البرامج الخطية الوسيطية (Parametric linear programming)

تابع الهدف في البرنامج الخطي معطى بشكل وسيطي

لنأخذ البرنامج الخطي التالي:

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i = 1,\dots,m \\ x_j \ge 0, & j = 1,\dots,n \end{cases} \qquad \text{(LP)}$$

لنفترض بأن $c_j = c_j^{'} + \lambda c_j^{"} \quad -\infty < \lambda < +\infty,\ j = 1,2,\dots,n$، عندئذ نجد

$$\max z(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} (c_j^{'} + \lambda c_j^{"}) x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i = 1,\dots,m \\ x_j \ge 0, & j = 1,\dots,n \end{cases} \qquad \text{(PLP)}$$

يرتبط الحل المثالي لـ (PLP) بقيمة الوسيط λ. يمكن الملاحظة ببساطة بأنه يمكن تقسيم مجال تغير الوسيط λ إلى عدد محدود من المجالات ، يتطابق كل مجال من المجالات مع حل مثالي مختلف. تسمى هذه المجالات بمجالات الاستقرار.

لنفترض بأنه يوجد حل مثالي محدود $\tilde{x}(\lambda_0)$ للبرنامج الخطي LP من أجل القيمة $\lambda = \lambda_0$. يتطابق هذا الحل المثالي مع جدول السمبلكس النهائي حيث جميع القيم $c_j - z_j$ سالبة أو صفرية او

$$z_j = \sum_i a_{ij} c_i \quad \text{و} \quad c_j = c_j^{'} + \lambda_0 c_j^{"} \quad -\infty < \lambda_0 < +\infty,\ j = 1,2,\dots,n$$

$$c_j^{'} + \lambda_0 c_j^{"} - \sum_i a_{ij} c_i^{'} - \lambda_0 \sum_i a_{ij} c_i^{"} \le 0 \quad -\infty < \lambda_0 < +\infty,\ j = 1,2,\dots,n$$

$$\lambda_0 (c_j^{''} - \sum_i a_{ij} c_i^{''}) + (c_j^{'} - \sum_i a_{ij} c_i^{'}) \le 0 \quad -\infty < \lambda_0 < +\infty,\ j = 1,2,...,n$$

يبقى الحل $\tilde{x}(\lambda_0)$ مثالي من أجل جميع قيم $c_j(\lambda)$ بحيث أن تبقى القيم $c_j - z_j$ سالبة من أجل كل λ بحيث أن

$$\lambda \le l_j = -\frac{c_j^{'} - \sum_i a_{ij} c_i^{'}}{c_j^{''} - \sum_i a_{ij} c_i^{''}} \ \forall j \in \{1,2,...,n\} \textit{ such that } c_j^{''} - \sum_i a_{ij} c_i^{''} > 0$$

نرمز بـ l_j^+ للقيم l_j المعرفة سابقاً

$$\lambda \ge l_j = -\frac{c_j^{'} - \sum_i a_{ij} c_i^{'}}{c_j^{''} - \sum_i a_{ij} c_i^{''}} \ \forall j \in \{1,2,...,n\} \textit{ such that } c_j^{''} - \sum_i a_{ij} c_i^{''} < 0$$

نرمز بـ l_j^- للقيم l_j المعرفة سابقاً

ليكن $l_0^+ = \min_j l_j^+$ و $l_0^- = \max_j l_j^-$.

تبقى $\tilde{x}(\lambda_0)$ مثالية من أجل قيم λ بين l_0^- و l_0^+. يدعى المجال $[l_0^-, l_0^+]$ بمجال إستقرار الحل $\tilde{x}(\lambda_0)$، و هذا المجال غير خال كونه يحتوي على الأقل λ_0.

ملاحظة. في حالة تقليل LP ، يتم استبدال القيم $c_j - z_j$ بالقيم $z_j - c_j$

قيم الجانب الأيمن من القيود في البرنامج الخطي معطاة بشكل وسيطي

لنأخذ البرنامج الخطي التالي:

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i^{'} + \lambda\, b_i^{''}, \quad i = 1,\dots,m, \lambda \ real \ \ parameter \\ x_j \ge 0, \quad j = 1,\dots,n \end{cases} \qquad \text{(LP)}$$

باستخدام مفهوم الترافق، يمكن رد هذه المسألة إلى مسألة تابع الهدف معطى بشكل وسيطي

يعطى البرنامج المرافق لـ LP على الشكل التالي:

$$\min w = \sum_{i=1}^{m} (b_i^{'} + \lambda\, b_i^{''}) y_i \qquad (\lambda \ real \ \ parameter)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j = 1,\dots,n, \\ y_i \ge 0, \quad i = 1,\dots,m \end{cases}$$

