Phụ lục 3

TRƯỜNG ĐẠI HỌC TRÀ VINH

KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN

TÀI LIỆU GIẢNG DẠY
HỌC PHẦN VI TÍCH PHÂN A1

GV biên soạn: Phạm Minh Triển

Trà Vinh, Tháng 6 năm 2022

Lưu hành nội bộ

KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN

TÌNH TRẠNG PHÊ DUYỆT TÀI LIỆU GIẢNG DẠY

Tên tài liệu giảng dạy: Vi tích phân A1
Ngày hoàn chỉnh:
Tác giả biên soạn: Phạm Minh Triển
Đơn vị công tác: Bộ môn Toán ứng dụng

Trà Vinh, ngày ..... tháng ..... năm 20...
Tác giả
(Ký & ghi họ tên)

PHÊ DUYỆT CỦA BỘ MÔN

Đồng ý sử dụng tài liệu giảng dạy ……………….…………………….. ………....... do …………………………….......................... biên soạn để giảng dạy học phần…...…… …… ……………….

Trà Vinh, ngày ..... tháng ..... năm 20…
TRƯỞNG BỘ MÔN

PHÊ DUYỆT CỦA HĐ KH&ĐT KHOA
Trà Vinh, ngày ..... tháng ..... năm 20…
CHỦ TỊCH HĐ KH&ĐT

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1
GIỚI HẠN DÃY SỐ, GIỚI HẠN HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ
BÀI 1
TẬP HỢP, ÁNH XẠ

❖ **Mục tiêu học tập:** Sau khi học xong bài này, người học có thể:
- *Trình bày được các khái niệm về tập hợp và ánh xạ,*
- *Thực hiện các phép toán trên tập hợp và ánh xạ*
- *Trình bày được khái niệm số phức, các phép toán về số phức*
- *Trình bày được khái niệm hàm số và tính chất của hàm số.*

1. Tập hợp

1.1. Khái niệm

Tập hợp là một khái niệm dùng để chỉ một tổng thể nhiều đối tượng có một số tính chất nào đó.

Các tập hợp thường được ký hiệu: $A, B, C, ...$

Mỗi đối tượng trong một tập hợp nào đó gọi là một phần tử của tập hợp, ký hiệu một phần tử x thuộc tập hợp A là $x \in A$, ngược lại ta ký hiệu $x \notin A$

Tập hợp không chứa phần tử nào gọi là tập rỗng, ký hiệu: $\varnothing$.

Xét hai tập hợp A và B, nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B thì ta nói A chứa trong B, ký hiệu $A \subset B$, hoặc là ta nói A là một bộ phận của B hay là tập con của B.

Nếu $A \subset B$ và $B \subset A$ ta nói $A = B$.

Lưu ý rằng A và $\varnothing$ là hai tập con hiển nhiên của tập A bất kỳ.

Ví dụ:

$N = \{0,1,2,3,...\}$: Tập hợp các số tự nhiên.

$Z = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$: Tập hợp các số nguyên

$Q = \left\{\frac{a}{b}, a \in Z, b \in Z, b \neq 0\right\}$: Tập hợp các số hữu tỉ

R: Tập hợp các số thực

$C = \{a + ib, a \in R, b \in R, i^2 = -1\}$: Tập hợp các số phức

Và $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

1.2. Các phép toán trên tập hợp

1.2.1. Phép hợp

Hợp của hai tập hợp A và B là một tập hợp gồm các phần tử hoặc thuộc A, hoặc thuộc B. Ký hiệu: $C = A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$

Ví dụ: $A = \{a,b,c,d\}, B = \{a,b,e,f\}$ thì $A \cup B = \{a,b,c,d,e,f\}$

1.2.2. Phép giao

Giao của hai tập hợp A và B một tập hợp gồm các phần tử vừa thuộc A, vừa thuộc B. Ký hiệu: $C = A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.

Ví dụ: $A = \{a,b,c,d\}, B = \{a,b,e,f\}$ thì $A \cap B = \{a,b\}$.

1.2.3. Phép hiệu:

Hiệu của hai tập hợp A và B một tập hợp gồm các phần tử chỉ thuộc A mà không thuộc B. Ký hiệu: $C = A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$.

Ví dụ: $A = \{a,b,c,d\}, B = \{a,b,e,f\}$ thì $A \setminus B = \{c,d\}$.

2. Ánh xạ.

Một ánh xạ từ tập A vào tập B là một tương ứng f sao cho $\forall x \in A$ có phần tử duy nhất $y \in B$ ứng với x. Ký hiệu $\begin{matrix} f : A \to B \\ x \mapsto y \end{matrix}$

x: gọi là tạo ảnh của y qua f

y: gọi là ảnh của x qua f, ký hiệu $y = f(x)$

A: gọi là tập nguồn (tập xác định), B gọi là tập đích (tập giá trị) của ánh xạ f

Phân loại ánh xạ:

+ f gọi là đơn ánh $\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ thì $x_1 = x_2$

+ f gọi là toàn ánh $\Leftrightarrow \forall x \in B$ thì $\exists y \in B$ để $y = f(x)$

+ f gọi là song ánh $\Leftrightarrow f$ vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

3. Sơ lược về tập hợp số phức C

3.1. Các định nghĩa

Cho tập hợp $C = \{z = a + ib, a \in R, b \in R, i^2 = -1\}$, trên tập hợp này ta định nghĩa lần lượt hai phép toán cộng và nhân như sau:

$$z_1 + z_2 = (a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$$

$$z_1.z_2 = (a+ib).(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$$

Hai số phức gọi là bằng nhau khi các thành phần tương ứng của chúng bằng nhau, cụ thể là: $(a+ib) = (c+id) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ b = d \end{cases}$

Dạng $z = a + ib$ ta gọi là dạng đại số của số phức.

Cho số phức $z = a + ib$ thì a gọi là phần thực, ký hiệu Re(z); b gọi là phần ảo, ký hiệu Im(z), i gọi là đơn vị ảo của số phức $z = a + ib$.

Ta ký hiệu $|z|$ là modun của số phức $z = a + ib$ và $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Cho số phức $z = a + ib$, số phức $\bar{z}$ gọi là số phức liên hợp của z nếu $\bar{z} = a - ib$.

* Một số tính chất liên quan đến modun của số phức:

$i/\ \bar{\bar{z}} = z$	$v/\ |z| \in R; |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
$ii/\ \overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$	$vi/\ |z|^2 = z.\bar{z}$
$iii/\ \overline{z_1.z_2} = \bar{z_1}.\bar{z_2}$	$vii/\ |z| = |\bar{z}|$
$iv/\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$	$viii/\ |z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$
	ix/ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

3.2. Biểu diễn hình học của số phức

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(a,b)$ và số phức $z = a + ib$, ta gọi

$r = OM = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \text{Argument(z)}$, ký hiệu $Arg(z)$ và $0 \le \text{Arg(z)} \le 2\pi$

Lúc này ta có thể xem số phức $z = a + ib$ là một điểm $M(a,b)$ trên mặt phẳng Oxy với hoành độ và tung độ tương ứng là phần thực và phần ảo của số phức

Từ đây ta có $\begin{cases} a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi \end{cases}$ và $z = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ta gọi đây là dạng lượng giác của số phức.

3.3. Lũy thừa và căn số của số phức

3.3.1. $\forall x \in R$ ta ký hiệu: $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, từ đây ta có một số tính chất sau:

a. $\forall x, y \in R: e^{i(x+y)} = e^{ix}.e^{iy}$

b. $\forall x \in R: e^{-ix} = \dfrac{1}{e^{ix}} \Rightarrow \forall n \in Z, \forall x \in R: \left(e^{ix}\right)^n = e^{ixn}$

c. $\forall x \in R: \overline{e^{ix}} = e^{-ix}$

Số phức dạng $z = e^{ix}$ ta gọi là dạng cực của z.

3.3.2. Từ công thức $\forall n \in Z, \forall x \in R: \left(e^{ix}\right)^n = e^{ixn}$, ta có:

$\left(e^{ix}\right)^n = e^{ixn} \Leftrightarrow \left(\cos x + i\sin x\right)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$ (Công thức Moivre)

Từ đây ta có công thức lũy thừa số phức như sau: Giả sử $z = \cos x + i\sin x$, ta cần tính $z^n, n \in N, n > 1$. Ta có

$z^n = \left[r\left(\cos x + i\sin x\right)\right]^n = r^n\left(\cos x + i\sin x\right)^n = r^n\left[\cos(nx) + i\sin(nx)\right]$

3.3.3. Cho số phức $z \in C$, xét số phức $\sqrt[n]{z}$, ta đặt $Z = \sqrt[n]{z}$, suy ra $Z^n = z$.

Giả sử rằng: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Và $\text{Z=r}'(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow \text{Z}^n = (\text{r}')^n\left[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right]$

Thì

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = (r')^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \Leftrightarrow \begin{cases} r = (r')^n \\ n\theta = \varphi + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r' = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \dfrac{\varphi + k2\pi}{n}, k = \overline{0, n-1} \end{cases}$$

Vậy $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos(\dfrac{\varphi + k2\pi}{n}) + i\sin(\dfrac{\varphi + k2\pi}{n})), k = \overline{0, n-1}$

Hơn nữa: Nếu $z = e^{i\varphi}$ thì $\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\varphi + k2\pi}{n})}, k = \overline{0, n-1}$

3.4. Một số ví dụ

3.4.1. Cho số phức $z = -i, \sqrt[3]{z}$

a. Tìm dạng lượng giác và dạng cực của z

b. Tìm $\sqrt[3]{z}$

Giải:

a. Ta có $z = -i$ thì phần thực và phần ảo của z là: $a = 0; b = -1$, nên số phức $z = -i$ tương ứng với điểm $M(0;-1)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Từ đây ta suy ra được $r=1$ và $\varphi=\frac{3\pi}{2}$, suy ra dạng lượng giác của z là $z=1.(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$

Và dạng cực của z là $z=e^{i\frac{3\pi}{2}}$

b. Ta có dạng lượng giác của z là $z=1.(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$

Áp dụng công thức $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\varphi+\mathrm{k}2\pi}{\mathrm{n}})+\mathrm{i}\sin(\frac{\varphi+\mathrm{k}2\pi}{\mathrm{n}})), k=\overline{0,n-1}$ với $n=3;\varphi=\frac{3\pi}{2}$

Ta được $\sqrt[3]{-i}=\sqrt[3]{1.(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})}=\sqrt[3]{1}\left[\cos(\frac{\frac{3\pi}{2}+\mathrm{k}2\pi}{3})+\mathrm{i}\sin(\frac{\frac{3\pi}{2}+\mathrm{k}2\pi}{3})\right], k=\overline{0,2}$

Với $k=0$ thì $\sqrt[3]{-i}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$

Với $k=1$ thì $\sqrt[3]{-i}=\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$

Với $k=2$ thì $\sqrt[3]{-i}=\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$

Vậy $\sqrt[3]{-i}=\left\{i;\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right\}$ là một tập hợp gồm 3 số phức.

3.4.2. Cho số phức $z=1+i$

a. Tìm dạng lượng giác và dạng cực của z

b. Tìm $\sqrt[4]{z}$

c. Tính giá trị biểu thức $z=\left(\frac{1+i}{2}\right)^{120}$

Giải:

a. Ta có $z=1+i$ thì phần thực và phần ảo của z là: $a=1;b=1$, nên số phức $z=1+i$ tương ứng với điểm $M(1;1)$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Từ đây ta suy ra được $r=\sqrt{2}$ và $\varphi=\frac{\pi}{4}$, suy ra dạng lượng giác của z là $z=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

Và dạng cực của z là $z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

b. Ta có dạng lượng giác của z là $z=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

Áp dụng công thức $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\varphi+\mathrm{k}2\pi}{\mathrm{n}})+\mathrm{i}\sin(\frac{\varphi+\mathrm{k}2\pi}{\mathrm{n}})), k=\overline{0,n-1}$ với

$n = 4; \varphi = \frac{\pi}{4}$.

Ta được $\sqrt[4]{-i} = \sqrt[4]{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})} = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left[\cos(\frac{\frac{\pi}{4}+k2\pi}{4}) + i\sin(\frac{\frac{\pi}{4}+k2\pi}{4})\right], k = \overline{0,3}$

Với $k = 0$ thì $\sqrt[4]{-i} = \cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}$

Với $k = 1$ thì $\sqrt[4]{-i} = \cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}$

Với $k = 2$ thì $\sqrt[4]{-i} = \cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}$

Với $k = 3$ thì $\sqrt[4]{-i} = \cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}$

Vậy $\sqrt[3]{-i}$ là một tập hợp gồm 3 số phức.

c. Tính giá trị biểu thức $A = \left(\frac{1+i}{2}\right)^{120}$

Ta có dạng lượng giác của z là $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

Áp dụng công thức $\left[r\left(\cos x\text{+isin}x\right)\right]^n = r^n\left[\cos(\text{n}x)\text{+isin}(\text{n}x)\right]$

Nên:

$$A = \left(\frac{1+i}{2}\right)^{120} = \left(\frac{1}{2}\right)^{120}\left(1+i\right)^{120} = \left(\frac{1}{2}\right)^{120}\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{120}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{120}(\sqrt{2})^{120}\left(\cos 30\pi + i\sin 30\pi\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{60}$$

3.4.3. Hãy biểu diễn $\cos 3x, \sin 3x$ qua lũy thừa của $\sin x, \cos x$

Giải:

Áp dụng công thức $\left[\left(\cos x\text{+isin}x\right)\right]^n = \left[\cos(\text{n}x)\text{+isin}(\text{n}x)\right]$ với $n = 3$.

Ta có: $\left[\left(\cos x\text{+isin}x\right)\right]^3 = \left[\cos(3x)\text{+isin}(3x)\right]$ (*)

Mà $\left[\left(\cos x\text{+isin}x\right)\right]^3 = \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x$

Nên $\left[\left(\cos x\text{+isin}x\right)\right]^3 = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x)$ (**)

So sánh vế phải của 2 đẳng thức (*) và (**) ta được

$$\begin{cases} \cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x \\ \sin(3x) = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x \end{cases}$$

4. Hàm số

4.1. Khái niệm hàm số

Cho $D \subset R$. Một ánh xạ hay một quy tắc f đi từ tập D đến tập hợp số thực R sao cho với mỗi $x \in D$ thì có duy nhất $y \in R$ sao cho $y = f(x)$. Khi đó f được gọi là một hàm số

Ký hiệu $\begin{matrix} f: D \to R \\ x \mapsto y = f(x) \end{matrix}$, trong đó

+ x gọi là biến số

+ y gọi là hàm số hay gọi là biến phụ thuộc vào biến x

+ D gọi là miền xác định của f

+ $T = \{f(x) | x \in D\}$ gọi là miền giá trị của f

4.2. Tính chất

4.2.1. Hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ $f = g$ khi và chỉ khi f, g có cùng miền xác định D và $\forall x \in D: f(x) = g(x)$

Ví dụ: $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, g(x) = x + 1$.

4.2.2. Hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$. Ta có $f > g$ khi và chỉ khi f, g có cùng miền xác định D và $\forall x \in D: f(x) > g(x)$.

4.2.3. $F = f + g \Leftrightarrow \forall x \in D$ là miền xác định của F thì $F(x) = f(x) + g(x)$.

Hiệu, tích, thương của f, g được định nghĩa tương tự.

4.2.4. Hàm số $y = f(x)$ gọi là tăng hay đồng biến

$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

4.2.4. Hàm số $y = f(x)$ gọi là giảm hay nghịch biến

$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Ví dụ: a/ Hàm số $y = x^3$ tăng trên toàn miền xác định của nó.

b/ Hàm số $y = x^2$ tăng trên $(0, +\infty)$, và giảm trên $(-\infty, 0)$

4.2.5. Hàm số $y = f(x)$ gọi là bị chặn trong D nếu $\exists k > 0: |f(x)| < k, \forall x \in D$.

Ví dụ: Hàm số $y = \cos x, y = \sin x$ là bị chặn trong $[-1;1]$, tức là ta có bất đẳng thức 2 quen thuộc $|\sin x| \le 1; |\cos x| \le 1$ hoặc là $-1 \le \sin x \le 1; -1 \le \cos x \le 1$

4.2.6. Hàm số $y = f(x)$ gọi là hàm số chẵn trên miền đối xứng $(-a; a)$ nếu $\forall x \in (-a; a): f(-x) = f(x)$

4.2.7. Hàm số $y = f(x)$ gọi là hàm số lẻ trên miền đối xứng $(-a; a)$ nếu $\forall x \in (-a; a): f(-x) = -f(x)$

Ví dụ: a/ $y = x^2, y = \cos x, y = x \sin x, y = 2^{|x|}$ là các hàm số chẵn

b/ $y = x^3, y = x \cos x, y = \sin x$ là các hàm số lẻ

4.2.8. Hàm số $y = f(x)$ gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại số $l \neq 0$ sao cho

$f(x+l)=f(x)$, số dương bé nhất trong các số l trên gọi là chu kỳ của hàm số tuần hoàn $y=f(x)$.

Ví dụ: Hàm số $y=\sin x, y=\cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π, Hàm số $y=\tan x$, $y=\cot anx$ tuần hoàn với chu kỳ π.

4.3. Hàm số hợp

Cho $f:\begin{cases} X\to Y \\ x\to y=f(x)\end{cases}$ và $g:\begin{cases} Y\to Z \\ y\to z=g(y)\end{cases}$, hàm số $h:\begin{cases} X\to Z \\ x\to z=h(x)\end{cases}$ gọi là hàm số hợp của f,g, ký hiệu: $h=g.f$ khi $z=g(f(x))$

Ví dụ: Cho $f(x)=x^2+1, g(x)=\sin 2x$. Tìm $f.f, g.g, f.g, g.f$.

+ $f.f(x)=f(f(x))=(f(x))^2+1=(x^2+1)^2+1$
+ $g.g(x)=g(g(x))=\sin 2(g(x))=\sin 2(\sin 2x)$
+ $g.f(x)=g(f(x))=\sin 2(f(x))=\sin 2(x^2+1)$
+ $f.g(x)=f(g(x))=f(\sin 2x)=\sin^2 2x+1$

4.4. Hàm số ngược

Cho hàm số $\begin{matrix} f:X\to Y \\ x\mapsto y=f(x)\end{matrix}$, nếu f là một song ánh thì f^{-1} là hàm số ngược của f.

Ví dụ: + $y=2x-2$ thì hàm số ngược của nó là $x=\frac{y+2}{2}$ (hoặc $y=\frac{x+2}{2}$)

+ $y=\log_a x$ thì hàm số ngược của nó là $x=a^y$ (hoặc $y=a^x$)

4.5. Một số hàm số sơ cấp cơ bản:

4.5.1 Hàm số: $y=x^\alpha, \alpha\in R$, miền xác định của nó phụ thuộc vào α

+ Nếu $\alpha\in N$ thì $D=R$
+ Nếu $\alpha\in Z^-$ thì $D=R\setminus\{o\}$
+ Nếu $\alpha\in Q^+$ thì $D=R^+$
+ Nếu $\alpha\in Q^-$ thì $D=R^+\setminus\{0\}$

4.5.2. Hàm số: $y=a^x, a>0, a\neq 1$, xác định $\forall x\in R^+\setminus\{0\}$, hàm số tăng khi $a>1$, giảm khi $0<a<1$.

4.5.3 Hàm số: $y=\log_a x, a>0, a\neq 1$, là hàm số ngược của $y=a^x$ xác định khi $x>0$, hàm số tăng khi $a>1$, giảm khi $0<a<1$.

Một số tính chất cần lưu ý

+ $\log_a x.y=\log_a x+\log_a y$
+ $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$
+ $\log_{a^\alpha} b^\beta=\frac{\alpha}{\beta}\log_a b$
+ $N=\log_a a^N$
+ $\log_a b=\log_a c\log_c b$

4.5.4 Các hàm số lượng giác.

$y=\sin x, y=\cos x$ miền xác định là R

$y=\tan x$, xác định khi $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in Z$

$y=\cot anx$, xác định khi $x\neq k\pi, k\in Z$

4.5.5. Các hàm số lượng giác ngược

$y=\arcsin x$ là hàm số ngược của $y=\sin x$

$y=\arccos x$ là hàm số ngược của $y=\cos x$

$y=\arctan x$ là hàm số ngược của $y=\tan x$

$y=arc\cot anx$ là hàm số ngược của $y=\cot anx$

Nếu $y=\sin x$ thì hàm ngược của nó là $x=\arcsin y$

Ví dụ: Chứng minh hai đẳng thức sau: $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ và $\arctan x+arc\cot anx=\frac{\pi}{2}$.

Chứng minh:

Đặt $A=\arcsin x, B=\arccos x\Rightarrow x=\sin A=\cos B=\sin(\frac{\pi}{2}-B)$

Vậy $A=\frac{\pi}{2}-B\Leftrightarrow A+B=\frac{\pi}{2}$.

4.5.6 Các hàm Hyperpol

Các hàm hyperbol là những hàm số được xác định bởi các đẳng thức sau:

$shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ đọc là hàm sin hyperbol

$chx=\frac{e^{-x}+e^x}{2}$ đọc là hàm cosin hyperbol

$thx=\frac{shx}{chx}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^{-x}+e^x}$ đọc là hàm tang hyperbol

$cthx=\frac{chx}{shx}=\frac{e^{-x}+e^x}{e^x-e^{-x}}$ đọc là hàm cotang hyperbol

Hàm cosin hyperpol là hàm chẵn, các hàm sin hyperbol, tang hyperbol, cotang hyperbol là các hàm lẻ;

Và $sh0=0, ch0=1, ch^2x-sh^2x=1, thx.cthx=1$

❖ **Bài tập củng cố:**

1. Biểu diễn các số phức dưới đây thành dạng lượng giác và dạng cực, sau đó khai căn với bậc được chỉ ra: $a/z=1-i,\sqrt[3]{z},\sqrt[5]{z}; b/z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{z},\sqrt[4]{z};$

2. Giải các phương trình sau trên C:

$a/z^2+z+1=0;$

$b/z^2+2z\cos\theta+1=0,\theta\in R;$

$c/(3+i)z^2-(8+6i)z+25+5i=0;$

$d/(z^2-8z)^2+40(z^2-8z)+375=0$

$e/(z+i)^4+(z^2+1)^2+(z-i)^4=0$

$f/z^3+(1-2i)z^2+(1-i)z-2i=0$, biết rằng phương trình có một nghiệm thuần ảo.

