الفصل السابع: الفضاءات الشعاعية

العنوان	الصفحة

الكلمات المفتاحية:

فضاء شعاعي، شعاع، سلّمي، فضاء شعاعي جزئي، متتالية عددية، مصفوفة، جملة خطيه متجانسة، جمل أشعة، تركيب خطي، مولّد، الجملة المولدة، جملة مستقلة خطياً، جملة مرتبطة خطياً، قاعدة فضاء شعاعي، مجموع فضاءين شعاعيين، مجموع مباشر، فضاءين متتامين، بعد فضاء شعاعي، بعد فضاء شعاعي جزئي، رتبة جملة أشعة، تطبيق خطي، نواة، صورة تطبيق خطي، صورة جملة أشعة، تشاكل، فضاء شعاعي منهي البعد.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على بنية الفضاء الشعاعي والأمثلة الأكثر شهرة كفضاء التطبيقات وفضاء المصفوفات وفضاء المتتاليات والفضاء الإقليدي وفضاء حلول المعادلات الخطية المتجانسة وفضاء كثيرات الحدود، ودراسة الفضاءات الشعاعية الجزئية وكيفية جمعها والأشعة المستقلة والمرتبطة وقاعدة فضاء شعاعي وفضاء شعاعي مولد من جملة أشعة والفضاءات المتتامة وأبعاد الفضاءات الشعاعية. والتطبيقات الخطية بين الفضاءات الشعاعية.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- بنية الفضاء الشعاعي وأمثلة عن الفضاءات الشعاعية الأكثر شهرة
- الفضاءات الشعاعية الجزئية والعمليات عليها.
- جمل الأشعة: المرتبطة والمستقلة والمولدة والقاعدة.
- الفضاءات المتتامة.
- بعد فضاء شعاعي وشعاعي جزئي
- التطبيقات الخطية
- الفضاء الشعاعي التقليدي $\mathcal{R}^n$

مقدمة

يعتبر مفهوم الفضاء الشعاعي بنية أساسية في الرياضيات المعاصرة. إنه يهدف إلى تحديد الخواص العامة التي تشترك بها مجموعات قد تكون مختلفة جداً. على سبيل المثال يمكن إضافة شعاعين (في المستوي أو في الفراغ) وأيضاً ضرب شعاع بعدد (من أجل الحصول على شعاع أكبر أو أصغر). كما أنه يمكننا إضافة تابعين أو ضرب تابع بعدد. نفس الشيء بالنسبة لكثيرات الحدود والمصفوفات. بالتالي سيكون الهدف من الفضاءات الشعاعية الحصول على نظريات عامة يمكن تطبيقها في فضاء الأشعة التقليدية وفضاء التوابع وفضاء المصفوفات وفضاء كثيرات الحدود ...

1. بنية الفضاء الشعاعي

تعريف 1: ليكن حقلاً K و مجموعة غير خالية مزودة بقانون تشكيل داخلي $+$ من $E \times E$ إلى E:

$$\begin{cases} E \times E \to E \\ (u,v) \mapsto u+v \end{cases}$$

وقانون تشكيل خارجي . من $K \times E$ إلى E:

$$\begin{cases} K \times E \to E \\ (\lambda,u) \mapsto \lambda.u \end{cases}$$

نقول عن $(E,+,.)$ فضاء شعاعي على الحقل K إذا تحققت الشروط التالية:

1. $(E,+)$ زمرة تبديلية (حيث العنصر الحيادي 0_E)

2. التوزيعية للقانون . على القانون $+$ من اليسار: $(\lambda+\mu).u = \lambda.u + \mu.u$، حيث $\lambda,\mu \in K$ و $u \in E$.

3. التوزيعية للقانون . على القانون $+$ من اليمين: $\lambda.(u+v) = \lambda.u + \lambda.v$، حيث $\lambda \in K$ و $u,v \in E$.

4. $1_K.u = u$ من أجل أي عنصر $u \in E$.

5. $\lambda.(\mu.u) = (\lambda.\mu).u$، $u \in E$ و $\lambda,\mu \in K$

ندعو عناصر E بالأشعة كما ندعو عناصر K بالسلميات.

ملاحظة 1: قانون التشكيل الداخلي $+$ على E يسمى عادة جمع شعاعين $u + u'$.

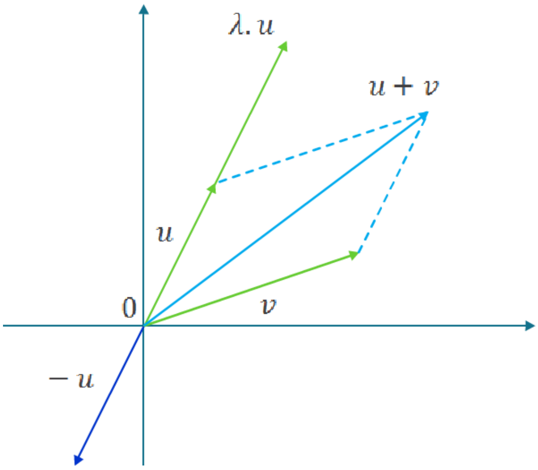
ملاحظة 2: قانون التشكيل الخارجي على E يسمى عادة الضرب بسلمي وغالباً يتم حذف الرمز، فإذا كان $\lambda \in K$ و $u \in E$، نرمز غالباً λu بدلاً من $\lambda.u$.

ملاحظة 3: العنصر الحيادي 0_E يسمى الشعاع صفر. يجب عدم الخلط بينه وبين العنصر 0 للحقل K. عندما لا يكون خطر الخلط بينهما سنرمز للعنصر 0_E بـ 0 للسهولة.

فرضية 1: ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K، وليكن L حقل جزئي من K، عندئذ يكون E فضاء شعاعي أيضاً على الحقل L.

أمثلة 1:

الفضاء الشعاعي $\mathcal{R}^2$ على الحقل $\mathcal{R}$



بفرض $K = \mathcal{R}$ و $E = \mathcal{R}^2$. العنصر $u \in E$ عبارة عن ثنائية (x,y) حيث $x,y \in \mathcal{R}$. أي:
$\mathcal{R}^2 = \{(x,y)|x,y \in \mathcal{R}\}$.

يعرف قانون التشكيل الداخلي كما يلي:
$(x,y) + (x',y') = (x+x',y+y')$، حيث (x,y) و (x',y') عنصران من $\mathcal{R}^2$.

كما يعرف قانون التشكيل الخارجي كما يلي:
$\lambda.(x,y) = (\lambda x,\lambda y)$، حيث (x,y) عنصر من $\mathcal{R}^2$ و λ عنصر من $\mathcal{R}$.

العنصر الحيادي للجمع هو الشعاع الصفري $(0,0)$. نظير العنصر (x,y) هو $(-x,-y)$ والذي نرمز له أيضاً $-(x,y)$.

الفضاء الشعاعي $\mathcal{R}^n$ على الحقل $\mathcal{R}$

ليكن لدينا $n \in \mathcal{N}$. بفرض $K = \mathcal{R}$ و $E = \mathcal{R}^n$. العنصر $u \in E$ له n مركبة $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ حيث $x_1,x_2,\dots,x_n \in \mathcal{R}$.

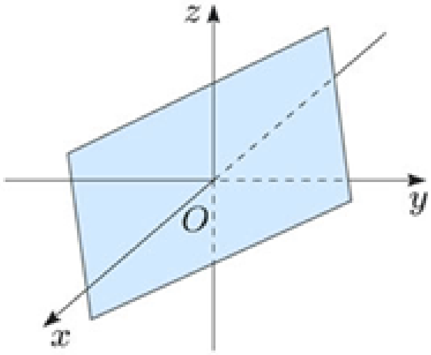
نعرف قانون التشكيل الداخلي، حيث $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ $(y_1,y_2,\dots,y_n)$ وعنصران من $\mathcal{R}^n$:

$$(x_1,x_2,\dots,x_n) + (y_1,y_2,\dots,y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)$$

كما نعرف قانون التشكيل الخارجي، حيث $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ عنصر من $\mathcal{R}^2$ و λ عنصر من $\mathcal{R}$:

$$\lambda.(x_1,x_2,\dots,x_n) = (\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n)$$

العنصر الحيادي لقانون التشكيل الداخلي هو الشعاع الصفري $(0,0,\dots,0)$. كما أن نظير العنصر $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ هو $(-x_1,-x_2,\dots,-x_n)$ والذي نرمز له أيضاً $-(x_1,x_2,\dots,x_n)$.



$ax+by+cz=0$

- بطريقة مشابهة يمكن تعريف الفضاء الشعاعي $\mathcal{C}^n$ على الحقل $\mathcal{C}$، وبشكل عام يمكن تعريف الفضاء الشعاعي K^n على الحقل K.
- المستوي المار بالمبدأ في الفراغ $\mathcal{R}^3$ يشكل فضاء شعاعي (بالنسبة للعمليات التي نعرفها عن الأشعة). ليكن $K = \mathcal{R}$ و $E = \mathcal{P}$. معادلة المستوي $\mathcal{P}$ هي من الشكل:

$ax + by + cz = 0$ حيث a, b, c إعداد حقيقية ليست جميعها تساوي الصفر.

العنصر $u \in \mathcal{P}$ له ثلاث مركبات $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ بحيث $ax + by + cz = 0$.

ليكن لدينا العنصرين $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ من المستوي $\mathcal{P}$. أي: $ax + by + cz = 0$ و $ax' + by' + cz' = 0$. عندئذ يكون الشعاع $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$ عنصر من $\mathcal{P}$ لأن

$$a(x + x') + b(y + y') + c(z + z') = 0$$

الخصائص الأخرى يمكن برهانها بسهولة أيضاً: على سبيل المثال العنصر الحيادي هو الشعاع الصفري $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$؛ وإذا كان الشعاع $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ينتمي إلى $\mathcal{P}$، بالتالي $ax + by + cz = 0$، والتي يمكن إعادة كتابتها بالشكل التالي: $a(-x) + b(-y) + c(-z) = 0$. أي أن $\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ ينتمي إلى $\mathcal{P}$ (نظير العنصر $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$).

- أي مستوي لا يمر بالمبدأ ليس فضاء شعاعي. لماذا؟

الفضاء الشعاعي للتطبيقات من $\mathcal{R}$ إلى $\mathcal{R}$

مجموعة التوابع $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ والتي نرمز لها ب $\mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{R})$. يتم تزويد هذه المجموعة بالقانونين التاليين:

- قانون التشكيل الداخلي: ليكن التطبيقان f و g من $\mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{R})$. نعرف $f + g$ كما يلي:
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), x \in \mathcal{R}.$$
- قانون التشكيل الخارجي: ليكن λ عدد حقيقي و f تطبيق من $\mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{R})$. نعرف $\lambda . f$ كما يلي:
$$(\lambda . f)(x) = \lambda . f(x), x \in \mathcal{R}.$$
- العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجمع هو التطبيق الصفري، المعرف كما يلي:
$f(x) = 0, x \in \mathcal{R}$. يمكن أن نرمز له بالرمز $0_{\mathcal{F}(\mathcal{R},\mathcal{R})}$.
- نظير العنصر f بالنسبة لعملية الجمع هو التطبيق g من $\mathcal{R}$ إلى $\mathcal{R}$، المعرف بـ:
$g(x) = -f(x), x \in \mathcal{R}$. نرمز لنظير f بـ $-f$.

الفضاء الشعاعي للمتتاليات الحقيقية على الحقل $\mathcal{R}$

نرمز $\mathcal{S}$ لمجموعة المتتاليات الحقيقية $(u_n)n\in\mathcal{N}$. بمكن رؤية هذه المجموعة عل أنها مجموعة التطبيقات من $\mathcal{N}$ إلى $\mathcal{R}$؛ أي $\mathcal{S} = \mathcal{F}(\mathcal{R},\mathcal{N})$. يتم تزويد هذه المجموعة بالقانونين التاليين:

- قانون التشكيل الداخلي: ليكن $u = (u_n)n\in\mathcal{N}$ و $v = (v_n)n\in\mathcal{N}$ متتاليتان من $\mathcal{S}$. نعرف $u + v$ على أنها المتتالية $w = (w_n)n\in\mathcal{N}$ حيث حدها العام معرف كما يلي: $w_n = u_n + v_n, n \in \mathcal{N}$.
- قانون التشكيل الخارجي: ليكن λ عدد حقيقي و $u = (u_n)n\in\mathcal{N}$ عنصر من $\mathcal{S}$. نعرف $\lambda.u$ على أنها المتتالية $v = (v_n)n\in\mathcal{N}$ المعرفة كما يلي: $v_n = \lambda.u_n, n \in \mathcal{N}$.
- العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجمع هو المتتالية التي جميع حدودها مساوية للصفر.
- نظير $u = (u_n)n\in\mathcal{N}$ بالنسبة للجمع هو المتتالية $v = (v_n)n\in\mathcal{N}$ المعرفة بـ: $v_n = -u_n, n\in\mathcal{N}$. نرمز لنظير u بـ $-u$.

الفضاء الشعاعي للمصفوفات

مجموعة المصفوفات $M_{n,p}(\mathcal{R})$ بـ n سطر و p عمود بأمثال حقيقية تشكل فضاء شعاعي على الحقل $\mathcal{R}$. القانون الداخلي هو جمع مصفوفتين. القانون الخارجي هو ضرب مصفوفة بعدد حقيقي. العنصر الحيادي بالنسبة للجمع هو المصفوفة الصفرية (كافة عناصرها تساوي الصفر). نظير المصفوفة $A = (a_{i,j})$ هو المصفوفة $(-a_{i,j})$.

الفضاء الشعاعي لكثيرات الحدود

مجموعة كثيرات الحدود $\mathcal{R}[X]$) بأمثال حقيقية $P(X) = a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_1X + a_0$ تشكل فضاء شعاعي على الحقل $\mathcal{R}$. القانون الداخلي هو جمع كثيري حدود $P(X) + Q(X)$. القانون الخارجي هو ضرب كثير حدود بعدد حقيقي $\lambda.P(X)$. العنصر الحيادي بالنسبة للجمع هو كثير الحدود الصفري (كل أمثاله تساوي الصفر). نظير كثير الحدود $P(X)$ هو كثير الحدود $-P(X)$.

قواعد الحساب في الفضاءات الشعاعية

فرضية 2: ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K. ليكن $u \in E$ و $\lambda \in K$. عندئذ:

1. $0.u = 0_E$
2. $\lambda.0_E = 0_E$
3. $(-1).u = -u$
4. $\lambda.u = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ أو $u = 0_E$

ملاحظة 4: العملية التي تلحق (u,v) بـ $u + (-v)$ والتي يرمز لها $u - v$ تسمى عملية الطرح. وبالتالي لدينا الخواص التالية صحيحة: $\lambda(u-v) = \lambda u - \lambda v$ و $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \lambda u$.

.2 الفضاء الشعاعي الجزئي

.1.2 تعاريف وأمثلة

تعريف 2: ليكن $(E,+,.)$ فضاء شعاعي على الحقل K. نقول عن F إنه فضاء شعاعي جزئي من E إذا:

1. F زمرة جزئية من $(E,+)$
2. F مستقر بالضرب بسلمي، يعني أنه من أجل أي $(\lambda,u) \in K \times F$ فإن $\lambda.u \in F$

فرضية 3: ليكن $(E,+,.)$ فضاء شعاعي على الحقل K و F فضاء شعاعي جزئي من E. عندئذ F فضاء شعاعي على الحقل K.

