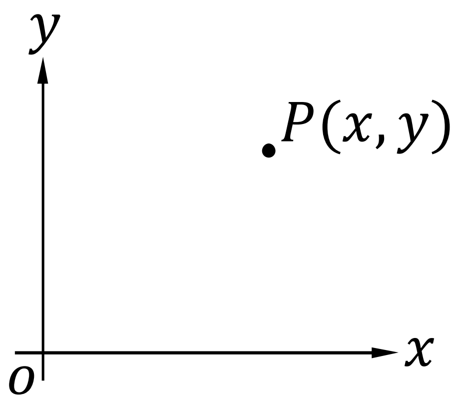
บทที่ 6
พิกัดเชิงขั้ว (Polar Coordinate)

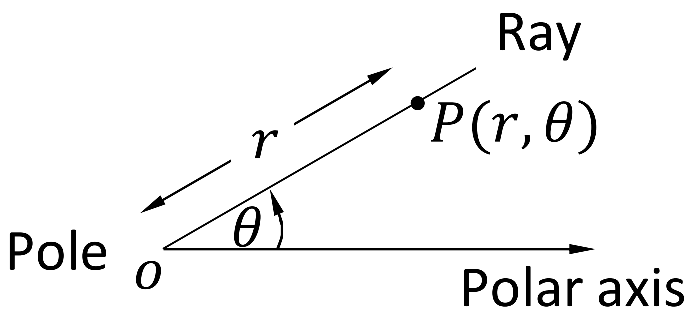
6.1 จุดในระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดเชิงขั้ว

6.1.1 ระบบพิกัดฉาก



การระบุตำแหน่งของจุด P บนระนาบทำได้โดยการอ้างอิงตำแหน่งของจุด P กับแกนพิกัด 2 แกนที่ตั้งฉากกัน และเขียนแทนด้วยพิกัด $P(x, y)$

6.1.2 ระบบพิกัดเชิงขั้ว



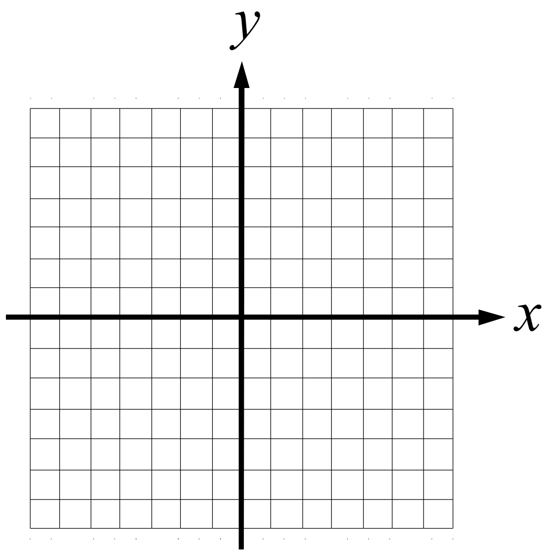
การระบุตำแหน่งของจุด P บนระนาบจะอาศัยระบบพิกัดฉากโดยให้จุดกำเนิด O แทน **pole** (ขั้ว) และให้แกน x ทางด้านบวกที่ผ่านจุด O แทน **polar axis** (แกนเชิงขั้ว) หรือ **initial ray** (เส้นรังสีเริ่มต้น)

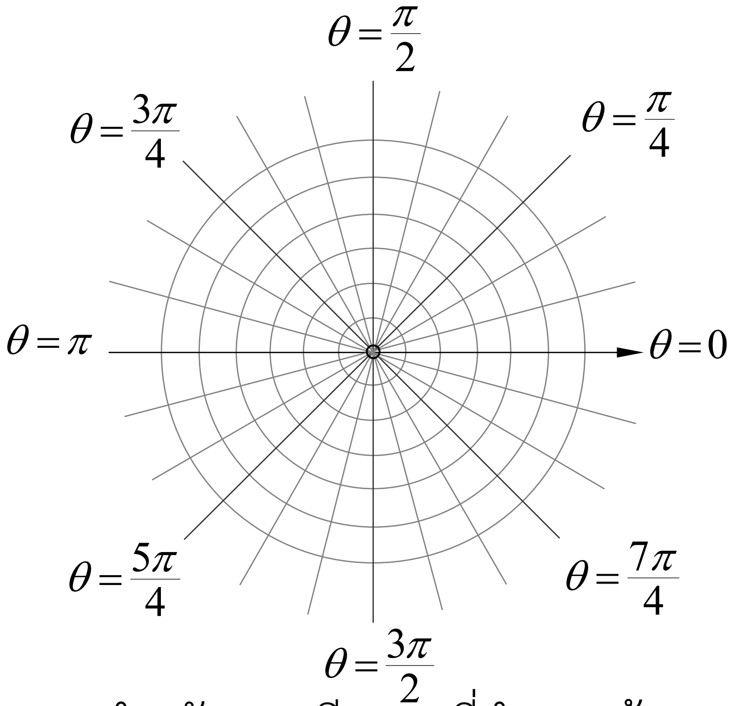
ถ้า P เป็นจุดใดๆในระนาบพิกัดเชิงขั้ว เราสามารถระบุตำแหน่งของจุด P ได้ด้วยคู่อันดับในรูป (r, θ) โดยที่

r เป็น directed distance จากจุด O ไปยังจุด P

θ เป็น directed angle ที่ส่วนของเส้นตรง(หรือเส้นรังสี) OP ทำกับ polar axis ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

6.2 Rectangular & Polar Coordinate Map





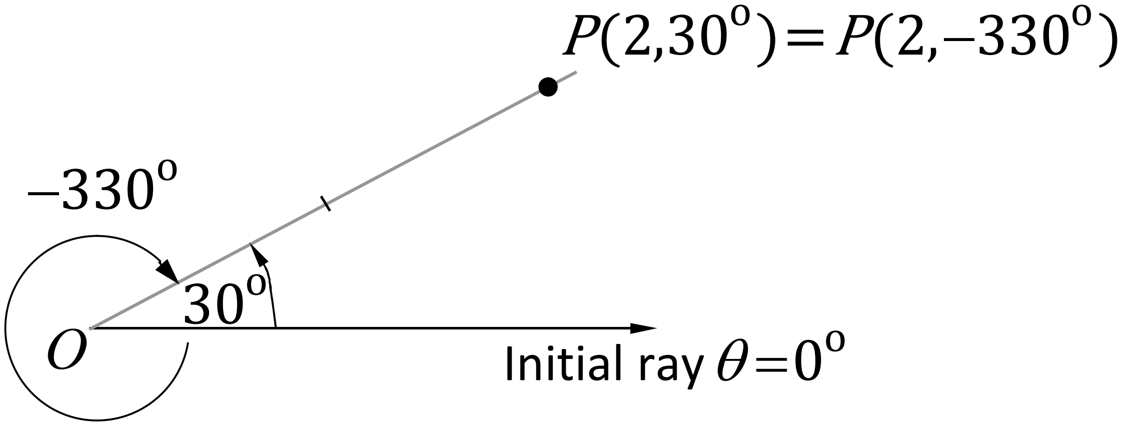
เราใช้ระบบ rectangular grid สำหรับการเขียนจุดที่กำหนดด้วยระบบพิกัดฉาก และใช้ระบบ polar grid ที่ประกอบด้วย*วงกลมรัศมี 1, 2, 3,... ที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกันที่ขั้ว(pole)* และ*เส้นรังสี (ray) ที่ผ่านขั้วและทำมุมต่างๆกัน* (เช่น $0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2},\ldots$) สำหรับการเขียนจุดที่กำหนดด้วยระบบพิกัดเชิงขั้ว

6.2.1 การวัดมุม θ

θ มีค่าเป็น**บวก** เมื่อวัดในทิศ**ทวนเข็ม**นาฬิกา

θ มีค่าเป็น**ลบ** เมื่อวัดในทิศ**ตามเข็ม**นาฬิกา

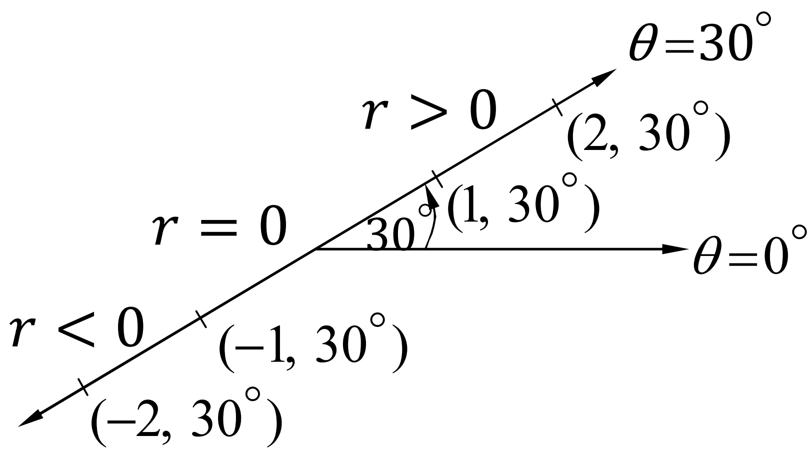
แต่มุม θ ที่ r ค่าหนึ่ง อาจมีได้หลายค่า เช่น จุด P อยู่ห่างจาก pole ไปตาม ray $\theta = 30^{\text{o}}$ จะมีพิกัดเชิงขั้วได้หลายค่า คือ $(2, 30^{\text{o}})$ และ $(2, -330^{\text{o}})$ ซึ่งทั้งสองจุดนี้แทนจุดเดียวกัน



6.2.2 การวัดระยะ r

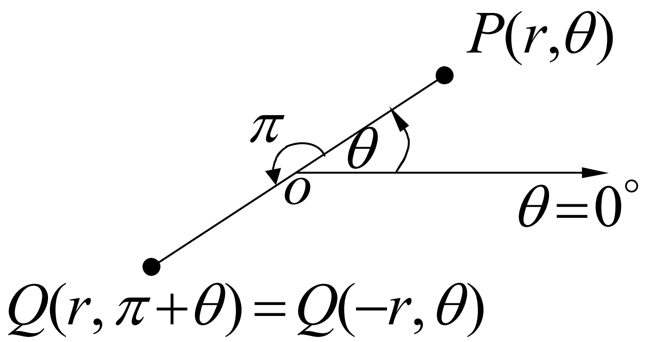
เนื่องจาก r เป็นระยะที่กำหนดทิศทางจากจุด O ไปยังจุด P ดังนั้นจะกำหนดให้

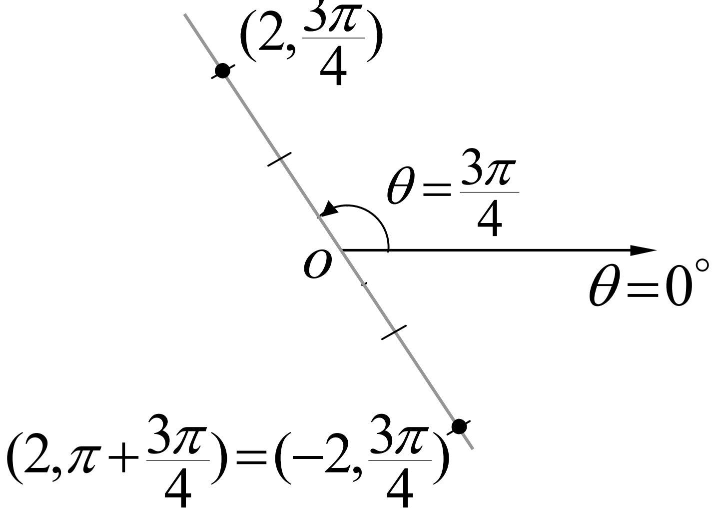
r มีเครื่องหมาย<u>**บวก**</u> เมื่อวัดจากขั้วไปตามเส้นที่ต่อจากจุด O ไปสิ้นสุดที่จุด P และมีเครื่องหมาย<u>**ลบ**</u> เมื่อวัดในทิศทางตรงข้าม



6.2.3 Negative values of r

กำหนด OP มีพิกัดเชิงขั้วที่ P เป็น (r,θ) และ OQ ทำมุม π กับ OP ดังนั้น พิกัดของ Q คือ $(r,\pi+\theta)$





จะเรียก OQ ว่าเป็น**<u>นิเสธ</u>**ของ OP และเขียนแทนด้วยพิกัด $(-r,\theta)$ นั่นคือ นิเสธของ r ก็คือ r ที่ทำมุม π กับ r เดิม

<u>หมายเหตุ</u> สิ่งที่แตกต่างกันระหว่าง*ระบบพิกัดฉาก*และ*ระบบพิกัดเชิงขั้ว* คือการกำหนดจุดในระบบพิกัดฉากจะเขียนพิกัดแทนจุดได้เพียง*<u>แบบเดียว</u>* ในขณะที่ระบบพิกัดเชิงขั้วสามารถเขียนพิกัดแทนจุดได้*<u>หลายแบบ</u>*

> โดยทั่วไปจุดในระบบพิกัดเชิงขั้วที่เป็นจุดเดียวกันกับ (r,θ) จะเขียนอยู่ในรูป $(r,\theta+2n\pi)$ หรือ $(-r,\theta+(2n+1)\pi)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

สำหรับพิกัดเชิงขั้วที่ pole จะเขียนอยู่ในรูป $(0,\theta)$ เมื่อ θ เป็นค่ามุม เช่น $(0,0),(0,\pi),(0,\frac{\pi}{4})$ หรืออื่นๆ ต่างแทนจุดที่ขั้ว

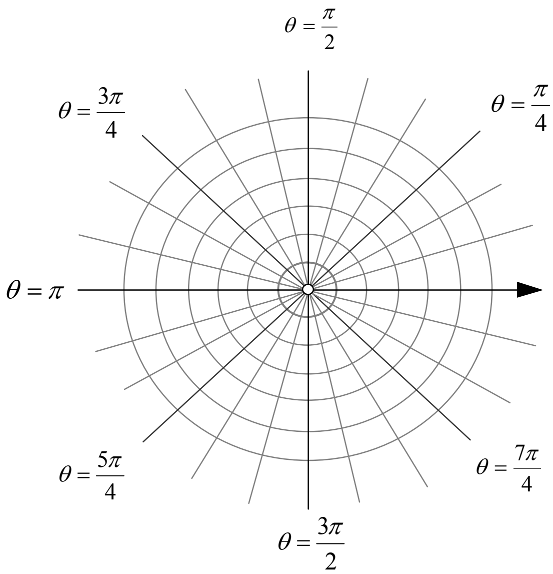
<u>ตัวอย่าง 1</u> จงกำหนดจุด $\left(-2,-\frac{\pi}{4}\right)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว และหาพิกัดเชิงขั้วแบบอื่นๆของจุดนี้ เมื่อ