$g/z^4+4iz^2+12(1+i)z-45=0$, biết rằng phương trình có một nghiệm thực và một nghiệm thuần ảo.

3. Hãy tìm căn bậc 4 của số phức $z=8a^2-(1+a^2)^2+4a(1-a^2)i; a\in R$4. Tìm các giới hạn: a. $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$, b. $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2n})^{3n}$, c. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n+1})^n$, d. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n-1})^{n-1}$

4. Hãy biểu diễn $\cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \cos 4x, \sin 5x, ...$ qua lũy thừa của $\sin x, \cos x$

5. Môđun của số phức $3+4i$ bằng:

A. 5. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 9. **D.** 16.

6. Khai căn bậc ba của một số phức gồm:

A. Bốn số phức. **B.** Ba số phức . **C.** Hai số phức. **D.** Một số phức.

8. Hàm số nào sau đây là hàm số ngược của hàm số $y=\sin\frac{x}{3}$?

A. $x=\arcsin(\frac{y}{3})$. **B.** $x=3\arcsin y$. **C.** $x=\frac{1}{3}\arcsin y$. **D.** $y=\arcsin(3x)$.

9. Cho hai hàm số: $g(x)=\sin\left(\frac{3}{x}\right)$; $f(x)=x^3+2x$; khi đó $g[f(x)]$ là hàm số :

A. $y=\sin^3\left(\frac{3}{x}\right)+2\sin\left(\frac{3}{x}\right)$.

B. $y=\sin\left(x^3+2x\right)$.

C. $y=\sin\left(\frac{3}{x}\right)^3+2\sin\left(\frac{3}{x}\right)$.

D. $y=\sin\left(\frac{3}{x^3+2x}\right)$.

10. Dạng cực của số phức liên hợp của số phức $z=i$ là:

A. $e^{i\frac{3\pi}{2}}$. **B.** $e^{i\frac{\pi}{2}}$. **C.** $e^{i\frac{5\pi}{4}}$. **D.** $\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{2}}$.

11. Hàm số nào sau đây là hàm số ngược của hàm số $y=5.4^{2x}+2$?

A. $x=\log_8(\frac{y-2}{5})$.

B. $x=\frac{1}{5}\log_4(y-2)$.

C. $x=\frac{1}{2}\log_4(\frac{y-2}{5})$.

D. $x=\frac{1}{4}\log_2(\frac{y-2}{5})$.

BÀI 2

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Mục tiêu học tập*: Sau khi học xong bài này, người học có thể:*

- *Trình bày được các khái niệm về giới hạn dãy số và tính chất của giới hạn dãy số*
- *Tìm được giới hạn của một số dãy số cơ bản.*

1. Khái niệm:

1.1. Định nghĩa 1: Hàm số $u: N^* \to R$. Những giá trị của hàm số ứng với $n = 1,2,3,...,n,...$ gọi là dãy số. Đặt $u_1 = u(1), u_2 = u(2),..., u_n = u(n),...$Dãy số được viết dưới dạng $\{u_n\}$ hoặc $u_1, u_2, u_3,..., u_n,...$, các số u_i gọi là các số hạng của dãy, u_n gọi là số hạng tổng quát của dãy.

Ví dụ: a/ Dãy $\{u_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ là dãy số : $\frac{1}{2}, \frac{2}{3},..., \frac{n}{n+1},...$

b/ Dãy $\{u_n\} = \{n^2\}$ là dãy số : $1,4,9,..., n^2,...$

1.2. Định nghĩa 2: Số a được gọi là giới hạn của dãy số $\{u_n\}$ khi $n \to \infty$, ký hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ hay $u_n \to a$ khi $n \to \infty$, nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : \forall n \geq N$ thì $|u_n - a| < \varepsilon$.

Dãy số có giới hạn thì gọi là hội tụ, ngược lại gọi là phân kỳ.

Ví dụ: Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Thật vậy, $\forall \varepsilon > 0$ bé tùy ý, ta có thể chọn một số rất bé cụ thể nào đó, chẳng hạn $\varepsilon = \frac{1}{10^4}$.

Muốn cho $|u_n - a| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{10^4} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{10^4} \Rightarrow n > 10^4 - 1$. Thì ta phải chọn $N = 10^4 - 1$, lúc này ta sẽ có $|u_n - 1| < \varepsilon$

1.3. Định nghĩa 3: Dãy $\{u_n\}$ dần đến vô cùng khi n tiến đến vô cùng nếu với $M > 0$ lớn tùy ý , có số nguyên dương N sao cho với mọi $n > N$, ta luôn có $|u_n| > M$. Ký hiệu: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$

Ví dụ: Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$. Thật vậy: nếu chọn $M = 10^5$, muốn cho $|\sqrt{n}| > 10^5 \Rightarrow n > 10^{10}$ thì ta chọn $N = 10^{10}$. Lúc này $\forall n > 10^{10} \Rightarrow |\sqrt{n}| > M$

1.4. Định nghĩa 4: Dãy $\{u_n\}$ gọi là vô cùng lớn $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \infty$, Dãy $\{u_n\}$ gọi là vô cùng bé $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = 0$. Lưu ý rằng nếu $\{u_n\}$ là vô cùng lớn thì $\left\{\frac{1}{u_n}\right\}$ là vô cùng bé và ngược lại.

2. Các định lý về giới hạn của dãy

2.1. Các tính chất:

2.1.1. Nếu dãy $\{u_n\}$ có giới hạn là a và $a > p (a > p)$ thì tồn tại N sao cho với mọi $n > N$ thì $u_n > p (u_n < p)$.

2.1.2. Nếu dãy $\{u_n\}$ có giới hạn là a và $u_n \leq p (u_n \geq p), \forall n$ thì $a \leq p (a \geq p)$.

2.1.3. Nếu dãy $\{u_n\}$ có giới hạn là a thì a là duy nhất.

2.1.4. Nếu dãy $\{u_n\}$ có giới hạn thì nó bị chặn, tức là $\exists k > 0 : |u_n| \le k, \forall n$.

2.2. Các định lý:

2.2.1. Định lý 1: Cho $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} v_n = b$,

a/ Nếu $u_n = v_n, \forall n$ thì $a = b$

b/ Nếu $u_n \ge v_n, \forall n$ thì $a \ge b$

2.2.2. Định lý 2: Nếu $u_n \le v_n \le w_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = a$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = a$

Ví dụ: Tính $I = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

Đặt $v_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

Và $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \le v_n \le \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$

Mặt khác $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1$. Theo định lý trên thì $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1$

2.2.3. Các phép tính của giới hạn dãy số : Nếu các dãy $\{u_n\}, \{v_n\}$ hội tụ

a/ Thì dãy $\{u_n \pm v_n\}$ cũng hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty}\{u_n \pm v_n\} = \lim\limits_{n\to\infty} u_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

b/ Thì dãy $\{u_n.v_n\}$ cũng hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty}\{u_n.v_n\} = \lim\limits_{n\to\infty} u_n . \lim\limits_{n\to\infty} v_n$. Hơn nữa:

$\lim\limits_{n\to\infty}\{k.v_n\} = k.\lim\limits_{n\to\infty} v_n$

c/ Thì dãy $\left\{\frac{u_n}{v_n}\right\}$ cũng hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{u_n}{v_n}\right\} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} u_n}{\lim\limits_{n\to\infty} v_n}, \lim\limits_{n\to\infty} v_n \ne 0$.

Một số công thức giới hạn dãy số thường gặp:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$, b. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, a > 0$, c. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, d. $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

❖ **Bài tập củng cố:**

1. Tìm các giới hạn:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 2n^2 + n + 3}{n^3 - 4n + 6}$, b. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2 + n + 3}{n^4 - 5n + 2}$, c. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^6 + 3n^4 - 5}{n^4 - 5n + 2}$, d. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{1 - n^3}$.

2. Tìm các giới hạn:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n^4 + n - 7}}{n^2 - 5n + 2}$, b. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n + \sqrt{n^2 + 2n + 3}}{3 - \sqrt{2n^2 + 1}}$, c. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + n + 3} - n)$,

d. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{3n^2 + n + 3} - n\sqrt{3})$, e. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1})$, f. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 4})}$.

3. Cho $|q| < 1$, đặt $S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$. Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Áp dụng: Tìm các giới hạn: a. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n + 4.3^n}{5 - 7.3^n}$, b. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3.2^n - 5.7^n}{4^n + 3.5^n}$

4. Tìm các giới hạn: a. $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n})^n$, b. $\lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{2n})^{3n}$, c. $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n-1}{n+1})^n$, d. $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n}{n-1})^{n-1}$

BÀI 3
GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

***Mục tiêu học tập**: Sau khi học xong bài này, người học có thể:*
- *Trình bày được các khái niệm về giới hạn hàm số và tính chất của giới hạn hàm số*
- *Tìm được giới hạn của một số hàm số cơ bản*

1. Khái niệm:

***1.1. Định nghĩa 1**:* Số a được gọi là giới hạn của hàm số $y = f(x)$ khi x dần về x_0 nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$. Ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$.

Ví dụ: Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$. Ta chọn một ε bé tùy ý cụ thể, chẳng hạn $\varepsilon = \frac{1}{10^6}$. Muốn cho $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \frac{1}{10^6} \Rightarrow |x - 2| < \frac{1}{10^6}$ thì ta chọn $\delta = \varepsilon = \frac{1}{10^6}$. Lúc này ta sẽ có $\left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| < \frac{1}{10^6}$ và $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$.

***1.2. Định nghĩa 2**:* Ta gọi a là giới hạn của $y = f(x)$ khi $x \to \infty$ nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 : |x| > A \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$. Ký hiệu: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$

Đặc biệt:

1.2.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 : x > A \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

1.2.2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 : x < -A \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

Ví dụ: Chứng minh rằng : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ vì $\forall x > 0, |f(x) - 1| = \frac{1}{x} < \varepsilon$. Ta chọn A là số dương lớn hơn $\frac{1}{\varepsilon}$ thì $\forall x > A > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$. Vậy $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$

***1.3. Định nghĩa 3**:* Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn bằng vô cùng khi $x \to x_0$ nếu: $\forall M > 0, \exists \delta >: |x| > \delta \Rightarrow |f(x)| > M$. Ký hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

Đặc biệt;

1.3.1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$

1.3.2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| < -M$

Ví dụ: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{1 - x} = \infty$

***1.4. Định nghĩa 4**:* Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn bằng vô cùng khi $x \to \infty$ nếu: $\forall M > 0, \exists A >: |x| > A \Rightarrow |f(x)| > M$. Ký hiệu $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Đặc biệt:

1.4.1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists A > 0 :> A \Rightarrow |f(x)| > M$

1.4.2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists A > 0 : x < -A \Rightarrow |f(x)| > M$

1.4.3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists A > 0 : x < -A \Rightarrow |f(x)| < -M$

1.4.4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists A>0: x>A \Rightarrow |f(x)|<-M$

Ví dụ: $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$

2. Một số công thức giới hạn cơ bản:

2.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

2.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$

2.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a, a>0$

2.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$

2.5. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

2.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

2.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=1$

2.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

2.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

2.10. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

3. Giới hạn một phía

3.1 Định nghĩa: Số a được gọi là giới hạn phải (trái) của $f(x)$ tại x_0 khi x tiến về bên phải (trái) x_0. Ký hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a$ ($\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a$)

3.1.1. Ví dụ1: Dễ thấy $\lim\limits_{x\to o+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to o-}\dfrac{1}{x}=-\infty$

3.1.2.Ví dụ 2: Xét hàm số $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$ tại $x=0$, ta có:

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$ và $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{-x}=-1$

3.2 Định lý: Điều kiện cần và đủ để $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ là $\exists \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x), \exists \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

4. Các định lý và tính chất về giới hạn:

4.1. Tính chất:

4.1.1. Nếu $f(x)=C$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=C$

4.1.2. Giới hạn a nếu có của hàm số là duy nhất.

4.2. Các định lý về phép tính giới hạn:

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=C$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$ thì:

4.2.1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=C+B$

4.2.2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x).g(x))=C.B$

4.2.3. $\lim\limits_{x\to x_0}(\dfrac{f(x)}{g(x)})=\dfrac{C}{B}, B\neq 0$

4.3. Hệ quả:

4.3.1. $\lim\limits_{x\to x_0} k.f(x)=k.C$

4.3.2. $\lim\limits_{x\to x_0}(\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x))=\sum\limits_{i=1}^{n}\lim\limits_{x\to x_0} f_i(x)$

4.3.3. $\lim_{x\to x_0}(f_1(x).f_2(x).f_3(x).....f_n(x)) = \lim_{x\to x_0} f_1(x).\lim_{x\to x_0} f_2(x).\lim_{x\to x_0} f_3(x).....\lim_{x\to x_0} f_n(x)$

Đặc biệt: $\lim_{x\to x_0}(f(x))^n = (\lim_{x\to x_0} f(x))^n$

4.4. Các tiêu chuẩn tồn tại giới hạn

4.4.1. Tiêu chuẩn Cauchy (Tiêu chuẩn 1): Điều kiện cần và đủ để tồn tại giới hạn của $f(x)$ khi $x \to x_0$ là: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho $\forall x_1, x_2$ thỏa $0 < |x_1 - x_0| < \delta, 0 < |x_2 - x_0| < \delta$ thì $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

4.4.2. Tiêu chuẩn 2: Cho $f(x)$ xác định $\forall x > 0$. Nếu

* $f(x)$ đơn điệu tăng

* $f(x)$ bị chặn trên

Thì $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$

4.4.3. Tiêu chuẩn 3: Nếu $\begin{cases} f(x) \le h(x) \le g(x) \\ \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = a \end{cases}$ thì $\lim_{x\to x_0} h(x) = a$

Ví dụ: Tính $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin^2(n!x)}{x^2}$. Ta có $0 \le \frac{\sin^2(n!x)}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$. Suy ra $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin^2(n!x)}{x^2} = 0$

5. Vô cùng bé và vô cùng lớn

5.1. Vô cùng bé.

5.1.1. Khái niệm: Hàm số $f(x)$ gọi là vô cùng bé (VCB) khi $x \to x_0$ nếu $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

a/ Ví dụ 1: $\lim_{x\to 0}\sin x = 0 \Rightarrow f(x) = \sin x$ là VCB

b/ Ví dụ 2: $\lim_{x\to 0}\tan x = 0 \Rightarrow f(x) = \tan x$ là VCB

c/ Ví dụ 3: $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$ là VCB

5.1.2. Định lý: $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x) - a$ là VCB khi $x \to x_0$

Hay là: $f(x) = a + \alpha(x)$, $\alpha(x)$ là VCB khi $x \to x_0$

5.1.3. Tính chất:

a/ VCB.C=VCB

b/ VCB $\pm$ VCB=VCB

c/ VCB.BC=VCB

d/ VCB.HT=VCB

Trong đó C- hằng số, BC- đại lượng bị chặn, HT- đại lượng hội tụ

Ví dụ: $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}.\sin x = 0$ với $\sin x$ là đại lượng bị chặn.

5.1.4. So sánh các vô cùng bé: Cho $f(x), g(x)$ là hai VCB khi $x \to x_0$. Giả sử tồn tại $\lim_{x\to x_0}(\frac{f(x)}{g(x)}) = A, 0 \le A \le +\infty$. Khi đó:

a/ Nếu $A = 0$ thì ta nói $f(x)$ là VCB bậc cao hơn $g(x)$ hay $g(x)$ là VCB bậc thấp hơn $f(x)$, khi đó ta ký hiệu $f(x) = O(g(x))$

b/ Nếu $0 < A < +\infty$ thì ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCB cùng hay cùng cấp, đặc biệt khi $A = 1$ ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCB tương đương, khi đó ta ký hiệu

$f(x) \sim g(x)$

c/ Nếu $A = +\infty$ thì ta nói $g(x)$ là VCB bậc cao hơn $f(x)$ hay $f(x)$ là VCB bậc thấp hơn $g(x)$, khi đó ta ký hiệu $g(x) = O(f(x))$.

Ngược lại nếu giới hạn trên không tồn tại thì ta nói $g(x)$ và $f(x)$ không so sánh được.

5.1.5. Định lý:

a/ Nếu $f(x) \sim g(x), h(x) \sim t(x)$ trong đó $f(x), g(x)$ là hai VCB khi $x \to x_0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0}(\dfrac{f(x)}{g(x)}) = \lim\limits_{x \to x_0}(\dfrac{h(x)}{t(x)})$.

b/ Giả sử $f_i(x), g_j(x), i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m}$ là các VCB khi $x \to x_0$. Khi đó $\lim\limits_{x \to x_0}(\dfrac{f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)}{g_1(x) + g_2(x) + ... + g_m(x)}) = \lim\limits_{x \to x_0}(\dfrac{f_{i_0}(x)}{g_{j_0}(x)})$.Trong đó $f_{i_0}(x)$ là VCB bậc thấp nhất trong các $f_i(x)$ và $g_{j_0}(x)$ là VCB bậc thấp nhất trong các $g_j(x)$

Ví dụ: Khi $x \to 0$ thì các VCB sau là tương đương:

$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, \ln(x+1) \sim x, e^x - 1 \sim x, (1+x)^a - 1 \sim ax, a^x - 1 \sim x \ln a$

Ví dụ: Tính $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{e^{2x} - 1}$. Ta có khi $x \to 0$ thì $\sin 5x \sim 5x, e^{2x} - 1 \sim 2x$

Vậy $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{e^{2x} - 1} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{2x} = \dfrac{5}{2}$

5.2. Vô cùng lớn.

5.2.1. Khái niệm: Hàm số $f(x)$ gọi là vô cùng lớn (VCL) khi $x \to x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$

a/ Ví dụ 1: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan x = \infty \Rightarrow f(x) = \tan x$ là VCL

b/ Ví dụ 2: $\lim\limits_{x \to 0} \cot anx = \infty \Rightarrow f(x) = \cot anx$ là VCL

c/ Ví dụ 3: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x}$ là VCL

5.2.2. Tính chất:

a/ VCL.VCL=VCL

b/ VCL+BC=VCL

c/ VCL+HT=VCL

d/ Tổng hai VCL có thể không là VCL, nhưng tổng hai VCL cùng dấu là VCL

e/ $\dfrac{1}{VCL} = VCB, \dfrac{1}{VCB} = VCL$

Trong đó BC- đại lượng bị chặn, HT- đại lượng hội tụ

5.2.3. So sánh các vô cùng lớn: Cho $f(x), g(x)$ là hai VCL khi $x \to x_0$. Giả sử tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0}(\dfrac{f(x)}{g(x)}) = A, 0 \le A \le +\infty$. Khi đó

a/ Nếu $A = 0$ thì ta nói $f(x)$ là VCL bậc thấp hơn $g(x)$ hay $g(x)$ là VCL bậc cao hơn $f(x)$

b/ Nếu $0 < A < +\infty$ thì ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCL cùng hay cùng cấp, đặc biệt khi $A=1$ ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là hai VCL tương đương, khi đó ta ký hiệu $f(x)\sim g(x)$

c/ Nếu $A=+\infty$ thì ta nói $f(x)$ là VCL bậc cao hơn $g(x)$ hay $g(x)$ là VCL bậc thấp hơn $f(x)$

Ngược lại nếu giới hạn trên không tồn tại thì ta nói $g(x)$ và $f(x)$ không so sánh được.

5.2.4. Định lý:

a/ Nếu $f(x)\sim g(x), h(x)\sim t(x)$ trong đó $f(x), g(x)$ là hai VCL khi $x\to x_0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \lim\limits_{x\to x_0}(\frac{h(x)}{t(x)})$.

b/ Giả sử $f_i(x), g_j(x), \overline{i=1,n}; \overline{j=1,m}$ là các VCL khi $x\to x_0$. Khi đó $\lim\limits_{x\to x_0}(\frac{f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)}{g_1(x)+g_2(x)+\ldots+g_m(x)}) = \lim\limits_{x\to x_0}(\frac{f_{i_0}(x)}{g_{j_0}(x)})$.Trong đó $f_{i_0}(x)$ là VCL bậc cao nhất trong các $f_i(x)$ và $g_{j_0}(x)$ là VCL bậc cao nhất trong các $g_j(x)$

Ví dụ: Tính $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^5+x^3-2x^2+x-7}{-2x^7+4x^6+3x+2}$. Ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^5+x^3-2x^2+x-7}{-2x^7+4x^6+3x+2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^5}{-2x^7} = 0$$

Lưu ý: Trong quá trình giải các bài tập

Nếu gặp dạng vô định $\infty-\infty$, thì ta khử dạng vô định này bằng cách nhân lượng liên hợp

Nếu gặp dạng vô định $0^0, 1^\infty, ..$ thì ta khử dạng vô định này bằng công thức sau:

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln|u(x)|}$$

❖ **Bài tập củng cố:**

1. Tìm các giới hạn:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$, b. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$, c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$, d. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

e. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$, f. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{(x^2-5x+4)}$, g. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-x^2-1}-x)$,

h. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{(x+a)(x+b)(x+c)}-x)$, i. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$.

2. Tìm các giới hạn:

a. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$, b. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$, c. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$

d. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(2x-3)^{30}(3x+2)^{20}}{(2x+1)^{50}}$, e. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)\ldots(x^n+1)}{((nx)^n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$,

f. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+x^3+\ldots+x^n-n}{x-1}$, HD: Lưu ý công thức $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

g. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$, h. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$.

