



---

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem  
Gépészmérnöki Kar  
Műszaki Mechanikai Tanszék

Elsőrendű rúdelmélet alkalmazása  
törésmechanikai próbatesten

SZAKDOLGOZAT

Készítette: KISS BALÁZS

Konzulens:

Dr. Szekrényes András  
egyetemi docens

Budapest, 2016



Ide kerül a feladat kiírás



## Nyilatkozat az önálló munkáról

Alulírott Kiss Balázs (KUHUA1) a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem hallgatója, büntetőjogi és fegyelmi felelősségem tudatában kijelentem és sajátkezű aláírással igazolom, hogy ezt a szakdolgozatot meg nem engedett segítség nélkül, saját magam készítettem, és dolgozatomban csak a megadott forrásokat használtam fel. Minden olyan részt, melyet szó szerint vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból átvettem, egyértelműen, a hatályos előírásoknak megfelelően, a forrás megadásával megjelöltem.

Budapest, 2016. december 10.

.....  
*szigorló hallgató*



## Köszönetnyilvánítás

Mindenek előtt köszönetet szeretnék mondani Dr. Szekrényes András egyetemi docensnek, hogy tudásával, hasznos tanácsaival és segítőkészségével támogatta szakdolgozatom létrejöttét. További köszönettel tartozom tanárainnak, akik hozzásegítettek azon ismereteim elsajátításához, melyek elengedhetetlenek voltak dolgozatom megírásához.

Végül, de nem utolsó sorban hálámat szeretném kifejezni szüleimnek önzetlen támogatásukért és azért, mert megteremtették számomra a tanulás lehetőségét.





*Szüleimnek és  
testvéreimnek*



# Tartalomjegyzék

<b>Bevezetés</b>	<b>1</b>
<b>1. Szakirodalmi összefoglaló</b>	<b>3</b>
1.1. Lineárisan rugalmas törésmechanika . . . . .	3
1.1.1. Repedés szétnyílási modellek . . . . .	3
1.1.2. Irwin-Kies formula . . . . .	4
1.1.2.1. Erővezérlés . . . . .	5
1.1.2.2. Elmozdulásvezérlés . . . . .	5
1.1.3. II-es módusú próbatestek . . . . .	6
1.2. Alkalmazott rúdelméletek . . . . .	7
1.2.1. Euler-Bernoulli féle klasszikus rúdelmélet . . . . .	7
1.2.2. Magasabbrendű rúdelméletek . . . . .	8
1.3. A virtuális munka elve . . . . .	10
1.4. A virtuális repedészáródási technika . . . . .	12
<b>2. Elsőrendű rúdelmélet</b>	<b>13</b>
2.1. Feltételezett elmozdulásmezők . . . . .	13
2.2. Geometriai egyenletek . . . . .	14
2.3. Az igénybevételek meghatározása . . . . .	15
2.4. Egyensúlyi egyenletek levezetése . . . . .	16
2.4.1. Delaminált rész . . . . .	16
2.4.2. Nemdelaminált rész . . . . .	17
<b>3. Másodrendű rúdelmélet</b>	<b>21</b>
3.1. Feltételezett elmozdulásmezők . . . . .	21
3.2. Geometriai egyenletek . . . . .	22
3.3. Az igénybevételek meghatározása . . . . .	23
3.4. Egyensúlyi egyenletek levezetése . . . . .	24
3.4.1. Delaminált rész . . . . .	24
3.4.2. Nemdelaminált rész . . . . .	26
<b>4. Alkalmazás</b>	<b>31</b>
4.1. Analitikus megoldás . . . . .	31
4.1.1. Alkalmazott peremfeltételek . . . . .	32
4.1.2. Lehajlások és elmozdulásmezők . . . . .	34
4.1.3. Igénybevételi ábrák . . . . .	36
4.2. Végeselemes megoldás . . . . .	39
4.3. Repedésfeszítő erők aránya . . . . .	39
4.4. Feszültség eloszlások . . . . .	41
<b>Összefoglalás</b>	<b>43</b>

<b>Summary</b>	<b>45</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>47</b>

# Bevezetés

A törésmechanika első kvantitatív eredményéhez egészen az 19. század elejéig kell visszanyúlni. Griffith 1920-ban publikálta először eredményeit, melyben egy elliptikus furattal gyengített lemezt vizsgált, és amelyben termodinamikai úton próbált használható magyarázatot adni a repedés megindulására. Ezen eredmények kezdetben kizárólag csak kerámiai és üveg próbatesteken voltak alkalmazhatóak. Egészen 1948-ig kellett várni, hogy Griffith módosított modellje fémekre is alkalmazható legyen [1].

Ma már ez a megközelítés rendkívül jól alkalmazható a lineáris törésmechanikában. 1956-ban Irwin ötlete által bevezetésre került az úgynevezett  $G$  "repedésfeszítő erő" vagy más néven "fajlagos energia felszabadulási ráta". Amennyiben  $G$  elér egy kritikus értéket a repedés szétnyílása megkezdődik, és a repedés tovább terjed [1]. Ezen kritikus paraméter  $G_c$ , hasonlóan a rugalmassági modulushoz, az anyag sajátja. Zsenialitása abban rejlik, hogy a repedés mechanikai vizsgálatát nem a mérnöki szempontból nehézkesen kezelhető szinguláris feszültségek elemzésével, hanem az adott feladatnál számított energia felszabadulási rátának (mint szívóssági paraméternek) az adott anyagra jellemző kritikus értékével való összehasonlítása alapján végezzük el. Cél, hogy egy adott konfigurációban és terhelés mellett az aktuális repedésre jellemző érték ne haladja meg ezen kritikus értéket [2]. Kérdés persze, hogy egy adott anyag esetén mégis mekkora ez a kritikus érték? Ennek meghatározásához törésmechanika próbatesteken vizsgálatokat kell végezni. Ezek a vizsgálatok rendkívül egyszerű geometriákon, legtöbb esetben gerendákon vagy rudakon történnek. A repedéssel gyengített rudakat egyre növekvő erővel terhelik, és azt mérik, hogy mekkora erő esetén kezd el a repedés terjedni. Ezt követően ebből az erőből számolják vissza a repedésfeszítő erő kritikus, az adott anyagra jellemző értékét.

Abban az esetben, ha a nyírásból származó deformációs energia elhanyagolható, és így a hajlításból adódó energia dominál, az Euler-Bernoulli-féle klasszikus elmélet egyszerű függvénykapcsolatot ad. Ha azonban az említett feltétel nem teljesül, úgy javított elméleteket és korrekciós függvényeket kell alkalmazni. Törésmechanika próbatestek javított elméletével számos kutató és szerző foglalkozott. Ezek az analitikus eredmények magasabbrendű rúd- és lemezelméleteken alapulnak [3]. Ezen megközelítések lényege a klasszikus elmélettel szemben, a transzverzális nyírás hatását is figyelembe veszik. Megengedik a keresztmetszeti deformációját, és alakjukat első, másod vagy harmadfokú polinommal közelítik [4]. Ezen elmozdulásfüggvények foka határozza meg, hogy pontosan hányadrendű elméletről is beszélünk. A szakirodalomban található javított elméletek azonban nem feltétlenül tisztán egzaktak [5].

Az én dolgozatom célja tisztán egzakt, magasabbrendű (első- és másodrendű) megoldások előállítása, és azok összehasonlítása a szakirodalomban elérhető más, nem tisztán egzakt megoldásokkal. A kapott eredményeket továbbá az Euler-Bernoulli-féle klasszikus elmélettel is összevetem, így választ kapva arra a kérdésre is, hogy mikor érdemes ezen javított, de sokkal bonyolultabb megoldások alkalmazása. Az általam használt leíró differenciál egyenleteket a virtuális munka elve, és az úgynevezett egzakt kinematikai feltételrendszer segítségével vezetem le.

A dolgozatomban sokszor használok a delamináció kifejezést, ami polimer kompozitok

rétegek közötti törését jelenti [3]. Ennek oka az, hogy a megoldásokat egy polimer kompozit próbatesten számszerűsíttem.

# 1. fejezet

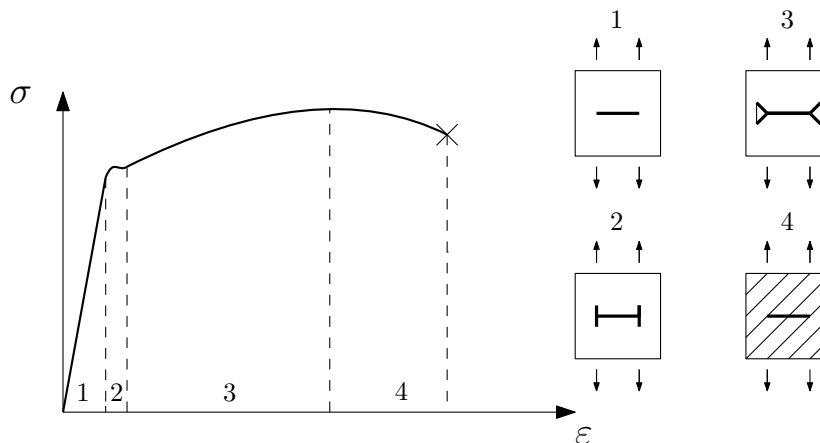
## Szakirodalmi összefoglaló

Ebben a fejezetben összefoglalom a lineáris törésmechanika néhány olyan alap kifejezését, melyet a dolgozatom is felhasználok. Röviden áttekintem a II-es módusú próbates-  
teket. Bemutatásra kerül továbbá a virtuális munka elve, és a végeselemes kiértékelésem  
során használt, úgynevezett virtuális repedészáródási technika.

### 1.1. Lineárisan rugalmas törésmechanika

#### 1.1.1. Repedés szétnyílási modellek

A repedés folytonossági hiányt jelent az elmozdulásmezőben. Ha egy repedés tartal-  
mazó próbatest szakítódiaagramját felvesszük, akkor a  $\sigma$  feszültség -  $\varepsilon$  fajlagos alakváltozás  
kapcsolata és a repedés alakjának kapcsolata a 1.1 ábrán látható módon alakul [7].

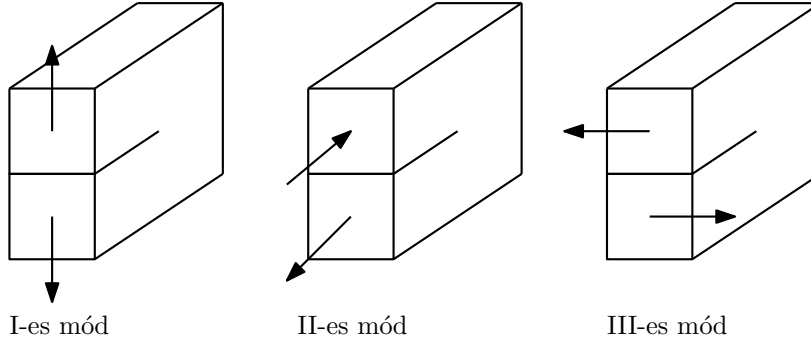


1.1. ábra. A repedés alakja különböző alakváltozási tartományokban

Az 1-gyel jelölt szakasz a lineárisan rugalmas törésmechanika tartománya. A repedés  
körüli feszültségek nőnek, de a repedés alakja nem változik. A 2-es szakaszon a re-  
pedéscsúcs környezetében képlékeny alakváltozás lép fel. Ez a kis képlékeny tartományú  
lineáris törésmechanika. A 3-as szakaszon a képlékeny törésmechanika érvényes, mely-  
nek jellemzője a repedéscsúcsoknál kialakuló véges képlékeny tartomány. Végül a 4-es  
szakaszon általános megfolyás következik be, a próbatest tönkremegy [6].

A továbbiakban a lineárisan rugalmas törésmechanika tartományán belül maradok és  
azt mutatom meg, milyen módon következhet be adott feszültségállapot esetén a repedés  
megindulása. A következő 1.2 ábrán látható, hogy a szakirodalom milyen fajta, tiszta  
repedés kinyílási módokat különböztet meg, melyeket római számokkal jelölnek. Az I-es

szétnyílási mód a legáltalánosabb és legveszélyesebb. A II-es a párhuzamos elcsúszás, míg a III-as az úgynevezett transzverzális elcsúszás [6]. Természetesen a valóságban ezek különböző szuperpozíciója is előfordulhat. Az úgynevezett vegyes módusok esetén a komponensek nagyságának meghatározása fontos gyakorlati feladat [3].



1.2. ábra. Repedés kinyílási módok

A dolgozatomban ezt követően csak a II-es módusú repedéssel és próbatestekkel fogok foglalkozni.

### 1.1.2. Irwin-Kies formula

1956-ban Irwin a törésmechanikai problémák kezelésére energia alapú megoldást javasolt. Ezen modell lényegében ekvivalens a Griffith által javasolt modellel, kivéve, hogy ez a megközelítés sokkal alkalmasabb mérnöki problémák megoldására. Irwin bevezette az úgynevezett "energia felszabadulási rátát", amely megegyezik a II teljes potenciális energia repedés területe szerinti megváltozásával [1]:

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} \quad (1.1)$$

A teljes potenciális energia egy rugalmas testben definíció szerint a következő:

$$\Pi = U - W \quad (1.2)$$

ahol  $U$  a rugalmas testben felhalmozódott teljes alakváltozási energiát, míg  $W$  a külső erők által végzett munkát jelöli. Amennyiben  $G$  elér egy kritikus értéket a repedés szétnyílása megkezdődik, és a repedés továbbterjed. Ezen paraméter  $G_c$ , hasonlóan a rugalmassági modulushoz, az anyag sajátja. Neve törési szívósság, melyet törésmechanikai próbatestek segítségével határoznak meg. Irwin ötletének zsenialitása tehát abba rejlik, hogy a repedés mechanikai vizsgálatát 1956-tól nem a mérnöki szempontból nehézkesen kezelhető szinguláris feszültségek elemzésével, hanem az adott feladatnál számított energia felszabadulási rátának (mint szívóssági paraméternek) az adott anyagra jellemző kritikus értékével való összehasonlítása alapján végezzük el [2].

A szakirodalomban továbbá ismert az úgynevezett feszültségintenzitási tényező. Ennek funkciója megegyezik a repedésfeszítő erőjével [1]. Kiszámítási módja, az  $E_{11}$  rugalmassági modulus és  $\nu$  Poisson-tényező ismertében, síkfeszültségi állapotban:

$$K = \sqrt{GE_{11}} \quad (1.3)$$

Míg síkalakváltozási állapot esetén:

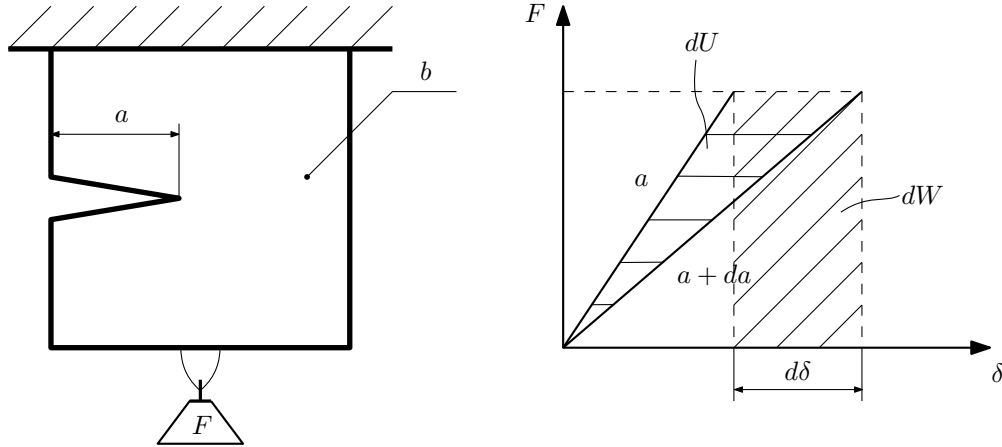
$$K = \sqrt{G \frac{E_{11}}{1 - \nu^2}} \quad (1.4)$$



A repedésterjedési folyamatoknál alapvetően két különböző szabályozást különböztetünk meg. Ezek név szerint az erővezérlés és az elmozdulásvezérlés. Ahogy a nevük is utal rá, erővezérelt repedésterjedéskor az erő, míg elmozdulásvezérelt repedésterjedéskor az elmozdulás állandó. Érdekes megnézni, hogy ezen két különböző esetben miképp tudjuk a repedés feszítő erőt meghatározni. Látni fogjuk, hogy mindkét eset ugyanazt az összefüggést eredményezi, ahol a legfontosabb jellemző a rendszer rugóállandója [7].

### 1.1.2.1. Erővezérlés

Erővezérelt repedésterjedéskor fellépő  $F$  erő -  $\delta$  elmozdulás kapcsolatot a következő 1.3 ábra szemlélteti.



1.3. ábra. Erővezérlés mechanikai modellje és az erő-elmozdulás kapcsolata

Felhasználva az (1.1) (1.2) egyenleteket és a  $C$  rugóállandó definícióját a következők adódnak,

$$C = \frac{\delta}{F} \quad dW = F d\delta \quad dU = \frac{1}{2} F d\delta \quad (1.5)$$

Így a potenciális energia megváltozás:

$$d\Pi = dU - dW = -dU \quad (1.6)$$

Végül a repedésfeszítő erő:

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} = \frac{1}{b} \frac{dU}{da} \Big|_F = \frac{F}{2b} \frac{d\delta}{da} \Big|_F = \frac{P^2}{2b} \frac{dC}{da} \quad (1.7)$$

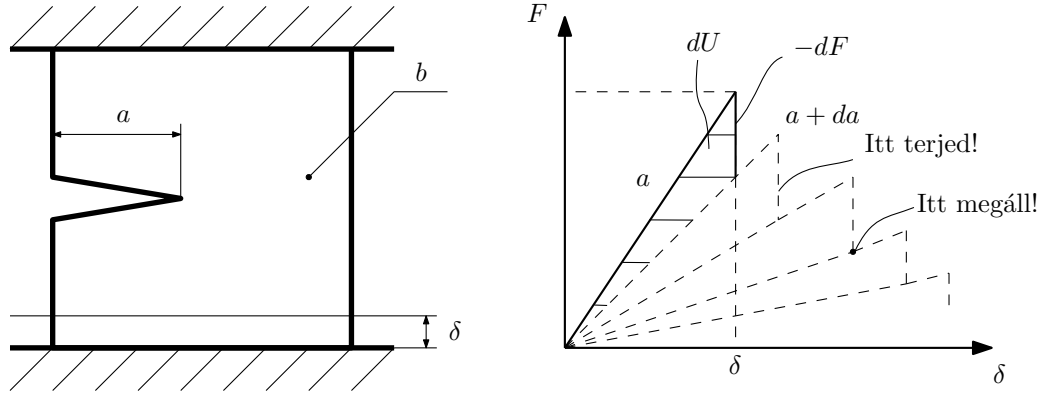
### 1.1.2.2. Elmozdulásvezérlés

Elmozdulásvezérelt repedésterjedéskor fellépő erő-elmozdulás kapcsolatot a következő 1.4 ábra szemlélteti. Felhasználva az (1.1) (1.2) egyenleteket és a  $C$  rugóállandó definícióját, a következők adódnak:

$$C = \frac{\delta}{F} \quad dW = 0 \quad dU = \frac{1}{2} F d\delta \quad (1.8)$$

$$d\Pi = dU - dW = dU \quad (1.9)$$

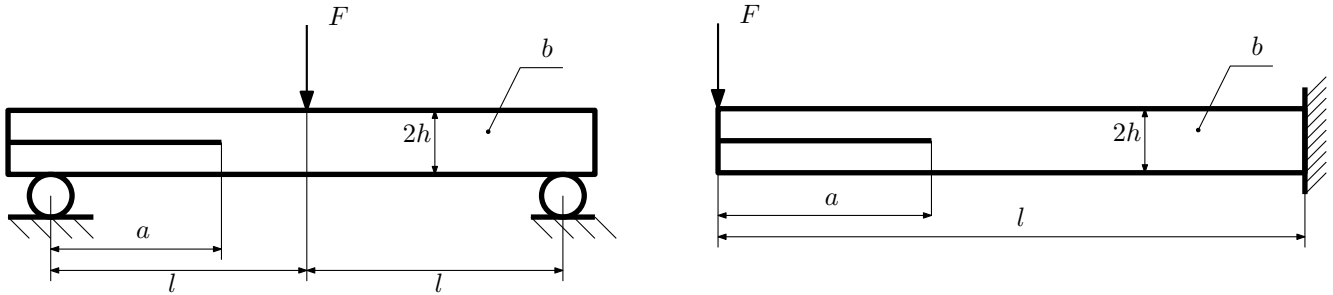
$$\begin{aligned} G &= -\frac{d\Pi}{dA} = -\frac{1}{b} \frac{dU}{da} \Big|_\delta = -\frac{\delta}{2b} \frac{dF}{da} \Big|_\delta = -\frac{\delta}{2b} \frac{d(\frac{\delta}{F})}{da} \Big|_\delta \\ &= -\frac{FC}{2b} \left( -\frac{1}{C^2} \delta \frac{dC}{da} \right) = -\frac{FC}{2b} \left( -\frac{1}{C^2} FC \frac{dC}{da} \right) = \frac{F^2}{2b} \frac{dC}{da} \end{aligned} \quad (1.10)$$



1.4. ábra. Elmozdulásvezérlés mechanikai modellje és az erő-elmozdulás kapcsolata

### 1.1.3. II-es módusú próbatestek

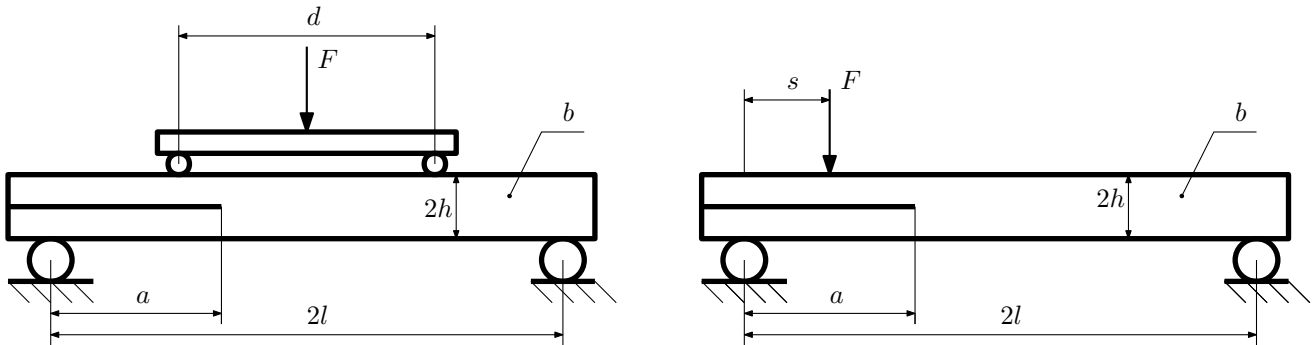
A törési tesztekre használt II-es módusú próbatesteket a következő 1.5 és 1.6 ábrák szemléltetik. Ezek név szerint az úgynevezett "End-notched flexure" (ENF), "End-loaded split" (ELS), "4-point end-notched flexure" (4ENF), és "Over-notched flexure" (ONF) próbatestek. Legfőbb előnyük, hogy ezen próbatestekre, az Euler-Bernoulli klasszikus rúd-elméletet alkalmazva, a repedésfeszítő erőre viszonylag rövid és egyszerű analitikus összefüggést kapunk. Emellett azonban meg kell azt is említeni, hogy minden próbatestnek megvannak a saját hátrányai is. Hogy néhányat említsek: ENF, 4ENF, ONF próbatestek esetén a longitudinális elcsúszás, míg ELS próbatest esetén a túlságosan nagy deformációk [3].



