الفصل الرابع: حساب المثلثات

العنوان	الصفحة

الكلمات المفتاحية:

زاوية موجهة، قياس زاوية، زاوية حادة، قياس أساسي، راديان، درجة، قوس دائرة، قطاع دائري، متممة، متكاملة، نسبة مثلثية، جيب، تجيب، ظل، تظل، دائرة مثلثية، معادلة مثلثية، دساتير التحويل، قاعدة الجيب في مثلث، قاعدة التجيب في مثلث.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على المثلثات والنسب المثلثية لزاوية حادة في مثلث قائم وتطبيقاتها في حل المثلث. ومن ثم تعميم النسب المثلثية على الزوايا المنفرجة من خلال الدائرة المثلثية. وبعدها يتطرق الفصل إلى إيجاد كافة العلاقات بين النسب المثلثية من دساتير الإرجاع إلى الربع الأول من الدائرة المثلثية إلى دساتير التحويل من مجموع زاويتين إلى جدائهما والعكس. وبعدها يتم التعرف إلى بعض المعادلات المثلثية البسيطة وطريقة حلها. وأخيراً يتم التعرف على قانوني الجيب والتجيب في مثلث بشكل عام أياً كانت زواياه وتطبيقاتهما في حل هذا المثلث.

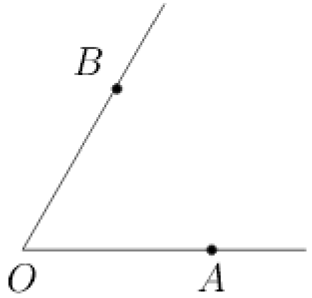
أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- النسب المثلثية لزاوية حادة في مثلث قائم.
- المثلثات في الدائرة المثلثية.
- دساتير الإرجاع إلى الربع الأول ودساتير التحويل بين مجموع زاويتين وضربهما
- المعادلات المثلثية البسيطة.
- تطبيقات المثلثات في حل المثلث.

1. مفاهيم عامة

1.1 الزاوية الموجهة

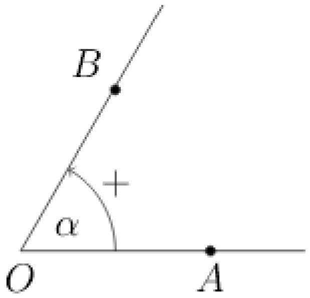


تعريف 1:

الزاوية الموجهة هي التقاء نصفي مستقيمين $([OA,[OB)$ لهما نقطة بداية واحدة O تسمى رأس الزاوية ونصفي المستقيمين هما ضلعا الزاوية.

نميز اتجاهين:

- اتجاه موجب أو مباشر وهو اتجاه عكس عقارب الساعة، قيمة الزاوية تكون مسبوقة بإشارة $+$.
- اتجاه سالب وهو اتجاه مع عقارب الساعة، قيمة الزاوية تكون مسبوقة بإشارة $-$.



2.1 قياس الزاوية

توجد وحدات قياس مختلفة لقياس الزاوية، أهمها:

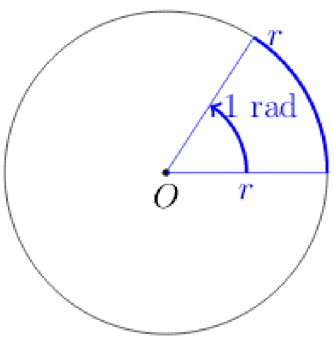
- القياس الستيني: في هذا القياس تقسم الزاوية التي تمثل دورة كاملة إلى 360 قسماً متساوياً، قياس كل منها يسمى درجة ويرمز لها بالرمز $(°)$. مثال الزاوية $+45°$، الزاوية $-30°$، الزاوية القائمة $+90°$ والزاوية المستقيمة $180°$.

  تقسم الدرجة إلى 60 دقيقة ويرمز للدقيقة بالرمز $(')$، وتقسم الدقيقة بدورها إلى 60 ثانية ويرمز للثانية بالرمز $('')$.
- القياس الدائري: يعتمد هذا القياس على طول القوس في الدائرة، الذي تحصره الزاوية المركزية وعلى طول نصف قطر الدائرة. وحدة القياس هنا هي الـ rad والتي هي اختصار لكلمة $radian$.

3.1 الراديان

تعريف 2:

الراديان هو زاوية مركزية في دائرة تحصر قوساً طوله يساوي نصف قطر هذه الدائرة.



ملاحظة 1: التعريف السابق للراديان مستقل عن نصف قطر الدائرة وعن الزاوية المركزية المختارة.

4.1 العلاقة بين الراديان والدرجة

$$1\,rad = \frac{180°}{\pi} \approx 57.2957° = 57°17'45''$$
$$1° = \frac{\pi}{180} \approx 0.0175\,rad$$

بعض الزوايا الهامة:

درجة	0	30	45	60	90	180
راديان	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

مثال 1:

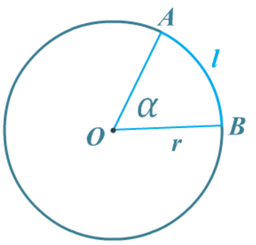
- $5\,rad = 5.\frac{180°}{\pi} \approx 286.48° = 286°29'$
- $75° = 75.\frac{\pi}{180} \approx 1.309\,rad$

5.1 الزوايا المرتبطة

- زاويتان متعاكستان هما زاويتان مجموعهما صفر . الزاويتان $25°$ و $-25°$ هما زاويتان متعاكستان.
- زاويتان متتامتان هما زاويتان مجموعهما زاوية قائمة. الزاويتان $60°$ و $30°$ هما زاويتان متتامتان.
- زاويتان متكاملتان هما زاويتان مجموعهما زاوية مستقيمة. الزاويتان $60°$ و $120°$ هما زاويتان متكاملتان.

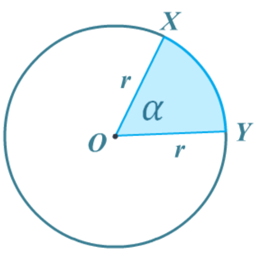
6.1طول قوس دائرة ومساحة قطاع دائري

إن طول دائرة (محيط) نصف قطرها r يساوي $2\pi r$ ومساحتها تساوي $2\pi r^2$.



نتيجة 1:

- طول قوس l من دائرة نصف قطرها r يساوي $l = r\alpha$ حيث α قياس الزاوية المركزية التي يحدها هذا القوس مقدرة بالراديان.



- مساحة قطاع دائرة A نصف قطرها r يساوي $A = \frac{1}{2}r^2\alpha$ حيث α قياس الزاوية المركزية التي يحدها هذا القوس مقدرة بالراديان.

