



# ĐGNL TOÁN HỌC – LUỢNG GIÁC

## BUỔI 1: GIÁ TRỊ LUỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG – CÔNG THỨC LUỢNG GIÁC

### PHẦN I. LÝ THUYẾT CƠ BẢN

#### A. GIÁ TRỊ LUỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

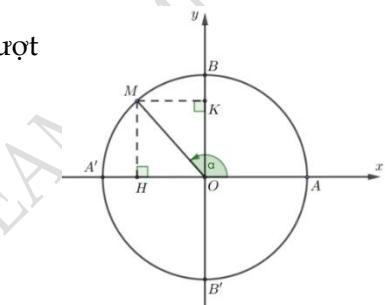
##### 1. Định nghĩa

Trên đường tròn lượng giác cho cung  $\widehat{AM}$  có sđ  $\widehat{AM} = \alpha$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên  $Ox$  và  $Oy$ . Ta có

$$\sin \alpha = \overline{OK}.$$

$$\cos \alpha = \overline{OH}.$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi. \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \alpha \neq k\pi.$$



##### 2. Hệ quả suy ra từ định nghĩa

a) $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha.$	b) $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha.$	c) $\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha.$
d) $\cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha.$	e) $-1 \leq \sin \alpha \leq 1.$	f) $-1 \leq \cos \alpha \leq 1.$

##### 3. Các công thức lượng giác cơ bản

a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	b) $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$
c) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$	d) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

##### 4. Cung liên quan đặc biệt

###### a) Cung đối nhau

$\cos(-\alpha) = \cos \alpha.$	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$	$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha.$	$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha.$
--------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------

###### b) Cung bù nhau

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha,$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha,$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha.$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha.$
--------------------------------------	-------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------

###### c) Cung hon kém $\pi$

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha,$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha,$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha.$	$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha.$
--------------------------------------	--------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------

###### d) Cung phụ nhau

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha,$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha,$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha.$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha.$
--	--	--	--

**B. CÔNG THỨC LUỢNG GIÁC****1) Công thức cộng**

a)  $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$

b)  $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$

c)  $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$

d)  $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$

e)  $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}, \left( a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right).$

f)  $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}, \left( a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, a-b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right).$

**2) Công thức nhân đôi**

a)  $\sin 2a = 2 \sin a \cos a.$

b)  $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a.$

c)  $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}, \left( a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, a \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right).$

**3) Công thức nhân ba**

a)  $\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a.$

b)  $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a.$

**4) Công thức hạ bậc**

a)  $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}.$

b)  $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}.$

c)  $\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}.$

**5) Công thức biến đổi tích thành tổng**

a)  $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)].$

b)  $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)].$

c)  $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)].$

**6) Công thức biến đổi tổng thành tích**

a)  $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$

b)  $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$

c)  $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$

d)  $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$

e)  $\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}.$

f)  $\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}.$

**C. PHƯƠNG TRÌNH LUỢNG GIÁC CƠ BẢN**

◦  $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$  ◦  $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$

◦  $\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$  ◦  $\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

**CÁC TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT:**

CHINH PHỤC MỌI MIỀN KIẾN THỨC

- $\cos u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$  ◦  $\sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
- $\cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$  ◦  $\sin u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$
- $\cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$  ◦  $\sin u = -1 \Leftrightarrow u = \frac{-\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

#### D. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT THEO SIN VÀ COS

**PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT:**

DẠNG: 
$$\begin{cases} \circ a \sin u + b \cos u = c \\ \circ a \sin u - b \cos u = c \\ \circ a \cos u - b \sin u = c \end{cases}$$

Điều kiện để phương trình có nghiệm là:  $a^2 + b^2 \geq c^2$

Giả sử phương trình:  $a \sin u + b \cos u = c \ (*)$

Cách giải chia hai vế của (\*) cho  $\sqrt{a^2 + b^2}$

$$\text{Ta được: } \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin u + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos u = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{Đặt } \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi \Rightarrow \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi.$$

$$\Leftrightarrow \sin u \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos u = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \sin(u + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ (**)$$

$$\text{Đặt } \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha.$$

(\*\*)  $\Leftrightarrow \sin(u + \varphi) = \sin \alpha$ . Giải phương trình cơ bản.

LUYỆN THI ĐÁNH GIÁ NĂNG LỰC



## PHẦN II. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

**Câu 1:** [EMPIRE TEAM]  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

**Câu 2:** [EMPIRE TEAM]  $\cot\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$

**Câu 3:** [EMPIRE TEAM]  $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos x = 0$

**Câu 4:** [EMPIRE TEAM]  $\cos\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) - \sin 2x = 0$

**Câu 5:** [EMPIRE TEAM]  $\sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{5}\right) = 0$

**Câu 6:** [EMPIRE TEAM]  $\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

**Câu 7:** [EMPIRE TEAM]  $\sin^2\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin^2\left(\frac{7\pi}{5} - x\right)$

**Câu 8:** [EMPIRE TEAM]  $\sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5} - 3x\right) = \sqrt{3}$

**Câu 9:** [EMPIRE TEAM]  $\sin\left(\frac{4\pi}{9} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{18} - x\right) = \sqrt{3}$

