# الفصل الثامن: المصفوفات والمحددات والجمل الخطية

## الكلمات المفتاحية:

مصفوفة، مصفوفة مربعة، مصفوفة مثلثية، مصفوفة قطرية، مصفوفة متناظرة، مصفوفة تخالفية، مقلوب مصفوفة، منقول مصفوفة، أثر مصفوفة، تحويلات أولية، مصفوفة موسعة، جملة خطية، طريقة التعويض، طريقة كرامر، طرف ثاني، جملة متجانسة، مدرجة، مختزلة، طريقة غوص، رتبة مصفوفة، مصفوفة تطبيق خطي، محدد مصفوفة، مصفوفة شاذة، العامل المرافق، صغير مصفوفة.

## ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على المصفوفات والعمليات عليها (من جمع وطرح وضرب، ...) وأنواع المصفوفات وكيفية إيجاد مقلوب مصفوفة وتطبيقاتها، ودراسة جمل المعادلات الخطية المتجانسة وغير المتجانسة والطرق المختلفة لحلها، وأخيراً التعرف على محدد مصفوفة وخواص المحددات وكيفية استخدامها لا سيما في حل المعادلات الخطية (طريق كرامر على سبيل المثال) وإيجاد رتبة مصفوفة.

## الأهداف التعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- المصفوفات والعمليات عليها.
- مقلوب مصفوفة.
- جمل المعادلات الخطية.
- حل الجمل الخطية.
- محدد مصفوفة.
- تطبيقات محدد مصفوفة (حل الجمل الخطية، ...)

# 1. المصفوفات

## 1.1. تعاريف

تعريف 1: المصفوفة عبارة عن مجموعة من العناصر (من حقل $K$) مرتبة ضمن جدول مستطيل. نقول أنها ذات حجم $n \times p$ إذا كان الجدول يتألف من $n$ سطر و $p$ عمود. نرمز للعنصر الموجود في السطر $i$ والعمود $j$ بـ $a_{i,j}$، ونرمز للجدول (المصفوفة) كما يلي:

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

كما يمكن أن نرمز للمصفوفة $A$ بـ: $A=(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ أو $(a_{i,j})$.

مثال 1: لتكن المصفوفة $3 \times 2$ التالية:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

على سبيل المثال، $a_{1,1}=1$ و $a_{2,3}=7$.

تعريف 2: تتساوى مصفوفتان إذا كان لهما نفس الحجم وتساوت كل عناصر المصفوفة الأولى مع مقابلاتها من المصفوفة الثانية.

تعريف 3: نسمي مجموعة المصفوفات $n$ سطر و $p$ عمود والعناصر من الحقل $K$ بـ $M_{n,p}(K)$. نسمي عناصر $M_{n,p}(\mathcal{R})$ بالمصفوفات الحقيقية.

## مصفوفات خاصة

- مصفوفة مربعة: إذا كان $n = p$ (عدد الأسطر يساوي عدد الأعمدة). نرمز لمجموعة المصفوفات المربعة بـ $M_n(K)$. تشكل العناصر $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n}$ القطر الرئيسي للمصفوفة.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

على سبيل المثال المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

- المصفوفة العمود: مصفوفة لديها عمود واحد $(p = 1)$. ونرمز لها بـ:

$$C = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}$$

على سبيل المثال المصفوفة $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- المصفوفة السطر: مصفوفة لديها سطر واحد $(n = 1)$. ونرمز لها بـ:

$$L = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \end{pmatrix}$$

على سبيل المثال المصفوفة $L = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- المصفوفة الصفرية: مصفوفة كافة عناصرها أصفار ونرمز لها بـ $0_{n,p}$ أو $0$. على سبيل المثال

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- المصفوفة القطرية: مصفوفة مربعة قطرها الرئيسي عناصر من الحقل $K$ وبقية العناصر أصفار $a_{i,j}=0; i\neq j$.

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

على سبيل المثال المصفوفة $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ أو $D'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

- المصفوفة الواحدية: مصفوفة مربعة قطرها الرئيسي واحدات وبقية العناصر أصفار $a_{i,j}=0; i\neq j$ و $a_{i,i}=1$.

$$I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

على سبيل المثال المصفوفة $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- المصفوفة السلمية: مصفوفة مربعة قطرها الرئيسي نفس العنصر وبقية العناصر أصفار $a_{i,j}=0; i\neq j$ و $a_{i,i}=\lambda$.

$$M=\lambda I_n=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

على سبيل المثال المصفوفة $M=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

- المصفوفة المثلثية العليا: مصفوفة مربعة بحيث $a_{i,j}=0; i>j$.

$$U=\begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

على سبيل المثال المصفوفة $U=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- المصفوفة المثلثية السفلى: مصفوفة مربعة بحيث $a_{i,j}=0; i<j$.

$$L=\begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & l_{n,n} \end{pmatrix}$$

على سبيل المثال المصفوفة $L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

- المصفوفة المتناظرة: مصفوفة مربعة بحيث $a_{i,j}=a_{j,i}$.

$$S=\begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,n} \\ s_{1,2} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1,n} & s_{2,n} & \cdots & s_{n,n} \end{pmatrix}$$

على سبيل المثال المصفوفة $S=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

- المصفوفة التخالفية: مصفوفة مربعة بحيث $a_{i,j}=-a_{j,i}$.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ -a_{1,2} & 0 & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1,n} & -a_{2,n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

على سبيل المثال المصفوفة $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

تعريف 4: لتكن $A$ و $B$ مصفوفتين لهما نفس البعد $n\times p$. نعرف المجموع $C=A+B$ على أنه المصفوفة ذات البعد $n\times p$ المعرفة بـ: $c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1p} \\ a_{21} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\dots & b_{1p} \\ b_{21} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\dots & c_{1p} \\ c_{21} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ c_{n1} & \cdots & c_{np} \end{pmatrix}$$

مثال 2: لتكن $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ فإن $A+B=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

بينما لو كانت المصفوفة $C=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ فإن $A+C$ غير معرّف.

## ضرب مصفوفة بسلمي

تعريف 5: ضرب مصفوفة $A=(a_{i,j})$ من $M_{n,p}(K)$ بالسلمي $\lambda\in K$ هو المصفوفة $(\lambda a_{i,j})$ المشكلة من ضرب كل عنصر من عناصر $A$ بـ $\lambda$. ونرمز لها بـ $\lambda.A$ (أو اختصاراً $\lambda A$).

$$\lambda.\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1p} \\ a_{21} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda.a_{11} & \lambda.a_{12}\dots & \lambda.a_{1p} \\ \lambda.a_{21} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ \lambda.a_{n1} & \cdots & \lambda.a_{np} \end{pmatrix}$$

مثال 3: لتكن $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ و $\lambda = 3$ فإن $3A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -6 \\ 0 & 3 & 12 \end{pmatrix}$

ملاحظة 1: المصفوفة $(-1)A$ هي نظيرة المصفوفة $A$، ونرمز لها بالرمز $-A$. كما أن الفرق $A - B$ معرف بـ $+(-B)$ .

مثال 4: لتكن $A=\begin{pmatrix} -3 & 7 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ فإن:

$$A-B=\begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

### 2.1. العمليات على المصفوفات

فرضية 1: لتكن $A,B,C$ ثلاث مصفوفات من $M_{n,p}(K)$، وليكن $\alpha,\beta\in K$:

1. $A + B = B + A$: مجموع المصفوفات تبديلي،
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$: مجموع المصفوفات تجميعي،
3. $A + 0 = 0 + A = A$: المصفوفة الصفرية هي العنصر الحيادي بالنسبة لجمع المصفوفات،
4. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta B$،
5. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
6. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

## ضرب المصفوفات

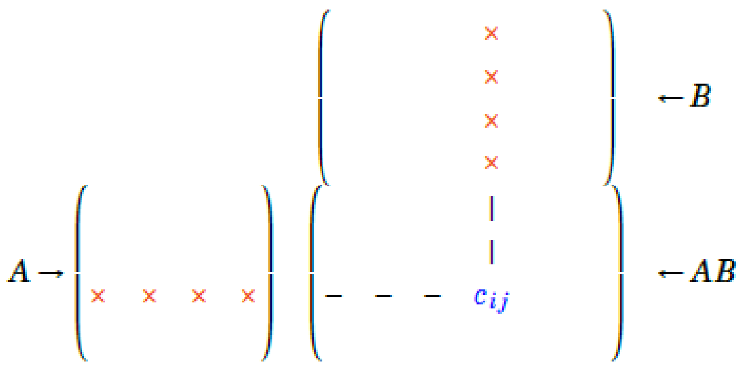
يتم تعريف ضرب المصفوفتين $A$ و $B$: $AB$ إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة $A$ يساوي عدد أسطر المصفوفة $B$.

تعريف 6: لتكن $A=(a_{i,j})$ مصفوفة $n\times p$ و $B=(b_{i,j})$ مصفوفة $p\times q$. عندئذ الضرب $C=AB$ هو مصفوفة $q\times n$ حيث عناصرها $c_{i,j}$ معرفة كما يلي: $c_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}b_{k,j}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1p}\\ a_{21} & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{np}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\cdots\cdots & b_{1q}\\ b_{21} & b_{21} & b_{2q}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{p1} & b_{p2}\cdots\cdots & b_{pq}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\cdots & c_{1q}\\ c_{21} & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nq}\end{pmatrix}$$

ملاحظة 2: يمكن كتابة $c_{i,j}$ بالطريقة المفصلة: $c_{i,j}=a_{i,1}b_{1,j}+a_{i,2}b_{2,j}+\cdots+a_{i,p}b_{p,j}$

هذا ويمكن إجراء الحسابات على النحو التالي:




مثال 5: ليكن لدينا $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\1&1\end{pmatrix}$ فإن: $AB=\begin{pmatrix}2&7\\3&11\end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} & \begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\1&1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}\end{matrix}\qquad \begin{matrix} & \begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\1&1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}\end{matrix}\qquad \begin{matrix} & \begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\1&1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&7\\3&11\end{pmatrix}\end{matrix}$$

على سبيل المثال لحساب العنصر الأول: $c_{1,1}=1\times 1+2\times(-1)+3\times 1=2$

مثال 6: لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \in M_{1,3}(\mathcal{R})$ والمصفوفة $B=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathcal{R})$ فإن:

$AB=\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=ax+by+cz \in \mathcal{R}$ . نسمي النتيجة بالضرب السلمي للشعاعين $A$ و $B$

$$BA=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xa & xb & xc \\ ya & yb & yc \\ za & zb & zc \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xa & xb & xc \\ ya & yb & yc \\ za & zb & zc \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathcal{R})$$

ملاحظة 3: ضرف المصفوفات ليس تبديلي بشكل عام. في الحقيقة يمكن للجداء $AB$ أن يوجد بدون أن يكون $BA$ معرفاً، كما يمكن أن يكون كل من $AB$ و $BA$ معرّفين ولكن بحجمين مختلفين، وأخيراً يمكن أن يكون كل من $AB$ و $BA$ معرّفين ومن نفس الحجم ولكن بشكل عام $AB \neq BA$.

مثال 7:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$ ولكن $$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}$$

ملاحظة 4: يمكن أن يكون $AB=0$ بدون أن يكون $A=0$ أو $B=0$. أو بمعنى آخر يمكن أن يكون $A \neq 0$ و $\neq 0$ لكن $AB=0$.