مثال 2:

قطاع دائري نصف قطره $12\ cm$ ويحد زاوية مركزية $65°$. أوجد طول القوس ومساحة القطاع.

$$l = r\alpha = 12\frac{65\pi}{180} \approx 13.6\ cm$$

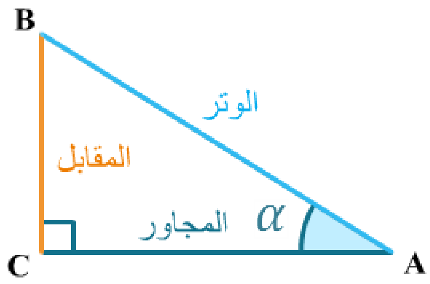
$$A = \frac{1}{2}r^2\alpha = \frac{1}{2}12^2.\frac{65\pi}{180} \approx 81.7\ cm^2$$

2. النسب المثلية لزاوية حادة في مثلث قائم

1.2 جيب زاوية

تعريف 3:

- جيب الزاوية A: هو النسبة بين طول الضلع المقابلة للزاوية A في المثلث قائم الزاوية وطول الوتر ويرمز لها بالرمز sin.



جيب الزاوية A: $sin\ A = sin\ \alpha = \frac{BC}{AB}$

جيب الزاوية B: $sin\ B = \frac{AC}{AB}$

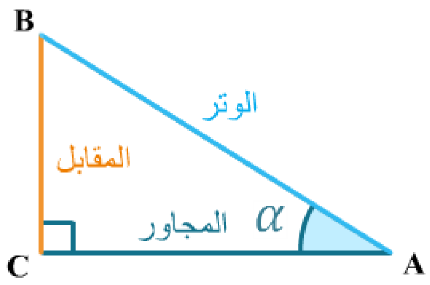
على سبيل المثال إذا كان $AC = 4$ و $BC = 3$ وبالتالي فإن $AB = 5$. يكون:

$sin\ A = 3/5 = 0.6$ و $sin\ B = 4/5 = 0.8$

2.2 تجيب زاوية

تعريف 3:

- تجيب الزاوية A: هو النسبة بين طول الضلع المجاورة للزاوية A في المثلث قائم الزاوية وطول الوتر ويرمز لها بالرمز cos.



تجيب الزاوية A: $cos\ A = cos\ \alpha = \frac{AC}{AB}$

تجيب الزاوية B: $cos\ B = \frac{BC}{AB}$.

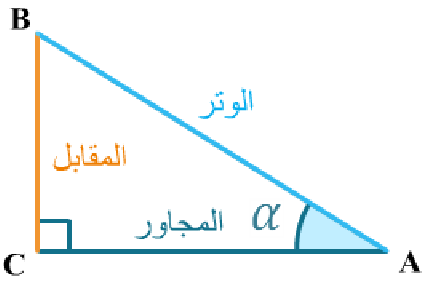
على سبيل المثال إذا كان $AC = 4$ و $BC = 3$ وبالتالي فإن $AB = 5$. يكون

$cos\ A = 4/5 = 0.8$ و $cos\ B = 3/5 = 0.6$

3.2 ظل زاوية

تعريف 3:

ظل الزاوية A: هو النسبة بين طول الضلع المقابلة للزاوية A في المثلث قائم الزاوية وطول الضلع المجاورة ويرمز لها بالرمز tan.



ظل الزاوية A: $tan\, A = tan\, \alpha = \frac{BC}{AC}$

ظل الزاوية B: $tan\, B = \frac{AC}{BC}$

على سبيل المثال إذا كان $AC = 4$ و $BC = 3$ وبالتالي فإن $AB = 5$. يكون $tan\, A = 3/4 = 0.75$ و $tan\, B = 4/3$

ملاحظة 2: ظل الزاوية هو أيضاً حاصل قسمة جيب الزاوية إلى تجيب الزاوية.

$$tan\, A = \frac{BC}{AC} = \frac{BC/AB}{AC/AB} = \frac{sin\, A}{cos\, A}$$

وهذه العلاقة هي علاقة أساسية في المثلثات.

ملاحظة 3: لنحسب المقدار $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1$$

إذن $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ وهذه العلاقة هي علاقة أساسية في المثلثات.

تطبيق 1: ليكن لدينا زاوية حادة α، بحيث $cos\, \alpha = 0.6$. أوجد $sin\, \alpha$ و $tan\, \alpha$.

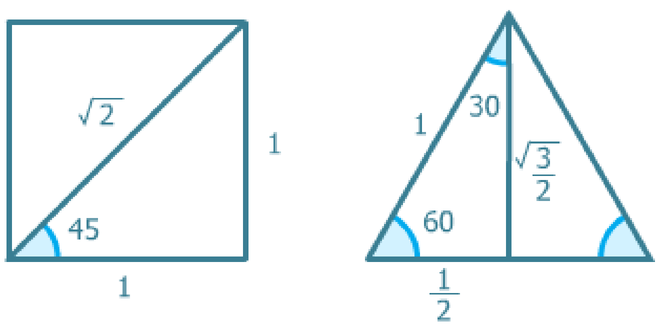
بما أنه لدينا $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ وبالتالي $\sin^2\alpha + 0.6^2 = 1$. أي أنه وباعتبار أن $sin\, \alpha$ عدد موجب فإن:

$$sin^2\alpha = 1 - 0.36 = 0.64 \Rightarrow \ sin^2\alpha = \sqrt{0.64} = 0.8$$

باستخدام العلاقة $tan\, \alpha = \frac{sin\, \alpha}{cos\, \alpha}$ نحصل على $tan\, \alpha = \frac{0.8}{0.6} = \frac{4}{3}$

4.2 بعض القيم المشهورة للنسب المثلثية

هذه القيم تتكر بشكل كبير ويفضل حفظها غيباً. يتم الحصول عليها من خلال مربع ومثلث متساوي الأضلاع:



$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\tan 45° = \frac{1}{1} = 1$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin 30° = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$ $\tan 30° = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

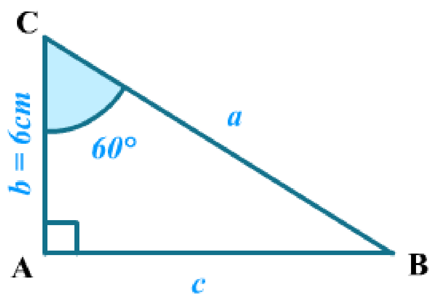
$\cos 60° = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$ $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}/2}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan 60° = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos α$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin α$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan α$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	−

5.2 حل المثلث قائم الزاوية

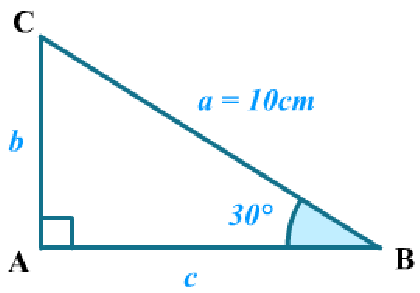
نعلم أن للمثلث ست عناصر هي أضلاعه الثلاثة وزواياه الثلاث. حل المثلث يعني إيجاد قياسات عناصره الستة.

مثال 3:



- ليكن لدينا المثلث ABC القائم في A التالي، وليكن $b = 6\ cm$ و $C = 60°$. أوجد الزوايا والأضلاع المتبقية.

