أنظمة العد، العمليات الحسابية، والرموز الرقمية

كلمات مفتاحية Keywords

الخانة ذات الوزن الأدنى LSB، الخانة ذات الوزن الأعلى M5B، الكلمة الإثنانية Byte، العدد العشري المرمز إثنانياً BCD، الترميز الحرفي–الرقمي Alphanumeric، الترميز أسكي ASCII، التماثل Parity، الترميز المعتمد على باقي القسمة في الحقل (2) Cyclic Redendancy Code.

الملخص Abstract

نظام العد الإثنائي والترميز الرقمي من الأمور الأساسية في أجهزة الكمبيوتر وفي نظم الإلكترونيات الرقمية. ندرس في هذا الفصل نظام العد الإثنائي وعلاقته بأنظمة عد أخرى مثل نظام العد العشري. كما ندرس العمليات الحسابية في نظام العد الإثناني التي تفيدنا في فهم عمل أجهزة الكمبيوتر والأنواع الأخرى العديدة من النظم الرقمية. يجري أيضاً تغطية الترميز الرقمي (Digital Codes) مثل النظام العشري المرمز إثنانياً (Binary Coded Decimal)، وترميز غري (Gray Code)، وترميز أسكي (ASCII Code). ويعرض هذا الفصل أخيراً لتصحيح الأخطاء باستعمال التماثل الزوجي أو الفردي (Odd–Even Parity) في حالة الخطأ الوحيد، والترميز المعتمد على باقي القسمة في الحقل (2) (Cyclic Redundancy Code) في حالة الأخطاء المتعددة .

الأهداف التعليمية للفصل الثاني ILO2

يهدف هذا الفصل إلى تمكين الطالب من فهم مبدأ أنظمة العد وخاصة نظام العد العشري ونظام العد الإثناني وتمكينه من إجراء العمليات الحسابية في النظام الإثناني، وباستعمال المتمم الإثناني للأعداد الإثنانية، وفهم بعض الكودات (الرموز) الرقمية، وطرق كشف الأخطاء باستعمال التماثل الزوجي أو الفردي، وباستعمال الترميز المعتمد على باقي القسمة في الحقل (2).

مخرجات الفصل الثاني ILO2

فهم أنظمة العد العشري والإثناني والعمليات الحسابية في النظام الإثناني، وباستعمال المتمم الإثناني، وفهم بعض الكودات (الرموز) الرقمية، وطرق كشف الأخطاء.

الفهرس Contents

1. نظام العد العشري Decimal Numbers

يعتمد نظام العد العشري كغيره من أنظمة العد على الخانات الموزونة وفقاً لأساس نظام العد (Radix). أساس نظام العد العشري هو العدد (10)، لأنه يتضمن عشرة أرقام (Digits) مختلفة هي:

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

يبين الشكل 1.2 مبدأ أوزان الخانات الصحيحة والكسرية، ومثالاً على عدد حقيقي في نظام العد العشري.

...	1000	100	10	1	.	0.1	0.01	0.001	...
...	10^3	10^2	10^1	10^0	.	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	...
		7	6	5	.	3	2		

الشكل 1.2: مبدأ أوزان الخانات الصحيحة والكسرية ومثال على عدد حقيقي في نظام العد العشري.

يسمى الجزء الموجود على يسار الفاصلة العشرية بالجزء الصحيح من العدد (Whole part or Integer part)، ويسمى الجزء الموجود على يمين الفاصلة العشرية بالجزء العشري أو بالجزء الكسري من العدد (Fractional part). الخانة الأولى للجزء الصحيح من العدد العشري والتي تقع على يسار الفاصلة العشرية (Decimal point)، وزنها (10^0 = 1)، وتسمى خانة الآحاد. والخانة الثانية للجزء الصحيح من العدد، والتي تقع على يسار الخانة الأولى، وزنها (10^1= 10)، وتسمى خانة العشرات، وهكذا... أما خانة الجزأ الكسري للعدد العشري التي تقع مباشرة على يمين الفاصلة العشرية، وزنها (10^{-1} = 0.1)، ووزن الخانة الثانية للجزء الكسري من العدد، والتي تقع على يمين الخانة الأولى، (10^{-2} = 0.01)، وهكذا...

فمثلاً العدد الحقيقي (765.32) المعطى في الشكل 1.2 يساوي إلى:

$$(7\times100)+(6\times10)+(5\times1).(3\times0.1)+(2\times0.01)=$$
$$(700)+(60)+(5).(0.3)+(0.02)=765.32$$

2. نظام العد الإثناني Binary Numbers

يعتمد نظام العد الإثناني كغيره من أنظمة العد على الخانات الموزونة وفقاً لأساس نظام العد. أساس نظام العد الإثناني هو (2)، لأنه يتضمن رقمان (Two Digits) فقط هما:

1	0

يبين الشكل 2.2 مبدأ أوزان الخانات الصحيحة والكسرية ومثالاً على عدد حقيقي في نظام العد الإثناني.

…	8	4	2	1	.	0.5	0.25	0.125	…
…	2^3	2^2	2^1	2^0	.	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	…
		1	0	1	.	1	1		

الشكل 2.2: مبدأ أوزان الخانات الصحيحة والكسرية ومثال على عدد حقيقي في نظام العد الإثناني.

يسمى الجزء الموجود على يسار الفاصلة الإثنانية بالجزء الصحيح من العدد (Whole part or Integer part)، ويسمى الجزء الموجود على يمين الفاصلة الإثنانية بالجزء الكسري من العدد (Fractional part). الخانة الأولى للجزء الصحيح من العدد الإثناني والتي تقع على يسار الفاصلة الإثنانية (Binary point)، وزنها ($2^0 = 1$)، وتسمى الخانة الأقل وزناً (Low Significant Bit). والخانة الثانية للجزء الصحيح من العدد، والتي تقع على يسار الخانة الأولى، وزنها ($2^1 = 2$)، وتسمى الخانة التي تقع على أقصى اليسار الخانة الأكثر وزناً (Most Significant Bit)، وهكذا... أما خانة الجزء الكسري للعدد الإثناني التي تقع مباشرة على يمين الفاصلة الإثنانية، وزنها ($2^{-1} = 0.5$)، ووزن الخانة الثانية للجزء الكسري من العدد، والتي تقع على يمين الخانة الأولى، ($2^{-2} = 0.25$)، وهكذا...

فمثلاً العدد الحقيقي (101.11) المعطى في الشكل 2.2 يساوي إلى:

$$(1\times 4)+(0\times 2)+(1\times 1).(1\times 0.5)+(1\times 0.25)=$$
$$(4)+(0)+(1).(0.5)+(0.25)=5.75_{10}$$

يبين الشكل 3.2 العد الإثناني لتتابع الأعداد من (0) إلى (15)، والأعداد المقابلة له في النظام العشري.

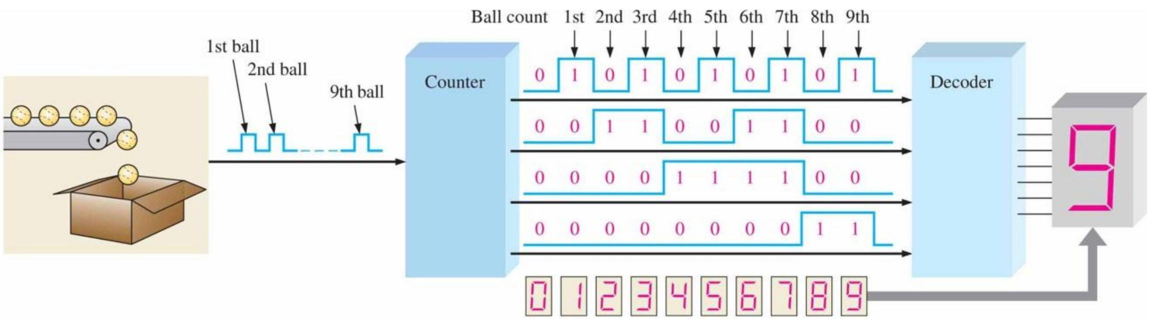
نظام العد العشري		نظام العد الإثناني			
10	1	8	4	2	1
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1
0	2	0	0	1	0
0	3	0	0	1	1
0	4	0	1	0	0
0	5	0	1	0	1
0	6	0	1	1	0
0	7	0	1	1	1
0	8	1	0	0	0
0	9	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	1	1
1	2	1	1	0	0
1	3	1	1	0	1
1	4	1	1	1	0
1	5	1	1	1	1

الشكل 3.2: جدول يوضح العد الإثناني من (0) إلى (15) والأعداد العشرية المقابلة.

مثال على العد الإثناني

يساعدنا تعلم العد في النظام الإثناني على فهم أسس عمل الدارات الرقمية، التي يمكن استعمالها لعد الأحداث، مثل عد المواد على خطوط التجميع، وعد العمليات في الكمبيوتر. دعونا نأخذ مثالا بسيطا على عد كرات التنس القادمة على سير متحرك والتي نرغب في تجميعها في علب كرتونية خاصة. نفترض أننا نرغب في وضع كل تسع كرات في علبة واحدة.

يقوم العداد المبين في الشكل 4.2 بعد النبضات الآتية من الحساس الذي يكتشف مرور الكرة ويعطي تتابعاً من المستويات المنطقية على كل واحد من مخارجه الأربعة المتوازية.



الشكل 4.2: مثال يوضح العد الإثناني من (0) إلى (9).

تمثل كل مجموعة من المستويات المنطقية عدداً إثنانياً بأربع خانات (المستوى المنطقي العالي= 1 والمنخفض = 0)، كما هو مبين. يتلقى مفكك الترميز هذا التتابع المنطقي، ويترجم كل مجموعة مكونة من أربع خانات، ويحولها إلى رقم عشري مكافىء يعرض على وحدة الإظهار السباعية. عندما يصل العداد إلى القيمة الإثنانية (1001)، يكون قد عد تسعاً من كرات التنس، ويظهر العدد (9) على وحدة الإظهار السباعية. وتوضع علبة جديدة تحت الناقل، ثم يعود العداد الى حالة الصفر (0000)، وتبدأ عملية جديدة. (استعملنا في هذا المثال العدد 9 فقط لنستعمل وحدة إظهار سباعية واحدة بهدف التبسيط.)

3. التحويل من النظام العشري إلى الإثناني وبالعكس Decimal (Binary) to Binary (Decimal) Conversion

التحويل من نظام العد الإثناني إلى نظام العد العشري

يمكن إيجاد العدد العشري المكافىء لعدد إثناني بجمع أوزان خانات الأخير التي قيمتها (1).

المثال 1.2

حول العدد الصحيح الإثناني (1 0 1 1 0 1 1) إلى عدد صحيح عشري مكافيء.

الحل

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & & & & & & & & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1_2 & = & 64+ & 32+ & 8+ & 4+ & 1 & = & 109_{10} \end{array}$$

المثال 2.2

حول العدد الكسري الإثناني ($0.\ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 1_2$) إلى عدد كسري عشري مكافيء.

الحل

$$\begin{array}{cccccl} & 0.5 & 0.25 & 0.125 & 0.0625 & \\ 0. & 1 & 1 & 0 & 1_2 = & (1\times 0.5)+\ (1\times 0.25)+\ (0\times 0.125)+\ (1\times 0.0625)=\ 0.6875_{10} \end{array}$$

التحويل من نظام العد العشري إلى نظام العد الإثناني

توجد طريقتان لتحويل عدد عشري إلى عدد إثناني: طريقة جمع أوزان الخانات في حالتي العدد الصحيح أو الكسري، وطريقة التقسيم المتتالي على العدد (2) – وهو أساس نظام العد الإثناني – في حالة العدد الصحيح، والضرب المتتالي بالعدد (2) في حالة العدد الكسري.

المثال 3.2

حول العدد الصحيح العشري (58) إلى عدد صحيح إثناني باستعمال طريقة جمع أوزان الخانات.

الحل

نكتب وزن العدد الإثناني (1) للخانة الأولى ثم ضعف وزن الخانة الأولى (2) كوزن للخانة الثانية، ثم ضعف وزن الخانة الثانية (4) كوزن للخانة الثالثة إلى أن نصل إلى عدد أكبر أو يساوي العدد العشري المطلوب تحويله إلى عدد إثناني والعدد الأخير هنا هو (64). نقارن العدد العشري (58) مع وزن الخانة الأكثر وزناً (64)، إذا كان العدد أكبر أويساوي وزن الخانة نضع (1) تحت هذه الخانة ونطرح وزن الخانة هذه من العدد الأصلي (هنا هذه الحالة غير

محققة). وإذا كان العدد الأصلي أصغر من وزن الخانة المعني (هذه الحالة محققة) نضع (0) تحت هذه الخانة، ونقارن العدد الأصلي أو العدد الباقي (هنا العدد الأصلي) مع وزن الخانة التالية (32) والواقعة على يمين الخانة الأكثر وزناً، بما أن العدد (58) أكبر من وزن الخانة (32) نضع (1) تحت الخانة المعنية التي وزنها (32) ونطرح هذا الوزن من العدد الأصلي (58) فنحصل على باقي الطرح ($58-32=26$). نقارن العدد الباقي (26) مع وزن الخانة التالية (16)، بما أنه أكبر منه نضع (1) تحت الخانة المعنية (16) ونطرح وزنها مع آخر باقي ($26-16=10$)، فيكون الباقي الجديد (10). نقارن العدد الباقي (10) مع وزن الخانة التالية (8)، بماأنه أكبر منه نضع (1) تحت الخانة المعنية (8)، ونطرح وزنها مع آخر باقي ($10-8=2$)، فيكون الباقي الجديد (2). نقارن العدد الباقي (2) مع وزن الخانة التالية (4)، بماأنه أصغر منه نضع (0) تحت الخانة المعنية (4). نقارن العدد الباقي (2) مع وزن الخانة التالية (2)، بماأنه يساويه نضع (1) تحت الخانة المعنية (2)، ونطرح وزنها منه ($2-2=0$)، فيكون الباقي الجديد (0). وأخيراً نقارن هذا الباقي مع وزن الخانة التالية والأخيرة فنجده أصغر منه، نضع صفراً تحت هذه الخانة فنحصل على العدد الإثناني المكافىء للعدد العشري المطلوب تحويله.

$$\begin{array}{ccccccc} 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0_2 = 0+32+16+8+0+2+0=58_{10} \end{array}$$

المثال 4.2

حول العدد الكسري العشري (0.58) إلى عدد صحيح إثناني بدقة خمس خانات بعد الفاصلة الإثنانية باستعمال طريقة جمع أوزان الخانات.

