SÁCH HƯỚNG DẪN HỌC TẬP

TOÁN CAO CẤP (A1)

Biên soạn: TS. VŨ GIA TÊ

Ths. ĐỖ PHI NGA

GIỚI THIỆU MÔN HỌC

1. GIỚI THIỆU CHUNG:

Toán cao cấp A1 là học phần đầu tiên của chương trình toán dành cho sinh viên các nhóm ngành thuộc khối kỹ thuật. Để học tốt môn Toán cao cấp theo phương thức Đào tạo từ xa, bên cạnh các học liệu: sách, giáo trình in, băng đĩa hình,..., sách hướng dẫn cho người học toán cao cấp là rất cần thiết. Tập sách hướng dẫn này được biên soạn là nhằm mục đích trên. Tập sách được biên soạn theo chương trình qui định năm 2001 của Bộ Giáo dục Đào tạo và theo đề cương chương trình được Học viện Công nghệ BC-VT thông qua năm 2004.

Sách hướng dẫn học toán cao cấp A1 bám sát các giáo trình của các trường đại học kỹ thuật, giáo trình dành cho hệ chính qui của Học viện Công nghệ BC-VT biên soạn năm 2001 và kinh nghiệm giảng dạy nhiều năm của tác giả. Chính vì thế, tài liệu này có thể dùng để học tập và tham khảo cho sinh viên của tất cả các trường, các ngành đại học và cao đẳng.

Cách trình bày trong sách thích hợp cho người tự học, đặc biệt phục vụ đắc lực trong công tác đào tạo từ xa. Trước khi nghiên cứu các nội dung chi tiết, người đọc nên xem phần hướng dẫn của mỗi chương để thấy được mục đích, yêu cầu chính của chương đó. Trong mỗi chương, mỗi nội dung, người đọc có thể tự đọc và hiểu được cặn kẽ thông qua cách diễn đạt và chứng minh rõ ràng. Sau các chương, người đọc phải tự trả lời được các câu hỏi ôn tập. Nhờ các ví dụ minh hoạ được đưa ra từ đơn giản đến phức tạp, người đọc có thể coi đó là bài tập mẫu để tự giải các bài tập có trong tài liệu. Người đọc có thể tự kiểm tra, đánh giá kiến thức, khả năng thu nhận dựa vào phần hướng dẫn và đáp số được cung cấp ở những trang cuối sách.

Cũng cần nhấn mạnh rằng, nội dung chính của toán cao cấp là phép tính vi phân và phép tính tích phân mà nền tảng của nó là phép tính giới hạn của hàm số. Chính vì thế chúng tôi trình bày khá tỉ mỉ hai chương đầu của tài liệu để người học tự đọc cũng có thể có được các kiến thức vững vàng để đọc tiếp các chương sau. Trong quá trình tự đọc và học qua mạng, tuỳ theo khả năng tiếp thu, học viên có thể chỉ cần nhớ các định lý và bỏ qua phần chứng minh của nó.

Nhân đây tác giả cũng lưu ý rằng ở bậc trung học phổ thông của nước ta, chương trình toán cũng đã bao hàm các kiến thức về vi, tích phân. Tuy nhiên các nội dung đó chỉ mang tính chất giới thiệu do lượng thời gian hạn chế, do cấu tạo chương trình. Vì thế nếu không tự đọc một cách nghiêm túc các định nghĩa, định lý cũng sẽ vẫn chỉ nắm được một cách hời hợt và như vậy rất gặp khó khăn trong việc giải các bài tập toán cao cấp.

Sách gồm 5 chương tương ứng với học phần gồm 60 đến 75 tiết:

Chương I: Giới hạn của dãy số.

Chương II: Hàm số một biến số.

Chương III: Phép tính vi phân hàm số một biến số.

Chương IV: Phép tính tích phân.

Chương V: Lý thuyết chuỗi

2. MỤC ĐÍCH MÔN HỌC

Học phần này sẽ cung cấp các kiến thức về phép tính vi, tích phân của hàm số một biến, số thực và phép tính vi phân của hàm nhiều biến số. Nội dung của học phần tuân thủ theo quy định về học phần Toán cao cấp A1 của Bộ GD-ĐT dành cho các Trường thuộc khối ngành công nghệ.

3. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU MÔN HỌC

Để học tốt môn học này, sinh viên cần lưu ý những vấn đề sau :

1- Thu thập đầy đủ các tài liệu :

◊ Bài giảng: *Toán cao cấp A1.Vũ Gia Tê, Nguyễn Phi Nga*, Học viện Công nghệ BCVT, 2005.

◊ Sách hướng dẫn học tập và bài tập: *Toán cao cấp A1. Vũ Gia Tê, Nguyễn Phi Nga*, Học viện Công nghệ BCVT, 2005.

◊ Bài giảng điện tử: *Toán cao cấp A1*. Học viện Công nghệ BCVT, 2005.

Nếu có điều kiện, sinh viên nên tham khảo thêm: Các tài liệu tham khảo trong mục Tài liệu tham khảo ở cuối cuốn sách này.

2- Đặt ra mục tiêu, thời hạn cho bản thân:

✓ *Đặt ra mục các mục tiêu tạm thời và thời hạn cho bản thân, và cố gắng thực hiện chúng*

Cùng với lịch học, lịch hướng dẫn của Học viện của môn học cũng như các môn học khác, sinh viên nên tự đặt ra cho mình một kế hoạch học tập cho riêng mình. Lịch học này mô tả về các tuần học (tự học) trong một kỳ học và đánh dấu số lượng công việc cần làm. Đánh dấu các ngày khi sinh viên phải thi sát hạch, nộp các bài luận, bài kiểm tra, liên hệ với giảng viên.

✓ *Xây dựng các mục tiêu trong chương trình nghiên cứu*

Biết rõ thời gian nghiên cứu khi mới bắt đầu nghiên cứu và thử thực hiện, cố định những thời gian đó hàng tuần. Suy nghĩ về thời lượng thời gian nghiên cứu để "*Tiết kiệm thời gian*". "*Nếu bạn mất quá nhiều thì giờ nghiên cứu*", bạn nên xem lại kế hoạch thời gian của mình.

3- Nghiên cứu và nắm những kiến thức đề cốt lõi:

Sinh viên nên đọc qua sách hướng dẫn học tập trước khi nghiên cứu bài giảng môn học và các tài liệu tham khảo khác. Nên nhớ rằng việc học thông qua đọc tài liệu là một việc đơn giản nhất so với việc truy cập mạng Internet hay sử dụng các hình thức học tập khác.

Hãy sử dụng thói quen sử dụng bút đánh dấu dòng (highline maker) để đánh dấu các đề mục và những nội dung, công thức quan trọng trong tài liệu.

4- Tham gia đầy đủ các buổi hướng dẫn học tập:

Thông qua các buổi hướng dẫn học tập này, giảng viên sẽ giúp sinh viên nắm được những nội dung tổng thể của môn học và giải đáp thắc mắc; đồng thời sinh viên cũng có thể trao đổi, thảo luận của những sinh viên khác cùng lớp. Thời gian bố trí cho các buổi hướng dẫn không nhiều, do đó đừng bỏ qua những buổi hướng dẫn đã được lên kế hoạch.

5- Chủ động liên hệ với bạn học và giảng viên:

Cách đơn giản nhất là tham dự các diễn đàn học tập trên mạng Internet. Hệ thống quản lý học tập (LMS) cung cấp môi trường học tập trong suốt 24 giờ/ngày và 7 ngày/tuần. Nếu không có điều kiện truy nhập Internet, sinh viên cần chủ động sử dụng hãy sử dụng dịch vụ bưu chính và các phương thức truyền thông khác (điện thoại, fax,...) để trao đổi thông tin học tập.

6- Tự ghi chép lại những ý chính:

Nếu chỉ đọc không thì rất khó cho việc ghi nhớ. Việc ghi chép lại chính là một hoạt động tái hiện kiến thức, kinh nghiệm cho thấy nó giúp ích rất nhiều cho việc hình thành thói quen tự học và tư duy nghiên cứu.

7- Trả lời các câu hỏi ôn tập sau mỗi chương, bài.

Cuối mỗi chương, sinh viên cần tự trả lời tất cả các câu hỏi. Hãy cố gắng vạch ra những ý trả lời chính, từng bước phát triển thành câu trả lời hoàn thiện.

Đối với các bài tập, sinh viên nên tự giải trước khi tham khảo hướng dẫn, đáp án. Đừng ngại ngần trong việc liên hệ với các bạn học và giảng viên để nhận được sự trợ giúp.

Nên nhớ thói quen đọc và ghi chép là chìa khoá cho sự thành công của việc tự học!

CHƯƠNG I: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

1.1 MỤC ĐÍCH

Trong nhiều vấn đề lý thuyết cũng như thực tế, người ta phải xét những đại lượng mà trong quá trình biến thiên đại lượng đó lấy những giá trị rất gần đến một hằng số a nào đấy. Trong quá trình này, ta gọi đại lượng đang xét là dần đến a hay có giới hạn là a. Như vậy đại lượng có giới hạn là a có thể đạt được giá trị a và cũng có thể không bao giờ đạt được giá trị a, điều này trong quá trình tìm giới hạn không cần quan tâm đến.

Ví dụ:

1. Gọi x là biên độ của một con lắc tắt dần. Rõ ràng trong quá trình dao động, biên độ của nó giảm dần tới 0 và thực tế sau khoảng thời gian xác định con lắc dừng lại, ta nói rằng x có giới hạn là 0 trong quá trình thời gian trôi đi.

2. Xét dãy số (u_n) có dạng $u_n = \frac{n}{n+1}$. Quá trình n tăng lên mãi thì u_n tăng dần về số rất gần 1. Nói rằng dãy số có giới hạn là 1 khi n tăng lên vô cùng.

Giới hạn là một khái niệm khó của toán học. Khái niệm giới hạn được cho bởi từ "gần", để mô tả định tính. Còn định nghĩa chính xác của nó cho bởi cụm từ " bé hơn ε" hoặc "lớn hơn M" để mô tả định lượng sẽ được giới thiệu trong chương này. Khi đã hiểu được khái niệm giới hạn thì sẽ dễ dàng hiểu được các khái niệm đạo hàm, tích phân. Bởi vì các phép toán đó đều xuất phát từ phép tính giới hạn.

Trong mục thứ nhất cần hiểu được vai trò thực sự của số vô tỉ. Nhờ tính chất đầy của tập số thực mà người ta có thể biểu diễn tập số thực trên trục số - gọi là trục thực và nói rằng tất cả các số thực lấp đầy trục số. Nói khác đi có sự tương ứng 1-1 giữa các số thực và các điểm trên trục số. Cũng nên nhận xét được tập Q không có tính đầy. Học viên cần nắm chắc khái niệm trị tuyệt đối của một số thực và các phép tính về nó.

Trong mục thứ hai cần hiểu được vai trò của số phức về mặt lý thuyết cũng như ứng dụng sau này trong kỹ thuật. Thực chất một số phức z là một tương ứng 1-1 với cặp có thứ tự các số thực (x,y). Cần phải nắm vững khái niệm modul và acgumen của số phức và các dạng biểu diễn số phức: dạng đại số, dạng lượng giác, dạng hàm mũ. Từ đó có thể làm thông thạo các phép tính trên tập C, đặc biệt dùng công thức Moivre trong các ứng dụng vào lượng giác.

Trong mục thứ ba cần nắm vững khái niệm hội tụ, có giới hạn và phân kỳ của dãy số. Nắm vững các tính chất: bị chặn, không bị chặn, đơn điệu của dãy số. Nhờ vào các tính chất này mà thiết lập được các điều kiện cần, điều kiện đủ để dãy số có giới hạn. Khái niệm dãy con của một dãy số cũng là một khái niệm khó. Người học phải đọc kỹ định nghĩa và cố gắng hình dung để hiểu rõ khái niệm này. Đôi khi sự hội tụ hay phân kỳ của một dãy số có thể nhận biết nhờ vào tính chất của vài dãy con. Đặc biệt phải nắm được khái niệm hai dãy kề nhau để từ đó có khái niệm về các đoạn lồng nhau được dùng trong chứng minh định lý Bolzano-Weierstrass.

1.2 TÓM TẮT NỘI DUNG

1.2.1 Số thực

a. Các tính chất cơ bản của tập số thực.

Tất cả các số hữu tỉ và số vô tỉ tạo thành tập hợp số thực.

Kí hiệu tập số thực là R. Tập số vô tỉ là R\Q.

✓ **Tính chất 1:** Tập R là một trường giao hoán với hai phép cộng và nhân: (R, + , .).

1. $\forall a,b \in R, a+b \in R, a.b \in R$

2. $\forall a,b,c \in R, (a+b)+c = a+(b+c), (a.b)c = a(bc)$

3. $\forall a,b \in R, a+b = b+a, ab = ba$

4. R có phần tử trung hoà đối với phép cộng là 0 và đối với phép nhân là 1

$$\forall a \in R, a+0 = 0+a = a$$

$$a.1 = 1.a = a$$

5. Phân phối đối với phép cộng

$$\forall a,b,c \in R, a(b+c) = ab+ac$$

$$(b+c)a = ba+ca$$

6. Tồn tại phần tử đối của phép cộng

$$\forall a \in R, \exists(-a), a+(-a) = 0$$

Tồn tại phần tử nghịch đảo của phép nhân

$\forall a \in R^*, R^* = R \setminus \{0\}, \exists a^{-1}, a.a^{-1} = 1$

✓ **Tính chất 2:** Tập R được xếp thứ tự toàn phần và đóng kín đối với các số thực dương.

1. $\forall a,b \in R, a < b$ hoặc $a = b$ hoặc $a > b$
2. $\forall a,b,c \in R, a \le b \Rightarrow a + c \le b + c$
   $\forall a,b \in R, c \in R_+, a \le b \Rightarrow ac \le bc$
3. $\forall a,b \in R_+, a + b \in R_+, ab \in R_+$

✓ **Tính chất 3:** Tập R là đầy theo nghĩa sau đây: Mọi tập con X không rỗng của R bị chặn trên trong R đều có một cận trên đúng thuộc R và mọi tập con không rỗng X của R bị chặn dưới trong R đều có một cận dưới đúng thuộc R.

b. Tập số thực mở rộng

Người ta thêm vào tập số thực R hai phần tử kí hiệu là $-\infty$ và $+\infty$. Tập số thực mở rộng kí hiệu là $\overline{R}$ và $\overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$, các phép toán + và ., quan hệ thứ tự được định nghĩa như sau:

1. $\forall x \in R$
   $x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$
   $x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$
2. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
   $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
3. $\forall x \in R_+^*, R_+^* = \{x \in R, x > 0\}$
   $x(+\infty) = (+\infty)x = +\infty$
   $x(-\infty) = (-\infty)x = -\infty$
   $\forall x \in R_-^*, R_-^* = \{x \in R, x < 0\}$
   $x(+\infty) = (+\infty)x = -\infty$
   $x(-\infty) = (-\infty)x = +\infty$
4. $(+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$
   $(+\infty)(-\infty) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$
5. $\forall x \in R$
   $-\infty < x < +\infty$
   $-\infty \le -\infty$
   $+\infty \le +\infty$

c. Các khoảng số thực

Cho $a,b \in R$ và $a \le b$. Trong R có chín loại khoảng sau đây:

$[a,b]=\{x\in R; a\le x\le b\}$ được gọi là đoạn hay khoảng đóng bị chặn

$[a,b)=\{x\in R; a\le x<b\}$
$(a,b]=\{x\in R; a<x\le b\}$ được gọi là khoảng nửa đóng hoặc nửa mở

$[a,+\infty)=\{x\in R; a\le x\}$
$(-\infty,a]=\{x\in R; x\le a\}$
$(a,b)=\{x\in R; a<x<b\}$ được gọi là các khoảng mở
$(a,+\infty)=\{x\in R; a<x\}$
$(-\infty,a)=\{x\in R; x<a\}$

Các số thực a,b gọi là các mút của khoảng.

d. Giá trị tuyệt đối của số thực

✓ **Định nghĩa:** Giá trị tuyệt đối của số thực x, kí hiệu $|x|$ là một số thực không âm xác định như sau

$$|x|=\begin{cases} x & khi\ \ x\ge 0 \\ -x & khi\ \ x\le 0 \end{cases}$$

✓ **Tính chất**

1. $\forall x\in R,\quad |x|=Max(x,-x)$

2. $|x|=0\Leftrightarrow x=0$

3.

$\forall x,y\in R,\quad |xy|=|x||y|$

$\forall n\in N^*,\quad \forall x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\in R, \left|\prod_{i=1}^{n}x_i\right|=\prod_{i=1}^{n}|x_i|$

$\forall x\in R, \left|x^n\right|=|x|^n$

4. $\forall x\in R^*,\quad \left|\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{|x|}$

5.

$$\forall x, y \in R, \quad |x+y| \le |x| + |y|$$

$$\forall n \in N^*, \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in R, \quad \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

6.

$$\forall x, y \in R, \quad Max(x,y) = \frac{1}{2}\left(x + y + |x-y|\right)$$

$$Min(x,y) = \frac{1}{2}\left(x + y - |x-y|\right)$$

7. $\forall x, y \in R, \quad \left||x| - |y|\right| \le |x-y|$

e. Khoảng cách thông thường trong R

✓ **Định nghĩa:** Khoảng cách trong R là ánh xạ

$$d : R \times R \to R$$
$$(x,y) \mapsto |x-y|$$

Đó là hình ảnh trực quan về khoảng cách giữa 2 điểm x và y trên đường thẳng trục số thực R.

✓ **Tính chất**

1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2. $\forall x, y \in R, \quad d(x,y) = d(y,x)$

3. $\forall x, y, z \in R, \quad d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$

4. $\forall x, y, z \in R, |d(x,y) - d(x,z)| \le d(y,z)$

1.2.2 Số phức

a. Định nghĩa:

Cho $(x,y) \in R^2$,một số biểu diễn dưới dạng z=x+iy,trong đó $i^2 = -1$ gọi là một số phức.Tập các số phức kí hiệu là C.

Gọi x là phần thực của z, kí hiệu Rez =x

y là phần ảo của z,kí hiệu là Imz =y

Gọi môđun của z,kí hiệu $|z|$ xác định bởi số thực không âm

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r \ge 0$$

Gọi Acgumen của z ,kí hiệu Argz xác định bởi số thực

$$\text{Argz}=\theta \in R; \left\{\theta \in R; \cos\theta = \frac{x}{|z|} \text{ và } \sin\theta = \frac{y}{|z|}\right\}, \quad \text{với } z \neq 0$$

Như vậy Acgumen của z sai khác nhau $k2\pi, k \in Z$ và Arg0 không xác định.

Vậy số phức z có các dạng viết:

1. z =x+iy gọi là dạng chính tắc hay dạng đại số của số phức z .
2. z $= r(\cos\theta + i\sin\theta)$ gọi là dạng lượng giác của số phức z.

b. Các phép toán trên tập C

✓ **Phép so sánh bằng nhau**

$$\forall (x, y, x', y') \in R^4, \qquad x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

✓ **Phép lấy liên hợp**

Cho $z = x + iy \in C$,liên hợp của z,kí hiệu $\bar{z}$ cho bởi $\bar{z} = x - iy$

✓ **Phép lấy số phức đối**

Cho z=x+iy$\in$C,số phức đối của z, kí hiệu –z (đọc là trừ z) được xác định:

-z = -x-iy

✓ **Phép cộng**

Cho z = x+iy,z'= x'+iy',tổng của z và z',kí hiệu z+z' xác định như sau:

z+z'=(x+x')+i(y+y')

✓ **Phép nhân**

Cho z=x+iy và z'=x'+iy',tích của z và z',kí hiệu z.z' xác định như sau:

z.z'=(xx'-yy') + i(xy'+x'y)

✓ **Phép trừ và phép chia**

Là các phép tính ngược của phép cộng và phép nhân

$$z - z' = z + (-z')$$

$$\frac{z}{z'} = z'' \Leftrightarrow z = z'.z''$$

✓ **Phép luỹ thừa,công thức Moavrờ (Moivre)**

Cho $z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad \forall k \in Z$

Gọi z^k là luỹ thừa bậc k của z. Bằng qui nạp ,dễ chứng minh được

$$z^k = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)$$

✓ **Phép khai căn bậc n của** $z \in C^*$.

Cho $n \in N^*, z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Gọi $\varsigma \in C^*$ là căn bậc n của z, kí hiệu $\sqrt[n]{z}$,xác định như sau: $\varsigma^n = z$

Nếu gọi $\rho = |\varsigma|$ và Φ = Argς thì $\begin{cases} \rho^n = r \\ n\Phi = \theta + 2k\pi \end{cases}$ hay là $\rho = r^{\frac{1}{n}}$ và $\Phi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$ với $k = 0,1,2,...,n-1$.

Vậy số z có đúng n căn bậc n, đó là các số phức có dạng:

$$\varsigma = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \qquad k = 0,1,2,...,n-1$$

c. Áp dụng số phức vào lượng giác

✓ **Khai triển** $\cos n\theta, \sin n\theta, tgn\theta$

Cho $\theta \in R, n \in N^*$.Áp dụng công thức Moivre và công thức nhị thức Newton

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos^{n-k}\theta . i^k \sin^k\theta$$

1. $\cos n\theta$ biểu diễn dưới dạng một đa thức của $\cos\theta$,gọi đó là công thức Chebyshev loại 1.

2. $\sin n\theta$ bằng tích của $\sin\theta$ với một đa thức của $\cos\theta$,gọi là đa thức Chebyshev loại 2.

3. $tgn\theta = \dfrac{\sin n\theta}{\cos n\theta} = \dfrac{\dfrac{\sin n\theta}{\cos^n\theta}}{\dfrac{\cos n\theta}{\cos^n\theta}} = \dfrac{C_n^1 tg\theta - C_n^3 tg^3\theta + \cdots}{1 - C_n^2 tg^2\theta + C_n^4 tg^4\theta - \cdots}$

✓ **Tuyến tính hoá** $\cos^p\theta, \sin^p\theta, \cos^p\theta.\sin^q\theta$

Cho $\theta \in R, p \in N^*, \omega = e^{i\theta} \Rightarrow \begin{cases} 2\cos\theta = \omega + \overline{\omega} = \omega + \dfrac{1}{\omega} \\ 2i\sin\theta = \omega - \overline{\omega} = \omega - \dfrac{1}{\omega} \end{cases}$

Vậy $2^p \cos^p\theta = \left(\omega + \dfrac{1}{\omega}\right)^p$ và $(2i)^p \sin^p\theta = \left(\omega - \dfrac{1}{\omega}\right)^p$

Sử dụng công thức nhị thức Newton và xét các trường hợp sau đây:

a. Trường hợp $p = 2m, m \in N^*$

$$2^{2m}\cos^{2m}\theta = \left(\omega^{2m} + \frac{1}{\omega^{2m}}\right) + C_{2m}^1\left(\omega^{2m-2} + \frac{1}{\omega^{2m-2}}\right) + \cdots + C_{2m}^m$$

$$= 2\cos 2m\theta + 2C_{2m}^1\cos 2(m-1)\theta` + \cdots + 2C_{2m}^{m-1}\cos 2\theta + C_{2m}^m$$

$$\cos^{2m}\theta = 2^{-(2m-1)}\left(\frac{1}{2}C_{2m}^m + \sum_{k=0}^{m-1}C_{2m}^k\cos 2(m-k)\theta\right)$$

$$2^{2m}(-1)^m\sin^{2m}\theta = \left(\omega^{2m} + \frac{1}{\omega^{2m}}\right) - C_{2m}^1\left(\omega^{2m-2} + \frac{1}{\omega^{2m-2}}\right) + \cdots + (-1)^m C_{2m}^m$$

$$= 2\cos 2m\theta - 2C_{2m}^1\cos 2(m-1)\theta + \cdots + (-1)^m C_{2m}^m$$

$$\sin^{2m}\theta = 2^{-(2m-1)}(-1)^m\left(\frac{(-1)^m}{2}C_{2m}^m + \sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k C_{2m}^k\cos 2(m-k)\theta\right)$$

b.Trường hợp $p = 2m+1, m \in N$

$$2^{2m+1}\cos^{2m+1}\theta = \left(\omega^{2m+1} + \frac{1}{\omega^{2m+1}}\right) + C_{2m+1}^1\left(\left(\omega^{2m-1} + \frac{1}{\omega^{2m-1}}\right)\right) + \cdots + C_{2m+1}^m\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)$$

$$= 2\cos(2m+1)\theta + 2C_{2m+1}^1\cos(2m-1)\theta + \cdots + 2C_{2m+1}^m\cos\theta$$

$$\cos^{2m+1}\theta = 2^{-2m}\sum_{k=0}^{m}C_{2m+1}^k\cos(2m+1-2k)\theta$$

$$2^{2m+1}i(-1)^m\sin^{2m+1}\theta = \left(\omega^{2m+1} + \frac{1}{\omega^{2m+1}}\right) - C_{2m+1}^1\left(\omega^{2m+-} - \frac{1}{\omega^{2m-1}}\right) + \cdots$$

$$= 2i\sin(2m+1)\theta - 2i.C_{2m+1}^1\sin(2m-1)\theta + \cdots + 2i(-1)^m C_{2m+1}^m\sin\theta$$

$$\sin^{2m+1}\theta = 2^{-2m}(-1)^m\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_{2m+1}^k\sin(2m+1-2k)\theta$$

Để tuyến tính hoá $\cos^p\theta.\sin^q\theta$ trước hết tuyến tính hoá từng thừa số $\cos^p\theta, \sin^q\theta$, sau đó thực hiện phép nhân rồi cùng tuyến tính hoá các số hạng thu được.

1.2.3 Dãy số thực

a. Các khái niệm cơ bản của dãy số thực

✓ **Định nghĩa**

Một dãy số thực là một ánh xạ từ N vào R,kí hiệu:

$$u : N \to R$$

hay đơn giản nhất,kí hiệu (u_n)

Với $n = n_0 \in N$ xác định, u_{n_0} gọi là số phần tử thứ n_0 của dãy, u_n thường là một biểu thức phụ thuộc vào n gọi là phần tử tổng quát của dãy, chẳng hạn cho các dãy sau đây: (1), $\left((-1)^{n+1}\right)$, $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$

✓ **Sự hội tụ, sự phân kì của dãy số**

1. Dãy (u_n) hội tụ về $a \in R$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n \in N, n > n_0 \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$$

Kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$, rõ ràng $(u_n - a)$ hội tụ về 0.

2. Dãy (u_n) hội tụ nếu có số $a \in R$ để $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$

3. Dãy (u_n) phân kì nếu nó không hội tụ, nghĩa là:

$$\forall a \in R, \exists \varepsilon > 0, \forall n \in N, \exists n_0 \in N, n_0 > n, |u_n - a| \geq \varepsilon$$

4. Dãy (u_n) nhận $+\infty$ làm giới hạn nếu

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 \Rightarrow u_n > A$$

Kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$, đôi khi nói rằng (u_n) tiến tới $+\infty$

5. Dãy (u_n) nhận $-\infty$ làm giới hạn nếu

$$\forall B < 0 \quad \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 \Rightarrow u_n < B \quad .$$

Kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$

Dãy có giới hạn là $+\infty$ hoặc $-\infty$ cũng gọi là phân kỳ.

✓ **Dãy số bị chặn**

1. Nói rằng (u_n) bị chặn trên bởi số $A \in R$ nếu $\forall n \in N, u_n \leq A$.
2. Nói rằng (u_n) bị chặn dưới bởi số $B \in R$ nếu $\forall n \in N, u_n \geq B$.
3. Nói rằng (u_n) là dãy bị chặn nếu tồn tại $M \in R_+$ sao cho $\forall n \in N, |u_n| \leq M$.

b. Tính chất của dãy hội tụ

✓ **Tính duy nhất của giới hạn**

Định lí: Dãy (u_n) hội tụ về a thì a là duy nhất

✓ **Tính bị chặn**

1. Dãy (u_n) hội tụ thì bị chặn trong R.
2. Dãy (u_n) tiến đến $+\infty$ thì bị chặn dưới.

3. Dãy (u_n) tiến đến $-\infty$ thì bị chặn trên.

✓ **Tính chất đại số của dãy hội tụ**

1. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = |a|$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = 0$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} v_n = b \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = a + b$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \lambda u_n = \lambda a$.
5. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, ($v_n$) bị chặn $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (u_n v_n) = 0$.
6. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} v_n = b \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (u_n v_n) = ab$.
7. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} v_n = b \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$.

✓ **Tính chất về thứ tự và nguyên lý kẹp**

1. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l \in (a,b)$ .Khi đó $\exists n_0, \forall n > n_0 \Rightarrow a < u_n < b$
2. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$ và $\exists\ n_0, \forall n > n_0$ có $a \le u_n \le b$ khi đó $a \le l \le b$
3. Giả sử 3 dãy (u_n),(v_n),(w_n) thoả mãn:

   $\exists n_0, \forall n > n_0 \Rightarrow u_n \le v_n \le w_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = a$

   Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = a$
4. Giả sử $\forall n > n_0$ mà $u_n \le v_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ .Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$

c. Tính đơn điệu của dãy số

✓ **Dãy đơn điệu**

1. Dãy (u_n) tăng nếu $\forall n \in N, u_n \le u_{n+1}$,

   Dãy (u_n) tăng ngặt nếu $\forall n \in N, u_n < u_{n+1}$.
2. Dãy (u_n) giảm nếu $\forall n \in N, u_n \ge u_{n+1}$,

   Dãy (u_n) giảm ngặt nếu $\forall n \in N, u_n > u_{n+1}$.
3. Dãy (u_n) đơn điệu nếu nó tăng hoặc giảm.

   Dãy (u_n) đơn điệu ngặt nếu nó tăng ngặt hoặc giảm ngặt

Định lí 1:

1. Mọi dãy tăng và bị chặn trên thì hội tụ.
2. Mọi dãy giảm và chặn dưới thì hội tụ.

Định lí 2:

1. Dãy (u_n) tăng và không bị chặn trên thì dần đến $+\infty$.
2. Dãy (u_n) giảm và không bị chặn dưới thì dần đến $-\infty$.

✓ **Dãy kề nhau**

Hai dãy (u_n),(v_n) gọi là kề nhau khi và chỉ khi (u_n) tăng (v_n) giảm và $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$

Định lí: Hai dãy kề nhau thì hội tụ và có chung một giới hạn l, ngoài ra

$$\forall n \in N, u_n \le u_{n+1} \le l \le v_{n+1} < v_n$$

Hệ quả: (Định lí về các đoạn lồng nhau)

Cho hai dãy (a_n),(b_n) thoả mãn $:\forall n \in N, a_n \le b_n, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ và $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

Khi đó tồn tại duy nhất số l sao cho $\bigcap\limits_{n\in N}[a_n, b_n] = \{l\}$

d. Dãy con

Cho (u_n),từ các số hạng của nó lập một dãy mới (u_{n_k}) với $n_1 < n_2 < ...< n_k < ....$

Gọi (u_{n_k}) là một dãy con của (u_n).Chẳng hạn:

(u_{2n}) và (u_{2n+1}) là các dãy con của (u_n)

(u_{n^2}) là các dãy con của (u_n)

(u_{n^2-n}) không phải là dãy con của (u_n) vì số hạng u_0 xuất hiện 2 lần ứng với n=0,n=1

Định lí : Nếu (u_n) hội tụ về $a \in R$ thì mọi dãy con của nó cũng hội tụ về a

Hệ quả: Để (u_n) hội tụ đến l điều kiện cần và đủ là hai dãy con (u_{2n}) và (u_{2n+1}) đều hội đến l.

Định lí : (Định lí Bônzanô – Vâyơxtrase),(Bolzano -Weierstrass): Từ mọi dãy (u_n) bị chặn đều có thể lấy ra một dãy con hội tụ

1.3 CÂU HỎI ÔN TẬP

Câu 1. Số thực là gì? Nêu các tính chất của số thực.

Câu 2. Số hữu tỉ có tính đầy không? Cho ví dụ minh hoạ.

Câu 3. Trục số là gì? Định nghĩa các loại khoảng số thực.

Câu 4. Trị tuyệt đối của số thực là gì? Nêu các tính chất của nó.

