الفصل الأول: المجموعات والتوابع

العنوان	الصفحة

الكلمات المفتاحية:

مجموعة، عنصر، مجموعة خالية، مجموعة كلية، مجموعة جزئية، حجم مجموعة، قدرة مجموعة، علاقة احتواء، علاقة انتماء، مخطط فن، تقاطع، اجتماع، متمم، فرق، فرق تناظري، خاصة تبديلية، خاصة تجميعية، خاصة توزيعية، ديمورغان، جداء ديكارتي، زوج مرتب، تابع، متباين، غامر، تقابل، تركيب التوابع، التابع العكسي، بيان تابع، تابع عددي.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على مفهوم المجموعة والعمليات الأساسية عليها من اجتماع وتقاطع وفرق ومتتم واستخدام مخططات فت لتمثيل المجموعات وفهمها. ومن ثم الانتقال إلى مفهوم التابع والذي هو عبارة عن علاقة بين مجموعتين، ودراسة الأنواع المختلفة للتوابع وتركيب التوابع وإيجاد التابع العكسي إن وجد وأخيراً الوصول إلى بيان تابع.

الأهداف التعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- مفهوم المجموعة وعناصرها
- العمليات على المجموعات (الاجتماع، التقاطع، الفرق، المتمم)
- مخططات فن وتطبيقاتها
- التوابع وأنواعها (متباين، غامر، متطابق)
- تركيب التوابع والتابع العكسي

1. المجموعات

تعريف 1: نعرف المجموعة رياضياً بأنها أي تجمع من الكائنات (الأشياء) ذات التعريف المحدد والدقيق. كما ندعو الكائنات الموجودة في تلك المجموعة بعناصر المجموعة.

مثال 1: لتكن المجموعتان التاليتان:

a) مجموعة أحرف اللغة العربية.

b) مجموعة الحدائق الجميلة في فرنسة.

نعتبر a) مجموعة لأن عناصرهما معروفة ومحددة. أما بالنسبة للمجموعة b) فلا نعتبرها مجموعة رياضية لأنها غير معرفة بشكل محدد ودقيق (الجمال مفهوم نسبي وليس دقيق).

رموز المجموعات وعناصرها

- نرمز عادة للمجموعات بأحرف كبيرة مثل: $A, B, X, \dots$.
- نرمز عادة لعناصر المجموعة التي تتألف منها بأحرف صغيرة مثل: $a, c, x, \dots$.
- نستخدم الأقواس المعترضة { } لتحديد عناصر المجموعة ويتم الفصل بين العناصر باستخدام الفواصل فيما بينها. على سبيل المثال نكتب المجموعة A التي عناصرها $-3, \pi, 0, 1$ كالتالي: $A = \{-3, \pi, 0, 1\}$.
- نستخدم رمز الانتماء $\in$ للدلالة على أن عنصر ما ينتمي إلى مجموعة. مثلاً $a \in B$، يدل على أن العنصر a ينتمي إلى المجموعة B. مثال العنصر $\pi \in A$ في المجموعة A السابقة $A = \{-3, \pi, 0, 1\}$.

نستخدم رمز عدم الانتماء $\notin$ للدلالة على أن عنصر ما لا ينتمي إلى مجموعة. مثلاً $x \notin Y$، يدل على أن العنصر x لا ينتمي إلى المجموعة Y. مثال العنصر $5 \notin A$ في المجموعة A السابقة $A = \{-3, \pi, 0, 1\}$.

نقول عن مجموعة أنها منتهية إذا كانت تحوي على عدد منته من العناصر، وفيما عدا ذلك نقول عنها أنها غير منتهية. على سبيل المثال مجموعة الأعداد الفردية الموجبة التي هي أقل من 12 $O = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$، هي مجموعة منتهية، بينما مجموعة الأعداد الفردية الموجبة هي مجموعة غير منتهية.

طرق تعريف المجموعات

1. <u>طريقة التعريف بعبارة</u>

في هذه الطريقة نكتفي بذكر جملة معينة يمكن عند قراءتها تحديد عناصر المجموعة فمثلاً نقول A هي مجموعة الأعداد الطبيعية. هذه الطريقة غير مناسبة للمجموعات التي تكون فيها العلاقة بين العناصر غير واضحة.

2. <u>طريقة السرد أو حصر العناصر</u>

وفيها نقوم بكتابة جميع عناصر المجموعة. على سبيل المثال، مجموعة الأحرف الصوتية V الموجودة في اللغة الإنكليزية هي: $V = \{a, e, i, o, u\}$.

من الطبيعي أن هذه الطريقة غير مناسبة إلا لمجموعات قليلة العناصر. فمثلاً لا يمكن سرد كافة عناصر مجموعة الأعداد الزوجية. من الملاحظ أيضاً أن ترتيب العناصر في المجموعة غير مهم فمثلاً المجموعة V السابقة هي نفسها أيضاً المجموعة $V = \{e, a, o, i, u\}$. كما أن تكرار العنصر لا يغير المجموعة فمثلاً المجموعة V السابقة هي نفسها أيضاً المجموعة $V = \{e, a, o, i, u, e\}$.

مثال 2: مجموعة الأعداد الزوجية الصحيحة الموجبة التي هي أقل أو يساوي **100**، بما أنه من الصعب سرد كل عناصر المجموعة يُكتفى بسرد بعض العناصر وحذف البقية واستبدالها بـ ... وذلك عندما يكون النموذج العام للعناصر واضح $\boldsymbol{E = \{2, 4, 6, \dots, 100\}}$.

3. **طريقة القاعدة المعينة**

يُمكن استخدام طريقة أخرى في توصيف المجموعة تكمن في تمييز عناصر المجموعة بحيث يمكن التعبير عنها بقاعدة معينة. على سبيل المثال يمكن التعبير عن المجموعة E السابقة كما يلي:$E =$

{عدد زوجي أصغر أو يساوي 100 $x | x$}، وتقرأ هي مجموعة العناصر x حيث x هو عدد زوجي أصغر أو يساوي 100. أو بشكل آخر: $E = \{x \in \mathcal{Z}\ x \leq 100$ و عدد زوجي $x\}$، وتقرأ هي مجموعة العناصر x التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة حيث x هو عدد زوجي و x أصغر أو يساوي 100.

