Studium Licencjackie

Kierunek: Metody ilościowe w ekonomii i systemy informacyjne
Specjalność: Informatyka gospodarcza

Imię i nazwisko autora: Igor Domaradzki
Nr albumu: 89987

Zastosowanie teorii gier do analizy wybranych zagadnień w sporcie

Praca licencjacka
pod kierunkiem naukowym
dr Marii Ekes
Instytut Ekonomii Matematycznej

Warszawa 2022

Spis treści

Wstęp

W ostatnich latach coraz większą role w profesjonalnym sporcie zaczynają odgrywać analizy i modele matematyczne. Coraz rzadziej bazuje się na intuicji i doświadczeniu, na rzecz indeksów i wyliczeń. Celem tej pracy jest przedstawienie jak można wykorzystać teorię gier do opisu sytuacji sportowych. W tej pracy pokazano przykłady jak sportowcy mogą podejmować decyzje, aby zmaksymalizować swoje szanse na wygraną. Pokazano także czemu okoliczności czasami powodują, że pomimo podejmowania najlepszych decyzji zawodnicy dochodzą do nieoptymalnych dla siebie rozwiązań.

W pierwszym rozdziale przedstawiono czym jest teoria gier i pokrótce opisano jej historię i naukowców z nią związanych. W drugim rozdziale pracy opisano specyficzny dla sportu rynek finansowy, jakim jest giełda wymiany graczy. Pokazano jak działa transferowy rynek piłkarski w Polsce i w reszcie Europy oraz jak wymienia się zawodników w ligach sportów amerykańskich. W trzecim rozdziale przedstawiono jeden z najbardziej znanych modeli w teorii gier, czyli dylemat więźnia. Udowodniono także dlaczego dla graczy decyzja czy przyjąć doping czy nie jest analogiczna do tego problemu. Przytoczono też najpopularniejsze przykłady dopingu i pobudki kierujące zawodników do stosowania nielegalnych środków. W ostatnim rozdziale stworzono model przedstawiający matematycznie rywalizację pomiędzy dwoma kierowcami w wyścigach samochodowych. Zanalizowano grę, w której obaj kierowcy musieli podjąć swoje wybory w tym samym czasie oraz grę, w której kierowcy podejmują swoje decyzje jeden po drugim. Przytoczono także przykłady innych gier dwuosobowych w sportach na przykładzie rzutów karnych w piłce nożnej i serwisu w tenisie.

Rozdział I

Teoria gier

Teoria gier jest nauką z pogranicza matematyki stosowanej i ekonomii, zajmującą się analizą rywalizacji pomiędzy graczami o różnych celach. Poprzez grę rozumiemy sytuację, w której racjonalne osoby podejmują decyzję na podstawie sformułowanych zasad, i gdzie każdy gracz otrzymuje wypłaty zależne od wyborów wszystkich graczy. Przykładami gier są m.in. aukcje, negocjacje pomiędzy krajami czy działania wojskowe.[1]

Za początek teorii gier uznaje się opublikowanie w 1944 roku pracy pt. „Theory of Games and Economic Behavior" przez Johna von Neumanna i Oskara Morgensterna na Uniwersytecie Princeton.[2]

1.1 Czym jest gra?

Każdy posiada intuicyjną wiedzę czym jest gra. Gra w ujęciu teorii gier się od tego intuicyjnego pojęcia różni. Jest ona zdefiniowana przez:

- Zasady – każda gra musi mieć ustalone zasady opisujące ją. Aby można było przeanalizować grę, musi ona mieć sztywny zestaw możliwych ruchów, które są wcześniej znane. Gracze nie mogą wykonać ruchu, który nie jest opisany w zasadach.
- Wypłaty – gry posiadają pewną ilość możliwych rozwiązań, zależnych od wyborów wszystkich graczy. Każde z nich daje graczom wypłaty. Mogą oznaczać na przykład satysfakcję lub zdobycz finansową. Celem gracza jest maksymalizacja własnej wypłaty.
- Podejmowanie decyzji – gry, w której gracze nie mają żadnych decyzji do podjęcia nie ma co analizować. Na przykład w biegu na 100 metrów zawodnicy niczego nie analizują, po prostu chcę pobiec jak najszybciej. Jednakże większość sportów daje możliwy wybór pomiędzy strategiami, który można analizować za pomocą teorii gier.

Pełen zestaw zasad opisuje grę. Strategia to plan mówiący graczowi jaki ruch wykonać w każdej możliwej pozycji. Przyjmuje się, że gracze są racjonalni, to znaczy ich celem jest optymalizacja własnych wypłat.

[1] Prisner E., *Game Theory Through Examples,* The Mathematical Association of America, 2014 s.1

[2] Płatkowski T., *Wstęp do teorii gier,* Uniwersytet Warszawski, 2011, s.6

Gry mogę być klasyfikowane ze względu na kilka kryteriów.

- Ilu graczy bierze udział? Zawsze w grach bierze udział więcej niż jeden gracz. W tej pracy analizowane będą gry dwuosobowe.
- Czy gra jest o sumie zerowej? Grą o sumie zerowej nazywa się gry, w których suma wypłat wszystkich graczy jest zawsze równa 0. Gracz może mieć dodatnią wypłatę tylko jeśli ktoś inny ma ujemną. Przykładam są szachy, gdzie aby jeden gracz wygrał to drugi musi przegrać.
- Czy jest dopuszczona kooperacja? Czasem gracze otrzymaliby najlepszy dla nich wynik, jeśli mogliby skonsultować ze sobą swoje strategie. W grach kooperacyjnych gracze mogą konsultować swoje wybory i dostosują się do tego co ustalą, natomiast w grach niekooperacyjnych nie mogą lub nie chcą tego robić.[3]

Ważnym pojęciem jest też równowaga Nasha. Jest to rozwiązanie w grze, w którym nikt nie może zyskać zmieniając swój wybór, po tym jak wszyscy gracze dokonają swoich wyborów. W grze mogą być wyższe wypłaty dla gracza niż w równowadze, ale byłyby one osiągnięte tylko w przypadku, gdyby dwóch lub więcej graczy zmieniło swoje wybory.

1.2 Historia teorii gier

Mimo iż wyrażenie „teoria gier” zostało po raz pierwszy użyte w 1928 roku, to idee w niej zawarte pojawiły się dużo wcześniej. Już w XIX wieku pojawiły się prace, w których autorzy próbowali opisać matematycznie ludzkie zachowania. Za najważniejszych uczonych wspominających o ideach dzisiejszej teorii gier uznaje się m.in.: Augustina Cournota, Francisa Edgewortha i Emila Borela. Za ojca współczesnej teorii gier uznaje się jednak matematyka Johna von Neumanna, który w 1928 roku opublikował pracę o tytule „On the Theory of Games of Strategy”, w której opisuje czym jest gra strategii i proponuje rozwiązania dla niektórych przypadków gier.[4] Von Neumann, urodzony w 1903 roku, był węgierskim matematykiem, który w wieku 25 lat został profesorem matematyki na Uniwersytecie Princeton w New Jersey. Jest uznawany za jednego z najwybitniejszych matematyków swoich czasów. Oprócz teorii gier, zajmował się m.in. matematyką, fizyką matematyczną, brał udział w Projekcie Manhattan

[3] Prisner E., *Game Theory Through Examples,* The Mathematical Association of America, s.3
[4] Najera J., *Game Theory — History & Overview,* Towards Data Science [online], 2019, Dostępny w: https://towardsdatascience.com/game-theory-history-overview-5475e527cb82, [Dostęp: 12.05.2022]

oraz jest uznawany za jednego z ojców współczesnej informatyki. Architektura von Neumana do dzisiaj jest w podstawie budowy współczesnych komputerów.[5]

Przez kilkanaście lat nikt nie rozwinął idei zaproponowanych w 1928. Momentem, w którym teoria gier stała się oddzielną dziedziną nauki jest wydanie „Theory of Games and Economic Behavior" w 1944 przez von Neumanna oraz ekonomistę Oskara Morgensterna. Praca ta rozwinęła idee z pierwotnej pracy Węgra, pokazała w jaki sposób dochodzi do strategicznej współzależności oraz ustaliła ramy analizy w dzisiejszej teorii gier.[6]

Drugim prekursorem teorii gier był John Nash. Był on amerykańskim matematykiem i laureatem Nagrody Nobla z ekonomii. Tak jak von Neumann był związany z Uniwersytetem Princeton. W latach 50. XX wieku Nash wykazał, że dla każdej skończonej gry wszyscy gracze mogą dojść do optymalnego rozwiązania znanego dzisiaj jako równowaga Nasha. Jego badania o teorii gier oraz osobista walka ze schizofrenią zostały przedstawione w filmie „Piękny umysł", opartym na biografii Nasha o tym samym tytule. Film ten zdobył w 2003 roku zdobył 4 Oscary, w tym za najlepszy film.[7]

Inni naukowcy zajmujący się teorią gier zostali też docenieni przez Komitet Noblowski przyznający Nagrody Banku Szwecji im. Alfreda Nobla w dziedzinie ekonomii.

- 1995 – Po raz pierwszy nagrodę za badania w dziedzinie teorii gier dostali John Nash, Reinhard Selten i John Harsanyi (analiza równowagi w grach niekooperacyjnych).
- 2005 – Jedenaście lat później Tomasz Schelling i Robert Aumann dostali Nagrodę Nobla za zastosowanie teorii gier do analizy konfliktów i kooperacji.
- 2007 – Leonid Hurwicz, Eric Maskin i Roger Myerson otrzymali nagrodę za zastosowanie teorii gier do projektowania mechanizmów gospodarczych.
- 2012 – Lloyd Shapley i Alvin Roth dostali nagrodę za teorię stabilnych alokacji znaną także jako „algorytm stabilnych małżeństw".
- 2020 – Paul Milgrom i Robert Wilson otrzymali nagrodę na ulepszenie teorii i wynalezienie nowych formatów aukcji.

---

[5] Riley S., *Von Neumann Architecture*, Computerphile [online], 2018, Dostępny w: https://www.youtube.com/watch?v=Ml3-kVYLNr8, [Dostęp: 12.05.2022]
[6] Poundstone W., *John von Neumann*, Encyclopedia Britannica, 2022, Dostępny w: https://www.britannica.com/biography/John-von-Neumann, [Dostęp: 12.05.2022]
[7] Britannica, The Editors of Encyclopaedia, *John Nash*, Encyclopedia Britannica, 2021, Sotępny w: https://www.britannica.com/biography/John-Nash, [Dostęp: 12.05.2022]

Rozdział II

Rynki w sporcie

Przez dzisiejszy sport przewijają się ogromne pieniądze, zarobki najlepszych sportowców są liczone w setkach milionów, a kontrakty telewizyjne opiewają się na miliardy. Globalny rynek sportu rocznie generuje ok. 100 miliardów dolarów.[8] Wydarzeniem sportowych, który przynosi najwięcej zysków jest finał amerykańskiej ligi NFL znany lepiej jako Super Bowl. Szacuje się, że przynosi on za każdym razem ok. 380 milionów dolarów. Za nim plasują się Igrzyska Olimpijskie przynoszące ok. 175 milionów dolarów, a podium zamykają Mistrzostwa Świata w piłce nożnej generujące ok. 100 milionów dolarów.[9]

Specyficznym dla największych sportów aspektem ekonomicznym są rozległe rynki wymiany graczy, które w różnych dyscyplinach funkcjonują inaczej.

2.2 Piłkarski rynek transferowy

W piłce nożnej, jeśli zawodnik ma podpisany kontrakt z jedną drużyną, to nie może podpisać umowy z inną ekipą, chyba że owe dwa kluby dojdą do porozumienia. Najczęściej w takiej sytuacji dochodzi do zapłaty w zamian do możliwości podpisania kontraktu z zawodnikiem. W europejskiej piłce nożnej kwoty wykupu najlepszych zawodników z ich kontraktów mogą sięgać setek milionów euro. Rekordem jest kwota odstępnego zapłacona przez francuski klub Paris-Saint Germain do hiszpańskiej FC Barcelony za Brazylijczyka Neymara. Klub z Paryża za zawodnika zapłacił 222 miliony euro.[10] W sumie 12 zawodników zmieniało swoje drużyny za kwotę co najmniej 100 milionów euro.[11]

Transfery są tematem, który bardzo interesuje kibiców śledzących futbol. Na portalach internetowych najlepiej klikają się plotki transferowe, mimo tego, że tylko niewielka ich część kończy się zmianą klubu przez zawodnika. W transferze biorą udział trzy strony: klub kupujący, klub sprzedający i sam zawodnik, najczęściej reprezentowany przez swoich agentów, którzy są zazwyczaj bardzo ważną częścią każdej transakcji. Na rynku transferowym najważniejsza jest informacja. Klub, który chce napastnika, musi wiedzieć o tym, którzy napastnicy są wolni. Agent piłkarza musi wiedzieć, który klub szuka napastnika. Klub posiadający niezłego

[8] https://www.crresearch.com/blog/dollars-and-eyeballs-why-sporting-industry-so-lucrative
[9] https://www.forbes.com/2007/01/30/sports-brands-superbowl-biz-cz_ps_0131mvse.html?sh=6ec18d2b6317#607666126317
[10] Laurens J., *Neymar: how the record-breaking €222m move to PSG unfolded,* The Guardian, 2017, Dostępny w: https://www.theguardian.com/football/2017/aug/04/neymar-how-record-breaking-move-to-psg-unfolded, [dostęp: 8.05.2022]
[11] *List of most expensive association football transfers*, Wikipedia, Dostępny w: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_most_expensive_association_football_transfers, [Dostęp: 9.05.2022]

napastnika chce wiedzieć, ile klub zainteresowany może za niego zapłacić. Najlepsze informacje mają najczęściej menedżerowie, ponieważ często mają swoich piłkarzy w większości klubów w lidze, co powoduje, że siatka ich kontaktów jest największa. Kluby często tak wielu informacji nie mają i mogą przez to stracić, na przykład, kiedy proponują większe pieniądze, niż te wystraczające do wykupu piłkarza z jego klubu.

