

*Chương*

**04**

Xác Suất

# Nội dung chính

- Các loại biến cố
- Các phép toán giữa các biến cố và ý nghĩa
- Các cách tính xác suất của một biến cố
- Công thức tính xác suất của các biến cố phức tạp

# Phép thử ngẫu nhiên

- Là các thí nghiệm, quan sát mà kết quả của nó không thể dự báo trước được.
- Kí hiệu: T.
- Ta có thể liệt kê hoặc biểu diễn được tất cả các kết quả của phép thử.
- Ví dụ:

# Biến cố sơ cấp – Không gian mẫu

- Các kết quả của phép thử được gọi là các **biến cố sơ cấp (bcsc)**. Kí hiệu:  $w_i$
- **Không gian mẫu**: tập hợp tất cả các biến cố sơ cấp. Kí hiệu:  $\Omega$
- Ví dụ: T : gieo một đồng xu
- Không gian mẫu là:

$$\Omega = \{S, N\}$$

## Biến cố (sự kiện)

- Một **biến cố (bc)** liên quan đến phép thử  $T$  là một sự kiện mà việc nó xảy ra hay không xảy ra tùy thuộc vào kết quả của phép thử  $T$ .
- Kí hiệu: chữ cái in hoa  $A, B, C, \dots, A_1, A_2, \dots$
- Kết quả  $w$  của  $T$  được gọi là **thuận lợi cho biến cố  $A$**  nếu  $A$  xảy ra khi kết quả của  $T$  là  $w$ .
- Tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố  $A$  kí hiệu là:  $\Omega_A$  **hay tập hợp các bcsc chứa trong  $A$ .**

## Biến cố (sự kiện)

- Ví dụ: T: tung một cục xúc sắc
- B: bc ra số chấm chẵn thì ta có:  $\Omega_B = \{2, 4, 6\}$

## Biến cố (sự kiện)

- Một biến cố (event), kí hiệu bởi các chữ hoa A, B, C ..., là một tập con của không gian mẫu  $\Omega$ .

### Chú ý:

- Mỗi bc A tương ứng với một và chỉ một tập con  $\Omega_A \subset \Omega$ .
- Mỗi biến cố sơ cấp  $\omega$  cũng là một biến cố.

# Biến cố đặc biệt

- **Bc không thể**: là bc không bao giờ xảy ra khi thực hiện T. Nó không chứa bcsc nào. Kí hiệu:  $\phi$
- **Bc chắc chắn**: là bc luôn luôn xảy ra khi thực hiện T. Nó chứa tất cả các bcsc. Kí hiệu:  $\Omega$

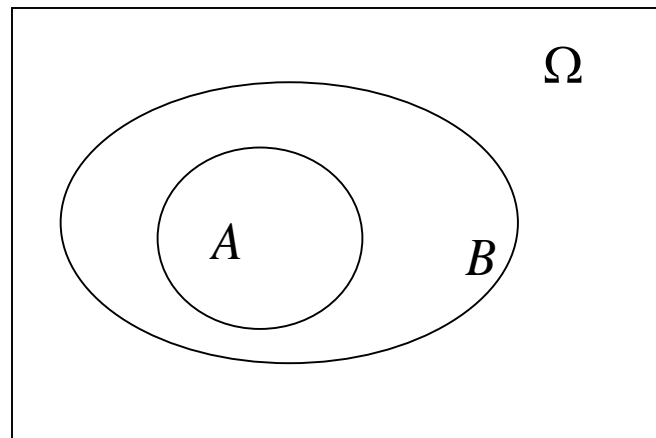


# Kéo theo

➤ Biến cố A được gọi là **kéo theo** biến cố B, ký hiệu  $A \subset B$ , nếu A xảy ra thì B cũng xảy ra

➤ Ta có:

$$\Omega_A \subset \Omega_B$$



# Tương đương (bằng nhau)

- Biến cố A đgl **tương đương** với biến cố B nếu A xảy ra thì B xảy ra và ngược lại
- Kí hiệu:  $A=B$

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$$

- Ta có:

$$\Omega_A = \Omega_B$$

# Biến cố đối

- Biến cố đối của biến cố A, kí hiệu  $\overline{A}$  là biến cố xảy ra khi và chỉ khi A không xảy ra.

- Ta có:  $\Omega_{\overline{A}} = \Omega \setminus \Omega_A$

- Ví dụ: khi gieo một con xúc sắc

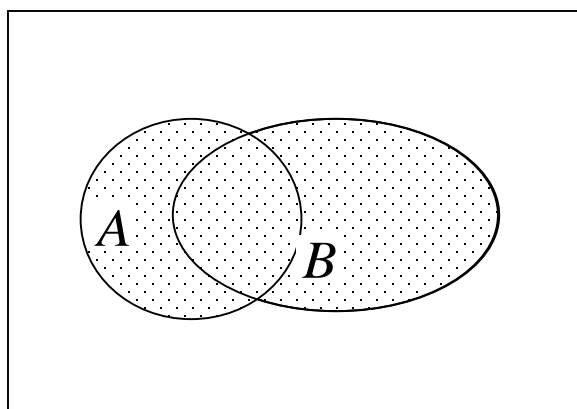
- A: bc số chấm chẵn thì  $\overline{A}$  là bc số chấm lẻ

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\Omega_A = \{2, 4, 6\} \quad \Omega_{\overline{A}} = \{1, 3, 5\} = \Omega \setminus \Omega_A$$

# Tổng (hợp) hai biến cố

- Cho  $A, B$  là hai bc liên quan đến phép thử  $T$ . Khi đó, tổng (hợp) của  $A$  và  $B$  là một biến cố, kí hiệu  $A \cup B$  hay  $A+B$
- Bc này xảy ra khi ít nhất một trong hai bc  $A, B$  xảy ra



$A \cup B$

# Tổng (hợp) các biến cố

➤  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là các bc trong phép thử T.

