Phần thứ nhất

LÝ THUYẾT TỔ HỢP

Combinatorial Theory

GV: Nguyễn Huy Đức

Bộ môn: Tin học và Kỹ thuật Máy tính – ĐH Thủy lợi

0903 402 655 ducnghuy@gmail.com

Nội dung

Chương 1. Logic, Tập hợp, Ánh xạ

Chương 2. Bài toán đếm

Chương 3. Bài toán tồn tại

Chương 4. Bài toán liệt kê tổ hợp

Chương 5. Bài toán tối ưu tổ hợp

Chương 2. BÀI TOÁN ĐẾM

2.1 Nguyên lý cộng và nguyên lý nhân

2.2 Các cấu hình tổ hợp cơ bản

2.3 Nguyên lý bù trừ

2.4 Hệ thức truy hồi

2.1. Nguyên lý cộng và Nguyên lý nhân

- Đây là hai nguyên lý cơ bản của tổ hợp, được vận dụng rộng rãi vào việc giải quyết các bài toán đếm
- Còn gọi là Qui tắc cộng và Qui tắc nhân (Sum Rule và Product Rule)

2.1.1. Nguyên lý cộng (The sum rule)

- Nếu A và B là hai tập hợp rời nhau thì

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B).$$

- Nguyên lý cộng được mở rộng cho nhiều tập con rời nhau :

Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_k$ là một phân hoạch của tập hợp X thì

$$N(X) = N(A_1) + N(A_2) + \ldots + N(A_k).$$

- Một trường hợp riêng hay dùng của nguyên lý cộng:

Nếu A là một tính chất cho trên tập X thì

$$N(A) = N(X) - N(\overline{A})$$

Nguyên lý cộng: Ví dụ

- **Ví dụ 1.** Trong một đợt phổ biến đề tài tốt nghiệp, Ban chủ nhiệm Khoa công bố danh sách các đề tài bao gồm 80 đề tài về chủ đề "xây dựng hệ thông tin quản lý", 10 đề tài về chủ đề "thiết kế phần mềm dạy học" và 10 đề tài về chủ đề "Hệ chuyên gia". Hỏi một sinh viên có bao nhiêu khả năng lựa chọn đề tài?
- **Giải:** Sinh viên có thể lựa chọn đề tài theo chủ đề thứ nhất bởi 80 cách, theo chủ đề thứ hai bởi 10 cách, theo chủ đề thứ ba bởi 10 cách. Vậy tất cả có 100 cách lựa chọn.

Nguyên lý cộng: Ví dụ

- **Ví dụ 2.** Giá trị của k sẽ là bao nhiêu sau khi đoạn chương trình sau được thực hiện?

```
n1:=10; n2:=20; n3:=30;
k:=0;
for i1:= 1 to n1 do k:=k+1;
for i2:= 1 to n2 do k:=k+1;
for i3:= 1 to n3 do k:=k+1;
```

- **Giải:** Đầu tiên giá trị của k được gán bằng 0. Có 3 vòng lặp for độc lập. Sau mỗi lần lặp của mỗi một trong 3 vòng for, giá trị của k tăng lên 1. Vòng for thứ nhất lặp 10 lần, vòng for thứ hai lặp 20 lần, vòng for thứ ba lặp 30 lần. Vậy, kết thúc 3 vòng lặp for giá trị của k sẽ là 10+20+30= 60.

Nguyên lý cộng: Ví dụ

- **Ví dụ 3:** Có bao nhiêu xâu gồm 4 chữ số thập phân có đúng 3 ký tự là 9?
- **Giải:** Xâu có thể chứa:
  - Ký tự khác 9 ở vị trí thứ nhất
  - hoặc ký tự khác 9 ở vị trí thứ hai
  - hoặc ký tự khác 9 ở vị trí thứ ba
  - hoặc ký tự khác 9 ở vị trí thứ tư
- Ta có thể sử dụng qui tắc cộng
  - Đối với mỗi trường hợp, có 9 khả năng chọn ký tự khác với 9 (bất kể chữ số khác 9 nào trong 9 chữ số 0, 1, ...,8)
- Vậy, đáp số là 9+9+9+9 = 36

2.1.2. Nguyên lý nhân
The product rule

- *Nếu mỗi thành phần* a_i *của bộ có thứ tự k thành phần* $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ *có* n_i *khả năng chọn* $(i = 1, 2, \ldots, k)$*, thì số bộ sẽ được tạo ra là tích số của các khả năng này* $n_1 n_2 \ldots n_k$.

- Một hệ quả trực tiếp của nguyên lý nhân:

  $$N(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k) = N(A_1)\, N(A_2) \ldots N(A_k),$$

  với $A_1, A_2, \ldots, A_k$ là những tập hợp nào đó.

- Trường hợp đặc biệt: $N(A^k) = [N(A)]^k$.

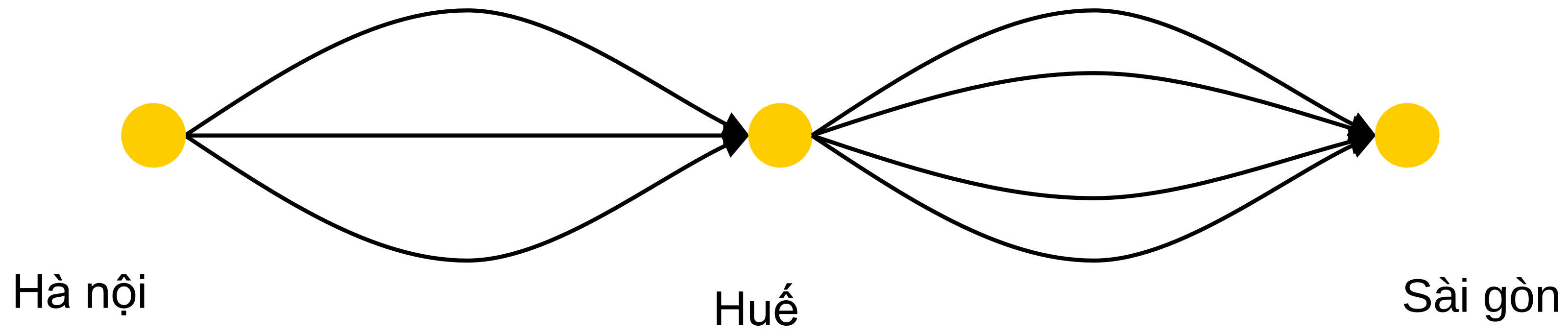
2.1.2. Nguyên lý nhân
The product rule

- Trong nhiều bài toán đếm, chỉ sau khi xây dựng xong thành phần thứ nhất ta mới biết cách xây dựng thành phần thứ hai, sau khi xây dựng xong hai thành phần đầu ta mới biết cách xây dựng thành phần thứ ba,... Trong trường hợp đó có thể sử dụng ***nguyên lý nhân tổng quát:***
- Giả sử ta xây dựng bộ có thứ tự k thành phần $(a_1, a_2, ..., a_k)$ theo từng thành phần và
  - a_1 có thể chọn bởi n_1 cách;
  - Sau khi a_1 đã chọn, a_2 có thể chọn bởi n_2 cách;
  - ...
  - Sau khi $a_1, a_2,...,a_{k-1}$ đã chọn, a_k có thể chọn bởi n_k cách;
- Thế thì số bộ được tạo ra là tích số $\boldsymbol{n_1 n_2 \ldots n_k}$.