Câu 5. Số phức là gì? Tại sao trục hoành và trục tung có tên gọi là trục thực và trục ảo.

Câu 6. Nêu các dạng số phức.

Câu 7. Nêu các phép tính số phức.

Câu 8. Phép khai căn số phức khác với phép khai căn số thực ở chỗ nào?

Câu 9. Dãy số thực là gì?

Câu 10. Định nghĩa sự hội tụ của dãy số thực. Từ đó có thể định nghĩa về sự hội tụ của dãy số phức?

Câu 11. Thế nào là dãy số bị chặn?

Câu 12. Thế nào là dãy số đơn điệu?

Câu 13. Dãy số hội tụ thì bị chặn có đúng không? Ngược lại dãy bị chặn có hội tụ không? Tại sao?

Câu 14. Các dãy không hội tụ có tính chất đại số giống như các dãy hội tụ không?

Câu 15. Nêu điều kiện để một dãy đơn điệu hội tụ.

Câu 16. Thế nào là hai dãy kề nhau? Thế nào là các đoạn lồng nhau? Nêu các tính chất của chúng.

Câu 17. Thế nào là một dãy con? Nếu dãy phân kỳ thì các dãy con của nó có phân kỳ không?

Câu 18. Phát biểu định lý Bolzano-Weierstrass. Nếu dãy không bị chặn thì có thể lấy ra một dãy con của nó hội tụ được không?

1.4 BÀI TẬP CHƯƠNG I

SỐ THỰC:

Câu 1. Chứng minh rằng $\sqrt{3}$ là số vô tỉ.

Câu 2. Giải các phương trình sau với $(x, y, z) \in R^3$.

a) $3x^2 + y^2 + z^2 = 2x(y + z)$. b) $3x^2 + 4y^2 + 18z^2 - 4xy - 12xz = 0$.

Câu 3. Tìm cận trên đúng,cận dưới đúng (nếu tồn tại) của tập E sau đây trên R $\quad E = \{\frac{1+(-1)^n}{n} - n^2, \ n \in N^*\}$.

Câu 4. Bằng định nghĩa hãy chứng minh sự hội tụ của các dãy cho bởi số hạng tổng quát tương ứng và tìm giới hạn của chúng

a) $u_n = \frac{n}{n+1}$. $\qquad$ b) $u_n = \frac{n+1}{4n+1}$.

c) $u_n = \frac{n^2}{n^3+1}$. $\qquad$ d) $u_n = \frac{3+(-3)^n}{4^n}$.

Câu 5. Tìm giới hạn của các dãy cho bởi số hạng tổng quát dưới đây

a) $x_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$. $\qquad$ b) $x_n = \sqrt{n(n+a)} - n$.

c) $x_n = n + \sqrt[3]{1-n^3}$. $\qquad$ d) $\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$.

Câu 6. Chứng minh sự hội tụ và xác định giới hạn của các dãy sau cho bởi số hạng tổng quát tương ứng

a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. $\qquad$ b) $\frac{\sum_{k=0}^{n}(3k+1)}{\sum_{k=0}^{n}(2k+3)}$. $\qquad$ c) $\sqrt[n]{3+\sin n}$.

Câu 7. Cho $(a,b,c) \in R^3$ và $b^2 - 4ac < 0$, (u_n), (v_n) là hai dãy số thực thoả mãn điều kiện:

$$\lim_{n\to\infty}(au_n^2 + bu_nv_n + cv_n^2) = 0$$

Chứng minh $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = 0$..

Câu 8. Cho dãy (x_n) với $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}$, $x_0 = 1$

a) Chứng minh (x_n) không có giới hạn hữu hạn.

b) Chứng minh $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Câu 9. Cho dãy (x_n) với $x_n = \frac{a_n}{b_n}$ trong đó $a_n = 2a_{n-1} + 3b_{n-1}$, $b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$, $a_0 > 0$, $b_0 > 0$

a) Chứng tỏ rằng $a_n > 0$, $b_n > 0$ $\forall n \in N$.

b) Biểu diễn x_{n+1} qua x_n.

c) Tính $x_{n+1} - x_n$ và chứng tỏ rằng (x_n) đơn điệu. Hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Câu 10. Chứng tỏ rằng các dãy sau có giới hạn hữu hạn

a) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$. b) $x_n = \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$.

Câu 11. Chứng tỏ các dãy sau có giới hạn là $+\infty$

a) $x_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

b) $x_n = \log_a \dfrac{2}{1} + \log_a \dfrac{3}{2} + \cdots + \log_a \dfrac{n+1}{n}$, $a > 1$.

Câu 12. Tìm giới hạn của dãy sau:

a) $x_n = \dfrac{2}{x_{n-1}} + 1$, $x_0 = 1$.

b) $x_n = \sqrt{1 + x_{n-1}}$, $x_0 = \sqrt{3}$.

c) $x_n(3 + x_{n-1}) + 1 = 0$, $x_0 = 1$.

d) $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$ $(n > 1)$, $x_1 = \sqrt{a}$, $a > 0$.

e) $x_{n+1} = \dfrac{x_n + x_{n-1}}{2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

f) $x_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x_{n-1}^2}{2}$, $x_1 = \dfrac{1}{2}$.

g) $x_n = \dfrac{5 + x_{n-1}^2}{2x_{n-1}}$, $x_1 > 5$.

Câu 13. Chứng minh rằng một dãy đơn điệu có giới hạn nếu nó có một dãy con có giới hạn.

Câu 14. Chứng minh rằng nếu ba dãy con (x_{2n}), (x_{2n+1}) và (x_{3n}) hội tụ thì dãy (x_n) hội tụ.

Có thể thay số 2 bởi số tự nhiên $k > 2$ được không?.

Câu 15. Nếu $x_n \to a$ (hữu hạn hay vô hạn). Có thể nói gì về $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

SỐ PHỨC

Câu 1. Cho E,F,G,H$\subset R^2$, xác định bởi các hệ thức sau:

E: $x^2 - y^2 = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$. F: $2xy + \dfrac{y}{x^2 + y^2} = 3$.

G: $x^3 - 3xy^2 + 3y = 1$. H: $3x^2y - 3x - y^3 = 0$.

Chứng minh $E \cap F = G \cap H$.

Câu 2. Có tồn tại $(z_1, z_2) \in C^2$ để thoả mãn các điều kiện dưới đây không?

$z_1 + z_2 = 1$, $z_1^2 + z_2^2 = 2$, $z_1^3 + z_2^3 = 3$.

Câu 3. Tìm tất cả các $(x, y, z) \in C^3$ sao cho

$$\begin{cases} x, y, z \text{ Khác nhau từng đôi một} \\ x(x-1) + 2yz = y(y-1) + 2xz = z(z-1) + 2x \end{cases}$$

Câu 4. Giải hệ phương trình với ẩn $(x, y, z) \in C^3$

$xy = z$, $yz = x$, $zx = y$.

Câu 5. Cho ánh xạ f: $C \to C$ thoả mãn

$$\begin{cases} \forall x \in R, f(x) = x \\ \forall (z, z') \in C^2, \begin{cases} f(z+z') = f(z) + f(z') \\ f(zz') = f(z).f(z') \end{cases} \end{cases}$$

Chứng minh $\left[\begin{array}{ll} f(z) = z & \forall z \in C \\ f(z) = \bar{z} & \forall z \in C \end{array} \right.$

Câu 6. Giải phương trình với ẩn số $z \in C$

$2z + 6\bar{z} = 3 + 2i$

Câu 7. Xác định tập các số phức $z \in C$ sao cho $z = r_0\bar{z}$, $r_0 \in R$

Câu 8. Với $(a,b,c) \in C^3$ thoả mãn $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = 1$ và $a+b+c = 0$. Chứng minh $a^3 = b^3 = c^3$

Câu 9. Chứng minh $\forall (z, z') \in C^2$

a. $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$ (Hằng đẳng thức hình bình hành).

b. $|\bar{z}z' + 1|^2 + |z - z'|^2 = (1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)$.

c. $|\bar{z}z' - 1|^2 - |z - z'|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |z'|^2)$.

d. $zz' = \dfrac{1}{4}(|z + \bar{z}'|^2 - |z - \bar{z}'|^2 + i|z + i\bar{z}'|^2 - i|z - i\bar{z}'|^2)$.

Câu 10. Cho $n \in N^*$, $(z_1,...,z_n) \in C^n$.Chứng minh $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ khi và chỉ khi $\exists u \in C$, $\exists(\alpha_1,...,\alpha_n) \in R_+^n$, $z_k = \alpha_k.u, k = \overline{1,n}$

Câu 11. Chứng minh $\forall(a,b) \in C^2$

a. $|a+b|^2 \le (1+|a|^2)(1+|b|^2)$. Khi nào xảy ra đẳng thức?

b. $2|a||b||a-b| \ge (|a|+|b|)\big||a|b - |b|a\big|$

Câu 12. Cho a,b,c,d$\in C$ khác nhau từng đôi một sao cho $\frac{d-a}{b-c}$ và $\frac{d-b}{c-a}$ là những số thuần ảo. Chứng minh rằng $\frac{d-c}{a-b}$ cũng thuần ảo.

Câu 13. Xác định tập hợp các điểm M có toạ vị z thoả mãn điều kiện:

a. $|z| = 2|z-1|$.

b. $\frac{z^2}{z+i} \in iR$.

Câu 14. Tính $\underset{|z|=1}{\mathrm{Sup}}|z^3 - z + 2|$

Câu 15. Với $a \in R$,ẩn $(x,y) \in R^2$. Tìm nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \cos a + \cos(a+x) + \cos(a+y) = 0 \\ \sin a + \sin(a+x) + \sin(a+y) = 0 \end{cases}$$

Câu 16. Giải các phương trình sau trên trường số phức:

a. $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$, $\theta \in R$.

b. $z^3 - (1-2i)z^2 + (1-i)z - 2i = 0$, biết rằng phương trình có một nghiệm thuần ảo.

Câu 17. Giải các phương trình với ẩn số $(x,y,z) \in C^3$

a. $\begin{cases} (x+y)(x^3-y^3) = 819 \\ (x-y)(x^3+y^3) = 399 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x = y^2 \\ y = z^2 \\ z = x^2 \end{cases}$

Câu 18. Chứng minh với $\alpha \in R$

a. $\left(\frac{1+i\,tg\alpha}{1-i\,tg\alpha}\right)^n = \frac{1+i\,tgn\alpha}{1-i\,tgn\alpha}$.

b. $z^m + z^{-m} = 2\cos m\alpha$ nếu $z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha$.

Câu 19. Cho $(n,x) \in N^* \times R$, tính $S = \sum_{k=0}^{n} \cos^3 kx$.

Câu 20. Với $(n,x) \in N \times (R - 2\pi Z)$ tính các tổng:

a. $A_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$. b. $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(x)$.

1.5 HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ BÀI TẬP CHƯƠNG I SỐ THỰC

Câu 2. Rút gọn về dạng toàn phương bằng phương pháp Gauss

a. (0,0,0).

b. $(3z, \frac{3}{2}z, z)$, $z \in R$ hoặc $(6t, 3t, 2t)$, $t \in R$.

Câu 3. Không tồn tại InfE, SupE = -1 = MaxE

Câu 4. a) 1; b) $\frac{1}{4}$; c) 0; d) 0

Câu 5. a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{a}{2}$; c) 0; d) 0

Câu 6. a) 1; b) $\frac{3}{2}$; c) 1;

Câu 7. Hãy biểu diễn tam thức dưới dạng chính tắc, sau đó sử dụng nguyên lý kẹp.

Câu 8. a) Dùng phương pháp phản chứng.

b) Chứng minh (x_n) tăng và không bị chặn trên.

Câu 9. a) Dùng qui nạp. b) $x_n = \frac{2x_n + 3}{x_n + 2}$

c) $x_{n+1} - x_n = \frac{(\sqrt{3} - x_n)(\sqrt{3} + x_n)}{x_n + 2}$

Bằng qui nạp chứng minh:

* Nếu $x_0 < \sqrt{3}$ thì (x_n) tăng và $x_n < \sqrt{3}$ $\forall n$. Qua giới hạn sẽ có $x_n \to \sqrt{3}$
* Nếu $x_0 > \sqrt{3}$ thì (x_n) giảm và $x_n > \sqrt{3}$ $\forall n$. Qua giới hạn sẽ có $x_n \to \sqrt{3}$
* Nếu $x_0 = \sqrt{3}$ thì $x_n = \sqrt{3}$ $\forall n$.

Tóm lại $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$ không phụ thuộc x_0,tức là không phụ thuộc a_0, b_0.

Câu 10.

a) Rõ ràng $x_n < x_{n+1}$ và $x_n < 1 + \frac{1}{1.2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{n} < 2, \quad \forall n > 1$

b) Tương tự a)

Câu 11. a) $x_n > \sqrt{n}$

b) $x_n = \log_a(n+1)$

Câu 12.

a) Rõ ràng $x_n > 1 \ \forall n \in N^*$, ta có biểu diễn

$$x_n = \frac{x_{n-2}}{2 + x_{n-2}} + 1 \qquad \text{và} \qquad x_{n+1} - 2 = \frac{x_{n-1} - 2}{x_{n-1} + 2}, \forall n$$

Suy ra : (x_{2n}) tăng và bị chặn trên bởi số 2.

(x_{2n+1}) giảm và bị chặn dưới bởi số 2.

Lý luận sẽ nhận được $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$

b) Qui nạp sẽ nhận được dãy (x_n) đơn điệu giảm và bị chặn dưới bởi số 0, suy ra

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \geq 0$, ta có $a^2 = 1 + a \Rightarrow a = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$

c) Bằng qui nạp chứng minh được $-\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) < x_n < 0, \ \forall n \geq 1$ ngoài ra

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{(3 + x_{n-1})(3 + x_n)}$$

Vậy (x_n) đơn điệu giảm và bị chặn dưới do đó $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = -\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$

d) Bằng qui nạp chứng minh $x_n < x_{n+1}$ và $x_n < \sqrt{a} + 1 \quad \forall n$

Đặt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $\qquad b = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$

e) $x_2 = \frac{x_1 + x_0}{2}$, $x_3 = \frac{x_2 + x_1}{2}, \ldots$

$x_2 - x_1 = \frac{1}{2}(x_0 - x_1)$, $\quad x_3 - x_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$, ...

Bằng qui nạp chứng minh $x_k - x_{k-1} = (-1)^{k-2}\frac{x_2 - x_1}{2^{k-2}}, \ k \geq 2$

Cộng liên tiếp $x_n - x_1 = (x_2 - x_1)[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{(-1)^{n-2}}{2^{n-2}}]$

$$= \frac{2}{3}(x_2 - x_1) - (-1)^{n-2}\frac{x_2 - x_1}{3.2^{n-2}}$$

$$x_n = \frac{2x_2 - x_1}{3} - (-1)^{n-2}\frac{x_2 - x_1}{3.2^{n-2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}$$

f) Rõ ràng $x_n > 0 \ \forall n$, bằng qui nạp chứng minh được (x_n) đơn điệu tăng và

$x_n < 1 \ \forall n$ $\qquad \lim_{n\to\infty} x_n = a = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2}$

g) $x_n = \frac{1}{2}(\frac{5}{x_{n-1}} + x_{n-1}) \geq \sqrt{5}, \ \forall n$. Suy ra $x_n > x_{n+1}$. Vậy tồn tại $a = \lim_{n\to\infty} x_n$ và suy ra $a = \sqrt{5}$.

SỐ PHỨC

Câu 1. Đặt $z = x + iy$, $(x,y) \in R^2$

$$(x,y) \in E \cap F \Leftrightarrow x^2 - y^2 + i(2xy + \frac{y}{x^2+y^2}) = \frac{x}{x^2+y^2} + 3i \Leftrightarrow z^2 = \frac{1}{z} + 3i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 + 3y = 1 \\ 3x^2y - 3x - y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) \in G \cap H$$

Câu 2. Không

Câu 3. Không tồn tại.

Câu 4. $\begin{cases} xyz(xyz-1) = 0 \\ xy = z, yz = x, zx = y \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (0,0,0), (1,1,1) \\ (1,-1,-1), (-1,1,-1) \\ (-1,-1,1) \end{matrix}$

Câu 5. Xét $(f(i))^2 = f(i^2) = f(-1) = -1 \Rightarrow f(i) = \varepsilon i \qquad \varepsilon = \{\pm 1\}$

Xét $(x,y) \in R^2$, $f(x+iy) = f(x) + f(iy) = f(x) + f(i)f(y) = x + \varepsilon iy$

Kiểm tra $f(z) = z$ hoặc $f(z) = \bar{z}$ thoả mãn.

Câu 6. $z = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}i$

Câu 7. $z \in R \cup iR$

Câu 8. $\overline{a+b+c}=0 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ca+ab}{abc}=0 \Rightarrow a^2=-a(b+c)=bc$

$\Rightarrow a^3 = abc$

Do tính đối xứng suy ra $a^3 = b^3 = c^3$

Câu 9. Áp dụng: $\forall z \in C$ thì $|z|^2 = z\overline{z}$ và các tính chất của phép lấy liên hợp.

Câu 10. Qui nạp theo n.

Câu 11. a) Xét $(1+|a|^2)(1+|b|^2)-|a+b|^2 = 1+|a|^2|b|^2 - a\overline{b}-\overline{a}b = |1-\overline{a}b|^2$

$1-\overline{a}b=0 \Leftrightarrow a\neq 0$ và $b=\frac{a}{|a|^2}$

b) a = 0 hoặc b =0 đúng

Xét $a\neq 0, b\neq 0$: Đặt $u=\frac{a}{|a|}, v=\frac{-b}{|b|}$. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left|\frac{|a|}{|a|+|b|}u+\frac{|b|}{|a|+|b|}v\right| \geq \frac{1}{2}|u+v|$$

Kí hiệu $\lambda = \frac{|a|}{|a|+|b|}\in(0,1)$ $\quad m=\frac{1}{2}(u+v),\quad d=\frac{1}{2}(v-u)$

Vậy qui về $|m+(1-2\lambda)d| \geq |m|$

Chú ý rằng $\mathrm{Re}(m\overline{d}) = \mathrm{Re}(\frac{1}{4}(u\overline{v}-\overline{u}v))=0$ vì $|u|^2=|v|^2=1$

Câu 12. Ta có $\frac{d-a}{b-c}=\frac{1}{|b-c|^2}(d-a)(\overline{b}-\overline{c})$ thuần ảo $\Rightarrow (d-a)(\overline{b}-\overline{c})$ thuần ảo.

Mặt khác ta có số thuần ảo $s=(b\overline{a}-a\overline{b})(c\overline{b}-b\overline{c})(a\overline{c}-c\overline{a})$

$$= (d-a)(\overline{b}-\overline{c})+(d-b)(\overline{c}-\overline{a})+(d-c)(\overline{a}-\overline{b})$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 13. a) Đường tròn tâm $(0,\frac{4}{3})$ và bán kính $\frac{2}{3}$

b) Biểu diễn $\frac{z^2}{z+i}=\frac{z^2(\overline{z}-i)}{|z+i|^2}$, $\mathrm{Re}(z^2(\overline{z}-i))=x(x^2+y^2+2y)$

Trục Oy và đường tròn tâm (0,-1) bán kính 1 bỏ đi điểm (0,-1)

Câu 14. $\sqrt{13}$

Câu 15. $\begin{cases} 1+\cos x+\cos y=0 \\ \sin x+\sin y=0 \end{cases}$

$(x,y) = (\pm\frac{2\pi}{3}+2m\pi, \mp\frac{2\pi}{3}+2n\pi), \quad m,n\in Z$

Câu 16. a) $z = e^{\pm i\theta}$

b) Gọi z = ix là nghiệm thuần ảo $\Rightarrow x = 1$

$z^3 + (1-2i)z^2 + (1 - i)z - 2i = (z - i).[z^2+(1-i)z + 2]$

$z_1 = i,\ z_{2,3} = \frac{1}{2}\{-1-\sqrt{\sqrt{17}-4}+(1\pm\sqrt{\sqrt{17}+4})i\}$

Câu 17. a) Đưa về tương đương với $\begin{cases} (x^2-y^2)(x+y)^2=1029 \\ (x^2-y^2)(x-y)^2=189 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u=x-y \\ v=x+y \end{cases} \Rightarrow u^8=3^8$

$(5,2), (-2\omega,-5\omega), (5i,2i), (-2i\omega,-5i\omega), (-5,-2), (2\omega,5\omega), (-5i,-2i), (2i\omega,5i\omega)$

trong đó $\omega = e^{2i\frac{\pi}{8}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

b) Suy ra $x = y^2 = z^4 = x^8 \Rightarrow x = 0,\ x^7 = 1$

$(0,0,0),\ (\omega_k,\omega_k^4,\omega_k^2),\ k=\overline{0,6},\ \omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{7}}$

Câu 19. $\cos^3 kx = \frac{1}{4}(\cos 3kx + 3\cos kx)$

* $x\in 2\pi Z$ thì $S = n$

* $x\notin 2\pi Z$ thì $S = \frac{1}{4}\{\cos\frac{3nx}{2}\frac{\sin\frac{3(n+1)x}{2}}{\sin\frac{3x}{2}} + 3\cos\frac{nx}{2}\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} - 4\}$

Câu 20. $A_n(x) = -1 + 2\sum_{k=0}^{n}\cos kx = -1+2\cos\frac{nx}{2}\frac{\sin\frac{(n+1)}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$

Biến đổi tiếp $A_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}$

$$B_n(x) = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=0}^{n}\sin(k+\frac{1}{2})x = \left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$$

CHƯƠNG II: HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

2.1 MỤC ĐÍCH

Mọi vật xung quanh ta đều biến đổi theo thời gian. Chúng ta có thể nhận thấy điều đó qua sự chuyển động cơ học của các vật thể: ô tô, máy bay; sự thay đổi của các đại lượng vật lý: nhiệt độ, tốc độ, gia tốc; sự biến động kinh tế trong một xã hội: Giá cổ phiếu, lãi suất tiết kiệm,.... Tất cả các loại hình đó được gán một tên chung là đại lượng hay hàm số, nó phụ thuộc vào đối số nào đó, chẳng hạn là thời gian. Xem xét hàm số tức là quan tâm đến giá trị, tính chất và biến thiên của nó. Việc đó đặt ra như một nhu cầu khách quan của con người và xã hội.

Trong mục thứ nhất của chương này, người đọc cần nắm vững hàm số và ký hiệu hàm số. Lưu ý rằng ánh xạ f hay "quy luật" nêu trong định nghĩa có tính tổng quát, không nhất thiết phải là một công thức giải tích trên khoảng xác định của nó. Nó có thể biểu thị bằng nhiều công thức trong các khoảng con của tập xác định hoặc bằng số hoặc bằng đồ thị. Nắm vững các tính chất của hàm số là điều vô cùng quan trọng. Chẳng hạn nếu hàm chẵn hoặc lẻ trên khoảng (-a,a) thì chỉ cần xét trên khoảng (0,a), hàm tuần hoàn chu kỳ T, chỉ cần xét trên khoảng $(-\frac{T}{2},\frac{T}{2})$ là có thể biết toàn cảnh của hàm số đó. Tính chất này của hàm số sẽ còn được xem xét ở các chương tiếp theo. Những hàm số thông dụng là các hàm số sơ cấp cơ bản, là hàm hữu tỉ luôn luôn được sử dụng trong các chương sau. Phải lưu ý đến tập giá trị của các hàm ngược của các hàm lượng giác. Khi xem xét các hàm sơ cấp cơ bản là phải phác thảo được đồ thị của chúng, có như thế chúng ta mới thấy được đặc tính của hàm số, đặc biệt đặc tính của hàm số ở lân cận x=0 và lân cận vô cùng (những điểm khá xa gốc toạ độ).

Trong mục thứ hai khái niệm giới hạn của hàm số là bao hàm khái niệm giới hạn của dãy số thể hiện qua định nghĩa của nó, đặc biệt qua định lý về mối liên hệ với dãy số. Nhớ lại rằng giới hạn là một khái niệm khó nên các tính chất của hàm có giới hạn, các điều kiện cần, các điều kiện đủ phải hiểu chính xác. Ngoài ra cũng cần phải lưu ý khái niệm giới hạn một phía bởi vì các hàm thường được cho không phải luôn luôn dưới dạng sơ cấp. Tất cả các khái niệm trên người học phải minh hoạ được bằng đồ thị. Cuối cùng là các giới hạn đáng nhớ, chúng được coi là các giới hạn đi cùng với chúng ta suốt quá trình học tập.

Trong mục thứ ba lớp các vô cùng bé, vô cùng lớn được đề cập một cách tự nhiên, bởi vì chúng có mối liên hệ trực tiếp với hàm số có giới hạn. Hơn nữa trong các tính toán thường hay gặp các đại lượng này. Cần nắm được các so sánh vô cùng bé, vô cùng lớn bởi vì nó rất có ích trong quá trình khử các dạng bất định, trong quá trình đánh giá, tính gần đúng và đặc biệt là cách mô tả sau này. Biết các vô cùng bé hoặc vô cùng lớn tương đương thực sự đã có kỹ năng kỹ xảo giải các bài tập sau này.

Cuối cùng trong mục thứ tư chúng ta đề cập đến một lớp hàm số đặc biệt quan trọng bởi vì nó luôn luôn xuất hiện trong toán cao cấp A_1, A_3: Hàm số liên tục. Việc mô tả hình học hàm số liên tục tại x_0, liên tục một phía tại x_0, liên tục trên khoảng (a,b), trên đoạn [a,b] ,... là việc làm vô cùng cần thiết. Nó phản ánh sự hiểu thấu đáo về tính liên tục, tính gián đoạn của hàm số. Cũng nhờ tính chất liên tục của hàm số mà có thể khử được các dạng bất định đặc biệt : $\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$, $\dfrac{a^x-1}{x}$, $[u(x)]^{v(x)}$. Khi đề cập đến hàm liên tục trên một đoạn kín là phải nghĩ ngay đến tính trù mật, tính đạt được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của nó, tính liên tục đều. Những tính chất này làm cơ sở cho bài toán tìm giá trị bé nhất, lớn nhất, tìm nghiệm gần đúng của phương trình đại số hay tính khả tích của nó.

2.2 TÓM TẮT NỘI DUNG

2.2.1 Các khái niệm cơ bản về hàm số

a. Các định nghĩa cơ bản

✓ Định nghĩa hàm số

Cho X là tập không rỗng của R. Một ánh xạ f từ X vào R gọi là một hàm số một biến số

$$\begin{aligned} f: X &\to R \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

X gọi là tập xác định của f, $f(X)$ gọi là tập giá trị của f. Đôi khi ký hiệu $y = f(x),\ x \in X$ x gọi là đối số, y gọi là hàm số.

✓ Hàm chẵn, lẻ

Cho X đối xứng với 0 tức là $\forall x \in X, -x \in X$

Hàm số f(x) chẵn khi và chỉ khi $f(x)=f(-x)$.

Hàm số f(x) lẻ khi và chỉ khi $f(x)=-f(-x)$.

✓ **Hàm số tuần hoàn**

Hàm số f(x) gọi là tuần hoàn trên X nếu tồn tại $\tau \in R_+^*$ sao cho $\forall x \in X$ thì x+$\tau \in X$ và f(x+τ)=f(x).

Số T dương bé nhất trong các số τ gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn f(x).

✓ **Hàm số đơn điệu**

Cho f(x) với $x \in X$.

1. Nói rằng f(x) tăng nếu $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$.

   và f(x) tăng ngặt nếu $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

2. Nói rằng f(x) giảm nếu $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$.

   và f(x) giảm ngặt nếu $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

3. Nói rằng f(x) đơn điệu nếu nó tăng hoặc giảm.

   Nói rằng f(x) đơn điệu ngặt nếu nó tăng ngặt hoặc giảm ngặt.

✓ **Hàm số bị chặn**

1. Hàm số f(x) bị chặn trên trong X nếu tồn tại số A sao cho : $\forall x \in X, f(x) \le A$.

2. Hàm số f(x) bị chặn dưới trong X nếu tồn tại số B sao cho:

   $\forall x \in X, f(x) \ge B$

3. Hàm số f(x) bị chặn trong X nếu tồn tại các số A,B sao cho:

$$\forall x \in X, B \le f(x) \le A .$$

✓ **Hàm số hợp**

Cho $f: X \to R$ và g: $Y \to R$ với $f(X) \subset Y$ gọi ánh xạ

$$g_0 f: X \to R$$
$$x \mapsto g(f(x))$$

Hay y = g(f(x)) là hàm số hợp của hai hàm f và g.

Định lí:

Nếu $f,g:X\to R$ bị chặn trên thì $f+g$ cũng bị chặn trên và

$$\underset{X}{Sup}(f(x)+g(x))\le \underset{X}{Sup}\,f(x)+\underset{X}{Sup}\,g(x)$$

1. Nếu $f,g:X\to R$ bị chặn trên và không âm thì $f.g$ bị chặn trên và

$$\underset{X}{Sup}(f(x).g(x))\le \underset{X}{Sup}\,f(x).\underset{X}{Sup}\,g(x)$$

2. Nếu $f:X\to R$ bị chặn trên và $\lambda\in R_*$ thì λf bị chặn trên đồng thời

$$\underset{X}{Sup}\,\lambda.f(x)=\lambda\underset{X}{Sup}\,f(x)$$

3. Để $f:X\to R$ bị chặn dưới, điều kiện cần và đủ là $-f$ bị chặn trên và khi đó $\underset{X}{Inf}\,f(x)=-\underset{X}{Sup}(-f(x))$

✓ **Hàm số ngược**

Cho song ánh $f:X\to Y,\quad X,Y\subset R$

Ánh xạ ngược $f^{-1}:Y\to X$ gọi là hàm số ngược của f

$$y\mapsto x=f^{-1}(y)$$

Thông thường đối số kí hiệu là x, hàm số kí hiệu là y, vậy hàm ngược của $y=f(x)$ là hàm số $y=f^{-1}(x)$. Vì thế trên cùng mặt phẳng toạ độ 0xy, đồ thị của hai hàm số f và f^{-1} là đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ I và III.

b. Các hàm số thông dụng

✓ **Hàm luỹ thừa**

Cho $\alpha\in R$. Hàm luỹ thừa với số mũ α ,được kí hiệu là P_α, là ánh xạ từ R_+^* vào R, xác định như sau $\forall x\in R_+^*, P_\alpha(x)=x^\alpha$

Nếu $\alpha>0$, coi rằng $P_\alpha(0)=0$ Nếu $\alpha=0$, coi rằng $P_0(0)=1$

✓ **Hàm mũ cơ số a**

Xét $a\in R_+^*\setminus\{1\}$. Hàm mũ cơ số a, kí hiệu là $\exp_a x$, là ánh xạ từ R vào R_+^*, xác định như sau: $\forall x\in R,\quad \exp_a x=a^x$.

✓ **Hàm lôgarit cơ số a**

Xét $a\in R_+^*\setminus\{1\}$. Hàm lôgarit cơ số a, kí hiệu là $\log_a$, là ánh xạ ngược với ánh xạ $\exp_a$, như vậy $\forall(x,y)\in R_+^*\times R,\quad y=\log_a x\Leftrightarrow x=a^y$

Tính chất của hàm số lôgarit

1. $\log_a 1 = 0$

2. $\forall x, y \in R_+^*,\quad \begin{array}{l} \log_a xy = \log_a x + \log_a y \\ \log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \end{array}$

   $\forall \alpha \in R \qquad \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$

3. $\forall a, b \in R_+^*,\quad \log_b x = \log_b a.\log_a x$

4. $\forall x \in R_+^*,\qquad \log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$

✓ Các hàm số lượng giác

Các hàm số lượng giác: sinx, cosx, tgx, cotgx đã được xét kỹ trong chương trình phổ thông trung học. Dưới đây chúng ta chỉ nhắc lại một số tính chất cơ bản của chúng.

Tính chất:

- sinx xác định trên R, là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kì T = 2π và bị chặn: $-1 \le \sin x \le 1, \forall x \in R$

- cosx xác định trên R, là hàm số chẵn, tuần hoàn với chu kì T = 2π và bị chặn: $-1 \le \cos x \le 1, \forall x \in R$

- tgx xác định trên R\{$\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$ }, là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$ và nhận giá trị trên khoảng $(-\infty, +\infty)$.