و هذا برنامج خطي فيه تابع الهدف معطى بشكل وسيطي و يحل كما في الحالة السابقة

البرامج الخطية الوسيطية (أمثلة)

مثال 1. لنأخذ البرنامج الخطي الوسيطي التالي:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + (3-\lambda)x_2 \\ st \quad & x_1 + x_2 \le 14 \\ & -2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ & 2x_1 - x_2 \le 12 \\ & x_1, x_2, \lambda \ge 0 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + (3-\lambda)x_2 \\ st \quad & x_1 + x_2 + t_1 = 14 \\ & -2x_1 + 3x_2 + t_2 = 12 \\ & 2x_1 - x_2 + t_3 = 12 \\ & x_1, x_2, t_1, t_2, t_3, \lambda \ge 0 \end{aligned}$$

1) إذا كان $\lambda = 0$ فإن جدول السمبلكس النهائي يعطى كما يلي:

max			1	3	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
x_1	1	6	1	0	3/5	-1/5	0
x_2	3	8	0	1	2/5	1/5	0
t_3	0	8	0	0	-4/5	3/5	1
		-30	0	0	-9/5	-2/5	0

الحل المثالي للمسألة هو

$x_1 = 6, x_2 = 8, z = 30$

2) إذا كان $\lambda > 0$ فإن جدول السمبلكس يعطى كما يلي:

max			1	$3-3\lambda$	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
x_1	1	6	1	0	3/5	-1/5	0
x_2	$3-3\lambda$	8	0	1	2/5	1/5	0
$\leftarrow$ t_3	0	8	0	0	-4/5	**3/5**	1
		$-30+24\lambda$	0	0	$-9/5+6\lambda/5$	$-2/5+3\lambda/5$ $\uparrow$	0

الحل المثالي للمسألة هو $x_1 = 6, x_2 = 8$

يبقى هذا الحل مثالياً من أجل جميع قيم λ التي تحقق الشروط التالية

$$-9/5 + 6\lambda/5 \le 0 \Rightarrow \lambda \le 3/2$$
$$-2/5 + 3\lambda/5 \le 0 \Rightarrow \lambda \le 2/3$$

يدعى المجال $0 \le \lambda \le 2/3$ أو $I_1 = [0, 2/3]$ بمجال الاستقرار

إذاً الحل $x_1 = 6, x_2 = 8$ يبقى مثالياً من أجل جميع قيم $\lambda \in [0, 2/3]$ ، $z = 30 - 24\lambda$

3) من أجل $\lambda > 2/3$ عندئذ جدول السمبلكس يعطى كالتالي:

max			1	$3-3\lambda$	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
x_1	1	26/3	1	0	1/3	0	1/3
x_2	$3-3\lambda$	16/3	0	1	**2/3**	0	-1/3
t_2	0	40/3	0	0	-4/3	1	5/3
		$-74/3+16\lambda$	0	0	$-7/3+2\lambda$	0	$2/3-\lambda$

الحل $x_1 = 26/3, x_2 = 16/3$ يبقى مثالياً من أجل جميع قيم λ التي تحقق الشروط التالية:

$$-7/3 + 2\lambda \le 0 \Rightarrow \lambda \le 7/6$$
$$2/3 - \lambda \le 0 \Rightarrow \lambda \ge 2/3$$

يعطى مجال الاستقرار بـ $I_2 = [2/3, 7/6]$

إذاً الحل $x_1 = 26/3, x_2 = 16/3$ يبقى مثالياً من أجل جميع قيم $\lambda \in [2/3, 7/6]$ ، $z = 74/3 - 16\lambda$

4) من أجل $\lambda > 7/6$ عندئذ جدول السمبلكس يعطى كالتالي:

max			1	$3-3\lambda$	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
x_1	1	6	1	-1/2	0	0	1/2
t_1	0	8	0	3/2	1	0	-1/2
t_2	0	24	0	2	0	1	1
		-6	0	$7/2-3\lambda$	0	0	-1/2

الحل $x_1 = 6, x_2 = 0$ يبقى مثالياً من أجل جميع قيم λ التي تحقق الشروط التالية:

$$7/2 - 3\lambda \le 0 \Rightarrow \lambda \ge 7/6$$

يعطى مجال الاستقرار بـ $I_3 = [7/6, \infty[$

إذاً الحل $x_1 = 6, x_2 = 0$ يبقى مثالياً من أجل جميع قيم $\lambda \in [7/6, \infty[$ ، $z = 6$