3. Tìm các giới hạn:

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$, b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$, c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x.\sin 3x.\sin 5x}{45x^3}$, d. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{3x}$

e. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x.\sin 2x.\sin 3x....\sin nx}{n!x^n}$.

4. Tìm các giới hạn:

a. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$, b. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{1}{x})^x$, c. $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\dfrac{3}{x})^x$, d. $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2-1}{x^2+1})^{x^2}$

e. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}$, f. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$

5. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{2x+1}-1}{5x}$ có kết quả là:

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $\dfrac{2}{15}$.

6. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan 5x)$ có kết quả là:

A. $\dfrac{\pi}{2}$. **B.** 0. **C.** ∞. **D.** $\dfrac{5\pi}{2}$.

7. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x)$ có kết quả là:

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

8. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x^3+3x^2}-2x+4}{\sqrt{2x^3}-7x^2-5x+7}\right)$ có kết quả là:

A. 0. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{4}{7}$. **D.** ∞.

9. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$ có kết quả là:

A. $2e^{-1}$. **B.** e. **C.** $\dfrac{1}{e}$. **D.** e^{-2}.

10. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+3x^2-2x+4}{\sqrt{2x^3-7x^2-5x+7}}\right)$ có kết quả là:

A. $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

BÀI 4
HÀM SỐ LIÊN TỤC

***Mục tiêu học tập**: Sau khi học xong bài này, người học có thể:*
Trình bày được các khái niệm về hàm số liên tục và tính chất của hàm số liên tục

1. Khái niệm:

1.1. Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên miền D, $x_0\in D$. $y=f(x)$ được gọi là liên tục tại $x=x_0$ nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

Nếu $y=f(x)$ không liên tục tại $x=x_0$ ta nói $y=f(x)$ gián đoạn tại $x=x_0$

Ví dụ: Xét hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$

Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1=f(0)$. Vậy $f(x)$ liên tục tại $x=0$

1.2. Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên miền D, $x_0\in D$. Khi đó $y=f(x)$ được gọi là liên tục trái (phải) tại $x=x_0$ nếu:

$\lim\limits_{x\to x_{x_0}^-} f(x)=f(x_0)(\lim\limits_{x\to x_{x_0}^+} f(x)=f(x_0))$

Hơn nữa, $y=f(x)$ được gọi là liên tục trong $(a;b)$ nếu $y=f(x)$ liên tục tại mọi điểm của $(a;b)$

2. Các tính chất và định lý:

2.2. Định lý: Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại $x=x_0$ khi và chỉ khi $y=f(x)$ liên tục trái và liên tục phải tại $x=x_0$

Ví dụ: Xét hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$. Ta có $f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1=f(0)$

và $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{|x|}=-\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=-1\neq f(0)$.

Vậy $f(x)$ liên tục phải tại $x=0$, nhưng không liên tục trái tại $x=0$.

2.3. Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên D. Khi đó tập hợp các điểm $M(x,(f(x))$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy, khi x thay đổi trong D được gọi là đồ thị của hàm số $y=f(x)$ trên D

2.4. Định lý: Đồ thị của hàm số liên tục là một đường liền nét.

2.5. Định lý: Nếu $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì $y=f(x)$ bị chặn trên $[a;b]$, tức là $\exists M>0:|f(x)|\le M,\forall x\in D$

2.6. Định lý: Nếu $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì $y=f(x)$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[a;b]$, tức là $\exists x_1,x_2:\begin{cases}f(x_1)\ge f(x),\forall x\in D\\ f(x_2)\le f(x),\forall x\in D\end{cases}$

2.7. Định lý: Nếu $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì $y=f(x)$ nhận mọi giá trị trung gian giữa $f(a)$ và $f(b)$

2.8. Định lý: Nếu $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì có $c \in (a;b)$ để $f(c) = 0$, nói cách khác phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong $(a;b)$

Ví dụ: Chứng minh rằng phương trình $x^9 - 3x^4 + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trong $(0;1)$.

3. Điểm gián đoạn, phân loại điểm gián đoạn:

x_0 là điểm gián đoạn của $y = f(x)$ khi

+ $y = f(x)$ không xác định tại x_0

+ Không tồn tại giới hạn của $y = f(x)$ khi $x \to x_0$

+ Tồn tại giới hạn của $y = f(x)$ khi $x \to x_0$, nhưng giới hạn này khác $f(x_0)$

Như vậy ta có thể phân loại các điểm gián đoạn như sau:

+ x_0 là điểm gián đoạn loại 1 khi $\exists f(x_0^-), f(x_0^+)$. Đặc biệt khi $f(x_0^-) = f(x_0^+)$ thì ta nói x_0 là điểm gián đoạn có thể bỏ được.

Các trường hợp khác gọi là điểm gián đoạn loại 2.

❖ **Bài tập củng cố:**

1. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{khi } x < 0 \\ x + k & \text{khi } x \ge 0 \end{cases}$. Với giá trị nào của k thì hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$?

A. $k = -1$. **B.** $k = 0$. **C.** $k \ne 1$. **D.** $k = 1$.

2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{x} & \text{khi } x \ne 0 \\ \text{k} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Với giá trị nào của k thì hàm số $f(x)$ liên tục trên tập hợp số thực R ?

A. $k = 0$. **B.** $k = 3$. **C.** $k = \dfrac{1}{3}$. **D.** $k \ne 3$.

3. Xét tính liên tục của hàm số sau tại $x = 3$: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - x - 6}; x \ne 3 \\ \dfrac{10}{3}; x = 3 \end{cases}$

4. Xác định a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{a^2(x-2)}{\sqrt{x-2} + 2}; x < 2 \\ (1-a)x; x \le 2 \end{cases}$ liên tục trên R

5. Tìm m để hàm số sau liên tục trên R: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}; x > 0 \\ 2x^2 + 3m + 1; x \le 0 \end{cases}$.

CHƯƠNG 2
ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN SỐ

BÀI 1
ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

Mục tiêu học tập: *Sau khi học xong bài này, người học có thể:*
Trình bày được các khái niệm về đạo hàm và tính chất của đạo hàm hàm số một biến số, tính được đạo hàm của hàm số hợp, hàm số ngược của hàm số một biến số. Vận dụng được ứng dụng của đạo hàm trong các bài toán thực tế.

1. Khái niệm

1.1. Bài toán mở đầu:

Xét đường cong $(C): y = f(x)$, một điểm $M_0(x_0, y_0)$ cố định trên (C) và một cát tuyến MM_0. Nếu $M(x, y)$ chạy trên đường cong (C) đến điểm $M_0(x_0, y_0)$ mà cát tuyến MM_0 dần tới một vị trí tới hạn TM_0, thì đường thẳng TM_0 gọi là tiếp tuyến của đường cong (C) tại điểm $M_0(x_0, y_0)$. Vậy khi nào thì $(C): y = f(x)$ có tiếp tuyến tại $M_0(x_0, y_0)$ và hệ số góc của tiếp tuyến đó được tính như thế nào?

Đặt $\begin{cases} \Delta x = x - x_0 \\ \Delta y = y - y_0 = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \end{cases}$ thì hệ số góc của cát tuyến MM_0 là $\tan\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Cho điểm $M_0(x_0, y_0)$ tiến dần đến M dọc theo đường cong (C), khi đó $\Delta x \to 0$, nếu tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ dần tới một giới hạn xác định thì β cũng dần đến một góc xác định là α, nghĩa là cát tuyến MM_0 dần tới vị trí tới hạn TM_0 và tạo với Ox một góc α.

Từ đó, nếu tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ dần tới một giới hạn xác định khi $\Delta x \to 0$ thì đường cong $(C): y = f(x)$ có tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ và hệ số góc của tiếp tuyến là:

$$\tan\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \tan\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

1.2. Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D, $x_0 \in D$. Cho biến x số gia Δx thỏa $x_0 + \Delta x \in D$. Xét số gia hàm số: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Ta gọi giới hạn $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = I$ (nếu tồn tại hữu hạn) là đạo hàm của $y = f(x)$ tại x_0 và ta cũng nói $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0

Ký hiệu: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = I$

Nhận xét: nếu đặt $x = x_0 + \Delta x$ thì $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = I$.

Ví dụ: Tính đạo hàm của các hàm số sau bằng định nghĩa:

a/ $y = x^2$, b/ $y = \sin x$

Giải

a/ $y = x^2$ là hàm số xác định với mọi $x \in R$, ta lấy x_0 bất kỳ thuộc R.

$$f^{/}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0$$

Hay $(x_0^2)^{/} = 2x_0$. Vì x_0 là bất kỳ nên $(x^2)^{/} = 2x; \forall x \in R$

b/ $y = \sin x$ là hàm số xác định với mọi $x \in R$, ta lấy x_0 bất kỳ thuộc R.

Khi đó: $f^{/}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2\cos(\frac{x + x_0}{2})\sin(\frac{x - x_0}{2})}{x - x_0} =$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\cos(\frac{x + x_0}{2})\sin(\frac{x - x_0}{2})}{\frac{x - x_0}{2}} = \cos x_0$$

Hay $(\sin x_0)^{/} = \cos x_0$. Vì x_0 là bất kỳ nên $(\sin x)^{/} = \cos x; \forall x \in R$

1.3. Đạo hàm một phía:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D, $x_0 \in D$.

Ta gọi giới hạn $\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = I$ ($\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} = I$)(nếu tồn tại hữu hạn) là đạo hàm phải (trái) của $y = f(x)$ tại x_0. Ký hiệu: + Đạo hàm phải $I = f_+^{/}(x_0)$

+ Đạo hàm trái $I = f_-^{/}(x_0)$

1.4. Định lý: $\exists f^{/}(x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists f_+^{/}(x_0), \exists f_-^{/}(x_0) \\ f_+^{/}(x_0) = f_-^{/}(x_0) \end{cases}$

2. Các quy tắc tính đạo hàm:

2.1. $(C)^{/} = 0$

2.2. $(U \pm V)^{/} = U^{/} \pm V^{/}$

2.3. $(CU)^{/} = C(U)^{/}$

2.4. $(U.V)^{/} = U^{/}.V + U.V^{/}$

2.5. $(\frac{U}{V})^{/} = \frac{U^{/}.V - U.V^{/}}{V^2} (V \neq 0)$

3. Đạo hàm hàm hợp, hàm ngược:

3.1. Đạo hàm hàm hợp:

Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm $u^{/}(x_0)$ tại x_0 và $u_0 = u(x_0)$. Tại $u_0 = u(x_0)$ hàm $y = y(u)$ có đạo hàm $y^{/}(u_0)$ đối với biến u. Khi đó tại x_0 hàm số $y = y(u(x))$ có đạo hàm $y_x^{/}(x_0)$ theo biến x và $y_x^{/}(x_0) = y_u^{/}(u_0).u_x^{/}(x_0)$ hay $y_x^{/} = y_u^{/}.u_x^{/}$.

Ví dụ 1 : $((x^3 + 4)^5)^{/} = 5.(x^3 + 4)^4.3x^2$

Ví dụ 2 : $(\sin^4(\ln x)) = 4\sin^3(\ln x).\frac{1}{x}$

3.2. Đạo hàm hàm ngược:

Giả sử các điều kiện sau được thỏa:

+ Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y^{/}(x_0) \neq 0$ tại x_0

+ Hàm số $y = f(x)$ là đơn ánh .

+ Hàm ngược $x = g(y)$ liên tục tại $y_0 = f(x_0)$

Khi đó hàm số ngược của hàm số $y = f(x)$ sẽ có đạo hàm $x'_y(y_0)$ tại y_0 và

$$x'_y(y_0) = \frac{1}{y'_x(x_0)}$$

Ta thường ký hiệu hàm ngược là $g(y)$ là $f^{-1}(x)$ và khi đó $(f^{-1})' = \frac{1}{f'}$

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm số: $y = \arctan x$, ta có $y = \arctan x$ là hàm số ngược của hàm số $x = \tan y$, nên $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$.

4. Các công thức đạo hàm cơ bản:

$+(C)' = 0$ $+(x^n)' = nx^{n-1}$ $+(e^x)' = e^x$ $+(a^x)' = a^x \ln a$ $+(\log_a^x)' = \frac{1}{x\ln a}$ $+(\sin x)' = \cos x$ $+(\cos x)' = -\sin x$ $+(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$ $+(\cot anx)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot an^2 x)$	$+(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $+(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $+(arc\cot anx)' = -\frac{1}{1+x^2}$ $+(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $+(shx)' = chx$ $+(chx)' = shx$ $+(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$ $+(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$

5. Các định lý:

5.1 Định lý: Hàm số sơ cấp có đạo hàm trên miền xác định của nó

5.2 Định lý: Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x = x_0$ thì $f(x)$ liên tục tại $x = x_0$

❖ Bài tập củng cố:

1. Tìm đạo hàm cấp một của các hàm số sau đây:

a. $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 4$, b. $y = x^2 e^{2x}$, c. $y = \frac{\text{arcsinx}}{\text{x}}$, d. $y = (3+2x^2)^4$

e. $y = \ln(\text{arcsin5x})$, f. $y = \cos(\cos(\cos 2x))$, g. $y = \arcsin\frac{2x^2}{x^4+1}, |x| < 1$

h. $y = \frac{\text{sinx}}{\cos^2 x} + \ln(\frac{1+\text{sinx}}{\text{cosx}})$, i. $y = \ln(chx + \sqrt{ch^2 x + 1})$, k. $y = 5sh^3\frac{x}{15} + 3sh^5\frac{x}{15}$

l. $y = \arctan(\text{th}\frac{x}{2})$, m. $y = \text{arccotan}(\frac{1}{\text{shx}})$, n. $y = \ln th\frac{x^2}{4}$

2. Tính đạo hàm cấp một của các hàm số:

$a.y=\frac{3}{4}x.\sqrt[3]{x^2}$; $b.y=\left(x^2+2x+2\right)e^{-x}$; $c.y=\frac{3^{3x}}{2^{2x}}$; $d.y=\ln\sqrt{\frac{1+\text{sinx}}{\text{1-sinx}}}$

$e.y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{\text{x}}{\text{a}}$; $f.y=\ln\frac{\sqrt{4\tan x+1}-2\sqrt{\text{tanx}}}{\sqrt{4\tan x+1}+2\sqrt{\text{tanx}}}$; $g.y=-\cot an^2\frac{x}{2}-2\ln\sin\frac{x}{2}$;

$h.y=\arctan\frac{\text{x}}{\sqrt{\text{a}^2-x^2}}$; $i.y=\arccos\frac{\text{9-x}^2}{\text{9+x}^2}$; $k.y=e^{-x}-\sin(e^{-x}).\cos(e^{-x})$;

$l.y=1-e^{\sin^2 3x}.\cos^2 3x$; $m.y=\ln\frac{2\ln^2\text{sinx+3}}{2\ln^2\text{sinx-3}}$; $n.y=\left(\frac{\text{sinx}}{\text{1+cosx}}\right)^2$; $p.y=\arcsin\left(\frac{\text{sinx}}{\sqrt{\text{1+sin}^2 x}}\right)$;

$q.y=\sin(\ln x).\cos(\text{lnx})\text{-ln}\frac{1}{\text{x}}$; $r.y=\frac{1}{2}\tan^2(\text{sinx})\text{+lncos(sinx)}$

3. Tính đạo hàm của các hàm số:

$a.y=x^x$; $b.y=x^{x^x}$; $c.y=(\text{sinx})^x$; $d.y=(\ln x)^{2x^2+1}$; $e.y=(\text{sinx})^{\text{tanx}}$; $f.y=2^{\cos^3 x-3\cos x}$;

$g.y=x^{\text{arcsinx}}$; $h.y=x^{\frac{1}{\ln x}}$.

4. Tính đạo hàm của các hàm số:

a. $y=x^3e^{x^2}\sin 2x$ b. $y=\frac{(x-2)^2\sqrt[1]{x+1}}{(x-5)^3}$

5. Tìm đạo hàm của:

$$a.y=\begin{cases}1-x,-\infty<x<1\\(1-x)(2-x),1\le x\le 2;\\2-x,2<x<+\infty\end{cases}$$

6. Hàm số $y=e^x$ là nghiệm của phương trình nào sau đây?

A. $y'-2y=0$. **B.** $y''-y'=0$. **C.** $2y'-y=0$. **D.** $y''-3y'=0$.

7. Tính đạo hàm cấp một của hàm số $y=\frac{\text{sinx}}{x}$ có kết quả là:

A. $\frac{x\,\text{sinx}-\cos x}{x^2}$. **B.** $\frac{(x-1)\cos x}{x^2}$. **C.** $\frac{x\cos x-\text{sinx}}{x^2}$. **D.** $\frac{\text{sinx}-x\cos x}{x^2}$.

8. Tính đạo hàm cấp một của hàm số $y=x^{2x}$ có kết quả là:

A. $(1+\ln x)$. **B.** $2x.x^{2x-1}$. **C.** $2x^{2x}(1+\ln x)$. **D.** $\ln x$.

9. Hàm số nào sau đây là đạo hàm của hàm số ngược của hàm số $y=\text{tanx}$?

A. $y'_x=\frac{1}{1+x^2}$. **B.** $x'_y=\frac{1}{1+y^2}$. **C.** $x'_y=\frac{-1}{1+y^2}$. **D.** $y'_x=\frac{-1}{1+x^2}$.

10. Tính đạo hàm cấp một của hàm số $y=x^{\frac{1}{x}}$ có kết quả là:

A. $x^{\frac{1}{x}}(1-\ln x)$. **B.** $\frac{x^{\frac{1}{x}}(1-\ln x)}{x^2}$. **C.** $\frac{(1-\ln x)}{x^2}$. **D.** $\frac{x^{\frac{1}{x}}(1-\ln x)}{x}$.

BÀI 2
VI PHÂN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ

***Mục tiêu học tập**: Sau khi học xong bài này, người học có thể:*
Trình bày được các khái niệm về vi phân và tính chất của vi phân, tính được vi phân của hàm số. Trình bày được khái niệm về đạo hàm và vi phân cấp cao và các định lý về hàm khả vi.

1. Vi phân

1.1. Khái niệm:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền D, $x_0 \in D$. Cho biến x số gia Δx thỏa $x_0 + \Delta x \in D$. Xét số gia hàm số: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Nếu $\Delta f = f'(x).\Delta x + \alpha(x)$, trong đó $\alpha(x)$ là vô cùng bé bậc cao hơn Δx khi $\Delta x \to 0$ thì $y = f(x)$ được gọi là khả vi tại $x = x_0$ và biểu thức $f'(x).\Delta x$ gọi là vi phân của $y = f(x)$ tại $x = x_0$. Ký hiệu: $df = f'(x)dx$ với $dx = \Delta x$ hay $\frac{df}{dx} = f'(x)$

1.2. Định lý:

Hàm số sơ cấp khả vi trên miền xác định của nó. Nghĩa là nó có đạo hàm trên miền xác định của nó.

1.3. Các quy tắc tính vi phân.

1.3.1. $d(u \pm v) = du \pm dv$

1.3.2. $dC = 0$

1.3.3. $d(Cv) = Cdv$

1.3.4. $d(uv) = vdu + udv$

1.3.5. $d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

2. Đạo hàm và vi phân cấp cao

2.1. Đạo hàm cấp cao:

Gọi đạo hàm của $y = f(x)$ là $f'(x)$ thì $f'(x)$ là một hàm số theo biến x. Nếu $f'(x)$ cũng có đạo hàm thì đạo hàm đó gọi là đạo hàm cấp hai của $y = f(x)$. Ký hiệu $f''(x) = (f'(x))'$

Tương tự ta cũng định nghĩa được đạo hàm cấp ba của $y = f(x)$ và $f'''(x) = (f''(x))'$.

Đạo hàm của đạo hàm cấp $n-1$ của $y = f(x)$ được gọi là đạo hàm cấp n của x. Ký hiệu: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

Ví dụ: Tính đạo hàm cấp n của : $a/\ y = \sin x; b/\ y = \frac{1}{x};$

Giải:

a/ $y = \sin x$; Ta có

$$y=\sin x \to y^{/}=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2}) \to$$

$$y^{//}=\cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin(x+\frac{2\pi}{2})$$

$$y^{///}=\cos(x+\frac{2\pi}{2})=\sin(x+\frac{3\pi}{2})$$

...

$$y^{(n)}=\cos\left[x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right]=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$$

Vậy: $y^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$

b/ $y=\frac{1}{x}$; Ta có

$$y=\frac{1}{x} \to y^{/}=-\frac{1}{x^2} \to y^{//}=\frac{2}{x^3} \to y^{///}=-\frac{2.3}{x^4} \to \ldots \to y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

Vậy: $y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

2.2. Vi phân cấp cao:

Ta cũng lý luận tương tự như trên và nếu $df=f^{/}(x)dx$ là vi phân cấp một của $y=f(x)$ thì $d^2 f=f^{//}(x)d^2x$ là vi phân cấp hai của $y=f(x)$. Hơn nữa, ký hiệu $d^n f=f^{(n)}(x)d^n x$ là vi phân cấp n của $f(x)$.

Ví dụ 1: $d^n \sin x=\sin(x+n\frac{\pi}{2})d^n x$

Ví dụ 2: $d^n \frac{1}{x}=(-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} d^n x$

3. Các định lý cơ bản về hàm khả vi:

3.1. Định nghĩa:

Cho $y=f(x)$ xác định trên D. Ta nói $y=f(x)$ đạt cực đại(cực tiểu) tại $x_0 \in D$ nếu có một lân cận V của x_0 sao cho: $f(x_0)\geq f(x), \forall x\in V (f(x_0)\geq f(x), \forall x \in V)$

Các điểm cực đại, cực tiểu nói chung gọi là cực trị địa phương.