- cotgx xác định trên R\{ $k\pi, k \in Z$ }, là hàm số lẻ, tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$ và nhận giá trị trên khoảng $(-\infty, +\infty)$.

✓ Các hàm số lượng giác ngược

- Hàm arcsin là ánh xạ ngược của sin: $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$

Kí hiệu là arcsin: $[-1, 1] \to \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Vậy ta có: $\forall x \in [-1, 1], \forall y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right], \qquad y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$

- Hàm arccos là ánh xạ ngược của $\cos:[0,\pi]\to[-1,1]$ kí hiệu:

$$\arccos:[-1,1]\to[0,\pi]$$
$$\forall x\in[-1,1], \forall y\in[0,\pi], y=\arccos x \Leftrightarrow x=\cos y$$

- Hàm actang là ánh xạ ngược của $tg:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to R,$ kí hiệu:

$$arctg: R\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

Vậy ta có $\forall x\in R, \forall y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \quad y=arctgx \Leftrightarrow x=tgy$

- Hàm accôtang là ánh xạ ngược của $\text{cotg}:(0,\pi)\to R$ kí hiệu:

$$arc\cot g: R\to\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Vậy ta có $\forall x\in R, \forall y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \quad y=arc\cot gx \Leftrightarrow x=\cot gy$

Người ta gọi hàm số luỹ thừa, hàm số mũ, hàm số lôgarit, các hàm số lượng giác và các hàm số lượng giác ngược là các hàm số sơ cấp cơ bản.

✓ **Các hàm hypebôlic thuận**

- Hàm sinhypebôlic là ánh xạ $sh:R\to R$ xác định như sau:

$$\forall x\in R,\quad shx=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$$

- Hàm côsinhypebôlic là ánh xạ $ch:R\to R$ xác định như sau:

$$\forall x\in R,\quad chx=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$$

- Hàm tanghypebôlic là ánh xạ $th:R\to R$ xác định như sau:

$$\forall x\in R,\quad thx=\frac{shx}{chx}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

- Hàm cotanghypebôlic là ánh xạ $\coth: R^*\to R,$ xác định như sau:

$$\forall x\in R^*,\quad \coth x=\frac{chx}{shx}=\frac{1}{thx}=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

Tính chất:

- Shx,thx,cothx là các hàm số lẻ còn chx là chẵn và $\forall x\in R, chx>0$

- $\forall x,a,b,p,q \in R,$ các hàm hypebôlic thoả mãn công thức sau đây:

+ $ch^2x - sh^2x = 1 \Rightarrow Hyperbon\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ biểu diễn tham số sẽ là:

$$\begin{cases} x = acht \\ y = bsht \quad t \in R \end{cases}$$

+ $ch(a+b) = cha.chb + sha.shb$; $sh(a+b) = sha.chb + shb.cha$

$ch(a-b) = cha.chb - sha.shb$; $sh(a-b) = sha.chb - shb.cha$

$th(a+b) = \dfrac{tha + thb}{1 + tha.thb}$; $th(a-b) = \dfrac{tha - thb}{1 - tha.thb}$

+ $ch2a = ch^2a + sh^2a = 2ch^2a - 1 = 1 + 2sh^2a$.

$sh2a = 2sha.cha$.

$th2a = \dfrac{2tha}{1 + th^2a}$.

$ch^2a = \dfrac{1}{2}(ch2a + 1);\ sh^2a = \dfrac{1}{2}(ch2a - 1)$.

+ $chp + chq = 2ch\dfrac{p+q}{2}ch\dfrac{p-q}{2}$

$chp - chq = 2sh\dfrac{p+q}{2}sh\dfrac{p-q}{2}$

$shp + shq = 2sh\dfrac{p+q}{2}ch\dfrac{p-q}{2}$

$shp - shq = 2ch\dfrac{p+q}{2}sh\dfrac{p-q}{2}$

✓ **Các hàm hypebôlic ngược**

1. Hàm Acsinhypebôlic là ánh xạ ngược của $sh : R \to R,$ kí hiệu:

   $Argsh : R \to R$ haylà $\forall (x,y) \in R^2, y = Argshx \Leftrightarrow x = shy$

2. Hàm Accôsinhypebôlic là ánh xạ ngược của $ch : R \to [1,+\infty],$ kí hiệu:

   $Argch : [1,+\infty) \to R_+,$ tức là $\forall x \in [1,+\infty), \forall y \in R_+, y = Argchx \Leftrightarrow x = chy$

3. Hàm Actanghypebôlic là ánh xạ ngược của $th : R \to (-1,1),$ kí hiệu:

   $Argth : (-1,1) \to R,$ tức là $\forall x \in (-1,1), \forall y \in R, y = Argthx \Leftrightarrow x = thy$

4. Hàm Accôtanghypebôlic là ánh xạ ngược của $\coth : R^* \to R \setminus [-1,1]$, kí hiệu: $Arg\coth : R \setminus [-1,1] \to R^*$, tức là

$$\forall x \in R \setminus [-1,1], \forall y \in R^*, y = Arg\coth x \Leftrightarrow x = \coth y$$

✓ **Đa thức, hàm hữu tỉ.**

1. Ánh xạ P: $X \to R$ được gọi là đa thức khi và chỉ khi tồn tại $n \in N$ và $(a_0, a_1, ..., a_n) \in R^{n+1}$ sao cho $\forall x \in X$, $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

Nếu $a_n \neq 0$, gọi n là bậc của đa thức, kí hiệu degP(x)=n

2. Ánh xạ f: $X \to R$ được gọi là hàm hữu tỉ khi và chỉ khi tồn tại hai đa thức

P,Q: $X \to R$ sao cho $\forall x \in X, Q(x) \neq 0$, $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Gọi $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ là hàm hữu tỉ thực sự khi và chỉ khi: degP(x)<degQ(x)

3. Hàm hữu tỉ tối giản là các phân thức có dạng:

$$\frac{A}{(x-a)^k} \text{ hoặc } \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$$

Trong đó $k \in N^*$, a,p,q,A,B,C là các số thực và $p^2 - 4q < 0$

Dưới đây ta đưa ra các định lí được chứng minh trong lí thuyết đại số

Định lí 1: Mọi đa thức bậc n với các hệ số thực đều có thể phân tích ra thừa số trong dạng: $P(x) = a_n (x-\alpha_1)^{k_1} ... (x-\alpha_l)^{k_l} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} ... (x^2 + p_m x + q_m)^{\beta_m}$

Trong đó $\alpha_i \, (i = \overline{1,l})$ là các nghiệm thực bội k_i của đa thức còn $p_j, q_j, \beta_j \in R$

với $j = 1,2,...,m$ và $\sum_{i=1}^{l} k_i + 2\sum_{j=1}^{m} \beta_j = n$, $p_j^{\,2} - 4q_j < 0$; $j = \overline{1,m}$

Định lí 2: Mọi hàm hữu tỉ thực sự đều có thể phân tích thành tổng hữu hạn các hàm hữu tỉ tối giản.

c. Hàm số sơ cấp

Định nghĩa: Hàm số sơ cấp là những hàm số được tạo thành bởi một số hữu hạn các phép tính cộng, trừ, nhân, chia và các phép lấy hàm hợp đối với các hàm số sơ cấp cơ bản và các hằng số.

2.2.2 Giới hạn của hàm số

a. Khái niệm về giới hạn

✓ Định nghĩa giới hạn

Ta gọi $\delta -$ lân cận của điểm $a \in R$ là tập $\Omega_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta)$

Gọi A- lân cận của $+\infty$ là tập $\Omega_A(+\infty) = (A, +\infty)$ với A>0 và khá lớn.

Gọi B- lân cận của $-\infty$ là tập $\Omega_B(-\infty) = (-\infty, -B)$ với B>0 và khá lớn.

Cho f xác định ở lân cận điểm a (có thể không xác định tại a).

1. Nói rằng f có giới hạn là l khi x dần đến a (gọi tắt: có giới hạn là l tại a) nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists \Omega_\eta(a) \subset X, \forall x \in \Omega_\eta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

2. Nói rằng f có giới hạn là $+\infty$ tại a nếu

$$\forall A > 0, \exists \Omega_\eta(a) \subset X, \forall x \in \Omega_\eta(a) \setminus \{a\} \Rightarrow f(x) > A.$$

3. Nói rằng f có giới hạn là $-\infty$ tại a nếu $-f$ có giới hạn là $+\infty$ tại a.

4. Nói rằng f có giới hạn là l tại $+\infty$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \Omega_A(+\infty) \subset X, \forall x \in \Omega_A(+\infty) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

5. Nói rằng f có giới hạn là l tại $-\infty$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \Omega_B(-\infty) \subset X, \forall x \in \Omega_B(-\infty) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

6. Nói rằng f có giới hạn là $+\infty$ tại $+\infty$ nếu

$$\forall A > 0, \exists \Omega_M(+\infty) \subset X, \forall x \in \Omega_M(+\infty) \Rightarrow f(x) > A.$$

7. Nói rằng f có giới hạn là $-\infty$ tại $+\infty$ nếu và chỉ nếu $-f$ có giới hạn là $+\infty$ tại $+\infty$.

8. Nói rằng f có giới hạn là $+\infty$ tại $-\infty$ nếu $\forall A > 0, \exists \Omega_M(-\infty) \subset X, \forall x \in \Omega_M(-\infty) \Rightarrow f(x) > A$.

9. Nói rằng f có giới hạn là $-\infty$ tại $-\infty$ khi và chỉ khi $-f$ có giới hạn là $+\infty$ tại $-\infty$ Khi $f(x)$ có giới hạn là l tại a hoặc tại $\pm\infty$ nói rằng $f(x)$ có giới hạn hữu hạn tại a hoặc tại $\pm\infty$. Ngược lại $f(x)$ có giới hạn là $\pm\infty$, nói rằng nó có giới hạn vô hạn.

✓ **Định nghĩa giới hạn một phía.**

1. Nói rằng f có giới hạn trái tại a là l_1 nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0\,(\exists \Omega_\eta(a) \subset X), \forall x, 0 < a - x < \eta \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon.$$

2. Nói rằng f có giới hạn phải tại a là l_2 nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x,\ \ 0 < x - a < \eta \Rightarrow |f(x) - l_2| < \varepsilon.$$

Kí hiệu f có giới hạn là l tại a thường là:

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \quad \text{hoặc} \quad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$$

Tương tự có các kí hiệu:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty, -\infty; \qquad \lim_{x\to \pm\infty} = l, +\infty, -\infty$$

Kí hiệu f có giới hạn trái tại a là l_1, thường dùng $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a^-) = l_1$

Tương tự $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a^+) = l_2$

Hệ quả: Điều kiện cần và đủ để $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ là $f(a^-) = f(a^+) = l.$

b. Tính chất của hàm có giới hạn.

✓ **Sự liên hệ với dãy số**

Định lí: Để $f(x)$ có giới hạn là l tại a điều kiện cần và đủ là mọi dãy (u_n) trong X hội tụ về a thì $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = l$

✓ **Tính duy nhất của giới hạn**

Định lí: Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ thì l là duy nhất.

✓ **Tính bị chặn**

Định lí: Nếu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ thì $f(x)$ bị chặn trong một lân cận của a.

✓ **Tính chất thứ tự của giới hạn và nguyên lí kẹp.**

Định lí 1: Cho $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. Khi đó:

1. Nếu $c < l$ thì trong lân cận đủ bé của $a: c < f(x)$
2. Nếu $l < d$ thì trong lân cận đủ bé của $a: f(x) < d$

3. Nếu $c < l < d$ thì trong lân cận đủ bé của a: $c < f(x) < d$

Định lí 2: Cho $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, khi đó

1. Nếu $c \le f(x)$ trong lân cận của a thì $c \le l$
2. Nếu $f(x) \le d$ trong lân cận của a thì $l \le d$
3. Nếu $c \le f(x) \le d$ trong lân cận của a thì $c \le l \le d$

Định lí 3: Nguyên lí kẹp: Cho ba hàm số f, g, h thoả mãn: $f(x) \le g(x) \le h(x)$ trên X; $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = l$ Khi đó $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$

Định lí 4: Nếu trong lân cận của a có $f(x) \le g(x)$ và $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ thì:

$$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$$

✓ Các phép tính đại số của hàm số có giới hạn

Định lí 1 (Trường hợp giới hạn hữu hạn):

1. $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \Rightarrow |f(x)| \xrightarrow[x\to a]{} |l|$
2. $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \Leftrightarrow |f(x)| \xrightarrow[x\to a]{} 0$
3. $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_1$ và $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_2 \Rightarrow f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_1 + l_2$
4. $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \Rightarrow \lambda.f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda l, \quad \lambda \in R$
5. $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ và $g(x)$ bị chặn trong lân cận của $a \Rightarrow f(x).g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$
6. $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_1$ và $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_2 \Rightarrow f(x).g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_1.l_2$
7. $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_1$ và $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_2 \ne 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \dfrac{l_1}{l_2}$

Định lí 2 (Trường hợp giới hạn vô hạn):

1. Nếu $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ và $g(x) \ge m$ trong lân cận của a thì $f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$
2. Nếu $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ và $g(x) \ge m > 0$ trong lân cận của a thì $f(x).g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$

✓ Giới hạn của hàm hợp

Cho $f: \; X \to R$, $g: \; Y \to R$ và $f(X) \subset Y$

Định lí: Nếu $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$ và $g(y) \xrightarrow[y \to b]{} l$ thì $g(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} l$

✓ **Giới hạn của hàm đơn điệu**

Định lí 1: Cho $f:\ (a,b) \to R,\quad a,b \in R$ hoặc $a,b \in \overline{R}$ và là hàm tăng.

1. Nếu f bị chặn trên thì $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \mathop{Sup}\limits_{(a,b)} f(x)$

2. Nếu f không bị chặn trên thì $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$

Định lí 2: Nếu $f(x)$ xác địn tại a và tăng ở lân cận của a thì luôn tồn tại một giới hạn trái và một giới hạn phải hữu hạn tại a và:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \le f(a) \le \lim_{x \to a^+} f(x)$$

c. Các giới hạn đáng nhớ

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

c. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty, \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

d. Sự tồn tại giới hạn của các hàm sơ cấp

Định lí: Hàm số sơ cấp xác định tại x_0 thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

2.2.3 Đại lượng vô cùng bé (VCB) và đại lượng vô cùng lớn (VCL)

a. Đại lượng VCB

✓ **Định nghĩa:** Ánh xạ $\alpha:\ X \to R$, gọi là đại lượng VCB tại a nếu như $\alpha(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$, a có thể là $+\infty$ hoặc $-\infty$

✓ **Hệ quả:** Để tồn tại $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ điều kiện cần và đủ là hàm số $\alpha(x) = f(x) - l$ là VCB tại a.

✓ **Tính chất đại số của VCB:** Dựa vào tính chất đại số của hàm có giới hạn, nhận được tính chất đại số của các VCB sau đây:

1. Nếu $\alpha_i(x), i = 1,2,...,n$ là các VCB tại a thì tổng $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(x)$, tích $\prod\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(x)$ cũng là VCB tại a

2. Nếu $\alpha(x)$ là VCB tại a, $f(x)$ bị chặn trong lân cận của a thì $\alpha(x).f(x)$ là VCB tại a.

✓ **So sánh các VCB:** Cho $\alpha(x),\beta(x)$ là các VCB tại a.

1. Nếu $\frac{\alpha}{\beta}\xrightarrow[x\to a]{}0$ thì nói rằng α là VCB cấp cao hơn β tại a, kí hiệu $\alpha=o(\beta)$ tại a, cũng nói rằng β là VCB cấp thấp hơn α tại a.

2. Nếu $\frac{\alpha}{\beta}\xrightarrow[x\to a]{}c\neq 0$ thì nói rằng α,β là các VCB ngang cấp tại a. Đặc biệt $c=1$ thì nói rằng α,β là các VCB tương đương tại a. Khi đó kí hiệu $\alpha\sim\beta$ tại a. Rõ ràng nếu α,β ngang cấp tại a thì $\alpha\sim c\beta$ tại a.

3. Nếu $\gamma=o(\alpha^k)$ thì nói rằng γ là VCB có cấp cao hơn k so với VCB α tại a

4. Nếu $\gamma\sim c\alpha^k$ $(c\neq 0)$ thì nói rằng γ là VCB có cấp k so với VCB α tại a

Hệ quả 1: Nếu $\gamma\sim\alpha_1,\beta\sim\beta_1$ tại a thì $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}$

Hệ quả 2: Nếu $\alpha=o(\beta)$ tại a thì $\alpha+\beta\sim\beta$ tại a .

Hệ quả 3: Qui tắc ngắt bỏ VCB cấp cao: Nếu α^* là VCB cấp thấp nhất trong số các VCB $\alpha_i,\ \left(i=\overline{1,m}\right)$ và β^* là VCB cấp thấp nhất trong số các VCB $\beta_i,\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ tại a . Khi đó:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i}{\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha^*}{\beta^*}$$

b. Đại lượng VCL

✓ **Định nghĩa:** Ánh xạ A: $X\to R$ gọi là đại lượngVCL tại a nếu như $A(x)\xrightarrow[x\to a]{}+\infty$ hoặc $-\infty$ (a có thể là $+\infty$ hoặc $-\infty$).

Hệ quả: Để $A(x)$ là VCL tại a thì cần và đủ là $\alpha(x)=\frac{1}{A(x)}$ là VCB tại a.

✓ **Tính chất của VCL**

1. Nếu $A_i(x), i=1,2,...,n$ là các VCL cùng dấu $(+\infty)$ hay $(-\infty)$ tại a thì tổng $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i(x)$ là VCL mang dấu đó tại a.

Nếu $B_i(x), i = 1,2,...,n$ là các VCL tại a thì tích $\prod_{i=1}^{n} B_i(x)$ là VCL tại a

2. Nếu $A(x)$ là VCL tại a và $f(x)$ giữ nguyên dấu tại a và lân cận của nó thì $A(x).f(x)$ là VCL tại a.

✓ **So sánh các VCL**

Cho $A(x), B(x)$ là các VCL tại a

1. Nếu $\frac{A(x)}{B(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \infty$ thì nói rằng $A(x)$ là VCL cấp cao hơn $B(x)$ tại a, hay B là VCL có cấp thấp hơn A tại a

2. Nếu $\frac{A(x)}{B(x)} \xrightarrow[x \to a]{} c \neq 0$ thì nói rằng A, B là VCL ngang cấp tại a.

Đặc biệt $c = 1$ thì nói rằng A, B là các VCL tương đương tại a, kí hiệu $A \sim B$ tại a.

Hệ quả 1: Nếu $A \sim A_1, B \sim B_1$ tại a thì $\lim_{x \to a} \frac{A(x)}{B(x)} = \lim_{x \to a} \frac{A_1(x)}{B_1(x)}$

Hệ quả 2: Nếu $A(x)$ làVCL cấp cao hơn $B(x)$tại a thì $A + B \sim A$.

Hệ quả 3: Qui tắc ngắt bỏ cácVCL cấp thấp: Nếu A^* là các CVL cấp cao nhất trong số các VCL $A_i(x), i = 1,2,...,m$ và B^* là VCL cấp cao nhất trong số các VCL $B_j(x), j = 1,2,...,n$ tại a thì ta có

$$\lim_{x \to a} \frac{\sum_{i=1}^{m} A_i(x)}{\sum_{j=1}^{n} B_j(x)} = \lim_{x \to a} \frac{A^*(x)}{B^*(x)}$$

2.2.4 Sự liên tục của hàm số

a. Các khái niệm cơ bản

✓ **Hàm liên tục tại một điểm**

Cho $f: \quad X \to R$ và $a \in X$. Nói rằng $f(x)$ liên tục tại a nếu

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{hay} \quad \lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x)$$

Tức là $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x: \qquad |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

✓ **Hàm liên tục một phía tại a**

Cho $f: \quad X \to R, a \in X$. Nói rằng hàm f liên tục bên trái tại a nếu

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a^-) = f(a)$$

Hàm f liên tục bên phải tại a nếu

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a^+) = f(a)$$

Hệ quả: Để hàm $f(x)$ liên tục tại a điều kiện cần và đủ là:

$$f(a^-) = f(a^+) = f(a)$$

✓ **Hàm liên tục trên một khoảng**

1.Hàm $f(x)$ liên tục tại mọi điểm $x \in X$ thì nói rằng nó liên tục trên tập X.

2.Hàm $f(x)$ liên tục trên khoảng mở (a,b) và liên tục trái tại b,liên tục phải tại a nói rằng nó liên tục trên [a,b]

✓ **Hàm liên tục từng khúc**

Hàm $f: \quad [a,b] \to R, \quad a,b \in R.$

Nói rằng hàm f liên tục từng khúc trên $[a,b]$ khi và chỉ khi $\exists n \in N^*$ và $(a_0, a_1, ..., a_n) \in [a,b]^{n+1}$ sao cho $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ và f liên tục trên tất cả các khoảng mở $(a_i, a_{i+1}), i = 0,1,...,n-1$ và có giới hạn phải hữu hạn tại a_i, có giới hạn trái hữu hạn tại a_{i+1}

✓ **Điểm gián đoạn của hàm số**

1. Nếu $f(x)$ không liên tục tại a, nói rằng $f(x)$ có điểm gián đoạn tại $x = a$.

2. Nếu a là điểm gián đoạn và $f(a^-), f(a^+)$ là các số hữu hạn thì gọi $x = a$ là điểm gián đoạn loại 1 của hàm số và gọi $h_f(a) = f(a^+) - f(a^-)$ là bước nhảy của $f(x)$ tại a.

Hệ quả: Nếu $f(x)$ tăng (giảm) ở lân cận điểm a khi đó $f(x)$ liên tục tại a khi và chỉ khi $h_f(a) = 0$. Điều này suy ra từ định lí 2 của hàm số đơn điệu.

3. Nếu a là điểm gián đoạn của $f(x)$ và không phải là điểm gián đoạn loại 1 thì nói rằng $f(x)$ có điểm gián đoạn loại 2 tại $x = a$.

b. Các phép toán đại số của hàm liên tục

Định lí 1: Cho $f,g: \quad X \to R, \qquad a \in X, \lambda \in R$

1. Nếu $f(x)$ liên tục tại a thì $|f(x)|$ liên tục tại a.
2. Nếu $f(x), g(x)$ cùng liên tục tại a thì $f(x)+g(x)$ liên tục tại a.
3. Nếu $f(x)$ liên tục tại a thì $\lambda f(x)$ liên tục tại a.
4. Nếu $f(x), g(x)$ liên tục tại a thì $f(x).g(x)$ liên tục tại a.
5. Nếu $f(x), g(x)$ liên tục tại a và $g(x) \neq 0$ thì $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại a.

Định lí 2: Cho $f: \quad X \to R; a \in X, \qquad g: \quad Y \to R$ và $f(X) \subset Y$. Nếu $f(x)$ liên tục tại a và $g(y)$ liên tục tại $b = f(a)$ thì hàm hợp $g(f(x))$ liên tục tại a.

Định lý 3: Mọi hàm số sơ cấp xác định tại $x = a$ thì liên tục tại a.

c. Tính chất của hàm số liên tục trên một đoạn

Cho $f: \quad [a,b] \to R$ là liên tục, $a < b$.

✓ **Tính trù mật của hàm số liên tục**

Định lí 1: Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại $c \in (a,b)$ để $f(c) = 0$

Định lí 2: Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ khi đó $f(x)$ nhận giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$ nghĩa là:

$$\forall \gamma \in [f(a), f(b)], \exists c \in [a,b], f(c) = \gamma$$

✓ **Tính bị chặn của hàm số liên tục**

Định lí 3: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì đạt được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $[a,b]$ nghĩa là:

$$\exists x_m, x_M \in [a,b], \qquad \forall x \in [a,b] \text{ có } f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$$

Hệ quả: Nếu $f: \quad [a,b] \to R$ liên tục thì $f([a,b]) = [m,M] \subset R$

Trong đó $m = \underset{[a,b]}{Inf} f(x), \qquad M = \underset{[a,b]}{Sup} f(x)$

d. Tính liên tục đều

✓ **A. Định nghĩa:** Cho $f: \quad X \to R$. Nói rằng f liên tục đều trên X nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x', x") \in X^2: \quad |x' - x"| < \eta \Rightarrow |f(x') - f(x")| < \varepsilon$$

✓ **Hệ quả:** Nếu $f(x)$ liên tục đều trên X thì liên tục trên X.

✓ **Định lí Hâyne (Heine)**

Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn đóng $[a,b]$, $a,b \in R$ thì liên tục đều trên $[a,b]$.

2.3 CÂU HỎI ÔN TẬP

Câu 1. Nêu các định nghĩa về hàm số chẵn, lẻ, tuần hoàn.Các hàm số tuần hoàn và đồng thời là chẵn; lẻ có tồn tại không? Cho ví dụ.

Câu 2. Thế nào là hàm số đơn điệu trong khoảng (a,b)?

Câu 3. Thế nào là hàm số bị chặn trong khoảng (a,b)?

Câu 4. Thế nào là hàm số hợp?

Câu 5. Thế nào là hàm số sơ cấp?

Câu 6. Định nghĩa giới hạn của hàm số.

Câu 7. Nêu các tính chất của hàm có giới hạn. Hàm số bị chặn trong lân cận điểm a thì có giới hạn tại a không?

Câu 8. Nêu các phép tính về hàm số có giới hạn hữu hạn. Trong trường hợp hàm số không có giới hạn hữu hạn, các phép tính đó còn đúng không?

Câu 9. Chứng minh các giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

Câu 10. Thế nào là một VCB? Một hằng số bé bao nhiêu thì được coi là VCB? Vì sao?

Câu 11. Nêu các tính chất đại số của VCB.

Câu 12. Tổng vô hạn các VBC có phải là vô cùng bé không?

Câu 13. So sánh các VCB: ngang cấp, tương đương, cấp cao hơn.

Câu 14. Thế nào là một VCL? Một hằng số lớn bao nhiêu thì có thể được xem là VCL? Tại sao?

Câu 15. Nêu mối quan hệ giữa VCB và VCL.

Câu 16. Nêu mối quan hệ giữa VCB và hàm có giới hạn.

Câu 17. Định nghĩa hàm liên tục tại một điểm x0, (a,b), [a,b].

Câu 18. Nêu các tính chất của hàm số liên tục trên một đoạn kín. Tính chất đó còn đúng không nếu đoạn không kín?

Câu 19. Nêu các phép toán đại số về hàm liên tục.

2.4 BÀI TẬP CHƯƠNG II

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \text{Arccos}(\lg x)$. Tính $f(\frac{1}{10}), f(1), f(10)$.

Câu 2. Tìm miền xác định và miền giá trị của các hàm số:

a. $f(x) = 2 - x^2$, b. $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$,

c. $h(x) = \sqrt{x^2 - x}$, d. $k(x) = \sqrt{2-x}$.

Câu 3. Xét xem hàm số có chẵn hoặc lẻ không và phác hoạ đồ thị của nó.

a. $f(x) = \sqrt{|x|}$, b. $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$,

c. $h(x) = -\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, d. $k(x) = |x| + |x-2|$.

Câu 4. Xét xem hàm số nào tuần hoàn và tìm chu kì của nó

a. $f(x) = 10\sin 3x$, b. $g(x) = \sin^2 x$,

c. $h(x) = \sqrt{tgx}$, d. $k(x) = \sin\sqrt{x}$.

Câu 5. Tìm hàm ngược của các hàm số sau:

a. $y = 2x + 3$, b. $y = x^2 - 1, x < 0$,

c. $y = \sqrt[3]{1-x^3}$, c. $y = \lg\frac{x}{2}$.

Câu 6. Cho $f, g: \quad R \to R$ sao cho

$$\forall (x,y) \in R^2, \{f(x) - f(y)\}\{g(x) - g(y)\} = 0$$

Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai ánh xạ là ánh xạ hằng.

Câu 7. Tìm tất cả các ánh xạ $f: \quad R \to R$ sao cho:

a. $\forall x \in R, \quad f(x)f(x^2 - 1) = \sin x$

b. $\forall x \in R, \quad xf(x) + f(1-x) = x^3 + 1$

c. $\forall (x,y) \in R^2, \quad f(x+y^2) = f(x^2) + f(y)$

d. $\forall (x,y) \in R^2, \quad f(x+y) - f(x-y) = 2y(3x^2 + y^2)$

e. $\forall (x,y,z) \in R^3, \quad f(x.y) + f(x.z) - 2f(x).f(y.z) \geq \frac{1}{2}$

Câu 8. Giải phương trình

$$x^{18} + x^{10} = 544, \qquad x \in R_+$$

Câu 9. Cho $f: \quad R \to R$ sao cho

$$\begin{cases} f(f(x)) & \text{tăng} \\ f(f(f(x))) & \text{giảm ngặt} \end{cases}$$

Chứng minh $f(x)$ giảm ngặt

Câu 10. Tìm các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$ b. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x + x^2 + \ldots + x^n - n}{x - 1}$

c. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$ d. $\lim\limits_{x\to a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$

Câu 11. Tìm các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ b. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$

Câu 12. Tìm các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ b. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}.\sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x}$

Câu 13. Tìm các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$ b. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+tgx} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x.\cos 2x.\cos 3x}{1 - \cos x}$ d. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

Câu 14. Tìm các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$ b. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2 - 1} - x$

Câu 15. Tìm các giới hạn

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2}{1-x}}$

b. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

c. $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$

d. $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

e. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$

f. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x\right]$

g. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$

h. $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right)\quad x>0$

i. $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x^2\right)^{\cot g^2 x}$

j. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

k. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(2+e^{3x}\right)}{\ln\left(3+e^{2x}\right)}$

Câu 16. Tìm các giới hạn sau

a. $\lim\limits_{x\to0}x\sqrt{\cos\dfrac{1}{x}}$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sin\sin\ldots\sin}_{n\text{ dấu sin}}x$

c. $\lim\limits_{x\to0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$

d. $\lim\limits_{n\to\infty}Sgn\left[\sin^2(n\pi x)\right]$

Câu 17. Xét sự liên tục của các hàm số sau:

a. $f(x)=|x|$

b. $f(x)=\begin{cases}\left(x^2-4\right)(x-2) & x\neq2\\ A\ , & x=2\end{cases}$

c. $f(x)=\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x} & x\neq0, n\in N^*\\ 0 & x=0\end{cases}$

d. $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x & \text{với x hữu tỉ}\\ 0 & \text{với x vô tỉ}\end{cases}$

e. $f(x)=\begin{cases}1 & \text{với x hữu tỉ}\\ x & \text{với x vô tỉ}\end{cases}$

f. $f(x)=\begin{cases}x^2 & \text{với x hữu tỉ}\\ -x^2 & \text{với x vô tỉ}\end{cases}$

Câu 18. Chứng minh rằng nếu các hàm $f(x)$ và $g(x)$ liên tục thì các hàm

$$\varphi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$$
$$\psi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$$

cũng là hàm liên tục

Câu 19. Xét tính liên tục của hàm hợp $f(g(x))$ và $g(f(x))$ nếu

a. $f(x) = Sgnx$ và $g(x) = 1 + x^2$

b. $f(x) = Sgnx$ và $g(x) = 1 + x - [x]$

Câu 20. Tìm tất cả các hàm $f(x)$ thoả mãn:

a. liên tục tại $x = 0$ và $\forall x \in R$ có $f(3x) = f(x)$

b. liên tục tại $x = 0$ và $\forall x \in R$ có $f(x) = f\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$

c. liên tục tại $x = 1$ và $\forall x \in R$ có $f(x) = -f(x^2)$

Câu 21. Hàm $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ và chỉ nhận giá trị hữu tỉ và $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Hãy tính $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Câu 22. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên $[a,b]$ và $f(x) = g(x)$ tại mọi x là hữu tỉ. Chứng minh $f(x) = g(x)$ trên $[a,b]$

Câu 23. Chứng minh rằng mỗi phương trình đại số bậc lẻ có ít nhất một nghiệm thực

Câu 24. *Chứng minh hàm số $f(x) = \dfrac{1}{x}$ liên tục trên (0,1) nhưng không liên tục đều trên (0,1)

Câu 25. *Chứng minh rằng hàm số

$$f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$$

liên tục và bị chặn trên (0,1) nhưng không liên tục đều trên (0,1)

Câu 26. *Chứng minh hàm số $f(x) = Sinx^2$ liên tục và bị chặn trên R nhưng không liên tục đều trên R

Câu 27. *Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,+\infty)$ và tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = c$ thì

a. $f(x)$ bị chặn trên $[a,\infty)$.

b. $f(x)$ liên tục đều trên $[a,+\infty)$

Câu 28. *Chứng minh rằng hàm số

$$f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$$

a. liên tục đều trên mỗi khoảng $(-1,0),(0,1)$

b. không liên tục đều trên $(-1,1)\setminus\{0\}$

Câu 29. *Chứng minh rằng nếu hàm $f(x)$ đơn điệu bị chặn và liên tục trên (a,b) thì liên tục đều trên (a,b)

Câu 30. *Cho $f(x)$ là hàm số tăng và liên tục trên $[a,b]$,thoả mãn điều kiện $f(a)\ge a, f(b)\le b$. Lấy $x_1\in[a,b]$ và xác định dãy số (x_n) với $x_{n+1}=f(x_n),\quad n\ge 1$

Chứng minh rằng tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$ và $f(x^*)=x^*$

Câu 31. *Cho f,g là các ánh xạ liên tục của $[0,1]$ lên chính $[0,1]$. Chứng minh rằng tồn tại $x_0\in[0,1]$ để có $g(f(x_0))=f(g(x_0))$

Câu 32. *Tồn tại hay không hàm liên tục $f:\quad R\to R$ thỏa mãn

$$f(x)=\begin{cases} v_x\in R\setminus Q & \text{với } x\in Q\\ h_x\in Q & \text{với } x\in R\setminus Q\end{cases}$$

Câu 33. *Cho $\lambda\in R$ và $f,g:\quad (a,b)\to R$

Chứng minh rằng:

a. Nếu f liên tục đều thì $|f|$ liên tục đều.

b. Nếu f,g liên tục đều thì $\lambda f+g$ liên tục đều.

c. Nếu f liên tục đều và $\exists c>0$ sao cho $f(x)\ge c,\forall x\in(a,b)$ thì $\frac{1}{f}$ liên tục đều.

d. Nếu f,g liên tục đều và tồn tại hàm hợp g_0f thì g_0f liên tục đều.