1.5. ábra. ENF és ELS próbatestek

$$G_{II} = \frac{9F^2 a^2}{16b^2 h^3 E_{11}} \quad (1.11)$$

$$G_{II} = \frac{9F^2 a^2}{4b^2 h^3 E_{11}} \quad (1.12)$$



1.6. ábra. 4ENF és ONF próbatestek

$$G_{II} = \frac{9(l - d/2)F^2}{16b^2 h^3 E_{11}} \quad (1.13)$$

$$G_{II} = \frac{9F^2 s^2 (2l - s)^2}{16b^2 h^3 E_{11} l^2} \quad (1.14)$$

## 1.2. Alkalmazott rúdelméletek

A következőkben bemutatásra kerülnek a klasszikus és a magasabbrendű rúdelmétek alapfogalatai, melyeket már régóta alkalmaznak a törésmechanikai próbatestek leírására. Ezek célja, hogy a rendszerre jellemző  $C$  rugóállandót minél pontosabban tudják számítani. Azaz, hogy figyelembe tudjanak venni olyan hatásokat is, melyeket a klasszikus rúdelmélettel nem lehet modellezni. Jó példa erre a keresztmetszet nyírásából adódó deformációs tag figyelembe vétele, amely viszonylag "hosszú" gerenda esetén teljesen elhanyagolható, míg rövidebb próbatesteken egyre növekvő szerepet kap.

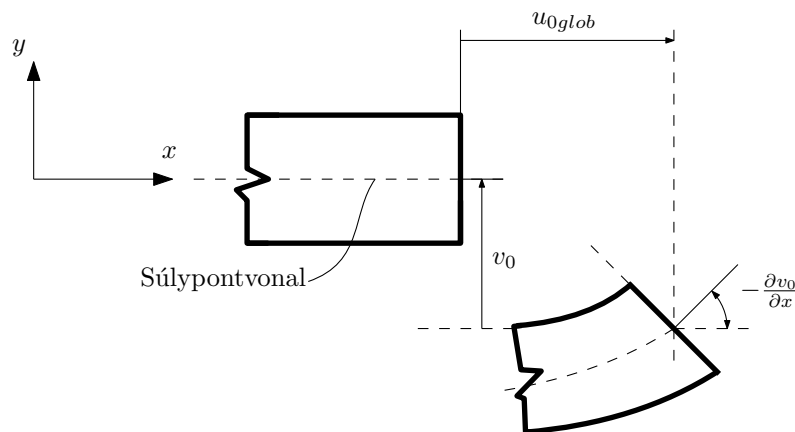
### 1.2.1. Euler-Bernoulli féle klasszikus rúdelmélet

Az Euler-Bernoulli-féle klasszikus rúdelmélet feltételezi, hogy fennállnak a következő hipotézisek:

- Terhelések következtében a súlypontvonal hossza nem változik.
- A súlypontvonalra merőleges síkok a terhelést követően is síkok maradnak.
- A súlypontvonalra merőleges síkok a terhelést követően merev test szerűen fordulnak el úgy, hogy közben a súlypontvonalra merőlegesek maradnak.

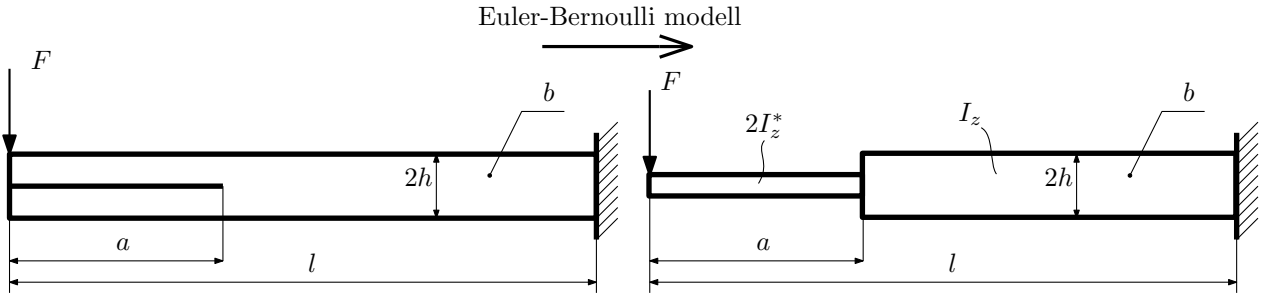
E hipotézisek függvényében, az elmozdulás mező felírható a következő alakban, ahol  $u_{0glob}$  a globális membránmozdulás, míg  $v_0$  a súlypontvonal lehajlását jelöli. Az egyes tagokat továbbá 1.7 ábra szemlélteti [4].

$$u(x, y) = u_{0glob}(x) - \frac{\partial v_0(x)}{\partial x} y \quad (1.15)$$



1.7. ábra. A keresztmetszetek elmozdulása a klasszikus rúdelmélet szerint

Egy ELS próbatest esetén (ld. 1.5 ábra) az Euler-Bernoulli rúdelméletet alkalmazva, a II-es módusú repedésfeszítő erő meghatározásának módja a Castigliano tétel segítségével történik. Először meghatározandó az  $U$  teljes alakváltozási energia, ami esetünkben kizárólag a hajlításból származó energiát jelenti. Ennek ismeretében már származtatható a rendszer  $C$  rugóállandója, és alkalmazható az Irwin-Kies formula. A vizsgált rúd geometriáját és az Euler-Bernoulli elmélet szerinti modellezését a következő 1.8 ábra szemlélteti.



1.8. ábra. Az ELS próbatest klasszikus modellje

Az 1.8 ábra alapján a rúd alakváltozási energiája:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_h^2}{I_z E} dx = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{M_h^2}{2I_z^* E} dx + \frac{1}{2} \int_a^l \frac{M_h^2}{I_z E} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^a \frac{(Fx)^2}{\left(\frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{12}\right) E} dx + \frac{1}{2} \int_a^l \frac{(Fx)^2}{\frac{b(2h)^3}{12} E} dx \\
 &= \frac{2}{bE} \left( \frac{F^2 a^3}{2h^3} + \frac{F^2 (l^3 - a^3)}{8h^3} \right)
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

A Castigliano-tétel segítségével számítható tehát a rendszerre jellemző  $C$  rugóállandó:

$$C(a) = \frac{1}{F} \frac{dU}{dF} = \frac{4}{bE} \left( \frac{a^3}{2h^3} + \frac{(l^3 - a^3)}{8h^3} \right) \tag{1.17}$$

Továbbá, alkalmazva az Irwin-Kies formulát, a repedés feszítőerőre a következő adódik:

$$G_{II} = \frac{F^2}{2b} \frac{dC(a)}{da} = \frac{9F^2 a^2}{4b^2 h^3 E} \tag{1.18}$$

Látható, hogy a vártnak megfelelően visszakaptuk a (1.11)-es egyenletet. Más konfigurációk esetén a repedésfeszítő erő számítása hasonló módon történik.

### 1.2.2. Magasabbrendű rúdelméletek

Ha kicsit közelebbről megnézzük a klasszikus rúdelmélet elmozdulásmezőjét, látható, hogy ezen modell a lineáris rugalmasságtan alapegyenleteit felhasználva, semmiféle magyarázatot nem ad a nyíró feszültségek kialakulására. Ez mindenképp ellentmond a tömör, legalább egy szimmetria síkkal rendelkező keresztmetszetek Zsuravszkij által levezetett csúsztatófeszültség eloszlásával. (Amely téglalap keresztmetszetű rudak esetén parabolikus feszültségeloszlást ad.) Az alkalmazott magasabbrendű elméletek lényege épp ezért az, hogy elmozdulásmezőt polinomok alakjában tételezik fel, és ezáltal figyelembe tudják venni a nyíróigénybevételből adódó csúsztatófeszültség eloszlást, és az ezzel járó járulékos lehajlást. A törésmechanikában gyakran alkalmazott magasabbrendű elméletek tehát a következők:

- Elsőrendű elmélet, ahol  $\theta$  a keresztmetszet szögelfordulását jelöli. Ez az elmélet, téglalap keresztmetszetet feltételezve, konstans csúsztatófeszültség eloszlást ad [4]. Az elsőrendű elmélet szerint a síkbeli alakváltozási komponens a következő:

$$u(x, y) = u_{0glob}(x) + \theta(x)y \tag{1.19}$$

- Másodrendű elmélet, ahol  $\theta$  a keresztmetszet szögelfordulását, míg  $\phi$  a másodrendű tagot jelöli. Ez az elmélet, téglalap keresztmetszetet feltételezve, lineáris csúsztatófeszültség eloszlást ad [8]. A másodrendű elmélet szerint a síkbeli alakváltozási komponens a következő:

$$u(x, y) = u_{0glob}(x) + \theta(x)y + \phi(x)y^2 \quad (1.20)$$

- Harmadrendű elmélet, ahol  $\theta$  a keresztmetszet szögelfordulását,  $\phi$  a másodrendű tagot,  $\lambda$  pedig a harmadrendű tagot jelöli. Ez az elmélet, téglalap keresztmetszetet feltételezve, parabolikus csúsztatófeszültség-eloszlást ad. Bár ezen elmélet által leírt feszültségeloszlás jellege megegyezik a Zsuravszkij-féle megoldással, ebben az esetben még mindig nincs biztosítva a dinamikai peremfeltétel, miszerint a keresztmetszet alsó és felső peremén a csúsztatófeszültség zérus [9].

$$u(x, y) = u_{0glob}(x) + \theta(x)y + \phi(x)y^2 + \lambda(x)y^3 \quad (1.21)$$

Fontos megjegyezni, hogy a szakirodalomban gyakran megjelennek más, nem csak tisztán ezekkel az elmozdulásmezőkkel (klasszikus, elsőrendű, másodrendű, harmadrendű) leírható rúdelméletek, továbbá olyan megoldások is, melyek tartalmaznak még valamilyen korrekciós faktort. Ezek célja az, hogy olyan hatásokat is figyelembe vegyenek, melyeket ezek az elméletek továbbra sem tudnak kezelni. A teljesség igénye nélkül, felsorolás szerűen, néhány példát említve:

- Repedéscsúcs nyírási deformációjának elve, mely klasszikus rúdelméletre épít. Ezzel részletesebben a Wang-Qiao szerzőpáros foglalkozik [5].
- Winkler-Pasternak-féle rugalmas ágyazás, amely a nemdelaminált részen az anyag együtt dolgozását lineáris és torziós rugókkal helyettesíti [3].
- Saint-Venant-féle hatás, amely figyelembe veszi a nem tökéletes befogásból adódó járulékos deformációt [3].

Ezen alkalmazott elméletek tehát mind ahhoz járulnak hozzá, hogy minél pontosabb képet kapjunk a törésmechanikai próbatestek viselkedéséről, és hogy minél pontosabb értéket kapjunk az anyagokat jellemző  $G_c$  kritikus energia felszabadulási rátára.

### 1.3. A virtuális munka elve

A klasszikus mechanika alapvető elveinek megfogalmazása számos matematikai alakban megtehető. Ezen megfogalmazások egy lehetséges formája az úgynevezett virtuális munka elve, amely a Newton-i axiómákkal ekvivalens [4,10,11]. Levezetéséhez induljunk ki a kontinuumokra vonatkozó mozgásegyenletből, ahol  $\boldsymbol{\sigma}$  a feszültség tenzort,  $\mathbf{q}$  a térfogati erő sűrűségvektorát,  $\rho$  a sűrűséget,  $\mathbf{u}$  az elmozdulás vektort és  $\nabla$  az úgynevezett Hamilton-féle vektoroperátort jelöli.

$$\boldsymbol{\sigma} \nabla + \mathbf{q} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (1.22)$$

$$\nabla^T = \left( \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (1.23)$$

Vezessük be a  $\mathbf{L}$  differenciáloperátor-mátrixot a következőképpen:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

A feszültségkomponenseket rendezzük vektorba, és ezzel a mozgásegyenlet a következő alakot ölti:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \left( \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz} \right) \quad (1.25)$$

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (1.26)$$

A fenti egyenletet szorozzuk meg a  $\delta \mathbf{u}$  virtuális elmozdulással, ami nem más, mint a ténylegesen megvalósuló pillanatnyi helyzet és ennek kis környezetében lévő, másik kinematikailag lehetséges helyzet különbsége.

$$\int_{(V)} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) dV = 0 \quad (1.27)$$

Az egyenlet átalakítása érdekében alkalmazható a láncszabály, illetve felhasználható a korábban bevezetett  $\mathbf{L}$  differenciáloperátor-mátrix:

$$\nabla^T \{ \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} \} = \nabla \delta \mathbf{u}^T \underbrace{\{ \boldsymbol{\sigma} \Delta \}}_{=\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}} + \{ \mathbf{L} \delta \mathbf{u}^T \}^T \boldsymbol{\sigma} \quad (1.28)$$

$$\delta \mathbf{u}^T \{ \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} \} = \nabla^T \{ \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} \} - \{ \mathbf{L} \delta \mathbf{u}^T \}^T \boldsymbol{\sigma} \quad (1.29)$$

Ezt visszatéve a mozgásegyenlet átrendezett alakjába:

$$\int_{(V)} \left( \nabla^T \{ \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} \} - \{ \mathbf{L} \delta \mathbf{u}^T \}^T \boldsymbol{\sigma} + \delta \mathbf{u}^T \{ \rho \mathbf{g} - \rho \ddot{\mathbf{u}} \} \right) dV = 0 \quad (1.30)$$

A kapott egyenletet tovább rendezve adódik a következő:

$$\int_{(V)} \left( \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} + \{ \mathbf{L} \delta \mathbf{u}^T \}^T \boldsymbol{\sigma} \right) dV = \int_{(V)} \rho \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV + \int_{(V)} \nabla^T \{ \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\sigma} \} dV \quad (1.31)$$

A kapott egyenlet jobbszélső tagjára alkalmazható a Gauß-Ostrogradsky tétel:

$$\int_{(V)} (\rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} + \{\mathbf{L} \delta \mathbf{u}\}^T \boldsymbol{\sigma}) dV = \int_{(V)} \rho \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV + \int_{(A_p)} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma}) dA \quad (1.32)$$

A fenti egyenletben a dinamikai, vagy más néven természetes peremfeltétel értelmében megjelenik a  $\mathbf{p}$  felületi erők vektora:

$$\mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{p} \quad (1.33)$$

Ezt visszaírva az előző egyenletbe, láthatjuk, hogy az egyenlet jobb oldala két tagból tevődik össze. Az egyik tag a térfogati erőket, míg a másik tag a felületi erőket jelöli:

$$\int_{(V)} (\rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} + \{\mathbf{L} \delta \mathbf{u}\}^T \boldsymbol{\sigma}) dV = \int_{(V)} \rho \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV + \int_{(A_p)} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dA \quad (1.34)$$

Felhasználva a kis alakváltozások elméletében használt alakváltozási tenzort, kapjuk a  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  a virtuális alakváltozások vektorát:

$$\mathbf{L} \delta \mathbf{u} = \delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.35)$$

Abban az esetben, ha statikai feladatról van szó, kapjuk a következő egyensúlyi egyenletet:

$$\int_{(V)} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}) dV = \int_{(V)} \rho \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV + \int_{(A_p)} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dA \quad (1.36)$$

A kapott egyensúlyi egyenletet nullára rendezve és bevezetve a  $\delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}^{ext}$  külső erők munkáját, a virtuális munka elvének egy egyszerű alakjához jutunk:

$$\int_{(V)} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}) dV - \int_{(V)} \rho \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV - \int_{(A_p)} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dA = 0 \quad (1.37)$$

$$\int_{(V)} \rho \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} dV + \int_{(A_p)} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dA = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}^{ext} \quad (1.38)$$

$$\delta U + \delta V = 0 \quad (1.39)$$

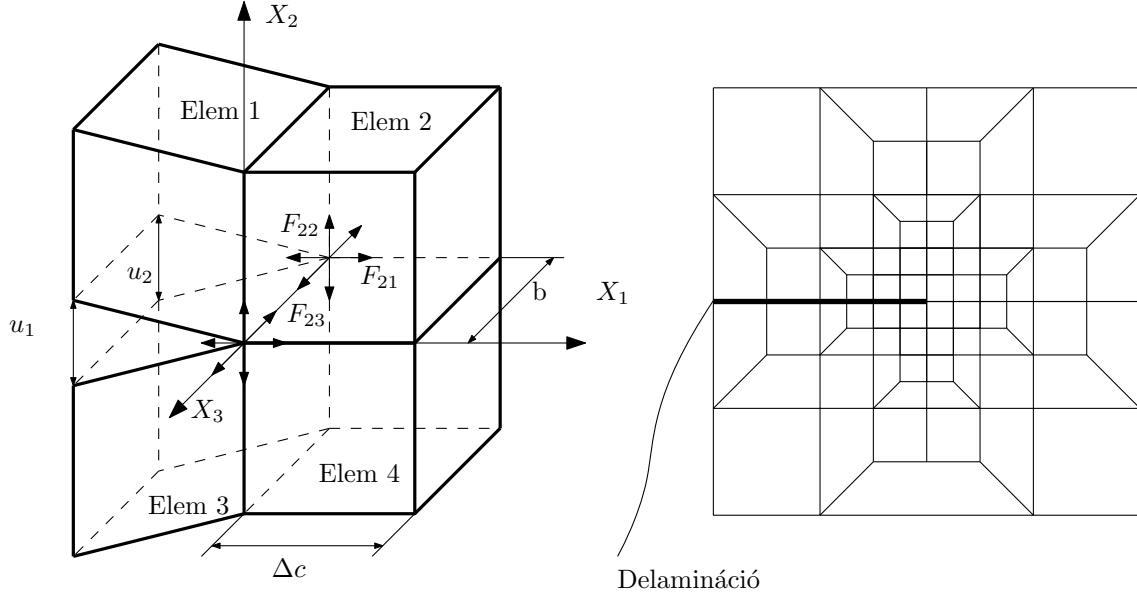
Ennek értelmében tehát, a virtuális alakváltozási energia egyenlő a külső erők virtuális munkájával [11]. Abban az esetben, ha nem statikai feladatot vizsgáltunk volna, figyelembe kellett volna venni még a  $\delta K$  virtuális kinetikus energiát is [4]. Ebben az esetben a virtuális munka elvének egy általánosabb alakját kaptuk volna, amely a következő:

$$\int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (1.40)$$

A dolgozatom további részében a virtuális munka elvének statikai feladatokra levezetett változatát fogom felhasználni, hogy levezessem az egyensúlyi egyenleteket.

## 1.4. A virtuális repedészáródási technika

A virtuális repedészáródási technikát mintegy 40 évvel ezelőtt javasolták először feszültségintenzitási tényező és repedésfeszítő erő numerikus számítására. Ezen technika egyaránt használható I-es, II-es és III-as módú repedések vizsgálatára, mind 2 dimenziós és 3 dimenziós esetekben. A módszer lényege, hogy a repedéscsúcsban és annak környékén, a 1.9 ábrán is látható, úgynevezett "Davidson"-féle hálót kell felépíteni, és ki kell olvasni meghatározott csomópontokban a csomóponti erőket és elmozdulásokat [12,13].



