

# 基于矢量运算的三维真比例导引弹道仿真\*

欧阳中辉, 刘家祺, 张龙杰, 叶 文

(海军航空工程学院, 山东烟台 264001)

**摘 要:** 为了分析真比例导引(TPN)弹道特点, 设计了一种基于矢量运算的三维弹道仿真方法。在视线转移平面内建立了相对运动坐标系, 分析了弹目相对运动和视线转移的关系, 在此基础上得到了真比例导引律的矢量导引模型, 利用其推导出指令加速度的矢量方程。采用 Matlab 对舰空导弹在目标作匀速直线运动情况下的弹道进行了仿真, 结果表明, 所建模型比较符合实际情况, 仿真方法切实有效, 能够直观形象的显示弹道特性及其各参数的变化过程。

**关键词:** 矢量运算; 舰空导弹; 真比例导引; 弹道仿真; Matlab

**中图分类号:** TJ765.3 **文献标志码:** A

## The Simulation of Three-dimensional TPN Trajectory Based on Vector Operation

OUYANG Zhonghui, LIU Jiaqi, ZHANG Longjie, YE Wen

(Naval Aeronautical and Astronautical University, Shandong Yantai 264001, China)

**Abstract:** In order to analyze the characteristics of TPN trajectory, a method of three-dimensional trajectory simulation based on vector operation was designed. The relative movement coordinate was set up in the sight line shifting plane. The relationship between relative movement and sight line shifting was studied. Then vector model of TPN in three-dimensional space was demonstrated, after that vector equation of acceleration was derived consequently. Ship-to-air missile's trajectory was simulated in Matlab when the target was moving in a straight line at a constant speed. The result shows that the model meets the fact, the method works well and that it can express characteristics of trajectory and transformation of every parameter intuitively.

**Keywords:** vector operation; ship-to-air missile; TPN; trajectory simulation; MATLAB

## 0 引言

目前舰空导弹大多采用比例导引, 而比例导引具体应用形式稍有不同, 主要有<sup>[1]</sup>纯比例导引(PPN), 真比例导引(TPN)和广义比例导引(GPN)等。经典文献中对导引规律的描述和分析<sup>[2]</sup>都是在二维平面内的, 目前大多数三维弹道仿真<sup>[3-5]</sup>普遍采用降维的方法, 把运动分解到一个水平平面和一个铅垂平面内, 分别求解两个平面内的弹道, 然后合成得到三维弹道。这种方法在一般性的研究弹道时是可行的, 但其耦合问题在分析精度时将产生不利影响, 为保证反三角函数有意义还需特殊考虑坐标轴方向。文献<sup>[6]</sup>分别对视线的高低角和方位角用导引律求解导弹的弹道倾角和偏角而得到三维弹道, 需要分析复杂的空间角关系。以上几何法仿真都需假设导弹速度大小保持不变, 而空间矢量法可以避开上述问题, 无需解算空间角, 方法简单且精度高。

## 1 坐标系定义

### 1.1 地面坐标系

地面坐标系( $Oxyz$ )<sub>d</sub>与地球固连, 以导弹发射时刻舰空导弹质心在地面的投影点为原点,  $x_d$ 轴在水平面内, 指向目标方向为正;  $y_d$ 轴沿铅垂线向上为正;  $z_d$ 轴与其他两轴垂直并构成右手坐标系, 如图1所示。

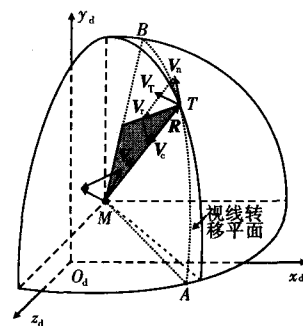


图1 地面坐标系

图1中, 任意时刻反舰导弹(即目标)相对于舰空导弹的运动速度矢量 $V_r$ 和视线矢量 $R$ 所构成的平面 $MAB$ 即为视线转移平面, 因为视线矢量是目标对导弹的相对位移 $R$ ,  $R$ 的转

