الفصل السادس: البنى الجبرية

الكلمات المفتاحية:

قانون تشكيل داخلي، خواص قانون التشكيل، عنصر حيادي، عنصر نظير، زمرة، زمرة تبديلية، زمرة جزئية، زمرة منتهية، زمرة وحيدة التوليد، زمرة دوارة، رتبة زمرة، مورفيزم، أندومورفيزم، إيزومورفيزم، أوتومورفيزم، نواة مورفيزم، صورة مورفيزم، زمرتان متشاكلتان، زمر القسمة، حلقة، حلقة جزئية، حلقة تامة، حقل، حقل جزئي.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على بعض البنى الجبرية ابتداء بقوانين التشكيل الداخلي وخواصها. والزمر الجزئية وخواص الزمر، ويتم التركيز بشكل خاص على الزمر المنتهية والدوارة لما لها من فوائد، والتطبيقات (التشاكلات) بين الزمر. بعدها يتم دراسة الحلقات والحلقات الجزئية والتشاكلات بين الحلقات. وأخيراً نصل إلى البنية الأعم وهي الحقل. هذه البنى هي الأساس لمفاهيم أخرى في الرياضيات كالمصفوفات والفضاءات الشعاعية بالإضافة لكونها تلعب دورا أساسياً في الحساب والهندسة والتشفير.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- البنى الجبرية من قوانين التشكيل الداخلية إلى الزمر والحلقات والحقول.
- الزمر وخواصها والتشاكلات فيما بينها.
- الزمر المنتهية والدوارة.
- الحلقات والتشاكلات فيما بينها.
- الحقول والتشاكلات فيما بينها.

1. قوانين التشكيل

1.1. قوانين التشكيل الداخلي

تعريف 1: لتكن E مجموعة ما. نسمي قانون تشكيل داخلي على E كل تطبيق من $E \times E$ إلى E.
ليكن $*$ قانون تشكيل داخلي على E، صورة كل زوج $(,y) \in E \times E = E^2$ وفق $*$ يُرمز لها بالشكل $x * y$. والرمز $(E,*)$ يعني أن المجموعة E مزودة بقانون التشكيل الداخلي $*$.

أمثلة 1:

لتكن $E = \mathcal{Z}$، عملية الجمع العادية $\mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ المعرفة بالشكل $(a,b) \mapsto a + b$ تشكل قانون تشكيل داخلي. عملية الضرب العادية $\mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ المعرفة بالشكل $(a,b) \mapsto a \times b$ تشكل قانون تشكيل داخلي. عملية الطرح العادية $\mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ المعرفة بالشكل $(a,b) \mapsto a - b$ تشكل قانون تشكيل داخلي. أما القسمة a/b فلا تشكل قانون تشكيل داخلي لأن قسمة العددين الصحيحين 2 و3 ليس بعدد صحيح.

- عملية الجمع على المجموعات $\mathcal{N}$ و $\mathcal{Z}$ و $\mathcal{Q}$ و $\mathcal{R}$ و $\mathcal{C}$ تشكل قانون تشكيل داخلي. أما عملية الجمع على المجموعات $\mathcal{Z}^*$ و $\mathcal{Q}^*$ و $\mathcal{R}^*$ و $\mathcal{C}^*$ فلا تشكل قانون تشكيل داخلي ($5 - 5 = 0 \notin \mathcal{Z}^*$).
- عملية الضرب على المجموعات $\mathcal{N}$ و $\mathcal{Z}$ و $\mathcal{Q}$ و $\mathcal{R}$ و $\mathcal{C}$ تشكل قانون تشكيل داخلي.
- عملية الطرح على المجموعات $\mathcal{Z}$ و $\mathcal{R}$ و $\mathcal{C}$ تشكل قانون تشكيل داخلي. أما عملية الطرح على $\mathcal{N}$ فلا تشكّل قانون تشكيل داخلي، لأن طرح عددين من $\mathcal{N}$ ليس بالضرورة أن يكون من $\mathcal{N}$: ($2 - 5 = -3 \notin \mathcal{N}$).
- لتكن $E = \mathcal{P}(X)$ المجموعات الجزئية التي تتألف منها مجموعة X ، عملية الاجتماع $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ المعرفة بالشكل $(A,B) \mapsto A \cup B$ تشكل قانون تشكيل داخلي لأن اجتماع أي مجموعتين من $\mathcal{P}(X)$ هي مجموعة من $\mathcal{P}(X)$. نفس الشيء بالنسبة لعملية التقاطع $\cap$ والفرق التناظري Δ فكل منهما يشكل قانون تشكيل داخلي.
- لتكن $E = \mathcal{F}(X)$ مجموعة التطبيقات من X إلى X ، عملية التركيب $\mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)$ المعرفة بالشكل $(f,g) \mapsto f \circ g$ تشكل قانون تشكيل داخلي (قانون تركيب التطبيقات). لأن تركيب تطبيقين من $\mathcal{F}(X)$ هو تطبيق من $\mathcal{F}(X)$.
- لتكن $E = \mathcal{R}^2$، الجمع $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ المعرف بالشكل: $((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \mapsto (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ يشكل قانون تشكيل داخلي (جمع عددين حقيقيين هو عدد حقيقي. أما عملية الضرب بسلّمي $\mathcal{R} \times \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ والمعرف بالشكل التالي: $(\lambda,(x,y)) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$ لا يشكل قانون تشكيل داخلي لأن مجموعة المنطلق ليست من الشكل $E \times E$.

2.1. خواص قانون التشكيل الداخلي

الخاصة التجميعية

تعريف 2: ليكن $*$ قانون تشكيل داخلي على E. نقول عن $*$ إنه تجميعي إذا كان من أجل كل $(x, y, z) \in E^3$ لدينا: $x * (y * z) = (x * y) * z$ عندها نكتب $x * y * z$ وبدون أقواس.

الخاصة التبديلية

تعريف 3: ليكن $*$ قانون تشكيل داخلي على E. نقول عن $*$ إنه تبديلي إذا كان من أجل كل $(x, y) \in E^2$ لدينا: $x * y = x * y$.

3.1. العنصر الحيادي

تعريف 4: ليكن $*$ قانون تشكيل داخلي على E. نقول عن العنصر $e \in E$ أنه عنصر حيادي لـ $(E,*)$ إذا كان من أجل كل عنصر $x \in E$ لدينا: $x * e = e * x = x$.

وحدانية العنصر الحيادي

مبرهنة 1: ليكن $*$ قانون تشكيل داخلي على E. إذا كانت $(E,*)$ تملك عنصر حيادي، فهذا العنصر وحيد.

أمثلة 2:

- عملية الجمع والضرب على مجموعة الأعداد الصحية $\mathcal{Z}$ هي عملية تجميعية وتبديلية وتقبل عنصر حيادي هو الصفر "0" بالنسبة للجمع والواحد "1" بالنسبة للضرب. نفس الشيء بالنسبة للمجوعة $\mathcal{R}$ و $\mathcal{C}$.
- عملية الطرح ليست تجميعية ولا تبديلية في $\mathcal{Z}$ وأيضاً في $\mathcal{R}$:
  $3 - (2 - 7) = -8 \neq -2 \; (3 - 7) - 2$. كما أن:
  $3 - 7 = 4 \neq -4 = 7 - 3$.
- المجموعة $\mathcal{N}$ ليس لها عنصر حيادي بالنسبة لعملية الجمع (الصفر "0") بينما المجموعة $\mathcal{W} = \mathcal{N} \cup \{0\}$ لها.
- قانون تركيب التطبيقات $\circ$ على $\mathcal{F}(X)$ تجميعي ولكنه ليس تبديلي بشكل عام: $(f \circ g) \neq (g \circ f)$. ويقبل عنصر حيادي التطبيق المطابق I_X.
- القوانين $\cup$ و $\cap$ و Δ في $\mathcal{P}(X)$ تجميعية وتبديلية وتقبل عنصر حيادي ($\varnothing$ بالنسبة للاجتماع $\cup$) و(Ω بالنسبة للتقاطع $\cap$) و(X بالنسبة للفرق التناظري Δ).