2.5 HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ BÀI TẬP CHƯƠNG II

Câu 1. 1. $\pi;\frac{\pi}{2};0$

Câu 2. 2. a. R. b. R, c. $(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$, d. $(-\infty;2]$

Câu 3. a. Hàm chẵn, b. Hàm không chẵn, không lẻ, c. Hàm chẵn, d. Hàm không chẵn, không lẻ.

Câu 4. a. Tuần hoàn, $T=\frac{2\pi}{3}$, b. Tuần hoàn, $T=\pi$,

c. Tuần hoàn, $T=\pi$, d. Không tuần hoàn.

Câu 5. a. $y=\frac{1}{2}(x-3)$, b. $y=-\sqrt{x+1}$, c. $y=\sqrt[3]{1-x^3}$, d. $y=2.10^x$.

Câu 6. Giả sử tồn tại $(a,b)\in R^2$ sao cho $f(a)\neq f(b)$ rõ ràng $g(a)=g(b)\Rightarrow g(x)=g(a)\ \forall x\in R$.

Câu 7. a. ϕ,

b. $f(x)=x^2-x+1$,

c. $f(x)=0$, (thay liên tiếp $x=0$, $y=0$

$x=0$, $y=y$

$x=-y^2, y=y$)

d. $f(x)=x^3+c.$ $c=const$

(Qui về $\forall(X,Y)\in R^2, f(X)-f(Y)=X^3-Y^3$

e. $ĐS: f(x)=\frac{1}{2}$,

Cho $x=y=z=1\Rightarrow f(1)=\frac{1}{2}$

$x=y=0, z=1\Rightarrow f(0)=\frac{1}{2}$

$x=0, z=0\Rightarrow f(y)\leq\frac{1}{2}$

$y=z=1\Rightarrow f(x)\geq\frac{1}{2}.$

Câu 8. $x=\sqrt{2}$.

Câu 10. a. $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$; b. $\frac{n(n+1)}{2}$; c. $2\frac{1}{24}$; d. $\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$

Câu 11. a. 1; b. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 12. a. $\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}$; b. $\frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}$.

Câu 13. a. $\cos a$; b. $\frac{1}{4}$; c. 14; d. $-\frac{1}{12}$

Câu 14. a. $\frac{1}{12}$; b. $\frac{1}{3}$

Câu 15. a. 0 ; b.1 ; c. e^{-2}; d. $e^{-\frac{1}{2}}$

e. 1 ; f. 0 ; g. 1 ; h. $\ln x$

i. e ; j. 1 ; k. $\frac{3}{2}$

Câu 16. a. 0 ; b. 0 ;

c. 1 nếu x vô tỉ. 0 nếu x hữu tỉ và thuộc Z, không có giới hạn với x còn lại.

Câu 17. a. liên tục trên R ;

b. liên tục trên R với A=4, liên tục trên $R\backslash\{2\}$ với $A \neq 4$;

c. liên tục trên R ; d. liên tục trên Z;

e. liên tục tại x=1 ; f. liên tục tại x=0.

Câu 19. a. $f(g(x))=1$ liên tục trên R

$g(f(x))=\begin{cases}2 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ liên tục trên $R\backslash\{0\}$

b. $f(g(x))=1$ liên tục trên R

$g(f(x))=1$ liên tục trên R

Chú ý: $x=[x]+r, \quad 0\le r<1$

Câu 20. a. $f(x)=f\left(\frac{x}{3n}\right)$ $\forall n\in N$ (Bằng qui nạp)

$f(x)=c=const \ \forall x\in R$

b. $f(c) = c = const \quad \forall x \in R$

Chứng minh

$$f(x) = f(\varphi_n(x))$$

$$\varphi_n(x) = \varphi(\varphi_{n-1}) \quad \text{trong đó} \quad \varphi_1(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

c. $f(x) = 0. \quad \forall x \in R$

xét $x = 0 \quad f(0) = -f(0^2) \Rightarrow f(0) = 0$

xét $x > 0 \quad f(x) = (-1)^n f\left(x^{\frac{1}{2n}}\right) \Rightarrow f(x) = 0$

Do $f(x)$ chẵn suy ra $f(x) = 0 \quad \forall x \in R$.

Câu 21. $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$

Câu 32. ϕ.

CHƯƠNG III: PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

3.1 MỤC ĐÍCH

Phép tính vi phân của hàm một biến số gắn liền với phép tính đạo hàm của hàm số. Khái niệm đạo hàm là một trong những tư tưởng quan trọng nhất của giải tích. Trong chương 2, chúng ta đã đặt vấn đề xem xét hàm số, nhưng vấn đề cốt lõi của hàm số là tốc độ biến thiên của nó chưa được xét đến. Nhờ vào khái niệm đạo hàm người ta có thể khảo sát toàn diện một đại lượng biến thiên. Khái niệm đạo hàm gắn liền với các đại lượng vật lý: vận tốc tại thời điểm t của một vật chuyển động, nhiệt dung của vật thể ở nhiệt độ t^o, cường độ dòng điện,v.v...; gắn liền với các hiện tượng hoá học: tốc độ phản ứng hoá học ở thời điểm t; gắn liền với các bài toán kinh tế xã hội: vấn đề tăng trưởng kinh tế, phương án tối ưu trong giao thông, trong sản xuất kinh doanh, v.v....

Trong mục thứ nhất của chương này cần phải nắm vững định nghĩa hàm số khả vi thể hiện qua việc tính đạo hàm của hàm số. Thực chất tính đạo hàm chính là việc khử dạng bất định $\frac{0}{0}$. Phải nắm chắc quy trình tính đạo hàm theo định nghĩa. Lưu ý đến khái niệm đạo hàm một phía, các điều kiện cần, điều kiện cần và đủ để hàm khả vi. Bên cạnh đó cần nắm được ý nghĩa hình học, cơ học của đạo hàm, các phép tính đại số của hàm có đạo hàm, điều này cũng đã đề cập ở chương trình phổ thông trung học. Cần phải nắm vững ý nghĩa và công dụng phép tính đạo hàm của hàm hợp, hàm ngược, phép tính đạo hàm lôgarit. Nếu thuộc các phép tính trên và các công thức đạo hàm của các hàm thông dụng thì mọi bài toán tính đạo hàm đều có thể làm nhanh và không nhầm lẫn.

Trong mục thứ hai vi phân của hàm số là biểu hiện định lượng của hàm số khả vi, cụ thể là phần chính bậc nhất của số gia hàm số. Chính vì thế người ta đã định nghĩa tính khả vi nhờ vào sự tồn tại đạo hàm. Điều này khác hẳn so với hàm số nhiều biến số được xem xét sau này. Đặc biệt công thức gần đúng của số gia hàm số hay được áp dụng vào các bài toán thực tiễn.

Trong mục thứ ba cần nắm vững các phép tính về đạo hàm và vi phân cấp cao, đặc biệt công thức đạo hàm cấp cao của một tích (công thức Leibniz). Phải thuộc công thức tính các đạo hàm cấp cao của các hàm sơ cấp cơ bản: $e^x, \sin x, \cos x$, $\frac{1}{ax+b}$ bởi vì sau này thường xuyên dùng đến các kết quả đó.

Trong mục thứ tư trước hết cần hiểu kỹ về điều kiện cần của cực trị khi hàm số khả vi. Các định lý về giá trị trung bình được hiểu theo nghĩa sau đây : với những điều kiện nhất định của hàm số f(x) thì trong khoảng hở (a,b) tồn tại điểm ξ nào đó, kéo theo giá trị $f'(\xi)$, giá trị này có tính chất đặc biệt gọi chung là giá trị trung bình. Đặc điểm của các định lý này là không chỉ rõ được số lượng điểm ξ, cũng như giá trị cụ thể của nó. Khi học các định lý này nên đưa ra các phản ví dụ để thấy rằng chỉ cần thiếu một trong các giả thiết của định lý là kết luận không còn đúng nữa. Mỗi định lý đều có thể minh hoạ hình học để kiểm tra lại kiến thức về tính chất của hàm số: hàm số liên tục, hàm số khả vi. Phân biệt công thức số gia hữu hạn và công thức số gia của hàm số biểu diễn nhờ vào vi phân của hàm số.

Trong mục thứ năm những ứng dụng trực tiếp các định lý về giá trị trung bình và đạo hàm cấp cao được đưa ra. Trước hết cần phân biệt các khái niệm: đa thức Taylor, công thức Taylor của hàm số tại lân cận x_0 . Phải nhớ và biết cách vận dụng công thức Maclaurin của các hàm thông dụng khi giải các bài toán tính gần đúng. Cuối cùng công thức L'Hospital cho ta điều kiện đủ để khử các dạng bất định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$, và đương nhiên các dạng bất định khác $0^0, 1^\infty, \infty^0$ sau khi dùng phương pháp lôgarit. Chính vì thế quy tắc này không phải là vạn năng.

Trong mục thứ sáu những ứng dụng của hàm số khả vi, đặc biệt hàm khả vi bậc cao được trình bày. Lưu ý rằng bản thân tính đơn điệu hay cực trị của hàm số được mô tả không bắt buộc hàm số phải khả vi. Điều này học sinh thường hay nhầm lẫn. Tuy nhiên nhận biết các tính chất của hàm số sẽ đơn giản rất nhiều khi biết rằng hàm số khả vi.

Trong mục thứ bảy người học phải phân biệt được khái niệm cực đại, cực tiểu với khái niệm giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất của hàm số. Cần nhớ là hàm số không bị chặn dưới (chặn trên) thì không có giá trị bé nhất (lớn nhất). Ngoài ra hàm bị chặn thì chưa chắc có được giá trị bé nhất và lớn nhất. Chính vì thế tính liên tục trên một đoạn kín [a,b] là điều quan trọng. Nắm được các bước để tìm giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất, các giá trị đó thường đạt được ở biên. Trường hợp tập xác định không phải đoạn kín phải để ý đến giá trị của nó ở sát biên mới giải quyết được bài toán. Cần ý thức được rằng bài toán tìm giá trị bé nhất, giá trị lớn nhất có một vai trò rất lớn trong thực tế.

Trong mục thứ tám khái niệm hàm lồi, lõm được đưa ra một cách chính xác nhờ vào bất đẳng thức toán học liên quan đến giá trị hàm số. Tuy nhiên khi hàm khả vi, thì điều kiện nhận biết đơn giản hơn nhiều. Đặc biệt hàm khả vi đến cấp hai thì chỉ để ý đến tính đổi dấu của đạo hàm cấp hai mà thôi. Người học chú ý đến điều kiện đủ để tìm điểm uốn khi hàm khả vi đến cấp hai.

Trong mục thứ chín cho chúng ta cách tìm tiệm cận của đường cong. Nên nhớ rằng không thể có cùng tiệm cận ngang và tiệm cận xiên ở cùng một phía. Để nhận biết tiệm cận đứng phải đi tìm các cực điểm của hàm số. Để học tốt phần này phải nắm chắc cách khử các dạng bất định $\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$.

Trong mục cuối cùng người học phải nắm vững sơ đồ tổng quát để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số. Đây là dịp vận dụng và tự kiểm tra các kiến thức đã học ở phần trên.

3.2 TÓM TẮT NỘI DUNG

3.2.1 Đạo hàm

a. Đạo hàm tại một điểm

✓ **Định nghĩa đạo hàm tại một điểm**

Cho $a \in X, a+h \in X, f \in R^X$. Nói rằng f khả vi tại a nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Giới hạn này thường kí hiệu $f'(a)$ hay $\frac{df}{dx}(a)$ gọi là đạo hàm của f tại a.

Tỉ số $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\Delta f(a)}{\Delta x}$ gọi là tỉ số của các số gia hàm số và số gia đối số.

✓ **Định nghĩa đạo hàm một phía**

1. Cho $a \in X, a+h \in X$. Nói rằng f khả vi phải tại a nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

   Giới hạn này kí hiệu là $f_p'(a)$, gọi là đạo hàm phải của f tại a.

2. Cho $a \in X, a+h \in X$. Nói rằng f khả vi trái tại a nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Giới hạn này kí hiệu là $f_t'(a)$, gọi là đạo hàm trái của f tại a.

b. Các phép tính đại số của các hàm khả vi tại một điểm

✓ **Định lí 1:** Cho f và g khả vi tại a khi đó

1. $f+g$ khả vi tại a và $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$
2. $\forall\lambda\in R, \lambda f$ khả vi tại a và $(\lambda f)'(a)=\lambda.f'(a)$
3. $f.g$ khả vi tại a và $(f.g)'(a)=f'(a).g(a)+f(a).g'(a)$
4. Nếu $g(a)\neq 0$ thì $\frac{f}{g}$ khả vi tại a và $\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a).g(a)-f(a).g'(a)}{g^2(a)}$

✓ **Định lí 2:** (Đạo hàm của hàm hợp). Cho $a\in X,\ f:X\to R,\ g:Y\to R$ với $f(X)\subset Y$. Nếu f khả vi tại a và g khả vi tại $f(a)$ thì hàm hợp gof khả vi tại a và $(gof)'(a)=g'(f(a)).f'(a).$

✓ **Định lí 3:** (Đạo hàm của hàm ngược). Giả sử $f:X\to R$ đơn điệu ngặt và liên tục trên X khả vi tại $a\in X$ và $f'(a)\neq 0$. Khi đó hàm ngược của f là $f^{-1}:f(X)\to R$ khả vi tại $f(a)$ và $(f^{-1})'(f(a))=\frac{1}{f'(a)}$

c. Đạo hàm trên một khoảng (ánh xạ đạo hàm)

✓ **Định nghĩa:** Cho $f\in R^X$ khả vi tại mỗi điểm $x\in(a,b)\subseteq R$

Kí hiệu ánh xạ $f':(a,b)\to R$

$$x\mapsto f'(x)$$

là ánh xạ đạo hàm hay đạo hàm của $f(x)$ trên (a,b) thường kí hiệu $f'(x)$ hay $\frac{df}{dx}(x), \forall x\in(a,b)$. Cũng nói rằng $f(x)$ khả vi trên $(a,b)\subseteq X$

✓ **Các tính chất**

Định lí 1: Cho $f,g:X\to R$ khả vi trên X, (tức là $(a,b)=X$) khi đó.

1. $f+g$ khả vi trên X và $(f+g)'=f'+g'$
2. $\forall\lambda\in R,\lambda f$ khả vi trên X và $(\lambda f)'=\lambda f'$
3. $f.g$ khả vi trên X và $(f.g)'=f'g+fg'$

4. $g(x) \neq 0$ trên X thì $\frac{f}{g}$ khả vi trên X và $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Định lí 2: Cho $f \in R^X$ và $g \in R^Y$. Nếu f khả vi trên X và g khả vi trên $f(X)$ thì gof khả vi trên X và $(gof)' = (g'of)f'$

Định lí 3: Cho $f \in R^X$ đơn điệu ngặt trên X, khả vi trên X và $f'(x) \neq 0$ trên X khi đó f^{-1} khả vi trên $f(X)$ và $(f^{-1})' = \frac{1}{f'}$

3.2.2 Vi phân của hàm số

a. Định nghĩa vi phân tại một điểm

Cho $f \in R^X, f$ khả vi tại $a \in X$. Vi phân của f tại a kí hiệu $df(a)$ xác định bởi công thức $df(a) = f'(a).h$ với $h \in R$

Vậy $df(a)$ là một hàm tuyến tính của h

Xét hàm số $f(x) = x$ trên R, $f'(x) = 1, \forall x \in R$ vậy $dx = 1.h$

Từ đó cũng thường kí hiệu $df(a) = f'(a).dx$

Định lí : Nếu $f, g \in R^X$ và khả vi tại $a \in X$ thì

1. $d(f+g)(a) = df(a) + dg(a)$
2. $d(\lambda f)(a) = \lambda df(a)$ với $\lambda \in R$
3. $d(f.g)(a) = f(a)dg(a) + g(a)df(a)$
4. $d\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{1}{g^2(a)}\left(g(a)df(a) - f(a)dg(a)\right)$ khi $g(a) \neq 0$

b. Vi phân trên một khoảng

Cho $f \in R^X$ khả vi trên $(a,b) \subseteq X$. Vi phân của hàm số trên (a,b) được xác định theo công thức $df(x) = f'(x).h$ với $x \in (a,b)$.

Tương tự như định lí trên, ta nhận được định lí sau đây.

Định lí: Nếu f, g khả vi trên (a,b) thì trên khoảng đó cũng thoả mãn các hê thức sau.

1. $d(f+g)(x) = df(x) + dg(x)$
2. $d(\lambda f)(x) = \lambda df(x)$

3. $d(f.g)(x) = f(x)dg(x) + g(x)df(x)$

4. $d\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{g^2(x)}\big(g(x)df(x) - f(x)dg(x)\big)$ khi $g(x) \neq 0$

3.2.3 Đạo hàm và vi phân cấp cao

a. Đạo hàm cấp cao

✓ **Định nghĩa**

1. Cho f khả vi trên X, nếu $f'(x)$ khả vi tại $a \in X$ thì nói rằng f có đạo hàm cấp 2 tại a và kí hiệu đạo hàm đó là $f''(a)$. Tương tự đạo hàm cấp n của $f(x)$ tại a, kí hiệu là $f^{(n)}(a)$ chính là đạo hàm của hàm $f^{(n-1)}(x)$ tại a.

2. Nói rằng $f(x)$ khả vi đến cấp n (hay n lần) trên X khi và chỉ khi tồn tại $f^{(n)}(x)$ trên X, $n \in N^*$ trong đó $f^{(n)}(x)$ là đạo hàm của $f^{(n-1)}(x)$

3. Nói rằng $f(x)$ khả vi vô hạn lần trên X khi và chỉ khi $f(x)$ khả vi n lần trên X, $\forall n \in N$. Sau đây thường kí hiệu $f^{(0)}(x) = f(x)$

✓ **Định lí**

Cho $\lambda \in R, n \in N^*,\ f, g \in R^X$ khả vi n lần trên X, khi đó trên X có các hệ thức sau đây :

1. $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

2. $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$

3. $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$ gọi là công thức Leibnitz

4. $g(x) \neq 0$ trên X thì $\dfrac{f}{g}$ khả vi n lần trên X

b. Vi phân cấp cao

✓ **Định nghĩa**

1. Nếu f khả vi đến cấp n tại $a \in X$ thì biểu thức $f^{(n)}(a).h^n$ gọi là vi phân cấp n tại a kí hiệu là $d^n f(a)$. Vậy là $d^n f(a) = f^{(n)}(a)h^n$ hay $d^n f(a) = f^{(n)}(a)dx^n$

2. Nếu f khả vi đến cấp n trên X thì vi phân cấp n của f trên X được kí hiệu là $d^n f(x), x \in X$ và xác định theo công thức sau

$$\forall x \in X,\ d^n f(x) = f^{(n)}(x)h^n = f^{(n)}(x)dx^n$$

✓ **Định lí:** Nếu f, g khả vi đến cấp n trên X thì khi đó

1. $d^n(f+g) = d^n f + d^n g$
2. Với $\lambda \in R,\ d^n(\lambda f) = \lambda d^n f$
3. $d^n(f.g) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^k f.d^{n-k} g$
4. Nếu $g(x) \neq 0$ thì $\frac{f}{g}$ có vi phân đến cấp n.

c. Lớp của một hàm

✓ **Định nghĩa**

1. Cho $n \in N$, Ta nói f thuộc lớp C^n (kí hiệu $f \in C^n$) trên X nếu f khả vi n lần trên X và $f^{(n)}$ liên tục trên X.
2. Nói rằng $f \in C^\infty$ trên X nếu f khả vi vô hạn lần trên X.
3. Nói rằng $f \in C^0$ trên X nếu f liên tục trên X.

✓ **Định lí**

Định lí 1: Nếu $f, g \in C^n$ trên X thì

1. $(f+g) \in C^n$ trên X
2. $\lambda f \in C^n$ trên $X, \lambda \in R$
3. $fg \in C^n$ trên X
4. $\frac{f}{g} \in C^n$ trên X khi $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in X$

Định lí 2: Cho $f \in R^X$ và $g \in R^Y$, $f(X) \subset Y$. Nếu f và g thuộc lớp C^n thì $gof \in C^n$ trên X

3.2.4 Các định lý về giá trị trung bình

a. Định lí Phéc ma (Fermat)

✓ **Điểm cực trị của hàm số**

Cho $f \in R^X$. Gọi hàm số đạt cực trị địa phương tại $a \in X$ khi và chỉ khi tồn tại $\Omega_\delta(a) \subset X$, để $\forall x \in \Omega_\delta(a)$ thoả mãn $f(x) - f(a) \geq 0$ hoặc $f(x) - f(a) \leq 0$

Trường hợp thứ nhất xảy ra nói rằng f đạt cực tiểu địa phương tại a, trường hợp sau nói rằng f đạt cực đại địa phương tại a.

Nếu chỉ có $f(x) - f(a) > 0$ hoặc $f(x) - f(a) < 0$ nói rằng hàm số đạt cực trị địa phương ngặt tại a.

✓ **Định lí Fermat**

Định lí: Nếu $f(x)$ khả vi tại a và đạt cực trị địa phương tại a thì $f'(a) = 0$

b. Định lí Rôn (Rolle)

✓ **Định lí:** Cho $f \in R^{[a,b]}$ thoả mãn.

1. f liên tục trên [a,b]
2. f khả vi trên (a,b)

$f(a) = f(b)$ khi đó tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $f'(c) = 0$

c. Định lí số gia hữu hạn. (định lí Lagơrăng (Lagrange))

✓ **Định lí:** Cho $f \in R^{[a,b]}$ thoả mãn:

1. Liên tục trên [a,b]
2. Khả vi trên (a,b), khi đó tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

d. Định lí số gia hữu hạn suy rộng (Định lí Côsi(Cauchy))

✓ **Định lí:** Cho $f, g \in R^{[a,b]}$ thoả mãn:

1. f, g liên tục trên [a,b]
2. f, g khả vi trên (a,b)
3. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

Khi đó tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

3.2.5 Ứng dụng các định lý về giá trị trung bình

a Công thức Taylo(Taylor), công thức Maclôranh(McLaurin)

✓ **Định nghĩa**

1. Cho hàm f khả vi đến cấp (n+1) tại $a \in X$ tức là $f \in C^n$ tại lân cận của a và có đạo hàm cấp n+1 tại a. Gọi đa thức $P_n(x)$ với $\deg P_n(x) \le n$ thoả mãn điều kiện

$$P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \qquad k = \overline{0,n}$$

là đa thức Taylor của $f(x)$ tại lân cận điểm a, hay là phần chính qui của khai triển hữu hạn bậc n tại a của $f(x)$

2. Nếu a = 0 thì $P_n(x)$ gọi là đa thức McLaurin của $f(x)$

✓ **Định lí**

Nếu $P_n(x)$ là đa thức Taylor của $f(x)$ tại lân cận của a thì nó là duy nhất và có dạng $P_n(x) = f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

✓ **Công thức Taylor**

Cho $P_n(x)$ là đa thức Taylor của $f(x)$ tại lân cận của a

1. Gọi $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ là phần dư Taylor bậc n tại a của $f(x)$
2. Gọi công thức

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

là công thức Taylor bậc n , hay khai triển hữu hạn bậc n hàm $f(x)$ tại lân cận của a

3. Gọi công thức $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$ là công thức McLaurin bậc n, hay khai triển hữu hạn bậc n của $f(x)$ tại lân cận của 0.

✓ **Công thức McLaurin của các hàm thường dùng**

1. $f(x) = e^x, \quad \forall x \in R$.

Ta thấy $f \in C^\infty$ trên R và $f^{(k)}(0) = 1 \quad \forall k \in N$

Suy ra $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + 0(x^n)$

2. $f(x) = \sin x, \quad \forall x \in R, \quad f \in C^\infty$

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{(k)}(0) = \sin\frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0, & k = 2m \\ (-1)^m, & k = 2m+1 \end{cases}$$

$$\sin x = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} + 0(x^{2n+2})$$

Tương tự $\cos x = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + 0(x^{2n+1})$.

3. $f(x) = (1+x)^\alpha, \ \alpha \in R, \ x \in X$, X phụ thuộc α. Với x ở lân cận của 0 thì $f \in C^\infty$

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)$$

Suy ra $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!} x^k + 0(x^n)$.

4. $f(x) = \ln(1+x)$, ở lân cận 0 thì $f \in C^\infty$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}} \Rightarrow f^{(n+1)}(0) = (-1)^n.n!$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + 0(x^n)$$

5. $f(x) = arctgx, \ \forall x \in R$

$$f \in C^\infty, \ f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } k = 2m \\ (-1)^{m-1}(2m-2)!, & \text{nếu } k = 2m+1 \end{cases}$$

Vậy $arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} x^{2m-1} + 0(x^{2m})$

6. $f(x) = tgx, \quad f \in C^\infty$ ở lân cận của 0.

Ta biểu diễn

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}} = x + \frac{x^3}{3} + 0(x^3)$$

b. Qui tắc Lôpitan (L'Hospital)

Cho $a \in X,\ f,g \in R^X$ thoả mãn các điều kiện sau:

1. liên tục tại a và khả vi ở lân cận $\Omega_\delta(a)\setminus\{a\}$
2. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega_\delta(a)\setminus\{a\}$
3. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

Khi đó $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = l$.

3.2.6 Sự biến thiên của hàm số

a. Tính đơn điệu của hàm khả vi

✓ **Định lí 1:** Cho $f \in R^{[a,b]}$ thỏa mãn:

1. f liên tục trên đoạn [a,b]
2. f khả vi trên khoảng (a,b)
3. $f'(x) = 0, \forall x \in (a,b)$ khi đó f(x) không đổi trên [a,b]

✓ **Định lí 2:** Cho f liên tục trên [a,b], khả vi trên (a,b). Để f tăng trên [a,b] thì cần và đủ là $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$

✓ **Định lí 3:** Cho f liên tục trên [a,b], khả vi trên (a,b). Để f tăng ngặt trên [a,b], điều kiện cần và đủ là

a. $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$

b. Tập $\{x \in (a,b), f'(x) = 0\}$ không chứa bất kỳ một khoảng có phần trong không rỗng nào.

b. Điều kiện hàm số đạt cực trị

✓ **Định lí 1:** Cho $f \in R^X$. Nếu tồn tại lân cận $\Omega_\delta(a) \subset X$ và $f'(x) \geq 0$ trên $(a-\delta, a)$ và $f'(x) \leq 0$ trên $(a+\delta, a)$ thì f có một cực đại tại a.

✓ **Định lí 2:** Cho $f \in C^n$ tại lân cận $\Omega_\delta(a)$ và thỏa mãn điều kiện:

$$f'(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0$$

Khi đó:

a. Nếu n chẵn thì f(x) đạt cực trị tại a: đạt cực tiểu nếu $f^{(n)}(a) > 0$, đạt cực đại nếu $f^{(n)}(a) < 0$.

b. Nếu n lẻ thì f(x) không đạt cực trị tại a.

3.2.7 Bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất

Bài toán: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên tập X. Tìm giá trị bé nhất (GTBN) , giá trị lớn nhất (GTLN) của hàm số trên tập đó.

Nói rằng hàm $f(x)$ đạt GTBN là m tại $x_1 \in X$ khi và chỉ khi :

$$m = f(x_1) \leq f(x), \quad \forall x \in X$$

Nói rằng hàm $f(x)$ đạt GTLN là M tại $x_2 \in X$ khi và chỉ khi:

$$M = f(x_2) \geq f(x), \quad \forall x \in X$$

a. Hàm liên tục trên đoạn kín [a,b]

Theo tính chất liên tục của hàm số trên một đoạn kín bao giờ cũng tồn tại m,M. Theo định lý Fermat nếu hàm khả vi tại x_0 và đạt cực trị tại đó thì $f'(x_0)=0$. Vì cực trị có tính địa phương nên các điểm tại đó hàm đạt GTBN, GTLN chỉ có thể là hoặc các điểm tại đó hàm số không khả vi hoặc các điểm làm đạo hàm triệt tiêu hoặc các điểm a,b. Từ đó các quy tắc tìm m, M tương ứng x_1, x_2 như sau:

✓ Tìm các giá trị f(a), f(b).

✓ Tìm các giá trị của hàm số tại các điểm hàm số không khả vi.

✓ Tìm giá trị của hàm số tại các điểm làm triệt tiêu đạo hàm f'(x).

✓ So sánh các giá trị tìm được ở trên để tìm ra giá trị bé nhất, đó là m, tìm ra giá trị lớn nhất, đó là M.

b. Hàm liên tục trên khoảng mở, khoảng vô hạn

Trong trường hợp này, thay vì tính f(a), f(b), ta tìm giới hạn của hàm số khi x dần tới a, dần đến b, hoặc dần đến ∞. Tuy nhiên phải xem xét hàm số có đạt được giới hạn này không. Các bước tiếp theo thực hiệm như mục trên.

3.2.8 Hàm lồi

a. Khái niệm về hàm lồi, hàm lõm và điểm uốn

✓ **Định nghĩa**

1. Ánh xạ $f: X \to R$ được gọi là lồi nếu

$$\forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Nói rằng f là lõm khi và chỉ khi –f là lồi.

2. Cho $f \in R^X$. Giả sử $X = [a,b] \cup [b,c]$ mà f lồi (lõm) trên [a,b], f lõm (lồi) trên [b,c] . Khi đó điểm U(b,f(b)) gọi là điểm uốn của đồ thị C_f của hàm số. Như vậy điểm uốn là điểm phân biệt giữa các cung lồi và cung lõm của đồ thị hàm số.

✓**Định lí 1:** Để f là lồi trên X điều kiện cần và đủ là $\forall a \in X$, tỷ số gia tại a của f tăng trên $X \setminus \{a\}$, tức là

$$\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$ tăng trên $X \setminus \{a\}$.