\* 收稿日期: 2011-05-15

基金项目: 航空电子系统综合技术国防科技重点实验室; 航空科学基金资助

作者简介: 欧阳中辉(1965-), 男, 湖南永州人, 教授, 硕士, 研究方向: 火力指挥与控制。

动方向是相对速度  $V_r$  的方向,若  $V_r // R$ ,则视线在空间平移而不会转动。 $V_T$  和  $V_M$  分别为目标和舰空导弹的速度, $V_r$  在  $R$  方向的投影分量为  $V_c$ ,在  $R$  的垂直方向的投影分量为  $V_n$ 。

## 1.2 相对运动坐标系

相对运动坐标系  $(Oxyz)_r$  与舰空导弹固连,原点  $O_r$  位于舰空导弹的质心位置, $x_r$  轴平行于瞬时视线转移平面  $MAB$  与水平面的交线  $MA$ ,指向目标方向为正; $y_r$  轴在瞬时视线转移平面内,垂直于  $x_r$  轴,在铅垂线投影向上为正; $z_r$  轴与其他两轴垂直并构成右手坐标系,如图 2 所示。

图 2 中, $\theta$  是  $V_r$  和  $V_c$  之间的夹角; $\lambda$  是瞬时视线角; $\Omega$  是视线角速度矢量; $a_M$  是舰空导弹的指令加速度。

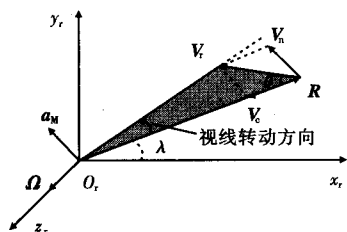


图 2 相对运动坐标系

地面坐标系主要用于分析绝对运动和

相对运动,相对运动和视线转移的几何关系,相对运动坐标系用于分析相对运动在视线方向上的分解和导引律相关矢量的几何关系。

## 2 建立三维矢量导引模型

### 2.1 弹目运动参数的矢量表示形式

下面在地面坐标系  $(Oxyz)_d$  中分析拦截模型的运动参数,任意时刻  $t$ ,来袭的反舰导弹在  $T$  点,坐标为  $(x_T, y_T, z_T)$ ,则其位移矢量  $R_T$  的起点为坐标原点,终点为  $T$ ,则有  $R_T = O_d T = (x_T, y_T, z_T)$ ;舰空导弹在  $M$  点,坐标为  $(x_M, y_M, z_M)$ ,则其位移矢量  $R_M$  的起点为坐标原点,终点为  $M$ ,则有  $R_M = O_d M = (x_M, y_M, z_M)$ 。反舰导弹速度矢量  $V_T$  在 3 个坐标轴上的投影大小分别为  $V_{Tx}, V_{Ty}, V_{Tz}$ ,坐标表示为  $V_T = (V_{Tx}, V_{Ty}, V_{Tz})$ ;舰空导弹速度矢量  $V_M$  在 3 个坐标轴上的投影大小分别为  $V_{Mx}, V_{My}, V_{Mz}$ ,坐标表示为  $V_M = (V_{Mx}, V_{My}, V_{Mz})$ 。

在相对坐标系中,舰空导弹始终在原点  $O_r$ ,反舰导弹的位移矢量  $R = R_T - R_M$ ,坐标表示:

$$R = (x_T - x_M, y_T - y_M, z_T - z_M) \quad (1)$$

反舰导弹的速度即为相对运动速度  $V_r = V_T - V_M$ ,坐标表示:

$$V_r = (V_{Tx} - V_{Mx}, V_{Ty} - V_{My}, V_{Tz} - V_{Mz}) \quad (2)$$

### 2.2 真比例导引律的矢量方程

在相对运动坐标系  $(Oxyz)_r$  中分析导引律,真比例导引律(TPN)的指令加速度  $a_M$  施加在垂直于视线的方向,其大小正比于接近速度  $V_c$  大小和视线角速