الحل

نكتب وزن العدد الإثناني ($\frac{1}{2}=0.5$) للخانة الأولى، التي تقع غلى يمين الفاصلة الإثنانية مباشرة، ثم نصف وزن الخانة الأولى ($\frac{0.5}{2}=0.25$) كوزن للخانة الثانية، ثم نصف وزن الخانة الثانية ($\frac{0.25}{2}=0.125$) كوزن للخانة الثالثة إلى أن نصل إلى الخانة الخامسة، وهي الدقة المطلوبة في تمثيل العدد الكسري. نقارن العدد الكسري (0.58) مع وزن الخانة الأولى الأكثر وزناً (0.5)، إذا كان العدد الكسري العشري أكبر أويساوي وزن الخانة المعنية نضع (1) تحت هذه الخانة ونطرح وزن الخانة هذه من العدد الأصلي (هنا هذه الحالة محققة) ($0.58-0.5=0.08$). وإذا كان العدد الأصلي أصغر من وزن الخانة المعنية (هذه الحالة غير محققة هنا) نضع (0) تحت هذه الخانة، ونقارن العدد الأصلي أو العدد الباقي (هنا العدد الباقي) مع وزن الخانة التالية (0.25) والواقعة على يمين الخانة الأكثر وزناً، بما أن العدد الباقي (0.08) أصغر من وزن الخانة (0.25)، نضع (0) تحت هذه الخانة المعنية. نقارن الباقي مع وزن الخانة التالية (0.125) فنجد أنه أصغر منه، نضع (0) تحت هذه الخانة المعنية.نقارن الباقي مع وزن الخانة التالية (0.0625) فنجد أنه أكبر منه، نضع (1) تحت هذه الخانة المعنية، ونطرح وزنها من الباقي ($0.08-0.0625=0.0175$). وأخيراً نقارن هذا الباقي مع وزن الخانة التالية والأخيرة (0.03125) فنجده أصغر منه، نضع صفراً تحت هذه الخانة فنحصل على العدد الإثناني المكافىء للعدد العشري المطلوب تحويله.

$$\begin{array}{lcccccl} & 0.5 & 0.25 & 0.125 & 0.0625 & 0.03125 & \\ 0. & 1 & 0 & 0 & 1 & 0_2 & = 0.5+\ 0+\ 0+\ 0.0625+\ 0=\ 0.5625_{10} \simeq\ 0.58_{10} \end{array}$$

المثال 5.2

حول العدد الصحيح العشري (58) إلى عدد صحيح إثناني باستعمال طريقة القسمة المتتالية على العدد (2).

الحل

نجري عملية القسمة الأولى $(58 \div 2 = 29, remainder: 0)$، نضع قيمة الباقي (0) تحت الخانة الأولى الأقل وزناً.

ونجري عملية القسمة الثانية $(29 \div 2 = 14, remainder: 1)$، نضع قيمة الباقي (1) تحت الخانة الثانية، وهي الخانة التي تقع غلى يسار الخانة الأولى. ثم نكرر هذه العملية حتى تصبح نتيجة القسمة صفراً فتنتهي عملية التحويل.

لاحظ أننا نحصل على نفس النتيجة التي حصلنا عليها باستعمال الطريقة الأولى (طريقة جمع أوزان الخانات).

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
58 & \div & 2 & = & 29 & remainder: & 0 & - & - & - & - & - & - & - \\
29 & \div & 2 & = & 14 & remainder: & 1 & - & - & - & - & - & - & \\
14 & \div & 2 & = & 7 & remainder: & 0 & - & - & - & - & - & & \\
7 & \div & 2 & = & 3 & remainder: & 1 & - & - & - & - & & & \\
3 & \div & 2 & = & 1 & remainder: & 1 & - & - & - & & & & \\
1 & \div & 2 & = & 0 & remainder: & 1 & - & - & & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & & & & stop & & & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & MSB & & & & & LSB
\end{array}$$

المثال 6.2

حول العدد الكسري العشري (0.58) إلى عدد صحيح إثناني بدقة خمس خانات بعد الفاصلة الإثنانية باستعمال طريقة الضرب المتتالي بالعدد (2).

الحل

نجري عملية الضرب الأولى $(0.58 \times 2 = 1.16, whole: 1)$، نضع قيمة الجزء الصحيح لنتيجة الضرب (1) تحت الخانة الأولى الأكثر وزناً. ونجري عملية الضرب الثانية بين الجزء الكسري لناتج عملية الضرب السابقة والعدد (2)، فنحصل على $(0.16 \times 2 = 0.32, whole: 0)$، نضع قيمة الجزء الصحيح لنتيجة الضرب (0) تحت الخانة الثانية، وهي الخانة التي تقع على يمين الخانة الأولى. ثم نكرر هذه العملية عدداً من المرات بعدد خانات الدقة المطلوبة.

لاحظ أننا نحصل على نفس النتيجة التي حصلنا عليها باستعمال الطريقة الأولى (طريقة جمع أوزان الخانات).

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & & & MSB & & & & LSB \\
 & & & & & & & 0. & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & & & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
0.58 & \times & 2 & = & 1.16 & whole: & 1 & - & - & & & & \\
0.16 & \times & 2 & = & 0.32 & whole: & 0 & - & - & - & & & \\
0.32 & \times & 2 & = & 0.64 & whole: & 0 & - & - & - & - & & \\
0.64 & \times & 2 & = & 1.28 & whole: & 1 & - & - & - & - & - & \\
0.28 & \times & 2 & = & 0.56 & whole: & 0 & - & - & - & - & - & -
\end{array}$$

4. العمليات الحسابية في النظام الإثنائي Binary Arithmetic

تستعمل الحواسيب الرقمية والعديد من الأنواع الأخرى للأنظمة الرقمية النظام الإثنائي لإجراء العمليات الحسابية. لفهم العمليات الحسابية في الأنظمة الرقمية، علينا أن نفهم أساسيات الجمع والطرح والضرب والقسمة في نظام العد الإثنائي.

الجمع في النظام الإثنائي

نبين فيما يلي قواعد الجمع الأربعة لرقمين (بيتين) في النظام الإثنائي.

A	+	B	=	Cout	Σ
0	+	0	=	0	0
0	+	1	=	0	1
1	+	0	=	0	1
1	+	1	=	1	0

نلاحظ في السطر الأخير أن $(1+1=2)$ ويكتب في النظام الإثنائي $(1\,0)$. وفي السطر الأول $(0+0=0)$، ويكتب في النظام الإثنائي $(0\,0)$. ونتيجة الجمع في السطرين المتبقيين $(0+1=1, 1+0=1)$ ويكتب في النظام الإثنائي $(0\,1)$. نلاحظ أن عملية الجمع على خانة واحدة في النظام الإثنائي تحتاج إلى خانتين لكتابة النتيجة.

عندما يكون هناك منقول قيمته (1) من مرحلة سابقة، نحتاج إلى جمع ثلاث خانات في المرتبة الواحدة (الرقمان A, B، والمنقول من المرتبة الأدنى). يبين الجدول التالي جمع ثلاثة بيتات:

A	+	B	+	Cin	=	Cout	Σ
0	+	0	+	0	=	0	0
0	+	0	+	1	=	0	1
0	+	1	+	0	=	0	1
0	+	1	+	1	=	1	0
1	+	0	+	0	=	0	1
1	+	0	+	1	=	1	0
1	+	1	+	0	=	1	0
1	+	1	+	1	=	1	1

المثال 7.2

اجمع الأعداد التالية في النظام الإثناني:

$$\begin{array}{ll} & 8\,4\,2\,1 \quad 8\,4\,2\,1 \\ (a) & 1\,0\,0\,1 + 1\,0\,0\,1 \quad \Leftrightarrow 9+9=18 \\ (b) & 1\,0\,1\,1 + 1\,1\,1\,1 \quad \Leftrightarrow 11+15=26 \\ (c) & 0\,0\,1\,1 + 0\,1\,1\,1 \quad \Leftrightarrow 3+7=10 \\ (d) & 1\,0\,1\,1 + 0\,1\,0\,1 \quad \Leftrightarrow 11+5=16 \end{array}$$

الحل

$(a)\,1\,0\,0\,1 + 1\,0\,0\,1 \quad \Leftrightarrow 9+9=18 \qquad (b)\,1\,0\,1\,1 + 1\,1\,1\,1 \quad \Leftrightarrow 11+15=26$

$$\begin{array}{ccccc} 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ & & & 1 & \\ & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \underline{+} & \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \Leftrightarrow 16+\ 2=\ 18 \qquad \begin{array}{ccccc} 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & \\ & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \underline{+} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\ 16+\ 8+\ 2=\ 26$$

$(c)\,0\,0\,1\,1 + 0\,1\,1\,1 \quad \Leftrightarrow 3+7=10 \qquad (d)\,1\,0\,1\,1 + 0\,1\,0\,1 \quad \Leftrightarrow 11+5=16$

$$\begin{array}{ccccc} 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & \\ & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \underline{+} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} \\ & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \Leftrightarrow 8+\ 2=\ 10 \qquad \begin{array}{ccccc} 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & \\ & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \underline{+} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Leftrightarrow 16$$

الطرح في النظام الإثناني

نبين فيما يلي قواعد الطرح الأربع لرقمين (بيتين) في النظام الإثناني.

A	-	B	=	Borrow	D
0	-	0	=	0	0
1	-	0	=	0	1
1	-	1	=	0	0
10	-	1	=	1	1

نلاحظ في السطر الأخير أن $(0-1=?)$ غير ممكن لذلك نستعير (1) من المرتبة الأعلى، فتكون قيمته (2) في المرتبة الحالية بالتالي لدينا $(2-1=1)$، أي تكون نتيجة الطرح $(D=1)$، ولدينا مستلف من المرتبة الأعلى أي $(Borrow=1)$. وفي السطر الأول $(0-0=0)$، ويكتب في النظام الإثناني على مرتبتين $(0\,0)$. ونتيجة الطرح في

السطر الثاني $(1-0=1)$ ويكتب في النظام الإثناني على مرتبتين $(0\,1)$. ونتيجة الطرح في السطر الثالث ($(1-1=0)$ ويكتب في النظام الإثناني على مرتبتين $(0\,0)$.

المثال 8.2

اطرح الأعداد التالية في النظام الإثناني:

$$\begin{array}{l}
\quad 8\,4\,2\,1 \quad 8\,4\,2\,1 \\
(a)\,1\,0\,0\,1-0\,1\,1\,1 \quad \Leftrightarrow 9-7=2 \\
(b)\,1\,1\,1\,1-1\,0\,0\,1 \quad \Leftrightarrow 15-9=6 \\
(c)\,1\,0\,0\,0-0\,1\,1\,0 \quad \Leftrightarrow 8-6=2 \\
(d)\,1\,1\,0\,0-0\,1\,1\,1 \quad \Leftrightarrow 12-7=5
\end{array}$$

الحل

$(a)\,1\,0\,0\,1-0\,1\,1\,1 \quad \Leftrightarrow 9-7=2$ $\quad (b)\,1\,1\,1\,1-1\,0\,0\,1 \quad \Leftrightarrow 15-9=6$

$$\begin{array}{cccccccc}
16 & 8 & 4 & 2 & 1 & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & 0 & \cancel{2} & 2 & & & \\
 & \cancel{1} & 0 & 0 & 1 & & \\
- & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & & \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & \Leftrightarrow & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & 8 & 4 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
- & \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} & & \\
 & 0 & 1 & 1 & 0 & \Leftrightarrow & 4+\ 2=\ 6
\end{array}$$

$(c)\,1\,0\,0\,0-0\,1\,1\,0 \quad \Leftrightarrow 8-6=2$ $\quad (d)\,1\,1\,0\,0-0\,1\,1\,1 \quad \Leftrightarrow 12-7=5$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 8 & 4 & 2 & 1 & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & 0 & \cancel{2} & 2 & & & \\
 & \cancel{1} & 0 & 0 & 0 & & \\
- & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{0} & & \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & \Leftrightarrow & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & 8 & 4 & 2 & 1 & & \\
 & & 2 & 1 & & & \\
 & 0 & 0 & \cancel{2} & 2 & & \\
 & \cancel{1} & \cancel{1} & 0 & 0 & & \\
- & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & & \\
 & 0 & 1 & 0 & 1 & \Leftrightarrow & 4+\ 1=\ 5
\end{array}$$

الضرب في النظام الإثناني

نبين فيما يلي قواعد الضرب الأربع لرقمين (بيتين) في النظام الإثناني.

A	×	B	=	Π
0	×	0	=	0
0	×	1	=	0
1	×	0	=	0
1	×	1	=	1

يجري تنفيذ الضرب في النظام الإثناني بنفس الطريقة التي يجري بها في النظام العشري. فهي تنطوي على تشكيل الجداءات الجزئية، وإزاحة كل جداء جزئي مرتبة إلى اليسار بعد الجداء الجزئي الأول، ومن ثم جمع كافة الجداءات الجزئية.

المثال 8.2

أجر عمليات الضرب التالية في النظام الإثناني:

$$\begin{array}{ll}
\quad 8\,4\,2\,1 \quad 8\,4\,2\,1 & \\
(a)\, 1\,0\,0\,1 \times 0\,1\,1\,1 & \Leftrightarrow 9 \times 7 = 63 \\
(b)\, 1\,1\,1\,1 \times 1\,0\,0\,1 & \Leftrightarrow 15 \times 9 = 135 \\
(c)\, 1\,0\,0\,0 \times 0\,1\,1\,0 & \Leftrightarrow 8 \times 6 = 48 \\
(d)\, 1\,1\,0\,0 \times 0\,1\,1\,1 & \Leftrightarrow 12 \times 7 = 84
\end{array}$$

الحل

$$(a)\, 1\,0\,0\,1 \times 0\,1\,1\,1 \quad \Leftrightarrow 9 \times 7 = 63$$

$$\begin{array}{cccccccccl}
128 & 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & & \\
 & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & & \\
 & & & \underline{\times} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & & \\
 & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & & \\
 & & & 1 & 0 & 0 & 1 & & & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 1 & & & & \\
\underline{+} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & & & & & \\
 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \Leftrightarrow & 32+\ 16+\ 8+\ 4+\ 2+\ 1=\ 63
\end{array}$$

$$(b)\, 1\,1\,1\,1 \times 1\,0\,0\,1 \quad \Leftrightarrow 15 \times 9 = 135$$

$$\begin{array}{cccccccccl}
128 & 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & & \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
 & & & \underline{\times} & \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} & & \\
 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
\underline{+} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & & & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \Leftrightarrow & 128+\ 4+\ 2+\ 1=\ 135
\end{array}$$

$(c)\, 1\,0\,0\,0 \times 0\,1\,1\,0 \quad \Leftrightarrow 8 \times 6 = 48$

$$
\begin{array}{cccccccccl}
128 & 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & & \\
 & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & \underline{\times} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{0} & & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
\underline{+} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & & & & & \\
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Leftrightarrow & 32 + \ 16 = \ 48
\end{array}
$$

$(d)\, 1\,1\,0\,0 \times 0\,1\,1\,1 \quad \Leftrightarrow 12 \times 7 = 84$

$$
\begin{array}{cccccccccl}
128 & 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & & \\
 & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & & \\
 & & & \underline{\times} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & & \\
 & 1 & 1 & 1 & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & & \\
 & & & 1 & 1 & 0 & 0 & & & \\
 & & 1 & 1 & 0 & 0 & & & & \\
\underline{+} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & & & & & \\
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \Leftrightarrow & 64 + \ 16 + \ 4 = \ 84
\end{array}
$$

القسمة في النظام الإثناني

يجري تنفيذ عملية القسمة في النظام الإثناني بنفس الطريقة التي يجري بها في النظام العشري.