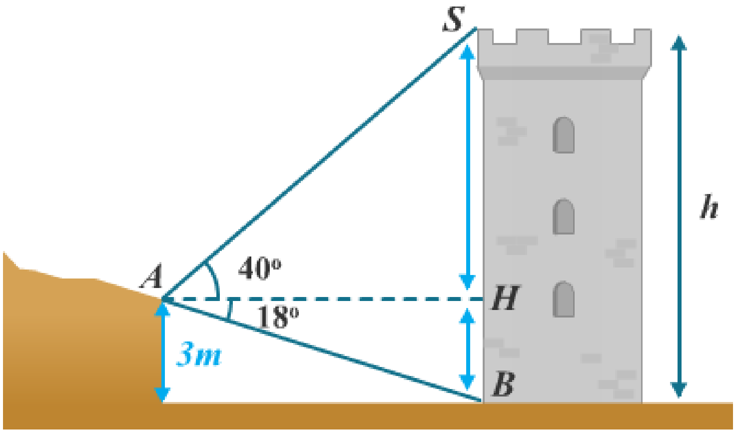
$$c = b \tan 60° = 6\sqrt{3} \approx 10.4\ cm \Leftrightarrow \tan 60° = \frac{c}{b}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 = 6^2 + (6\sqrt{3})^2 = 36 + 108 = 144$$
وأخيراً $a = \sqrt{144} = 12\ cm$ و $B = 30°$.



- ليكن لدينا المثلث القائم ABC التالي، وليكن $a = 10\ cm$ و $B = 30°$. أوجد الزوايا والأضلاع المتبقية.

$$b = a\,.\sin 30° = 10\frac{1}{2} = 5\ cm \Leftrightarrow \sin 30° = \frac{b}{a}$$
$$c^2 = a^2 - b^2 = 10^2 - (5)^2 = 100 - 25 = 75$$
وأخيراً $c = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \approx 8.7\ cm$ و $C = 60°$

- احسب ارتفاع البرج h.



إن: $h = BH + HS$

بما أن $BH = 3m$، بقي علينا أن نحسب فقط الطول HS. ولكن في المثلث القائم AHS لدينا فقط قيمة زاوية لذلك يجب علينا حساب ضلع منه. يمكن حساب الضلع القائم AH من المثلث القائم ABH.

$$tan\, 18° = \frac{BH}{AH} \Leftrightarrow AH = \frac{BH}{tan\, 18°} = \frac{3}{tan\, 18°} \approx 9.2\, m.$$

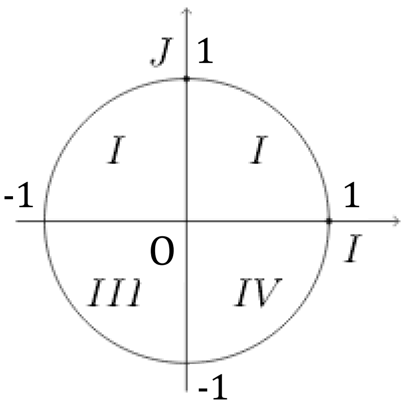
$$tan\, 40° = SH/AH \Leftrightarrow SH = AH.tan\, 40° \approx 7.8\, m.$$

وبالتالي $h \approx 7.8 + 3 \approx 10.8\, m$.

$$AH = \frac{BH}{tan\, 18°} = \frac{3}{tan\, 18°} \approx 9.2\, m \Leftrightarrow tan\, 18° = \frac{BH}{AH}$$

3. المثلثات في الدائرة

1.3 الدائرة المثلثية

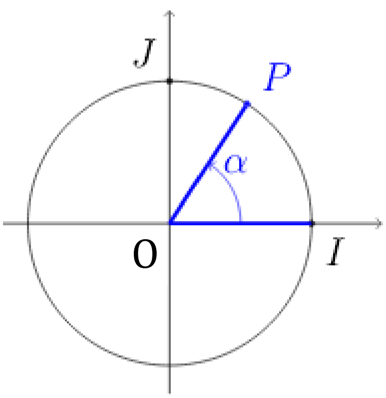


تعريف 4:

في مستوي الإحداثيات المتعامد $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$، الدائرة المثلثية هي الدائرة التي مركزها النقطة O، ونصف قطرها يساوي الواحد.

الدائرة المثلثية مقسمة بواسطة المحاور إلى أربعة أقسام تسمى أرباع: الربع الأول I والربع الثاني II والربع الثالث III والربع الرابع IV.

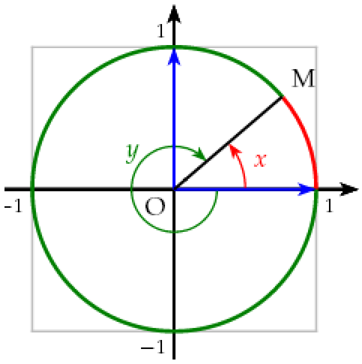
2.3 الزاوية الموجهة في الدائرة المثلثية



الزاوية الموجهة في الدائرة المثلثية هي زاوية رأسها مركز الدائرة والضلع الأول لها هو نصف القطعة المستقيمة $[OI$. نقطة تقاطع الضلع الثاني مع الدائرة المثلثية P.

لكل زاوية موجهة نقطة وحيدة على الدائرة المثلثية، أما العكس فهو غير صحيح. فإنه من أجل نقطة P على الدائرة المثلثية يقابلها عدد لا نهائي من الزوايا الموجهة والتي هي من

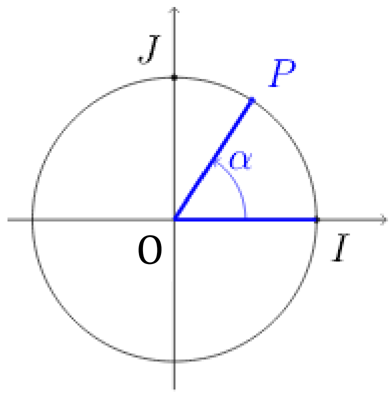
الشكل $\alpha + 2k\pi\ (k \in Z)$. أي الزاوية الموجهة α زائد عدد صحيح من الدورات (الدورة 2π) في الاتجاه الموجب أو في الاتجاه السالب.



مثال 4: يوجد على الشكل جانباً قياسان مختلفان للزاوية لنفس النقطة M. القياس الأول $x = \frac{\pi}{6}$ والقياس الثاني $y = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6}$.

كما أنه يوجد عدد لانهائي من القياسات للزاوية الموجهة المفروضة والتي تعطى بالصيغة $\frac{\pi}{6} + 2\pi k\ (k \in \mathcal{Z})$.

$$\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6} + 2\pi,\ \frac{\pi}{6} - 2\pi,\ \frac{\pi}{6} + 4\pi,\ \frac{\pi}{6} - 4\pi, \ldots$$



تعريف 5:

نسمي القياس الأساسي للزاوية α، القياس x الموجود ضمن المجال $]-\pi, \pi]$.

لإيجاد القياس الأساسي نطرح أو نجمع من القياس المذكور عدد صحيح من الدورات (مضاعفات العدد 2π) حتى يصبح القياس ضمن المجال $]-\pi, \pi]$.