➤ Tổng (hợp) của các bc này kí hiệu:

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n \text{ hay } A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

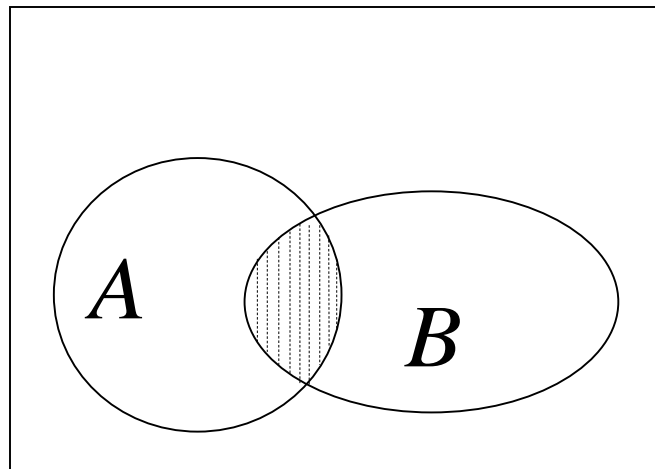
➤ Bc này xảy ra khi ít nhất một trong các bc  $A_1, A_2, \dots, A_n$  xảy ra

➤ Ta có:

$$\Omega_{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \Omega_{A_1} \cup \Omega_{A_2} \cup \dots \cup \Omega_{A_n}$$

# Tích (giao) hai biến cố

- Cho  $A, B$  là hai bc liên quan đến phép thử  $T$ . Khi đó, tích (giao) của  $A$  và  $B$  là một biến cố, kí hiệu  $A \cap B$  hay  $A.B$
- Bc này xảy ra khi cả hai bc  $A, B$  cùng xảy ra



$A \cap B$

## Tích (giao) các biến cố

➤  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là các bc trong phép thử T.

➤ Tích (giao) của các bc này kí hiệu:

$$A_1 A_2 \dots A_n \text{ hay } A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

➤ Bc này xảy ra khi tất cả các bc  $A_1, A_2, \dots, A_n$  cùng xảy ra

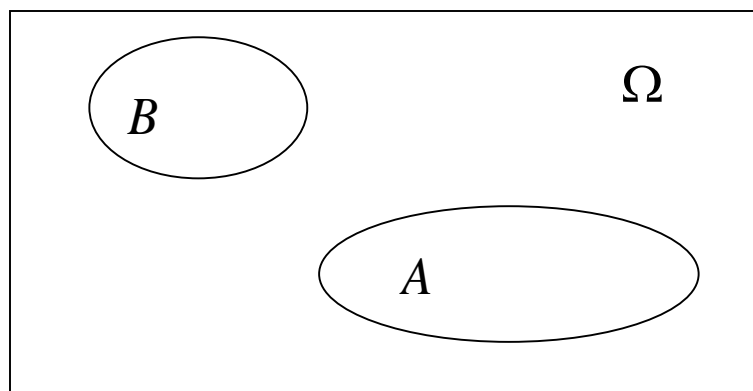
➤ Ta có:

$$\Omega_{A_1 A_2 \dots A_n} = \Omega_{A_1} \cap \Omega_{A_2} \cap \dots \cap \Omega_{A_n}$$

# Hai biến cố xung khắc

➤ Hai biến cố A, B được gọi là xung khắc nếu:

$$AB = \emptyset$$



A và B xung khắc



# Một số tính chất

- i)*      $A.A = A$                        $A.\Omega = A$                        $A.\emptyset = \emptyset$   
          $A + A = A$                        $A + \Omega = \Omega$                        $A + \emptyset = A$
- ii)*      $A + B = B + A$       $A.B = B.A$
- iii)*      $A(B + C) = AB + AC$
- iv)*      $A + (B.C) = (A + B).(A + C)$
- v)*      $\overline{(\overline{A})} = A$
- vi)*      $\overline{A + B} = \overline{A}.\overline{B}$                        $\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$
- vii)*      $\overline{A + B + C} = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$                        $\overline{A.B.C} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$

## Ví dụ

- Có 3 xạ thủ bắn vào mục tiêu
- A, B, C là bc xạ thủ 1,2,3 bắn trúng

Biểu diễn các biến cố sau theo A, B, C và các phép toán.