مجموعات الأعداد

هي مجموعات غير منتهية وتلعب دوراً هاماً في الرياضيات التقطيعية:

- مجموعة الأعداد الطبيعية. $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- مجموعة الأعداد الصحيحة. $\mathcal{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$
- مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة. $\mathcal{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$
- مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة $\mathcal{Z}^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$.
- مجموعة الأعداد العادية $Q = \{x \mid x = p/q,\ p,\ q \in \mathcal{Z},\ q \neq 0\}$
- مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathcal{R}$، فواصل كافة النقاط الواقعة على مستقيم.
- مجموعة الأعداد العقدية $\mathcal{C} = \{z \mid z = a + ib,\ a,\ b \in \mathcal{R},\ i^2 = -1\}$.

المجموعة الخالية والمجموعة الكلية

تعريف 2: المجموعة الخالية هي المجموعة التي لا تحوي أي عنصر ونرمز لها بالرمز $\varnothing$ أو { }. مثال على المجموعة الخالية مجموعة الأعداد الزوجية والفردية في آن واحد. أما المجموعة الكلية (الشاملة) هي المجموعة التي تحوي كافة عناصرها ويرمز لها بالرمز Ω. مثال على المجموعة الكلية في مجموعة الأعداد الصحيحة $\Omega = \mathcal{Z}$.

تساوي مجموعتين

تعريف 3: نقول عن مجموعتين أنهما متساويتين إذا وفقط إذا كان لهما نفس العناصر. ليكن لدينا المجموعتان A, B، نقول أنهما متساويتان ونكتب $A = B$، عندما يكون أي عنصر من المجموعة A هو عنصر من المجموعة B وأي عنصر من المجموعة B هو عنصر من المجموعة A.
في الحالة المغايرة نقول عن المجموعتين غير متساويتين، أي إذا وجد عنصر واحد على الأقل في إحدى المجموعتين وغير موجود في الأخرى.

أمثلة 3:
- $\{2,3,5,7,11\} = \{3,2,11,7,5\} = \{11,7,5,3,2\}$
- مجموعة الأعداد الطبيعية ومجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة هما مجموعتان متساويتان $\mathcal{N} = \mathcal{Z}^+$.

تمرين 1: هل المجموعتان التاليتان متساويتين: $B = \{x | x \in Z, x^2 - x = 0\}$ $A = \{0,1\}$؟
الحل: علينا تحديد عناصر المجموعة B، ويتم ذلك بحل المعادلة $x^2 - x = x(x-1) = 0$ والتي حلها هما العددان إما $x = 1$ أي $x - 1 = 0$ أو $= 0$. إذاً: $B = \{0,1\}$ ومنه نستنتج أن $A = B$.

المجموعات الجزئية

تعريف 4: نقول عن مجموعة A أنها مجموعة جزئية من B إذا وفقط إذا كان كل عنصر من المجموعة A هو عنصر من المجموعة B. ونرمز للاحتواء بالرمز $\subset$ (احتواء حصري أي بدون مساواة) أو $\subseteq$ (محتوى أو يساوي).
مثال: $A \subseteq B$.

ملاحظة 1: لبرهان أن المجموعة A هي مجموعة جزئية من B $(A \subseteq B)$ ، نبرهن أنه إذا كان العنصر x ينتمي إلى A فإنه ينتمي إلى B. ولبرهان أن المجموعة A غير محتواه في المجموعة B ، $(A \nsubseteq B)$ يكفي إيجاد عنصر واحد ينتمي إلى A $(x \in A)$ وبحيث أنه لا ينتمي إلى B $(x \notin B)$.

أمثلة 4:
- $\{2,3,5\} \subseteq \{2,3,5,7,11\}$ ويمكن أن نكتب أيضاً $\{2,3,5\} \subset \{2,3,5,7,11\}$
- مجموعة الأعداد الفردية محتواه في مجموعة الأعداد الطبيعية.
- $\mathcal{N} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$.
- المجموعة الخالية محتواه في أي مجموعة أخرى $\varnothing \subseteq S$.
- أي مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها $S \subseteq S$.
- أي مجموعة S تحوي على الأقل مجموعتين جزئيتين منها الخالية $\varnothing$ والمجموعة نفسها S.

ملاحظة 2: لبرهان مجموعتين متساويتان $A = B$، يكفي أن نبرهن أن $A \subseteq B$ وأن $B \subseteq A$.

حجم المجموعة

تعريف 5: لتكن مجموعة S، تحتوي على عدد منته من العناصر المختلفة مقداره n، حيث n عدد صحيح غير سالب، نقول عن المجموعة S أنها منتهية حجمها n. نرمز لحجم مجموعة بالرمز $|S|$ أو $n(S)$ أو $Card(S)$.

أمثلة 5:

- مجموعة الأحرف الصوتية الموجودة في اللغة الإنكليزية $V = \{a, e, i, o, u\}$ $\quad |V| = 5$
- مجموعة الأعداد الفردية الصحيحة الموجبة التي هي أقل من 12 $O = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ $\quad |O| = 6$
- مجموعة أحرف اللغة العربية L $\quad |L| = 28$

قدرة المجموعة

تعريف 6: نسمي قدرة مجموعة S مجموعة المجموعات الجزئية التي تتألف منها، ونرمز إلى قدرة S بالرمز $\mathcal{P}(S)$.

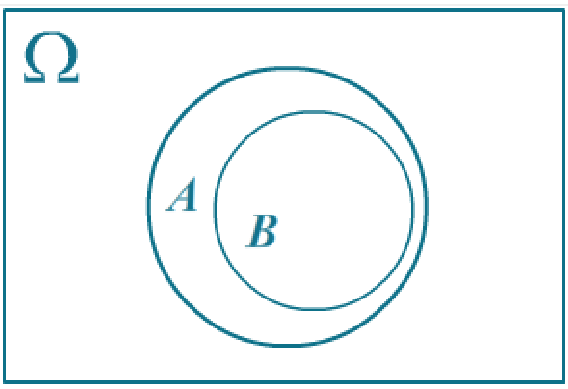
مثال 6: ماهي قدرة المجموعة $\{0, 1, 2\}$؟

$$(\{0, 1, 2\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

فرضية 1: عدد المجموعات الجزئية لمجموعة عدد عناصرها n هو 2^n على سبيل المثال المجموعة التي تحوي عنصرين يكون عدد مجموعاتها الجزئية $2^2 = 4$ والمجموعة التي تحوي 3 عناصر يكون عدد مجموعاتها الجزئية $2^3 = 8$.