Nguyên lý nhân: Ví dụ

- ***Ví dụ 1***. Từ Hà nội đến Huế có 3 cách đi: máy bay, ô tô, tàu hoả. Từ Huế đến Sài gòn có 4 cách đi: máy bay, ô tô, tàu hoả, tàu thuỷ. Hỏi từ Hà nội đến Sài gòn (qua Huế) có bao nhiêu cách đi?

Giải: Mỗi cách đi từ Hà nội đến Sài gòn (qua Huế) được xem gồm 2 chặng: Hà nội - Huế và Huế - Sài gòn. Từ đó, theo nguyên lý nhân, số cách đi từ Hà nội đến Sài gòn là $3 \times 4 = 12$ cách.



Nguyên lý nhân: Ví dụ

- **Ví dụ 2.** Hỏi rằng giá trị của k sẽ là bao nhiêu sau khi đoạn chương trình sau thực hiện?

```
n1:=10; n2:=20; n3:=30;
k:=0;
for i1:=1 to n1 do
   for i2:=1 to n2 do
      for i3:=1 to n3 do k:=k+1;
```

- **Giải:** Đầu tiên giá trị của k được gán bằng 0. Có 3 vòng lặp for lồng nhau. Sau mỗi lần lặp của vòng for, giá trị của k tăng lên 1. Vòng for thứ nhất lặp 10 lần, vòng for thứ hai lặp 20 lần, vòng for thứ ba lặp 30 lần. Vậy, theo nguyên lý nhân, kết thúc 3 vòng lặp for lồng nhau, giá trị của k sẽ là:

$$10 \times 20 \times 30 = 6000.$$

Nguyên lý nhân: Ví dụ

- **Ví dụ 3:** Hỏi có bao nhiêu lá cờ gồm 3 vạch mầu, mầu của mỗi vạch lấy từ ba mầu xanh, đỏ, trắng sao cho:

    a) Không có hai vạch liên tiếp nào cùng màu

    b) Không có hai vạch nào cùng màu

- **Giải.** Đánh số các vạch của lá cờ bởi 1, 2, 3 từ trên xuống.

a) Không có hai vạch liên tiếp nào cùng màu

- Màu của vạch 1 có 3 cách chọn.
- Sau khi màu của vạch 1 đã chọn, màu của vạch 2 có 2 cách chọn (không được chọn lại màu của vạch 1).
- Sau khi màu của hai vạch 1, 2 đã chọn, màu của vạch 3 có 2 cách chọn (không được chọn lại màu của vạch 2).
- Theo nguyên lý nhân số lá cờ cần đếm trong trường hợp a) là 3.2.2=12

Nguyên lý nhân: Ví dụ 3 (tiếp)

b) Không có hai vạch nào cùng màu

- Màu của vạch 1 có 3 cách chọn.
- Sau khi màu của vạch 1 đã chọn, màu của vạch 2 có 2 cách chọn (không được chọn lại màu của vạch 1).
- Sau khi màu của hai vạch 1, 2 đã chọn, màu của vạch 3 có 1 cách chọn (không được chọn lại màu của vạch 1 và 2).
- Theo nguyên lý nhân số lá cờ cần đếm trong trường hợp b) là 3.2.1=6

Nguyên lý nhân: Ví dụ

Ví dụ 4. Có bao nhiêu xâu gồm 4 chữ số thập phân

a) không chứa một chữ số nào hai lần?

- Chúng ta sẽ chọn chữ số vào lần lượt từng vị trí
  - Ký tự thứ nhất có 10 cách chọn
  - Ký tự thứ hai có 9 cách (không chọn lại chữ số đã chọn vào vị trí thứ nhất)
  - Ký tự thứ ba có 8 cách chọn
  - Ký tự thứ tư có 7 cách chọn
- Tổng cộng có 10*9*8*7 = 5040 xâu cần đếm.

b) kết thúc bởi chữ số chẵn?

- Ba ký tự đầu tiên mỗi ký tự có 10 cách chọn
- Ký tự cuối cùng có 5 cách chọn
- Tổng cộng có 10*10*10*5 = 5000 xâu cần đếm.

Các ví dụ phức tạp hơn

- Khi nào sử dụng qui tắc cộng?
- Khi nào sử dụng qui tắc nhân?

- Ta có thể sử dụng phối hợp cả qui tắc cộng và qui tắc nhân
- Bằng cách đó ta có thể giải được nhiều bài toán thú vị và phức tạp hơn

Chụp ảnh đám cưới

Xét bài toán: Có 10 người tham gia vào việc chụp ảnh kỷ niệm ở một đám cưới, trong đó có cô dâu và chú rể. Ta xét bức ảnh chỉ gồm 6 người trong họ.

a) Có bao nhiêu bức ảnh trong đó có mặt cô dâu?

Qui tắc nhân: Xếp chỗ cho cô dâu **VÀ** sau đó xếp chỗ cho những nhân vật còn lại trong bức ảnh.

Trước hết xếp chỗ cho cô dâu: Cô dâu có thể đứng ở 1 trong 6 vị trí

Tiếp đến, xếp 5 nhân vật còn lại của bức ảnh nhờ sử dụng qui tắc nhân: Có 9 người để chọn nhân vật thứ hai, 8 người để chọn nhân vật thứ ba, ... Tổng cộng có 9*8*7*6*5 = 15120 cách xếp 5 nhân vật còn lại của bức ảnh.

Qui tắc nhân cho ta 6 * 15120 = 90 720 bức ảnh

Chụp ảnh đám cưới

b) Có thể chụp bao nhiêu bức ảnh mà trong đó có mặt cả cô dâu lẫn chú rể?

Xếp dâu/rể VÀ sau đó xếp những nhân vật còn lại trong bức ảnh.

Trước hết xếp dâu và rể:

- Cô dâu có thể xếp vào 1 trong 6 vị trí
- Chú rể có thể xếp vào 1 trong 5 vị trí còn lại
- Tổng cộng có 30 khả năng

Tiếp theo, xếp chỗ cho 4 nhân vật còn lại trong bức ảnh theo qui tắc nhân:

- Có 8 người để chọn nhân vật thứ ba, 7 người để chọn nhân vật thứ tư, ...
- Tổng cộng có 8*7*6*5 = 1680

Theo qui tắc nhân có 30 * 1680 = 50 400 bức ảnh

Chụp ảnh đám cưới

c) Có bao nhiêu bức ảnh mà trong đó có mặt chỉ một người trong cặp tân hôn?

Chỉ xếp cô dâu:

- Qui tắc nhân: xếp cô dâu và sau đó xếp các nhân vật còn lại
- Trước hết xếp cô dâu: Cô dâu có thể đứng ở một trong 6 vị trí
- Tiếp đến, xếp những nhân vật khác theo qui tắc nhân: Có 8 người để chọn nhân vật thứ hai, 7 để chọn nhân vật thứ ba, v.v. (Ta không được chọn chú rể!)

  Tổng cộng = 8*7*6*5*4 = 6720
- Qui tắc nhân cho 6 * 6720 = 40 320 khả năng

hoặc chỉ xếp chú rể:

- Số lượng khả năng cũng giống như cô dâu: 40 320

Theo Qui tắc cộng cho 40 320 + 40 320 = 80 640 khả năng

Số lượng Mật khẩu

Mỗi cá nhân sử dụng mạng máy tính đều có mật khẩu gồm từ 6 đến 8 ký tự, mỗi ký tự là chữ cái in hoa hoặc chữ số. Mật khẩu phải chứa ít nhất một chữ số. Có bao nhiêu mật khẩu khác nhau?