المثال 9.2

يطلب إجراء عمليات القسمة التالية في النظام الإثناني:

$$
\begin{array}{ll}
\quad 8\,4\,2\,1 & \\
(a)\, 1\,0\,0\,1 \div 1\,0 \ \Leftrightarrow 9 \div 2 = 4 & remainder : 1 \\
(b)\, 1\,1\,1\,1 \div 1\,0\,0 \Leftrightarrow 15 \div 4 = 3 & remainder : 3 \\
(c)\, 1\,0\,0\,0 \div 1\,0 \Leftrightarrow 8 \div 2 = 4 & remainder : 0 \\
(d)\, 1\,1\,0\,0 \div 1\,0\,1 \Leftrightarrow 12 \div 5 = 2 & remainder : 2
\end{array}
$$

الحل

$$(a\quad \begin{array}{rrrrrr} qotient & & \dot{1} & & \ddot{0} & \dddot{0} \\ & & & & \uparrow & \uparrow \\ \dot{1}\,\dot{0} & \big) & \dot{1} & \overline{\dot{0}} & \overline{\ddot{0}} & \overline{\dddot{1}} \\ & & \underline{-\dot{1}} & \underline{\dot{0}} & \downarrow & \downarrow \\ remainder & & \dot{0} & \dot{0} & \ddot{0} & \dddot{1} \end{array}$$

$$(b\quad \begin{array}{rrrrrr} qotient & & \dot{1} & \ddot{1} & & \\ \dot{1}\,\dot{0}\,\dot{0} & \big) & \dot{1} & \overline{\dot{1}} & \overline{\dot{1}} & \overline{1} \\ & & \underline{-\dot{1}} & \underline{\dot{0}} & \underline{\dot{0}} & \downarrow \\ & & \dot{0} & \ddot{1} & \ddot{1} & \ddot{1} \\ & & & \underline{-\ddot{1}} & \underline{\ddot{0}} & \underline{\ddot{0}} \\ remainder & & & \ddot{0} & \ddot{1} & \ddot{1} \end{array}$$

$$(c\quad \begin{array}{rrrrrr} qotient & & \dot{1} & & \ddot{0} & \dddot{0} \\ & & & & \uparrow & \uparrow \\ \dot{1}\,\dot{0} & \big) & \dot{1} & \overline{\dot{0}} & \overline{\ddot{0}} & \overline{\dddot{0}} \\ & & \underline{-\dot{1}} & \underline{\dot{0}} & \downarrow & \downarrow \\ remainder & & \dot{0} & \dot{0} & \ddot{0} & \dddot{0} \end{array}$$

$$(d\quad \begin{array}{rrrrrr} qotient & & \dot{1} & & & \ddot{0} \\ & & & \dot{0} & \dot{2} & \uparrow \\ \dot{1}\,\dot{0}\,\dot{1} & \big) & \dot{1} & \overline{\cancel{\dot{1}}} & \overline{\dot{0}} & \overline{\ddot{0}} \\ & & \underline{-\dot{1}} & \underline{\dot{0}} & \dot{1} & \downarrow \\ remainder & & \dot{0} & \dot{0} & \dot{1} & \ddot{0} \end{array}$$

5. المتمم الأحادي والإثناني للأعداد الإثنانية 1’s and 2’s Complements of Binary Numbers

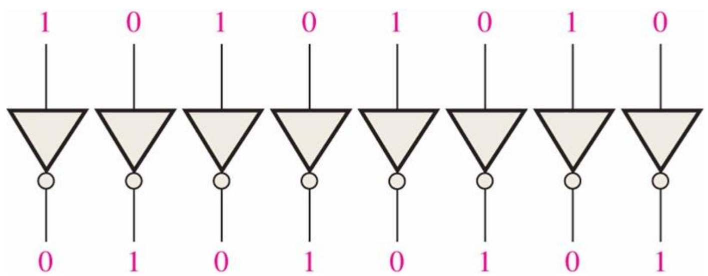
تكمن أهمية المتمم الأحادي والإثناني للأعداد الإثنانية في تمثيل الأعداد السالبة. يستعمل الحاسب أكثر ما يستعمل في عملياته الحسابية الأعداد الممثلة بالمتمم الإثناني. أما تمثيل الأعداد بالمتمم الأحادي، فهو معبر للوصول إلى المتمم الإثناني.

المتمم الأحادي

المتمم الأحادي لرقم في نظام عد ما هو الرقم المتمم لأكبر رقم فيه. ففي حالة النظام العشري المتمم الأحادي للرقم (5) هو الرقم $(4 = 5 - 9)$. وفي نظام العد الإثناني متمم الرقم (1) هو الرقم $(0 = 1 - 1)$،
ومتمم الرقم (0) هو الرقم $(1 = 0 - 1)$. لإيجاد المتمم الأحادي لعدد إثناني يتم تغيير كل (1) فيه إلى (0)، وكل (0) إلى (1). فمثلاً:

$$\begin{array}{cccccccccl} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \textit{Binary number} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & & \textit{1's complement} \end{array}$$

أبسط طريقة للحصول على المتمم الأحادي لعدد إثناني عملياً هي استعمال العواكس المنطقية كما هو موضح في الشكل 5.2.



الشكل 5.2 : مثال على استعمال العواكس المنطقية للحصول على المتمم الأحادي لعدد إثناني.

المتمم الإثناني

المتمم الإثناني لعدد هو المتمم الأحادي لعدد إثناني مضافاً إليه واحداً. أي:

$$2's\ complement = \left(1's\ complement\right) + 1$$

يُستعمل المتمم الإثناني في الكمبيوتر لتمثيل الأعداد الموجبة والسالبة (الأعداد الجبرية أو الأعداد بإشارة)، عوضاً عن استعمال المتمم الأحادي لأن هذا الأخير يعطي للصفر قيمتين ممكنتين. يوضح الجدول التالي تمثيلاً لبعض الأعداد في النظام الإثناني الممثلة على أربعة بتات وتمثيلاً للمتممين الأحادي والإثناني لها.

العشري المقابل للمتمم الإثناني	المتمم الإثناني للعدد الإثناني	العشري المقابل للمتمم الأحادي	المتمم الأحادي للعدد الإثناني	العشري المقابل لنظام العد الإثناني	نظام العد الإثناني
+0	0 0 0 0	+0	0 0 0 0	0	0 0 0 0
+1	0 0 0 1	+1	0 0 0 1	1	0 0 0 1
+2	0 0 1 0	+2	0 0 1 0	2	0 0 1 0
+3	0 0 1 1	+3	0 0 1 1	3	0 0 1 1
+4	0 1 0 0	+4	0 1 0 0	4	0 1 0 0
+5	0 1 0 1	+5	0 1 0 1	5	0 1 0 1
+6	0 1 1 0	+6	0 1 1 0	6	0 1 1 0
+7	0 1 1 1	+7	0 1 1 1	7	0 1 1 1
−8	1 0 0 0	−7	1 0 0 0	8	1 0 0 0
−7	1 0 0 1	−6	1 0 0 1	9	1 0 0 1
−6	1 0 1 0	−5	1 0 1 0	10	1 0 1 0
−5	1 0 1 1	−4	1 0 1 1	11	1 0 1 1
−4	1 1 0 0	−3	1 1 0 0	12	1 1 0 0
−3	1 1 0 1	−2	1 1 0 1	13	1 1 0 1
−2	1 1 1 0	−1	1 1 1 0	14	1 1 1 0
−1	1 1 1 1	−0	1 1 1 1	15	1 1 1 1

نلاحظ من الجدول أعلاه أن الخانة الأكثر وزناً في حالتي تمثيل الأعداد بالمتمم الأحادي والمتمم الإثناني تمثل إشارة العدد، إذا كانت هذه الخانة (0) يكون العدد موجباً، وإذا كانت (1) يكون العدد سالباً. نلاحظ أن تمثيل الأعداد الموجبة من (+0) إلى (+7) هي نفسها في الحالات الثلاث، وتسمى الأعداد الموجبة في حالتي التمثيل بالمتمم الأحادي والمتمم الإثناني (True form)، وتسمى الأعداد السالبة في حالتي التمثيل بالمتمم الأحادي والمتمم الإثناني

(Complement form). للحصول على العدد (-5) في حالة التمثيل بالمتمم الأحادي، نأخذ العدد $(+5)$ ونوجد المتمم الأحادي له، والعكس بالعكس. أي:

$$\begin{array}{llll} 8\ 4\ \ 2\ 1 & & & \\ 0\ 1\ \ 0\ 1 & +5 & & \\ \downarrow\ \downarrow\ \ \downarrow\ \downarrow & 1\text{'s } complement & & \\ 1\ 0\ \ 1\ 0 & & & \\ -(4+0+1)= & -5 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 8\ 4\ \ 2\ 1 & \\ 1\ 0\ \ 1\ 0 & -(4+1=5) \\ \downarrow\ \downarrow\ \ \downarrow\ \downarrow & 1\text{'s } complement \\ 0\ 1\ \ 0\ 1 & \\ +(4+0+1)= & +5 \end{array}$$

للحصول على العدد (-5) في حالة التمثيل بالمتمم الإثناني، نأخذ العدد $(+5)$ ونوجد المتمم الأحادي له، ثم نجمع له (1). والعكس بالعكس. أي:

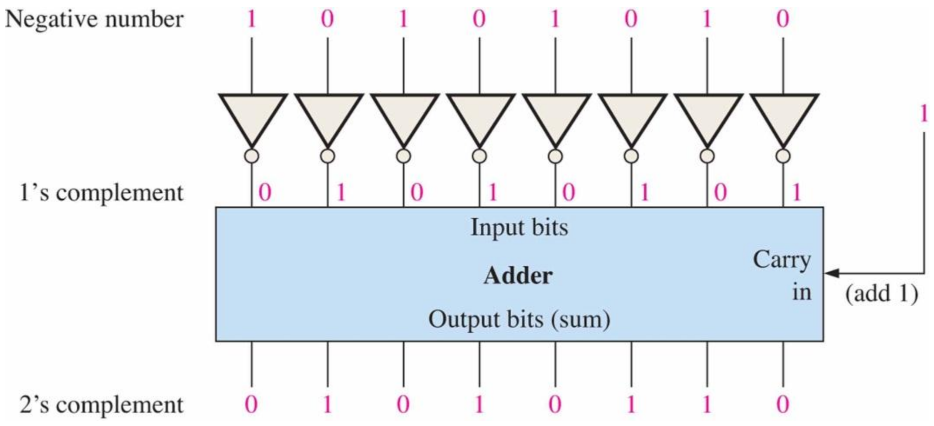
$$\begin{array}{rll} 8421 & & \\ 0101 & +5 & \\ 1010 & 1\text{'s } complement + & \\ +0001 & 1= & \\ =1011 & 2\text{'s } complement & (-8+3=-5) \end{array} \qquad \begin{array}{rll} 8421 & & \\ 1011 & -8+3=-5 & \\ 0100 & 1\text{'s } complement + & \\ +0001 & 1= & \\ =0101 & 2\text{'s } complement & (+4+1=+5) \end{array}$$

للحصول على المتمم الإثناني عموماً، بطريقة أخرى، ننظر إلى الخانة الأقل وزناً، إذا كانت (1) نأخذها كما هي ثم نعكس بقية الخانات التي تقع على يسارها. أما إذا كانت (0) ويليها (1) أوعدد من الخانات (0) ويليها (1)، نأخذ هذه الخانات كما هي ثم نعكس بقية الخانات التي على يسار الخانة (1) المسبوقة بِ (0) أي:

$$\begin{array}{ll} 16\,8\,4\,2\,1 & \\ 0\,1\,0\,1\,\boxed{1} & +8+3=+11 \\ \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow & 2\text{'s } complement + \\ 1\,0\,1\,0\,1 & -16+5=-11 \end{array} \quad \begin{array}{ll} 16\,8\,4\,2\,1 & \\ 0\,1\,0\,\boxed{1}\,\boxed{0} & +8+2=+10 \\ \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow & 2\text{'s } complement + \\ 1\,0\,1\,1\,0 & -16+6=-10 \end{array} \quad \begin{array}{ll} 16\,8\,4\,2\,1 & \\ 0\,1\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{0} & +8+4=+12 \\ \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow & 2\text{'s } complement + \\ 1\,0\,1\,0\,0 & -16+4=-12 \end{array}$$

لإيجاد العدد العشري المقابل لعدد ممثل بالمتمم الإثناني، ننظر إلى الخانة الأكثر وزناً، إذا كانت (0) يكون العدد موجباً ويجري استنتاجه بنفس الطريقة التي نوجد فيها المكافئ العشري لعدد ممثل بالنظام الإثناني. وإذا كانت (1) يكون العدد سالباً ويجري استنتاجه بأخذ وزن الخانة الأكثر وزناً كقيمة سالبة والخانات المتبقية التي قيمة كل منها (1) كقيم موجبة وبأخذ المحصلة نحصل على العدد العشري السالب المقابل. فمثلاً قيمة العدد $(1\ 1\ 0\ 1\ 1)$ الممثل بالمتمم الإثناني بالنظام العشري هو $(-8+2+1=-5)$.

للحصول على المتمم الإثناني عملياً، نعكس العدد، فنحصل على المتمم الأحادي له ثم نجمعه مع (1) الموجود على مدخل المنقول في الدخل (carry in) لدارة الجامع، كما هو موضح في الشكل 6.2.



الشكل 6.2: مثال على كيفية الحصول عملياً على المتمم الإثناني لعدد.

6. العمليات الحسابية باستعمال المتمم الإثناني Arithmetic Operations with Signed umbers

نظراً لأن الأعداد المرمزة بالمتمم الإثناني هي الأكثر استعمالاً في أجهزة الكمبيوتر والأنظمة المستندة إلى المعالجات الصغرية، نعرض للعمليات الحسابية الأربع المعروفة (الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة) عليها.