مثال 5: أوجد القياس الأساسي للزاوية حيث القياس: $\frac{17\pi}{4}$ و $-\frac{31\pi}{6}$.

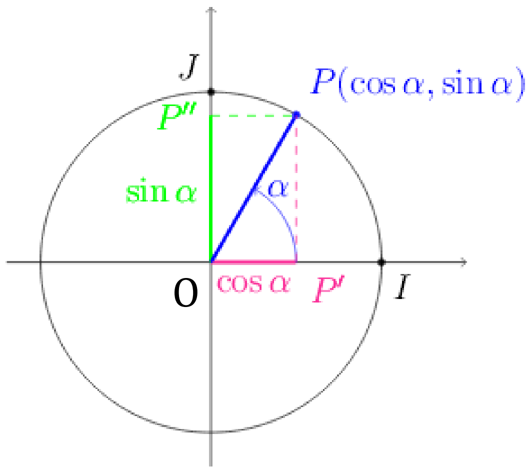
$\frac{17\pi}{4}$: عبارة عن قياس كبير خارج المجال الأساسي لذلك نطرح منها k دورة، أي:

$\frac{17\pi}{4} - k2\pi = \frac{\pi(17-8k)}{4} = \frac{\pi}{4}$ من أجل $k = 2$.

$-\frac{31\pi}{6}$: عبارة عن قياس صغير خارج المجال الأساسي لذلك نضيف إليه k دورة، أي:

$-\frac{31\pi}{6} + k2\pi = \frac{\pi(-31+12k)}{4} = \frac{5\pi}{6}$ من أجل $k = 3$.

3.3 جيب وتجيب زاوية موجهة



تعريف 6: ليكن لدينا زاوية موجهه α والممثلة بالنقطة P على الدائرة المثلثية. نرمز ب P' و P'' للمسقطان العموديان للنقطة P على OI و OJ.

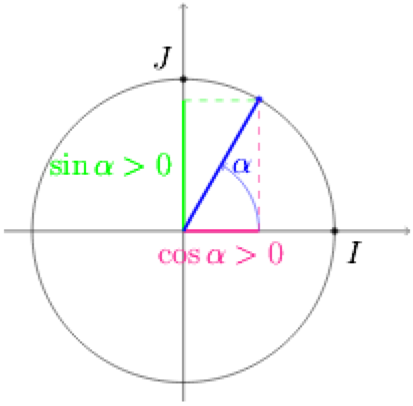
- تجيب الزاوية الموجهة α هو فاصلة النقطة P أي OP'، نرمز لها $cos\ \alpha$.
- جيب الزاوية الموجهة α هو ترتيب النقطة P أي OP''، نرمز لها $sin\ \alpha$.

نتيجة 2: جيب وتجيب الزاوية عددان حقيقيان محصوران بين العددين -1 و 1. أي:

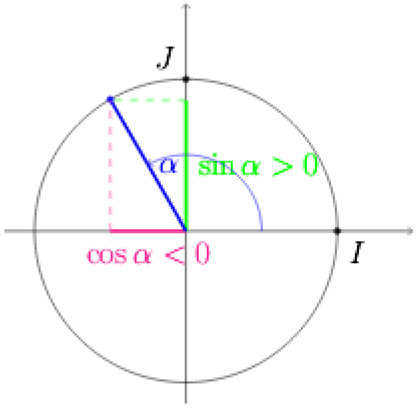
$$-1 \le \cos\alpha \le 1 \quad \text{و} \quad -1 \le \sin\alpha \le 1$$

إشارة الجيب والتجيب

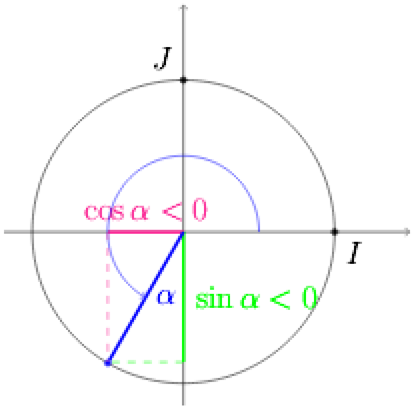
يبين الشكل التالي إشارات كل من الجيب والتجيب في الأرباع المختلفة للدائرة المثلثية.



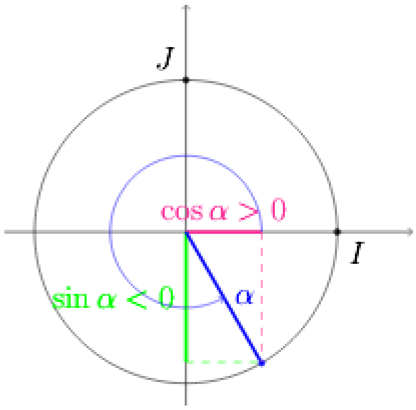
الربع الأول



الربع الثاني



الربع الثالث

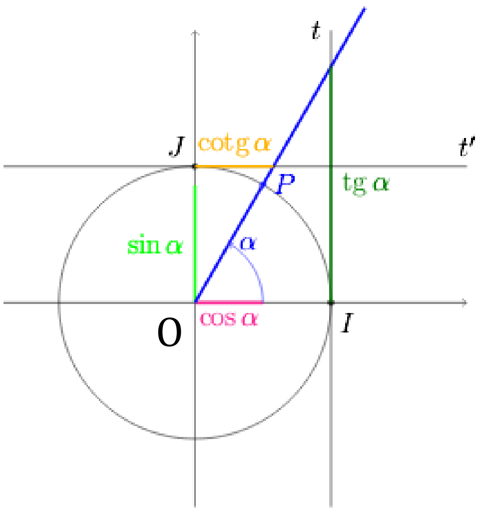


الربع الرابع

4.3 ظل وتظل زاوية موجهة

تعريف 7: ليكن t المماس للدائرة المثلثية المار بـ I، و t' المماس للدائرة المثلثية المار بالنقطة J.

- ظل الزاوية الموجهة α هو ترتيب نقطة التقاطع T للضلع الثاني للزاوية الموجهة مع المستقيم t، نرمز لها $\tan\alpha$.
- تظل الزاوية الموجهة α هو فاصلة نقطة التقاطع T' للضلع الثاني للزاوية الموجهة مع المستقيم t'، نرمز لها $\cot\alpha$.



إشارة الظل والتظل

الظل والتظل موجبان في الربعين الأول والثالث، وسالبان في الربعين

الثاني والرابع.

مثال 6:

- أوجد القيم المختلفة لـ $cos\alpha$ إذا علمت أن $sin\alpha = 2/3$.

من العلاقة الأساسية في المثلثات $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$: $(2/3^2) + \cos^2\alpha = 1$، وبالتالي فإن:

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} = 5/9$. أي $cos\ \alpha = \pm\sqrt{\frac{5}{9}}$.

- إذا علمت أن $sin\alpha = -3/4$ و $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ أوجد $\cos\alpha$.