1.9. ábra. VCCT technika és a speciális "Davidson"-féle háló 2D-ben

Az adott  $i$  módushoz tartozó repedésfeszítő erő, a háló  $b$  és  $\Delta c$  geometriájának,  $F_k$  csomóponti erők, valamint  $u_k$  csomóponti elmozdulások ismeretében a következő:

$$G_i = \frac{1}{2b\Delta c} \sum_{k=1}^2 F_{ki} u_{ki} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.41)$$

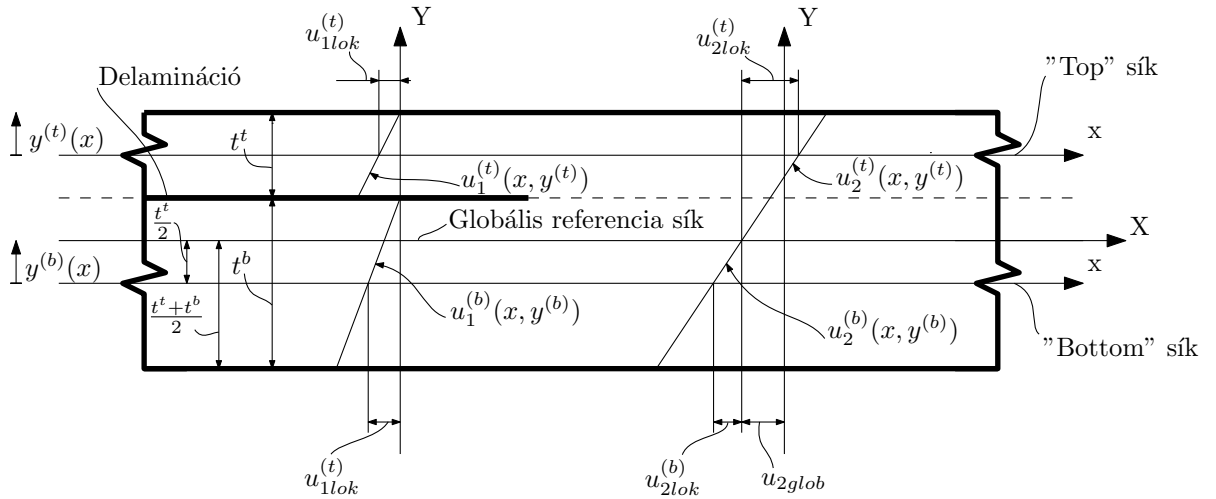
Dolgozatomban, mint a lineáris törésmechanikai eszközeként tekintek rá, és használom fel a végeleemes diszkretizációm során a repedésfeszítő erő numerikus meghatározásához.



## 2. fejezet

### Elsőrendű rúdelmélet

Ebben a fejezetben a virtuális munka elvének és az ún. egzakt kinematikai feltételrendszer felhasználásával levezetésre kerülnek egy aszimmetrikusan delaminált rúd egyensúlyi egyenletei. A levezetés során az elsőrendű rúdelméletet alkalmazom. A feladatot két részre bontom, ezért a következőkben az alsó 1-es index a delaminált, míg az alsó 2-es index a nem delaminált részt jelöli. Felveszek továbbá két lokális koordináta rendszert, melyet jelöljön a  $t$  "top" és  $b$  "bottom" felső index. Az elmozdulásmezőket ezen lokális koordináta rendszerekben írom fel. A feltételezett elmozdulásmezők, a lokális koordináta rendszerek és az egyes geometriai paraméterek a következő 2.1 ábrán láthatók.



2.1. ábra. Repedéscsús körüli elmozdulásmezők elsőrendű elmélet alapján

#### 2.1. Feltételezett elmozdulásmezők

Elsőrendű elméletet alkalmazva, a lokális koordináta rendszerekben az elmozdulásmezők felírhatók a következő alakokban, ahol  $u_{iglob}$  a globális membránmozdulást,  $u_{ilok}^{(\delta)}$  a lokális membránmozdulásokat, míg  $\theta_i^{(\delta)}$  a keresztmetszetek szögelfordulását jelölik [8,9]. ( $i = 1, 2$ ) ( $\delta = t, b$ )

$$u_1^{(t)} = u_{1lok}^{(t)} + \theta_1^{(t)} y^{(t)} \quad (2.1) \quad u_2^{(t)} = u_{2glob} + u_{2lok}^{(t)} + \theta_2^{(t)} y^{(t)} \quad (2.2)$$

$$u_1^{(b)} = u_{1lok}^{(b)} + \theta_1^{(b)} y^{(b)} \quad (2.3) \quad u_2^{(b)} = u_{2glob} + u_{2lok}^{(b)} + \theta_2^{(b)} y^{(b)} \quad (2.4)$$

A nemdelaminált részre továbbá felírhatók a következő egzakt kinematikai peremfeltételek, melyek azt fejezik ki, hogy ezen a részen az anyag együtt dolgozik. Ezáltal létrejön a kapcsolat a "top" és a "bottom" rész elmozdulásmezője között, és kifejezhetőek lesznek a nemdelaminált rész lokális membránelmozdulásai [8,9]:

$$u_2^{(t)} \Big|_{y^{(t)} = -\frac{t_t}{2}} = u_2^{(b)} \Big|_{y^{(b)} = \frac{t_b}{2}} \quad (2.5)$$

$$u_2^{(b)} \Big|_{y^{(b)} = \frac{t_t}{2}} = u_{2glob} \quad (2.6)$$

Ezen feltételeket felhasználva az elmozdulásmezők a nemdelaminált részen a következő alakot öltik:

$$u_2^{(t)} = u_{2glob} + \frac{t_b - t_t}{2} \theta_2^{(b)} + \frac{t_t}{2} \theta_2^{(t)} + \theta_2^{(t)} y^{(t)} \quad (2.7)$$

$$u_2^{(b)} = u_{2glob} - \frac{t_t}{2} \theta_2^{(b)} + \theta_2^{(b)} y^{(b)} \quad (2.8)$$

Az egyes szakaszok elmozdulásmezője lokálisan, vektor-vektor függvény alakban, ahol  $v_i$  az egyes szakaszok lehajlásfüggvényét jelöli:

$$\mathbf{u}_1^{(t)} = \begin{pmatrix} u_1^{(t)}(x) \\ v_1^{(t)}(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{u}_2^{(t)} = \begin{pmatrix} u_2^{(t)}(x) \\ v_2(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{u}_1^{(b)} = \begin{pmatrix} u_1^{(b)}(x) \\ v_1^{(b)}(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{u}_2^{(b)} = \begin{pmatrix} u_2^{(b)}(x) \\ v_2(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

## 2.2. Geometriai egyenletek

Kis alakváltozások esetén felírható a következő geometriai egyenlet, ahol  $\mathbf{L}$  a korábban bevezetett differenciál-operátor mátrix,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  pedig a fajlagos alakváltozások vektora:

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.13)$$

A fajlagos alakváltozási komponensek tehát vektorba foglalva a következők:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^T &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ &= \left( \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ez alapján az alakváltozási komponensek a delaminált és nemdelaminált részekre a következők:

$$\varepsilon_{1,x}^{(t)} = \frac{\partial u_{1lok}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial \theta_1^{(t)}}{\partial x} y^{(t)} \quad (2.15) \quad \gamma_{1,xy}^{(t)} = \theta_1^{(t)} + \frac{\partial v_1^{(t)}}{\partial x} \quad (2.16)$$

$$\varepsilon_{1,x}^{(b)} = \frac{\partial u_{1lok}^{(b)}}{\partial x} + \frac{\partial \theta_1^{(b)}}{\partial x} y^{(b)} \quad (2.17) \quad \gamma_{1,xy}^{(b)} = \theta_1^{(b)} + \frac{\partial v_1^{(b)}}{\partial x} \quad (2.18)$$

$$\varepsilon_{2,x}^{(t)} = \frac{\partial u_{2glob}}{\partial x} + \frac{t_b - t_t}{2} \frac{\partial \theta_2^{(b)}}{\partial x} + \frac{t_t}{2} \frac{\partial \theta_2^{(t)}}{\partial x} y^{(t)} \quad (2.19) \quad \gamma_{2,xy}^{(t)} = \theta_2^{(t)} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_{2,x}^{(b)} = \frac{\partial u_{2glob}}{\partial x} - \frac{t_t}{2} \frac{\partial \theta_2^{(b)}}{\partial x} + \frac{\partial \theta_2^{(b)}}{\partial x} y^{(b)} \quad (2.21) \quad \gamma_{2,xy}^{(b)} = \theta_2^{(b)} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \quad (2.22)$$

Látható, hogy az alakváltozási komponensek felírhatók egy konstans (azaz  $y$ -től független, de  $x$ -től függő) és egy lokális koordinátától függő tag összegeként, ami később az egyes igénybevételek kifejezésekor lesz fontos [4]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{1,x} \\ \gamma_{1,xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{1,x}^0 \\ \gamma_{1,xy}^0 \end{Bmatrix}_{(\delta)} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{1,x}^1 \\ \gamma_{1,xy}^1 \end{Bmatrix}_{(\delta)} y^{(\delta)} \quad (2.23)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{2,x} \\ \gamma_{2,xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{2,x}^0 \\ \gamma_{2,xy}^0 \end{Bmatrix}_{(\delta)} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{2,x}^1 \\ \gamma_{2,xy}^1 \end{Bmatrix}_{(\delta)} y^{(\delta)} \quad (2.24)$$

$$\varepsilon_{1,x}^{0(t)} = \frac{\partial u_{1lok}^{(t)}}{\partial x} \quad (2.25)$$

$$\varepsilon_{1,x}^{1(t)} = \frac{\partial \theta_1^{(t)}}{\partial x} \quad (2.26)$$

$$\varepsilon_{1,x}^{0(b)} = \frac{\partial u_{1lok}^{(b)}}{\partial x} \quad (2.27)$$

$$\varepsilon_{1,x}^{1(b)} = \frac{\partial \theta_1^{(b)}}{\partial x} \quad (2.28)$$

$$\gamma_{1,xy}^{0(t)} = \theta_1^{(t)} + \frac{\partial v_1^{(t)}}{\partial x} \quad (2.29)$$

$$\gamma_{1,xy}^{1(b)} = 0 \quad (2.30)$$

$$\gamma_{1,xy}^{0(b)} = \theta_1^{(b)} + \frac{\partial v_1^{(b)}}{\partial x} \quad (2.31)$$

$$\gamma_{1,xy}^{1(t)} = 0 \quad (2.32)$$

$$\varepsilon_{2,x}^{0(t)} = \frac{\partial u_{2glob}}{\partial x} + \frac{t_b - t_t}{2} \frac{\partial \theta_2^{(b)}}{\partial x} + \frac{t_t}{2} \frac{\partial \theta_2^{(t)}}{\partial x} \quad (2.33)$$

$$\varepsilon_{2,x}^{1(t)} = \frac{\partial \theta_2^{(t)}}{\partial x} \quad (2.34)$$

$$\varepsilon_{2,x}^{0(b)} = \frac{\partial u_{2glob}}{\partial x} - \frac{t_t}{2} \frac{\partial \theta_2^{(b)}}{\partial x} \quad (2.35)$$

$$\varepsilon_{2,x}^{1(b)} = \frac{\partial \theta_2^{(b)}}{\partial x} \quad (2.36)$$

$$\gamma_{2,xy}^{0(t)} = \theta_2^{(t)} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \quad (2.37)$$

$$\gamma_{2,xy}^{1(b)} = 0 \quad (2.38)$$

$$\gamma_{2,xy}^{0(b)} = \theta_2^{(b)} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \quad (2.39)$$

$$\gamma_{2,xy}^{1(t)} = 0 \quad (2.40)$$

## 2.3. Az igénybevételek meghatározása

A fajlagos alakváltozások ismeretében felírhatók a rúd lokális  $M_{i,z}^{(\delta)}$  hajlítónyomatéki, lokális  $N_{i,x}^{(\delta)}$  normális és lokális  $V_{i,y}^{(\delta)}$  nyíró igénybevételei. A kifejezésekben  $E_{11}$  az anyag rugalmassági modulusát és  $G_{12}$  az anyag csúsztató rugalmassági modulusát jelöli. A korábbi jelöléseknek megfelelően ( $i = 1, 2$ ) ( $\delta = t, b$ ) :

$$N_{i,x}^{(\delta)} = \int_{(A^{(\delta)})} \sigma_{i,x}^{(\delta)} dA^{(\delta)} = \int_{(A^{(\delta)})} \varepsilon_{i,x}^{0(\delta)} E_{11} dA^{(\delta)} \quad (2.41)$$

$$M_{i,z}^{(\delta)} = \int_{(A^{(\delta)})} \sigma_{i,x}^{(\delta)} y^{(\delta)} dA^{(\delta)} = \int_{(A^{(\delta)})} \varepsilon_{i,x}^{1(\delta)} E_{11} (y^{(\delta)})^2 dA^{(\delta)} \quad (2.42)$$

$$V_{i,y}^{(\delta)} = \int_{(A^{(\delta)})} \tau_{i,xy}^{(\delta)} dA^{(\delta)} = \int_{(A^{(\delta)})} \gamma_{i,xy}^{0(\delta)} G_{12} dA^{(\delta)} \quad (2.43)$$

A nyíróigénybevételnél ebben az esetben szokták bevezetni a  $k$  nyírási korrekciós tényezőt, hogy azt illesszék a Zsuravszkij által vezetett feszültségeloszláshoz [4]. Mivel a teljes vastagság mentén két réteget veszünk fel, így az elsőrendű elmélet esetén nem alkalmazzuk a korrekciós tényezőt. A másodrendű elmélet esetén már egy darab egyenértékű réteg esetén nincs szükség a  $k$  tényezőre [9].

## 2.4. Egyensúlyi egyenletek levezetése

A következőkben levezetésre kerülnek a delaminált és a nemdelaminált részre vonatkozó egyensúlyi egyenletek. Ezt a virtuális munka elve segítségével teszem meg, melyet az előzőekben már bemutattam. Ismétlésképpen ennek általános, illetve a statikai feladatokra vonatkozó alakja a következő:

$$\int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (2.44)$$

$$\delta U + \delta V = 0 \quad (2.45)$$

### 2.4.1. Delaminált rész

A  $t$  "top" és  $b$  "bottom" delaminált részre egyaránt felírható a felhalmozódott virtuális alakváltozási energia és a külső  $q_1^{(\delta)}$  megoszló erő virtuális munkája.

$$\delta U_1^{(\delta)} = \int_{(V_1)} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^{(\delta)T} \boldsymbol{\sigma}_1^{(\delta)}) dV \quad (2.46)$$

$$\delta V_1^{(\delta)} = - \int_{(l_1)} (q_1^{(\delta)} \delta v_1^{(\delta)}) dx \quad (2.47)$$

Az előző virtuális alakváltozási energiára vonatkozó tagot kifejtve, behelyettesítve a felbontott alakváltozási komponenseket és felhasználva az igénybevételek egyenleteit a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \delta U_1^{(\delta)} &= \int_{(V_1)} \left( \sigma_{1,x}^{(\delta)} (\delta \varepsilon_{1,x}^{0(\delta)} + y^{(\delta)} \delta \varepsilon_{1,x}^{1(\delta)}) + \tau_{1,xy}^{(\delta)} \delta \gamma_{1,xy}^{0(\delta)} \right) dV \\ &= \int_{(l_1)} \left( \int_{(A^{(\delta)})} \left( \sigma_{1,x}^{(\delta)} (\delta \varepsilon_{1,x}^{0(\delta)} + y^{(\delta)} \delta \varepsilon_{1,x}^{1(\delta)}) + \tau_{1,xy}^{(\delta)} \delta \gamma_{1,xy}^{0(\delta)} \right) dA^{(\delta)} \right) dx \\ &= \int_{(l_1)} \left( N_{1,x}^{(\delta)} \delta \varepsilon_{1,x}^{0(\delta)} + M_{1,z}^{(\delta)} \delta \varepsilon_{1,x}^{1(\delta)} + V_{1,xy}^{(\delta)} \delta \gamma_{1,xy}^{0(\delta)} \right) dx \end{aligned} \quad (2.48)$$

A virtuális alakváltozási energia integrálegyenletének ismeretében már kifejezhető virtuális munka elvének baloldala:

$$\delta U_1^{(\delta)} + \delta V_1^{(\delta)} = \int_{(l_1)} \left( N_{1,x}^{(\delta)} \frac{\partial(\delta u_{1lok}^{(\delta)})}{\partial x} + M_{1,z}^{(\delta)} \frac{\partial(\delta \theta_1^{(\delta)})}{\partial x} + V_{1,xy}^{(\delta)} (\delta \theta_1^{(\delta)} + \frac{\partial(\delta v_1^{(\delta)})}{\partial x}) - q_1^{(\delta)} \delta v_1^{(\delta)} \right) dx \quad (2.49)$$

A kapott egyenletet egyenlővé téve nullával, továbbá alkalmazva a láncszabályt és a Gauß-Ostrogradsky integrálatalakító tételt, a következő adódik:

$$\begin{aligned} \delta U_1^{(\delta)} + \delta V_1^{(\delta)} &= \int_{(l_1)} \left( - \left( \frac{\partial N_{1,x}^{(\delta)}}{\partial x} \right) \delta u_{1lok}^{(\delta)} - \left( \frac{\partial M_{1,z}^{(\delta)}}{\partial x} - V_{1,xy}^{(\delta)} \right) \delta \theta_1^{(\delta)} \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\partial V_{1,xy}^{(\delta)}}{\partial x} + q_1^{(\delta)} \right) \delta v_1^{(\delta)} + N_{1,x}^{(\delta)} n_x \delta u_{1lok}^{(\delta)} \right. \\ &\quad \left. + M_{1,z}^{(\delta)} n_x \delta \theta_1^{(\delta)} + V_{1,xy}^{(\delta)} n_x \delta v_1^{(\delta)} \right) dx = 0 \end{aligned} \quad (2.50)$$

A kapott egyenlőségből kiolvashatók az igénybevételekre vonatkozó egyensúlyi egyenletek, illetve a dinamikai vagy más néven természetes peremfeltételek. A delaminált részen az egyensúlyi egyenletek tehát a következők:

$$\frac{\partial N_{1,x}^{(t)}}{\partial x} = 0 \quad (2.51) \qquad \frac{\partial N_{1,x}^{(b)}}{\partial x} = 0 \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial M_{1,z}^{(t)}}{\partial x} - V_{1,xy}^{(t)} = 0 \quad (2.53) \qquad \frac{\partial V_{1,xy}^{(t)}}{\partial x} + q_1^{(t)} = 0 \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial M_{1,z}^{(b)}}{\partial x} - V_{1,xy}^{(b)} = 0 \quad (2.55) \qquad \frac{\partial V_{1,xy}^{(b)}}{\partial x} + q_1^{(b)} = 0 \quad (2.56)$$

Az egyensúlyi egyenletekbe visszaírva az igénybevételi egyenletek definícióját a (2.41-2.43) egyenleteknek megfelelően, majd az integrálásokat elvégezve kapjuk a delaminált rész leíró differenciálegyenlet rendszerét, ahol  $A^{(\delta)}$  alsó és felső részek keresztmetszetét,  $I_z^{(\delta)}$  pedig azok másodrendű nyomatékát jelölik:

$$E_{11}A^{(t)}\frac{\partial^2 u_{1lok}^{(t)}}{\partial x^2} = 0 \quad (2.57)$$

$$E_{11}A^{(b)}\frac{\partial^2 u_{1lok}^{(b)}}{\partial x^2} = 0 \quad (2.58)$$

$$E_{11}I_z^{(t)}\frac{\partial^2 \theta_1^{(t)}}{\partial x^2} - G_{12}A^{(t)}\left(\theta_1^{(t)} + \frac{\partial v_1^{(t)}}{\partial x}\right) = 0 \quad (2.59)$$

$$E_{11}I_z^{(b)}\frac{\partial^2 \theta_1^{(b)}}{\partial x^2} - G_{12}A^{(b)}\left(\theta_1^{(b)} + \frac{\partial v_1^{(b)}}{\partial x}\right) = 0 \quad (2.60)$$

$$G_{12}A^{(t)}\left(\frac{\partial \theta_1^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_1^{(t)}}{\partial x^2}\right) + q_1^{(t)} = 0 \quad (2.61)$$

$$G_{12}A^{(b)}\left(\frac{\partial \theta_1^{(b)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_1^{(b)}}{\partial x^2}\right) + q_1^{(b)} = 0 \quad (2.62)$$

### 2.4.2. Nemdelaminált rész

A nemdelaminált részen az alsó és felső rúd együtt dolgozik, melyet az egzakt kinematikai feltételrendszer biztosít. Ebben az esetben, épp ezért, a  $t$  "top" és  $b$  "bottom" részre a virtuális munka elvét egy egyenletként kell felírni. Együtt kell kifejezni a virtuális alakváltozási tagot és a külső  $q_2$  megoszló erők virtuális munkáját kifejező tagot [4]. Fontos megjegyezni, hogy az így kapott egyensúlyi egyenletek már magukban fogják tartalmazni a párhuzamos tengelyek tételét.