3.2. Định lý Fermat:

Nếu hàm số $y=f(x)$ đạt cực trị tại điểm x_0 và tồn tại đạo hàm tại x_0 thì $f^{/}(x_0)=0$

3.3. Định lý Roll:

Cho hàm số $y=f(x)$. Nếu các điều kiện sau thỏa:

+ $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$

+ $f(x)$ khả vi trong $(a;b)$

+ $f(a)=f(b)$

Thì tồn tại $c\in(a;b)$ để $f^{/}(c)=0$

3.4. Định lý Lagrange: Cho hàm số $y=f(x)$. Nếu các điều kiện sau thỏa:

+ $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$

+ $f(x)$ khả vi trong $(a;b)$

Thì tồn tại $c\in(a;b)$ để $f'(c)=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$

3.5. Định lý Cauchy: Giả sử $f(x), g(x)$ là hai hàm số thỏa

+ $f(x), g(x)$ liên tục trên $[a;b]$, khả vi trong $(a;b)$

+ $g'(x)\neq 0, \forall x\in(a;b)$

Thì tồn tại $c\in(a;b)$ để $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}$

Ví dụ: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a/ $|\text{sinx-siny}|\leq|\text{x-y}|, \forall x,y\in R$

b/ $\ln(1+x)<x, \forall x>0$

b/ $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}, 0<b<a$

Chứng minh:

a/ Xét hàm số $f(x)=\text{sinx}$, ta có f liên tục trên R, f khả vi trên R và có đạo hàm $f'(x)=\text{cosx}, \forall \text{x}\in \text{R}$

Áp dụng định lý Lagrange trên $[a;b]\subset R$. Ta có $\forall c\in R, a<c<b$ thì

$$f'(c)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\Leftrightarrow \text{cosx}=\frac{\text{sinx}-\sin y}{x-y}\Leftrightarrow \text{(x-y).cosx}=\text{sinx}-\sin y$$

Từ đó $|\text{sinx}-\sin y|=|\text{(x-y).cosx}|=|\text{(x-y)}|.|\text{cosx}|\leq|\text{x-y}|$ vì $|\text{cosx}|\leq 1$

b/ Ta có $\ln(1+x)<x, \forall x>0 \Leftrightarrow \ln(1+x)-x<, \forall x>0$.

Xét hàm số $f(x)=\ln(1+x)-x, \forall x>0$, hàm số f liên tục và có đạo hàm (hay khả vi) $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-1, \forall x\in[0;x]$

Áp dụng định lý Lagrange ta có:

$$f'(c)=\frac{f(0)-f(x)}{0-x}\Leftrightarrow\frac{1}{c+1}-1=\frac{-\ln(1+x)+x}{-x}\Leftrightarrow x(\frac{1}{c+1}-1)=\ln(1+x)-x$$

$$\Leftrightarrow -x(\frac{c}{c+1})=\ln(1+x)-x$$

Vì $c>0, x>0$ nên $-x(\dfrac{c}{c+1})<0$. Ta suy ra điều cần phải chứng minh.

❖ **Bài tập củng cố:**

1. Tìm vi phân của các hàm số sau:

a. $y=\text{arctanx}$ b. $w=e^{t^3}$ c. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a})$ d. $y=\arctan\dfrac{\text{u}}{\text{v}}$

2. a. $y=x^5+2x^4-3x^3+\dfrac{1}{2}x^2-x+3$. Tìm y', y'', y'''

b. $y=x\sqrt{1+x^2}$. Tìm y''

c. $y=x^2e^x$. Tìm $y^{(20)}(0)$

HD: Áp dụng công thức Lepnit: Nếu u,v là các hàm số khả vi n lần thì

$$(u.v)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i.u^{(i)}.v^{(n-i)}$$

3. a. $y = (2x-3)^3$. Tìm dy, d^2y, d^3y, b. $y = \sqrt{1+x^2}$. Tìm d^2y.

4. Vi phân của hàm số $y = \arctan x$ là:

A. $\frac{dx}{1+x^2}$. **B.** $\frac{-dx}{1+x^2}$. **C.** $\frac{dx}{1-x^2}$. **D.** $\frac{dx}{1+x}$.

5. Biểu thức $M = \frac{-dx}{1+x^2}$ là vi phân của hàm số nào sau đây?

A. $y = \arctan x$. **B.** $y = \arcsin x$. **C.** $y = \arccos x$. **D.** $y = \text{arc}\,cot\,x$.

5. Biểu thức $N = -e^{-3x}dx$ là vi phân của hàm số nào sau đây?

A. $y = -e^{-3x}$. **B.** $y = \frac{1}{3}e^{-3x}$. **C.** $y = e^{-3x}$. **D.** $y = -\frac{1}{3}e^{-3x}$.

6. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = x\sqrt{1+x^2}$ có kết quả là:

A. $\frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^2}$. **B.** $\frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)}$. **C.** $\frac{x(3+x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. **D.** $\frac{x(3+2x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

7. Tính đạo hàm cấp n (n là số tự nhiên) của hàm số $y = \frac{1}{2x}$ có kết quả là:

A. $\frac{(-1)^{n+1}n!}{2x^{n+1}}$. **B.** $\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$. **C.** $\frac{(-1)^n n!}{2x^{n+1}}$. **D.** $\frac{n!}{2x^{n+1}}$.

BÀI 3
MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM

***Mục tiêu học tập**: Sau khi học xong bài này, người học có thể:*
*Tính được giới hạn của hàm số qua quy tắc **DE $L^{/}$HOPITAL**, khảo sát một số hàm số, áp dụng công thức Taylor, Maclarrin để khai triển một số hàm số.*

1.Quy tắc DE $L^{/}$HOPITAL để tính giới hạn của hàm số

1.1.Quy tắc:

Giả sử $f(x), g(x)$ thỏa các tính chất sau:

+ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ hoặc $+\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$

+ $g^{/}(x) \neq 0$ với mọi x thuộc lân cận của x_0

Lúc này, nếu tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^{/}(x)}{g^{/}(x)}$(hữu hạn hoặc vô hạn) thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^{/}(x)}{g^{/}(x)}$

*Lưu ý rằng: quy tắc trên có thể áp dụng nhiều lần liên tiếp cho đến khi giới hạn xác định. Quy tắc vẫn đúng khi x dần đến vô tận. Đối với các dạng vô định khác ta đưa về dạng $\dfrac{0}{0}$ hoặc $\dfrac{\infty}{\infty}$ như sau:

+ Dạng $0.\infty$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} = \lim\limits_{x\to x_0}.\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$

+ Dạng $\infty - \infty$: $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x) - g(x)\right] = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{g(x).f(x)}}$

+ Dạng $0^0, 1^\infty, \infty^0$: Áp dụng công thức: $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\ln\left[f(x)\right]}$

1.2. Ví dụ:

a/ Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \mathrm{sinx}}{\mathrm{x}^3}$

b/ Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tanx\text{-}x}}{x - \mathrm{sinx}}$

c/ Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{xcosx\text{-}sinx}}{x^2\,\mathrm{sinx}}$

Giải:

a/ Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \mathrm{sinx}}{\mathrm{x}^3}\left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \cos x}{3\mathrm{x}^2}\left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x} = \dfrac{1}{6}$

b/ Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tanx\text{-}x}}{x - \mathrm{sinx}}\left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}\text{-}1}{1 - \cos \mathrm{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x\left(1 - \cos \mathrm{x}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1 - \cos x\right)\left(1 + \cos x\right)}{\cos^2 x\left(1 - \cos \mathrm{x}\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1 + \cos x\right)}{\cos^2 x} = 2$

c/ Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{xcosx\text{-}sinx}}{x^2\,\mathrm{sinx}}\left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - x\sin x - \cos x}{2x\sin x + x^2\cos x} = -\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{2x\sin x + x^2\cos x} =$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x + x\cos x}\left(\frac{0}{0}\right) = -\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\cos x + \cos x - x\sin x} = -\frac{1}{3}$$

2. Khảo sát hàm số.

2.1.Tính tăng, giảm của hàm số.

Ta có **định lý** sau: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm(khả vi) trên khoản (a,b)khi đó

i/ Nếu hàm số tăng trên khoản (a,b) thì $f^{/}(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$

ii/ Nếu hàm số giảm trên khoản (a,b) thì $f^{/}(x) \leq 0, \forall x \in (a,b)$

Ví dụ: Xét tính tăng giảm của $y = \sqrt{4-x^2}$

Giải

Tập xác định của hàm số là $4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

Tính đạo hàm cấp 1 của hàm số: $y^{/} = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

Và $y^{/} = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên:

x	-2		0		2
$y^{/}$		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có: Hàm số tăng trong khoản $(-2;0)$ và giảm trong khoản $(0;2)$.

2.2. Cực trị của hàm số:

2.2.1. Định lý: Cho $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 \in (a,b)$(x_0 gọi là điểm dừng) khi đó

a/ Nếu $y = f(x)$ có $f^{/}(x)$đổi dấu từ dương sang âm khi x chạy qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực đại tại x_0.

b/ Nếu $y = f(x)$ có $f^{/}(x)$đổi dấu từ âm sang dương khi x chạy qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0.

Ví dụ: Tìm cực trị của: a/ $y = x + \dfrac{1}{x}$;

Giải: $y = x + \dfrac{1}{x}$;

Tập xác định của hàm số là $x \neq 0$

Tính đạo hàm cấp 1 của hàm số: $y^{/} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

Và $y^{/} = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \rightarrow y = \dfrac{3}{2} \\ x = -1 \rightarrow y = 0 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	CT	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có: Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$, giá trị cực đại là $y_{CĐ}=0$ và Hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$, giá trị cực tiểu là $y_{CT}=\frac{3}{2}$

Bên cạnh đó ta còn có thể đánh giá cực trị bằng định lý sau:

2.2.2. Định lý: Cho $y=f(x)$ có đạo hàm trong (a,b), $x_0\in(a,b)$ là điểm dừng của hàm số và $y=f(x)$ có đạo hàm cấp hai tại x_0. Khi đó:

a/ Nếu $f''(x_0)<0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0

b/ Nếu $f''(x_0)>0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0

Lưu ý rằng định lý trên không thể áp dụng trong trường hợp $f'(x_0)=0, f''(x_0)=0$ và các cực trị mà ta đã xét ở trên gọi là cực trị địa phương.

2.3. Giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm số.

2.3.1. Định nghĩa: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D chứa trong tập hợp số thực R. Khi đó:

a/ Nếu có $x_0\in D$ thỏa $f(x)\le f(x_0), \forall x\in D$ thì ta nói $M=f(x_0)$ là giá trị lớn nhất của hàm số trên D, ký hiệu $M=\underset{x\in D}{Max}f(x)$

b/ Ngược lại, nếu có $x_0\in D$ thỏa $f(x)\ge f(x_0), \forall x\in D$ thì ta nói $M=f(x_0)$ là giá trị nhỏ nhất của hàm số trên D, ký hiệu $M=\underset{x\in D}{Min}f(x)$.

2.3.2. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn.

Để tìm các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[a,b]$ ta thực hiện như sau:

+ Tìm các điểm cực trị (điểm dừng)của của hàm số

+ Tính các giá trị của các điểm dừng và trên biên của đoạn $[a,b]$, so sánh chúng và ta sẽ có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên đoạn.

Ví dụ:

a/ Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=x^2-2|x|+2$,trên đoạn $\left[\frac{-1}{2},\frac{3}{2}\right]$

Giải: $y=x^2-2|x|+2$

Miền xác định của hàm số là R và $y=x^2-2|x|+2=\begin{cases} y_1=x^2-2x+2, x\ge 0\\ y_2=x^2+2x+2; x<0\end{cases}$

Như vậy bài toán ban đầu đưa về bài toán tìm giá trị lớn và nhỏ nhất của 2 hàm số: $y_1=x^2-2x+2$ trên đoạn $\left[0;\frac{3}{2}\right]$ và $y_2=x^2+2x+2$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};0\right]$

Ta có $\begin{cases} y_1'=2x-2=0\Leftrightarrow x=1\rightarrow y_1=1\\ y_2'=2x+2=0\Leftrightarrow x=-1\rightarrow y_2=1\end{cases}$

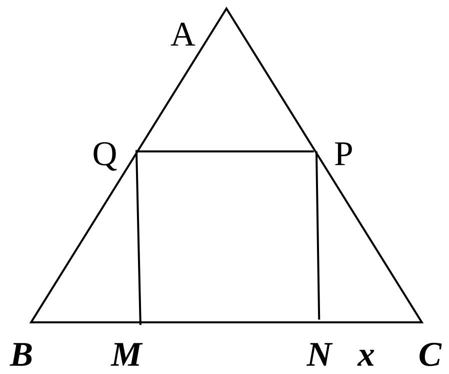
Đối với hàm số $y_1 = x^2 - 2x + 2$ trên đoạn $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ thì tại các đầu mút $x = 0$ thì $y = 2$, tại $x = \frac{3}{2}$ thì $y = \frac{5}{4}$.

Đối với hàm số $y_2 = x^2 + 2x + 2$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ thì tại các đầu mút $x = 0$ thì $y = 2$, tại $x = -\frac{1}{2}$ thì $y = \frac{5}{4}$.

So sánh các giá trị trên ta có kết luận sau: Giá trị lớn nhất của hàm số ban đầu là $y = 2$ đạt được tại $x = 0$; Giá trị nhỏ nhất của hàm số ban đầu là $y = 1$ đạt được tại $x = \pm 1$.

b/ Cho tam giác đều ABC cạnh a, dựng một hình chữ nhật MNPQ thỏa MN nằm trên cạnh BC, P thuộc AC, Q thuộc AB. Xác định vị trí của hình chữ nhật có diện tích lớn nhất, tìm giá trị lớn nhất đó.

Giải:



Đặt $NC = x, x \geq 0$. Suy ra $MN = BC - 2NC = a - 2x$

Xét tam giác CNP vuông tại N và có góc C bằng 60^0,

Ta có $\tan C = \frac{NP}{NC} \Rightarrow \tan 60^0 = \frac{NP}{x} \Rightarrow NP = x\sqrt{3}$

Từ đây ta có được diện tích của hình chữ nhật MNPQ là

$S(MNPQ) = S(x) = MN.NP = (a-2x).x\sqrt{3} = -2\sqrt{3}x^2 + a\sqrt{3}x$

Ta tìm đạo hàm của hàm $S(x)$ là $S'(x) = -2\sqrt{3}x^2 + a\sqrt{3}x = -4x\sqrt{3} + a\sqrt{3}$

Và $S'(x) = -2\sqrt{3}x^2 + a\sqrt{3}x = -4x\sqrt{3} + a\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4}$

Lập bảng biến thiên của hàm số $S(x)$

x	0	$\frac{a}{4}$	$+\infty$
y'	+	0	$-$
y	0 $\nearrow$	CĐ	$\searrow$

$S(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = \frac{a}{4}$ và giá trị lớn nhất đó là $S(x) = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$

2.4. Tính lồi, lõm và điểm uốn của đường cong.

2.4.1. Định lý: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên khoản (a,b). Khi đó:

Nếu $f^{//}(x) < 0, \forall x \in (a,b)$ thì đường cong $y = f(x)$ lồi trên khoản (a,b)

Nếu $f^{//}(x) > 0, \forall x \in (a,b)$ thì đường cong $y = f(x)$ lõm trên khoản (a,b)

2.4.2. Định lý: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x_0 \in (a,b)$ và có đạo hàm cấp hai tại mọi điểm $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$, $y = f(x)$ có tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0, f(x_0))$. Khi đó nếu $f^{//}(x)$ đổi dấu khi x qua x_0 thì M_0 là điểm uốn của đường cong $y = f(x)$.

2.5. Tiệm cận của hàm số.

2.5.1. Tiệm cận ngang: Đường thẳng $y = y_0$ gọi là tiệm cận ngang của hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0 \left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y_0 \right)$

2.5.2. Tiệm cận đứng: Đường thẳng $x = x_0$ gọi là tiệm cận đứng của hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty \left(\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \right)$

2.5.3. Tiệm cận xiên: Đường thẳng $y = \text{ax+b}$ gọi là tiệm cận xiên của hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (\text{ax+b})] = 0 \left(\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (\text{ax+b})] = 0 \right)$

2.6. Khảo sát hàm số: Ta thực hiện theo các bước sau:

+ Tìm tập xác định của hàm số
+ Xét tính chẵn, lẻ, tuần hoàn(nếu có)
+ Tìm phương trình các đường tiệm cận(nếu có)
+ Tìm đạo hàm, xét dấu đạo hàm và lập bảng biến thiên
+ Tìm đạo hàm cấp hai, xét dấu đạo hàm cấp hai, xác định các khoản lồi, lõm và điểm uốn của đồ thị.
+ Vẽ đồ thị của hàm số.

3. Công thức Taylor:

3.1. Định lý: Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm hữu hạn đến cấp $(n+1)$ trong một khoảng chứa x và x_0, thì ta có công thức:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{/}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f^{//}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} (1)$$

Trong đó c nằm giữa x và x_0, ta còn viết $c = x_0 + \theta x, 0 < \theta < 1$.

+ (1) gọi là công thức **Taylor,** hàm $f(x)$ khai triển theo công thức (1) gọi là khai triển **Taylor** hàm $f(x)$ xung quanh điểm x_0.

+ Ta gọi $\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = r_n$ là phần dư thứ n trong khai triển **Taylor.**

Khi $x_0 = 0$ (1) trở thành:

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{/}(0)}{1!}.x + \frac{f^{//}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.x^{n+1} (2)$$

Trong đó c nằm giữa x và 0, ta còn viết $c = \theta x, 0 < \theta < 1$.

+ (2) gọi là công thức **Maclarrin,** hàm $f(x)$ khai triển theo công thức (2) gọi là khai triển **Maclarrin** hàm $f(x)$ xung quanh điểm 0.

3.2. Ví dụ: Khai triển **Taylor** các hàm số sau tại $x_0 = 0$:

a/ Khai triển **Taylor** các hàm số $y = e^x$ tại $x_0 = 0$

Giải

Ta có $y = e^x \to y^{(n)} = e^x$ và $y^{(n)}(0) = e^0 = 1$

Nên $y = e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + ...$

b/ Khai triển **Taylor** các hàm số $y = \sin x$ tại $x_0 = \frac{\pi}{2}$

Giải: Ta có $y = \sin x \to y^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$

Suy ra $f(x_0) = f(\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1;\ f^{/}(x_0) = f^{/}(\frac{\pi}{2}) = \sin\pi = 0$

$$f^{//}(x_0) = f^{//}(\frac{\pi}{2}) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$$

$$f^{///}(x_0) = f^{///}(\frac{\pi}{2}) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin 2\pi = 0$$

$$f^{////}(x_0) = f^{////}(\frac{\pi}{2}) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2}\right) = \sin\frac{5\pi}{2} = 1$$

Vậy $y = \sin x = 1 - \frac{1}{2!}(x - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{4!}(x - \frac{\pi}{2})^4 - \frac{1}{6!}(x - \frac{\pi}{2})^6 + \frac{1}{8!}(x - \frac{\pi}{2})^8 - ...$

❖ **Bài tập củng cố:**

1. Áp dụng quy tắc **DE** $L^{/}$ **HOPITAL** tìm các giới hạn sau:

1.1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$ 1.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$ 1.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x.e^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}$ 1.4. $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x$

1.5. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1})$, 1.6. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$, 1.7. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\ln x}$ 1.8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\ln(x+1)}$

1.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi - \text{arctanx}}{e^{\frac{3}{x}} - 1}$, 1.10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2 - (e^x + e^{-x})\text{cosx}}{x^4}$, 1.11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x}$,

1.12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x - 3xe^x + 3x^2}{\text{arctanx-sinx-}\frac{x^3}{6}}$, 1.13. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$, 1.14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{1 + 2\ln\sin x}$, 1.15. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\tan\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$,

1.16. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(1-x)}{\cot an\pi x}$, 1.17. $\lim\limits_{x\to 0}(x.\cot an\pi x)$, 1.18. $\lim\limits_{x\to 0}(\text{arcsin}x.\cot an\pi x)$,

1.20. $\lim\limits_{x\to 0}(1 - \text{cosx}).\text{cotanx}$, 1.21. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$, 1.22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \cot an^2 x\right)$,

1.23. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi - 2x)^{\text{cosx}}$, 1.24. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$, 1.25. $\lim\limits_{x\to\infty}(x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$, 1.26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\text{tanx}}{\text{x}}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

HD: Dùng công thức sau: $u^v = e^{v\ln u} \Rightarrow \lim u^v = e^{\lim v\ln u}$

2. a. Cho hình nón tròn xoay có đường sinh là l. Tìm bán kính R (theo l)của mặt đáy để hình nón có thể tích cực đại.

b. Trong tam giác cân có chu vi là 12. Hãy xác định cạnh của tam giác để diện tích của nó là lớn nhất.

c. Tìm trên $x = y^2$ các điểm gần điểm (0,3) nhất.

d. Một cái gương có hai phần, phần dưới là một hình chữ nhật, phần trên là một nửa hình tròn. Biết rằng chu vi của gương là p, tìm bán kính của hình tròn sao cho gương có diện tích lớn nhất.

3. Khảo sát sự biến thiên của hàm số:

$$a.y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$$

$$b.y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + x}$$

$$c.y = \frac{x^3+4}{x^2}$$

4. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$ có kết quả là:

A. e^{-6}. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 1^{∞}.

5. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\text{cotgx}$ có kết quả là:

A. ∞. **B.** 1. **C.** 0. **D.** -1.

6. Phương trình nào sau đây là tiếp tuyến với đường cong $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ tại điểm $A(3;2)$?