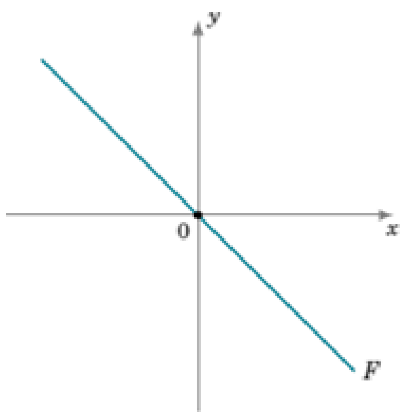
ملاحظة 5: إذا كان F فضاء شعاعي جزئي من E و G فضاء شعاعي جزئي من F، عندئذ G فضاء شعاعي جزئي من E. إذا كان F و G فضائي شعاعين جزئيين من E وكان $F \subset G$، عندئذ F فضاء شعاعي جزئي من G.

ملاحظة 6: $\{0_E\}$ و فضائي شعاعين جزئيين من E.

مبرهنة 1: ليكن $(E,+,.)$ فضاء شعاعي على الحقل K. F فضاء شعاعي جزئي من E إذا وفقط إذا:

1. $F \subset E$
2. $0_E \in F$
3. F مستقر بالتركيب الخطي، بمعنى أنه مهما يكن $u,v \in F$ و $\lambda,\mu \in K$ فإن $\lambda u + \mu v \in F$.

مثال 2:



المجموعة $F = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 | \; x + y = 0\}$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{R}^2$.

من الواضح أن $F \subset E$، وأن $0_E = (0,0) \in F$. ليكن لدينا $u = (x,y)$ و $v = (x',y')$ و $\mu \in \mathcal{R}$، عندئذ $x + y = 0$

بالتالي $\lambda x + \lambda y = 0$

وكذلك $x' + y' = 0$

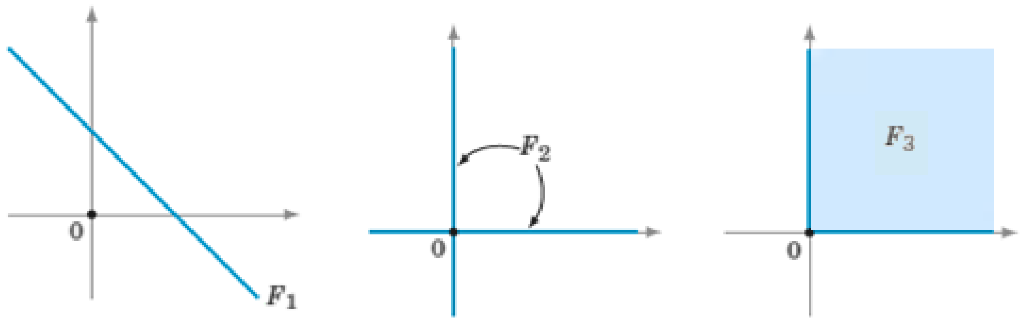
بالتالي $\mu x' + \mu y' = 0$.

ينتج مما سبق $\lambda x + \lambda y + \mu x' + \mu y' = 0$، أو بشكل آخر $\lambda x + \mu x' + \lambda y + \mu y' = 0$ وهكذا:

$\lambda u + \mu v = \lambda(x,y) + \mu(x',y') = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')$ ينتمي إلى F.

مثال 3:

- المجموعة $F_1 = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 | x + y = 2\}$ لا تشكل فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{R}^2$. في الحقيقة العنصر الصفري $(0,0)$ لا ينتمي إلى F_1.
- المجموعة $F_2 = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 | x = 0 \ or\ y = 0\}$ لا تشكل فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{R}^2$. في الحقيقة الشعاعان $u = (1,0)$ و $v = (0,1)$ ينتميان إلى F_2، لكن الشعاع $u + v = (1,1)$ لا ينتمي إلى F_2.
- المجموعة $F_3 = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 | x \geq 0 \ and\ y \geq 0\}$ لا تشكل فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{R}^2$. في الحقيقة الشعاع $u = (1,1)$ ينتمي إلى F_3، لكن من أجل $\lambda = -1$، الشعاع $-u = (-1,-1)$ لا ينتمي إلى F_3.



تمرين 1: هل مجموعة التوابع الزوجية (الفردية) تشكل فضاء شعاعي على $\mathcal{R}$ (قانوني الجمع والضرب بسلمي)؟

لنرمز بـ p إلى مجموعة التوابع الزوجية و i مجموعة التوابع الفردية. إنهما مجموعتان جزئيتان من الفضاء الشعاعي للتطبيقات $\mathcal{F}(\mathcal{R},\mathcal{R})$

$$p = \{f \in (\mathcal{R},\mathcal{R}) | f(-x) = f(x), x \in \mathcal{R}\}$$
$$i = \{f \in (\mathcal{R},\mathcal{R}) | f(-x) = -f(x), x \in \mathcal{R}\}$$

p و i فضاءان شعاعيان جزئيان من $(\mathcal{R},\mathcal{R})$. من السهل برهان ذلك، على سبيل المثال من أجل التوابع الزوجية p: المجموعة p محتواه في المجموعة $\mathcal{F}(\mathcal{R},\mathcal{R})$، التابع الصفري تابع زوجي، ليكن $f,g \in p$ و $\lambda,\mu \in \mathcal{R}$، عندئذ $\lambda f + \mu g \in p$. بالتالي p فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{F}(\mathcal{R},\mathcal{R})$ بالتالي فضاء شعاعي حسب الفرضية 3.

تمرين 2: مجموعة المصفوفات المتناظرة $\mathcal{S}_n$ هي مجموعة جزئية من الفضاء الشعاعي $M_n(\mathcal{R})$ (مصفوفات مربعة بعدها n). هل تشكل $\mathcal{S}_n$ فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي $M_n(\mathcal{R})$؟

يكفي ملاحظة أن المجموعة $\mathcal{S}_n$ محتواه في $M_n(\mathcal{R})$، وأن المصفوفة الصفرية متناظرة، وأن مجموع مصفوفتين متناظرتين بعد ضرب كل منهما بعدد حقيقي ينتج مصفوفة متناظرة.

مثال آخر عن فضاء شعاعي يتمثل في مجموعة الحلول لجملة خطية متجانسة. ليكن $AX = 0$ جملة بـ n معادلة و p مجهول:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

مبرهنة 2: ليكن $A \in M_{n,p}(\mathcal{R})$. وليكن $AX = 0$ جملة خطية متجانسة بـ p متحول. عندئذ مجموعة الأشعة حلول المعادلة تشكل فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{R}^p$.

مثال 4: ليكن لدينا الجملة التالية:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

مجموعة الحلول $F \subset \mathcal{R}^3$ للجملة: $F = \{(x = 2s - 3t, y = s, z = t) | s, t \in \mathcal{R}\}$. بالاعتماد على المبرهنة السابقة، F فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{R}^3$، بالتالي فإن F فضاء شعاعي.

يمكن كتابة F بطريقة مختلفة: عناصر المجموعة F تحقق المعادلة التالية: $x = 2y - 3z$، بمعنى آخر معادلة F هي $x - 2y + 3z = 0$. وجدنا سابقاً أن معادلة من هذا النوع هي معادلة مستوي يمر بمبدأ الاحداثيات، ورأينا أيضاً أن ذلك يشكل فضاء شعاعي (أمثلة 1).

2.2. تقاطع فضاءات شعاعية جزئية

مبرهنة 3: لتكن F و G فضاءين شعاعيين جزئيين من فضاء شعاعي $(E, +, .)$ على الحقل K. عندئذ التقاطع $F \cap G$ هو فضاء شعاعي جزئي من E.

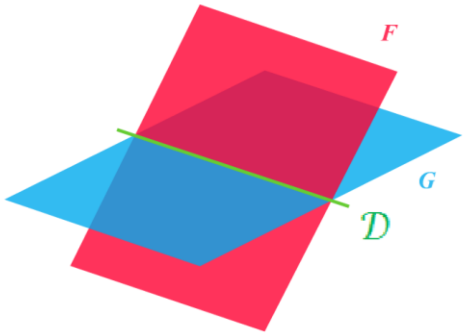
يمكن البرهان على أن التقاطع $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n$ لعائلة من الفضاءات الشعاعية الجزئية لـ E هو فضاء شعاعي جزئي من E.

ملاحظة 7: اجتماع فضاءين شعاعيين ليس بالضرورة أن يكون فضاء شعاعي جزئي.

مثال 5: ليكن $\mathcal{D}$ المجموعة الجزئية من $\mathcal{R}^3$ والمعرف كما يلي:

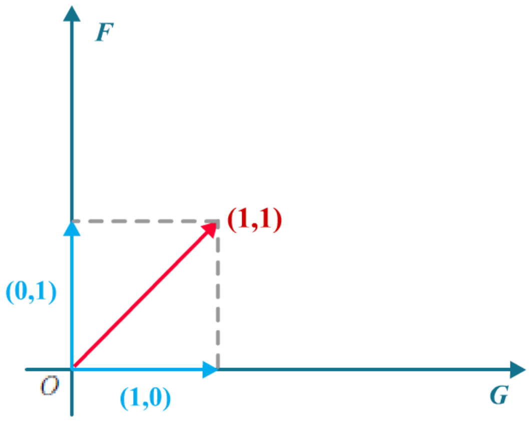
$$D = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 | x + 3y + z = 0 \text{ and } x - y + 2z = 0\}$$

هل تشكل $\mathcal{D}$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{R}^3$؟



المجموعة $\mathcal{D}$ هي تقاطع F و، المجموعتان الجزئيتان من $\mathcal{R}^3$ المعرفة كما يلي: $F = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 | x + 3y + z = 0\}$ و $G = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 | x - y + 2z = 0\}$ وهما يشكلان مستويين يمران بالمبدأ، بالتالي هما فضاءان شعاعيان جزئيان من $\mathcal{R}^3$. هكذا فإن $\mathcal{D} = F \cap G$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{R}^3$، إنه مستقيم شعاعي.

مثال 6: لنأخذ الفضاء الشعاعي $E = \mathcal{R}^2$. وليكن لدينا الفضاءين الشعاعين الجزئيين $F = \{(x,y) | x = 0\}$ و $G = \{(x,y) | y = 0\}$. إن الاجتماع $F \cup G$ ليس بفضاء شعاعي جزئي على $\mathcal{R}^2$. لنأخذ على سبيل المثال: $(0,1) + (1,0) = (1,1)$ مجموع شعاعين أحدهما من F والآخر من G، لكن المجموع لا ينتمي إلى $F \cap G$.



3. جمل الأشعة

1.3. التراكيب الخطية

تعريف 3: ليكن n عدد طبيعي، ليكن $v_1, v_2, \ldots, v_n$ n شعاع من فضاء شعاعي E. نسمي كل شعاع من الشكل $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$ (حيث $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ عناصر من الحقل K) تركيب خطي من الأشعة $v_1, v_2, \ldots, v_n$. كما نسمي السلميات $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ أمثال التركيب الخطي.

ملاحظة 8: عندما يكون $n = 1$، عندئذ $u = \lambda_1 v_1$ ونقول عندها أن u مرتبط بـ v_1.

أمثلة 7:

- في الفضاء الشعاعي $\mathcal{R}^3$ على الحقل $\mathcal{R}$، الشعاع $(3,3,1)$ عبارة عن تركيب خطي من الشعاعين $(1,1,0)$ و $(1,1,1)$ لأن: $(3,3,1) = 2(1,1,0) + (1,1,1)$.
- في الفضاء الشعاعي $\mathcal{R}^2$ على الحقل $\mathcal{R}$، الشعاع $u = (2,1)$ ليس مرتبط بالشعاع $v_1 = (1,1)$، لأنه لو كان الأمر كذلك سيوجد عدد حقيقي λ بحيث $u = \lambda_1 v_1$، وهذا يكافئ المساواة $(\lambda, \lambda) = (2,1)$.
- ليكن $E = \mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{R})$ الفضاء الشعاعي للتوابع الحقيقية. لتكن f_0, f_1, f_2, f_3 التوابع المعرفة بـ:

$$f_0(x) = 1, f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x^3, x \in \mathcal{R}$$

عندئذ التابع f المعرف بـ: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$ هو تركيب خطي من التوابع f_0, f_1, f_2, f_3 لأنه لدينا العلاقة: $f = f_3 - 2f_2 - 7f_1 - 4f_0$.

- في الفضاء $M_{2,3}(\mathcal{R})$، لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. يمكن كتابة A تركيب خطي من المصفوفات:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تمرين 3: ليكن $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ شعاعين من $\mathcal{R}^3$. أثبت أن $w = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ تركيب خطي من u و v.

الحل: نبحث عن λ و μ بحيث $w = \lambda u + \mu v$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6\mu \\ 4\mu \\ 2\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 6\mu \\ 2\lambda + 4\mu \\ -\lambda + 2\mu \end{pmatrix}$$

بالتالي لدينا:

$$\begin{cases} 9 = \lambda + 6\mu \\ 2 = 2\lambda + 4\mu \\ 7 = -\lambda + 2\mu \end{cases}$$

حل جملة المعادلات هو: $\lambda = -3$ و $\mu = 2$. بالتالي فإن w تركيب خطي من u و v:

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

تمرين 4: ليكن $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $v = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ شعاعين من $\mathcal{R}^2$. أثبت أن $w = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ لا يمكن أن يكون تركيب خطي من u و v.

الحل:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 6\mu \\ 2\lambda + 4\mu \\ -\lambda + 2\mu \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 9 = \lambda + 6\mu \\ 2 = 2\lambda + 4\mu \\ 7 = -\lambda + 2\mu \end{cases}$$

ليس لجملة المعادلات حل بالتالي لا يمكن أن يكون الشعاع w تركيب خطي من u و v.

2.3. الفضاء الشعاعي الجزئي المولد

تعريف 4: ليكن $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ جملة أشعة من الفضاء الشعاعي E على الحقل K. نسمي تقاطع كل الفضاءات الشعاعية الجزئية من E والتي تحوي الأشعة المذكورة بالفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالأشعة $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. إنه أصغر فضاء شعاعي جزئي (بمعنى الاحتواء) يحوي الأشعة $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

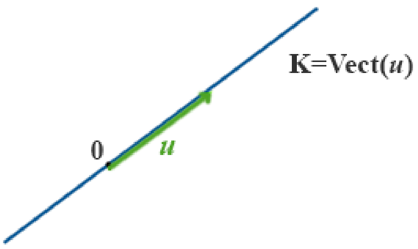
مبرهنة 4: ليكن $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ جملة أشعة من الفضاء الشعاعي E *على الحقل* K. عندئذ: مجموعة التراكيب الخطية للأشعة $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ تشكل فضاء شعاعي جزئي من E. نسمي الفضاء الشعاعي الجزئي المذكور بالفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالأشعة $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. ونرمز له بالرمز $Vect(v_1, v_2, \dots, v_n)$

$u \in Vect(v_1, v_2, \dots, v_n) \Leftrightarrow$ يوجد $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ بحيث $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$

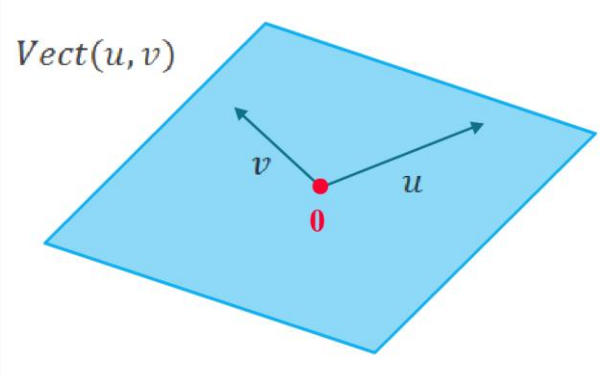
ملاحظة 9: لدينا بشكل خاص $Vect(\emptyset) = \{0_E\}$.