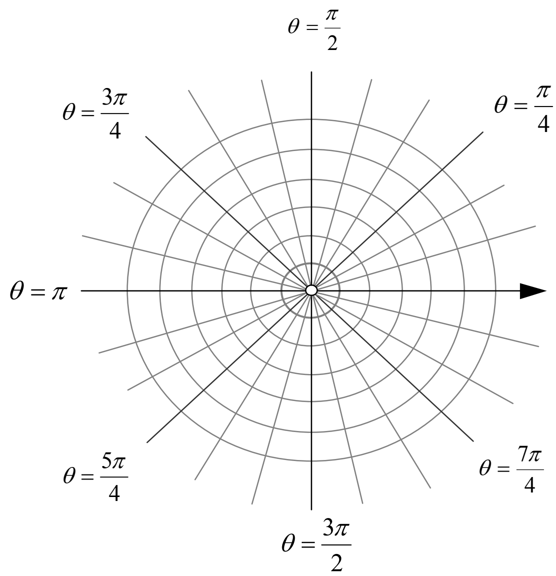
1) $r > 0$ และ $0 < \theta < 2\pi$

2) $r > 0$ และ $-2\pi < \theta < 0$

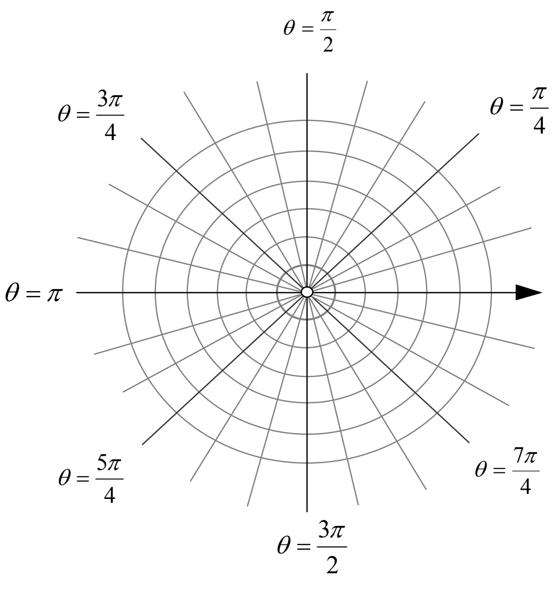
3) $r < 0$ และ $0 < \theta < 2\pi$

<u>วิธีทำ</u> ให้ P แทนจุดที่ต้องการของแต่ละเงื่อนไข

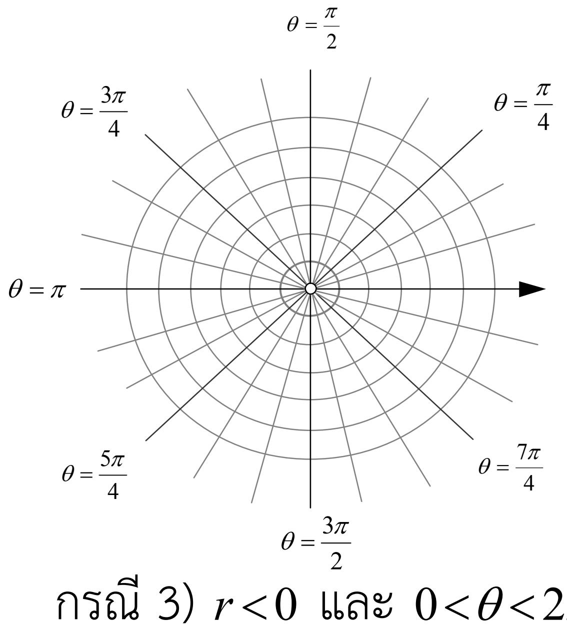




กรณี 1) $r>0$ และ $0<\theta<2\pi$



กรณี 2) $r>0$ และ $-2\pi<\theta<0$



กรณี 3) $r<0$ และ $0<\theta<2\pi$

ดังนั้น พิกัดเชิงขั้วของจุด $(-2,-\frac{\pi}{4})$ แบบอื่นๆ คือ

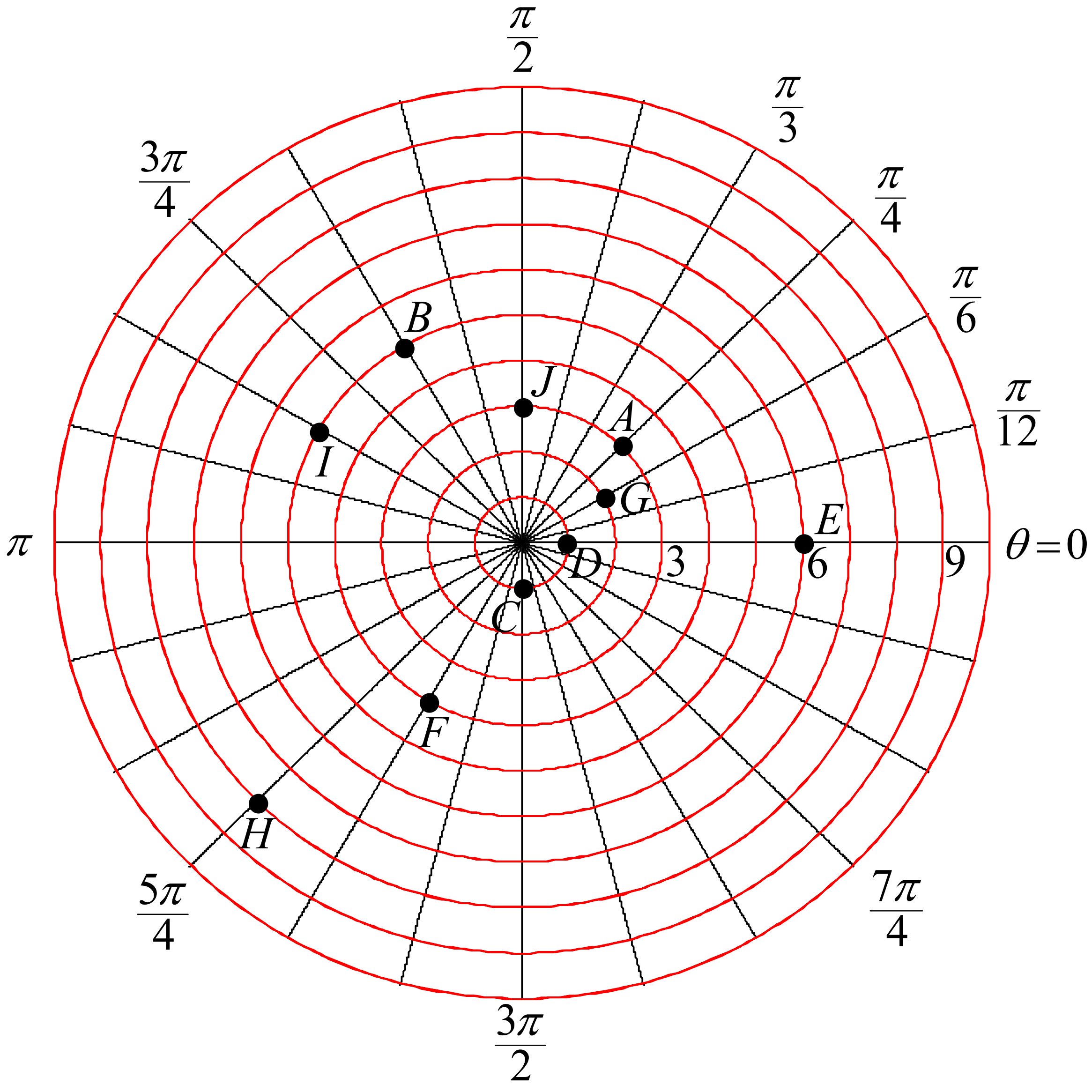
1) 2) 3)

<u>ตัวอย่าง 2</u> จงกำหนดจุดต่อไปนี้ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$A(3,\frac{\pi}{4})$ $B(5,\frac{2\pi}{3})$ $C(-1,\frac{\pi}{2})$ $D(1,0)$

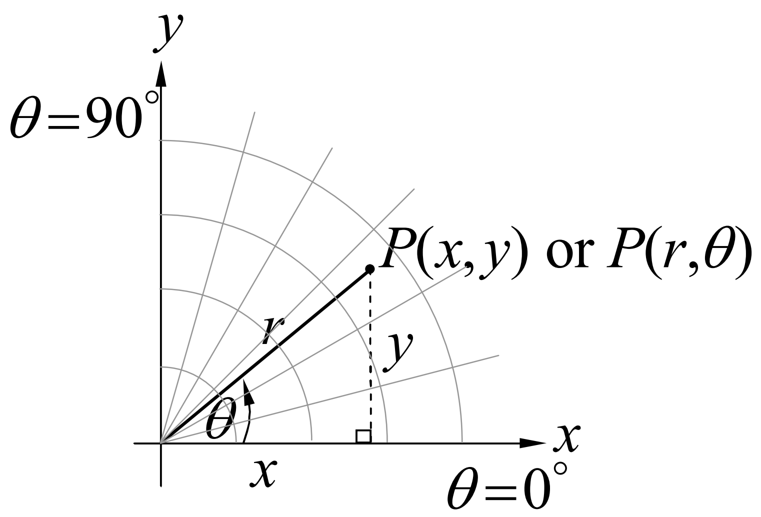
$E(-6,-\pi)$ $F(-4,\frac{\pi}{3})$ $G(2,-\frac{11\pi}{6})$ $H(-8,-\frac{7\pi}{4})$

$I(-5,-\frac{\pi}{6})$ $J(-3,\frac{3\pi}{2})$



6.3 ความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดเชิงขั้วและระบบพิกัดฉาก

ความสัมพันธ์ของระบบพิกัดทั้งสองจะใช้จุดกำเนิด และขั้วทับกัน



โดยให้แกนเชิงขั้วทับแกน x ทางด้านบวก และให้เส้นรังสี $\theta=\frac{\pi}{2}$ ทับแกน y ทางด้านบวก

ให้ (x,y) เป็น<u>พิกัดฉาก</u> และ (r,θ) เป็น<u>พิกัดเชิงขั้ว</u>ของจุด P ตามลำดับ และจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จะได้ว่า

$$\boxed{x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta} \qquad (1)$$

และ

$$\boxed{r^2=x^2+y^2, \quad \tan\theta=\frac{y}{x} \quad \text{if} \quad x\neq 0} \qquad (2)$$

- สมการ (1) ใช้หาจุดในระบบพิกัดฉาก เมื่อกำหนดจุด $P(r,\theta)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้วมาให้
- สมการ (2) ใช้หาจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกำหนดจุด $P(x,y)$ ในระบบพิกัดฉากมาให้

● ค่า θ หาได้จากสมการ $\tan\theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0$ ซึ่งจะได้ค่า θ ออกมา 2 ค่าเมื่อ $0 \le \theta \le 2\pi$ ถ้าค่า θ สอดคล้องกับจุดใน quadrant ที่เลือกให้กำหนด $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ แต่ถ้าเลือก θ อีกค่าหนึ่งให้กำหนด $r = -\sqrt{x^2 + y^2}$

<u>ตัวอย่าง 3</u> จงหาพิกัดฉากของจุดต่อไปนี้ เมื่อกำหนดพิกัดเชิงขั้วของจุดให้ดังนี้ 1) $(4, \frac{\pi}{3})$ 2) $(-2, \frac{3\pi}{4})$ 3) $(-3, -\frac{5\pi}{6})$

<u>วิธีทำ</u> ใช้สมการ (1) แปลงจากระบบพิกัดเชิงขั้วไปเป็นระบบพิกัดฉาก

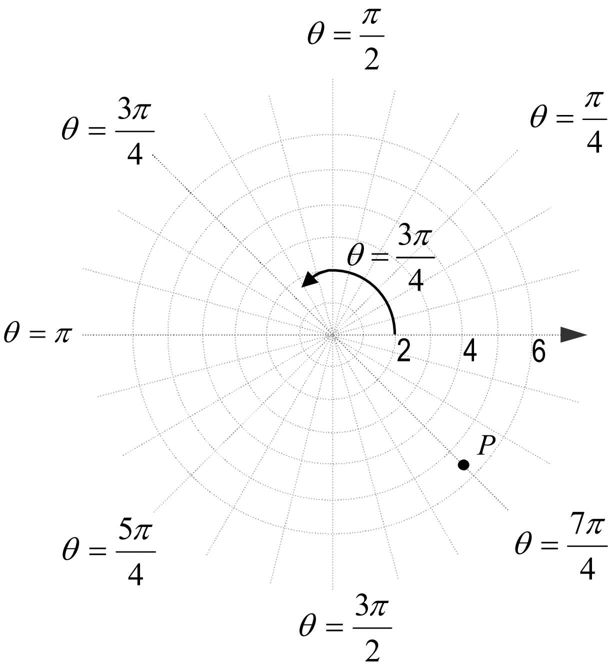
1)

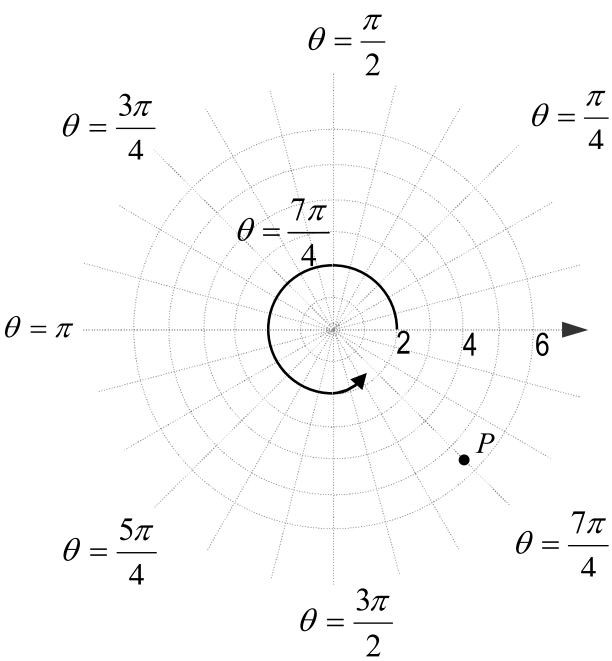
2)

3)

<u>ตัวอย่าง 4</u> จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุด P ที่มีพิกัดฉากเป็น $(4,-4)$

<u>วิธีทำ</u>





ตัวอย่าง 5 จงแปลงสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้ไปสู่ระบบพิกัดฉาก พร้อมทั้งอธิบายลักษณะกราฟ

1) $r = 2\cos\theta$ 2) $r = 2\sec\theta$

3) $r = \dfrac{4}{2\cos\theta + 3\sin\theta}$ 4) $r\cos(\theta - \frac{\pi}{3}) = 3$

วิธีทำ

1)

2)

3) จากสมการ $r = \dfrac{4}{2\cos\theta + 3\sin\theta}$

จะได้ $2r\cos\theta + 3r\sin\theta = 4$

ดังนั้น $2x + 3y = 4$ เป็นสมการที่ต้องการ

4) จากสมการ $r\cos(\theta - \frac{\pi}{3}) = 3$

โดยใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\cos(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

จะได้ว่า

$$r\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right) = 3$$

$$\frac{1}{2}r\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}r\sin\theta = 3$$

$$x + \sqrt{3}y = 6$$

<u>**ตัวอย่าง 6**</u> จงแปลงสมการในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้ไปสู่ระบบพิกัดเชิงขั้ว

1) $2xy = a^2$ 2) $x^2 = 2y$ 3) $x^2 + y^2 - 6x = 0$

<u>**วิธีทำ**</u>

1)

2)

3) จากสมการ $x^2+y^2-6x=0$

จะได้ว่า $(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2-6r\cos\theta=0$

$$r^2-6r\cos\theta=0$$

$$r(r-6\cos\theta)=0$$

ดังนั้น $r=0$ หรือ $r-6\cos\theta=0$

$$r=6\cos\theta$$

จาก $r=6\cos\theta$ จะเห็นว่า ถ้า $\theta=\frac{\pi}{2}$ แล้ว $r=0$

ดังนั้น $r=6\cos\theta$ เป็นสมการที่ต้องการ

6.4 Graph in Polar Coordinate

กราฟของสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$r = f(\theta) \qquad \text{หรือ} \qquad F(r,\theta) = 0$$

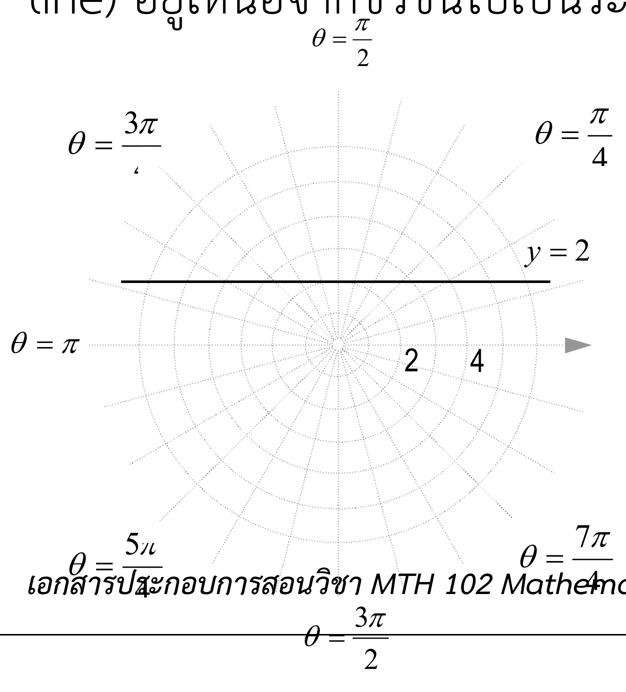
จะประกอบด้วยเซตของจุด (r,θ) ต่างๆที่สอดคล้องกับสมการเชิงขั้ว ซึ่งการเขียนกราฟของสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว ทำได้ดังนี้