率  $d\lambda/dt$  的乘积,即:

$$|a_M| = N |V_c| (d\lambda/dt) \quad (3)$$

如果把视线看成矢量,方向是由舰空导弹指向目标,那么视线即为目标相对于舰空导弹的相对位移矢量  $R$ 。视线角速率即为相对位移  $R$  的转动角速率,其转动方向如图 2 所示,矢量视线角速度  $\Omega$  的大小为视线转移角速率  $d\lambda/dt$ ,方向垂直于视线转移平面  $(Oxy)_r$ ,即沿  $z_r$  轴方向,设这个方向上单位向量为  $k_r$ ,即  $\Omega = (d\lambda/dt) k_r$ 。

分析相对速度  $V_r$  的两个分量,可以发现平行视线方向的分量  $V_c$  的作用效果只会使弹目接近而不会引起视线的转动,相反,垂直于视线的分量  $V_n$  只会引起视线转动而不会使弹目接近,所以接近速度即为  $V_c$ ,视线角速率  $d\lambda/dt$  与  $V_n$  有直接的关系( $V_n$  可以由  $R \times V_r$  计算得到,所以  $\Omega$  也可以通过  $R \times V_r$  得到,后面将做严谨的理论推导)。导引律的两个输入参数  $V_c$  和  $d\lambda/dt$  可以通过分解相对速度得到,问题转化为空间矢量  $V_r$  的分解,这个问题可以通过矢量的点乘和叉乘运算解决。

由相对速度平行方向分解公式  $|V_c| = |V_r| |\cos\theta|$  和点积定义式得:

$$|V_c| = |R \cdot V_r| / |R| \quad (4)$$

由相对速度垂直方向分解公式  $|V_n| = |V_r| |\sin\theta|$  和叉积定义式得:

$$|V_n| = |R \times V_r| / |R| \quad (5)$$

指令加速度的目的是消除视线角速率,而视线角速率又是由  $V_n$  引起的,所以指令加速度的作用是尽早让拦截导弹产生一个与  $V_n$  同样的分速度,从而使这个方向的相对速度为零,只剩下接近速度  $V_c$ 。便可以命中目标,由此可知指令加速度  $a_M$  最好的情况是平行于  $V_n$ , $\Omega$  垂直于平面  $(Oxy)_r$ ,而  $V_n$  在平面  $(Oxy)_r$  内,所以  $\Omega$  垂直于  $V_n$ ,又因为  $a_M$  平行于  $V_n$ ,所以  $a_M$  垂直于  $\Omega$ ,同时还垂直视线  $R$ ,即垂直于  $V_c$ ,故  $a_M$  的方向即为  $V_c \times \Omega$  的方向。因为  $\Omega$  垂直于  $V_c$ ,所以  $|V_c \times \Omega| = |V_c| |\Omega| = |V_c| d\lambda/dt$ , $a_M$  不但方向满足  $V_c$  和  $\Omega$  的叉乘关系,大小也只差一个比例系数  $N$ ,所以真比例导引律可以写成矢量形式即:

$$a_M = N V_c \times \Omega \quad (6)$$

至此,本来二维平面内的导引律可以通过矢量的叉乘运算推广到三维空间内,这为三维空间研究制导律提供了方便,不需要解算三维空间复杂的三角函数关系。但是需要空间角度的时候,还是可以很容易的通过已经得到的运动状态的矢量计算得到。

### 2.3 指令加速度的矢量方程

建立矢量模型就是舰空导弹和来袭的反舰导弹的位移、速度和加速度等运动参数均用矢量表示,矢量参数又可以用三维坐标表示。经过矢量计算来确定导引律中用到的相对运动参数,用空间单位向量来表示参数的方向,矢量的模长来表示参数的标量值,将相对运动参数代入导引律的矢量方程直接得到指令加速度的矢量方程。根据矢量运算方法,指令加速度可由三维矢量坐标运算得到。