- Có đúng một xạ thủ bắn trúng
- Có nhiều nhất một xạ thủ bắn trúng
- Có ít nhất một xạ thủ bắn trúng

Kiểm tra chất lượng 4 sản phẩm. Gọi  $A_k$  là biến cố sản phẩm thứ  $k$  tốt. Biểu diễn các biến cố sau theo  $A_k$ .

- A là bc cả 4 sản phẩm tốt
- B là bc có 3 sản phẩm tốt
- C là biến cố có ít nhất 2 sản phẩm xấu
- D là biến cố có ít nhất 1 sản phẩm tốt
- E là biến cố có tối đa 1 sản phẩm xấu

Có 2 sinh viên đi thi. Gọi A là biên cố sinh viên 1 đậu; B là biên cố sinh viên 2 đậu. Biểu diễn các biên cố sau qua A và B.

- C = “cả 2 sv đều thi đậu”;
- D = “không sv nào đậu”
- E = “có ít nhất một người đậu”;
- F = “chỉ sv 1 đậu”
- G = “sinh viên 1 thi đậu”;
- H = “chỉ có một sv đậu”
- I = “có nhiều nhất 1 sv đậu”;
- J = “có sv thi đậu”

# XÁC SUẤT CỦA BC

- Con số **đặc trưng cho khả năng xuất hiện** của biến cố trong phép thử gọi là xác suất của biến cố đó.
- Kí hiệu xác suất của bc A:  **$P(A)$**
- **Xác suất không có đơn vị**
- **Điều kiện:**

$$i) \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$ii) \quad P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1$$

$$iii) \quad P(A + B) = P(A) + P(B) \text{ khi } AB = \emptyset$$

# Các cách tính xác suất

- Theo quan điểm cá nhân
- Theo phương pháp tần suất
- Theo phương pháp cổ điển
- Các phương pháp khác ...

# Quan điểm cá nhân

- Dễ dàng nhất, độ tin cậy ít nhất
- Ví dụ: Xác suất của
- Một ngày nào đó bạn sẽ die?
- Bạn có thể bơi vòng quanh trái đất trong vòng 30h?
- Bạn trúng vé số?
- Bạn được điểm A môn này?

# Quan điểm tần suất

- Thực hành 3 bước:
- Thực hiện phép thử với số lần  $n$ , rất lớn
- Đếm số lần biến cố  $A$  xuất hiện, giả sử  $n(A)$
- Xác suất của bc  $A$  là:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}$$



## Ví dụ

- Nghiên cứu khả năng xuất hiện mặt sấp khi gieo đồng xu cân đối, đồng chất.

<b>Người tung</b>	<b>Số lần tung</b>	<b>Số lần sấp</b>	<b>Tần suất</b>
<b>Buyffon</b>	4040	2048	0,5069
<b>Pearson</b>	12000	6019	0,5016
<b>Pearson</b>	24000	12012	0,5005

- Tần suất dần tới 0.5

# Quan điểm tần suất

➤ Vậy:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(A)$$

➤ Trên thực tế ta lấy  $P(A) \approx f_n(A)$  với  $n$  đủ lớn.

# Quan điểm cổ điển

- Được sử dụng nhiều nhất (trên lớp)
- Nếu các bcsc là đồng khả năng, và hữu hạn bcsc thì:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{Số bcsc thuận lợi cho } A}{\text{Số bcsc có thể xảy ra}}$$

## Ví dụ

1. Một bộ bài tây có 52 lá. Rút ngẫu nhiên ra 1 lá.

Gọi:

A: rút được lá 2,3 hoặc 7

B: rút được lá 2 cơ, 3 rô, 8 bích hoặc K chuồn.

Tính xác suất:

A) Rút được lá số 2, 3 hoặc 7.

B) Rút được lá 2 cơ, 3 rô, 8 bích hoặc K chuồn

C) Rút được lá số 2, 3 hoặc 7 hoặc lá 2 cơ, 3 rô, 8 bích hoặc K chuồn

D) Tính xác suất  $P(A.B)$

## Nguyên lý xác suất nhỏ - lớn

- **Nguyên lý xác suất nhỏ (nguyên lý biến cố hiếm):** Nếu một biến cố có xác suất rất nhỏ thì thực tế có thể xem rằng trong một phép thử biến cố đó sẽ không xảy ra.
- **Nguyên lý xác suất lớn:** Nếu một biến cố có xác suất rất gần 1 thì thực tế có thể xem rằng biến cố đó sẽ xảy ra trong một phép thử.

## Ví dụ

- Trong một lớp có 50 sinh viên nhất định có 2 bạn có sinh nhật trùng nhau. Vì biến cố “**có ít nhất 2 người có cùng sinh nhật**” có xác suất rất lớn  $P(A) = 0,970374$ .
- **Chú ý:**
- Việc qui định một mức xác suất đủ nhỏ hay đủ lớn tùy thuộc vào từng bài toán cụ thể.
- Thông thường:  $\leq 0,05$  được coi là đủ nhỏ
- Đủ lớn:  $\geq 0,95$ .