$$\delta U_2 = \int_{(V_2)} \left( \delta \epsilon_2^{(t)T} \sigma_2^{(t)} + \delta \epsilon_2^{(b)T} \sigma_2^{(b)} \right) dV \quad (2.63)$$

$$\delta V_2 = - \int_{(l_2)} (q_2 \delta v_2) dx \quad (2.64)$$

A virtuális alakváltozási energiára vonatkozó tagot kifejtve, behelyettesítve a felbontott alakváltozási komponenseket és felhasználva az igénybevételek definícióját:

$$\begin{aligned}
 \delta U_2 &= \int_{(V_2)} \left( \sigma_{2,x}^{(t)} (\delta \varepsilon_{2,x}^{0(t)} + y^{(t)} \delta \varepsilon_{2,x}^{1(t)}) + \tau_{2,xy}^{(t)} \delta \gamma_{2,xy}^{0(t)} \right. \\
 &\quad \left. + \sigma_{2,x}^{(b)} (\delta \varepsilon_{2,x}^{0(b)} + y^{(b)} \delta \varepsilon_{2,x}^{1(b)}) + \tau_{2,xy}^{(b)} \delta \gamma_{2,xy}^{0(b)} \right) dV \\
 &= \int_{(l_2)} \left( \int_{(A^{(t)})} \left( \sigma_{2,x}^{(t)} (\delta \varepsilon_{2,x}^{0(t)} + y^{(t)} \delta \varepsilon_{2,x}^{1(t)}) + \tau_{2,xy}^{(t)} \delta \gamma_{2,xy}^{0(t)} \right) dA^{(t)} \right. \\
 &\quad \left. + \int_{(A^{(b)})} \left( \sigma_{2,x}^{(b)} (\delta \varepsilon_{2,x}^{0(b)} + y^{(b)} \delta \varepsilon_{2,x}^{1(b)}) + \tau_{2,xy}^{(b)} \delta \gamma_{2,xy}^{0(b)} \right) dA^{(b)} \right) dx \\
 &= \int_{(l_2)} \left( N_{2,x}^{(t)} \delta \varepsilon_{2,x}^{0(t)} + M_{2,z}^{(t)} \delta \varepsilon_{2,x}^{1(t)} + V_{2,y}^{(t)} \delta \gamma_{2,xy}^{0(t)} \right. \\
 &\quad \left. + N_{2,x}^{(b)} \delta \varepsilon_{2,x}^{0(b)} + M_{2,z}^{(b)} \delta \varepsilon_{2,x}^{1(b)} + V_{2,y}^{(b)} \delta \gamma_{2,xy}^{0(b)} \right) dx
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

A virtuális alakváltozási energia integrálegyenletének ismeretében már kifejezhető virtuális munka elvének baloldala:

$$\begin{aligned}
 \delta U_2 + \delta V_2 &= \int_{(l_2)} \left( N_{2,x}^{(t)} \left( \frac{\partial(\delta u_{2glob})}{\partial x} + \frac{t_b - t_t}{2} \frac{\partial(\delta \theta_2^{(b)})}{\partial x} + \frac{t_t}{2} \frac{\partial(\delta \theta_2^{(t)})}{\partial x} \right) \right. \\
 &\quad + M_{2,z}^{(t)} \frac{\partial(\delta \theta_2^{(t)})}{\partial x} + V_{2,y}^{(t)} (\delta \theta_2^{(t)} + \frac{\partial(\delta v_2)}{\partial x}) \\
 &\quad + N_{2,x}^{(b)} \left( \frac{\partial(\delta u_{2glob})}{\partial x} + \frac{t_t}{2} \frac{\partial(\delta \theta_2^{(b)})}{\partial x} \right) \\
 &\quad \left. + M_{2,z}^{(b)} \frac{\partial(\delta \theta_2^{(b)})}{\partial x} + V_{2,y}^{(b)} (\delta \theta_2^{(b)} + \frac{\partial(\delta v_2)}{\partial x}) - q_2 \delta v_2 \right) dx
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

A kapott egyenletet egyenlővé téve nullával, továbbá alkalmazva a láncszabályt és a Gauß-Ostrogradsky integrálátalakító tételt, a következő adódik:

$$\begin{aligned}
 \delta U_2 + \delta V_2 &= \int_{(l_2)} \left( - \left( \frac{\partial N_{2,x}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{2,x}^{(b)}}{\partial x} \right) \delta u_{2glob} \right. \\
 &\quad - \left( \frac{t_t}{2} \frac{\partial N_{2,x}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{2,z}^{(t)}}{\partial x} - V_{2,y}^{(t)} \right) \delta \theta_2^{(t)} \\
 &\quad - \left( \frac{t_b - t_t}{2} \frac{\partial N_{2,x}^{(b)}}{\partial x} - \frac{t_t}{2} \frac{\partial N_{2,x}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{2,z}^{(b)}}{\partial x} - V_{2,y}^{(b)} \right) \delta \theta_2^{(b)} \\
 &\quad - \left( \frac{\partial V_{2,y}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{2,x}^{(b)}}{\partial x} + q_2 \right) \delta v_2 \\
 &\quad + (N_{2,x}^{(t)} n_x + N_{2,x}^{(b)} n_x) \delta u_{2glob} \\
 &\quad + \left( \frac{t_t}{2} N_{2,x}^{(t)} n_x + M_{2,z}^{(t)} n_x \right) \delta \theta_2^{(t)} \\
 &\quad + \left( \frac{t_b - t_t}{2} N_{2,x}^{(b)} n_x - \frac{t_t}{2} N_{2,x}^{(t)} n_x + M_{2,z}^{(b)} n_x \right) \delta \theta_2^{(b)} \\
 &\quad \left. + (V_{2,y}^{(t)} n_x + V_{2,y}^{(b)} n_x) \delta v_2 \right) dx = 0
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

Ebből az egyenlőségből kiolvashatók az igénybevételekre vonatkozó egyensúlyi egyenletek illetve a dinamikai vagy más néven természetes peremfeltételek. A nemdelaminált részen az egyensúlyi egyenletek tehát a következők, melyek már tartalmazzák a párhuzamos tengelyek tételét is:

$$\frac{\partial N_{2,x}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{2,x}^{(b)}}{\partial x} = 0 \quad (2.68)$$

$$\frac{t_t}{2} \frac{\partial N_{2,x}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{2,z}^{(t)}}{\partial x} - V_{2,y}^{(t)} = 0 \quad (2.69)$$

$$\frac{t_b - t_t}{2} \frac{\partial N_{2,x}^{(b)}}{\partial x} - \frac{t_t}{2} \frac{\partial N_{2,x}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{2,z}^{(b)}}{\partial x} - V_{2,y}^{(b)} = 0 \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial V_{2,y}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial V_{2,y}^{(b)}}{\partial x} + q_2 = 0 \quad (2.71)$$

Az egyensúlyi egyenletekbe visszaírva az igénybevételi egyenletek definícióját a (2.41-2.43) egyenleteknek megfelelően, majd az integrálásokat elvégezve kapjuk a nemdelaminált rész leíró differenciálegyenlet rendszerét, ahol  $A^{(\delta)}$  alsó és felső részek keresztmetszetét,  $I_z^{(\delta)}$  pedig azok másodrendű nyomatékát jelölik.

$$\begin{aligned} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 u_{2glob}}{\partial x^2} + \frac{t_b - t_t}{2} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(b)}}{\partial x^2} + \frac{t_t}{2} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(t)}}{\partial x^2} \\ + E_{11}A^{(b)} \frac{\partial^2 u_{2glob}}{\partial x^2} - \frac{t_t}{2} E_{11}A^{(b)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(b)}}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} \frac{t_t}{2} \left( E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 u_{2glob}}{\partial x^2} + \frac{t_b - t_t}{2} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(b)}}{\partial x^2} + \frac{t_t}{2} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(t)}}{\partial x^2} \right) \\ + E_{11}I_z^{(t)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(t)}}{\partial x^2} - G_{12}A^{(t)} (\theta_2^{(t)} + \frac{\partial v_2}{\partial x}) = 0 \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{t_b - t_t}{2} \left( E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 u_{2glob}}{\partial x^2} + \frac{t_b - t_t}{2} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(b)}}{\partial x^2} + \frac{t_t}{2} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(t)}}{\partial x^2} \right) \\ - \frac{t_t}{2} \left( E_{11}A^{(b)} \frac{\partial^2 u_{2glob}}{\partial x^2} - \frac{t_t}{2} E_{11}A^{(b)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(b)}}{\partial x^2} \right) \\ + E_{11}I_z^{(b)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(b)}}{\partial x^2} - G_{12}A^{(b)} (\theta_2^{(b)} + \frac{\partial v_2}{\partial x}) = 0 \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$G_{12}A^{(t)} \left( \frac{\partial \theta_2^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \right) + G_{12}A^{(b)} \left( \frac{\partial \theta_2^{(b)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \right) + q_2 = 0 \quad (2.75)$$

Szimmetrikus delamináció esetén, azaz ha  $t_b = t_t = h$  a kapott leíró differenciálegyenlet-rendszer a következő alakra egyszerűsödik:

$$E_{11}A^{(t)}\frac{\partial^2 u_{2glob}}{\partial x^2} + \frac{h}{2}E_{11}A^{(t)}\frac{\partial^2 \theta_2^{(t)}}{\partial x^2} + E_{11}A^{(b)}\frac{\partial^2 u_{2glob}}{\partial x^2} - \frac{h}{2}E_{11}A^{(b)}\frac{\partial^2 \theta_2^{(b)}}{\partial x^2} = 0 \quad (2.76)$$

$$\frac{h}{2} \left( E_{11}A^{(t)}\frac{\partial^2 u_{2glob}}{\partial x^2} + \frac{h}{2}E_{11}A^{(t)}\frac{\partial^2 \theta_2^{(t)}}{\partial x^2} \right) + E_{11}I_z^{(t)}\frac{\partial^2 \theta_2^{(t)}}{\partial x^2} - G_{12}A^{(t)}(\theta_2^{(t)} + \frac{\partial v_2}{\partial x}) = 0 \quad (2.77)$$

$$-\frac{h}{2} \left( E_{11}A^{(b)}\frac{\partial^2 u_{2glob}}{\partial x^2} - \frac{h}{2}E_{11}A^{(b)}\frac{\partial^2 \theta_2^{(b)}}{\partial x^2} \right) + E_{11}I_z^{(b)}\frac{\partial^2 \theta_2^{(b)}}{\partial x^2} - G_{12}A^{(b)}(\theta_2^{(b)} + \frac{\partial v_2}{\partial x}) = 0 \quad (2.78)$$

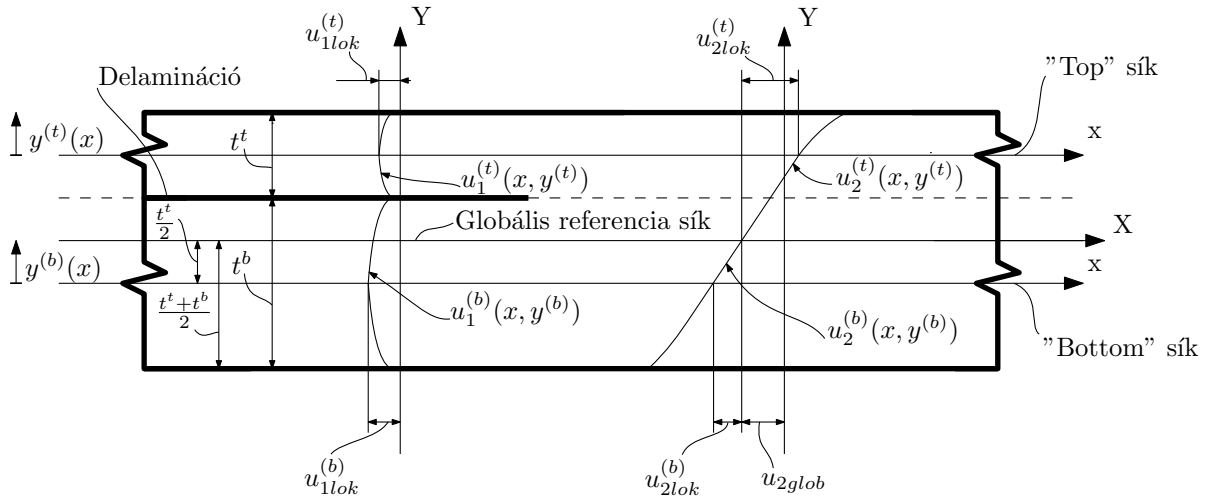
$$G_{12}A^{(t)}(\frac{\partial \theta_2^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}) + G_{12}A^{(b)}(\frac{\partial \theta_2^{(b)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}) + q_2 = 0 \quad (2.79)$$



## 3. fejezet

# Másodrendű rúdelmélet

Ebben a fejezetben a virtuális munka elvének és az ún. egzakt kinematikai feltételrendszer felhasználásával levezetésre kerülnek egy aszimmetrikusan delaminált rúd egyensúlyi egyenletei. A levezetés során a másodrendű rúdelméletet alkalmazom. A feladatot két részre bontom, ezért a következőkben az alsó 1-es index a delaminált, míg az alsó 2-es index a nem delaminált részt jelölje. Felveszek továbbá két lokális koordináta rendszert, melyet jelöljön a  $t$  "top" és  $b$  "bottom" felső index. Az elmozdulás mezőket ezen lokális koordináta rendszerekben írom fel. A feltételezett elmozdulás mezők, a lokális koordináta rendszerek és az egyes geometria paraméterek a következő 3.1 ábrán láthatók.



3.1. ábra. Repedéscsúcs körüli elmozdulásmezők a másodrendű rúdelmélet alapján

### 3.1. Feltételezett elmozdulásmezők

Másodrendű elméletet alkalmazva lokális koordináta rendszerekben, az elmozdulásmezők felírhatók a következő alakokban, ahol  $u_{iglob}$  a globális membránelmozdulást,  $u_{ilok}^{(\delta)}$  a lokális membránelmozdulásokat,  $\theta_i^{(\delta)}$  a keresztmetszetek szögelfordulását, míg  $\phi_i^{(\delta)}$  a másodrendű tagokat jelölik [8]. ( $i = 1, 2$ ) ( $\delta = t, b$ )

$$u_1^{(t)} = u_{1lok}^{(t)} + \theta_1^{(t)} y^{(t)} + \phi_2^{(t)} (y^{(t)})^2 \quad (3.1) \quad u_2^{(t)} = u_{2glob} + u_{2lok}^{(t)} + \theta_2^{(t)} y^{(t)} + \phi_2^{(t)} (y^{(t)})^2 \quad (3.2)$$

$$u_1^{(b)} = u_{1lok}^{(b)} + \theta_1^{(b)} y^{(b)} + \phi_2^{(b)} (y^{(b)})^2 \quad (3.3) \quad u_2^{(b)} = u_{2glob} + u_{2lok}^{(b)} + \theta_2^{(b)} y^{(b)} + \phi_2^{(b)} (y^{(b)})^2 \quad (3.4)$$

A nemdelaminált részre továbbá felírhatók a következő egzakt kinematikai peremfeltételek, melyek kifejezik, hogy ezen a részen az anyag együtt dolgozik. Ezáltal létrejön a kapcsolat a "top" és a "bottom" rész elmozdulásmezője között, és kifejezhetőek lesznek a nemdelaminált rész lokális membránelmozdulásai [8,9].

$$u_2^{(t)} \Big|_{y^{(t)} = -\frac{t_t}{2}} = u_2^{(b)} \Big|_{y^{(b)} = \frac{t_b}{2}} \quad (3.5) \quad u_2^{(b)} \Big|_{y^{(b)} = \frac{t_t}{2}} = u_{2glob} \quad (3.6)$$

Ezen feltételeket felhasználva az elmozdulásmezők a nemdelaminált részen a következő alakot öltik:

$$u_2^{(t)} = u_{2glob} + \frac{t_t \theta_2^{(t)} + (t_b - t_t) \theta_2^{(b)}}{2} - \frac{t_t^2 \phi_2^{(t)} - (t_b^2 - t_t^2) \phi_2^{(b)}}{4} + \theta_2^{(t)} y^{(t)} + \phi_2^{(t)} (y^{(t)})^2 \quad (3.7)$$

$$u_2^{(b)} = u_{2glob} - \frac{t_t}{2} \theta_2^{(b)} - \frac{t_t^2}{4} \phi_2^{(b)} + \theta_2^{(b)} y^{(b)} + \phi_2^{(b)} (y^{(b)})^2 \quad (3.8)$$

Az egyes szakaszok elmozdulásmezője lokálisan, vektor-vektor függvény alakban, ahol  $v_i$  az egyes szakaszok lehajlást függvényét jelöli:

$$\mathbf{u}_1^{(t)} = \begin{pmatrix} u_1^{(t)}(x) \\ v_1^{(t)}(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.9) \quad \mathbf{u}_2^{(t)} = \begin{pmatrix} u_2^{(t)}(x) \\ v_2(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{u}_1^{(b)} = \begin{pmatrix} u_1^{(b)}(x) \\ v_1^{(b)}(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.11) \quad \mathbf{u}_2^{(b)} = \begin{pmatrix} u_2^{(b)}(x) \\ v_2(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

## 3.2. Geometriai egyenletek

A alakváltozási komponensek kis alakváltozások esetén, a delaminált és nemdelaminált részekre a (2.13)-as egyenletnek megfelelően:

$$\varepsilon_{1,x}^{(t)} = \frac{\partial u_{1lok}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial \theta_1^{(t)}}{\partial x} y^{(t)} + \frac{\partial \phi_2^{(t)}}{\partial x} (y^{(t)})^2 \quad (3.13) \quad \gamma_{1,xy}^{(t)} = \theta_1^{(t)} + \frac{\partial v_1^{(t)}}{\partial x} + 2\phi_1^{(t)} y^{(t)} \quad (3.14)$$

$$\varepsilon_{1,x}^{(b)} = \frac{\partial u_{1lok}^{(b)}}{\partial x} + \frac{\partial \theta_1^{(b)}}{\partial x} y^{(b)} + \frac{\partial \phi_2^{(b)}}{\partial x} (y^{(b)})^2 \quad (3.15) \quad \gamma_{1,xy}^{(b)} = \theta_1^{(b)} + \frac{\partial v_1^{(b)}}{\partial x} + 2\phi_1^{(b)} y^{(b)} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2,x}^{(t)} = & \frac{\partial u_{2glob}}{\partial x} + \frac{t_t}{2} \frac{\partial \theta_2^{(t)}}{\partial x} + \frac{(t_b - t_t)}{2} \frac{\partial \theta_2^{(b)}}{\partial x} \\ & - \frac{t_t^2}{4} \frac{\partial \phi_2^{(t)}}{\partial x} + \frac{(t_b^2 - t_t^2)}{4} \frac{\partial \phi_2^{(b)}}{\partial x} \\ & + \frac{\partial \theta_2^{(t)}}{\partial x} y^{(t)} + \frac{\partial \phi_2^{(t)}}{\partial x} (y^{(t)})^2 \end{aligned} \quad (3.17) \quad \gamma_{2,xy}^{(t)} = \theta_2^{(t)} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + 2\phi_2^{(t)} y^{(t)} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2,x}^{(b)} = & \frac{\partial u_{2glob}}{\partial x} - \frac{t_t}{2} \frac{\partial \theta_2^{(b)}}{\partial x} - \frac{t_t^2}{4} \frac{\partial \phi_2^{(b)}}{\partial x} \\ & + \frac{\partial \theta_2^{(b)}}{\partial x} y^{(b)} + \frac{\partial \phi_2^{(b)}}{\partial x} (y^{(b)})^2 \end{aligned} \quad (3.19) \quad \gamma_{2,xy}^{(b)} = \theta_2^{(b)} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + 2\phi_2^{(b)} y^{(b)} \quad (3.20)$$