设反舰导弹质量为  $m$ , 动量为  $P = mV_r$ , 相对于原点  $O_r$  的角动量为  $L$ , 用速度表示:

$$L = R \times P = mR \times V_r \quad (7)$$

其相对于原点的转动惯量为  $I$ , 矢量  $R$  的转动角速度为  $\Omega$ , 根据转动惯量定义  $I = mR^2$ , 则角动量  $L$  用角速度表示:

$$L = I\Omega = mR^2\Omega \quad (8)$$

由式(7)和式(8)两式得,  $mR \times V_r = mR^2\Omega$ , 则  $\Omega$  的矢量计算公式为:

$$\Omega = R \times V_r / R^2 \quad (9)$$

$R$  方向的单位矢量为:

$$e_r = R / |R| \quad (10)$$

$V_c$  方向与  $R$  平行, 方向相反, 所以有:

$$V_c = -|V_c|e_r = -\frac{|V_c|}{|R|}R \quad (11)$$

将式(4)代入式(11), 得:

$$V_c = -\frac{|R \cdot V_r|}{|R|^2}R \quad (12)$$

将式(9)、式(12)代入导引律矢量方程(6), 得:

$$a_m = -\frac{N|R \cdot V_r|}{|R|^4}R \times (R \times V_r) \quad (13)$$

下面分析  $R \cdot V_r$  的符号问题, 若结果为正的, 接近速度  $V_c$  与视线方向  $R$  方向相同, 弹目距离会越来越大, 这种情况下导弹追不上目标, 仅存在弹目同向运动的追击模型中, 而文中研究的是弹目相向运动的拦截模型, 所以  $R \cdot V_r$  的符号一直都是负的, 去掉绝对值符号后, 方程为:

$$a_m = \frac{N(R \cdot V_r)}{|R|^4}R \times (R \times V_r) \quad (14)$$

加速度和速度、速度和位移的关系:

$$dV_m/dt = a_m \quad (15)$$

$$dR_m/dt = V_m \quad (16)$$

设舰空导弹初始状态的位移和速度  $R_{m0}$ 、 $V_{m0}$ , 目标的运动状态参数  $R_T$ 、 $V_T$  是某种时间函数, 其初始状态为  $R_{T0}$ 、 $V_{T0}$ , 根据式(1)、式(2)两者做矢量差运算得到相对运动参数  $R$ 、 $V_r$ , 代入式(14)后得到导弹的

指令加速度, 假设导弹导引控制系统工作在理想状态下, 其加速度即为指令加速度, 可以通过数值积分的方法计算出任意时刻舰空导弹的运动状态。

### 3 仿真分析

在地面坐标系中, 目标沿  $x$  轴负方向做匀速直线运动, 初始位置坐标  $(7000, 10, 20)$  m, 初始速度  $(-300, 0, 0)$  m/s;

我方舰空导弹初

始位置坐标  $(0, 0, 0)$  m, 初始速度  $(700, 400, 200)$  m/s。仿真步长  $0.01$  s, 有效导航比  $N = 4$ 。

仿真得到导弹目标弹道如图3所示, 舰空导弹的弹道几乎在一个斜平面内, 该平面的倾斜方向与目标和导弹的初始状态有关, 目标弹道是一条平行  $x$  轴的直线。

视线、视线角速度、导弹的加速度和速度矢量4个弹道参数的变化曲线图分别如图4~图11所示。为了直观表现矢量参数的变化, 对每个矢量参数分别绘制平面图和矢量图, 平面图中左侧为分量图、右侧为标量图。分量图中,  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴上的3个分量分别用虚线、点划线、点线表示, 标量图即矢量的模长大小图, 用实线表示。矢量图中每隔  $0.5$  s 绘制一次起点在原点的矢量, 同时绘出矢量终点的运动轨迹, 方向用箭头表示, 原点到终点的距离即是矢量参数的标量值。