✓ **Định lí 2 :** (Bất đẳng thức Jensen)

Nếu $f \in R^X$ lồi , $n \in N^*, x_1, x_2, ..., x_n \in X; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in [0,1]$ sao cho $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ thì sẽ có $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$

b. Điều kiện hàm lồi

✓ **Định lí 1:** Giả sử f là lồi trên X khi đó f khả vi phải và trái tại mọi điểm trong của X và $\forall a,b,c \in X$ sao cho a<b<c, ta có

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \le f_t'(b) \le f_p'(b) \le \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

✓ **Định lí 2:** Cho $f \in R^X$ khả vi. Để f lồi trên X điều kiện cần và đủ là f' tăng trên X

3.2.9 Tiệm cận của đường cong

a. Khái niệm chung về tiệm cận:

Đường thẳng (Δ) được gọi là tiệm cận của đường cong C_f nếu như khoảng cách δ từ một điểm $M(x,y) \in C_f$ đến (Δ) dần đến 0 khi $x^2 + y^2 \to +\infty$ (Tức là M chạy ra vô cùng trên đường cong C_f).

b. Phân loại và cách tìm tiệm cận

- ✓ **Tiệm cận đứng (Tiệm cận song song với trục tung):**

Đường x=a là tiệm cận đứng của đường cong $y = f(x)$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Giới hạn trên có thể bao hàm cả trường hợp $x \to a^-, x \to a^+, y \to -\infty$, $y \to +\infty$. Ứng với từng trường hợp sẽ nhận được tiệm cận đứng ở phía trên hoặc phía dưới, bên phải hoặc bên trái đường cong C_f. Số a chính là cực điểm của hàm số.

- ✓ **Tiệm cận ngang (Tiệm cận song song với trục hoành)**

Đường y=b là tiệm cận ngang của đường cong $y = f(x)$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

Tuỳ theo $x \to -\infty$ hay $x \to +\infty$ ta có tiệm cận ngang bên trái hay bên phải.

- ✓ **Tiệm cận xiên (Tiệm cận không song song với các trục toạ độ)**

Đường $y = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$ là tiệm cận xiên của đường cong $y = f(x)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \alpha \\ \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - \alpha x] = \beta \end{cases}$$

Tuỳ theo $x \to -\infty$ hay $x \to +\infty$ ta có tiệm cận xiên bên trái hay bên phải.

Rõ ràng về phía nào đó khi đã có tiệm cận ngang y=b thì không thể có tiệm cận xiên bởi vì khi đó $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ và ngược lại.

3.2.10 Bài toán khảo sát hàm số

Sơ đồ tổng thể để khảo sát hàm số gồm các bước dưới đây

1. Tìm miền xác định f (nếu như chưa cho) và các tính chất đặc biệt của hàm số như: chẵn, lẻ, tuần hoàn (nếu có)
2. Xét sự biến thiên của hàm số: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số.
3. Tìm cực trị (nếu có)
4. Xét tính lồi, lõm của hàm số, điểm uốn (nếu có)
5. Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có)

6. Lập bảng biến thiên
7. Vẽ đồ thị

3.3 CÂU HỎI ÔN TẬP

Câu 1. Định nghĩa hàm số khả vi tại điểm x0, khả vi trong khoảng (a,b), khả vi trong đoạn [a,b], khả vi trong khoảng (a,∞).

Câu 2. Đạo hàm của hàm số tại x0 là gì? Vi phân của hàm số tại x0 là gì?

Câu 3. Nêu ý nghĩa hình học của đạo hàm tại điểm x0.

Câu 4. Điểm tại đó mà đạo hàm hai phía khác nhau thì tương ứng đồ thị có tiếp tuyến không?

Câu 5. Điểm tại đó có đạo hàm là vô cùng thì tương ứng tiếp tuyến của đồ thị có tính chất gì?

Câu 6. Vì sao nói rằng điều kiện liên tục của hàm số chỉ là điều kiện cần chứ không phải là điều kiện đủ của hàm khả vi?

Câu 7. Nêu các tính chất đại số của hàm khả vi. Các tính chất đó còn đúng không đối với các hàm không khả vi?

Câu 8. Nêu công thức tính gần đúng số gia của hàm số nhờ vào vi phân của hàm số. Độ chính xác trong phép tính đó phụ thuộc vào đại lượng nào?

Câu 9. Định nghĩa đạo hàm cấp cao của hàm số tại điểm x0

Câu 10. Định nghĩa vi phân cấp cao của hàm số tại điểm x0

Câu 11. Hiểu thế nào là tính bất biến của vi phân cấp 1?

Câu 12. Viết công thức tính đạo hàm cấp cao của tích hai hàm số.

Câu 13. Định nghĩa cực trị của hàm số. Tại sao nói rằng cực trị có tính chất địa phương?

Câu 14. Phát biểu định lý Fermat. Vì sao nói rằng đó là điều kiện cần của hàm khả vi? Ý nghĩa của định lý Fermat?

Câu 15. Phát biểu và nêu ý nghĩa hình học của định lý Rolle. Nếu một trong các điều kiện của định lý Rolle không thoả mãn thì có tồn tại giá trị trung bình không?

Câu 16. Phát biểu và nêu ý nghĩa hình học của định lý Largrange. Nếu một trong các điều kiện của định lý Largrange không thoả mãn thì có tồn tại giá trị trung bình không?

Câu 17. Phát biểu định lý Cauchy. Chứng tỏ công thức Cauchy là tổng quát nhất về giá trị trung bình.

Câu 18. Tại sao nói công thức Largrange là công thức số gia hữu hạn?

Câu 19. Phần dư Taylor của hàm số f(x) có phải là một đa thức của x không? Tại sao?

Câu 20. Nêu ý nghĩa của công thức Taylor, công thức McLaurin.

Câu 21. Nêu các điều kiện đủ của cực trị.

Câu 22. Nêu các điều kiện nhận biết hàm số tăng, giảm trên một khoảng.

Câu 23. Định nghĩa hàm lồi, hàm lõm. Mô tả hình học.

Câu 24. Nêu cách tìm điểm uốn, khoảng lồi, khoảng lõm của đường cong.

Câu 25. Nêu quy tắc L'Hospital . Cho ví dụ chứng tỏ rằng quy tắc đó không mô tả điều kiện cần của sự tồn tại giới hạn.

Câu 26. Trình bày cách tìm tiệm cận của đường cong.

Câu 27. Trình bày sơ đồ tổng quát khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

3.4 BÀI TẬP CHƯƠNG III

Câu 1. Dùng định nghĩa hãy tính các đạo hàm các hàm số

a. $f(x) = \sqrt{2x+1}$

b. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

c. $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{x}$

d. $f(x) = \sqrt{x}$

Câu 2. Tính các đạo hàm của các hàm số

a. $y = \left|(x-1)^2(x+1)^3\right|$

b. $y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| \le 1 \\ \dfrac{1}{e}, & |x| > 1 \end{cases}$

c. $y = \begin{cases} x^n \sin\dfrac{1}{x}, x \ne 0, n \in N^* \\ 0 \quad ,x = 0 \end{cases}$

d. $y = x.|x|$

Câu 3. Chứng tỏ rằng nếu f (x) khả vi tại x=a thì

$$\lim_{x\to a}\frac{x.f(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a)$$

Câu 4. Chứng minh rằng hàm số $f(x)=|x-a|\varphi(x)$ trong đó $\varphi(x)$ là hàm số liên tục và $\varphi(a)\neq 0$ không khả vi tại x=a.

Câu 5. Tính các đạo hàm $f_p'(0)$ và $f_t'(0)$ của các hàm số sau đây:

a. $f(x)=\sqrt{\sin x^2}$

b. $f(x)=\arcsin\dfrac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$

c. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, x\neq 0\\ 0 \quad\quad , x=0\end{cases}$ x

d. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x^2}}, x\neq 0, n\in N\\ 0 \quad\quad , x=0\end{cases}$

Câu 6. Tính đạo hàm của các hàm số:

a. $y=\ln tg\dfrac{x}{2}$

b. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

c. $y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$

d. $y=\arcsin\dfrac{2x^2}{1+x^4}$

e. $y=\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$

f. $y=\dfrac{1}{2}arctg\dfrac{2x}{1-x^2}$

g. $y=\ln\dfrac{x\ln x-1}{x\ln x+1}$

h. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2ax-x^2}}$

i. $y=\ln\dfrac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}}$

k. $y=\dfrac{1}{(1+\cos 4x)^5}$

l. $y=\cos^2\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

m. $y=\sqrt{1+tg\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}$

n. $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

o. $y=\log_2\log_3\log_5 x$

Câu 7. Tính đạo hàm sau bằng phương pháp đạo hàm lôga:

a. $y=x^{x^2}$

b. $y=(\sin x)^{\cos x}$

c. $y=\dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$

d. $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$

e. $y=(x^2+1)^{\sin x}$ f. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$

g. $y=x^{\frac{1}{x}}$ h. $y=x^{-x}2^x x^2$

i. $y=\dfrac{x^x}{e^x}(x\ln x-x-1)$ k. $y=\log_{\cos x}\sin x$

Câu 8. Tính vi phân của hàm số

a. $y=\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}-\dfrac{1}{2}\ln tg\dfrac{x}{2}$

b. Cho $f(x)=x^3-2x+1$. Tính $\Delta f(1), df(1)$ $(a>0)$

c. Với $|x|<<a^2$ chứng minh $\sqrt{a^2+x}\approx a+\dfrac{x}{2a}$ $(a>0)$

d. Với $|x|<<a^n$ chứng minh $\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\dfrac{x}{na^{n-1}}$

Áp dụng tính $\sqrt[10]{10^3}=\sqrt[10]{2^{10}-24}$

e. $y=3^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{2^{2x}}+6^{\sqrt{x}}$ tại $x=1$ và $dx=0,2$

Câu 9. Tính đạo hàm của y_x' của các hàm cho theo tham số:

a. $x=a\cos^3\varphi$, $y=b\sin^3\varphi$

b. $x=\ln(1+t^2)$, $y=t-arctgt$

c. $x=\dfrac{1+t^3}{t^2-1}$, y=$\dfrac{t}{t^2-1}$

d. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$

Câu 10. Tính

a. $\dfrac{d}{d(x^3)}(x^3-2x^6-x^9)$ b. $\dfrac{d}{d(x^2)}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ c. $\dfrac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$

Câu 11. Chứng minh các hệ thức sau:

a. $x.y'^3=1+y'$ với $x=\dfrac{1+t}{t^3}, y=\dfrac{3}{2t^3}+\dfrac{2}{t}$

b. $y\sqrt{1+y'^2}=y'$ với $x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}-\ln\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}, y=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

c. $y.y' = 2x.y'^2$ với $x = \dfrac{1+\ln t}{t^2}, y = \dfrac{3+2\ln t}{t}$

Câu 12. Chứng minh các hệ thức sau:

a. Cho $f(x) = \ln\dfrac{1}{1-x}$. Chứng minh $f^{(n)}(0) = (n-1)!$

b. Cho $f(x) = x^2 e^{-\frac{x}{a}}$. Chứng minh $f^{(n)}(0) = \dfrac{(-1)^n.n.(n-1)}{a^{n-2}}$

c. Cho $f(x) = x^n$. Chứng minh $f(1) + \dfrac{f'(1)}{1!} + ... + \dfrac{f^{(n)}(1)}{n!} = 2^n$

Câu 13. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số:

a. $y = 2^x + 2^{-x}$

b. $y = \ln(ax+b)$

c. $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

c. $y = \sqrt{x}$

e. $y = x^n.\sqrt{x}$

f. $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$

Câu 14. Tính các đạo hàm cấp cao sau:

a. $y = (x^2+1)\sin x$, tính $y^{(20)}$

b. $y = \dfrac{e^x}{x}$, tính $y^{(10)}$

c. $y = e^x.\sin x$, tính $y^{(n)}$

d. $y = \sin ax.\sin bx$, tính $y^{(n)}$

e. $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, tính $y^{(100)}$

f*. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$, tính $y^{(n)}$

g*. $y = e^{ax}\sin(bx+c)$, tính $y^{(n)}$

Câu 15. Chứng minh hàm số $y = e^{\alpha \arcsin x}$ thỏa mãn:

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - (n^2+\alpha^2)y^{(n)} = 0, n \in N$$

Câu 16. Chứng minh hàm số $y = (1-x)^{-\alpha}.e^{-\alpha x}$ thỏa mãn

$$(1-x)y^{(n+1)} - (n+\alpha x)y^{(n)} - n\alpha y^{(n-1)} = 0, n \in N^*$$

Câu 17. Chứng minh hàm số $y = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$ thỏa mãn $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$

Câu 18. Chứng minh đa thức Lơgiăng (Legendre) $P_m(x) = \dfrac{1}{2^m m!}\left[(x^2-1)^m\right]^{(m)}, m = 0,1,2,...$

thỏa mãn phương trình $(1-x^2)P_m'' - 2xP_m' + m(m+1)P_m = 0$

Câu 19. Chứng minh đa thức Trêbưsép- Hécmít (Chebyshev – Hermite):

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2}(-e^{x^2})^{(m)}, m = 0,1,2,...$$

thỏa mãn phương trình: $H_m'' - 2xH_m' + 2mH_m = 0$

Câu 20. Áp dụng đạo hàm tính các tổng sau:

a. $A_n = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1}$

b. $B_n = 1.2 + 2.3.x + 3.4.x^2 + ... + n(n-1)x^{n-2}$

c. $C_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + ... + n^2x^{n-1}$

Câu 21. Chứng minh rằng phương trình $x^n + px + q = 0, n \in N^*$ không có quá 2 nghiệm thực với n chẵn, không có quá 3 nghiệm thực với n lẻ.

Câu 22. Chứng minh rằng $\forall m$ phương trình $x^3 - 3x + m = 0$ không thể có 2 nghiệm khác nhau trong [0,1].

Câu 23. Chứng tỏ rằng phương trình f'(x)=0 có 3 nghiệm thực biết rằng

$$f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$$

Câu 24. Chứng minh rằng số nghiệm của phương trình f(x)=0 không nhiều hơn quá 1 đơn vị của số nghiệm của phương trình f'(x)=0

Câu 25. Cho f(x) khả vi trên [a,b] và có đạo hàm đến cấp hai trên (a,b). Chứng minh rằng $\forall x \in (a,b)$ có thể tìm được ít nhất số $C_x \in (a,b)$ sao cho

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) = \frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(C_x)$$

Câu 26. a. Không cần tìm đạo hàm của hàm số $f(x) = (x^2-1)(x^2-4)$. Hãy cho biết số nghiệm của phương trình f'(x)=0 và chỉ ra các khoảng chứa nghiệm đó.

b. Cho $f(x) = 1 + x^m(x-1)^n$ với $m,n \in N^*$ chứng tỏ rằng f'(x)=0 có nghiệm trong khoảng (0,1).

Câu 27. Cho hàm f(x) liên tục trên [a,b], khả vi trong (a,b). Chứng tỏ rằng nếu áp dụng định lí Rolle cho hàm số: $F(x)=\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix}$ sẽ nhận được định lí Lagrange

Câu 28. Chứng minh các bất đẳng thức sau đây:

a. $\frac{a-b}{a}\le \ln\frac{a}{b}\le \frac{a-b}{b},(0<b\le a)$

b. $\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}\le tg\alpha-tg\beta\le \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha},(0<\beta\le\alpha<\frac{\pi}{2})$

c. $nb^{n-1}(a-b)\le a^n-b^n\le na^{n-1}(a-b),(b<a),n\in N$

d. $|arctga-arctgb|\le|a-b|$

Câu 29. a. Tìm các hằng số a,b để tồn tại giới hạn hữu hạn của f(x) khi $x\to 0$

$$f(x)=\frac{1}{\sin^3 x}-\frac{1}{x^3}-\frac{a}{x^2}-\frac{b}{x}$$

b. Tìm hằng số k để tồn tại giới hạn hữu hạn của hàm f(x) khi $x\to 0$

$$f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}(\arcsin x+k)$$

Câu 30. Dùng qui tắc L'Hospital tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$ b. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$ c. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$

d. $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{tg\frac{\pi}{2}x}{\ln(1-x)}$ e. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$ f. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\pi}{x}}{\cot g\frac{\pi}{2}x}$

Câu 31. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ b. $\lim\limits_{x\to 1}\ln x.\ln(x-1)$

c. $\lim\limits_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}x^{-100}$ d. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{p}{1-x^p}-\frac{q}{1-x^q}\right)$

e. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right]$ f. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{\cot gx}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$

Câu 32. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$ b. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(tgx)^{2\cos x}$ c. $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^{2x})^{\frac{1}{x}}$

d. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ e. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$ f. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x-x\ln a}{b^x-x\ln b}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Câu 33. Tìm các khoảng tăng, giảm và cực trị của các hàm số sau:

a. $y=x(1+\sqrt{x})$ b. $y=x\ln x$ c. $y=(x^2-1)^{\frac{3}{2}}$

d. $y=\dfrac{e^x}{x}$ e. $y=x\sqrt{ax-x^2},(a>0)$

Câu 34. Tìm cực trị các hàm số sau:

a. $y=x^2(1-x\sqrt{x})$ b. $y=|x|(x+2)$ c. $y=x^{\frac{2}{3}}+(x-2)^{\frac{2}{3}}$

d. $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$ e. $y=\dfrac{1+\ln x}{x}$ f. $y=2\cos\dfrac{x}{2}+3\cos\dfrac{x}{3}$

g. $y=\sqrt{\sin x^2}$ h. $y=\ln\sqrt{1+x^2}-arctgx$

Câu 35. Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $arctgx=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

b. $\arcsin x=arctg\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Câu 36. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a. $\sin x+tgx\ge 2x,$ $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

b. $\cos x>1-\dfrac{1}{2}x^2,$ $\forall x>0$

c. $\dfrac{tg\alpha}{\alpha}<\dfrac{tg\beta}{\beta},$ $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$

d. $e^x > 1 + x$, $\forall x \neq 0$

e. $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$, $\forall x \geq 0$

f. $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$, $\forall x \geq 0$

g. $tgx > x + \dfrac{x^3}{3}$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

h. $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$, $\forall x > 1$

i. $2x.arctgx \geq \ln(1+x^2)$ $\forall x$

k. $\ln x > \dfrac{2(x-1)}{x+1}$, $\forall x > 1$

l. $\ln(1+x) > \dfrac{arctgx}{1+x}$, $\forall x > 0$

Câu 37. Chứng minh tính duy nhất nghiệm của các phương trình sau:

a. $2x + \sin x + \cos x = 0$

b. $\dfrac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 1 = 0$, $x \leq 0$

c. $a^x + b^x = c^x$, $0 < a < c, 0 < b < c$

d. $x = a\sqrt{2} + 2\sin\dfrac{a+x}{2}$, $\forall a$

e. $x^3 + \sin^2 ax + \cos^3 a = 0$, $\forall a$

Câu 38. Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất của các hàm số:

a. $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$, $0 \leq x \leq 1$

b. $y = \dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{1-x}$, $0 < x < 1, a > 0, b > 0$

c. $y = 2tgx - tg^2 x$, $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$

d. $y = arctg\dfrac{1-x}{1+x}$, $0 \leq x \leq 1$

Câu 39. Tìm các tiệm cận của các đường cong

a. $y = x + \ln x$ b. $y = \dfrac{\sin x}{x}$ c. $y = x^2 e^{-x}$

d. $y = x - 2 + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$ e. $y = x\ln\left(e + \dfrac{1}{x}\right)$ f. $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1$

Câu 40. Xét tính lồi lõm và tìm điểm uốn của hàm số:

a. $y = \dfrac{x^3}{x^2+12}$ b. $y = (1+x^2)e^x$

c. $y = a - \sqrt[5]{(x-b)^2}$ d. $y = \dfrac{a}{x}\ln\dfrac{a}{x}$ $(a > 0)$

Câu 41. Khảo sát hàm số sau:

a. $y = (2+x^2)e^{-x^2}$ b. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ c. $y = \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^4}$

d. $y = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$ e. $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ f. $y = e^{\frac{1}{x}} - x$

3.5 HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ BÀI TẬP CHƯƠNG III

Câu 1. a. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$, b. $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$,

c. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$, d. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, x \neq 0$

Câu 2. a. $y' = (x^2-1)|x+1|(5x-1)$ b. $y' = \begin{cases} 2x(1-x^2)e^{-x^2}, |x| \le 1 \\ 0, |x| > 1 \end{cases}$

c. $y' = \begin{cases} x^{n-2}\left(nx\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}\right), x \neq 0, n \ge 2 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ d. $y' = 2|x|$

Câu 5. a. $f'_p(0) = 1, f'_t(0) = -1,$ b. $f'_p(0) = -\dfrac{2}{|a|}, f'_t(0) = \dfrac{2}{|a|}$

c. $f'_p(0) = 0, f'_t(0) = 1,$ d. $f'(0) = 0$

Câu 6. a. $y' = \dfrac{1}{\sin x}$ b. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, c. $y' = -\dfrac{1}{x^2} e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \sin\dfrac{2}{x}$,

d. $y' = \dfrac{4x}{1+x^4}$, e. $y' = -\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$, f. $y' = \dfrac{1}{x^2+1}$,

g. $y' = \dfrac{2(\ln x+1)}{x^2\ln^2 x - 1}$, h. $y' = \dfrac{x-a}{\sqrt{(2ax-x^2)^3}}$,

i. $y' = \dfrac{2}{x-ax^5}$, k. $y' = \dfrac{20\sin 4x}{(1+\cos 4x)^6}$,

l. $y' = \dfrac{\sin 2\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$, m. $y' = \dfrac{x^2-1}{2x^2\cos^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{1+tg\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}}$,

n. $y' = \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$, o. $y' = \dfrac{1}{x\log_5 x.\log_3(\log_5 x)\ln 2.\ln 3.\ln 5}$

Câu 7. a. $y' = x^{x^2+1}(2\ln x+1)$.

b. $y' = (\sin x)^{\cos x}\left(\dfrac{\cos^2 x}{\sin nx} - \sin x\ln\sin x\right)$,

c. $y' = \dfrac{57x^2-302x+361}{20(x-2)(x-3)}.\dfrac{(x+1)^2\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$

d. $y' = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x\left(\dfrac{1}{x+1}+\ln\dfrac{x}{x+1}\right)$.

e. $y' = (x^2+1)^{\sin x}\left[\dfrac{2x\sin x}{x^2+1}+\cos x\ln(x^2+1)\right]$.

f. $y' = \dfrac{x^4+6x^2+1}{3x(1-x^4)}\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

g. $y' = y\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

h. $y' = y(\ln 2 + \frac{2}{x} - 1 - \ln x)$

i. $y' = \frac{1}{e^x} x^{x+1} \ln x(\ln x - 1).$

k. $y' = \frac{1}{\ln^2 \cos x}(\cot gx \ln \cos x + tgx \ln \sin x).$

Câu 8. a. $dy = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$ b. $\Delta f(1) = \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$, $df(1) = \Delta x$.

d. $\sqrt[10]{10^3} \approx 1{,}9955...$ e. $dy(1) = 0{,}3466.$

Câu 9. a. $y'_x = -\frac{b}{a} tg\varphi,$ b. $y'_x = \frac{t}{2},$

c. $y'_x = \frac{1+t^2}{t(2+3t-t^2)},$ d. $y'_x = \cot g \frac{t}{2}.$

Câu 10. a. $1 - 4x^3 - 3x^6,$ b. $\frac{1}{2x^2}\left(\cos x - \frac{\sin x}{x}\right),$

c. $-\cot gx.$

Câu 13. a. $y^{(n)} = \left[2^x + (-1)^n 2^{-x}\right]\ln^n 2,$ b. $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!a^n}{(ax+b)^n},$

c. $y^{(n)} = \frac{n!(ad-bc)(-c)^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}},$ d. $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n\sqrt{x^{2n-1}}},$

e. $y^{(n)} = \frac{(2n+1)!!}{2^n}\sqrt{x},$ f. $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n x^{\frac{2n+1}{2}}}(x - 2n + 1).$

Câu 14.

a. $y^{(20)} = (x^2 - 379)\sin x - 40x\cos x.$

b. $y^{(10)} = e^x \sum_{n=0}^{10}(-1)^n C_{10}^n \frac{n!}{x^{n+1}}$.

c. $y^{(n)} = e^x \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right).$

d. $y^{(n)} = \frac{1}{2}\left\{(a-b)^n \cos\left[(a-b)x + \frac{n\pi}{2}\right] - (a+b)^n \cos\left[(a+b)x + \frac{n\pi}{2}\right]\right\}.$

e. $y^{(100)} = \frac{197!!(399-x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}.$

f. $.\, y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}.1.4...(3n-5)(3n+2x)}{3^n(1+x)^{n+\frac{1}{3}}}.$

g. $y^{(n)} = e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(bx+c+n\varphi)$. $\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

Câu 26. a. $x_1 \in (-2;-1)$, $x_2 \in (-1;1)$, $x_3 \in (1;2)$. b. $f(0) = f(1)$

Câu 29. a. $a = 0; b = \frac{1}{2}$, b. $k = 0$.

Câu 30. a. 0, b. ∞, c. 1, d. ∞, e. $\frac{1}{2}$, f. $\frac{\pi^2}{2}$.

Câu 31. a. $\frac{1}{2}$, b. 0, c. 0, d. $\frac{p-q}{2}$, e. $\frac{1}{12}$, f. -1

Câu 32. a. 1, b. 1, c. e^3 d. $e^{\frac{1}{3}}$ e. e f. $e^{\frac{1}{2}(\ln^2 a - \ln^2 b)}$

Câu 33. a. Tăng $[0,+\infty)$ không có cực trị.

b. Tăng $\left(0,\frac{1}{e}\right]$, giảm $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$, $x_{CĐ} = \frac{1}{e}$.

c. Giảm $(-\infty;-1]$, tăng $[1;+\infty)$.

d. Giảm $(-\infty;0),(0;1)$, tăng $[1;+\infty)$, $x_{CT} = 1$.

e. Giảm $\left[\frac{3}{4}a;a\right]$, tăng $\left[0;\frac{3}{4}a\right]$, $x_{CĐ} = \frac{3}{4}a$.

Câu 34. a. $\min(0;0)$, $\max\left(2\sqrt[3]{\frac{2}{49}};\frac{6}{7}\sqrt[3]{\frac{4}{7}}\right)$.

b. $\min(0;0)$, $\max(-1;1)$.

c. $\min\ (0;\sqrt[3]{4})$, $\min\ (2;\sqrt[3]{4})$, $\max\ (1;2)$.

d. $\min\left(-1;-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, $\max\left(1;\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

e. $\max(1;1)$.

f. $\min\left[12\left(k\pm\frac{1}{5}\right)\pi;-5\cos\frac{\pi}{5}\right]$, $\min[6(2k+1)\pi;1]$,

$\max(12k\pi;5)$, $\max\left[12\left(k\pm\frac{2}{5}\right)\pi;5\cos\frac{2\pi}{5}\right]$.

g. $\min(0;0)$, $\max\left(\pm\sqrt{\frac{4n+1}{2}\pi};1\right)$.

h. $\min\left(1;\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 38. a. $m=\frac{1}{3}$, $M=1$. b. $m=(a+b)^2$. c. $M=1$. d. $m=0$, $M=\frac{\pi}{4}$.

Câu 39. a. $x=0$. b. $y=0$. c. $y=0$.

d. $y=-2$, $y=2(x-1)$. e. $x=-\frac{1}{e}$, $y=x+\frac{1}{e}$.

f. x=0, y=x

Câu 40. a. $x_U=\{0;\pm 6\}$ b. $x_U=\{-1;-3\}$.

c. ϕ. d. $x_U=ae^{\frac{3}{2}}$.

CHƯƠNG IV: PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

4.1 MỤC ĐÍCH

Phép tính tích phân là phép tính cơ bản thứ hai của toán cao cấp. Đây là phép tính ngược của phép tính vi phân. Chính vì thế để tính tích phân nhanh chóng, chính xác cần thông thạo phép tính đạo hàm của hàm số.

Trong mục thứ nhất của chương này cần nắm vững định nghĩa tích phân xác định. Bản chất của nó là phép tính giới hạn của một dãy số được tạo ra theo một nguyên tắc nhất định (lập tổng tích phân) từ hàm số f(x) xác định trên đoạn [a,b]. Sau khi hiểu được lớp các hàm khả tích sẽ thấy rõ khái niệm tích phân xác định học ở phổ thông trung học chỉ là một trường hợp riêng của khái niệm tích phân xác định được trình bày ở mục này. Cụ thể là công thức Newton-Leibnitz chỉ được áp dụng khi hàm dưới dấu tích phân liên tục trên đoạn [a,b]. Người học phải nắm được điều kiện cần của hàm khả tích để sau này phân biệt với tích phân suy rộng. Bên cạnh đó phải biết vận dụng các tính chất của tích phân xác định bởi vì nhờ có tính chất này và các tích phân cơ bản mà ta có thể tính được các tích phân phức tạp hơn. Cần hiểu được nguyên hàm của hàm số là gì và phân biệt tích phân xác định với tích phân bất định.

Trong mục thứ hai cần nắm vững hai phương pháp cơ bản để tính tích phân xác định: Phương pháp tích phân từng phần và phương pháp đổi biến số. Cần hiểu rằng phần lớn các tích phân chỉ được tính bằng một phương pháp duy nhất. Do đó trước hết phải phân loại sau đó mới đi vào tính toán. Nắm chắc các điều kiện đối với hàm số khi thực hiện phép đổi biến số. Lưu ý rằng khi thực hiện phép đổi biến số thì cận của tích phân cũng biến đổi theo.

Mục thứ ba trình bày phương pháp tính tích phân bất định. Ngoài hai phương pháp cơ bản cần phải thuộc cách đổi biến thích hợp cho từng trường hợp: hàm hữu tỉ, hàm hữu tỉ lượng giác, hàm vô tỉ,....

Mục thứ tư gồm các ứng dụng mang tính chất hình học của tích phân xác định: diện tích hình phẳng, thể tích vật thể, độ dài cung. Phải chú ý đến tính chất biên của các hình rồi mới áp dụng các công thức tính thích hợp: trong hệ tọa độ đề các, tọa độ cực. Sau này còn được biết nhiều ứng dụng rộng rãi của tích phân xác định.

Trong mục thứ năm người học phải hiểu rõ tích phân suy rộng, ý nghĩa hình học của nó. Phân biệt sự khác nhau giữa tích phân suy rộng và tích phân xác định. Nắm vững khái niệm hội tụ, phân kỳ của tích phân suy rộng. Khi sử dụng tiêu chuẩn hội tụ của lớp hàm giữ nguyên dấu cần phải dùng đến phép so sánh các vô cùng bé, vô cùng lớn. Cần nắm vững khái niệm hội tụ tuyệt đối, bán hội tụ của tích phân suy rộng, bởi vì các nội dung trên sẽ gặp ở trong chương tiếp theo. Cũng cần nhớ rằng rất nhiều vấn đề kỹ thuật gắn liền với việc tính các tích phân suy rộng.

4.2 TÓM TẮT NỘI DUNG

4.2.1 Khái niệm về tích phân xác định

a. Định nghĩa tích phân xác định

Cho $f:[a,b]\to R, a<b$

1. Ta gọi một họ hữu hạn các điểm (x_i), $i=\overline{0,n}$ sao cho

$$a=x_0<x_1<...<x_{n-1}<x_n=b$$

là một phân hoạch (hay một cách chia) đoạn $[a,b]$ và gọi $\lambda=\underset{0\le i\le n-1}{Max}\,\Delta x_i$, trong đó $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i, i=\overline{0,n-1}$ là bước của phân hoạch đã chọn. Tập phân hoạch là $(\wp_n)$

2. Ta gọi một cách chọn ứng với phân hoạch là một cách lấy n điểm ξ_i, sao cho $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}], i=\overline{0,n-1}$

3. Ta gọi số thực $\sigma=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$ là tổng Riơman (Riemann) của hàm f ứng với một phân hoạch và một cách chọn.Rõ ràng với $f\in R^{[a,b]}$ sẽ có dãy vô hạn tổng Riemann σ Kí hiệu là (σ_n).