Przeprowadzanie transferu zaczyna się od porozumienia klubu zainteresowanego z piłkarzem, mimo że jest to wbrew przepisom. Te zakładają, że klub pozyskujący najpierw ustali warunki z klubem sprzedającym i uzyska zgodę na negocjacje z piłkarzem. W rzeczywistości ten przepis jest ignorowany. Dopiero gdy warunki z piłkarzem zostały ustalone, kluby siadają ze sobą do negocjacji co do formy wykupu.[12]

W Polsce kwoty transferowe nie sięgają takich rozmiarów jak te w ligach zachodnich. Największą kwotą wydaną na zawodnika z polskiej ligi jest ponad jedenaście milionów euro wydane przez angielski klub Brighton & Hove Albion F.C na Kacpra Kozłowskiego z Pogoni Szczecin w styczniu 2022 roku. Łącznie jedenastu piłkarzy wyjechało z Polski za co najmniej pięć milionów euro. Najwyższą kwotą zapłaconą przez polski klub za piłkarza jest 1,84 miliona euro, za które Bartosz Slisz przeszedł z Zagłębia Lubin do Legii Warszawa w 2020 roku. Łącznie 13 zawodników zmieniało barwy klubowe na rzecz polskich drużyn za milion euro lub więcej.[13]

Ze wzrostem kontraktów telewizyjnych w piłce nożnej wzrosły także pensje zawodników. Na przełomie wieków najlepiej zarabiający piłkarze inkasowali ok. 250 000 euro miesięcznie.[14] W sezonie 2021/2022 miano zawodnika z najwyższą pensją dzielą Leo Messi i Neymar, obaj grający dla francuskiego Paris-Saint Germain. Zarabiają oni ok. sześć milionów euro co miesiąc. Natomiast doliczając do tego zyski piłkarzy z kontaktów reklamowych najwięcej inkasuje Cristiano Ronaldo, któremu co miesiąc przybywa ok. dziesięć milionów euro.[15] W

[12] Smyk D., *Jak w Polsce robi się transfery? Zaglądamy za kulisy negocjacji,* Weszło.com [online], 2021, Dostępny w: https://weszlo.com/2021/01/30/jak-w-polsce-robi-sie-transfery-zagladamy-za-kulisy-negocjacji/, [dostęp: 8.05.2022]

[13] Transfermarkt.pl [online], *Rekordowe transfery,* Dostępny w: https://www.transfermarkt.pl/pko-ekstraklasa/transferrekorde/wettbewerb/PL1/plus//galerie/0?saison_id=alle&land_id=alle&ausrichtung=alle&spielerposition_id=alle&altersklasse=alle&leihe=&w_s=&zuab=0 [dostęp: 8.05.2022]

[14] *Footballers Wages*, My Sort of Loan [online], Dostępny w: https://www.mysortofloan.co.uk/Footballers-Wages.asp, Dostęp: [9.05.2022]

[15] Settimi C., *The World's Highest-Paid Soccer Players 2021: Manchester United's Cristiano Ronaldo Reclaims Top Spot From PSG's Lionel Messi,* Forbes, 2021 Dostępny w: https://www.forbes.com/sites/christinasettimi/2021/09/21/the-worlds-highest-paid-soccer-players-2021--uniteds-cristiano-ronaldo-reclaims-top-spot-from-psgs--lionel-messi/?sh=60caaa973b7b, [Dostęp: 8.05.2022]

Polsce najlepiej opłacanym piłkarzem jest obrońca Legii Warszawa Artur Jędrzejczyk, który co miesiąc otrzymuje ok. dwieście tysięcy złotych.[16]

2.3 „*I would like to report a trade…*" - Wymiana za prawo draftu

Inaczej działa wymiana zawodników w sportach amerykańskich to jest m.in.: koszykówce, hokeju na lodzie, baseballu czy futbolu amerykańskim. W przeciwieństwie do Europy, bardzo rzadko dochodzi do zapłaty w zamian za zawodnika. W większości przypadków dochodzi do wymian. Tylko za co? W Stanach Zjednoczonych w każdym sporcie istnieje instytucja draftu. Na początku każdego sezonu kluby wybierają najlepszych zawodników spośród chętnych graczy z drużyn uniwersyteckich, licealnych czy zagranicznych. Zespoły po kolei wybierają zawodników, aby ci dołączyli do ich drużyny. Aby wyrównać poziom ligi pierwsza zazwyczaj wybiera ostatnia drużyna poprzedniego sezonu, a jako ostatnia wybiera najlepsza, po czym znowu wybiera najsłabsza ekipa. Liczba rund w drafcie różni się. W koszykówce są tylko dwie rundy, w futbolu amerykańskim jest ich siedem, natomiast w baseballu jest ich aż dwadzieścia. Kiedy jakiś klub chce zatrudnić zawodnika innej drużyny, to zamiast gotówki wymienia się z klubem oddającym za prawo do któregoś z ich wyborów w przyszłym drafcie. Na przykład w 2010 uznawany za najlepszego koszykarza na świecie, LeBron James został trafił do drużyny do Miami Heat z Cleveland Cavaliers w zamian za dwa wybory w pierwszej rundzie i dwa wybory w drugiej rundzie przyszłych draftów.[17]

Drugą możliwością są wymiany zawodnik za zawodnika lub zawodnik za kilku zawodników. Takie wymiany zdarzają się zdecydowanie częściej niż na przykład w piłce nożnej, ponieważ w Stanach Zjednoczonych zawodnik nie ma prawa odmówić zostania wymienionym do innego klubu. Wyjątkiem jest sytuacja, w której zawodnik ma w kontrakcie klauzulę nie pozwalającą na wymianę, ale te znajdują się w umowach tylko najlepszych graczy.[18] Przykładowo w 2004 roku koszykarz Shaquille O'Neal trafił z Los Angeles Lakers do Miami Heat w zamian za trzech koszykarzy oraz wybór w pierwszej rundzie draftu w 2006 roku.[19]

[16] *Zarobki w Ekstraklasie. Ile pieniędzy krąży w polskiej lidze?*, STS, 2022, Dostępny w: https://www.sts.pl/blog/zarobki-w-ekstraklasie/, [Dostęp: 8.05.2022]
[17] *Cavaliers Complete Sign-and-Trade Deal with Miami,* NBA, 2010, Dostępny w: https://www.nba.com/cavaliers/news/trade_100710.html, [Dostęp: 10.05.2022]
[18] Rafferty S., *Which NBA players have a no-trade clause?*, The Sporting News, 2022, Dostępny w: https://www.sportingnews.com/in/nba/news/nba-players-no-trade-clause-veto/m7s2dfwbs8uyxcktsugkqudg, [Dostęp: 10.05.2022]
[19] Butler C., *This Day In Lakers History: Shaquille O'Neal Traded To Heat For Lamar Odom, Caron Butler, Brian Grant,* Lakers Nation [online], Dostępny w: https://lakersnation.com/this-day-in-lakers-history-shaquille-oneal-traded-to-heat-for-lamar-odom-caron-butler-brian-grant/2021/07/14/, [Dostęp: 10.05.2022]

Jednak w ligach amerykańskich najczęściej dochodzi do kombinacji tych dwóch typów wymiany. Wtedy zawodnik trafia do drużyny w zamian za innego, uznawanego za słabszego gracza i któryś z wyborów w drafcie.

Rozdział III

„Skoro on bierze, to czemu nie ja? Skoro on nie bierze, to czemu nie ja?”

3.1. Dylemat więźnia

Jednym z najbardziej znanych modeli teoriogrowych jest dylemat więźnia. Po raz pierwszy został on zaproponowany przez matematyków Merrilla Flooda i Melvina Dreszera w 1951 roku.[20] Jego nazwa pochodzi od historii przytaczanej przy opisywaniu tego problemu. Dwóch kryminalistów, podejrzanych o poważne przestępstwo, zostało przyłapanych na drobnym wykroczeniu i wziętych na przesłuchanie przez policję. Przestępcy zostali rozdzieleni do osobnych pomieszczeń i została im przedstawiona taka sama oferta. Gdy jeden z nich przyzna się do poważnego przestępstwa, to zostanie wypuszczony na wolność, podczas gdy jego partner będzie musiał spędzić 10 lat w więzieniu. Jeśli obaj przyznają się do winy, to spędzą za kratkami 8 lat. Natomiast jeśli żaden z nich nie przyzna się do zarzucanych mu czynów, to obaj zostaną skazani na rok pozbawienia wolności za drobne przestępstwo. Każdy z przestępców ma do wyboru jedną z dwóch strategii: *Przyznać się* lub *Nie przyznać się.* Dla obu z nich użyteczność każdego roku spędzonego w więzieniu to -1.

Tabela 3.1 *Macierz wypłat przestępców*

		Przestępca 2	
		Przyznać się	Nie przyznać się
Przestępca 1	Przyznać się	-8, -8	0, -10
	Nie przyznać się	-10, 0	-1 , -1

Źródło: *Winnicka J., Dominacja, równowaga Nasha, równowaga doskonała, Notatki z prezentacji PowerPoint z wykładu Wstęp do teorii gier, SGH, 2021*

Co w takiej sytuacji zrobią aresztowani? Patrząc z perspektywy przestępcy 1, jeśli przestępca 2 się przyzna, to przestępcy 1 też się opłaca przyznać, ponieważ woli spędzić 8 lat w więzieniu niż 10. Natomiast jeśli przestępca 2 postanowi się nie przyznać, to przestępcy 1 nadal opłaca się przyznać, ponieważ woli nie iść do więzienia wcale niż iść na rok. Podobnie jest z przestępcą 2. Gra jest symetryczna, więc jemu też bardziej opłaca się przyznać niezależnie od wyboru przestępcy 1.[21] Dla obu graczy strategia *Przyznać się* dominuje nieprzyznanie się. Z tego powodu w takiej sytuacji dylemacie więźnia zawsze się przyznają i pójdą do więzienia ma

[20] Chen J et al.., *Game Theory,* Stanford University [online], Dostępny w: https://cs.stanford.edu/people/eroberts/courses/soco/projects/1998-99/game-theory/prisoner.html [Dostęp: 30.03.2022]

[21] Webb J., *Game Theory: Decisions, Interaction and Evolution,* Springer Science & Business Media, 2007, s.62

8 lat. Para strategii (*Przyznać się*, *Przyznać się*) jest równowagą Nasha i żaden z przestępców nie może polepszyć swojej wypłaty, jeśli samodzielnie zmieni swój wybór. Obaj gracze dokonali logicznych wyborów, ale mimo tego nie doszli do rozwiązania, które byłoby dla nich Pareto optymalne. Jeśli zaufaliby sobie lub mogli w jakiś sposób dogadać, to obaj wybraliby nieprzyznanie się i spędziliby w więzieniu tylko rok, a nie osiem lat.[22]

3.2 Doping jako dylemat więźnia

We współczesnym, sprofesjonalizowanym sporcie bardzo istotne są zwycięstwa. Wysokie koszty prowadzenia kariery sportowej, ogromna presja kibiców i zainteresowanie mediów powodują, że niektórzy chcę wygrać za wszelką cenę. Taka bezkompromisowa postawa może skutkować pozytywną motywacją do wygranej, ale też może powodować próby oszustwa, dzięki którym zawodnik doprowadzi do zwiększenia swoich szans na wygraną. Takim oszustwem jest doping, czyli próba sztucznej stymulacji, której celem jest polepszenie wyników sportowych.[23] Najpopularniejszą, lecz nie jedyną, formą dopingu jest stosowanie niedozwolonych środków farmakologicznych, dzięki którym sportowiec jest w stanie stać się szybszym, silniejszym czy poprawić swoją wydolność. Stosowanie dopingu jest rygorystycznie zabronione oraz bardzo źle widziane. Zawodnik przyłapany na oszustwie traci nie tylko wszystkie zdobyte laury, ale także szacunek kibiców, którego już nigdy może nie odzyskać.
Czemu więc niektórzy decydują się na użycie nielegalnych środków? Sytuacja graczy podejmujących decyzję czy przyjąć doping czy nie jest analogiczna do dylematu więźnia. Jeśli dwóch zawodników o takim samym poziome sportowym zastanawia się czy wziąć doping, to mogą dojść do wniosku, że w każdej sytuacji doping jest dla nich najlepszą opcją.

3.2.1 Opis gry

Dwaj gracze decydują się czy użyć dopingu czy nie. Jeśli obaj gracze podejmą taką samą decyzję to będą oni prezentować taki sam poziom i żaden z nich nie będzie regularnie wygrywać. Jeśli jeden z nich weźmie doping, to zawsze będzie wygrywać ze swoim rywalem. Dla graczy użyteczność z wygranej jest większa od użyteczności z remisu, która jest większa od użyteczności z przegranej. Gracze ponoszą też niezerowy koszt związany z braniem

---

[22] Winnicka J., *Dominacja, równowaga Nasha, równowaga doskonała,* Notatki z prezentacji PowerPoint z wykładu Wstęp do teorii gier, SGH, 2021

[23] Breivik G., *The doping dilemma. Some game theoretical and philosophical considerations*. Sportwissenschaft, 1987

dopingu, ale dla zawodników korzyść z wygranej zamiast remisu przewyższa koszt ryzyka bycia złapanym na dopingu.

3.2.2 Równowagi Nasha

Tabela 3.2 *Macierz rozwiązań gry*

		Gracz 2	
		Nie brać dopingu	Brać doping
Gracz 1	Nie brać dopingu	Remis	Gracz 1 zawsze wygrywa
	Brać doping	Gracz 2 zawsze wygrywa	Remis z kosztem dopingu

Źródło: *Opracowanie własne*

Ocena strategii przez zawodników wygląda następująco:

- Jeśli rywal nie zdecyduje się wziąć dopingu, to zawodnikowi bardziej opłaca się wziąć doping i zawsze wygrywać.
- Jeśli rywal będzie brał doping, to zawodnikowi też bardziej opłaca się wziąć doping, ponieważ woli remisować niż przegrywać.

Z tego powodu równowagą Nasha jest para strategii (*Brać doping, Brać doping*)

Obaj zawodnicy zawsze odnoszą większą korzyść z wzięcia dopingu niezależnie od wyboru przeciwnika. Doprowadza to rozstrzygnięcia, które nie jest Pareto optymalne, ponieważ gracze będą prezentować taki sam poziom jak rywal, ale są obarczeni ryzykiem tego, że zostaną przyłapani na dopingu i poniosą konsekwencje z tym związane.

