany na Pi Zero, bardzo podobny do `main_pi4.py`. Również zawiera pętlę, w której wykonywane są nieustannie zdjęcia, lecz nie zajmuje się komunikacją z aplikacją.
- `app_connector.py` – zawiera klasę serwera aplikacji, dostarcza interfejs do wystartowania serwera w osobnym wątku oraz wysyłania komunikatów do klientów.
- `pi_connector.py` – używany przez oba urządzenia w celu ustanowienia połączenia. Składa się z dwóch klas: jednej dla serwera (Pi 4), z metodami do uruchomienia gniazda TCP i przyjęcia wiadomości, a drugiej dla klienta (Pi Zero), z funkcjami do podłączenia się do serwera oraz wysyłania komunikatu.

- `camera.py` – dodatkowy interfejs opakowujący metody biblioteki `picamera`. Daje możliwość wstępnego ustawienia kamery oraz wykonania zdjęcia reprezentowanego w formacie zgodnym z OpenCV.
- `throw_detector.py` – moduł, w którym zaimplementowana jest logika wykrywania rzutu. W tym miejscu wykonywane są wszystkie operacje na obrazach.
- `triangulation.py` – plik, w którym zapisane są funkcje przeprowadzające triangulację
- `board_mapping.py` – komponent przyporządkowujący pozycję rzutki we współrzędnych kartezjańskich do konkretnego pola na rzutce
- `App.js` – główny komponent aplikacji mobilnej. Zarządza jej stanem oraz przekazuje informacje do `Dartboard.js`.
- `Dartboard.js` – komponent ze graficznym przedstawieniem tarczy, umożliwia zaznaczanie miejsca wbicia rzutki.
- `WebSocketClient.js` – pomocniczy plik ustanawiający połączenie oraz przyjmujący komunikaty z serwera za pomocą technologii WebSocket.

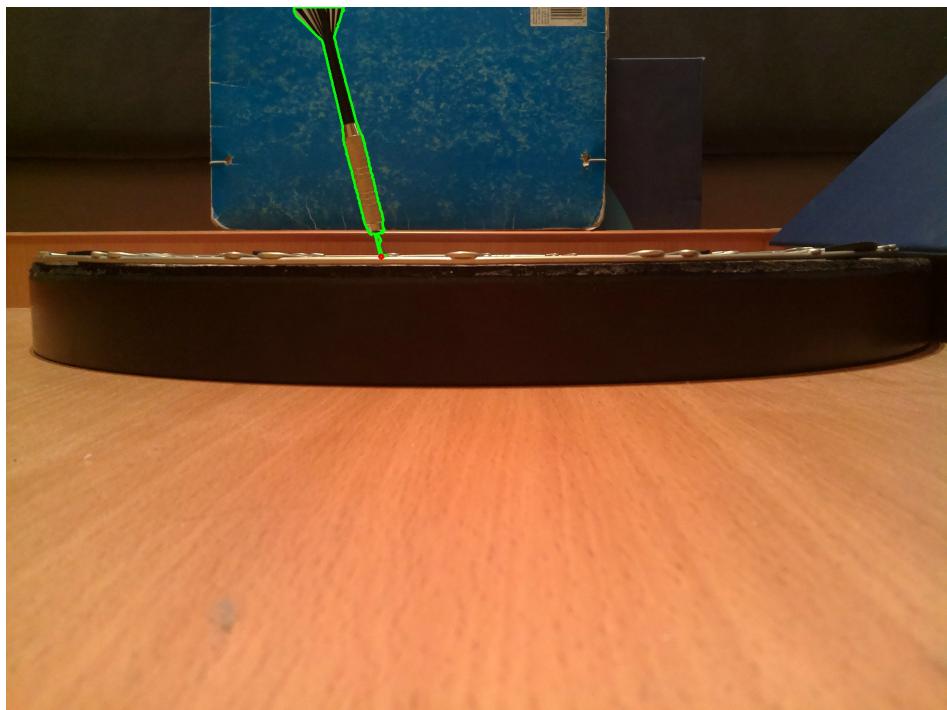
## 5.4 Efekt końcowy

Efekty działania aplikacji zostaną pokazane na przykładzie. Na rysunku 5.1 widoczny jest rzut z góry na tarczę z wbitym rzutką w pole standardowe 10. Następnie, na rysunku 5.2 zielonym kolorem zaznaczone zostały kontury wokół rzutki, osobno dla każdej z kamer. Pojedynczy, czerwony punkt jest uznawany za miejsce wbicia lotki. Ostateczny rezultat działania systemu widoczny jest na zrzucie ekranu z aplikacji mobilnej, gdzie prezentowane dane dobrze odzwierciedlają wykonany rzut.