أمثلة 8:

- ليكن الفضاء الشعاعي E على الحقل K. وليكن $u \in E$، المجموعة $Vect(u) = \{\lambda u | \lambda \in K\}$ تشكل فضاء شعاعي جزئي من E مولد من u. نرمز له غالباً بـ Ku. إذا كان u مختلف عن الشعاع الصفري، ندعو الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالمستقيم الشعاعي.



- ليكن u و v شعاعين من E، الفضاء الشعاعي الجزئي المولد منهما: $Vect(u, v) = \{\lambda u + \mu v | \lambda, \mu \in K\}$. إذا كان الشعاعين u و v غير مرتبطين، ندعو الفضاء الشعاعي الجزئي المولد بالمستوي الشعاعي.



- ليكن $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ شعاعين من $\mathcal{R}^3$.

أوجد $\mathcal{P} = Vect(u, v)$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda u + \mu v = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Vect(u, v)$$

بالتالي:

$\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = \lambda + 3\mu \end{cases}$. تمثل معادلات وسيطية لمستوي $\mathcal{P}$ يمر بالمبدأ ويحوي الشعاعين u و v.

يمكن كتابة معادلة المستوي بالشكل: $x - 2y + z = 0$.

مثال 9: هل يشكل $F = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3\}$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{R}^3$؟
العنصر (x, y, z) من $\mathcal{R}^3$ ينتمي إلى F إذا وفقط إذا كان $x = y + z$. بالتالي u عنصر من F إذا وفقط إذا تمت كتابته بالطريقة $u = (y + z, y, z)$. وبما أنه لدينا $(y + z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(1, 0, 1)$. بالتالي F هو التركيب الخطي للشعاعين $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$. بالتالي F الفضاء الشعاعي الجزئي المولد منهما أي: $F = Vect\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$. إذن هو مستوي شعاعي(مستوي يمر من المبدأ).

مثال 10: الشعاعان $(1, 0)$ و $(0, 1)$ يولدان $\mathcal{R}^2$، في الحقيقية، ليكن $(x, y) \in \mathcal{R}^2$، يمكن كتابته دوماً من الشكل $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$.
كما أن الأشعة $\{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ تولد أيضاً $\mathcal{R}^2$، لأن:
$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) + 0(0, 0)$.

تمرين 5: ليكن E الفضاء الشعاعي للتطبيقات من $\mathcal{R}$ إلى $\mathcal{R}$، ولتكن f_0, f_1, f_2 التطبيقات المعرفة كما يلي:

$$f_0(x) = 1 , f_1(x) = x, f_2(x) = x^2; x \in \mathcal{R}$$

أوجد الفضاء الشعاعي المولد بـ $\{f_0, f_1, f_2\}$.
إنه الفضاء الشعاعي الجزئي من E للتوابع على شكل كثيرات حدود درجتها أقل أو يساوي 2، والتي هي من الشكل التالي: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

فرضية 4: ليكن جملتي أشعة A و B من الفضاء الشعاعي E، إذا كان $A \subset B$ فإن:
$Vect(A) \subset Vect(B)$.

3.3. الجملة المولدة

تعريف 5: ليكن n عدد طبيعي، ليكن $v_1, v_2, \dots, v_n$ n شعاع من فضاء شعاعي E على الحقل K . نسمي الجملة $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ جملة مولدة للفضاء الشعاعي E إذا كان كل شعاع u من الفضاء E تركيب خطي من الأشعة $v_1, v_2, \dots, v_n$. أي أنه يكتب على الشكل التالي:

$$\forall\, u \in E \quad \exists\, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K \quad u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

حيث الرموز : $\forall$ مهما يكن. $\exists$ يوجد

نقول أيضاً أن الجملة $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ تولد الفضاء الشعاعي E.

فرضية 5: ليكن $v_1, v_2, \dots, v_n$ n شعاع من فضاء شعاعي E على الحقل K. الجملة $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مولدة للفضاء الشعاعي E إذا وفقط إذا $E = Vect(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

أمثلة 11:

- لتكن الأشعة $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ و $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ و $v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ من $\mathcal{R}^3$. جملة الأشعة $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ هي مولدة للفضاء $\mathcal{R}^3$ لأن كل شعاع $u = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ من $\mathcal{R}^3$ يكتب على الشكل التالي:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

- لتكن الأشعة $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ و $v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ من $\mathcal{R}^3$. لا تشكل الأشعة $\{v_1, v_2\}$ جملة مولدة للفضاء $\mathcal{R}^3$. على سبيل المثال الشعاع $u = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ لا يوجد ضمن $Vect(v_1, v_2)$. في الحقيقة لأنه لو وجد لتمكنا من إيجاد العددين $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{R}$ بحيث $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$. وبالتالي:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

، أي لدينا الجملة الخطية:

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 0 = \lambda_1 + 3\lambda_2 \end{cases}$$

ليس لهذه الجملة الخطية حل.

- جملة الأشعة $(1, X, \dots, X^n)$ هي مولدة للفضاء $\mathcal{R}_n[X]$ على الحقل $\mathcal{R}$ كثيرات الحدود من الدرجة أصغر أو يساوي n، بينما ليست هي مولدة للفضاء $\mathcal{R}_{n+1}[X]$.

تمرين 6: ليكن $E = \mathcal{R}^2$. هل يشكل الشعاعان $u = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ و $v = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ جملة مولدة للفضاء $\mathcal{R}^2$؟ وهل يشكل الشعاعان $v_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ و $v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ جملة مولدة للفضاء $\mathcal{R}^2$؟

الحل: من الواضح أن جملة الأشعة $\{u, v\}$ هي جملة مولدة للفضاء $\mathcal{R}^2$ لأن أي شعاع $\mathcal{R}^2$ يكتب بدلالة u و v: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

كذلك الأمر بالنسبة للشعاعين $\{v_1, v_2\}$ يشكلان جملة مولدة للفضاء $\mathcal{R}^2$. في الحقيقة ليكن شعاع من $\mathcal{R}^2$. لنبرهن أنه عبارة عن تركيب خطي من v_1 و v_2:

بالتالي لدينا الجملة الخطية $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\begin{cases}2\lambda + \mu = x\\ \lambda + \mu = y\end{cases}$ والتي حلها:

$\lambda = x - y$ و $\mu = -x + 2y$.

4.3. الجمل المستقلة والمرتبطة

تعريف 6: نقول عن جملة أشعة $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ من الفضاء الشعاعي E على الحقل K أنها حرة أو مستقلة خطياً إذا كان أي تركيب خطي منها يساوي الصفر: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ أدى إلى كون كافة الأمثال مساوية للصفر أي: $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

إذا وجد أحد الأمثال مختلف عن الصفر تكون جملة الأشعة $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مرتبطة خطياً.

أمثلة 12:

- ليكن الفضاء الشعاعي $\mathcal{R}^3$ على الحقل $\mathcal{R}$. ليكن لدينا الأشعة التالية:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

هل الجملة مستقلة أو مرتبطة خطياً؟

$$2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

بالتالي الجملة مرتبطة خطياً.

- ليكن الفضاء الشعاعي $\mathcal{R}^3$ على الحقل $\mathcal{R}$. ليكن لدينا الأشعة التالية:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

هل الجملة مستقلة أو مرتبطة خطياً؟

لنشكل التركيب الخطي: $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$، ينتج لدينا الجملة الخطية:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \quad = 0 \\ \lambda_1 \qquad\quad + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

بحل الجملة الخطية نحصل على: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. أي أن الجملة مستقلة خطياً.

- لتكن الأشعة $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ و $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ و $v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ من $\mathcal{R}^4$. هل الجملة مستقلة أو مرتبطة خطياً؟

  الجملة مرتبطة لأن: $3v_1 + v_2 - v_3 = 0$

- كثيرات الحدود: $P_1(X) = 1 - X$ و $P_2(X) = 5 + 3X - 2X^2$ و $P_3(X) = 1 + 3X - X^2$ تشكل جملة مرتبطة في $\mathcal{R}[X]$، لأن:

  $3P_1(X) - P_2(X) + 2P_3(X) = 0$.

- في الفضاء الشعاعي للتطبيقات $\mathcal{F}(\mathcal{R},\mathcal{R})$ على الحقل $\mathcal{R}$، لنأخذ الجملة $\{cos, sin\}$. برهن أن هذه الجملة مستقلة خطياً.

  ليكن التركيب الخطي: $\forall\, x \in \mathcal{R}, \lambda cos(x) + \mu sin(x) = 0$. لنأخذ $x = 0$ ينتج $\lambda = 0$، و $x = \pi/2$ ينتج $\mu = 0$. بالتالي الجملة $\{cos, sin\}$ مستقلة خطياً.

  أما الجملة $\{cos^2, sin^2, 1\}$ فهي مرتبطة خطياً لأنه لدينا العلاقة الشهيرة في المثلثات $cos^2 + sin^2 - 1 = 0$. أمثال الارتباط الخطي هي: $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 1$ و $\lambda_3 = -1$.

جملة أشعة مرتبطة خطياً

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K. ليكن الشعاع $v \neq 0$، الجملة التي لديها شعاع واحد $\{v\}$ مستقلة (مرتبطة في حال $v = 0$).

فرضية 6: جملة الأشعة $\{v_1, v_2\}$ مرتبطة إذا وفقط إذا كان v_1 مضاعف ل v_2 او العكس (v_2 مضاعف ل v_1).

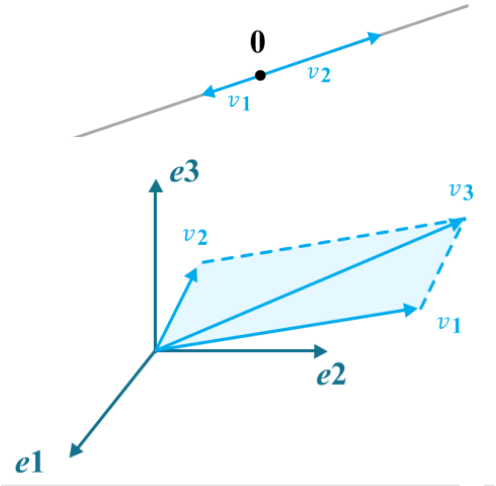
فرضية 7: ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K. جملة الأشعة $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ بحيث $n \geq 2$ من E مرتبطة إذا وفقط إذا كان على الأقل أحد الأشعة من $\mathcal{F}$ هو تركيب خطي من الأشعة الأخرى من $\mathcal{F}$.

فرضية 8:

1. كل جملة أشعة مستخلصة من جملة مستقلة خطياً تكون مستقلة.
2. كل جملة أشعة تحوي جملة مرتبطة خطياً تكون مرتبطة.

3. كل جملة أشعة تحوي الشعاع الصفري تكون مرتبطة.

4. كل حملة أشعة مؤلفة من عنصر واحد مختلف عن الصفر هي جملة مستقلة.



التفسير الهندسي للارتباط الخطي

في $\mathcal{R}^2$ أو $\mathcal{R}^3$، شعاعان مرتبطان خطياً إذا وفقط إذا كانا لهما حامل واحد، أي إذا وقعا على نفس المستقيم الشعاعي.

- في $\mathcal{R}^3$، ثلاث أشعة مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا كانوا في نفس المستوي الشعاعي.

فرضية 9: لتكن جملة الأشعة $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ في الفضاء الشعاعي $\mathcal{R}^n$. إذا كانت $\mathcal{F}$ تحوي اكثر من n عنصر $(p > n)$، عندئذ الجملة $\mathcal{F}$ مرتبطة خطياً.

5.3. قاعدة فضاء شعاعي

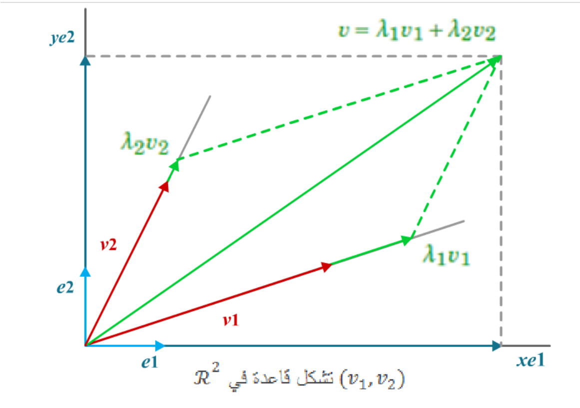
تعريف 7: ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K. جملة الأشعة $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ في E تشكل قاعدة في E إذا كانت الجملة $\mathcal{B}$ مستقلة خطياً ومولدة.

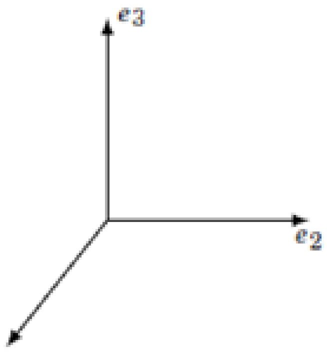
مبرهنة 5: لتكن جملة الأشعة $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ قاعدة في الفضاء الشعاعي E. كل شعاع $v \in E$ يكتب وبطريقة وحيدة كتركيب خطي من عناصر $\mathcal{B}$. بمعنى آخر يوجد سلميات $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ وحيدة بحيث: $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$.

نسمي السلميات $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ إحداثيات الشعاع v في القاعدة $\mathcal{B}$.

أمثلة 13:

- ليكن الشعاعان $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ و $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. عندئذ الجملة $\{e_1, e_2\}$ تشكل قاعدة في $\mathcal{R}^2$، تسمى القاعدة القانونية في $\mathcal{R}^2$.
- الأشعة $v_1 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ و $v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. عندئذ الجملة (v_1, v_2) تشكل قاعدة في $\mathcal{R}^2$





- لتكن الأشعة $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ و $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ و $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ من $\mathcal{R}^3$. الجملة $\{e_1, e_2, e_3\}$ تشكل قاعدة في $\mathcal{R}^3$.
- الأشعة في K^n:

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} \quad \cdots \quad e_n = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

تشكل القاعدة القانونية K^n.

- الأشعة في $\mathcal{R}^n$:

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \quad \cdots \quad v_n = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\\vdots\\n\end{pmatrix}$$

برهن أن جملة الأشعة $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ تشكل قاعدة في $\mathcal{R}^n$.

- القاعدة القانونية في $\mathcal{R}_n[X]$ هي: $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \dots, X^n\}$.
- الفضاء الشعاعي $\mathrm{M}_2(\mathcal{R})$ المصفوفات المربعة 2×2 يقبل القاعدة المؤلفة من الأشعة التالية:

$$M_1 = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$$
$$M_3 = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} \qquad M_4 = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

من الواضح أن أي مصفوفة $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ من $M_2(\mathcal{R})$ يمكن كتابتها وبطريقة وحيدة بالشكل:

$$M = aM_1 + bM_2 + cM_3 + dM_4$$

- إنه لتمرين جيد أن تبرهن أن المصفوفات الأربعة التالية تشكل أيضاً قاعدة في الفضاء الشعاعي $M_2(\mathcal{R})$:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

تمرين 7: ليكن $E = \{P \in \mathcal{R}_2[X], P(1) = 0\}$. برهن أن E فراغ شعاعي جزئي من $\mathcal{R}_2[\mathrm{X}]$. ومن ثم أوجد قاعدة له واستنتج بعده.