عملية الجمع (Addition)

يسمى العددان المطلوب جمعهما على التوالي، المجموع (addend) والمجموع إليه (augend)، وتسمى نتيجة الجمع (sum). في عملية الجمع، هناك أربع احتمالات هي:

1. العددان موجبان
2. عدد أول موجب طويلته أكبر من طوبلة العدد الآخر السالب
3. عدد أول سالب طويلته أكبر من طوبلة العدد الآخر الموجب
4. العددان سالبان

سنجري عمليات الجمع على أعداد ممثلة بالمتمم الإثناني وعلى ثمانية خانات أو الأعداد بإشارة بثمانية خانات (8–bit signed numbers)، وستكون النتيجة ممثلة على ثمانية خانات.

العددان موجبان والنتيجة موجبة

	128	64	32	16	8	4	2	1		
					1					
	0	0	0	0	0	1	1	1	*addend*	7
+	0	0	0	0	0	1	0	0	*augend*	+ 4
	0	0	0	0	1	0	1	1	*sum*	11

عدد أول موجب طويلته أكبر من طوبلة العدد الآخر السالب والنتيجة موجبة

	128	64	32	16	8	4	2	1			
	1	1	1	1	1	1					
	0	0	0	0	1	1	1	1	*addend*		+15
+	1	1	1	1	0	1	0	0	*augend*	+	−6
$\cancel{1}$	0	0	0	0	1	0	0	1	*sum*		+9

عدد أول سالب طويلته أكبر من طوبلة العدد الآخر الموجب والنتيجة سالبة

	128	64	32	16	8	4	2	1			
	0	0	0	1	0	0	0	0	*addend*		+16
+	1	1	1	0	1	0	0	0	*augend*	+	−24
	1	1	1	1	1	0	0	0	*sum*		−8

العددان سالبان والنتيجة سالبة

	128	64	32	16	8	4	2	1			
	1	1	1	1	1	1	1				
	1	1	1	1	1	0	1	1	*addend*		−5
+	1	1	1	1	0	1	1	1	*augend*	+	−9
$\cancel{1}$	1	1	1	1	0	0	1	0	*sum*		−14

يجري تجاهل بت الحامل النهائي. نتيجة الجمع سالبة، ومكتوبة بصيغة المتمم الإثناني. يجري في الكمبيوتر تخزين الأرقام السالبة في شكل صيغة المتمم الإثناني لذلك، فإن عملية الجمع كما رأينا هي عملية بسيطة جدا: يجري جمع العددين وتجاهل بت الحامل النهائي.

شرط الطفح (Overflow Condition) عندما يتجاوز ناتج جمع عددين عدد البتات المطلوبة لتمثيلهما، تحصل ما يسمى بالطفح ويمكن تحسس الطفح عن طريق بت إشارة النتيجة غير الصحيح: فالطفح يمكن أن يحدث فقط عندما يُجمع عددان موجبان وتكون النتيجة سالبة، أو عندما يُجمع عددان سالبان وتكون النتيجة موجبة. وفيما يلي مثال لتوضيح شرط الطفح.

		128	64	32	16	8	4	2	1			
		1	1	1	1							
		0	1	1	1	1	1	0	1	*addend*		+125
	+	0	0	1	1	1	0	1	0	*augend*	+	+58
Sign incorrect		$\boxed{1}$	0	1	1	0	1	1	1	*Magnitude incorrect* (−73)		+183

يتطلب تمثيل ناتج الجمع (183) ثمانية بتات. وبما أن هناك سبعة بتات فقط مخصصة للطويلة لكل من العددين والنتيجة (وبت واحد للإشارة)، فإن هناك طفح يشير إليه بت الإشارة السالب (1).

الأعداد المجموعة مثنى مثنى دعونا ننظر إلى جمع سلسلة من الأعداد، فالجمع يجري مثنى مثنى. ويمكن تحقيق ذلك عن طريق جمع أول عددين، ثم جمع العدد الثالث إلى ناتج جمع العددين الأوليين، فجمع العدد الرابع لهذه النتيجة، وهلم جرا. هذه هي طريقة جمع الكمبيوتر لسلسلة أعداد. والمثال التالي يوضح ذلك.

المثال 10.2

اجمع الأعداد الجبرية التالية:

$$0\ 1\ 0\ 0\_\ 0\ 1\ 0\ 0 + 0\ 0\ 0\ 1\_\ 1\ 0\ 1\ 1 + 0\ 0\ 0\ 0\_\ 1\ 1\ 1\ 0$$
$$+\ 0\ 0\ 0\ 1\_\ 0\ 0\ 1\ 0$$

		1			128	64	32	16	8	4	2	1	
		6	8		0	1	0	0	0	1	0	0	
±		2	7	±	0	0	0	1	1	0	1	1	*Add 1st two numbers*
							1	1	1	1			
		9	5		0	1	0	1	1	1	1	1	*First sum*
±	_	1	4	±	0	0	0	0	1	1	1	0	*Add 3rd number*
		1											
	1	0	9		0	1	1	0	1	1	0	1	*2nd sum*
±	_	1	8	±	0	0	0	1	0	0	1	0	*Add 4th number*
	1	2	7		0	1	1	1	1	1	1	1	*Final sum*

عملية الطرح (Subtraction)

عملية الطرح هي حالة خاصة من عملية الجمع. على سبيل المثال، طرح العدد $(+6)$، ويسمى المطروح (Subtrahend) من العدد $(+9)$، ويسمى المطروح منه (Minuend)، يكافيء جمع (-6) مع $(+9)$. أي أن تحويل عملية الطرح إلى عملية جمع تقتضي تغير إشارة العدد المطروح وجمعه مع المطروح منه. وتسمى نتيجة الطرح بالفرق (Difference).

يجري تغيير إشارة العدد موجباً كان أم سالباً بأخذ المنمم الإثناني له.

على سبيل المثال، عند أخذ المتمم الإثناني للعدد الموجب (0000_0100) أي $(+4)$، نحصل على العدد السالب (1111_1100) أي (-4).

وكمثال آخر، عند أخذ المتمم الإثناني للعدد السالب (1110_1101) أي (-19)، نحصل على العدد الموجب (0001_0011) أي $(+19)$.

لطرح عددين جبريين نأخذ المنمم الإثناني للمطروح ونجمعه مع المطروح منه، ونهمل الحامل (المنقول) النهائي.

يوضح المثال 11.2 عملية الطرح هذه.

المثال 11.2

اطرح الأعداد التالية باستعمال المتمم الإثناني:

$(a)\ \ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ -\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1$

$(b)\ \ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ -\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1$

(c) 1 1 1 0 0 1 1 1 – 0 0 0 1 0 0 1 1

(d) 1 0 0 0 1 0 0 0 – 1 1 1 0 0 0 1 0

الحل

$8 - 3 = 8 + (-3) = 5$

		128	64	32	16	8	4	2	1	
(a)		1	1	1	1					
		0	0	0	0	1	0	0	0	*Minuend* (+8)
±	_	1	1	1	1	1	1	0	1	*2's complement of subtrahend* (–3)
Discard	$\cancel{1}$	0	0	0	0	0	1	0	1	*Difference* (+5)

$12 - (-9) = 12 + 9 = 21$

		128	64	32	16	8	4	2	1	
(b)					1					
		0	0	0	0	1	1	0	0	*Minuend* (+12)
±	_	0	0	0	0	1	0	0	1	*2's complement of subtrahend* (+9)
		0	0	0	1	0	1	0	1	*Difference* (+21)

$-25 - (+19) = -25 + (-19) = -44$

		128	64	32	16	8	4	2	1	
(c)		1	1		1	1	1	1		
		1	1	1	0	0	1	1	1	*Minuend* (–25)
±	_	1	1	1	0	1	1	0	1	*2's complement of subtrahend* (–19)
Discard	$\cancel{1}$	1	1	0	1	0	1	0	0	*Difference* (–44)

$-25 - (+19) = -25 + (-19) = -44$

		128	64	32	16	8	4	2	1	
(d)				1	1					
		1	0	0	0	1	0	0	0	*Minuend* (–120)
±	_	0	0	0	1	1	1	1	0	*2's complement of subtrahend* (+30)
		1	0	1	0	0	1	1	0	*Difference* (–90)

عملية الضرب (Multiplication)

تسمى الأعداد في عملية الضرب المضروب به (Multiplicand)، والضارب (Multiplier) والجداء (Product). وهذا ما يوضحه المثال التالي.

		8	*Multiplicand*
$\times$		$\underline{3}$	*Multiplier*
	2	4	*Product*

تستعمل معظم أجهزة الكمبيوتر عملية الجمع لتحقيق ضرب الأعداد. وكما مر معنا، فإن عملية الجمع تستعمل أيضاً لتحقيق عملية الطرح. دعونا الآن نرى كيف يجري تنفيذ عملية الضرب باستعمال الجمع.

الجمع المباشر والجداءات الجزئية هما طريقتان رئيستان لتنفيذ الضرب باستعمال الجمع. في حالة طريقة الجمع المباشر ، يُجمع المضروب به عدد من المرات مساوياً إلى قيمة الضارب. لإيجاد نتيجة ضرب $(8 \times 3 = 24)$، نجمع المضروب به (8) ثلاث مرات $(8 + 8 + 8 = 24)$. وعيب هذه الطريقة هو أن عملية الجمع تصبح طويلة جدا إذا كان العدد الضارب هو عدد كبير . على سبيل المثال عملية ضرب (350×75) يقتضي جمع العدد (350) مع نفسه (75) مرة. بالمناسبة، هذا هو السبب في استخدام مصطلح مرات (Times) لتعني ضرب (Multiply).

عندما يجري ضرب عددين في نظام المتمم الإثناني، يجب أن يكون كلا من العددين موجباً. يوضح المثال التالي عملية الضرب المعتمدة على جمع عددين معاَ.

المثال 12.2

يُطلب إجراء عملية ضرب العددين الجبريين $(0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1)$ و$(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0)$ باستعمال طريقة الجمع المباشر .

الحل

بما أن العددين موجبان، فهما بالصيغة الصحيحة (true)، فالجداء سيكون موجباً. القيمة العشرية للضارب (77)، لذلك يجمع المضروب به مع نفسه أربع مرات.

	256	128	64	32	16	8	4	2	1	
		1			1	1		1		
		0	1	0	0	1	1	0	1	*1st time*
+		$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	*2nd time*
				1	1					
		1	0	0	1	1	0	1	0	*partial sum*
+		$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	*3rd time*
		1			1	1	1	1		
		1	1	1	0	0	1	1	1	*partial sum*
+		$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	*4th time*
	1	0	0	1	1	0	1	0	0	*Product*

بما أن إشارة العدد المضروب به (0)، فسوف لن يكون له أثر على النتيجة. فكل بتات النتيجة هي قيمة الجداء.
طريقة الجداءات الجزئية وربما كانت الأكثر شيوعا لأنها تعكس الطريقة اليدوية في الضرب. يجري ضرب المضروب به بكل رقم من أرقام الضارب بدءا من الرقم الأقل وزناً. وتسمى نتيجة ضرب المضروب به برقم من أرقام الضارب بالناتج الجزئي (Partial product). يزاح كل ناتج جزئي على التوالي خانة واحدة إلى اليسار، وعندما يجري الحصول على كل الجداءات الجزئية، تجمع بعضها مع بعض للحصول على الجداء النهائي. يوضح المثال التالي هذه الإجرائية.

$$
\begin{array}{cccccclllll}
 & & & 1 & 2 & & & & & \\
 & & & 2 & 3 & 9 & \textit{Multiplicand} & & & \\
 & & \underline{\times} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \textit{Multiplier} & & & \\
 & & 2 & \cancel{1} & & & & & & \\
 & & & 7 & 1 & 7 & 1st & partial & product & (3\times 293) \\
 & & 4 & 7 & 8 & & 2nd & partial & product & (2\times 293) \\
\underline{\pm} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{9} & \_ & \_ & 3rd & partial & product & (1\times 293) \\
 & 2 & 9, & 3 & 9 & 7 & Final & product & &
\end{array}
$$

تتحدد إشارة نتيجة الضرب وفقاً لإشارة المضروب به، وإشارة الضارب ووفقا للقاعدتين التاليتين:

- إذا كانت إشارتا العددين المطلوب ضربهما متماثلتين، تكون إشارة نتيجة الضرب موجبة
- وإذا كانت إشارتا العددين المطلوب ضربهما مختلفتين، تكون إشارة نتيجة الضرب سالبة

تتلخص الخطوات الرئيسة لعملية الضرب باستعمال طريقة الجداءات الجزئية بما يلي:

الخطوة 1. تحديد ما إذا كانت إشارتا المضروب به والضارب متماثلتين أم لا. وهذا ما يحدد علامة الجداء.

الخطوة 2. تغيير أي عدد سالب إلى آخر موجب. لأن معظم أجهزة الكمبيوتر تخزن الأعداد السالبة في صيغة المتمم الإثناني، والمطلوب أخذ المتمم الإثناني للعدد السالب لتحويله إلى عدد موجب.

الخطوة 3. بدءا من البت الأقل وزناً للعدد الضارب، تتولد الجداءات الجزئية. عندما يكون البت (1)، يكون الجداء الجزئي هو نفسه العدد المضروب به. وعندما يكون البت (0)، يكون الجداء الجزئي هو الصفر. يُزاح كل جداء جزئي على التتالي خانة واحدة إلى اليسار.

الخطوة 4. يُجمع كل جداء جزئي على التوالي مع المجموع السابق للجداءات الجزئية للحصول على الجداء النهائي.

الخطوة 5. إذا كان بت الإشارة للجداء المحدد في الخطوة 1 سالباً، نأخذ المتمم الإثناني للجداء. وإذا كان بت الإشارة موجباً، نترك نتيجة الجداء كما هي. ونرفق معه بت الإشارة المناسب لهذا الجداء.

المثال 13.2

يُطلب ضرب العددين الجبريين (1 1 0 0 1 0 1 0) كمضروب به و(1 0 1 0 0 0 1 1) كمضروب باستعمال طريقة الجداءات الجزئية.

الحل

الخطوة 1: بت إشارة المضروب به هي (0) و بت إشارة المضروب هي (1). بالتالي ستكون إشارة بت الجداء (1).

الخطوة 2: نأخذ المتمم الإثناني للعدد الضارب لنضعه بالقيمة المطلقة. 11000101 ---- < 00111011

الخطوتان 3 و4: تكون إجرائية الضرب على النحو المبين أدناه. لنلاحظ أن العددين المستعملين في هذه الخطوات ممثلين بالقيمة المطلقة (موجبين).