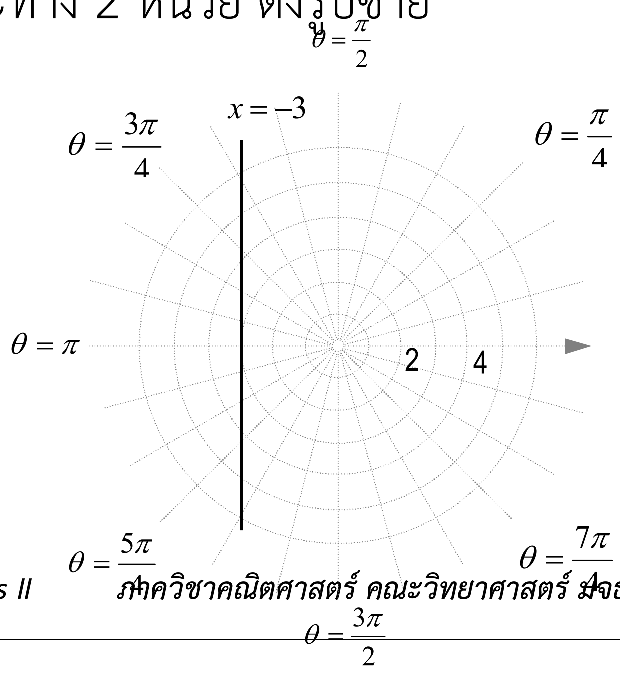
1. เขียนกราฟโดยการแปลงสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วไปสู่ระบบพิกัดฉากที่เราทราบกราฟและสามารถเขียนกราฟได้โดยง่าย หรือ
2. เขียนกราฟโดยการกำหนดจุด (r,θ) ที่สอดคล้องกับสมการเชิงขั้ว

<u>ตัวอย่าง 7</u> (Lines in Polar Coordinates)

Explain and sketch the graph of $r\sin\theta = 2$ and $r\cos\theta = -3$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $y = r\sin\theta$ ดังนั้น สมการ $r\sin\theta = 2$ สามารถเขียนได้ในรูป $y = 2$ ซึ่งเป็นสมการเส้นตรงในแนวนอน (horizontal line) อยู่เหนือจากขั้วขึ้นไปเป็นระยะทาง 2 หน่วย ดังรูปซ้าย



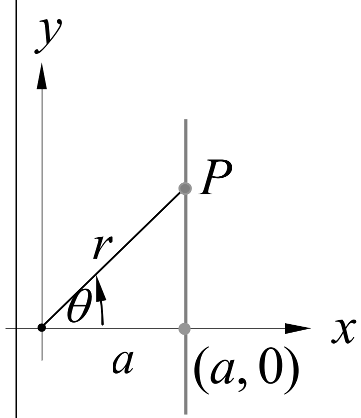


และเนื่องจาก $x = r\cos\theta$ ดังนั้น สมการ $r\cos\theta = -3$ สามารถเขียนได้ใหม่ในรูป $x = -3$ ซึ่งเป็นสมการเส้นตรงในแนวตั้ง (vertical line) อยู่ห่างจากขั้วไปทางซ้ายเป็นระยะทาง 3 หน่วย ดังรูปขวา

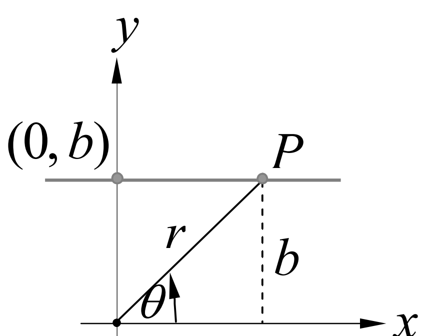
<u>สรุป</u>

สมการเส้นตรง	**พิกัดฉาก**	**พิกัดเชิงขั้ว**
Horizontal Line	$y = b$	$r\sin\theta = b$
Vertical Line	$x = a$	$r\cos\theta = a$

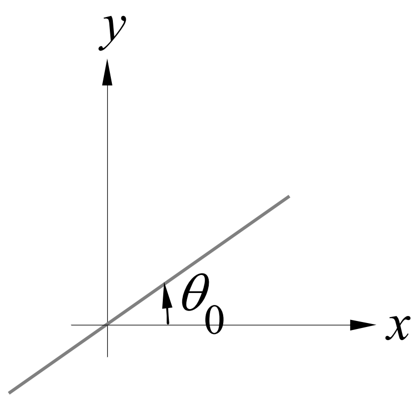
<u>หมายเหตุ</u> สำหรับสมการ $\theta = \theta_0$ ในระบบพิกัดเชิงขั้วก็คือ สมการเส้นตรงที่ผ่าน pole และทำมุม θ_0 กับ polar axis



$r\cos\theta = a$



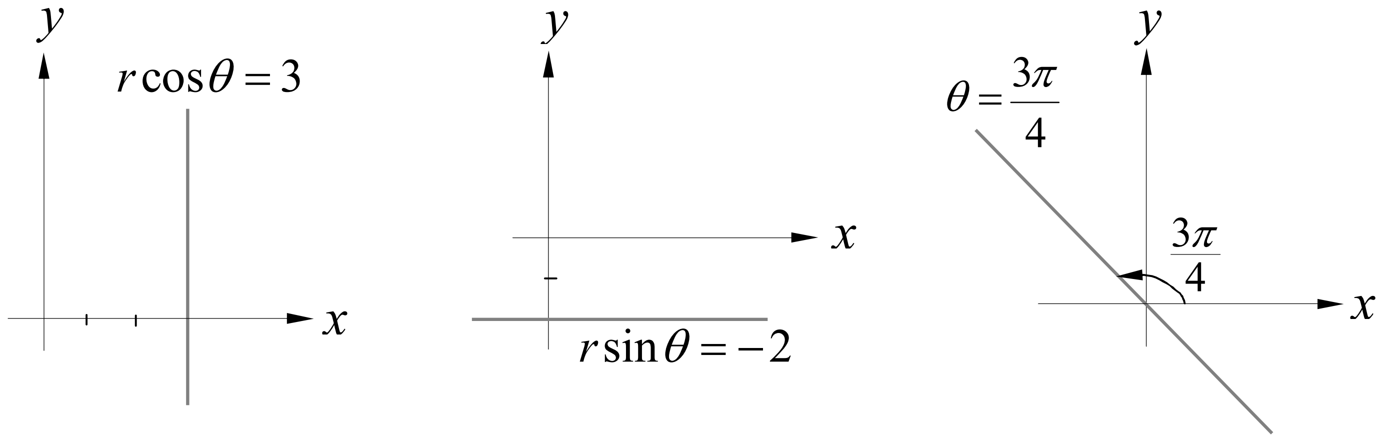
$r\sin\theta = b$



$\theta = \theta_0$

<u>ตัวอย่าง 8</u> จงวาดกราฟ

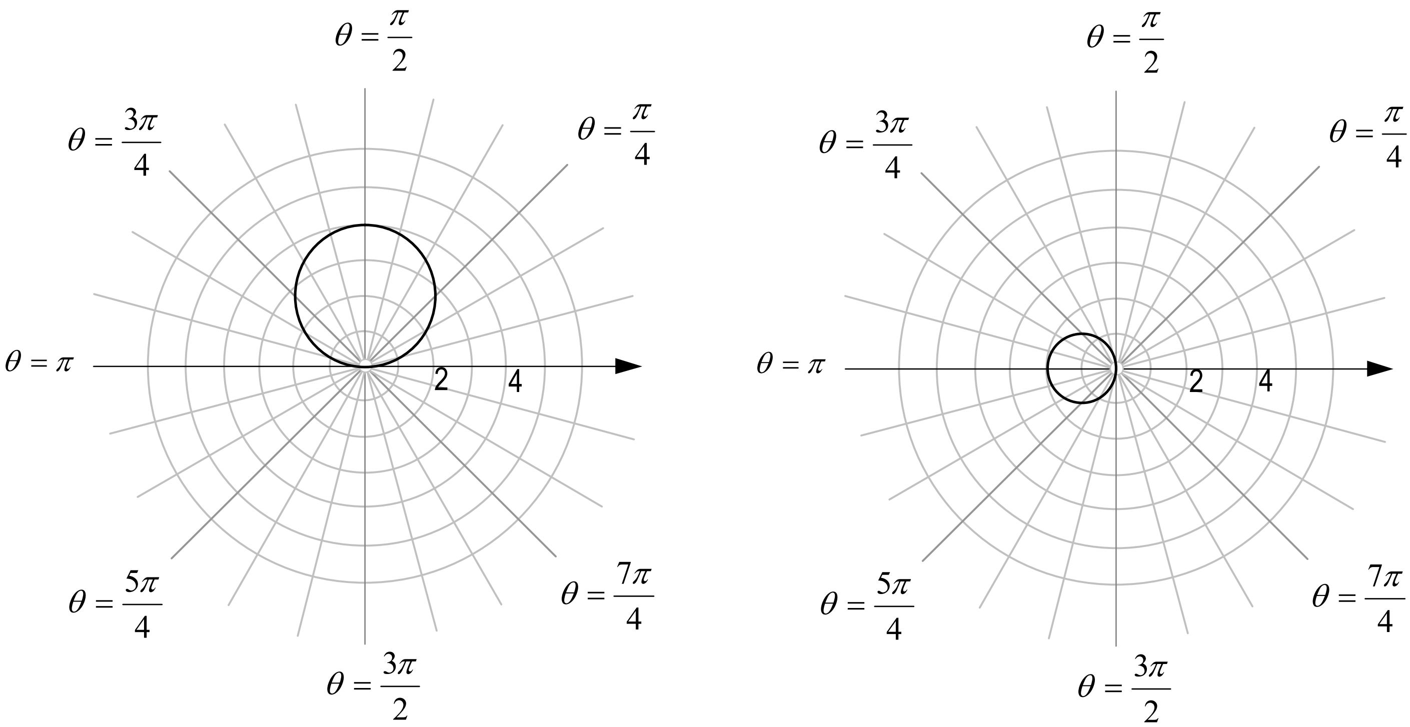
a) $r\cos\theta = 3$ b) $r\sin\theta = -2$ c) $\theta = \frac{3\pi}{4}$



<u>ตัวอย่าง 9</u> (Circles in Polar Coordinates)

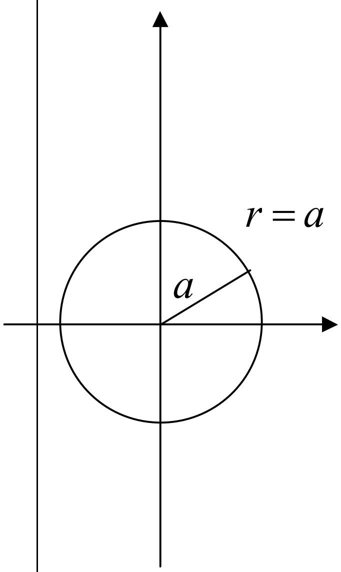
Explain and sketch the graph of $r = 4\sin\theta$ and $r = -2\cos\theta$

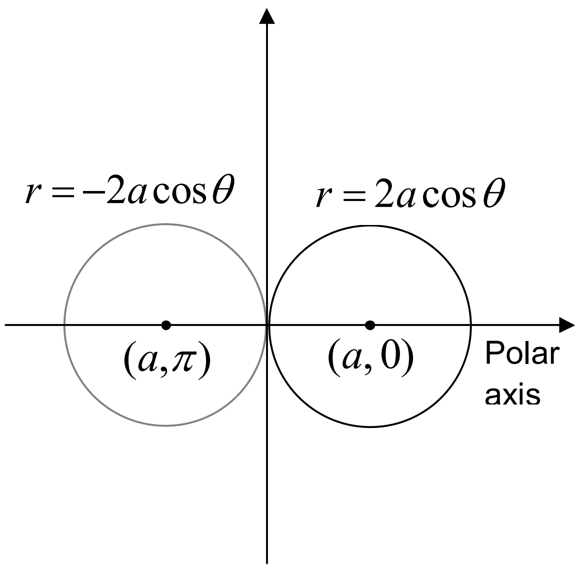
<u>วิธีทำ</u>

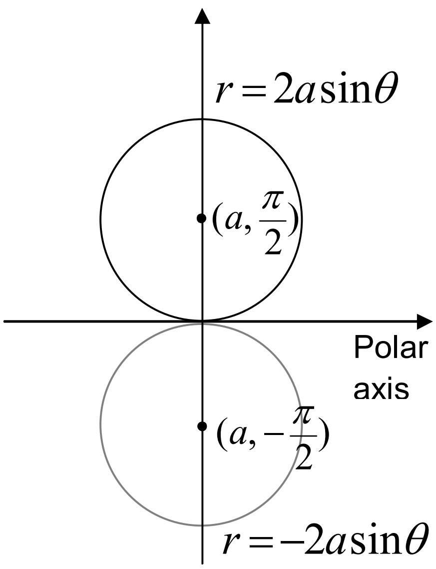


<u>สรุป</u>

สมการวงกลมรัศมี a หน่วย $(a>0)$	จุดศูนย์กลาง	
	ระบบพิกัดฉาก	ระบบพิกัดเชิงขั้ว
$r=2a\sin\theta$	$(0,a)$	$(a,\frac{\pi}{2})$
$r=-2a\sin\theta$	$(0,-a)$	$(a,-\frac{\pi}{2})$
$r=2a\cos\theta$	$(a,0)$	$(a,0)$
$r=-2a\cos\theta$	$(-a,0)$	(a,π)
$r=a$	origin	pole







<u>แบบฝึกหัด</u> จงวาดกราฟของสมการต่อไปนี้

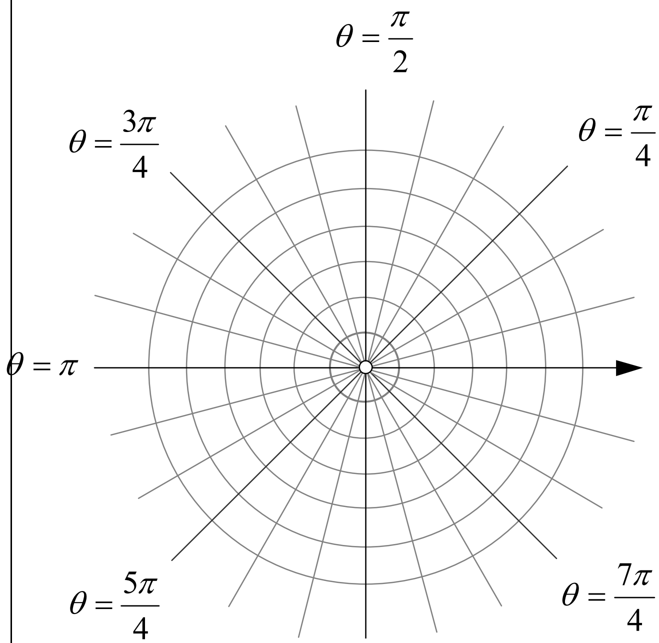
ก) $r=4\cos\theta$ ข) $r=-5\sin\theta$ ค) $r=3$

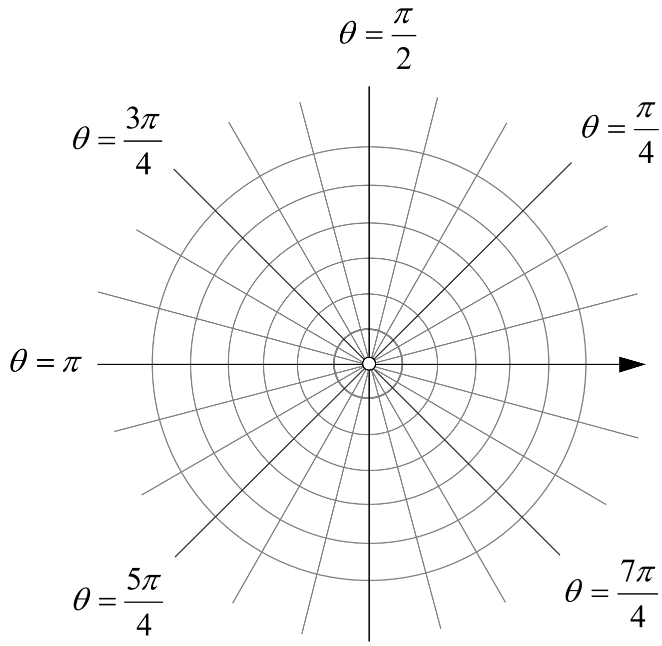
<u>ตัวอย่าง 10</u> จงวาดกราฟในระบบพิกัดเชิงขั้วที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