- عملية الجمع المعرفة سابقاً على $\mathcal{R}^2$ تجميعية وتبديلية وتقبل عنصر حيادي $(0,0)$.

$$(x,y) * (0,0) = (x+0, y+0) = (x,y)$$
$$(0,0) * (x,y) = (0+x, 0+y) = (x,y)$$

تمرين 1: ليكن $*$ قانون تشكيل داخلي على $\mathcal{R}$ كما يلي: $x * y = x + y + x^2y^2$, $(x,y) \in \mathcal{R}^2$.

هل القانون تبديلي؟ تجميعي؟ وهل يقبل عنصر حيادي؟

الحل

تبديلي $y * x = y + x + y^2x^2 = x * y$

$$(1*1)*(-1) = (1+1+1^21^2)*(-1) = 3*(-1) = 3+(-1)+3^2(-1)^2 = 11$$
$$1*(1*(-1)) = 1*(1+(-1)+1^2(-1)^2) = 1*1 = 1+1+1^21^2 = 3 \neq 11$$

غير تجميعي. من أجل أي عنصر x من $\mathcal{R}$: $0 * x = x * 0 = 0$، بالتالي العنصر 0 حيادي بالنسبة لـ $*$.

4.1. العنصر النظير

تعريف 5: ليكن $*$ قانون تشكيل داخلي على E وله عنصر حيادي e. نقول عن عنصر $x \in E$ أنه يقبل عنصر نظير y بالنسبة للقانون $*$ إذا تحقق: $x * y = y * x = e$. ونرمز لنظير x عادة بـx^{-1}.

وحدانية العنصر النظير

مبرهنة 2: ليكن $*$ قانون تشكيل داخلي على E. إذا كان القانون تجميعي وله عنصر حيادي، إذا وجد العنصر النظير يكون وحيد.

أمثلة 3:

- في المجوعة $\mathcal{R}$، لكل عنصر x نظير بالنسبة لعملية الجمع هو المعكوس $-x$ (نظير العنصر 5 هو -5). أما بالنسبة لعملية الضرب فلكل عنصر x مختلف عن الصفر نظير هو المقلوب $1/x$ (نظير العنصر 5 هو $1/5$).
- في المجوعة $\mathcal{Z}$، العنصران الوحيدان اللذان لهما نظير بالنسبة للضرب هما -1 و1.
- في مجموعة التطبيقات $\mathcal{F}(X)$، العناصر التي لها نظير بالنسبة لقانون تركيب التطبيقات هي مجموعة تطبيقات التقابل.

مبرهنة 3: ليكن $*$ قانون تشكيل داخلي على E تجميعي وله عنصر حيادي، لدينا:

1. ليكن $x \in E$. نظير العنصر x^{-1} هو x (نظير النظير هو العنصر نفسه).
2. ليكن $(x,y,z) \in E^3$ وللعنصر x نظير. عندئذ:

$(x * y = y * z \text{ or } y * x = z * x) \Rightarrow y = z$. معنى ذلك أننا نستطيع الاختصار من اليسار واليمين.

ليكن $(x, y) \in E^2$ وللعنصرين x و y نظير، عندئذ العنصر $y * x$ له نظير و $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$.

ملاحظة 1: يجب الانتباه إلى أن $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$ وليس $x^{-1} * y^{-1}$.

5.1. القوى

تعريف 6: ليكن $*$ قانون تشكيل داخلي على E تجميعي وله عنصر حيادي e. ليكن x عنصر من E و $n \in \mathcal{N}$.

- العنصر $x * x * \dots x$، n مرة ويرمز له x^{*n} أو اختصاراً x^n.
- اصطلاحاً، نرمز $x^0 = e$.
- ليكن x له نظير، نرمز $x^{-n} = (x^{-1})^n = (x^n)^{-1}$. وهكذا فالعنصر x^k معرف من أجل أي $k \in \mathcal{Z}$.

فرضية 1: ليكن $*$ قانون تشكيل داخلي على E تجميعي وله عنصر حيادي e. ليكن x عنصر من E، لدينا:

1. من أجل $(n, p) \in \mathcal{N}^2$، $x^n * y^n = x^{n+p}$.
2. إذا كان للعنصر x نظير فإنه من أجل $(n, p) \in \mathcal{Z}^2$، $x^n * y^n = x^{n+p}$.

ملاحظة 2: بشكل عام يجب الانتباه إلى أن $x^n * y^n \neq (x * y)^n$ إلا إذا كان $*$ تجميعي.

6.1. الخاصة التوزيعية

تعريف 7: ليكن $*$ و T قانوني تشكيل داخليين على E. نقول عن $*$ إنه توزيعي بالنسبة للقانون T إذا كان من أجل كل $(x, y, z) \in E^3$ لدينا: $x * (y \mathrm{T} z) = (x * y) \mathrm{T} (x * z)$.

أمثلة 4:

- عملية الضرب توزيعي على الجمع في مجموعة الأعداد الصحية $\mathcal{Z}$.
  $2 \times (4 + 6) = 2 \times 4 + 2 \times 6 = 20$.
- القانونين $\cup$ و $\cap$ توزيعيان أحدهما بالنسبة للآخر في $\mathcal{P}(X)$.
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ و
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$.

2. الزمر

تعريف 8: ليكن $*$ قانون تشكيل داخلي على المجموعة G غير الخالية. نسمي $(G,*)$ زمرة إذا تحققت الشروط التالية:

1. القانون $*$ تجميعي.
2. $(G,*)$ لها عنصر حيادي.
3. لكل عنصر $x \in G$ نظير.

تعريف 9: لتكن $(G,*)$ زمرة. إذا كان القانون $*$ تبديلي، نقول عن $(G,*)$ أنها تبديلية.

أمثلة 5:

- تشكل المجموعات $\mathcal{Z}$ و $\mathcal{Q}$ و $\mathcal{R}$ و $\mathcal{C}$ زمر تبديلية بالنسبة لعملية الجمع عنصرها الحيادي 0.
- تشكل المجموعات $\mathcal{Q}^*$ و $\mathcal{R}^*$ و $\mathcal{C}^*$ زمر تبديلية بالنسبة لعملية الضرب عنصرها الحيادي 1.
- تشكل المجموعة $\mathcal{P}(X)$ زمرة تبديلية بالنسبة للفرق التناظري Δ.
- لا تشكل المجموعة $(\mathcal{N},+)$ زمرة لأنه لا يوجد للعناصر نظير.
- لا تشكل المجموعة $(\mathcal{R},.)$ زمرة لأنه لا يوجد نظير للعنصر 0، بينما المجموعة $(\mathcal{R}^*,.)$ تشكل زمرة تبديلية.
- لا تشكل $(\mathcal{P}(X),\cup)$ زمرة لأنه لأن العنصر الوحيد الذي له نظير هو العنصر $\emptyset$ فقط $(\emptyset \cup \emptyset = \emptyset))$. كما أن $(\mathcal{P}(X),\cap)$ لا تشكل زمرة لأن العنصر الوحيد الذي له نظير هو العنصر X فقط $(X \cap \emptyset = \emptyset)$.
- لتكن X مجموعة. نرمز لمجموعة تطبيقات التقابل من X إلى X بالرمز $\mathcal{G}(X)$. $(\mathcal{G}(X),\circ)$ تشكل زمرة عنصرها الحيادي I_X.