مثال 8:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ملاحظة 5: يمكن أن يكون $AB=AC$ بدون أن يكون $B=C$. أو بمعنى آخر يمكن أن يكون $AB=AC$ و $B \neq C$.

مثال 9:

$$AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix} \text{ و } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

## خواص ضرب المصفوفات

فرضية 2: ليكن لدينا ثلاث مصفوفات $A \in M_{n,p}(K)$ و $B \in M_{p,q}(K)$ و $C \in M_{q,r}(K)$ و $\alpha \in K$

**1.** الخاصة التجميعية: $A(BC) = (AB)C$

**2.** الخاصة التوزيعية للضرب على الجمع:

$$A(B+C) = AB + AC \text{ و } (B+C)A = BA + CA$$

**3.** $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

**4.** المصفوفة الصفرية عنصر ماص: $A.0 = 0.A = 0$

**5.** $I_n.A = A.I_n = A$

## قوى المصفوفات

في مجموعة المصفوفات المربعة $M_n(K)$ ضرب المصفوفات عملية تشكيل داخلي: إذا كان $A, B \in M_n(K)$ فإن $AB \in M_n(K)$. بشكل خاص يمكن ضرب مصفوفة $A$ بنفسها ونرمز لها $A^2 = A \times A$، $A^3 = A \times A \times A$ .

تعريف 7: من أجل كل مصفوفة $A \in M_n(K)$، يمكن تعريف قوى المصفوفة $A$ بـ $A^0 = I_n$ و $A^{p+1} = A^p \times A$ من أجل أي عدد $p \in \mathcal{N}$. بمعنى أن $A^p = A \times A \dots \times A$ ($p$ مرة).

مثال 10: لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. أوجد $A^p$ .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

من الملاحظ أن $A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$

## ثنائي حد نيوتن

بما أن عملية الضرب غير تبديلية فإن العلاقة $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ وليس $A^2 + 2AB + B^2$.

فرضية 3: حساب $(A+B)^p$ عندما $AB = BA$. ليكن لدينا المصفوفتين $A, B \in M_n(K)$ القابلتين للتبديل، أي $AB = BA$، عندئذ من أجل كل $p \geq 0$، لدينا العلاقة:

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k$$

مثال 11: لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$، احسب $A^p$.

من الواضح أن $A = N + I$ حيث $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. لنحسب $N^2$ و $N^3$ و $N^4$:

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N^4 = 0$$

بما أن $A = N + I$ وأن $I$ و $N$ يتبادلان حسب خاصة المصفوفة الواحدية، يمكن استخدام ثنائي حد نيوتن.

باستخدام أن $I^k = I$ من أجل أي $k$ عدد طبيعي و $N^k = 0$ من أجل كل $k \geq 4$، نحصل على:

$$A^p = (I+N)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} I^{p-k} N^k = I + pN + \frac{p(p-1)}{2!} N^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!} N^3$$

بالتالي فإن:

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & p & p^2 & p(p^2-p+1) \\ 0 & 1 & 2p & p(3p-2) \\ 0 & 0 & 1 & 3p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

على سبيل المثال:
$$A^2=\begin{pmatrix}1&2&4&6\\0&1&4&8\\0&0&1&6\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad A^3=\begin{pmatrix}1&3&9&21\\0&1&6&21\\0&0&1&9\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad A^4\begin{pmatrix}1&4&16&52\\0&1&8&40\\0&0&1&12\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

## 3.1. مقلوب مصفوفة

تعريف 8: لتكن $A$ مصفوفة مربعة حجم $n \times n$. إذا وجدت مصفوفة مربعة $B$ حجم $n \times n$ بحيث أن: $AB = BA = I$ ، عندئذ نقول عن $A$ أن لها مقلوب، ونسمي $B$ مقلوب $A$ ونرمز لها بالرمز $A^{-1}$.

بشكل عام، عندا تكون $A$ قابلة للقلب فإنه من أجل أي عدد طبيعي $p \geq 0$، نرمز:
$$A^{-p} = (A^{-1})^p = A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}\ (p\ \text{مرة})$$
نرمز لمجموعة المصفوفات في $M_n(K)$ القابلة للقلب بـ $GL_n(K)$.

مثال 12: لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$. أوجد فيما إذا كان لها مقلوب؟

دراسة وجود مقلوب ل $A$، يعني دراسة وجود مصفوفة $B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ بحيث $Ab = BA = I$

$$AB = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a+2c&b+2d\\3c&3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

وهذا يكافئ: $\begin{cases}a+2c=1\\b+2d=0\\3c=0\\3d=1\end{cases}$. حل هذه الجملة يعطي: $a = 1$ و $b = -2/3$ و $c = 0$ و $d = 1/3$.

بالتالي يوجد مصفوفة وحيدة $B=\begin{pmatrix}1&-\frac{2}{3}\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$. يمكن البرهان على أن $BA = I$، بالتالي المصفوفة $A$ قابلة للقلب ومقلوبها هو:
$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-\frac{2}{3}\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

مثال 13: المصفوفة $A=\begin{pmatrix}3&0\\5&0\end{pmatrix}$ ليس لها مقلوب. لأن $BA=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\5&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a+5b&0\\3c+5d&0\end{pmatrix}$ لا يمكن أن يساوي المصفوفة الواحدية.

ملاحظة 6: المصفوفة الواحدية $I_n$ قابلة للقلب ومقلوبها هو نفسها. أما المصفوفة الصفرية فهي غير قابلة للقلب. لماذا؟

فرضية 4: لتكن $A$ مصفوفة قابلة للقلب، بالتالي مقلوبها وحيد.

فرضية 5: لتكن $A$ مصفوفة قابلة للقلب، بالتالي مقلوبها $A^{-1}$ قابل للقلب ولدينا: $(A^{-1})^{-1} = A$.

فرضية 6: لتكن $A$ و $B$ مصفوفتين قابلتين للقلب فإن $AB$ قابل للقلب ويكون لدينا: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
وبشكل عام إذا كان لدينا المصفوفات $A_1, A_2, \dots, A_m$ قابلة للقلب فإن:

$$(A_1A_2...A_m)^{-1}=A_m^{-1}A_{m-1}^{-1}...A_1^{-1}$$

فرضية 7: ليكن لدينا المصفوفتين $A, B \in M_n(K)$ والمصفوفة $C \in M_n(K)$ قابلة للقلب. عندئذ إذا كان $AC = BC$ فإن $A = B$.

مثال 14: لتكن $A=\begin{pmatrix}-1&-2\\3&4\end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$. احسب $A^{-1}$ و $B^{-1}$ و $(AB)^{-1}$ و $(BA)^{-1}$ و $A^{-2}$.

من السهل حساب $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ و $B^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$ و $A^{-2}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\\-\frac{9}{4}&-\frac{5}{4}\end{pmatrix}$

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix}1&0\\-2&\frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{15}{2}&\frac{7}{2}\\-13&-6\end{pmatrix}$$

تمرين: لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\2&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. احسب $2A - A^2$. استنتج $A^{-1}$

$$2A - A^2 = 2\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2A - A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

إذن $2A - A^2 = I \Leftrightarrow A(2I - A) + I \Leftrightarrow 2 - A$ مقلوب المصفوفة A، بالتالي:

$$2I - A = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

إذن: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

## مقلوب مصفوفة 2 x 2

فرضية 8: لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ وبفرض أن $ad - bc \neq 0$، عندئذ تكون المصفوفة $A$ قابلة للقلب:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

مثال 15: أوجد مقلوب كل من $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{6-7}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

## طريقة غوص في إيجاد مقلوب مصفوفة

تكمن طريقة غوص لإيجاد مقلوب مصفوفة $A$ القيام بمجموعة من التحويلات السطرية الأولية على المصفوفة $A$ حتى يتم تحويلها إلى مصفوفة أولية $I$. وفي نفس الوقت نقوم بنفس التحويلات على المصفوفة الواحدية $I$. نحصل في النهاية على المقلوب $A^{-1}$.

عملياً نقوم بعمليتي التحويل في نفس الوقت من خلال اعتماد ما يلي: إلى جانب المصفوفة $A$ المراد قلبها نضع المصفوفة الواحدية $I$ فيشكلان الجدول $(A|I)$ والتي نسميها المصفوفة الموسعة. نقوم بمجموعة التحويلات السطرية الأولية على المصفوفة الموسعة $(A|I)$ إلى أن نحصل في النهاية على المصفوفة الموسعة $(I|B)$. وتكون في هذه الحالة $B = A^{-1}$.

إن التحويلات السطرية الأولية على مصفوفة هي:

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ و $\lambda \neq 0$: ضرب السطر $L_i$ بعدد حقيقي مختلف عن الصفر.
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ و $\lambda \in K$ و $i \neq j$: ضرب السطر $L_j$ بعدد حقيقي وإضافته إلى السطر $L_i$.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: التبديل بين السطر $L_i$ والسطر $L_j$.

مثال 16: احسب مقلوب المصفوفة
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

لنكتب المصفوفة الموسعة:
$$(A\,|\,I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

للحصول على العنصر 0 في العمود الأول السطر الثاني نقوم بالتحويل السطري الأولي $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ \\ \end{array}$$

للحصول على العنصر 0 في العمود الأول السطر الثالث نقوم بالتحويل السطري الأولي $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

للحصول على العنصر 1 في العمود الثاني السطر الثاني نقوم بالتحويل السطري الأولي $L_2 \leftarrow -1/8L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/8 & 1/2 & -1/8 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow -1/8L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/8 & 1/2 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & 1/2 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/8 & 1/2 & -1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) L_3 \leftarrow 2L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7/4 & -3/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - 5/8L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 7/4 & -3/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3$$

بالتالي فإن:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 7/4 & -3/4 & -5/4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

## منقول مصفوفة

تعريف 9: لتكن المصفوفة $A$ ذات الحجم $p \times n$. نسمي منقول المصفوفة $A$ ويرمز لها بالرمز ${}^{t}A$ المصفوفة ذات الحجم $n \times p$ المعرفة بتبديل الأسطر بالأعمدة والأعمدة بالأسطر.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \qquad {}^{t}A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,p} & a_{2,p} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

## منقول مصفوفة

مثال 17:

$$ {}^t\begin{pmatrix}1&2&3\\7&8&9\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&7&4\\2&8&5\\3&9&6\end{pmatrix} \qquad {}^t\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{pmatrix} \qquad {}^t\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} $$

مبرهنة 1: لتكن $A, B$ مصفوفتان و $\alpha \in K$:

1. ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$
2. ${}^t(\alpha.A)=\alpha.{}^tA$
3. ${}^t({}^tA)=A$
4. ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$
5. إذا كانت $A$ قابلة للقلب فإن ${}^tA$ قابلة للقلب أيضاً ويكون عندها $({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1})$

## أثر مصفوفة

تعريف 10: لتكن $A$ مصفوفة مربعة حجم $n \times n$. نسمي أثر المصفوفة $A$، ونرمز له بالرمز $tr\ A$ على أنه مجموع عناصر القطر الرئيسي للمصفوفة $A$. أي: $tr\ A = a_{1,2} + a_{1,2} + \cdots + a_{n,n}$.