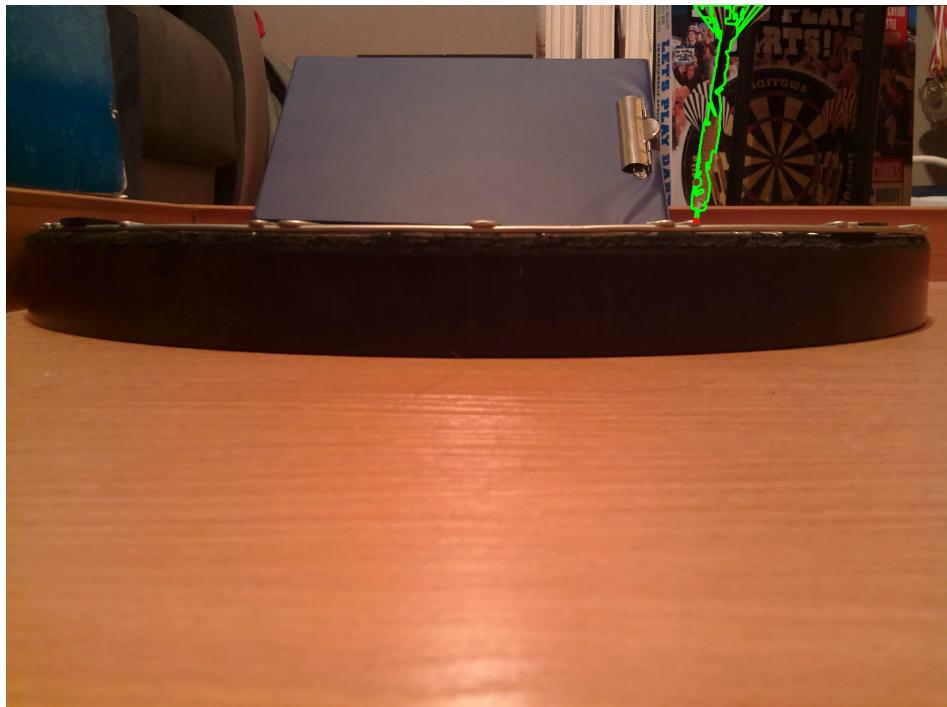


Rysunek 5.1: Rzutka wbita w tarczę (rzut z góry)

Źródło: Opracowanie własne

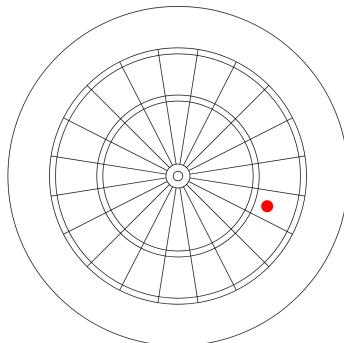


(a) Widok z prawej kamery  
Źródło: Opracowanie własne



(b) Widok z dolnej kamery  
Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 5.2: Wykrycie konturu rzutki



Punkty za ostatni rzut: 10

Rysunek 5.3: Zrzut ekranu z aplikacji mobilnej

Źródło: Opracowanie własne

## 5.5 Testy

TODO

## 5.6 Problemy

Podczas tworzenia systemu natrafiono na szereg problemów, m.in:

- ograniczone zasoby **Raspberry Pi Zero**, powodujące przerywanie programu przy dużym obciążeniu.
- mało skuteczne wykrywanie rzutki, gdy tło miało podobny kolor do koloru lotki. Z tego powodu za stelażem ustawiono prowizoryczne zasłony o odmiennych kolorach. Przez długi czas skuteczność obniżała również zbyt wcześnie (tj. wykonana przed odjęciem tła) konwersja obrazu do skali szarości, powodująca stratę informacji.
- instalacja biblioteki OpenCV, która (w przypadku komplikacji bezpośrednio ze źródłem), trwała na Pi Zero ok. 20 godzin.
- ustawienie rozdzielczości zdjęcia – okazało się, że szerokość i wysokość muszą być wielokrotnościami 16.
- słaba jakość zdjęć – przed użyciem i poprawną konfiguracją picamera, zdjęcia wykonywane w trakcie działania systemu były wyraźnie gorszej jakości niż te, wykonane statycznie, np. programem **raspistill**.



## 5.7 Prowadzenie projektu

Projekt był tworzony z użyciem systemu kontroli wersji Git, a zdalne repozytorium znajduje się na portalu GitHub<sup>1</sup>. Umożliwiło to wygodną, jednoczesną pracę nad różnymi elementami programu, a także zapewniało bezpieczeństwo w przypadku ewentualnych pomyłek.

W celu udokumentowania procesu analizy i tworzenia systemu, a także wykonania implementacji na czas, wykorzystano funkcjonalności portalu GitHub do tworzenia tablic projektowych (ang. *Kanban board*), do których systematycznie były dodawane nowe zadania. Wyznaczano również kamienie milowe, które wskazywały, w jakim miejscu znajduje się projekt.