تمرين 2: لتكن $G = \mathcal{R}^* \times \mathcal{R}$، وليكن القانون $*$ تشكيل داخلي معرف على G بالعلاقة التالية: $(x,y) * (x',y') = (xx',xy'+y)$. أثبت أن: $(G,*)$ زمرة غير تبديلية.

الحل: لنبرهن أن القانون تجميعي:

$$((x,y) * (x',y')(* (x'',y'') = (xx',xy' + y) * (x'',y'')$$
$$= (xx'x'',xx'y'' + xy' + y)$$
$$(x,y) * ((x',y') * (x'',y'')) = (x,y) * (xx'',x'y'' + y')$$
$$= (xx'x'',xx'y'' + xy' + y)$$

وبالتالي القانون $*$ تجميعي.

$$(x,y) * (1,0) = (x,y)\ and\ (1,0) * (x,y) = (x,y)$$

وبالتالي العنصر $(1,0)$ عنصر حيادي للقانون $*$.

$$(x,y) * (1/x,-y/x) = (1,0)\ and\ (1/x,-y/x) * (x,y) = (1,0)$$

وبالتالي لكل عنصر (x,y) عنصر نظير $(1/x,-y/x)$. إذن $(*,)$ زمرة.

$$(1,2) * (3,4) = (3,6)\ and\ (3,4) * (1,2) = (3,10)$$

والزمرة غير تبديلية.

1.2. الزمرة الجزئية

تعريف 10: لتكن $(G,*)$ زمرة ولتكن H مجموعة. نقول عن H أنها زمرة جزئية من G إذا كان:

1. $H \subset G$
2. تحوي H العنصر الحيادي e
3. H مستقرة بالنسبة للقانون *، بمعنى أياً كان العنصران $(h1,h2) \in H^2$ فإن $h_1 * h_2 \in H$
4. H مستقرة بالنسبة للنظير بمعنى أنه أياً كان العنصر $h \in H$ فإن $h^{-1} \in H$

مثال 6: لتكن G زمرة عنصرها الحيادي e. عندئذ G و $\{e\}$ تشكلان زمرتين جزئيتين من G.

فرضية 2: لتكن $(G,*)$ زمرة ولتكن H زمرة جزئية من G. بالتالي $(H,*)$ زمرة. وأيضاً:

1. العنصر الحيادي لـ $(H,*)$ هو نفسه العنصر الحيادي لـ $(G,*)$.
2. ليكن $h \in H$، نظير العنصر h باعتباره عنصراً من الزمرة $(H,*)$ هو نفسه النظير باعتباره عنصراً في الزمرة $(G,*)$.

ملاحظة 3: لتكن K زمرة جزئية من H والتي هي بدورها زمرة جزئية من G ، بالتالي فإن K زمرة جزئية من G.

مبرهنة 4: لتكن $(G,*)$ زمرة عنصرها الحيادي e و H مجموعة. عندئذ تكون H زمرة جزئية إذا وفقط إذا:

1. $H \subset G$
2. تحوي H العنصر الحيادي e
3. أياً كان العنصران $(h,k) \in H^2$ فإن $h * K^{-1} \in H$

أمثلة 7:

- $(\mathcal{Z},+)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{Q},+)$ وهي بدورها زمرة جزئية من $(\mathcal{R},+)$ وهي بدورها زمرة جزئية من $(\mathcal{C},+)$.
- المجموعة $n\mathcal{Z}$ مضاعفات العدد n زمرة جزئية من $(\mathcal{Z},+)$. كما أن أي زمرة جزئية من الزمرة $(\mathcal{Z},+)$ هي من النمط $(n\mathcal{Z},+)$ حيث n عدد طبيعي أو صفر .
- $(\mathcal{Q}^*,.)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{R}^*,.)$ وهي بدورها زمرة جزئية $(\mathcal{C}^*,.)$.

تمرين 3: لتكن $(G,*)$ زمرة حيث $G = \mathcal{R}^* \times \mathcal{R}$، والقانون *:

$.(x,y) * (x',y') = (xx', xy' + y)$

أثبت أن: $H = \mathcal{R}^{+*} \times \mathcal{R}$ زمرة جزئية من $(G,*)$.

الحل: من الواضح أن $H \subset G$. كما أن العنصر $e = (1,0) \in H$. ليكن العنصران $(x,y),(x',y')$ من المجموعة H:

$$(x,y) * \left(\frac{1}{x'}, -\frac{y'}{x'}\right) = \left(\frac{x}{x'}, -\frac{xy'}{x'} - \frac{y'}{x'}\right) \in H$$

$(x/x' > 0, -xy'/x' - y'/x' \in \mathcal{R})$. وبالتالي H زمرة جزئية من $(G,*)$.

مبرهنة 5: لتكن $(G,*)$ زمرة و H_1, H_2 زمرتين جزئيتين من G. عندئذ يكون $H_1 \cap H_2$ زمرة جزئية من G.

مثال 8: $2\mathcal{Z} \cap 3\mathcal{Z} = 6\mathcal{Z}$. وبشكل عام، تقاطع عدد أياً كان من الزمر الجزئية لـ G يعطي زمرة جزئية من G.

ملاحظة 4: لتكن $(G,*)$ زمرة و H_1, H_2 زمرتين جزئيتين من G. ليس من الضروري أن يكون $H_1 \cup H_2$ زمرة جزئية من G.

مثال 9: $2\mathcal{Z} \cup 3\mathcal{Z}$ ليست زمرة جزئية من $(\mathcal{Z},+)$. تحقق من ذلك.

2.2. الزمر المنتهية

تعريف 11: نسمي زمرة منتهية زمرة G عدد عناصرها محدود. هذا العدد هو نفسه عدد عناصر (حجم) المجموعة G ، وندعوه رتبة المجموعة، ويرمز له بالرمز $|G|$ أو $Card(G)$.

مثال 10: ليكن n عدد طبيعي. الزمر الجزئية $\mathcal{U}_n$: الجذور من المرتبة n للواحد في $\mathcal{C}^*$ هي منتهية ورتبتها n.

$$\mathcal{U}_n = \{1,\ e^{2i\pi/n},\ e^{4i\pi/n},\ e^{6i\pi/n}, \dots,\ e^{2(n-1)i\pi/n}\}$$

على سبيل المثال: $\mathcal{U}_2 = \{1,-1\}$ و $\mathcal{U}_3 = \{1,\ j,\ j^2\}$ و $\mathcal{U}_4 = \{1,\ i,\ -1,\ -i\}$.

مبرهنة 6: لتكن H زمرة جزئية من زمرة منتهية G. عندئذ H منتهية، ورتبة H تقسم رتبة G.

3.2. الزمر الدوارة

زمرة جزئية مولدة من عنصر واحد

فرضية 3: لتكن G زمرة و X مجموعة جزئية غير خالية من G. تقاطع كافة الزمر الجزئية من G التي تحوي X هي زمرة جزئية من G وتسمى الزمرة الجزئية من G المولدة ب X، ونرمز لها بالرمز $< X >$، وهي أصغر زمرة جزئية من G تحوي X.

زمرة جزئية مولدة من عنصر واحد

تعريف 12: لتكن G زمرة. ليكن x عنصر من G. نسمي زمرة جزئية وحيدة التوليد مولدة بالعنصر x الزمرة الجزئية المولدة ب $\{x\}$. ونرمز لها بالرمز $< x >$، وهي أصغر زمرة جزئية من G تحوي x:
$< x >= \{xm|\ m \in \mathcal{Z}\}$.