3.2.3 Wartości liczbowe

Wypłatom w macierzy można nadać wartości liczbowe. Niech korzyść z wygranej będzie oznaczona jako W, z remisu jako R, a z porażki jako P. Do tego niech wartość kosztu dopingu niech będzie oznaczona jako D.

Tabela 3.3 *Macierz wypłat dla graczy*

		Gracz 2	
		Nie brać dopingu	Brać doping
Gracz 1	Nie brać dopingu	R, R	P, W-D
	Brać doping	W-D, P	R-D, R-D

Źródło: *Opracowanie własne*

Gra może być zaklasyfikowana jako dylemat więźnia, jeśli $W - D > R$ czyli kiedy użyteczność z wygranej na dopingu jest większa od „czystego" remisu i $R - D > P$, czyli użyteczność z remisu na dopingu jest większa od „czystej" porażki. Dla przykładowych wartości $W = 5, R = 3, P = 1, D = 1$ macierz wygląda następująco:

Tabela 3.4 *Macierz wypłat graczy dla przykładowych wartości z pogrubionymi najlepszymi odpowiedziami*

		Gracz 2	
		Nie brać dopingu	Brać doping
Gracz 1	Nie brać dopingu	3, 3	1, **4**
	Brać doping	**4**,1	**2**, **2**

Źródło: *Breivik G., The doping dilemma. Some game theoretical and philosophical considerations. Sportwissenschaft, 1987*

3.2.4 Rozwiązania problemu

Federacje sportowe i organizacje antydopingowe dążą do tego, aby równowagą Nasha została para strategii (*Nie brać dopingu*, *Nie brać dopingu*). Dla obu graczy powinno zatem być prawdą, że:

- jeśli rywal nie będzie brał dopingu, to graczowi powinno się bardziej opłacać też nie brać dopingu, czyli $R > W - D$;
- jeśli rywal bierze doping to gracz powinien woleć go nie brać, czyli $P > R - D$.

Aby doprowadzić do tego, żeby te nierówności były prawdziwe, instytucje mają dwie opcje. Mogą próbować zwiększyć koszt dopingu D, albo mogą zmniejszyć różnice pomiędzy $W, R\ i\ P$. Oczywiście w rzeczywistości, jeśli federacje zmniejszą korzyść z wygranej, to zmniejszą też atrakcyjność widowiska, na której im przede wszystkim zależy. Instytucje, aby zmniejszyć liczbę sportowców używających dopingu, stale pracują nad zwiększeniem wykrywalności dopingu, utrudnianiem do niego dostępu, czy zwiększaniem kar za ich branie lub nie stawianie się do kontroli antydopingowych.

Dla każdego sportowca wartości W, R, P, D są różne i subiektywne. Złapany na dopingu wielokrotny mistrz poniesie większy koszt niż zawodnik na końcu stawki. Organizacje antydopingowe dążą do tego, aby dla każdego z nich wartość kosztu brania dopingu D była większa od $W - R$, czyli dodatkowej korzyści z wygrywania zamiast remisowania oraz od $R - P$, czyli od dodatkowej korzyści z remisowania zamiast przegrywania.

3.3 Przykłady stosowania dopingu

W historii sportu zawodnicy wielokrotnie ulegali pokusie dopingu. Choć nielegalne środki stosowano już w starożytnej Grecji czy Rzymie, to doping jaki znamy dzisiaj spopularyzował się po drugiej wojnie światowej.[24] W tej części zostaną opisane przykłady sposobów i powodów korzystania z dopingu w nowoczesnym sporcie.

3.3.1 Kolarstwo

Jednym ze sportów najbardziej znanych ze stosowania dopingu jest kolarstwo szosowe. Jest to sport bardzo wydolnościowy, w którym kolarze potrafią przejechać kilkaset kilometrów dziennie przez cały czas trwania zawodów.[25] Zawodnicy przez to doprowadzają swoje ciało do limitów, a ich poziom jest bardzo wyrównany, dlatego nawet małe zwiększenie wydolności dzięki dopingowi może zaowocować bardzo dużą korzyścią.. Z tego powodu doping w kolarstwie jest szeroko rozwinięty. Aktywny w latach 1998-2009 kolarz Tyler Hamilton o jego czasach mówi jako „Dzikim zachodzie kolarstwa". Sam w 2011 przyznał się do stosowania nielegalnych metod, w tym do transfuzji krwi polegającej na oddaniu dużej ilości krwi przez wypoczętego zawodnika i wtłoczeniu jej z powrotem podczas trwania zawodów. Gdy kolarz jest zmęczony spada mu procent czerwonych krwinek odpowiedzialnych za przenoszenie tlenu w organizmie. Po około tygodniu zawodów kolarzom z powrotem wtłaczano krew oddaną przez nich przed zawodami, co zwiększało ilość czerwonych krwinek w ich organizmie. Według Hamiltona takie wtłoczenie od razu dodawało dodatkowy efekt podczas następnego etapu.[26]

---

[24] Breivik, G., *The doping dilemma. Some game theoretical and philosophical considerations*, Sportwissenschaft, 1987

[25] Podczas Tour de France w 2022 roku kolarze przejadą 3328 kilometrów w ciągu 24 dni, w tym z 3 dniami przerwy. Średnia długość etapu to ok. 158,5 km, a najdłuższym będzie 6. etap z Binche do Longwy, podczas którego kolarze przejadą 220 km

[26] Bensinger G., *Tyler Hamilton explains blood doping in cycling*, In depth with Graham Bensinger, 2012

Podobne metody stosował Lance Armstrong, siedmiokrotny zwycięzca Tour de France. Amerykanin w 2013 roku przyznał się w wywiadzie do stosowania EPO, czyli erytropoetyny. Jest to naturalnie produkowany przez człowieka hormon odpowiadający za regulację poziomu czerwonych krwinek we krwi. Dodatkowe podawanie EPO zwiększa ilość krwinek, co daje większą siłę podczas wyścigu, spowalnia zakwaszanie mięśni i przyśpiesza regenerację kolarza.[27]

Czemu w kolarstwie doping był aż tak powszechny wśród zawodników? Korzyści ze zwiększonych możliwości były bardzo wysokie. Kolarze korzystający z dopingu odnotowywali lepsze wyniki i czuli się silniejsi. Do tego ryzyko zostania złapanym na dopingu było bardzo małe. Wystandaryzowane testy, takie jakie mamy dzisiaj, powstały dopiero w 2009.[28] Do 2000 roku testów EPO w ogóle nie było, więc jeśli kolarz nie został przyłapany na posiadaniu dopingu przed podaniem, nie mógł zostać ukarany. Po 2000 roku jakość testów była niska, co powodowało, że mogły zostać one odrzucone przez sąd. Tak się stało w 2005 roku, kiedy pozytywny wynik Lance'a Armstronga na EPO z próbki moczu z 1999 roku został odrzucony z powodu niepoprawnego wykonania testu.[29]

Oczywiście nie jest prawdą, że każdy kolarz w peletonie chciał brać doping. Mieli na to wpływ menedżerowie drużyn kolarskich, którzy przymuszali zawodników pomagających liderowi zespołu do przyjmowania nielegalnych substancji dla „dobra drużyny".[30] Menedżerowie wychodzili z założenia, że skoro inne zespoły każą wszystkim swoim kolarzom brać doping, to oni też powinni, aby nie być gorsi od rywali.

3.3.2 Baseball

Podejście kibiców do sportu nie jest takie same wszędzie na świece. W Europie najważniejszy jest wynik. Każdy sympatyk klubu piłkarskiego wolałby, aby jego drużyna wygrała 1-0 po nudnym meczu, niż przegrała spektakularne widowisko 3-4. Na trybunach większości klubów odbywa się zorganizowany, nomen omen, doping kibiców, którzy wybierają się na mecz po to, aby zagrzewać swój klub do walki, nawet kosztem pogorszenia możliwości oglądania meczu

[27] Wilkowicz P., *Czy EPO to cud czy blaga,* Sport.pl [online], 2017, Dostępny w: https://www.sport.pl/kolarstwo/7,64993,22062600,doping-czy-epo-to-cud-czy-blaga-erytropoetyna-moze-dzialac.html, [Dostęp: 3.05.2020]

[28] Faiss R. et al., *Prevalence Estimate of Blood Doping in Elite Track and Field Athletes During Two Major International Events,* Frontiers in Physiology, 2006

[29] Abt S., *Armstrong Is Accused of Doping*, The New York Times, 2005, Dostępny w: https://www.nytimes.com/2005/08/24/sports/othersports/armstrong-is-accused-of-doping.html, [Dostęp: 03.05.2022]

[30] Palmer B., *Riding High*, Slate [online], 2012, Dostępny w: https://slate.com/culture/2012/06/lance-armstrong-charged-why-is-there-so-much-doping-in-professional-cycling.html [Dostęp: 3.05.2022]

przez siebie, na przykład przez flagi zasłaniające kibicom widok na boisko. W Stanach Zjednoczonych oczywiście kibice też bardzo chcą, aby ich klub wygrał, ale idąc na mecz oczekują przede wszystkim rozrywki. Finał Super Bowl znany jest z koncertu w przerwie meczu i specjalnie przygotowanych reklam, które stanowią dużą część wydarzenia. Na boiskach zawsze są obecne cheerleaderki. Ogólnie rzecz biorąc, Ameryka jest trochę bardziej nastawiona na rozrywkę, podczas gdy w Europie ważniejsze niż w Stanach jest kto wygrał. Między innymi przez to środowisko sportowe podejrzewa, że w USA łatwiej obejść niektóre zasady związane ze stosowaniem dopingu farmakologicznego. Dziennikarz Bruce Schneider, gdy wyszły na jaw grzechy Lance'a Armstronga pisał: „Fani chcą zobaczyć napakowanych linebackerów[31], daleko uderzających baseballistów i szybkich jak błyskawica sprinterów. Tak więc, z mrugnięciem oka i kiwnięciem głową, amerykańscy egzekutorzy wykonują tylko takie testy, które łatwo jest ominąć."[32] Jest to poważne oskarżenie, które może jednak wytłumaczyć, dlaczego na dużą skalę stosowano doping w amerykańskiej lidze baseballu MLB.

Dla próbującego uderzyć piłkę zawodnika najlepszym rozwiązaniem jest home run, czyli wybicie piłki poza boisko, co pozwala baseballiście przebiec wszystkie bazy i zdobyć punkt. Uderzenie home runu nie jest łatwe, średnia takich zagrań na zawodnika w sezonie to tylko 1.39, natomiast najlepsi z tych specjalizujących się w uderzaniu są w ostatnich latach w stanie dojść do ok. 35 home runów na przestrzeni sezonu.[33] W 1921 legendarny baseballista Babe Ruth ustanowił rekord 59 uderzeń poza stadion, kilka lat później poprawiając się o 1 uderzenie. Dopiero w 1961 udało się komukolwiek przebić ten wynik, kiedy Roger Maris, zawodnik New York Yankees, podniósł poprzeczkę na poziom 61 home runów w sezonie. Na przestrzeni osiemdziesięciu lat rekord przesuwał się bardzo wolno, z tego powodu środowisko baseballowe było bardzo podekscytowane, kiedy 1998 roku nie jeden, a dwóch zawodników zdobywało home runy w tempie pozwalającym na przekroczenie dotychczasowego rekordu z dużym zapasem. Mark McGwire i Sammy Sosa reprezentujący odpowiednio St. Louis Cardinals i Chicago Cubs po bardzo dobrym początku sezonu rozpoczęli wyścig, który z nich zdobędzie więcej home runów. Ostatecznie obaj przebili dotychczasowy rekord. Sosa zakończył na 66, a McGwire ustanowił nowy rekord 70 uderzeń home run podczas sezonu. Trzy lata później obu

---

[31] Pozycja w futbolu amerykańskim.

[32] Schneier B., *Lance Armstrong and the Prisoners' Dilemma of Doping in Professional Sports*, Wired Magazine [online], 2012, Dostępny w: https://www.wired.com/2012/10/lance-armstrong-and-the-prisoners-dilemma-of-doping-in-professional-sports/ [Dostęp: 2.05.2022]

[33] Cooper B., *A look into Major League Baseball's massive home run surge in 2019*, Capital News Service [online], 2019, Dostępny w: https://cnsmaryland.org/2019/10/01/a-look-into-major-league-baseballs-massive-home-run-surge-in-2019/ [Dostęp: 3.05.2022]

z nich przebił Barry Bonds grający dla San Francisco Giants, który w 2001 roku uderzył home run 73 razy.[34]

Wyścig McGwire i Sosy cieszył się bardzo dużym zainteresowaniem mediów i kibiców, co zwiększyło zainteresowanie ligą MLB, która dotychczas borykała się ze spadającą oglądalnością. Z każdym home runem zwiększała się liczba osób na stadionie i przed telewizorami. Rekordowy sześćdziesiąty drugi home run McGwire'a, tylko w Stanach Zjednoczonych zobaczyło 43.1 miliona telewidzów. Był to wtedy najlepszy wynik dla transmisji baseballowej od 16 lat. „To był jeden z najbardziej heroicznych momentów w sporcie jakie kiedykolwiek widziałem." - mówił wtedy David Hill, ówczesny szef telewizji FOX pokazującej ten moment. „Nigdy nie widziałem osoby o pokorze i uprzejmości McGwire'a".[35]

Rekord Barry'ego Bondsa za to nie cieszył się popularnością skali wyścigu McGwire'a i Sosy. Powodem tego były złe relacje samego Bonds'a z dziennikarzami sportowymi, którzy nie chcieli przez to pisać o tempie, w którym zawodnik San Francisco Giants zdobywał punktujące uderzenia w trakcie sezonu. Do tego doszedł fakt, że Amerykanin rekordowy siedemdziesiąty pierwszy home run w sezonie uderzył 5 października 2001 roku, mniej niż miesiąc po 11 września. W przeciwieństwie do wyścigu z 1998 roku, kiedy Mark McGwire był uznawany za jednego z najlepszych baseballistów już od kilkunastu lat, Barry Bonds nigdy przed 2001 rokiem nie miał sezonu, w którym miałby przynajmniej 50 takich uderzeń.