---

<sup>1</sup> Adres: [www.github.com](https://www.github.com)



# Instalacja i wdrożenie

System jest dość specyficzny, dlatego trudno o łatwy sposób wdrożenia go ponownie, głównie z powodu konieczności wykonania stelaża, skonfigurowania urządzeń i zamontowania kamer. Mimo tego, starano się maksymalnie uprościć i zautomatyzować proces tworzenia i uruchamiania systemu.

Do uruchomienia programu na Pi 4 oraz Pi Zero wymagane jest zainstalowanie interpretera języka Python w wersji 3.7 lub wyższej oraz programu pip3. Lista pozostałych zależności zapisana w pliku `requirements.txt`, którego można użyć do wygodnej instalacji:

```
cd pi-darts/rpi  
pip3 install -r requirements.txt
```

Następnie, by uruchomić program, należy posłużyć się komendami:

```
cd src  
python3 main_pi4.py (dla Pi 4)
```

lub

```
cd src  
python3 main_pi0.py (dla Pi Zero)
```

Warto wspomnieć w tym miejscu o skrypcie `sync.sh`, który został napisany w celu łatwiejszej pracy nad rozwijaniem kodu źródłowego. Dzięki niemu można tworzyć oprogramowanie na komputerze np. z systemem Windows, a wszystkie pliki automatycznie, po każdym zapisie, przeniosą się na urządzenie Raspberry za pomocą protokołu SCP. Wywołanie wygląda następująco:

```
./sync.sh <adres_IP_urządzenia> [<ścieżka do klucza RSA>]
```

Do uruchomienia aplikacji mobilnej wymagane jest posiadanie środowiska Node.js w wersji 12 lub wyższej. Instalacja potrzebnych zależności:

```
cd pi-darts/app  
npm install -g expo-cli  
npm install
```

Uruchomienie aplikacji mobilnej:

```
npm start
```



# Podsumowanie

Udało się sprostać prawie wszystkim wymaganiom funkcjonalnym systemu. Zakończono prace implementacyjne nad pierwszą wersją zarówno aplikacji mobilnej, jak i części serwerowej. System zapewnia skuteczność na wysokim poziomie, choć nadal możliwym do poprawy, tak by jego użycie w trakcie treningu lub zawodów darta było rzeczywistym ułatwieniem procesu obliczania punktów. Pozostaje dużo funkcjonalności i usprawnień, których wykonanie w przeszłości zwiększy użyteczność aplikacji:

- umożliwienie przeprowadzenia pełnej rozgrywki (np. w grę 501) z pomocą systemu, a nie jedynie przekazywania informacji o pojedynczym rzucie
- rozwój metody znajdowania rzutki na zdjęciu, tak by program był mniej wrażliwy np. na zmianę oświetlenia
- zbadanie, na ile kalibracja kamery może poprawić dokładność
- przeprowadzenie większej liczby testów w celu ustalenia optymalnych wartości parametrów oraz wykrycia głównych problemów
- napisanie testów jednostkowych

Największym sukcesem pracy jest udane połączenie działań z wielu dziedzin, zarówno matematycznych, jak i czysto informatycznych. Z tego również powodu, w procesie od analizy problemu, przez wykonanie stelaża, aż do implementacji, należało wykazać się dużym przekrojem umiejętności. Znaczącą wartością pracy są również autorskie obliczenia, które okazały się dość skomplikowane, mimo iż oparte są na fundamentalnych prawach geometrii.



# Bibliografia

- [1] British Darts Organisation Playing Rules and Tournament Rules. <https://www.bdodarts.com/images/bdo-content/doc-lib/B/bdo-playing-rules.pdf>.
- [2] Dokumentacja OpenCV. <https://docs.opencv.org/4.1.0/>.
- [3] Dokumentacja Raspberry Pi. <https://www.raspberrypi.org/>.
- [4] Strona biblioteki picamera. <https://picamera.readthedocs.io/en/release-1.13/>.
- [5] Strona biblioteki SimpleWebSocketServer. <https://github.com/dpallot/simple-websocket-server>.
- [6] Strona platformy programistycznej React Native. <https://reactnative.dev/>.
- [7] Strona projektu Expo. <https://expo.io/>.
- [8] Transmission Control Protocol. RFC 793, Wrze. 1981.
- [9] The WebSocket Protocol. RFC 6455, Gru. 2011.
- [10] M. Forsman. Point cloud densification. Praca magisterska, Umeå University, 01 2011.
- [11] A. Kaehler, G. Bradski. *Learning OpenCV 3: Computer Vision in C++ with the OpenCV Library*. O'Reilly Media, Inc., wydanie 1st, 2016.
- [12] S. Suzuki, K. Abe. Topological structural analysis of digitized binary images by border following. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 30(1):32–46, 1985.



# Zawartość płyty CD

Na dołączonej płycie CD znajduje się projekt `pi-darts`, którego struktura została opisana w podrozdziale 5.3, a sposób instalacji w rozdziale 6.