من العلاقة الأساسية في المثلثات $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$: $(-3/4^2) + \cos^2\alpha = 1$ وبالتالي فإن:

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{16} = 7/16$. أي $cos\ \alpha = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$ وبما أن الزاوية تقع في الربع الثالث (التجيب سالب)

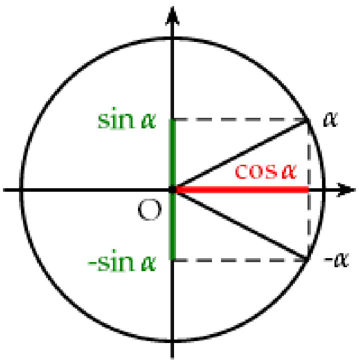
فإن $cos\ \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.

العلاقات بين النسب المثلثية

- $tan\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha},\ \ \alpha\ \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathcal{Z})$
- $cot\ \alpha = \frac{cos\ \alpha}{sin\ \alpha},\ \ \alpha\ \neq k\pi\ (k \in \mathcal{Z})$ $\qquad cot\ \alpha = \frac{1}{tan\ \alpha},\ \ \alpha\ \neq k\pi\ (k \in \mathcal{Z})$
- $1 + tan^2\ \alpha = \frac{1}{cos^2\ \alpha},\ \ \alpha\ \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathcal{Z})$
- $1 + cot^2\ \alpha = \frac{1}{sin^2\ \alpha},\ \ \alpha\ \neq k\pi\ (k \in \mathcal{Z})$

5.3 العلاقات بين زاويتين

- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
- $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$

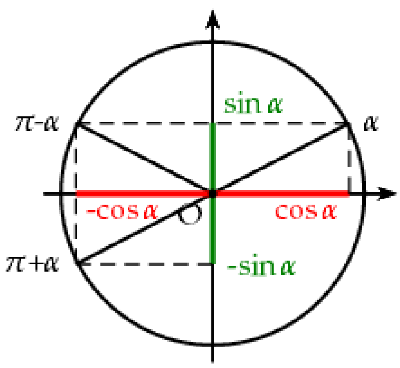


مثال 7: $sin\ (-30°) = -sin\ (30°) = -\frac{1}{2}$

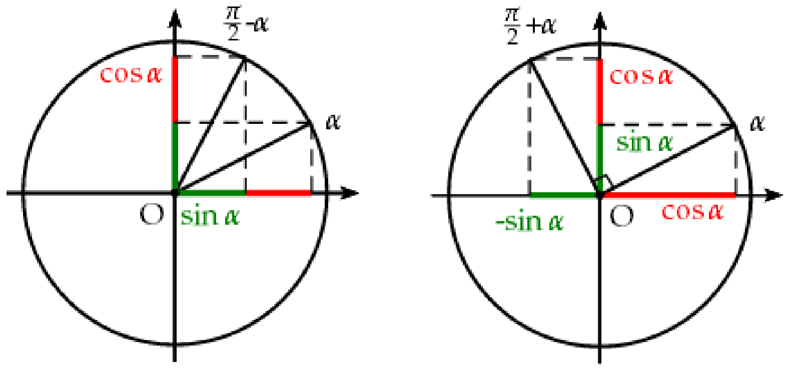
$cos\ (-30°) = cos\ (30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tan\ (-30°) = -tan\ (30°) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

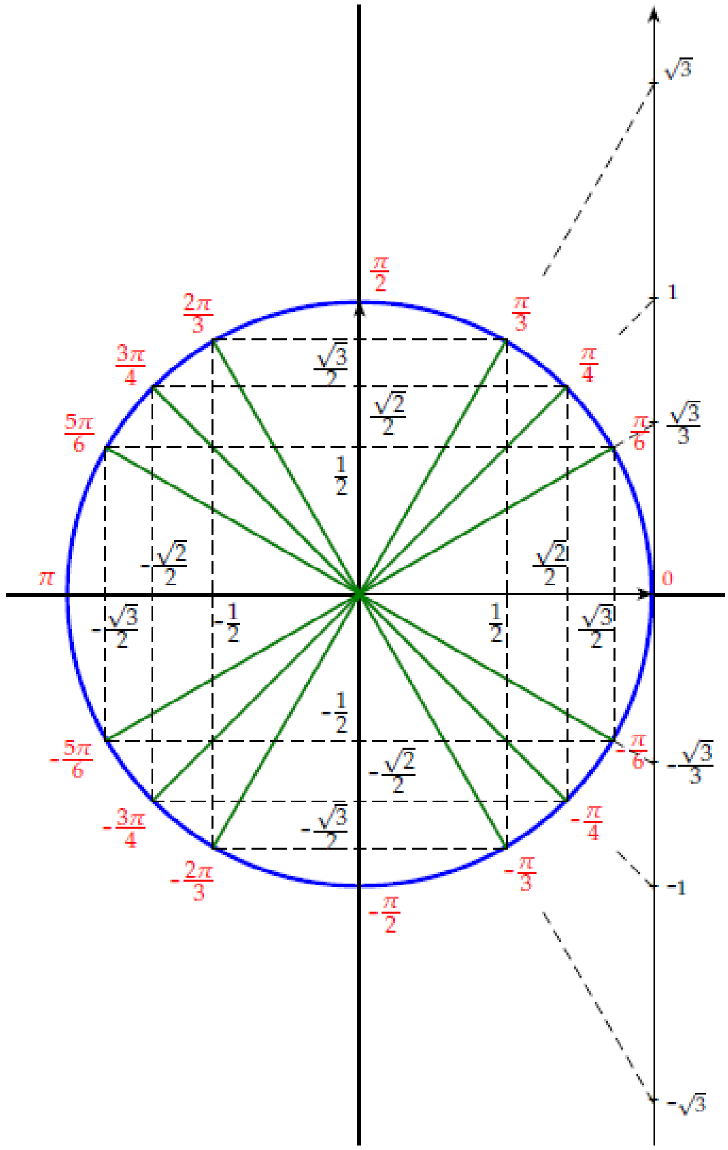
- $sin(\pi - \alpha) = sin\ \alpha$
- $cos(\pi - \alpha) = -cos\ \alpha$
- $tan(\pi - \alpha) = -tan\ \alpha$
- $sin(\pi + \alpha) = -sin\ \alpha$
- $cos(\pi + \alpha) = -cos\ \alpha$
- $tan(\pi + \alpha) = tan\ \alpha$



- $sin(\pi/2-\alpha)=cos\,\alpha$
- $cos(\pi/2-\alpha)=sin\,\alpha$
- $tan(\pi/2-\alpha)=cot\,\alpha$
- $sin(\pi/2+\alpha)=cos\,\alpha$
- $cos(\pi/2+\alpha)=-\,sin\,\alpha$
- $tan(\pi/2+\alpha)=-\,cot\,\alpha$



القيم المشهورة للزوايا على الدائرة المثلثية



مثال 8: أوجد النسب المثلثية للزوايا التالية: $\frac{7\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}$.