- Theo qui tắc cộng, nếu P là số lượng mật khẩu và P_6, P_7, P_8 là số lượng mật khẩu độ dài 6, 7, và 8, tương ứng, thì

$$P = P_6+P_7+P_8$$

Số lượng Mật khẩu

P_6 = số lượng mật khẩu gồm 6 ký tự chứa ít nhất một chữ số

= (tổng số mật khẩu gồm 6 ký tự) trừ bớt (số mật khẩu gồm 6 ký tự không chứa chữ số)

$= (26+10)(26+10)(26+10)(26+10)(26+10)(26+10) – (26)(26)(26)(26)(26)(26) = 36^6 – 26^6$

= **1 867 866 560**

Số lượng Mật khẩu

Tương tự như vậy, ta có

$P_7 = 36^7 – 26^7 = 70\ 332\ 353\ 920$

$P_8 = 36^8 – 26^8 = 2\ 612\ 282\ 842\ 880$

$P_6 + P_7 + P_8 = 2\ 684\ 483\ 063\ 360$

Chú ý: Nếu máy tính 2 GHz có thể thử 200 triệu mật khẩu trong một giây, thì trong thời gian bao nhiêu lâu có thể xác định được mật khẩu để thâm nhập hệ thống máy tính này?

(2 684 483 063 360/200 000 000)/(60*60) giờ

Gần 4 tiếng đồng hồ!

2.2. Các cấu hình tổ hợp cơ bản

- Các cấu hình tổ hợp cơ bản là:
  - ***Hoán vị,***
  - ***Chỉnh hợp,***
  - ***Tổ hợp,***
  - ***Chỉnh hợp và tổ hợp mở rộng (lặp)***
- Phép đếm các cấu hình tổ hợp cơ bản được sử dụng để giải các bài toán đếm phức tạp hơn
- Giả sử X là tập n phần tử, mà không giảm tổng quát ta có thể coi X là tập gồm các số 1, 2, ..., n.

Hoán vị

- **Định nghĩa.** Ta gọi hoán vị từ n phần tử của X là bộ có thứ tự gồm n thành phần, mỗi thành phần đều là phần tử của X, *các thành phần khác nhau từng đôi*.
- Ký hiệu số lượng hoán vị từ n phần tử là P_n.
- Theo định nghĩa, một hoán vị từ n phần tử của X có thể biểu diễn bởi

  $(a_1, a_2, ..., a_n)$, $a_i \in X$, $i = 1, 2, ..., n$, $a_i \neq a_j$, $i \neq j$.

- **Định lý 1.**

$$P_n = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1 = n!$$

Hoán vị

- **Ví dụ 1**. 6 người đứng xếp thành một hàng ngang để chụp ảnh. Hỏi có thể bố trí bao nhiêu kiểu?
- **Giải**: Mỗi kiểu ảnh là một hoán vị của 6 người. Từ đó nhận được số kiểu ảnh có thể bố trí là 6! = 720.
- **Ví dụ 2.** Cần bố trí việc thực hiện n chương trình trên một máy vi tính. Hỏi có bao nhiêu cách?
- **Giải**: Đánh số các chương trình bởi 1, 2,..., n. Mỗi cách bố trí việc thực hiện các chương trình trên máy có thể biểu diễn bởi một hoán vị của 1, 2, ..., n. Từ đó suy ra số cách bố trí cần tìm là n!

Hoán vị

- **Ví dụ 3.** Có bao nhiêu song ánh từ tập n phần tử X vào chính nó? (Mỗi song ánh như vậy được gọi là một phép thế).
- **Giải.** Mỗi song ánh f cần đếm được xác định bởi bộ ảnh $(f(u_1), f(u_2), ..., f(u_n))$, trong đó $f(u_i) \in V$, $i=1, 2, ..., n$, $f(u_i) \neq f(u_j)$, $i \neq j$. Từ đó nhận được số cần tìm là $n!$
- **Ví dụ 4.** Có bao nhiêu cách bố trí n thợ thực hiện n việc sao cho mỗi thợ thực hiện một việc và mỗi việc do đúng một thợ thực hiện
- **Giải:** $n!$

Chỉnh hợp

- **Định nghĩa.** Ta gọi chỉnh hợp không lặp chập *m* từ *n* phần tử của *X* là bộ có thứ tự gồm *m* thành phần, mỗi thành phần đều là phần tử của *X*, *các thành phần khác nhau từng đôi*.
- Ký hiệu số lượng chỉnh hợp không lặp chập *m* từ *n* phần tử là P_n^m. Rõ ràng, để tồn tại chỉnh hợp không lặp, thì $m \le n$.
- Theo định nghĩa, một chỉnh hợp không lặp chập *m* từ *n* phần tử của *X* có thể biểu diễn bởi

  $$(a_1, a_2, \ldots, a_m),\ a_i \in X,\ i = 1, 2, \ldots, m,\ a_i \ne a_j,\ i \ne j.$$
- Việc đếm số lượng chỉnh hợp không lặp chập *m* từ *n* phần tử có thể thực hiện theo nguyên lý nhân. Ta có
- **Định lý 2.** $$P_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Chỉnh hợp

- **Ví dụ 1:** Có thể tạo được bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau từ 5 chữ số: 1, 2, 3, 4, 5.
- **Ví dụ 2.** Có bao nhiêu cách xếp 4 học sinh vào ngồi sau một cái bàn có 10 chỗ ngồi với điều kiện không được phép ngồi chồng lên nhau.
- **Giải.** Đánh số các học sinh từ 1 đến 4, các chỗ ngồi từ 1 đến 10. Mỗi cách xếp học sinh cần đếm có thể biểu diễn bởi bộ có thứ tự (g_1, g_2, g_3, g_4), trong đó $g_i \in \{1, 2, ..., 10\}$ là chỗ ngồi của học sinh i. Từ điều kiện đầu bài $g_i \neq g_j$, $i \neq j$; do đó mỗi cách xếp cần đếm là một chỉnh hợp không lặp chập 4 từ 10. Vậy số cách xếp cần đếm là $P_{10}^4 = 10.9.8.7 = 5040$.
- **Ví dụ 3**. Tính số đơn ánh từ tập m phần tử $U = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ vào tập n phần tử V.
- **Giải**: Mỗi đơn ánh f cần đếm được xác định bởi bộ ảnh $(f(u_1), f(u_2), ..., f(u_m))$, trong đó $f(u_i) \in V$, $i=1, 2, ..., m$, $f(u_i) \neq f(u_j)$, $i \neq j$.

Từ đó nhận được số cần tìm là $n(n-1)...(n-m+1)$.

