

Lý thuyết 4: Chia để trị

Công thức chia để trị có dạng

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^k \log^p n)$$

với $a \geq 1, b > 1, k \geq 0$ và số thực p .

Bài tập tại lớp

Ex 1:

Áp dụng công thức chia để trị với $a = 5, b = 2, k = 1, p = 1$.

$$T(n) = 5T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

Vì $a > b^k$, nên độ phức tạp là $T(n) = \Theta(n^{\log_2 5})$.

Ex 2:

$$T(n) = 2T(n-1) + \Theta(1)$$

Ta có $a = 2, b = 1, k = 0$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^k \log^p n) = \Theta(n^0 \log^{0+1} n) = \Theta(\log n)$$

Ex3:

$a = 9, b = 3, k = 0, p = 2$

Vì $a > b^k$, áp dụng công thức ta có:

$$T(n) = \Theta(n^{\log_3 9}) = \Theta(n^2)$$

Ex4:

Công thức đệ quy như sau:

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$

với điều kiện dừng là $n \leq 1$

Ta có: $a = 2, b = 2, k = 0$

Vì $a > b^k$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n)$$

Bài tập vận dụng

Ex1:

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

Ta có: $a = 3, b = 2, k = 2, p = 0$

$$b^2 = 2^2 = 4 \Rightarrow a = 3 < b^k = 4$$

$$p = 0$$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$$

Ex2:

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$$

Ta có: $a = 4, b = 2, k = 2, p = 0$

$$b^2 = 2^2 = 4 \Rightarrow a = 4 = b^k$$

$$p = 0 > -1$$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_2 4} \log^{0+1} n) = \Theta(n^2 \log n)$$

Ex3:

$$T(n) = 16T\left(\frac{n}{4}\right) + n$$

Ta có: $a = 16, b = 4, k = 1, p = 0$

$$a = 16 > b^1 = 4$$

$$p = 0 > -1$$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_4 16}) = \Theta(n^2)$$

Ex4:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{\log n}$$

Ta có: $a = 2, b = 2, k = 1, p = -1$

$$a = 2 = b^k = 2^1$$

$$p = -1$$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_2 2} \log \log n) = \Theta(n \log \log n)$$

Ex5:

$$T(n) = \sqrt{2}T\left(\frac{n}{2}\right) + \log n$$

Ta có: $a = \sqrt{2}, b = 2, k = 0, p = 1$

$$a = \sqrt{2} > b^k = 1$$

$$p = 1 > 0$$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_2 \sqrt{2}}) = \Theta(\sqrt{n})$$

Ex6:

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + \sqrt{n}$$

Ta có: $a = 3, b = 3, k = 1/2, p = 0$

$$a = 3 > b^k = \sqrt{3}$$

$$p = 0$$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_3 3}) = \Theta(n)$$