- $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
- $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

- $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
- $\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

قياس الزاوية $\frac{7\pi}{4}$ ليس أساسياً، لجعله أساسياً نطرح منه دورة واحدة 2π: $\frac{7\pi}{4} - 2\pi = -\frac{\pi}{4}$

- $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$

4. المعادلات المثلثية البسيطة

1.4 مبدأ التكافؤ الأساسي

$$1.\ \cos x = \cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{أو} \\ x = -a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$2.\ \sin x = \sin a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{أو} \\ x = \pi - a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$3.\ \tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

مثال 9:

- حل المعادلة $\cos x = \frac{1}{2}$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ or } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

- حل المعادلة $\cos x = -\frac{1}{2}$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ or } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

- حل المعادلة $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} = x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$\text{or } 2x - \frac{\pi}{3} = -x - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$$

- حل المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$

$sin\,x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow sin\,x = sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;\; or\; x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

- حل المعادلة $tan\,x = 1$

$tan\,x = 1 \Leftrightarrow tan\,x = tan\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

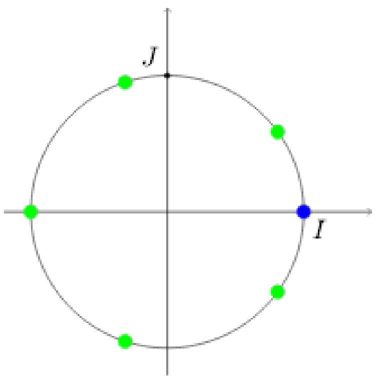
- حل المعادلة $sin^2\,x = \frac{1}{2}$

$sin^2\,x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow sin\,x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$sin\,x = +\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow sin\,x = sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \;or\; x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \;= \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$or\; x = \pi - (-\frac{\pi}{4}) + 2k\pi \;= \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$



- حل المعادلة $sin\,(2x) = sin\,(3x)$

$sin\,(2x) = sin\,(3x) \Leftrightarrow\; 2x = 3x + 2k\pi \;\; or\; 2x = \pi - 3x + 2k\pi \;\; = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow\; -x = 2k\pi \;\; or\; 5x = \pi + 2k\pi$

$\Leftrightarrow\; x = 2k\pi \;\; or\; x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}$

الحلول الأساسية (ضمن المجال $]-\pi,\pi]$) هي:

من المعادلة $x = 2k\pi$ ينتج $x = 0$ $(K = 0)$.

من المعادلة $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}$ ينتج $x = \frac{\pi}{5}$ $(K = 0)$ و $x = \frac{3\pi}{5}$ $(K = 1)$ و $x = \pi$ $(K = 2)$

و $x = -\frac{\pi}{5}$ $(K = -1)$ و $x = \frac{3\pi}{5}$ $(K = -2)$

- حل المعادلة $sin\,x + cos\,(2x) = 0$

$\sin x + \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\sin x \;\Leftrightarrow \cos(2x) = \sin(-x)$

$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \cos(\frac{\pi}{2} + x)$

$\Leftrightarrow\;\; 2x = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \;\; or\; 2x = -\frac{\pi}{2} - x + 2k\pi$

$\Leftrightarrow\;\; x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \;\; or\; x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$

- حل المعادلة $2cos^3\,x + cos^2\,x - 5cos\,x + 2 = 0$

لنفرض أن $y = cos\,x$ ينتج: $2y^3 + y^2 - 5y + 2 = 0$

$2y^3 + y^2 - 5y + 2 = 0 \;\Leftrightarrow (y-1)(2y-1)(y+2) = 0$

إما $y = 1$ أو $y = 1/2$ أو $y = -2$

ليس لها حلول لأن التجيب قيمه محصورة بين الناقص واحد والواحد

$y = cos\, x = -2$

$y = cos\, x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow cos\, x = cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ or } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$y = cos\, x = 1 \Leftrightarrow cos\, x = cos\, 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi$

5. النسب المثلثية لمجموع أو فرق زاويتين

أياً كان $a, b \in \mathcal{R}$ فإنه لدينا:

- $cos(a+b) = cos\, a\, cos\, b - sin\, a\, sin\, b$
- $cos(a-b) = cos\, a\, cos\, b + sin\, a\, sin\, b$
- $sin(a+b) = sin\, a\, cos\, b + cos\, a\, sin\, b$
- $sin(a-b) = sin\, a\, cos\, b - cos\, a\, sin\, b$
- $tan(a+b) = \frac{tan\, a + tan\, b}{1 - tan\, a.tan\, b};\quad a,\ b,\ a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathcal{Z})$
- $tan(a-b) = \frac{tan\, a - tan\, b}{1 + tan\, a.tan\, b};\quad a,\ b,\ a-b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathcal{Z})$

مثال 10: أوجد كل من $cos(105°)$ و $cos(15°)$ و $sin(75°)$ و $sin(15°)$ و $tan(105°)$ و $tan(15°)$.

- $cos(105°) = cos(60° + 45°) = cos\, 60°\, cos\, 45° - sin\, 60°\, sin\, 45°$
  $= \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$
- $cos(15°) = cos(45° - 30°) = cos\, 45°\, cos\, 30° + sin\, 45°\, sin\, 30°$
  $= \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
- $sin(75°) = sin(45° + 30°) = sin\, 45°\, cos\, 30° + cos\, 45°\, sin\, 30°$
  $= \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
- $sin(15°) = sin(45° - 30°) = sin\, 45°\, cos\, 30° - cos\, 45°\, sin\, 30°$
  $= \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
- $tan(105°) = tan(60° + 45°) = \frac{tan\, 60° + tan\, 45°}{1 - tan\, 60°.tan\, 45°} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}.1} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$
- $tan(15°) = tan(60° - 45°) = \frac{tan\, 60° - tan\, 45°}{1 + tan\, 60°.tan\, 45°} = \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}.1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

النسب المثلثية لمضاعفات زاوية

لنضع $a = b$ في علاقات مجموع زاويتين نحصل على:

- $cos(2a) = cos^2 a - sin^2 a = 2cos^2 a - 1 = 1 - 2sin^2 a$
- $sin(2a) = 2\, sin\, a\, cos\, a$
- $tan(2a) = \frac{2tan\, a}{1 - tan^2\, a};\quad a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ and } a \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathcal{Z})$

هذا ويمكن وضع العلاقة الأولى على الشكل التالي:

$$1 + cos(2a) = 2cos^2 a \qquad 1 - cos(2a) = 2sin^2 a$$

مثال 11: لتكن الزاوية a حادة و $cos\, 2a = 3/4$. أوجد كل من $cos\, a$ و $sin\, a$ و $tan\, a$.