Chỉnh hợp

- **Chú ý:** Để giải ví dụ 2 có thể lập luận trực tiếp theo nguyên lý nhân:
- Ta lần lượt xếp các học sinh vào chỗ ngồi.
  - Học sinh thứ nhất có 10 cách xếp
  - Tiếp đến học sinh thứ hai có thể xếp vào 1 trong 9 chỗ còn lại, ...
- Theo nguyên lý nhân có 10.9.8.7 cách xếp

Tổ hợp

- **Định nghĩa.** Ta gọi tổ hợp chập *m* từ *n* phần tử của X là bộ không có thứ tự gồm m thành phần, mỗi thành phần đều là phần tử của X, *các thành phần khác nhau từng đôi*.
- Ký hiệu số lượng tổ hợp chập m từ n phần tử là C_n^m (đôi khi ta sẽ sử dụng ký hiệu $C(n,m)$)
- Theo định nghĩa, một tổ hợp chập m từ n phần tử của X có thể biểu diễn bởi **bộ không có thứ tự**

$$\{a_1, a_2, ..., a_m\},\ a_i \in X,\ i = 1, 2, ..., m,\ a_i \neq a_j,\ i \neq j.$$

Ví dụ: • Tổ hợp chập 2 của tập hợp {a, b, c} là:

{ a, b} {b, c} {c, a}

Tổ hợp

- **Định lý 3**

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \text{ (còn ký hiệu là } C(n,m) \text{ hay } \binom{n}{m}\text{)}$$

- $C(n,m)$ được gọi là hệ số tổ hợp.
- Khi nhận xét rằng, giá trị của phép chia trong công thức của định lý 3 là một số nguyên, ta nhận được một kết quả lý thú trong số học: *Tích của k số tự nhiên liên tiếp bao giờ cũng chia hết cho k*!.

Tổ hợp

- **Ví dụ 1**. Có n đội bóng thi đấu vòng tròn. Hỏi phải tổ chức bao nhiêu trận đấu?
- **Giải**: Cứ 2 đội thì có một trận. Từ đó suy ra số trận đấu sẽ bằng số cách chọn 2 đội từ n đội, nghĩa là bằng

$$C(n,2) = n(n\text{-}1)/2.$$

- **Ví dụ 2**. Hỏi có bao nhiêu giao điểm của các đường chéo của một đa giác lồi n $(n \geq 4)$ đỉnh nằm ở trong đa giác, nếu biết rằng không có ba đờng chéo nào đồng quy tại điểm ở trong đa giác?
- **Giải**: Cứ 4 đỉnh của đa giác thì có một giao điểm của hai đường chéo nằm trong đa giác. Từ đó suy ra số giao điểm cần đếm là

$$C(n,4) = n(n\text{-}1)(n\text{-}2)(n\text{-}3)/24.$$

Hệ số tổ hợp

- Dưới đây là một vài tính chất của các hệ số tổ hợp:

a) Đối xứng

$$C(n,m) = C(n,n\text{-}m)$$

b) Điều kiện đầu

$$C(n,0) = 1;\;\; C(n,n) = 1,\; n \geq 0$$

c) Công thức đệ qui

$$C(n,m) = C(n\text{-}1,m) + C(n\text{-}1,\, m\text{-}1),\;\; n > m > 0$$

- Điều kiện đầu suy trực tiếp từ định nghĩa của hệ số tổ hợp. Các tính chất còn lại có thể chứng minh nhờ sử dụng công thức trong định lý 4.

Tổ hợp

- Từ b) và c), ta có thể tính tất cả các hệ số tổ hợp chỉ bằng phép cộng. Các hệ số này được tính và viết lần lượt theo từng dòng (mỗi dòng ứng với một giá trị *n*=0, 1, ...), trên mỗi dòng chúng được tính và viết lần lượt theo từng cột (mỗi cột ứng với một giá trị *m* = 0, 1, ..., *n*) theo bảng tam giác dưới đây:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & C_0^0 & & & & & \\
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & \dots & & \dots & & \dots & & & \\
 & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \\
 & C_n^0 & & C_n^1 & & \dots & & C_n^{n-1} & & C_n^n & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}
$$

- Bảng này được gọi là *tam giác Pascal*.

Tổ hợp

- Tam giác Pascal, n=8

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}
$$

Tổ hợp

- Các hệ số tổ hợp có liên quan chặt chẽ với việc khai triển luỹ thừa của một nhị thức.

$$(x+y)^n = C_n^0 y^n + \ldots + C_n^m x^m y^{n-m} + \ldots + C_n^n x^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i y^{n-i}$$

- Công thức trên được gọi là *khai triển nhị thức Newton* và các hệ số tổ hợp còn được gọi là các *hệ số nhị thức*.

Tổ hợp

Trong công thức Newton đặt y=1 ta có:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n \quad (*)$$

Rất nhiều đẳng thức về hệ số tổ hợp được suy từ (*). Chẳng hạn, trong (*) chọn x =1 ta được:

- $C(n,0) + C(n,1) + \ldots + C(n,n) = 2^n$,

tức là nhận được kết quả đã biết: số các tập con của một n-tập bằng 2^n, còn nếu chọn x = -1 ta được:

- $C(n,0) - C(n,1) + C(n,2) - \ldots + (-1)^n C(n,n) = 0$,

tức là số các tập con chẵn (có số phần tử là số chẵn) bằng các số tập con lẻ và bằng 2^{n-1}.

Chỉnh hợp lặp

- **Định nghĩa.** Ta gọi *chỉnh hợp lặp chập m từ n* phần tử của X là bộ có thứ tự gồm m thành phần, mỗi thành phần đều là phần tử của X.
- Ký hiệu số lượng chỉnh hợp lặp chập m từ n phần tử là A_n^m
- Theo định nghĩa, một chỉnh hợp lặp chập m từ n phần tử của X có thể biểu diễn bởi

$$(a_1, a_2, ..., a_m), a_i \in X, i = 1, 2, ..., m.$$

- Dễ thấy tập tất cả các chỉnh hợp lặp chập m từ n phần tử của X chính là X^m. Vì vậy, theo nguyên lý nhân ta có
- **Định lý 4:** $A_n^m = n^m$.

Chỉnh hợp lặp

- **Ví dụ 1**. Tính số dãy nhị phân độ dài n.

  Giải: Mỗi dãy nhị phân độ dài n là một bộ gồm n thành phần, trong đó mỗi thành phần chỉ nhận một trong hai giá trị (1 hoặc 0). Từ đó suy ra số các dãy nhị phân độ dài n là 2^n.

- Do mỗi tập con của tập n phần tử tương ứng với một vectơ đặc trưng là một xâu nhị phân độ dài n, nên ta có
- **Hệ quả:** Số lượng tập con của tập n phần tử là 2^n.
- **Ví dụ 2**. Tính số ánh xạ từ tập m phần tử $U = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ vào tập n phần tử V.

  Giải: Mỗi ánh xạ f cần đếm được xác định bởi bộ ảnh $(f(u_1), f(u_2), ..., f(u_m))$, trong đó $f(u_i) \in V$, i=1, 2, ..., m. Từ đó nhận được số cần tìm là n^m.

Chỉnh hợp lặp

- **Ví dụ 3.** Cần phải phân bố 100 sinh viên vào 4 nhóm thực tập ACCESS, FOXPRO, EXCEL, LOTUS. Mỗi sinh viên phải tham gia vào đúng một nhóm và mỗi nhóm có thể nhận một số lượng không hạn chế sinh viên.

  Số cách phân bố là bao nhiêu ?

- **Giải:** 4^{100} hay 100^4 ?

- Mỗi cách phân bố cần tìm có thể biểu diễn bởi bộ có thứ tự gồm 100 thành phần $(b_1, ..., b_{100})$ trong đó $b_i \in \{A, F, E, L\}$ là nhóm thực tập của sinh viên thứ i. Từ đó suy ra số cách phân bố cần đếm là 4^{100}.