تعريف 13: لتكن G زمرة. ليكن x عنصر من G. نقول عن رتبة x أنها منتهية في G عندما يوجد أعداد طبيعية m $(m \geq 1)$ بحيث $x^m = e$. في هذه الحالة، نسمي رتبة x أصغر عدد بينها. بمعنى آخر:

$$(x^n = e\ and\ x^m \neq e\ if\ 1 \leq m < n) \Leftrightarrow (\text{العنصر } x \text{ ذو الرتبة } n \text{ في } G)$$

ملاحظة 5: نظير العنصر x ذو الرتبة n هو $x^{-1} = x^{n-1}$.

فرضية 4: لتكن G زمرة. ليكن x عنصر من G. إذا كانت رتبة x في G منهية $n \geq 1$، عندئذ الزمرة الجزئية $< x >$ منتهية ورتبتها n، ولدينا:

$$< x >= \{e, x, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}\}$$

مثال 11: في الزمرة $(\mathcal{C}^*, .)$، الزمرة الجزئية $< i >= \{1, i, -1, -i\}$ منتهية.

زمرة وحيدة التوليد والزمرة الدوارة

تعريف 14: نسمي زمرة G وحيدة التوليد عندما يتم توليدها من أحد عناصرها، بمعنى أنه عندما يوجد عنصر $x \in G$ بحيث $G = < x >$. وإذا كانت رتبة x منتهية $n \geq 1$، نقول عن الزمرة أنها دوارة ورتبتها n. ولدينا:

$$G = \{e, x, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}\}$$

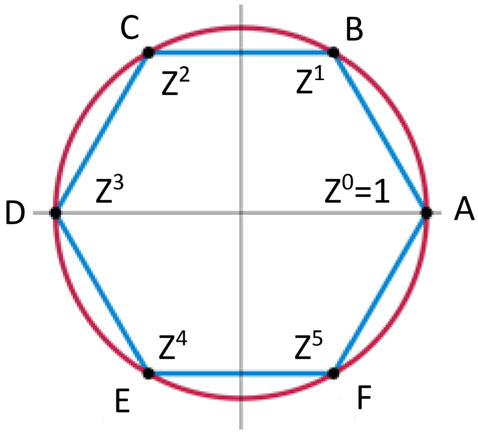
ملاحظة 6: الزمرة وحيدة التوليد (وبشكل خاص دوارة) هي دائماً زمرة تبديلية.

فرضية 5 (زمرة جزئية من زمرة دوارة): كل زمرة جزئية من زمرة دوارة هي بدورها دوارة. بشكل أدق، لتكن $G = < x >$ زمرة دوارة رتبتها $n \geq 1$، عندئذ يوجد من أجل كل قاسم q لـ n زمرة جزئية وحيدة رتبتها q، وهي الزمرة الجزئية الدوارة المولدة بـ x^d حيث $n = dq$.

مولدات الزمرة الدوارة

تعريف 15: لتكن $G = < x >$ زمرة دوارة من المرتبة $n \geq 1$. عندئذ مولدات G هي العناصر x^k بحيث أن العددان k و n أوليان فيما بينهما (القاسم المشترك الأكبر لهما هو الواحد).

مثال 12: في $\mathcal{C}^*$، ليكن $x = e^{i\pi/3}$، والزمرة الدوارة G من المرتبة 6 $G = \{e, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ والمولدة بـ x. هذه الزمرة هي $\mathcal{U}_6$ الجذور من المرتبة السادسة للواحد ضمن المجموعة $\mathcal{C}^*$. عناصرها:



$e = 1,\ x = -j^2,\ x^2 = j,\ x^3 = -1,\ x^4 = j^2,\ x^5 = -j$. هذه العناصر ممثلة جانباً على الدائرة المثلثية وهي عبارة عن رؤوس مسدس منتظم A, B, C, D, E, F.

لنبحث عن الزمر الجزئية الدوارة التي تولدها تلك العناصر. بالتأكيد لدينا $< e > = \{e\}$ و $G = < x >$. كما أن:

$<x^2> = <x^4> = \{e, x^2, x^4\}$ وتمثل الزمرة الجزئية من G من المرتبة 3، والموافقة لرؤوس المثلث ACE. أما $< x^3 > = \{e, x^3\}$ فهي تمثل الزمرة الجزئية من G من المرتبة 2، والموافقة لرؤوس القطعة المستقيمة AD. وأخيراً لنبحث عن الزمرة الجزئية المولدة بـ x^5 والتي تحوي العناصر التالية: $(x^5)^2 = x^{10} = x^4$ و $(x^5)^3 = x^{15} = x^3$ و $(x^5)^4 = x^{20} = x^2$ و $(x^5)^5 = x^{25} = x$ و $e = x^{30} = (x^2)^6$، وبالتالي $G = < x^5 >$. العنصر x^5 هو كالعنصر x مولد للزمرة G.

الزمرة المنتهية التي رتبتها عدد أولي

فرضية 6: لتكن G زمرة منتهية رتبتها عدد أولي p (العدد الذي يقبل القسمة على نفسه وعلى الواحد فقط). عندئذ:

1. G زمرة دوارة
2. الزمر الجزئية في G همت فقط $\{e\}$ و G
3. كل عناصر G المختلفة عن e هي عناصر مولدة لـ G

4.2. مورفيزم (تشاكل) زمري

تعريف 16: $(G_1,*)$ و (G_2,T) زمرتان. نسمي مورفيزم (زمري) من G_1 إلى G_2 أي تطبيق f من G_1 إلى G_2، بحيث: أياً كان العنصران $x, y \in G_1$، فإن $f(x * y) = f(x)\, T\, f(y)$.

كما نسمي أندومورفيزم لـ G مورفيزم من G إلى G ($G_1 = G_2 = G, * = T$).

أمثلة 13:

- التطبيق الأسي هو مورفيزم من $(\mathcal{R}, +)$ إلى $(\mathcal{R}^*, .)$ ($2^{x+y} = 2^x . 2^y$).
- التطبيق اللوغاريتمي هو مورفيزم من $(\mathcal{R}^*, .)$ إلى $(\mathcal{R}, +)$:
  ($ln(x\,.\,y) = ln(x) + ln(y)$).

- الطويلة هي مورفيزم من $(\mathcal{C}^*,.)$ إلى $(\mathcal{R}^*,.)$ $(|z1.z2| = |z1|.|z2|)$.
- القيمة المطلقة هي أندومورفيزم من $(\mathcal{R}^*,.)$ إلى $(\mathcal{R}^*,.)$ $(|x1.x2| = |x1|.|x2|)$.

فرضية 7: f مورفيزم من $(G_1,*)$ إلى (G_2,T). ليكن e_1 و e_2 العنصران الحياديان لـ G_1 و G_2 على الترتيب. عندئذ:

1. $f(e_1) = e_2$
2. أيا كان العنصر $x \in G_1$ فإن: $f(x^{-1}) = [f(x)]^{-1}$
3. أيا كان العنصر $x \in G_1$ و $\in \mathcal{Z}$ فإن: $f(x^n) = [f(x)]^n$

فرضية 8: $f: G \to G_1$ و $g: G \to G_2$ مورفيزمان. عندئذ $g \circ f: G \to G_2$ مورفيزم أيضاً.