مثال 18:

$$ tr\begin{pmatrix}1&7&4\\2&8&5\\3&9&6\end{pmatrix} = 1 + 8 + 6 = 15 $$

مبرهنة 2: لتكن $A, B$ مصفوفتان حجم $n\ x\ n$ و $\in K$ :

1. $tr\ (A + B) = tr\ A + tr\ B$
2. $tr(\alpha.A) = \alpha.tr\ A$
3. $tr({}^tA) = tr\ A$
4. $tr(AB) = tr(BA)$

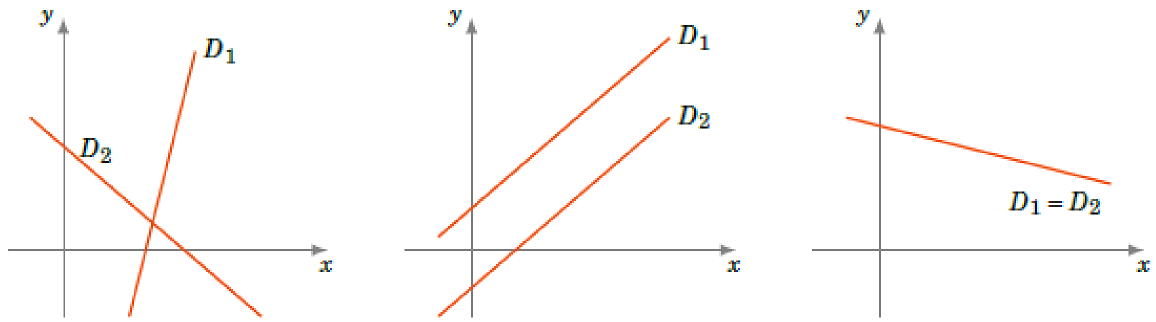
## 2. جمل المعادلات الخطية

### 1.2. مقدمة

#### معادلة مستقيمين في المستوي

معادلة مستقيم في المستوي $Oxy$ تكتب على الشكل: $ax + by = e$، حيث $a, b, e$ أعداد حقيقية. نسمي هذه المعادلة بالمعادلة الخطية حيث المتحولات (المجاهيل) هي $x$ و $y$. على سبيل المثال $2x + 3y = 5$ تمثل معادلة خطية بينما المعادلات التالية ليست خطية: $2x + y^2 = 1$ و $y = \sin x$ و $x = \sqrt{y}$.

ليكن لدينا الآن مستقيمين $D_1$ و $D_2$ لنبحث عن النقاط التي تقع على المستقيمين في آن واحد. تقع النقطة $(x, y)$ على التقاطع $D_1 \cap D_2$ إذا كانت حلاً للجملة: $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$. يمكن التمييز بين ثلاث حالات مختلفة:




1. يتقاطع المستقيمان $D_1$ و $D_2$ في نقطة واحدة، الجملة لها حل وحيد.
2. المستقيمان $D_1$ و $D_2$ متوازيان، الجملة ليس لها.
3. المستقيمان $D_1$ و $D_2$ طبوقان، الجملة لها عدد لانهائي من الحلول.

#### الحل بطريقة التعويض

لمعرفة وجود حل أو أكثر لجملة معادلات خطية، إحدى الطرق المعروفة هي طريقة التعويض.

مثال 19: ليكن لدينا الجملة التالية: $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - 7y = -2 \end{cases}$

نكتب المعادلة الأولى $3x + 2y = 1$ على الشكل $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x$ ومن ثم نعوضها في المعادلة الثانية نحصل على الجملة المكافئة التالية:

$$\begin{cases} 2x-7(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x)=-2 \\ y=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2+7\times\frac{3}{2})x=-2+\frac{7}{2} \\ y=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{25} \\ y=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x \end{cases}$$

نعوض قيمة $x$ في المعادلة $y=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}x$ نحصل على $y=\frac{3}{25}$، بالتالي جملة الحلول هي: $\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{3}{25},\frac{3}{25}\right)\right\}$.

## معادلة مستويين في الفراغ

معادلة مستوي في الفراغ $Oxyz$ تكتب على الشكل: $ax+by+cz=d$، حيث $a, b, c, d$ أعداد حقيقية. وهي معادلة خطية بثلاث مجاهيل $x, y, z$. تقاطع مستويين في الفراغ يوافق جملة المعادلتين الخطيتين التاليتين بثلاث مجاهيل: $\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$. يمكن التمييز بين ثلاث حالات مختلفة:

1. يتقاطع المستويان في مستقيم، الجملة لها لانهاية من الحلول.
2. المستويان متوازيان، الجملة ليس لها حل.
3. المستويان طبوقان، الجملة لها لانهاية من الحلول.

أمثلة 20:

- الجملة $\begin{cases} 2x+3y-4z=7 \\ 4x+6y-8z=-1 \end{cases}$ ليس لها حل. في الحقيقة إذا ضربنا المعادلة الأولى بـ 2، نحصل على الجملة الخطية المكافئة التالية: $\begin{cases} 4x+6y-8z=14 \\ 4x+6y-8z=-1 \end{cases}$. من الواضح أن المعادلتين غير متوافقتين لأنه لا يوجد أي نقطة $(x, y, z)$ تحقق في آن واحد $4x+6y-8z=14$ و $4x+6y-8z=-1$. بالتالي: $\mathcal{S}=\varnothing$.
- الجملة $\begin{cases} 2x+3y-4z=7 \\ 4x+6y-8z=14 \end{cases}$ لها عدد لا نهائي من الحلول لأن المعادلتين تمثلان نفس المستوي، بالتالي جملة المعادلتين تكافئ معادلة واحدة $2x+3y-4z=7$ والتي يمكن كتابتها بالشكل $z=\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y-\frac{7}{4}$، وبالتالي يمكن كتابة مجموعة الحلول على الشكل التالي: $\mathcal{S}=\left\{\left(x,y,\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y-\frac{7}{4}\right) \middle| x,y\in\mathbb{R}\right\}$.

- الجملة $\begin{cases} 7x+2y-2z=1 \\ 2x+3y+2z=1 \end{cases}$. بطريقة التعويض:

$$\begin{cases} 7x+2y-2z=1 \\ 2x+3y+2z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{7}{2}x+y-\frac{1}{2} \\ 2x+3y+2\left(\frac{7}{2}x+y-\frac{1}{2}\right)=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{7}{2}x+y-\frac{1}{2} \\ 9x+5y=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{7}{2}x+y-\frac{1}{2} \\ y=-\frac{9}{2}x+\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=\frac{17}{10}x-\frac{1}{10} \\ y=-\frac{9}{2}x+\frac{2}{5} \end{cases}$$

وبالتالي يمكن كتابة مجموعة الحلول على الشكل التالي: $\mathcal{S}=\left\{\left(x,-\frac{9}{2}x+\frac{2}{5},\frac{17}{10}x-\frac{1}{10}\right) \middle| x\in\mathbb{R}\right\}$.

ملاحظة 7: تقاطع ثلاث مستويات في الفراغ إما أن تكون نقطة واحدة أو مستقيم أو مستوي أو لا يوجد تقاطع.

## الحل بطريقة كرامر

نرمز ب $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$ محدد المصفوفة $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (سنرى ذلك لا حقاً). ليكن لدينا جملة المعادلتين الخطيتين بمجهولين: $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$. وبفرض أن $ad-bc\neq 0$، نجد حل واحد حيث الإحداثيات $(x,y)$ معطية بـ:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

مثال 21: أوجد حل الجملة الخطية $\begin{cases} tx-2y=1 \\ 3x+ty=1 \end{cases}$ حسب قيمة الوسيط $t\in\mathcal{R}$.

إن محدد الجملة $\begin{vmatrix} t & -2 \\ 1 & t \end{vmatrix}=t^2+6$ لا ينعدم إطلاقاً، بالتالي للجملة حل وحيد $(x,y)$ معطى ب:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & t\end{vmatrix}}{t^2+6}=\frac{t+2}{t^2+6}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}t & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}}{t^2+6}=\frac{t-3}{t^2+6}$$

بالتالي مجموعة الحلول هي: $\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{t+2}{t^2+6},\frac{t-3}{t^2+6}\right)\right\}$.

## الحل باستخدام مقلوب مصفوفة

ليكن لدينا جملة المعادلتين الخطيتين بمجهولين: $\begin{cases} ax+by=e\\ cx+dy=f\end{cases}$. يمكن كتابة الجملة باستخدام المصفوفات على الشكل التالي: $AX = Y$ حيث $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ و $X=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$ و $Y=\begin{pmatrix} e\\ f\end{pmatrix}$.

إذا كان محدد المصفوفة A مختلف عن الصفر أي $ad - bc \neq 0$، بالتالي تكون المصفوفة قابلة للقلب ويكون: $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$. وبالتالي يكون الحل الوحيد $X=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$ للجملة الخطية معطى بالعلاقة التالية: $X = A^{-1}Y$.

مثال 22: أوجد حل الجملة الخطية $\begin{cases} x+y=1\\ x+t^2y=t\end{cases}$ حسب قيمة الوسيط $t\in\mathcal{R}$.

إن محدد الجملة $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & t^2\end{vmatrix}=t^2-1$.

الحالة الأولى: $t2 - 1 \neq$ $\left(t\neq +1 \text{ و } t\neq -1\right)$، المصفوفة $A$ قابلة للقلب ويكون $A^{-1}=\frac{1}{t^2-1}\begin{pmatrix} t^2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ والحل $X=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$ يعطى ب:

$X=A^{-1}Y=\frac{1}{t^2-1}\begin{pmatrix} t^2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ t\end{pmatrix}=\frac{1}{t^2-1}\begin{pmatrix} t^2-1\\ t-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{t}{t-1}\\ \frac{1}{t-1}\end{pmatrix}$، بالتالي مجموعة الحلول هي:

$$\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{t}{t+1},\frac{1}{t+1}\right)\right\}.$$

الحالة الثانية: $t = +1$، عندها تكون الجملة $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ والمعادلتين متطابقتين، بالتالي يوجد عدد لا نهائي من الحلول: $\mathcal{S}=\{(x,1-x)|x\in\mathbb{R}\}$.

الحالة الثالثة: $t = -1$، عندها تكون الجملة $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=-1 \end{cases}$، والمعادلتين غير متوافقتين بالتالي: $\mathcal{S} = \varnothing$.

## 2.2.نظرية الجمل الخطية

تعريف 11: نسمي المعادلة الخطية ذات $p$ متحولاً (مجهولاً) $x_1, \ldots, x_p$ كل معادلة من الشكل: $a_1x_1+\ldots+a_px_p=b$، حيث $a_1, \ldots, a_p$ و $b$ أعداد حقيقية معطية.

تعريف 12: من أجل العدد الصحيح $n \geq 1$، نسمي جملة من $n$ معادلة خطية بـ $p$ متحول قائمة مؤلفة من $n$ معادلة خطية.

الشكل العام لجملة من المعادلات الخطية بـ $p$ متحول عددها $n$ هي من الشكل:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\ldots+a_{1,p}x_p=b_1 \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\ldots+a_{2,p}x_p=b_2 \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1+a_{i,2}x_2+\ldots+a_{i,p}x_p=b_i \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+\ldots+a_{n,p}x_p=b_n \end{cases}$$

الأعداد $A_{i,j};\ i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, p$ هي أمثال (معاملات) الجملة الخطية، والأعداد $b_i;\ i = 1, \ldots, n$ تمثل الطرف الثاني للجملة.