Tổ hợp lặp

- **Định nghĩa.** Ta gọi tổ hợp lặp chập *m* từ *n* phần tử của *X* là bộ không có thứ tự gồm *m* thành phần, mỗi thành phần đều là phần tử của *X*, *các thành phần có thể lặp lại.*
- **Định lý 5:** *Số* **tổ hợp lặp** chập m từ n phần tử là **C(*n*+m-1, m)**

Ví dụ: • Có bao nhiêu tổ hợp lặp chập 2 sinh ra từ tập {a, b, c}

aa, bb, cc,
ab, bc, ac,

$$C(3+2-1,2) = C(4,2) = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

Bài tập

Bài 1: Trong đĩa hoa quả có táo, cam, lê, mỗi loại có ít nhất 4 quả. Tính số cách lấy **4 quả** từ đĩa này nếu thứ tự các quả được chọn không quan trọng.

Bài 2: Có bao nhiêu cách đặt 10 viên bi giống hệt nhau vào tám ngăn phân biệt?

Bài 3: Có bao nhiêu cách chọn năm tờ giấy bạc từ một két đựng tiền gồm những tờ có mệnh giá 1$, 2$, 5$, 10$, 20$, 50$ và 100$. Giả sử thứ tự mà các tờ tiền được chọn ra là không quan trọng, các tờ tiền cùng loại là không phân biệt và mỗi loại có ít nhất 5 tờ.

Hoán vị với các phần tử không phân biệt

- Trong bài toán đếm, một số phần tử có thể **giống hệt nhau**, không phân biệt
  → Tránh đếm chúng hơn 1 lần
- **Ví dụ:**
  Có thể nhận được bao nhiêu xâu khác nhau bằng cách sắp
  xếp lại các chữ cái của từ SUCCESS?
- **Định lí 6:** Số **các hoán vị khác nhau** của n phần tử, trong đó có n_1 phần tử thuộc loại 1, n_2 phần tử thuộc loại 2,... n_k phần tử thuộc loại k, bằng:

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

Phân phối các vật vào trong các hộp

- **Định lí 7:**

  Số cách phân phối ***n* vật khác nhau** vào ***k* hộp khác nhau** sao cho có n_i vật được đặt vào hộp thứ *i*, với *i*= 1, 2, ..., *k*, bằng:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots n_k!}$$

Bài tập

Bài 1: Có bao nhiêu cách chọn 12 chiếc bánh từ một cửa hàng có 21 loại bánh khác nhau.

Bài 2: Có bao nhiêu cách phân phối 12 viên bi giống hệt nhau vào sáu ngăn phân biệt.

Bài 3: Có bao nhiêu cách phân phối 12 vật khác nhau vào 6 ngăn phân biệt, mỗi ngăn 2 vật.

2.3. Nguyên lý bù trừ
(The inclusion-exclusion principle)

2.3.1. Phát biểu nguyên lý

2.3.2. Các ví dụ áp dụng

2.3.1. Phát biểu nguyên lý

- Nguyên lý bù trừ trong trường hợp hai tập:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \qquad (1)$$

  - Giả sử A có 5 phần tử, B có 3 phần tử và có 1 phần tử thuộc vào cả A lẫn B
  - Khi đó số phần tử của hợp hai tập là 5+3-1 = 7, chứ không phải là 8
- **CM:**

Nguyên lý bù trừ

- Mở rộng cho trường hợp 3 tập: Giả sử A, B, C là ba tập bất kỳ. Khi đó:

$|A \cup B \cup C|$

$= |(A \cup B) \cup C)|$

$= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$

$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)|$

$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C)| + |A \cap B \cap C)|$

Vậy

$\mathbf{|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C)| + |A \cap B \cap C)|} \qquad \mathbf{(2)}$

Có thể chứng minh bằng lập luận trực tiếp!

Nguyên lý bù trừ

$|A \cup B \cup C| = |A|+|B|+ |C| – |A \cap B| – |A \cap C|– |B \cap C)|+ |A \cap B \cap C)|$ **(2)**

Có thể chứng minh bằng lập luận trực tiếp:

- Trong tổng của ba số hạng đầu tiên các phần tử chung của A và B được tính hai lần, vì vậy phải trừ bớt đi một lần. Tương tự như vậy đối với các phần tử chung của A và C và các phần tử chung của B và C.
- Thế nhưng, trừ như vậy là hơi quá, bởi vì những phần tử chung của cả ba tập A, B và C chưa được tính đến trong tổng của 6 số hạng đầu tiên. Vì vậy phải cộng bù lại.

Nguyên lý bù trừ tổng quát

- **Định lý.** *Giả sử* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *là các tập hữu hạn. Khi đó*

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_m) = N_1 - N_2 + \ldots + (-1)^{m-1} N_m$$

trong đó

$$N_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}), \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

(N_k là tổng số phần tử của tất cả các tập là giao của k tập lấy từ m tập đã cho, nói riêng

$$N_1 = N(A_1) + \ldots + N(A_m),$$

$$N_m = N(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m)\ ).$$

2.3.2. Các ví dụ áp dụng

- **Ví dụ 1.** Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 10 hoặc là bắt đầu bởi 00 hoặc là kết thúc bởi 11?
- **Giải**. Dễ thấy là số xâu nhị phân độ dài 10 bắt đầu bởi 00 là $2^8 = 256$ và số xâu nhị phân độ dài 10 kết thúc bởi 11 là $2^8 = 256$. Ngoài ra, số xâu nhị phân độ dài 10 bắt đầu bởi 00 và kết thúc bởi 11 là $2^6 = 64$. Theo nguyên lý bù trừ suy ra số xâu nhị phân hoặc bắt đầu bởi 00 hoặc kết thúc bởi 11 là

$$256 + 256 - 64 = 448.$$

2.3.2. Các ví dụ áp dụng

- **Ví dụ 2:** Lớp toán rời rạc có 25 sinh viên chuyên ngành tin học, 13 sinh viên chuyên ngành toán và tám sinh viên theo học cả ngành toán lẫn tin học. ***Hỏi trong lớp này có bao nhiêu sinh viên***, nếu mỗi sinh viên theo ngành toán hoặc ngành tin hoặc theo học cả toán và tin?
- **Ví dụ 3:** Giả sử trong trường có 1807 sinh viên năm thứ nhất. Trong số này có 453 người chọn môn tin học, 547 người chọn môn toán và 299 người học cả hai môn toán và tin. ***Hỏi có bao nhiêu sinh viên không theo học toán cũng không học tin?***

2.3.2. Các ví dụ áp dụng

- **Ví dụ 4:** Biết rằng có 1232 sinh viên học tiếng Tây Ban Nha, 879 sinh viên học tiếng Pháp và 114 sinh viên học tiếng Nga. Ngoài ra còn biết rằng 103 sinh viên học cả tiếng Tây Ban Nha và tiếng Pháp, 23 sinh viên học cả tiếng Tây Ban Nha và tiếng Nga, 14 sinh viên học cả tiếng Pháp và tiếng Nga. Nếu tất cả 2092 sinh viên đều theo học ít nhất một ngoại ngữ, thì ***có bao nhiêu sinh viên học cả ba thứ tiếng***?