W 2003 test na obecność sterydów w organizmie Sammy'ego Sosy okazał się pozytywny.[36] W tym samym roku, po nalocie policji na laboratorium w San Francisco, znaleziono dokumenty potwierdzające, że nielegalnych środków używał też Barry Bonds.[37] W 2007 Bonds został oficjalnie oskarżony o używanie sterydów anaboliczno-androgennych w tzw. raporcie Mitchella będącym rezultatem 20-miesięcznego śledztwa dotyczącego dopingu w lidze MLB. Ostatecznie łącznie osiemdziesięciu siedmiu zawodników zostało w nim oskarżonych o branie

[34] Martinez N., *The Steroid Eras Destruction Of Major League Baseball*, Bleacher Report [online], 2010, Dostępny w: https://bleacherreport.com/articles/480826-the-steroid-eras-destruction-of-major-league-baseball, [Dostęp: 4.05.2022]

[35] Sandomir R., *BASEBALL; Also King of Ratings and the T-Shirts*, The New York Times. 1998, Dostępny w: https://www.nytimes.com/1998/09/10/sports/baseball-also-king-of-ratings-and-the-t-shirts.html [Dostęp 4.05.2022]

[36] Bielik T., *Sammy Sosa Tests Positive for Steroids: America Is Not Surprised*, Bleacher Report [online], 2009, Dostępny w: https://bleacherreport.com/articles/200767-no-shock-sosa-tests-positive-for-steroids-america-not-surprised, [Dostęp: 4.05.2022]

[37] ESPN.com news services, *Barry Bonds steroids timeline,* ESPN [online], 2007, Dostępny w: https://www.espn.com/mlb/news/story?id=3113127, [Dostęp: 4.05.2022]

dopingu lub w bycie zamieszanym w pomaganie dopingowania innych.[38] Natomiast McGwire sam przyznał się do używania sterydów w 2010 roku, argumentując to chęcią zmniejszenia ryzyka kontuzji. „W latach 90. siedem razy byłem kontuzjowany i opuściłem 228 gier na przełomie pięciu lat.[39] Doświadczyłem wielu kontuzji, w tym naciągnięcia mięśni żeber, zerwania mięśnia i złamania przewlekłego mojej lewej pięty oraz zerwania mięśnia prawej pięty. To było dla mnie kilka bardzo nieszczęśliwych lat i mówiłem sobie, że sterydy mogą mi pomóc szybszej wrócić do zdrowia. Myślałem, że pomogą mi się uzdrowić i zapobiec następnym kontuzjom."[40]

Koszt brania dopingu dla zawodników był bardzo mały, a zysk z niego bardzo duży. Poprawianie rekordów przez zawodników przyniosło im gratyfikacje finansowe i materialne. Sosa, Bonds i McGwire zarabiali miliony. Sammy Sosa w 2001 podpisał nowy kontrakt z jego zespołem Chicago Cubs, dzięki któremu zarobił 72 miliony dolarów w cztery sezony.[41] McGwire, tylko za swój sześćdziesiąty drugi home run, dostał nowy samochód sportowy marki Corvette.[42] Za to liga MLB czerpała korzyści z dodatkowego zainteresowania podpisując nowy kontrakt telewizyjny przed sezonem 2000 na 2.5 miliarda dolarów.[43] Dlatego też nikomu nie opłacało się starać o rywalizację bez dopingu. Gdy baseballiści zdali sobie sprawę, że ich rywale zażywają sterydy, to oni też się na to decydowali, ponieważ jeśliby tego nie zrobili, to nie mieliby szans w rywalizacji o najlepszego uderzającego.

Dziś uważa się, że dopingu w baseballu jest znacznie mniej niż na przełomie wieków. Od momentu, gdy na jaw wyszedł doping McGwire'a i Sosy, MLB straciło dwa razy tyle widzów, ile zyskało do tego momentu od 1998.[44] Ani McGwire, ani Sosa, ani Bonds nie znaleźli się w baseballowym Hall of Fame, organizacji honorującej najlepszych zawodników w historii dyscypliny. Do tego Barry Bonds w 2007 roku został skazany na 2 lata w zawieszeniu, za

[38] Mitchell G., *Report to the commissioner of baseball of an independent investigation into the illegal use of steroids and other performance enhancing substances by players in major league baseball,* DLA Piper US, 2007

[39] Podczas sezonu baseballowego drużyny grają po 162 mecze w sezonie.

[40] Garcia B., *Mark McGwire's Reason For Taking Steroids Isn't What You'd Think*, Sports Casting [online], 2020, Dostępny w: https://www.sportscasting.com/mark-mcgwires-reason-for-taking-steroids-isnt-what-youd-think/, [Dostęp: 4.05.2022]

[41] Associated Press, *Sosa gets $72M extension*, ESPN [online], 2001, Dostępny w: http://www.espn.com/mlb/news/2001/0315/1155787.html, [Dostęp: 4.05.2022]

[42] Fallstrom R., *McGwire's '62 Corvette To Be Shown,* Associated Press, 2000, Dostępny w: https://apnews.com/article/54233dde9af526c90d92ecbe5f19ee5a, [Dostęp: 4.05.2022]

[43] Associated Press, *Fox pays for exclusive rights to playoffs*, ESPN [online], 2001, Dostępny w: http://a.espncdn.com/mlb/news/2000/0925/777438.html, [Dostęp: 4.05.2022]

[44] Martinez N., *The Steroid Eras Destruction Of Major League Baseball*, Bleacher Report [online], 2010, Dostępny w: https://bleacherreport.com/articles/480826-the-steroid-eras-destruction-of-major-league-baseball, [Dostęp: 4.05.2022]

krzywoprzysięstwo podczas rozprawy dotyczącej laboratorium, które pomagało mu zażywać sterydy.

Rozdział IV

Zdrowa rywalizacja – strategie mieszane w sporcie na przykładach

W tym rozdziale zostanie opisany dobór optymalnych strategii mieszanych w sportowych grach 2 x 2, w których nie ma równowag Nasha w strategiach czystych. Model, inspirowany m.in. trwającym sezonem Formuły 1, został stworzony, aby zanalizować optymalne wybory strategii w wyścigach samochodowych. Oprócz tego zostaną przytoczone także gry 2 x 2 w piłce nożnej na przykładzie rzutów karnych i w tenisie w formie serwisu.

4.1 *Jazda bez trzymanki* – strategie mieszane w grze o sumie zerowej

4.1.1 Opis gry

Podczas wyścigów samochodowych często dochodzi do sytuacji, w której dwóch kierowców jedzie takim samym tempem, jeden tuż przed drugim, lecz z racji minimalnej różnicy w szybkości jazdy, kierowca jadący jako drugi w żaden sposób nie może wyprzedzić swojego rywala. Gdy w trakcie takiej rywalizacji przychodzi moment, w którym kierowcy powinni zjechać na pit-stop i zmienić opony, to gracze starają się tak wybrać moment na zatrzymanie, aby ostatecznie zająć miejsce przed przeciwnikiem.

Upraszczając grę można ją sprowadzić do rywalizacji pomiędzy dwoma kierowcami. Kierowca 1 jedzie jako pierwszy, a kierowca 2 jako drugi. Te dwa samochody jadą zderzak w zderzak, czyli jeden z nich prowadzi małą różnicą, ale drugi nie jest w stanie wyprzedzić go na torze. Zbliża się optymalny czas na obowiązkowy pit-stop. Gracze mają dwie możliwości: zjechać do boksu teraz lub po następnym okrążeniu. Jeśli obaj zjadą w tym samym momencie, utrzymany zostanie status quo. Kierowcy jadą też na tyle blisko siebie, że kierowca 2 nie jest w stanie zareagować na to, czy kierowca 1 się zatrzymuje czy nie.

W wyścigach samochodowych kierowca, w celu wygrania gry, może spróbować specjalnie zatrzymać się na zmianę opon przed przeciwnikiem. Taka strategia nazywa się *undercut*. Kierowca chce wtedy wykorzystać nowe, szybkie opony, aby szybciej przejechać moment pomiędzy jego pit-stopem, a pit-stopem przeciwnika.

Jednak nie zawsze bardziej opłaca się kierowcy zatrzymywać jako pierwszym. Nowe opony, od razu po pit-stopie, mogą być zimne i utrudniać prowadzenie samochodu. Wtedy kierowca może woleć zatrzymać się jako drugi. Gdy zatrzyma się jego przeciwnik, to będzie on chciał to wykorzystać i przejechać kolejne okrążenie przed jego własnym pit-stopem szybciej od oponenta dzięki starszym, ale rozgrzanym oponom. Taka strategia nazywa się *overcut*.

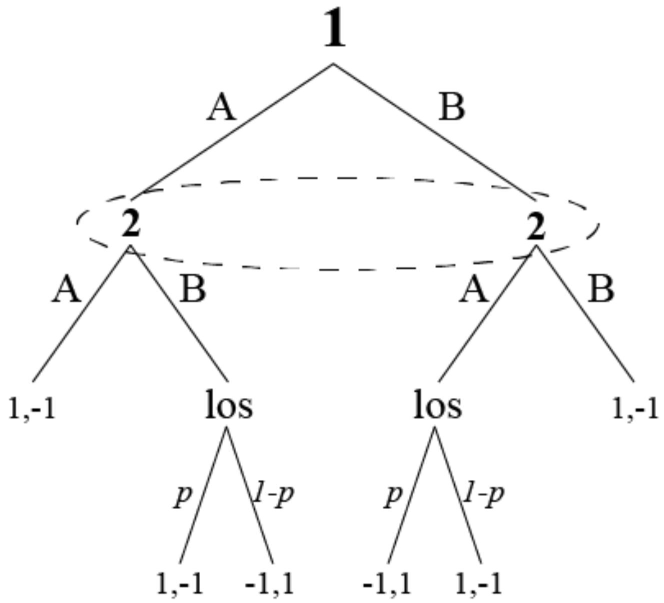
Nigdy nie jest pewne, że jedna z opisanych strategii będzie zawsze lepsza. Na każdym wyścigu istnieje ich pewne prawdopodobieństwo sukcesu, czyli ukończenia rywalizacji na pierwszym miejscu. Sukcesem strategii *undercut* jest sytuacja, w której kierowca, który pierwszy się zatrzymał, prowadzi po pit-stopach obu graczy. Za to sukcesem strategii *overcut* jest wynik, w którym kierowca, który zmienił opony jako drugi zakończy sekwencję pit-stopów obu graczy na pierwszym miejscu.
Częstotliwość sukcesu danej strategii jest zależna od m.in. rodzaju samochodów, typu opon oraz toru, na którym kierowcy się ścigają. Na przykład w Formule 1 częściej opłaca się kierowcom zatrzymywać jako pierwszym (czyli stosować strategię *undercut*), dzięki kocom grzewczym, które podgrzewają opony przed nałożeniem ich na samochód i od razu gwarantują przyczepność. Natomiast w Formule 2, gdzie takich koców grzewczych nie ma, częściej opłaca się zatrzymywać jako drugim (*overcut*), ponieważ zimne opony dopiero po kilku okrążeniach przyjmują pełny poziom przyczepności.

Ostatecznie jednak, kiedy w grze jest tylko dwóch kierowców, zawsze bardziej opłaca się zatrzymać albo jako pierwszym, albo jako drugim. Z tego powodu suma prawdopodobieństwa tego, że kierowca będzie pierwszy, jeśli zastosuje *undercut* i prawdopodobieństwa tego, że kierowca będzie pierwszy, jeśli wykona *overcut* jest równa 1. Literą p można oznaczyć prawdopodobieństwo sukcesu strategii *undercut*, wtedy prawdopodobieństwo sukcesu strategii *overcut* jest równe $1-p$, gdzie p oraz $1-p \in (0,1)$. Przyjmujemy, że wartościami użyteczności dla kierowcy za bycie pierwszym (wygranym) będzie 1, a bycie drugim (przegranym) -1.

4.1.2 Postać rozwinięta i normalna gry

Gracze mają dwa wybory, mogą zjechać na pit-stop teraz, lub po następnym okrążeniu. Jako A oznaczono wybór *Pit-stop teraz*, jako B *Pit-stop po następnym okrążeniu.*

Ilustracja 4.1 *Postać rozwinięta gry*



Źródło: *Opracowanie własne*

Postać normalna gry wygląda następująco:

Tabela 4.1 *Postać normalna gry*

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Kierowca 2</td></tr>
<tr><td>Pit-stop teraz</td><td>Pit-stop po następnym okrążeniu</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Kierowca 1</td><td>Pit-stop teraz</td><td>$1, -1$</td><td>$1 * p + (-1) * (1-p) , (-1) * p + 1 * (1-p)$</td></tr>
<tr><td>Pit-stop po następnym okrążeniu</td><td>$(-1) * p + 1 * (1-p) , 1 * p + (-1) * (1-p)$</td><td>$1 , -1$</td></tr>
</table>

Źródło: *Opracowanie własne*

Wypłata dla każdego z graczy to użyteczność oczekiwana.

Po uproszczeniu macierz wygląda następująco:

Tabela 4.2 *Postać normalna gry ze skróconymi wypłatami*

		Kierowca 2	
		Pit-stop teraz	Pit-stop po następnym okrążeniu
Kierowca 1	Pit-stop teraz	$1, -1$	$2p - 1, -2p + 1$
	Pit-stop po następnym okrążeniu	$-2p + 1, 2p - 1$	$1, -1$

Źródło: *Opracowanie własne*

Czyli na przykład:

dla $p = 0.8$ dla pary strategii (*Pit-stop teraz, Pit-stop po następnym okrążeniu*) wypłaty wynoszą $(0.6, -0.6)$,

dla $p = 0.5$ to będzie $(0,0)$,

a dla $p = 0.3$ to będzie $(-0,4, 0.4)$.

Wartości $2p - 1$ oraz $-2p + 1$ to średnie ważone wypłat 1 oraz -1, więc obie należą do przedziału $(-1,1)$.

4.1.3 Równowagi Nasha w strategiach czystych

Czy w takim razie ta gra ma równowagi Nasha?