图4~图5中, 视线矢量的标量值随着弹目距离的接近而减小, 视线方向由斜向上转向斜向下, 近似在一个斜平面内转动, 矢量线从稀疏变得越来越密集, 说明视线的转动速度在减慢。图6~图7中, 视线角速度大小单调减小至零, 方向斜向上几乎不变。图7中视线角速度矢量方向与图5中视线的旋转方向符合旋转矢量的右手螺旋定则, 图6视线角速度矢量模长的减小也和图4视线转动减慢相符。

导弹加速度大小单调减小至零, 方向斜向下, 如图8~图9所示。图10中速度模长减小到3s后基本保持不变, 速度模长减小放缓和图8中加速度减小相符, 图11中导弹速度方向由斜向上转向斜向下。速度在  $x$  轴分量基本保持初始值不变,  $y$ 、 $z$  轴分量是影响导弹能否成功命中的主要因素, 在导引律的作用下, 方向发生了逆转, 所以导弹在这两个方向上最终的运动方向将和刚开始时的方向相反, 这和图3中的弯曲的弹道相吻合。

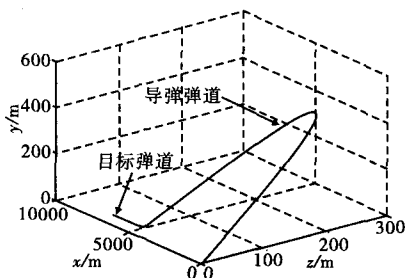


图3 导弹与目标弹道

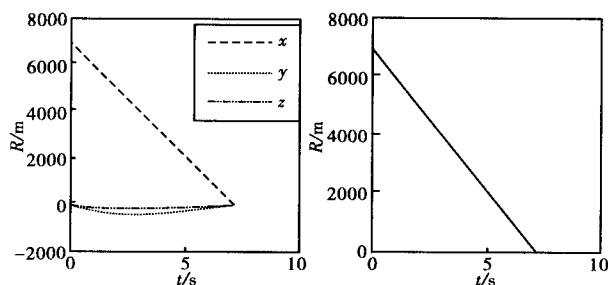


图 4 视线平面图

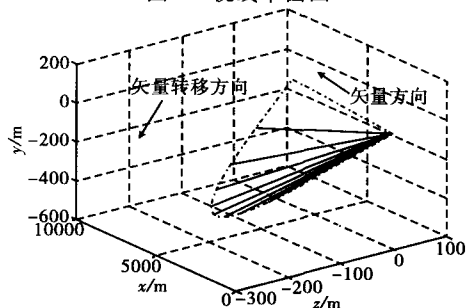


图 5 视线矢量三维图

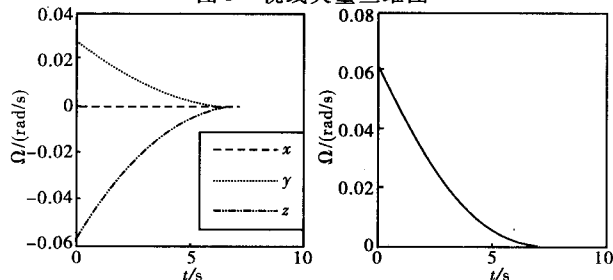


图 6 视线角速度平面图

对比文献[3-6]的仿真结果可以看出,基于矢量运算的弹道仿真方法简单实用,可以更全面的反映三维弹道参数变化情况,既能表示弹道参数大小的变化,也能直观的展示其方向的变化,这为进一步研究存在干扰等复杂情况下采用真比例导引导弹的命中精度提供了仿真方法。