Látható, hogy az alakváltozási komponensek felírhatók egy konstans, egy lokális koordinátától függő és egy a lokális koordináta négyzetétől függő tag összegeként, ami később az egyes igénybevételek kifejezésekor lesz fontos:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{1,x} \\ \gamma_{1,xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{1,x}^0 \\ \gamma_{1,xy}^0 \end{Bmatrix}_{(\delta)} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{1,x}^1 \\ \gamma_{1,xy}^1 \end{Bmatrix}_{(\delta)} y^{(\delta)} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{1,x}^2 \\ \gamma_{1,xy}^2 \end{Bmatrix}_{(\delta)} (y^{(\delta)})^2 \quad (3.21)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{2,x} \\ \gamma_{2,xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{2,x}^0 \\ \gamma_{2,xy}^0 \end{Bmatrix}_{(\delta)} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{2,x}^1 \\ \gamma_{2,xy}^1 \end{Bmatrix}_{(\delta)} y^{(\delta)} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{2,x}^2 \\ \gamma_{2,xy}^2 \end{Bmatrix}_{(\delta)} (y^{(\delta)})^2 \quad (3.22)$$

$$\varepsilon_{1,x}^{0(t)} = \frac{\partial u_{1lok}^{(t)}}{\partial x} \quad (3.23)$$

$$\varepsilon_{1,x}^{1(t)} = \frac{\partial \theta_1^{(t)}}{\partial x} \quad (3.25)$$

$$\varepsilon_{1,x}^{2(t)} = \frac{\partial \phi_1^{(t)}}{\partial x} \quad (3.27)$$

$$\gamma_{1,xy}^{0(t)} = \theta_1^{(t)} + \frac{\partial v_1^{(t)}}{\partial x} \quad (3.29)$$

$$\gamma_{1,xy}^{1(t)} = 2\phi_1^{(t)} \quad (3.31)$$

$$\gamma_{1,xy}^{2(t)} = 0 \quad (3.33)$$

$$\varepsilon_{1,x}^{0(b)} = \frac{\partial u_{1lok}^{(b)}}{\partial x} \quad (3.24)$$

$$\varepsilon_{1,x}^{1(b)} = \frac{\partial \theta_1^{(b)}}{\partial x} \quad (3.26)$$

$$\varepsilon_{1,x}^{2(b)} = \frac{\partial \phi_1^{(b)}}{\partial x} \quad (3.28)$$

$$\gamma_{1,xy}^{0(b)} = \theta_1^{(b)} + \frac{\partial v_1^{(b)}}{\partial x} \quad (3.30)$$

$$\gamma_{1,xy}^{1(b)} = 2\phi_1^{(b)} \quad (3.32)$$

$$\gamma_{1,xy}^{2(b)} = 0 \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2,x}^{0(t)} &= \frac{\partial u_{2glob}}{\partial x} + \frac{t_t}{2} \frac{\partial \theta_2^{(t)}}{\partial x} + \frac{(t_b - t_t)}{2} \frac{\partial \theta_2^{(b)}}{\partial x} \\ &\quad - \frac{t_t^2}{4} \frac{\partial \phi_2^{(t)}}{\partial x} + \frac{(t_b^2 - t_t^2)}{4} \frac{\partial \phi_2^{(b)}}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2,x}^{0(b)} &= \frac{\partial u_{2glob}}{\partial x} - \frac{t_t}{2} \frac{\partial \theta_2^{(b)}}{\partial x} \\ &\quad - \frac{t_t^2}{4} \frac{\partial \phi_2^{(b)}}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\varepsilon_{2,x}^{1(t)} = \frac{\partial \theta_2^{(t)}}{\partial x} \quad (3.37)$$

$$\varepsilon_{2,x}^{2(t)} = \frac{\partial \phi_2^{(t)}}{\partial x} \quad (3.39)$$

$$\gamma_{2,xy}^{0(t)} = \theta_2^{(t)} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \quad (3.41)$$

$$\gamma_{2,xy}^{1(t)} = 2\phi_2^{(t)} \quad (3.43)$$

$$\gamma_{2,xy}^{2(t)} = 0 \quad (3.45)$$

$$\varepsilon_{2,x}^{1(b)} = \frac{\partial \theta_2^{(b)}}{\partial x} \quad (3.38)$$

$$\varepsilon_{2,x}^{2(b)} = \frac{\partial \phi_2^{(b)}}{\partial x} \quad (3.40)$$

$$\gamma_{2,xy}^{0(b)} = \theta_2^{(b)} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \quad (3.42)$$

$$\gamma_{2,xy}^{1(b)} = 2\phi_2^{(b)} \quad (3.44)$$

$$\gamma_{2,xy}^{2(b)} = 0 \quad (3.46)$$

### 3.3. Az igénybevételek meghatározása

A fajlagos alakváltozások ismeretében felírhatók a rúd lokális  $M_{i,z}^{(\delta)}$  hajlítónyomatéki, lokális  $N_{i,x}^{(\delta)}$  normális és lokális  $V_{i,y}^{(\delta)}$  nyíró igénybevételei. Továbbá felírhatók a magasabb rendű  $L_{i,z}^{(\delta)}$  és  $R_{i,y}^{(\delta)}$  igénybevételek, melyeknek a szakirodalomban nevük nincs [4]. A kifejezésekben  $E_{11}$  az anyag rugalmassági modulusát és  $G_{12}$  az anyag csúsztató rugalmassági modulusát jelöli. A korábbi jelöléseknek megfelelően ( $i = 1, 2$ ) ( $\delta = t, b$ ):

$$N_{i,x}^{(\delta)} = \int_{(A^{(\delta)})} \sigma_{i,x}^{(\delta)} dA^{(\delta)} = \int_{(A^{(\delta)})} \varepsilon_{i,x}^{0(\delta)} E_{11} dA^{(\delta)} \quad (3.47)$$

$$M_{i,z}^{(\delta)} = \int_{(A^{(\delta)})} \sigma_{i,x}^{(\delta)} y^{(\delta)} dA^{(\delta)} = \int_{(A^{(\delta)})} \varepsilon_{i,x}^{1(\delta)} E_{11} (y^{(\delta)})^2 dA^{(\delta)} \quad (3.48)$$

$$L_{i,z}^{(\delta)} = \int_{(A^{(\delta)})} \sigma_{i,x}^{(\delta)} (y^{(\delta)})^2 dA^{(\delta)} = \int_{(A^{(\delta)})} \varepsilon_{i,x}^{2(\delta)} E_{11} (y^{(\delta)})^4 dA^{(\delta)} \quad (3.49)$$

$$V_{i,y}^{(\delta)} = \int_{(A^{(\delta)})} \tau_{i,xy}^{(\delta)} dA^{(\delta)} = \int_{(A^{(\delta)})} \gamma_{i,xy}^{0(\delta)} G_{12} dA^{(\delta)} \quad (3.50)$$

$$R_{i,y}^{(\delta)} = \int_{(A^{(\delta)})} \tau_{i,xy}^{(\delta)} y^{(\delta)} dA^{(\delta)} = \int_{(A^{(\delta)})} \gamma_{i,xy}^{1(\delta)} G_{12} (y^{(\delta)})^2 dA^{(\delta)} \quad (3.51)$$

### 3.4. Egyensúlyi egyenletek levezetése

A következőkben levezetésre kerülnek a delaminált és a nemdelaminált részre vonatkozó egyensúlyi egyenletek. Ezt a virtuális munka elve segítségével teszem meg, melyet az előzőekben már bemutattam. Ismétlésképpen ennek általános, illetve a statikai feladatokra vonatkozó alakja a következő:

$$\int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (3.52)$$

$$\delta U + \delta V = 0 \quad (3.53)$$

#### 3.4.1. Delaminált rész

A  $t$  "top" és  $b$  "bottom" delaminált részre egyaránt felírható a felhalmozódott virtuális alakváltozási energia és a külső  $q_1^{(\delta)}$  megoszló erő virtuális munkája.

$$\delta U_1^{(\delta)} = \int_{(V)} \left( \delta \varepsilon_1^{(\delta)T} \sigma_1^{(\delta)} \right) dV \quad (3.54)$$

$$\delta V_1^{(\delta)} = - \int_{(l_1)} \left( q_1^{(\delta)} \delta v_1^{(\delta)} \right) dx \quad (3.55)$$

Az előző virtuális alakváltozási energiára vonatkozó tagot kifejtve, behelyettesítve a felbontott alakváltozási komponenseket, és felhasználva az igénybevételek egyenleteit a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \delta U_1^{(\delta)} &= \int_{(V_1)} \left( \sigma_{1,x}^{(\delta)} (\delta \varepsilon_{1,x}^{0(\delta)} + y^{(\delta)} \delta \varepsilon_{1,x}^{1(\delta)} + (y^{(\delta)})^2 \delta \varepsilon_{2,x}^{(\delta)}) + \tau_{1,xy}^{(\delta)} (\delta \gamma_{1,xy}^{0(\delta)} + \delta \gamma_{1,xy}^{1(\delta)}) \right) dV \\ &= \int_{(l_1)} \left( \int_{(A^{(\delta)})} \left( \sigma_{1,x}^{(\delta)} (\delta \varepsilon_{1,x}^{0(\delta)} + y^{(\delta)} \delta \varepsilon_{1,x}^{1(\delta)}) + (y^{(\delta)})^2 \delta \varepsilon_{2,x}^{(\delta)} + \tau_{1,xy}^{(\delta)} (\delta \gamma_{1,xy}^{0(\delta)} + \delta \gamma_{1,xy}^{1(\delta)}) \right) dA^{(\delta)} \right) dx \\ &= \int_{(l_1)} \left( N_{1,x}^{(\delta)} \delta \varepsilon_{1,x}^{0(\delta)} + M_{1,z}^{(\delta)} \delta \varepsilon_{1,x}^{1(\delta)} + L_{1,z}^{(\delta)} \delta \varepsilon_{2,x}^{2(\delta)} + V_{1,xy}^{(\delta)} \delta \gamma_{1,xy}^{0(\delta)} + R_{1,xy}^{(\delta)} \delta \gamma_{1,xy}^{2(\delta)} \right) dx \end{aligned} \quad (3.56)$$

A virtuális alakváltozási energia integrálegyenletének ismeretében már kifejezhető virtuális munka elvének baloldala:

$$\begin{aligned} \delta U_1^{(\delta)} + \delta V_1^{(\delta)} = \int_{(l_2)} & \left( N_{1,x}^{(\delta)} \frac{\partial(\delta u_{1lok})}{\partial x} + M_{1,z}^{(\delta)} \frac{\partial(\delta \theta_1^{(\delta)})}{\partial x} + L_{1,z}^{(\delta)} \frac{\partial(\delta \phi_1^{(\delta)})}{\partial x} \right. \\ & \left. + V_{1,y}^{(\delta)} (\delta \theta_2^{(\delta)} + \frac{\partial(\delta v_2)}{\partial x}) + R_{1,y}^{(\delta)} (2\delta \phi_2^{(b)}) - q_1^{(\delta)} \delta v_1^{(\delta)} \right) dx \end{aligned} \quad (3.57)$$

A kapott egyenletet egyenlővé téve nullával, továbbá alkalmazva a láncszabályt és a Gauß-Ostrogradsky integrálátalakító tételt, a következő adódik:

$$\begin{aligned} \delta U_1^{(\delta)} + \delta V_1^{(\delta)} = \int_{(l_1)} & \left( - \left( \frac{\partial N_{1,x}^{(\delta)}}{\partial x} \right) \delta u_{1lok} - \left( \frac{\partial M_{1,z}^{(\delta)}}{\partial x} - V_{1,xy}^{(\delta)} \right) \delta \theta_1^{(\delta)} \right. \\ & - \left( \frac{\partial L_{1,z}^{(\delta)}}{\partial x} - 2R_{1,xy}^{(\delta)} \right) \delta \phi_1^{(\delta)} - \left( \frac{\partial V_{1,xy}^{(\delta)}}{\partial x} + q_1^{(\delta)} \right) \delta v_1^{(\delta)} \\ & + N_{1,x}^{(\delta)} n_x \delta u_{1lok} + M_{1,z}^{(\delta)} n_x \delta \theta_1^{(\delta)} \\ & \left. + L_{1,z}^{(\delta)} n_x \delta \phi_1^{(\delta)} + V_{1,xy}^{(\delta)} n_x \delta v_1^{(\delta)} \right) dx \end{aligned} \quad (3.58)$$

A kapott egyenlőségből kiolvashatók az igénybevételekre vonatkozó egyensúlyi egyenletek, illetve a dinamikai vagy más néven természetes peremfeltételek. A delaminált részen az egyensúlyi egyenletek tehát a következők:

$$\frac{\partial N_{1,x}^{(t)}}{\partial x} = 0 \quad (3.59) \qquad \frac{\partial N_{1,x}^{(b)}}{\partial x} = 0 \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial M_{1,z}^{(t)}}{\partial x} - V_{1,xy}^{(t)} = 0 \quad (3.61) \qquad \frac{\partial M_{1,z}^{(b)}}{\partial x} - V_{1,xy}^{(b)} = 0 \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial L_{1,z}^{(t)}}{\partial x} - 2R_{1,xy}^{(t)} = 0 \quad (3.63) \qquad \frac{\partial L_{1,z}^{(b)}}{\partial x} - 2R_{1,xy}^{(b)} = 0 \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial V_{1,xy}^{(t)}}{\partial x} + q_1^{(t)} = 0 \quad (3.65) \qquad \frac{\partial V_{1,xy}^{(b)}}{\partial x} + q_1^{(b)} = 0 \quad (3.66)$$

Az egyensúlyi egyenletekbe visszaírva az igénybevételi egyenletek definícióját a (3.47-3.51) egyenleteknek megfelelően, majd az integrálásokat elvégezve kapjuk a delaminált rész leíró differenciálegyenlet-rendszerét. Ahol  $A^{(\delta)}$  alsó és felső részek keresztmetszetét,  $I_z^{(\delta)}$  azok másodrendű nyomatékát,  $\frac{bt_\delta^5}{80}$  pedig azok magasabbrendű keresztmetszeti jellemzőjét jelölik.

$$E_{11} A^{(t)} \frac{\partial^2 u_{1lok}^{(t)}}{\partial x^2} = 0 \quad (3.67)$$

$$E_{11} I_z^{(t)} \frac{\partial^2 \theta_1^{(t)}}{\partial x^2} - G_{12} A^{(t)} \left( \theta_1^{(t)} + \frac{\partial v_1^{(t)}}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.68)$$

$$E_{11} \frac{bt_t^5}{80} \frac{\partial^2 \phi_1^{(t)}}{\partial x^2} - 2(G_{12} I_z^{(t)} 2\phi_1^{(t)}) = 0 \quad (3.69)$$

$$G_{12} A^{(t)} \left( \frac{\partial \theta_1^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_1^{(t)}}{\partial x^2} \right) + q_1^{(t)} = 0 \quad (3.70)$$

$$E_{11}A^{(b)}\frac{\partial^2 u_{1lok}^{(b)}}{\partial x^2} = 0 \quad (3.71)$$

$$E_{11}I_z^{(t)}\frac{\partial^2 \theta_1^{(b)}}{\partial x^2} - G_{12}A^{(b)}\left(\theta_1^{(b)} + \frac{\partial v_1^{(b)}}{\partial x}\right) = 0 \quad (3.72)$$

$$E_{11}\frac{bt_b^5}{80}\frac{\partial^2 \phi_1^{(b)}}{\partial x^2} - 2(G_{12}I_z^{(b)}2\phi_1^{(b)}) = 0 \quad (3.73)$$

$$G_{12}A^{(b)}\left(\frac{\partial \theta_1^{(b)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_1^{(b)}}{\partial x^2}\right) + q_1^{(b)} = 0 \quad (3.74)$$

### 3.4.2. Nemdelaminált rész

A nemdelaminált részen az alsó és felső rúd együtt dolgozik, melyet az egzakt kinematikai feltételrendszer biztosít. Ebben az esetben éppen ezért, a  $t$  "top" és  $b$  "bottom" részre a virtuális munka elvét egy egyenletként kell felírni. Együtt kell kifejezni a virtuális alakváltozási tagot és a külső  $q_2$  megoszló erők virtuális munkáját kifejező tagot [4]. Meg kell jegyezni, hogy az így kapott egyensúlyi egyenletek már magukban fogják tartalmazni a párhuzamos tengelyek tételét.

$$\delta U_2 = \int_{(V_2)} \left( \delta \varepsilon_2^{(t)T} \boldsymbol{\sigma}_2^{(t)} + \delta \varepsilon_2^{(b)T} \boldsymbol{\sigma}_2^{(b)} \right) dV \quad (3.75)$$

$$\delta V_2 = - \int_{(l_2)} (q_2 \delta v_2) dx \quad (3.76)$$

A virtuális alakváltozási energiára vonatkozó tagot kifejtve, behelyettesítve a felbontott alakváltozási komponenseket és felhasználva az igénybevételek definícióját:

$$\begin{aligned} \delta U_2 &= \int_{(V_2)} \left( \sigma_{2,x}^{(t)} (\delta \varepsilon_{2,x}^{0(t)} + y^{(t)} \delta \varepsilon_{2,x}^{1(t)} + (y^{(t)})^2 \delta \varepsilon_{2,x}^{2(t)}) + \tau_{2,xy}^{(t)} (\delta \gamma_{2,xy}^{0(t)} + y^{(t)} \delta \gamma_{2,xy}^{1(t)}) \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{2,x}^{(b)} (\delta \varepsilon_{2,x}^{0(b)} + y^{(b)} \delta \varepsilon_{2,x}^{1(b)} + (y^{(b)})^2 \delta \varepsilon_{2,x}^{2(b)}) + \tau_{2,xy}^{(b)} (\delta \gamma_{2,xy}^{0(b)} + y^{(b)} \delta \gamma_{2,xy}^{1(b)}) \right) dV \\ &= \int_{(l_2)} \left( \int_{(A^{(t)})} \left( \sigma_{2,x}^{(t)} (\delta \varepsilon_{2,x}^{0(t)} + y^{(t)} \delta \varepsilon_{2,x}^{1(t)} + (y^{(t)})^2 \delta \varepsilon_{2,x}^{2(t)}) + \tau_{2,xy}^{(t)} (\delta \gamma_{2,xy}^{0(t)} + y^{(t)} \delta \gamma_{2,xy}^{1(t)}) \right) dA^{(t)} \right. \\ &\quad \left. + \int_{(A^{(b)})} \left( \sigma_{2,x}^{(b)} (\delta \varepsilon_{2,x}^{0(b)} + y^{(b)} \delta \varepsilon_{2,x}^{1(b)} + (y^{(b)})^2 \delta \varepsilon_{2,x}^{2(b)}) + \tau_{2,xy}^{(b)} (\delta \gamma_{2,xy}^{0(b)} + y^{(b)} \delta \gamma_{2,xy}^{1(b)}) \right) dA^{(b)} \right) dx \\ &= \int_{(l_2)} \left( N_{2,x}^{(t)} \delta \varepsilon_{2,x}^{0(t)} + M_{2,z}^{(t)} \delta \varepsilon_{2,x}^{1(t)} + L_{2,z}^{(t)} \delta \varepsilon_{2,x}^{2(t)} + V_{2,y}^{(t)} \delta \gamma_{2,xy}^{0(t)} + R_{2,y}^{(t)} \delta \gamma_{2,xy}^{1(t)} \right. \\ &\quad \left. + N_{2,x}^{(b)} \delta \varepsilon_{2,x}^{0(b)} + M_{2,z}^{(b)} \delta \varepsilon_{2,x}^{1(b)} + L_{2,z}^{(b)} \delta \varepsilon_{2,x}^{2(b)} + V_{2,y}^{(b)} \delta \gamma_{2,xy}^{0(b)} + R_{2,y}^{(b)} \delta \gamma_{2,xy}^{1(b)} \right) dx \end{aligned} \quad (3.77)$$

A virtuális alakváltozási energia integrálegyenletének ismeretében már kifejezhető virtuális munka elvének bal oldala:

$$\begin{aligned} \delta U_2 + \delta V_2 = \int_{(I_2)} & \left( N_{2,x}^{(t)} \left( \frac{\partial(\delta u_{2glob})}{\partial x} + \frac{t_b - t_t}{2} \frac{\partial(\delta \theta_2^{(b)})}{\partial x} + \frac{t_t}{2} \frac{\partial(\delta \theta_2^{(t)})}{\partial x} - \frac{t_t^2}{4} \frac{\partial(\delta \phi_2^{(t)})}{\partial x} + \frac{t_b^2 - t_t^2}{4} \frac{\partial(\delta \phi_2^{(b)})}{\partial x} \right) \right. \\ & + M_{2,z}^{(t)} \frac{\partial(\delta \theta_2^{(t)})}{\partial x} + L_{2,z}^{(t)} \frac{\partial(\delta \phi_2^{(t)})}{\partial x} + V_{2,y}^{(t)} (\delta \theta_2^{(t)} + \frac{\partial(\delta v_2)}{\partial x}) + R_{2,y}^{(t)} (2\delta \phi_2^{(t)}) \\ & + N_{2,x}^{(b)} \left( \frac{\partial(\delta u_{2glob})}{\partial x} - \frac{t_t}{2} \frac{\partial(\delta \theta_2^{(b)})}{\partial x} - \frac{t_t^2}{4} \frac{\partial(\delta \phi_2^{(b)})}{\partial x} \right) + M_{2,z}^{(b)} \frac{\partial(\delta \theta_2^{(b)})}{\partial x} \\ & \left. + L_{2,z}^{(b)} \frac{\partial(\delta \phi_2^{(b)})}{\partial x} + V_{2,y}^{(b)} (\delta \theta_2^{(b)} + \frac{\partial(\delta v_2)}{\partial x}) + R_{2,y}^{(b)} (2\delta \phi_2^{(b)}) - q \delta v_2 \right) dx \end{aligned} \quad (3.78)$$

A kapott egyenletet egyenlővé téve nullával, továbbá alkalmazva a láncszabályt és a Gauß-Ostrogradsky integrálátalakító tételt, a következő adódik:

$$\begin{aligned} \delta U_2 + \delta V_2 = \int_{(I_2)} & \left( - \left( \frac{\partial N_{2,x}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{2,x}^{(b)}}{\partial x} \right) \delta u_{2glob} \right. \\ & - \left( \frac{t_t}{2} \frac{\partial N_{2,x}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{2,z}^{(t)}}{\partial x} - V_{2,y}^{(t)} \right) \delta \theta_2^{(t)} \\ & - \left( \frac{t_b - t_t}{2} \frac{\partial N_{2,x}^{(b)}}{\partial x} - \frac{t_t}{2} \frac{\partial N_{2,x}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{2,z}^{(b)}}{\partial x} - V_{2,y}^{(b)} \right) \delta \theta_2^{(b)} \\ & - \left( - \frac{t_t^2}{4} \frac{\partial N_{2,x}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial L_{2,x}^{(t)}}{\partial x} - 2R_{2,x}^{(t)} \right) \delta \phi_2^{(t)} \\ & - \left( - \frac{t_b^2 - t_t^2}{4} \frac{\partial N_{2,x}^{(t)}}{\partial x} - \frac{t_t^2}{4} \frac{\partial N_{2,x}^{(b)}}{\partial x} + \frac{\partial L_{2,x}^{(b)}}{\partial x} - 2R_{2,x}^{(b)} \right) \delta \phi_2^{(b)} \\ & - \left( \frac{\partial V_{2,y}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial V_{2,y}^{(b)}}{\partial x} + q_2 \right) \delta v_2 \\ & + (N_{2,x}^{(t)} n_x + N_{2,x}^{(b)} n_x) \delta u_{2glob} \\ & + \left( \frac{t_t}{2} N_{2,x}^{(t)} n_x + M_{2,z}^{(t)} n_x \right) \delta \theta_2^{(t)} \\ & + \left( \frac{t_b - t_t}{2} N_{2,x}^{(t)} n_x - \frac{t_t}{2} N_{2,x}^{(b)} n_x + M_{2,z}^{(b)} n_x \right) \delta \theta_2^{(b)} \\ & + \left( - \frac{t_t^2}{4} N_{2,x}^{(t)} n_x + L_{2,x}^{(t)} n_x \right) \delta \phi_2^{(t)} \\ & + \left( - \frac{t_b^2 - t_t^2}{4} N_{2,x}^{(t)} n_x - \frac{t_t^2}{4} N_{2,x}^{(b)} n_x + L_{2,x}^{(b)} n_x \right) \delta \phi_2^{(b)} \\ & \left. + (V_{2,y}^{(t)} n_x + V_{2,y}^{(b)} n_x) \delta v_2 \right) dx \end{aligned} \quad (3.79)$$