الحل: الشعاع الصفري ل $\mathcal{R}_2[X]$ هو كثير الحدود الصفري وبالأخص يأخذ القيمة صفر عند الواحد، بالتالي فهو ينتمي إلى E. ليكن $P, Q \in \mathcal{R}_2[X]$ بالتالي $P(1) = Q(1) = 0$. من أجل $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{R}$:

$$(\lambda_1 P + \lambda_2 Q)(1) = \lambda_1 P(1) + \lambda_2 Q(1) = 0$$

بالتالي: $\lambda_1 P + \lambda_2 Q \in E$، أي أن E فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{R}_2[\mathrm{X}]$.

ليكن $P = aX^2 + bX + c \in E$، $P(1)0 \Leftrightarrow a + b + c = 0 \Leftrightarrow c = -a - b$، بالتالي:

$$P = aX^2 + bX - a - b = a(X^2 - 1) + b(X - 1)$$

$X^2 - 1$ و $X - 1$ كثيري حدود غير مرتبطين، بالتالي هما جملة أشعة مستقلة تولد E، أي تشكلان قاعدة في E. إذن $\dim E = 2$.

تمرين 8: ليكن الشعاعين $v_1 = (1-i, i)$ و $v_2 = (2, -1+i)$ في $\mathcal{C}^2$. برهن أن الجملة (v_1, v_2) مستقلة على الحقل $\mathcal{R}$ ومرتبطة على الحقل $\mathcal{C}$.

الحل: من أجل كل $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$:

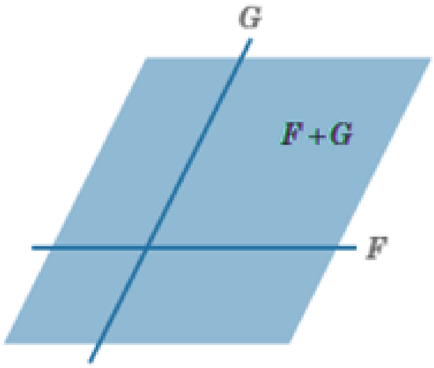
$$\alpha v1 + \beta v2 = 0 \Rightarrow \alpha(1-i, i) + \beta(2, -1+i) = (0,0)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha(1-i) + 2\beta = 0 \\ \alpha i + \beta(-1+i) = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta - \alpha i = 0 \\ -\beta + (\alpha+\beta)i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \; and - \alpha = 0 \\ -\beta = 0 \; and \; (\alpha+\beta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

بالتالي (v_1, v_2) جملة مستقلة على الحقل $\mathcal{R}$.

$$2v_1 - (1-i)v_2 = 2(1-i, i) - (1-i)(2, -1+i)$$
$$= (2(1-i) - (1-i)x2, 2i - (1-i)(-1+i))$$
$$= (0, 2i - 2i) = (0,0)$$

إذن يوجد علاقة بين الشعاعين والجملة (v_1, v_2) مرتبطة على الحقل $\mathcal{C}$.

4. مجموع فضاءين شعاعيين جزئيين

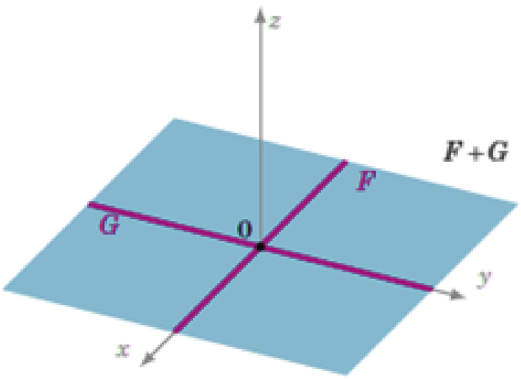


تعريف 8: ليكن F و G فضاءين شعاعيين جزئيين من فضاء شعاعي E على الحقل K. نسمي مجموعة العناصر $u + v$ حيث u عنصر من F و v عنصر من G مجموع الفضاءين الشعاعيين الجزئيين F و G. نرمز لهذا المجموع بـ: $F + G$. لدينا بالتالي:

$$F + G = \{u + v | u \in F, v \in G\}$$

فرضية 10: ليكن F و G فضاءين شعاعيين جزئيين من فضاء شعاعي E على الحقل K.

1. $F + G$ فضاء شعاعي جزئي من E
2. $F + G$ أصغر فضاء شعاعي جزئي يحوي كل من F و G



مثال 14: حدد $F + G$ في حالة F و G فضاءين شعاعيين جزئيين من $\mathcal{R}^3$ التاليين:

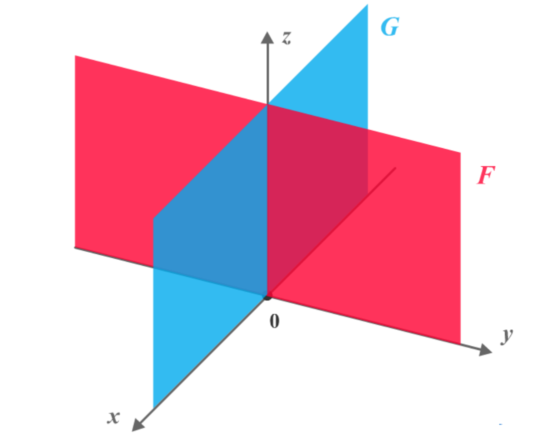
$$F = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 | y = z = 0\} \; and \; G = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 | x = z = 0\}$$

يكتب العنصر w من $G + F$ بالشكل $w = u + v$ حيث u عنصر من F و v عنصر من G. بما ان $u \in F$ يوجد $x \in \mathcal{R}$ بحيث $u = (x,0,0)$، وبما أن $v \in G$ يوجد $y \in \mathcal{R}$ بحيث $v = (x,0,0)$، وبالتالي $w = (x,y,0)$. وبالعكس هذا العنصر $w = (x,y,0)$ هو مجموع لكل من

$(x,0,0)$ و $(0,y,0)$. إذن $F+G=\{(x,y,z)\in\mathcal{R}^3|z=0\}$. ونرى في هذا المثال أيضاً أن أي عنصر من $F+G$ يكتب وبطريقة وحيدة مجموع عنصرين أحدهما من والآخر من G.

تمرين 9: حدد $F+G$ في حالة F و G فضاءين شعاعيين جزئيين من $\mathcal{R}^3$ التاليين:

$$F=\{(x,y,z)\in\mathcal{R}^3|x=0\}\ and\ G=\{(x,y,z)\in\mathcal{R}^3|y=0\}$$



الحل: في هذا التمرين سنحاول برهان أن $F+G=\mathcal{R}^3$. من تعريف $F+G$، كل عنصر من $F+G$ هو عنصر في $\mathcal{R}^3$. بالعكس، ليكن العنصر $w=(x,y,z)$ عنصر من $\mathcal{R}^3$، يمكن كتابته على الشكل: $w=(x,y,z)=(0,y,z)+(x,0,0)$ حيث $F\ni(0,y,z)$ و $G\ni(x,0,0)$، بالتالي w ينتمي إلى $F+G$.

ملاحظة 10: في هذا التمرين عنصر من $\mathcal{R}^3$ لا يكتب بالضرورة بطريقة وحيدة كمجموع عنصرين أحدهما من F والآخر من G. على سبيل المثال:

$$(1,2,3)=(0,2,3)+(1,0,0)=(0,2,0)+(1,0,3).$$

المجموع المباشر والفضاءات المتتامة

تعريف 9: F و G فضاءين شعاعيين جزئيين من فضاء شعاعي E. نقول عن المجموع $F+G$ أنه مباشر في E إذا:

1. $F\cap G=\{0_E\}$
2. $F+G=E$

نرمز للمجموع المباشر ب: $F\oplus G=E$. إذا كان F و G في مجموع مباشر، نقول عنهما فضاءين شعاعيين جزئيين متتامين.

فرضية 11: F و G متتامين في E إذا وفقط إذا كان كل عنصر من E يكتب وبطريقة وحيدة مجموع عنصرين أحدهما في E والآخر في G.

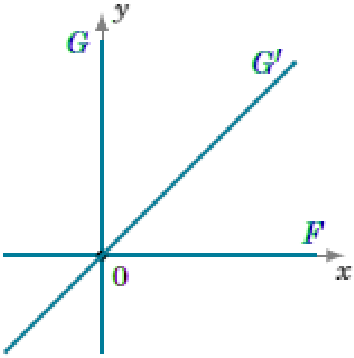
أمثلة 15:

- ليكن $F=\{(x,0)\in\mathcal{R}^2|x\in\mathcal{R}\}\ and\ G=\{(0,y)\in\mathcal{R}^2|y\in\mathcal{R}\}$. أثبت أن $F\oplus G=\mathcal{R}^2$.

من الواضح أن $F\cap G=\{(0,0)\}$، وبما أن $(x,y)=(x,0)+(0,y)$، بالتالي:

.$F + G = \mathcal{R}^2$

- لنحتفظ بـ F ولنأخذ $G' = \{(x,x) \in \mathcal{R}^2 | x \in \mathcal{R}\}$. أثبت أن $F \oplus G' = \mathcal{R}^2$.



لنبرهن أن $F \cap G' = \{(0,0)\}$. ليكن $(x,y) \in F \cap G'$، عندئذ من جهة $(x,y) \in F$ بالتالي $y = 0$، وأيضاً $(x,y) \in G'$ بالتالي $x = y$. إذن $(x,y) = (0,0)$.

لنبرهن الآن أن $F + G' = \mathcal{R}^2$. ليكن $u\,(x,y) \in \mathcal{R}^2$. لنبحث عن $v \in F$ و $w \in G'$ بحيث $u = v + w$. بما أن:

$v = (x_1, y_1) \in F$ إذن $y_1 = 0$ وبما أن:

$w = (x_2, y_2) \in G'$ ينتج $x_2 = y_2$. وبالتالي يصبح الهدف إيجاد x_1 و x_2 بحيث: $(x,y) = (x_1, 0) + (x_2, x_2)$.

وهكذا $x = x_1 + x_2$ و $y = x_2$، بالتالي: $x_1 = x - y$ و $x_2 = y$. أي: $(x,y) = (x-y, 0) + (y,y)$ وهذا يبرهن على أن أي عنصر من $\mathcal{R}^2$ هو مجموع عنصرين أحدهما من F والآخر من G'.

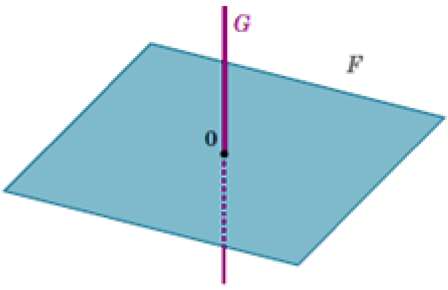
- وبشكل عام، مستقيمين مختلفين في مستوي يمر من المبدأ يشكلان فضاءين جزئيين متتامين.

تمرين 10: هل يشكل الفضاءين الشعاعيين الجزئيين من $\mathcal{R}^3$ والمعرفة كما يلي:

$$F = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 | x - y - z = 0\} \; and \; G = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 | y = z = 0\}$$

فضاءين متتامين في $\mathcal{R}^3$؟

الحل: من السهل برهان أن $F \cap G = \{0\}$. ليكن العنصر $u = (x,y,z) \in F \cap G$، إحداثيات العنصر u تحقق: $x - y - z = 0$ (u ينتمي إلى F)، و $y = z = 0$ (u ينتمي إلى G)، بالتالي: $u = (0,0,0)$.



بقي أن نبرهن أن $F + G = \mathcal{R}^3$. ليكن $u = (x,y,z)$ عنصر من الفضاء $\mathcal{R}^3$، يجب تحديد العنصرين v من F و w من G بحيث $u = v + w$. العنصر v من الشكل: $v = (y_1 + z_1, y_1, z_1)$ والعنصر w من الشكل: $w = (x_2, 0, 0)$. لدينا $u = v + w$ إذا وفقط إذا: $y_1 = y,\; z_1 = z,\; x_2 = x - y - z$. لدينا إذن:

$$(x,y,z) = (y+z, y, z) + (x - y - z, 0, 0)$$

مع $v = (y+z, y, z)$ من F و $w = (x-y-z, 0, 0)$ من G. بالنتيجة $F \oplus G = \mathcal{R}^3$.

تمرين 11: في الفضاء الشعاعي للتطبيقات $\mathcal{F}(\mathcal{R},\mathcal{R})$ على الحقل $\mathcal{R}$، نعتبر الفضاء الشعاعي الجزئي p مجموعة التوابع الزوجية والفضاء الشعاعي الجزئي i مجموعة التوابع الفردية. أثبت أن $p \oplus i = \mathcal{F}(\mathcal{R},\mathcal{R})$

الحل: لنبدأ في برهان أن $p \cap i = \{0_{\mathcal{F}(\mathcal{R},\mathcal{R})}\}$. ليكن $f \in p \cap i$، أي أن f تابع زوجي وفردي في آن واحد. ليكن $x \in \mathcal{R}$، بالتالي $f(-x) = f(x)$ (f زوجي) و $f(-x) = -f(x)$ (فردي). بالتالي $f(x) = -f(x)$ وهذا يعطي $f(x) = 0$.
لنبرهن الآن أن $p + i = \mathcal{F}(\mathcal{R},\mathcal{R})$. ليكن $f \in \mathcal{F}(\mathcal{R},\mathcal{R})$. ما يجب برهانه هو أن f يمكن كتابته كمجموع تابعين أحدهما زوجي والآخر فردي. إذا كان $f = g + h$، حيث $g \in p$ و $h \in i$. من جهة أولى لدينا $f(x) = g(x) + h(x)$، ومن جهة أخرى لدينا:
$f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$. بالتالي وبجمع المعادلتين وطرحهما (حل جملة معادلتين بمجهولين) نحصل على:

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad and \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

بالتالي فإن p و i هما في مجموع مباشر ضمن $\mathcal{F}(\mathcal{R},\mathcal{R})$: $p \oplus i = \mathcal{F}(\mathcal{R},\mathcal{R})$.

فرضية 12: ليكن جملتي أشعة A و B من الفضاء الشعاعي E. بالتالي: $Vect(A \cup B) = Vect(A) + Vect(B)$

ملاحظة 11: ليس بالضرورة أن يكون في الحالة العامة $Vect(A \cap B) = Vect(A) \cap Vect(B)$.
لنأخذ على سبيل المثال شعاعين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مختلفين ولكن مرتبطين خطياً. ليكن $A = \{\vec{a}\}$ و $B = \{\vec{b}\}$. لدينا: $Vect(A) = Vect(B) = Vect(\vec{a}) = Vect(\vec{b})$. ولكن $A \cap B = \varnothing$، بالتالي: $Vect(A \cap B) = \{\vec{0}\}$.

5. بعد فضاء شعاعي

1.5. تعاريف وأمثلة

تعريف 10: ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K. نسمي الفضاء E منتهي البعد إذا كان يقبل قاعدة لها عدد منته من العناصر.

مبرهنة 6 (بعد الفضاء الشعاعي): كافة قاعدات فضاء شعاعي جزئي E منتهي البعد لهن نفس عدد العناصر.

تعريف 11: بعد فضاء شعاعي منتهي البعد E ، ويرمز له $dim\, E$، هو بالتعريف عدد عناصر قاعدة لهذا الفضاء.

أمثلة 16:

- القاعدة القانونية في $\mathcal{R}^2$ $(1,0)$ و $(0,1)$. بعد $\mathcal{R}^2$ هو إذن 2.
- بشكل عام الفضاء K^n بعده n، لأن قاعدته القانونية $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ تحوي n عنصر.
- $dim\, \mathcal{R}_n[X] = n + 1$ لأن قاعدة $\mathcal{R}_n[X]$ هي $(1, X, X^2, \dots, X^n)$، والتي تحوي $n + 1$ عنصر.
- $\mathcal{R}[X]$ بعده غير منتهي.
- فضاء التطبيقات من $\mathcal{R}$ إلى $\mathcal{R}$: $\mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{R})$ بعده غير منتهي.
- فضاء المتتاليات الحقيقية $\mathcal{S} = \mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{N})$ بعده غير منتهي.