$1 + cos(2a) = 2cos^2 a = 1 + 3/4 = 7/4 \Rightarrow cos^2 a = 7/8$

$$cos\, a = \pm\sqrt{\frac{7}{8}} = \pm\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$$

وبما أن الزاوية حادة فإن الجيب والتجيب موجب، أي: $cos\, a = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$.

$$sin\, a = \sqrt{1 - cos^2 a} = \sqrt{1 - 7/8} = \sqrt{1/8}$$

$$sin\, a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$tan\, a = \frac{sin\, a}{cos\, a} = \frac{1/2\sqrt{2}}{\sqrt{7}/2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

مثال 12: ما نوع المثلث ABC الذ تحقق زواياه العلاقة: $sin^2\frac{A}{2} = cos\, B\,.\,cos\, C$

$$sin^2\frac{A}{2} = cos\, B.\, cos\, C \Rightarrow \frac{1 - cos\, A}{2} = cos\, B\,.\,cos\, C \Rightarrow 1 - cos\, A = 2\, cos\, B\,.\,cos\, C \Rightarrow$$

$$1 - cos\, A = 1 - cos[\pi - (B + C)] = 1 + cos(B + C) = 2cos\, B\, cos\, C$$

$$1 + cos\, Bcos\, C - sin\, Bsin\, C = 2cos\, B\, cos\, C$$

$$1 = cos\, B\, cos\, C + sin\, Bsin\, C = cos(B - C) \Rightarrow B - C = 2\pi k$$

ما يلائم المثلث يوافق $0 = k$ فقط، وبالتالي يكون $B = C$ أي أن المثلث ABC متساوي الساقين قاعدته $[BC]$.

دساتير التحويل من جداء إلى مجموع

- $cos\, a. cos\, b = \frac{1}{2}[cos\,(a + b) + cos\,(a - b)]$
- $sin\, a. sin\, b = -\frac{1}{2}[cos\,(a + b) - cos\,(a - b)]$
- $sin\, a. cos\, b = \frac{1}{2}[sin\,(a + b) + sin\,(a - b)]$
- $cos\, a. sin\, b = \frac{1}{2}[sin\,(a + b) - sin\,(a - b)]$

دساتير التحويل من مجموع إلى جداء

- $cos\, a + cos\, b = 2cos\,\frac{a+b}{2}.\,cos\,\frac{a-b}{2}$
- $cos\, a - cos\, b = -\,2sin\,\frac{a+b}{2}.\,sin\,\frac{a-b}{2}$
- $sin\, a + sin\, b = 2sin\,\frac{a+b}{2}.\,cos\,\frac{a-b}{2}$
- $sin\, a - sin\, b = 2cos\,\frac{a+b}{2}.\,sin\,\frac{a-b}{2}$

مثال 13:

- حول العبارة التالية إلى جداء: $sin\, 3x + sin\, 7x$

$$sin\, 3x + sin\, 7x = 2sin\,\frac{3x+7x}{2}.\,cos\,\frac{3x-7x}{2} = 2\, sin\, 5x.\, cos\, 2x$$

- أثبت أن: $cos\, 75°\,.\,cos\, 15° = 1/4$

$$cos\, 75°.\, cos\, 15° = \frac{1}{2}[cos\,(75° + 15°) + cos\,(75° - 15°)]$$

$$cos\, 75°.\, cos\, 15° = \frac{1}{2}[cos\,(90°) + cos\,(60°)] = \frac{1}{2}[0 + 1/2] = 1/4$$

- أثبت أن: $cos\, 80°\, .\, cos\, 40°\, .\, cos\, 20° = 1/8$

$$cos\, 80°.\, cos\, 40°.\, cos\, 20° = \frac{1}{2}[cos\,(80° + 40°) + cos\,(80° - 40°)].\, cos\, 20°$$
$$= \frac{1}{2}[cos\, 120° + cos\, 40°].\, cos\, 20° = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2} + cos\, 40°\right].\, cos\, 20°$$
$$= -\frac{1}{4}cos\, 20° + \frac{1}{2}cos\, 40°.\, cos\, 20°$$
$$= -\frac{1}{4}cos\, 20° + \frac{1}{4}(cos\, 60° + cos\, 20°) = \frac{1}{4}cos\, 60° = \frac{1}{8}$$

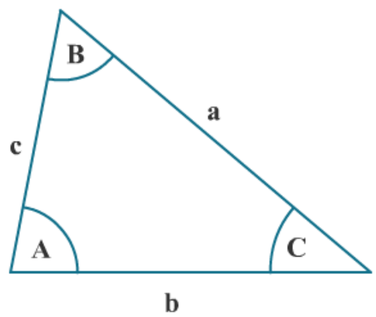
- ما هو نوع المثلث ABC الذي تحقق زواياه المعادلة: $sin\, 2A + sin\, 2B = 2sin\, C$

$$sin\, 2A + sin\, 2B = 2sin\, C \Rightarrow 2\, sin(A + B)\, .\, cos(A - B) - 2\, sin\, C = 0$$

ولكن $sin(A + B) = sin(\pi - C) = sin\, C$، وبالتالي نضع sin C خارج القوس ينتج لدينا: $sin\, C\,[cos(A - B) - 1] = 0$ وهذا يعطي إما $sin\, C = 0$ وهو مرفوض لأن $sin\, C > 0$ في المثلث. أو $cos(A - B) - 1 = 0$، أي $cos(A - B) = 1$ ومنه $A - B = 2\pi k$. والذي يلائم المثلث يوافق $k = 0$ فقط، وبالتالي يكون $A = B$ أي أن المثلث ABC متساوي الساقين قاعدته $[AB]$.

6. تطبيقات في المثلث

1.6 قاعدة التجيب في المثلث (نظرية فيثاغورث المعممة)



في المثلث ABC:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\, cos\, A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\, cos\, B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\, cos\, C$$

مثال 14:

- ABC مثلث فيه $A = 60°$ و $b = 1 + \sqrt{3}$ و $c = 2$. احسب قيمة a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\, cos\, A = \left(1 + \sqrt{3}\right)^2 + (2)^2 - 2\left(1 + \sqrt{3}\right)(2).\frac{1}{2} = 6 \Rightarrow a = \sqrt{6}$$

- ABC مثلث فيه $a = 2$ و $b = \sqrt{2}$ و $c = 1 + \sqrt{3}$ احسب قيمة الزوايا.

من العلاقة $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\, cos\, A$ ينتج $cos\, A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2+1+3+2\sqrt{3}-4}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ومنه $A = 60°$. ولحساب B نطبق العلاقة المشابهة: $cos\, B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{4+1+3+2\sqrt{3}-2}{2(2)(1+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه $B = 30°$ وبالتالي فإن $C = 90°$ (مجموع زوايا المثلث $180°$).

2.6 قاعدة الجيب في المثلث

في المثلث ABC:

$$\frac{a}{sin\, A} = \frac{b}{sin\, B} = \frac{c}{sin\, C}$$

مثال 15: ABC مثلث فيه $A = C = 30°$ و $b = 6$. أوجد كل من c, a, B.

$B = 180° - (30° + 30°) = 120$. لحساب a نستخدم العلاقة $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$
$\frac{a}{1/2} = \frac{6}{\sqrt{3}/2} \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$. بما أن $A = C$ يعني أن $a = c = 2\sqrt{3}$.

مساحة المثلث

مساحة المثلث ABC تعطى بالعلاقة:

$$S = \frac{1}{2}ab\ sin\ C = \frac{1}{2}ac\ sin\ B = \frac{1}{2}bc\ sin\ A$$

مثال 16: ABC مثلث فيه $A = 45°$ و $b = 8$ و $c = 6$، أوجد مساحته.

$$S = \frac{1}{2}bc\ sin\ A = \frac{1}{2}8(6)\frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$$

تمارين

1. حول كل من الزوايا التالية إلى راديان: $15°, 75°, 225°, -135°$.