A. $y = 6x - 22$. **B.** $y = 8x - 27$. **C.** $y = 8x - 22$. **D.** $y = 4x + 22$.

7. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\text{sinx})^{tgx}$ có kết quả là:

A. ∞. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

8. Tính đạo hàm cấp n (n là số tự nhiên) của hàm số $y = \sin 4x$ có kết quả là:

A. $4^{n+1}\sin(4x + n\frac{\pi}{2})$. **B.** $4^{n-1}\sin(4x + n\frac{\pi}{2})$.

C. $\sin(4x + n\frac{\pi}{2})$. **D.** $4^{n}\sin(4x + n\frac{\pi}{2})$.

9. Tính đạo hàm cấp n (n là số tự nhiên) của hàm số $y = \frac{1}{2x}$ có kết quả là:

A. $\frac{(-1)^{n+1}n!}{2x^{n+1}}$. **B.** $\frac{(-1)^{n}n!}{x^{n+1}}$. **C.** $\frac{(-1)^{n}n!}{2x^{n+1}}$. **D.** $\frac{n!}{2x^{n+1}}$.

10. Tính đạo hàm cấp n (n là số tự nhiên khác 0) của hàm số $y = \ln 5x$ có kết quả là:

A. $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{5x^n}$. **B.** $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$. **C.** $\frac{(-1)^{n}(n-1)!}{5x^n}$. **D.** $\frac{(-1)^{n-1}n!}{x^n}$.

CHƯƠNG 3
TÍCH PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN SỐ

BÀI 1
TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

Mục tiêu học tập: *Sau khi học xong bài này, người học có thể:* *Trình bày được khái niệm nguyên hàm,tích phân bất định, tính được tích phân bất định của một số hàm số cơ bản.*

1. Khái niệm nguyên hàm:

$F(x)$ gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên miền D nếu và chỉ nếu $F'(x)=f(x),\forall x\in D$.

Ví dụ: Vì $(\sin x)'=\cos x$ nên nguyên hàm của $\cos x$ là $\sin x$.

2. Định lý :

Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên miền D, điều kiện cần và đủ để hàm số $G(x)$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên miền D là
$F(x)=G(x)+C,\forall x\in D$ (C là hằng số)

3. Khái niệm tích phân bất định

Tập hợp các nguyên hàm của hàm số $f(x):\{F(x)+C\}_{C\in R}$ được gọi là tích phân bất định của $f(x)$. Ký hiệu $\int f(x)dx=F(x)+C,(C\in R)$

*** Các tính chất**:

$+\int[f(x)\pm g(x)]=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

$+\int K.f(x)dx=K.\int f(x)dx$

$+\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$

$+\int f(x)dx=\int f(t)dt=\int f(u)du=\int f(z)dz=...$

4. Các công thức tích phân bất định cơ bản:

$+\int 0dx=C,C\in R$	$+\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C,C\in R$
$+\int adx=ax+C,C\in R$	$+\int \sin x dx=-\cos x+C,C\in R$
$+\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C,C\in R$	$+\int \cos x dx=\sin x+C,C\in R$
$+\int \dfrac{1}{x}dx=\ln x+C,C\in R$	$+\int \tan x dx=-\ln\lvert\cos x\rvert+C,C\in R$
$+\int \dfrac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C,C\in R$	$+\int \cot an x dx=\ln\lvert\sin x\rvert+C,C\in R$
$+\int e^x dx=e^x+C,C\in R$	$+\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C,C\in R$
$+\int \dfrac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot an x+C,C\in R$	$+\int \dfrac{1}{\sin x}dx=\ln\left\lvert\tan\dfrac{x}{2}\right\rvert+C,C\in R$

$+\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C, C \in R$ $+\int shxdx = chx + C$ *** Các công thức mở rộng khác** $+\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C, C \in R$ $+\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C, C \in R$ $+\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C, C \in R$	$+\int \frac{1}{\cos x}dx = \ln\left\|\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\right\| + C, C \in R$ $+\int chxdx = shx + C$ $+\int \frac{1}{\sqrt{a+x^2}}dx = \ln\left\|x+\sqrt{x^2+a}\right\| + C, C \in R$ $+\int \sqrt{a+x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a+x^2} + \frac{a}{2}\ln\left\|x+\sqrt{x^2+a}\right\| + C, C \in R$ $+\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C, C \in R$ $+\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C;\quad +\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cothx + C$

5. Các phương pháp tính tích phân bất định:

5.1. Phương pháp đổi biến: Cho tích phân $I = \int f(x)dx$

5.1.1. Dạng 1: Đặt $x = \varphi(t)$, $\varphi(t)$ khả vi đối với biến t. Từ đó ta có

$I = \int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

5.1.2. Dạng 2: Đặt $t = \phi(x)$, t biến mới, $\phi(x)$ khả vi. Ta có

$I = \int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(t)dt$

Ví dụ: Tính các tích phân sau:

a/ $I = \int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

Giải: Đặt $t = \sqrt[3]{x} \to t^3 = x \to 3t^2dt = dx; x^2 = t^6; \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{t^6} = t^2$

Suy ra $I = \int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \frac{\sin t.3t^2dt}{t^2} = 3\int \sin tdt = -3\cos t + C = -3\cos\sqrt[3]{x} + C$

b/ $J = \int \sqrt{a^2-x^2}dx$. Giải: Đặt $x = a\sin t, t \in \left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Ta có $x = a\sin t \to dx = a\cos tdt; \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a\sin^2 t} = a\sqrt{1-\sin^2 t} = a\cos t$

Suy ra $J = \int \sqrt{a^2-x^2}dx = a^2\int \cos^2 tdt = \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)dt$

Và $J = \frac{a^2}{2}(t + \frac{\sin 2t}{2}) + C = \frac{a^2}{2}(t + \sin t.\cos t) + C$

Mặt khác, với $x = a\sin t \to \sin t = \frac{x}{a} \to t = \arcsin\frac{x}{a}; \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$

Cuối cùng ta được kết quả: $J = \frac{a^2}{2}\left[\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a}.\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right] + C$

c/ $K = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$, Giải: Đặt $x = 2sht \Rightarrow dx = 2chtdt$

Suy ra $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{2chtdt}{\sqrt{4sh^2t+4}} = \frac{1}{2}\int \frac{2chtdt}{cht} = \int dt = t + C$

Với:

$x = 2sht \Rightarrow \frac{x}{2} = sht = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \Rightarrow x = e^t - e^{-t}$

$$\Rightarrow e^{2t} - xe^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} e^t = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2} \Rightarrow t = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right| = \ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right| - \ln\frac{1}{2} \\ e^t = \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2} < 0 \end{array}\right.$$

Vậy $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right| - \ln\frac{1}{2} + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right| + C'$.

5.2. Phương pháp tích phân từng phần: Giả sử $u(x), v(x)$ có các đạo hàm liên tục $u'(x), v'(x)$. Khi đó ta có: $\int udv = u.v - \int vdu$

Ví dụ: a/ Tính $M = \int x\ln xdx$

Giải: Đặt $\begin{cases} u = \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = xdx \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

Suy ra $M = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$

b/ Tính $N = \int x\sin xdx$

Giải: Đặt $\begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \sin xdx \rightarrow v = -\cos x \end{cases}$

Suy ra $M = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + C$

* Chú ý: Tích phân từng phần thường được áp dụng cho các dạng

$+\int p(x)\ln xdx \quad +\int p(x)\sin axdx \quad +\int p(x)e^{ax}dx \quad +\int p(x)\cos axdx$

$+\int p(x)\arcsin axdx \quad +\int p(x)\arccos axdx \quad +\int p(x)\arctan axdx \quad +\int p(x)\text{arccotan}\, axdx$

$+\int p(x)\ln^n xdx \quad +\int e^{ax}\sin bxdx \quad +\int e^{ax}\cos bxdx$

Trong đó $p(x)$ là một đa thức, $a, b \in R$ và tùy trường hợp hạn chế đặt U là hàm mũ.

Ví dụ: $K = \int e^x\cos xdx$

Giải: Đặt $\begin{cases} u = e^x \rightarrow du = e^xdx \\ dv = \cos xdx \rightarrow v = \sin x \end{cases}$

Suy ra $K = e^x\sin x - \int e^x\sin xdx + C = e^x\sin x - K_1 + C$

Tính $K_1 = \int e^x\sin xdx$. Lại đặt $\begin{cases} u = e^x \rightarrow du = e^xdx \\ dv = \sin xdx \rightarrow v = -\cos x \end{cases}$

Nên $K_1 = -e^x\cos x + \int e^x\cos xdx = -e^x\cos x + K$

Cuối cùng ta được $K = e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + K\right) + C \Rightarrow K = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + C$

6. Tích phân một số hàm thường gặp:

6.1. Hàm hữu tỉ: Xét tích phân $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ trong đó $p(x), q(x)$ là các đa thức.

6.1.1. Trường hợp 1: Nếu bậc của $p(x)$ lớn hơn bậc của $q(x)$ thì ta có thể thực hiện phép chia đa thức để tính tích phân trên một cách dễ dàng.

(tức $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int t(x) dx + \int \frac{n(x)}{q(x)} dx$, $n(x)$ có bậc bé hơn $q(x)$)

6.1.2. Trường hợp 2: Nếu bậc của $p(x)$ bé hơn bậc của $q(x)$ thì ta xét định lý sau:

6.1.3. Định lý: Phân thức thật sự $\frac{p(x)}{q(x)}$ luôn có thể phân tích thành tổng hữu hạn các phân thức có dạng sau: $\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{(x-a)^n}$, $\frac{1}{x^2+\alpha x+\beta} (\Delta = \alpha^2 - 4\beta < 0)$,

$\frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^n} (\Delta < 0, n \ge 2)$

Từ định lý trên ta thấy rằng $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ có thể phân tích thành tổng hữu hạn các tích phân sau: $+\int \frac{1}{x-a} dx,\quad +\int \frac{1}{(x-a)^n} dx,\quad +\int \frac{1}{x^2+a^2} dx,\quad +\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} (n \ge 2)$

6.1.4.Ví dụ 1: Tính các tích phân sau:

a/ $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$

b/ $\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int (x-a)^{-n} dx = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C$

c/ $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{\mathrm{a}} \arctan \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}} + C$

d/ $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, n \ge 2,$

Dùng tích phân từng phần với $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n} \Rightarrow du = \frac{-2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx$$

Suy ra $= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \left\{ \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx - a^2 \int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx \right\}$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1}$$

Hay : $I_{n+1} = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n$

Cuối cùng ta có công thức truy hồi: $I_n = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1}$ (*)

Áp dụng tính: $I = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$

Giải: Áp dụng công thức truy hồi (*) với $a=1$ và ta đặt $I_3 = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^3}$

Suy ra $I_1 = \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)} = \arctan x + C$

Và $I_2 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} I_1 = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x + C$

Cuối cùng $I_3 = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4} I_2 = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan x + C$.

6.1.5. Ví dụ 2: Tính tích phân $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, ta chia ra hai trường hợp $\Delta < 0$ và $\Delta > 0$. Ta có $ax^2+bx+c = a(x^2+\frac{b}{a}x+c) = a\left[(x^2+2.\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2)+(c-\frac{b^2}{4a^2})\right] =$

$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

Nếu $\Delta \geq 0$ thì $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{t^2-\alpha^2} (t=(x+\frac{b}{2a}), \alpha^2 = \frac{\Delta}{4a^2})$

Nếu $\Delta < 0$ thì $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{t^2+\alpha^2} (t=(x+\frac{b}{2a}), \alpha^2 = -\frac{\Delta}{4a^2})$

Ví dụ: Tính các tích phân sau:

a/ $\int \frac{dx}{x^2-2x-3}$

Giải:

$T = \int \frac{dx}{x^2-2x-3} = \int \frac{dx}{(x^2-2x+1)-4} = \int \frac{dx}{(x-1)^2-4} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-1-2}{x-1+2}\right) + C = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + C$

b/ $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$

$$K = \int \frac{dx}{(x^2+2.x.\frac{1}{2}+\frac{1}{4})+\frac{3}{4}} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\arctan\frac{(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{(2x+1)}{\sqrt{3}} + C$$

6.1.6. Ví dụ 3: Tính tích phân sau: $\int \frac{\mathrm{Ax+B}}{ax^2+bx+c}dx, A \neq 0, a \neq 0$

Ta có $\int \frac{\mathrm{Ax+B}}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx + (B-\frac{Ab}{2a})\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$

6.1.7. *Ví dụ 4*: Tính $I=\int\frac{x-3}{x^2+x+1}dx; J=\int\frac{2x^3+3x}{x^4+x^2+1}dx$

Giải: $I=\int\frac{x-3}{x^2+x+1}dx$. Ta có $\begin{cases} t=x^2+x+1\to dt=(2x+1)dx; \\ x-3=\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{7}{2}\end{cases}$,

Nên
$$I=\int\frac{x-3}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\frac{7}{2}\int\frac{1}{x^2+x+1}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{7}{\sqrt{3}}\arctan\frac{(2x+1)}{\sqrt{3}}+C$$

Giải $J=\int\frac{2x^3+3x}{x^4+x^2+1}dx$.

Đặt $u=x^2\to du=2xdx\Rightarrow J=\int\frac{2x^3+3x}{x^4+x^2+1}dx=\int\frac{(2x^2+3)xdx}{\left(x^2\right)^2+x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{(2u+3)du}{u^2+u+1}$

Tương tự bài tập trên $\begin{cases} t=u^2+u+1\to dt=(2u+1)dt; \\ 2u+3=(2u+1)+2\end{cases}$

$$J=\frac{1}{2}\int\frac{(2u+3)du}{u^2+u+1}=\frac{1}{2}\left[\int\frac{(2u+1)du}{u^2+u+1}+2\int\frac{du}{u^2+u+1}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\ln\left|u^2+u+1\right|+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{(2u+1)}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^4+x^2+1\right|+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{(2x^2+1)}{\sqrt{3}}+C$$

6.1.8. *Ví dụ 4*: Tính tích phân: $\int\frac{Ax+B}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx$,

Ta có $\int\frac{Ax+B}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx=\frac{A}{2a}.\int\frac{(2ax+b)}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx+(B-\frac{Ab}{2a})\int\frac{1}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx$

Đối với tích phân $\int\frac{(2ax+b)}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx$ ta thực hiện phép đổi biến

Đối với tích phân $\int\frac{1}{\left(ax^2+bx+c\right)^n}dx$,

Nếu $\Delta\geq 0$ thì $\int\frac{dx}{\left(\mathrm{ax}^2+bx+c\right)^n}=\frac{1}{a^n}\int\frac{dx}{\left(t^2-\alpha^2\right)^n}(t=x+\frac{b}{2a},\alpha^2=\frac{\Delta}{4a^2})$

Nếu $\Delta<0$ thì $\int\frac{dx}{\left(\mathrm{ax}^2+bx+c\right)^n}=\frac{1}{a^n}\int\frac{dx}{\left(t^2+\alpha^2\right)^n}(t=x+\frac{b}{2a},\alpha^2=-\frac{\Delta}{4a^2})$

Ví dụ tính $I=\int\frac{3x+2}{\left(x^2+2x+10\right)^2}dx$

**** Phần mở rộng: Tích phân các phân thức hữu tỉ nhờ phân tích thành các phân thức đơn giản**: Giả sử phân thức* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *là phân thức thật sự và*

$Q(x)=\left(x-a\right)^m...\left(ax^2+bx+c\right)^n$ *trong đó* ax^2+bx+c *có nghiệm liên hợp* *phức(không có nghiệm thực). Khi đó:*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^m}+\frac{A_2}{(x-a)^{m-1}}+...+\frac{A_m}{(x-a)}+\frac{B_1x+C_1}{(ax^2+bx+c)^n}+\frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^{n-1}}+...+\frac{B_nx+C_n}{(ax^2+bx+c)}$$

.

Ta có thể chia thành các trường hợp sau:

+ Mẫu số chỉ có những nghiệm thực khác nhau (các nghiệm chỉ là nghiệm đơn):

6.1.9. Ví dụ 5: $A=\dfrac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}=\dfrac{A}{(x-1)}+\dfrac{B}{(x-2)}+\dfrac{C}{(x-4)}$

Với các hệ số A,B,C được tìm bằng phương pháp đồng nhất thức.

+ Mẫu số chỉ có những nghiệm thực, trong đó có một số là nghiệm bội:

6.1.10.Ví dụ 6: $B=\dfrac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}=\dfrac{A}{(x-1)^3}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{A}{(x-1)}+\dfrac{D}{(x+3)}$

+Trong số các nghiệm của mẫu có các nghiệm phức đơn.

6.1.11. Ví dụ 7:

$$C=\frac{1}{x^2(x^3-1)}=\frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{1}{x^2(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-1}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}$$

+ Trong các nghiệm của mẫu số có nghiệm phức bội:

6.1.12. Ví dụ 8: $D=\dfrac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{Ax+B}{(x^2+1)^2}+\dfrac{Cx+D}{(x^2+1)}$

6.2. Hàm lượng giác

Xét tích phân: $\int R(\sin x,\cos x)dx$

6.2.1. Phương pháp chung:

Đặt $t=\tan\dfrac{x}{2}\Rightarrow x=2\arctan t$, suy ra $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2},\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2},\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

Từ đó ta đưa được hàm số ban đầu về dạng hàm số hữu tỉ.

Ví dụ: Tính $I=\int\dfrac{dx}{1+\sin x}$

Giải: $t=\tan\dfrac{x}{2}\Rightarrow x=2\arctan t$, suy ra $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2},\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$

$$I=\int\frac{dx}{1+\sin x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{1+t^2+2t}=\int\frac{2dt}{(t+1)^2}=-\frac{2}{t+1}+C=-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}+C$$

6.2.2. Một số trường hợp đặc biệt:

a/ Nếu $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ hàm lẻ theo $\sin x$, đặt $t=\cos x$

b/ Nếu $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ hàm lẻ theo $\cos x$, đặt $t=\sin x$

c/ Nếu $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ hàm chẵn theo $\sin x$ và $\cos x$, đặt $t=\tan x$ hoặc $t=co\tan x$.

Ví dụ: Tính các tích phân: $I_1=\int\frac{\cos^2 xdx}{1+\sin x}$; $I_2=\int\cos^2 x.\sin^3 xdx$;

$I_3=\int\frac{dx}{2\cos^2 x+2\sin x.\cos x+2\sin^2 x}$; $I_4=\int\frac{\left(\sin x+\sin^3 x\right)}{\cos 2x}dx$; $I_5=\int\frac{\cos^3 x+\cos^5 x}{\sin^2 x+\sin^4 x}dx.$

Giải:

$$I_1=\int\frac{\cos^2 xdx}{1+\sin x}=\int\frac{(1-\sin^2 x)dx}{1+\sin x}=\int(1-\sin x)dx=x-\cos x+C$$

$$I_2=\int\cos^2 x.\sin^3 x.dx=\int\cos^2 x.\sin^2 x.\sin x.dx=\int\cos^2 x.\left(1-\cos^2 x\right).\sin x.dx=$$

$$=\begin{cases}-\int t^2.\left(1-t^2\right).dt=\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}+C=\frac{\cos x^5}{5}-\frac{\cos x^3}{3}+C\\ t=\cos x\to dt=-\sin xdx\end{cases}$$

$$I_3=\int\frac{dx}{2\cos^2 x+2\sin x.\cos x+2\sin^2 x}=\int\frac{1}{2+2\tan x+2\tan^2 x}.\frac{dx}{\cos^2 x}=$$

$$=\begin{cases}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t+t^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{(2t+1)}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{(2\tan x+1)}{\sqrt{3}}+C\\ t=\tan x\to dt=\frac{dx}{\cos^2 x}\end{cases}$$

d/ Tích phân dạng $\int\sin^m x.\cos^n xdx$

Nếu n lẻ dương thì đặt $t=\sin x$, nếu m lẻ dương thì đặt $t=\cos x$

Nếu cả m và n đều là số chẵn dương thì ta dùng các phép biến đổi sau để biến đổi hàm dưới dấu tích phân. Trong quá trình biến đổi ta lưu ý hai công thức sau:

$\sin 2x=2\sin x.\cos x$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$

Ví dụ: Tính các tích phân:

$$I=\int\sin^4 x.\cos^5 xdx;\ J=\int\frac{\sin^3 x}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}}dx;\ K=\int\sin^2 x\cos^2 xdx;\ H=\int\cos^6 xdx$$

Giải

$$I=\int\sin^4 x.\cos^5 xdx=\int\sin^4 x.(\cos^2 x)^2.\cos xdx=\int\sin^4 x.(1-\sin^2 x)^2.\cos xdx$$

$$=\begin{cases}\int t^4(1-t^2)^2dt=\int(t^4-2t^6+t^8)dt=\frac{t^5}{5}-2\frac{t^7}{7}+\frac{t^9}{9}+C=\frac{\sin^5 x}{5}-2\frac{\sin^7 x}{7}+\frac{\sin^9 x}{9}+C\\ t=\sin x\to dt=\cos xdx\end{cases}$$

$$J=\int\frac{\sin^3 x}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}}dx=\int\frac{(1-\cos^2 x)\sin xdx}{\cos x\sqrt[3]{\cos x}}=$$

$$=\begin{cases}-\int\frac{(1-t^2)dt}{t.\sqrt[3]{t}}=-\int(t^{-\frac{4}{3}}-t^{\frac{2}{3}})dt=-(\frac{t^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}}-\frac{t^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}})+C=\frac{3}{\sqrt[3]{t}}+\frac{3}{5t\sqrt[3]{t^2}}+C=\frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}}+\frac{3}{5t\sqrt[3]{\cos^2 x}}+C\\ t=\cos x\to dt=-\sin xdx\end{cases}$$

$$K=\int\sin^2 x\cos^2 xdx=\frac{1}{4}\int\sin^2 2xdx=\frac{1}{4}\int\sin^2 2xdx=\frac{1}{8}\int(1-\cos 4x)dx=\frac{1}{8}\left(x-\frac{\sin 4x}{4}\right)+C$$

$$H=\int\cos^6 xdx=\int\left(\cos^2 x\right)^3 dx=\frac{1}{8}\int\left(1+\cos 2x\right)^3 dx=\frac{1}{8}\int\left(1+3\cos 2x+3\cos^2 2x+\cos^3 2x\right)dx$$

$$=\frac{1}{8}\int\left(1+3\cos 2x+\frac{3}{2}\left(1+\cos 4x\right)\right)dx+\frac{1}{8}\int\cos^3 2xdx$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{3}{8}\sin 4x\right)+\frac{1}{8}\int\left(1-\sin^2 2x\right)\cos 2xdx$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{3}{8}\sin 4x\right)+\frac{1}{16}\int\left(1-\sin^2 2x\right)d\left(\sin 2x\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{3}{8}\sin 4x\right)+\frac{1}{16}\left(\sin 2x-\frac{\sin^3 2x}{3}\right)+C$$

e/ Tích phân dạng $\int\tan^m xdx;\int co\tan^m xdx$, ta áp dụng các công thức

$\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}-1;\cot an^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}-1$ để hạ bậc liên tiếp bậc của tanx,cotanx

Ví dụ: Tính tích phân $M_7=\int\tan^7 xdx$

Ta có $M_1=\int\tan xdx=\int\dfrac{\sin xdx}{\cos x}=-\ln\left|\cos x\right|+C$

$$M_2=\int\tan^2 xdx=\int(\frac{1}{\cos^2 x}-1)dx=\tan x-x+C$$

$$M_3=\int\tan^3 xdx=\int(\frac{1}{\cos^2 x}-1)\tan xdx=\int(\frac{\tan x}{\cos^2 x}-\tan x)dx=\frac{\tan^2 x}{2}-M_1$$

$$M_4=\int\tan^4 xdx=\int(\frac{1}{\cos^2 x}-1)\tan^2 xdx=\int(\frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}-\tan^2 x)dx=\frac{\tan^3 x}{3}-M_2$$

$$M_5=\int\tan^5 xdx=\int(\frac{1}{\cos^2 x}-1)\tan^3 xdx=\int(\frac{\tan^3 x}{\cos^2 x}-\tan^3 x)dx=\frac{\tan^4 x}{4}-M_3$$

Từ đây ta có:

$$M=\int\tan^7 xdx=\int(\frac{1}{\cos^2 x}-1)\tan^5 xdx=\int(\frac{\tan^5 x}{\cos^2 x}-\tan^5 x)dx=\frac{\tan^6 x}{6}-M_5$$

Nếu ta đặt $I_m=\int\tan^m xdx, m\geq 1, m\in N$.