فرضية 13: ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K له قاعدة تحوي n عنصر. عندئذ:

1. أي جملة مستقلة من E لديها n عنصر على الأكثر.
2. أي جملة مولدة ل E لديها n عنصر على الأقل.

نتيجة 1: ليكن E فضاء شعاعي يقبل قاعدة من n عنصر، عندئذ أي قاعدة من E لديها n عنصر.

مبرهنة 7: ليكن E فضاء شعاعي بعده n على الحقل K، و $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ جملة أشعة من E عددها n. يوجد تكافئ بين:

1. $\mathcal{F}$ قاعدة لـ E.
2. $\mathcal{F}$ جملة أشعة مستقلة خطياً من E.
3. $\mathcal{F}$ جملة مولدة لـ E.

تمرين 12: من أجل أي قيم لـ $t \in \mathcal{R}$ تكون جملة الأشعة (v_1, v_2, v_3) التالية تشكل قاعدة لـ $\mathcal{R}^3$؟

$$v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix} \text{ و } v_2 = \begin{pmatrix}1\\3\\t\end{pmatrix} \text{ و } v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$$

الحل: لدينا جملة أشعة عددها 3 في الفضاء الشعاعي $\mathcal{R}^3$ ذو البعد 3. لذلك من أجل برهان أن (v_1, v_2, v_3) تشكل قاعدة، يكفي أن نبرهن أنها مستقلة خطياً أو أنها مولدة. عملياً من الأسهل أن نبرهن على جملة أشعة أنها مستقلة خطياً على أنها مولدة. ما هو الشرط الذي يجب تحقيقه من قبل t حتى تكون الجملة (v_1, v_2, v_3) مستقلة خطياً؟ ليكن $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathcal{R}$، بحيث $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. وهذا يعطي النظام الخطي:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + t\lambda_2 + t\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

وهذا يكافئ:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 \quad = 0 \\ (\mathrm{t}-4)\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 \quad = 0 \\ (\mathrm{t}-4)\lambda_2 + (\mathrm{t}-4)\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

من الواضح أنه من أجل $t \neq 4$ الحل الوحيد هو: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0,)$ بالتالي فإن الجملة (v_1, v_2, v_3) مستقلة خطياً. إذا كان $t = 4$، عندئذ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1,0,-1)$، بالتالي الجملة (v_1, v_2, v_3) مرتبطة خطياً.

2.5. بعد الفضاء الشعاعي الجزئي

وجدنا سابقاً أن أي فضاء شعاعي جزئي من فضاء شعاعي على الحقل K هو فضاء شعاعي على الحقل K. السؤال الذي يطرح نفسه هنا هل بعد الفضاء الشعاعي الجزئي منتهي أم لا. لنأخذ على سبيل المثال الفضاء الشعاعي للتوابع $E = \mathcal{F}(\mathcal{R}, \mathcal{R})$ من $\mathcal{R}$ إلى $\mathcal{R}$:

- يحوي الفضاء المذكور على الفضاء الشعاعي الجزئي $F_1 = \mathcal{R}_n[X]$ للتوابع التي تمثل كثيرات الحدود من الدرجة أصغر أو يساوي n، والذي بعده منتهي $(n + 1)$.
- ويحوي أيضاً على الفضاء الشعاعي الجزئي $F_2 = \mathcal{R}[X]$ للتوابع التي تمثل كثيرات الحدود، والذي بعده غير منتهي.

مبرهنة 8: ليكن E فضاء شعاعي جزئي على الحقل K بعده منتهي، عندئذ:

1. بعد كل فضاء شعاعي جزئي F من E يكون منتهي.
2. $dim\, E \leq dim\, F$
3. $dim\, F = dim\, E \Leftrightarrow F = E$

مثال 17: ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K بعده 2، الفضاءات الشعاعية الجزئية ل E:

- إما ان بعدها يساوي الصفر : إنه الفضاء الشعاعي الجزئي $\{0\}$.
- أو أن يكون بعدها يساوي الواحد: إنها المستقيمات الشعاعية، بمعنى آخر الفضاءات الجزئية من الشكل $Ku = Vect\{u\}$ المولدة من الشعاع غير الصفري u.
- أو أن يكون بعدها يساوي 2: إنه الفضاء الشعاعي كله E.

نتيجة 2: ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K. وليكن F و G فضاءين شعاعيين جزئيين من E. بفرض أن بعد F منتهي وأن $G \subset F$، عندئذ: $F = G \Leftrightarrow dim\, E = dim\, F$.

مثال 18: مستقيمان شعاعيان F و G إما أن يكونا متساويان أو أن تقاطعهما يساوي الشعاع الصفري.

تمرين 13: ليكن الفضاءين الشعاعيين الجزئيين من $\mathcal{R}^3$:

$$F = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^3 \middle| 2x - 3y + z = 0\right\} \quad G = Vect(u, v),$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; and \; v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

هل $F = G$؟

الحل: من الواضح أن الشعاعين u و v غير مرتبطين، بالتالي $dim\, G = 2$. كما أنه ينتمي إلى F. من أجل إيجاد بعد الفضاء F تجدر الإشارة إلى أنه محتوى تماماً في $\mathcal{R}^3$ (على سبيل المثال الشعاع $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ لا ينتمي إلى F)، بالتالي $dim\, F < dim\, \mathcal{R}^3 = 3$، وبما أن F يحوي G بالتالي $dim\, F \geq dim\, G = 2$، إذن بعد F لا يمكن أن يكون إلا 2. أخيراً برهنا أن $G \subset F$ وأن $dim\, G = dim\, F$، وهذا يؤدي إلى $G = F$.

مبرهنة 9: ليكن E فضاء شعاعي بعده منتهي وأن F و G فضاءين جزئيين من E. عندئذ لدينا:

$$dim\,(F\,+\,G)\;=\;dim\,F\,+\,dim\,G\;=\;dim\,(F\,\cap\,G)$$

نتيجة 3: إذا كان $E\;=\;F\oplus G$ فإن: $dim\,E\;=\;dim\,F\,+\,dim\,G$

نتيجة 4: كل فضاء شعاعي جزئي F من قضاء شعاعي E بعده منتهي يقبل فضاء جزئي متتم له في E.

نتيجة 5: ليكن F و G فضاءين شعاعيين جزئيين من فضاء شعاعي E بعده منتهي. عندئذ F و G متتامان في E إذا وفقط إذا تحقق على الأقل اثنان من أصل ثلاثة من:

1. $dim\,F\,+\,dim\,G\;=\;dim\,E$
2. $F\,\cap\,G\;=\;\{0_E\}$
3. $F\,+\,G\;=\;E$

تمرين 14: ليكن $H\;=\;\{(x,x,x)\in\mathcal{R}^3|x\in\mathcal{R}\}$ و $G\;=\;\{(0,y,z)\in\mathcal{R}^3|y,z\in\mathcal{R}\}$. أثبت أن F و G فضاءين شعاعين جزئيين من $\mathcal{R}^3$. حدد قاعدتهما وبعديهما. هل الفضاءان متتامان؟

الحل: من السهل ملاحظة أن الشعاع $(0,0,0)$ ينتمي إلى كل من F و G بالتالي كل منهما ليس بالخالية.

ليكن الشعاعين $(x,x,x),(y,y,y)\in F$ و $\lambda,\mu\in\mathcal{R}$. عندئذ:

$$\lambda(x,x,x)\;+\;\mu(y,y,y)\;=\;(\lambda x+\mu y,\lambda x+\mu y,\lambda x+\mu y)\in F$$

إذن F فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{R}^3$. ليكن الشعاعين $(0,y,z),(0,y',z')\in G$ و $,\mu\in\mathcal{R}$. عندئذ:

$$\lambda(0,y,z)\;+\;\mu(0,y',z')\;=\;(0,\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z')\in G$$

إذن G فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{R}^3$. نجد أيضاً أن:

$$F\;=\;\{x(1,1,1)|x\in\mathcal{R}\}\;=\;Vect(1,1,1),$$
$$G\;=\;\{y(0,1,0)\;+\;z(0,0,1)|x,y\in\mathcal{R}\}\;=\;Vect\,((0,1,0),(0,0,1))$$

بما أن الشعاع $(1,1,1)$ مختلف عن الصفر بالتالي مستقل خطياً بالتالي يمثل قاعدة للفضاء الجزئي F، وكذلك الشعاعين $(0,1,0)$ و$(0,0,1)$ مستقلين أيضاً (يمكن البرهان على ذلك بسهولة)، بالتالي يمثلان قاعدة للفضاء الجزئي G. نستنتج مما سبق أن $dim\,F\;=\;1$ و$dim\,G\;=\;2$. أخيراً ليكن الشعاع $(x,y,z)\in F\,\cap\,G$، بالتالي $x\;=\;y\;=\;z$ لانتمائه إلى F و $x\;=\;0$ لانتمائه إلى G، أي أن: $F\,\cap\,G\;=\;\{(0,0,0)\}$ ، مما يعني أن F و G متتامان في $\mathcal{R}^3$.

3.5. رتبة جملة أشعة

تعريف 12: ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K ولتكن $\{v_1, \dots v_p\}$ جملة منتهية من الأشعة في E، رتبة الجملة $\{v_1, \dots v_p\}$، هو بعد الفضاء الشعاعي الجزئي $Vect(v_1, \dots v_p)$ الذي تولده الأشعة $v_1, \dots v_p$.
بمعنى آخر:

$$rg(v_1, \dots v_p) = dim\, Vect(v_1, \dots v_p)$$

فرضية 14: ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K ولتكن $\{v_1, \dots v_p\}$ جملة مؤلفة من p شعاع من E.
عندئذ:

1. $0 \leq rg(v_1, \dots v_p) \leq p$: رتبة الجملة أصغر أو يساوي عدد عناصرها.
2. إذا كان بعد E منتهي فإن $rg(v_1, \dots v_p) \leq dim\, E$: رتبة الجملة أصغر أو يساوي بعد الفضاء E.

ملاحظة 12:

- رتبة الجملة تساوي 0 إذا وفقط إذا كانت جميع أشعة الجملة هي الشعاع الصفري.
- رتبة الجملة $\{v_1, \dots v_p\}$ تساوي p إذا وفقط إذا كانت الجملة $\{v_1, \dots v_p\}$ مستقلة خطياً.

مثال 19: ماهي رتبة جملة الأشعة التالية في الفضاء $\mathcal{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m \end{pmatrix} \text{ و } v_2 = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ m \end{pmatrix} \text{ و } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m \end{pmatrix}$$

من أجل $m = 1$ نحصل على $v_1 = v_2 = v_3$ بالتالي فإن رتبة الجملة $rg(v_1, v_2, v_3) = 1$.
من أجل $m = -1/2$ يكون $v_1 = -v_2 - v_3$ بالتالي الرتبة إما 1 (الشعاع v_1 غير صفري) أو 2. لنرى إذا كانت الجملة $\{v_2, v_3\}$ مستقلة: $\Leftarrow$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \frac{1}{2}\beta = 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta = 0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}\alpha + \beta = 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta = 0 \end{cases} \Leftarrow \alpha = \beta = 0$$

$\alpha v_2 + \beta v_3 = 0$. بالتالي فإن رتبة الجملة $rg(v_1, v_2, v_3) = 2$.
من أجل قيم $m \neq \{1, -1/2\}$ لنرى فيما إذا كانت الجملة $\{v_1, v_2, v_3\}$ مستقلة أم لا عن طريق إيجاد حلول المعادلة: $\alpha v1 + \beta v2 + \gamma v3 = 0$

$$\begin{cases} \alpha + m\beta + m\gamma = 0 \\ m\alpha + \beta + m\gamma = 0 \\ m\alpha + m\beta + m\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + m\beta + m\gamma = 0 \\ m\alpha + \beta + m\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

بطرح المعادلة الأولى من الثالثة نحصل على $0 = (m-1)\beta + (m-1)\gamma \Leftarrow 0 = +\gamma$ وبطرحها من المعادلة الثالثة نحصل على $0 = \alpha$. وبنفس الطريقة نطرح المعادلة الثانية من الثالثة نحصل على: $+ \alpha$ $0 = (m-1)\alpha + (m-1)\gamma \Leftarrow 0 = \gamma$ نطرحها من جديد من المعادلة الثالثة نحصل على $= \beta$ 0 . بالتالي $0 = \gamma$. أي أن الجملة مستقلة وبالتالي فإن: $rg(v_1, v_2, v_3) = 3$.

تمرين 15: ما هي رتبة جملة الأشعة $\{v_1, v_2, v_3\}$ التالية في الفضاء $\mathcal{R}^4$:

$$v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ و } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ و } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

الحل: بما أنها أشعة من الفضاء الشعاعي $\mathcal{R}^4$ بالتالي $rg(v_1, v_2, v_3) \leq 4$. وبما أنه لا يوجد سوى 3 أشعة فإن $rg(v_1, v_2, v_3) \leq 3$. الشعاع الأول مختلف عن الشعاع الصفري بالتالي $rg(v_1, v_2, v_3) \geq 1$. من الواضح أن الشعاعين ${}_1$ و v_2 مستقلان خطياً بالتالي $rg(v_1, v_2, v_3) \geq rg(v_1, v_2) = 2$، بقي علينا أن نحدد فيما إذا كانت الرتبة تساوي 2 أو 3. من أجل ذلك نبحث فيما إذا كانت الأشعة $\{v_1, v_2, v_3\}$ مرتبطة أو مستقلة خطياً عن طريق حل الجملة الخطية $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$. نجد أن:
$v_1 - v_2 + v_3 = 0$. والجملة مرتبطة. هكذا فإن $Vect(v_1, v_2, v_3) = Vect(v_1, v_2)$، بالتالي $rg(v_1, v_2, v_3) = dim\, Vect(v_1, v_2, v_3) = 2$.

6. التطبيقات الخطية

1.6. تعاريف وأمثلة

تعريف 13: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K. نسمي التطبيق f من E إلى F تطبيق خطي إذا تحقق الشرطين التاليين:

1. $f(u + v)\ f(u) + f(v)$ من أجل أي عنصرين $u, v \in E$ E.
2. $f(\lambda . u) = \lambda . f(u)$ من أجل أي عنصر $u \in E$ و $\lambda \in K$.

نرمز لمجموعة التطبيقات الخطية من E إلى F ب: $\mathcal{L}(E, F)$.

ملاحظة 13: تطبيق خطي من E إلى F يسمى أيضاً مورفيزم morphism أو أومومورفيزم homomorphism فراغ شعاعي. كما أن تطبيق خطي من E إلى E يسمى أيضاً أندومورفيزم endomorphism، نرمز لمجموعة ال أندومورفيزم في E بالرمز $\mathcal{L}(E)$.

ملاحظة 14: نسمي التطبيق الخطي f من E إلى K بالشكل الخطي.