مخططات فن

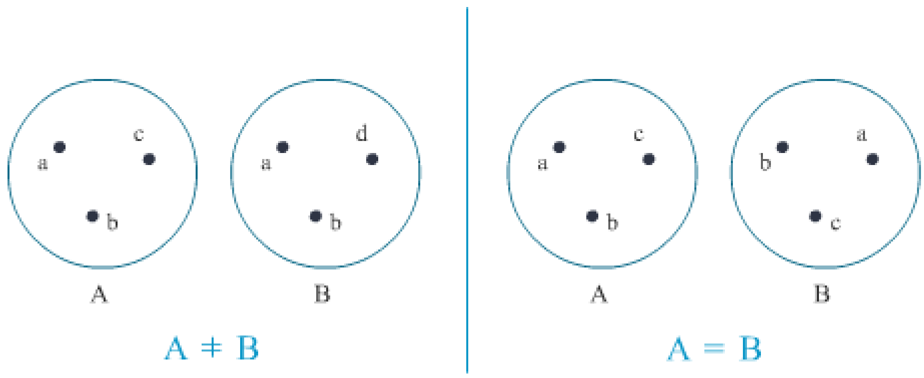
تستخدم مخططات فن لتسهيل التعامل مع المجموعات. يعبر داخل المستطيل على المجموعة الشاملة Ω، وداخل الدوائر تمثل المجموعات الأخرى.



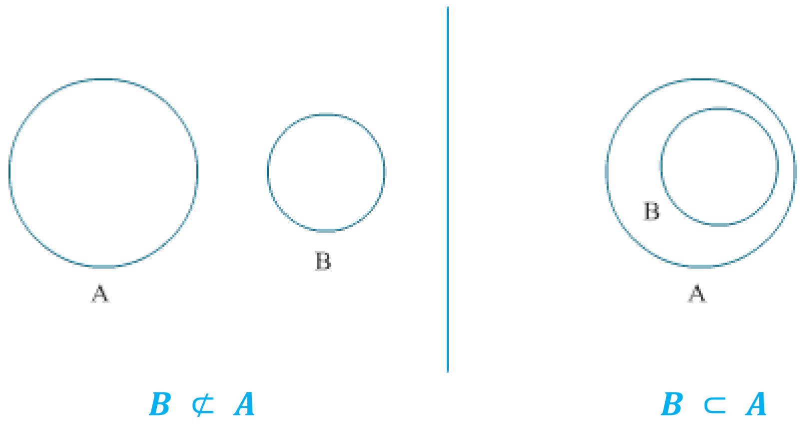
نلاحظ في المخطط أن $B \subseteq A$.

باستخدام مخططات فن، يمكن تمثيل بعض التعاريف السابقة كما يلي:

- تساوي مجموعتين



- المجموعات الجزئية والاحتواء



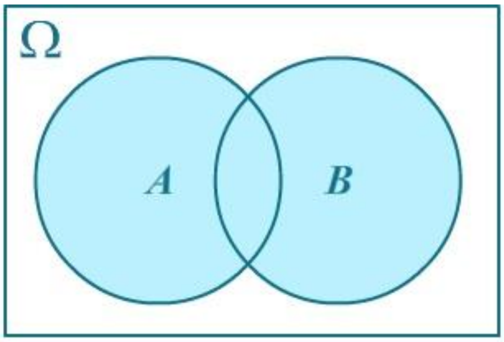
2. العمليات على المجموعات

1.2 اجتماع مجموعتين

ليكن لدينا المجموعتان A, B. نعرف اجتماع A و B ونرمز له بالرمز $A \cup B$، على أنه المجموعة التي تحوي العناصر من A أو من B أو من كليهما. ينتمي العنصر x إلى اجتماع A و B إذا وفقط إذا كان x ينتمي إلى A أو x ينتمي إلى B. أي أن:

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

حيث الرمز $\vee$ يمثل "أو"



A ∪ B

أمثلة 7:

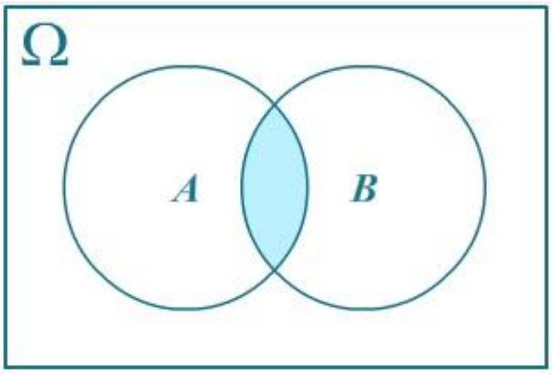
- $\{1,3,5\} \cup \{3,5,7,9\} = \{1,3,5,7,9\}$
- $Z^- \cup Z^+ \cup \{0\} = Z$

خصائص الاجتماع

1. $A \cup A = A$
2. $A \cup \varnothing = A$
3. $A \cup \Omega = \Omega$
4. $A \subseteq (A \cup B),\ B \subseteq (A \cup B)$
5. $A \cup B = B \cup A$ الخاصة التبديلية
6. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ الخاصة التجميعية

2.2 تقاطع مجموعتين

ليكن لدينا المجموعتان A و B . نعرف تقاطع A و B ونرمز له بالرمز $A \cap B$، على أنه المجموعة التي تحوي العناصر المشتركة بين A و B. ينتمي العنصر x إلى تقاطع A و B إذا وفقط إذا كان x ينتمي إلى A و x ينتمي إلى B. أي أن $A \cap B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$، حيث الرمز $\wedge$ يمثل "و"



A ∩ B

أمثلة 8:

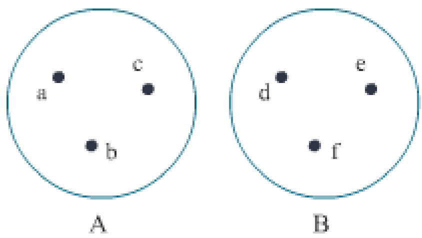
- $\{1,3,5\} \cap \{3,5,7,9\} = \{3,5\}$

- A مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية، B مجموعة الأعداد الأولية. $A \cap B = \{2\}$

خصائص التقاطع

1. $A \cap A = A$
2. $A \cap \varnothing = \varnothing$
3. $A \cap \Omega = A$
4. $(A \cap B) \subseteq A, (A \cap B) \subseteq B$
5. $A \cap B = B \cap A$ الخاصة التبديلية
6. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ الخاصة التجميعية

تعريف 7: نسمي مجموعتين A و B على أنهما منفصلتين إذا لم يكن بينهما عناصر مشتركة. أي أن تقاطعهما يساوي المجموعة الخالية: $A \cap B = \varnothing$.