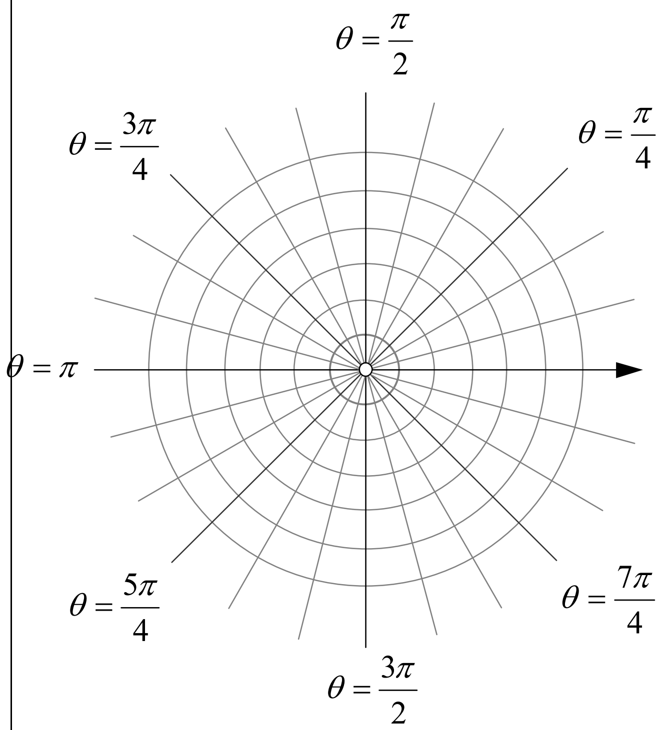
ก) $1 \le r \le 2$ และ $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ ข) $-3 \le r \le 2$ และ $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

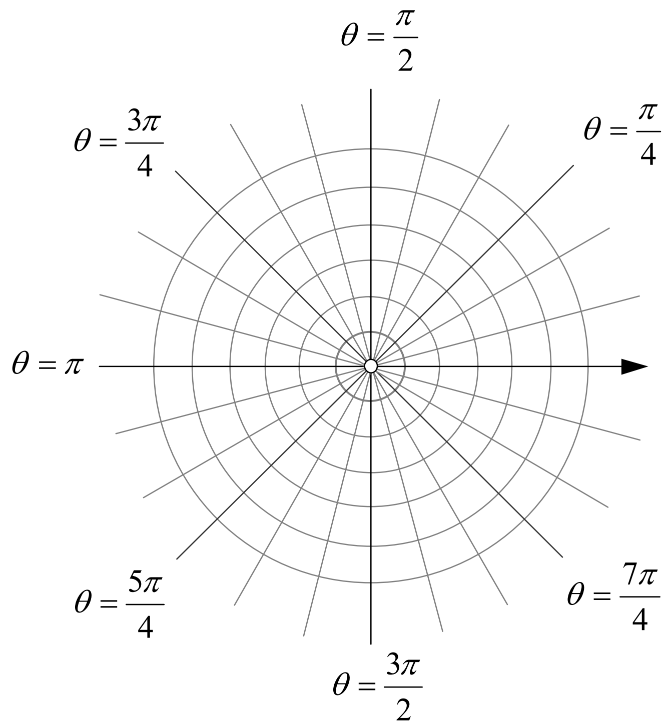
ค) $r \le 0$ และ $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

ง) $\dfrac{2\pi}{3} \le \theta \le \dfrac{3\pi}{4}$ (no restriction on r)





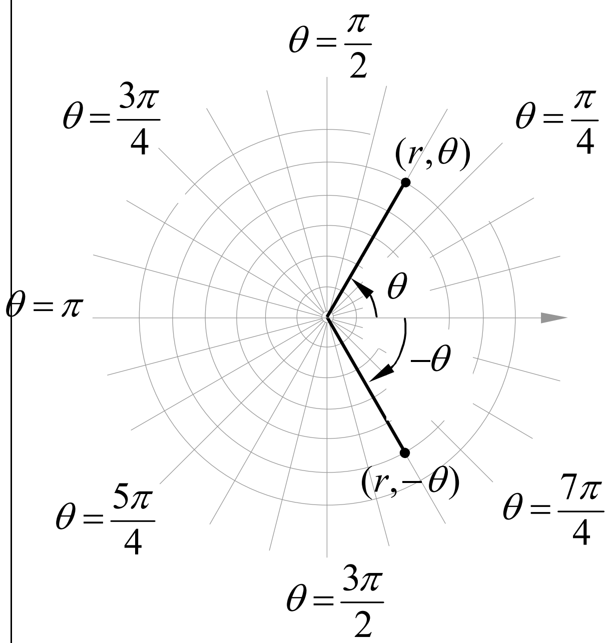


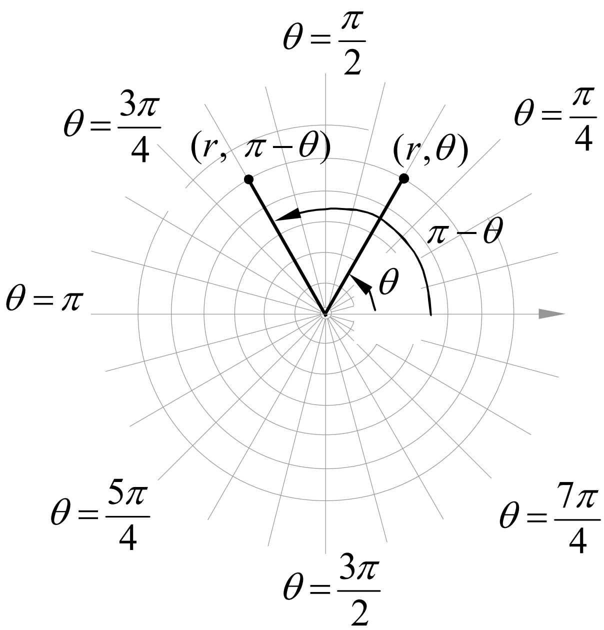


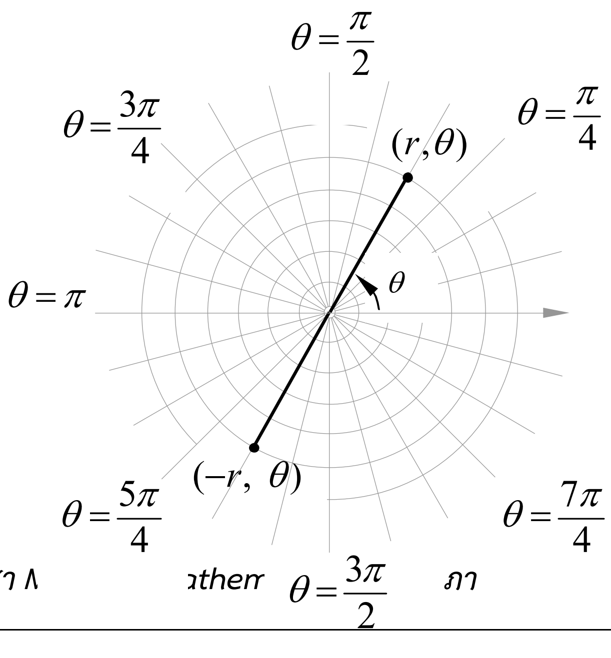
6.5 Symmetry Tests for Graphs

การพิจารณาการสมมาตรของกราฟของสมการเชิงขั้ว จะช่วยให้เราเขียนกราฟในระบบพิกัดเชิงขั้วได้ง่ายขึ้น

Symmetry with respect to	**The polar equation is unchanged if replacing**
Polar axis (x-axis)	θ by $-\theta$
Line $\theta=\frac{\pi}{2}$ (y axis)	θ by $\pi-\theta$
Pole (origin)	r by $-r$







6.6 กราฟของสมการเชิงขั้วที่ควรรู้จัก

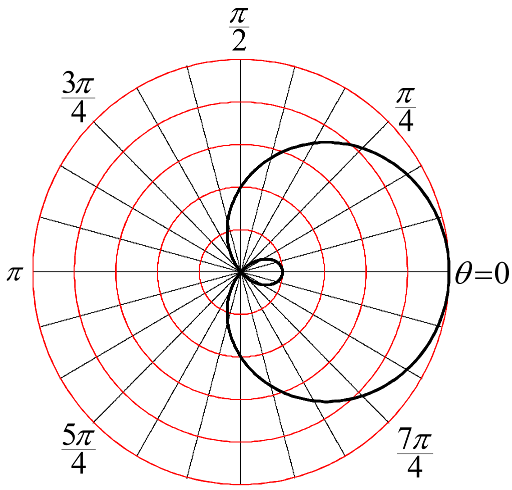
1. ลีมาซอง (Limaçon) และคาร์ดิออยด์ (Cardioids)

ลีมาซองเป็นกราฟของสมการเชิงขั้ว ที่อยู่ในรูป

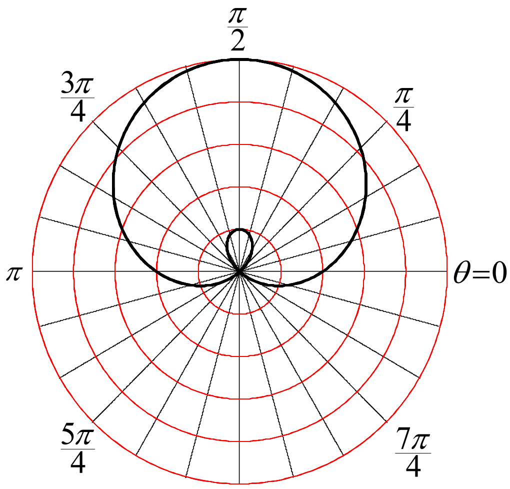
$$\boxed{r = a \pm b\cos\theta} \quad \text{หรือ} \quad \boxed{r = a \pm b\sin\theta}$$

เมื่อ $a > 0$ และ $b > 0$ ซึ่งมีอยู่ 4 รูปแบบด้วยกัน ขึ้นอยู่กับค่าอัตราส่วนของ $\frac{a}{b}$ ดังนี้

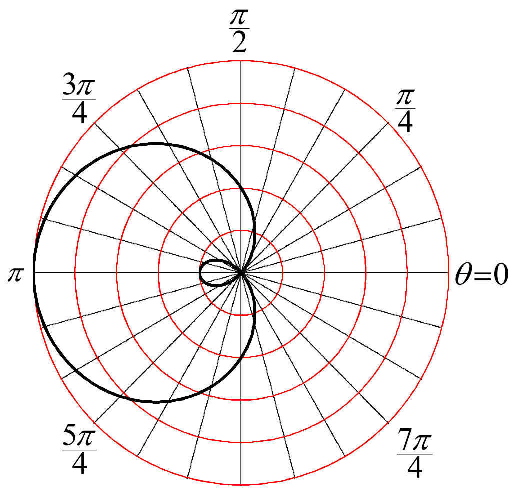
1.1 Limaçon with inner loop ($\frac{a}{b} < 1$)



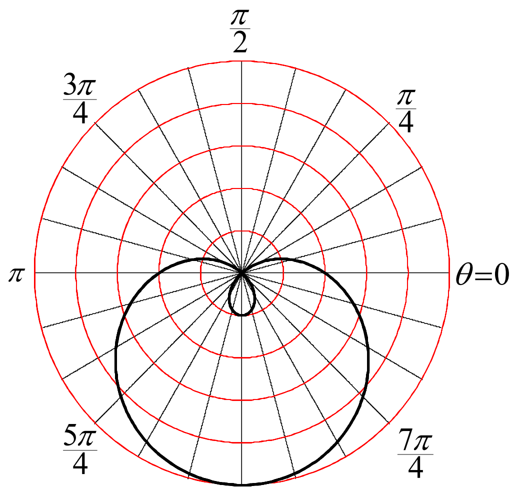
$r = 2 + 3\cos\theta$



$r = 2 + 3\sin\theta$



$r = 2 - 3\cos\theta$



$r = 2 - 3\sin\theta$

<u>ตัวอย่าง 11</u> Sketch the curve of $r = 1 + 2\cos\theta$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาการสมมาตรของกราฟ $r = 1 + 2\cos\theta$ ①

1) แทน θ ด้วย $-\theta$ ในสมการ ① :

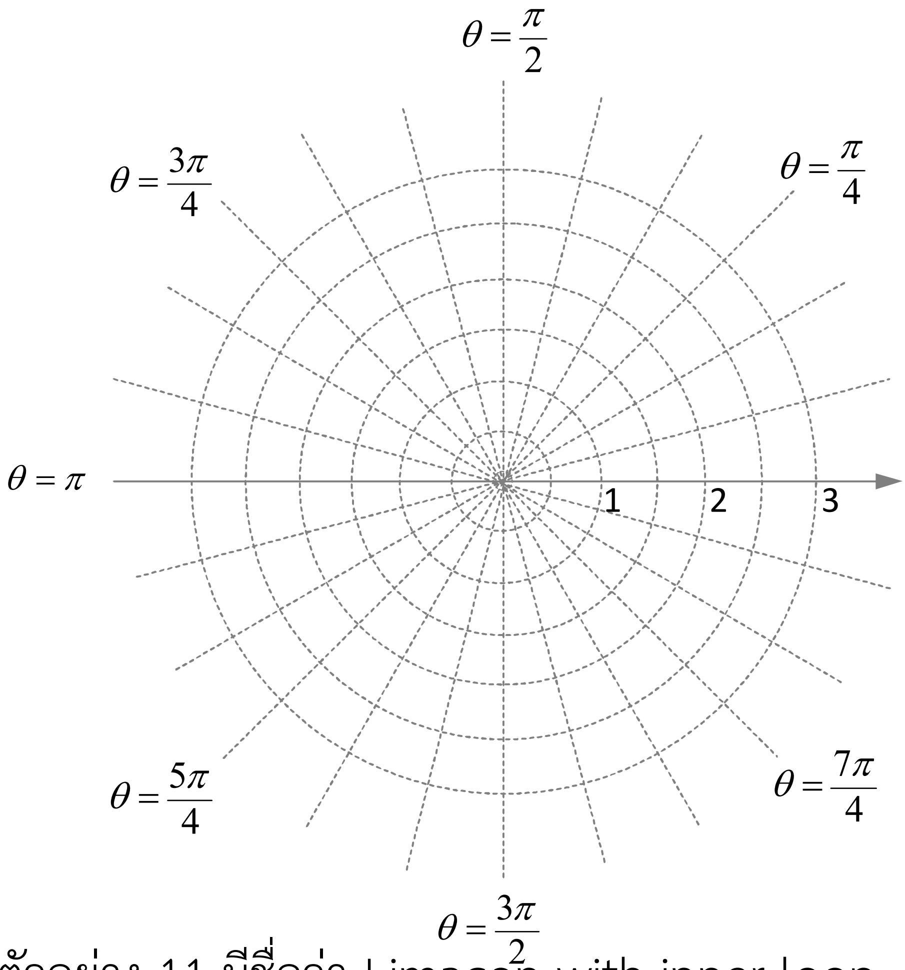
2) แทน θ ด้วย $\pi - \theta$ ในสมการ ① :

3) แทน r ด้วย $-r$ ในสมการ ① :

จะเห็นว่าสมการเปลี่ยน ดังนั้น กราฟไม่มีสมมาตรกับ pole

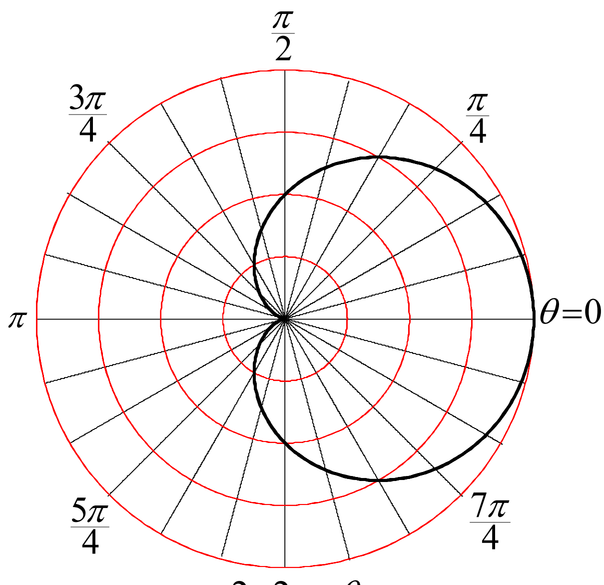
พิจารณาค่า r เมื่อ θ มีค่าระหว่าง 0 ถึง 2π ดังตารางต่อไปนี้

