



ĐGNL TOÁN HỌC – LƯỢNG GIÁC

BUỔI 1: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG – CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

PHẦN I. LÝ THUYẾT CƠ BẢN

A. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

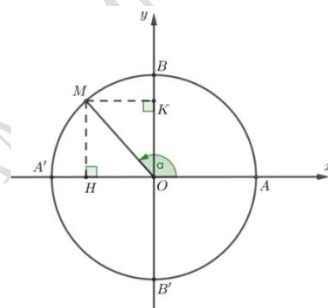
1. Định nghĩa

Trên đường tròn lượng giác cho cung \widehat{AM} có số $\widehat{AM} = \alpha$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên Ox và Oy . Ta có

$$\sin \alpha = \overline{OK}.$$

$$\cos \alpha = \overline{OH}.$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi. \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \alpha \neq k\pi.$$



2. Hệ quả suy ra từ định nghĩa

a) $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha.$	b) $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha.$	c) $\tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha.$
d) $\cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha.$	e) $-1 \leq \sin \alpha \leq 1.$	f) $-1 \leq \cos \alpha \leq 1.$

3. Các công thức lượng giác cơ bản

a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	b) $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$
c) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$	d) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

4. Cung liên quan đặc biệt

a) Cung đối nhau

$\cos(-\alpha) = \cos \alpha.$	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$	$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha.$	$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha.$
--------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------

b) Cung bù nhau

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha,$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha,$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha.$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha.$
--------------------------------------	-------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------

c) Cung hơn kém π

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha,$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha,$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha.$	$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha.$
--------------------------------------	--------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------

d) Cung phụ nhau

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha,$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha,$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha.$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha.$
--	--	--	--

B. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1) Công thức cộng

a) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$

b) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$

c) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$

d) $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$

e) $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}, \left(a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right).$

f) $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}, \left(a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, a-b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right).$

2) Công thức nhân đôi

a) $\sin 2a = 2 \sin a \cos a.$

b) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a.$

c) $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}, \left(a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, a \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right).$

3) Công thức nhân ba

a) $\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a.$

b) $\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a.$

4) Công thức hạ bậc

a) $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}.$

b) $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}.$

c) $\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}.$

5) Công thức biến đổi tích thành tổng

a) $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)].$

b) $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)].$

c) $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)].$

6) Công thức biến đổi tổng thành tích

a) $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$

b) $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$

c) $\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}.$

d) $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}.$

e) $\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}.$

f) $\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}.$

C. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

◦ $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$ ◦ $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$

◦ $\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ ◦ $\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

CÁC TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT:



- $\cos u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ ◦ $\sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
- $\cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ ◦ $\sin u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$
- $\cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ ◦ $\sin u = -1 \Leftrightarrow u = \frac{-\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

D. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT THEO SIN VÀ COS

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT:

$$\text{DẠNG: } \begin{cases} \circ a \sin u + b \cos u = c \\ \circ a \sin u - b \cos u = c \\ \circ a \cos u - b \sin u = c \end{cases}$$

Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $a^2 + b^2 \geq c^2$

Giả sử phương trình: $a \sin u + b \cos u = c$ (*)

Cách giải chia hai vế của (*) cho $\sqrt{a^2 + b^2}$

$$\text{Ta được: } \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin u + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos u = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{Đặt } \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi \Rightarrow \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi .$$

$$\Leftrightarrow \sin u \cdot \cos \varphi + \sin \varphi \cdot \cos u = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \sin(u + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (**)$$

$$\text{Đặt } \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha .$$

(**) $\Leftrightarrow \sin(u + \varphi) = \sin \alpha$. Giải phương trình cơ bản.

LUYỆN THI ĐÁNH

PHẦN II. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

- Câu 1:** [EMPIRE TEAM] $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$
- Câu 2:** [EMPIRE TEAM] $\cot\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$
- Câu 3:** [EMPIRE TEAM] $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos x = 0$
- Câu 4:** [EMPIRE TEAM] $\cos\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) - \sin 2x = 0$
- Câu 5:** [EMPIRE TEAM] $\sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{5}\right) = 0$
- Câu 6:** [EMPIRE TEAM] $\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$
- Câu 7:** [EMPIRE TEAM] $\sin^2\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin^2\left(\frac{7\pi}{5} - x\right)$
- Câu 8:** [EMPIRE TEAM] $\sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5} - 3x\right) = \sqrt{3}$
- Câu 9:** [EMPIRE TEAM] $\sin\left(\frac{4\pi}{9} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{18} - x\right) = \sqrt{3}$
- Câu 10:** [EMPIRE TEAM] $\tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan 2x = 0$
- Câu 11:** [EMPIRE TEAM] $\cos 2x - 3\sin x - 2 = 0$
- Câu 12:** [EMPIRE TEAM] $23\sin x - \sin 3x = 24$
- Câu 13:** [EMPIRE TEAM] $\frac{3}{\sin^2 x} - 2\sqrt{3}\cot x - 6 = 0$
- Câu 14:** [EMPIRE TEAM] $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$
- Câu 15:** [EMPIRE TEAM] $\sin x - \cos x = 1$