Dla kierowcy 1:

- Jeśli kierowca 2 będzie pitował teraz, to kierowcy 1 też bardziej opłaca się pitować teraz, ponieważ 1 > $-2p + 1 \in (-1,1)$
- Jeśli kierowca 2 zatrzyma się po następnym okrążeniu, to kierowcy 1 bardziej opłaca się postąpić tak samo, ponieważ $2p - 1 \in (-1,1)$ < 1.

Dla kierowcy 2:

- Jeśli kierowca 1 będzie pitował teraz, to kierowcy 2 bardziej się opłaca poczekać jedno okrążenie, ponieważ -1 < $-2p + 1 \in (-1,1)$
- Jeśli kierowca 1 będzie się zatrzymywał po następnym okrążeniu, to kierowcy 2 bardziej się opłaca zatrzymać teraz ponieważ $2p - 1 \in (-1,1)$ > -1.

Zatem kierowca 1 zawsze będzie dążył to postąpienia tak samo jak kierowca 2, a jego oponent zawsze będzie chciał postąpić na odwrót. W takiej sytuacji nie ma równowag Nasha w strategiach czystych

Tabela 4.3 *Macierz wypłat gry z pogrubionymi najlepszymi odpowiedziami graczy na daną strategię przeciwnika*

		Kierowca 2	
		Pit-stop teraz	Pit-stop po następnym okrążeniu
Kierowca 1	Pit-stop teraz	$\mathbf{1}, -1$	$2p - 1, \mathbf{-2p + 1}$
	Pit-stop po następnym okrążeniu	$-2p + 1, \mathbf{2p - 1}$	$\mathbf{1}, -1$

Źródło: *Opracowanie własne*

4.1.4 Równowagi Nasha w strategiach mieszanych

Należy zatem sprawdzić jakie będą równowagi Nasha w strategiach mieszanych, to jest z jakim prawdopodobieństwem gracze powinni wybrać dane strategie, aby zmaksymalizować swoje wypłaty.

Dla ułatwienia obliczeń strategie *Pit-stop teraz* i *Pit-stop po następnym okrążeniu* oznaczono kolejno A i B dla gracza 1 i 2.

Tabela 4.4 *Macierz wypłat graczy z zamienionymi nazwami strategii*

		Kierowca 2	
		A (y)	B $(1-y)$
Kierowca 1	A (x)	$\mathbf{1}, -1$	$2p - 1, \mathbf{-2p + 1}$
	B $(1-x)$	$-2p + 1, \mathbf{2p - 1}$	$\mathbf{1}, -1$

Źródło: *Opracowanie własne*

Szukamy takich wartości x i y, które zmaksymalizują oczekiwane wypłaty dla obu graczy.

$$E_{u1}(x,y) = xy + (2p-1)x(1-y) + (-2p+1)(1-x)y + (1-x)(1-y) \rightarrow max$$

$$E_{u2}(x,y) = -xy + (-2p+1)x(1-y) + (2p-1)(1-x)y + -(1-x)(1-y) \rightarrow max$$

Najlepszą odpowiedzią gracza 1 na strategię mieszaną gracza 2 jest najlepsze x dla zadanego y.[45] Dla gracza 1:

$$E_{u1}(x,y) = x[\boldsymbol{y} + (\boldsymbol{2p-1})(\boldsymbol{1-y})] + (1-x)[(\boldsymbol{-2p+1})\boldsymbol{y} + (\boldsymbol{1-y})].$$

Niech $E_{u1}(\mathrm{A},y) = y + (2p-1)(1-y) = -2py + 2n + 2y - 1$ oznacza oczekiwaną wypłatę dla gracza 1 z czystej strategii *Pit-stop teraz*, gdy gracz 2 wybierze strategię *Pit-stop teraz* z prawdopodobieństwem y i *Pit-stop po następnym okrążeniu* z prawdopodobieństwem $(1-y)$.

Analogicznie, niech $E_{u1}(\mathrm{B},y) = (-2p+1)y + (1-y) = -2py + 1$ oznacza oczekiwaną wypłatę dla gracza 1 z czystej strategii *Pit-stop po następnym okrążeniu,* gdy gracz 2 wybierze strategię *Pit-stop teraz* z prawdopodobieństwem y i *Pit-stop po następnym okrążeniu* z prawdopodobieństwem $(1-y)$.

Wynika stąd, że:

$$E_{u1}(x,y) = xE_{u1}(\mathrm{A},y) + (1-x)E_{u1}(\mathrm{B},y).$$

Dla gracza 2 analogiczne oczekiwane wypłaty dla kolejnych czystych strategii to:

$$E_{u2}(x,\mathrm{X}) = -x + (2p-1)(1-x) = -2px + 2p - 1$$

$$E_{u2}(x,Y) = (-2p+1)x + -(1-x) = -2px + 2x - 1$$

Wartość oczekiwana wypłaty gracza 2 to $E_{u2}(x,y) = yE_{u2}(x,\mathrm{A}) + (1-y)E_{u2}(x,B)$[46]

Dalej wyznaczamy najlepszą odpowiedź gracza 1:

- Strategia *Pit-stop teraz* jest lepsza od strategii *Pit-stop po następnym okrążeniu* ($A > B$) gdy:

$$-2py + 2p + 2y - 1 > -2py + 1$$

$$2y > 2 - 2p$$

$$y > 1 - p$$

[45] Winnicka J., *Równowagi Nasha w strategiach mieszanych,* Notatki z prezentacji PowerPoint z wykładu Wstęp do teorii gier, SGH, 2021
[46] Tamże

- $A \approx B$:

$$-2py + 2p + 2y - 1 = -2py + 1$$
$$y = 1 - p$$

- $A \prec B$:

$$-2py + 2p + 2y - 1 < -2py + 1$$
$$y < 1 - p$$

Czyli dla gracza 1 strategia *Pit-stop teraz* jest lepsza od strategii *Pit-stop po następnym okrążeniu* dla $y > 1 - p$, strategie są równie dobre, gdy $y = 1 - p$ oraz strategia *Pit-stop teraz* jest gorsza od strategii *Pit-stop po następnym okrążeniu* dla $y < 1 - p$.

Dla gracza 2:

- $A \succ B$:

$$-2px + 2p - 1 > -2px + 2x - 1$$
$$2p > 2x$$
$$x < p$$

- $A \approx B$:

$$-2px + 2p - 1 = -2px + 2x - 1$$
$$x = p$$

- $A \prec B$:

$$-2px + 2p - 1 > -2px + 2x - 1$$
$$x > p$$

Analogicznie, dla gracza 2 strategia Pit-*stop teraz* jest lepsza od strategii *Pit-stop po następnym okrążeniu* dla $x < p$, tak samo dobra, gdy $x = n$ i gorsza, gdy $x > p$.

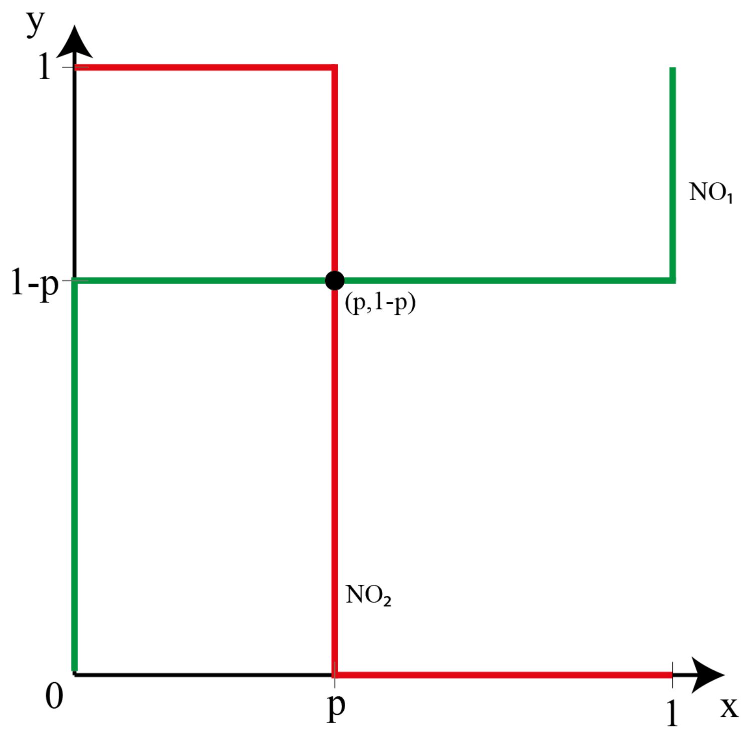
Jeśli $y < 1 - p$, to $A \prec B$, czyli gracz 1 wybierze strategię B ($x = 0$).
Gdy $y = 1 - p$, to $A \approx B$, czyli dla gracza 1 nie ma różnicy pomiędzy A i B, to znaczy gracz 1 może wybrać dowolne $x \in [0,1]$.
Jeśli $y > 1 - p$, to $A \succ B$, czyli gracz 1 wybierze A ($x = 1$).

Gdy $x < p$, to $A \succ B$, czyli gracz 2 wybierze strategię A ($y = 1$).

Jeśli $x = p$, to $A \approx B$, czyli dla gracza 2 nie ma różnicy pomiędzy A i B, to znaczy gracz 2 może wybrać dowolne $y \in [0,1]$.
Gdy $x > p$, to $A \prec B$, czyli gracz 2 wybierze B ($y = 0$).

Teraz można narysować wykresy najlepszych odpowiedzi graczy i zobaczyć, w którym miejscu się przecinają.

Wykres 4.1 *Wykresy najlepszych odpowiedzi graczy*



Źródło: *Opracowanie własne*

NO_1 i NO_2 to najlepsze odpowiedzi odpowiednio gracza 1 i 2

Na wykresie widać, że istnieje jedna równowaga Nasha w strategiach mieszanych:

$$(x = p;\ y = 1 - p)$$

4.1.5 Równowagi Nasha w przykładzie

Przykładowo dla $p = 0.8$, gracz 1 powinien wybrać strategię *Pit-stop teraz* z prawdopodobieństwem 0.8, a strategię *Pit-stop po następnym okrążeniu* z prawdopodobieństwem 0.2. Natomiast gracz 2 powinien wybrać *Pit-stop teraz* prawdopodobieństwem 0.2, a *Pit-stop po następnym okrążeniu* z 0.8.

Jest to bardzo ciekawy rezultat, ponieważ wydaje się nieintuicyjny. Jeśli ogólnie w starciu kierowców bardziej opłaca się zatrzymywać jako pierwszy, to kierowca 2 powinien częściej zatrzymywać się jako drugi. Natomiast jeśli bardziej opłaca się zajeżdżać na zmianę opon jako drugi, to kierowca 2 powinien częściej zjeżdżać jak pierwszy!

Taka sytuacja ma miejsce, ponieważ gracze znają nawzajem swoje wypłaty i gracz 1 wie, co najbardziej się opłaca, więc sam będzie podążał za najlepszą strategią. Jeśli gracz 2 postąpi tak samo jak gracz 1, to rezultat na pewno będzie na jego niekorzyść. Gracz 2 będzie chciał postępować odwrotnie niż gracz 1 i dać sobie szansę na wygranie gry.

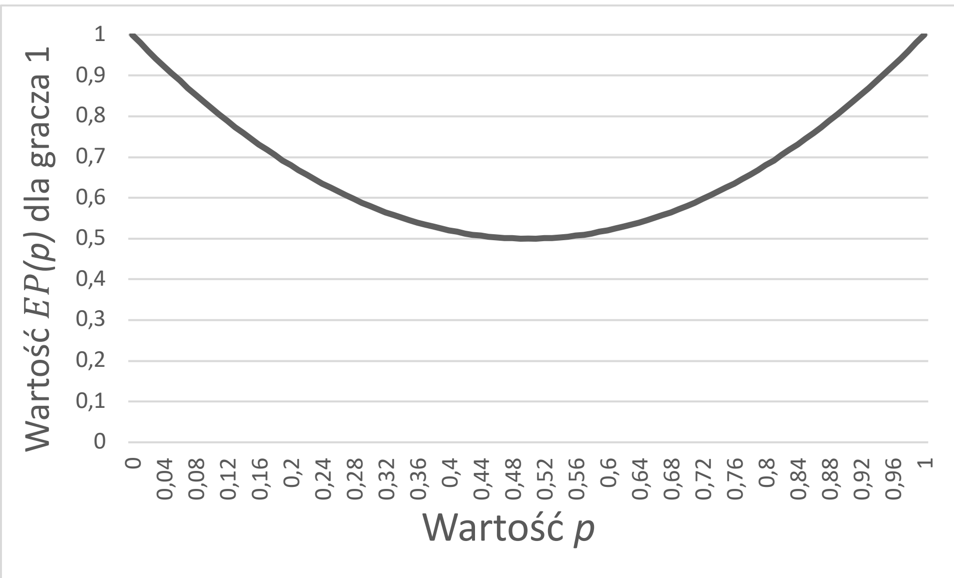
4.1.6 Wartości oczekiwane

Jakie więc są oczekiwane wypłaty graczy? Wartość oczekiwana dla każdego z graczy to suma ich możliwych wypłat razy prawdopodobieństwo tychże wypłat. Wartości oczekiwane dla graczy 1 i 2 zostanę oznaczone kolejno jako $EP_1 \ i \ EP_2$.

$$EP_1(p) = 1 * p(1-p) + (2p-1)p * p + (-2p+1)(1-p)(1-p) + 1 * (1-p)p =$$
$$2p^2 - 2p + 1$$
$$EP_2(p) = -p(1-p) + (-2p+1)p * p + (2p-1)(1-p)(1-p) - (1-p)p =$$
$$-2p^2 + 2p - 1$$

Oczywiście zachodzi równość $EP_1(p) = -EP_2(p)$, ponieważ opisana gra jest grą o sumie zerowej.

Wykres 4.2 *Wykres funkcji wartości oczekiwanej gracza 1 w zależności do wartości p*



Źródło: *Opracowanie własne*

Licząc, dla jakiego p pochodna EP_1 jest równa 0, można wyznaczyć p, dla którego wartość oczekiwana z gry dla gracza 1 będzie najmniejsza.

$$\frac{d}{dp}EP_1(p) = 4p - 2$$

$$4p - 2 = 0$$

$$p = \frac{1}{2}$$

Wartość oczekiwana wypłaty dla gracza 1 jest najniższa dla p = $\frac{1}{2}$ i jest wtedy równa $\frac{1}{2}$. Ale jakie będzie wtedy prawdopodobieństwo zamiany pozycji kierowców?