يمكن كتابة جملة المعادلات باستخدام المصفوفات على النحو التالي: $AX = B$، حيث:

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

مثال 23: الجملة الخطية التالية مكونة من معادلتين بثلاث متحولات (مجاهيل):
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}.$$

تعريف 13: حل جملة معادلات خطية هي قائمة من $p$ عدد حقيقي $(s_1, \dots, s_2)$ بحيث إذا عوضنا $x_1$ بـ $s_1$ و $x_2$ بـ $s_2$، ... في الجملة الخطية تتحقق المساواة (أي تجعل طرفها الأول يساوي طرفها الثاني).

مثال 24: الجملة الخطية $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 9 \end{cases}$ تقبل الحل $(-18, -6, 1)$، أي أن $x_1 = -18$ و $x_2 = -6$ و $x_3 = 1$. بالمقابل فإن $(7, 2, 0)$ لا تحقق إلا المعادلة الأولى وبالتالي ليست حلاً للجملة.

تعريف 14: نقول عن جملتين خطيتين أنهما متكافئتين إذا كان لهما نفس مجموعة الحلول.

مبرهنة 3: جملة من المعادلات الخطية إما ليس لها حل أو أن لها حل واحد أو لانهاية من الحلول.

تعريف 15: نسمي جملة خطية متجانسة الجملة التي يكون فيها الطرف الثاني مساوياً للصفر، أي $b_1 = \dots = b_n = 0$. وتمثلها المعادلة المصفوفية $AX = 0$.

ملاحظة 8: للجملة المتجانسة الحل الصفري والذي يسمى بالحل البديهي. في حالة جملة خطية $2 \times 2$ (معادلتين بمجهولين) والتي توافق مستقيمين يمران من المبدأ $(0, 0)$ والذي هو دائماً حل.

### 3.2. الجملة الخطية المدرجة

تعريف 16: إن أول معامل في معادلة خطية غير معدوم يسمى معامل رائد في المعادلة.

تعريف 17: الجملة الخطية المدرجة هي جملة تحقق ما يلي: المعامل الرائد في كل معادلة (سطر) يقع إلى يمين المعامل الرائد في المعادلة التي تسبقها. أو بشكل آخر المعاملات الصفرية التي تبدأ بمعادلة تزداد معادلة بعد معادلة.

تعريف 18: الجملة الخطية المدرجة المختزلة هي بالإضافة إلى كونها مدرجة فإن المعامل الأول غير الصفري في معادلة يساوي الواحد، وهو العنصر الوحيد غير الصفري في العمود الذي ينتمي إليه.

مثال 25: الجملة التالية مدرجة ولكنها غير مختزلة: $\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 5 \\ & -x_2 & -2x_3 & & = & 4 \\ & & & 3x_4 & = & 1 \end{cases}$ ، بينما

الجملة التالية: $\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -x_4 & = & 5 \\ & & -2x_3 & & = & 4 \\ & & x_3 & 3x_4 & = & 1 \end{cases}$ ليست مدرجة لأن السطر الأخير يبدأ بنفس متحول السطر الذي يسبقه.

مثال 26: الجملة الخطية ثلاث معادلات بأربع مجاهيل مدرجة ومختزلة:

$$\begin{cases} x_1 & & +2x_3 & & = & 25 \\ & x_2 & -2x_3 & & = & 16 \\ & & & x_4 & = & 1 \end{cases}$$

## العمليات على معادلات جملة خطية

إن العمليات الأولية على المعادلات (الأسطر) هي:

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ و $\lambda \neq 0$: يمكن ضرب معادلة بعدد حقيقي مختلف عن الصفر.
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ و $\lambda \in K$ و $i \neq j$: يمكن إضافة المعادلة $L_j$ بعد ضربها بعدد حقيقي إلى المعادلة $L_i$.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: يمكن التبديل بين المعادلة $L_i$ والمعادلة $L_j$.

العمليات الأولية المذكورة سابقاً لا تغير من حل الجملة الخطية، بمعنى آخر تلك العمليات تحول جملة خطية إلى جملة خطية أخرى مكافئة لها.

مثال 27: لنستخدم العمليات الأولية الآنفة الذكر من اجل حل الجملة الخطية التالية:

$$\begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 & (L_1) \\ 2x & -y & +5z & = & -5 & (L_2) \\ -x & -3y & -9z & = & -5 & (L_3) \end{cases}$$

لنبدأ بالعملية $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ نحصل على الجملة الخطية المكافئة:

$$\begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 & \\ & -3y & -9z & = & -3 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -x & -3y & -9z & = & -5 & \end{cases}$$

ومن ثم $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 \\ & -3y & -9z & = & -3 \\ & -2y & -2z & = & -6 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

نستمر لجعل أمثال $y$ في المعادلة الثانية مساوياً للواحد، من أجل ذلك نقسم السطر الثاني 3-:

$$\begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 \\ & y & +3z & = & 1 & L_2 \leftarrow -1/3L_2 \\ & -2y & -2z & = & -6 \end{cases}$$

وهكذا نستمر:

$$\begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 \\ & y & +3z & = & 1 \\ & & 4z & = & -4 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 \\ & y & +3z & = & 1 \\ & & z & = & -1 & L_3 \leftarrow -1/4L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & +y & +7z & = & -1 \\ & y & & = & 4 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \\ & & z & = & -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & +y & & = & -1 & L_1 \leftarrow L_1 - 7L_3 \\ & y & & = & 4 \\ & & z & = & -1 \end{cases}$$

ونحصل أخيراً على جملة مدرجة مختزلة:

$$\begin{cases} x & & & = & -1 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ & y & & = & 4 \\ & & z & = & -1 \end{cases}$$

هكذا نحصل على $x = -1$ و $y = 4$ و $z = -1$ الحل الوحيد للجملة الخطية.

## 4.2. حل الجمل الخطية

مبرهنة 4 (حالة الجملة غير المتجانسة): لتكن لدينا جملة خطية غير متجانسة $AX = B$ مؤلفة من $n$ معادلة بـ $p$ مجهول مصفوفتها الموسعة $(A|B)$:

1. نرد المصفوفة الموسعة $(A|B)$ إلى الشكل المدرج.
2. ليكن $r$ عدد العناصر الرائدة في مصفوفة مدرجة مكافئة لمصفوفة الأمثال $A$.
3. ليكن $r'$ عدد العناصر الرائدة في مصفوفة مدرجة مكافئة للمصفوفة $(A|B)$، وهو دوماً يحقق المتراجحة $r' \geq r$.

عندئذ تتحقق واحدة فقط من الحالات التالية:

a) $r = r' = p$، يكون للجملة في هذه الحالة حل وحيد.
b) $r = r' < n$، يكون للجملة في هذه الحالة عدد غير منته من الحلول بـ $p - r$ مجهولاً اختيارياً.
c) $r \neq r'$، والجملة ليس لها حل.

مبرهنة 5 (حالة الجملة المتجانسة): لتكن لدينا جملة خطية متجانسة $AX = 0$ مؤلفة من $n$ معادلة بـ $p$ مجهول مصفوفتها الموسعة $(A|0)$. باتباع خطوات المبرهنة السابقة، نلاحظ أنه لدينا دوماً في هذه الحالة $r = r'$، بالتالي نميز حالتين فقط:

a) $r = p$، للجملة حل وحيد هو الحل الصفري $x_1 = \dots = x_p = 0$.
b) $r < p$، للجملة عدد غير منته من الحلول ب $p - r$ مجهولاً اختيارياً.

مثال 28: ما هو حل الجملة المتجانسة التالية:
$$\begin{cases} 2x & -3y & +5z & = & 0 \\ x & +y & -z & = & 0 \\ x & -y & +z & = & 0 \end{cases}$$

إن مصفوفة الأمثال هي: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$، نجري العملية $L_1 \leftrightarrow L_2$ نحصل على:
$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

نجري العملية $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ ومن ثم $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ نحصل على: $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

أخيراً نجري العملية $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{5} L_2$ نحصل على: $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$

نلاحظ أن $r = p = 3$، بالتالي للجملة حل وحيد هو الحل الصفري.

مثال 29: ما هو حل الجملة المتجانسة التالية:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_3 + 8x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

بعد العمليات الأولية نحصل على الشكل المدرج المختزل:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 13x_5 = 0 \\ x_3 + 20x_5 = 0 \\ x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن $p = 5$ و $r = 3$، بالتالي للجملة عدد غير منته من الحلول بـ $2 = 3 - 5$ مجهولاً اختيارياً.
لنختار $x_2$ و $x_5$ المجاهيل الاختيارية بالتالي: $x_1 = -x_2 - 13x_5$ و $x_3 = -20x_5$ و $x_4 = 2x_5$. أي أن مجموعة الحلول للجملة هي: $\mathcal{S} = \{(-x_2 - 13x_5, x_2, -20x_5, 2x_5, x_5) | x_2, x_5 \in \mathbb{R}\}$.

## 5.2. حل الجمل الخطية بطريقة غوص

مبرهنة 6: إذا كانت $(A|B)$ المصفوفة الموسعة لجملة معادلات خطية وكانت $(A'|B')$ مصفوفة مدرجة مكافئة للمصفوفة $(A|B)$ فإن جملة المعادلات الخطية الموافقة للمصفوفة $(A'|B')$ تكافئ جملة المعادلات الخطية الموافقة للمصفوفة $(A|B)$.

### خوارزمية طريقة غوص لحل جملة المعادلات الخطية AX = B

1. نرد المصفوفة $(A|B)$ إلى الشكل المدرج $H = (A'|B')$.
2. ليكن $r$ عدد العناصر الرائدة في مصفوفة مدرجة مكافئة لمصفوفة الأمثال $A$.
3. ليكن $r'$ عدد العناصر الرائدة في المصفوفة الموسعة $(A'|B')$.

**4.** إذا كان $r \neq r'$، عندها يظهر في المصفوفة الموسعة $(A'|B')$ سطر يكافئ المعادلة $0 = c$، حيث $c \neq 0$، وتكون الجملة مستحيلة الحل.

**5.** إذا كان $r = r'$، عندئذ نكتب جملة المعادلات الموافقة للمصفوفة الموسعة $(A'|B')$

**6.** نحل جملة المعادلات الناتجة بطريقة التعويض من الأسفل باتجاه الأعلى. نحصل على حلول الجملة المعطاة حيث تكون وحيدة الحل عندما $r = r' = p$، أو يكون لها عدد غير منته من الحلول في حالة $r = r' < p$، ونحلها بدلالة $p - r$ مجهولاً اختيارياً.

مثال 30: حل الجملة التالية: $\begin{cases} x & +2y & = & 5 \\ 2x & -y & = & 5 \\ 3x & +y & = & 5 \end{cases}$

المصفوفة الموسعة للجملة هي: $H = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \end{array}\right)$

نجري العملية $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ ومن ثم $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ نحصل على: $H \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & -10 \end{array}\right)$

كما نجري العملية $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ نحصل على: $H \sim \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 2 & 5 \\ 0 & \boxed{-5} & -5 \\ 0 & 0 & \boxed{-5} \end{array}\right)$

إذن $r = 2$ و $r' = 3$ والجملة مستحيلة الحل $(0 = -5)$، وبالتالي مجموعة الحلول $S = \varnothing$.