أمثلة 9:

- A مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية، B مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية. $A \cap B = \varnothing$، أي أن مجموعتي الأعداد الصحيحة الفردية والزوجية هما مجموعتان منفصلتان.
- $\mathcal{Z}^- \cap \mathcal{Z}^+ = \varnothing$، مجموعتي الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة هما مجموعتان منفصلتان.

من أجل حساب حجم (عدد عناصر) مجموعة اجتماع مجموعتين منتهيتين A و B علينا ملاحظة أن $|A| + |B|$ يعدّ كل عنصر موجود في A غير موجود في B أو موجود في B غير موجود في A مرة واحدة، بينما يعدّ كل عنصر موجود في كل من A و B مرتين. لذلك علينا طرح عدد عناصر التقاطع من $|A| + |B|$ كي نحصل على عدد عناصر الاجتماع. أي أن: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

مثال 10:

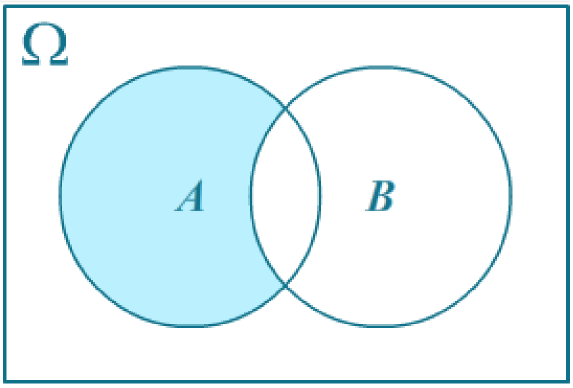
ليكن $A = \{1,3,5\}$، $B = \{3,5,7,9\}$، $A \cup B = \{1,3,5,7,9\}$، $A \cap B = \{3,5\}$

$|A \cap B| = 2, |A \cap B| = 5, |B| = 4, |A| = 3$

$5 = 3 + 4 - 2 = 5$

3.2 فرق مجموعتين

ليكن لدينا المجموعتان $A,\ B$. نعرف فرق A و B ونرمز له بالرمز $A\backslash B$، على أنه المجموعة التي تحوي العناصر الموجودة في A غير الموجودة في B. ينتمي العنصر x إلى فرق A و B إذا وفقط إذا كان x ينتمي إلى A و x لا ينتمي إلى B. أي أن $A\backslash B = \{x|x \in A \wedge x \notin B\}$



A \ B

أمثلة 11:

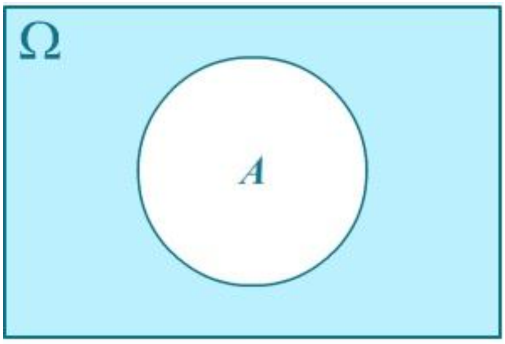
- $\{1,3,5,7,9\}\backslash\{1,3,5\} = \{7,9\}$
- $\{1,3,5\}\backslash\{1,3,5,7,9\} = \varnothing$

خصائص الفرق

1. $A\backslash A = \varnothing$
2. $A\backslash\varnothing = A\backslash\Omega = \varnothing$
3. $(A\backslash B) = B\backslash A \Leftrightarrow A = B$
4. $A\backslash B = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$
5. $A\backslash B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B$

4.2 متمم مجموعة

لتكن Ω المجموعة الشاملة. متتم مجموعة A، ونرمز له بالرمز $\bar{A}$، هو متمم A بالنسبة لـ Ω لذلك فإن متتم المجموعة A هو $\Omega\backslash A$. ينتمي العنصر x إلى $\bar{A}$ إذا وفقط إذا x لا ينتمي إلى A. أي أن $\bar{A} = \{x|x \notin A\}$



$\bar{A}$

أمثلة 12:

- لتكن المجموعة V الأحرف الصوتية في اللغة الإنكليزية $V = \{a, e, i, o, u\}$ (حيث المجموعة الشاملة أحرف اللغة الإنكليزية). عندها $\overline{V} = \{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z\}$
- لتكن المجموعة A الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أكبر تماماً من 10 (حيث المجموعة الشاملة الأعداد الصحيحة الموجبة). عندها $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

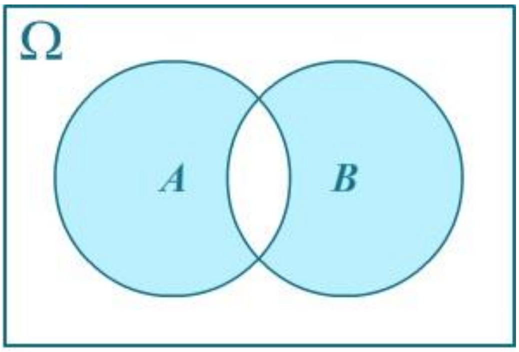
ملاحظة 3: يمكن البرهان على أن: $A \backslash B = A \cap \bar{B}$

خصائص المتمم

1. $\overline{A} \, U \, A = \Omega$
2. $\overline{A} \cap A = \varnothing$
3. $\overline{\varnothing} = \Omega, \qquad \overline{\Omega} = \varnothing$
4. $\overline{\overline{A}} = A$
5. $A \subseteq B \Rightarrow \bar{B} \subseteq \bar{A}$

5.2 الفرق التناظري بين مجموعتين

ليكن لدينا المجموعتان A, B. نعرف الفرق التناظري بين A و B ونرمز له بالرمز أو $A \varDelta B$، على أنه مجموعة العناصر الموجودة في A أو B ولكنها غير موجودة في العناصر المشتركة بين المجموعتين، أي بمعنى آخر العناصر الموجودة في اتحاد المجموعتين وفي نفس الوقت ليست موجودة في التقاطع. ينتمي العنصر x إلى الفرق التناظري لـ A و B إذا وفقط إذا: $A \varDelta B = \{x | x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$



A Δ B

أمثلة 13:

- لتكن المجموعتان $A = \{1, 3, 5\}$ و $B = \{3, 5, 7, 9\}$ فإن $A \varDelta B = \{1, 7, 9\}$.
- ليكن لدينا المجموعتان $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{b, d, e, f\}$ فإن $A \varDelta B = \{a, c, e, f\}$.