4.1.7 Prawdopodobieństwo sukcesu

Oznaczając prawdopodobieństwo, że gracz będzie pierwszy jako z, dla gracza 1 mamy:

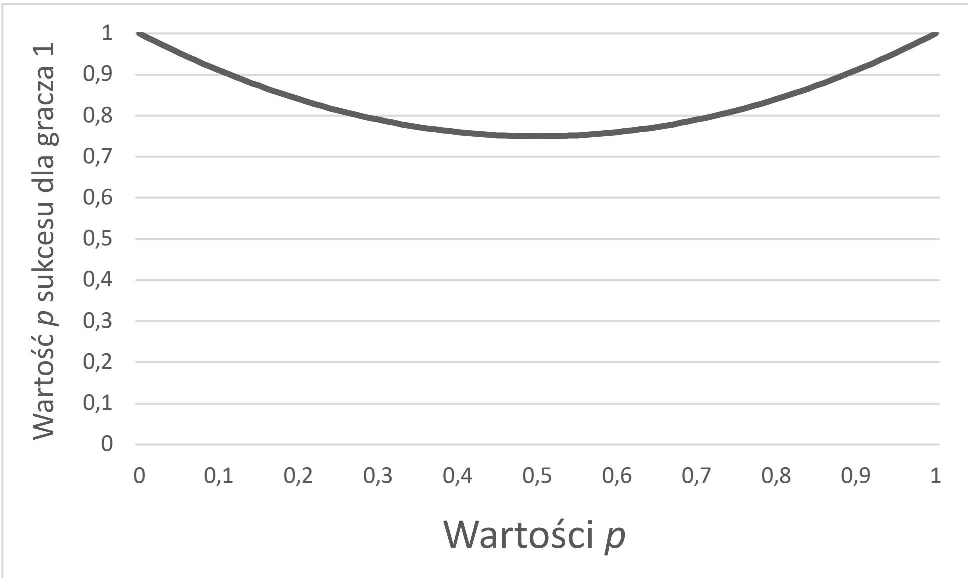
$$EP_1(p) = 1 * z + (-1) * (1 - z)$$

$$2p^2 - 2p + 1 = 1 * z + (-1) * (1 - z)$$

$$2p^2 - 2p + 1 = -1 + 2z$$

$$p^2 - p + 1 = z$$

Wykres 4.3 *Wykres funkcji prawdopodobieństwa sukcesu gracza 1 w zależności do wartości p*



Źródło: *Opracowanie własne*

Prawdopodobieństwo sukcesu gracza 1 będzie najmniejsze dla tego p, dla którego najmniejsza jest jego oczekiwana wypłata, czyli dla $p = \frac{1}{2}$ i jest wtedy równe:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4} = 75\%$$

Czyli dla $p = 0.5$ prawdopodobieństwo zamiany kolejności kierowców to 25%.

Dla innych przykładowych wartości p prawdopodobieństwo sukcesu gracza 1 wygląda następująco:
dla $p = 0.8$ to będzie to 84%, a dla $p = 0.3$ to 79%.

4.1.8 Całkowite wartości p.

Do tej pory analizowane były sytuacje, w których $p \in (0{,}1)$, czyli w których wynik strategii *undercut* nie był w 100% ustalony z góry. Teraz zostaną uwzględnione sytuacje, w których prawdopodobieństwo sukcesu strategii jest równe 1 lub 0.

4.1.8.1 $p = 1$

Gdy $p = 1$, czyli zastosowanie strategii undercut na pewno zakończy się sukcesem, wypłaty graczy są następujące:

$$2p - 1 = 1,$$
$$-2p + 1 = -1.$$

Macierz wypłat prezentuje się następująco:

Tabela 4.5 *Macierz wypłat dla* $p = 1$

		Kierowca 2	
		Pit-stop teraz	Pit-stop po następnym okrążeniu
Kierowca 1	Pit-stop teraz	$1, -1$	$1, -1$
	Pit-stop po następnym okrążeniu	$-1, 1$	$1, -1$

Źródło: *Opracowanie własne*

W tej sytuacji strategia *Pit-stop teraz* zarówno dla gracza pierwszego jak i drugiego jest strategią słabo dominującą strategię *Pit-stop po następnym okrążeniu*. Czyli dla każdego gracza wypłata ze strategii *Pit-stop teraz* jest zawsze niemniejsza od wypłaty ze strategii *Pit-stop po następnym okrążeniu*. Czy w takim razie para strategii (*Pit-stop teraz, Pit-stop teraz*) jest jedyną równowagą Nasha? Niekoniecznie, jako że w grze dla $p = 1$ istnieją dwie równowagi Nasha.

Tabela 4.6 Macierz wypłat dla $p = 1$ z pogrubionymi najlepszymi odpowiedziami na daną strategię oponenta

		Kierowca 2	
		Pit-stop teraz	Pit-stop po następnym okrążeniu
Kierowca 1	Pit-stop teraz	$\mathbf{1}, \mathbf{-1}$	$\mathbf{1}, \mathbf{-1}$
	Pit-stop po następnym okrążeniu	$-1, \mathbf{1}$	$\mathbf{1}, -1$

Źródło: *Opracowanie własne*

Oprócz pary strategii (*Pit-stop teraz, Pit-stop teraz*) równowagą Nasha jest też para (*Pit-stop teraz, Pit-stop po następnym okrążeniu*). W obu tych sytuacjach, żaden z graczy nie może zyskać zmieniając swoją strategię.

Tym też różni się ta sytuacja, od $p \in (0,1)$. Używając wcześniej ustalonej strategii mieszanej $(p, 1-p)$ gracze zawsze znajdywaliby się w sytuacji (*Pit-stop teraz, Pit-stop po następnym okrążeniu*). Natomiast dla $p = 1$ gracz 2 wie, że gracz 1 zawsze wybierze strategię *Pit-stop teraz*, więc obojętny jest mu wybór konkretnej strategii, ponieważ niezależnie od swojego wyboru zawsze otrzyma wypłatę -1, czyli nigdy nie dojdzie do zamiany pozycji kierowców.

4.1.8.2 $p = 0$

Dla $p = 0$, sytuacja jest podobna, ponieważ też istnieją dwie równowagi Nasha. Macierz wypłat wygląda następująco:

Tabela 4.7 Macierz wypłat dla $p = 0$ z pogrubionymi najlepszymi odpowiedziami na daną strategię oponenta

		Kierowca 2	
		Pit-stop teraz	Pit-stop po następnym okrążeniu
Kierowca 1	Pit-stop teraz	$\mathbf{1}, -1$	$-1, \mathbf{1}$
	Pit-stop po następnym okrążeniu	$\mathbf{1}, \mathbf{-1}$	$\mathbf{1}, \mathbf{-1}$

Źródło: *Opracowanie własne*

Odwrotnie niż przy $p = 1$ to strategia *Pit-stop po następnym okrążeniu* słabo dominuje strategię *Pit-stop teraz* dla obu graczy, lecz po zaznaczeniu na macierzy najlepszych wyborów w odpowiedzi na daną strategię widać, że w grze mamy dwie równowagi Nasha: (*Pit-stop po następnym okrążeniu, Pit-stop teraz*) oraz (*Pit-stop po następnym okrążeniu, Pit-stop po następnym okrążeniu*). Gracz 1 zawsze wybierze strategię *Pit-stop po następnym okrążeniu*, więc dla gracza 2 jest obojętnie jaką strategię wybierze, ponieważ zawsze otrzyma wypłatę -1.

4.2 *Jak ty to, to ja tamto* – Indukcja wsteczna

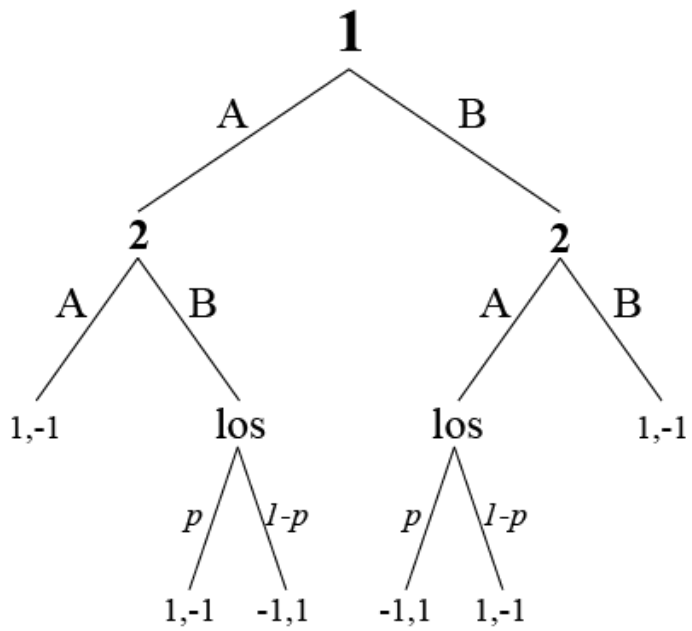
Do tej pory rozważana była gra, w której gracze podejmowali swoje decyzje jednocześnie. Natomiast w takiego rodzaju pojedynkach w wyścigach samochodowych mają także miejsce sytuacje, w których różnica pomiędzy pierwszym, a drugim jest większa i drugi kierowca może zareagować na wybór oponenta. Rozważmy więc grę identyczną jak w podrozdziale 2.2, z tą różnicą, że gracz 2 może zareagować na wybór gracza 1.

Oto postać rozwinięta owej gry:

A – *Pit-stop teraz*

B – *Pit-stop po następnym okrążeniu*

Ilustracja 4.2 *Postać rozwinięta gry*

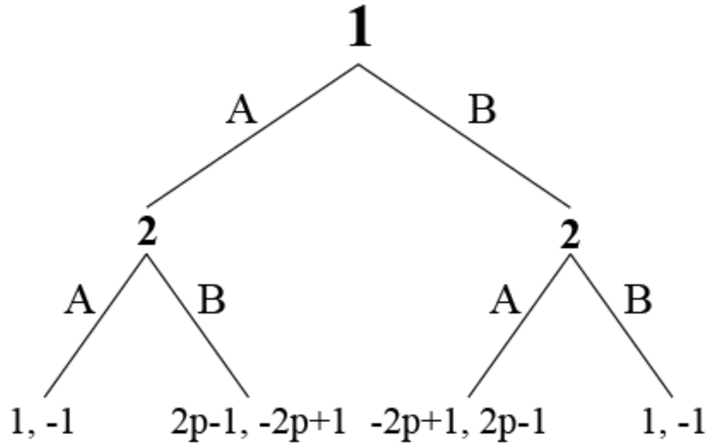


Źródło: *Opracowanie własne*

Tak samo jak dla gdy gry z podrozdziału 3.2, kiedy gracze postępują tak samo na pewno nie dojdzie do zamiany.

Po obliczeniu wartości oczekiwanych postać rozwinięta wygląda następująco:

Ilustracja 4.3 Postać rozwinięta gry po obliczeniu wypłat oczekiwanych



Źródło: *Opracowanie własne*

Dla takiej postaci drzewka można zastosować indukcję wsteczną. W ten sposób przewiduje się w jaki sposób gracze zachowają się w grze.

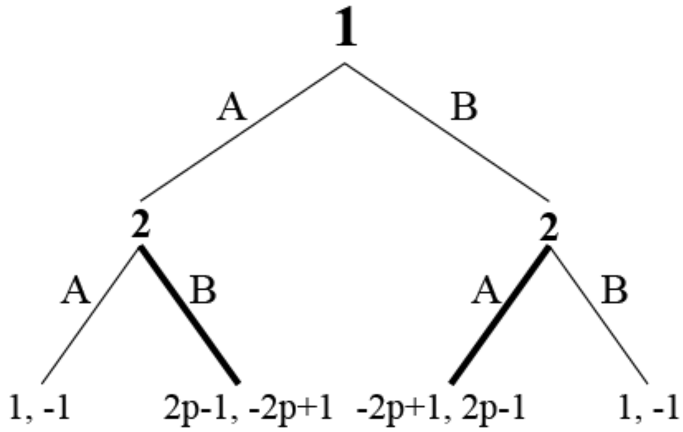
Jeśli gracz 1 wybierze strategię *Pit-stop teraz,* to gracz drugi zawsze wybierze strategię *Pit-stop po następnym okrążeniu*, ponieważ dla każdego $p \in (0, 1)$

$$-1 < -2p + 1.$$

Natomiast jeśli gracz 1 wybierze strategię *Pit-stop po następnym okrążeniu,* to gracz drugi zawsze wybierze strategię *Pit-stop teraz*, ponieważ dla każdego $p \in (0, 1)$

$$-1 < 2p - 1.$$

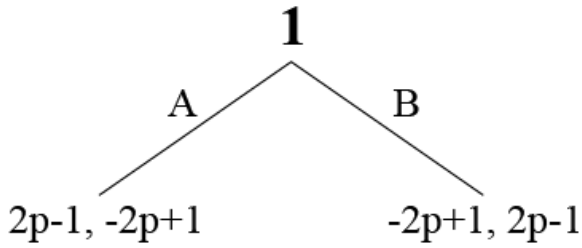
Ilustracja 4.4 Postać rozwinięta gry po zaznaczeniu wyborów gracza 2



Źródło: *Opracowanie własne*

Co za tym idzie, jeśli gracz 1 wybierze strategię *Pit-stop teraz* to jego wypłatą będzie $2p - 1$, natomiast w odwrotnej sytuacji jego wypłatą będzie $-2p + 1$.