أمثلة 20:

- التطبيق $f: \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^2$ المعرف كما يلي: $f(x,y,z) = (-2x, y+3z)$ خطي. في الحقيقة، ليكن العنصران من $(x,y,z): \mathcal{R}^3 =$ و $v = (x',y',z')$ و λ من $\mathcal{R}$

$$f(u + v) = f(x+x', y+y', z=z') = (-2(x+x'), y+y'+3(z+z'))$$
$$= (-2x, y+3z) + (-2x', y'+3z') = f(u) + f(v)$$
$$f(\lambda.u) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (-2\lambda x, \lambda y + 3\lambda z) = (-2x, y+3z) = \lambda.f(u)$$

- التطبيق $f: \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}$ المعرف كما يلي: $f(x,y,z) = 4x - 5y + 3z$ هو شكل خطي. في الحقيقة، ليكن العنصران من $u = (x,y,z): \mathcal{R}^3$ و $v = (x',y',z')$ و λ من $\mathcal{R}$

$$f(u + v) = f(x+x', y+y', z+z') = 4(x+x') - 5(y+y') + 3(z+z')$$
$$= 4x - 5y + 3z + 4x' - 5y' + 3z'$$
$$= f(u) + f(v)$$
$$f(\lambda.u) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = 4\lambda x - 5\lambda y + 3\lambda z = \lambda(4x - 5y + 3z) = \lambda.f(u)$$

- التطبيق $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ المعرف كما يلي: $f(x) = 2x + 1$ ليس بخطي لأنه على سبيل المثال:

$f(2) = 3$ و $f(1) = 2$ و $f(3) = 4$، بينما

$.f(1+2) = f(3) = 4 \neq 5 = f(1) + f(2)$

- التطبيق الصفري، ويرمز له $0_{\mathcal{L}(E,F)}$: $E \to F, f(u) = 0_F$ من أجل $u \in E$ هو تطبيق خطي.
- التطبيق الواحدي، ويرمز له id_E : $f: E \to E, f(u) = u$ من أجل $u \in E$ هو تطبيق خطي (أندومورفيزم).
- ليكن $E = \mathcal{R}[X]$ الفضاء الشعاعي لكثيرات الحدود، $Q \in \mathcal{R}[X]$. التطبيق $f: \mathcal{R}[X] \to \mathcal{R}[X]$ المعرف بـ: $f(P(X)) = P(X).Q(X)$ هو أندومورفيزم على $\mathcal{R}[X]$.
- التطبيق $f: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ المعرف كما يلي: $f(x,y) = x + y + 1$ ليس بخطي. لماذا؟
- التطبيق $f: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ المعرف كما يلي: $f(x,y) = x^2 + y^2$ ليس بخطي. لماذا؟

فرضية 15: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K. إذا كان f تطبيق خطي من E إلى F، عندئذ:

1. $f(0_E) = 0_F$
2. $f(-u) - f(u)$، من أجل أي عنصر $u \in E$

فرضية 16: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K. إذا كان f تطبيق من E إلى F. التطبيق f خطي إذا وفقط إذا ومن أجل أي عنصرين $u, v \in E$ ومن أجل السلميين $\lambda, \mu \in K$ لدينا:

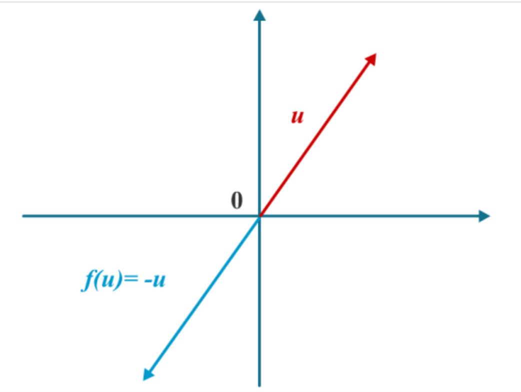
$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

مثال 21: ليكن $E = \mathcal{R}_n[X]$ الفضاء الشعاعي لكثيرات الحدود من الدرجة أصغر أو يساوي n على الحقل $\mathcal{R}$. وليكن $E = \mathcal{R}_{n+1}[X]$ والتطبيق $\mathrm{f}: \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ المعرف كما يلي: $f(P(X)) = X.P(X)$، بمعنى

آخر إذا كان $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$، فإن $f(P(X)) = a_n X^{n+1} + \cdots + a_1 X^2 + a_0 X$.

هذا التطبيق خطي لأن:

$f(\lambda P(X) + \mu Q(X)) = \lambda X P(X) + \mu X Q(X) = \lambda f(P(X)) + \mu f(Q(X))$.



أمثلة هندسية

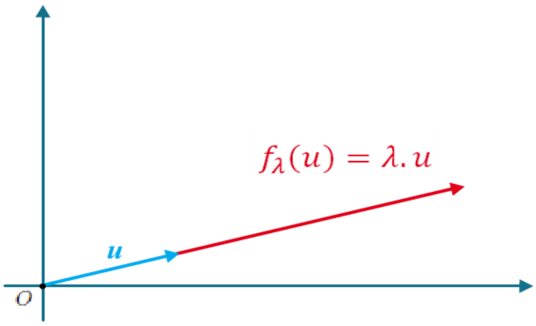
التناظر المركزي

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K. نعرف التطبيق $f: E \to F$ المعرف كما يلي: $f(u) = -u$. f خطي ويسمى التناظر المركزي بالنسبة للمبدأ 0_E.

التحاكي

ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K وليكن $\lambda \in K$. نعرف التطبيق $f_\lambda: E \to E$ بـ: $f_\lambda(u) = \lambda u$.

f_λ تطبيق خطي. نسمي f_λ تحاكي نسبته λ.



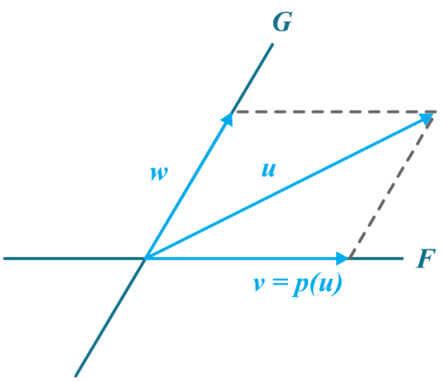
حالات خاصة:

- $\lambda = 1$، f_λ التطبيق الواحدي
- $\lambda = 0$، f_λ التطبيق الصفري
- $\lambda = -1$، f_λ التناظر المركزي

البرهان على أن f_λ تطبيق خطي:

$$f_\lambda(\alpha u + \beta v) = \lambda(\alpha u + \beta v) = \alpha(\lambda u) + \beta(\lambda v) = \alpha f_\lambda(u) + \beta f_\lambda(v)$$

الاسقاط



ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K وليكن F و G فضاءين شعاعيين جزئيين متتامين في E، بمعنى أن $E = F \oplus G$. كل شعاع u من E يمكن كتابته وبشكل وحيد $u = v + w$ حيث $v \in F$ و $w \in G$. الاسقاط على F وبشكل موازٍ لـ G هو التطبيق $p: E \to E$ والمعرف بـ $p(u) = v$.

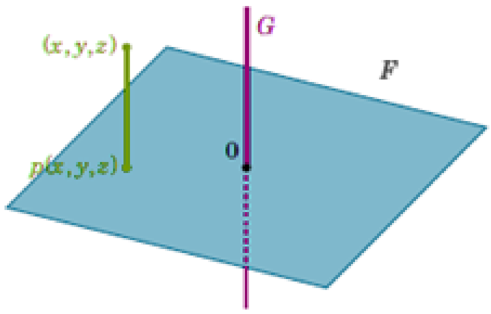
الاسقاط تطبيق خطي: بالحقيقة بفرض $u, u' \in E$ و $\lambda, \mu \in K$. لنفصل u و u' باستخدام $E = F \oplus G$: $u = v + w$ و $u' = v' + w'$ مع $v, v' \in F$ و $w, w' \in G$.

$$\lambda u + \mu u' = \lambda(v + w) + \mu(v' + w') = (\lambda v + \mu v') + (\lambda w + \mu w')$$

بما أن F و G فضاءين شعاعيين جزئيين من E، بالتالي $\lambda v + \mu v' \in F$ و $\lambda w + \mu w' \in G$، وهكذا:

$$p(\lambda u + \mu u') = \lambda v + \mu v' = \lambda p(u) + \mu p(u')$$

مثال 22: وجدنا سابقاً في التمرين 10 أن الفضاءين الشعاعيين الجزئيين F و G من $\mathcal{R}^3$ هما فضاءان متتامان في $\mathcal{R}^3$



$$F = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 | x - y - z = 0\} and$$
$$G = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 | y = z = 0\}$$

ووجدنا أن الفصل إلى مركبات يكتب على الشكل التالي:

$$(x,y,z) = (y+z,y,z) + (x-y-z,0,0).$$

إذا كان p المسقط على F الموازي لـ G، بالتالي لدينا:

$$p(x,y,z) = (y+z,y,z)$$

مثال 23: وجدنا سابقاً في التمرين 11 أن الفضاءين الشعاعيين الجزئيين $\mathcal{p}$ التوابع الزوجية و $\mathcal{i}$ التوابع الفردية من الفضاء الشعاعي $\mathcal{F}(\mathcal{R},\mathcal{R})$ هما فضاءان متتامان في $\mathcal{F}(\mathcal{R},\mathcal{R})$.

ليكن p بـ المسقط على $\mathcal{p}$ ومواز لـ $\mathcal{i}$. إذا كان f عنصر من $\mathcal{F}(\mathcal{R},\mathcal{R})$، لدينا $p(f) = g$، حيث: $g: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ معرف كما يلي:

$$g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}.$$

2.6.الصورة والصورة العكسية لتطبيق خطي

الصورة المباشرة والعكسية لفضاء شعاعي جزئي

فرضية 17: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K، وليكن $f \in \mathcal{L}(E,F)$، ليكن أيضاً G فضاء شعاعي جزئي من E و H فضاء شعاعي جزئي من F. عندئذ:

1. $f(G)$ فضاء شعاعي جزئي من F
2. $f^{-1}(H)$ فضاء شعاعي جزئي من E

صورة ونواة تطبيق خطي

تعريف 14: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K، وليكن $f \in \mathcal{L}(E,F)$

1. صورة التطبيق الخطي $Im\, f$ والمعرفة ب $Im\, f = f(E)$. إنها فضاء شعاعي جزئي من F
2. نواة التطبيق الخطي $Ker\, f$ والمعرفة ب $Ker\, f = f^{-1}(0_F)$. إنها فضاء شعاعي جزئي من E

مبرهنة 10: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K، وليكن $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. التطبيق f غامر إذا وفقط إذا $Im\, f = F$.
2. التطبيق f غامر إذا وفقط إذا $Ker\, f = \{0_E\}$.

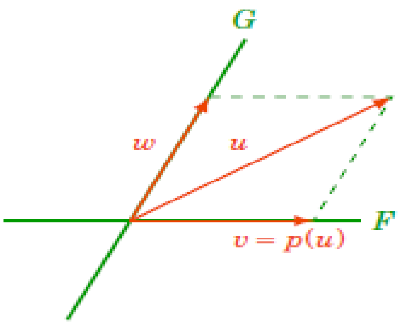
نتيجة 6: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K، وليكن $f \in \mathcal{L}(E,F)$. عندئذ صورة التطبيق الخطي $Im\, f$ هي فضاء شعاعي جزئي من F، ونواة التطبيق الخطي $Ker\, f$ هي فضاء شعاعي جزئي من E.

مثال 24: لنأخذ التطبيق الخطي السابق $f: \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{R}^2$ المعرف كما يلي:
$f(x,y,z) = (-2x, y+3z)$. ولنحسب نواة وصورة f.

الحل: نواة التطبيق f، ليكن
$(x,y,z) \in Ker\, f \Leftrightarrow f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow (0,0) = (-2x, y+3z)$.
بالتالي لدينا الجملة التالية:
$$\begin{cases} -2x = 0 \\ y+3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y,z) = (0,-3z,z), z \in \mathcal{R}.$$
إذن $Ker\, f = \{(0,-3z,z) | z \in \mathcal{R}\}$. أو بمعنى آخر $Ker\, f = Vect\,(0,-23,1)$. إنه مستقيم فراغي.
لنحسب الآن صورة التطبيق f:
$f(x,y,z) = (x',y')(x',y) \Leftrightarrow (-2x, y+3z) \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = x' \\ y+3z = y' \end{cases}$. يمكننا أن نأخذ على سبيل المثال $x = -'/2$ و $y' = y$ و $z = 0$. بالنتيجة من أجل أي عنصر $(x',y') \in \mathcal{R}^2$، لدينا $f(-x'/2, y', 0) = (x',y')$. وهذا يعني أن $Im\, f = \mathcal{R}^2$، بالتالي التطبيق غامر.

تمرين 16: ليكن E فضاء شعاعي على الحقل K، وليكن F و G فضاءين شعاعيين جزئيين متتامين في E، أي: $E = F \oplus G$. ليكن p التطبيق الخطي الاسقاط على F بشكل مواز لـ G. أوجد نواة وصورة p.

الحل: إن أي شعاع u من E يكتب وبطريقة وحيدة $u = v + w$ حيث $v \in F$ و $w \in G$ ولدينا بالتعريف $p(u) = v$.



نواة التطبيق p: هي مجموعة الأشعة u من E بحيث $v = 0$، بالتالي $Ker\, p = G$.
صورة التطبيق p: نعرف أن $Im\, p \subset F$. وبالعكس إذا كان $u \in F$ عندئذ $p(u) = v$، بالتالي $F \subset Im\, p$.
بالنتيجة $Ker\, p = G$ و $Im\, p = F$.

مثال 25: $n \geq 1$، ليكن التطبيق الخطي $f: \mathcal{R}_n[X] \rightarrow \mathcal{R}_{n+1}[X]$ والمعرف كما يلي:
$f(P(X)) = X.P(X)$، أوجد نواة وصورة التطبيق f.
نواة التطبيق f: ليكن $P(X) = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathcal{R}_n\{X\}$، بحيث

$f(P(X)) = X.P(X) = 0$. أي: $a_nX^{n+1}+\dots+a_1X^2+a_0X = 0$ وبالتالي: $a_i = 0,\ i \in \{0,\dots,n\}$ أي أن $P(X) = 0$. والنواة إذن $Ker\, f = \{0\}$.
أما صورة التطبيق $Im\, f$ فهي مجموعة كثيرات الحدود من الفضاء $\mathcal{R}_{n+1}[X]$ بدون حد ثابت، بالتالي: $Im\, f = Vect(X, X^2, \dots, X_{n+1})$. مما سبق نلاحظ أن التطبيق f متباين لكن ليس غامر.

صورة جملة أشعة

فرضية 18: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K، وليكن $f \in \mathcal{L}(E,F)$. ولتكن $\{u_1, \dots u_n\}$ جملة من الأشعة في $E(n \in \mathcal{N})$:

1. إذا كانت الجملة $\{u_1, \dots u_n\}$ مرتبطة خطياً، فإن $\{f(u_1), \dots f(u_n)\}$ مرتبطة أيضاً.
2. إذا كانت الجملة $\{f(u_1), \dots f(u_n)\}$ مستقلة خطياً، فإن $\{u_1, \dots u_n\}$ مستقلة أيضاً.
3. إذا كانت الجملة $\{u_1, \dots u_n\}$ مستقلة و f متباين، فإن $\{f(u_1), \dots f(u_n)\}$ مستقلة أيضاً.
4. $f(Vect(u_1, \dots u_n)) = Vect(f(u_1), \dots f(u_n))$. وبشكل خاص إذا كانت الجملة $\{\ \ _1, \dots u_n\}$ مولدة لـ E، عندها الجملة $\{f(u_1), \dots f(u_n)\}$ تكون مولدة لـ $Im\, f$.
5. إذا كانت الجملة $\{u_1, \dots u_n\}$ قاعدة في E والتطبيق f إيزومورفيزم، عندها تكون الجملة $f(u_1), \dots f(u_n)$ قاعدة في F.