Ebből az egyenlőségéből kiolvashatók az igénybevételekre vonatkozó egyensúlyi egyenletek, illetve a dinamikai vagy más néven természetes peremfeltételek. Nemdelaminált részen az egyensúlyi egyenletek tehát a következők, melyek már tartalmazzák a párhuzamos tengelyek tételét is.

$$\frac{\partial N_{2,x}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{2,x}^{(b)}}{\partial x} = 0 \quad (3.80)$$

$$\frac{t_t}{2} \frac{\partial N_{2,x}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{2,z}^{(t)}}{\partial x} - V_{2,y}^{(t)} = 0 \quad (3.81)$$

$$\frac{t_b - t_t}{2} \frac{\partial N_{2,x}^{(b)}}{\partial x} - \frac{t_t}{2} \frac{\partial N_{2,x}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial M_{2,z}^{(b)}}{\partial x} - V_{2,y}^{(b)} = 0 \quad (3.82)$$

$$- \frac{t_t^2}{4} \frac{\partial N_{2,x}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial L_{2,x}^{(t)}}{\partial x} - 2R_{2,x}^{(t)} = 0 \quad (3.83)$$

$$- \frac{t_b^2 - t_t^2}{4} \frac{\partial N_{2,x}^{(t)}}{\partial x} - \frac{t_t^2}{4} \frac{\partial N_{2,x}^{(b)}}{\partial x} + \frac{\partial L_{2,x}^{(b)}}{\partial x} - 2R_{2,x}^{(b)} = 0 \quad (3.84)$$

$$\frac{\partial V_{2,y}^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial V_{2,y}^{(b)}}{\partial x} + q_2 = 0 \quad (3.85)$$

Az egyensúlyi egyenletekbe visszairva az igénybevételi egyenletek definícióját a (3.47-3.51) egyenleteknek megfelelően, majd az integrálásokat elvégezve kapjuk a nemdelaminált rész leíró differenciálegyenlet- rendszerét, ahol  $A^{(\delta)}$  alsó és felső részek keresztmetszetét,  $I_z^{(\delta)}$  azok másodrendű nyomatékát,  $\frac{bt_\delta^5}{80}$  pedig azok magasabbrendű keresztmetszeti jellemzőjét jelölik.

$$\begin{aligned} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 u_{2glob}}{\partial x^2} + \frac{t_b - t_t}{2} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(b)}}{\partial x^2} + \frac{t_t}{2} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(t)}}{\partial x^2} \\ - \frac{t_t^2}{4} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \phi_2^{(t)}}{\partial x^2} - \frac{t_b^2 - t_t^2}{4} E_{11}A^{(b)} \frac{\partial^2 \phi_2^{(b)}}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$+ E_{11}A^{(b)} \frac{\partial^2 u_{2glob}}{\partial x^2} - \frac{t_t}{2} E_{11}A^{(b)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(b)}}{\partial x^2} - \frac{t_t^2}{4} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \phi_2^{(b)}}{\partial x^2} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{t_t}{2} \left( E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 u_{2glob}}{\partial x^2} + \frac{t_b - t_t}{2} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(b)}}{\partial x^2} + \frac{t_t}{2} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(t)}}{\partial x^2} \right) \\ + \frac{t_t}{2} \left( - \frac{t_t^2}{4} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \phi_2^{(t)}}{\partial x^2} - \frac{t_b^2 - t_t^2}{4} E_{11}A^{(b)} \frac{\partial^2 \phi_2^{(b)}}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$+ E_{11}I_z^{(t)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(t)}}{\partial x^2} - G_{12}A^{(t)}(\theta_2^{(t)} + \frac{\partial v_2}{\partial x}) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{t_b - t_t}{2} \left( E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 u_{2glob}}{\partial x^2} + \frac{t_b - t_t}{2} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(b)}}{\partial x^2} + \frac{t_t}{2} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(t)}}{\partial x^2} \right) \\ + \frac{t_b - t_t}{2} \left( - \frac{t_t^2}{4} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \phi_2^{(t)}}{\partial x^2} - \frac{t_b^2 - t_t^2}{4} E_{11}A^{(b)} \frac{\partial^2 \phi_2^{(b)}}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$- \frac{t_t}{2} \left( E_{11}A^{(b)} \frac{\partial^2 u_{2glob}}{\partial x^2} - \frac{t_t}{2} E_{11}A^{(b)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(b)}}{\partial x^2} - \frac{t_t^2}{4} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \phi_2^{(b)}}{\partial x^2} \right)$$

$$+ E_{11}I_z^{(b)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(b)}}{\partial x^2} - G_{12}A^{(b)}(\theta_2^{(b)} + \frac{\partial v_2}{\partial x}) = 0$$

$$\begin{aligned} - \frac{t_t^2}{4} \left( E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 u_{2glob}}{\partial x^2} + \frac{t_b - t_t}{2} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(b)}}{\partial x^2} + \frac{t_t}{2} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(t)}}{\partial x^2} \right) \\ - \frac{t_t^2}{4} \left( - \frac{t_t^2}{4} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \phi_2^{(t)}}{\partial x^2} - \frac{t_b^2 - t_t^2}{4} E_{11}A^{(b)} \frac{\partial^2 \phi_2^{(b)}}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.89)$$

$$+ E_{11} \frac{bt_t^5}{80} \frac{\partial^2 \phi_2^{(t)}}{\partial x^2} - 2(G_{12}I_z^{(t)} 2\phi_2^{(t)}) = 0$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{t_b^2 - t_t^2}{4} \left( E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 u_{2glob}}{\partial x^2} + \frac{t_b - t_t}{2} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(b)}}{\partial x^2} + \frac{t_t}{2} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(t)}}{\partial x^2} \right) \\
& -\frac{t_b^2 - t_t^2}{4} \left( -\frac{t_t^2}{4} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \phi_2^{(t)}}{\partial x^2} - \frac{t_b^2 - t_t^2}{4} E_{11}A^{(b)} \frac{\partial^2 \phi_2^{(b)}}{\partial x^2} \right) \\
& -\frac{t_t^2}{4} \left( E_{11}A^{(b)} \frac{\partial^2 u_{2glob}}{\partial x^2} - \frac{t_t}{2} E_{11}A^{(b)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(b)}}{\partial x^2} - \frac{t_t^2}{4} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \phi_2^{(b)}}{\partial x^2} \right) \\
& + E_{11} \frac{bt_b^5}{80} \frac{\partial^2 \phi_2^{(b)}}{\partial x^2} - 2(G_{12}I_z^{(b)} 2\phi_2^{(b)}) = 0
\end{aligned} \tag{3.90}$$

$$G_{12}A^{(t)} \left( \frac{\partial \theta_2^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \right) + G_{12}A^{(b)} \left( \frac{\partial \theta_2^{(b)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \right) + q_2 = 0 \tag{3.91}$$

Szimmetrikus delamináció esetén, azaz ha  $t_b = t_t = h$  a kapott leíró differenciálegyenlet rendszer a következő alakra egyszerűsödik:

$$\begin{aligned}
& E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 u_{2glob}}{\partial x^2} + \frac{h}{2} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(t)}}{\partial x^2} - \frac{h^2}{4} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \phi_2^{(t)}}{\partial x^2} + E_{11}A^{(b)} \frac{\partial^2 u_{2glob}}{\partial x^2} \\
& - \frac{h}{2} E_{11}A^{(b)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(b)}}{\partial x^2} - \frac{h^2}{4} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \phi_2^{(b)}}{\partial x^2} = 0
\end{aligned} \tag{3.92}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{h}{2} \left( E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 u_{2glob}}{\partial x^2} + \frac{h}{2} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(t)}}{\partial x^2} - \frac{t_t^2}{4} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \phi_2^{(t)}}{\partial x^2} \right) \\
& + E_{11}I_z^{(t)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(t)}}{\partial x^2} - G_{12}A^{(t)} (\theta_2^{(t)} + \frac{\partial v_2}{\partial x}) = 0
\end{aligned} \tag{3.93}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{h}{2} \left( E_{11}A^{(b)} \frac{\partial^2 u_{2glob}}{\partial x^2} - \frac{h}{2} E_{11}A^{(b)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(b)}}{\partial x^2} - \frac{h^2}{4} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \phi_2^{(b)}}{\partial x^2} \right) \\
& + E_{11}I_z^{(b)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(b)}}{\partial x^2} - G_{12}A^{(b)} (\theta_2^{(b)} + \frac{\partial v_2}{\partial x}) = 0
\end{aligned} \tag{3.94}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{h^2}{4} \left( E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 u_{2glob}}{\partial x^2} + \frac{h}{2} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(t)}}{\partial x^2} - \frac{h^2}{4} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \phi_2^{(t)}}{\partial x^2} \right) \\
& + E_{11} \frac{bh^5}{80} \frac{\partial^2 \phi_2^{(t)}}{\partial x^2} - 2(G_{12}I_z^{(t)} 2\phi_2^{(t)}) = 0
\end{aligned} \tag{3.95}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{h^2}{4} \left( E_{11}A^{(b)} \frac{\partial^2 u_{2glob}}{\partial x^2} - \frac{h}{2} E_{11}A^{(b)} \frac{\partial^2 \theta_2^{(b)}}{\partial x^2} - \frac{h^2}{4} E_{11}A^{(t)} \frac{\partial^2 \phi_2^{(b)}}{\partial x^2} \right) \\
& + E_{11} \frac{bh^5}{80} \frac{\partial^2 \phi_2^{(b)}}{\partial x^2} - 2(G_{12}I_z^{(b)} 2\phi_2^{(b)}) = 0
\end{aligned} \tag{3.96}$$

$$G_{12}A^{(t)} \left( \frac{\partial \theta_2^{(t)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \right) + G_{12}A^{(b)} \left( \frac{\partial \theta_2^{(b)}}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \right) + q_2 = 0 \tag{3.97}$$



## 4. fejezet

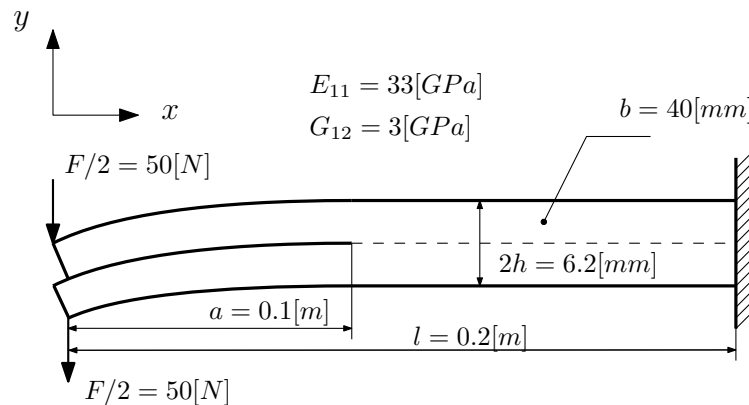
# Alkalmazás

Ebben a fejezetben az első- és másodrendű elmélet leíró differenciálegyenlet rendszereket egy ELS ("End-loaded split") típusú próbatestre alkalmazom. A II-es módusú repedésfeszítő erőket az Irwin-Kies formula segítségével határozom meg, és összehasonlítom a Wang-Qiao páros által publikált korrekciós függvényvel [5]. Az eredményeket továbbá összevetem numerikus eredményekkel is, ahol a végeselmes diszkretizáció során a korábban már bemutatott virtuális repedészáródási technikát alkalmazom.

### 4.1. Analitikus megoldás

Az analitikus megoldás során vizsgált ELS próbatest geometriai és anyagi jellemzői a következő 4.1 ábrán láthatók. A rúdra az  $x = 0$  helyen ható  $F = 100[N]$  koncentrált erőt úgy modellezem, mintha a rúd alsó és a felső részére külön-külön  $F/2 = 50[N]$  koncentrált erő működne. A megoldás menete a következő:

1. A delaminált és nemdelaminált részre külön-külön felírom a leíró differenciálegyenlet-rendszert.
2. A repedéscsúcsnál a két egyenletrendszert egymáshoz kapcsolom a folytonossági feltételekkel, továbbá megadom a szükséges kényszereket és terheléseket.
3. Az egyenlet rendszert megoldom, paraméteresen kiolvasom a koncentrált erő helyén a rúd lehajlását, és Castigliano-tétellel meghatározom a rendszer  $C$  rugó állandóját.
4. Az Irwin-Kies formulával kiszámítom a  $G_{II}$  repedés feszítőerőt.



4.1. ábra. Az ELS próbatest geometriai és anyagi jellemzői

### 4.1.1. Alkalmazott peremfeltételek

A következőkben felsorolásra kerülnek az első- és másodrendű rúdelméletek megoldása során alkalmazott peremfeltételek. Elsőrendű rúdelmélet esetén a kapcsolt differenciálegyenletek száma 10, így ott 20 peremfeltételre van szükség, míg másodrendű esetben 14 kapcsolt egyenletünk van, így ott 28 peremfeltétel szükséges. (Mivel az egyenletekben szereplő legmagasabb deriváltak rendre a második deriváltak.)

Elsőrendű rúdelmélet	Másodrendű rúdelmélet
<b>Merev befogás:</b> Az elmozdulásmező minden egyes tagjának rögzítése.	<b>Merev befogás:</b> Az elmozdulásmező minden egyes tagjának rögzítése.
$u_{2glob}(l) = 0$ (4.1)	$u_{2glob}(l) = 0$ (4.5)
$v_2(l) = 0$ (4.2)	$v_2(l) = 0$ (4.6)
$\theta_2^{(t)}(l) = 0$ (4.3)	$\theta_2^{(t)}(l) = 0$ (4.7)
$\theta_2^{(b)}(l) = 0$ (4.4)	$\theta_2^{(b)}(l) = 0$ (4.8)
	$\phi_2^{(t)}(l) = 0$ (4.9)
	$\phi_2^{(b)}(l) = 0$ (4.10)
<b>Elmozdulásmezők folytonossága a repedéscsúcsnál:</b> A membránmozgások, szögelfordulások és lehajlások egymáshoz illesztése.	<b>Elmozdulásmezők folytonossága a repedéscsúcsnál:</b> A membránmozgások, szögelfordulások, másodrendű tagok és lehajlások egymáshoz illesztése.
$u_{2glob}(a) + \frac{h}{2}\theta_2^{(t)}(a) = u_{1lok}^{(t)}(a)$ (4.11)	$u_{2glob}(a) + \frac{h}{2}\theta_2^{(t)}(a) - \frac{h^2}{a}\phi_2^{(t)}(a) = u_{1lok}^{(t)}(a)$ (4.19)
$u_{2glob}(a) - \frac{h}{2}\theta_2^{(b)}(a) = u_{1lok}^{(b)}(a)$ (4.12)	$u_{2glob}(a) - \frac{h}{2}\theta_2^{(b)}(a) - \frac{h^2}{a}\phi_2^{(b)}(a) = u_{1lok}^{(b)}(a)$ (4.20)
$\theta_2^{(t)}(a) = \theta_1^{(t)}(a)$ (4.13)	$\theta_2^{(t)}(a) = \theta_1^{(t)}(a)$ (4.21)
$\theta_2^{(a)}(l) = \theta_1^{(b)}(a)$ (4.14)	$\theta_2^{(a)}(l) = \theta_1^{(b)}(a)$ (4.22)
$v_2(a) = v_1^{(t)}(a)$ (4.15)	$\phi_2^{(t)}(a) = \phi_1^{(t)}(a)$ (4.23)
$v_2(a) = v_1^{(b)}(a)$ (4.16)	$\phi_2^{(a)}(l) = \phi_1^{(b)}(a)$ (4.24)
$\frac{\partial v_2(a)}{\partial x} = \frac{\partial v_1^{(t)}(a)}{\partial x}$ (4.17)	$v_2(a) = v_1^{(t)}(a)$ (4.25)
$\frac{\partial v_2(a)}{\partial x} = \frac{\partial v_1^{(b)}(a)}{\partial x}$ (4.18)	$v_2(a) = v_1^{(b)}(a)$ (4.26)
	$\frac{\partial v_2(a)}{\partial x} = \frac{\partial v_1^{(t)}(a)}{\partial x}$ (4.27)
	$\frac{\partial v_2(a)}{\partial x} = \frac{\partial v_1^{(b)}(a)}{\partial x}$ (4.28)

**Elsőrendű rúdelmélet****Másodrendű rúdelmélet**

**Terhelések a rúd peremén:** Normál, hajlító és nyíró igénybevételek definiálása.

**Terhelések a rúd peremén:** Normál, hajlító, magasabb rendű hajlító és nyíró igénybevételek definiálása.

$$\frac{\partial u_{1lok}^{(t)}(a)}{\partial x} = 0 \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial u_{1lok}^{(b)}(a)}{\partial x} = 0 \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial \theta_1^{(t)}(0)}{\partial x} = 0 \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial \theta_1^{(b)}(0)}{\partial x} = 0 \quad (4.32)$$

$$G_{12}A^{(t)}(\theta_1^{(b)}(0) + \frac{\partial v_1^{(t)}(0)}{\partial x}) = -\frac{F}{2} \quad (4.33)$$

$$G_{12}A^{(b)}(\theta_1^{(b)}(0) + \frac{\partial v_1^{(b)}(0)}{\partial x}) = -\frac{F}{2} \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial u_{1lok}^{(t)}(a)}{\partial x} = 0 \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial u_{1lok}^{(b)}(a)}{\partial x} = 0 \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial \theta_1^{(t)}(0)}{\partial x} = 0 \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial \theta_1^{(b)}(0)}{\partial x} = 0 \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial \phi_1^{(t)}(0)}{\partial x} = 0 \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial \phi_1^{(b)}(0)}{\partial x} = 0 \quad (4.40)$$

$$G_{12}A^{(t)}(\theta_1^{(b)}(0) + \frac{\partial v_1^{(t)}(0)}{\partial x}) = -\frac{F}{2} \quad (4.41)$$

$$G_{12}A^{(b)}(\theta_1^{(b)}(0) + \frac{\partial v_1^{(b)}(0)}{\partial x}) = -\frac{F}{2} \quad (4.42)$$

$\Sigma = 20$  peremfeltétel,  
hiányzik még további 2

$\Sigma = 24$  peremfeltétel,  
hiányzik még további 4

Elsőrendű rúdelmélet esetén hiányzik még további 2, míg másodrendű rúdelmélet esetén, további 4 peremfeltétel. Ezen peremfeltételek kiolvashatók a levezett egyensúlyi egyenletekből, melyek fizikai tartalma a hajlító és a magasabb rendű hajlító igénybevételek folytonossága a repedéscsúcsnál [8,9]. Elsőrendű rúdelmélet esetén ezek a következők:

$$I_z^{(t)} E_{11} \frac{\partial \theta_2^{(t)}(a)}{\partial x} + \frac{h}{2} A^{(t)} E_{11} \left( \frac{\partial u_{2glob}(a)}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial \theta_2^{(t)}(a)}{\partial x} \right) = I_z^{(t)} E_{11} \frac{\partial \theta_1^{(t)}(a)}{\partial x} \quad (4.43)$$

$$I_z^{(b)} E_{11} \frac{\partial \theta_2^{(b)}(a)}{\partial x} - \frac{h}{2} A^{(b)} E_{11} \left( \frac{\partial u_{2glob}(a)}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial \theta_2^{(b)}(a)}{\partial x} \right) = I_z^{(b)} E_{11} \frac{\partial \theta_1^{(b)}(a)}{\partial x} \quad (4.44)$$

Míg másodrendű rúdelmélet esetén:

$$\begin{aligned} & \frac{h}{2} A^{(t)} E_{11} \left( \frac{\partial u_{2glob}(a)}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial \theta_2^{(t)}(a)}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial \phi_2^{(t)}(a)}{\partial x} \right) \\ & + I_z^{(t)} E_{11} \frac{\partial \theta_2^{(t)}(a)}{\partial x} = I_z^{(t)} E_{11} \frac{\partial \theta_1^{(t)}(a)}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{h}{2} A^{(b)} E_{11} \left( \frac{\partial u_{2glob}(a)}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial \theta_2^{(b)}(a)}{\partial x} - \frac{h^2}{2} \frac{\partial \phi_2^{(b)}(a)}{\partial x} \right) \\ & + I_z^{(b)} E_{11} \frac{\partial \theta_2^{(b)}(a)}{\partial x} = I_z^{(b)} E_{11} \frac{\partial \theta_1^{(b)}(a)}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.46)$$

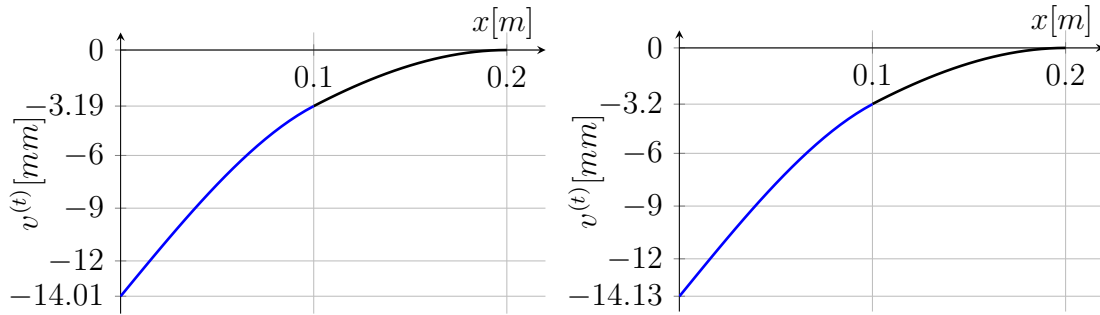
$$\begin{aligned}
-\frac{h^2}{4}A^{(t)}E_{11}\left(\frac{\partial u_{2glob}(a)}{\partial x} + \frac{h}{2}\frac{\partial \theta_2^{(t)}(a)}{\partial x} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial \phi_2^{(t)}(a)}{\partial x}\right) \\
+E_{11}\frac{bh^5}{80}\frac{\partial \phi_2^{(t)}(a)}{\partial x} = E_{11}\frac{bh^5}{80}\frac{\partial \phi_1^{(t)}(a)}{\partial x}
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{h^2}{4}A^{(b)}E_{11}\left(\frac{\partial u_{2glob}(a)}{\partial x} - \frac{h}{2}\frac{\partial \theta_2^{(b)}(a)}{\partial x} - \frac{h^2}{2}\frac{\partial \phi_2^{(b)}(a)}{\partial x}\right) \\
+E_{11}\frac{bh^5}{80}\frac{\partial \phi_2^{(t)}(a)}{\partial x} = E_{11}\frac{bh^5}{80}\frac{\partial \phi_1^{(t)}(a)}{\partial x}
\end{aligned} \tag{4.48}$$

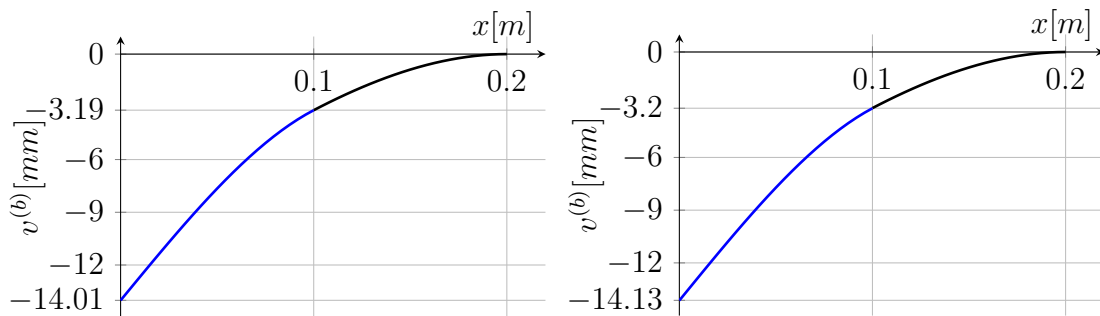
Megvan tehát az összes peremfeltételünk, így valamely matematikai program segítségével a differenciálegyenlet-rendszer megoldható, az egyes paraméterek változása a rúd hossza mentén ábrázolható.