4. Nếu $\lambda\to 0$ mà $\sigma_n\to I$ hữu hạn (không phụ thuộc vào cách chia đoạn [a,b] và cách chọn các điểm ξ_i ứng với cách chia đó) thì I gọi là tích phân xác định của f trên $[a,b]$, Kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$, khi đó nói rằng f khả tích trên $[a,b]$ Như vậy $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$

b . Điều kiện tồn tại

✓ **Điều kiện cần**

Định lí: Nếu f khả tích trên [a,b] thì f bị chặn trên [a,b]

✓ **Các tổng Đácbu (Darboux)**

Cho $f:[a,b]\to R$ và phân hoạch (x_i) xác định $(i=\overline{0,n})$

Đặt $m_i = \inf\limits_{[x_i,x_{i+1}]} f\,, M_i = \sup\limits_{[x_i,x_{i+1}]} f\,,\quad i=\overline{0,n-1}$.

Ta gọi $s=\sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i\Delta x_i$, $S=\sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i\Delta x_i$ là các tổng Darboux dưới và trên, hay tổng tích phân dưới và tổng tích phân trên của f ứng với một phân hoạch xác định.

Vì rằng $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$, $\forall \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ nên $s \le \sigma \le S$.

Một phân hoạch đã định thì s, S là hằng số, tổng Riemann phụ thuộc vào $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ $\quad i=\overline{0,n-1}$. Chứng tỏ các tổng Darboux là cận dưới đúng và cận trên đúng của σ

Hệ quả 1: Nếu thêm vào điểm chia mới thì s tăng và S giảm.

Hệ quả 2: Mọi tổng Darboux dưới không vượt quá một tổng Darboux trên.

✓ **Điều kiện cần và đủ để hàm khả tích**

Định lí: Để cho hàm f khả tích trên [a,b] điều kiện cần và đủ là

$$\lim_{\lambda\to 0}(S-s)=0$$

c. Lớp các hàm khả tích.

✓ **Định lí 1:** Nếu $f(x)$ liên tục trên [a,b] thì khả tích trên đoạn đó

✓ **Định lí 2:** Nếu $f(x)$ đơn điệu và bị chặn trên [a,b] thì khả tích trên đoạn đó.

✓ **Hệ quả:** Nếu $f(x)$ liên tục từng khúc trên [a,b] thì khả tích trên đoạn đó. Dưới đây ta đưa ra các định lí và sẽ không chứng minh, về một lớp hàm khả tích, lớp hàm này chứa tất cả các lớp hàm đã xét ở trên

✓ **Định lí 3:** Nếu $f(x)$ bị chặn trên [a,b] và chỉ có hữu hạn điểm gián đoạn thì $f(x)$ khả tích trên [a,b]

✓ **Định lí 4:** Nếu $f(x)$ khả tích trên [a,b] thì $|f(x)|, k.f(x)$ $(k = const)$ cũng khả tích trên [a,b].

✓ **Định lí 5:** Nếu f, g khả tích trên [a,b] thì tổng, hiệu, tích của chúng cũng khả tích trên [a,b]

✓ **Định lí 6:** Nếu f khả tích trên [a,b] thì khả tích trên mọi đoạn $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$. Ngược lại nếu [a,b] được tách ra thành một số đoạn và trên mỗi đoạn đó hàm khả tích thì f khả tích trên [a,b].

d. Các tính chất của tích phân xác định

✓ **Tính chất**

Cho f, g khả tích trên [a,b] và a<b, λ là hằng số.

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ với $c \in (a,b)$

2. $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

3. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

4. Nếu $f(x) \geq 0$ trên [a,b] thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

5. Nếu $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a,b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

6. Nếu $f \geq 0$ trên [a,b], f liên tục tại $x_0 \in [a,b]$ và $f(x_0) > 0$ thì $\int_a^b f(x)dx > 0$

7. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

8. Nếu $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a,b]$ thì $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

✓ **Định lí tổng quát về giá trị trung bình**

Định lí: Cho f,g khả tích trên [a,b], a<b, $g(x)\geq 0$ hoặc $g(x)\leq 0$ trên [a,b] và $m\leq f(x)\leq M$. Khi đó tồn tại $\mu\in[m,M]$ để cho $\int_a^b f(x).g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx$.

Nếu thêm điều kiện $f(x)$ liên tục thì tồn tại $c\in[a,b]$ sao cho

$$\int_a^b f(x).g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)dx$$

✓ **Bất đẳng thức Côsi-Svác(Cauchy-Schwarz) đối với tích phân**

Định lí: Nếu f,g liên tục từng khúc trên [a,b] thì khi đó

$$\left(\int_a^b f(x).g(x)dx\right)^2\leq\int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx.$$

e. Công thức Niutơn-Lépnít (Newton-Leibnitz).

✓ **Hàm tích phân của cận trên**

Cho $f(x)$ khả tích trên [a,b]. Lấy x_0 cố định, $x_0\in[a,b]$. Cho $x\in[a,b]$ khi đó theo định lí 6 thì hàm $f(x)$ khả tích trên $[x_0,x]$ với x tuỳ ý trong [a,b]. Hàm số

$$\phi(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

gọi là hàm tích phân của cận trên hay tích phân của hàm $f(x)$ theo cận trên

Định lí 1: $\phi(x)$ là hàm liên tục trên [a,b]

Định lí 2: Nếu $f(x)$ liên tục trên [a,b] thì $\phi(x)$ khả vi trên [a,b] và có

$$\phi'(x)=f(x),\forall x\in[a,b].$$

Hệ quả: Nếu $\alpha(x),\beta(x)$ khả vi trên $X, f(x)$ liên tục trên X và $[\alpha(x),\beta(x)]\subset X\ \forall x\in X$ thì $G(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$ khả vi trên X và

$$G'(x)=f(\beta(x))\beta'(x)-f(\alpha(x))\alpha'(x)$$

✓ **Nguyên hàm của hàm số và tích phân bất định**

Cho $f,F:X\to R$. Gọi F là một nguyên hàm của f trên X nếu F khả vi trên X và ta có $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in X$.

Định lí: Nếu $f(x)$ liên tục trên X thì sẽ có nguyên hàm trên X và nếu $F(x)$ là một nguyên hàm thì tập hợp các nguyên hàm của f là $\{F(x)+C\ ,\ C\in R\}$

✓ **Công thức Newton-Leibnitz.**

Định lí: Nếu $f(x)$ liên tục trên [a,b] có một nguyên hàm là $F(x)$ trên [a,b] thì $$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

Đại lượng $F(b)-F(a)$ được kí hiệu $F(x)\Big|_a^b$ gọi là biến phân từ a đến b của $F(x)$.

4.2.2 Hai phương pháp cơ bản tính tích phân xác định

a. Phép đổi biến

✓ **Định lý 1:** Nếu $\varphi:[\alpha,\beta]\to R$ thuộc lớp C^1 trên $[\alpha,\beta]$

$f:[a,b]\to R$ thuộc lớp C^0 trên [a,b]

và $\varphi([\alpha,\beta])\subset[a,b]$. Khi đó:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)).\varphi'(t).dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$$

✓ **Định lý 2:** Nếu $\varphi:[\alpha,\beta]\to R$ với φ đơn điệu và thuộc lớp C^1 trên $[\alpha,\beta]$

$f:[a,b]\to R$ $f\in C^0$ trên [a,b]

với $t=\varphi(x)$ mà $f(x)dx = g(t)dt, g\in C^0$ trên $[\varphi(a),\varphi(b)]$. Khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)dt$$

b. Phép tích phân từng phần

✓ **Định lý:** Nếu $u,v:[a,b]\to R$ và $u,v\in C^1$ trên [a,b] thì:

$$\int_a^b u'(x).v(x)dx = u(x).v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u(x).v'(x)dx$$

4.2.3 Phương pháp tính tích phân bất định

Ta đã biết rằng $\int f(x)dx = F(x)+C$ trên X Trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên X và C là hằng số tuỳ ý.

a. Tính chất cơ bản của tích phân bất định.

Cho f, g có nguyên hàm, $\lambda \in R$

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, $d\int f(x)dx = f(x)dx$

2. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

3. $\int \lambda . f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$

4. Nếu $f(x)$ có một nguyên hàm là $F(x)$ thì $f(u(x))u'(x)$ có một nguyên hàm là $F(u(x))$ nếu $u \in C^1$, tức là

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C$$

b. Hai phương pháp cơ bản tính tích phân bất định

✓ **Phương pháp tích phân từng phần**

Cho $u, v \in C^1$ trên X khi đó

$$\int u(x)dv(x) = u(x).v(x) - \int v(x)du(x) \quad \text{trên } X$$

✓ **Phương pháp đổi biến số**

Đặt $x = \varphi(t)$, với φ đơn điệu và $\varphi \in C^1$ trên Y khi đó

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

Đặt $t = \psi(x)$ khi đó $f(x)dx = g(t)dt$

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt\Big|_{t=\psi(x)}$$

c. Cách tính tích phân bất định của các hàm số hữu tỉ

✓ **Tích phân các phân thức tối giản loại thứ nhất**

$$I = \int \frac{dx}{(x-a)^n}, \ a \in R$$

Nếu $n = 1$ thì $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$

Với $C = const$ khi xét $x < a$ hoặc $x > a$

Nếu $n \in N^* \setminus \{1\}$ thì $\int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{n-1}.\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$

✓ **Tích phân các phân thức tối giản loại thứ hai**

$$I = \int \frac{\lambda x + \mu}{(ax^2 + bx + c)^n} dx \ , \ \lambda, \mu, a, b, c \in R \text{ và } b^2 - 4ac < 0, n \in N^*$$

Nếu $\lambda = 0$

$$I = \mu \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Biến đổi $ax^2 + bx + c = -\frac{\Delta}{4a}\left\{1 + \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right\}, \Delta = b^2 - 4ac$

Thực hiện đổi biến $t = \frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}}$

Suy ra $I = \mu\left(-\frac{4a}{\Delta}\right)^n \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \int \frac{dt}{(1 + t^2)^n}$

Dẫn đến tính $J_n(t) = \int \frac{dt}{(1 + t^2)^n}$ bằng phương pháp truy toán.

Trước hết $J_1(t) = \int \frac{dt}{1 + t^2} = arctgt + C$

Tích phân từng phần sẽ có

$$J_n(t) = \frac{t}{(1 + t^2)^n} + 2n \int \frac{t^2 dt}{(1 + t^2)^{n+1}}$$

$$J_n = \frac{t}{(1 + t^2)^n} + 2n(J_n - J_{n+1})$$

$$2nJ_{n+1} = (2n - 1)J_n + \frac{t}{(1 + t^2)^n}$$

Nếu $\lambda \neq 0$.

$$I = \frac{\lambda}{2a} \int \frac{2ax + \frac{2a\mu}{\lambda}}{(ax^2 + bx + c)^n} dx$$

$$= \frac{\lambda}{2a} \int \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^n} dx + \frac{\lambda}{2a}\left(\frac{2a\mu}{\lambda} - b\right) \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

Tích phân thứ nhất tính được nhờ phép đổi biến $u = ax^2 + bx + c$

$$\int \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = \int \frac{du}{u^n} = \frac{1}{1 - n} \frac{1}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + C$$

Tích phân thứ hai tính theo J_n đã trình bày ở trên.

d. Tính nguyên hàm các phân thức hữu tỉ đối với một số hàm thông dụng

✓ Hàm hữu tỉ đối với sin và côsin

1. Trường hợp tổng quát.

Xét $\int R(\sin x, \cos x)dx$ trong đó R là ‘’phân thức hữu tỉ hai biến’’

Thực hiện phép đổi biến: $t = tg\dfrac{x}{2}$. Khi đó

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad , \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad , \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Khi đó đưa về dạng $\int \dfrac{P(t)}{Q(t)}dt$

Tuy nhiên bậc của $P(t)$ và $Q(t)$ thường là cao, làm cho quá trình tính toán rất nặng nhọc. Sau đây ta xét một số trường hợp đặc biệt, với cách đổi biến thích hợp sẽ tính toán dễ dàng hơn.

2. Trường hợp đặc biệt thứ nhất.

- Nếu $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$ thì đổi biến $t = tgx$ hoặc $t = \cot gx$
- Nếu $R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, -\cos x)$ thì đổi biến $t = \sin x$
- Nếu $R(\sin x, \cos x) = -R(-\sin x, \cos x)$ thì đổi biến $t = \cos x$

3. Trường hợp đặc biệt thứ hai.

Khi $R(\sin x, \cos x) = \sin^m x.\cos^n x$, $m, n \in Z$

- Nếu m lẻ thì đổi biến $t = \cos x$
- Nếu n lẻ thì đổi biến $t = \sin x$
- Nếu m, n chẵn và không cùng dương thì đổi biến $t = tgx$
- Nếu m, n chẵn và cùng dương thì tuyến tính hoá sau đó tính nguyên hàm.

✓ Hàm hữu tỉ đối với shx và chx

Vì đạo hàm của các hàm shx và chx tương tự như các hàm $\sin x$ và $\cos x$, mà $\int R(\sin x, \cos x)dx$ có phép đổi biến tương ứng là

$t = tg\dfrac{x}{2}$, $t = \cos x$, $t = \sin x$, $t = tgx$, cho nên $\int R(shx, chx)dx$ có phép đổi biến tương ứng là $t = th\dfrac{x}{2}$, $t = chx$, $t = shx$, $t = thx$

✓ **Hàm hữu tỉ đối với $e^{\alpha x}$, $\alpha \in R$**

Xét $I = \int f(e^{\alpha x})dx$, trong đó $f(x)$ là hàm hữu tỉ. Thực hiện phép đổi biến $t = e^{\alpha x}$, $dt = \alpha e^{\alpha x}dx$, Khi đó

$$I = \frac{1}{\alpha}\int \frac{f(t)}{t}dt$$

✓ **Hàm hữu tỉ đối với x và $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$**

Xét $I = \int R\left(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ trong đó $R(x,y)$ là hàm hữu tỉ của hai biến x, y

Với $y = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ thoả mãn điều kiện $ad \neq bc$

Thực hiện phép đổi sang biến y thì

$$R(x,y)dx = R\left(\frac{y^n d - b}{a - cy^n}, y\right)\frac{ny^{n-1}(ad-bc)}{(a-cy^n)^2}dy$$

$$= f(y)dy$$

Trong đó $f(y)$ là hàm hữu tỉ của y.

4.2.4 Một số ứng dụng của tích phân xác định

a. Tính diện tích hình phẳng

✓ **Miền phẳng giới hạn bởi các đường cong trong toạ độ Đềcác(Descartes)**

Giả sử miền phẳng D giới hạn bởi các đường:

$x = a$, $x = b$, $(a < b)$, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ trong đó f_1, f_2 liên tục từng khúc trên [a,b]. Gọi diện tích của miền phẳng D là S. Theo ý nghĩa hình học của tích phân xác định, nhận được công thức tính S như sau:

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx$$

Tương tự, nếu D giới hạn bởi các đường:

$y = c$, $y = d$, $(c < d)$, $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$ trong đó g_1, g_2 liên tục từng khúc trên [c,d] thì

$$S = \int_c^d |g_1(y) - g_2(y)| dy$$

✓ **Giả sử miền phẳng D giới hạn bởi đường cong cho dưới dạng tham số:**

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad t_0 \le t \le t_1$$

Khi đó $$S = \int_\alpha^\beta |y(t).x'(t)| dt$$

✓ **Nếu miền phẳng D giới hạn bởi đường cong có phương trình cho dưới dạng toạ độ cực.**

$$r = r(\varphi) \quad , \quad \alpha \le \varphi \le \beta$$

Liên hệ giữa toạ độ Descartes và toạ độ cực là:

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$

Khi đó $$S = \frac{1}{2}\int r^2(\varphi) d\varphi$$

b. Tính độ dài đường cong phẳng

✓ **Phương trình cho trong hệ toạ độ Descartes vuông góc**

Giả sử đường cong $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình

$$y = f(x) \quad , \quad A(a, f(a)) \quad , \quad B(b, f(b))$$

Trong đó $f \in C^1$ trên $[a,b]$, $(a < b)$

Nếu gọi l là độ dài cung $\overset{\frown}{AB}$ thì l được tính theo công thức

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

✓ **Phương trình cho trong dạng tham số**

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad , \quad t_0 \le t \le t_1$$

$\varphi, \psi \in C^1$ trên $[t_0, t_1]$

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt$$

✓ **Phương trình cho trong dạng toạ độ cực**

$r = r(\varphi) \quad , \quad \alpha \le \varphi \le \beta$

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi$$

c. Tính thể tích vật thể

✓ **Công thức tổng quát**

Giả sử vật thể (V) nằm giữa hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox, các mặt phẳng này có phương trình là $x = a$ và $x = b$, $a < b$. Các thiết diện của vật thể (V) vuông góc với trục Ox nằm trên mặt phẳng có phương trình $x = x_0$, $x_0 \in [a, b]$ có diện tích tương ứng $S(x_0)$. Khi đó thể tích của vật thể (V), kí hiệu là V, tính theo công thức $$V = \int_a^b S(x)dx$$

✓ **Công thức tính cho vật thể tròn xoay**

Vật thể (V) tròn xoay là vật thể được tạo thành do một hình thang cong giới hạn bởi các đường: $x = a$, $x = b$, $(a < b)$, $y = 0$ và $y = f(x) \ge 0$, $x \in [a, b]$ quay xung quanh trục Ox (xem hình 4.8). Cụ thể hơn, phần không gian bị chiếm chỗ do hình thang cong quay xung quanh trục Ox gọi là vật thể tròn xoay.

Như vậy các thiết diện vuông góc với trục Ox là các hình tròn. Diện tích của thiết diện nằm trên mặt phẳng $x = x_0$ sẽ là $\pi . f^2(x_0)$. Từ đó nhận được công thức tính: $$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

d. Tính diện tích mặt tròn xoay

Mặt tròn xoay là một mặt cong được tạo thành do một cung cong $\overset{\frown}{AB}$ quay xung quanh trục Ox tạo ra. Cụ thể hơn: Phần không gian bị chiếm chỗ do cung $\overset{\frown}{AB}$ quay xung quanh trục Ox gọi là mặt tròn xoay. Gọi S là diện tích của mặt tròn xoay, dưới đây chúng ta sẽ đưa ra các công thức tính.

Cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình $y = f(x) \ge 0$, $a \le x \le b$

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

Cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình tham số

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \geq 0 \end{cases} , \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

$$S = 2\pi\int_{t_0}^{t_1} y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$$

Cung $\overset{\frown}{AB}$ cho bởi phương trình trong hệ toạ độ cực

$$r = r(\varphi) \quad , \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta$$

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi$$

4.2.5 Tích phân suy rộng

a. Tích phân suy rộng với cận vô hạn

✓ **Định nghĩa**

1. Cho $f:[a,+\infty)\to R$, $a\in R$, khả tích trên $[a,A]$, $\forall A > a$.

Tích phân suy rộng của f với cận $+\infty$ được kí hiệu là: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

Nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ về số $I\in R$ nếu

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx = I \text{ kí hiệu } \int_a^{+\infty} f(x)dx = I$$

Nếu I không tồn tại hoặc $I=\infty$, thì nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

2. Cho $f:(-\infty,a]\to R$, $a\in R$, khả tích trên $[B,a]$, $\forall B < a$

Tích phân suy rộng của f với cận $-\infty$, kí hiệu là $\int_{-\infty}^a f(x)dx$.

Nói rằng tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ hội tụ về số $J\in R$ nếu

$$\lim_{B\to-\infty}\int_B^a f(x)dx = J = \int_{-\infty}^a f(x)dx$$

Nếu J không tồn tại hoặc $J=\infty$, thì nói rằng tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ phân kỳ.

3. Cho $f:R\to R$ khả tích trên $[A,B]$, $\forall A,B\in R$. Tích phân suy rộng của f với các cận vô hạn, kí hiệu là: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Nói rằng tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi các tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ và $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ, $\forall a\in R$. Trong trường hợp này kí hiệu $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$, $\forall a\in R$

Rõ ràng nếu f liên tục trên tập xác định của nó, và có nguyên hàm $F(x)$ thì có thể dùng kí hiệu Newton-Leibnitz như sau:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} F(A) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}$$

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = F(a) - \lim_{B\to-\infty} F(B) = F(x)\Big|_{-\infty}^a$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} F(A) - \lim_{B\to-\infty} F(B) = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

✓ **Điều kiện hội tụ của tích phân suy rộng**

Sau đây ta xét trường hợp tích phân suy rộng $\int_a^{\infty} f(x)dx$ với $f(x)\ge 0$.

Các trường hợp tích phân suy rộng khác với $f(x)$ giữ nguyên dấu, chúng ta có thể suy diễn tương tự để nhận được các kết quả tương ứng.

Đặt $\phi(A) = \int_a^A f(x)dx$

Vì $f(x)\ge 0$ trên $[a,+\infty)$, chứng tỏ $\phi(A)$ đơn điệu tăng trên $[a,+\infty)$. Từ định lí về giới hạn của hàm đơn điệu suy ra:

Định lí 1: Cho hàm số $f(x) \geq 0$ và khả tích trên $[a, A]$, $\forall A > a$ để tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, điều kiện cần và đủ là tồn tại $L \in R$ sao cho $\phi(A) \leq L$, $\forall A$

Định lí 2: Cho các hàm số $f(x), g(x)$ khả tích trên $[a, A]$, $\forall A > a$ và $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \geq b > a$ khi đó

Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ

Định lí 3: Cho các hàm số $f(x), g(x)$ không âm và khả tích trên $[a, A]$, $\forall A > a$. Khi đó:

1. Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$, $l \in R_+^*$ thì các tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

2. Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ

3. Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ

Hệ quả 1: Giả sử với x đủ lớn hàm số $f(x)$ có dạng:

$$f(x) = \frac{h(x)}{x^k}, \quad k > 0, \quad h(x) \geq 0.$$ Khi đó

Nếu $k > 1$ và $0 \leq h \leq c < +\infty$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Nếu $k \leq 1$ và $h(x) \geq c > 0$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ

Trong đó c là hằng số.

Hệ quả 2: Nếu $f(x) \geq 0$ và là VCB cấp k so với VCB $\frac{1}{x}$ tại $+\infty$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi $k > 1$ và phân kỳ khi $k \leq 1$

Hệ quả 1 được suy ra trực tiếp từ định lí 2 và ví dụ 1d.

Hệ quả 2 được suy ra trực tiếp từ định lí 3 và ví dụ 1d.

Định lí 4: Để tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ, điều kiện cần và đủ là:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists A_0 > a \ , \ \forall A > A_0 \ , \ \forall A' > A_0 \Rightarrow |\phi(A') - \phi(A)| < \varepsilon$$

Hay $\left| \int_A^{A'} f(x)dx \right| < \varepsilon$

Dựa vào tính chất của tích phân xác định

$$\left| \int_A^{A'} f(x)dx \right| \leq \int_A^{A'} |f(x)|dx$$

Ta nhận được hệ quả sau đây

Hệ quả 3: Nếu $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

✓ **Sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của tích phân suy rộng**

1. Nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối nếu tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ.

2. Nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ bán hội tụ nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kỳ.

Định lí 5: Nếu tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối và hàm số $g(x)$ bị chặn trên $[a,+\infty)$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ hội tụ tuyệt đối

b. Tích phân suy rộng với hàm dưới dấu tích phân có cực điểm

✓ **Định nghĩa**

1. Cho $f:(a,b)\setminus\{x_0\}\to R$. Nói rằng $x_0\in(a,b)$ là cực điểm của f nếu $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$. Hàm số có cực điểm tại a hoặc b nếu $f(a^+)=\infty$ hoặc $f(b^-)=\infty$

2. Cho $f:[a,b)\to R$, $f(b^-)=\infty$, khả tích trên $[a,b-\varepsilon]$, $\forall\varepsilon>0$ đủ bé. ích phân suy rộng của f trên $[a,b]$, kí hiệu $\int_a^b f(x)dx$. Nói rằng tích phân suy rộng hội tụ về $I\in R$ nếu $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx=I$, kí hiệu $I=\int_a^b f(x)dx$

Nếu không tồn tại giới hạn hữu hạn (không có I hoặc $I=\infty$) thì nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

3. Cho $f:(a,b]\to R$, $f(a^+)=\infty$ khả tích trên $[a+\varepsilon,b]$

Nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ về J nếu

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx=J \quad \text{(hữu hạn).}$$

Nếu không tồn tại J nói rằng tích phân suy rộng phân kỳ.

4. Cho $f:[a,b]\setminus\{x_0\}\to \mathrm{R}$, $x_o\in(a,b)$ là cực điểm của f

Nói rằng tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi các tích phân suy rộng $\int_a^{x_0} f(x)dx$ và $\int_{x_0}^{b} f(x)dx$ cùng hội tụ, Khi đó kí hiệu:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_0} f(x)dx+\int_{x_0}^{b} f(x)dx$$

✓ **Điều kiện hội tụ của tích phân suy rộng**

Chúng ta giới hạn trường hợp $f(x)$ giữ nguyên dấu trên (a,b). Giả sử $f(x)\ge 0$ trên $[a,b)$ và $f(b^-)=\infty$

Đặt $\phi(\varepsilon)=\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$

Rõ ràng $\phi(\varepsilon)$ là hàm số giảm ở lân cận bên phải của điểm 0. Từ định lí về giới hạn của hàm đơn điệu, chúng ta nhận được định lí sau đây:

Định lí: Để tich phân suy rộng $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, điều kiện cần và đủ là $\phi(\varepsilon)$ bị chặn ở lân cận bên phải điểm $\varepsilon = 0$, tức là $\phi(\varepsilon) \le L$, $\forall \varepsilon > 0$

4.3 CÂU HỎI ÔN TẬP

Câu 1. Nêu định nghĩa tích phân xác định và ý nghĩa hình học của nó.

Câu 2. Điều kiện cần của hàm khả tích là gì?

Câu 3. Trình bày lớp các hàm khả tích.

Câu 4. Nêu các tính chất của tích phân xác định.

Câu 5. Phát biểu định lí tổng quát về giá trị trung bình của tích phân xác định.

Câu 6. Tích phân theo cận trên là gì và tính chất của nó

Câu 7. Thế nào là nguyên hàm của hàm số? Nêu tính chất của nguyên hàm.

Câu 8. Thế nào là tích phân bất định của hàm số? Nêu tính chất của nó.

Câu 9. Nêu công thức Newton-Leibnitz. Ý nghĩa của nó.

Câu 10. Trình bày hai phương pháp cơ bản tính tích phân xác định.

Câu 11. Trình bày hai phương pháp cơ bản tính tích phân bất định.

Câu 12. Viết công thức tính diện tích hình phẳng nhờ vào tích phân xác định.

Câu 13. Viết công thức tính độ dài cung nhờ vào tích phân xác định.

Câu 14. Viết công thức tính thể tích vật thể, giải thích công thức đó.

Câu 15. Viết công thức tính diện tích mặt tròn xoay.

Câu 16. Tích phân suy rộng với cận vô hạn là gì? Thế nào là sự hội tụ của nó?

Câu 17. Tích phân suy rộng với hàm dưới dấu tích phân có cực điểm là gì? Khi nào tích phân đó hội tụ?

Câu 18. Phát biểu các tiêu chuẩn hội tụ trong trường hợp hàm dưới dấu tích phân giữ nguyên dấu.

Câu 19. Thế nào là sự hội tụ tuyệt đối, sự bán hội tụ của tích phân suy rộng?

4.4 BÀI TẬP CHƯƠNG IV

Câu 1. Biến đổi về các tích phân đơn giản để tính các tích phân sau:

a. $\int a^x\left(1+\frac{a^{-x}}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$ b. $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx$

c. $\int a^{\alpha x}.b^{\beta x}dx$ d. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}$

e. $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{x^{10}-1}}$ f. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$

g. $\int \frac{3x^2+2}{\sqrt{x^3+2x-1}}dx$ h. $\int \frac{dx}{x\cos^2(1+\ln x)}$

i. $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ j. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

k. $\int \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2-1})^2}$ l. $\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx$

m. $\int \frac{dx}{4x^2-9}$ n. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$

o. $\int \sqrt{3+2x-x^2}dx$ p. $\int \sqrt{3x^2-3x+1}dx$

q. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$ r. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$

Câu 2. Dùng phương pháp đổi biến để tính các tích phân sau:

a. $\int x\sqrt{2-5x}dx$ b. $\int x^5(1+2x^2)^{10}dx$

c. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ d. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

e. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ f. $\int \frac{dx}{x\ln x.\ln(\ln x)}$

g. $\int \frac{xdx}{(x^2+2)\sqrt{3x^2+5}}$ h. $\int \frac{6^x}{9^x-4^x}dx$

Câu 3. Dùng phương pháp tích phân từng phần:

a. $\int arctg\sqrt{x}dx$ b. $\int (\arcsin x)^2dx$ c. $\int xshxdx$

d. $\int (\ln x)^2dx$ e. $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx$ f. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$

g. $\int \cos(\ln x)dx$ h. $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$ i. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$

j. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$ k. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$ l. $\int arctg\sqrt{2x-1}dx$

m. $\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx}{\sqrt{1+x^2}}$ n. $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$ o. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$

p. $\int \frac{xe^{arctgx}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$ q. $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx$ r. $\int \frac{\arcsin\frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}}dx$

Câu 4. Tính tích phân các phân thức hữu tỉ:

a. $\int \frac{x^4}{x^2+a^2}dx$ b. $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$

c. $\int \frac{xdx}{(x^2+2x+2)^2}$ d. $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$

e. $\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2}dx$ f. $\int \frac{dx}{x^4+1}dx$

g. $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)^2}$ h. $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$

Câu 5. Tích phân các hàm vô tỉ:

a. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ b. $\int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$, $a>0$

c. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$ d. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$

e. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx$ f. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx$

Câu 6. Tích phân các hàm lượng giác:

a. $\int \frac{dx}{\cos x.\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ b. $\int \frac{\sqrt{tgx}}{\sin 2x}dx$

c. $\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}\sqrt{\cos^3\frac{x}{2}}}$ d. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{tgx}}$

e. $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x} dx$ f. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$

g. $\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}$ h. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$

i. $\int \frac{dx}{\sin x - \sin a}$ j. $\int \frac{\sin x \cos sx}{\sin x + \cos x} dx$

k. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2+\sin 2x}}$

Câu 7. Tích phân các hàm Hyperbolic:

a. $\int \coth^2 x dx$ b. $\int shx.sh2x.sh3x dx$

c. $\int \sqrt{chx+1} dx$ d. $\int \frac{1+2shx}{ch^2 x} dx$

Câu 8. Tính các tích phân sau:

a. $\int x|x| dx$ b. $\int f(x) dx$ biết $f(x) = \begin{cases} 1+x^3 & , |x| > 1 \\ |x|-1 & , |x| \le 1 \end{cases}$

c. $\int \max(1,|x|) dx$ d. $\int \{|1+x| - |1-x|\} dx$

e. $\int shax.\cos bx dx$

Câu 9. Tìm công thức truy toán các tích phân sau:

a. $\int \ln^n x dx = I_n$ tính I_2 b. $\int \sin^n x dx = J_n$ tính J_5

c. $\int \cos^n x dx = K_n$ tính K_7 d $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n} = L_n$

Câu 10. Tìm hàm $f(x)$ nếu biết:

a. $f'(x^3+1) = \frac{1}{x^2}$ b. $f'(\ln x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } 0 < x \le 1 \\ x & \text{khi } 1 < x < +\infty \end{cases}$

c. $f'(\sin^2 x) = \cos^4 x$ và $f(0) = 0$

Câu 11. Tính các tích phân sau bằng định nghĩa:

a. $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$, $(0 < a < b)$ b. $\int_a^b x^m dx$, $(0 < a < b, m \ne -1)$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ d. $\int_0^1 a^x dx$, $(a > 0)$

e. $\int_a^b \frac{\ln x}{x}$, $(0 < a < b)$

Câu 12. Sử dụng công thức Newton-Leibniz tính các tích phân sau:

a. $\int_{-3}^{2} \left|\frac{x}{x+4}\right| dx$ b. $\int_0^2 |1-x| dx$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ $(a, b \neq 0)$ d. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x\cos x + 1}$, $(0 < \alpha < \pi)$

e. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ f. $\int_0^{\sqrt[n]{\frac{a}{2}}} \frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{a^2 - x^{2n}}}$, $(a > 0, n \in N)$