الخطوة 5: بما أن إشارة ناتج الضرب المحددة في الخطوة 1 هي (1) ، نأخذ المتمم الإثناني لنتيجة الضرب ونضيف لها بت الإشارة (1).

8192	4096	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1	
							1	0	1	0	0	1	1	*Multiplicand*
						×	0	1	1	1	0	1	1	*Multiplier*
										1	1			
							1	0	1	0	0	1	1	*1st partial product*
					±	1	0	1	0	0	1	1	_	*2nd partial product*
						1	1	1	1	1	0	0	1	*sum*
				±	0	0	0	0	0	0	0	_	_	*3rd partial product*
					1	1	1	1	1					
					0	1	1	1	1	1	0	0	1	*sum*
			±	1	0	1	0	0	1	1	_	_	_	*4th partial product*
			1	1			1	1						
				1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	*sum*
		±	1	0	1	0	0	1	1	_	_	_	_	*5th partial product*
					1	1								
		1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	*sum*
	±	1	0	1	0	0	1	1	_	_	_	_	_	*6th partial product*
	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	*sum*
±	0	0	0	0	0	0	0	_	_	_	_	_	_	*7th partial product*
	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	*Final product*
$\boxed{1}$	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	*2's complement + sign*

عملية القسمة (Division)

تسمى الأعداد في عملية القسمة المقسوم (Dividend)، والقاسم (Divisor) وناتج القسمة (Quotient)، وباقي القسمة (Remainder). وهذا موضح في عملية القسمة التالية.

$$\frac{dividend}{divisor} = quotient,\ and\ remainder$$

تنفذ عملية القسمة في أجهزة الكمبيوتر باستعمال الطرح. وبما أن عملية الطرح تجرى باستعمال دارة الجامع، فإن عملية القسمة تجرى أيضاً باستعمال دارة الجامع.

ويطلق على ناتج القسمة الحاصل (Quotient). والحاصل هو عدد مرات طرح القاسم. كما يتضح من تقسيم العدد (21) على العدد (7).

2 1	*Dividend*
− 7	1*st subtraction of divisor*
1 4	1*st partial remainder*
− 7	2*nd subtraction of divisor*
7	2*nd partial remainder*
− 7	3*rd subtraction of divisor*
0	*Zero remainder*

وفي هذا المثال البسيط، كان قد طرح القاسم من المقسوم ثلاث مرات قبل أن يصبح الباقي صفراً. ولذلك، فإن نتيجة القسمة هي (3)، وباقي القسمة هو (0).

تعتمد إشارة حاصل القسمة على إشارتي العدد المقسوم والعدد الفاسم وفقا للقاعدتين التاليتين:

- إذا كان للعددين المطلوب قسمتهما نفس الإشارة، تكون إشارة حاصل القسمة موجبة.
- إذا كانت إشارتا العددين المطلوب ضربهما مختلفتين، تكون إشارة حاصل القسمة سالبة.

ينبغي أن يكون العددان المطلوب إجراء عملية القسمة عليهما بالقيمة المطلقة.

تتلخص الخطوات الرئيسة في عملية القسمة على النحو التالي:

الخطوة 1. تحديد ما إذا كانت إشارتا المقسوم والقاسم متماثلتين أو مختلفتين. وهذا يحدد إشارة حاصل القسمة. وتهيئة حاصل القسمة على الصفر بداية.

الخطوة 2. طرح المقسوم عليه (القاسم) من المقسوم باستعمال الجمع بالمتمم الإثناني للحصول على أول باقي جزئي وإضافة (1) إلى حاصل القسمة. إذا كان هذا الباقي الجزئي موجباً ننتقل إلى الخطوة 3. وإذا كان صفرا تكتمل عملية القسمة، أما إذا كان سالباً نلغي عملية الطرح الأخيرة ونأخذ النتيجة السابقة.

الخطوة 3. طرح القاسم من المقسوم وإضافة (1) إلى حاصل القسمة. إذا كانت النتيجة موجبة، نكرر ذلك على الباقي الجزئي. وإذا كانت النتيجة صفرا أو سالبة، تكتمل عملية القسمة.

نستمر في طرح المقسوم عليه من المقسوم والباقي الجزئي حتى نحصل على باقي يساوي إلى الصفر أو باقي سالب. ثم نعد عدد مرات عمليات الطرح فيكون هو حاصل القسمة. يبين المثال التالي هذه الخطوات باستعمال عددين ممثلين على 8 بت.

المثال 13.2

يُطلب إجراء عملية قسمة العدد (0 0 1 0 0 1 1 0) على العدد (1 0 0 1 1 0 0 0).

الحل

الخطوة 1: العددان موجبان. بالتالي سيكون حاصل القسمة موجباً. والقيمة الابتدائية لحاصل القسمة (0 0 0 0 0 0 0 0).

الخطوة 2: نطرح القاسم من المقسوم باستعمال الجمع بالمتمم الإثناني (ونذكر بإهمال المنقول النهائي)

$$
\begin{array}{ccccccccccl}
 & 128 & 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 1 & & & 1 & & & & & \\
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & \textit{Dividend} \\
\underline{+} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & & \textit{2's complement of divisor} \\
\cancel{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & & \textit{Positive 1st partial remainder}
\end{array}
$$

نضيف (1) إلى حاصل القسمة:

$$0\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;0+0\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;1=0\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;1$$

الخطوة 3: نطرح القاسم من الباقي الجزئي الأول باستعمال الجمع بالمتمم الإثناني.

$$
\begin{array}{ccccccccccl}
 & 128 & 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & & & 1 & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & & \textit{1st partial remainder} \\
\underline{+} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & & \textit{2's complement of divisor} \\
\cancel{1} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \textit{Positive 2nd partial remainder}
\end{array}
$$

نضيف (1) إلى حاصل القسمة:

$$0\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;1+0\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;1=0\;0\;0\;0\;0\;0\;1\;0$$

الخطوة 4: نطرح القاسم من الباقي الجزئي الثاني باستعمال الجمع بالمتمم الإثناني.

$$
\begin{array}{ccccccccccl}
 & 128 & 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 1 & & & 1 & 1 & & & & \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & & \textit{2nd partial remainder} \\
\underline{+} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & & \textit{2's complement of divisor} \\
\cancel{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & & \textit{Positive 3rd partial remainder}
\end{array}
$$

نضيف (1) إلى حاصل القسمة:

$$0\;0\;0\;0\;0\;0\;1\;0+0\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;1=0\;0\;0\;0\;0\;0\;1\;1$$

الخطوة 5: نطرح القاسم من الباقي الجزئي الثالث باستعمال الجمع بالمتمم الإثناني.

	128	64	32	16	8	4	2	1	
	1	1	1	1	1	1	1		
	0	0	0	1	1	0	0	1	*3rd partial remainder*
+	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	*2's complement of divisor*
$\cancel{1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	*Zero remainder*

نضيف (1) إلى حاصل القسمة:

0 0 0 0 0 0 1 1+0 0 0 0 0 0 0 1=0 0 0 0 0 1 0 0

وبذلك تكون قد انتهت الإجرائية.

7. نظام العد العشري المرمز إثنانياً Binary Coded Decimal (BCD)

النظام العشري المرمز إثنانياً (BCD) هو طريقة لتمثيل كل خانة عشرية بالترميز الإثناني. هناك عشر مجموعات من الرموز في نظام الأعداد العشرية المرمزة إثنانياً (BCD)، لذلك من السهل جداً الانتقال بين النظام العشري والنظام العشري المرمز إثنانياً. لأننا نرغب أن نقرأ ونكتب في النظام العشري، ويوفر النظام العشري المرمز إثنانياً وجيهة ممتازة للأنظمة الإثنانية. ومن أمثلة هذه الوجيهات هي لوحات المفاتيح كوسائل إدخال والشاشات كوسائل إخراج وإظهار.

الترميز (8421) هو نوع من التمثيل العشري المرمز إثنانياً (BCD). يعني هذا التمثيل أن كل رقم عشري، من (0) إلى (9)، يمثل بأربعة خانات إثنانية.

تشير التسمية (8421) إلى الأوزان الإثنانية للبتات الأربعة (20، 21، 22، 23). سهولة التحويل بين الأعداد المرمزة وفق الترميز الإثناني (8421) والأعداد العشرية المألوفة هي الميزة الرئيسة لهذا الترميز. كل ما علينا فعله هو أن تتذكر عشرة مجموعات إثنانية تمثل الأرقام العشرية العشرة وفق ما هو مبين أدناه.

Decimal Digit	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
BCD	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001

باستعمال أربع خانات إثنانية، يمكن تمثيل ستة عشر رقماً (من 0000 إلى 1111) ولكن الترميز (8421) يستعمل فقط عشرة منها، تسمى الترميزات 1010، 1011، 1100، 1101، 1110، و1111، الترميزات الغير صالحة (Invalid codes).

لكتابة أي عدد عشري باستعمال الترميز (BCD)، يكتب كل رقم عشري بالصيغة الإثنانية ممثلة على (4) بت.

المثال 13.2

حول كلاً من الأعداد العشرية التالية إلى (BCD).

$(a)\,35 \quad (b)\,98 \quad (c)\,170 \quad (d)\,2469$

الحل

$$(a)\ \begin{array}{cc} 3 & 5 \\ \downarrow & \downarrow \\ 0011 & 0101 \end{array} \qquad (b)\ \begin{array}{cc} 9 & 8 \\ \downarrow & \downarrow \\ 1001 & 1000 \end{array} \qquad (c)\ \begin{array}{ccc} 1 & 7 & 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0001 & 0111 & 0000 \end{array}$$

$$(d)\ \begin{array}{cccc} 2 & 4 & 9 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0010 & 0100 & 1001 & 0110 \end{array}$$

من السهل أيضاً تحديد عدد عشري لعدد ممثل بصيغة (BCD). نبدأ من أقصى اليمين ونقسم البتات إلى مجموعات تتكون كلاً منها من أربعة بتات. ثم نكتب الرقم العشري الذي تمثله كل مجموعة.

المثال 14.2

حول كلاً من الأعداد المكتوبة بصيغة (BCD) إلى أعداد عشرية.

$(a)\,10001\_0110 \qquad (b)\,0011\_0101\_0001 \qquad (c)\,1001\_0100\_0111\_0000$

الحل

$$(a)\ \begin{array}{cc} 1000 & 0110 \\ \downarrow & \downarrow \\ 8 & 6 \end{array} \qquad (b)\ \begin{array}{ccc} 0011 & 0101 & 0001 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 5 & 1 \end{array} \qquad (c)\ \begin{array}{cccc} 1001 & 0100 & 0111 & 0000 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 9 & 4 & 7 & 0 \end{array}$$

جمع الأعداد العشرية المرمزة إثنانياً (BCD Addition)

ترميز الأعداد بصيغة (BCD) هو ترميز رقمي يمكن استعماله في العمليات الحسابية. عملية الجمع هي العملية الحسابية الأكثر أهمية لأن العمليات الحسابية الثلاث الأخرى (الطرح والضرب والقسمة) يمكن تحقيقها باستعمال عملية الجمع. نبين فيما يلي كيفية جمع عددين بصيغة (BCD):

الخطوة 1. جمع العددين الممثلين بصيغة (BCD)، وذلك باستعمال قواعد الجمع في النظام الإثناني.

الخطوة 2. إذا كان ناتج جمع مجموعتين (كل منهما 4 بت) يساوي أو أقل من (9)، تكون النتيجة رمز (BCD) صحيح (Valid code).

الخطوة 3. إذا كان ناتج جمع مجموعتين (كل منهما 4 بت) أكبر من (9) أو يوجد منقول إلى المجموعة التالية، تكون النتيجة رمز (BCD) غير صحيح ويجري إضافة (0110) إلى النتيجة لإرجاعها رمزاً صحيحاً.

المثال 15.2

يُطلب إجراء عمليات الجمع التالية بصيغة (BCD).

$(a)\,0011+0100 \qquad (b)\,0010\_0011+0001\_0101 \qquad (c)\,1000\_0110+0001\_0011$

$(d)\,0100\_0101\_0000+0100\_0001\_0111$

الحل

$$
(a)\quad
\begin{array}{cc}
 & 8\_4\_2\_1 \\
 & 0011 \\
+ & \underline{0100} \\
 & 0111
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
 & 3 \\
+ & \underline{4} \\
 & 7
\end{array}
\qquad\qquad
(b)\quad
\begin{array}{ccc}
 & 8\_4\_2\_1 & 8\_4\_2\_1 \\
 & & 111\_ \\
 & 0010 & 0011 \\
+ & \underline{0001} & \underline{0101} \\
 & 0011 & 1000
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
 & 2 & 3 \\
+ & \underline{1} & \underline{5} \\
 & 3 & 8
\end{array}
$$

$$
(c)\quad
\begin{array}{ccc}
 & 8\_4\_2\_1 & 8\_4\_2\_1 \\
 & \_\_\_\_ & 11\_\_ \\
 & 1000 & 0110 \\
+ & \underline{0001} & \underline{0011} \\
 & 1001 & 1001
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
86 \\
\underline{+13} \\
99
\end{array}
\qquad\qquad
(c)\quad
\begin{array}{cccc}
 & 8\_4\_2\_1 & 8\_4\_2\_1 & 8\_4\_2\_1 \\
 & 1\_\_\_ & \_\_1\_ & \_\_\_\_ \\
 & 0100 & 0101 & 0000 \\
+ & \underline{0100} & \underline{0001} & \underline{0111} \\
 & 1000 & 0110 & 0111
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
 & 450 \\
+ & \underline{417} \\
 & 867
\end{array}
$$

لنلاحظ أن نتيجة جمع أية مجموعة لم يتجاوز العدد (1001) والنتيجة هي رموز (BCD) صحيحة.

المثال 16.2

يُطلب إجراء عمليات الجمع التالية بصيغة (BCD).