مثال 2. لنأخذ البرنامج الخطي الوسيطي التالي:

$$\begin{aligned} \max z_1 &= x_1 + 3x_2 \\ st \quad & x_1 + x_2 \le 14 \\ & -2x_1 + 3x_2 \le 12 + 5\lambda \\ & 2x_1 - x_2 \le 12 - 10\lambda \\ & x_1, x_2, \lambda \ge 0 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \min z_2 &= 14y_1 + (12+5\lambda)y_2 + (12-10\lambda)y_3 \\ st \quad & y_1 - 2y_2 + 2y_3 - u_1 = 1 \\ & y_1 + 3y_2 - y_3 - u_2 = 3 \\ & y_1, y_2, y_3, u_1, u_2, \lambda \ge 0 \end{aligned}$$

1) إذا كان $\lambda = 0$ فإن جدول السمبلكس النهائي يعطى كما يلي:

min			14	12	12	0	0
B	c_B	b	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2
y_1	14	9/5	1	0	4/5	-3/5	-2/5
y_2	12	2/5	0	1	-3/5	1/5	-1/5
		30	0	0	-8	-6	-8

يعطى الحل المثالي كما يلي:

$$y_1 = 9/5, y_2 = 2/5, y_3 = 0,\ x_1 = 6, x_2 = 8, z = 30$$

2) إذا كان $\lambda > 0$ فإن جدول السمبلكس يعطى كما يلي:

min			14	$12+5\lambda$	$12-10\lambda$	0	0
B	c_B	b	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2
← y_1	14	9/5	1	0	**4/5**	-3/5	-2/5
y_2	$12+5\lambda$	2/5	0	1	-3/5	1/5	-1/5
		$30+2\lambda$	0	0	$-8+7\lambda$ ↑	$-6+\lambda$	$-8-\lambda$

$-8+7\lambda \le 0$
$-6+\lambda \le 0$
$-8-\lambda \le 0$

من ذلك ينتج

$0 \le \lambda \le 8/7$, $I_1 = [0,8/7]$

الحل $y_1 = 9/5, y_2 = 2/5, y_3 = 0, x_1 = 6-\lambda, x_2 = 8+\lambda$ يبقى مثالياً من أجل جميع قيم λ التي تحقق $\lambda \in [0,8/7]$ ، $z = 30+2\lambda$,

3) إذا كان $\lambda > 8/7$ فإن جدول السمبلكس يعطى كما يلي:

min			14	$12+5\lambda$	$12-10\lambda$	0	0
B	c_B	b	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2
y_3	$12-10\lambda$	9/4	5/4	0	1	-3/4	-1/2
y_2	$12+5\lambda$	7/4	3/4	1	0	-1/4	-1/2
		$48-55\lambda/4$	$10-35\lambda/4$	0	0	$-12+25\lambda/4$	$-12+5\lambda/2$

$10-35\lambda/4 \le 0$
$-12+25\lambda/4 \le 0$
$-12-5\lambda/2 \le 0$

و منه ينتج

$8/7 \le \lambda \le 48/25$, $I_2 = [8/7,48/25]$

الحل $y_1 = 0, y_2 = 7/4, y_3 = 9/4, x_1 = 12-25\lambda/4, x_2 = 12-5\lambda/2$ يبقى مثالياً من أجل جميع قيم λ التي تحقق

$\lambda \in [8/7,48/25]$ ، $z = 48-55\lambda/4$

4) إذا كان $\lambda > 48/25$ فإن

$$-12 + 25\lambda/4 \geq 0$$

و جميع القيم في جدول السمبلكس السابق في نفس العمود سالبة و منه نستنتج بأن مسألة المرافق غير محدودة و بالتالي المسألة الأولية متعارضة أو غير ممكنة

مسائل

أوجد الحلول المثالية للبرامج الخطية الوسيطية التالية:

1.

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 + (1-\lambda)x_2 \\ st \quad & 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2, \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \max z &= (5-\lambda)x_1 + 7x_2 \\ st \quad & x_1 + x_2 \geq 6 \\ & x_1 \geq 4 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2, \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \max z &= (0.5+\lambda)x_1 + x_2 \\ st \quad & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1, x_2, \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \min z &= -(1-\lambda)x_1 + x_2 \\ st \quad & 2x_1 - x_2 \geq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \geq -2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2, \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \max z &= (2+\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 \\ st \quad & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0, -4 \leq \lambda \leq 4 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \min z &= (3+\lambda)x_1 + (2-\lambda)x_2 \\ st \quad & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ & x_1 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0, -2 \leq \lambda \leq 3 \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 3x_2 \\ st \quad & x_1 \leq 4 \\ & x_1 + x_2 \leq 5\lambda \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 + \lambda \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2, \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} \min z &= 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ st \quad & -x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -5 + \lambda \\ & -x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 - 2\lambda \\ & -x_2 - 2x_3 \leq -3\lambda \\ & x_1, x_2, x_3, \lambda \geq 0 \end{aligned}$$