Ilustracja 4.5 *Możliwe wybory dla gracza 1 po uwzględnieniu najlepszych wyborów gracza 2.*



Źródło: *Opracowanie własne*

Gracz 1 wybierze strategię *Pit-stop teraz* kiedy

$$2p - 1 > -2p + 1$$
$$4p > 2$$
$$p > \frac{1}{2}.$$

Jeśli prawdopodobieństwo sukcesu *undercut*, czyli wygrania rywalizacji po zatrzymaniu się jako pierwszy, jest większe niż $\frac{1}{2}$, to gracz 1 wybierze strategię *Pit-stop teraz*, a co za tym idzie gracz 2 wybierze *Pit-stop po następnym okrążeniu*. A gdy bardziej opłaca się zatrzymywać jako drugi to gracz 2 zatrzyma się po następnym okrążeniu, a gracz 1 wybierze *Pit-stop teraz*. W sytuacji, w której kierowca 2 może zareagować na ruch kierowcy 1, to kierowca 2 zawsze postąpi odwrotnie niż kierowca 1.

4.3 *Nie tylko wyścigi* – inne przykłady strategii mieszanych w sporcie

Wyścigi samochodowe to nie jedyny sport, gdzie dochodzi do pojedynków, w których dwaj gracze jednocześnie podejmują jedną z dwóch decyzji. W tym miejscu zostaną przytoczone przykłady takich zachowań w innych sportach.

4.3.1 *Ja strzelę w prawo, a ty się rzucisz w lewo, ok?* – Piłka nożna

W piłce nożnej za faul w swoim własnym polu karnym przyznawany jest rzut karny. W każdym z nich biorą udział dwaj gracze: piłkarz wykonujący rzut karny oraz bramkarz. Po wykonaniu rzutu karnego piłka jest w stanie minąć linię bramkową już po 0.3 sekundy, czyli mniej niż wynosi czas reakcji bramkarza i dojścia przez niego do piłki. Z tego powodu zarówno piłkarz wykonujący rzut karny, jak i bramkarz podejmują swoją decyzję jednocześnie.[47] „Jedenastki” mają dwa możliwe wyniki, padnie gol lub nie, a zawodnicy mają kilka strategii

[47] Palacios-Huerta I., Professionals Play Minimax, The Review of Economic Studies Limited, 2003

do wyboru, mogą wybrać, w którą stronę strzelić/rzucić się i łatwo można zaobserwować jakie strategie gracze wybiorą.[48] To wszystko sprawia, że rzuty karne można zinterpretować jako grę i w tenże sposób ją analizować.

Piłkarze, tak jak wszyscy ludzie, mogą być prawonożni lub lewonożni. Zawodnikom prawonożnym przeważnie łatwiej się strzela w prawą stroną bramkarza, czyli w ich lewą stronę, a zawodnikom lewonożnym w lewą stronę bramkarza, czyli dla nich w kierunku prawego słupka. Aby znormalizować wybory graczy w rzutach karnych, podzielmy możliwe wybory napastników nie na uderzenie w prawo lub w lewo, a na strzał w ich *mocną stronę*, czyli w kierunku dla nich łatwiejszym i *słabą stronę* będącym jej przeciwieństwem. Tak samo zinterpretujmy wybory bramkarza jako rzucenie się w mocną lub słabą stronę strzelca.[49] Przy takiej interpretacji sytuacja, w której prawonożny napastnik strzela w swoje lewo, podczas gdy bramkarz rzuca się w swoje prawo jest równoważna sytuacji, w której lewonożny zawodnik uderza w swoje prawo, a bramkarz rzuca się w swoje lewo.[50] W obydwu tych sytuacjach obaj gracze wybrali *mocną stronę*.

Po podzieleniu tak ich możliwych wyborów możemy zapisać prosty model gry 2 × 2.

Tabela 4.8 *Macierz prawdopodobieństw sukcesu napastnika w zależności od wyborów graczy*

		Bramkarz	
	i/j	M	S
Napastnik	M	π_{MM}	π_{MS}
	S	π_{SM}	π_{SS}

Źródło: *Palacios-Huerta I., Beautiful Game Theory, Princeton University Press, 2014, s.23*

Wybory M i S dla bramkarza, to kolejno rzucenie się w mocną lub słabą stronę strzelca, dla napastnika to strzały w jego mocną stronę lub słabą stronę, natomiast π_{ij} oznacza prawdopodobieństwo zdobycia bramki przez wykonującego.

Jeśli obaj gracze zastosują strategie mieszane w równowadze Nasha, to dla bramkarza prawdopodobieństwo, że padnie gol, gdy strzelec kopnie w lewo, będzie równe prawdopodobieństwu gola, gdy przeciwnik strzeli w prawo. Tak samo, gdy strzelec zachowa

[48] Palacios-Huerta I., Professionals Play Minimax, The Review of Economic Studies Limited, 2003
[49] Palacios-Huerta I., Beautiful Game Theory, Princeton University Press, 2014, s.25
[50] Tamże

się tak jak nakazują mu strategie mieszane, to gol padnie z takim samym prawdopodobieństwem dla obu wyborów bramkarza.

Natomiast jak to wygląda w praktyce? W książce *Beautiful Game Theory* autorstwa Ignacio Palacios-Huerty autor zebrał dano dotyczące dziewięciu tysięcy rzutów karnych z najlepszych lig europejskich. Dane empiryczne prezentują się następująco:

Tabela 4.9 *Rzeczywiste prawdopodobieństwa sukcesu rzutów karnych, w zależności od wyborów zawodników*

		Bramkarz	
	i/j	M	S
Napastnik	M	71.2%	93.1%
	S	94.1%	59.1%

Źródło: *Palacios-Huerta I., Beautiful Game Theory, Princeton University Press, 2014, s.29*

Czyli, gdy zarówno strzelec jak i bramkarz wybiorą mocną stronę, to gol pada w 71.2% przypadków, natomiast gdy napastnik strzeli w swoją słabszą stronę, a bramkarz wybierze mocną stronę, to gol pada w 94.1%.

W tej grze 2 x 2 nie ma równowag Nasha w strategiach czystych. Gdyby tak było, to racjonalni zawodnicy zawsze podejmowaliby w meczach te same decyzje, a oczywiście w rzeczywistości wcale tak nie jest. Tak więc można szukać równowag Nasha w strategiach mieszanych.

Obliczając równowagi Nasha w strategiach mieszanych możemy je potem porównać z rzeczywistymi wyborami zawodników w meczach i możemy zobaczyć jak blisko optymalnej częstotliwości wyboru są w rzeczywistości piłkarze.

Dla danych z tabeli 2.10 istnieje jedną równowagę Nasha w strategiach mieszanych. Jest to para strategii $(x = 0.5977, y = 0.6153)$, gdzie x to prawdopodobieństwo wybrania strategii *mocna strona* przez napastnika, a y to prawdopodobieństwo wyboru strategii *mocna strona* przez bramkarza.[51]

[51] Palacios-Huerta I., Beautiful Game Theory, Princeton University Press, 2014, s.29

Napastnik powinien strzelać w swoją mocną stronę w 59.77% przypadków, a w swoją słabszą stronę w $100\% - 59.77\% = 40.23\%$ przypadków.

Natomiast bramkarz optymalnie powinien rzucać się w mocną stronę napastnika w 61.53%, a w jego słabszą stronę w $100\% - 61.53\% = 38.47\%$ strzałów.

Dzięki danym zebranym w książce *Beautiful Game Theory*, możemy zobaczyć czy w rzeczywistości piłkarze stosują strategie zbliżone do tych w równowadze.

Tabela 4.10 *Rzeczywiste wybory piłkarzy, w porównaniu do równowag Nasha w strategiach mieszanych*

	Napastnik		Bramkarz	
	M	S	M	S
Częstotliwości wynikające z RN	59.77%	40.23%	61.53%	38.47%
Rzeczywiste częstotliwości	58.83%	41.17%	61.03%	38.97%

Źródło: Palacios-Huerta I., *Beautiful Game Theory*, Princeton University Press, 2014, s.29

Widzimy, że rzeczywiste częstotliwości są bardzo bliskie tym wynikających z równowagi Nasha. Ani napastnicy, ani bramkarze nie odbiegają o więcej niż o punkt procentowy od optymalnego rozkładu.

Czy to oznacza, że wszyscy piłkarze są fanami von Neumanna? Niekoniecznie. W rzeczywistości przed meczem piłkarskim analitycy i trenerzy bramkarzy przygotowują analizę drużyny przeciwnej na podstawie ich poprzednich rzutów karnych. Jej celem jest zdobycie wiedzy, który piłkarz rywali zazwyczaj je wykonuje i jakie on ma preferencje. Rozkład wyborów napastnika zazwyczaj nie jest identyczny jak ten wyliczony przez Palacios-Huertę. Niektórzy piłkarze wolą częściej uderzać w swoją słabą stronę, a niektórzy wolą ją jeszcze bardziej ignorować.[52] Jednak po uśrednieniu wszystkich wyborów strzelców okazuje się, że ogółem napastnicy grają w sposób bardzo bliski wyznaczonych idealnych częstotliwości. Tłumaczyć to może „mądrość tłumu”, czyli filozoficzna idea mówiąca o tym, że duża grupa ludzi jest w stanie razem ocenić pewne rzeczy zdecydowanie lepiej od jednostek.[53]

[52] W sezonie 2021/2022 polskiej PKO BP Ekstraklasy zawodnicy najczęściej wykonujący rzuty karne mieli następujące preferencje. Reprezentujący Raków Częstochowa Ivi Lopez wybierał swoją mocną stronę w 62,5% przypadków. Napastnik Radomiaka Radom Karol Angielski wybierał mocną stronę w 33,3% przypadków, a gracz Bruk-Bet Termalici Nieciecza Piotr Wlazło strzelał w mocną stronę w 37,5%.

[53] Ober J., *An Aristotelian middle way between deliberation and independent-guess aggregation*, Princeton/Stanford Working Papers in Classics. 2009

4.3.2 *Nash serwisowy* – Tenis ziemny

Gry 2 x 2 w sporcie mają miejsce także w tenisie ziemnym.[54] W tej dyscyplinie każdy punkt rozpoczyna się od wprowadzenia piłki w grę poprzez serwis jednego z graczy. Serwis jest poważnym atutem, gracze serwujący mają średnio 63% szans na wygranie punktu[55] i 75% szans na wygranie swojego gema serwisowego.[56]

Przy serwisie możemy założyć, że każdy z graczy ma dwa wybory. Serwujący może uderzyć piłkę w prawą lub lewą część pola serwisowego. Natomiast odbierający może „przygotować się" na serwis w jedną ze stron. Celem każdego z graczy jest wygranie punktu, więc wypłatą dla każdego z graczy, podobnie jak dla rzutów karnych, możemy uczynić prawdopodobieństwo wygrania punktu w zależności od danych wyborów graczy przy serwisie. Typowa prędkość dla serwisu zawodowego tenisisty wynosi pomiędzy 190 a 200 km/h[57], jednak najszybszy serwis w historii oficjalnie uznawany przez federację ATP to aż 253 km/h zaserwowane przez Amerykanina Johna Isnera w 2016 roku.[58] Jako że długość kortu tenisowego to 78 stóp, czyli 23.77 metrów, to czas w jakim piłka przemieściła się wtedy od jednego końca kortu na drugi wynosił:

$$\frac{23.77m * 1h}{253km} = \frac{23.77m * (60 * 60)s}{253000m} \approx 0.34\ s$$

Dla najszybszych serwisów gracz returnujący nie miałby tak naprawdę czasu na zareagowanie, w którą stronę jego przeciwnik zagrał. Zawodnik odbierający serwis musi podjąć decyzję, na którą stronę się „nastawić" przed punktem, toteż w takich sytuacjach obaj zawodnicy podejmują swoje decyzje niezależnie od siebie.

Podobnie jak dla rzutów karnych możemy stworzyć macierz wypłat w zależności od wyborów graczy.

[54] Walker M., Wooders J., Minimax Play at Wimbledon, American Economic Association, 2001
[55] Sackmann J., *How Long Does the Server's Advantage Last?,* Tennis Abstract [online], Dostępny w: https://www.tennisabstract.com/blog/2011/08/17/how-long-does-the-servers-advantage-last/ [Dostęp: 10.04.2022]
[56] Krawczyk, M., *Unforced errors: Tennis serve data tells us little about loss aversion*, Econ Journal Watch, 2019
[57] Czermak C., *Fastest Tennis Serves Ever Recorded*, Tennis Creative [online] Dostępny w: https://tenniscreative.com/fastest-tennis-serve/ [Dostęp: 18.04.2022]
[58] Walker M., Wooders J., *Minimax Play at Wimbledon*, American Economic Association, 2001

Tabela 4.11 *Macierz prawdopodobieństw sukcesu zawodnika serwującego w zależności od wyborów graczy*

		Odbierający	
	i/j	L	P
Serwujący	L	π_{LL}	π_{LP}
	P	π_{PL}	π_{PP}

Źródło: *Walker M., Wooders J., Minimax Play at Wimbledon, American Economic Association, 2001*

Dla zawodnika serwującego wybory L i P to kolejno serwis w jego lewo i prawo, a dla gracza returnującego to nastawienie się na serwis w lewą lub w prawą stronę serwującego. Natomiast π_{ij} oznacza prawdopodobieństwo zdobycia punktu przez gracza serwującego.[59] Jednocześnie więc $1 - \pi_{ij}$ jest szansą wygrania wymiany przez gracza odbierającego. Można założyć, że $\pi_{LL} < \pi_{PL}$ oraz że $\pi_{PP} < \pi_{LP}$, czyli serwujący częściej wygra punkt, gdy zaserwuje w inną stronę niż wybierze jego przeciwnik, oraz że $\pi_{LL} < \pi_{LP}$ i $\pi_{PP} < \pi_{PL}$, czyli odbierający ma mniejsze szanse na wygranie punktu, jeśli wybierze inną stronę niż serwujący.[60] Możemy też zauważyć, że te nierówności są prawdziwe dla tabeli 2.10 opisującej prawdopodobieństwo zdobycia gola w zależności od wyborów graczy. Tam też gole padały częściej, gdy zawodnicy podejmowali odwrotne wybory.

Problemem jednak dla tego modelu jest fakt, że wartości π_{ij} nie są znane. O ile możemy zaobserwować wybory dla graczy serwujących, to nie są nam znane decyzje returnujących. Nie można zobaczyć jakie decyzje zostały przez nich podjęte, czyli na jaką stronę kara serwisowego odbierający się bardziej nastawili. Gracze zmaksymalizują swoje wypłaty, jeśli dostosują swoje częstotliwości wyborów do tych wynikających z równowag Nasha w strategiach mieszanych.