مثال 31: حل الجملة التالية: $\begin{cases} 2x & -y & +4z & = & -3 \\ x & -2y & -10z & = & -6 \\ 3x & & +4z & = & 7 \end{cases}$

المصفوفة الموسعة للجملة هي: $H = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & -10 & -6 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \end{array}\right)$

نجري العملية $L_1 \leftrightarrow L_2$ نحصل على: $H \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -10 & -6 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \end{array}\right)$

نجري العملية $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ ومن ثم $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ نحصل على:

$$H \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -10 & -6 \\ 0 & 3 & 24 & 9 \\ 0 & 6 & 34 & 25 \end{array}\right)$$

نجري العملية $L_2 \leftarrow 1/3L_2$ نحصل على: $H \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -10 & -6 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \\ 0 & 6 & 34 & 25 \end{array}\right)$

نجري العملية $L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2$ نحصل على: $H \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -10 & -6 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & 7 \end{array}\right)$

نجري العملية $L_3 \leftarrow -1/14L_3$ نحصل على: $H \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & -10 & -6 \\ 0 & \boxed{1} & 8 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1/2 \end{array}\right)$

إذن $r = r' = p = 3$، بالتالي للجملة حل وحيد. الجملة المكافئة هي:

$$\begin{cases} x & -2y & -10z & = & -6 \\ & y & +8z & = & 3 \\ & & +z & = & -1/2 \end{cases}$$

نعوض قيمة $z$ في المعادلة الثانية نحصل على $y = 7$. ثم نعوض قيمتي $y$ و $z$ في المعادلة الأولى نحصل على $x = 3$. بالتالي مجموعة الحلول هي: $S = \left\{\left(3, 7, -\frac{1}{2}\right)\right\}$.

مثال 32: حل الجملة التالية: $\begin{cases} -3x & -5y & +36z & = & 10 \\ -x & & +7z & = & 5 \\ x & +y & -10z & = & -4 \end{cases}$

المصفوفة الموسعة للجملة هي: $H = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -5 & 36 & 10 \\ -1 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -10 & -4 \end{array}\right)$

نجري العملية $L_1 \leftrightarrow L_3$ نحصل على: $H \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -10 & -4 \\ -1 & 0 & 7 & 5 \\ -3 & -5 & 36 & 10 \end{array}\right)$

نجري العملية $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ ومن ثم $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$ نحصل على: $H \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -10 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -2 \end{array}\right)$

نجري العملية $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$ نحصل على: $H \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -10 & -4 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

من الملاحظ أن $r = r' = 2$ و $p = 3$، إذن $r = r' < p$ وللجملة عدد غير منته من الحلول بـ $1 = 2 - 3$ مجهولاً اختيارياً. الجملة المكافئة هي: $\begin{cases} x + y - 10z = -4 \\ y - 3z = 1 \end{cases}$

نحلها بطريقة التعويض بدلالة مجهول اختياري وليكن $z$: من المعادلة الثانية نجد $y = 3z + 1$، بالتعويض في المعادلة الأولى نجد أن: $x = 7z - 5$. إذن مجموعة الحلول للجملة المعطاة هي: $S = \{(7z - 5, 3z + 1, z) | z \in \mathbb{R}\}$.

## 6.2. مقلوب مصفوفة والجمل الخطية

ليكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

وجدنا سابقاً أنه يمكن كتابة الجملة الخطية المذكورة باستخدام المصفوفات على النحو التالي: $AX = B$، بحيث:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

نسمي $A \in M_{n,p}(K)$ مصفوفة أمثال الجملة الخطية. $B \in M_{n,1}(K)$ شعاع الطرف الثاني للجملة الخطية. الشعاع $X \in M_{p,1}(K)$ هو حل الجملة الخطية إذا وفقط إذا كان $AX = B$.

مبرهنة 7: جملة معادلات خطية لها فقط إما حل واحد أو عدد غير منته من الحلول أو أنها مستحيلة الحل.

فرضية 9: إذا كانت المصفوفة $A$ قابلة للقلب فإن حل الجملة الخطية $B = AX$ وحيد يعطى بالعلاقة: $X = A^{-1}B$ .

مبرهنة 8: ليكن لدينا المصفوفة $A \in M_{n,p}(K)$، يوجد مصفوفة مدرجة مختزلة وحيدة $U$ نحصل عليها من $A$ بعمليات أولية على الأسطر.

مبرهنة 9: ليكن لدينا المصفوفة $A \in M_n(K)$. تكون المصفوفة $A$ قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان شكلها المدرج المختزل هو المصفوفة الواحدية $I_n$.

ملاحظة 9: وجدنا سابقاً أنه من أجل الحصول على مقلوب مصفوفة $A$، نشكل المصفوفة الموسعة $(A|I)$، ومن ثم نقوم بمجموعة من التحويلات السطرية الأولية على المصفوفة الموسعة $(A|I)$ إلى أن نحصل في النهاية على المصفوفة الموسعة $(I|B)$. وتكون في هذه الحالة $B = A^{-1}$.

فرضية 10: إن التعابير الثلاثة التالية متكافئة:

1. المصفوفة $A$ قابلة للقلب
2. جملة المعادلات الخطية المتجانسة $AX = 0$ له حل وحيد هو الحل الصفري (البديهي).
3. من أجل أي طرف ثاني $B$، جملة المعادلات الخطية $AX = B$ لها حل وحيد $X$.

مثال 33: بين فيما إذا كانت المصفوفة التالية قابلة للقلب $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 12 \end{pmatrix}$

لنكتب المصفوفة الموسعة: $(A\,|\,I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

نجري العملية $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ ومن ثم $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$ نحصل على:

$$(A\,|\,I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & -12 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -12 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

نجري العملية $L_2 \leftarrow -1/11L_2$ نحصل على:
$$(A\,|\,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{12}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & 0\\ 0 & -11 & -12 & -4 & 0 & 1\end{array}\right)$$

نجري العملية $L_3 \leftarrow L_3 + 11L_2$ نحصل على:
$$(A\,|\,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 4 & 6 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{12}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1\end{array}\right)$$

نجري العملية $L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2$ نحصل على:
$$(A\,|\,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & \frac{18}{11} & \frac{3}{11} & \frac{4}{11} & 0\\ 0 & 1 & \frac{12}{11} & \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1\end{array}\right)$$

هذا ويمكن ملاحظة أنه ومن الخطوة السابقة لا يمكن الحصول على المصفوفة الموسعة $(I|B)$ انطلاقاً من المصفوفة الموسعة $(A|I)$ وذلك بالقيام بمجموعة من العمليات الأولية. بالتالي المصفوفة $A$ غير قابلة للقلب.

## 3. المصفوفات والتطبيقات الخطية

### رتبة مصفوفة

تعريف 19: نعرف رتبة مصفوفة $A \in M_{n,p}$ على أنها رتبة أشعة أعمدتها. أي أن:
$rg\ A\ =\ dim\ Vect(v_1, \dots, v_p)$، حيث $(v_1, \dots, v_p)$ هي أعمدة المصفوفة $A$.

مثال 34: ماهي رتبة المصفوفة
$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -\frac{1}{2} & 0\\ 2 & 4 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

من الواضح أن كل الأشعة مرتبطة بالشعاع $v_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$، بالتالي فإن رتبة المصفوفة $rg\ A\ =\ 1$.

### رتبة مصفوفة قابلة للقلب

مبرهنة 10: مصفوفة مربعة $A$ حجمها $n$ قابلة للقلب إذا وفقط إذا كانت رتبتها تساوي $n$.

فرضية 11: رتبة مصفوفة $A \in M_{n,p}$ هي أيضاً رتبة أشعة أسطرها. أي أن $rg\ A\ =\ dim\ Vect(w_1, \dots, w_n)$ ، حيث أن $(w_1, \dots, w_n)$ هي أسطر المصفوفة $A$.

نتيجة 1: الفضاء الشعاعي المولد من أشعة أعمدة مصفوفة والفضاء الشعاعي المولد من أشعة أسطرها لهما نفس البعد. بمعنى آخر لدينا $rg\ A = rg\ {}^tA$.

### 1.3. تطبيق خطي في فضاء منتهي البعد

مبرهنة 11: ليكن $E$ و $F$ فضاءين شعاعيين على الحقل $K$. بفرض أن الفضاء الشعاعي $E$ ذو بعد منتهي $n$ وأن الأشعة $(e_1, \dots, e_n)$ تشكل قاعدة في $E$. بالتالي من أجل أي جملة $n$ شعاع $(v_1, \dots, v_n)$ من $F$، يوجد تطبيق خطي وحيد $f: E \to F$، بحث أنه من أجل كل $i = 1, \dots, n$ : $f(e_i) = v_i$ .

ملاحظة 10: المبرهنة السابقة لا تضع أي شرط على بعد الفضاء الشعاعي $F$.

مثال 35: يوجد تطبيق خطي وحيد $f: \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$ بحيث: $f(e_1) = e_2$ و $f(e_2) = e_3$ و $f(e_3) = e_1 + e_2$ ($(e_1, e_2, e_3)$ القاعدة القانونية في $\mathcal{R}^3$). من أجل أي عنصر $(x, y, x) \in \mathcal{R}^3$:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = f(xe_1) + f(ye_2) + f(ze_3) \\ &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \\ &= xe_2 + ye_3 + z(e_1 + e_2) = x(0,1,0) + y(0,0,1) + z(1,1,0) \\ &= (z, x+z, y) \end{aligned}$$

### 2.3. مصفوفة تطبيق خطي

#### المصفوفة المرتبطة بتطبيق خطي

ليكن $E$ و $F$ فضاءين شعاعيين منتهيي البعد على الحقل $K$. ليكن $p$ بعد الفضاء $E$ و $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ قاعدة في $E$. ليكن $n$ بعد الفضاء $F$ و $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ قاعدة في $F$. وليكن أخيراً $f: E \to F$ تطبيقاً خطياً. إن خواص التطبيقات الخطية بين فضاءين شعاعيين تؤكد ما يلي:

- التطبيق الخطي معرف وبطريقة وحيدة عن طريق صورة قاعدة في $E$، أي بـ $f(e_1), f(e_2), \dots f(e_p)$.
- من أجل $j \in \{1, \dots, p\}$، $f(ej)$ هو شعاع من $F$ وبالتالي يُكتب وبطريق وحيدة كتركيب خطي من أشعة القاعدة $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ في $F$. بالتالي يوجد $n$ سلمي وحيدين $a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{n,j}$ بحيث:

$$f(e_j) = a_{1,j} f_1 + a_{2,j} f_2 + \dots + a_{n,j} f_n = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}_{B'}$$

بالتالي التطبيق f معرف كلياً بمعرفة الأمثال $(a_{i,j})$، $\in \{1, \dots, n\}$ و $j \in \{1, \dots, p\}$

تعريف 20: مصفوفة التطبيق الخطي $f$ بالنسبة للقاعدتين $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ هي المصفوفة $(a_{i,j}) \in M_{n,p}(K)$، حيث الشعاع ذو الرتبة $j$ يتألف من إحداثيات (مركبات) الشعاع $f(e_j)$ في القاعدة $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \cdots & f(e_j) & \cdots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

ملاحظة 11: حجم المصفوفة $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ يعتمد فقط على بعدي الفضاءين الشعاعيين $E$ و $F$. بالمقابل أمثال المصفوفة يعتمد على اختيار القاعدة $\mathcal{B}$ في $E$ والقاعدة $\mathcal{B}'$ في $F$.