ملاحظة 15: إذا لم يكن التطبيق f متباين، الصورة بواسطة f لجملة مستقلة ليس من الضروري أن تكون مستقلة. على سبيل المثال ليكن u شعاع من نواة التطبيق مختلف عن الصفر، بالتالي الجملة $\{u\}$ مستقلة ولكن $f(u) = \{0_F\}$ مرتبطة.

فرضية 19: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K، وليكن $f \in \mathcal{L}(E,F)$. لتكن $\{e_1, \dots e_n\}$ قاعدة في E و $\{f_1, \dots f_n\}$ جملة أشعة في F. عندئذ يوجد تطبيق خطي وحيد في $f \in \mathcal{L}(E,F)$ بحيث: $f(e_i) = f_i$ من أجل كل $i \in \{1, \dots, n\}$.

3.6. الفضاء الشعاعي (E, F)

ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K، وليكن $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ و $\lambda \in K$. نعرف $f + g$ كما يلي:

$$\begin{aligned} f + g &: E \to F \\ x &\mapsto f(x) + f(y) \end{aligned}$$

كما نعرف λf كما يلي:

$$\begin{aligned} \lambda f &: E \to F \\ x &\mapsto \lambda f(x) \end{aligned}$$

فرضية 20: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K. المجموعة $\mathcal{L}(E,F)$ مزودة بقانوني الجمع والضرب الخارجي المعرفين سابقاً تشكل فضاء شعاعي على الحقل K. الشعاع الصفري لـ $\mathcal{L}(E,F)$ هو التطبيق الصفري $0_{\mathcal{L}(E,F)}$.

تركيب تطبيقين خطيين

فرضية 21: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K، f تطبيق خطي من E إلى F و g تطبيق خطي من F إلى G. بالتالي $f \circ g$ هو تطبيق خطي من E إلى G.

فرضية 22: ليكن E و F و G ثلاث فضاءات شعاعية على الحقل K، f و f_1 و f_2 تطبيقات خطية من E إلى F و g و g_1 و g_2 تطبيقات خطية من F إلى G. عندئذ:

1. $g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$
2. $(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$

تعريف 15: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K. تطبيق خطي من E إلى F تقابل يسمى إيزومورفيزم. كما نسمي أوتومورفيزم على E كل أندومورفيزم تقابل. نرمز لمجموعة الأوتومورفيزمات في E ب $GL(E)$. نقول عن E و F متشاكلتان isomorph إذا وجد إيزومورفيزم من E إلى F.

فرضية 23: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K. إذا كان f إيزومورفيزم من E إلى F، بالتالي f^{-1} يكون إيزومورفيزم من F إلى E.

مثال 26: ليكن التطبيق $f: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$ المعرف كما يلي: $f(x,y) = (2x+3y, x+y)$. من السهل أن نبرهن أن f خطي. لبرهان أن f تقابل يمكن حساب نواته وصورته. لكن هنا سنحسب التطبيق العكسي مباشرة: نبحث عن حل $f(x,y) = (x',y')$، وهذا يوافق حل المعادلة $(2x+3y, x+y) = (x',y')$ وهي جملة خطية معادلتين بمجهولين. نجد بعد الحل أن $(x,y) = (-x'+3y', x'-2y')$. بالتالي $f^{-1}(x',') = (-x'+3y', x'-2y')$. يمكننا البرهان بسهولة أن f^{-1} هو التطبيق العكسي لـ f وأن f^{-1} هو تطبيق خطي.

ملاحظة 16: بشكل خاص، $\mathcal{L}(E)$ فضاء شعاعي جزئي من الفضاء $\mathcal{L}(E,F)$.

ملاحظة 17: بشكل خاص فإن تركيب أندومورفيزمين من E هو أندومورفيزم من E. بمعنى آخر، $\circ$ يمثل قانون تشكيل داخلي على $\mathcal{L}(E)$.

نتيجة 7: تشكل البنية $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ حلقة غير تبديلية وغير تامة بشكل عام، بالإضافة إلا أن $1_{\mathcal{L}(E)} = id_E$.

ملاحظة 18: ليكن f و g أندومورفيزمين من نفس الفضاء الشعاعي E، تركيب التطبيقين $(f \circ g)$ سيرمز له أحياناً fg.

ملاحظة 19: ليكن E فضاء شعاعي جزئي على الحقل K. يمكننا من اجل أي أندومورفيزم f ومن أجل اي عدد طبيعي أو صفر تعريف الأندومورفيزم f^k كما يلي:

$$f^0 = id_E;\ \ if\ p \geq 1, f^k = f \circ f \circ \dots \circ f \qquad (k \text{ مرة})$$

فرضية 24: ليكن $f, g \in \mathcal{L}(E)$ بحيث يتبادلان، عندئذ:

1. $(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$
2. $f^n - g^n = (f-g) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-1-k}$

4.6. التطبيقات الخطية في فضاء شعاعي منتهي البعد

مبرهنة 11:

1. ليكن E و F فضاءين شعاعيين متشاكلين، إذا كان بعد E منتهي، فإن بعد F منتهي أيضاً ولدينا: $dim\, E = dim\, F$.
2. فضاءان شعاعيان من نفس البعد متشاكلان.

مثال 27: الفضاءان الشعاعيان $\mathcal{R}^2$ و $\mathcal{C}$ على الحقل $\mathcal{R}$ متشاكلان.

ملاحظة 20: نتيجة المبرهنة السابقة لها أهمية كبيرة حيث أن كافة الفضاءات الشعاعية التي بعدها n تشاكل الفضاء الشعاعي K^n. بالتالي يمكن استبدال دراسة أي فضاء شعاعي بعده n بالفضاء K^n.

رتبة تطبيق خطي

تعريف 16: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K، وليكن $f \in \mathcal{L}(E,F)$. نسمي رتبة التطبيق الخطي، ونرمز لها بالرمز $rg\, f$، بعد صورته أي أن $rg\, f = dim\, Im\, f$.

ملاحظة 21: لتكن $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ قاعدة في E. عندئذ $rg\, f = rg\{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$.

مبرهنة 12 (الرتبة): ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K، وليكن $f \in \mathcal{L}(E,F)$. عندئذ:

$$dim\, E = rg\, f + dim\, Ker\, f$$

فرضية 25: ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K، وليكن $f \in \mathcal{L}(E,F)$. عندئذ:

1. يكون التطبيق f غامر إذا وفقط إذا $rg\, f = dim\, F$
2. يكون التطبيق f متباين إذا وفقط إذا $rg\, f = dim\, E$

مثال 28: ليكن التطبيق $f: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ معرف كما يلي: $f(z) = z + 2\bar{z}$. برهن أن f أندومورفيزم للفضاء الشعاعي $\mathcal{C}$ على الحقل $\mathcal{R}$. هل f أندومورفيزم للفضاء الشعاعي $\mathcal{C}$ على الحقل $\mathcal{C}$؟ أوجد نواة وصورة التطبيق الخطي.

الحل: ليكن $z, z' \in \mathcal{C}$ و $,\beta \in \mathcal{R}$:

$$f(\alpha z + \beta z') = (\alpha z + \beta z') + 2\overline{(\alpha z + \beta z')} = \alpha(z + 2\bar{z}) + \beta(z' + 2\overline{z'})$$
$$= \alpha f(z) + \beta f(z')$$

بالتالي f أندومورفيزم للفضاء الشعاعي $\mathcal{C}$ على الحقل $\mathcal{R}$. من الملاحظ أن $f(2i) = 2i - 4i = -2i$، و $f(2) = 6$. بما أن لا يحقق $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ $(\alpha = i$ و $u = 2)$، بالتالي f ليس أندومورفيزم للفضاء الشعاعي $\mathcal{C}$ على الحقل $\mathcal{C}$. ليكن $z \neq 0$ عدد عقدي ولنكتبه بالشكل الأسي $z = r.e^{i\theta}$ وليكن $z \in Ker\, f \Leftrightarrow z + 2\bar{z} = 0 \Leftrightarrow e^{i\theta} + 2e^{-i\theta} = 0 \Leftrightarrow e^{2i\theta} = -2$، لا يوجد لهذه المعادلة حل بالتالي: $Ker\, f = \{0\}$. وحسب مبرهنة الرتبة فإن $Im\, f = \mathcal{C}$. والتطبيق متباين وغامر وبالتالي تقابل.

فرضية 26: ليكن E و F فضاءين شعاعيين من نفس البعد المنتهي على الحقل K، وليكن $f \in \mathcal{L}(E,F)$. عندئذ الاقتراحات التالية متكافئة:

1. f تقابل
2. f متباين
3. f غامر

تمرين 17: برهن أن التطبيق $f: \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$ المعرف بالعلاقة التالية:

$f(x, y, x) = (x + y, -x + y, z)$ أوتومورفيزم على $\mathcal{R}^3$.

الحل: من السهل البرهان على أنه خطي. لنوجد نواة f، ليكن $u = (x, y, z) \in Ker\, f$ بالتالي

$f(u) = 0$، أي أن $\begin{cases} x+y=0 \\ -x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$ بجمع المعادلتين الأولى وطرحهما ينتج أن $x = y = 0$. بالتالي $Ker\, f = \{0\}$. والتطبيق متباين وبالتاي غامر وتطابق.

فرضية 27: ليكن E و F فضاءين شعاعيين من نفس البعد المنتهي على الحقل ، وليكن $f \in \mathcal{L}(E,F)$. عندئذ f تقابل إذا وفقط إذا وجد $g \in \mathcal{L}(E,F)$ بحيث $f \circ g = id_E$ أو $g \circ f = id_E$. في هذه الحالة $g = f^{-1}$.

ملاحظة 22: في الأبعاد المنتهية يكفي أن نبرهن العكسية من اليمين أو من اليسار.

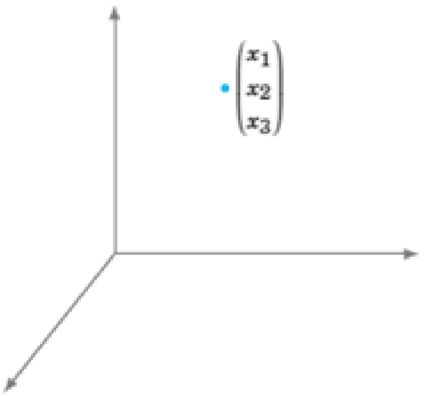
مبرهنة 13(بعد الفضاء $\mathcal{L}$(E, F)): ليكن E و F فضاءين شعاعيين بعديهما منتهي على الحقل K. عندئذ بعد الفضاء $\mathcal{L}(E,F)$ منهي أيضاً ويساوي: $dim\, \mathcal{L}(E,F) = dim\, E \times dim\, F$

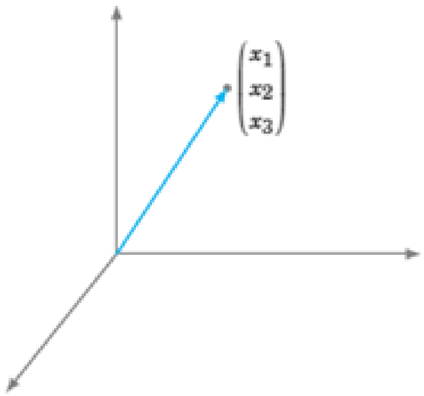
7. الفضاء الشعاعي $\mathcal{R}^n$

1.7. الأشعة في $\mathcal{R}^n$

العمليات على الأشعة

- مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathcal{R}$ (التي تمثل عادة بخط مستقيم)، هي فضاء شعاعي بعده واحد.
- المستوي الممثل بالثنائيات $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ من الأعداد الحقيقية. نرمز له ب $\mathcal{R}^2$، هو فضاء شعاعي بعده اثنان.
- الفراغ الممثل بالثلاثية $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ من الأعداد الحقيقية. نرمز له بـ $\mathcal{R}^3$، هو فضاء شعاعي بعده 3. يمكن رؤية $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ على أنها نقطة في الفراغ أو أنها شعاع.



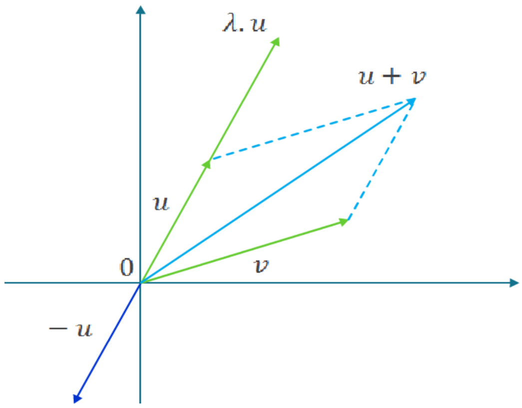


يمكن تعميم المفاهيم السابقة معتبرين فضاء بعده $n \in \mathcal{N}$، عناصر الفضاء من الشكل $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$، حيث $x_1, \dots, x_n$ أعداد حقيقية. ليكن الشعاعين $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ و $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ من $\mathcal{R}^n$، والسلمي $\lambda \in \mathcal{R}$.

تعريف 17:

- جمع شعاعين: $u + v = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix}$
- ضرب شعاع بسلمي: $\lambda . u = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}$
- الشعاع الصفري في $\mathcal{R}^n$ هو: $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
- نظير العنصر $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ هو العنصر $-u = \begin{pmatrix} -u_1 \\ \vdots \\ -u_n \end{pmatrix}$

مثال 29: الفضاء $\mathcal{R}^2$ و $\lambda = 2$



مبرهنة 14: يشكل $\mathcal{R}^n$ بعمليتي الجمع والضرب الخارجي المعرفتان سابقاً فضاء شعاعي على الحقل $\mathcal{R}$.

الجداء السلمي

تعريف 18: ليكن الشعاعين $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ و $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ من $\mathcal{R}^n$. نعرف الجداء السلمي لـ u و v، ونرمز له بالرمز $\langle u|v \rangle$ كما يلي: $\langle u|v \rangle = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$.

ملاحظة 23: الجداء السلمي $\langle u|v \rangle$ عدد حقيقي، كما أن الجداء السلمي لشعاع مع نفسه $\langle u|u \rangle = u_1^2 + \dots + u_n^2$ هو مربع طويلة الشعاع، ونرمز لها بالرمز $\langle \mathrm{u}|\mathrm{u} \rangle = \|\mathrm{u}\|^2$.