[59] Walker M., Wooders J., *Minimax Play at Wimbledon*, American Economic Association, 2001
[60] Tamże

Zakończenie

Celem pracy było pokazanie w jaki sposób można wykorzystać teorię gier do wytłumaczenia różnych zjawisk w sporcie. Coraz częściej wykorzystuje się metody opisane w pracy, aby zwiększyć szanse na wygraną. Jest to relatywnie nowy trend, albowiem zapoczątkowany dopiero w XXI wieku. W 2002 roku Billy Beane' był pierwszym dyrektorem drużyny baseballowej, który oparł się na zaawansowanych statystykach budując zespół, [61] co zostało opisane w książce na ten temat przez znanego autora Michaela Lewisa oraz filmie „Moneyball" z aktorem Bradem Pittem w roli głównej. W 2008 naukowiec specjalizujący się w teorii gier Ignacio Palacios-Huerta został zatrudniony przez klub piłkarski Chelsea FC do znalezienia strategii maksymalizującej szanse na zwycięstwo zespołu w konkursie rzutów karnych.[62] Od tego czasu w klubach sportowych coraz popularniejsza jest rola analityka, którego zadaniem jest użycie statystyk, aby pomóc swojemu zespołowi.

Istnieje wiele płaszczyzn, na których można porównać sport i ekonomię. Przykładem są ogromne rynki wymiany piłkarzy, na których kluby corocznie wymieniają się dużymi sumami pieniędzy. W sporcie, podobnie jak w ekonomii wykorzystać teorii gier. W trzecim rozdziale wykazano za jej pomocą czemu niektórzy zawodnicy dopuszczali się brania dopingu mimo tego, że dochodzili wtedy do nieoptymalnego rozwiązania. Okazuje się, że zawodnicy stoją do podobnymi wyborami co te w dylemacie więźnia.

W ostatniej części zaproponowano i zanalizowano model opisujący często występującą rywalizację dwóch kierowców wyścigach samochodowych. Rozwiązanie gry jest w części nieintuicyjne, ponieważ gdy tor sprzyja zjeżdżaniu na pit-stop jako pierwszym, kierowcy próbującemu wyprzedzić rywala jadącego przed nim bardziej się opłaca pozostać na torze.

Podsumowując w pracy pokazano, że teoria gier może być przydatnym narzędziem w zawodowym sporcie.

[61] Lewis M., *Moneyball: The Art of Winning an Unfair Game*, W. W. Norton & Company, 2003

[62] Palacios-Huerta I., *Beautiful Game Theory, Beautiful Economics*, Wykład na TEDxUDeusto, 2017, Dostępny w: https://www.youtube.com/watch?v=OlNIky8n57c, [Dostęp: 27.03.2022]

Bibliografia:

1. Abt S., *Armstrong Is Accused of Doping*, The New York Times, 2005, Dostępny w: https://www.nytimes.com/2005/08/24/sports/othersports/armstrong-is-accused-of-doping.html, [Dostęp: 03.05.2022]
2. Associated Press, *Fox pays for exclusive rights to playoffs*, ESPN [online], 2001, Dostępny w: http://a.espncdn.com/mlb/news/2000/0925/777438.html, [Dostęp: 4.05.2022]
3. Associated Press, *Sosa gets $72M extension*, ESPN [online], 2001, Dostępny w: http://www.espn.com/mlb/news/2001/0315/1155787.html, [Dostęp: 4.05.2022]
4. Bensinger G., *Tyler Hamilton explains blood doping in cycling*, In depth with Graham Bensinger, 2012
5. Bielik T., *Sammy Sosa Tests Positive for Steroids: America Is Not Surprised*, Bleacher Report [online], 2009, Dostępny w: https://bleacherreport.com/articles/200767-no-shock-sosa-tests-positive-for-steroids-america-not-surprised, [Dostęp: 4.05.2022]
6. Breivik, G., *The doping dilemma. Some game theoretical and philosophical considerations*, Sportwissenschaft, 1987
7. Britannica, The Editors of Encyclopaedia, *John Nash*, Encyclopedia Britannica, 2021, Sotępny w: https://www.britannica.com/biography/John-Nash, [Dostęp: 12.05.2022]
8. Butler C., *This Day In Lakers History: Shaquille O'Neal Traded To Heat For Lamar Odom, Caron Butler, Brian Grant,* Lakers Nation [online], Dostępny w: https://lakersnation.com/this-day-in-lakers-history-shaquille-oneal-traded-to-heat-for-lamar-odom-caron-butler-brian-grant/2021/07/14/, [Dostęp: 10.05.2022]
9. *Cavaliers Complete Sign-and-Trade Deal with Miami,* NBA, 2010, Dostępny w: https://www.nba.com/cavaliers/news/trade_100710.html, [Dostęp: 10.05.2022]
10. Chen J. et al., *Game Theory,* Stanford University [online], 1998, Dostępny w: https://cs.stanford.edu/people/eroberts/courses/soco/projects/1998-99/game-theory/prisoner.html [Dostęp: 30.03.2022]
11. Cooper B., *A look into Major League Baseball's massive home run surge in 2019*, Capital News Service [online], 2019, Dostępny w: https://cnsmaryland.org/2019/10/01/a-look-into-major-league-baseballs-massive-home-run-surge-in-2019/ [Dostęp: 3.05.2022]

12. Czermak C., *Fastest Tennis Serves Ever Recorded*, Tennis Creative [online] Dostępny w: https://tenniscreative.com/fastest-tennis-serve/ [Dostęp: 18.04.2022]
13. ESPN.com news services, *Barry Bonds steroids timeline,* ESPN [online], 2007, Dostępny w: https://www.espn.com/mlb/news/story?id=3113127, [Dostęp: 4.05.2022]
14. Faiss R. et al., *Prevalence Estimate of Blood Doping in Elite Track and Field Athletes During Two Major International Events,* Frontiers in Physiology, 2006
15. Fallstrom R., *McGwire's '62 Corvette To Be Shown,* Associated Press, 2000, Dostępny w: https://apnews.com/article/54233dde9af526c90d92ecbe5f19ee5a, [Dostęp: 4.05.2022]
16. *Footballers Wages*, My Sort of Loan [online], Dostępny w: https://www.mysortofloan.co.uk/Footballers-Wages.asp, Dostęp: [9.05.2022]
17. Garcia B., *Mark McGwire's Reason For Taking Steroids Isn't What You'd Think*, Sports Casting [online], 2020, Dostępny w: https://www.sportscasting.com/mark-mcgwires-reason-for-taking-steroids-isnt-what-youd-think/ [Dostęp: 4.05.2022]
18. Krawczyk, M., *Unforced errors: Tennis serve data tells us little about loss aversion, Econ Journal Watch*, 2019
19. Laurens J., *Neymar: how the record-breaking €222m move to PSG unfolded,* The Guardian, 2017, Dostępny w: https://www.theguardian.com/football/2017/aug/04/neymar-how-record-breaking-move-to-psg-unfolded, [Dostęp: 8.05.2022]
20. Lewis M., *Moneyball: The Art of Winning an Unfair Game*, W. W. Norton & Company, 2003
21. *List of most expensive association football transfers*, Wikipedia, Dostępny w: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_most_expensive_association_football_transfers, [Dostęp: 9.05.2022]
22. Martinez N., *The Steroid Eras Destruction Of Major League Baseball*, Bleacher Report [online], 2010, Dostępny w: https://bleacherreport.com/articles/480826-the-steroid-eras-destruction-of-major-league-baseball [Dostęp: 4.05.2022]
23. Najera J., *Game Theory — History & Overview,* Towards Data Science [online], 2019, Dostępny w: https://towardsdatascience.com/game-theory-history-overview-5475e527cb82, [Dostęp: 12.05.2022]
24. Niewiedzioł A., *Zastosowanie Tragedii Wspólnego Pastwiska do analizy problemu wyboru diety w kontekście zmian klimatycznych*, SGH, 2021

25. Ober J., *An Aristotelian middle way between deliberation and independent-guess aggregation*, Princeton/Stanford Working Papers in Classics. 2009
26. Palacios-Huerta I., *Beautiful Game Theory*, Princeton University Press, 2014, s.23-29
27. Palacios-Huerta I., *Beautiful Game Theory, Beautiful Economics*, Wykład na TEDxUDeusto, 2017, Dostępny w: https://www.youtube.com/watch?v=OlNIky8n57c, [Dostęp: 27.03.2022]
28. Palacios-Huerta I., *Professionals Play Minimax*, The Review of Economic Studies Limited, 2003
29. Palmer B., *Riding High*, Slate [online], 2012, Dostępny w: https://slate.com/culture/2012/06/lance-armstrong-charged-why-is-there-so-much-doping-in-professional-cycling.html [Dostęp: 3.05.2022]
30. Płatkowski T., *Wstęp do teorii gier,* Uniwersytet Warszawski, 2011, s.6
31. Poundstone W., *John von Neumann*, Encyclopedia Britannica, 2022, Dostępny w: https://www.britannica.com/biography/John-von-Neumann, [Dostęp: 12.05.2022]
32. Prisner E., *Game Theory Through Examples,* The Mathematical Association of America, s.1-3
33. Rafferty S., *Which NBA players have a no-trade clause?*, The Sporting News, 2022, Dostępny w: https://www.sportingnews.com/in/nba/news/nba-players-no-trade-clause-veto/m7s2dfwbs8uyxcktsugkqudg, [Dostęp: 10.05.2022]
34. *Rekordowe transfery*, Transfermarkt.pl [online], Dostępny w: https://www.transfermarkt.pl/pko-ekstraklasa/transferrekorde/wettbewerb/PL1/plus//galerie/0?saison_id=alle&land_id=alle&ausrichtung=alle&spielerposition_id=alle&altersklasse=alle&leihe=&w_s=&zuab=0 [Dostęp: 8.05.2022]
35. Riley S., *Von Neumann Architecture*, Computerphile [online], 2018, Dostępny w: https://www.youtube.com/watch?v=Ml3-kVYLNr8, [Dostęp: 12.05.2022]
36. Sackmann J., *How Long Does the Server's Advantage Last?,* Tennis Abstract [online], Dostępny w: https://www.tennisabstract.com/blog/2011/08/17/how-long-does-the-servers-advantage-last/ [Dostęp: 10.04.2022]
37. Sandomir R., *BASEBALL; Also King of Ratings and the T-Shirts*, The New York Times. 1998, Dostępny w: https://www.nytimes.com/1998/09/10/sports/baseball-also-king-of-ratings-and-the-t-shirts.html [Dostęp 4.05.2022]
38. Schechtel P., *Zastosowanie teorii gier w sporcie na przykładzie piłki nożnej oraz futbolu amerykańskiego*, SGH, 2016

39. Schneier B., *Lance Armstrong and the Prisoners' Dilemma of Doping in Professional Sports*, Wired Magazine [online], 2012, Dostępny w: https://www.wired.com/2012/10/lance-armstrong-and-the-prisoners-dilemma-of-doping-in-professional-sports/ [Dostęp: 2.05.2022]
40. Settimi C., *The World's Highest-Paid Soccer Players 2021: Manchester United's Cristiano Ronaldo Reclaims Top Spot From PSG's Lionel Messi,* Forbes, 2021 Dostępny w: https://www.forbes.com/sites/christinasettimi/2021/09/21/the-worlds-highest-paid-soccer-players-2021--uniteds-cristiano-ronaldo-reclaims-top-spot-from-psgs--lionel-messi/?sh=60caaa973b7b, [Dostęp: 8.05.2022]
41. Smyk D., *Jak w Polsce robi się transfery? Zaglądamy za kulisy negocjacji,* Weszło.com [online], 2021, Dostępny w: https://weszlo.com/2021/01/30/jak-w-polsce-robi-sie-transfery-zagladamy-za-kulisy-negocjacji/, [Dostęp: 8.05.2022]
42. Szkudlarek P., *Teoria gier w konfliktach międzynarodowych na przykładzie zimnej wojny,* SGH, 2020
43. Walker M., Wooders J., *Minimax Play at Wimbledon*, American Economic Association, 2001
44. Webb J., *Game Theory: Decisions, Interaction and Evolution,* Springer Science & Business Media, 2007, s.62
45. Wilkowicz P., *Czy EPO to cud czy blaga,* Sport.pl [online], 2017, Dostępny w: https://www.sport.pl/kolarstwo/7,64993,22062600,doping-czy-epo-to-cud-czy-blaga-erytropoetyna-moze-dzialac.html, [Dostęp: 3.05.2020]
46. Winnicka J., *Dominacja, równowaga Nasha, równowaga doskonała,* Notatki z prezentacji PowerPoint z wykładu Wstęp do teorii gier, SGH, 2021
47. Winnicka J., *Równowagi Nasha w strategiach mieszanych,* Notatki z prezentacji PowerPoint z wykładu Wstęp do teorii gier, SGH, 2021
48. *Zarobki w Ekstraklasie. Ile pieniędzy krąży w polskiej lidze?*, STS, 2022, Dostępny w: https://www.sts.pl/blog/zarobki-w-ekstraklasie/, [Dostęp: 8.05.2022]

Spis tabel i ilustracji

Streszczenie

W dzisiejszych czasach matematyka i interpretacja danych jest coraz częściej wykorzystywana w celu stworzenia przewagi w sporcie. Jedną z metod analizy jest stosowanie teorii gier, nauki pochodzącej z pogranicza ekonomii i matematyki stosowanej.

Praca składa się z czterech rozdziałów. W pierwszym rozdziale przedstawiono czym jest teoria gier i jaka jest jej podstawowa historia. W drugim rozdziale przedstawiono, jak działają różne rozległe rynki wymiany zawodników w zawodowych ligach sportowych. W trzecim rozdziale zanalizowano możliwe strategie podejścia graczy do dopingu i wykazano czemu czasami gracze mogą dojść do nieoptymalnego dla nich rozwiązania. W ostatnim rozdziale stworzono model i zanalizowano za pomocą teorii gier rywalizację dwóch kierowców w wyścigach samochodowych.