## Về nhà

- Một lớp có 50 sinh viên. Thầy giáo gọi ngẫu nhiên 2 học sinh lên bảng thì cả 2 học sinh đều không thuộc bài. Hãy dự đoán xem hôm nay lớp có bao nhiêu học sinh không thuộc bài.
- Hướng dẫn:
- A: 2 sinh viên không thuộc bài
- A đã xảy ra nên A không thể nào có xác suất nhỏ.
- Gọi số hs không thuộc là  $n$ . Tính xs bc A

## Tính chất xác suất

- a.  $0 \leq P(A) \leq 1$  với mọi biến cố  $A$ .
- b.  $P(\Omega) = 1$        $P(\emptyset) = 0$
- c. Nếu  $A \subset B$  thì  $P(A) \leq P(B)$ .
- d.  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- e.  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$   
nếu  $A, B$  xung khắc



# Một vài công thức

- Công thức cộng
- Công thức xác suất điều kiện
- Công thức nhân xác suất
- Công thức xác suất đầy đủ

➤ Cho hai biến cố A, B. Ta có:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A.B)$$

➤ Nếu A, B xung khắc:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

➤ Hệ quả:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

## Ví dụ 1

Xác suất để xạ thủ bắn bia trúng điểm 10 là 0,1; trúng điểm 9 là 0,2; trúng điểm 8 là 0,25 và ít hơn 8 điểm là 0,45. Tìm xác suất để xạ thủ được ít nhất 9 điểm.

➤  $A_1$ : “trúng điểm 10”    $A_2$ : “trúng điểm 9”

➤  $A$ : “ít nhất 9 điểm”

➤ Ta có:  $A=A_1+A_2$       và       $A_1, A_2$  XUNG KHẮC

➤ Vậy:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 + A_2) \\ &= P(A_1) + P(A_2) = 0,1 + 0,2 = 0,3 \end{aligned}$$

## Ví dụ 2

- Sinh viên A sắp tốt nghiệp. Sau khi tham gia hội chợ việc làm tại trường, được 2 công ty phỏng vấn anh ta đánh giá như sau:
- Xs anh ta được công ty A chọn là 0,8.
- Xs anh ta được công ty B chọn là 0,6.
- Xs anh ta được cả 2 công ty chọn là 0,5.
- Tính xác suất anh ta được chọn bởi ít nhất 1 công ty?

# Công thức cộng mở rộng

➤ Cho 3 biến cố:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) \\ - P(AB) - P(BC) - P(CA) + P(ABC)$$

➤ Cho 4 biến cố:

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = \\ + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) \\ - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_1A_4) - P(A_2A_3) - P(A_2A_4) - P(A_3A_4) \\ + P(A_1A_2A_3) + P(A_1A_2A_4) + P(A_1A_3A_4) + P(A_2A_3A_4) \\ - P(A_1A_2A_3A_4)$$

# Công thức cộng tổng quát

- Nếu các biến cố  $A_1, A_2, \dots, A_n$  liên quan đến phép thử  $T$  thì:

$$P(A_1 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cdot A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cdot A_j \cdot A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdot A_2 \dots A_n)$$

- Bộ chẵn:  $-$
- Bộ lẻ:  $+$

# Xác suất điều kiện

- Một bộ bài tây gồm 52 lá. Rút ngẫu nhiên 1 lá bài.
  - A: rút được lá số 2
  - B: rút được lá bích
- 
- a) Tính  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(A+B)$ ,  $P(AB)$
  - b) Nếu đã biết A xảy ra thì xác suất của B là bao nhiêu?
  - c) Nếu đã biết B xảy ra thì xác suất của A là bao nhiêu?

# Xác suất điều kiện

- Định nghĩa: Xác suất của biến cố A với giả thiết là biến cố B đã xảy ra gọi là xác suất của A với điều kiện B.
- Kí hiệu:  $P(A|B)$
- Công thức tính:

- Nếu  $P(B) > 0$ :

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \text{ nếu } P(B) > 0$$



## Ví dụ

- Xác suất một chuyến bay khởi hành đúng giờ là 0,83
- Xác suất chuyến bay đến đúng giờ là 0,82
- Xác suất một chuyến bay vừa khởi hành đúng giờ vừa đến đúng giờ là 0,78
- a) XS chuyến bay đến đúng giờ biết nó đã khởi hành đúng giờ
- b) Khởi hành đúng giờ biết nó đến không đúng giờ.

## Tính chất

➤ Khi cố định điều kiện  $A$  với  $P(A) > 0$ . Ta có:

$$i) \quad P(B|A) \geq 0, P(A|A) = 1$$

$$ii) \quad P(\Omega|A) = 1, P(\Phi|A) = 0$$

$$iii) \quad P(B + C|A) = P(B|A) + P(C|A) - P(BC|A)$$

$$iv) \quad P(B|A) = 1 - P(\bar{B}|A)$$

## Ví dụ

- Một hộp có 6 bóng trắng và 4 bóng đỏ. Ta lấy ngẫu nhiên ra 2 bóng (không hoàn lại). Tính xác suất:
- A) Quả thứ 2 trắng biết quả đầu đỏ là?
- B) Cả 2 quả đều màu đỏ?