خصائص الفرق التناظري

1. $A \varDelta A = \emptyset$
2. $A \varDelta \emptyset = A \varDelta \Omega = \bar{A}$
3. $A \varDelta B = (A \backslash B) \, U \, (B \backslash A)$
4. $A \varDelta B = B \varDelta A$ الخاصة التبديلية
5. $A \varDelta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$

6.2 خصائص أخرى للمجموعات

الخاصة التوزيعية للمجموعات

ليكن لدينا ثلاث مجموعات A, B, C، عندئذ يتحقق ما يلي:

- توزيع الاجتماع على التقاطع $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- توزيع التقاطع على الاجتماع $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

خاصة الامتصاص للمجموعات

ليكن لدينا المجموعتان A, B، عندئذ يتحقق ما يلي:

- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (A \cup B) = A$

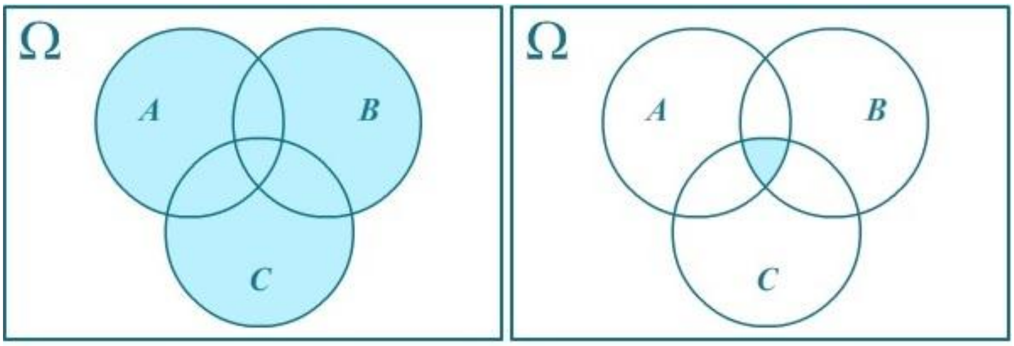
قانون ديمورغان

ليكن لدينا المجموعتان A, B، عندئذ يتحقق ما يلي:

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

تعميم الاجتماعات والتقاطعات

بما أن اجتماع وتقاطع المجموعات يخضع إلى الخاصة التوزيعية، بالتالي فإن المجموعتان $A \cup B \cup C$ و $A \cap B \cap C$ معرفتان تماماً. تحوي المجموعة $A \cup B \cup C$ العناصر الموجودة على الأقل في واحدة من المجموعات الثلاث A, B, C. أما المجموعة $A \cap B \cap C$ فإنها تحوي على العناصر الموجودة في كل المجموعات الثلاث A, B, C .



A ∪ B ∪ C　　　　A ∩ B ∩ C

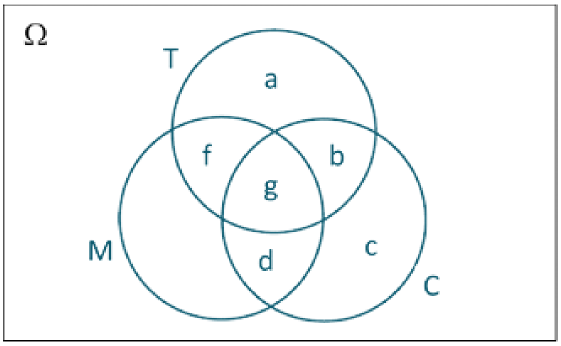
تمرين 2:

في أحد المعاهد 100 طالب عليهم أن يدرسوا على الأقل مادتين من المواد الثلاثة التالية: اتصالات T، رياضيات M أو معلوماتية C. 50 طالب منهم يدرس اتصالات، 65 طالباً يدرس رياضيات، و55 طالباً يدرس معلوماتية. 30 طالباً يدرس كل من الاتصالات والرياضيات، بينما 5 طلاب يدرسون رياضيات ومعلوماتية من دون اتصالات. 20 طالباً يدرسون المواد الثلاثة. ارسم مخطط فن ومن ثم احسب:

a) عدد الطلاب الذين يدرسون كل من اتصالات ومعلوماتية من دون الرياضيات.

b) عدد الطلاب الذين يدرسون على الأقل مادتين من المواد الثلاثة.

الحل:



- من الواضح أن $g = 20$ لأنها تمثل الطلاب الذين يدرسون كافة المواد الثلاثة.

30 طالباً يدرس كل من الاتصالات والرياضيات، أي أن $f + g = 30$ وبالتالي فإن $f = 10$.