$(a)\, 1001+0100 \qquad (b)\, 1001+1001 \qquad (c)\, 0001\_0110+0001\_0101$

$(d)\, 0110\_0111+0101\_0011$

الحل

$$
(a)\quad
\begin{array}{ccl}
 & 8\_4\_2\_1 & \\
 & \_\_\_\_ & \\
 & 1001 & \\
+ & \underline{0100} & \\
 & 1\_\_\_ & \\
1 & 1101 & \textit{Invalid BCD number } (>9) \\
+ & \underline{0110} & \qquad \textit{Add } 6 \\
0001 & 0011 & \textit{Valid BCD number} \\
\downarrow & \downarrow & \\
1 & 3 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
 & 9 \\
+ & \underline{4} \\
 & 13
\end{array}
$$

$$
(b)\quad
\begin{array}{cclc}
 & 8\_4\_2\_1 & & \\
 & \_\_1\_ & & \\
1 & 1001 & & 9 \\
+ & \underline{1001} & & +\ \underline{9} \\
 & 11\_\_ & & 18 \\
1 & 0010 & \textit{Invalid beccause of carry} & \\
+ & \underline{0110} & \textit{Add } 6 & \\
0001 & 1000 & \textit{Valid BCD number} & \\
\downarrow & \downarrow & & \\
1 & 8 & &
\end{array}
$$

$$
(c)\quad
\begin{array}{ccclll}
 & 8\_4\_2\_1 & 8\_4\_2\_1 & & & \\
 & \_\_\_\_ & 1\_\_\_ & & & \\
 & 0001 & 0110 & & & 16 \\
+ & \underline{0001} & \underline{0101} & & & +\ \underline{15} \\
 & \_\_\_1 & 11\_\_ & & & 31 \\
 & 0010 & 1011 & \textit{Right group is invalid } (>9) & \textit{Left group is valid} & \\
+ & \_ & \underline{0110} & \textit{Add } 6 \textit{ to invalid code} & \textit{Add carry } (0001) & \\
 & 0011 & 0001 & \textit{Valid BCD number} & \textit{to next group} & \\
 & \downarrow & \downarrow & & & \\
 & 3 & 1 & & &
\end{array}
$$

$$
(d)\quad
\begin{array}{cccll}
 & 8\_4\_2\_1 & 8\_4\_2\_1 & & \\
 & 1\_\_\_ & 111\_ & & \\
 & 0110 & 0111 & & 67 \\
+ & \underline{0101} & \underline{0011} & & +\ \underline{53} \\
1 & 1111 & 11\_\_ & & 120 \\
 & 1011 & 1010 & \textit{Both groups are invalid } (>9) & \\
+ & \underline{0110} & \underline{0110} & \textit{Add } 6 \textit{ to Both groups} & \\
0001 & 0010 & 0000 & \textit{Valid BCD number} & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
1 & 2 & 0 & &
\end{array}
$$

8. الترميز الرقمي Digital Codes

يُستعمل الترميز كثيراً في الأنظمة الرقمية. فالترميز (BCD) الذي درسناه لتونا هو ترميز رقمي صرف، ويوجد أنواع أخرى للترميز مثل الترميز الحرف–رقمي (Alphanumeric)، الذي يُستعمل لتمثيل الأرقام والحروف والرموز والتعليمات. سندرس هنا نوعين من الترميز يُسمى الأول ترميز غري (Gray code)، ويُسمى الآخر ترميز أسكي (ASCII code).

ترميز غري (Gray code)

لا يعتمد ترميز غري على أوزان الخانات فهو ليس ترميزاً حسابياً، وبالتالي لا توجد أوزان محددة مخصصة لموقع البت. الميزة الرئيسة الهامة لترميز غري هو تغير بت واحد عند الانتقال من ترميز إلى آخر في تتابع ما. هذه الخاصية مهمة في العديد من التطبيقات، مثل مرمز الوضع، حيث تزداد إمكانية الخطأ مع عدد تغيرات البتات بين الأرقام المجاورة.

يبين الجدول التالي ترميز غري على (4) بت للأعداد العشرية من (0) إلى (15)، ويظهر يبين الجدول أيضاً الأعداد الإثنانية المقابلة. يمكن أن يكون ترميز غري على أي عدد من البتات كما هو الحال في تمثيل الأعداد في النظام الإثناني. لنلاحظ في هذا التتابع أن بتاً واحداً يتغير في ترميز غري فمثلاً عند الانتقال من العدد (3) إلى العدد (4) يتغير ترميز غري من (0010) إلى (0110)، وفي حالة الترميز الإثناني يتغير من (0011) إلى (0100)، أي تتغير حالة ثلاثة بتات. البت الوحيد الذي يتغير في ترميز غري هو البت الثالث من اليمين، بينما تبقى بقية البتات على حالها.

Decimal	Binary	Gray Code
0	0 0 0 0	0 0 0 0
1	0 0 0 1	0 0 0 1
2	0 0 1 0	0 0 1 1
3	0 0 1 1	0 0 1 0
4	0 1 0 0	0 1 1 0
5	0 1 0 1	0 1 1 1
6	0 1 1 0	0 1 0 1
7	0 1 1 1	0 1 0 0
8	1 0 0 0	1 1 0 0
9	1 0 0 1	1 1 0 1
10	1 0 1 0	1 1 1 1
11	1 0 1 1	1 1 1 0
12	1 1 0 0	1 0 1 0
13	1 1 0 1	1 0 1 1
14	1 1 1 0	1 0 0 1
15	1 1 1 1	1 0 0 0

التحويل من الترميز الإثناني إلى الترميز غري (Binary to Gray Code Conversion)

تبين الخطوات التالية كيفية الانتقال من الترميز الإثناني إلى ترميز غري:

1. البت الموجود في أقصى اليسار لترميز غري هو نفسه البت الأكثر وزناً في الترميز الإثناني.

2. نبدأ من اليسار إلى اليمين ونجمع البتين من أقصى اليسار في الترميز الإثناني بدون باقي فنحصل على البت الثاني من أقصى اليسار في ترميز غري، نزيح خانة إلى اليمين ونكرر ذلك حتى الحصول على بت غري في أقصى اليمين.

يبين المثال التالي التحويل من الترميز الإثناني للعدد (10110) إلى ترميز غري.

$$\begin{array}{ccccccccccl} 1 & + & 0 & + & 1 & + & 1 & + & 0 & & \textit{Binary} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & & 1 & & 1 & & 0 & & 1 & & \textit{Gray} \end{array}$$

فترميز غري للعدد الإثناني (10110) هو (11101).

التحويل من الترميز غري إلى الترميز الإثناني (Gray to Code Binary Conversion)

تبين الخطوات التالية كيفية الانتقال من الترميز غري إلى الترميز الإثناني:

3. البت الأكثر وزناً في الترميز الإثناني هو نفسه البت الموجود على أقصى اليسار في ترميز غري.
4. نبدأ من اليسار إلى اليمين ونجمع بت النتيجة في الترميز الإثناني مع البت التالي في ترميز غري بدون باقي فنحصل على البت التالي في أقصى اليسار للترميز الإثناني. ونكرر ذلك حتى نحصل على آخر بت في الترميز الإثناني.

يبين المثال التالي التحويل من الترميز غري (11011) إلى الترميز الإثناني.

$$\begin{array}{ccccccccccl} 1 & & 1 & & 1 & & 0 & & 1 & & \textit{Gray} \\ \downarrow & + & \downarrow & + & \downarrow & + & \downarrow & + & \downarrow & & \\ 1 & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & \textit{Binary} \end{array}$$

الترميز الإثناني للترميز غري (11011) هو (10110).

الترميز الحرف–رقمي (Alphanumeric Codes)

كي نتمكن من التواصل، لا نحتاج فقط إلى الأرقام (Numbers) لكننا نحتاج أيضاً إلى الحروف (Letters) وبعض الرموز (Symbols). الترميز الحرف–رقمي هو ترميز يمثل الحروف والأرقام. ويشمل الكثير من هذا النوع من الترميز بالإضافة إلى الحروف والأرقام بعض الرموز والتعليمات الضرورية لنقل المعلومات.

في الحد الأدنى يشمل الترميز الحرف–رقمي (10) أرقام و (26) حرفاً أبجدياً أي ما مجموعه (36) رمزاً. يتطلب ذلك (6) بتات لتمثيل تلك الرموز، لأن (5) بتات لا تكفي لمثل هذا التمثيل $(2^5 = 32)$. يمكن تمثيل $(2^6 = 64)$ رمزاً ممكناً في (6) بتات، أي يبقى $(64 - 36 = 28)$ رمزاً ممكناً غير مستعمل. وكما أسلفنا تحتاج بعض التطبيقات إلى رموز أخرى غير الأرقام والحروف لإجراء تواصل مكتمل. نحتاج مثلاً إلى إشارات الفراغات (Spaces)، والنقاط (Periods)، والنقطتين فوق بعض (Colons)، والفواصل المنقطة (Semicolons)، وإشارات الاستفهام (Question marks)، وإلى ما هنالك من إشارات التنقيط. كما نحتاج إلى بعض التعليمات للطلب من المستقبل ماذا يفعل

بالمعلومات المستقبلة. يمكن أن نتعامل بالترميز على (6) بتات مع الأرقام العشرة ، والحروف الستة والعشرون، و (28) رمزاً آخر .

الترميز أسكي (ASCII Code)

الاختصار (ASCII) يعني الترميز المعياري الأمريكي لتبادل المعلومات (American Standard Code for Information Interchange)، وهوترميز معياري للأحرف والأرقام وإشارات التنقيط وبعض إشارات التحكم ممثل على (7) بتات، وقد اعتمد في العام (1963). يشمل هذا الترميز ترميزاً لِـ (2^7 =128) حرفاً ورمزاً. يبين الجدول أدناه هذا الترميز. الترميزات (32) الأولى هي ترميزات لحروف التحكم بالطابعات عن بعد (Teletype) والمنسقة حالياً، لذلك تستعمل هذه الترميزات في وظائف أخرى حالياً.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	NUL	SOH	STX	ETX	EOT	ENQ	ACK	BEL	BS	HT	LF	VT	FF	CR	SO	SI
1	DLE	DC1	DC2	DC3	DC4	NAK	SYN	ETB	CAN	EM	SUB	ESC	FS	GS	RS	US
2		!	"	#	$	%	&	'	(	)	*	+	,	–	.	/
3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	:	;	<	=	>	?
4	@	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
5	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	[	\	]	^	_
6	`	a	b	c	d	e	f	g	h	j	i	k	l	m	n	O
7	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	{			}	~	

كيف يُستعمل هذا الجدول؟

الترميز أسكي للحرف الصغير (h) هو تقاطع العمود (8) ممثلاً على (4) بت من أقصى اليمين، والسطر (6) ممثلاً على (3) بت ويقع على يسار الجزأ الأول أي: (110_1000).

ويمثل الكود أسكي ($3D$) أي (110_1101) الرمز ($=$).

أدخلت شركة (IBM) كود أسكي الموسع (Extended ASCII) على (8) بت، مما سمح بترميز أسكي لِ (256) حرفاً. وكان ذلك في العام (1981). وأدخل الترميز الموحد (Unicode) والممثل على (8) بايت أي ($4\times8=32\,bit$) في العام (1991)، مما سمح بتمثيل كل أبجديات العالم، ومكننا من تمثيل ($2^{32}=4,294,967,296$) حرفاً أو رمزاً.

9. كشف الخطأ نتيجة إرسال الرموز Error Detection Codes

طريقة التماثل (Parity Method)

طريقة التماثل هي طريقة لاكتشاف أخطاء الإرسال البسيطة التي تحدث على بت واحد فقط. بت التماثل (parity bit) هو بت إضافي يضاف على يسار مجموعة من البتات ليجبر عدد (1’s) الكلي ليكون زوجياً فيكون بت التماثل زوجياً (even parity) أو يجبر عدد (1’s) الكلي ليكون فردياً فيكون بت التماثل فردياً (odd parity).

يبين المثال التالي إضافة بت التماثل الفردي لكود أسكي (110_0001) و(100_0001) لكل من الحرفين (a) و(A) على التتالي. عدد الواحدات في كود أسكي للحرف (a) فردي لذلك يكون بت التماثل الفردي المضاف على يسار الكود (0) كي يبقى العدد الكلي للواحدات بما فيها بت التماثل فردياً، أي يصبح الكود بعد إضافة بت التماثل ($\boxed{0}110\_0001$). وعدد الواحدات في كود أسكي للحرف (A) زوجي لذلك يكون بت التماثل الفردي المضاف على يسار الكود (1) كي يبقى العدد الكلي للواحدات بما فيها بت التماثل فردياً، أي يصبح الكود بعد إضافة بت التماثل ($\boxed{1}100\_0001$).

طريقة اختبار باقي القسمة الدوري (Cyclic Redundancy Check)

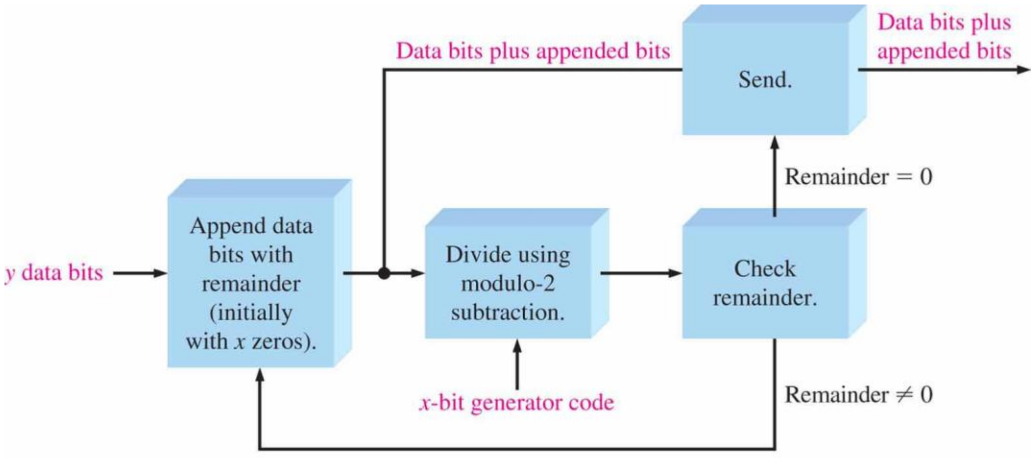
طريقة اختبار باقي القسمة الدوري هي طريقة لاكتشاف أخطاء الإرسال لأكثر من خانة ثنائية. يجري في قسم الإرسال إلحاق باقي القسمة في الحقل الإثناني إلى المعطيات، وفي قسم الاستقبال يولد باقي القسمة ويقارن بباقي القسمة المرسل، في حالة التطابق تكون المعطيات المرسلة صحيحة، وفي الحالة المعاكسة تكون المعطيات المرسلة غير صحيحة، فيطلب إعادة إرسالها.