## Công thức nhân

- Xác suất để cả 2 biến cố A và B cùng xảy ra là:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A)$$

- Hoặc:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A|B)$$

## Ví dụ

- Hộp có 6 quả bóng trắng và 4 quả bóng đỏ. Lấy ngẫu nhiên ra 2 quả bóng (không hoàn lại). Tính xác suất quả bóng thứ 2 là màu đỏ?

# Công thức nhân mở rộng

- Xác suất để cả 3 biến cố A, B, C cùng xảy ra:

$$P(A.B.C) = P(A).P(B|A).P(C|A.B)$$

- Chứng minh:

$$\begin{aligned} P(A.B.C) &= P(A.B).P(C|A.B) \\ &= P(A).P(B|A).P(C|A.B) \end{aligned}$$

## Ví dụ

- Ba lá bài được chia ngẫu nhiên từ bộ bài tây 52 lá.  
Tính xác suất (theo thứ tự) ta được là Át, lá K, lá Q.

## Công thức nhân tổng quát

➤ Cho  $A_1, A_2, \dots, A_n$  là các biến cố trong phép thử  $T$ .

$$P(A_1 \cdot A_2 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) \dots P(A_n | A_1 \cdot A_2 \dots A_{n-1})$$

➤ Điều kiện:

$$P(A_1 \cdot A_2 \dots A_{n-1}) > 0$$

➤ Công thức trên được chứng minh bằng qui nạp.



## Ví dụ 3

- Tại giải vô địch Taekwondo thế giới, Việt Nam có hai vận động viên A, B tham gia. Khả năng lọt vào vòng chung kết của A, B theo đánh giá lần lượt là 0,9 và 0,7. Biết A và B không cùng bảng trong vòng đấu loại. Tính xác suất
  - A) Cả hai lọt vào vòng chung kết.
  - B) Ít nhất một người lọt vào vòng chung kết.
  - C) Chỉ có A lọt vào vòng chung kết.

## Ví dụ 4

- Một hộp đựng cầu chì có 20 cái trong đó có 5 cái bị hỏng.
- A) Chọn ngẫu nhiên 2 cầu chì lần lượt không hoàn lại thì xác suất cả 2 chiếc đều hỏng là bao nhiêu?
- B) Câu hỏi tương tự nhưng chọn lần lượt có hoàn lại.

## Ví dụ 5\*

- Hộp 1 có 7 bóng trắng và 3 bóng đen
- Hộp 2 có 10 trắng và 5 đen
- Lấy ngẫu nhiên 2 bóng từ hộp 1 rồi bỏ vào hộp 2 (không nhìn bóng lúc bỏ)
- Tính xác suất lấy ngẫu nhiên 1 bóng từ hộp 2 thì ta được bóng màu đen.

## Hai biến cố độc lập\_1

- A và B độc lập nếu việc **A xảy ra** hay không xảy ra **không ảnh hưởng** đến xác suất của **B** và ngược lại.
- Vậy hai bc A và B độc lập nếu

➤ Hoặc:

$$P(B|A) = P(B)$$

$$P(A|B) = P(A)$$

## Hai biến cố độc lập\_2

➤ Hai biến cố A, B gọi là độc lập nếu:

$$P(A.B) = P(A).P(B)$$

➤ Hai biến cố không độc lập gọi là 2 bc phụ thuộc.

## Chú ý

- Cho A và B là hai biến cố độc lập. Khi đó các cặp biến cố sau cũng độc lập.

$$A \& \bar{B}$$

$$\bar{A} \& B$$

$$\bar{A} \& \bar{B}$$

- Thông thường dựa vào bản chất của phép thử ta công nhận các biến cố độc lập mà không phải chứng minh.

# Độc lập từng đôi

- Hệ các biến cố  $A_1, A_2, \dots, A_n$  gọi là **độc lập từng đôi** nếu mỗi cặp hai biến cố trong  $n$  biến cố đó độc lập với nhau.
- Độc lập từng đôi  $\leftrightarrow A_i, A_j$  bất kỳ độc lập.

# Độc lập toàn phần

- Hệ các biến cố  $A_1, A_2, \dots, A_n$  gọi là độc lập toàn phần nếu mỗi biến cố trong hệ độc lập với một tổ hợp bất kỳ các biến cố còn lại.
- **Chú ý:**
  - Độc lập toàn phần  $\rightarrow$  độc lập từng đôi
  - Không có chiều ngược lại.



# Bài tập tổng hợp

1. Một lô hàng có 9 sản phẩm. Mỗi lần kiểm tra chất lượng lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm. Sau khi kiểm tra xong thì trả lại lô hàng. Tính xác suất để sau 3 lần kiểm tra lô hàng như vậy thì tất cả các sản phẩm đều được kiểm tra.
2. Bắn hai lần độc lập nhau, mỗi lần một viên đạn vào cùng một bia. Xác suất bắn trúng đích của viên đạn thứ nhất là 0,7 và của viên đạn thứ 2 là 0,4.
  - a) Tìm xác suất để chỉ có một viên đạn trúng bia.
  - b) Biết rằng chỉ có một viên đạn trúng bia. Tính xác suất đó là viên đạn thứ nhất.