Thì ta có công thức truy hồi như sau: $I_m=\int\tan^m xdx=\dfrac{\tan^{m-1}}{m-1}-I_{m-2}$.

Đối với tích phân $J_m=\int co\tan^m xdx, m\geq 1, m\in N$ ta cũng lập luận tương tự.

f/ Tích phân dạng $\int\sin ax.\cos bxdx,\int\sin ax.\sin bxdx,\int\cos ax.\cos bxdx$. Thì dùng công thức biến tích thành tổng.

$$\sin x.\cos y=\frac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right]$$

$$\cos x.\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$$

$$\sin x.\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]$$

Ví dụ: Tính các tích phân $I=\int\sin 2x.\cos 5xdx;\ J=\int\cos x.\cos\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{x}{4}dx$

Giải: $I=\int \sin 2x.\cos 5x dx=\frac{1}{2}\int(\sin 7x-\sin 3x)\,dx=\frac{1}{2}(-\frac{\cos 7x}{7}+\frac{\cos 3x}{3})+C$

$$J=\int \cos x.\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{x}{4}dx=\frac{1}{2}\int \cos x.(\cos\frac{3x}{4}+\cos\frac{x}{4})dx=\frac{1}{2}\int(\cos x.\cos\frac{3x}{4}+\cos x.\cos\frac{x}{4})dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\cos\frac{7x}{4}+\cos\frac{x}{4}+\cos\frac{5x}{4}+\cos\frac{3x}{4}\right)dx=\frac{1}{4}(\frac{4}{7}\sin\frac{7x}{4}+4\sin\frac{x}{4}+\frac{4}{5}\sin\frac{5x}{4}+\frac{4}{3}\sin\frac{3x}{4})+C$$

6.3. Tích phân một số hàm vô tỉ:

6.3.1. Tích phân dạng:

Nếu $I=\int R(x,x^{\frac{m}{n}},...,x^{\frac{r}{s}})dx=\int R(x,\sqrt[n]{x^m},...,\sqrt[s]{x^r})dx$, đặt $x=t^k\,(t=\sqrt[k]{x})$, với $k=BCNN(n,...,s)$

Nếu $I=\int R(x,\left(\frac{\text{ax+b}}{\text{cx+d}}\right)^{\frac{m}{n}},...,\left(\frac{\text{ax+b}}{\text{cx+d}}\right)^{\frac{r}{s}})dx=\int R(x,\sqrt[n]{\left(\frac{\text{ax+b}}{\text{cx+d}}\right)^m},...,\sqrt[s]{\left(\frac{\text{ax+b}}{\text{cx+d}}\right)^r})dx$, đặt $\left(\frac{\text{ax+b}}{\text{cx+d}}\right)=t^k\,(t=\sqrt[k]{\left(\frac{\text{ax+b}}{\text{cx+d}}\right)})$, với $k=BCNN(n,...,s)$

Ví dụ: Tính các tích phân:

a/ $I=\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$, Đặt $t=\sqrt[6]{x}\to t^6=x\to 6t^5dt=dx;\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{t^6}=t^2;\sqrt{x}=\sqrt{t^6}=t^3$

Nên

$$I=\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}=6\int\frac{t^8dt}{1+t^2}=6\int(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{1+t^2})dt=$$

$$=6(\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+\arctan t)+C=6\left[\frac{(\sqrt[6]{x})^7}{7}-\frac{(\sqrt[6]{x})^5}{5}+\frac{(\sqrt[6]{x})^3}{3}-\sqrt[6]{x}+\arctan(\sqrt[6]{x})\right]+C$$

b/ $J=\int\frac{x\sqrt[3]{x+2}}{x+\sqrt[3]{x+2}}dx$. Đặt $t=\sqrt[3]{x+2}\to t^3=x+2(x=t^3-2)\to 3t^2dt=dx$

$$J=\int\frac{x\sqrt[3]{x+2}}{x+\sqrt[3]{x+2}}dx=3\int\frac{(t^3-2)t.t^2dt}{(t^3-2+t)}=3\int\frac{(t^3-2)t^3dt}{(t-1)(t^2+t+2)}=$$

$$=3\int\left[t^3-t-\frac{1}{4(t-1)}+\frac{5t-2}{4(t^2+t+2)}\right]dt=3\int\left\{\left[t^3-t-\frac{1}{4(t-1)}\right]+\frac{1}{4}\left[\frac{5t-2}{(t^2+t+2)}\right]\right\}dt$$

Ta tính riêng:

$$H=\frac{1}{4}\int\left[\frac{5t-2}{(t^2+t+2)}\right]dt=\frac{1}{4}\left\{\frac{5}{2}\int\frac{(2t+1)dt}{t^2+t+2}-\frac{9}{2}\int\frac{dt}{(t^2+t+2)}\right\}=$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{5}{2}\ln\left|t^2+t+2\right|-\frac{9}{2}\frac{\sqrt{7}}{2}\arctan\frac{(t+\frac{1}{2})}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right\}.$$

Vậy: $J=3\left\{\left[\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}-\frac{\ln|t-1|}{4}\right]+\frac{1}{4}\left[\frac{5}{2}\ln\left|t^2+t+2\right|-\frac{9}{2}\frac{\sqrt{7}}{2}\arctan\frac{(t+\frac{1}{2})}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right]\right\}+C$

Lưu ý rằng $t=\sqrt[3]{x+2}$.

6.3.2.Tích phân dạng: $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Nếu ax^2+bx+c có $\Delta \geq 0$ thì

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int \frac{dx}{\sqrt{a}\sqrt{(x+\frac{b}{2a})^2-\alpha^2}};t=(x+\frac{b}{2a}),\alpha^2=\frac{\Delta}{4a^2}$$

Nếu ax^2+bx+c có $\Delta < 0$ thì

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int \frac{dx}{\sqrt{a}\sqrt{(x+\frac{b}{2a})^2+\alpha^2}};t=(x+\frac{b}{2a}),\alpha^2=-\frac{\Delta}{4a^2}$$

Ví dụ: Tính các tích phân:

a/ $I=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+1+4}}=\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}}$

Áp dụng công thức $\int \frac{1}{\sqrt{a\ +x^2}}\text{dx}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+\text{C},C\in R$

Ta được $I=\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}}=\ln\left|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2+4}\right|+C$

b/ $J=\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}=\int \frac{dx}{\sqrt{3}\sqrt{-(x^2-2.x.\frac{2}{3}+\frac{4}{3})+1}}=\int \frac{dx}{\sqrt{3}\sqrt{1-(x-\frac{2}{3})^2}}$

Áp dụng công thức $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\text{dx}=\text{arcsinx+C},C\in R$

Ta được $J=\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}=\int \frac{dx}{\sqrt{3}\sqrt{1-(x-\frac{2}{3})^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(x-\frac{2}{3})+C$

6.3.3. Tích phân dạng: $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Ta có $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{A}{2a}.\int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+(B-\frac{Ab}{2a}).\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

Ví dụ: Tính các tích phân:

a/ $I=\int \frac{5x-3}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx=\frac{5}{2}\int \frac{(2x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}-8\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}=$

$=5\sqrt{x^2+2x+5}-8\ln\left|(x+1)+\sqrt{(x+1)^2+4}\right|+C$,

b/ $J=\int \frac{3x+4}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}dx=-\frac{1}{2}\int \frac{(-6x+4)dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}+6\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}=$

$=-\sqrt{-3x^2+4x-1}+6\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(x-\frac{2}{3})+C$

6.3.4. Tích phân dạng: a/ $\int R(x,\sqrt{\alpha^2+x^2})dx$; b/ + $\int R(x,\sqrt{\alpha^2-x^2})dx$;

c/ $\int R(x,\sqrt{x^2-\alpha^2})dx$. Đối với (1) đặt $x=\alpha\tan t$, (2) đặt $x=\alpha\sin t$, (3) đặt $x=\dfrac{\alpha}{\cos t}$

Ví dụ: Tính các tích phân: a/ $I=\int\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx;$

Đặt $x=a\sin t\to dx=a\cos tdt; x=a\sin t\to\sin t=\dfrac{x}{a}\to\cos t=\sqrt{1-(\dfrac{x}{a})^2}$

Ta có: $I=\int\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx=\int\dfrac{a\cos t.a\cos tdt}{a\sin t}=a\int\dfrac{\cos^2 t.\sin tdt}{\sin^2 t}=-a\int\dfrac{\cos^2 t.d(\cos t)}{1-\cos^2 t}=$

$=-a\int\dfrac{(\cos^2 t-1+1)d(\cos t)}{1-\cos^2 t}=a\int(1+\dfrac{1}{\cos^2 t-1})d(\cos t)$

$=a\cos t+\dfrac{a}{2}\ln\left|\dfrac{\cos t-1}{\cos t+1}\right|+C=a\sqrt{1-(\dfrac{x}{a})^2}+\dfrac{a}{2}\ln\left|\dfrac{\sqrt{1-(\dfrac{x}{a})^2}-1}{\sqrt{1-(\dfrac{x}{a})^2}+1}\right|+C$

b/ $J=\int\dfrac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$; Đặt $x=a\tan t\to dx=\dfrac{adt}{\cos^2 t}; t=\arctan\dfrac{x}{a}$

Ta có $J=\int\dfrac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}=\int\dfrac{adt}{a\tan t.\cos^2 t.\sqrt{a^2+a^2\tan^2 t}}=\dfrac{1}{a}\int\dfrac{dt}{\sin t}=\dfrac{1}{a}\ln\left|\tan\dfrac{t}{2}\right|$+C

Lưu ý rằng $t=\arctan\dfrac{x}{a}$

❖ **Bài tập củng cố:**

1. Tính các tích phân:

$a.\int\dfrac{\text{cosxdx}}{\sqrt{\text{sinx}}};\quad b.\int\dfrac{\text{xdx}}{\sqrt{\text{x}^2+1}};\quad c.\int\dfrac{\text{dx}}{(\text{x}+1)\sqrt{\text{x}}};\quad d.\int x.e^{-x^2}dx;\quad e.\int\dfrac{dx}{x\ln x.\ln(\ln x)};\quad f.\int\dfrac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}}dx$

$g.\int\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{16-e^x}}dx;\quad h.\int\dfrac{\arctan\sqrt{\text{x}}}{\sqrt{\text{x}}}.\dfrac{dx}{1+x};\quad i.\int\dfrac{\sin 4x}{\cos^4 2x+4}dx$.

2. Tính các tích phân:

$a.\int x\ln xdx\quad b.\int x^n\ln xdx\quad c.\int x^2\text{arctanxdx}\quad d.\int\sqrt{x}\ln xdx$

$e.\int x^2e^{-2x}dx\quad f.\int e^{2x}\text{cosxdx}\quad g.\int x\sin\sqrt{\text{x}}dx.$

3. Tính các tích phân:

$a.\int\dfrac{dx}{(2x-3)^2};\quad b.\int\dfrac{dx}{(x^2-6x+18)};\quad c.\int\dfrac{x-2}{x^2-4x+7}dx;\quad d.\int\dfrac{x+2}{x(x+3)}dx;\quad e.\int\dfrac{x^2dx}{x^6+2x^3+3}$

$f.\int\dfrac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}dx;\quad g.\int\dfrac{dx}{x^3-8};\quad h.\int\dfrac{x+1}{(x^2+1)(x^2+9)}dx;$

$i.\int\dfrac{x^2+2}{x^4+4}dx, HD: x^4+4=(x^2+2)^2-4x^2;\quad k.\int\dfrac{x^2}{x^2-4x+3}dx$

4. Tính các tích phân:

$a.\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; $b.\int \frac{1-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt[3]{1+x}}dx$; $c.\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}, (HD: x=\frac{1}{t})$; $d.\int \frac{3x+1}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}dx$

$e.\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx, (HD: t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}})$; $f/\int \frac{(x+2)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+2}} (HD: t=\sqrt{\frac{x+2}{x+1}})$.

5. Tính các tích phân

$a.\int \sin^2 xdx$; $b.\int \cos^4 xdx$; $c.\int \sin^4 xdx$; $d.\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx$; $e.\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$

$f.\int \frac{dx}{1-\sin x}$; $g.\int \frac{\cos^3 xdx}{\sin^2 x+\sin x}$; $h.\int \sin^2 \frac{x}{4}.\cos^2 \frac{x}{4}dx$; $i.\int \cot an^6 xdx$; $k.\int \sin 3x.\sin xdx$.

6. Tính tích phân $\int \frac{dx}{x\ln 3x}$ có kết quả là:

A. $\ln(\ln x)+C$. **B.** $\ln 3x+C$. **C.** $\ln(\ln 3x)$. **D.** $\ln(\ln 3x)+C$.

7. Tính tích phân $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$ có kết quả là:

A. $\tan 5x+C$. **B.** $\frac{1}{5}\tan 5x+C$. **C.** $\frac{1}{5}\text{ctg}\, 5x+C$. **D.** $-\frac{1}{5}\tan 5x+C$.

8. Tính tích phân $\int xe^x dx$ có kết quả là:

A. $e^x(x-1)$. **B.** $e^x x+C$. **C.** $e^x(x+1)+C$. **D.** $e^x(x-1)+C$.

9. Tính tích phân $\int \ln 5xdx$ có kết quả là:

A. $x(\ln 5x-1)+C$. **B.** $x(\ln 5x+1)+C$. **C.** $x\ln 5x+C$. **D.** $x\ln 5x+C$.

10. Tính tích phân $\int \frac{dx}{x^2-4x+3}$ có kết quả là:

A. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C$. **B.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x-3}\right|+C$. **C.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C$. **D.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|$.

11. Tính tích phân $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$ có kết quả là:

A. $\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+C$. **B.** $e^{2x}-e^x+x+C$. **C.** $e^{2x}-e^x+C$. **D.** $\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C$.

BÀI 2
TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Mục tiêu học tập: *Sau khi học xong bài này, người học có thể:*
Trình bày được khái niệm tích phân xác định, tính được tích phân xác định của một số hàm số cơ bản bằng hai phương pháp đổi biến và từng phần.

1. Bài toán tính diện tích hình thang cong.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định dương trên $[a;b]$.

Hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x), x = a, x = b, y = 0(\text{Ox})$ được gọi là hình thang cong. Bài toán là hãy tính diện tích của hình thang cong đó.

Ta chia đoạn $[a;b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, như vậy hình thang cong cũng đã được chia thành n cột nhỏ. Ta gọi Δx_i đồng thời là độ dài và đoạn thẳng $[x_{i-1}; x_i], i = 1,...,n$ và $d = max\{\Delta \text{x}_\text{i}\}$, trên mỗi Δx_i ta lấy một điểm t_i tùy ý. Nếu Δx_i khá bé ta có thể xem diện tích của cột cong thứ i xấp xỉ với diện tích của hình chữ nhật có hai kích thước Δx_i, $f(t_i)$. Suy ra $S_i = f(t_i).\Delta x_i$

Do đó diện tích của hình thang cong ban đầu có thể xấp xỉ với

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i$$

Từ đó ta có định nghĩa sau: Diện tích hình thang cong ban đầu là

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (d\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i \text{ (nếu tồn tại)}$$

2. Định nghĩa tích phân xác định:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định dương trên $[a;b]$. Ta chia đoạn $[a;b]$ thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Ta gọi Δx_i đồng thời là độ dài và đoạn thẳng $[x_{i-1}; x_i], i = 1,...,n$ và $d = max\{\Delta \text{x}_\text{i}\}$, trên mỗi Δx_i ta lấy một điểm t_i tùy ý, lập tổng $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i$ (gọi là tổng tích phân). Nếu tồn tại $I = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (d\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(t_i).\Delta x_i$ hữu hạn không phụ thuộc và phép chia đoạn $[a;b]$ và cách lấy điểm t_i trên mỗi Δx_i, thì I được gọi là tích phân xác định của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a;b]$, và khi đó ta nói $y = f(x)$ khả tích trên $[a;b]$. Ký hiệu: $I = \int_a^b f(x)dx$.

Ví dụ: Tính $\int_0^1 x^2 dx$ bằng định nghĩa, Ta chia đoạn $[0,1]$ thành n đoạn bằng nhau, nên $\Delta_i = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1}{n}, \forall i = \overline{1,n}$, ta chọn $t_i = x_i, \forall i = \overline{1,n}$.

Khi đó: $x_0 = 0, x_1 = \dfrac{1}{n}, x_2 = \dfrac{2}{n}, ..., x_n = \dfrac{n}{n} = 1$,

$$f(x_1) = \left(\frac{1}{n}\right)^2, f(x_2) = \left(\frac{2}{n}\right)^2, ..., f(x_n) = \left(\frac{n}{n}\right)^2 = 1 \text{ và } \Delta_i.f(x_i) = \frac{1}{n}.\left(\frac{i}{n}\right)^2,$$

Do đó $\int_0^1 x^2dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i.f(x_i) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}.\left(\frac{i}{n}\right)^2 =$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}$

3. Các định lý về hàm số khả tích:

3.1 Định lý 1: Nếu $y = f(x)$ khả tích trên $[a;b]$ thì $y = f(x)$ bị chặn trên $[a;b]$(tức là $\exists M > 0, |f(x)| \le M, \forall x \in [a;b]$)

3.2 Định lý 2: Nếu $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì $y = f(x)$ khả tích trên $[a;b]$.

3.3 Định lý 3: Nếu $y = f(x)$ bị chặn và đơn điệu trên $[a;b]$ thì nó khả tích trên $[a;b]$

4. Các tính chất

4.1. $\int_a^a f(x)dx = 0; \int_a^b Cdx = C(b-a); \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = ...$

4.2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx; \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4.3. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx; \int_a^b C.f(x)dx = C.\int_a^b f(x)dx$

4.4. Nếu $y = f(x)$ khả tích và $f(x) \ge 0, \forall x \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

4.5. Nếu $f(x) \le g(x)$ thì $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

4.6. Nếu $n \le f(x) \le t$ thì $n(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le t(b-a)$

4.7. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$

4.8. Nếu $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì có $c \in [a;b]$ sao cho:

$f(c) = \frac{1}{b-a}.\int_a^b f(x)dx \ge 0$

4.9. Nếu $y = f(x)$ là hàm số lẻ, tức là $f(-x) = -f(x)$, thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ và nếu $y = f(x)$ là hàm số chẵn, tức là $f(-x) = f(x)$, thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

4.10. Công thức Newton-Leibnitz: Nếu $y = f(x)$ liên tục và F(x) là một nguyên hàm của $f(x)$ thì : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$.

Ví dụ: Tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + e^x + \cos x)dx = (\frac{x^3}{3} + e^x + \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24} + e^{\frac{\pi}{2}}$

5. Các phương pháp tính tích phân xác định:

5.1. Phương pháp đổi biến:

5.1.1. Công thức 1: $\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt, t = u(x)$

5.1.2. Công thức 2: $\int_\alpha^\beta f(u)du = \int_a^b f(u(x))u'(x)dx), \alpha = u(a), \beta = u(b)$

Trong đó $t = u(x)$ khả vi trong $(a;b)$, liên tục trong $[a;b]$, f(u) liên tục trong miền giá trị của $t = u(x)$ và $f(u(x))u'(x)$ khả tích trên $[a;b]$.