جهة الإرسال (Transmitting end of communication link)

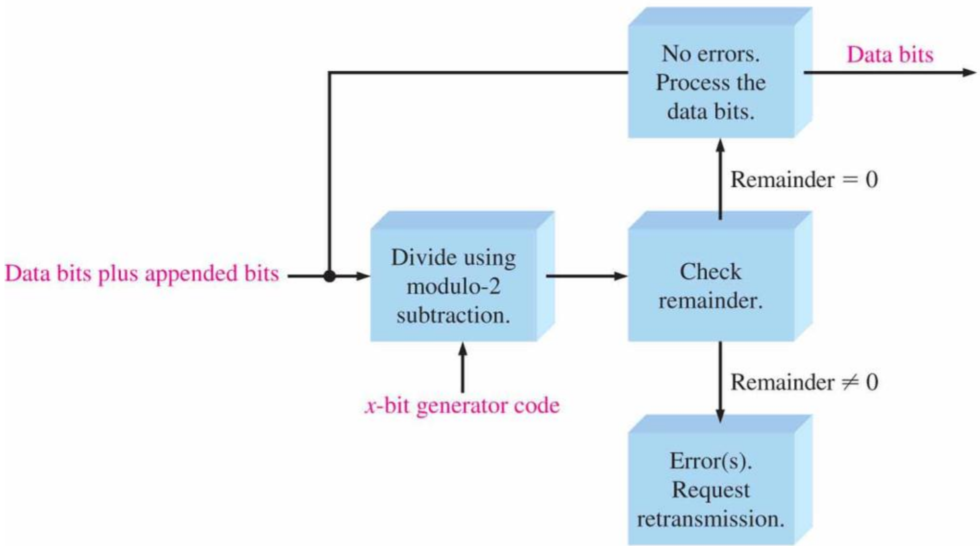
لنفترض أن المعطيات المراد إرسالها هي معطيات إثنانية ممثلة على ثمانية بتات ($y=1101\_0011$)، وأن مفتاح توليد الرموز ممثل على أربعة بتات ($G=1010$)، يضاف إلى المعطيات وعلى أقصى اليمين القيمة الابتدائية لباقي القسمة ($Cheek\ sum=0000$)، فتصبح المعطيات إضافة لباقي القسمة الابتدائي ($y'=1101\_0011\_0000$)، الآن يجري قسمة المعطيات المضاف إليها باقي القسمة الابتدائي (y') على مفتاح توليد الترميز (G) باستخدام عملية الطرح في الحقل (2)، فنحصل على باقي القسمة ($Cheek\ sum=0100$)، التي نضعها بدلاً من القيمة الابتدائية، فنحصل على المعطيات قيد الإرسال ($y'=1101\_0011\_0100$).

جهة الاستقبال (Receiving end of communication link)

يجري استقبال المعطيات المرسلة المضاف إليها باقي القسمة (y')، وتقسيمها على مفتاح توليد الترميز (G) نفسه المستعمل في جهة الإرسال وباستعمال عملية الطرح في الحقل (2)، فنحصل على باقي القسمة $(Cheek\ sum)$، إذا كانت قيمته صفراً، تكون المعطيات المرسلة خالية من الأخطاء، يجري أخذها وإهمال حقل باقي القسمة. وفي الحالة المعاكسة يطلب من المرسل إعادة الإرسال، وتجاهل المعطيات المرسلة الخاطئة.



(a) Transmitting end of communication link



(b) Receiving end of communication link

- (Transmitting end of communication link): جهة إرسال المعطيات
- (y data bits): بتات المعطيات (y)
- (Append datd bits with remainder (initially with x zeros)): أضف أصفاراً إلى المعطيات في البداية وفي مكان باقي القسمة المفترض
- (Divide using modulus−2 subtraction): نفذ عملية القسمة في الحقل (2) باستعمال الطرح
- (x−bit Generator code): مفتاح توليد الترميز (x)
- (Check remainder): اختبر باقي القسمة

- $(\text{Remainder} = 0)$: باقي القسمة يساوي (0)
- $(\text{Remainder} \neq 0)$:باقي القسمة لا يساوي (0)
- (Data bits plus appended bits): المعطيات بالإضافة إلى باقي القسمة
- (Send): أرسل
- (Receiving end of communication link): جهة استقبال المعطيات
- (Data bits plus appended bits): المعطيات بالإضافة إلى باقي القسمة
- (x–bit Generator code): مفتاح توليد الترميز (x)
- (Divide using modulus–2 subtraction): نفذ عملية القسمة في الحقل (2) باستعمال الطرح
- (Check remainder): اختبر باقي القسمة
- $(\text{Remainder} \neq 0)$:باقي القسمة لا يساوي (0)
- (Error(s) request transmission): يوجد أخطاء يُطلب إعادة الإرسال
- (Data bits): بتات المعطيات

إجرائية اختبار باقي القسمة الدوري (Cyclic Redundancy Check)

1. اختيار مفتاح توليد الترميز $(G = 1010)$، في قسمي الإرسال والاستقبال، ولتكن المعطيات المراد إرسالها ($D = 1101\_0011$).

2. إضافة عدد من الأصفار مساوياً إلى عدد بتات مفتاح توليد الرموز إلى أقصى يمين المعطيات ($D' = 1101\_0011\_0000$).

3. تقسيم المعطيات المضاف إليها الأصفار على مفتاح توليد الرموز في الحقل (2) ($\dfrac{D' = 1101\_0011\_0000}{G = 1010}$) باستعمال الطرح في الحقل (2) الذي هو جمع في النظام الإثناني مع عدم أخذ المنقول بعين الاعتبار، وذلك وفقاً لما يلي:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & \downarrow & & & & & & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 0 & & & & & & & \\
 & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & \downarrow & & & & & & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\
 & & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & \downarrow & \downarrow & & & & \\
 & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & & & & \\
 & & & & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & & & & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & \downarrow \\
 & & & & & & & & \boxed{0} & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

.4 إذا كان باقي القسمة صفراً ترسل المعطيات ($D'=1101\_0011\_0000$) كما هي.

.5 وإذا لم يكن باقي القسمة صفراً ترسل المعطيات بعد استبدال باقي القسمة الحالي بالقيمة الابتدائية لباقي القسمة ($D'=1101\_0011\_0100$) بحيث إذا قسم على مفتاح الرموز يعطي باقي قسمة مساو إلى الصفر ($\dfrac{D'=1101\_0011\_0100}{G=1010} \Rightarrow Cheek\ sum=0000$).

.6 في قسم الاستقبال يقوم المستقبل بتقسيم المعطيات المستقبلة غلى نفس مفتاح توليد الرموز المستعمل في قسم الإرسال وفقاً لما يلي:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & \downarrow & & & & & & & \\
 & 1 & 1 & 1 & 0 & & & & & & & \\
 & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & \downarrow & & & & & & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\
 & & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & \downarrow & \downarrow & & & & \\
 & & & & 1 & 0 & 1 & 1 & & & & \\
 & & & & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 & & & & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
 & & & & & & & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & \downarrow \\
 & & & & & & & & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & 0
\end{array}$$

لنفترض أن خطأ حدث أثناء الإرسال على البت الثاني للمعطيات من اليسار، فتكون المعطيات المستقبلة ($D'=1\boxed{0}01\_0011\_0100$)، بتطبيق إجرائية (CRC) على هذه المعطيات في جهة الاستقبال ($\dfrac{D'=1\boxed{0}01\_0011\_0100}{G=1010} \Rightarrow Cheek\ sum=0100$). بما أن باقي القسمة أو ما يعرف بـ ($Cheek\ sum$) ليس صفراً، فهذا يعني وجود خطأ في المعلومات المستقبلة، أي أنه طرأ تغييراً ما على المعلومات المرسلة. بتنفيذ إجرائية (CRC) في قسم الاستقبال نجد:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
1 & \boxed{0} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & \downarrow & \downarrow & & & & & & \\
 & & 1 & 1 & 0 & 0 & & & & & & \\
 & & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & \downarrow & & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 0 & 1 & & & & & \\
 & & & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & \downarrow & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\
 & & & & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & \downarrow & & & \\
 & & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & & & \\
 & & & & & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & & & & & & & & \boxed{0} & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

7. إذا كان باقي القسمة صفراً ، يعني هذا عدم وجود خطأ في المعطيات المستقبلة (من المحتمل في حالات نادرة أن يلغي خطآن بعضهما البعض). وإذا كان باقي القسمة مختلفاً عن الصفر فهذا يعني أن خطأً ما حدث في المعطيات المستقبلة، مما يقتضي طلب إعادة الإرسال.

10. خلاصة Summary

1. العدد الإثناني هو عدد بخانات ذات أوزان. وزن خانات الجزأ الصحيح من العدد هي من قوى العدد (2) الموجبة، وتبدأ من الخانة الأقل وزناً، ووزن خانات الجزأ الكسري من العدد هي من قوى العدد (2) السالبة وتبدأ من الخانة الأكثر وزناً.
2. يمكن تحويل العدد الإثناني إلى عدد عشري بجمع وزن خاناته التي قيمتها (1) منطق.
3. يمكن تحويل العدد العشري الصحيح إلى عدد إثناني باستعمال طريقة جمع أوزان الخانات أو بطريقة التقسيم المتكرر على العدد (2).
4. يمكن تحويل العدد العشري الكسري إلى عدد إثناني باستعمال طريقة جمع أوزان الخانات أو بطريقة الضرب المتكرر بالعدد (2).
5. قواعد الجمع الأساسية في النظام الإثناني هي:

6.
$$
\begin{aligned}
0 + 0 &= 0 \\
0 + 1 &= 1 \\
1 + 0 &= 1 \\
1 + 1 &= 01
\end{aligned}
$$

7. قواعد الطرح الأساسية في النظام الإثناني هي:

8.
$$
\begin{aligned}
0 - 0 &= 0 \\
1 - 1 &= 0 \\
1 - 0 &= 1 \\
10 - 1 &= 1
\end{aligned}
$$

9. يستنتج المتمم الأحادي لعدد إثناني باستبدال الواحدات بالأصفار والأصفار بالواحدات.
10. يستنتج المتمم االإثناني لعدد إثناني بجمع واحد إلى المتمم الأحادي.
11. يمكن إجراء عملية الطرح باستعمال عملية الجمع بعد أخذ المتمم الإثناني للعدد المطروح منه.
12. يمثل العدد الموجب بوضع بت الإشارة على القيمة صفر.
13. يمثل العدد السالب بوضع بت الإشارة على القيمة واحد.
14. في حالة العمليات الحسابية، تمثل الأعداد الإثنانية السالبة بصيغة المتمم الأحادي أو المتمم الإثناني.
15. في حالة عملية الجمع، يمكن أن يحصل طفح على النتيجة (Overflow)، عندما يكون العددان موجبان أو سالبان، ولا يدل بت الإشارة على ذلك.
16. يمكن تحويل العدد العشري إلى عدد عدد عشري مرمز إثنانياً (BCD) باستبدال القيمة الإثنانية لكل خانة عشرية ممثلة على أربع بتات.

17. الترميز أسكي هو ترميز حرف – رقمي ممثل على سبعة بتات، ويستعمل على نطاق واسع في أنظمة الكمبيوتر لإدخال وإخراج المعلومات.

18. يستعمل بت التماثل (Pariy bit) لكشف خطأ بت واحد لمعطيات مرسلة، ويستعمل مبدأ كشف باقي القسمة المتكرر (Cyclic Redundancy Check) لكشف خطأ أكثر من بت لمعطيات مرسلة.

أسئلة ومسائل الفصل الثاني Questions and Problems

أسئلة الفصل الثاني

اختر الإجابة الصحيحة

1. في حالة العدد الإثناني (1000) وزن العمود الذي قيمته (1) هو

a) (4)

b) (6)

c) (8)

d) (10).

2. المتمم الإثناني للعدد (1000) هو

a) (0111)

b) (1000)

c) (1001)

d) (1010).

3. القيمة العشرية للعدد الإثناني الكسري (0.11) هي

a) $(\frac{1}{4})$

b) $(\frac{1}{2})$

c) $(\frac{3}{4})$

d) (غير ذلك).

4. لنفترض عدداً إثنانياً ممثلاً بالفاصلة العائمة، إذا كان بت الإشارة له (1)، يكون العدد

a) (سالباً)

b) (موجباً)

c) (القوة سالبة)

d) (القوة موجبة).

5. عند جمع عددين جبريين موجبين، يمكن أن يتجاوز عدد بتات النتيجة عدد بتات أي من العددين، فيحدث ما يسمى طفح النتيجة، يشير إلى هذا الطفح

a) (التغير في بت الإشارة)
b) (المنقول من بت الإشارة)
c) (النتيجة الصفرية)
d) (الدخان).

6. العدد (1010) في صيغة (BCD) هو

a) ثمانية في النظام العشري
b) عشرة في النظام العشري
c) إثنا عشرة في النظام العشري
d) غير نظامي (غير صحيح).

7. مثال على الترميز الذي لا يعتمد على أوزان الخانات هو

a) الإثناني
b) العشري
c) BCD
d) ترميز غري.

8. مثال على الترميز الحرف – رقمي

a) ترميز أسكي
b) ترميز غري
c) ترميز BCD
d) CRC.

9. مثال على طريقة كشف الخطأ لمعطيات مرسلة

a) اختبار التماثل
b) CRC
c) ما ورد في (a) و (b)
d) غير ما ذكر.

10. يمثل العدد العشري (473) بصيغة (BCD) بالشكل

a) (1110_1101_0)

b) (1100_0111_0011)

c) (0100_0111_0011)

d) (0100_1111_0011).

Ans .1 (c) ،2 (b) ،3 (c) ،4 (a) ،5 (a) ،6 (d) ،7 (d) ،8 (a) ،9 (c) ،10 (c)

اسئلة الفصل الثاني	الاجابة الصحيحة
1	c
2	b
3	c
4	a
5	a
6	d
7	d
8	a
9	c
10	c

مسائل الفصل الثاني

- نظام العد العشري Decimal Numbers
- نظام العد الإثناني Binary Numbers
- التحويل من النظام العشري إلى الإثناني وبالعكس Decimal (Binary) to Binary (Decimal) Conversion

1. حدد قيمة كل خانة من خانات الأعداد العشرية التالية:

000،(a) 471 (b) 9356 (c) 125

Ans. $(a)400+70+1, \quad (b)9,000+300+50+6,$
$(c)100,000+20,000+5,000,$

2. حول الأعداد الإثنانية التالية إلى أعداد عشرية.

(a) 1 10011.11 (b) 10 1010.01 (c) 10 00001.111 (d) 11 11000.101
(e) 1011100.10101 (f) 1110001.0001 (g) 1011010.1010 (h) 1111111.11111

Ans. $(a)51.75, \quad (b)42.25, \quad (c)65.875, \quad (d)120.625,$
$(e)92.65625, \quad (f)113.0625, \quad (g)90.625, \quad (h)127.96875,$

3. حول الأعداد العشرية الصحيحة التالية إلى أعداد إثنانية، باستعمال طريقة أوزان الخانات.

(a) 10 (b) 17 (c) 24 (d) 48 (e) 61 (f) 93 (g) 125 (h) 186

Ans. $(a)1010, \quad (b)10001, \quad (c)11000, \quad (d)110000,$
$(e)111101, \quad (f)1011101, \quad (g)1111101, \quad (h)10111010,$

4. حول الأعداد العشرية الكسرية التالية إلى أعداد إثنانية، باستعمال طريقة أوزان الخانات.