## Bài tập tổng hợp

3. Xác suất để động cơ thứ nhất của máy bay trúng đạn là 0,2; để động cơ thứ 2 của máy bay bị trúng đạn là 0,3; còn xác suất để phi công bị trúng đạn là 0,1. Tìm xác suất để máy bay rơi, biết rằng máy bay rơi khi cả 2 động cơ bị trúng đạn hoặc phi công bị trúng đạn.
4. Có 12 lá thăm trong đó có 5 lá trúng thưởng. Hai người A và B bốc thăm như sau. Người A bốc trước không hoàn lại 2 lá. Sau đó người B bốc 4 lá ngẫu nhiên.
  - a) Tính xác suất người B bốc được 2 lá thăm trúng thưởng.
  - b) Xác suất bốc được thăm trúng thưởng của ai cao hơn.

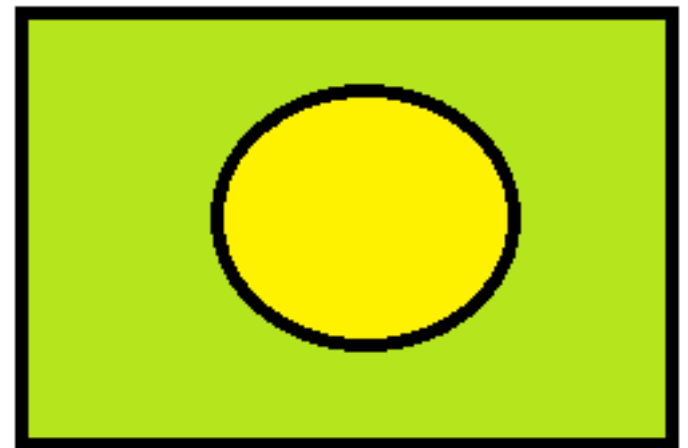
# Hệ biến cố đầy đủ

$$i) H_i \cdot H_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j$$

$$ii) H_1 + H_2 + \dots + H_n = \Omega$$



Hệ gồm 5 biến cố đầy đủ



Hệ gồm 2 biến cố đầy đủ

# Công thức xác suất đầy đủ

- Cho  $H_1, H_2, \dots, H_n$  là một hệ đầy đủ các biến cố.
- $A$  là một biến cố trong phép thử
- Xác suất của  $A$  bị phụ thuộc vào hệ biến cố
- Khi đó:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) P(A|H_i)$$

## Ví dụ 1

### HỘP 1

6 chính phẩm<sup>2</sup>  
4 phế phẩm<sup>2</sup>

### HỘP 2

10 chính phẩm<sup>2</sup>  
5 phế phẩm<sup>2</sup>

### HỘP 3

15 chính phẩm<sup>2</sup>  
5 phế phẩm<sup>2</sup>

- Lấy ngẫu nhiên một hộp và từ đó lấy ngẫu nhiên ra 3 sản phẩm<sup>2</sup>. Tính xác suất để lấy được 2 chính phẩm và 1 phế phẩm?

## Chú ý

- Nếu phép thử gồm 2 giai đoạn và biến cố A liên quan đến giai đoạn sau thì các kết quả có thể có của giai đoạn đầu chính là một hệ biến cố đầy đủ.
- Khi trình bày cần:
  - Ghi rõ công thức.
  - Tính đủ các thành phần.
  - Có thể không cần quá chi tiết: gọi phép thử, không gian mẫu. Nhưng bắt buộc phải gọi biến cố và gọi chính xác.

## Ví dụ 2

### Kiện 1

5 loại A  
1 loại B

### Kiện 2

2 loại A  
4 loại B

### Kiện 3

0 loại A  
0 loại B

Từ mỗi kiện chọn ra ngẫu nhiên 1 sản phẩm đem giao cho khách hàng.

Sau đó các sản phẩm còn lại của 2 kiện được dồn chung vào kiện hàng 3 đang trống.

## Ví dụ 2

- a) Lấy ngẫu nhiên 1 sản phẩm từ kiện hàng 3. Tính xác suất chọn được sản phẩm loại B?
- b) Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ kiện hàng 3. Tính xác suất để có ít nhất 1 sản phẩm loại B trong 2 sản phẩm được chọn?



## Ví dụ 3

- Công ty có 3 máy sản xuất các sản phẩm. Tương ứng máy B1, B2, B3 sản xuất 30%; 45% và 25% sản phẩm của công ty. Theo đánh giá có 2%; 3% và 1% các sản phẩm của các máy tương ứng kém chất lượng.
- Chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm. Xác suất sản phẩm này kém chất lượng là bao nhiêu?
- Giả sử sp chọn ra là sp tốt. Khả năng cao nhất sp này do máy nào sx ra?

## Ví dụ 4

- Một loại bệnh ung thư mới được phát hiện trên các phụ nữ 60 tuổi với xác suất 0,07. Để phát hiện ung thư, người ta làm xét nghiệm máu. Theo đánh giá, xét nghiệm này cho giá trị âm giả với tỷ lệ là 10% (nghĩa là bị sai khi đưa ra kết quả âm tính) và tỷ lệ dương giả là 5% (cho kết quả dương tính sai)
- Giả sử một phụ nữ 60 tuổi xét nghiệm và có kết quả là âm tính thì khả năng người này bị ung thư là?