- 5 طلاب يدرسون رياضيات ومعلوماتية من دون اتصالات، أي أن $d = 5$.
- 65 طالباً يدرس رياضيات، أي أن $e + d + f + g = 65$ وبالتالي فإن $e = 30$.
- 55 طالباً يدرس معلوماتية، أي أن $b + c + d + g = 55$ وبالتالي فإن:

$$b + c = 30 \qquad (1)$$

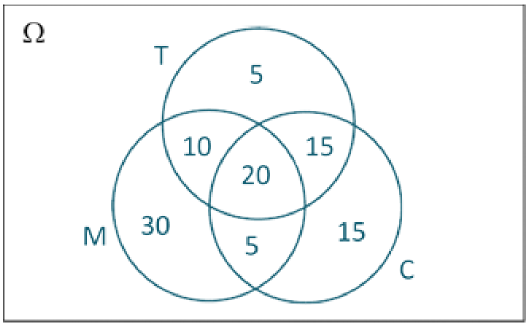
- 50 طالباً منهم يدرس اتصالات، أي أن $a + b + f + g = 50$ وبالتالي فإن

$$a + b = 20 \qquad (2)$$

- العدد الكلي للطلاب هو 100، أي أن $a + b + c + d + e + f + g = 100$ وبالتالي

$$a + b + c = 35 \quad (3)$$

بتعويض (2) في المعادلة (3) نحصل على $c = 15$، من المعادلة (1) نحصل على $b = 15$، ومن المعادلة (2) نحصل على $a = 5$.



a) عدد الطلاب الذين يدرسون كل من الاتصالات والمعلوماتية من دون الرياضيات هو: $b = 15$.

b) عدد الطلاب الذين يدرسون على الأقل مادتين من المواد الثلاثة هو:

$$b + d + f + g = 15 + 5 + 10 + 20 = 50$$

7.2 الجداء الديكارتي

الأزواج المرتبة

تعريف 8: نعرف الزوج المرتب (a, b) على أنه يحوي مركبتين أو إحداثيتين: المركبة الأولى a والمركبة الثانية b.

يتساوى زوجان مرتبان إذا وفقط إذا تساوت مركبات الأول مع الثاني. أي $(a, b) \equiv (c, d)$، إذا وفقط إذا كان $a = c$ و $b = d$. وهكذا يكون $(a, b) \equiv (b, a)$، إذا وفقط إذا $a = b$.

تعريف 9 (الجداء الديكارتي):

لتكن A, B مجموعتان. الجداء الديكارتي لـ A و B، ونرمز له بالرمز $A \times B$، هو مجموعة كافة الأزواج المرتبة (a, b)، حيث $a \epsilon A$ و $b \epsilon B$ أي أن: $A \times B = \{(a, b) | a\ a \epsilon A \wedge b \epsilon B\}$

مثال 14: لتكن $A = \{1, 2\}$ و $B = \{a, b, c\}$. أوجد $A \times B$ و $B \times A$

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$
$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

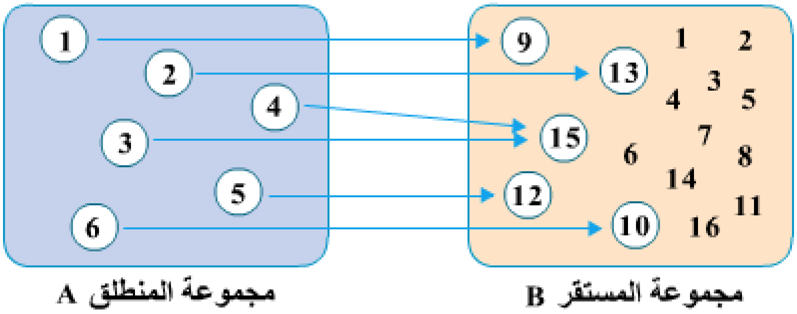
ملاحظة 4: نستخدم الرمز A^2 للدلالة على الجداء الديكارتي $A \times A$ للمجموعة A مع نفسها. لتكن على سبيل المثال $A = \{1, 2\}$ فإن: $A^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

3. التوابع

تعريف 10 (تعريف التابع):

التابع f من مجموعة غير خالية A إلى مجموعة غير خالية B عبارة عن علاقة تربط كل عنصر x من A بعنصر واحد على الأكثر y من B بحيث $(x,y) \in f$.

بدلاً من كتابة $(x,y) \in f$، سيكون الرمز المستخدم $y = f(x)$ أو $f : A \to B$ حيث $y = f(x) \mapsto x$.



نسمي القيمة $y = f(x)$ صورة x وفق التابع f، كما نسمي المجموعة A منطلق التابع f، والمجموعة B مستقره.

أمثلة 15:

- العلاقة التي تربط المجموعة $A = \{1,2,3,4\}$ إلى المجموعة $B = \{1,2,3,4\}$ حيث العلاقة هي الأزواج المرتبة $\{(1,4),(2,4),(3,4),(4,1)\}$ تمثل تابعاً لأنه من أجل كل عنصر يمثل المركّبة الأولى للأزواج المرتبة يوجد عنصر واحد هو المركّبة الثانية.
- العلاقة $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ حيث $f(x) = 2x^2 - 4$ تمثل تابعاً لأنه من أجل كل قيمة $x \in \mathcal{R}$ (من المنطلق) يوجد قيمة واحدة من المستقر $y = 2x^2 - 4 \in \mathcal{R}$.
- ليكن لدينا المجموعتان: المدن V وهي مجموعة مدن العالم، والبلدان P وهي مجموعة بلدان العالم والعلاقة f من المدن إلى البلدان $f : V \mapsto P$ بحيث $f(x)$ هو البلد الذي توجد فيه المدينة x. العلاقة f هي تابع لأن كل عنصر x من المدن له علاقة مع عنصر واحد من البلدان. على سبيل المثال:

$$f(Damascus) = Syria \qquad f(Lattakia) = Syria$$
$$f(Paris) = France \qquad f(Barcelona) = Spain$$

- نفس المجموعتان السابقتان ولكن العلاقة g من البلدان إلى المدن $g : P \mapsto V$ بحيث $g(x)$ هو مدينة من البلد x. العلاقة g ليست تابع لأنه مثلاً $x = Syria$ لها علاقة مع أكثر من مدينة واحدة.

تعريف 11: مجال التابع f أو مجموعة تعريفه هو مجموعة العناصر الموجودة في مجموعة المنطلق والتي لها صورة بواسطة التابع f ويرمز لها بالرمز D_f أو اختصاراً D وهي مجموعة جزئية من مجموعة المنطلق. ومدى التابع f هو صور D_f وفق f ، أي $f(D_f)$ وهو مجموعة جزئية من مجموعة المستقر، ويرمز له بالرمز R_f.

مثال 16: لتكن لدينا المجموعتان $A = \{0,1,-1,2,-2,5\}$ و $B = \{0,1,4,9,-2\}$ والتابع f من A إلى B بحيث: $f(0) = 0, f(1) = f(-1) = 1, f(2) = f(-2) = 4$. أوجد مجال التابع ومداه.