2. حول كل من الزوايا التالية إلى درجات: $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}, 2.5, -0.75$.

3. استخدم الدائرة المثلثية لإيجاد جيب و تجيب وظل كل من: $\frac{-14\pi}{3}$, $-135°, \frac{8\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$.

4. أوجد الزاوية α في الحالات التالية: $cos\,\alpha = -1$ و $\sin^2\alpha = 3/4$ و $tan^2\alpha = 3$.

5. ليكن $cos\,\alpha = -3/4$ و $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. أوجد $sin\,\alpha$ و $tan\,\alpha$.

6. ليكن $sin\,\alpha = -3/4$ و $\sin a = -3/4$ و $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$، $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$. أوجد:
$sin\,2\alpha\ sin\,2a$ و $cos\,2\alpha\ cos\,2a$ و $tan\,2\alpha. tan\,2a$

7. حل كل من المعادلات التالية: $2sin\,3x + \sqrt{2} = 0$ و $2\,sin\,3x + \sqrt{2} = 0$ و $\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$
و $sin^2x - sin\,x - 2 = 0$ و $sin^2x - sin\,x - 2 = 0$.

8. حل كل من المعادلات التالية:

$tan(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{\sqrt{3}}, x\epsilon[0, 4\pi]$ و

$cos(x + \frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{2}, x\epsilon[-2\pi, 2\pi]$ و

$tan(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{\sqrt{3}}, x \in [0,4\pi]$ و

$$cos(x + \frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{2}, x \in [-2\pi, 2\pi]$$

9. برهن أن: $(sin\,x + cos\,x)^2 + (sin\,x - cos\,x)^2 = 2$.

10. حل المعادلة التالية: $sin\,x\,.\,cos\,3x + sin\,3x\,.\,cos\,x = 1/2$ ثم استنتج مجموعة حلولها في المجال $[0, 2\pi]$.

11. برهن أن $\frac{sin\,2\alpha - sin\,\alpha}{cos\,2\alpha - cos\,\alpha + 1} = tan\,\alpha$.

12. ما نوع المثلث ABC الذ تحقق زواياه العلاقة: $sin\,A = sin\,B\,.\,sin\,C$.

13. برهن أن: $cos(30° + x) - cos(30° - x) = -\,sin\,x$.

14. ABC مثلث فيه $A = 45°$ و $B = 60°$ و $a = 4$. أوجد كل من b, c, C.

15. حل المثلث ABC إذا علمت أن: $C = 45°$ و $B = 60°$ و $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

مذاكرة الفصل الرابع

العلامة العظمى: 100 **علامة النجاح: 50** **المدة: ساعة ونصف**

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة **(30) درجة**

1. القياس الأساسي للزاوية $\frac{143\pi}{3}$ هو
   a. $\frac{-\pi}{3}$
   b. $\frac{2\pi}{3}$
   c. $\frac{4\pi}{3}$
   d. $\frac{\pi}{3}$

2. $cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$
   a. $\sin x$
   b. $-sinx$
   c. $\cos(p/2 - a)$
   d. $\sin(x - p/2)$

3. $cos(\frac{-14\pi}{3}) =$
   a. $1/2$
   b. $-1/2$
   c. $\sqrt{3/2}$
   d. -$\sqrt{3/2}$

4. $cos(30° + x) - cos(30° - x) =$
   a. $cos\, x$
   b. $-cos\, x$
   c. $sin\, x$
   d. $-sin\, x$

5. $cos\,\alpha = -1 \Leftarrow \alpha =$
   a. $p/2$
   b. $-p/2$
   c. π
   d. 0

السؤال الثاني: أجب بصح أو خطأ **(30) درجة**

16. قيمة الزاوية $135°$ بالراديان هي $\frac{5\pi}{4}$ صح أو خطأ

17. $cos(3p/2 - a) = sin\, a$ صح أو خطأ

18. $sin(9p - a) = sin\, a$ صح أو خطأ
19. زاوية حادة، α بحيث $sin\ \alpha = 0.6$، بالتالي $cos\ \alpha = 0.8$ صح أو خطأ
20. القياس الأساسي للزاوية $\frac{9\pi}{4}$ هو $\frac{\pi}{4}$ صح أو خطأ
21. إذا علمت أن $cos\ \alpha = -2/3$ و $p < \alpha < \frac{3\pi}{2}$، فإن $sin\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ صح أو خطأ
22. $tan\ \frac{7\pi}{4} = -1$ صح أو خطأ
23. $cos(-\frac{7\pi}{3}) = 1/2$ صح أو خطأ
24. a زاوية حادة و $cos\ 2a = 3/4$. فإن $cos\ a = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$ صح أو خطأ
25. مساحة مثلث طول ضلعاه 3 و 4 وقياس الزاوية بينهما $30°$ هي 3 صح أو خطأ

السؤال الثالث: حل كل من المعادلات التالية: **(15) درجة**

a. $2cos\ 3x + \sqrt{2} = 0$

b. $cos2x - cos\ x - 2 = 0$

الجواب:

a. $2cos\ 3x + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \cos 3x = -\sqrt{2}/2 = \cos(\frac{3\pi}{4}) \Rightarrow\ 3x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\,\pi$

$x = \pm\frac{3\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathcal{Z}$

b. $cos2x - cos\ x - 2 = 0 \Rightarrow cos\ x = \frac{1\pm 3}{2} = -1 \text{ or } 2$

$cos\ x = 2$ لا حلول

$cos\ x = -1 = cos\,\pi \Rightarrow x = \pi + 2k\,\pi, k \in \mathcal{Z}$

السؤال الرابع: **(15) درجة**

ABC مثلث فيه $A = C = 30°$ و $b = 9$. أوجد كل من c, a, B. ماهي مساحته

الجواب: $B = 180° - (30° + 30°) = 120°.$

لحساب a نستخدم العلاقة $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$\frac{a}{1/2} = \frac{9}{\sqrt{3}/2} \Rightarrow a = 3\sqrt{3}$. بما أن $A = C$ يعني أن $a = c = 3\sqrt{3}$.

المساحة $= \frac{1}{2}ac\ sin\ B = \frac{1}{2}3\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$

السؤال الخامس: **(10) درجات**

ABC مثلث فيه $a = 4$ و $b = 2\sqrt{2}$ و $c = 2(1+\sqrt{3})$. احسب قيمة الزوايا.

الجواب: من العلاقة $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ A$ ينتج أن $cos\ A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ومنه $A = 60°$. ولحساب B نطبق العلاقة المشابهة: $cos\ B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه $B = 30°$ وبالتالي فإن $C = 90°$.

الإجابات الصحيحة

السؤال الأول:

رقم التمرين	الإجابة الصحيحة
1.	(a)
2.	(b)
3.	(b)
4.	(d)
5.	(c)

السؤال الثاني:

رقم التمرين	الإجابة الصحيحة
1.	خطأ
2.	خطأ
3.	صح
4.	صح
5.	صح
6.	خطأ
7.	صح
8.	صح
9.	صح
10.	صح