## Ví dụ 5

Có 2 xạ thủ loại I và 8 xạ thủ loại II. Xác suất bắn trúng đích của xạ thủ loại I là 90% và của xạ thủ loại II là 80%.

- a) Lấy ngẫu nhiên một xạ thủ và xạ thủ đó bắn một viên đạn. Tính xác suất viên đạn trúng đích.
- b) Lấy ngẫu nhiên 2 xạ thủ và mỗi xạ thủ bắn một viên đạn. Xác suất cả hai viên đều trúng là bao nhiêu?

## Bài tập tổng hợp 2

1. Có 2 lô loại 1 và 3 lô loại 2; mỗi lô chứa 5 sản phẩm. Lô loại 1 chứa toàn sản phẩm tốt còn lô loại 2 chứa 4 sản phẩm tốt. Chọn ngẫu nhiên 2 lô rồi trộn chung các sản phẩm của 2 lô với nhau. Sau đó lấy ra ngẫu nhiên 2 sản phẩm. Tính xác suất lấy được cả 2 sản phẩm tốt?

Vẽ sơ đồ thể hiện các phép thử và biến cố?

## Bài tập tổng hợp 2

2. Lô 1 có  $a$  phế phẩm và  $b$  chính phẩm. Lô 2 có  $c$  phế phẩm và  $d$  chính phẩm. Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm từ lô 1 cho sang lô 2; sau đó lấy ngẫu nhiên một sản phẩm từ lô 2 cho vào lô 1. Sau đó từ lại lấy một sản phẩm từ lô 1. Tính xác suất sản phẩm này là sản phẩm tốt

➤ Vẽ sơ đồ cây về các phép thử này.

## Bài tập tổng hợp 2

3. Tỷ lệ người dân nghiện thuốc là 30%. Tỷ lệ bị viêm họng trong số những người nghiện là 60%. Tỷ lệ bị viêm họng trong số những người không nghiện là 20%.

a) Lấy ngẫu nhiên một người thì thấy người này bị viêm họng. Tính xác suất người này nghiện thuốc lá?

b) Nếu người đó không bị viêm họng. Tính xác suất người đó nghiện thuốc

## Bài tập tổng hợp 2

4. Một nhân viên bán hàng mỗi năm đến bán ở công ty A 3 lần. Xác suất lần đầu bán được hàng là 0,8. Nếu lần trước bán được hàng thì xác suất lần sau bán được hàng là 0,9. Còn nếu lần trước không bán được hàng thì xác suất lần sau bán được là 0,4. Tính xác suất

- a) Cả 3 lần đều bán được hàng?
- b) Có đúng 2 lần bán được hàng?

# Công thức Bayes

- Cho  $H_1, H_2, \dots, H_n$  là một hệ đầy đủ các biến cố.
- $A$  là một biến cố trong phép thử
- Xác suất của  $A$  bị phụ thuộc vào hệ biến cố
- Khi đó:

$$P(H_k | A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i)}$$

- Điều kiện:  $P(A) > 0$ .



# Công thức Bayes



Thomas Bayes (1702–1761)

$$P(H_k | A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i)}$$

$P(A.H_k)$

$P(A)$

# Công thức Bayes



Thomas Bayes (1702–1761)

➤ Ý nghĩa???

Ví dụ 1

HỘP 1

6 chính phẩm<sup>2</sup>  
4 phế phẩm<sup>2</sup>

HỘP 2

10 chính phẩm<sup>2</sup>  
5 phế phẩm<sup>2</sup>

HỘP 3

15 chính phẩm<sup>2</sup>  
5 phế phẩm<sup>2</sup>

- Lấy ngẫu nhiên một hộp và từ đó lấy ngẫu nhiên ra 3 sản phẩm. Kết quả được 2 chính phẩm và 1 phế phẩm. Tính xác suất để các sp đó thuộc hộp 3?

## Ví dụ 1

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3)P(A|H_3)}{P(A)} \approx 0,3165$$

- Công thức Bayes thường dùng với công thức xác suất đầy đủ.
- Giúp ta đánh giá lại xác suất của hệ biến cố khi có một biến cố xảy ra.

## Ví dụ 2

- Người ta phỏng vấn ngẫu nhiên 200 khách hàng về một loại sản phẩm định đưa ra thị trường và thấy có:
    - 34 người trả lời: “**Sẽ mua**”
    - 96 người trả lời: “Có thể sẽ mua”
    - 70 người trả lời: “**Không mua**”
- Kinh nghiệm cho thấy tỉ lệ khách hàng thực sự mua sản phẩm dựa theo các cách trả lời trên là: 40%; 20% và 1%.

## Ví dụ 2

- Hãy đánh giá thị trường tiềm năng của sản phẩm đó? (tỷ lệ người thực sự mua)
- Trong số khách hàng đã mua sản phẩm, có bao nhiêu phần trăm trả lời là **sẽ mua**?

# Công thức Bernoulli

**Định nghĩa.** Thực hiện  $n$  phép thử độc lập; trong mỗi phép thử bc  $A$  xuất hiện với xác suất  $p$  và không xuất hiện với xác suất  $q=1-p$ .