2.3.2. Các ví dụ áp dụng

- **Ví dụ 5:** Hỏi trong tập $X = \{1, 2, ..., 10000\}$ có bao nhiêu số không chia hết cho bất cứ số nào trong các số 3, 4, 7?
- **Giải.** Gọi

$$A_i = \{ x \in X : x \text{ chia hết cho } i\} , i = 3, 4, 7.$$

- Khi đó $A_3 \cup A_4 \cup A_7$ là tập các số trong X chia hết cho ít nhất một trong 3 số 3, 4, 7, suy ra số lượng các số cần đếm sẽ là

$$N(X) - N(A_3 \cup A_4 \cup A_7) = 10000 — (N_1 - N_2 + N_3).$$

- Ta có

$$N_1 = N(A_3) + N(A_4) + N(A_7)$$
$$= [10000/3] + [10000/4] + [10000/7]$$
$$= 3333 + 2500 + 1428 =7261,$$

2.3.2. Các ví dụ áp dụng

$$N_2 = N(A_3 \cap A_4) + N(A_3 \cap A_7) + N(A_4 \cap A_7)$$

$$= [10000/(3\times4)] + [10000/(3\times7)] + [10000/(4\times7)]$$

$$= 833 + 476 + 357 = 1666,$$

$$N_3 = N(A_3 \cap A_4 \cap A_7) = [10000/(3\times4\times7)\ ] = 119,$$

ở đây ký hiệu [r] để chỉ số nguyên lớn nhất không vượt quá r (tức lấy phần nguyên dưới).

- Từ đó số lượng các số cần đếm là

$$10000 - 7261 + 1666 - 119 = 4286.$$

2.4. Hệ thức truy hồi

- Hệ thức truy hồi là công thức cho phép tính giá trị của các đại lượng theo từng bước, dựa vào các giá trị tính ở các bước trước và một số giá trị đầu.
- Là một kỹ thuật quan trọng cho phép giải nhiều bài toán đếm

Hệ thức truy hồi

- **Định nghĩa:**

Hệ thức truy hồi đối với dãy số $\{a_n\}$ là ***phương trình biểu diễn a_n*** qua một hay nhiều số hạng đứng trước nó, cụ thể là a_0, a_1, ..., a_{n-1} với mọi số nguyên $n \geq n_0$,trong đó n_0 là một số nguyên không âm.

Dãy số được gọi là **lời giải** hay là ***nghiệm*** của hệ thức truy hồi nếu các số hạng của nó thỏa mãn hệ thức truy hồi này.

Ví dụ:

Một hệ thức truy hồi $\boldsymbol{a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}}$ với $a_0 = 1$, $a_1 = 3$

thì nghiệm của hệ thức truy hồi là:

$$\mathbf{a_n = 2n+1}$$

Hệ thức truy hồi

Ví dụ 1:

Cho $\{a_n\}$ là dãy số thỏa mãn hệ thức truy hồi

$a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n = 2, 3, 4,...$ và giả sử $a_0 = 3$, $a_1 = 5$.

Tìm a_2, a_3.

Ví dụ 2:

Hãy xác định xem dãy $\{a_n\}$ trong đó $\boldsymbol{a_n = 3n}$ với mọi n nguyên không âm có phải là lời giải của hệ thức truy hồi $\boldsymbol{a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}}$ với $n = 2, 3, 4...$ hay không?

Cũng câu hỏi như vậy đối với $\boldsymbol{a_n = 2^n}$ và $\boldsymbol{a_n = 5}$

Mô hình hóa bằng hệ thức truy hồi

Ví dụ 1:

Lãi kép. Giả sử một người gửi 10.000$ vào tài khoản của mình tại một ngân hàng với lãi suất kép 11% mỗi năm. Hỏi sau 30 năm anh ta có bao nhiêu tiền trong tài khoản của mình?

Giải:

- Gọi P_n là tổng số tiền có trong tài khoản sau n năm

$$P_n = P_{n-1} + 0.11P_{n-1} = 1,11P_{n-1}$$

- Như vậy:
  - $P_1 = 1,11P_0$
  - $P_2 = 1,11P_1 = (1,11)^2 P_0$
  - ...
  - $P_n = 1,11P_{n-1} = (1,11)^n P_0$
  - Thay $n = 30$ vào công thức $P_{30} = (1,11)^{30} . 10000 = 228\ 923\$$

Mô hình hóa bằng hệ thức truy hồi

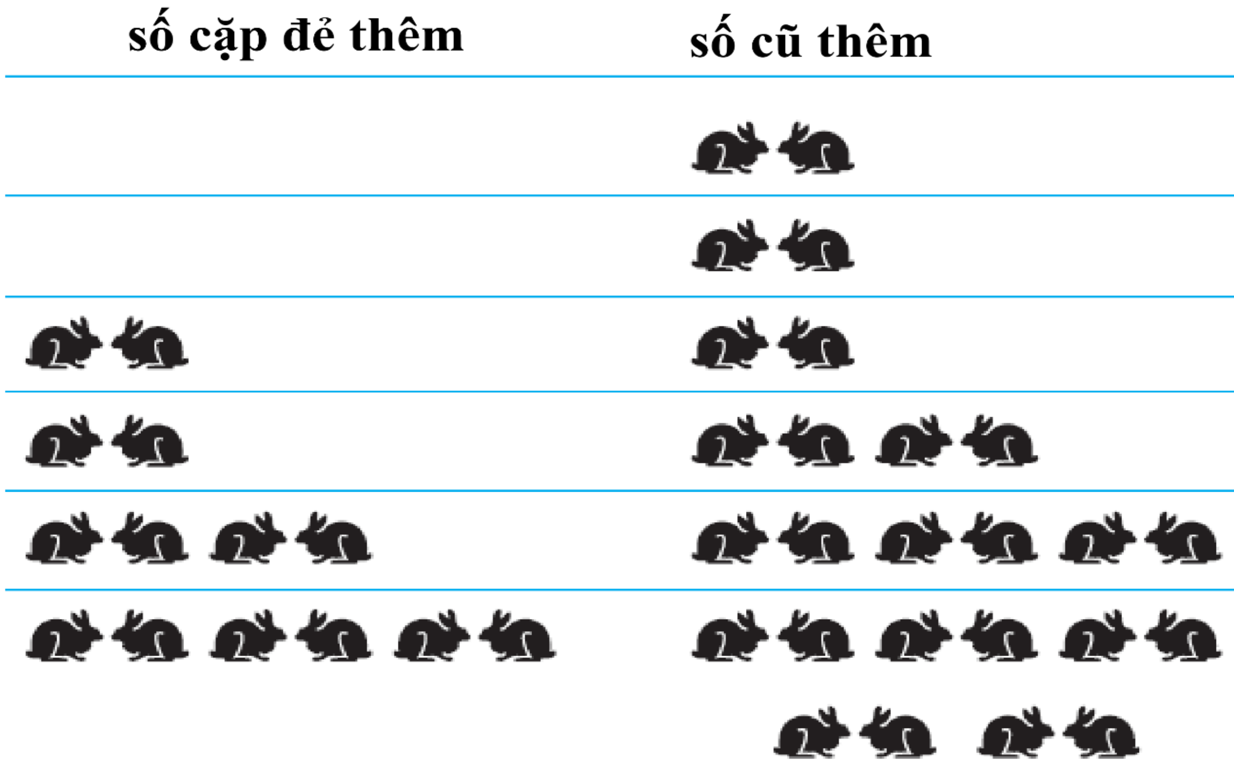
Leonardo Fibonacci
1170-1250

Ví dụ 2:

Họ nhà thỏ và các số Fibonacci. Một cặp thỏ mới sinh được thả trên một hòn đảo. Giả sử rằng một cặp thỏ chưa sinh sản được trước khi đầy 2 tháng tuổi. Kể từ khi chúng đầy 2 tháng tuổi, mỗi tháng chúng đẻ được một đôi thỏ con. **Tìm công thức truy hồi tính số cặp thỏ trên đảo sau *n* tháng** với giả sử các con thỏ là trường thọ.