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
r	3	$1+\sqrt{3}$	2	1	0	$1-\sqrt{3}$	-1	$1-\sqrt{3}$	0	1	2	$1+\sqrt{3}$	3

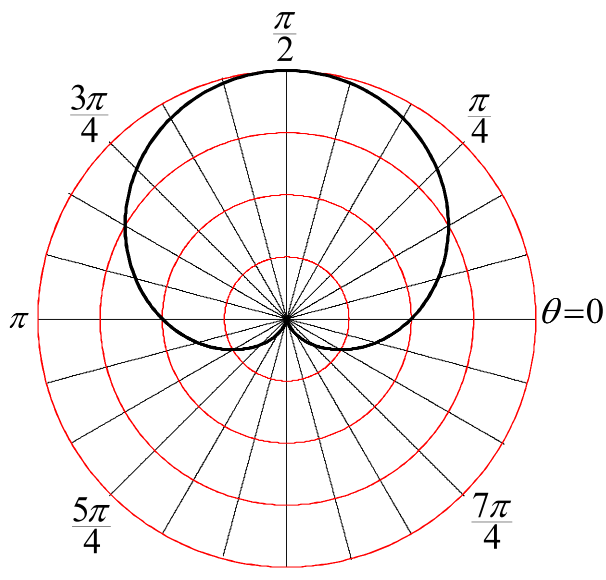


กราฟในตัวอย่าง 11 มีชื่อว่า Limaçon with inner loop #

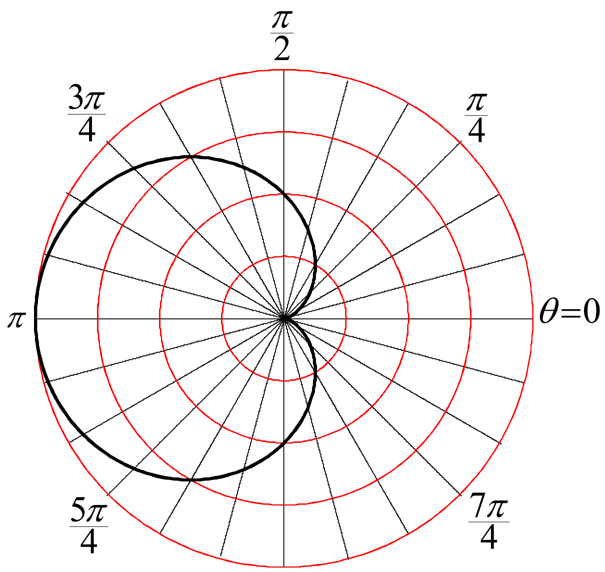
1.2 Cardioid ($\frac{a}{b} = 1$)



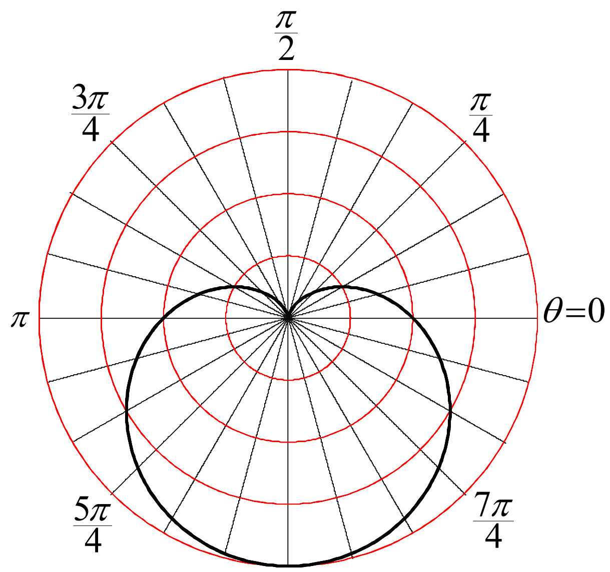
$r=2+2\cos\theta$



$r=2+2\sin\theta$



$r=2-2\cos\theta$



$r=2-2\sin\theta$

<u>ตัวอย่าง 12</u> Sketch the curve of $r = 1 - sin\theta$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาการสมมาตรของกราฟ $r = 1 - sin\theta$ (1)

1) แทน θ ด้วย $-\theta$ ในสมการ (1) :

$$r = 1 - \sin(-\theta) \;= 1 + \sin\theta$$

จะเห็นว่าสมการเปลี่ยน ดังนั้น กราฟไม่มีสมมาตรกับ polar axis

2) แทน θ ด้วย $\pi - \theta$ ในสมการ (1) :

$$r = 1 - \sin(\pi - \theta) \;= 1 - \sin\theta$$

จะเห็นว่าสมการไม่เปลี่ยน ดังนั้น กราฟมีสมมาตรกับเส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$

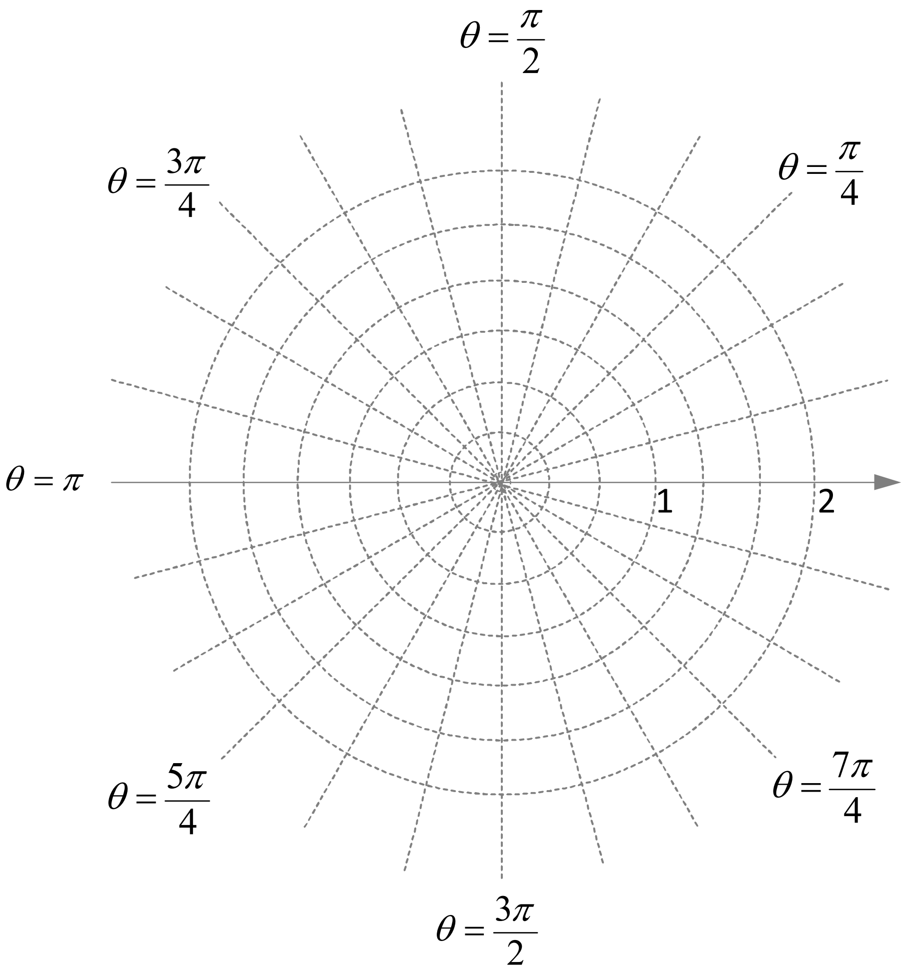
3) แทน r ด้วย $-r$ ในสมการ (1) :

$$-r = 1 - \sin\theta \quad \rightarrow \quad r = -1 + \sin\theta$$

จะเห็นว่าสมการเปลี่ยน ดังนั้น กราฟไม่มีสมมาตรกับ pole

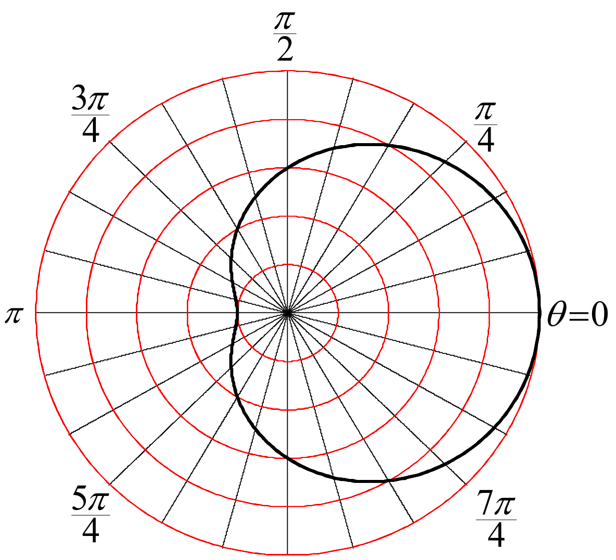
พิจารณาค่า r เมื่อ θ มีค่าระหว่าง 0 ถึง 2π ดังตารางต่อไปนี้

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
r	1	$\frac{1}{2}$	$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$	2	$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$	1

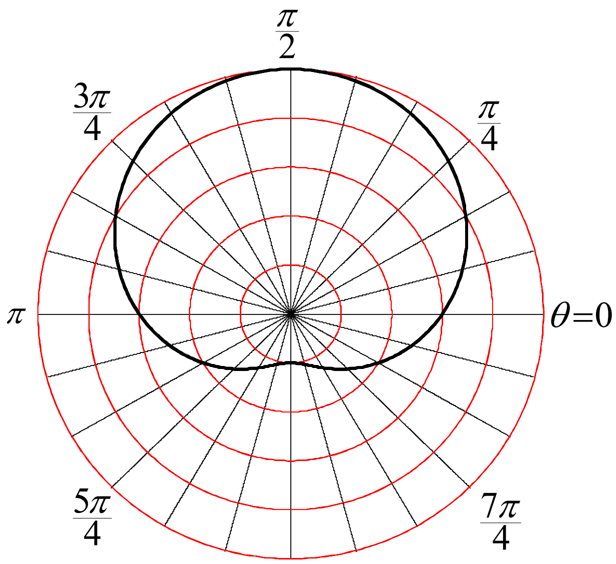


กราฟในตัวอย่าง 12 มีชื่อว่า Cardioid

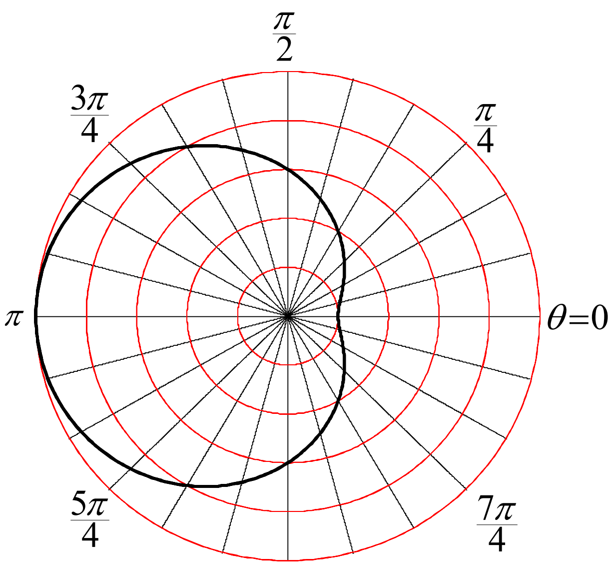
1.3 Dimpled Limaçon $\left(1 < \frac{a}{b} < 2\right)$



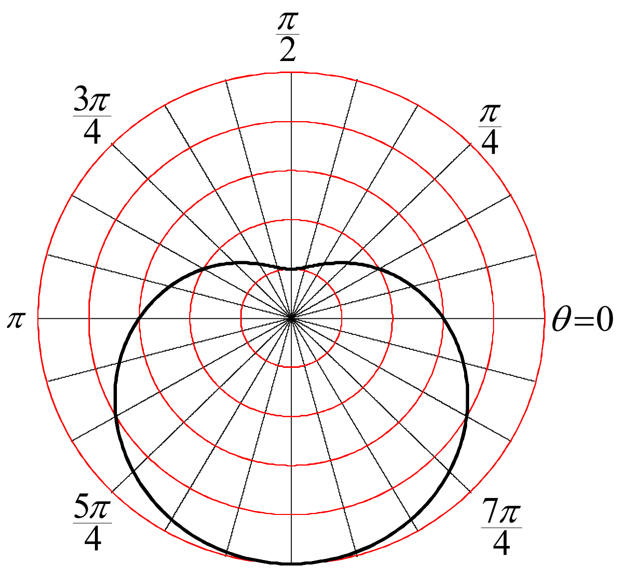
$r=3+2\cos\theta$



$r=3+2\sin\theta$

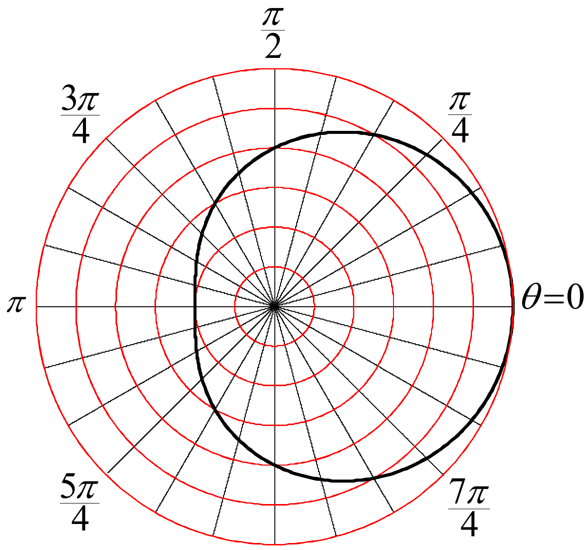


$r=3-2\cos\theta$

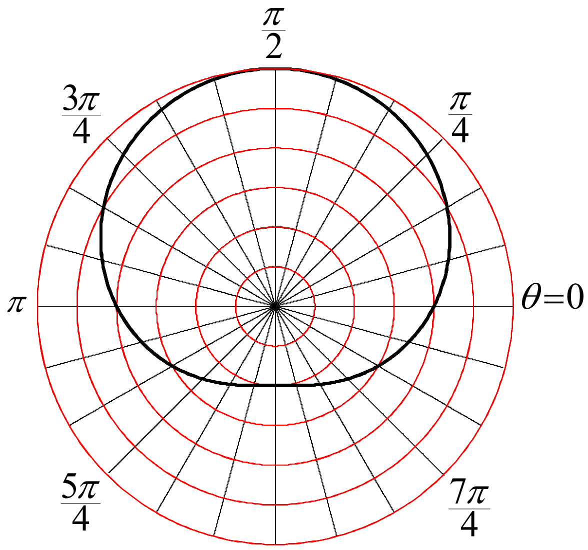


$r=3-2\sin\theta$

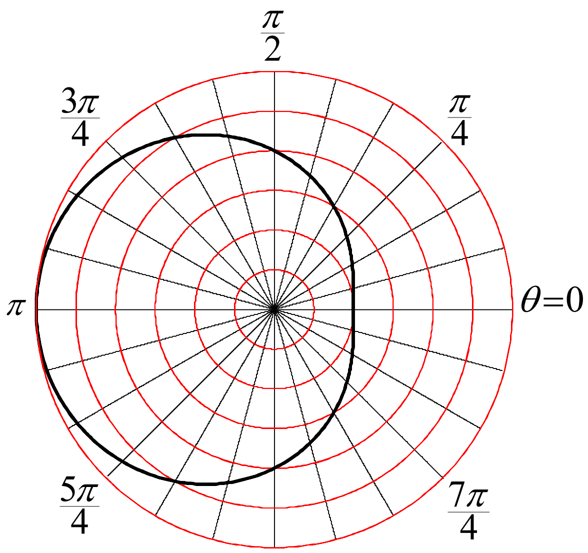
1.4 Convex Limaçon ($\frac{a}{b} \geq 2$)