فرضية 9: $f: G \to G_1$ مورفيزم. لدينا:

1. إذا كانت H زمرة جزئية من G فإن $f(H)$ زمرة جزئية من G_1
2. إذا كانت K زمرة جزئية من G_1 فإن $f^{-1}(K)$ زمرة جزئية من G

صورة ونواة مورفيزم زمري

تعريف 17: $f: G \to G_1$ مورفيزم وليكن e_1 العنصر الحيادي في G_1. لدينا:

1. نسمي نواة f المجموعة $Ker\, f = f^{-1}(\{e_1\}) = \{x \in G | f(x) = e_1\}$
2. نسمي صورة f المجموعة $Im\, f = f(G) = \{f(x), x \in G\}$

مبرهنة 7: $f: G \to G_1$ مورفيزم. لدينا:

1. $Ker\, f$ زمرة جزئية من G
2. $Im\, f$ زمرة جزئية من G_1

أمثلة 14:

- ليكن التطبيق $f: \mathcal{C}^* \to \mathcal{R}^*$ المعرف بـ $f(z) = |z|$. التطبيق f هو مورفيزم من $(\mathcal{C}^*,.)$ إلى $(\mathcal{R}^*,.)$ لأن: $f(z1.z2) = |z1.z2| = |z1|.|z2| = f(z1).f(z2)$. لنحسب نواة التطبيق f (العنصر الحيادي في $\mathcal{R}^*$ بالنسبة للضرب هو الواحد):
$Ker\, f = \{z \in \mathcal{C}^* | f(z) = 1\} = \{z \in \mathcal{C}^* | \, |z| = 1\}$، وبالتالي نواة التطبيق f هي النقاط التي تقع على الدائرة التي نصف قطرها الواحد ونرمز لها بالرمز $\mathcal{U}$، وهي زمرة جزئية من $(\mathcal{C}^*,.)$.

- القيمة المطلقة هي أندومورفيزم من $(\mathcal{R}^*,.)$ إلى $(\mathcal{R}^*,.)$. العنصر الحيادي في $\mathcal{R}^*$ بالنسبة للضرب هو الواحد، والعناصر من $(\mathcal{R}^*,.)$ التي صورتها هي الواحد $(|x| = 1)$ هما العنصران $\{-1,1\}$. أي أن نواة أندومورفيزم القيمة المطلقة هي المجموعة $\{-1,1\}$ وهي زمرة جزئية من $(\mathcal{R}^*,.)$.

فرضية 10: $f: G \to G_1$ مورفيزم وليكن e العنصر الحيادي في G. لدينا:

1. التطبيق f متباين إذا وفقط إذا كان $Ker\ f = \{e\}$
2. التطبيق f غامر إذا وفقط إذا كان $Im\ f = G_1$

تعريف 18: نسمي إيزومورفيزم من G إلى G_1 كل مورفيزم تقابل من G إلى G_1. كما نسمي أوتومورفيزم من G كل أندزمورفيزم تقابل من G. كما نقول أنه يوجد تشاكل بين G و G_1 إذا وجد إيزومورفيزم بينهما.

مثال 15: الزمرتان $(\mathcal{C},+)$ و $(\mathcal{R}^2,+)$ متشاكلتان.

مبرهنة 8: ليكن f إيزومورفيزم بين الزمرتين G و G_1. عندئذ f^{-1} إيزومورفيزم بين G_1 و G .

تمرين 4: ليكن التطبيق $f: \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ المعرف بـ $f(k) = 3k$. التطبيق f مورفيزم زمري (اندومورفيزم) على الزمرة $(\mathcal{Z},+)$ لأن $f(k + k') = 3(k + k') = 3k + 3k' = f(k) + f(k')$. لنحسب نواة التطبيق f:

$Ker\ f = \{k \in \mathcal{Z} | f(k) = 0\}$. $f(k) = 0$ يعطي $3k = 0$ وبالتالي $k = 0$، بالتالي:

$Ker\ f = \{0\}$ أي أن التطبيق f متباين. لنحسب صورة التطبيق f:

$Im\ f = \{f(k) | k \in \mathcal{Z}\} = \{3k | k \in \mathcal{Z}\} = 3\mathcal{Z}$. أي أن صورة التطبيق f هي مضاعفات العدد 3.

تمرين 5: ليكن لدينا الزمرتان $(\mathcal{R}^+,+)$ و $(\mathcal{U},.)$ حيث $\mathcal{U} = \{z \in \mathcal{C} | |z| = 1\}$ وليكن $f: \mathcal{R} \to \mathcal{U}$ التطبيق المعرف بـ $f(x) = e^{ix}$. لنبرهن أن التطبيق f مورفيزم زمري:

$f(x+y) = e^{i(x+y)} = e^{ix}.e^{iy} = f(x).f(y)$. لنحسب الآن نواة التطبيق f:

$Ker\ f = \{x \in \mathcal{R} | f(x) = 1\}$. لكن $f(x) = 1 = e^{ix}$، بالتالي $x = 0[2\pi]$. إذن:

$Ker\ f = \{2k\pi | k \in \mathcal{Z}\} = 2\pi\mathcal{Z}$. بالتالي f ليس متباين. لنحسب أيضاً صورة التطبيق f: الصورة هي $\mathcal{U}$ لأن كل عدد حقيقي طويلته واحد يكتب بالشكل $f(x) = e^{ix}$ وبالتالي التطبيق غامر.

5.2. الزمرة $\mathcal{Z}/n\mathcal{Z}$

بفرض أن: $n\mathcal{Z} = \{nx |\ x \in \mathcal{Z}\}$ وذلك من أجل أي عدد $n \in \mathcal{Z}$.

فرضية 11: للزمرة $(\mathcal{Z}, +)$ الخواص التالية:

1. الزمرة $\mathcal{Z}$ مزودة بعملية الجمع هي زمرة وحيدة الوليد لانهائية (غير منتهية)، مولدات $\mathcal{Z}$ هي: 1 و -1.
2. من أجل كل $n \in \mathcal{Z}$، المجموعة $n\mathcal{Z}$ هي زمرة جزئية من $\mathcal{Z}$، وهي الزمرة الجزئية المولدة من n.
3. وبالعكس، من أجل كل زمرة جزئية H من $\mathcal{Z}$ ، يوجد عدد وحيد $n \in \mathcal{W}$ بحيث $H = n\mathcal{Z}$.

تعريف 19: ليكن x و y عددان صحيحان. نقول عن x و y أنهما متوافقان بترديد $n\mathcal{Z}$ $\Leftrightarrow$ $(x - y) \in n\mathcal{Z}$ $\Leftrightarrow$ (يوجد $x \in \mathcal{Z}$ بحيث $x - y = n\mathcal{Z}$).

نسمي زمرة القسمة $\mathcal{Z}/n\mathcal{Z}$، ونرمز لعناصرها بالرمز $\bar{x} = \{x + nk; k \in \mathcal{Z}\}$، $x \in \mathcal{Z}$، وحيث $\bar{x}$ يشير إلى صف تكافؤ x بترديد n. قانون التشكيل عليها هو الجمع ولكن على الصفوف بدلاً من الأعداد، بمعنى: $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$، وبشكل خاص، عنصرها الحيادي هو $\bar{0} = n\mathcal{Z}$ ونظير العنصر $\bar{k}$ هو $-\bar{k} = \overline{-k} = \overline{n - k}$. هذا ويمكن تعريف قانون التشكيل الضرب أيضاً بالشكل التالي: $\overline{x.y} = \bar{x}.\bar{y}$.

مثال 16: في الزمرة $\mathcal{Z}/60\mathcal{Z}$، لدينا $\overline{31} + \overline{46} = \overline{31 + 46} = \overline{77} = \overline{17}$

مبرهنة 9: ليكن $n > 1$

1. الزمرة $\mathcal{Z}/n\mathcal{Z}$ منتهية رتبتها n، ولدينا $\mathcal{Z}/n\mathcal{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$.
2. الزمرة $\mathcal{Z}/n\mathcal{Z}$ دوارة رتبتها n.
3. مولدات الزمرة $\mathcal{Z}/n\mathcal{Z}$ هي الصفوف $\bar{k}$ بحيث أن k و n أوليان فيما بينهما.
4. من أجل كل قاسم q لـ n ، يوجد زمرة جزئية وحيدة من $\mathcal{Z}/n\mathcal{Z}$ رتبتها q ، وهي الزمرة الجزئية الدوارة المولدة بـ $\bar{d}$، حيث $n = dq$.