ĐGNL TOÁN HỌC – LƯỢNG GIÁC

BUỔI 2: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

- Câu 1:** [EMPIRE TEAM] $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 3$
- Câu 2:** [EMPIRE TEAM] $\sin x + \sin 2x = \sqrt{3}(\cos x + \cos 2x)$ [Dự bị 1 ĐH A04]
- Câu 3:** [EMPIRE TEAM] $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 4\sin x + 1 = 0$ [Dự bị 2 ĐH A06]
- Câu 4:** [EMPIRE TEAM] $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x \cos 2x - \sin x = 0$ [ĐH D09]
- Câu 5:** [EMPIRE TEAM] $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin x \cos x - \cos^2 x = 4$ (1)
- Câu 6:** [EMPIRE TEAM] $\sin^3 x - 4\sin^2 x \cos x + 5\sin x \cos^2 x - 2\cos^3 x = 0$ (1)
- Câu 7:** [EMPIRE TEAM] $2\sqrt{2}(\sin x - \cos x) - 2\sin 2x = 1$ (1)
- Câu 8:** [EMPIRE TEAM] $\sin 2x - 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 5 = 0$ (1) [Dự bị 2 ĐH D04]
- Câu 9:** [EMPIRE TEAM] Số nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$ của phương trình: $2\sin x = 1$ là:
 A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 10:** [EMPIRE TEAM] Phương trình $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?
 A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.
- Câu 11:** [EMPIRE TEAM] Số điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ trên đường tròn lượng giác là
 A. 6. B. 1. C. 4. D. 2.
- Câu 12:** [EMPIRE TEAM] Giải phương trình $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$ trên đoạn $[\pi; 2018\pi]$ ta được số nghiệm là:
 A. 2016 nghiệm. B. 2017 nghiệm. C. 2018 nghiệm. D. 2019 nghiệm.
- Câu 13:** [EMPIRE TEAM] Phương trình $\sin x = \cos x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm trên đoạn $[-5\pi; 30\pi]$?
 A. 34. B. 33. C. 35. D. 36.
- Câu 14:** [EMPIRE TEAM] Phương trình $\sin 5x - \sin x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2018\pi; 2018\pi]$?
 A. 20179. B. 20181. C. 16144. D. 16145.



- Câu 15:** [EMPIRE TEAM] Phương trình $\frac{\sin 2x - \cos x}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0$ có bao nhiêu nghiệm trên đoạn $[0; 5\pi]$?
- A. 11. B. 6. C. 9. D. 8.
- Câu 16:** [EMPIRE TEAM] Tính tổng S các nghiệm của phương trình $(2\cos 2x + 5)(\sin^4 x - \cos^4 x) + 3 = 0$ trong khoảng $(0; 2\pi)$.
- A. $S = \frac{11\pi}{6}$. B. $S = 4\pi$. C. $S = 5\pi$. D. $S = \frac{7\pi}{6}$.
- Câu 17:** [EMPIRE TEAM] Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 2x + 4\sin x - 2\cos x - 4 = 0$ trong đoạn $[0; 100\pi]$ của phương trình.
- A. 100π . B. 2476π . C. 25π . D. 2475π .
- Câu 18:** [EMPIRE TEAM] Tìm số nghiệm của phương trình $\sin(\cos x) = 0$ trên đoạn $x \in [0; 2\pi]$.
- A. 0. B. 1. C. 2. D. Vô số.
- Câu 19:** [EMPIRE TEAM] Định m để phương trình sau có nghiệm $(m-1)\sin x - (m+1)\cos x = m+3$ (1)
- Câu 20:** [EMPIRE TEAM] Định m để phương trình sau có nghiệm $\cos^2 x - \sin x \cos x - 2\sin^2 x = m$ (1)
- Câu 21:** [EMPIRE TEAM] Tìm m để phương trình $2\sin x + m\cos x = 1 - m$ (1) có nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
- Câu 22:** [EMPIRE TEAM] Tìm m để phương trình $\sin^2 x + (2m-2)\sin x \cos x - (1+m)\cos^2 x = m$ (1) có nghiệm.
- Câu 23:** [EMPIRE TEAM] Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-22; 22]$ để phương trình $m \cdot \cos x + 2 = 0$ có nghiệm?
- A. 40. B. 42. C. 44. D. 43.
- Câu 24:** [EMPIRE TEAM] Cho phương trình: $(\cos x + 1)(\cos 2x - m\cos x) = m\sin^2 x$. Phương trình có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ khi?
- A. $m > -1$. B. $m \geq -1$. C. $-1 \leq m \leq 1$. D. $-1 < m \leq -\frac{1}{2}$.
- Câu 25:** [EMPIRE TEAM] Điều kiện cần và đủ của m để phương trình $\sin 2x = m \cdot \cos x$ có đúng 7 nghiệm trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 3\pi\right]$?
- A. $-2 < m < 0$. B. $0 < m < 2$. C. $0 \leq m < 2$. D. $-2 < m \leq 0$.