Câu 13. Tính các tích phân sau bằng phép đổi biến:

a. $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x dx}{1 + 2\cos^2 x}$ b. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ c. $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$

d. $\int_0^3 \frac{dx}{(3+x^2)^{\frac{5}{2}}}$ e. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$ f. $\int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}}$

g. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}$ h. $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}} dx$ i. $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$

j. $\int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx$ k. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + tg^2 x}{(1 + tgx)^2} dx$

Câu 14. Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$, $(x > 0)$ b. $\int_{\frac{1}{e}}^{tgx} \frac{tdt}{1+t^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot gx} \frac{dt}{t(1+t^2)} = 1$

c. $\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t} dt = \frac{\pi}{4}$

Câu 15. Tính các tích phân sau bằng phương pháp tích phân từng phần:

a. $\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos(\ln x)dx$ b. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$ d. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$

Câu 16. Tính các tích phân sau:

a. $A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin nx dx \quad (n > 1)$ b. $B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx dx \quad (n > 1)$

c. $C_n = \int_1^{e} \ln^n x dx \quad (n > 1)$ d. $D_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}dx$

e. $E_n = \int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos(n+1)x dx$ f. $I_{m,n} = \int_0^{\pi} \sin^m x \cos^n x dx$

g. $J_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$

Câu 17. Chứng minh rằng:

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos(n+2)x dx = 0 \quad , \quad n \in N^*$ b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \sin(n+2)x dx = \frac{1}{n+1} \quad , \quad n \in N^*$

Câu 18. Tính các tích phân sau bằng cách sử dụng hỗn hợp các phương pháp:

a. $\int_0^{\sqrt[5]{2}} \frac{x^9 dx}{(1+x^5)^3}$ b. $\int_0^{\sqrt[4]{2}} \frac{x^{15}dx}{(1+x^8)^{\frac{2}{5}}}$ c. $\int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}dx$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$ e. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x + 3}$ f. $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3}dx$

g. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}$ h. $\int_1^{16} arctg\sqrt{\sqrt{x} - 1}dx$

i. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ j. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

Câu 19. So sánh các tích phân sau:

a. $I_1 = \int_0^1 e^{-x^2}dx$ và $I_2 = \int_0^1 e^{-x}dx$

b. $J_1 = \int_0^{\pi} e^{-x^2}\cos^2 xdx$ và $J_2 = \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 xdx$

c. $K_1 = \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ và $K_2 = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Câu 20. Chứng minh các bất đẳng thức:

a. $\frac{1}{2} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \frac{\pi}{6} \quad (n \in N\ ,\ n \geq 1)$

b. $0{,}78 < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} < 0{,}93$

c. $\frac{1}{2(n+1)} < \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^n xdx < \frac{1}{2(n-1)} \quad (n \in N\ ,\ n > 1)$

d. $\frac{\sqrt{3}}{4} < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}dx < \frac{1}{2}$

Câu 21. Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}\right)$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

c. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$

d. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left[1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+...+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right]$

e. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}\left(1+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}\right)$

f. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$

Câu 22. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong trong hệ toạ độ Descartes vuông góc.

a. $y = 2x - x^2$ và $x + y = 0$

b. $y = 2^x$, $y = 2$ và $x = 0$

c. $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$, $a > 0$

d. $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ và $x = 2a$, $a > 0$

e. $y = e^{-x}|\sin x|$ và $y = 0$, $x \geq 0$

f. $x = 0$ và $x = y^2(y-1)$

g. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ và $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

Câu 23. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cho bởi phương trình tham số.

a. $x = 3t^2 \quad , \quad y = 3t - t^3$

b. $x = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t \quad , \quad y = \dfrac{c^2}{b}\sin^3 t \quad , \quad c^2 = a^2 - b^2$

c. $x = a(2\cos t - \cos 2t) \quad , \quad y = a(2\sin t - \sin 2t)$

Câu 24. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cho trong toạ độ cực.

a. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ b. $r^2 + \varphi^2 = 1$

c. $r = a\cos 5\varphi$ d. $r = \dfrac{p}{1 - \cos\varphi} \quad , \quad \varphi = \dfrac{\pi}{4} \quad , \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

Câu 25. Tính độ dài đường cong cho bởi phương trình.

a. $y = \ln\cos x \quad , \quad 0 \le x \le a < \dfrac{\pi}{2}$ b. $\begin{cases} x = \dfrac{c^2}{a}\cos^3 t \\ y = \dfrac{c^2}{b}\sin^3 t \end{cases} \quad , \quad c^2 = a^2 - b^2$

c. $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases} \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$ d. $\varphi = \sqrt{r} \quad , \quad 0 \le r \le 5$

e. $r = \dfrac{p}{1 + \cos\varphi} \quad , \quad |\varphi| < \dfrac{\pi}{2}$

Câu 26. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt cong.

a. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad z = \dfrac{c}{a}x \quad , \quad z = 0 \quad , \quad \text{a,,b,c} > 0$

b. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad , \quad x^2 + y^2 = a^2 \quad , \quad a > 0$

c. $z^2 = b(a - x) \quad , \quad x^2 + y^2 = ax \quad , \quad a, b > 0$

Câu 27. Tính thể tích của vật thể tròn xoay tạo ra khi quay các miền phẳng giới hạn bởi các đường sau đây xung quanh trục tương ứng.

a. $y = b\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} \quad , \quad 0 \le x \le a$ quanh trục Ox

b. $y = \sin x \quad , \quad y = 0 \quad , \quad 0 \le x \le \pi$ quanh trục Oy

c. $x^2 + (y - b)^2 = a^2 \quad , \quad 0 < a \le b$ quanh trục Ox

d. $y = x^2$, $y = 4$ quanh đường $x = 2$

Câu 28. Tính diện tích mặt tròn xoay khi quay cung đường cong quanh trục tương ứng.

a. $3y - x^3 = 0$, $0 \le x \le a$ quanh trục Ox

b. $y = tgx$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ quanh trục Ox

c. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$ quanh trục Oy

Câu 29. Tính các tích phân suy rộng sau

a. $\int\limits_{a^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ b. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{arctgx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ c. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$

d. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ e. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ f. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$

g. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ h. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$ i. $\int\limits_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$

j. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx$

Câu 30. Biết $\int\limits_{02}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ và $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

Xét sự hội tụ hay phân kì của các tích phân

a. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx$ $(n \ge 0, m, n \in N)$. b. $\int\limits_{a}^{+\infty} x^{\lambda} e^{-\beta x} dx$ $(a, \lambda, \beta > 0)$

c. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$ d. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ e. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1-4\sin 2x}{x^3 + \sqrt[3]{x}} dx$

Câu 31. Tính các tích phân suy rộng

a. $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}$ b. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$ c. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin x}{x} dx$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot gx dx$ e. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ f. $\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}}dx$

g. $\int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}dx$ h. $\int_{-1}^1 \frac{\ln(2-\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}dx$

Câu 32. Xét sự hội tụ hay phân kì của các tích phân sau

a. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$ b. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$ c. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^k x}$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ e. $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x}dx$ f. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}dx$

4.5 HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ BÀI TẬP CHƯƠNG IV

Câu 1. a. $\frac{a^x}{\ln a}-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$ b. $\frac{1}{3}x^3-x+arctgx+C$

c. $\frac{a^{\alpha x}b^{\beta x}}{\alpha\ln a+\beta\ln b}+C$ d. $\frac{1}{3(b-a)}\left\{\sqrt{(x-a)^3}-\sqrt{(x-b)^3}\right\}+C$

e. $\frac{1}{5}\ln\left|x^5+\sqrt{x^{10}-1}\right|+C$ f. $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C$

g. $2\sqrt{x^3+2x-1}+C$ h. $tg(1+\ln x)+C$

i. $-2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}+C$ j. $\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+C$

k. $\frac{2}{3}\left[x^3-\sqrt{(x^2-1)^3}\right]-x+C$ (Nhân cả tử và mẫu với $(x-\sqrt{x^2-1})^2$)

l. $-\frac{1}{9}\left\{\sqrt{1-9x^2}+(\arccos 3x)^3\right\}+C$ (Tương tự bài i)

m. $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right|+C$

n. $\frac{1}{4}arctg\frac{2x+1}{2}+C$

o. $2\arcsin\frac{x-1}{2}-\frac{(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}}{2}+C$

p. $\frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{3x^2-3x+1}+\frac{1}{8\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3x^2-3x+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-1)\right|+C$

q. $\frac{1}{2}\ln(2x+1+\sqrt{4x^2-4x-3})+C$

r. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-1}{3}+C$

Câu 2. a. $-\frac{8+30x}{375}\sqrt{(2-5x)^2}+C$ (Đặt $\sqrt{2-5x}=t$

b. $\frac{1}{16}\left\{\frac{1}{13}(1+2x^2)^{20}-\frac{1}{6}(1+2x^2)^{10}+\frac{1}{11}\right\}(1+2x^2)^{110}+C$ (Đặt $t=(1+2x^2)^{10}$)

c. $-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right|+C$ (Biến đổi $\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}=\frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{|x|^2}}}$)

d. $-\arcsin\frac{1}{|x|}+C$

e. $2\arcsin\sqrt{x}+C$

f. $\ln|\ln(\ln x)|+C$ (Đặt $\ln(\ln x)=t$)

g. $arctg\sqrt{3x^2+5}+C$ (Đặt $t=\sqrt{3x^2+5}$)

h. $\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|+C$

Câu 3. a. $-\sqrt{x}+(1+x)arctg\sqrt{x}+C$

b. $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$

c. $xchx-shx+C$

d. $x\{(\ln|x|-1)^2+1\}+C$

e. $-x\cot gx+\ln|\sin x|+C$

f. $2\sqrt{1+x}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C$

g. $\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C$

h. $-\frac{\ln|x|+1}{x}+C$

i. $-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x}+\cot gx\right)+C$

j. $-\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)+C$

k. $x-\frac{1-x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C$

l. $xarctg\sqrt{2x-1}-\frac{\sqrt{2x-1}}{2}+C$

m. $\sqrt{1+x^2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x+C$

n. $-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}arctgx+C$

o. $\frac{x}{2a^2(a^2+x^2)}+\frac{1}{2a^3}arctg\frac{x}{a}+C,(a\neq 0)$

p. $\frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{arctgx}+C$

q. $-\{x+\cot gx\ln(e\sin x)\}+C$

r. $4\sqrt{2+x}-2\sqrt{2-x}\arcsin\frac{x}{2}+C$

Câu 4. a. $\frac{x^3}{3}-a^2x+a^2arctg\frac{x}{a}+C$

b. $\ln\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x+1|}+arctgx-\frac{1}{x+1}+C$

c. $-\frac{1}{2}\left\{\frac{x+2}{x^2+2x+2}+arctg(x+1)\right\}+C$ (Phân tích $x^2+2x+1=(x+1)^2+1$)

d. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+C$ (Biến đổi $\frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\frac{d\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$)

e. $\frac{x^3+2x}{6(x^4+x^2+1)}+C$

Phân tích $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

f. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}x+1)+arctg(\sqrt{2}x-1)+C$

Phân tích $\frac{1}{x^4+1}=\frac{x+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(x^2+\sqrt{2}x+1)}-\frac{x-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}(x^2-\sqrt{2}x+1)}$

g. $\frac{1}{10}\left(\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+1}+\frac{1}{x^{10}+1}\right)+C$

Phân tích $\frac{1}{x(x^{10}+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x^9}{x^{10}+1}-\frac{x^9}{(x^{10}+1)^2}$

h. $arctgx+\frac{1}{3}arctgx^3+C$

Phân tích $\dfrac{x^4+1}{x^6+1}=\dfrac{(x^4-x^2+1)+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}=\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{x^2}{x^6+1}$

Câu 5. a. $-\ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{|x|}+C$ Đặt $x=tgt$

b. $-\dfrac{at}{1+t^4}+\dfrac{a}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}+\dfrac{a}{2\sqrt{2}}arctg\dfrac{t^2-1}{t\sqrt{2}}+C$

Với $t=\sqrt[4]{\dfrac{x}{a-x}}$ và xem kết quả bài 4.f.

c. $\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+x}+C$ Đặt $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=t$

d. $-\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}+C$ Đặt $\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}=t$

e. $\sqrt{x^2+2x+2}+\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})-\sqrt{2}\ln\left|\dfrac{x+2+\sqrt{2(x^2+2x+2)}}{x}\right|+C$

Biến đổi $\dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\dfrac{2}{x\sqrt{x^2+2x+2}}$

Tính $\displaystyle\int\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+2}}=\sqrt{2}\ln\left|\dfrac{x+2+\sqrt{2(x^2+2x+2)}}{x}\right|+C$

bằng cách đặt $x=\dfrac{1}{t}$

f. $(\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x}-\arcsin\sqrt{x}+C$

Hai bước đổi biến : $u=\sqrt{x}$, $t=\sqrt{\dfrac{1-u}{1+u}}$

Câu 6. a. $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{(1+t)^2(t^2+t-1)}{(1-t)^2(t^2-t+1)}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}arctg\dfrac{\sqrt{3}t}{1-t^2}+C$ Với $t=\sqrt[3]{\sin x}$

b. $\sqrt{tgx}+C$ Đặt $t=tgx$

c. $\dfrac{4}{\sqrt{\cos\dfrac{x}{2}}}+2arctg\sqrt{\cos\dfrac{x}{2}}-\ln\dfrac{1+\sqrt{\cos\dfrac{x}{2}}}{1-\sqrt{\cos\dfrac{x}{2}}}+C$ Đặt $t^2=\cos\dfrac{x}{2}$

d. $\frac{1}{4}\ln\frac{(1+t^2)^2}{t^4-t^2+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}arctg\frac{2t^2-1}{\sqrt{3}}+C$ Đặt $t=\sqrt[3]{tgx}$

e. $-\frac{1}{5}(2\sin x+\cos x)+\frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{arctg2}{2}\right)\right|+C$ Đặt $tg\frac{x}{2}=t$

f. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}+C$ Đặt $tgx=t$

g. $-\frac{t}{4(t^2+2)}+\frac{3}{4\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}+C$ với $t=tgx$

h. $\frac{1}{\sin(b-a)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right|+C$ Biểu diễn $\sin(a-b)=\sin\{(x+a)-(x+b)\}$

i. $\frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right|+C$ Biểu diễn $\cos a=\cos\left\{\frac{x-a}{2}-\frac{x+a}{2}\right\}$

j. $\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right|+C$

Biểu diễn $\sin x\cos x=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)^2-\frac{1}{2}$

k. $-\frac{1}{2}\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})+\frac{1}{3}\arcsin\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{3}}+C$

Biểu diễn $\sin x=\frac{1}{2}\{(\sin x+\cos x)+(\sin x-\cos x)\}$

$$2+\sin 2x=1+(\sin x+\cos x)^2=3-(\sin x-\cos x)^2$$

Câu 7. a. $x-\coth x+C$ Sử dụng $\coth^2 x=1+\frac{1}{sh^2x}$

b. $\frac{1}{24}ch6x-\frac{1}{16}ch4x-\frac{1}{8}ch2x+C$

c. $2\sqrt{chx-1}+C$ Biểu diễn $\sqrt{chx+1}=\frac{\sqrt{ch^2x-1}}{\sqrt{chx-1}}$

d. $\frac{shx-2}{chx}+C$

Câu 8. 8. a. $\frac{x^2|x|}{3}+C$

b. $\begin{cases} x+\dfrac{1}{4}x^3+1+C & , \ |x|>1 \\ \dfrac{1}{2}x|x|-x+C & , \ |x|\le 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}+C \\ -\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}+C \end{cases}$ $\quad Max(1,|x|)=\begin{cases} 1 & , \ |x|\le 1 \\ |x| & , \ |x|>1 \end{cases}$

d. $\dfrac{1}{2}(x+1)|x+1|+\dfrac{1}{2}(1-x)|1-x|+C$

e. $\dfrac{achax\cos sbx+bshax\sin bx}{a^2+b^2}+C$

Câu 9. a. $I_n = x\ln^n x - n\left[x\ln^{n-1}x-(n-1)I_{n-2}\right]$

$= x\left[\ln^n x - n\ln^{n-1}x + n(n-1)\ln^{n-2}x + ... + (-1)^{n-1}n(n-1)...2\ln x + (-1)^n n\right]+C$

$I_2 = x\left[(\ln|x|-1)^2+1\right]+C$

b. $J_n = \dfrac{1}{n}\left[(n-1)J_{n-2}-\cos x\sin^{n-1}x\right]+C$

$J_5 = -\cos x+\dfrac{2}{3}\cos^3 x-\dfrac{1}{6}\cos^5 x+C$

c. $K_{n+2} = \dfrac{\sin x}{(n+1)\cos^{n+1}x}+\dfrac{n}{n+1}K_n$

$K_7 = \sin x-\sin^3 x+\dfrac{3}{5}\sin^5 x-\dfrac{1}{7}\sin^7 x+C$

d. $L_n = \dfrac{1}{2(n-1)a^2(x^2-a^2)^{n-1}}-\dfrac{2n-3}{2(n-1)a^2}L_{n-1}$

Câu 10. a. $f(x)=\dfrac{3}{5}(x-1)^{\frac{5}{3}}+C$ Đặt $x^3+1=t$

b. $f(x)=\begin{cases} \ln x+1+C \\ x+C \end{cases}$ Đặt $\ln x = t$

c. $f(x)=\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{2}{3}x^3+x+C$ Đặt $\sin^2 x = t$

Câu 11. a. $\dfrac{b-a}{ab}$ Lấy $\xi_i=\sqrt{x_i x_{i+1}}$ b. $\dfrac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$

c. 1 d. $\frac{a-1}{\ln a}$ e. $\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{2}$

Câu 12. a. $5\ln 4-\ln 6-1$ b. 1

c. $\frac{\pi}{2|ab|}$ d. $\frac{\pi}{2\sin\alpha}$

e. $\frac{\pi}{3}$ f. $\frac{\pi}{6n}$

Câu 13. a. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}arctg\sqrt{2}$ b. $2-\frac{\pi}{2}$ c. $\frac{\pi^2}{4}$

d. $\frac{\sqrt{3}}{24}$ e. $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{3}{2\sqrt{2}}$ (Đặt $t=x-\frac{1}{x}$)

f. $\frac{\pi}{4}$ g. $arctg\frac{1}{2}$

h. $\ln\frac{e+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}$ i. $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$

j. $\frac{a(\pi-2)}{4}$ (Đặt $x=a\sin^2 t$) k. $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 15. a. $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$ b. $2(1-e^{-1})$

c. $2\left(\frac{2\pi}{3}-\ln tg\frac{5\pi}{12}\right)$ d. $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

Câu 16. $A_n=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k}$ $\left(2A_n=\frac{1}{n}+A_{n-1}\right)$

$B_n=\frac{\pi}{2^{n+1}}$

$C_n=e[1+n+(n-1)n+\ldots+3.4\ldots(n-1)n]-n!$

$D_n=(-1)^n\pi$

$E_n=0$

$$I_{m,n} = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{(m+n)(m+n-2)...(m+3)(m+1)} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ \dfrac{(m-1)!!}{(m+n)(m+n-2)...(n+3)(n+1)} & \text{nếu } m \text{ lẻ} \\ \dfrac{(n-1)!!(m-1)!!}{(m+n)!!}\dfrac{\pi}{2} & \text{nếu } m,n \text{ chẵn} \end{cases}$$

Công thức truy toán .

$$I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2} = \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n}$$

$$I_{m,n} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \quad \text{Đặt } x = \sin^2 t$$

Câu 18. a. $\frac{2}{45}$ b. $\frac{5}{192}(5+7\sqrt[5]{5^3})$

c. $\frac{848}{105}$ d. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

e. $\frac{2}{\sqrt{5}} arctg \frac{1}{\sqrt{5}}$ f. $4-\pi$

g. $\frac{\pi}{6}$ h. $\frac{16\pi}{3}-2\sqrt{3}$

i. $\frac{1}{a^2-b^2}\ln\left|\frac{a}{b}\right|$ j. $\frac{\pi}{8}\ln 2$

Câu 19. a. $I_1 > I_2$ b. $J_1 > J_2$

(Sử dụng định lí trung bình tổng quát)

c. $K_2 > K_1$

(Chứng minh $K_1 < 1$, $K_2 > \frac{3\pi}{8}$)

Dùng bất đẳng thức $\sin x \le x$, $\cos x \ge 1 - \frac{x^2}{2}$, $x \in (0,1)$

Câu 21. a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{1}{e}$ c. $\frac{\pi}{6}$

d. 2 e. $\frac{2}{3}$ f. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

Câu 22. a. $\frac{9}{2}$ b. $2-\frac{1}{\ln 2}$ c. $\frac{4a^3}{3}$

d. $3\pi a^2$ e. $\frac{1}{2}\coth\frac{\pi}{2}$ f. $\frac{1}{12}$

g. $4|ab|arctg\left|\frac{b}{a}\right|$

Câu 23. a. $\frac{72\sqrt{3}}{5}$ b. $\frac{3\pi}{8}\frac{c^4}{ab}$ c. $6\pi a^2$

Câu 24. a. a^2 b. $\frac{2}{3}$ c. $\frac{\pi a^2}{4}$

d. $\frac{p^2}{6}(3+4\sqrt{2})$

Câu 25. a. $\ln tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)$ b. $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$ c. $2\pi^2 a$

d. $\frac{19}{3}$ e. $p\left[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right]$

Câu 26. a. $\frac{2}{3}abc$ b. $\frac{2a^3}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$ c. $\frac{16a^2}{15}\sqrt{ab}$

Câu 27. a. $\frac{3\pi}{7}ab^2$ b. $2\pi^2$

c. $2\pi^2a^2b$ d. $\frac{128}{3}\pi$

Câu 28. a. $\frac{\pi}{9}\left[(1+a^4)^{\frac{3}{2}}-1\right]$ b. $\pi\left[\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{(1+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)}{2}\right]$

c. $16\pi^2a^2$

Câu 29. a. $\ln\frac{1+\sqrt{1+a^4}}{a^2}$ b. $\frac{\pi}{2}-1$ c. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

d. $\frac{\pi}{4}$ e. 2 f. $\frac{1}{2}$

g. $n!$ h. $\sqrt{\pi}$ i. $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$

j. $\frac{\pi}{2}$

Câu 30. a. Hội tụ khi $n-m>1$ b. Hội tụ c. Hội tụ

d. Hội tụ e. Hội tụ

Câu 31. a. π b. $-\frac{\pi}{2}\ln 2$ c. $\frac{\pi}{2}\ln 2$

d. $\frac{\pi}{2}\ln 2$ e. $-\frac{\pi}{2}\ln 2$ f. $2\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$

(Đặt $x = \sin^2 t$)

g. $-\frac{2}{e}$ h. $6-\frac{9}{2}\ln 3$

Câu 32. a. Phân kì b. Hội tụ

c. Hội tụ khi $k<1$, phân kì khi $k \ge 1$

d. Hội tụ khi $p<1, q<1$

e. Hội tụ khi $p>-1, q>-1$

f. Hội tụ.

CHƯƠNG V: LÝ THUYẾT CHUỖI

5.1 MỤC ĐÍCH

Bài toán tính giá trị gần đúng của một hàm số tại điểm x_1 gần với điểm x_0 mà giá trị $f(x_0)$ đã biết rất hay gặp trong thực tế: bài toán lập biểu đồ, bài toán nội suy,.... Việc tính toán trở nên đơn giản nhờ các phép tính cơ bản +, -, ., / và luỹ thừa khi đã khai triển hàm số thành chuỗi Taylor. Việc biểu diễn một tín hiệu phức tạp thành các tín hiệu đơn giản hoặc các sóng phức tạp thành các sóng đơn giản chính là nhờ vào việc khai triển một hàm số thành chuỗi Fourier. Để có được cơ sở giải thích cho các bài toán dạng trên cần nắm vững các nội dung của lý thuyết chuỗi.

Trong mục thứ nhất cần nắm vững các khái niệm: hội tụ, phân kì của chuỗi số. Luôn luôn ghi nhớ điều kiện cần của sự hội tụ để nhận biết về khả năng phân kì của chuỗi số. Khi xem xét các tính chất của chuỗi số hội tụ phải nghĩ ngay xem các chuỗi phân kì có tính chất đó không. Điều này hoàn toàn giống như các dãy số hội tụ, các hàm liên tục, các hàm khả vi,....Phải nhận biết số hạng tổng quát của chuỗi số để phân loại được các đặc tính của chuỗi số: chuỗi số dương, chuỗi số đan dấu hay chuỗi số có dấu bất kì để từ đó sử dụng các tiêu chuẩn thích hợp để kết luận về sự hội tụ của nó. Đối với chuỗi số dương khi dùng tiêu chuẩn so sánh phải luôn dùng đến chuỗi Riemann. Bên cạnh đó phải nắm vững các tiêu chuẩn D'Alembert, tiêu chuẩn Cauchy, tiêu chuẩn tích phân Cauchy-McLaurin để xem xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số dương. Đối với chuỗi đan dấu, có định lí Leibnitz, định lí cho ta điều kiện đủ để nhận biết sự hội tụ của nó. Định lí này đóng vai trò rất quan trọng trong việc đánh giá sai số của nhiều bài toán tính gần đúng. Trong định lí này, điều kiện dãy số (a_n) đơn điệu giảm là rất quan trọng, nhiều sinh viên hay bỏ qua điều kiện này. Khi xem xét chuỗi số có số hạng mang dấu bất kì trước hết nên xét sự hội tụ tuyệt đối của nó vì khi đó có thể lợi dụng được các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số dương.

Trong mục thứ hai cần nắm vững khái niệm miền hội tụ của chuỗi hàm vì bài toán tìm miền hội tụ của chuỗi hàm là một trong các bài toán cơ bản. Khái niệm hội tụ đều của chuỗi hàm là khái niệm rất khó cũng như khái niệm liên tục của hàm số. Chính vì thế phải đọc kĩ và hiểu chính xác khái niệm này. Nhờ vào sự hội tụ đều của chuỗi hàm mà có thể thực hiện được các phép tính giống như các phép tính về tổng hữu hạn. Điều kiện đủ để nhận biết chuỗi hàm hội tụ đều hay sử dụng là tiêu chuẩn Weierstrass.

Trong mục thứ ba cần nắm vững tính chất đặc biệt về miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa thông qua định lí Abel. Chính vì thế phải thuộc qui tắc tìm bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa. Cần lưu ý cách tìm bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa cách. Biết cách áp dụng các tính chất của luỹ thừa: phép tính đạo hàm, phép tính tích phân có thể tính được tổng của một số chuỗi hàm. Khai triển Taylor tại lân cận x_0 hoặc khai triển Maclaurin thực chất là cách biểu diễn hàm số thành chuỗi luỹ thừa. Ý nghĩa thật rõ ràng: một hàm số được biểu diễn qua một đa thức có bậc vô hạn, việc tính giá trị gần đúng của nó thông qua các phép tính +, -, ., /, luỹ thừa. Tuy nhiên phải lưu ý đến điều kiện đủ để hàm số khai triển thành chuỗi luỹ thừa. Cần nhớ khai triển các hàm số thông dụng thành chuỗi McLaurin để từ đó nhờ vào phép đổi biến thích hợp có thể giải quyết các bài toán khai triển thành chuỗi Taylor tại lân cận x_0 mà không phải tính đạo hàm. Chú ý rằng cũng nhờ vào khai triển Taylor mà có thể tính được tổng của một số chuỗi số.

Trong mục thứ tư cần nắm vững công thức tính các hệ số Fourier của hàm số f(x). Nắm vững các dạng chuỗi Fourier: dạng chuỗi lượng giác và dạng phức. Nắm vững các dạng chuỗi Fourier khi hàm số có tính chất đặc biệt: hàm chẵn, hàm lẻ, hàm tuần hoàn với chu kỳ T. Bên cạnh đó biết cách biểu diễn hàm số đã cho theo các hàm sin hoặc cosin. Phải chú ý đến định lí Dirichlet - điều kiện đủ khai triển hàm thành chuỗi Fourier và vận dụng định lí đó để tính tổng của một chuỗi số.

5.2 TÓM TẮT NỘI DUNG

5.2.1 Chuỗi số

a. Các khái niệm chung

✓ **Định nghĩa chuỗi số và sự hội tụ của chuỗi số**

1. Cho dãy số thực (a_n) , $a_n \in R$ với mọi n

Gọi $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ là một chuỗi số thực

Kí hiệu chuỗi số trên là $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (1)

Số thực a_k với k xác định gọi là số hạng thứ k của chuỗi, với k không xác định gọi là số hạng tổng quát của chuỗi .Sau đây là một vài chuỗi số dạng đặc biệt :

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+...$ có số hạng tổng quát là $(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1-1+1-1+...+(-1)^{n-1}+...$

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^k}+...$ gọi là chuỗi cấp số nhân có công bội là $\frac{1}{2}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}+...$ gọi là chuỗi điều hoà .

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+...+\frac{1}{n^\alpha}+...$ gọi là chuỗi Riemann với tham số α.

2. Cho chuỗi số (1). Gọi tổng riêng thứ n của chuỗi (1) là

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Nếu $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ (hữu hạn) thì nói rằng chuỗi số (1) hội tụ và có tổng là S, khi đó kí hiệu $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = S$. Nếu không xảy ra điều trên nói rằng chuỗi (1) phân kì .

3. Nếu chuỗi (1) hội tụ về S thì gọi $R_n = S - S_n$ là phần dư thứ n của chuỗi. Theo trên suy ra: Để chuỗi (1) hội tụ về S thì cần và đủ là phần dư R_n hội tụ về 0.

✓ **Điều kiện hội tụ của chuỗi số**

Từ điều kiện Cauchy cho dãy số hội tụ suy ra.

Định lí 1: Để chuỗi số (1) hội tụ thì cần và đủ là

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists n_0 : \forall n > n_0\ ,\ \forall p\ ,\ n, p \in N^*$$

$$\Rightarrow \left| a_n + a_{n+1} + ... + a_{n+p} \right| < \varepsilon$$

Từ định nghĩa về sự hội tụ của chuỗi số suy ra:

Định lí 2: Điều kiện cần của chuỗi số hội tụ là số hạng tổng quát a_n dần đến 0 khi $n \to \infty$: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

✓ **Tính chất của chuỗi số hội tụ**

1. Tính chất hội tụ hay phân kì của chuỗi số vẫn giữ nguyên khi thay đổi hữu hạn số hạng đầu tiên của chuỗi .

2. Nếu chuỗi (1) hội tụ về S thì chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda a_i$ hội tụ về λS

Thật vậy nếu gọi tổng riêng thứ n của (5.1) là S_n thì

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i = \lambda S_n$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda a_i = \lambda S$$

3. Nếu các chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ và $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ hội tụ tương ứng về A và B thì chuỗi

$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)$ hội tụ về A+B.

Thật vậy $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

Qua giới hạn sẽ có $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i) = A + B$

b. Chuỗi số dương

Sau đây xét chuỗi số $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ với $a_i \in R_+^*$ các kết quả sẽ được chuyển sang cho chuỗi số $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ với $a_i \in R^*_-$

✓ **Điều kiện hội tụ của chuỗi số dương**

Định lí: Chuỗi số dương hội tụ khi và chỉ khi dãy tổng riêng của nó bị chặn trên. $S_n \le M$, $\forall n \in N$

✓ **Các tiêu chuẩn về sự hội tụ :**

1. Các định lí so sánh.

Cho 2 chuỗi số dương $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ (a) và $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ (b)

Định lí 1: Giả sử $a_n \le b_n$, $\forall n \ge n_0$, $n_0 \in N^*$

Khi đó: Nếu chuỗi (b) hội tụ thì chuỗi (a) hội tụ .

Nếu chuỗi (a) phân kì thì chuỗi (b) phân kì .

Định lí 2: Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$

Khi đó: Nếu $0 < k < +\infty$ hai chuỗi (a) và (b) cùng hội tụ hoặc cùng phân kì

Nếu $k = 0$ và chuỗi (b) hội tụ thì chuỗi (a) hội tụ.

Nếu $k = \infty$ và chuỗi (b) phân kì thì chuỗi (a) phân kì .

2. Các tiêu chuẩn hội tụ .

Tiêu chuẩn Đalămbe (D'Alembert).