#### 4.1.2. Lehajlások és elmozdulásmezők

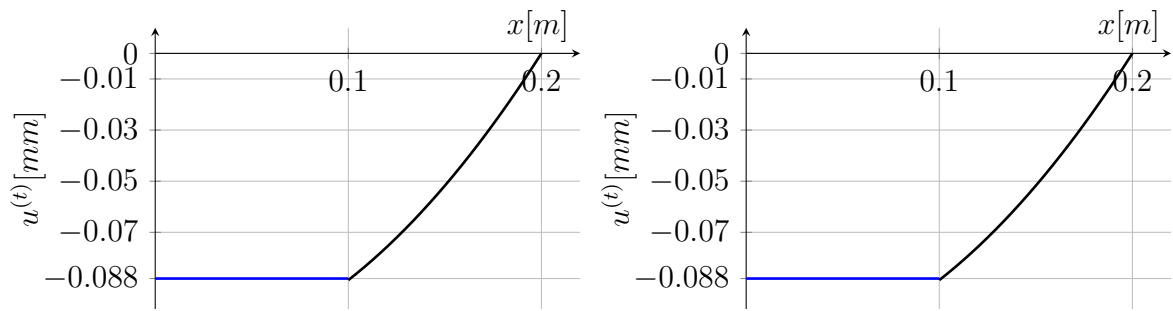
A következőkben ábrázolásra kerülnek, 4.2-4.9 ábrákon, az egyes alakváltozási komponensek változása a rúd hossza mentén. Következtesen baloldalra kerülnek az elsőrendű elmélettel és jobb oldalra a másodrendű elmélettel kapott megoldások.



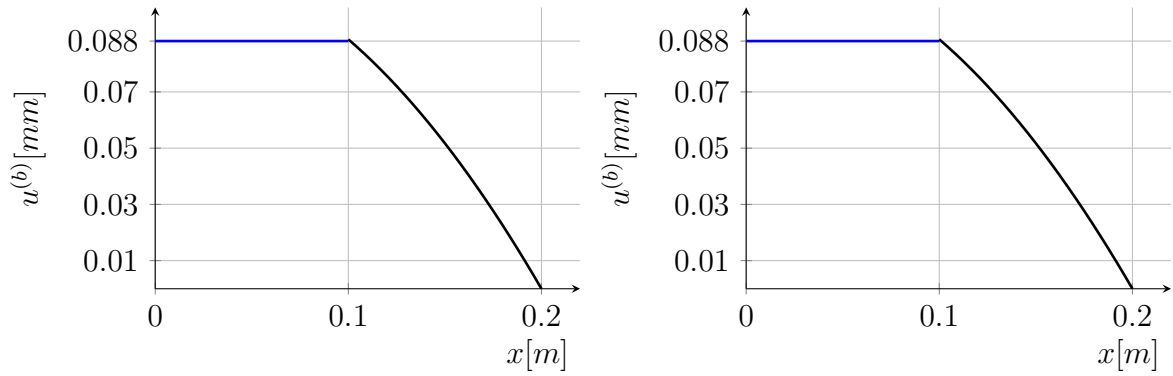
4.2. ábra. A "top" rész lehajlás függvénye



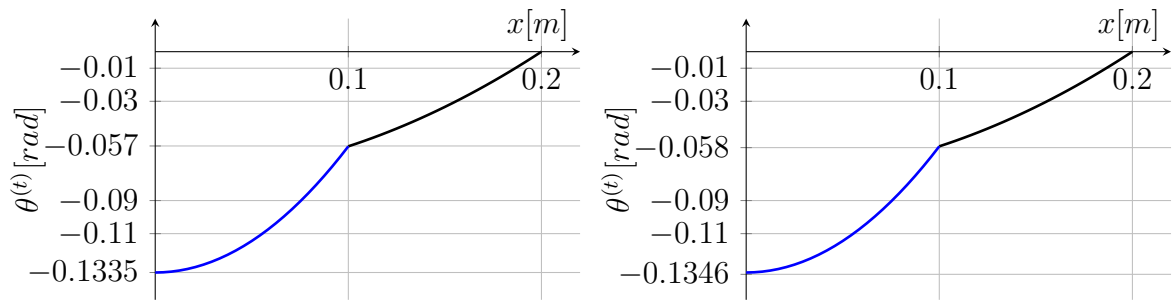
4.3. ábra. A "bottom" rész lehajlás függvénye



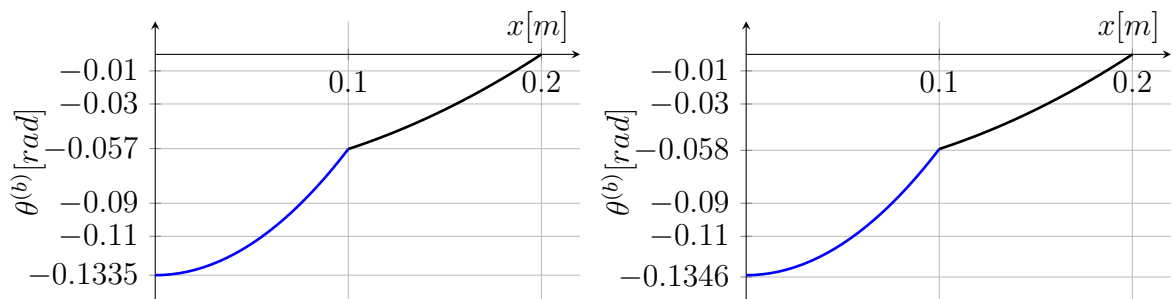
4.4. ábra. A "top" rész lokális membránelmozdulása



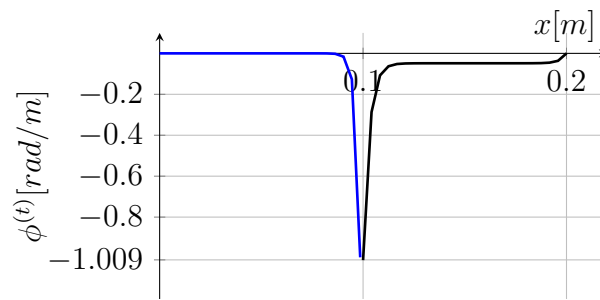
4.5. ábra. A "bottom" rész lokális membránelmozdulása



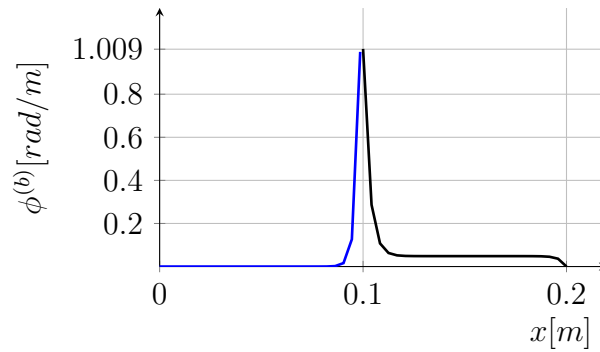
4.6. ábra. A "top" rész szögelfordulása



4.7. ábra. A "bottom" rész szögelfordulása



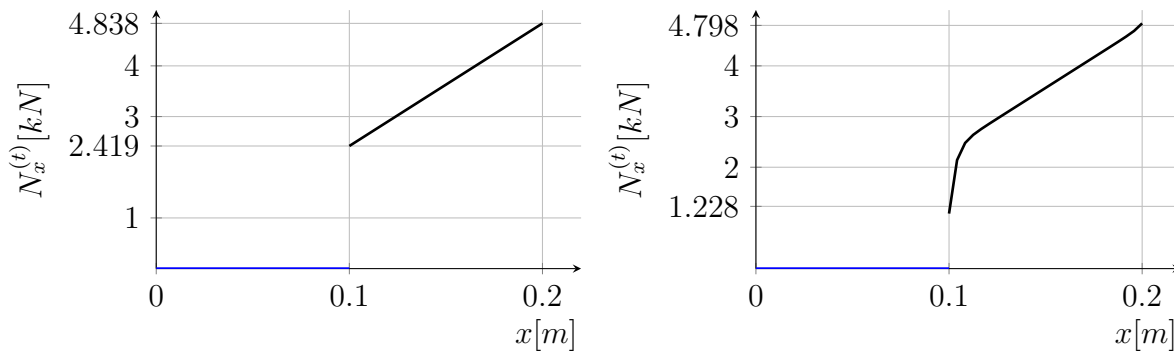
4.8. ábra. Másodrendű elmélet esetén, a "top" rész másodrendű tagja



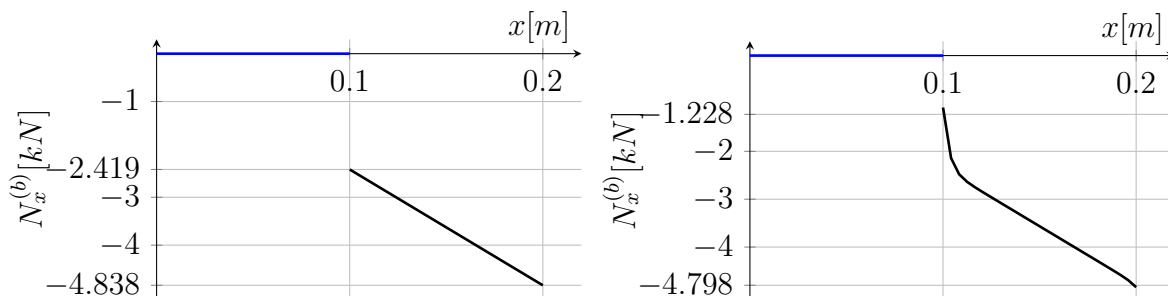
4.9. ábra. Másodrendű elmélet esetén, a "bottom" rész másodrendű tagja

### 4.1.3. Igénybevételi ábrák

A következőkben ábrázolásra kerülnek, 4.10-4.19 ábrákon, az egyes igénybevételek.

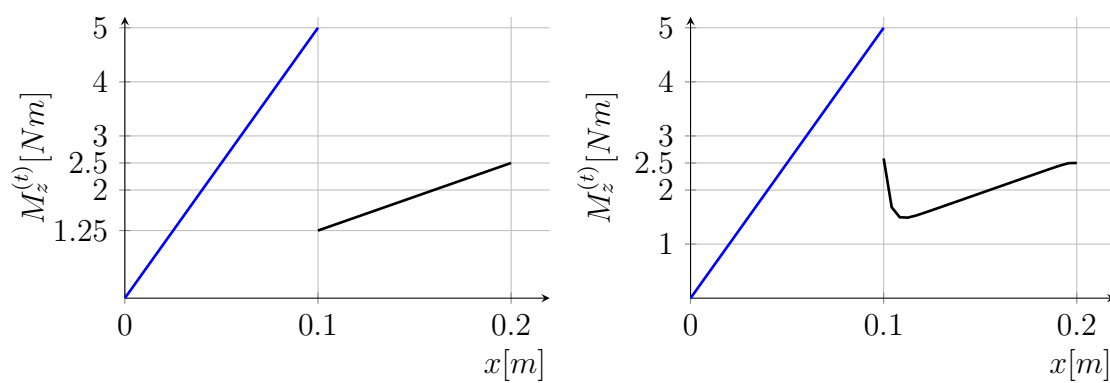


4.10. ábra. A "top" rész normális igénybevétele

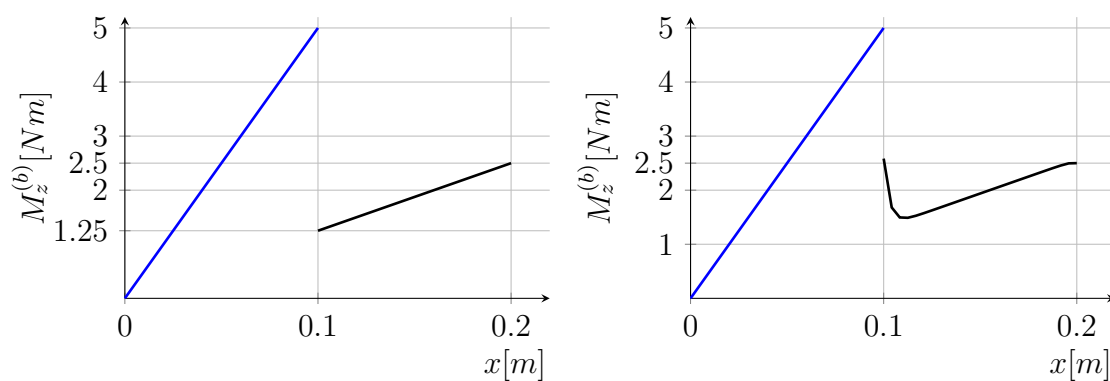


4.11. ábra. A "bottom" rész normális igénybevétele

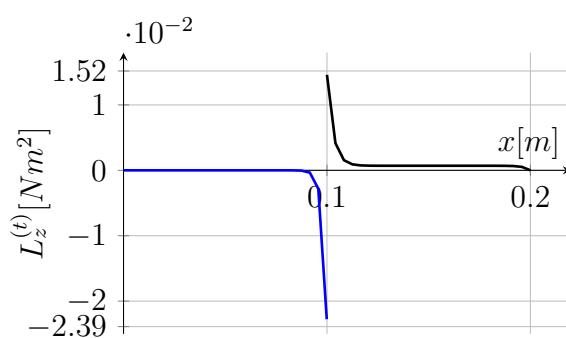




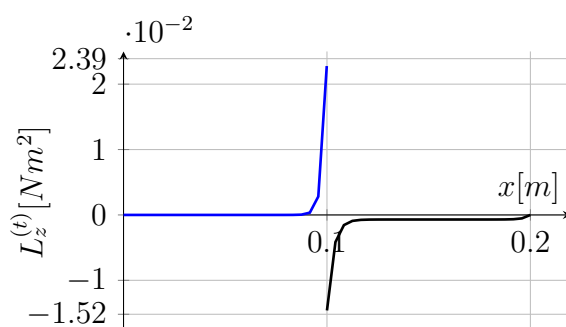
4.12. ábra. A "top" rész hajlító igénybevétele



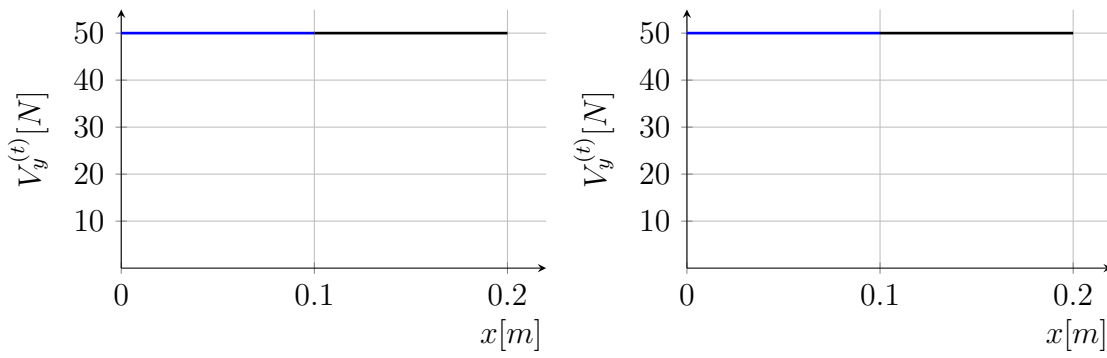
4.13. ábra. A "bottom" rész hajlító igénybevétele



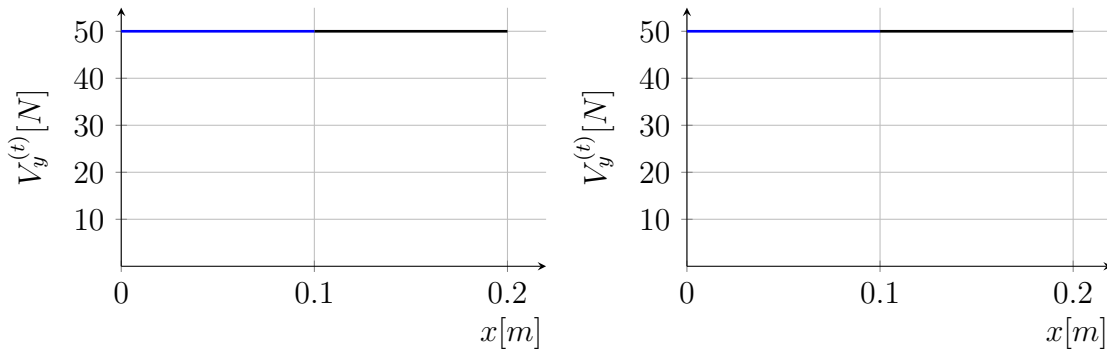
4.14. ábra. A "top" rész másodrendű hajlító igénybevétele



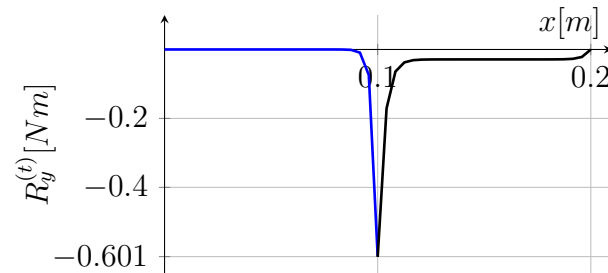
4.15. ábra. A "bottom" rész másodrendű hajlító igénybevétele



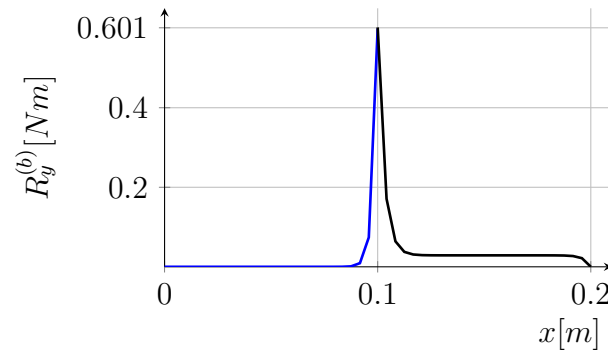
4.16. ábra. A "top" rész nyíró igénybevétele



4.17. ábra. A "bottom" rész nyíró igénybevétele



4.18. ábra. A "top" rész másodrendű nyíró igénybevétele

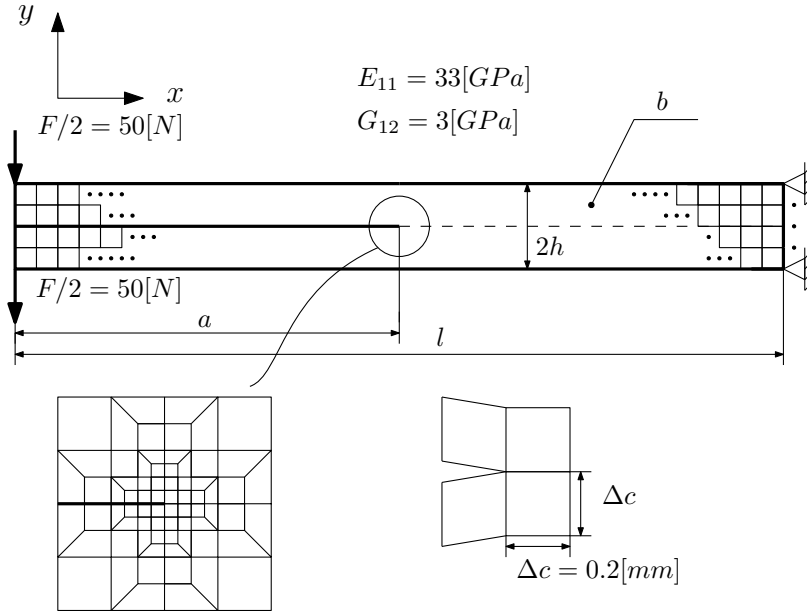


4.19. ábra. A "bottom" rész másodrendű nyíró igénybevétele

Az igénybevételek különbsége a másodrendű elmélet megoldásában adódó exponenciális tagok miatt jelentkezik. Bár a másodrendű elmélet csak kismértékben ad eltérő eredményt az elsőrendűhöz képest, annak jelentősége a repedésfeszítő erő esetén fog megjelenni.