مثال 17: لتكن الزمرة $\mathcal{Z}/4\mathcal{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. جدولي الجمع والضرب هو التالي:

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

$.$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

من الواضح أن العنصر $\bar{1}$ يولد كافة عناصر الزمرة $(\mathcal{Z}/4\mathcal{Z},+)$ لأن: $\bar{1}+\bar{1}=\bar{2}$ و $\bar{1}+\bar{1}+\bar{1}=\bar{3}$ و $\bar{1}+\bar{1}+\bar{1}+\bar{1}=\bar{0}$، أي أن $\mathcal{Z}/4\mathcal{Z} = <\bar{1}>$
العنصر $\bar{3}$ يولد $\mathcal{Z}/4\mathcal{Z}$ أيضاً، أي أن $\mathcal{Z}/4\mathcal{Z} = <\bar{3}>$: $\bar{3}+\bar{3}=\bar{6}=\bar{2}$ و $\bar{3}+\bar{3}+\bar{3}=\bar{9}=\bar{1}$ و $\bar{3}+\bar{3}+\bar{3}+\bar{3}=\overline{12}=\bar{0}$.
أما العنصر $\bar{2}$ فيولد: $\bar{2}+\bar{2}=\bar{4}=\bar{0}$ و $\bar{2}+\bar{2}+\bar{2}=\bar{6}=\bar{2}$. بالتالي: $<\bar{2}> = \{\bar{0},\ \bar{2}\}$.
إذن مولدات الزمرة $\mathcal{Z}/4\mathcal{Z}$ هي $\bar{1}$ و $\bar{3}$ لأن 1 و 4 أوليان فيما بينهما، وكذلك الأمر بالنسبة لـ 3 و 4.

3. الحلقات

تعريف 20: لتكن A مجموعة مزودة بقانوني تشكيل داخليين $(+)$ و $(.)$. نقول أن $(A,+,.)$ حلقة إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

1. البنية $(A,+)$ زمرة تبديلية حيث يرمز للعنصر الحيادي بـ 0_A أو 0.
2. قانو التشكيل الداخلي $(.)$ تجميعي.
3. المجموعة A لها عنصر حيادي بالنسبة لـ $(.)$، يرمز له عادة 1_A أو 1.
4. القانون $(.)$ توزيعي بالنسبة لـ $+$:

$x.(y+z) = x.y + x.z \; and \; (x+y).z = x.z + y.z$، مهما كانت العناصر $x,y,z \in A$.

إذا كان القانون $(.)$ تبديلي، نقول إن الحلقة $(A,+,.)$ تبديلية.

أمثلة 18:

- البنى $(\mathcal{Z},+,x)$ و $(\mathcal{Q},+,x)$ و $(\mathcal{R},+,x)$ و $(\mathcal{C},+,x)$ عبارة عن حلقات تبديلية.
- مجموعة كثيرات الحدود بأمثال حقيقية (نرمز لها عادة بـ $\mathcal{R}[X]$) عبارة عن حلقة تبديلية.
- تشكل المجموعة $\mathcal{P}(X)$ حلقة تبديلية بالنسبة لقانوني التشكيل الداخليين الفرق التناظري Δ والتقاطع $\cap$. لأن Δ و $\cap$ تبديليان و تجميعيان وتوزيعيان أحدهما بالنسبة للآخر. بالإضافة لذلك Δ له عنصر حيادي هو $\varnothing$ لأن: $A \,\Delta\, A \,\Delta\, B = \varnothing$.

تعريف 21: لتكن A حلقة. نسمي A^* مجموعة العناصر من A التي لها نظير.

فرضية 12: لتكن $(A,+,.)$ حلقة، عندها $(A^*,.)$ تشكل زمرة.

مبرهنة 10: لتكن $(A,+,.)$ حلقة، $(a,b) \in A^2$ و $n \in \mathcal{Z}$:

1. $0A.a = a.0A = 0A$.
2. $n(a.b) = (na).b = a.(nb)$.

1.3.الحلقة التامة

تعريف 22: نقول عن حلقة أنها تامة إذا كانت $A \neq \{0_A\}$ وإذا حققت الخاصية التالية: من أجل أي عنصرين a و b من A: $ab = 0_A \Rightarrow a = 0_A \text{ or } b = 0_A$.

مثال 19: الحلقات $\mathcal{Z}$ و $\mathcal{Q}$ و $\mathcal{R}$ و $\mathcal{C}$ تامة.

تعريف 23: لتكن $(A, +, .)$ حلقة و $(a, b) \in A^2$. نقول عن العنصرين a و b أنهما يتبادلان إذا كان $a.b = b.a$

فرضية 13: لتكن $(A, +, .)$ حلقة و $(a, b) \in A^2$، بحيث ان العنصرين a و b يتبادلان. عندئذ:

i. $a^n - b^n = (a - b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} = [\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}](a - b),\ n \in \mathcal{N}$

ii. $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},\ n \in \mathcal{N} \cup \{0\}$

2.3. الحلقة الجزئية

تعريف 24: لتكن $(A, +, .)$ حلقة و B مجموعة. نقول عن B إنها حلقة جزئية من $(A, +, .)$ إذا:

1. $(B, +)$ زمرة جزئية من $(A, +)$
2. $1_A \in B$
3. B مستقرة بالنسبة لـ $(.)$

فرضية 14: إذا كانت B حلقة جزئية من $(A, +, .)$، فإن $(B, +, .)$ حلقة. بالإضافة إلى $1_B = 1_A$

فرضية 15: لتكن $(A, +, .)$ حلقة و B مجموعة. نقول عن B أنها حلقة جزئية من $(A, +, .)$ إذا وفقط إذا:

1. $B \subset A$
2. $1_A \in B$
3. $a - b \in B$ لأي عنصرين a و b من المجموعة B
4. $a.b \in B$ لأي عنصرين a و b من المجموعة B

مثال 20: $(\mathcal{Z}, +, .)$ حلقة جزئية من $(\mathcal{Q}, +, .)$ وهي بدورها حلقة جزئية من $(\mathcal{R}, +, .)$ وهي بدورها حلقة جزئية من $(\mathcal{C}, +, .)$.

تمرين 6: أثبت أن $\mathcal{Z}[i] = \{a + ib, a, b \in \mathcal{Z}\}$ حلقة جزئية من $\mathcal{C}$. ماهي العناصر التي لها نظير في $\mathcal{Z}[i]$.

الحل: لدينا $1 = 1 + 0.i \in \mathcal{Z}[i]$ (العنصر الحيادي بالنسبة للضرب).

ليكن $z, z' \in \mathcal{Z}[i]$، بالتالي يوجد $a, b, a', b' \in \mathcal{Z}$ بحيث: $z = a + ib$ و $z' = a' + ib'$:

$z - z' = (a - a') + i(b - b') \in \mathcal{Z}[i]$ و $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + ba') \in \mathcal{Z}[i]$

لأن: $a - a', b - b', aa' - bb', ab' + ba' \in \mathcal{Z}$. بالتالي $\mathcal{Z}[i]$ حلقة جزئية من $\mathcal{C}$.