Khi đó xác suất để  $A$  xuất hiện  $k$  lần trong  $n$  phép thử là:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

## Ví dụ 1

Một hộp có 10 viên bi gồm 3 bi vàng và 7 bi đỏ.

Lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 4 bi, mỗi lần 1 bi và có hoàn lại.

Tính xác suất trong 4 bi đã lấy có 3 bi đỏ?

**Giải**



## Ví dụ 1

Xem việc lấy ra 1 bi là một phép thử thì ta có dãy 4 phép thử độc lập.

Xác suất để lấy được bi đỏ mỗi lần là:  $P(A)=0,7$

Gọi  $F$  là biến cố lấy được 3 bi đỏ.

Ta có:

$$P(F) = P_4(3) = C_4^3 \cdot 0,7^3 \cdot 0,3^1 =$$

## Ví dụ 2

- Một sinh viên thi trắc nghiệm môn Ngoại Ngữ gồm có 10 câu hỏi. Mỗi câu có 4 phần để lựa chọn trả lời, trong đó chỉ có 1 phần đúng. Giả sử sinh viên làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên các phần của câu hỏi. Tính xác suất trong các trường hợp sau:
  - a) Sinh viên vừa đủ điểm đậu (5 điểm).
  - b) Sinh viên chọn đúng ít nhất 1 câu hỏi.

## Ví dụ

- Một bác sĩ có xác suất chữa khỏi bệnh là 0,8. Có người nói rằng cứ 10 người đến chữa bệnh thì chắc chắn có 8 người khỏi bệnh. Điều khẳng định đó có đúng không?

## Ví dụ 3

- Ở một hệ dịch vụ, khách hàng chỉ có thể chọn một trong 3 loại hình dịch vụ A, B, C. Theo thống kê thì trong số các khách hàng của hệ dịch vụ này, tỷ lệ khách hàng dùng loại hình dịch vụ A, B, C tương ứng là 30%; 50%; 20%.
- 
- a) Tìm xác suất để trong số 10 khách hàng vào hệ dịch vụ này có ít nhất 3 người chọn loại hình dịch vụ B. Giả thiết cho rằng họ độc lập nhau trong việc chọn loại hình dịch vụ?
- 
- b) Có 3 khách hàng vào hệ dịch vụ này và họ độc lập nhau trong việc chọn loại hình dịch vụ. Tìm xác suất để 3 người này chọn 3 loại hình dịch vụ khác nhau?

Có 4 nhóm xạ thủ tập bắn. Nhóm thứ nhất có 5 người; nhóm thứ hai có 7 người; nhóm thứ ba có 4 người và nhóm thứ tư có 2 người. Xác suất bắn trúng đích của mỗi người trong nhóm thứ nhất, hai, ba và tư lần lượt là: 0,8; 0,7; 0,6 và 0,5. Chọn ngẫu nhiên một xạ thủ và biết rằng xạ thủ này bắn trượt. Hãy xác định xem khả năng xạ thủ này ở trong nhóm nào là nhiều nhất.

## Bài 2

Có 2 kiện hàng 1, 2 mỗi kiện có 20 sản phẩm. Số sản phẩm tốt tương ứng mỗi kiện là 12 và 8. Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm từ kiện 1 cho vào kiện 2. Sau đó từ kiện 2 ta lấy ra ngẫu nhiên 3 sản phẩm. Tính xác suất:

- a) Tổng số sản phẩm tốt trong 2 lần lấy ra nhỏ hơn 4.
- b) Cả 3 sản phẩm lấy ra từ kiện 2 đều là sản phẩm tốt.

## Bài 4

Có 3 máy 1,2,3 cùng sản xuất ra một loại sản phẩm

Cửa hàng 1 có : 30 loại A và 70 loại B.

Cửa hàng 2 có : 70 loại A và 50 loại B.

Cửa hàng 3 có : 90 loại A và 60 loại B.

Một người chọn ngẫu nhiên một cửa hàng và mua ngẫu nhiên 2 sản phẩm.

- a) Tính xác suất người này mua được 2 sản phẩm loại A?
- b) Giả sử khách hàng đã mua được 2 sản phẩm loại A. Tính xác suất người này mua tiếp 3 sản phẩm nữa cũng từ cửa hàng này thì 1 sản phẩm loại A?

## Bài 5

- Một lô có 20 sản phẩm trong đó có 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 sản phẩm (xét cả hai trường hợp không hoàn lại và có hoàn lại). Tính xác suất để:
  - Cả hai sản phẩm đều là phế phẩm.
  - Trong hai sản phẩm lấy ra có 1 tốt.
  - Lần thứ 2 lấy được sản phẩm tốt.



## Bài 6

- Trong một kỳ thi, giáo viên cho sinh viên 100 câu hỏi ôn tập. Sinh viên A đã làm được 80 câu, còn 20 câu không làm được. Khi vào thi giáo viên cho chọn ngẫu nhiên 3 câu để làm bài thi và quy ước nếu A làm được ít nhất 2 câu thì đậu. Tính xác suất để sinh viên A thi đậu.