مثال 29: ليكن لدينا الشعاعين $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. أوجد طويلة كل منهما ثم أوجد الجداء السلمي لهما.

$$\|v\|^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 \text{ و } \|u\|^2 = 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 3$$

$$\langle u|v\rangle = 1(1) + (-1)1 + 1(2) = 2$$

2.7. التطبيقات الخطية

تعريف 19: نقول عن التطبيق $f: \mathcal{R}^p \to \mathcal{R}^n$ المعرف بـ $f(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$ أنه خطي إذا كان:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p \\ \vdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p \end{cases}$$

أمثلة 30:

- التطبيق الخطي $f: \mathcal{R}^4 \to \mathcal{R}^3$ المعرف كما يلي:

$$\begin{cases} y_1 = -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 7x_4 \\ y_2 = \quad 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 \\ y_3 = 7x_1 - 3x_2 + 9x_3 \end{cases}$$

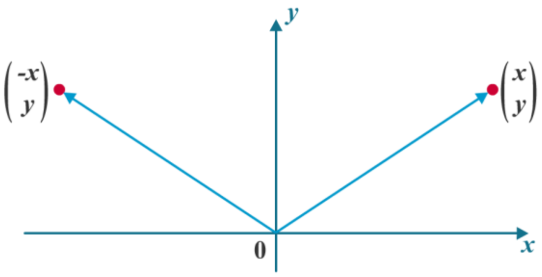
- التطبيق الخطي الواحدي $f: \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ المعرف كما يلي: $id(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$
- التطبيق الخطي الصفري $: \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ المعرف كما يلي: $0(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$

3.7. أمثلة عن التطبيقات الخطية

انعكاس بالنسبة للمحور Oy

التطبيق الخطي $f: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$

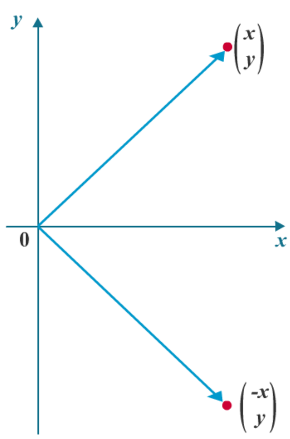
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

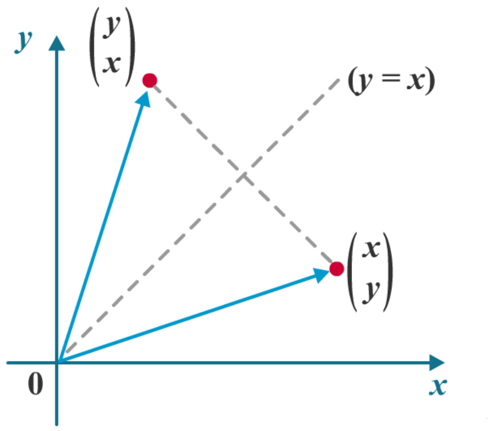


انعكاس بالنسبة للمحور Ox

التطبيق الخطي $f: \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

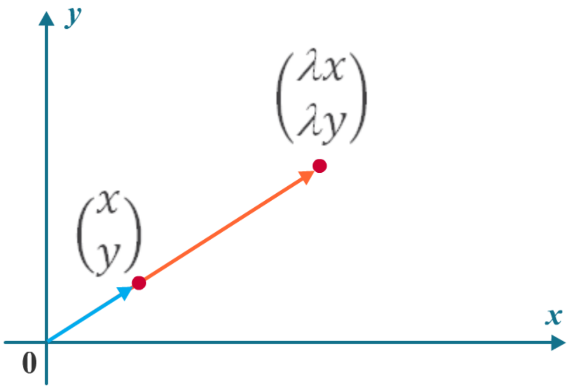




انعكاس بالنسبة للمستقيم y = x

التطبيق الخطي $f: \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$



التحاكي

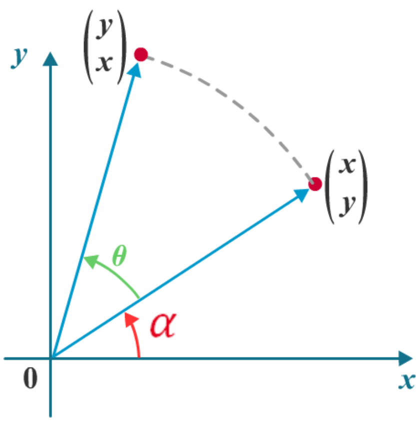
التحاكي الذي نسبته λ ومركزه المبدأ هو التطبيق الخطي

$$f: \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

ملاحظة 24: الانسحاب بمقدار الشعاع $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$: $f: \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$ المعرف بـ:

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + u_0 \\ y + v_0 \end{pmatrix}$ ليس بتطبيق خطي.

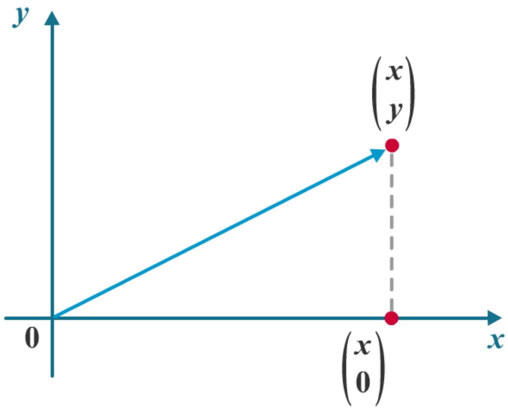


الدوران

الدوران بزاوية θ حول المبدأ هو التطبيق الخطي $f: \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$

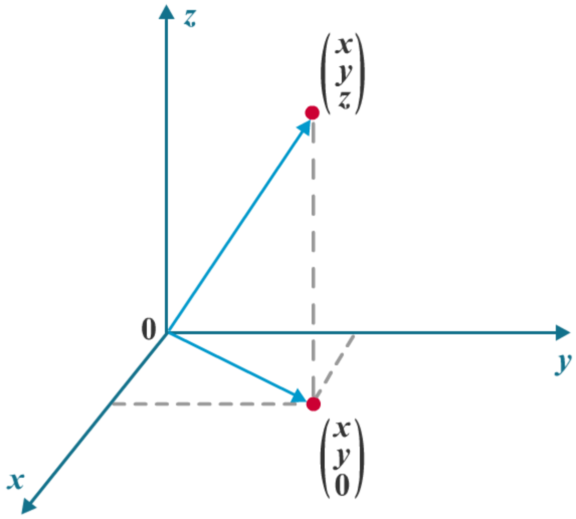
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y = x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

الإسقاط العمودي



التطبيق الخطي $f:\mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ يمثل اسقاط عمودي على المحور Ox



كما أن التطبيق الخطي $f:\mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ يمثل اسقاط عمودي على المستوي Oxy

تمارين

1. حدد فيما إذا كان $\mathcal{R}^2$ مزود بقوانين التشكيل الداخلية والخارجية التالية يشكل فضاء شعاعي على الحقل $\mathcal{R}$ أو لا:

a) $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d);\ \lambda(a,b) = (a, \lambda b), \lambda \in \mathcal{R}.$

b) $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d);\ \lambda(a,b) = (\lambda^2 a, \lambda^2 b), \lambda \in \mathcal{R}.$

c) $(a,b) + (c,d) = (c,d);\ \lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b), \lambda \in \mathcal{R}.$

2. بين لماذا لا تشكل المجموعات التالية فضاءات شعاعية:

a) $\{(x,y) \in \mathcal{R}^2 | xy = 0\}$
b) $\{(x,y) \in \mathcal{R}^2 | -1 \leq x \leq 1\ and\ | -1 \leq y \leq 1\}$
c) $\{(x,y) \in \mathcal{R}^2 | x = 1\}$

3. هل يمكن إيجاد عدد حقيقي t بحيث يكون الشعاعين مرتبطين: $(-2, \sqrt{2}, t)$ و $(-4\sqrt{2}, \sqrt{2}, t)$.

4. هل يمكن إيجاد عدد حقيقي t بحيث يكون الشعاع $(1, 3t, t)$ تركيب خطي من $(1, 3, 2)$ و (-1, 1, -1)؟

5. لتكن الأشعة التالية في $\mathcal{R}^3$؟ $v_1 = (1,1,0),\ v_2 = (4,1,4),\ v_3 = (2,-1,4)$. هل الجملة (v_1, v_2, v_3) مستقلة خطياً؟

6. بين أياً من المجموعات التالية تشكل فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{R}^3$:

a) $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 | 3x - 7y = z\} d)\ E_4 = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 | x^2 - z^2 = 0$
b) $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 |\ z(x^2 + y^2) = 0\}$
c) $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 | x + y - z = x + y + z = 0\}$
d) c) $\{(x,y) \in \mathcal{R}^2 | x = 1\}$

7. ليكن α عدد حقيقي و $f_\alpha: \mathcal{R} \to \mathcal{R}, x \mapsto e^{\alpha x}$. برهن أن الجملة $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{R}}$ مستقلة خطياً.

8. ليكن فضاءين شعاعيين جزئيين من $\mathcal{R}^3$:

$E = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 | x + y - 2z = 0 \; and \; 2x - y - z = 0\}$ و

$F = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 | x + y = z\}$. ولتكن الأشعة

$a = (1,1,1), b = (1,0,1), c = (0,1,1)$.

a. برهن أن E فضاء شعاعي جزئي في $\mathcal{R}^3$.

b. أوجد جملة مولدة في E وبرهن أنها تشكل قاعدة.

c. بين أن $\{b,c\}$ تشكل قاعدة في F.

d. بين أن $\{a,b,c\}$ جملة مستقلة في $\mathcal{R}^3$.

e. هل لدينا $E \oplus F = \mathcal{R}^3$ >

f. ليكن $u = (x,y,z)$، اكتب u بدلالة القاعدة $\{a,b,c\}$.

مذاكرة الفصل السابع

العلامة العظمى: 100 **علامة النجاح: 50** **المدة: ساعة ونصف**

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة (30) درجة

ليكن $E = \mathcal{R}3[X]$ فضاء كثيرات الحدود من الدرجة أصغر أو يساوي 3

1. الجملة $\mathcal{F} = \{1 + 3X, X + X^2, 3X + X^3\}$ هي:
   a. مستقلة
   b. مولدة لـ E
   c. قاعدة في E
   d. لا مولدة ولا مستقلة

2. $\mathcal{F} = \{2X + X^3, -2X + X^2, -1 + X, 1 + X^2\}$ هي:
   a. مستقلة
   b. مولدة لـ E
   c. قاعدة في E
   d. لا مولدة ولا مستقلة

3. $\mathcal{F} = \{X3, 2X + X^3, -2X + X^3, -1 + X^2, 1 + X^2\}$ هي:
   a. مستقلة
   b. مولدة لـ E
   c. قاعدة في E
   d. لا مولدة ولا مستقلة

ليكن E و F فضاءين شعاعيين على الحقل K، وليكن $f \in \mathcal{L}(E, F)$. ولتكن $\{u_1, \dots u_n\}$جملة من الأشعة في E.

4. إذا كانت الجملة $\{u_1, \dots u_n\}$ مستقلة وكانت $\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$مستقلة فإن التطبيق f يكون:
   a. متباين
   b. غامر
   c. تقابل
   d. لانعرف

5. إذا كانت الجملة $\{u_1, \dots u_n\}$ مولدة وكانت $\{f(u_1), \dots f(u_n)\}$ مولدة فإن التطبيق f يكون:
a. متباين
b. غامر
c. تقابل
d. لانعرف

6. إذا كانت الجملة $\{u_1, \dots u_n\}$ قاعدة وكانت $\{f(u_1), \dots f(u_n)\}$ قاعدة فإن التطبيق f يكون:
a. متباين
b. غامر
c. تقابل
d. لانعرف

7. إذا كانت الجملة $\{u_1, \dots u_n\}$ مرتبطة وكانت $\{f(u_1), \dots f(u_n)\}$ مرتبطة فإن التطبيق f يكون:
a. متباين
b. غامر
c. تقابل
d. لانعرف

8. ليكن التطبيق $f: \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^3$ المعرف كما يلي: $f(x,y) = (2x+y, x-y, x-y)$
التطبيق f هو:
a. خطي
b. أندومورفيزم
c. إيزومورفيزم
d. أوتومورفيزم

9. $Ker\, f$ هو:
a. $Vect((1,1))$
b. $\{(0,0)\}$
c. R^2
d. R

10. f هو:
   a. متباين
   b. غامر
   c. تقابل
   d. لا غامر ولا متباين

السؤال الثاني: أجب بصح أو خطأ (60) درجة

ليكن E فضاء شعاعي على K و F, G, K ثلاث فضاءات شعاعية جزئية من E

1. الفضاء الشعاعي المنتهي البعد يحوي على عدد منتهي من العناصر صح أو خطأ
2. $G \cap F$ فضاء شعاعي جزئي من E صح أو خطأ
3. $G \cup F$ فضاء شعاعي جزئي من E صح أو خطأ
4. $G + F$ فضاء شعاعي جزئي من E صح أو خطأ
5. إذا كان $\dim E = \dim F + \dim G$ فإن F و G متتامان في E صح أو خطأ
6. $F = \{(x, y, z) \in \mathcal{R}^3 | 3x + 2z = 0 \ and \ x + y = 0\}$ فضاء شعاعي جزئي من $\mathcal{R}^3$
صح أو خطأ

ليكن E فضاء شعاعي على K بعده منتهي و$\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_n\}$ جملة من n شعاع في E وليكن أيضاً v_{n+1} شعاع من E غير موجود في $\mathcal{F}$. i عدد صحيح بين قيمته بين 1 و n. f, g أندومورفيزمين في E.

7. إذا كانت $\mathcal{F}$ مستقلة فإن $\mathcal{F} \backslash \{v_i\}$ مستقلة أيضاً صح أو خطأ
8. إذا كانت $\mathcal{F}$ مرتبطة فإن $\mathcal{F} \backslash \{v_i\}$ مرتبطة أيضاً صح أو خطأ
9. إذا كانت $\mathcal{F}$ مستقلة فإن $\mathcal{F} \cup \{v_i\}$ مستقلة أيضاً صح أو خطأ
10. إذا كانت $\mathcal{F}$ مرتبطة فإن $\mathcal{F} \cup \{v_i\}$ مرتبطة أيضاً صح أو خطأ
11. إذا كانت $\mathcal{F}$ مستقلة فإن $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ مستقلة أيضاً صح أو خطأ
12. إذا كانت $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ مستقلة فإن $\mathcal{F}$ مستقلة أيضاً صح أو خطأ
13. $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ قاعدة في E. $V_1 = e_1 + e_2$، $V_2 = e_1 - e_2$ $\Leftarrow$ $\{V_1, V_2\}$ قاعدة في E
صح أو خطأ
14. $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ قاعدة في E. $V_1 = e_1 + e_2$، $V_2 = e_1 - e_2$ $\Leftarrow$ $\{e_1, V_1\}$ قاعدة في E
صح أو خطأ
15. $\{1, (X - 2), (X - 3)^2\}$ تشكل قاعدة في $\mathcal{R}_2[X]$ صح أو خطأ

السؤال الثالث: **(10) درجات**

ليكن لدينا الشعاعين $v_1 = (1,2,3)$ و $v_2 = (1,-2,3)$ في $\mathcal{R}^3$. هل يمكن إيجاد x بحيث يكون الشعاع $(x,1,1) \in Vect(v1,v2)$ ؟ الشعاع $(1,x,1) \in Vect(v1,v2)$؟

الجواب:

$$(x,1,1) \in Vect(v_1,v_2) \Leftrightarrow (x,1,1) = \alpha(1,2,3) + \beta(1,-2,3)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ 1 = 2\alpha - 2\beta \\ 1 = 3\alpha + 3\beta \end{cases}$$

من المعادلتين الثانية والثالثة ينتج أن $\alpha = \frac{5}{12}$ و $\alpha = \frac{-1}{12}$ بالتعويض في المعادلة الأولى ينتج $x = \frac{1}{3}$. نعم

$$(1,x,1) \in Vect(v_1,v_2) \Leftrightarrow (1,x,1) = \alpha(1,2,3) + \beta(1,-2,3)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ x = 2\alpha - 2\beta \\ 1 = 3\alpha + 3\beta \end{cases}$$

من المعادلتين الأول والثالثة ينتج أن $3\alpha + 3\beta = 3$ و $3\alpha + 3\beta = 1$ بالتالي لا يوجد حل.

السؤال الأول:

الإجابة الصحيحة	رقم التمرين
(a)	.1
(c)	.2
(b)	.3
(a)	.4
(b)	.5
(c)	.6
(d)	.7
(a)	.8
(b)	.9
(a)	.10

السؤال الثاني:

الإجابة الصحيحة	رقم التمرين
خطأ	.1
صح	.2
خطأ	.3
صح	.4
صح	.5
صح	.6
صح	.7
خطأ	.8
خطأ	.9
صح	.10
خطأ	.11
صح	.12
صح	.13
صح	.14
صح	.15