(c) 0.0981 (b) 0.246 (a) 0.32

Ans. $(a)0.0101001, \quad (b)0.001111, \quad (c)0.0001101,$

5. حول الأعداد العشرية الصحيحة التالية إلى أعداد إثنانية، باستعمال طريقة التقسيم المتتالي على 2.

(a) 15 (b) 21 (c) 28 (d) 34
(e) 40 (f) 59 (g) 65 (h) 73

Ans. $(a)1111,\quad (b)10101,\quad (c)11100,\quad (d)100010,$
$(e)101000,\quad (f)111011,\quad (g)1000001,\quad (h)1001001,$

6. حول الأعداد العشرية الكسرية التالية إلى أعداد إثنانية، باستعمال طريقة الضرب المتتالي بالعدد 2.

(a) 0.98 (b) 0.347 (c) 0.9028

Ans. $(a)0.111110,\quad (b)0.0101100,\quad (c)0.1110011,$

- لعمليات الحسابية في النظام الإثناني Binary Arithmetic

7. اجمع الأعداد الإثنانية التالية:

(a) 1 1 + 0 1 (b) 1 0 + 1 0 (c) 101 + 11
(d) 111+110 (e) 1001 + 101 (f) 1101 + 1011

Ans. $(a)100,\quad (b)100,\quad (c)1000,\quad (d)1101,$
$(e)1110,\quad (f)11000,$

8. اطرح الأعداد الإثنانية التالية بالطريقة المباشرة:

(a) 11 – l (b) 101 − 100 (c) 110 − 101
(d) 1110 −11 (e) 1100− 1001 (f) 11010 – 10111

Ans. $(a)10,\quad (b)001,\quad (c)001,\quad (d)1011,$
$(e)0011,\quad (f)00011,$

9. اجر عملية الضرب على الأعداد الإثنانية التالية:

(a) 11 X 11 (b) 100 X 10 (c) 111 X 101
(d) 1001 X 110 (e) 1101 X 1101 (f) 1110 X 1101

Ans. $(a)1001,\quad (b)1000,\quad (c)100011,\quad (d)110110,$
$(e)10101001,\quad (f)10110110,$

.10 اجر عملية القسمة على الأعداد الإثنانية التالية:

(a) 100 ÷ 10 (b) 1001 ÷ 11 (c) 1100 ÷ 100

Ans. $(a)010,\quad (b)0011,\quad (c)0100,$

- المتمم الأحادي والإثناني للأعداد الإثنانية 1's and 2's Complements of Binary Numbers

.11 حدد المتمم الأحادي لكل من الأعداد الإثنانية التالية:

(a) 101 (b) 110 (c) 1010

(d) 11010111 (e) 1110101 (f) 00001

Ans. $(a)010,\quad (b)001,\quad (c)0101,\quad (d)00101000,$
$(e)0001010,\quad (f)11110,$

.12 حدد المتمم الإثناني لكل من الأعداد الإثنانية التالية:

(a) 10 (b) 111 (c) 1001 (d) 1101

(e) 11100 (f) 10011 (g) 10110000 (h) 00111101

Ans. $(a)10,\quad (b)001,\quad (c)0111,\quad (d)0011,$
$(e)00100,\quad (f)01101,\quad (g)01010000,\quad (h)11000011,$

.13 حدد المتمم الأحادي ممثلاً على ($8\ bit$) لكل من الأعداد العشرية التالية:

(a) −34 (b) +57 (C) −99 (d) +115

Ans. $(a)11011101,\quad (b)00111001,\quad (c)10011100,$
$(d)01110011,$

.14 حدد المتمم الإثناني ممثلاً على ($8\ bit$) لكل من الأعداد العشرية التالية:

(a) + 1 2 (b) − 6 8 (c) +101 (d) − 1 2 5

Ans. $(a)00001100,\quad (b)10111100,\quad (c)01100101,$
$(d)10000011,$

15. مثل الأعداد الإثنانية التالية بصيغة الفاصبة العائمة وحيدة الدقة:

(a) 0111110000101011 (b) 011000011000

Ans.
$$(a)\, sign = 0,\;\; Exponent = 10001101,$$
$$Mantissa = 1111\,0000\,1010\,1100\,0000\,0000$$
$$(b)\, sign = 0,\;\; Exponent = 10001010,$$
$$Mantissa = 1100\,0001\,1000\,0000\,0000\,000,$$

16. حدد قيم الأعداد التالية الممثلة بصيغة الفاصبة العائمة وحيدة الدقة:

(a) 1100 0000 1010 0100 1110 0010 0000 0000

(b) 0110 0110 0100 0011 1110 1001 0000 0000

Ans.
$$(a) -101.001001110001 \;=\; -5.15258789$$
$$(b) 1.10\;0\;001111101001\;1.100001111101001 \;\times\; 2^{77}$$

- العمليات الحسابية باستعمال المتمم الإثناني Arithmetic Operations with Signed umbers

17. أجر عملية الجمع باستعمال المتمم الإثناني على الأعداد التالية:

(a) 00010110 + 00110011

(b) 01110000 + 10101111

Ans. $(a) 01001001$ $(b) 100011111$

18. أجر عملية الطرح باستعمال المتمم الإثناني على الأعداد التالية:

(a) 00110011 − 00010000

(b) 01100101 − 11101000

Ans. $(a) 00100011$ $(b) 01111101$

19. أجر عملية ضرب العدد (01101010) بالعدد (11110001)، باستعمال المتمم الإثناني.

Ans. 100111001010

20. أجر عملية قسمة العدد (01000100) على العدد (00011001)، باستعمال المتمم الإثناني.

Ans. $Quotient = 00000010,\; Remainder = 00010010,$

- نظام العد العشري المرمز إثنانياً Binary Coded Decimal (BCD)

21. حول الأعداد العشرية التالية إلى صيغة BCD.

(a) 10 (b) 13 (c) 18 (d) 21 (e) 25 (f) 36
(g) 44 (h) 57 (i) 69 (j) 98 (k) 125 (l) 156

Ans.
$$\begin{array}{lll} (a)\ 10 = 0001\,0000 & (b)\ 13 = 0001\,0011 & (c)\ 18 = 00011000 \\ (d)\ 21 = 0010\,0001 & (e)\ 25 = 0010\,0101 & (f)\ 36 = 0011\,0110 \\ (g)\ 44 = 0100\,0100 & (h)\ 57 = 0101\,0111 & (i)\ 69 = 0110\,1001 \\ (j)\ 98 = 10011000 & (k)\ 125 = 0001\,0010\,0101 & \\ (l)\ 156 = 0001\,0101\,0110 & & \end{array}$$

22. حول الأعداد التالية من صيغة BCD إلى أعداد عشرية.

(a) 0001 (b) 0110 (c) 1001
(d) 00011000 (e) 00011001 (f) 00110010
(g) 01000101 (h) 10011000 (i) 100001110000

Ans.
$$\begin{array}{l} (a)\ 1 \quad (b)\ 6 \quad (c)\ 9 \quad (d)\ 18 \quad (e)\ 19 \quad (f)\ 32 \quad (g)\ 45 \\ (h)\ 98 \quad (i)\ 870 \end{array}$$

23. اجمع الأعداد التالية في صيغة BCD.

(a) 1000 + 0110 (b) 0111 + 0101
(c) 1001 + 1000 (d) 1001 + 0111
(e) 00100101 + 00100111 (f) 01010001 + 01011000
(g) 10011000 + 10010111 (h) 010101100001 + 011100001000

Ans.
$$\begin{array}{llll} (a)\ 0001\,0100 & (b)\ 0001\,0010 & (c)\ 0001\,0111 & (d)\ 0001\,0010 \\ (e)\ 0101\,0010 & (f)\ 0001\,0000\,1001 & (g)\ 0001\,1001\,0101 & \\ (h)\ 0001\,0010\,0110\,1001 & & & \end{array}$$

- الترميز الرقمي Digital Codes

.24 حول كلاً من الأعداد الإثنانية إلى ترميز غري.

(a) 11011 (b) 1001010 (c) 1111011101110

Ans. (a) 10110 (b) 1101111 (c) 1000110011001 **Gray**

.25 حول كلاً من ترميزات غري إلى أعداد إثنانية.

(a) 1010 (b) 00010 (c) 11000010001

Ans. (a) 1100 (b) 00011 (c) 10000011110 **Binary**

.26 حول كلاً من الأعداد العشرية التالية إلى ترميز أسكي، استناداً إلى الجدول التالي.

(a) 1 (b) 3 (c) 6 (d) 10 (e) 18 (f) 29

(g) 56 (h) 75 (i) 107

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	NUL	SOH	STX	ETX	EOT	ENQ	ACK	BEL	BS	HT	LF	VT	FF	CR	SO	SI
1	DLE	DC1	DC2	DC3	DC4	NAK	SYN	ETB	CAN	EM	SUB	ESC	FS	GS	RS	US
2		!	"	#	$	%	&	'	(	)	*	+	،	–	.	/
3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	:	;	<	=	>	?
4	@	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
5	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	[	\	]	^	_
6	`	a	b	c	d	e	f	g	h	j	i	k	l	m	n	o
7	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	{	|	}	~	

Ans.
(a) 011_0001 (b) 011_0011 (c) 011_0110
(d) 011_0001 011_0000 (e) 011_0001 011_1000
(f) 011_0010 011_1001 (g) 011_0101 011_0110
(h) 011_0111 011_0101 (i) 011_0001 011_0000 011_0111

.27 حول كل ترميز أسكي إلى عدد عشري، استناداً إلى الجدول السابق.

(a) 0011000   (b) 1001010   (c) 0111101   (d) 1000011
(e) 0111110   (f) 1000010

Ans. (a) CAN $(Cancel)$ (b) J (c) $=$ (d) C (e) $>$ (f) B

- كشف الخطأ نتيجة إرسال الرموز Error Detection Codes

.28 حدد ترميزات التماثل الزوجي الخاطئة.

(a) 100110010   (b) 011101010   (c) 10111111010001010

Ans. (b) 011101010

.29 حدد ترميزات التماثل الفردي الخاطئة.

(a) 11110110   (b) 00110001   (c) 01010101010101010

Ans. (a) 11110110, (c) 01010101010101010

.30 أضف بت التماثل الزوجي لكل واحدة من كلمات المعطيات التالية:

(a) 10100100   (b) 00001001   (c) 11111110

Ans. $(a)\mathbf{1}$ $(b)\mathbf{0}$ $(c)\mathbf{1}$

.31 يُطلب تطبيق إجرائية (CRC) على المعطية (1011_0010) باستعمال مفتاح مولد الترميز (1010) للحصول على الترميز (CRC) المرسل.

Ans. $Remainder = 0110$

32. يُفترض أن خطأ في البت الأعلى وزناً في الترميز المبين في المسألة السابقة قد حصل خلال عملية الإرسال، يُطلب تطبيق إجرائية (CRC) لاكتشاف هذا الخطأ.

Ans. $\text{Re}\,mainder = 10$

نموذج مذاكرة للفصل الثاني

الجامعة .... كلية .....

المادة: الإلكترونيات الرقمية Digital Electronics نموذج امتحان للفصل الثاني: أنظمة العد، العمليات الحسابية، الرموز الرقمية

أستاذ المادة: ....

المدة: ساعة واحدة العلامة: 10

ملاحظات هامة:

- المادة مغلقة
- يسمح باستعمال الآلات الحاسبة

اختر الإجابة الصحيحة (10 علامات)

1. العدد الإثناني (1101) يساوي إلى العدد العشري
   a) (13)
   b) (49)
   c) (11)
   d) (3).

2. العدد الإثناني (11011101) يساوي إلى العدد العشري
   a) (121)
   b) (221)
   c) (441)
   d) (256).

3. العدد العشري (17) يساوي إلى العدد الإثناني
   a) (10010)
   b) (11000)
   c) (10001)
   d) (01001).

4. العدد العشري (175) يساوي إلى العدد الإثناني

a) (11001111)

b) (10101110)

c) (10101111)

d) (11101111).

5. تؤدي عملية جمع العددين $(11010+01111)$ إلى النتيجة

a) (101001)

b) (101010)

c) (110101)

d) (101000).

6. تؤدي عملية طرح العددين $(110-010)$ إلى النتيجة

a) (001)

b) (010)

c) (101)

d) (100).

7. المتمم الأحادي للعدد الإثناني (10111001) هو

a) (01000111)

b) (01000110)

c) (11000110)

d) (10101010).

8. المتمم الإثناني للعدد الإثناني (11001000) هو

a) (00110111)

b) (00110001)

c) (01001000)

d) (00111000).

9. العدد العشري (374) بصيغة BCD هو

a) (0100_0111_0011)

b) (0111_0100_0011)

c) (0111_0011_0100)

d) (0011_0111_0100).

10. الترميز الذي يحتوي خطأ التماثل الزوجي هو

a) (1010011)

b) (1101000)

c) (1001000)

d) (1110111).

الإجابة الصحيحة لنموذج مذاكرة الفصل الثاني

1 (a) ،2 (b) ،3 (c) ،4 (c) ،5 (a) ،6 (d) ،7 (b) ،8 (d) ،9 (d) ،10 (b)

التغذية الراجعة

1 مراجعة التحويل من النظام العشري إلى الإثناني وبالعكس Decimal (Binary) to Binary (Decimal) Conversion

2 مراجعة التحويل من النظام العشري إلى الإثناني وبالعكس Decimal (Binary) to Binary (Decimal) Conversion

3 مراجعة التحويل من النظام العشري إلى الإثناني وبالعكس Decimal (Binary) to Binary (Decimal) Conversion

4 مراجعة التحويل من النظام العشري إلى الإثناني وبالعكس Decimal (Binary) to Binary (Decimal) Conversion

5 مراجعة العمليات الحسابية في النظام الإثناني Binary Arithmetic

6 مراجعة العمليات الحسابية في النظام الإثناني Binary Arithmetic

7 مراجعة المتمم الأحادي والإثناني للأعداد الإثنانية 1's and 2's Complements of Binary Numbers

8 مراجعة المتمم الأحادي والإثناني للأعداد الإثنانية 1's and 2's Complements of Binary Numbers

9 مراجعة نظام العد العشري المرمز إثنانياً Binary Coded Decimal (BCD)

10 مراجعة كشف الخطأ نتيجة إرسال الرموز Error Detection Codes

علامة النجاح بالمذاكرة هي: 6/10

نهاية الفصل الثاني.

نموذج مذاكرات الفصل الثاني	الإجابة الصحيحة
1	a
2	b
3	c
4	c
5	a
6	d
7	b
8	d
9	d
10	b