Mô hình hóa bằng hệ thức truy hồi

Số cặp thỏ trên đảo



1	0	1	1
2	0	1	1
3	1	1	2
4	1	2	3
5	2	3	5
6	3	5	8

Mô hình hóa bằng hệ thức truy hồi

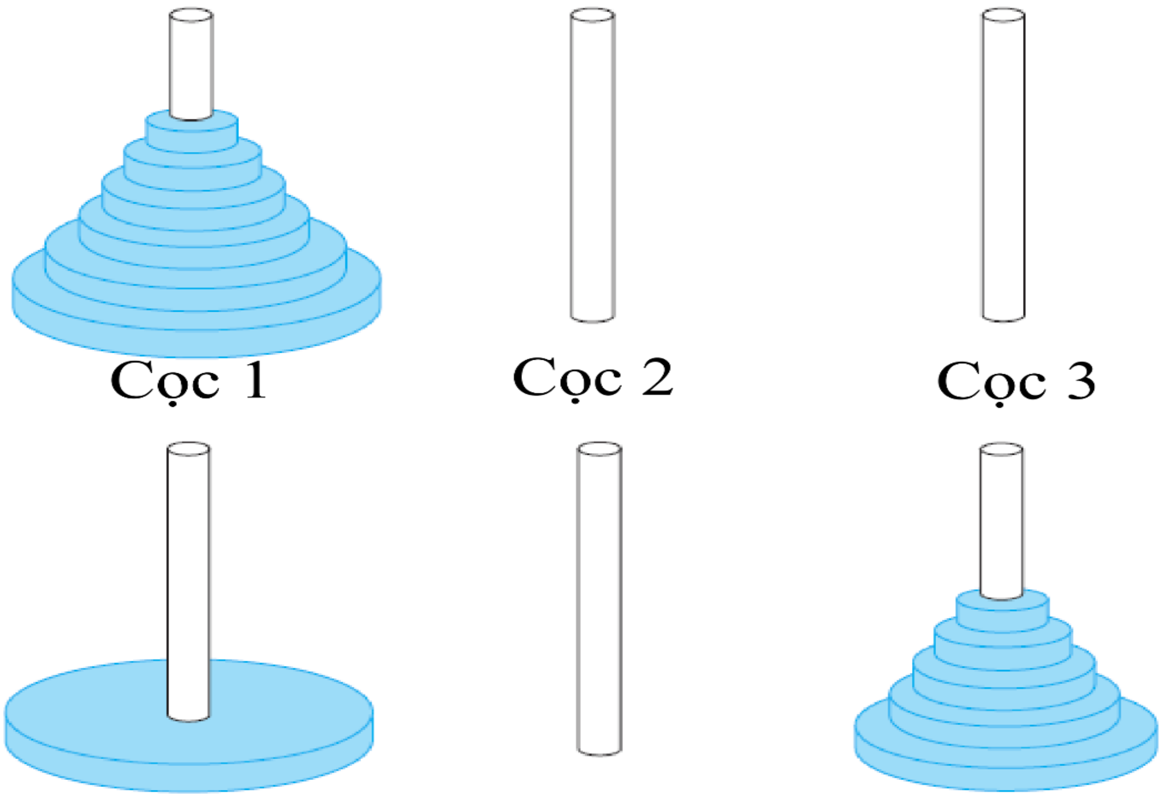
Giải:

- Giả sử f_n là số cặp thỏ sau n tháng, với $n = 1, 2, 3,...$
- Tháng 1 số cặp thỏ trên đảo là $f_1 = 1$
- Tháng 2 số cặp thỏ trên đảo là $f_2 = 1$
- Tháng 3 số cặp thỏ $f_3 = 1 + 1 = f_1 + f_2$
- Tháng 4 số cặp thỏ $f_4 = 1 + 2 = f_2 + f_3$
- Tháng n số cặp thỏ trên đảo là $\boldsymbol{f_n = f_{n-1} + f_{n-2}}$, f_{n-1} số cặp thỏ tháng trước, f_{n-2} số cặp thỏ mới đẻ

Mô hình hóa bằng hệ thức truy hồi

Ví dụ 3:

Tháp Hà Nội. Do Édouard Lucas đưa ra cuối thế kỉ XIX.



Mô hình hóa bằng hệ thức truy hồi

Giải:

- Gọi H_n là số bước dịch chuyển để giải câu đố tháp Hà Nội với n đĩa
- Dịch chuyển ***n*-1** đĩa từ cọc 1 sang cọc 3, phải dùng $\boldsymbol{H_{n-1}}$ lần
- Dịch chuyển đĩa ***n*** từ cọc 1 sang cọc 2
- Cuối cùng, mất $\boldsymbol{H_{n-1}}$ lần để dịch chuyển ***n*-1** đĩa từ cọc 3 sang cọc 2
- Ta có hệ thức truy hồi:

$$\boldsymbol{H_n = 2.H_{n-1} + 1, \text{ với } H_1 = 1}$$

- $H_n = 2.H_{n-1} + 1 = 2.(2H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 H_{n-2} + 2 + 1$

$= 2^2(2.H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1$

… $= 2^{n-1} H_1 + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1$

$= 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1$

$= 2^n - 1$

Mô hình hóa bằng hệ thức truy hồi

- **Ví dụ 4.** Công thức đệ qui cho $C(n,k)$ - số lượng tập con k phần tử của tập n phần tử X.

  $C(n,0) = 1$ và $C(n,n) = 1$ (1)

  $C(n,k) = C(n-1, k-1) + C(n-1,k),\ \ n > k > 0$ (2)
- Công thức đệ qui (2) cùng với điều kiện đầu (1) cho phép tính giá trị của $C(n,k)$ với mọi giá trị của n và k.
- Công thức đệ qui (2) cho phép viết hàm đệ qui sau đây để tính giá trị của $C(n,k)$:

```
function C(n,k: integer): longint;
begin
     if (k=0) or (k=n) then C:=1
     else C:= C(n-1,k-1) + C(n-1,k);
end;
```

Mô hình hóa bằng hệ thức truy hồi

- Công thức đệ qui (2) cùng với điều kiện đầu (1) cho phép tính giá trị của $C(n,k)$ với mọi giá trị của n và k.
- Công thức đệ qui (2) cho phép viết hàm đệ qui sau đây để tính giá trị của $C(n,k)$:

```
function C(n,k: integer): longint;
begin
     if (k=0) or (k=n) then C:=1
     else C:= C(n-1,k-1) + C(n-1,k);
end;
```

Bài tập

- **Bài 1**: Giả sử $\boldsymbol{a_n = 2^n + 5.3^n}$, với $n = 0, 1, 2,\ldots$

  a) Tìm a_1, a_2 ,a_3 và a_4

  b) CM: $a_2 = 5a_1 - 6a_0$, $a_3 = 5a_2 - 6a_1$ và $a_4 = 5a_3 - 6a_2$

  c) CMR: $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ với mọi số nguyên $n \geq 2$

- **Bài 2**: Chứng tỏ rằng dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi

  $\boldsymbol{a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2n - 9}$ nếu:

  a) $a_n = -n + 2$

  b) $a_n = 5(-1)^n - n + 2$

Bài tập

- **Bài 3**: Một nhân viên bắt đầu làm việc tại một công ti từ năm 1999 với lương khởi điểm là 50 000 đô la một năm. Hằng năm anh ta được nhận thêm 1000 đô la và 5% lương của năm trước.

a) Hãy thiết lập hệ thức truy hồi tính lương của nhân viên đó sau năm 1999 ***n*** *năm.*

b)Lương năm 2007 của anh ta là bao nhiêu?

c)Hãy tìm công thức tường minh tính lương của nhân viên này sau năm 1999 ***n*** *năm*

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính

- Ta hiểu việc giải hệ thức truy hồi là việc tìm công thức dưới dạng hiện cho số hạng tổng quát của dãy số thoả mãn hệ thức truy hồi đã cho.
- Chưa có phương pháp giải mọi hệ thức truy hồi .
- Xét phương pháp giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất hệ số hằng.