ليكن $z = a + ib$ له نظير في $\mathcal{Z}[i]$، بالتالي يوجد عنصر $z' \in \mathcal{Z}[i]$ بحيث $z.z' = 1$ و $|z.z'|^2 = 1$، أي $|z|^2.|z'|^2 = 1$. لدينا $|z|^2 = a^2 + b^2 \in \mathcal{W}$ و $|z'|^2 \in \mathcal{W}$ وهذا يفرض $|z|^2 = |z'|^2 = 1$. لدينا بالتالي $a^2 + b^2 = 1$ مع $a^2, b^2 \in \mathcal{W}$ وهذا يكافئ $(a^2 = 1, b^2 = 0)$ أو $(a^2 = 0, b^2 = 1) \Leftarrow (a = \pm 1, b = 0)$ أو $(a = 0, b = \pm 1)$. والعناصر التي لها نظير في $\mathcal{Z}[i]$ هي: $\{-1, 1, -i, i\}$.

تمرين 7: ليكن $d \in \mathcal{N}$ بحيث لا يكون مربع عدد صحيح. أثبت أن:

$[\sqrt{d}] = \{x + \sqrt{d}y \in \mathcal{R}, x, y \in \mathcal{Z}\}$ حلقة جزئية من $\mathcal{R}$.

الحل: لدينا $1 = 1 + 0.\sqrt{d} \in [\sqrt{d}]$ (العنصر الحيادي بالنسبة للضرب).

ليكن $a, b \in \mathcal{Z}[\sqrt{d}]$، بالتالي يوجد $x, y, x', y' \in \mathcal{Z}$ بحيث: $a = x + \sqrt{d}y'$ و $b = x' + \sqrt{d}y'$:

$a - b = (x - x') + \sqrt{d}(y - y') \in [\sqrt{d}]$ و

$ab = (xx' + dyy') + \sqrt{d}(xy' + yx') \in [\sqrt{d}]$ لأن:

$x - x', y - y', xx' + dyy', xy' + yx' \in \mathcal{Z}$. بالتالي $\mathcal{Z}[\sqrt{d}]$ حلقة جزئية من $\mathcal{R}$.

3.3. مورفيزم حلقة

تعريف 25: $(A, +, .)$ و $(B, \oplus, \odot)$ حلقتان. نسمي مورفيزم (حلقي) من A إلى B أي تطبيق f من A إلى B، بحيث: أياً كان العنصران $x, y \in A$، فإن:

1. $f(1_A) = 1_B$
2. $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$
3. $f(a . b) = f(a) \odot f(b)$

ملاحظة 7: f مورفيزم زمري، بالتالي يمكن تعريف نواة وصورة المورفيزم الحلقي.

ملاحظة 8: بنفس الطريقة كما في الزمر يمكن تعريف أندومورفيزم وإيزومورفيزم وأتومورفيزم.

فرضية 16: $f: A \rightarrow B$ مورفيزم حلقي:
1. لتكن C حلقة جزئية من A، عندئذ $f(C)$ حلقة جزئية من B.
2. لتكن D حلقة جزئية من B، عندئذ $f^{-1}(D)$ حلقة جزئية من A.

فرضية 17: $f: A \rightarrow B$ مورفيزم حلقي:
1. $Ker\, f$ حلقة جزئية من A.
2. $Im\, f$ حلقة جزئية من B.

تمرين 8: التطبيق $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ المعرف بـ $f(z) = \bar{z}$ يمثل أتومورفيزم حلقي.

$$f(1) = \bar{1} = 1$$
$$f(z_1 + z_2) = \overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2} = f(z_1) + f(z_2)$$
$$f(z_1 . z_2) = \overline{z_1 . z_2} = \bar{z_1} . \bar{z_2} = f(z_1) . f(z_2)$$

إذن f أندومورفيزم حلقي وهو تقابل (يمكن برهان ذلك)، بالتالي f أتومورفيزم حلقي في $\mathcal{C}$.

4. الحقول

تعريف 26: لتكن K مجموعة مزودة بقانوني تشكيل داخليين $(+)$ و $(.)$. نقول أن $(K, +, .)$ حقل إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:
1. $(K, +, .)$ حلقة تبديلية
2. لكل عنصر من K مختلف عن الصفر له نظير بالنسبة لقانون الضرب

مبرهنة 11: كل حقل تام.

ملاحظة 9: يمكننا الحساب في أي حقل كما لو أننا نحسب في $\mathcal{Q}$ أو $\mathcal{R}$ أو $\mathcal{C}$.

أمثلة 21:
- $\mathcal{Q}$ و $\mathcal{R}$ و $\mathcal{C}$ حقول
- $\mathcal{Z}$ ليست حقل (2 على سبيل المثال ليس له نظير)

1.4. الحقول الجزئية

تعريف 27: ليكن $(K,+,.)$ حقل و L مجموعة. نقول عن L إنها حقل جزئي من $(K,+,.)$ إذا:

1. L حلقة جزئية من $(K,+,.)$
2. L مستقرة بالنسبة للنظير: بمعنى من أجل أي عنصر من L مختلف عن الصفر $x^{-1} \in L$

فرضية 18: ليكن $(K,+,.)$ حقل و L حلقة جزئية من $(K,+,.)$. عندئذ $(L,+,.)$ حقل.

فرضية 19: ليكن $(K,+,.)$ حقل و L مجموعة. L حقل جزئي من $(K,+,.)$ إذا وفقط إذا:

1. $L \subset K$
2. $1_k \in L$
3. $x - y \in L$ لأي عنصرين x و y من المجموعة L
4. $x.y^{-1} \in L$ لأي عنصرين x و y من المجموعة L بحيث $y \neq 0_k$

مثال 22: $(\mathcal{Q},+,.)$ حقل جزئي من $(\mathcal{R},+,.)$ وهو بدوره حقل جزئي من $(\mathcal{C},+,.)$. كما أن $\mathcal{Q}$ أصغر حقل جزئي من $\mathcal{C}$.

تمرين 9: أثبت أن $\mathcal{Q}[i] = \{a + ib, a, b \in \mathcal{Q}\}$ حلقة جزئية من $\mathcal{C}$.

تمرين 10:

ليكن $d \in \mathcal{N}$ وبحيث لا يكون مربع لعدد صحيح. أثبت أن $\mathcal{Q}[\sqrt{d}] = \{x + \sqrt{d}y \in \mathcal{R}, x, y \in \mathcal{Q}\}$ حقل جزئي من $\mathcal{R}$.

2.4. مورفيزم حقل

تعريف 28: $(K,+,.)$ و $(L,\oplus,\odot)$ حقلان. نسمي مورفيزم (حقلي) من K إلى L أي تطبيق حلقي f من K إلى L.

فرضية 20: $f: K \to L$ مورفيزم حقلي:

1. ليكن x عنصر من K^*، $f(x) \in K^*$ و $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.
2. f متباين.

ملاحظة 10: بنفس الطريقة كما في الزمر يمكن تعريف أندومورفيزم وإيزومورفيزم وأتومورفيزم.

مثال 23: التطبيق $f: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ المعرف بـ $f(z) = \bar{z}$ يمثل أتومورفيزم حقلي.

تمارين

1. أياً من القوانين التالية هي تشكيل داخلي في $\mathcal{Z}$:

a) $a * b = \frac{a+b}{a^2}$

b) $a * b = 2^{a+b}$

c) $a * b = a + b - 3ab$

2. من أجل كل عملية من العمليات التالية على الأعداد الحقيقية: هل العملية تجميعية؟ هل العملية تبديلية؟ أوجد العنصر الحيادي إن وجد. أوجد نظير العنصر a إن وجد.

a) $a * b = ab + 2$

b) $a * b = (a + 2)(b + 2)$

c) $a * b = 3(a + b)$

d) $a * b = |a + b|$

e) $a * b = a^b$

f) $a * b = |a = b|$

3. ليكن قانون التشكيل في $\mathcal{R}^2$ التالي: $(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$. هل هو قانون تشكيل داخلي؟ هل هو تجميعي؟ هل يوجد عنصر حيادي؟ أوجده إذا وجد. هل لكل عنصر نظير؟ هل هو تبديلي؟

4. ليكن قانون التشكيل في $\mathcal{Q}\backslash\{1\}$ التالي: $a * b = a - ab + b$. هل هو قانون تشكيل داخلي؟ هل هو تجميعي؟ هل يوجد عنصر حيادي؟ أوجده إذا وجد. هل لكل عنصر نظير؟

5. بين أن الأعداد الكسرية من الشكل $\frac{2a+1}{2b+1}$ حيث $a, b \in \mathcal{Z}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب.