Ví dụ: Tính $I = \int_0^1 \frac{e^{\arctan x}}{x^2+1}dx$;

Đặt $t = \arctan x \rightarrow dt = \frac{dx}{x^2+1}; x = 0 \rightarrow t = 0, x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

Ta có $I = \int_0^1 \frac{e^{\arctan x}}{x^2+1}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^t dt = e^t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{\pi}{4}} - 1$

5.2. Phương pháp từng phần: $\int_a^b udv = u.v\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

Ví dụ: Tính $I = \int_1^e x\ln x dx$; Đặt $\begin{cases} u = \ln x \rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = xdx \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

Ta có: $I = \int_1^e x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e xdx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}$

6. Ứng dụng của tích phân xác định:

6.1. Tính diện tích hình phẳng:

6.1.1. Nếu $D: \begin{cases} y = f(x) \\ a \le x \le b \end{cases} \Rightarrow S(D) = \int_a^b |f(x)|dx$

6.1.2. Nếu $D: \begin{cases} f_1(x) \le y \le f_2(x) \\ a \le x \le b \end{cases} \Rightarrow S(D) = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$

6.1.3. Nếu $D: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, a \le t \le b; \Rightarrow S(D) = \int_a^b |y(t).x'(t)|dt$

6.1.4. Nếu $D: \begin{cases} r = r(\varphi) \\ a \le \varphi \le b \end{cases} \Rightarrow S(D) = \frac{1}{2}\int_a^b r^2(\varphi)d\varphi$.

Ví dụ 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = x^2, y = 0, x = 0, x = 1$

Ta có $I=\int_0^1 x^2dx=\frac{x^3}{3}=\frac{1}{3}$

Ví dụ 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=x^3, y=x$

Ta có $I=\int_0^1 (x-x^3)dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}=\frac{1}{4}$

Ví dụ 3: Tính diện tích hình: $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases},(0\le t\le \frac{\pi}{2})$

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\sin t.a\sin tdx=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdx=\frac{ab\pi}{4}$

Ví dụ 4: Tính diện tích : $r=a,(0\le\varphi\le 2\pi)$

Ta có $S(D)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2d\varphi=\pi a^2$

6.2. Tính độ dài cung phẳng:

6.2.1. Nếu cung $AB:\begin{cases} y=f(x) \\ a\le x\le b \end{cases}\Rightarrow L=\int_a^b\sqrt{1+(f^/(x))^2}dx$

6.2.2. Nếu cung $AB:\begin{cases} y=y(t) \\ x=x(t) \end{cases},a\le t\le b;\Rightarrow L=\int_a^b\sqrt{(y^/(t))^2+(x^/(t))^2}dt$

6.2.3. Nếu cung $AB:\begin{cases} r=r(\varphi) \\ a\le\varphi\le b \end{cases}\Rightarrow L=\int_a^b\sqrt{(r(\varphi))^2+(r^/(\varphi))^2}d\varphi$

Ví dụ 5: Tính độ dài cung $AB:\begin{cases} y=x^2 \\ 0\le x\le 2 \end{cases}$

Ta có $L=\int_a^b\sqrt{1+(f^/(x))^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{1+(2x)^2}d(2x)=$

$$\left\{x\sqrt{1+(2x)^2}+\frac{1}{2}\ln\left|2x+\sqrt{(2x)^2+1}\right|\right\}\Bigg|_0^2=2\sqrt{17}+\frac{1}{2}\ln\left|4+\sqrt{17}\right|$$

Ví dụ 6: Tính độ dài đường astroid $AB:\begin{cases} y=\cos^3 t \\ x=\sin^3 t \end{cases},0\le t\le\frac{\pi}{2}$

Ta có $L=\int_a^b\sqrt{(y^/(t))^2+(x^/(t))^2}dt=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^2 t\cos^4 t+\cos^2 t\sin^4 t}dt=$

$$=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t.\cos tdt=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2tdt=\frac{3}{2}$$

Ví dụ 7: Tính độ dài đường xoắn ốc: $r=e^{\frac{\varphi}{2}},1\le\varphi\le 2$

$$L=\int_a^b\sqrt{(r(\varphi))^2+(r^/(\varphi))^2}d\varphi=\int_1^2\sqrt{e^{\varphi}+\frac{1}{4}e^{\varphi}}d\varphi=\frac{5}{4}\int_1^2 e^{\frac{\varphi}{2}}d\varphi=\frac{5}{8}e^{\frac{\varphi}{2}}\Bigg|_1^2=\frac{5}{8}(e-\sqrt{e})$$

6.3. Tính diện tích mặt tròn xoay:

6.3.1. Giả sử $(C):\begin{cases} y = f(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$ khi (C) xoay quanh Ox vật thể thu được có diện tích của mặt tròn xoay là $S = 2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f^{/}(x))^2}dx\,\pi$

6.3.2. Giả sử $(C):\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases}, a \le t \le b$

a/ Nếu (C) xoay quanh Ox thì diện tích mặt tròn xoay thu được là

$$S = 2\pi\int_a^b |y(t)|\sqrt{(x^{/}(t))^2 + (y^{/}(t))^2}dt$$

b/ Nếu (C) xoay quanh Oy thì diện tích mặt tròn xoay thu được là

$$S = 2\pi\int_a^b |x(t)|\sqrt{(x^{/}(t))^2 + (y^{/}(t))^2}dt\,.$$

6.4. Tính thể tích:

6.4.1. Thể tích của vật thể bất kỳ:

Xét vật thể giới hạn bởi một mặt cong và hai mặt phẳng $x = a, x = b(b > a)$. Giả sử biết diện tích thiết diện vuông góc với trục Ox là $S(x)$. Khi đó thể tích vật thể được tính bởi: $V = \int_a^b S(x)dx$

6.4.2. Thể tích vật thể tròn xoay:

a/ Giả sử $(C):\begin{cases} y = f(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$ khi (C) xoay quanh Ox vật thể thu được có thể tích là:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

b/ Giả sử $(C):\begin{cases} x = f(y) \\ a \le y \le b \end{cases}$ khi (C) xoay quanh Oy vật thể thu được có thể tích là:

$$V = \pi\int_a^b f^2(y)dy.$$

c/ Nếu ta có hình thang cong giới hạn bởi $y = f(x), y = 0, x = a, x = b(a < b)$. Khi quay hình thang quanh trục Oy thì thể tích thu được là $V = 2\pi\int_a^b x|f(x)|dx.$

❖ **Bài tập củng cố:**

1. Tính các tích phân:

a. $\int_{-1}^{1}\sqrt[3]{x}dx$;b. $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$;c. $\int_{-2}^{-3}\frac{dx}{x^2-1}$;d. $\int_0^1\frac{dx}{5+4x+x^2}$;e. $\int_0^1\frac{dx}{2-3x+x^2}$; f. $\int_0^1 e^{x+e^x}dx$;g. $\int_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{dx}{e^x-1}$;

2. Tính các tích phân:

a. $\int_{-2}^{1}\frac{dx}{(11+5x)^3}$; b. $\int_1^{\sqrt{e}}\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$; c. $\int_1^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; d. $\int_0^1(e^x-1)^4e^xdx$;

e. $\int_1^e (x\ln x)^2 dx$; f. $\int_1^e \cos(\ln x) dx$; g. $\int_0^3 \arcsin(\sqrt{\frac{x}{1+x}}) dx$, h. $\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx$, i. $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2} dx$

3. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a. $x^2+y^2=a^2; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\ge 1$; b. $y=x^3, y=x, y=2x$; c. $y^2+x^2=4x, y^2=2x$

d. $y=-x^2, x+y+2=0$; e. $y=\frac{16}{x^2}, y=17-x^2$

4. Tính độ dài đường cong phẳng:

a. $y=\ln\cos x, 0\le x\le \frac{\pi}{6}$; b. $y^2=x^3, 0\le x\le 1$;c. $\begin{cases} x=\cos^5 t \\ y=\sin^5 t \end{cases}, 0\le t\le \frac{\pi}{2}$;

d. $\rho=\sin^3\frac{\theta}{3}, 0\le \rho\le \frac{\pi}{2}$

5. Tính thể tích vật thể giới hạn bởi: $y=2x-x^2, y=0$ khi quay quanh Ox, quay quanh Oy.

6. Tính $\int_0^1 xdx$ bằng định nghĩa.

7. Cho D là miền phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2 (x\ge 0); x=0; y=4$, diện tích của D là:

A. $\frac{15}{2}$. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** $\frac{11}{5}$. **D.** $\frac{21}{4}$.

8. Cho D là miền phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+4; x-y+4=0$, diện tích của D là:

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

9. Cho D là miền phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^3 (x\ge 0); y=x; y=2x$, diện tích của D là:

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** 2. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

BÀI 3
TÍCH PHÂN SUY RỘNG

***Mục tiêu học tập**: Sau khi học xong bài này, người học có thể:*
Trình bày được khái niệm tích phân suy rộng, tính được tích phân suy rộng của một số hàm số cơ bản.

1. Tích phân suy rộng cận vô tận (Loại 1).

1.1. Định nghĩa: Giả sử $y = f(x)$ xác định trên $[a;+\infty]$ và khả tích trên đoạn $[a;b](b > a)$ bất kỳ. Ta gọi giới hạn: $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ (1) nếu tồn tại là tích phân suy rộng của hàm số $y = f(x)$ trên $[a;+\infty]$.

Ký hiệu: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ (2). Và $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$.

Nếu (1) có kết quả hữu hạn thì ta nói tích phân (2) hội tụ, ngược lại (giới hạn không tồn tại hoặc vô hạn) ta nói tích phân (2) phân kỳ.

Tương tự ta cũng định nghĩa được tích phân suy rộng của $y = f(x)$ trên đoạn $[-\infty;a]$ như sau: $\int\limits_{-\infty}^a f(x)dx = \lim\limits_{b\to-\infty}\int\limits_b^a f(x)dx$

Và tích phân suy rộng của $y = f(x)$ trên $[-\infty;+\infty]$ là

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

Ví dụ: Xét sự hội tụ của $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}, a > 0$

Ta có: Với $\alpha = 1, \int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty}\ln|x|\Big|_a^b = \lim\limits_{b\to\infty}(\ln|b| - \ln|a|)\Big|_a^b = +\infty$, tích phân phân kỳ.

Với $\alpha \neq 1, \int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{b\to\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^b = \lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^b\right) = \begin{cases}\dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}, \alpha > 1\\ +\infty, \alpha < 1\end{cases}$

Vậy $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}, a > 0$ hội tụ khi $\alpha > 1$ và phân kỳ khi $\alpha \le 1$

1.2. Các tính chất:

1.2.1. Nếu $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_A^{+\infty} f(x)dx, \forall A > a$ cũng hội tụ

1.2.2. Nếu các tích phân $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì:

$\int\limits_a^{+\infty}(f(x)\pm g(x))dx$ hội tụ và $\int\limits_a^{+\infty}(f(x)\pm g(x))dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \pm \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$

$\int\limits_a^{+\infty} K.f(x)dx$ hội tụ và $\int\limits_a^{+\infty} K.f(x)dx = K.\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ K là hằng số.

1.3. Các định lý

1.3.1. Định lý 1: Giả sử $0 \le f(x) \le g(x), \forall a > 0$. Khi đó

a/ $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ cũng hội tụ

b/ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cũng phân kỳ.

Lưu ý rằng định lý này không có chiều ngược lại.

Ví dụ: Xét tích phân: $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$

Ta có $0 \le \frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}. \forall x > 1$, và ta có $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ hội tụ nên $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ hội tụ

1.3.2. Định lý 2: Giả sử $f(x) \ge 0, g(x) \ge 0, a > 0$ và tồn tại $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ $(0 \le A \le +\infty)$. Khi đó với $0 < A < +\infty$ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ .

Ví dụ: Xét tích phân $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x^2+1}}$. Với $g(x) = \frac{1}{x}$, xét giới hạn sau $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+\sqrt[3]{x^2+1}} = 1$, mà $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ phân kỳ

Từ đây ta có $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x^2+1}}$ phân kỳ.

2. Tích phân suy rộng của hàm số không bị chặn (Loại 2).

2.1. Định nghĩa:

Cho hàm số $y = f(x)$ khả tích trên $[a+\varepsilon; b], 0 < \varepsilon < b-a$, nhưng không bị chặn trên $[a;b]$. Ta gọi giới hạn sau đây $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx, (1)$ nếu tồn tại là tích phân suy rộng của $y = f(x)$ trên $[a;b]$, ký hiệu: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx,$

2.1.1. Nếu (1) hội tụ ta nói $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ, ngược lại nếu (1) không tồn tại hoặc vô hạn thì ta nói $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ

2.1.2. Tương tự ta cũng có định nghĩa sau:

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^-} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx, (0 < \varepsilon < b-a)$

2.1.3. Nếu trên đoạn $[a;b]$ cả a, b đều là điểm bất thường của $y = f(x)$ thì

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ \varepsilon\to 0^-}} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)dx \text{ hoặc } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, c\in[a;b]$$

2.1.4. Nếu $c\in[a;b]$ là điểm bất thường của $y = f(x)$ thì

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Ví dụ: Xét tích phân $\int_a^b \frac{1}{(\text{x-a})^{\alpha}}dx, (b>a)$

Với $\alpha = 1, \int_a^b \frac{1}{(\text{x-a})}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln|\text{x-a}|\Big|_{a+\varepsilon}^{b} = \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln|\text{b-a}| - \ln|\varepsilon|) = +\infty$. Vậy tích phân phân kỳ.

Với $\alpha \neq 1, \int_a^b \frac{1}{(\text{x-a})^{\alpha}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(\text{x-a})^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{a+\varepsilon}^{b} = \lim_{\varepsilon\to 0}(\frac{(\text{b-a})^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(\varepsilon)^{1-\alpha}}{1-\alpha}) = \begin{cases} \frac{(\text{b-a})^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \alpha<1 \\ +\infty, \alpha>1 \end{cases}$

Vậy $\int_a^b \frac{1}{(\text{x-a})^{\alpha}}dx, (b>a)$ hội tụ khi $\alpha<1$, phân kỳ khi $\alpha\geq 1$

2.1.5. $\int_a^b f(x)dx$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu $\int_a^b |f(x)|dx$ hội tụ. $\int_a^b f(x)dx$ được gọi là bán hội tụ nếu $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ và $\int_a^b |f(x)|dx$ phân kỳ.

2.2. Các định lý:

2.2.1. Định lý 1: Giả sử $y = f(x)$ dương và khả tích trên $[a+\varepsilon;b], 0<\varepsilon<b-a$. Khi đó $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ bị chặn với mọi $0<\varepsilon<b-a$

2.2.2. Định lý 2: Giả sử $0\leq f(x)\leq g(x)$ trên $[a+\varepsilon;b], 0<\varepsilon<b-a$. Khi đó

\+ $\int_a^b g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^b f(x)dx$ cũng hội tụ

\+ $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^b g(x)dx$ cũng phân kỳ.

Lưu ý rằng định lý này không có chiều ngược lại.

2.2.3. Định lý 3: Giả sử $f(x)\geq 0, g(x)\geq 0$ trên $[a+\varepsilon;b], 0<\varepsilon<b-a$ và tồn tại $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = A(0\leq A\leq +\infty)$. Khi đó với $0<A<+\infty$ thì $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ .

Ta cũng xét trường hợp tương tự cho $f(x)\geq 0, g(x)\geq 0$ trên $[a;b-\varepsilon], 0<\varepsilon<b-a$ Nghĩa là $\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = A(0\leq A\leq +\infty)$. Khi đó với $0<A<+\infty$ thì $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ .

Các ví dụ: a/ Xét tích phân $\int_0^1 \frac{\sin^2 x+1}{x^2}dx$

Ta có $\frac{\sin^2 x+1}{x^2} \le \frac{1}{x^2}, \forall x>0$, mà $\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$ phân kỳ, suy ra $\int_0^1 \frac{\sin^2 x+1}{x^2}dx$ phân kỳ.

b/ Xét tích phân $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$

Xét $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}dx$ và $\lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} = \frac{\cos^2 1}{\sqrt[3]{2}} > 0$. Mà $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}dx$ hội tụ theo ví dụ $\int_a^b \frac{1}{(\text{x-a})^\alpha}dx, (b>a)$. Nên $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx$ hội tụ.

❖ **Bài tập củng cố:**

1.Tính các tích phân sau

a/ $\int_0^{+\infty} \frac{\text{arctanx}}{\text{x}^2+1}\text{dx}$, b/ $\int_{-\infty}^0 \frac{\text{dx}}{\text{x}^2+4}$, c/ $\int_1^{+\infty} \frac{\text{lnx}}{\text{x}^2}\text{dx}$, d/ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{dx}}{(\text{x}^2+1)(\text{x}^2+4)}$, e/ $\int_1^{+\infty} \frac{\text{dx}}{x\sqrt{\text{x}^2+4}}$

f/ $\int_5^{+\infty} \frac{\text{dx}}{x\sqrt{\text{x}+4}}$, g/ $\int_0^{+\infty} \frac{(2\text{x}+1)\text{dx}}{(x+2)^2}$, h/ $\int_{-3}^{+\infty} \frac{\text{dx}}{x^2+6x+10}$, i/ $\int_0^{+\infty} xe^{-2x}\text{dx}$, k/ $\int_0^{+\infty} x^3e^{-x^2}\text{dx}$

2. Tính các tích phân sau:

a/ $\int_0^2 \frac{\text{x}^5\text{dx}}{\sqrt{4-\text{x}^2}}$, b/ $\int_0^{\pi^2} \frac{\sin\sqrt{\text{x}}\text{dx}}{\sqrt{\text{x}}}$,c/ $\int_1^3 \frac{\text{dx}}{\sqrt{\text{-x}^2+4x-3}}$,d/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{cosxdx}}{\sqrt{\text{sinx}}}$, e/ $\int_0^1 x\ln x\text{dx}$, f/ $\int_1^2 \frac{x\text{dx}}{\sqrt{x-1}}$

3. Xét sự hội tụ của các tích phân sau:

a/ $\int_0^{+\infty} \frac{\text{x}^2}{\text{x}^4\text{- x}^2+1}\text{dx}$, b/ $\int_1^{+\infty} \frac{\text{dx}}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$, c/ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\text{sinxdx}}{x^2}$, d/ $\int_0^{+\infty} \frac{\text{arctanxdx}}{x^n}$, e/ $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\text{dx}}{e^{\text{sinx}}-1}$.

f/ $\int_0^1 \frac{\cos^2\text{xdx}}{\sqrt{1-x^2}}$, g/ $\int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{\text{x}})\text{dx}}{e^{\text{sinx}}-1}$, h/ $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+\text{x})}{\text{x}+1}\text{dx}$

4. Tính các tích phân sau:

a/ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$, b/ $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\text{dx}$, c/ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{dx}}{(x^2+1)^2}$, d/ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{dx}}{(x^2+x+1)^2}$, e/ $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\text{dx}$

f/ $I = \int_0^{+\infty} e^{-\text{ax}}\text{cosbxdx}; J = \int_0^{+\infty} e^{-\text{ax}}\text{sinbxdx}$; g. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx$; h. $\int_1^{+\infty} \frac{x^2-2}{x^3\sqrt{x^2-1}}dx$

5. Tính tích phân $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$ có kết quả là:

A. 0. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** -1.

6. Tính tích phân $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ có kết quả là:

A. 0.   **B.** e.   **C.** 1.   **D.** $\frac{1}{e}$.

7. Cho tích phân $I = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}, (b > a, \alpha \in R)$, tích phân I hội tụ khi:

A. $\alpha = 1$.   **B.** $\alpha > 1$.   **C.** $\alpha < 1$.   **D.** $\alpha \le 1$.

8. Tính tích phân $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ có kết quả là:

A. $\frac{\pi}{2}$.   **B.** $-\frac{\pi}{12}$.   **C.** $\frac{\pi}{6}$.   **D.** $-\frac{\pi}{6}$.

9. Tính tích phân $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ có kết quả là:

A. $-\ln\frac{1}{4}$.   **B.** $\frac{\pi}{2}$.   **C.** $\ln 2$.   **D.** $\frac{1}{2}$.

10. Tính tích phân $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4x dx}{1-\sin 4x}$ có kết quả là:

A. $+\infty$.   **B.** $\frac{\pi}{8}$.   **C.** $-\infty$. **D.** $-\frac{\pi}{4}$.

11. Tính tích phân $\int_0^2 \frac{x^5 dx}{\sqrt{4-x^2}}$ có kết quả là:

A. $+\infty$.   **B.** $\frac{256}{15}$.   **C.** $\frac{1}{25}$.   **D.** 0.

CHƯƠNG 4
CHUỖI SỐ VÀ CHUỖI HÀM SỐ

BÀI 1
CHUỖI SỐ

Mục tiêu học tập: *Sau khi học xong bài này, người học có thể:*
- *Trình bày được các khái niệm về chuỗi số, sự hội tụ và phân kỳ của chuỗi số*
- *Thực hiện được các bài toán xét sự hội tụ của chuỗi số dương*
- *Thực hiện được các bài toán xét sự hội tụ của chuỗi số với dấu bất kỳ và chuỗi đan dấu*

1. Các khái niệm

1.1. Định nghĩa: Cho dãy số $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ Biểu thức $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (1) gọi là chuỗi số; các số $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...,$ u_n gọi là số hạng tổng quát của chuỗi (1).

Tổng n số hạng đầu tiên của chuỗi (1) $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ (2) gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi (1).

Nếu $\lim_{n\to\infty} S_n = s$ tồn tại và xác định hữu hạn thì ta nói chuỗi (1) hội tụ, ngược lại nếu giới hạn bằng vô cùng hoặc không xác định ta nói chuỗi (1) phân kỳ.

Hiệu số $r_n = s - S_n$ gọi là phần dư thứ n của chuỗi (1). Nếu chuỗi (1) hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, chuỗi (1) phân kỳ thì $\lim_{n\to\infty} r_n \neq 0$.