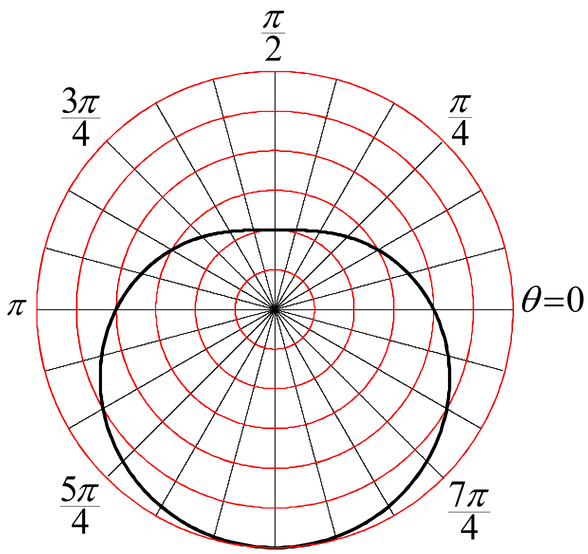
$r=4+2\cos\theta$



$r=4+2\sin\theta$



$r=4-2\cos\theta$



$r=4-2\sin\theta$

2. เส้นโค้งกุหลาบ (Rose Curves)

<u>ตัวอย่าง 13</u> Sketch the curve of $r = 2cos2\theta$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาการสมมาตรของกราฟ $r = 2cos2\theta$ (1)

1) แทน θ ด้วย $-\theta$ ในสมการ (1) :

$$r = 2\cos\ 2(-\theta)\ = 2\cos 2\theta$$

จะเห็นว่าสมการไม่เปลี่ยน ดังนั้น กราฟมีสมมาตรกับ polar axis

2) แทน θ ด้วย $\pi - \theta$ ในสมการ 1 :

$$r = 2\cos 2\,(\pi - \theta) \quad = 2\cos 2\theta$$

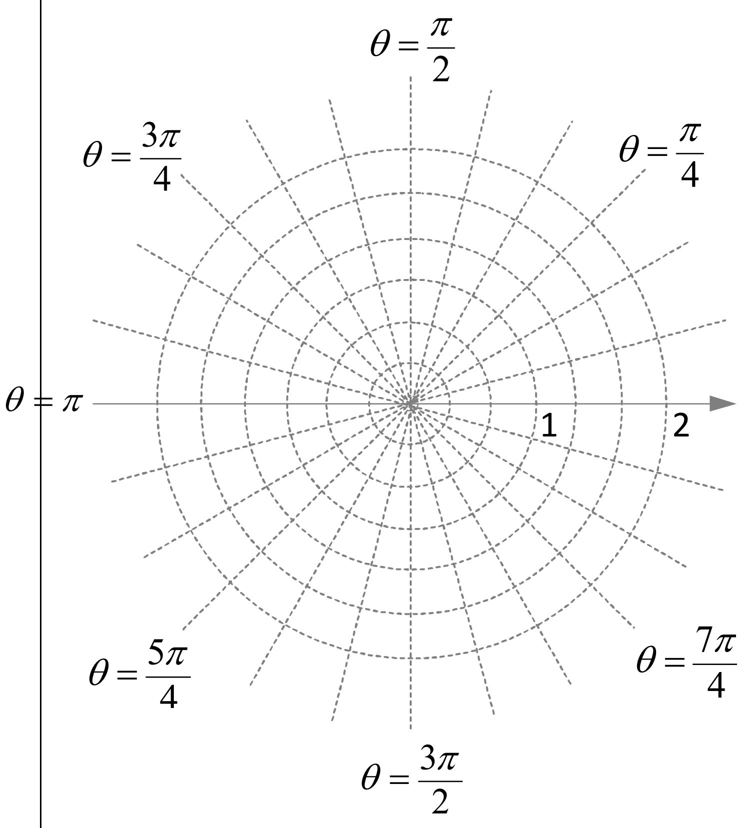
จะเห็นว่าสมการไม่เปลี่ยน ดังนั้น กราฟมีสมมาตรกับเส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$

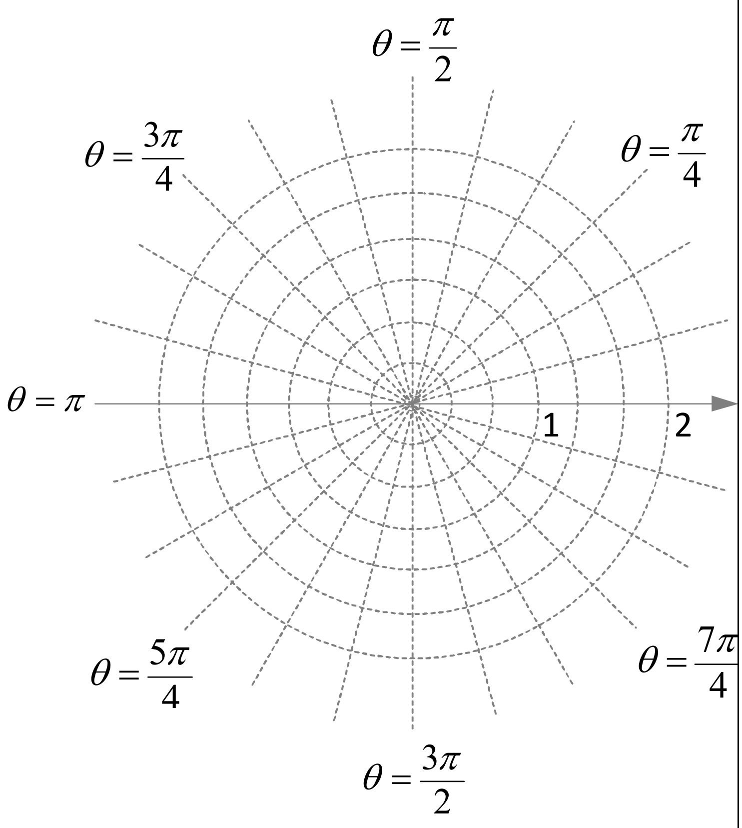
เนื่องจากกราฟมีสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว สมมาตรกับเส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น กราฟจะสมมาตรกับขั้วด้วย

พิจารณาค่า r เมื่อ θ มีค่าระหว่าง 0 ถึง π ดังตารางต่อไปนี้

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	2	1	0	-1	-2	-1	0	1	2





เมื่อทำการ plot กราฟค่า r จาก $\theta = 0$ ถึง π ได้กราฟดังรูปซ้ายมือ จากนั้นใช้หลักการสมมาตร สำหรับ $\theta = \pi$ ถึง 2π ได้กราฟดังรูปขวามือ

กราฟในตัวอย่าง 13 เรียกว่า four-petal rose curve (เส้นโค้งกุหลาบ 4 กลีบ)

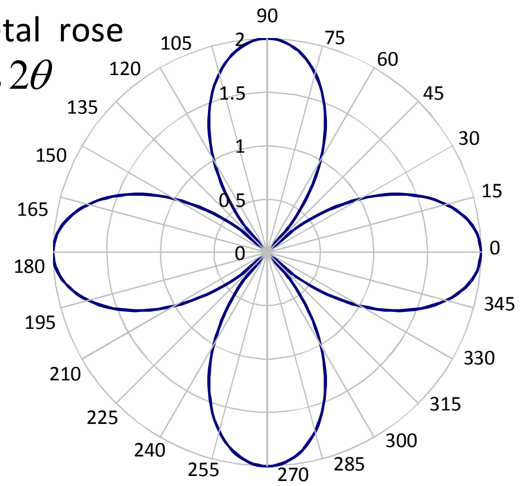
<u>สรุป</u> เส้นโค้งกุหลาบ (rose curve) มีสมการในรูป

$\boxed{r = a\cos n\theta}$ หรือ $\boxed{r = a\sin n\theta}$

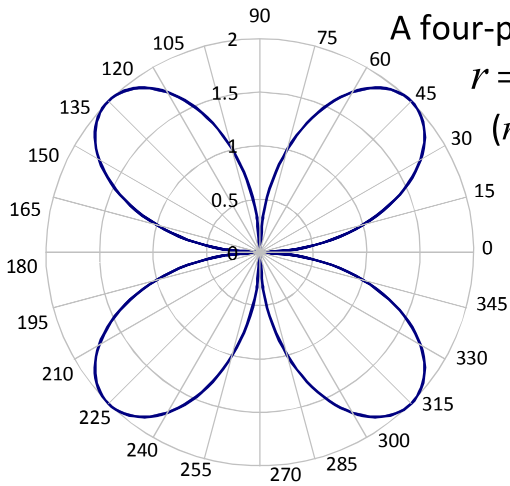
โดยที่ $a > 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ($n \geq 2$) ลักษณะกราฟแสดงถึงรูปร่างของกลีบกุหลาบ โดยที่**จำนวนกลีบ**(petals) ของ rose curve จะขึ้นอยู่กับค่า n คือ

- ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคู่ จะมีจำนวน petal เท่ากับ $2n$

A four-petal rose
$r = 2\cos 2\theta$
(n = 2)



A four-petal rose
$r = 2\sin 2\theta$
(n = 2)

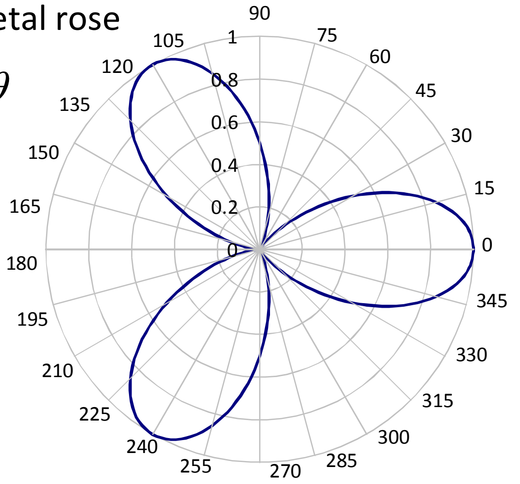


- ถ้า n เป็นจำนวนเต็มคี่ จะมีจำนวน petal เท่ากับ n

A three-petal rose

$r = \cos 3\theta$

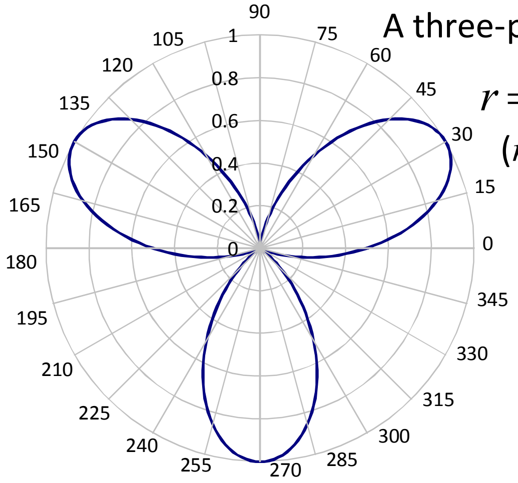
(n = 3)



A three-petal rose

$r = \sin 3\theta$

(n = 3)



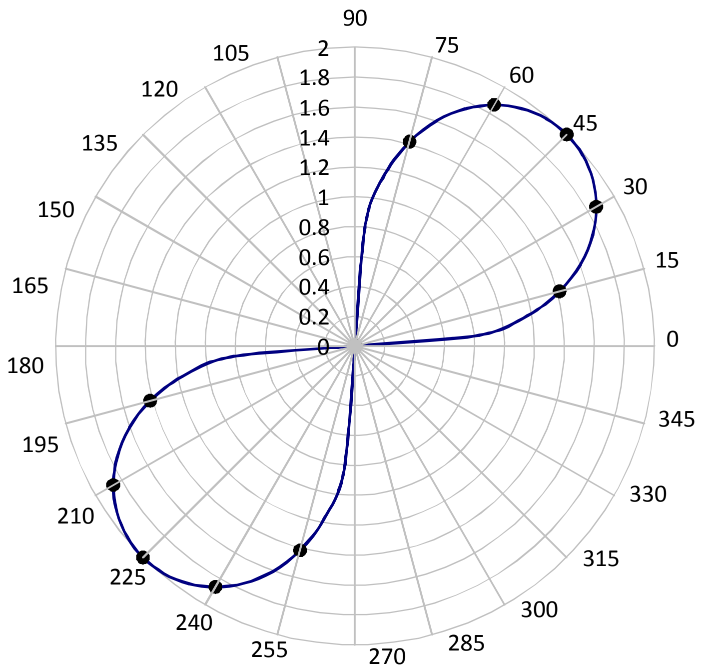
3. เลมนิสเคต (Lemniscate)

<u>ตัวอย่าง 14</u> Sketch the curve of $r^2 = 4sin2\theta$

<u>วิธีทำ</u> กราฟนี้มีสมมาตรกับขั้ว และเมื่อกำหนดค่า θ จาก 0 ถึง π จะได้ค่า r ดังตาราง

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
r^2	0	2	$2\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{3}$	2	0
r	0	± 1.414	± 1.861	± 2	± 1.861	± 1.414	0

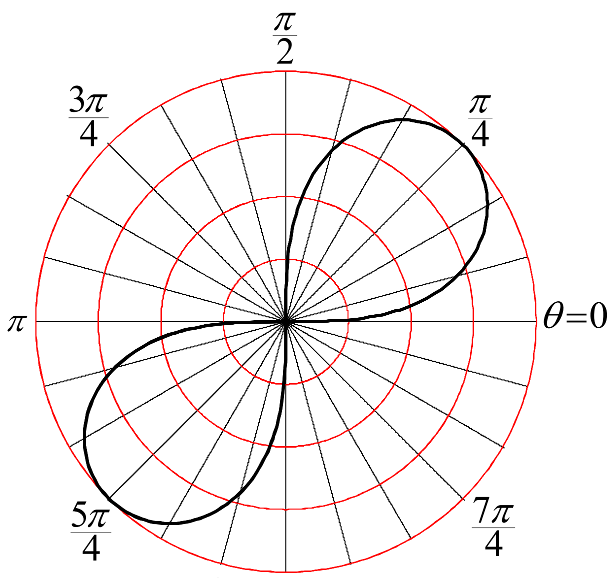
<u>หมายเหตุ</u> จะไม่มีกราฟในจตุภาคที่สอง $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$ และจตุภาคที่สี่ $\left(\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi\right)$ เนื่องจาก $\sin 2\theta < 0$ ทำให้ $r^2 < 0$



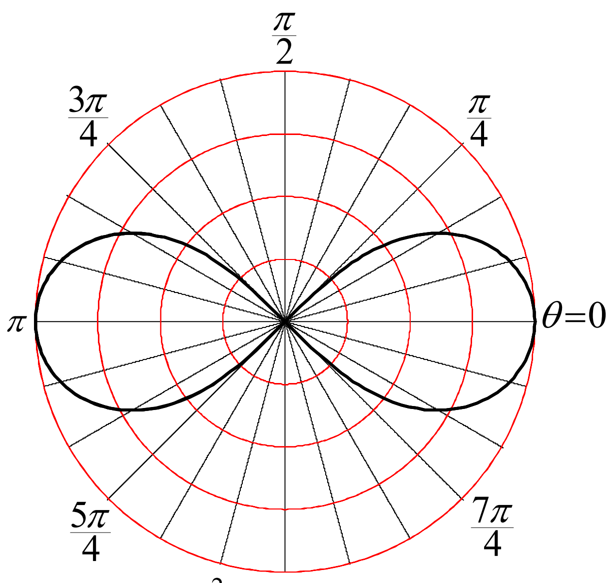
Lemniscate มี polar equation ในรูป

$$\boxed{r^2 = a^2\cos 2\theta} \quad \text{หรือ} \quad \boxed{r^2 = a^2\sin 2\theta}$$

โดยที่ $a \neq 0$ ลักษณะกราฟแสดงถึงรูปร่างของใบพัด(propeller)



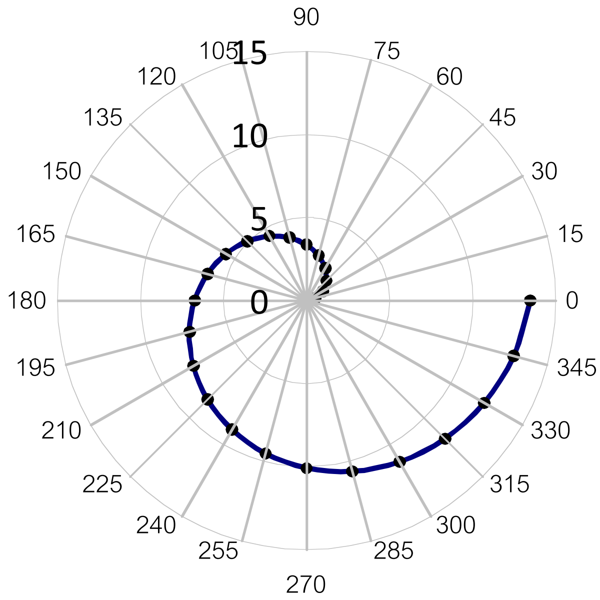
$r^2=16\sin 2\theta$



$r^2=16\cos 2\theta$

4. Spiral

4.1 เส้นโค้งเกลียวของอาร์คีมีดิส (Spiral of Archimedes) จะมีสมการอยู่ในรูป $r = a\theta$ เมื่อ $a > 0$