مثال 36: أوجد مصفوفة التطبيق الخطي $f: \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^2$ المعرف بـ:
$f(x,y,z) = (x+y-z, x-2y+3z)$. بالنسبة للقاعدة القانونية $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ في $\mathcal{R}^3$ والقاعدة القانونية $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2\}$ في $\mathcal{R}^2$. أي:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,1) = f_1 + f_2$$

بالتالي الشعاع الأول من المصفوفة $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ هو $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$f(e_2) = f(0,1,0) = (1,-2) = f_1 - 2f_2$$

بالتالي الشعاع الأول من المصفوفة $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ هو $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$f(e_3) = f(0,0,1) = (-1,3) = -f_1 + 3f_2$$

بالتالي الشعاع الأول من المصفوفة $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ هو $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. وهكذا فإن:

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

مثال 37: أوجد مصفوفة التطبيق الخطي السابق $f$ بالنسبة للقاعدتين $\mathcal{B}_0 = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ في $\mathcal{R}^3$ والقاعدة $\mathcal{B}'_0 = \{\phi_1, \phi_2\}$ في $\mathcal{R}^2$:

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(\mathcal{E}_1) = f(1,1,0) = (2,-1) = 3\phi_1 - \phi_2, f(\mathcal{E}_2) = f(1,0,1) = (0,4) = -4\phi_1 + 4\phi_2$$

$$f(\mathcal{E}_3) = f(0,1,1) = (0,1) = -\phi_1 + \phi_2$$

بالتالي فإن:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_0'} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

## العمليات على التطبيقات الخطية والمصفوفات

فرضية 12: ليكن $f, g$ تطبيقان خطيان من $E$ إلى $F$، ولتكن $\mathcal{B}$ قاعدة في $E$ و $\mathcal{B}'$ قاعدة في $F$. عندئذ:

- $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f + g) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g)$
- $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f) = \lambda Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$

فرضية 13: ليكن $f: E \to F$ و $g: F \to G$ تطبيقان خطيان ولتكن $\mathcal{B}$ قاعدة في $E$ و $\mathcal{B}'$ قاعدة في $F$ و $\mathcal{B}"$ قاعدة في $G$. عندئذ:

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g)\ x\ Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$$

بمعنى آخر ليكن: $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ و $B = Ma_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f)$ و $C = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f)$ فإن: $C = B \times A$.

مثال 38: ليكن $E = \mathcal{R}^2$ قاعدته $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ و $F = \mathcal{R}^3$ قاعدته $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, f_3\}$ و $G = \mathcal{R}^2$ قاعدته $\mathcal{B} = \{g_1, g_2\}$. وليكن $f: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^3$ والخطي $g: \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^2$ ويفرض أن:

$$A = Mat_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,2} \qquad B = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,3}$$

احسب المصفوفة $g \circ f: E \to G$، $C = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f)$ بطريقتين مختلفتين.

الطريقة الأولى: علينا أن نعبر عن $g \circ f(e_j)$ بدلالة القاعدة $\{g_1, g_2\}$

$$g \circ f(e_1) = g(f(e_1)) = g(1f_1 + 1f_2 + 0f_3) = g(f_1 + f_2) = g(f_1) + g(f_2)$$
$$g \circ f(e_1) = (2g_1 + 3g_2) + (-g_1 + g_2) = g_1 + 4g_2$$

$$g \circ f(e_2) = g(f(e_1) = g(0f_1 + 1f_2 + 2f_3) = g(f_2 + 2f_3)$$
$$= g(f_2) + 2g(f_3)$$
$$g \circ f(e_2) = (-g_1 + g_2) + 2(0g_1 + 2g_2) = -g_1 + 5g_2$$

بالتالي: $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

الطريقة الثانية: $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = C = B \times A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

## مصفوفة أندومورفيزم

في هذه الحالة $F = E$، $f: E \to E$. إذا كان $dim\, E = n$ فإن مصفوفة $f$ هي مصفوفة مربعة حجمها $n\, x\, n$. حالتان: الأولى إذا اخترنا نفس القاعدة $\mathcal{B}$ في المنطلق والمستقر نرمز بـ $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ لمصفوفة $f$. الحالة الثانية يمكن اختيار قاعدتين مختلفتين في نفس الفضاء $E$، نرمز عندها لمصفوفة $f$ بـ $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

أمثلة 39:

- التطبيق الواحدي $id: E \to E$ المعرف بـ $id(x) = x$، مهما كانت القاعدة $\mathcal{B}$ في $E$ فإن: $Mat_{\mathcal{B}}(id) = I_n$. (ليس صحيحاً إذا كانت قاعدة المنطلق مختلفة عن قاعدة المستقر).
- تطبيق التحاكي $h_\lambda: E \to E$ المعرف بـ $h_\lambda(x) = \lambda . x$، $\lambda \in K$: $Mat_{\mathcal{B}}(h_\lambda) = \lambda I_n$.
- تطبيق التناظر المركزي $s: E \to E$ المعرف بـ $s(x) = -x$: $Mat_{\mathcal{B}}(s) = -I_n$.

تطبيق الدوران بزاوية $\theta$ حول المبدأ في الفضاء الشعاعي $\mathcal{R}^2$ مزود بالقاعدة القانونية $\mathcal{B}$.

المعرف بـ: $r_\theta: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$

$$r_\theta(x, y) = (x\, cos\theta - y\, sin\theta, x\, sin\theta + y\, cos\theta) : Mat_{\mathcal{B}}(r_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

نتيجة 2: ليكن $E$ فضاء شعاعي بعده منتهي و $\mathcal{B}$ قاعدة في $E$. ليكن $f: E \to E$ تطبيق خطي. عندئذ مهما كان $p$ عدد طبيعي فإن: $Mat_{\mathcal{B}}(f^p) = (Mat_{\mathcal{B}}(f))^p$. بمعنى آخر إذا كانت $A$ مصفوفة $f$، بالتالي فإن مصفوفة التطبيق $f^p = f \circ f \circ \dots \circ f$ هي المصفوفة $A^p = A \times A \times \dots \times A$.

مثال 40: ليكن $r_\theta$ مصفوفة الدوران بزاوية $\theta$ في الفضاء $\mathcal{R}^2$. فإن مصفوفة $r_\theta^p$ هي:

$$Mat_{\mathcal{B}}(r_\theta^p) = (Mat_{\mathcal{B}}(r_\theta))p = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^p$$

يمكن البرهان على أن: $\begin{pmatrix} \cos(p\theta) & -\sin(p\theta) \\ \sin(p\theta) & \cos(p\theta) \end{pmatrix} = Mat_{\mathcal{B}}(r_\theta^p)$، وهي مصفوفة دوران بزاوية $p\theta$.

مبرهنة 12: ليكن $E$ و $F$ فضاءين شعاعيين نفس البعد المنتهي على الحقل $K$. $f: E \to F$ تطبيق خطي. لتكن $\mathcal{B}$ قاعدة في $E$ و $\mathcal{B}'$ قاعدة في $F$ و $A = {}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

1. التطبيق $f$ تقابل إذا وفقط إذا كانت المصفوفة قابلة للقلب. بمعنى آخر $f$ إيزومورفيزم إذا وفقط إذا كانت مصفوفته $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ قابلة للقلب.
2. بالإضافة إلى ذلك، إذا كان $f: E \to F$ تقابل فإن مصفوفة التطبيق الخطي $f^{-1}: F \to E$ هي $A^{-1}$. بمعنى آخر: $Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f^{-1}) = (Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f))^{-1}$.

نتيجة 3: $f: E \to E$ أندومورفيزم $\mathcal{B}$ نفس القاعدة في المنطلق والمستقر و $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$:

- $f$ تقابل إذا وفقط إذا كانت $A$ قابلة للقلب.
- إذا كان $f$ تقابل فإن مصفوفة $f^{-1}$ بالنسبة للقاعدة $\mathcal{B}$ هي $A^{-1}$. بمعنى آخر: $Mat_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = (Mat_{\mathcal{B}}(f))^{-1}$.

## 4. المحددات

تعريف 21: المحدد هو تطبيق $det: M_n(K) \to K$، بحيث أنه يُلحق بكل مصفوفة مربعة من $M_n(K)$ سلمي (عدد) من الحقل $K$.

### 1.4. المحددات في البعد 2 و 3

#### محدد مصفوفة 2 x 2

يتم حساب محدد مصفوفة $2 \times 2$ بالطريقة التالية: $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

مثال 41: $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 2(3) - 1(-1) = 6 + 1 = 7$ $\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = 2(9) - 3(6) = 18 - 18 = 0$

ملاحظة 12: إذا كان محدد مصفوفة $A$ يساوي الصفر فإننا نسمي المصفوفة بالشاذة.

#### محدد مصفوفة 3 x 3

لتكن المصفوفة $A \in M_3(K)$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$، فإن محدد المصفوفة $A$ يعطى بالعلاقة:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

يوجد طريقة سهلة لإيجاد محدد مصفوفة $3 \times 3$ تسمى قاعدة سايروس: نكرر العمود الأول والعمود الثاني، ثم نجد حاصل ضرب الأقطار الرئيسية ونطرح منها حاصل ضرب الأقطار المرافقة كما يلي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

مثال 42: أوجد محدد المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

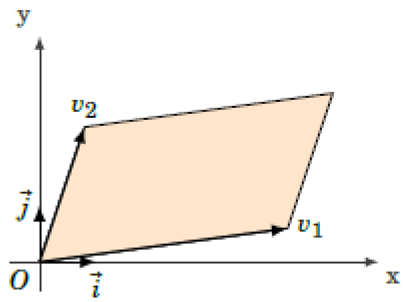
بتطبيق قاعدة سايروس $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$:

$$det\ A = 2 \times (-1) \times 1 + 1 \times 3 \times 3 + 0 \times 1 \times 2 - (3 \times (-1) \times 0 + 2 \times 3 \times 2 + 1 \times 1 \times 1) = 7 - 13 = -6$$

### التفسير الهندسي للمحدد

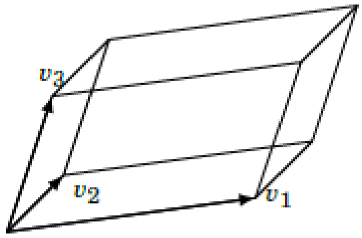
سنرى أن المحدد في المستوي يمثل المساحة وفي الفراغ يمثل الحجم.

ليكن لدينا الشعاعين $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ و $v_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ في $\mathcal{R}^2$. يمثل الشعاعين $v_1$ و $v_2$ في المستوي متوازي أضلاع:




فرضية 14: مساحة متوازي الأضلاع تعطى بالقيمة المطلقة للمحدد: $\mathcal{A} = \left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| = |\det(v_1, v_2)|$.

بنفس الطريقة ليكن لدينا ثلاثة أشعة $v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$ و $v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$ و $v_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ في في $\mathcal{R}^3$ تمثل الأشعة $v_1$ و $v_2$ و $v_3$ في الفراغ متوازي مستطيلات:




فرضية 15: حجم متوازي المستطيلات تعطى بالعلاقة:

$$\mathcal{V}=\left|\det(v_1,v_2,v_3)\right|=\left|\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\right|$$

مثال 43: أوجد مساحة متوازي الأضلاع المحدد بالشعاعين: $v_1=\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}$ و $v_2=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$

$$\mathcal{A}=\left|\det\begin{pmatrix}7 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\right|=28-3=25.$$

مثال 44: أوجد مساحة متوازي المستطيلات المحدد بالأشعة: $v_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ و $v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$ و $v_3=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$

$$\mathcal{V}\;=\;=\left|\det\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}\right|=|2+3+4-(1+1+24)|=|9-26|=17$$

## 2.4. حساب المحددات

### العامل المرافق cofactor

تعريف 22: لتكن المصفوفة المربعة $A=(a_{i,j})\in M_3(K)$:

- نرمز ب $A_{ij}$ للمصفوفة الناتجة عن حذف السطر $i$ والعمود $j$ من المصفوفة $A$.
- نسمي $det\ A_{ij}$ صغير المصفوفة $A$ ذو الرتبة $n^{-1}$.
- نسمي العدد (السلمي) $C_{ij}=(-1)^{i+j}detA_{ij}$ العامل المرافق لـ $A$ بالنسبة للعنصر $a_{ij}$.