Hệ thức truy hồi tuyến tính

Định nghĩa 1:

Một ***hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k*** với hệ số hằng số là hệ thức truy hồi có dạng:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

trong đó: c_1 , c_2 , c_k là các số thực và $c_k \neq 0$

- ***Tuyến tính*** vì vế phải là tổng các tích của các số hạng trước của dãy
- ***Thuần nhất*** vì mọi số hạng đều có dạng a_j nhân với hệ số
- ***Bậc k*** là vì a_n được biểu diễn qua k số hạng đứng trước

Hệ thức truy hồi tuyến tính

<u>Ví dụ</u>:

- Hệ thức truy hồi $P_n = (1.11)P_{n-1}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc nhất
- Hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + (a_{n-1})^2$ không là tuyến tính
- Hệ thức truy hồi $H_n = 2H_{n-1} + 1$ không là thuần nhất
- Hệ thức truy hồi $B_n = nB_{n-1}$ không có hệ số hằng

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính

Phương pháp cơ bản:

- Tìm nghiệm dạng $a_n = r^n$, trong đó r là hằng số
- $\boldsymbol{a_n = r^n}$ là nghiệm của HTTH: $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$

  nếu và chỉ nếu $\boldsymbol{r^n = c_1r^{n-1} + c_2r^{n-2} + \ldots + c_kr^{n-k}}$ **(*)**
- Chia cả 2 vế cho r^{n-k} . Khi đó (*) tương đương phương trình:

  $$\boldsymbol{r^k - c_1r^{k-1} - c_2r^{k-2} - \ldots + c_{k-1}r - c_k = 0} \qquad \textbf{(1)}$$
- Do đó, $\boldsymbol{a_n = r^n}$ là nghiệm nếu và chỉ nếu r là nghiệm phương trình (1)
- Phương trình (1) gọi là **phương trình đặc trưng**
- Nghiệm của phương trình (1) gọi là **nghiệm đặc trưng** của hệ thức truy hồi

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính bậc 2

Định lí 1:

Cho hệ thức truy hồi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ với c_1 , c_2 là hai số thực.
Giả sử phương trình đặc trưng $\boldsymbol{r^2 - c_1 r - c_2 = 0}$ có hai nghiệm phân biệt là $\boldsymbol{r_1, r_2}$.
Khi đó $\{a_n\}$ là nghiệm của HTTH nếu và chỉ nếu

$$\boldsymbol{a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n}$$

với $n = 0, 1, 2, \ldots$ trong đó α_1, α_2 là các hằng số.

Ví dụ 1: Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \text{ với } a_0 = 2, a_1 = 7$$

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính bậc 2

Định lí 2:

Cho hệ thức truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ với c_1 , c_2 là hai số thực, c2 $\neq$ 0.
Giả sử phương trình đặc trưng $r^2 - c_1r - c_2 = 0$ có nghiệm kép r_0
Khi đó $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi nếu và chỉ nếu

$$a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$$

với $n = 0, 1, 2 ,...$ trong đó α_1, α_2 là các hằng số.

Ví dụ 2: Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \text{ với } a_0 = 1, a_1 = 6$$

Giải hệ thức truy hồi tuyến tính tổng quát

Định lí 3:

Cho hệ thức truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + c_ka_{n-k}$ với c_1 , c_2 ,…, c_k là các số thực.
Giả sử phương trình đặc trưng $r^k - c_1r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$
có k nghiệm phân biệt r_1, r_2, …, r_k.
Khi đó, dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi nếu và chỉ nếu

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \ldots + \alpha_k r_k^n,$$

với $n = 0, 1, 2$,… trong đó α_1, α_2 ,…, α_k là các hằng số.

Ví dụ 3: Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3} \text{ với } a_0 = 2,\ a_1 = 5,\ a_2 = 15$$

Bài tập

1. Trong các hệ thức truy hồi sau đây, hệ thức nào là tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số. Bậc của các hệ thức đó là bao nhiêu?

a) $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} + 5a_{n-3}$

b) $a_n = 2na_{n-1} + a_{n-2}$

c) $a_n = a_{n-1} + a_{n-4}$

d) $a_n = a_{n-1} + 2$

e) $a_n = a_{n-1}^2 + a_{n-2}$

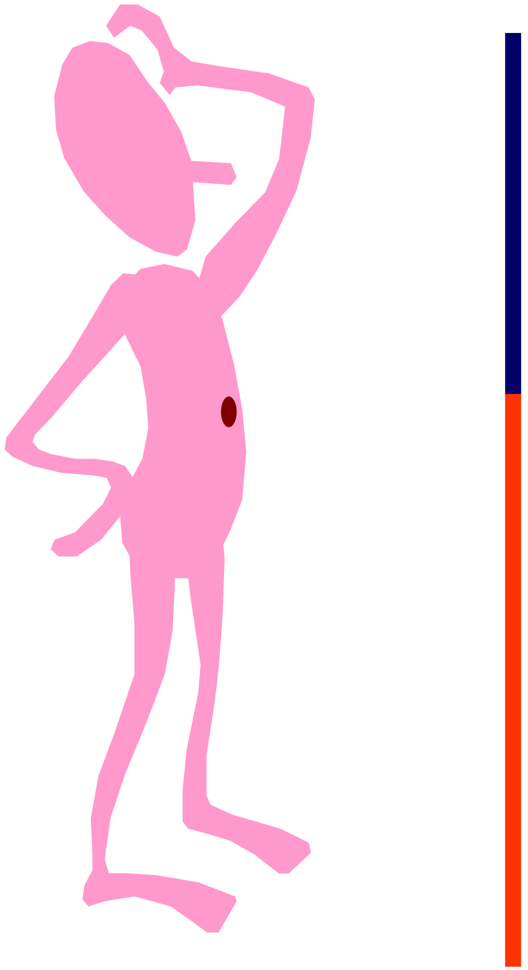
2. Giải các hệ thức truy hồi cùng các điều kiện đầu sau:

a) $a_n = 2a_{n-1}$, *với* $n \geq 1$, $a_0 = 3$

b) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, *với* $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$

c) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, *với* $n \geq 2$, $a_0 = 6$, $a_1 = 8$

Tỷ lệ giữa chiều cao và lưng



Định nghĩa tỷ lệ vàng ϕ (Euclid)

- Tỷ lệ thu được khi chia đoạn thẳng ra 2 phần không bằng nhau sao cho tỷ lệ giữa đoạn thẳng đã cho và đoạn con lớn hơn là bằng tỷ lệ giữa đoạn lớn hơn và đoạn nhỏ hơn.

$$\phi = \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

$$\phi^2 = \frac{AC}{BC}$$

$$\phi^2 - \phi = \frac{AC}{BC} - \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1$$

$$\boxed{\phi^2 - \phi - 1 = 0}$$

$$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$