1.2. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ...$ (*)

Ta có $S_n = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1}$ (3)

Suy ra $qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^n$ (4)

Lấy (3) trừ (4) ta được $(1-q)S_n = a(1-q^n)$

Từ đó nếu $q \neq 1$ thì $S_n = a.\dfrac{(1-q^n)}{(1-q)}$

+Nếu $|q| < 1$ thì $\lim_{n\to\infty} |q^n| = 0$, nên $S_n = \dfrac{a}{(1-q)}$. Vậy chuỗi (*) hội tụ và

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... = \frac{a}{(1-q)}.$$

+ Nếu $|q| \geq 1$ thì $\lim_{n\to\infty} |q^n| = \infty$. Vậy chuỗi (*) phân kỳ

Tóm lại: Chuỗi (*) hội tụ khi $|q| < 1$ và phân kỳ khi $|q| \geq 1$

Ví dụ 2: Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$

Ta có: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} =$

$= (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$

Suy ra $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1}) = 1$. Vậy chuỗi hội tụ và $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$

1.2 Điều kiện hội tụ:

1.2.1. Định lý 1: Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

1.2.2. Hệ quả: Nếu $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ thì chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ.

Ví dụ: Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$ có $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$ nên chuỗi này phân kỳ.

Lưu ý rằng khi số hạng tổng quát của chuỗi tiến về 0 khi $n \to \infty$ thì chưa chắc rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ

Ví dụ: Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Dễ thấy $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ nhưng chuỗi này phân kỳ. Thật vậy ta có $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Suy ra $S_n > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$, nên $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n} = \infty$. Vậy chuỗi trên phân kỳ.

1.3 Các tính chất: Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v$ thì

1.3.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha.u_n = \alpha.\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \alpha s, \alpha \in R$

1.3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n = s + v$

1.3.3. Tính hội tụ hay phân kỳ của $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ không thay đổi khi ta bỏ đi một số hữu hạng các hạng đầu tiên của nó.

2. Chuỗi số dương

2.1 Định nghĩa: Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là chuỗi số dương nếu $u_n \geq 0, \forall n \geq 1$.

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$ là chuỗi số dương.

2.2 Các định lý so sánh

2.2.1. Định lý 2: Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ và $u_n \leq v_n, \forall n \geq 1$, lúc này ta có

a/ Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ.

b/ Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ.

Ví dụ: Xét sự hội tụ $a/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n.3^n}$,

Đặt $u_n=\frac{1}{n.3^n};v_n=\frac{1}{3^n}$. Nhận thấy $u_n=\frac{1}{n.3^n}\le\frac{1}{3^n}=v_n,\forall n=1,2,3,4,...$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$ hội tụ. Từ đây ta có chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n.3^n}$ hội tụ.

b/ Đặt $u_n=\frac{1}{n^2};v_n=\frac{1}{n(n-1)}$. Nhận thấy $u_n=\frac{1}{n^2}\le\frac{1}{n(n-1)}=v_n,\forall n=2,3,4,...$

Ta xét chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$,

Ta có: $S_n=\frac{1}{2.1}+\frac{1}{3.2}+...+\frac{1}{(n+1)n}=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$

Và $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$. Suy ra chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$ hội tụ.

Vậy chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ.

2.2.2. Định lý 3: Cho $\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}v_n$, nếu tồn tại $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k>0$ xác định hữu hạn thì $\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ cùng hội tụ hay phân kỳ.

Ví dụ: Xét sự hội tụ:

$a/\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$, Đặt $u_n=\sin\frac{\pi}{2^n};v_n=\frac{1}{2^n}$, xét $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}=\pi>0$

Vì khi $n\to\infty$ thì $\frac{1}{2^n}\to 0;\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\to 0$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$, nên $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ hội tụ, suy ra chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$ hội tụ

$b/\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{2^n})$, Đặt $u_n=\ln(1+\frac{1}{2^n});v_n=\frac{1}{2^n}$, xét $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{2^n})}{\frac{1}{2^n}}=1>0$

Vì khi $n\to\infty$ thì $\frac{1}{2^n}\to 0;\ln(1+\frac{1}{2^n})\to 0$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$, nên $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ hội tụ, suy ra chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{2^n})$

hội tụ.

$c/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(e^{\frac{1}{n}}-1)$ Đặt $u_n=\frac{1}{n}(e^{\frac{1}{n}}-1); v_n=\frac{1}{n^2}$, xét

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}(e^{\frac{1}{n}}-1)}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}(e^{\frac{1}{n}}-1)}{\frac{1}{n}.\frac{1}{n}}=1>0$$

Vì khi $n\to\infty$ thì $\frac{1}{n}\to 0; (e^{\frac{1}{n}}-1)\to 0$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ theo ví dụ của định lý 2. Nên chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(e^{\frac{1}{n}}-1)$ hội tụ.

2.3 Các quy tắc xét sự hội tụ của chuỗi số dương:

2.3.1. Quy tắc $D^{/}Alembert$: Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ nếu $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$ thì $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ khi $l<1$, phân kỳ khi $l>1$.

Ví dụ: Xét sự hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

Ta có $u_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}; u_n=\frac{n^2}{2^n}$, xét $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\frac{1}{2}<1$

Vậy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ hội tụ

2.3.2. Quy tắc Cauchy: Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ nếu $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$ thì $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ khi $l<1$, phân kỳ khi $l>1$.

Ví dụ: Xét sự hội tụ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+3}{3n+4}\right)^n$

Ta có $u_n=\left(\frac{4n+3}{3n+4}\right)^n$ và $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{4n+3}{3n+4}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+3}{3n+4}\right)=\frac{4}{3}>1$

Vậy $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+3}{3n+4}\right)^n$ phân kỳ

2.3.3. Quy tắc tích phân: Giả sử $y=f(x)$ liên tục, dương, giảm trên $[1,+\infty)$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$. Đặt $u_n=f(n)$, khi đó:

a/ Nếu $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ.

b/ Nếu $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ phân kỳ.

Ví dụ: Xét chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$

Lại xét tích phân $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx$, tích phân này hội tụ khi $\alpha>1$ và phân kỳ khi $\alpha\le 1$.

Như vậy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ hội tụ khi $\alpha>1$ và phân kỳ khi $\alpha\le 1$.

3. Chuỗi số với dấu bất kỳ.

3.1. Định nghĩa 1: Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, các số hạng u_n có thể âm, có thể dương thì ta gọi là chuỗi đan dấu. Thường khi gặp chuỗi đan dấu ta thường xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ gọi là chuỗi trị tuyệt đối của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ ($\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ là chuỗi số dương)

3.2. Định lý: Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ cũng hội tụ.

3.3. Định nghĩa: Khi chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ hội tụ, ta nói chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ là hội tụ tuyệt đối, nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ phân kỳ mà $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ hội tụ thì ta nói $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ là bán hội tụ.

Ví dụ: Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$ hội tụ tuyệt đối, vì $\left|\frac{\cos n}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2},\forall n$ và $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ.

3.4. Chuỗi đan dấu

3.4.1. Định nghĩa: Chuỗi sau đây gọi là chuỗi đan dấu:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n=-u_1+u_2-u_3+...+(-1)^n u_n+...,u_n\ge 0,\forall n\ge 1$$

3.4.2. Định lý (Leibniz): Cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$. Nếu 2 điều kiện sau đồng thời thỏa mãn:

a/ $0\le u_{n+1}\le u_n,\forall n\ge 1$ (u_n là một dãy giảm)

b/ $\lim_{n\to\infty}u_n=0$

Thì chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ hội tụ.

Ví dụ: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ là bán hội tụ vì

a/ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ hội tụ theo Leibniz

b/ Nhưng $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ.

Ví dụ: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2n-1}$ phân kỳ vì $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}\ne 0$

❖ **Bài tập củng cố:**

1. Xét sự hội tụ của các chuỗi, nếu chuỗi hội tụ thì tính tổng

$$a/\sum_{n=1}^{\infty}4\left(\frac{2}{3}\right)^n, b/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n}, c/\sum_{n=1}^{\infty}4^{-n}9^{n+2}, d/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+3n+2}, e/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+2}, f/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+n}$$

$$g/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{4n^2-1}, h/\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}\right), i/\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^n+4^n}{6^n}\right), k/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}, l/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

2. Áp dụng các định lý so sánh, xét sự hội tụ của:

$$a/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n^5}, b/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2.2^n}, c/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+5^n}{3^n}, d/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+n+1}{n^3+3n+2}, e/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1}, f/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$$

$$g/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)(n+1)}, h/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(e^{\frac{1}{n}}-1).$$

3. Áp dụng các quy tắc D Alembert, Cauchy và tích phân, xét sự hội tụ của:

$$a/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}, b/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}, c/\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2n}{3n-2}\right)^n, d/\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+4n^2}{5n^2+2}\right)^{n^2}, e/\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}, f/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n.4^n}{(n+1)5^{n+1}}$$

$$g/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}, h/\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{n}\right), k/\sum_{n=1}^{\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2n^2}\right), i/\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$$

4. Xét sự hội tụ của các chuỗi

$$a/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+3}, b/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n n^3}{(n+3)!}, c/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}, d/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^3+1}, e/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^2}, f/\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2+4n}$$

5. Chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ có tổng là :

A. 3. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

6. Chuỗi $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+....$ có số hạng tổng quát là:

A. $u_n=\frac{1}{n+1}$. **B.** $u_n=\frac{1}{n}$. **C.** $u_n=\frac{1}{n(n-1)}$. **D.** $u_n=\frac{1}{n(n+1)}$.

7. Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2n+1}$ được kết quả là:

A. Hội tụ. **B.** Bán hội tụ. **C.** Phân kỳ. **D.** Hội tụ tuyệt đối.

8. Tổng của chuỗi số $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+...$ là :

A. 2. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

9. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-3}}{5^{n-2}}$ có tổng là :

A. $\frac{1}{1-\frac{2}{5}}$. **B.** $\frac{25}{12}$. **C.** $\frac{25}{8}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

10. Chuỗi số nào sau đây là chuỗi số bán hội tụ?

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4+n^2+8}{n^3+3}$. **B.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. **C.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{5^n}$. **D.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^n}{2^n}$.

11. Trong các chuỗi số sau đây, chuỗi số nào là bán hội tụ?

A. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n^4}$. **B.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. **C.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. **D.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)$.

BÀI 2
CHUỖI HÀM SỐ, CHUỖI LŨY THỪA

Mục tiêu học tập: *Sau khi học xong bài này, người học có thể:*
- *Trình bày được các khái niệm về chuỗi hàm số, chuỗi lũy thừa.*
- *Thực hiện được các bài toán tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số, chuỗi lũy thừa.*
- *Thực hiện được các bài toán tính tổng của chuỗi hàm số, chuỗi lũy thừa.*

1. Định nghĩa: Chuỗi hàm số là chuỗi mà các số hạng của nó là các hàm số theo biến số độc lập x

Ký hiệu: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$ (1).Nếu cho x một giá trị cụ thể x_0 thì (1) trở thành chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$, ứng với các giá trị khác nhau của x thì ta có các chuỗi số khác nhau. Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ hội tụ thì ta nói (1) hội tụ tại x_0, tập tất cả các điểm hội tụ của (1) gọi là miền hội tụ của (1).

Tổng $s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x)$ gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi.

Nếu tồn tại $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$ thì ta gọi $s(x)$ là tổng của chuỗi, trong trường hợp này ta nói chuỗi hàm hội tụ về hàm $s(x)$ và ký hiệu $r_n = s(x) - s_n(x)$

Tổng của chuỗi hàm là một hàm số xác định trong miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$

Ví dụ: Xét chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$. Nếu $|x| < 1$ thì chuỗi hội tụ và có tổng là $\frac{1}{1-x}$, ngược lại nó phân kỳ khi $|x| > 1$. Như vậy miền hội tụ của chuỗi là $(-1,1)$

2. Chuỗi lũy thừa

2.1. Định nghĩa: Ta gọi chuỗi lũy thừa là chuỗi hàm số có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... + a_n(x-a)^n + ...$$

Nếu $a = 0$ thì ta có chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$ (1)

Ví dụ: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.x^n = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + ... + \frac{1}{2^n}x^n + ...$ là chuỗi lũy thừa với $a_n = \frac{1}{2^n}$

2.2. Định lý Abel:

Nếu chuỗi (1) hội tụ tại x_0 thì nó hội tụ thì nó hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm thỏa $|x| < |x_0|$

Lưu ý rằng chuỗi (1) luôn hội tụ tại $x = 0$

2.3. Định lý: Cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$(1)

Khi đó tồn tại duy nhất $R \geq 0$ sao cho

2.3.1. Nếu $|x| < R$ thì chuỗi hội tụ tuyệt đối.

2.3.2. Nếu $|x|>R$ thì chuỗi phân kỳ.

2.4. Quy tắc tìm bán kính hội tụ

Nếu tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l)$ thì bán kính hội tụ của (1) được xác định

như sau $R=\begin{cases}\dfrac{1}{l}, 0<l<+\infty\\ 0, l=+\infty\\ +\infty, l=0\end{cases}$

Ví dụ: Tìm bán kính hội tụ của các chuỗi hàm số:

a/ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$. Ta có $a_n=(n+1); a_{n+1}=(n+2)$ và $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+2)}{(n+1)}\right| = 1$

Vậy bán kính hội tụ của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ là $R=\dfrac{1}{l}=\dfrac{1}{1}=1$

b/ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}x^n$. Ta có $a_n=\dfrac{2^n}{n!}; a_{n+1}=\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ và $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}\right| = 2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$

Vậy bán kính hội tụ của chuỗi hàm số $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}x^n$ là $R=\dfrac{1}{l}=\dfrac{1}{0}=+\infty$

Hay chuỗi hàm số luôn hội tụ với mọi số thực x.

2.5. Miền hội tụ của chuỗi lũy thừa.

Để tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa ta thực hiện các bước sau:

2.5.1. Tìm bán kính hội tụ R

2.5.2. Tìm khoản hội tụ

2.5.3. Xét cụ thể tại các đầu mút $x=R, x=-R$,

Kết luận miền hội tụ của chuỗi.

Ví dụ: Tìm miền hội tụ của $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{n}$.

Giải: Đặt $t=x+1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^n}{n}$.

Tìm bán kính hội tụ R: $\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{n}\\ a_{n+}=\dfrac{1}{n+1}\end{cases}; l=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right| = 1 \Rightarrow R=\dfrac{1}{l}=1$

Khoản hội tụ là $(-1;1)$

Tại $t=-1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ chuỗi số này bán hội tụ

Tại $t=1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ chuỗi này phân kỳ vì $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ phân kỳ khi $\alpha\le 1$ và hội tụ khi $\alpha>1$.

Suy ra miền hội tụ của $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n}$ là $-1\le t<1$

Hay miền hội tụ của chuỗi hàm số ban đầu $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n}$ là $-2\le x<0$

2.6. Tính chất của chuỗi lũy thừa.

Định lý: Nếu chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$ có bán kính hội tụ là R và có tổng là $s(x)$ thì hàm số

$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...=s(x)$ khả vi, nên liên tục trên $(-R,R)$ và

+ $s^{/}(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+...+na_nx^{n-1}+...=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$

+ $\int s(x)dx=C+a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+...+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+...=C+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}$

Ví dụ: Xét chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+...+x^n+...$ ta có thể lấy đạo hàm và tích phân bất định của nó.

Thực vậy, ta có $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+...+x^n+...=\frac{1}{1-x}(*)$

Lấy đạo hàm cấp 1 hai vế của đẳng thức (*) ta được:

$$\left(1+x+x^2+...+x^n+...\right)^{/}=\left(\frac{1}{1-x}\right)^{/}\Rightarrow 1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}+...=-\frac{1}{(1-x)^2}$$

Suy ra $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=-\frac{1}{(1-x)^2}$

Lấy tích phân bất định 2 vế của đẳng thức (*) ta được:

$$\int\left(1+x+x^2+...+x^n+...\right)dx=\int\left(\frac{1}{1-x}\right)dx\Rightarrow x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+\frac{x^{n+1}}{n+1}+...=-\ln\left|1-x\right|+C$$

Suy ra $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=-\ln\left|1-x\right|+C$

2.7 Khai triển một hàm số thành chuỗi lũy thừa

Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong một lân cận nào đó của điểm a và có thể biểu diễn thành chuỗi lũy thừa trong lân cận ấy, tức là

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+...+a_n(x-a)^n+...$$

Theo tính chất của chuỗi lũy thừa ta có

$$\begin{cases} f^{/}(x)=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+...+na_n(x-a)^{n-1}+... \\ f^{//}(x)=2a_2+6a_3(x-a)+...+n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}+... \\ ... \\ f^{(n)}(x)=n!a_n+... \end{cases}$$

Thay $x=a$ vào các đẳng thức trên ta có

$$a_0 = f(a), a_1 = \frac{f(a)}{1!}, a_3 = \frac{f^{//}(a)}{2!}, ..., a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, ...$$

Vậy

$$f(x) = f(a) + \frac{f(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{//}(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

chuỗi này gọi là chuỗi Taylor của hàm số $y = f(x)$.

Khi $x = 0$ *thì ta có* $f(x) = f(0) + \frac{f(0)}{1!}x + \frac{f^{//}(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ *(*)*

chuỗi này gọi là chuỗi Mac Laurin của hàm số $f(x)$

***Định lý**: Nếu trong một lân cận nào đó của* x_0 *hàm số* $y = f(x)$ *có đạo hàm mọi cấp và trong lân cận đó* $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M, M > 0, \forall n \ge 0$ *thì hàm số* $y = f(x)$ *có thể khai triển thành chuỗi Taylor trong lân cận ấy.*

***Ví dụ**: Xét* $y = e^x$, $\forall x \in R$, $y = e^x$ *có đạo hàm mọi cấp,* $f^{(n)} = e^x, \forall n \ge 0$, *suy ra*

$$f(0) = f^{/}(0) = f^{//}(0) = ... = f^{(n)}(0) = ... = 1$$

Vậy chuỗi Mac Laurin của hàm số có dạng

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Tương tự, hãy khai triển các hàm số sau thành chuỗi Mac Laurin

a/ $f(x) = \sin x$, *b/* $f(x) = \cos x$, *c/* $f(x) = \ln(x+1)$

❖ **Bài tập củng cố:**

1. Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau:

$$a/\sum_{n=1}^{\infty} nx^n, b/\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, c/\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n.2^n}, d/\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n}}, e/\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{(n+1)^2}, f/\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}, g/\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^{n-1}},$$

$$h/\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n.x^{5n}}{2n-1}, i/\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n (x-2)^{2n}, k/\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n(n-1)}}{n^n}.$$

*2. Tìm tổng của các chuỗi hàm số**

$$a/\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, |x| < 1; b/\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, |x| < 1; c/\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{a^n}, |x| < a; d/\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)a^n}, -a \le x < a;$$

$$e/\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)x^{n-1}}{a^{n+1}}, |x| < a.$$

3. Tìm tổng của chuỗi.*

$$a/\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}; b/\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}; c/\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)x^{n-1}}{2}; d/\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}; e/\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1}x^n.$$

4.Tìm bán kính hội tụ và tính tổng của chúng

$$a/\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-n+4}{n+1}x^n; HD: \frac{n^2-n+4}{n+1} = n-2+\frac{6}{n+1} = (n+1)-3+\frac{6}{n+1}$$

$$b/\sum_{n=1}^{\infty} \left(n+\frac{1}{n}\right)x^{2n}; HD: X = x^2; c/\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Hướng dẫn bài 2,3,4: ta dùng công thức sau:

$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} + ... = \frac{1}{1-x}; |x| < 1$ *hoặc*

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1} + ... = \frac{1}{1-x}; |x| < 1$

Bên cạnh đó, ta có thể lấy đạo hàm hoặc lấy nguyên hàm của chuỗi hàm trên; cụ thể là

$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + ... + (n-1)x^{n-2} + ... = \frac{1}{(1-x)^2}; |x| < 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^n}{n} + ... = -\ln|1-x|; |x| < 1$

Và ta có thể lập lại nhiều lần các phép tính trên.

5. Bán kính hội tụ của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ là:

A. $+\infty$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** 1.

6. Với $x = \frac{1}{2}$ thì chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ là chuỗi số:

A. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n.}$ phân kỳ. **B.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n.}$ hội tụ. **C.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.2^n}$ hội tụ. **D.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.2^n}$ phân kỳ.

7. Miền hội tụ của chuỗi hàm số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ là:

A. $-1 < x < 1$. **B.** $-2 \le x \le 2$. **C.** $-2 < x < 2$. **D.** $-1 < x < 2$.

8. Cho chuỗi hàm số $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$. Với điều kiện $|x| < 1$ thì $s(x)$ bằng hàm số nào dưới đây?

A. $y = \frac{1}{1-x}$. **B.** $y = \frac{x}{1-x}$. **C.** $y = \frac{1}{(1-x)^2}$. **D.** $y = \frac{x}{(1-x)^2}$.

9. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n5^n}$ có tổng là

A. $\frac{3}{\ln 5}$. **B.** $-\ln\frac{2}{5}$ **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\ln\frac{2}{5}$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

❖ *TÀI LIỆU THAM KHẢO ĐỂ BIÊN SOẠN NỘI DUNG MÔN HỌC PHẦN*

[1] Giải tích tập 1, 2, 3, 4, Jean-Marie Monier, NXB GD, năm 2000

[2] Toán cao cấp tập 1, 2, 3, Nguyễn Đình Trí-Tạ Văn Dĩnh-Nguyễn Hồ Huỳnh, NXB GD năm 1999

[3] Đại số tuyến tính, Trần Văn Hạo, NXB Khoa Học Kỹ Thuật, 1997

❖ *TÀI LIỆU THAM KHẢO ĐỀ NGHỊ CHO HỌC VIÊN*

[4] Toán cao cấp tập 1, 2, 3, Nguyễn Đình Trí-Tạ Văn Dĩnh-Nguyễn Hồ Huỳnh, NXB GD năm 1999

[5] Đại số tuyến tính, Trần Văn Hạo, NXB Khoa Học Kỹ Thuật, 1997