$r = 2\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

4.2 เส้นโค้งเกลียวแบบลอการิทึม (Logarithmic Spiral) จะมีสมการอยู่ในรูป $r = e^{a\theta}$ โดยที่ $a > 0$

<u>**แบบฝึกหัด**</u> Sketch the graph of $r = e^{\frac{\theta}{5}}$

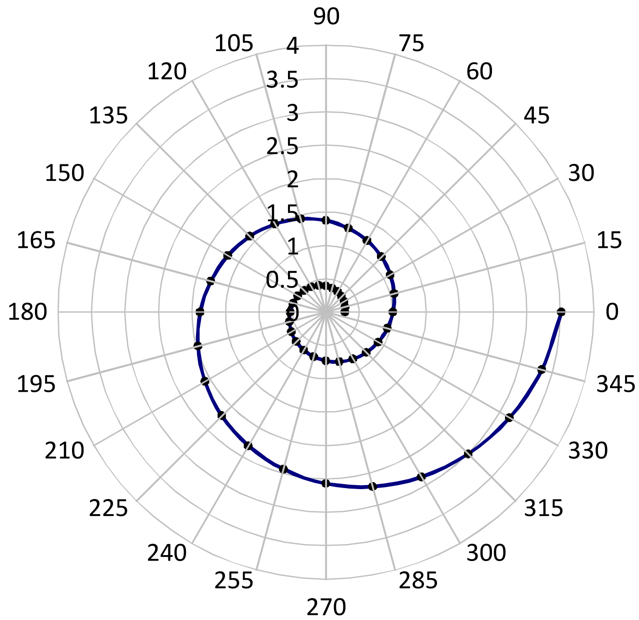
1) จากการทดสอบการสมมาตร ไม่พบว่ากราฟนี้มีสมมาตรกับแกนเชิงขั้ว, เส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$ และขั้ว

2) ไม่มีค่า θ ใดที่ทำให้ $r = 0$ ดังนั้นกราฟไม่ผ่านขั้ว

3) r มีค่าเป็นบวกทุกๆค่า θ

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{2}$
r	1	1.17	1.37	1.87	2.57	3.51	0.85	0.73	0.53	0.39

จะเห็นว่า $r \to 0$ ขณะที่ $\theta \to -\infty$ และ $r \to +\infty$ ขณะที่ $\theta \to +\infty$



6.7 Finding the points where the curves intersect

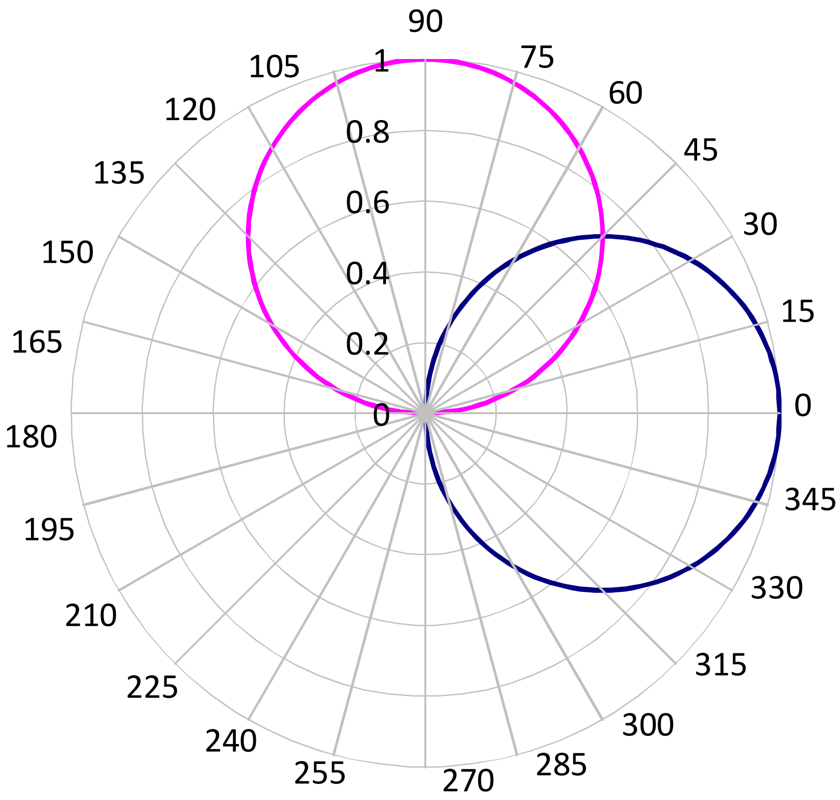
<u>ตัวอย่าง 15</u> จงหาจุดตัดของเส้นโค้ง $r = cos\theta$ และ $r = sin\theta$

<u>วิธีทำ</u> แก้สมการหาจุดตัดของกราฟ $r = cos\theta$ และ $r = sin\theta$

จะได้ว่า $sin\theta = cos\theta$ หรือ $tan\theta = 1$

นั่นคือ $\theta = \frac{\pi}{4}$ และจะได้ $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ดังนั้น จุดตัดของกราฟสองกราฟนี้มี 1 จุด คือ $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4})$

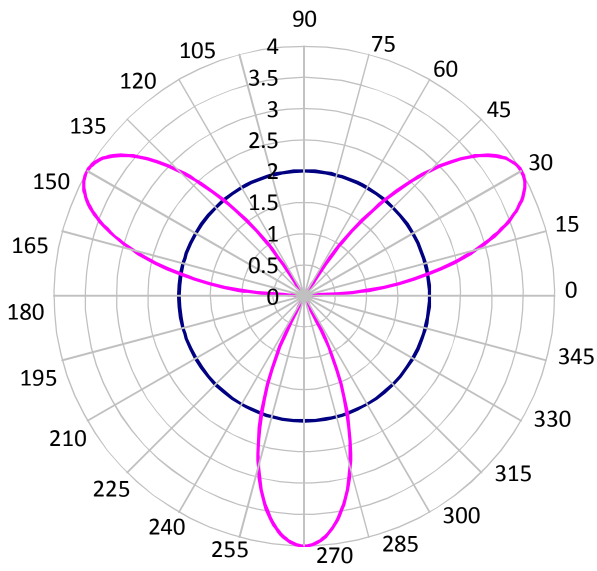


แต่เมื่อทำการเขียนกราฟจะเห็นว่ามีจุดตัดระหว่างกราฟทั้งสองทั้งหมด 2 จุด คือ จุด $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{4}\right)$ ที่ได้จากการแก้สมการ และจุดตัดที่ขั้ว 1 จุด ดังรูป

> การแก้สมการเพื่อหาจุดตัดในระบบพิกัดเชิงขั้ว จุดตัดที่ได้จากการแก้สมการจะมี**<u>บางจุดหายไป</u>** ดังนั้นถ้าเราใช้การ**<u>วาดกราฟ</u>**เข้าช่วยจะทำให้เราหาจุดตัดทั้งหมดได้

<u>ตัวอย่าง 16</u> จงหาจุดตัดของเส้นโค้ง $r = 4sin3\theta$ และ $r = 2$

<u>วิธีทำ</u> เมื่อวาดกราฟดังรูปจะพบว่ามีจุดตัดทั้งหมด 6 จุด



โดยการแก้สมการของเส้นโค้ง $r = 4sin3\theta$ และ $r = 2$

จะได้ $$4\sin 3\theta = 2 \quad \rightarrow \quad sin3\theta = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น

$$3\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{5\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$3\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \frac{25\pi}{6}, \frac{29\pi}{6}$$

$$\theta = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{29\pi}{18}$$

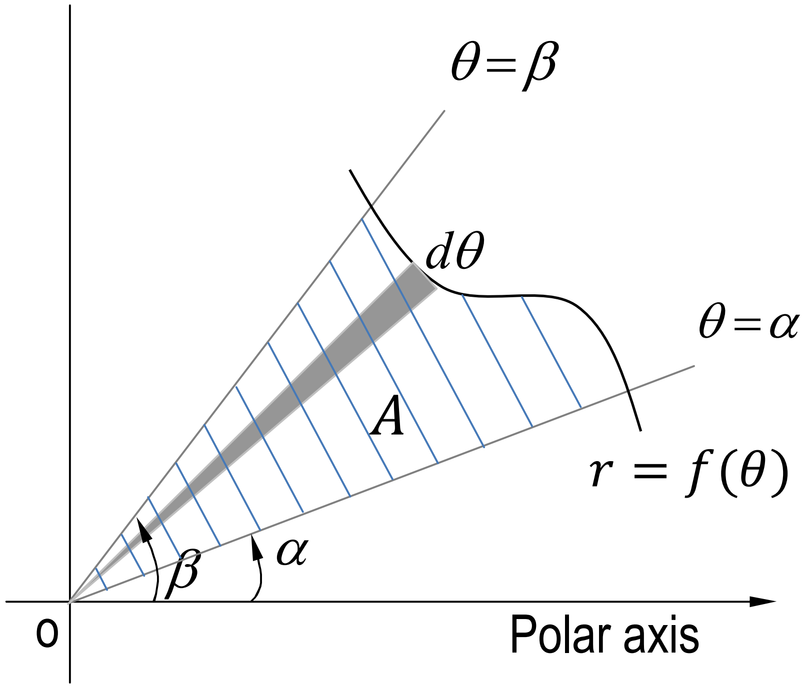
จุดตัดทั้ง 6 จุดมีพิกัดเป็น

$$\left(2, \frac{\pi}{18}\right), \left(2, \frac{5\pi}{18}\right), \left(2, \frac{13\pi}{18}\right), \left(2, \frac{17\pi}{18}\right), \left(2, \frac{25\pi}{18}\right), \left(2, \frac{29\pi}{18}\right)$$

<u>แบบฝึกหัด</u> จงหาจุดตัดของเส้นโค้ง $r = 1$ และ $r = 2cos\frac{\theta}{2}$

6.8 Area in Polar Coordinates

6.8.1 Area between the pole and $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$

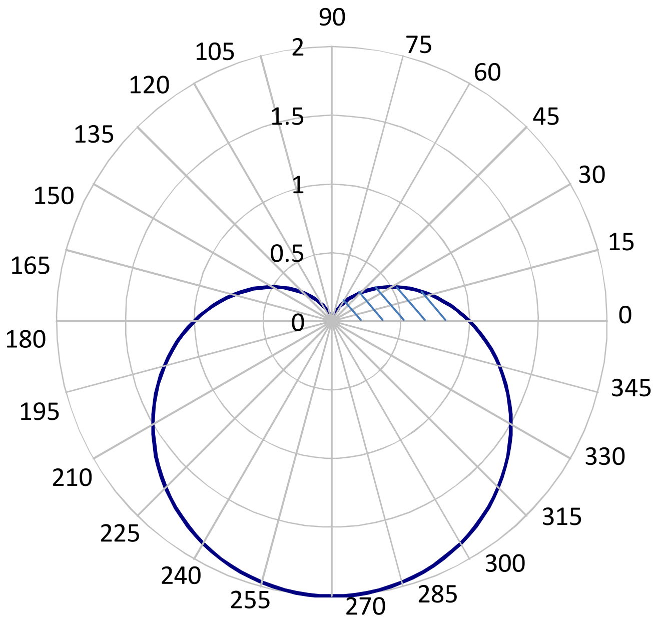


ให้ A เป็นพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $r = f(\theta)$ และ rays $\theta = \alpha$ และ $\theta = \beta$ โดยที่ $r = f(\theta)$ มีความต่อเนื่องและเป็น nonnegative บนช่วง $\alpha \le \theta \le \beta$, $0 < \alpha < \beta \le 2\pi$ แล้วจะได้ว่า

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

<u>ตัวอย่าง 17</u> จงหาพื้นที่ใน quadrant ที่ 1 ที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $r = 1 - sin\theta$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากพื้นที่ที่ต้องการในจตุภาคที่ 1 ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง



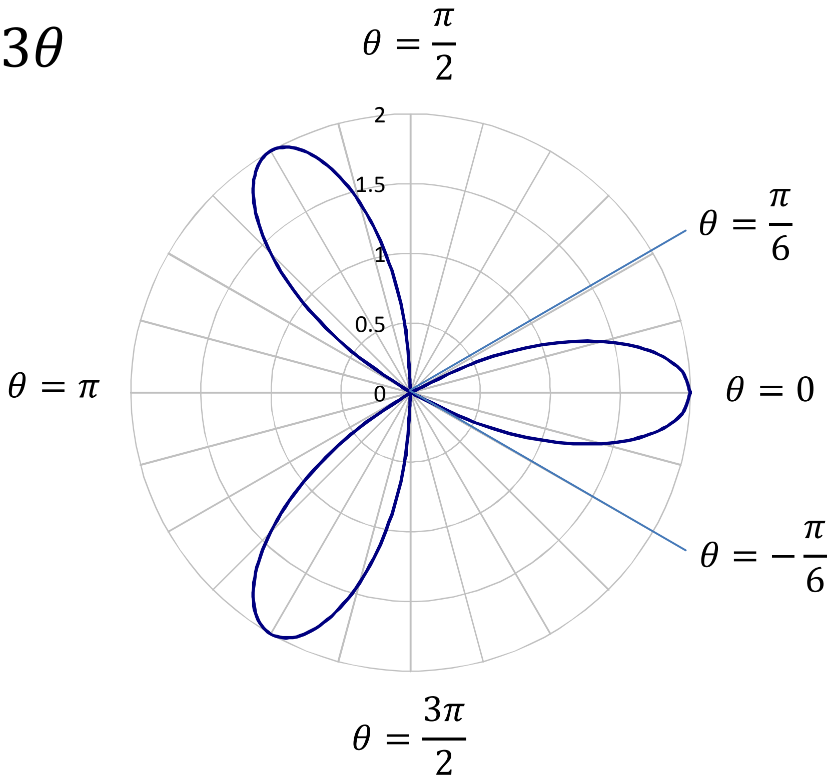
$r = 1 - sin\theta$ จาก $\theta = 0$ ถึง $\theta = \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น พื้นที่ที่ต้องการคือ

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

<u>แบบฝึกหัด</u>

จงหาพื้นที่ที่ถูกปิดล้อมด้วยสมการ $r = 1 - sin\theta$ $\left[\frac{3\pi}{2}\right]$

<u>ตัวอย่าง 18</u> Find the area enclosed by the rose curve $r = 2\cos 3\theta$



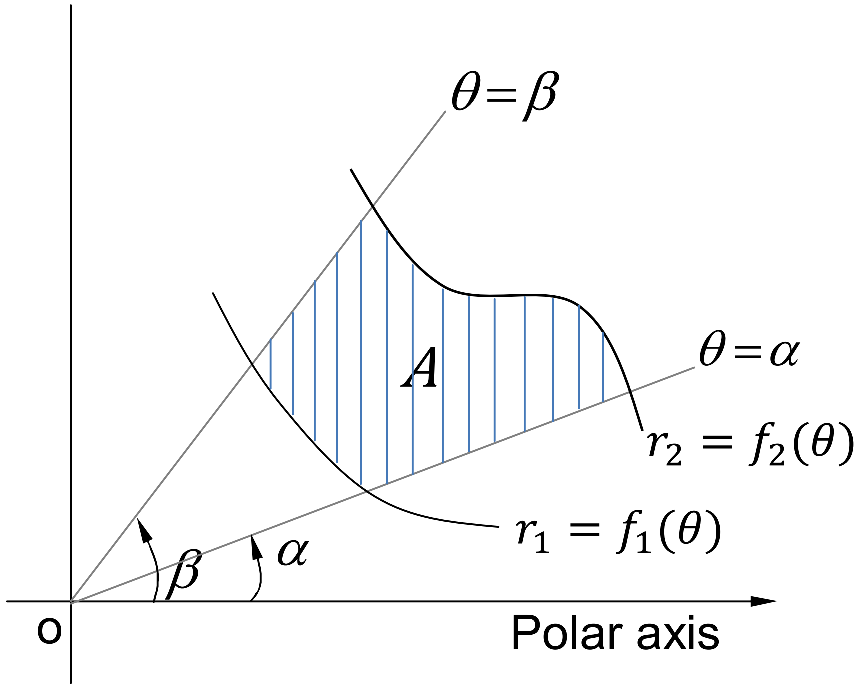
ใช้หลักการสมมาตรในการหาพื้นที่ โดยให้ A_1 เป็นพื้นที่ที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $r = 2\cos 3\theta$ ในจตุภาคที่ 1 ที่เริ่มจากมุม $\theta = 0$ ถึง $\theta = \frac{\pi}{6}$ (พื้นที่ของกลีบกุหลาบครึ่งกลีบ)