6. أثبت أن $(\mathcal{Z}/5\mathcal{Z}\backslash\{\bar{0}\}, .)$ زمرة. هل هي تبديلية؟

7. لتكن المجموعة $S = \{(x, y) | x, y \in \mathcal{Z}\}$، وقانون التشكيل $*$ معرف كما يلي:

8. $(a, b) * (c, d) = (a + c, (-1)^c. b + d)$. أثبت أن S زمرة بالنسبة للقانون $*$. هل $(S, *)$ تبديلية؟ هل المجموعات التالية تمثل زمر جزئية من S بالنسبة لـ $*$؟ $H_1 = \{(a, 0) | a \in \mathcal{Z}\}$، $H_2 = \{(0, b) | b \in \mathcal{Z}\}$.

9. أثبت أن المجموعة $\{2^n | n \in \mathcal{Z}\}$ زمرة جزئية من $(\mathcal{R}^*\backslash .)$.

10. أوجد كافة الزمر الجزئية من الزمرة $(\mathcal{Z}/12\mathcal{Z}, +)$.

11. بين أن المجموعة $\{1, 7, 9, 15\}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب بترديد 16 $(mod\ 16)$. أوجد أيضاً رتبة كل عنصر من عناصر المجموعة. أخيراً هل الزمرة دوارة؟

12. بين أن المجموعة $S = \{1, 5, 7, 11\}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب بترديد 12. هل الزمرة دوارة؟ أوجد كافة الزمر الجزئية من الزمرة $(S, .)$.

13. ليكن التطبيق $f: (\mathcal{Z}, +) \to (\mathcal{Q} *, .)$ المعرف بـ $f(n) = 2^n$. أثبت أن f مورفيزم زمري. أوجد نواة f. هل التطبيق f متباين؟ هل هو غامر؟

مذاكرة الفصل السادس

العلامة العظمى: 100 **علامة النجاح: 50** **المدة: ساعة ونصف**

السؤال الأول: أجب بصح أو خطأ **(60) درجة**

1. الطرح قانون تشكيل داخلي في $\mathbb{Z}$ صح أو خطأ
2. الطرح قانون تشكيل داخلي في $\mathbb{N}$ صح أو خطأ
3. $\{a\sqrt{2};\ a \in \mathbb{Z}\}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الجمع الحقيقية صح أو خطأ
4. $\{a\sqrt{2};\ a \in \mathbb{N}\}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الجمع الحقيقية صح أو خطأ
5. $\{a\sqrt{2};\ a \in \mathbb{Q}\}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الجمع الحقيقية صح أو خطأ
6. $\{-1, 1\}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب الحقيقية صح أو خطأ
7. $\{-1, 1, 1/2, 2\}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب الحقيقية صح أو خطأ
8. $\{a\sqrt{2};\ a \in \mathbb{Q}\}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب الحقيقية صح أو خطأ
9. $\{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ تشكل زمرة بالنسبة لعملية الضرب الحقيقية صح أو خطأ
10. $\{a\sqrt{2};\ a \in \mathbb{Q}\}$ تشكل حلقة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب الحقيقيتين صح أو خطأ
11. $\{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ تشكل حلقة بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب الحقيقيتين صح أو خطأ
12. $\{a\sqrt{2};\ a \in \mathbb{Q}\}$ تشكل حقل بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب الحقيقيتين صح أو خطأ
13. $\{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ تشكل حقل بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب الحقيقيتين صح أو خطأ
14. $\{a + \pi\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ تشكل حقل بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب الحقيقيتين صح أو خطأ
15. في الزمرة $(\mathcal{C}^*, .)$، الزمرة الجزئية $< i > = \{1, i, -1, -i\}$ صح أو خطأ

السؤال الثاني: حل كل من المعادلات التالية: **(10) درجات**

ليكن التطبيق $f: \mathcal{R}^* \to \mathcal{R}^*$ المعرف بـ $f(x) = \frac{x}{|x|}$. برهن أن f هو مورفيزم زمري من $(\mathcal{R}^*, .)$ إلى $(\mathcal{R}^*, .)$. أوجد صورته ونواته.

الجواب:

$$f(xx') = \frac{xx'}{|xx'|} = \frac{x}{|x|} \cdot \frac{x'}{|x'|} = f(x).f(x')$$
$$ker\, f = \{x \in \mathcal{R}^* | f(x) = 1\} = \{x \in \mathcal{R}^* |\, |x| = x\} = \mathcal{R}^{+*}$$
$$Im\, f = \{-1, 1\}$$

السؤال الثالث: **(10) درجات**

ليكن التطبيق $f: \mathcal{C}^* \to \mathcal{C}^*$ المعرف بـ $f(z) = \frac{z}{|z|}$. برهن أن f هو مورفيزم زمري من $(\mathcal{C}^*, .)$ إلى $(\mathcal{C}^*, .)$. أوجد صورته ونواته.

الجواب:

$f(zz') = \dfrac{zz'}{|zz'|} = \dfrac{z}{|z|}.\dfrac{z'}{|z'|} = f(z).f(z')$
$ker\ f = \{z \in \mathcal{C}^* | f(x) = 1\} = \{z \in \mathcal{R}^* |\ |z| = z\} = \mathcal{R}^{+*}$
$Im\ f = \{f(z) \in \mathcal{C}^* |\ |f(z)| = 1\ and\ arg(f(z)) = arg\ z\} =$ الدائرة الواحدية

السؤال الرابع: **(10) درجات**

لتكن $\mathcal{Z}[i] = \{a + ib, a, b \in \mathcal{Z}\}$ حلقة جزئية من $(\mathcal{C}, .)$. ماهي العناصر التي لها نظير في $\mathcal{Z}[i]$.

الجواب:

ليكن $z = a + ib$ له نظير في $\mathcal{Z}[\mathrm{i}]$، بالتالي يوجد عنصر $z' \in \mathcal{Z}[i]$ بحيث $z.z' = 1$ و $|z.z'|^2 = 1$، أي $|z|^2.|z'|^2 = 1$. لدينا $|z|^2 = a^2 + b^2 \in \mathcal{W}$ و $|z'|^2 \in \mathcal{W}$ وهذا يفرض $|z|^2 = |z'|^2 = 1$. لدينا بالتالي $a^2 + b^2 = 1$ مع $a^2, b^2 \in \mathcal{W}$ وهذا يكافئ $(a^2 = 1, b^2 = 0)$ أو $(a^2 = 0, b^2 = 1) \Leftarrow (a = \pm 1, b = 0)$ أو $(a = 0, b = \pm 1)$. والعناصر التي لها نظير في $\mathcal{Z}[i]$ هي: $\{-1, 1, -i, i\}$.

الإجابات الصحيحة

السؤال الأول:

رقم التمرين	الإجابة الصحيحة
.1	صح
.2	خطأ
.3	صح
.4	خطأ
.5	صح
.6	صح
.7	خطأ
.8	خطأ
.9	صح
.10	خطأ
.11	صح
.12	خطأ
.13	صح
.14	خطأ
.15	صح