$D_f = \{0,1,-1,2,-2\}, \qquad R_f = \{0,1,4\}$

باعتبار أن:

$$f(0) = 0$$
$$f(1) = f(-1) = 1$$
$$f(2) = f(-2) = 4$$

فإن: $D_f = \{0,1,-1,2,-2\}$ و $R_f = \{0,1,4\}$.

1.3 خصائص التابع

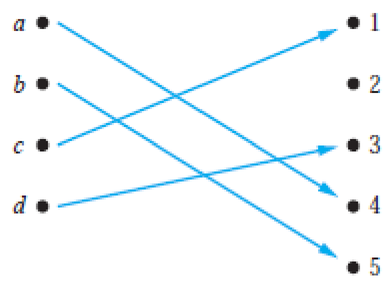
- يمكن لبعض عناصر B أن لا تكون مرتبطة بأي عنصر من A
- يمكن لعنصرين أو أكثر من A أن تكون مرتبطة بنفس العنصر من B
- لا يمكن لأي عنصر من A أن يرتبط بعنصرين مختلفين من B

2.3 أنواع التوابع

التابع المتباين

تعريف 12: نقول عن التابع $f: A \to B$ إنه تابع متباين إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط، وكل عنصر من المدى يوافق عنصر واحد من مجموعة التعريف. من أجل البرهان على تابع أنه متباين، يكفي أن نبرهن على أنه إذا كان $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ أو $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

مثال 17:



- هل التابع f المعرف من $A = \{a,b,c,d\}$ إلى $B = \{1,2,3,4,5\}$ بحيث $f(a) = 4, f(b) = 5, f(c) = 1, f(d) = 3$ متباين؟

نعم التابع متباين لأن كل عنصر من المدى يوافق لعنصر واحد من المنطلق. بعبارة أخرى لا يوجد عنصرين من المنطلق مرتبطة بنفس العنصر من المدى.

التابع المتباين

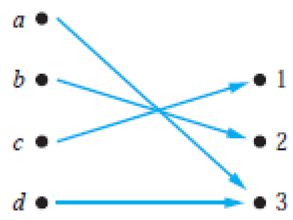
تمرين 3: هل التابع من $f : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ والمعرف كما يلي: $f(x) = x^2$ متباين؟

الحل: الجواب لا لأنه على سبيل المثال $f(-2) = f(2) = 4$، ولكن $-2 \neq 2$. أما إذا قصرنا التابع على مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة بدلا من الأعداد الصحيحة يصبح التابع متباين $(f : \mathcal{Z}^+ \rightarrow \mathcal{Z})$.

التابع الغامر

تعريف 13: نقول عن التابع $f: A \rightarrow B$ إنه تابع غامر إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط وكل عنصر من مجموعة المستقر يوافق عنصر واحد على الأقل من مجموعة المنطلق. أي أن المدى هو نفسه مجموعة المستقر.

مثال 18:



- هل التابع f المعرف من $A = \{a, b, c, d\}$ إلى $B = \{1, 2, 3\}$ بحيث $f(a) = 3, f(b) = 2, f(c) = 1, f(d) = 3$ غامر؟

  بما أن كافة العناصر في المستقر هي صور لعناصر من المنطلق فالتابع غامر.

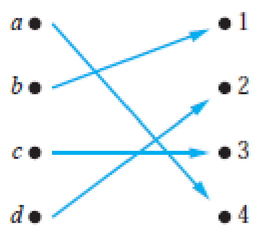
تمرين 4: هل التابع من $f : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ والمعرف كما يلي: $f(x) = x^2$ غامر؟

الحل: لا لأنه لا يوجد عدد صحيح x بحيث صورته -1 $x^2 = -1$.

التابع التقابل

تعريف 14: نقول عن التابع $f: A \rightarrow B$ إنه تابع تقابل إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط، وكل عنصر من مجموعة المستقر يوافق عنصر واحد فقط من مجموعة المنطلق. أي أن التابع متباين وغامر في آن واحد.

مثال 19:



- هل التابع f المعرف من $A = \{a,b,c,d\}$ إلى $B = \{1,2,3,4\}$ بحيث $f(a) = 4,\ f(b) = 1,\ f(c) = 3,\ f(d) = 2$ تقابل؟

نعم لأن كل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط، وكل عنصر من مجموعة المستقر يوافق عنصر واحد فقط من مجموعة المنطلق. إذن التابع تقابل.

تمرين 5: هل التابع من $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ والمعرف كما يلي: $f(x) = x^2$ تقابل؟

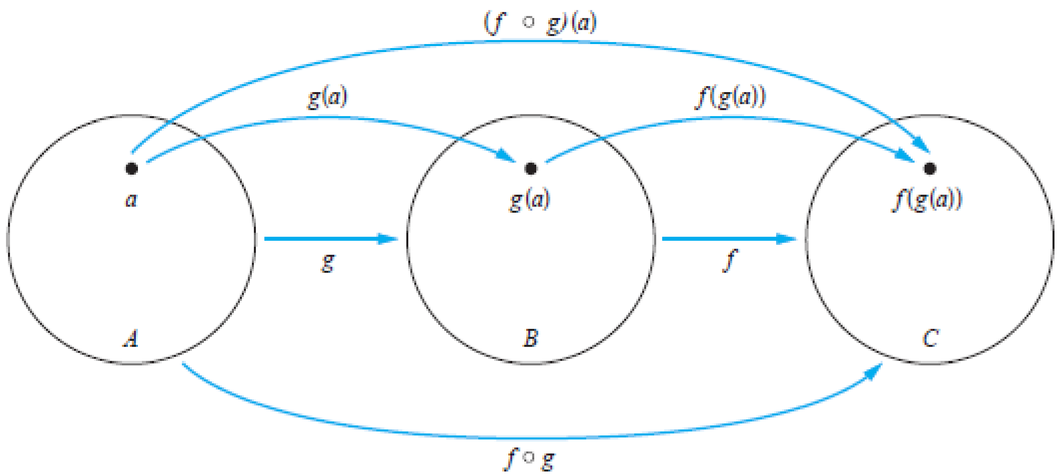
الحل: لا لأنه على سبيل المثال $f(-2) = f(2) = 4$، ولكن $-2 \neq 2$ والتابع ليس متباين وبالتالي ليس تقابل أما إذا قصرنا التابع على مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة بدلا من الأعداد الحقيقية يصبح التابع تقابل $(f : \mathcal{R}^+ \to \mathcal{R})$.