**Câu 10:** [EMPIRE TEAM]  $\tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan 2x = 0$

**Câu 11:** [EMPIRE TEAM]  $\cos 2x - 3\sin x - 2 = 0$

**Câu 12:** [EMPIRE TEAM]  $23\sin x - \sin 3x = 24$

**Câu 13:** [EMPIRE TEAM]  $\frac{3}{\sin^2 x} - 2\sqrt{3}\cot x - 6 = 0$

**Câu 14:** [EMPIRE TEAM]  $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$

**Câu 15:** [EMPIRE TEAM]  $\sin x - \cos x = 1$





# ĐGNL TOÁN HỌC – LUỢNG GIÁC

## BUỔI 2: PHƯƠNG TRÌNH LUỢNG GIÁC

**Câu 1:** [EMPIRE TEAM]  $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 3$

**Câu 2:** [EMPIRE TEAM]  $\sin x + \sin 2x = \sqrt{3}(\cos x + \cos 2x)$  [Dự bị 1 ĐH A04]

**Câu 3:** [EMPIRE TEAM]  $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 4\sin x + 1 = 0$  [Dự bị 2 ĐH A06]

**Câu 4:** [EMPIRE TEAM]  $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x \cos 2x - \sin x = 0$  [ĐH D09]

**Câu 5:** [EMPIRE TEAM]  $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin \cos x - \cos^2 x = 4$  (1)

**Câu 6:** [EMPIRE TEAM]  $\sin^3 x - 4\sin^2 x \cos x + 5\sin x \cos^2 x - 2\cos^3 x = 0$  (1)

**Câu 7:** [EMPIRE TEAM]  $2\sqrt{2}(\sin x - \cos x) - 2\sin 2x = 1$  (1)

**Câu 8:** [EMPIRE TEAM]  $\sin 2x - 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 5 = 0$  (1) [Dự bị 2 ĐH D04]

**Câu 9:** [EMPIRE TEAM] Số nghiệm thuộc khoảng  $(-\pi; \pi)$  của phương trình:  $2\sin x = 1$  là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

**Câu 10:** [EMPIRE TEAM] Phương trình  $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ?

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

**Câu 11:** [EMPIRE TEAM] Số điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$  trên đường tròn lượng giác là

A. 6.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

**Câu 12:** [EMPIRE TEAM] Giải phương trình  $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$  trên đoạn  $[\pi; 2018\pi]$  ta được số nghiệm là:

A. 2016 nghiệm.

B. 2017 nghiệm.

C. 2018 nghiệm.

D. 2019 nghiệm.

**Câu 13:** [EMPIRE TEAM] Phương trình  $\sin x = \cos x$  có tất cả bao nhiêu nghiệm trên đoạn  $[-5\pi; 30\pi]$ ?

A. 34.

B. 33.

C. 35.

D. 36.

**Câu 14:** [EMPIRE TEAM] Phương trình  $\sin 5x - \sin x = 0$  có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn  $[-2018\pi; 2018\pi]$ ?

A. 20179.

B. 20181.

C. 16144.

D. 16145.

# LUYỆN THI ĐÁNH GIÁ NĂNG LỰC - TEAM EMPIRE

- Câu 15:** [EMPIRE TEAM] Phương trình  $\frac{\sin 2x - \cos x}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0$  có bao nhiêu nghiệm trên đoạn  $[0; 5\pi]$ ?
- A. 11.      B. 6.      C. 9.      D. 8.
- Câu 16:** [EMPIRE TEAM] Tính tổng  $S$  các nghiệm của phương trình  $(2\cos 2x + 5)(\sin^4 x - \cos^4 x) + 3 = 0$  trong khoảng  $(0; 2\pi)$ .
- A.  $S = \frac{11\pi}{6}$ .      B.  $S = 4\pi$ .      C.  $S = 5\pi$ .      D.  $S = \frac{7\pi}{6}$ .
- Câu 17:** [EMPIRE TEAM] Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình  $\sin 2x + 4\sin x - 2\cos x - 4 = 0$  trong đoạn  $[0; 100\pi]$  của phương trình.
- A.  $100\pi$ .      B.  $2476\pi$ .      C.  $25\pi$ .      D.  $2475\pi$ .
- Câu 18:** [EMPIRE TEAM] Tìm số nghiệm của phương trình  $\sin(\cos x) = 0$  trên đoạn  $x \in [0; 2\pi]$ .
- A. 0.      B. 1.      C. 2.      D. Vô số.
- Câu 19:** [EMPIRE TEAM] Định m để phương trình sau có nghiệm  
 $(m-1)\sin x - (m+1)\cos x = m+3 \quad (1)$
- Câu 20:** [EMPIRE TEAM] Định m để phương trình sau có nghiệm  $\cos^2 x - \sin x \cos x - 2\sin^2 x = m$  (1)
- Câu 21:** [EMPIRE TEAM] Tìm m để phương trình  $2\sin x + m\cos x = 1 - m$  (1) có nghiệm  
 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .
- Câu 22:** [EMPIRE TEAM] Tìm m để phương trình  
 $\sin^2 x + (2m-2)\sin x \cos x - (1+m)\cos^2 x = m$  (1) có nghiệm.
- A. 40.      B. 42.      C. 44.      D. 43.
- Câu 23:** [EMPIRE TEAM] Có bao nhiêu số nguyên  $m \in [-22; 22]$  để phương trình  $m \cdot \cos x + 2 = 0$  có nghiệm?
- Câu 24:** [EMPIRE TEAM] Cho phương trình:  $(\cos x + 1)(\cos 2x - m\cos x) = m\sin^2 x$ . Phương trình có đúng hai nghiệm thuộc đoạn  $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$  khi?
- A.  $m > -1$ .      B.  $m \geq -1$ .      C.  $-1 \leq m \leq 1$ .      D.  $-1 < m \leq -\frac{1}{2}$ .
- Câu 25:** [EMPIRE TEAM] Điều kiện cần và đủ của m để phương trình  $\sin 2x = m \cdot \cos x$  có đúng 7 nghiệm trên đoạn  $\left[-\frac{\pi}{2}; 3\pi\right]$ ?
- A.  $-2 < m < 0$ .      B.  $0 < m < 2$ .      C.  $0 \leq m < 2$ .      D.  $-2 < m \leq 0$ .