Gọi $(D_n) = \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ là dãy D'Alembert

Nếu tồn tại số $q \in R_+^*$ sao cho $D_n \le q < 1$ thì chuỗi hội tụ

Nếu $D_n \ge 1$ thì chuỗi phân kì

Định lí: Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = D$ khi đó:

Nếu $D > 1$ thì chuỗi phân kì

$D < 1$ thì chuỗi hội tụ

$D = 1$ thì chưa thể kết luận được.

Tiêu chuẩn Côsi (Cauchy).

Gọi $(C_n) = \left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ là dãy Cauchy

Nếu tồn tại số $q \in R_+^*$ sao cho $C_n \le q < 1$ thì chuỗi số hội tụ

Nếu $C_n \ge 1$ thì chuỗi số phân kì .

Định lí: Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = C$ khi đó

Nếu $C > 1$ thì chuỗi phân kì

$C < 1$ thì chuỗi hội tụ

$C = 1$ thì chưa thể kết luận được.

Tiêu chuẩn tích phân Cauchy-McLaurin.

Giả sử $f(x)$ dương và liên tục trên $[1,+\infty)$ thoả mãn các điều kiện.

$$\begin{cases} f(x) \text{ giảm về 0 khi } x \to \infty \\ f(n) = a_n \text{ , } \forall n = 1,2,... \end{cases}$$

Khi đó chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ hay phân kì cùng với sự hội tụ hay phân kì của tích phân $\int_1^{+\infty} f(x)dx$

c. Chuỗi đan dấu

✓ **Định nghĩa chuỗi đan dấu**

Chuỗi số có dạng $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ trong đó $a_k > 0$, $\forall k$ (2)

hoặc $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ trong đó $a_k > 0$, $\forall k$ gọi là chuỗi đan dấu.

Chẳng hạn $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{1}{n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ là các chuỗi đan dấu

✓ **Điều kiện hội tụ của chuỗi đan dấu**

Định lí Leibnitz.

Cho chuỗi (2) nếu dãy (a_n) thoả mãn các điều kiện :

- Dãy (a_n) đơn điệu giảm: $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in N$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Thì chuỗi (2) hội tụ về tổng S và $S < a_1$

d. Chuỗi có số hạng mang dấu bất kì

✓ **Sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ**

Cho chuỗi số bất kì $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, $a_i \in R$ (a)

Lập chuỗi số dương $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|$ (b)

1. Nếu chuỗi (a) hội tụ và chuỗi (b) phân kì thì nói rằng chuỗi (a) bán hội tụ

2. Nếu chuỗi (a) và (b) cùng hội tụ thì nói rằng chuỗi (a) hội tụ tuyệt đối.

Định lí: Nếu chuỗi (b) hội tụ thì chuỗi (a) cũng hội tụ .

✓ **Một số tính chất của chuỗi bán hội tụ và hội tụ tuyệt đối**

1. Nếu chuỗi đã cho là bán hội tụ thì có thể lấy số S^* tuỳ ý (hữu hạn hoặc vô hạn) để sao cho khi thay đổi vị trí các số hạng được chuỗi mới hội tụ về S^*. Nói cách khác, trong trường hợp này tính chất giao hoán , tính chất kết hợp không còn đúng đối với tổng vô hạn.

2. Nếu chuỗi đã cho hội tụ về S và là hội tụ tuyệt đối thì chuỗi mới nhận được bằng cách thay đổi vị trí các số hạng hoặc bằng cách nhóm một số hữu hạn các số hạng lại cũng hội tụ về S và cũng là hội tụ tuyệt đối. Nói cách khác trong trường hợp này tính chất giao hoán và kết hợp được giữ nguyên đối với chuỗi vô hạn

3. Cho hai chuỗi số $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ và $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$

Lập bảng số

$$\begin{array}{ccccc} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \dots & a_kb_1 \ \dots \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \dots & a_kb_2 \ \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1b_j & a_2b_j & a_3b_j & \dots & a_kb_j \ \dots \end{array}$$

Lập dãy số (u_n) với $u_1 = a_1b_1$, $u_2 = a_1b_2 + a_2b_1$, ...

(v_n) với $v_1 = a_1b_1$, $v_2 = a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1$, ...

Các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ gọi là chuỗi tích của hai chuỗi đã cho.

Nếu hai chuỗi đã cho hội tụ tương ứng về S_1 , S_2 và là hội tụ tuyệt đối thì các chuỗi tích của chúng hội tụ về $S_1 . S_2$ và là hội tụ tuyệt đối.

5.2.2 Chuỗi hàm

a. Các khái niệm chung về chuỗi hàm

✓ **Định nghĩa chuỗi hàm**

Cho dãy hàm thực $(f_n(x))$, $x \in (a,b)$,

gọi $f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + ... = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ (3)

là một chuỗi hàm xác định trên (a,b).

✓ **Miền hội tụ của chuỗi hàm**

1. Điểm $x_0 \in (a,b)$ là điểm hội tụ của chuỗi hàm nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ hội tụ .

2. Tập X các điểm hội tụ của chuỗi hàm gọi là miền hội tụ của chuỗi hàm.

3. Hàm số $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ với $x \in (a,b)$ gọi là tổng riêng thứ n chuỗi hàm. Chuỗi hàm gọi là hội tụ về $S(x)$ với $x \in X$ nếu $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), \forall x \in X$. Trong trường hợp này kí hiệu $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$, $x \in X$

4. Nếu chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ hội tụ trên tập X thì nói rằng chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ tuyệt đối trên tập X.

b. Sự hội tụ đều của chuỗi hàm

✓ **Định nghĩa**

1. Dãy hàm $(f_n(x))$ được gọi là hội tụ đều về hàm $f(x)$ trên tập X nếu như

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0(\varepsilon), \quad \forall n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X$$

2.Chuỗi hàm (3) được gọi là hội tụ đều về hàm $S(x)$ trên X nếu dãy tổng riêng của nó hội tụ đều về $S(x)$ trên X.

Nghĩa là: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0(\varepsilon)$, $\forall n > n_0 \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in X$

Vậy nếu chuỗi hội tụ đều về $S(x)$ thì phần dư $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ sẽ hội tụ đều về 0, tức là:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_0(\varepsilon) \ , \ \forall n > n_0 \Rightarrow |R_n(x)| < \varepsilon \ , \ \forall x \in X$$

Trong trường hợp chuỗi hội tụ đều về hàm $S(x)$ trên (a,b) thường kí hiệu

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \rightrightarrows S(x) \ , \ x \in (a,b)$$

✓ **Các tiêu chuẩn về sự hội tụ đều của chuỗi hàm**

1. Tiêu chuẩn Cauchy.

Định lí: Giả sử $(S_n(x))$ là dãy tổng riêng của chuỗi hàm. Để chuỗi hàm hội tụ đều trên tập X điều kiện cần và đủ là:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists n_0(\varepsilon) \in N \ , \ \forall n > n_0 \ , \ \forall p \in N$$

$$\Rightarrow \left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon \ , \ \forall x \in X$$

2. Tiêu chuẩn Weierstrass.

Định lí: Giả sử các số hạng của chuỗi hàm thoả mãn bất đẳng thức

$$\left|f_n(x)\right| \le a_n \ , \ \forall x \in X$$

và chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ . Khi đó chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ hội tụ tuyệt đối và đều trên tập X

✓ **Các tính chất của chuỗi hàm hội tụ đều**

Định lí 1: Cho chuỗi hàm (3), các hàm số $f_i(x)$, $(i = 1,2,...)$ liên tục trên tập X và hội tụ đều về $S(x)$ trên X thì $S(x)$ liên tục trên X

Định lí 2: Cho chuỗi hàm (3) hội tụ đều về $S(x)$ trên $[a,b]$ và các hàm $f_i(x)$, $(i = 1,2,...)$ liên tục trên $[a,b]$ thì

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b f_i(x)dx$$

Định lí 3: Nếu chuỗi hàm (2) hội tụ về hàm $S(x)$ trên tập X và các hàm $f_i(x)$ thoả mãn:

+ $f_i'(x)$ liên tục trên X, $\forall i = 1,2,...$

+ $\sum_{i=1}^{\infty} f_i'(x)$ hội tụ đều về $R(x)$ trên X

Khi đó $S'(x) = R(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i'(x)$, $x \in X$

5.2.3 Chuỗi lũy thừa

a. Các khái niệm chung về chuỗi luỹ thừa

✓ **Định nghĩa chuỗi luỹ thừa**

Một chuỗi hàm có dạng $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $a_i \in R$, $\forall i$ (4)

hoặc $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-a)^i$, a là hằng số

Gọi là một chuỗi luỹ thừa. Trong chuỗi luỹ thừa trên a_i là các hằng số $(i = 1,2,...)$ gọi là các hệ số của chuỗi luỹ thừa.

✓ **Tính chất hội tụ của chuỗi luỹ thừa**

Định lí Aben (Abel)

Nếu chỗi luỹ thừa (4) hội tụ tại $x = x_0 \neq 0$ thì hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm x thoả mãn $|x| < |x_0|$

Nếu chuỗi luỹ thừa (4) phân kì tại $x = x_1$ thì phân kì tại mọi điểm x thoả mãn $|x| > |x_1|$

✓ **Bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa**

Định lí 1: Đối với chuỗi luỹ thừa (4) luôn tồn tại số $R \geq 0$ để chuỗi hội tụ tuyệt đối trong khoảng $(-R,R)$, phân kì trong các khoảng $(-\infty,-R),(R,+\infty)$. Số R thoả mãn điều kiện trên gọi là bán kính hội tụ của chuỗi (5.16).

Định lí 2: (Qui tắc tìm bán kính hội tụ).

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ hoặc $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$,

thì $$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho} & \text{nếu } 0 < \rho < +\infty \\ 0 & \text{nếu } \rho = \infty \\ \infty & \text{nếu } \rho = 0 \end{cases}$$

$R = 0$ nghĩa là chuỗi luỹ thừa chỉ hội tụ tại $x = 0$

$R = \infty$ nghĩa là chỗi luỹ thừa hội tụ tại mọi x

✓ **Tính chất của chuỗi luỹ thừa**

Giả sử chuỗi luỹ thừa (4) có bán kính hội tụ $R > 0$ và $[a,b]$ là đoạn tuỳ ý chứa trong khoảng $(-R,R)$.

Tính chất 1. Chuỗi luỹ thừa hội tụ đều trên $[a,b]$.

Tính chất 2. Chuỗi luỹ thừa hội tụ đều về hàm $S(x)$, liên tục trên $(-R,R)$

Tính chất 3. Bất kì x_1, x_2 trong khoảng $(-R, R)$ luôn có

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{x_1}^{x_2} x^n dx$$

Đặc biệt $\forall x \in (-R, R)$ thì $\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

Tính chất 4. $\forall x \in (-R, R)$ luôn có $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

b. Khai triển một hàm số thành chuỗi luỹ thừa

✓ **Khái niệm về chuỗi Taylor của hàm số $f(x)$ ở lân cận x_0**

Giả sử hàm số $f(x) \in C^{\infty}$ tại lân cận điểm x_0. Chuỗi luỹ thừa có dạng

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

được gọi là chuỗi Taylor của $f(x)$ ở lân cận điểm x_0

Giả sử hàm số $f(x) \in C^{\infty}$ tại lân cận điểm 0. Chuỗi luỹ thừa biểu diễn trong dạng $f(0) + \frac{f'(0)}{1!}.x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.x^n + \ldots$

được gọi là chuỗi McLaurin của hàm số $f(x)$. Đó chính là chuỗi Taylor của $f(x)$ ở lân cận của $x = 0$

Định lí: Nếu $f(x)$ biểu diễn dưới dạng chuỗi luỹ thừa ở lân cận của x_0:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots$$

Thì chuỗi đó là chuỗi Taylor của $f(x)$ ở lân cận của x_0.

✓ **Điều kiện đủ để hàm số khai triển thành chuỗi Taylor**

Định lí 1: Cho $f(x) \in C^{\infty}$ ở lân cận $x = x_0$, để hàm f(x) khai triển được thành chuỗi Taylor ở lân cận của x_0 thì cần và đủ là phần dư Taylor $r_n(x)$ dần đến không khi $n \to \infty$

Định lí 2: Nếu $f(x) \in C^{\infty}$ ở lân cận của $x = x_0$ và trong lân cận đó có $\left| f^{(k)}(x) \right| \le M$, $\forall k \in N$ thì $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor ở lân cận x_0.

5.2.4 Chuỗi Phuriê (Fourier)

a. Các khái niệm chung

✓ **Chuỗi lượng giác**

Chuỗi hàm có dạng $$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx \qquad (5)$$

trong đó $a_0, a_n, b_n, n=1,2,...$ là các hằng số, được gọi là một chuỗi lượng giác.

✓ **Điều kiện hội tụ của chuỗi lượng giác**

Định lí 1: Nếu các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ hội tụ tuyệt đối thì chuỗi lượng giác (5) hội tụ tuyệt đối và đều trên tập R.

Định lí 2: Nếu các dãy số (a_n), (b_n) đơn điệu giảm và hội tụ về 0 khi $n\to\infty$ thì chuỗi lượng giác (5) hội tụ trên tập $X=R\setminus\{2m\pi \ , \ m\in Z\}$

✓ **Chuỗi Fourier**

Cho hàm số $f(x)$ khả tích trên $[-\pi,\pi]$, chuỗi lượng giác có dạng

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx \qquad (6)$$

trong đó $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$, $a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx$, $b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx$, $k=1,2,...$

được gọi là chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$, các hằng số tính theo công thức trên gọi là các hệ số Fourier của hàm số $f(x)$.

✓ **Chuỗi Fourier trong dạng phức**

Chuỗi Fourier có dạng

$$c_0+\sum_{k=1}^{\infty}c_ke^{ikx}+c_{-k}e^{-ikx}$$

hay $$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_ke^{ikx}$$ với $c_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx$, $k=0\pm1,\pm2,\pm3,...$

gọi là chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ trong dạng phức.

✓ **Hàm số khai triển thành chuỗi Fourier**

Nếu trong $[-\pi,\pi]$ chuỗi Fourier (6) hội tụ về chính hàm số $f(x)$ thì nói rằng hàm số $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Fourier trên $[-\pi,\pi]$.

Định lí: Nếu $f(x)$ biểu diễn thành chuỗi lượng giác (5) trên $[-\pi,\pi]$ và các chuỗi số $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ hội tụ tuyệt đối thì chuỗi đó chính là chuỗi Fourier của $f(x)$.

b. Điều kiện đủ để hàm số khai triển thành chuỗi Fourier

✓ **Định lí Đirichlê (Dirichlet):** Nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[-\pi,\pi]$ thì chuỗi Fourier của hàm số $f(x)$ hội tụ về tổng $S(x)$ trên tập R. Tổng $S(x)$ có tính chất:

$$S(x)=\frac{1}{2}\left[f(x-0)+f(x+0)\right] \ , \ \forall x \in R$$

5.3 CÂU HỎI ÔN TẬP

Câu 1. Định nghĩa chuỗi số, sự hội tụ, phân kì của chuỗi số.

Câu 2. Phát biểu chứng minh điều kiện cần của chuỗi số hội tụ.

Câu 3. Phát biểu các tính chất của chuỗi số hội tụ. Các tính chất đó còn đúng không nếu các chuỗi số phân kì?

Câu 4. Định nghĩa chuỗi số dương. Phát biểu điều kiện cần và đủ để chuỗi số dương hội tụ.

Câu 5. Phát biểu các định lí so sánh để nhận dạng sự hội tụ của chuỗi số dương.

Câu 6. Phát biểu tiêu chuẩn D'Alembert về sự hội tụ của chuỗi số dương.

Câu 7. Phát biểu tiêu chuẩn Cauchy về sự hội tụ của chuỗi số dương.

Câu 8. Phát biểu tiêu chuẩn tích phân Cauchy-McLaurin về sự hội tụ của chuỗi số dương.

Câu 9. Định nghĩa chuỗi số đan dấu. Phát biểu điều kiện đủ cho chuỗi đan dấu hội tụ.

Câu 10. Định nghĩa sự hội tụ tuyệt đối, sự bán hội tụ của chuỗi số.

Câu 11. Định nghĩa chuỗi hàm. Miền hội tụ của chuỗi hàm là gì?

Câu 12. Định nghĩa sự hội tụ đều của chuỗi hàm.

Câu 13. Phát biểu tiêu chuẩn Weierstrass về sự hội tụ đều của chuỗi hàm.

Câu 14. Phát biểu các tính chất của chuỗi hàm hội tụ đều.

Câu 15. Định nghĩa chuỗi luỹ thừa. Phát biểu định lí Abel.

Câu 16. Bán kính hội tụ chuỗi luỹ thừa là gì?

Câu 17. Nêu qui tắc tìm bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa.

Câu 18. Nêu các tính chất của chuỗi luỹ thừa.

Câu 19. Định nghĩa chuỗi Taylor ở lân cận của x0 của hàm số f(x). Định nghĩa chuỗi McLaurin của hàm số f(x).

Câu 20. Thế nào là hàm số khai triển được thành chuỗi Taylor ở lân cận của x0.

Câu 21. Nêu điều kiện cần và đủ để hàm số f(x) khai triển được thành chuỗi Taylor ở lân cận của x0.

Câu 22. Phát biểu điều kiện đủ để hàm f(x) khai triển được thành chuỗi Taylor ở lân cận x0.

Câu 23. Viết khai triển McLaurin các hàm số thường dùng.

Câu 24. Định nghĩa chuỗi Fourier của hàm số f(x).

Câu 25. Phát biểu điều kiện đủ để hàm số khai triển được thành chuỗi Fourier.

Câu 26. Viết chuỗi Fourier trong dạng phức.

Câu 27. Viết khai triển thành chuỗi Fourier của hàm số bất kì.

Câu 28. Viết khai triển theo các hàm số sin của hàm số f(x). Điều kiện để có khai triển đó?

Câu 29. Viết khai triển theo các hàm số cosin của hàm số f(x). Điều kiện để có khai triển đó?

Câu 30. Có một hay nhiều chuỗi Fourier của một hàm số cho trước trên khoảng (a,b)

5.4 BÀI TẬP CHƯƠNG V

Câu 1. Cho chuỗi số $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ biết rằng chuỗi số $\sum_{p=1}^{\infty} a_{2p}$ hội tụ và chuỗi số $\sum_{p=0}^{\infty} a_{2p+1}$ phân kỳ. Chứng minh chuỗi số đã cho phân kỳ.

Câu 2. Chứng minh rằng các chuỗi số có số hạng tổng quát sau đây hội tụ và hãy tìm tổng của chúng

a. $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ b. $a_n = \dfrac{1}{n^2+n}$

c. $a_n = \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ d . $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}$

Câu 3. Xét sự hội tụ của các chuỗi số có số hạng tổng quát sau đây:

a. $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$ b. $a_n = arctg\dfrac{n^2-n}{n^2+1}$ c. $a_n = \dfrac{2^n+n}{3^n+n^3+3}$

d. $a_n = \ln(1+tg\dfrac{1}{n^2})$ e. $a_n = \dfrac{\sqrt{n(n+2)}}{n^2+3\ln n}$ f. $a_n = \dfrac{2+\cos n}{n^\alpha}, \alpha > 0$

g. $a_n = n^{-(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}$ h. $a_n = (\dfrac{n}{n+1})^{n^2}$ i. $a_n = \dfrac{2^{n^2}}{n^{2^n}}$

j. $a_n = \dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ k. $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 x}{n^2+\cos^2 x}dx$ l. $a_n = \displaystyle\int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \dfrac{dx}{\sqrt{x^4+x+1}}$

m. $a_n = \displaystyle\int_n^{2n} \dfrac{dx}{x^{\frac{5}{2}} - \sin^2 x}$ o. $\displaystyle\int_o^\infty e^{-x^n}dx$

Câu 4. Cho chuỗi số dương $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ hội tụ. Chứng minh rằng chuỗi số $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^\alpha, \alpha > 1$ cũng hội tụ

Câu 5. Cho hai chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ và tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho $\vee n \geq n_0$ thoả mãn $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Chứng minh rằng nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì chuỗi thứ nhất hội tụ .

Câu 6. Xét sự hội tụ của các chuỗi có số hạng tổng quát sau đây:

a. $a_n = \dfrac{n^2}{2^n+n}$ b. $a_n = \dfrac{3^{2^n}}{2^{3^n}}$ c. $a_n = \dfrac{\ln(n!)}{n!}$

d. $a_n = n!\prod\limits_{k=1}^{n} \sin\dfrac{1}{2^k}$ e. $a_n = \dfrac{2.4...(2n)}{n^n}$ f. $a_n = \dfrac{a^n}{n^2+1}$, a>o

g. $a_n = (\frac{n+1}{2n-1})^{n\ln n}$ h. $a_n = (arctg\frac{1}{n})^n$ i. $a_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$

Câu 7. Xét sự hội tụ của các chuỗi có số hạng tổng quát sau đây:

a. $a_n = (-1)^n(tg\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n}})$ b. $a_n = (1 - \frac{n}{\ln n})^{-n}$

c. $a_n = \sin(\pi\sqrt{n^4+1})$ d. $a_n = \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2+n+2}$

e. $a_n = \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$ f. $a_n = \sin\pi(\frac{1}{n} + n)$

g. $a_n = \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{1+n}$ h. $a_n = \frac{(-1)^n n^2}{(\ln n)^n}$

Câu 8. Chứng minh rằng chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}(\frac{2x+1}{x+2})^n$ hội tụ đều trên đoạn [-,1].

Câu 9. Chứng minh rằng chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2+n}{n^2}$ hội tụ đều trên đoạn [a,b] nhưng không hội tụ tuyệt đối trên đoạn đó.

Câu 10. Chứng minh rằng chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ hội tụ đều trên [a,+∞) với a>0 nhưng không hội tụ đều trên [o,+∞).

Câu 11. Cho chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$

a. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm.

b. Xét sự liên tục của tổng S(x).

c. Xét sự khả vi của tổng S(x).

Câu 12. Tìm miền hội tụ đều của các chuỗi hàm

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}xe^{-xn^2}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}(-1)^n$

Câu 13. Chứng minh rằng hàm số f(x) $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+x)}$ xác định, liên tục, khả vi trên [o,+∞]

Câu 14. Tìm miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa có số hạng tổng quát sau:

a. $u_n(x) = x^n \ln n$ b. $u_n(x) = (nx)^n$

c. $u_n(x) = (-1)^{n=1}\dfrac{x^n}{n}$ d. $u_n(x) = \dfrac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$ e. $u_n(x) = \left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^n (x-2)^{2n}$

f. $u_n(x) = \dfrac{(5x)^n}{n!}$ g. $u_n(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n!}$ h. $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n^\alpha}, \alpha > o$

Câu 15. Tìm miền hội tụ và tính tổng các chuỗi luỹ thừa có số hạng tổng quát sau:

a. $u_n(x) = (3n+1)x^{3n}, n \geq 1$, b. $u_n(x) = (2^n + 3^n)x^n, n \geq o$

c. $u_n(x) = \dfrac{n^2+3n-1}{n+3}\dfrac{x^n}{n!}, n \geq o$, d. $u_n(x) = chna.x^n, a > o, n \geq o$

e. $u_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}x^{n-1}}{n}, n \geq o$

Câu 16. Khai triển thành chuỗi Taylor của các hàm số sau:

a. f(x) = $\dfrac{1}{x}$ tại lân cận điểm x=3.

b. f(x) = e^{x-1} tại lân cận điểm x=-1.

c. f(x) = sinx tại lân cận điểm x=2.

Câu 17. Khai triển thành chuỗi Maclảuin các hàm số sau:

a. f(x) = chx , b. f(x) = x^2e^x ,

c. f(x) = $\sin^2 x$, d. f(x) = $e^x \cos x$

e. f(x) = $\ln(x^2-5x+6)$, f. f(x) = $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

g. f(x) = $\begin{cases} \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 2 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ h. f(x) = $\displaystyle\int_0^x \cos t^2 dt$

Câu 18. Cho hai chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ có bán kính hội tụ tưng ứng là R_1, R_2

a. Chứng minh rằng nếu tồn tại $n_0 \in N$ sao cho $|a_n| \leq |b_n|, \forall n \geq n_0$ thì $R_1 \geq R_2$.

b. Chứng minh rằng nếu $|a_n| \sim |b_n|$ khi $n \to \infty$ thì $R_1 = R_2$.

Câu 19. Tìm bán kính hội tụ của các chuỗi luỹ thừa có số hạng tổng quát sau:

a. $u_n(x) = \dfrac{chn}{sh^2 n}x^n$, b. $u_n(x) = \arccos(1-\dfrac{1}{n^2})x^n$,

c. $u_n(x) = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})x^n$ d. $u_n(x) = (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})x^n$,

e. $u_n(x) = \left[arctg(1+\frac{1}{n^2}) - \frac{\pi}{4}\right]x^n$

Câu 20. Tính các số sau với độ chính xác là 10^{-4}

a. $\sqrt{e}$, b. $\sqrt[5]{1{,}1}$, c. $\ln(1{,}04)$, d. $\cos 18^0$

Câu 21. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số f(x) lẻ, tuần hoàn với chu kỳ 2π và $f(x) = \pi - x$ với $0<x<\pi$.

Câu 22. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số f(x) chẵn, tuần hoàn với chu kỳ 2π và $f(x) = 1-\frac{2x}{\pi}$ với $0<x<\pi$. Từ đó hãy tính tổng $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

Câu 23. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số:

$$f(x) = 1-\frac{x^2}{\pi^2} \quad \text{với} \quad -\pi < x < \pi$$

Từ đó tính tổng $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

Câu 24. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số:

$$f(x) = \sin\frac{x}{2} \quad \text{với} \quad -\pi<x<\pi.$$

Câu 25. Khai triển hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{nếu } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

thành chuỗi theo các hàm

a. $\sin nx$, $n \in N$

b. $\cos nx$, $n \in N$

Từ đó tính tổng $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

Câu 26. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số

$$f(x) = e^x \quad \text{với} \quad -1<x<1.$$

5.5 HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ BÀI TẬP CHƯƠNG V

Câu 2. a. $\frac{1}{2}$; b. 1 ; c. 1 ; d. 1

Câu 3. a. Phân kỳ ; b. Phân kỳ ; c. Hội tụ ; d. Hội tụ ; e. Phân kỳ ;

f. Hội tụ khi $\alpha > 1$, Phân kỳ khi $\alpha \le 1$; g. Phân kỳ ; h. Hội tụ ;
i. Hội tụ ; j. Phân kỳ ; k. Hội tụ ; l. Hội tụ ; m. Hội tụ ;
n. Phân kỳ.

Câu 6. a. Hội tụ ; b. Hội tụ ; c. Hội tụ ; d. Hội tụ ; e. Hội tụ ;

f. Hội tụ khi a≤ 1, Phân kỳ khi a>1 ; g. Hội tụ ; h. Hội tụ ;
i. Hội tụ .

Câu 7. a. Hội tụ tuyệt đối ; b. Hội tụ tuyệt đối ; c. Hội tụ tuyệt đối.

d. Hội tụ ; e. Hội tụ ; f. Hội tụ ; g. Phân kỳ ; h. Hội tụ tuyệt đối.

Câu 11. a. $|x| > 1$; b. Liên tục với $|x| > 1$; c. Khả vi với $|x| > 1$

Câu 12. a. R_+ ; b. $[a, +\infty)$, a>0 .

Câu 14. a. -1< x <1 ; b. $\{0\}$ c. $-1 < x \le 1$ d. $3 \le x < 5$;

e. $2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}$; f. $-\infty < x < \infty$; g. $\infty < x < \infty$
h. $-1 \le x < 1$ với $\alpha \le 1$, $-1 \le x \le 1$ với $\alpha > 1$

Câu 15. a. $S = \dfrac{4x^3 - x^6}{(1-x^3)^2}$ với $|x| < 1$; b. $S = \dfrac{1}{1-2x} + \dfrac{1}{1-3x}$ với $|x| < \dfrac{1}{3}$

c. $$S = \begin{cases} -\dfrac{1}{3} & \text{khi } x = 0 \\ xe^x - \dfrac{1}{x^3}\left[e^x(x^2 - 2x + 2) - 2\right] & \text{khi } x \ne 0 \end{cases}$$

d. $S = \dfrac{1 - xcha}{1 + x^2 - 2xcha}$ với $|x| < e^{-a}$

e. $$S = \begin{cases} 1 & \text{khi } x = 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{khi } x \ne 0 \text{ và } -1 < x \le 1 \end{cases}$$

Câu 16. a. $\dfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{x-3}{3}\right)^n$; b. $e^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{n!}$

c. $\sin 2 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{(x-2)^{2n}}{(2n)!} + \cos 2 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{(x-2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Câu 17. a. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in R$; b. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}$, $x \in R$

c. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in R$; d. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \frac{1}{2^{n+1}}) x^n$, $|x| < 1$

e. $f(x) = \ln 6 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) x^n$, $|x| < 2$; f. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n)!(4n+1)}$

g. $f(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$, $|x| < 1$; h. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{n!} \cos\frac{n\pi}{4} x^n$, $x \in R$

Câu 19. a. R=1; b. R=1; c. R=1; d. R=1; e. R=2.

Câu 20. a. 1,6488; b. 1,0192; c. 0,392; d. 0,9511.

Câu 21. $f(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$, $x \neq 2n\pi$, $n \in Z$.

Câu 22. $f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$, $x \in R$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Câu 23. $f(x) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

Câu 24. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n \sin nx}{4n^2 - 1}$, $x \neq 0$

Câu 25. a. $f(x) = -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2mx}{m} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} + \frac{\pi}{2(2m+1)}\right] \sin(2m+1)x$

b. $f(x) = \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2\cos(2m+1)x + \cos 2(2m+1)x}{(2m+1)^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

Câu 26. $e^x = Sh1 + 2Sh1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2\pi^2 + 1} (\cos k\pi x - k\pi \sin k\pi x)$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. G. M. FICHTENGÔN, Giáo trình phép tính vi tích phân, Tập 1,2,3. Nauka, Moskva,1969. (tiếng Nga)

2. G. M. FICHTENGÔN, Cơ sở giải tích toán học, Tập 1,2,3. NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà nội, 1977.

3. K. MAURIN, Analiza, *Czes̀c̀* 1. PWN, Warszawa, 1976.

4. R. A. ADAMS, Calculus-a complete, Addison,Wesley, New York, Don Mills, 1991.

5. NGUYỄN ĐÌNH TRÍ (chủ biên), Toán học cao cấp, Tập 1,2,3. NXB Đại học và Giáo dục chuyên nghiệp, Hà nội, 1990.

6. JEAN-MARIE MONIER, Giáo trình toán, Tập 1,2,3,4. NXB Giáo dục, Hà Nội, 1999 (dịch từ tiếng Pháp, DUNOD, Paris,1999)

MỤC LỤC

Giới thiệu môn học 3
1. Giới thiệu chung 3
2. Mục đích 4
3. Phương pháp nghiên cứu môn học 4

Chương I: Giới hạn của dãy số 7
1.1. Mục đích 7
1.2. Tóm tắt nội dung 8

Chương II: Hàm số một biến số 28
2.1. Mục đích 28
2.2. Tóm tắt nội dung 29
2.3. Câu hỏi ôn tập 44
2.4. Bài tập chương II 45
2.5. Hướng dẫn và đáp số bài tập chương II 49

Chương III: Phép tính vi phân hàm số một biến số 53
3.1. Mục đích 53
3.2. Tóm tắt nội dung 55
3.3. Câu hỏi ôn tập 67
3.4. Bài tập chương III 68
3.5. Hướng dẫn và đáp số bài tập chương III 76

Chương IV: Phép tính tích phân 81
4.1. Mục đích 81
4.2. Tóm tắt nội dung 82
4.3. Câu hỏi ôn tập 97
4.4. Bài tập chương IV 98
4.5. Hướng dẫn và đáp số bài tập chương IV 106

Chương V: Lý thuyết chuỗi 116
5.1. Mục đích 116
5.2. Tóm tắt nội dung 117
5.3. Câu hỏi ôn tập 128
5.4. Bài tập chương V 129
5.5. Hướng dẫn và đáp số bài tập chương V 134

Tài liệu tham khảo 136