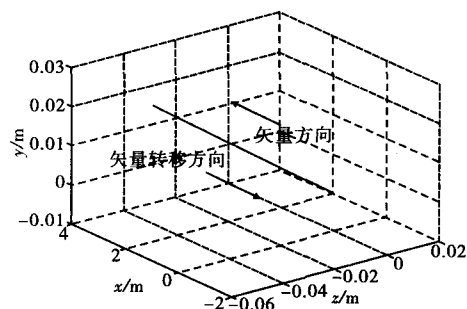


图 7 视线角速度矢量三维图

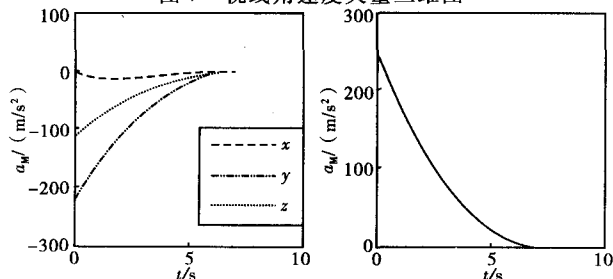


图 8 加速度平面图

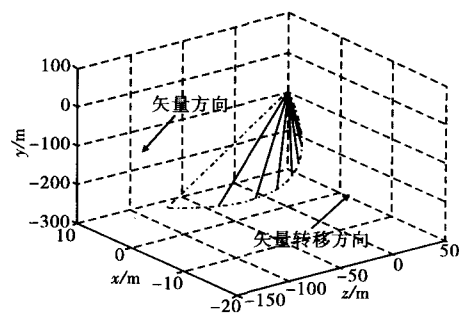


图 9 加速度矢量三维图

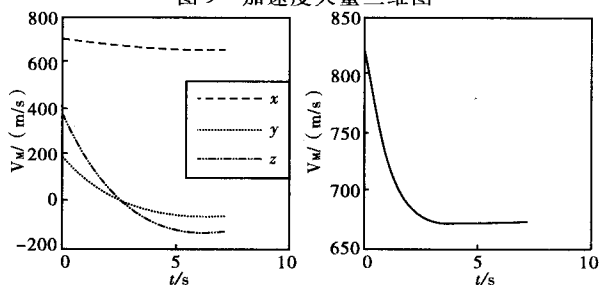


图 10 速度平面图

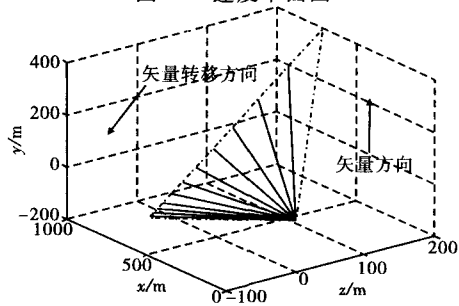


图 11 速度矢量三维图

## 4 结论

Matlab 仿真结果说明仿真方法的有效性和实用性,可以看出矢量运算方法仿真三维弹道相对于传统的解算空间角方法更简单直观,可广泛应用于更加复杂情况,方法具有通用性。文中将模型简单化,没有考虑导弹的动力学特性、目标机动和干扰等实际因素,因此弹道过于理想,需要做进一步研究分析。

### 参考文献:

- [1] George M Siouris. Missile guidance and control system[M]. New York: Springer-Verlag Inc., 2004.
- [2] 雷虎民. 导弹制导与控制原理[M]. 北京:国防工业出版社, 2006.
- [3] 张建伟, 黄树彩, 韩朝超. 基于 Matlab 的比例导引弹道仿真分析[J]. 战术导弹技术, 2009(3): 60-64.
- [4] 欧军瑜, 李刚, 高忠长. 基于 Matlab 的防空导弹三维弹道仿真[J]. 火力指挥与控制, 2010, 35(2): 166-168.
- [5] 赵蕴杰, 曹迎春, 张青斌, 等. 基于 Matlab 的三维动态弹道仿真研究[J]. 计算机仿真, 2007, 24(6): 57-61.
- [6] 李军林, 袁湛. 三维修正比例导引弹道仿真研究[J]. 机械管理开发, 2009, 24(2): 161-162.