مثال 45: لتكن $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. احسب $A_{11}, C_{11}, A_{32}, C_{32}$.

$$A_{11}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad C_{11}=(-1)^{1+1}\det A_{11}=+1$$

$$A_{32}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix} \qquad C_{11}=(-1)^{3+2}\det A_{32}=(-1)(-11)=+11$$

## النشر حسب السطر أو العمود

مبرهنة 13:

النشر حسب السطر $i$: $$\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}C_{ij}$$

النشر حسب العمود $j$: $$\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}C_{ij}$$

ملاحظة 13: يتم النشر حسب السطر أو العمود الذي يحوي أصفراً أكثر.

مثال 46: أوجد محدد المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

لننشر حسب العمود الأول على سبيل المثال:

$$det\ A = 1\times + 4\times C_{21} + 0\times C_{31} = \begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} = (2-1)-4(2-3)$$
$$= 5$$

مثال 47: أوجد محدد المصفوفة $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$

لننشر حسب العمود الثاني (يحوي على صفرين):

$$det\ A = 0\times C_{12} + 2\times C_{22} + 3\times C_{32} + 0\times C_{42} = +2\begin{vmatrix}4 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}4 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

نعيد النشر لكل محدد $3\times 3$:

$$= +2\left(+4\begin{vmatrix}1 & -1\\2 & 3\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}3 & 1\\2 & 3\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}3 & 1\\1 & -1\end{vmatrix}\right)$$ حسب العمود الأول

$$-3\left(-4\begin{vmatrix}3 & 1\\2 & 3\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}4 & 1\\1 & 3\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}4 & 3\\1 & 2\end{vmatrix}\right)$$ حسب السطر الثاني

$$= +2(+4 \times 5 - 0 + 1 \times (-4)) - 3(-4 \times 7 + 1 \times 11 - 0) = 83$$

## 3.4. خواص المحددات

مبرهنة 14: محدد المصفوفة الواحدية $I_n$ يساوي الواحد، أي $det\, I_n = 1$. ومحدد المصفوفة الصفرية $0_n$ يساوي الصفر، أي $det\, 0_n = 0$.

مبرهنة 15: إذا كانت عناصر أحد الصفوف أو الأعمدة أصفار فإن قيمة المحدد تساوي الصفر.

مثال 48: $\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\4 & 0 & 5\\-3 & 0 & -1\end{pmatrix} = 0$ (العمود الثالث أصفار)

فرضية 16: لتكن المصفوفة المربعة $A = (a_{i,j}) \in M_n(K)$ أعمدتها $C_1, C_2, \dots, C_n$. نرمز $A'$ للمصفوفة التي نحصل عليها بالعمليات الأولية على الأعمدة:

1. $C_i \leftarrow \lambda C_i$ و $\lambda \neq 0$: ضرب العمود $C_i$ بعدد حقيقي مختلف عن الصفر. عندئذ: $det\, A' = \lambda det\, A$.
2. $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ و $\lambda \in K$ و $i \neq j$: ضرب العمود $C_j$ بعدد حقيقي وإضافته إلى العمود $C_i$. عندئذ: $det\, A' = det\, A$
3. $C_i \leftrightarrow C_j$: التبديل بين العمود $C_i$ والعمود $C_j$. عندئذ: $det\, A' = -det\, A$.

مثال 49: إذا كان $\det\begin{pmatrix}3 & 3 & 2\\-1 & 2 & 4\\3 & 2 & 1\end{pmatrix} = 5$ فإن:

$\det\begin{pmatrix}3 & 3 & 6\\-1 & 2 & 12\\3 & 2 & 3\end{pmatrix} = 3\, x\, 5 = 15$ (لأن العمود الثالث = 3 أمثال العمود الثالث للمصفوفة السابقة).

وأن: $\det\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\-1 & 4 & 2\\3 & 1 & 2\end{pmatrix} = -5$ (تم تبديل العمودين الثاني والثالث).

نتيجة 4: $det\ (\lambda A)\ =\ \lambda_n\ det\ A$.

نتيجة 5: إذا كان العمود $C_i$ من المصفوفة تركيب خطي من الأعمدة الأخرى فإن $det\ A\ =\ 0$. وبشكل خاص إذا تساوت عناصر عمودين في المصفوفة فإن قيمة المحدد تساوي الصفر.

مثال 50: $\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$

## محددات مصفوفات خاصة

فرضية 17: محدد مصفوفة مثلثية عليا أو سفلى يساوي حاصل جداء عناصر القطر الرئيسي.

مثال 51: $\det\begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1\ \times\ 1\ \times\ 3\ =\ 3$ و $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 4 \end{pmatrix} = 2\ \times\ 3\ \times\ 4\ =\ 24$

نتيجة 6: محدد مصفوفة قطرية يساوي حاصل جداء عناصر قطرها الرئيسي.

مثال 52: $\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = -1\ \times\ 2\ \times\ 3\ =\ -6$

## محدد جداء مصفوفتين

مبرهنة 16: لتكن $A, B\ \in M_n(K)$ فإن: $det(AB)\ =\ det\ A\ \times\ det\ B$

مثال 53: ليكن $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ فإن $AB = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$

$det\ A\ =\ -10\ -\ 3\ =\ -13$ و $det\ B\ =\ 6 - 0\ =\ 6$ و $det(AB)\ =\ -84\ +\ 6\ =\ -78$

من الواضح أن: $-78\ =\ 13\ \times\ 6$.

## محدد مقلوب مصفوفة

فرضية 18: مصفوفة مربعة قابلة للقلب إذا وفقط إذا كان محددها يختلف عن الصفر. وإذا كانت قابلة للقلب فإن:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

فرضية 19: محدد منقول مصفوفة مربعة هو: $\det({}^tA)=\det A$.

ملاحظة 14: اعتماداً على الفرضية السابقة، كل الخواص التي ذكرناها في المحددات بالنسبة للأعمدة هي صحيحة بالنسبة للأسطر أيضاً.

مثال 54: لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\7&8&0\\4&5&6\end{pmatrix}$ فإن ${}^tA=\begin{pmatrix}1&7&4\\2&8&5\\3&0&6\end{pmatrix}$

$$det\ A = 48 + 105 - (96 + 84) = -27$$
$$det\ ({}^tA) = 48 + 105 - (96 + 84) = -27$$

## طريقة كرامر في حل جملة معادلات خطية

ليكن لدينا جملة المعادلات الخطية $n$ معادلة ب $n$ مجهول:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\dots+a_{1,n}x_n=b_1\\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+\dots+a_{2,n}x_n=b_2\\ \quad\cdots\\ a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+\dots+a_{n,n}x_n=b_n\end{cases}$$

يمكن كتابة جملة المعادلات هذه باستخدام المصفوفات على النحو التالي: $AX = B$، بحيث:

$$A=\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}&\cdots&a_{1,n}\\a_{2,1}&a_{2,2}&\cdots&a_{2,n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n,1}&a_{n,2}&\cdots&a_{n,n}\end{pmatrix}\in M_n(K),\qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

لنعرف المصفوفة $A_j\in M_n(K)$ على الشكل التالي:

$$A_j=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,j-1}&b_1&a_{1,j+1}&\cdots&a_{1n}\\&\cdots&a_{2,j-1}&b_2&a_{2,j+1}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,j-1}&b_n&a_{n,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

بمعنى آخر المصفوفة $A_j$ هي المصفوفة $A$ بعد استبدال العمود ذو الرتبة $j$ بالطرف الثاني $B$ لجملة المعادلات الخطية. طريق كرامر تسمح لنا بحساب حل جملة المعادلات الخطية في حالة $det\ A\neq 0$ بدلالة محددات المصفوفتين $A$ و $A_j$.

مبرهنة 17: ليكن $AX = B$ جملة معادلات خطية $n$ معادلة بـ $n$ مجهول. ليكن $det\ A \neq 0$، عندئذ الحل الوحيد للجملة $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ يعطى بالعلاقة:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \qquad \cdots \qquad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

مثال 55: حل جملة المعادلات الخطية

$$\begin{cases} x & & +2z & = & 6 \\ -3x & +4y & +6z & = & 30 \\ -x & -2y & +3z & = & 8 \end{cases}$$

لدينا:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 30 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

وأن: $det\ A = 44$ $\quad det\ A_1 = -40$ $\quad det\ A_2 = 72$ $\quad det\ A_3 = 152$

بالتالي: $z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$ $\quad y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}$ $\quad x = \frac{\det A_1}{\det A} = -\frac{40}{44} = -\frac{10}{11}$.

## المحدد وقاعدة فضاء شعاعي

مبرهنة 18: ليكن $E$ فضاء شعاعي على الحقل $K$ بعده $n$، وليكن $v_1, v_2, \ldots, v_n$، $n$ شعاع من $E$. لتكن $A$ المصفوفة التي أعمدتها مكونة من إحداثيات الأشعة بالنسبة إلى قاعدة $\mathcal{B}$ في $E$. تشكل الأشعة $v_1, v_2, \ldots, v_n$ قاعدة في $E$ إذا وفقط إذا كان $det\ A \neq 0$.

نتيجة 7: تشكل جملة الأشعة ($n$ شعاع) من $\mathcal{R}^n$
$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$
قاعدة في $\mathcal{R}^n$ إذا وفقط إذا كان $det\ (a_{ij}) \neq 0$.

مثال 56: من أجل أي قيم لـ $a, b \in \mathcal{R}$ تشكل الأشعة
$$\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$
قاعدة في $\mathcal{R}^3$.

لنحسب المحدد: $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & b & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} = -a^3 - b^3$. عندما تكون $a^3 \neq -b^3$ (المحدد يختلف عن الصفر)، تشكل الأشعة الآنفة الذكر قاعدة في $\mathcal{R}^3$. ($a = -b \Leftrightarrow a3 = -b3$).

## صغار minors مصفوفة

تعريف 23: لتكن $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(K)$ مصفوفة مؤلفة من $n$ سطر و $p$ عمود. ليكن $k$ عدد طبيعي أصغر من $n$ و $p$. نسمي **صغير رتبته $k$** محدد مصفوفة مربعة حجمها $k$ نحصل عليها من $A$ بعد حذف $n-k$ سطر و $p-k$ عمود.

مثال 57: لتكن المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

- صغير من المرتبة 1 هو بكل بساطة عنصر من المصفوفة $A$.
- صغير من المرتبة 2 هو محدد مصفوفة $2 \times 2$ مستخرجة من $A$. على سبيل المثال الحفاظ على السطرين 1 و 3 والعمودين 2 و 4 نحصل على المصفوفة $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. صغير من المرتبة 2 للمصفوفة $A$ هو $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6$.
- صغير من المرتبة 3 هو محدد مصفوفة $3 \times 3$ مستخرجة من $A$. على سبيل المثال الحفاظ على الأعمدة 1, 3, 4 نحصل على صغير من المرتبة 3 للمصفوفة $A$ هو $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -28$.
- لا يوجد أي صغير من المرتبة 4 (المصفوفة لا تحوي إلا 3 اسطر).