## 4.2. Végeselemes megoldás

A végeselemes megoldásnál síkfeszültségiállapot feltételezve, a korábban már bemutatott virtuális repedészáródási technika segítségével határoztam meg a repedésfeszítő erők értékét. A ELS próbatest diszkretizációját és a repedéscsúcsban alkalmazott speciális "Davidson"-féle hálót a következő 4.20 ábra szemlélteti. Az alkalmazott elemtípus 4 csomópontos izoparametrikus négyszögelem.



4.20. ábra. ELS próbatest végeselemes diszkretizációja

## 4.3. Repedésfeszítő erők aránya

A következőkben ábrázolásra kerülnek a különböző geometria paraméterek mellett elvégzett analitikus és végeselemes számítással kapott repedésfeszítő erők. A megoldásokat továbbá az Euler-Bernoulli klasszikus rúdelmélettel kapott értékekkel fajlagosítom. Ismétlés képpen ez ELF próbatest esetén a repedésfeszítő erő a következő:

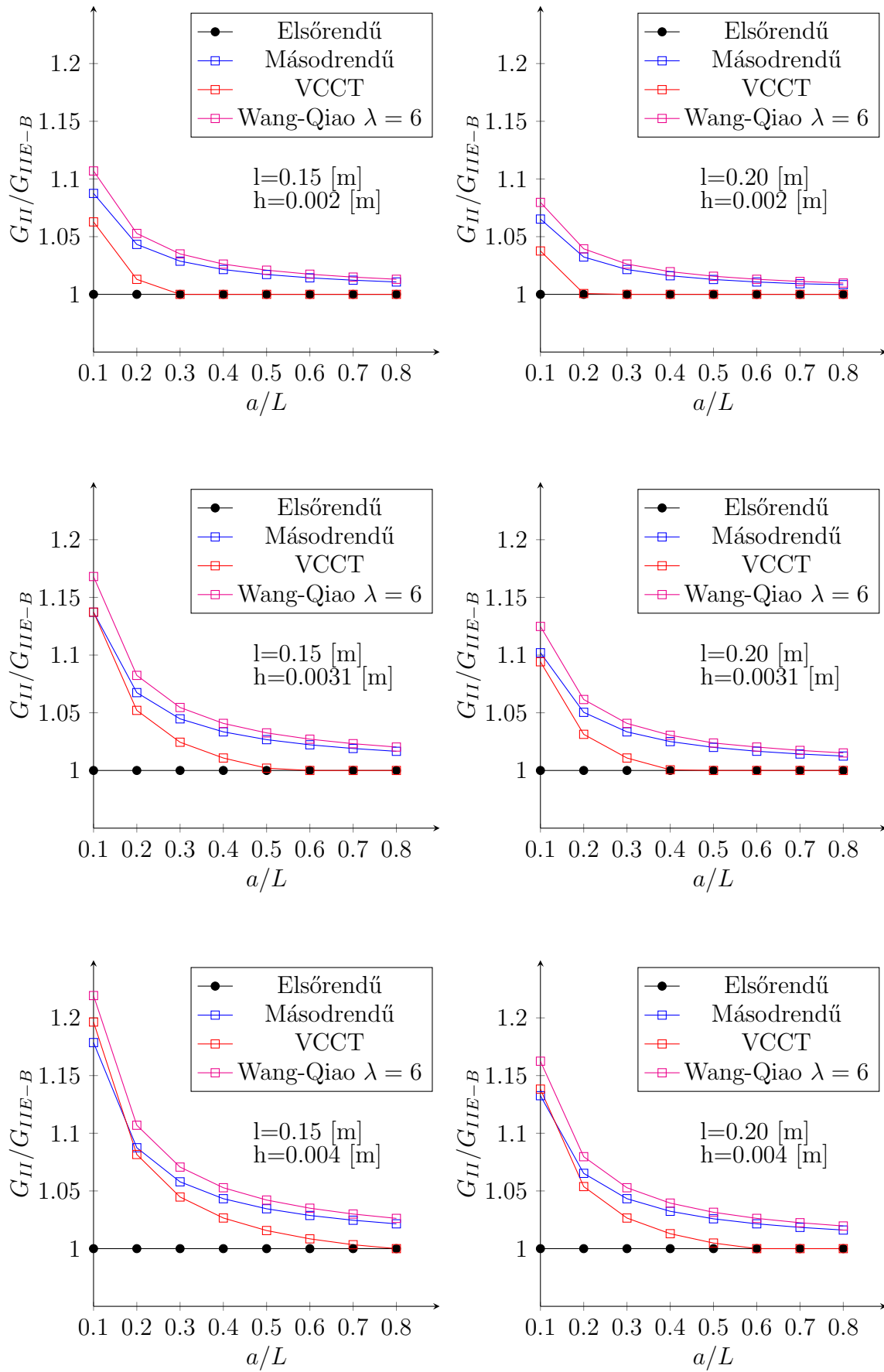
$$G_{IIE-B} = \frac{9F^2 a^2}{4b^2 h^3 E_{11}} \quad (4.49)$$

Ezekkel párhuzamosan, a Wang-Qiao szerzőpáros által javasolt korrekciós függvényt is ábrázolom [5.]. E szerzők munkája, a repedéscsúcs nyírási deformációjának elvét használja fel a klasszikus rúdelmélet javítására. Az általuk javasolt korrekciós függvény a következő:

$$\frac{G_{II}}{G_{IIE-B}} = \left( 1 + \sqrt{\frac{E_{11}}{12\lambda G_{12}}} \frac{h}{a} \right)^2 \quad (4.50)$$

ahol az egyes tagok a korábbi jelölésekkel ekvivalens anyagi és geometriai jellemzők, míg  $\lambda$  a szerzők által bevezetett korrekciós faktor.

Az egyes megoldások során az anyagi paraméterek  $E_{11} = 33[GPa]$  és  $G_{12} = 3[GPa]$ , valamint a síkra merőleges  $b = 40[mm]$  méret változatlanok. Az arányokat tehát a következő 4.21 ábra szemlélteti.



4.21. ábra. A repedésfeszítő erők aránya különböző rúdmeletek esetén

A kapott eredmények összefoglalva a hozzájuk tartozó magyarázatokkal a következők:

- A vártnak megfelelően az elsőrendű elmélet alkalmazása semmiféle javulást nem eredményez, mivel a  $V$  nyíró igénybevétellel szembeni merevség a keresztmetszet területével arányos. A repedés ugyan kettéhasítja ezen területet, de az összterület nem változik.
- A másodrendű elmélet jelentős javulást eredményez, melynek oka, hogy megjelenik egy magasabbrendű  $R$  nyíró igénybevétel, ahol a keresztmetszet merevsége annak másodrendű nyomatékával arányos. A keresztmetszet repedéssel történő kettéhasítása tehát a merevséget jelentősen megváltoztatja.
- Szintén ezzel magyarázható az is, hogy a korrekció értéke nő, ha a  $h$  félvastagság értéke is nő.
- A korrekció mértéke csökken, ha a repedés aránya nő a teljes hosszhoz képest. Ez összhangban van azzal, hogy egyre növekvő gerendahosszoknál a hajlításból adódó energia dominál, amit az Euler-Bernoulli klasszikus rúdelmélet is jól kezel.
- A korrekció mértéke szintén csökken, ha próbatest teljes hossza nő. Ez szintén az előző gondolatmenettel magyarázható.

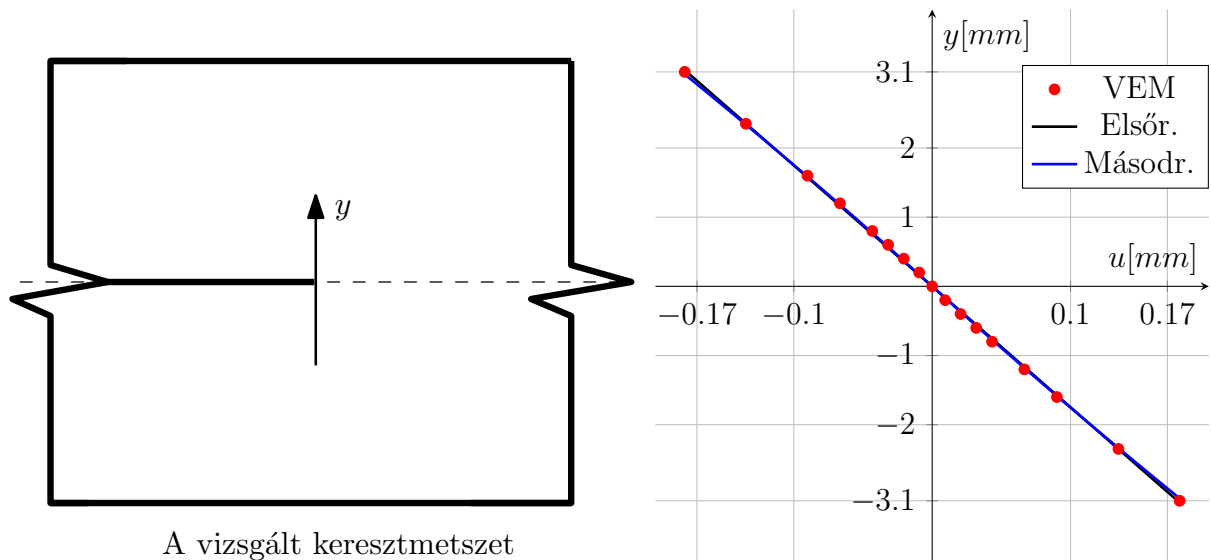
## 4.4. Feszültség eloszlások

Az Euler-Bernoulli rúdelmélet esetében a hajlításból adódó húzófeszültséget a Navier képlettel, míg a nyírásból adódó csúsztató feszültséget, a legalább egy szimmetria síkkal rendelkező "egyszerűbb" keresztmetszetek esetén, a Zsuravszkij képlettel tehetjük meg.

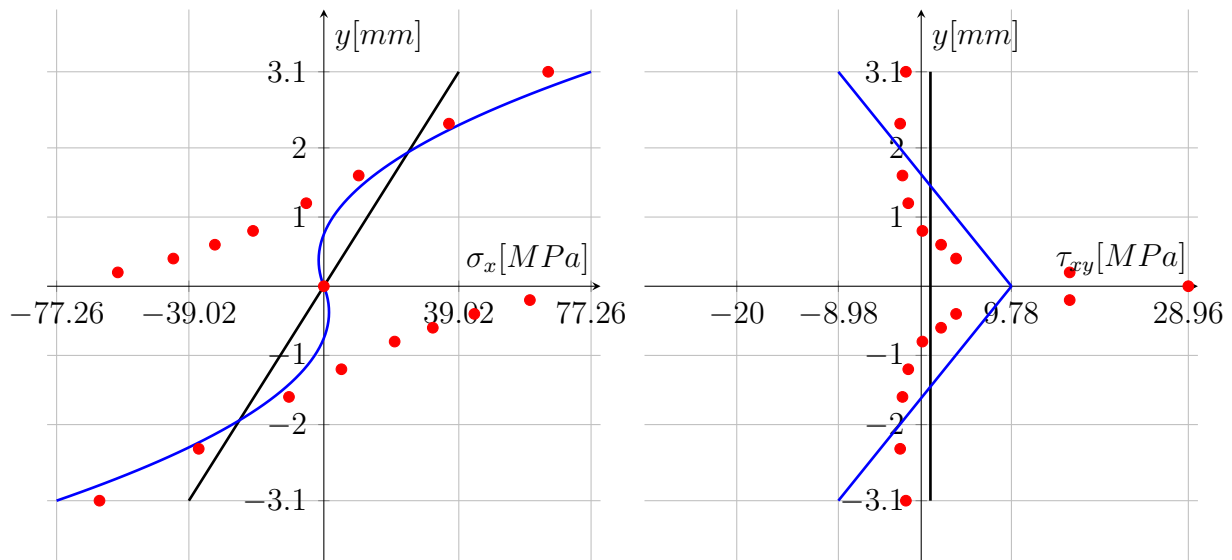
Ezzel szemben a magasabb rendű elméletek lehetőséget biztosítanak a feszültségek direkt rugalmasságtani számítására. Adott keresztmetszetben az elmozdulásfüggvények ismeretében származtathatóak a fajlagos alakváltozások. Felhasználva az anyagtörvényt a feszültségeloszlások meghatározhatóak, az egyes elméletekkel kapott eredmények összehasonlíthatók.

A következő 4.22 és 4.23 ábrákon összehasonlítom a különböző elméletekkel kapott elmozdulásokat és feszültségeket a repedés csúcsának keresztmetszetében. A vizsgált rúd anyagi és geometriai paraméterei megegyeznek a 4.1 ábrán feltüntetettekkel. A kapott eredmények a következők:

- Elsőrendű elmélet esetén a  $\sigma_x$  húzófeszültség lineáris, míg  $\tau_{xy}$  konstans a keresztmetszet mentén.
- Másodrendű elmélet esetén a  $\sigma_x$  húzófeszültség a "top" és "bottom" részen külön-külön másodrendű, míg  $\tau_{xy}$  lineáris a keresztmetszet mentén.
- Az első és másodrendű elmélettel kapott feszültségek nem szingulárisok a repedés-csúcsban, ugyanis a levezetésben sehol sem vettük bele a szokásos  $\frac{1}{x}$  vagy  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  tagot.
- A végeselemes megoldással kapott  $\sigma_x$  eredmény szinguláris jellegű a repedéscsúcsban. A kapott csúcshúzófeszültség értéke az elemmérettől jelentősen függ.



4.22. ábra. A síkbeli elmozdulás eloszlása arepedécsúcs keresztmetszetében



4.23. ábra. A normál- és csúsztatófeszültségek eloszlása a repedécsúcs keresztmetszetében

A kapott eredmények jól tükrözik a különböző rúdmodellek pontosságbeli eltéréseit. Az is jól látszik, hogy ugyan másodrendű elmélettel az elmozdulásértékek numerikusan már jelentősen nem nőnek, mégis rendkívül fontos, hogy hányadrendű polinommal közelítjük azt.

Harmadrendű elmélettel a végeleemes megoldást még jobban tudnánk közelíteni, a feszültségeket még pontosabban le tudnánk írni. Ez az alkalmazott modellek fejlesztésének következő lehetősége. [4]

# Összefoglalás

Egy anyag  $G_c$  kritikus repedésfeszítő erejének megállapítása rendkívül fontos kísérleti feladat. Épp ezért számos kutató és szerző foglalkozik olyan mechanikai elméletekkel, melynek célja ezen érték minél pontosabb meghatározása, és így a kísérletek kiértékelésének segítése. Dolgozatom célkitűzése tehát nem volt más, mint hogy ezt az utat folytassam azzal a kiegészítéssel, hogy tisztán egzakt megoldásokat állítsak elő.

A dolgozat első harmadában ismertetésre kerültek a lineáris rugalmas törésmechanika legfontosabb összefüggései és alapelvei. A repedés szétnyílási modellek, az Irwin-Kies formula, és a speciális "Davidson"-féle hálót igénylő virtuális repedészáródási technika, melyet a végeselemes diszkeritizáció során használtam fel. Bemutatásra kerültek a különböző konfigurációjú, II-es módusú törésmechanikai próbatestek, valamint a klasszikus és magasabbrendű rúdelméletek, melyek célja ezen próbatestek minél jobb leírása, és a repedésfeszítő erő minél pontosabb megadása.

A dolgozat középső harmadában a virtuális munka elve, és az egzakt kinematikai feltételrendszer segítségével levezetésre kerültek egy delaminált és egy nemdelaminált rúd elsőrendű és másodrendű leíró differenciálegyenlet-rendszerei. Ehhez először az elmélet rendjének megfelelő elmozdulásmezőt feltételeztem. Ezeket kapcsoltam egymáshoz nemdelaminált esetben az egzakt kinematikai feltételrendszer, majd származtattam a kis alakváltozásoknak megfelelő fajlagos alakváltozásokat. Ezt követően definiáltam az igénybevételi egyenleteket, melyek egyensúlyi kapcsolatát a már említett virtuális munka elvének segítségével határoztam meg. Végül az igénybevételek definícióját visszahelyettesítve jutottam a leíró differenciálegyenlet-rendszerekhez.

A dolgozat utolsó harmadában a leíró differenciálegyenletek megoldottam az ELS ("End-loaded split") típusú próbatestre. A delaminált és nemdelaminált részek leíró differenciálegyenlet-rendszereit folytonossági feltételekkel kapcsoltam egymáshoz, valamint megadtam a kinematikai és a dinamikai peremfeltételeket. A javított elméletekkel különböző geometriákon vizsgálatokat végeztem, melyekben meghatározásra és összehasonlításra kerültek a repedésfeszítő erők. Látható volt, hogy az elsőrendű elmélet semmiféle javulást, míg a másodrendű elmélet megfelelő geometria esetén, akár 15%-os javulást is eredményezhet az Euler-Bernoulli klasszikus rúdelmélettel kapott értékekhez képest. Végül egy konkrét geometria és terhelés esetén ábrázolásra kerültek a repedés-csúcsban ébredő normál és csúsztató feszültségek, melyeken rendkívül jól látszott a rúdelméletek fejlődése.





# Summary

The determination of a material's  $G_c$  critical energy release rate is very important in the experimental solid mechanics. Previously, different theories were published to give accurate solution to behavior of fracture specimens. In my thesis, I describe a possible higher-order, purely exact solution without artificial corrections.

First, I overviewed the principals of linear elastic fracture mechanincs, like crack separation modes, the Irwin-Kies formula, and the special virtaul crack closure technique. This technique was used in the finite element discretization. Futhermode, the mode-II fracture specimens, the classical and the higher-order beam theories were reviewed. They were applied to determine energy release rate as accurately as possible.

The principle of virtual work and the system of exact kinematic conditions were applied to derive the differential equation system of the first- and second-order beam theories for the delaminated and undelaminated regions. The first step was the creation of an assumed the displacement fields. In the undelaminated region, these fields were connected by the system of exact kinematic conditions and the small displacement theory was used to derive the strain field. By using the constitutive equations the stress resultants were calculated by integrating the stesses over the tichnesses. After that the virtaul work principle was applied to obtained the equilibrium equations.

The first- and second-order beam theory were applied to model End-loaded split fracture specimen. The delaminated and the undelaminated regions were connected by continuity conditions, and I defined the displacement boundary conditions and the natural boundary conditions. The displacement were obtained by solving the system of second-order ordinary differential equations.

The energy release rate was calculated for different specimen geometries and the improved theories were compared to the classical beam theory. We could see that the first-order beam theory was not capable to obtain better results than the Euler-Bernoulli beam theory. In contranst, the second-order theory could redound an approximately 15% improvement. Finally the normal and shear stress distribution were showed in the crack tip cross-section, where we could see the clear difference between the different beam theoris and the finite element method.



# Irodalomjegyzék

- [1] T.L.Anderson: Fracture Mechanincs - Fundamentals and Applications, Third Edition, *Boca Raton, London, New York, Washington D.C.*, 2005.
- [2] I.Bojtár: Gyakorlati törésmechanika, Előadásvázlat, *Budapest, BME, Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék*, 2015.
- [3] A.Szekrényes: Delamination of composite specimens, Ph. D. dissertation, *Budapest, BME, Műszaki Mechanika Tanszék*, 2005.
- [4] J.N.Reddy: Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells - Theory and Analysis, Second edition, *Boca Raton, London, New York, Washington D.C.*, CRC Press, 2004.
- [5] J.Wang, P.Qiao: Novel beam analysis of end notched flexure specimen for mode-II fracture, *Engineering Fracture Mechanics* 71 219-231, 2004.
- [6] Á.Kovács: Szilárdsági méretezés, Előadásvázlat, *Budapest, BME, Műszaki Mechanika Tanszék*, 2016.
- [7] A.Szekrényes: A mechanikai kísérleti módszerei, Előadásvázlat, *Budapest, BME, Műszaki Mechanika Tanszék*, 2016.
- [8] A.Szekrényes: Nonsingular crack modelling in orthotropic plates by four equivalent single layers, *European journal of Mechanics A/Solids* 55 73-99, 2015.
- [9] A.Szekrényes: Antiplane-inplane shear mode delamination between two second-order shear defromable composite plate, *Mathematics and Mechanics of Solids* 1-24, 2015.
- [10] G.Vörös: Virtuális munka elve, Oktatási segédlet, *Budapest, BME, Műszaki Mechanika Tanszék*, 2005.
- [11] A.Szekrényes: Egyensúly és virtuális munka elve, Oktatási segédlet, *Budapest, BME, Műszaki Mechanika Tanszék*, 2016.
- [12] A.Szekrényes: A virtuális repedézáródási technika (VCCT) alkalmazása ANSYS-ban, Oktatási segédlet, *Budapest, BME, Műszaki Mechanika Tanszék*, 2016.
- [13] A.Leski: Implementation of the virtual crack closure technique in engineering FE calculations, *Finite Elements in Analysis and Design* 43 261-268, 2006.