ดังนั้น พื้นที่ $A = 6A_1 = 6\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}(2\cos 3\theta)^2 d\theta$

<u>แบบฝึกหัด</u>

จงหาพื้นที่ที่ถูกปิดล้อมด้วยสมการ $r = 2 + \cos\theta$ $\left[\frac{9\pi}{2}\right]$

6.8.2 Area of Region $f_1(\theta) \le r \le f_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$

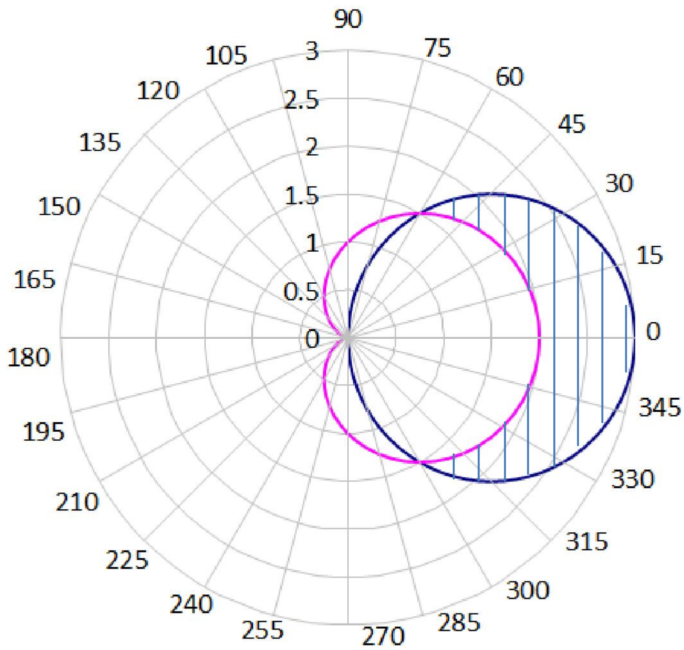


ให้ A เป็นพื้นที่ของบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $r_1 = f_1(\theta)$ และ $r_2 = f_2(\theta)$ โดยที่ $0 \le f_1(\theta) \le f_2(\theta)$ บนช่วง $\theta=\alpha$ ถึง $\theta=\beta$ จะได้ว่า

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}(r_2)^2 d\theta - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}(r_1)^2 d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2) d\theta$$

<u>ตัวอย่าง 19</u> Find the area that lies outside the cardioid $r = 1 + cos\theta$ and inside the circle $r = 3cos\theta$

<u>วิธีทำ</u> หาจุดตัดของเส้นโค้ง $r = 1 + cos\theta$ และ $r = 3cos\theta$



โดยการแก้สมการ จะได้

$$1 + \cos\theta = 3\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta =$$

ดังนั้น กราฟตัดกันที่จุด

และ

บริเวณภายนอกเส้นโค้ง $r = 1 + cos\theta$ และภายในเส้นโค้ง $r = 3cos\theta$ จะเป็นบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วย $r = 1 + cos\theta$ และ $r = 3cos\theta$ จาก $\theta = -\frac{\pi}{3}$ ถึง $\theta = \frac{\pi}{3}$ (ดังรูป) ดังนั้น

พื้นที่แรเงา $= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(3\cos\theta)^2 d\theta - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)^2 d\theta$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (9\cos^2\theta - 1 - 2\cos\theta - \cos^2\theta) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (8\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1) d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[8\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}\right) - 2\cos\theta - 1\right] d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (3 + 4\cos2\theta - 2\cos\theta) d\theta$$

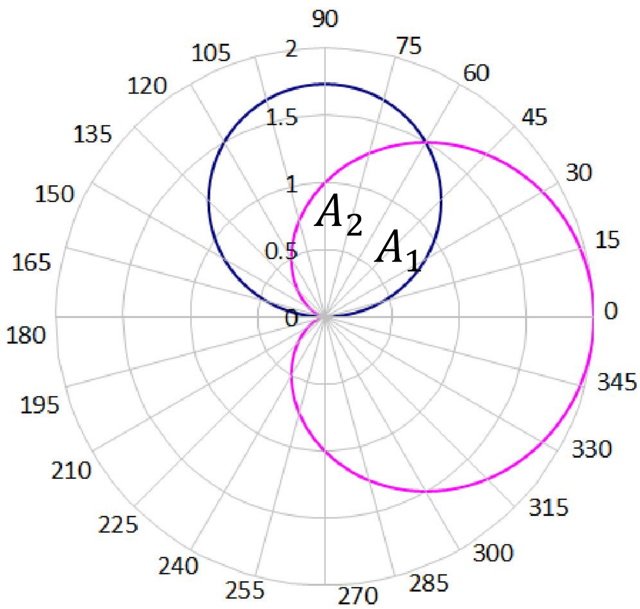
$$= \frac{1}{2}[3\theta + 2\sin 2\theta - 2\sin\theta]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \pi \qquad \text{ตารางหน่วย}$$

<u>ตัวอย่าง 20</u> จงหาพื้นที่ร่วมกันระหว่างเส้นโค้งรูปหัวใจ

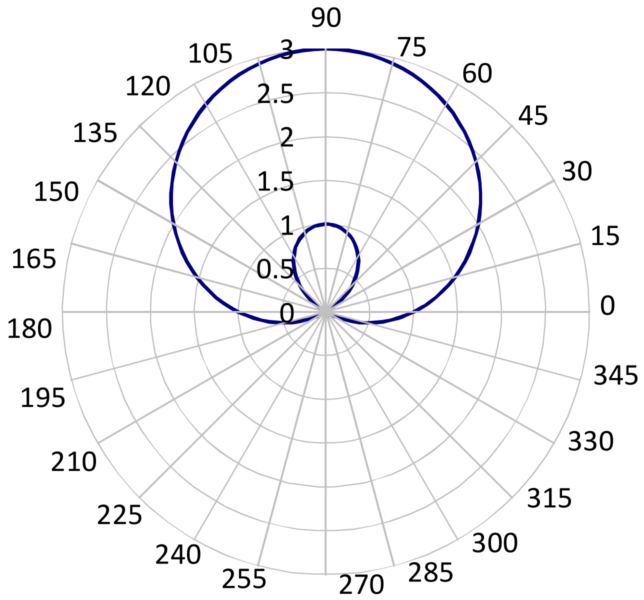
$r = 1 + \cos\theta$ และวงกลม $r = \sqrt{3}\sin\theta$

<u>วิธีทำ</u> หาจุดตัดของเส้นโค้ง $r = 1 + cos\theta$ และ $r = \sqrt{3}\sin\theta$ โดยการแก้สมการ จะได้



ตัวอย่าง 21 จงหาพื้นที่ที่อยู่ภายในบ่วงใหญ่ แต่อยู่นอกบ่วงเล็กของเส้นโค้ง $r = 1 + 2sin\theta$

วิธีทำ เนื่องจาก $r = 1 + 2sin\theta$ เป็นเส้นโค้ง Limaçon



เขียนกราฟได้รูป

หาจุดสัมผัสขั้ว เมื่อ $r = 0$

จะได้ว่า

$$0 = 1 + 2\sin\theta$$

$$\sin\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

เนื่องจากเส้นโค้งมีสมมาตรกับเส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น พื้นที่ A จะเท่ากับ $2(A_1 - A_2)$ โดยที่ A_1 เป็นพื้นที่ของบ่วงใหญ่ครึ่งหนึ่งทางด้านขวา และ A_2 เป็นพื้นที่ของบ่วงเล็กครึ่งหนึ่งทางด้านขวา

$$A_1 = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+2\sin\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1+4\sin\theta+4\sin^2\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1+4\sin\theta+4\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[3\theta-4\cos\theta-\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \quad =\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$A_2=\int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{1}{2}(1+2\sin\theta)^2\,d\theta \quad =\frac{1}{2}\left[3\theta-4\cos\theta-\sin 2\theta\right]_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ดังนั้น $A = 2(A_1-A_2) = \pi$ ตารางหน่วย

แบบฝึกหัด

1. จงจับคู่พิกัดเชิงขั้วที่เป็นจุดเดียวกัน

a) $(3,0)$ b) $(-3,0)$ c) $(-3,\pi)$ d) $(-3,2\pi)$

e) $(2,\frac{2\pi}{3})$ f) $(2,-\frac{2\pi}{3})$ g) $(2,\frac{7\pi}{3})$ h) $(-2,\frac{\pi}{3})$

i) $(2,-\frac{\pi}{3})$ j) $(2,\frac{\pi}{3})$ k) $(-2,-\frac{\pi}{3})$ l) $(-2,\frac{2\pi}{3})$

m) (r,θ) n) $(r,\theta+\pi)$ o) $(-r,\theta+\pi)$ p) $(-r,\theta)$

2. จงหาพิกัดเชิงขั้วแบบอื่นๆของจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้อีกสองจุด เมื่อ $r>0$ และ $r<0$

a) $(4,\frac{\pi}{3})$ b) $(-4,-\frac{\pi}{3})$ c) $(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$ d) $(6,\frac{4\pi}{3})$

3. จงหาพิกัดฉากของพิกัดเชิงขั้วที่กำหนดให้ต่อไปนี้

a) $(6,\frac{\pi}{6})$ b) $(-6,-\frac{\pi}{6})$ c) $(5,\frac{\pi}{2})$ d) $(2\sqrt{2},-\frac{\pi}{4})$

e) $(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$ f) $(1,0)$ g) $(0,\frac{\pi}{2})$ h) $(-\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$

i) $(-3,\frac{5\pi}{6})$ j) $(5,\tan^{-1}(\frac{4}{3}))$ k) $(-1,7\pi)$ l) $(2\sqrt{3},\frac{2\pi}{3})$

4. จงหาพิกัดเชิงขั้ว เมื่อ $r>0,\ 0\le\theta<2\pi$ ของพิกัดฉากต่อไปนี้

a) $(2,-2)$ b) $(-2,-2\sqrt{3})$ c) $(-\sqrt{3},1)$

5. จงแปลงสมการในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้ไปสู่ระบบพิกัดเชิงขั้ว

a) $\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{9}=1$ b) $x^2+y^2-4x=0$

c) $x^2=1-4y$ d) $xy=1$

6. จงแปลงสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้ไปสู่ระบบพิกัดฉาก

a) $r=\cos\theta$ b) $r^2=\sin\theta$ c) $r=\dfrac{4}{1-\cos\theta}$

d) $r^2=\theta$ e) $r=2$ f) $\tan\theta=4$

7. จงอธิบายลักษณะของกราฟต่อไปนี้

a) $r=4$ b) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ c) $r\sin\theta=4$

d) $r\cos\theta=-2$ e) $r=2\cos\theta$ f) $r=-4\sin\theta$

g) $r\sec\theta=4$ h) $r\csc\theta=-2$

8. จงทดสอบการสมมาตรของกราฟต่อไปนี้

a) $r=1+2\sin\theta$ b) $r=2-3\cos\theta$ c) $r=2+2\cos\theta$

d) $r=3-3\sin\theta$ e) $r=3\cos2\theta$ f) $r=4\sin3\theta$

g) $r^2=9\cos2\theta$

9. จงหาจุดตัดระหว่างกราฟต่อไปนี้

a) $r=1+\cos\theta,\ \ r=1-\cos\theta$

b) $r=1-\sin\theta,\ \ r^2=4\sin\theta$

c) $r=1,\ \ r=2\sin2\theta$

10. จงหาพื้นที่ที่ถูกปิดล้อมด้วยเงื่อนไขต่อไปนี้

a) $r=3\cos\theta,\ \theta=0$ และ $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

b) $r=1+\cos\theta$

c) ภายใน $r=2\sin\theta$ แต่อยู่นอก $r=1$

d) ภายใน $r=\sin\theta$ แต่อยู่นอก $r=1-\cos\theta$

e) ภายใน $r=2+2\cos\theta$ แต่อยู่นอก $r=3$

f) พื้นที่ร่วมกันระหว่าง $r=\cos\theta$ และ $r=1-\cos\theta$

g) ภายใน $r=8\cos\theta$ แต่อยู่ทางขวาของ $r=2\sec\theta$

<u>เฉลย</u>

1. $a,c;\ b,d;\ e,k;\ g,j;\ h,f;\ i,l;\ m,o;\ n,p$

2. a) $(4,\dfrac{7\pi}{3}),(-4,-\dfrac{2\pi}{3})$ b) $(-4,-\dfrac{7\pi}{3}),(4,\dfrac{2\pi}{3})$

c) $(\sqrt{2},\dfrac{9\pi}{4}),(-\sqrt{2},\dfrac{5\pi}{4})$ d) $(6,\dfrac{10\pi}{3}),(-6,\dfrac{\pi}{3})$

3. a) $(3\sqrt{3},3)$ b) $(-3\sqrt{3},3)$ c) $(0,5)$ d) $(2,-2)$

e) $(1,1)$ f) $(1,0)$ g) $(0,0)$ h) $(-1,-1)$

i) $(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3}{2})$ j) $(3,4)$ k) $(1,0)$ l) $(-\sqrt{3},3)$

4. a) $(2\sqrt{2},\dfrac{7\pi}{4})$ b) $(4,\dfrac{4\pi}{3})$ c) $(2,\dfrac{5\pi}{6})$

5. a) $r^2\left(\dfrac{\cos^2\theta}{4}+\dfrac{\sin^2\theta}{9}\right)=1$ b) $r=4\cos\theta$

c) $r^2\cos^2\theta + 4r\sin\theta - 1 = 0$ d) $r^2\sin 2\theta = 2$

6. a) $x^2 + y^2 - x = 0$ b) $\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}} - y = 0$

c) $y^2 = 8(x+2)$ d) $y = x\tan(x^2 + y^2)$

e) $x^2 + y^2 = 4$ f) $y = 4x$

7. a) circle, $x^2 + y^2 = 16$ b) line, $y = \sqrt{3}x$

c) horizontal line, $y = 4$ d) vertical line, $x = -2$

e) circle, $x^2 + (y+2)^2 = 4$

f) circle ไม่รวมจุดกำเนิด, $(x-2)^2 + y^2 = 4$

g) circle ไม่รวมจุดกำเนิด, $x^2 + (y+1)^2 = 1$

8. a) กราฟลีมาซอง สมมาตรกับเส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$

b) กราฟลีมาซอง สมมาตรกับแกนเชิงขั้ว

c) กราฟรูปหัวใจ สมมาตรกับแกนเชิงขั้ว

d) กราฟหัวใจ สมมาตรกับเส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$

e) กราฟกลีบกุหลาบ สมมาตรกับแกนเชิงขั้วและเส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$

f) กราฟกลีบกุหลาบ สมมาตรกับเส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$

g) กราฟเลมนิสเคต สมมาตรกับขั้ว แกนเชิงขั้วเส้นตรง $\theta = \frac{\pi}{2}$

9. a) $(1,\frac{\pi}{2}),(1,\frac{3\pi}{2})$ และขั้ว

b) $\left(2(\sqrt{2}-1),\sin^{-1}(3-2\sqrt{2})\right)$, $\left(-2(\sqrt{2}-1),\sin^{-1}(3-2\sqrt{2})\right)$,

$(2,\frac{3\pi}{2})$ และขั้ว

c) $(1,\frac{\pi}{12}),(1,\frac{5\pi}{12}),(1,\frac{7\pi}{12}),(1,\frac{11\pi}{12}),(1,\frac{13\pi}{12}),(1,\frac{17\pi}{12}),$
$(1,\frac{19\pi}{12}),(1,\frac{23\pi}{12})$

10. a) $\frac{3\pi}{4}+\frac{9\sqrt{3}}{16}$ b) $\frac{3\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $1-\frac{\pi}{4}$ e) $\frac{9\sqrt{3}}{2}-\pi$ f) $\frac{7\pi}{12}-\sqrt{3}$

g) $\frac{32\pi}{3}+4\sqrt{3}$