## حساب رتبة مصفوفة

مبرهنة 19: رتبة مصفوفة $A \in M_{n,p}(K)$ هو أكبر عدد طبيعي $r$ حيث يوجد صغير مصفوفة من الرتبة $r$ مستخلص من المصفوفة $A$ لا يساوي الصفر.

مثال 58: ليكن $a$ عدد حقيقي. احسب رتبة المصفوفة $A \in M_{3,4}(\mathcal{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

- من الواضح أن الرتبة لا يمكن ان تكون 4، لأن 4 أشعة من $\mathcal{R}^3$ لا يمكن أن تكون مستقلة.
- نحصل على صغار مصفوفة من المرتبة الثالثة بحذف عمود واحد. لنأخذ على سبيل المثال صغير من المرتبة 3 بحذف العمود الأول من المصفوفة ومن ثم نقوم بنشرها حسب العمود الأول:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = a - 2$$

بالتالي من أجل $a \neq 2$، صغير المصفوفة من المرتبة 3 لا يساوي الصفر، بالتالي رتبة المصفوفة $A$ هي 3.

- من أجل $a = 2$، يمكننا التحقق من أن صغار المصفوفة $A$ الأربعة جميعها تساوي الصفر:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

بالتالي في هذه الحالة، رتبة المصفوفة $A$ هي أصغر أو تساوي 2. وبما أن $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ هو صغير من الرتبة الثانية مختلف عن الصفر. إذن من أجل $a = 2$ رتبة المصفوفة $A$ هي 2.

فرضية 20: رتبة مصفوفة $A$ تساوي رتبة منقولها ${}^tA$.

## تمارين

**1.** ليكن $D=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}21&-6\\0&3\\-3&12\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&2&1\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}-7&2\\0&-1\\1&-4\end{pmatrix}$. احسب كل من $3A+2C$ و $5B-4D$. أوجد $a$ بحيث $A-aC$ يساوي المصفوفة الصفرية.

**2.** ليكن $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&2\\1&-1&0\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&1&2\end{pmatrix}$. احسب كل من $A^2, B^2, AB, BA$.

**3.** ليكن $B=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\3&1&0\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. احسب كل من $A^p, B^p$ من أجل $p\geq 0$. أثبت أن $AB=BA$. احسب $(A+B)^p$.

**4.** ليكن $B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}-1&-2\\3&4\end{pmatrix}$. احسب كل من $A^{-1}, B^{-1}, (BA)^{-1}, A^{-2}$

**5.** احسب مقلوب المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}$

**6.** اجعل المصفوفات التالية مدرجة $\begin{pmatrix}1&0&2\\1&-1&1\\2&-2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\1&4&0\\-2&-2&-3\end{pmatrix}$

**7.** ماهي رتبة الأشعة التالية بدلالة $t$ العدد الحقيقي: $\left(\begin{pmatrix}1\\t\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\1\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix}\right)$

**8.** احسب رتبة المصفوفة $\begin{pmatrix}2&4&-5&-7\\-1&3&1&2\\1&a&-2&b\end{pmatrix}$ بدلالة $a$ و $b$

**.9** حل الجمل الخطية التالية حسب قيمة الوسيط $t$: $\begin{cases} 4x-3y=t \\ 2x-y=t^2 \end{cases}$ و $\begin{cases} tx-y=1 \\ x+(t-2)y=-1 \end{cases}$

**.10** حل الجملة الخطية التالية: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_3 \quad 2x_4 = 0 \end{cases}$

**.11** حل الجملة التالية باستخدام طريقة غوص: $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + 3z = 8 \\ x + 2y - z = -3 \end{cases}$

**.12** لتكن $(e_1, e_2, e_3)$ القاعدة القانونية في $\mathcal{R}^3$. أوجد $f(x,y,z)$ حيث $f: \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$ تطبيق خطي بحيث $f(e_1) = -e_1$ و $f(e_2) = e_1 + e_3$ و $f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$.

**.13** احسب محدد المصفوفات التالية: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

**.14** احسب مساحة متوازي الأضلاع المعرف بالشعاعين $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

**.15** احسب مساحة متوازي المستطيلات المعرف بالأشعة $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**.16** بالنشر حسب سطر أو عمود، احسب المحددات التالية: $\begin{vmatrix} t & 0 & 1 & 0 \\ 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

**.17** من أجل أي قيم حقيقية لـ $a$ و $b$ تشكل الأشعة التالية قاعدة في $\mathcal{R}^3$ $\begin{pmatrix} 3a \\ 1 \\ -2b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2a \\ 1 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$

**18.** احسب رتبة المصفوفة تبعاً للقيم الحقيقية $a$ و $b$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

## مذاكرة الفصل الثامن

**العلامة العظمى: 100** **علامة النجاح: 50** **المدة: ساعة ونصف**

**السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة** **(40) درجة**

**1.** ضرب المصفوفتين $AB$ حيث $B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -3 & 1\\ 0 & 5\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -3\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$ هو:

**a.** $\begin{pmatrix}3 & -9 & 0\\ 0 & 0 & 25\end{pmatrix}$

**b.** $\begin{pmatrix}-12 & -6\\ 25 & 9\end{pmatrix}$

**c.** $\begin{pmatrix}-6 & -12\\ 9 & 25\end{pmatrix}$

**d.** غير معرف

**2.** مقلوب المصفوفة $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ هو:

**a.** $\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -5\end{pmatrix}$

**b.** $\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

**c.** $\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

**d.** غير معرف

**3.** مقلوب المصفوفة $\begin{pmatrix}4 & 1\\ 12 & 3\end{pmatrix}$ هو:

**a.** $\begin{pmatrix}-4 & 12\\ 1 & -3\end{pmatrix}$

**b.** $\begin{pmatrix}3 & -1\\ -12 & 4\end{pmatrix}$

**c.** $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 12 & 4\end{pmatrix}$

d. غير معرف

4. محدد المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. $6$
b. $-6$
c. $24$
d. $36$

5. جملة المعادلات الخطية $\begin{cases} tx - 5ty = 3 \\ 3x - 15ty = 5 \end{cases}$ لها حل واحد من أجل قيم t:

a. $t \neq 1$
b. $t \notin \{0, 1\}$
c. $t \notin \{-1,1\}$
d. $t \neq 0$

6. مصفوفة عدد عناصرها 60 عنصر، أي من الأرقام التالية لا يمكن أن يكون عدد أسطرها:

a. $20$
b. $60$
c. $30$
d. $18$

7. حل المعادلة $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$ هو:

a. $\begin{pmatrix} 20 \\ 16 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -20 \\ -16 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 20 \\ -16 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

**.8** ضرب المصفوفتين $AB$ حيث $A = (2\ 5\ -8), B = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ هو:

**.a** $12$

**.b** $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 5 & 8 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$

**.c** $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 \\ -6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

**.d** $\begin{pmatrix} -12 \\ 40 \\ -16 \end{pmatrix}$

**.9** المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & x^2 \end{pmatrix}$ تكون شاذة عندما:

**.a** $x \neq 1$

**.b** $x \not\subset \{0, 1\}$

**.c** $x \not\subset \{-1,1\}$

**.d** $x \neq 0$

**.10** مجموع المصفوفتين $(2 \quad 1)$ و $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ هو:

**.a** غير معرف

**.b** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

**.c** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

**.d** $(5)$

**السؤال الثاني: أجب بصح أو خطأ** **(30) درجة**

**.1** المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ لها مقلوب صح أو خطأ

**.2** المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ لها مقلوب صح أو خطأ

**.3** جملة المعادلات الخطية $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - 2y = 9 \end{cases}$ لها حل واحد صح أو خطأ

4. جملة المعادلات الخطية $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3x - 3y = 6 \end{cases}$ ليس لها حلول — صح أو خطأ

5. جملة المعادلات الخطية $\begin{cases} x - y = 1 \\ 4x - 4y = 5 \end{cases}$ لها عدد لانهائي من الحلول — صح أو خطأ

6. المعادلة $x + (\ln\pi)y + (\sqrt{\pi})z = 2$ هي خطية — صح أو خطأ

7. رتبة المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ هي 3 — صح أو خطأ

8. مساحة متوازي الأضلاع المحدد بالشعاعين $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ هو 5 — صح أو خطأ

9. مساحة متوازي الأضلاع المحدد بالشعاعين $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ هو 24 — صح أو خطأ

10. المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & b^2 \end{pmatrix}$ لها دوما مقلوب مهما كانت قيمة كل من a و b — صح أو خطأ

**السؤال الثالث:** **(15) درجات**

أوجد مصفوفة التطبيق الخطي $f: \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$ المعرف ب $f(x, y, z) = (y+z, x+z, x+y)$. بالنسبة للقاعدة $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ في المنطلق والقاعدة القانونية $\mathcal{B}' = \{e_1, e_2, e_3\}$ في المستقر:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

الحل:

$$f(f_1) = f(1,1,1) = (2,2,2) = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

بالتالي الشعاع الأول من المصفوفة $Mat\mathcal{B},\mathcal{B}'(f)$ هو $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$f(f_2) = f(1,1,0) = (1,1,2) = 1e_1 + 1e_2 + 2e_3$$

بالتالي الشعاع الأول من المصفوفة $Mat\mathcal{B},\mathcal{B}'(f)$ هو $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$f(f_3) = f(1,0,0) = (0,1,1) = 0e_1 + 1e_2 + 1e_3$$

بالتالي الشعاع الأول من المصفوفة $Mat\mathcal{B},\mathcal{B}'(f)$ هو $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. وهكذا فإن:

$$Mat\mathcal{B},\mathcal{B}'(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**السؤال الرابع:** **(15) درجات**

حل جملة المعادلات الخطية

$$\begin{cases} x & & +2z & = & 7 \\ & -y & & = & -2 \\ x & +y & +z & = & 6 \end{cases}$$

الحل:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

وأن: $det\ A\ = 1$ $\quad det\ A_1\ = 1$ $\quad det\ A_2\ = 2$ $\quad det\ A_{\ 3} = 3$

بالتالي:. $z = \frac{\det A_3}{detA} = \frac{3}{1} = 3$ $\quad y = \frac{\det A_{\ 1}}{detA} = \frac{2}{1}$ $\quad x = \frac{\det A_1}{detA} = \frac{1}{1} = 1$

## الإجابات الصحيحة

السؤال الأول:

| رقم التمرين | الإجابة الصحيحة |
|---|---|
| 1. | (c) |
| 2. | (b) |
| 3. | (d) |
| 4. | (a) |
| 5. | (b) |
| 6. | (d) |
| 7. | (b) |
| 8. | (a) |
| 9. | (b) |
| 10. | (a) |

السؤال الثاني:

| رقم التمرين | الإجابة الصحيحة |
|---|---|
| 1. | خطأ |
| 2. | صح |
| 3. | صح |
| 4. | خطأ |
| 5. | خطأ |
| 6. | صح |
| 7. | خطأ |
| 8. | صح |
| 9. | صح |
| 10. | صح |