التابع المطابق

تعريف 15 (التابع المطابق): لتكن A مجموعة ما. نسمي التابع $I_A : A \to A$ والمعرف كما يلي $I_A(x) = x$ بالتابع المطابق. من الواضح أن التابع المطابق هو متباين وغامر وبالتالي تطابق.

3.3 تركيب التوابع

تعريف 16: ليكن لدينا التابع $g : A \to B$، والتابع $f : B \to C$. تركيب التابعين f و g والذي نرمز له بـ $f \circ g$ ، من أجل كافة العناصر $a \in A$، معرف كما يلي: $(f \circ g)(a) = f(g(a))$.



ملاحظة 5: لا يمكن تعريف التركيب $g \circ f$ إلا إذا كان مدى التابع g عبارة عن مجموعة جزئية من منطلق التابع f.

ملاحظة 6: تركيب التوابع ليس تبديلي، أي بشكل عام $(f \circ g) \neq (g \circ f)$.

مثال 20: ليكن التابع g المعرف من المجموعة $\{a, b, c\}$ إلى نفسها كما يلي:
$g(a) = b, g(b) = c, g(c) = a$. وليكن أيضاً التابع f المعرف من المجموعة $\{a, b, c\}$ إلى المجموعة $\{1, 2, 3\}$ كما يلي: $f(a) = 3, f(b) = 2, f(c) = 1$. أوجد $f \circ g$ و $g \circ f$.

$$(f \circ g)(a) = f\big(g(a)\big) = f(b) = 2, (f \circ g)(b) = f\big(g(b)\big) = f(c) = 1\,, (f \circ g)(c) = f\big(g(c)\big) = f(a) = 3$$

أما $g \circ f$ فهو غير معرف لأن مدى التابع f ليس مجموعة جزئية من منطلق التابع g.

تمرين 6: ليكن f, g تابعان معرفان من مجموعة الأعداد الصحيحة إلى مجموعة الأعداد الصحيحة كما يلي:
$f(x) = 2x + 3$ و $g(x) = 3x + 2$. أوجد $f \circ g$ و $g \circ f$.

الحل: من الواضح أن كل من $f \circ g$ و $g \circ f$ معرف.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 2) = 2(3x + 2) + 3 = 6x + 4 + 3 = 6x + 7$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = 3(2x + 3) + 2 = 6x + 9 + 2 = 6x + 11$$

مبرهنة 1: ليكن لدينا التوابع التالية: $f : A \to B$ و $g : B \to C$ و $h : C \to D$، عندئذ لدينا:

a. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ الخاصة التجميعية

b. $f \circ I_A = I_B \circ f = f$ التابع المطابق عنصر حيادي بالنسبة لتركيب التوابع

مبرهنة 2 (خواص التوابع المركبة): ليكن لدينا التابعان التاليان: $f : A \to B$ و $g : B \to C$، عندئذ لدينا:

a. إذا كان f و g متباينين فإن $g \circ f$ متباين

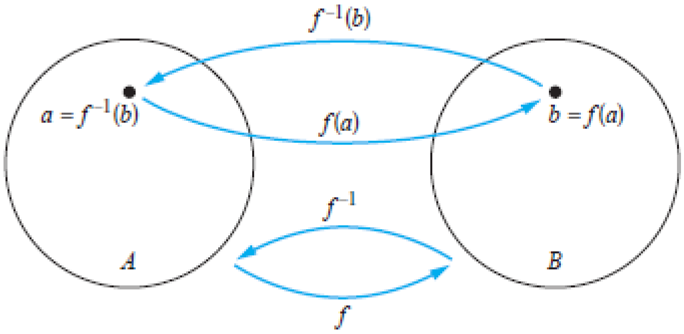
b. إذا كان f و g غامرين فإن $g \circ f$ غامر

c. إذا كان $g \circ f$ متباين فإن f متباين

d. إذا كان $g \circ f$ غامر فإن g غامر

4.3 التابع العكسي

تعريف 17: ليكن التابع f تقابل من المجموعة A إلى المجموعة B. التابع العكسي للتابع f هو التابع الذي يُلحق لعنصر b ينتمي إلى B العنصر الوحيد a في A بحيث $f(a) = b$. يرمز للتابع العكسي لـ f بـ f^{-1}. بالتالي: $f^{-1}(b) = a$ وذلك عندما يكون $f(a) = b$.



أمثلة 21:

- ليكن التابع f المعرف من $A = \{a, b, c\}$ إلى $B = \{1, 2, 3\}$ بحيث:
  $f(a) = 2, f(b) = 3, f(c) = 1$. هل للتابع f تابع عكسي؟ أوجده إذا كان كذلك.
  f تابع تقابل وبالتالي له تابع عكسي معرف كما يلي: $f^{-1}(1) = c$، $f^{-1}(2) = a$ و $f^{-1}(3) = b$.
- ليكن التابع $f : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ المعرف كما يلي $f(x) = x + 1$. هل للتابع f تابع عكسي، أوجده إذا كان كذلك.
  التابع f تابع تقابل بالتالي له تابع عكسي. ليكن y صورة x، أي $y = x + 1$، وبالتالي فإن: $x = y - 1$. معنى هذا أن $f^{-1}(y) = y - 1$.
- ليكن التابع $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ المعرف كما يلي $f(x) = x^2$. هل للتابع f تابع عكسي، أوجده إذا كان كذلك.
  التابع f ليس تقابل (ليس متباين) لأن $f(-2) = f(2) = 4$، وبالتالي ليس له تابع عكسي.

تمرين 7: ليكن التابع $f : \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}^+$ المعرف كما يلي $f(x) = x^2$. هل للتابع f تابع عكسي، أوجده إذا كان كذلك.

الحل: لنرى فيما إذا أصبح التابع متباين؟ ليكن $f(x) = f(y)$، أي $x^2 = y^2$، وبالتالي $x = y$ أو $x = -y$ الحل الثاني مرفوض لأن كل من x و y موجبين. إذن لدينا فقط x = y، أي أن التابع متباين وبالتالي تقابل وله تابع عكسي.

$y = x^2$ وبالتالي فإن $x = \sqrt{y}$ ($x = -\sqrt{y}$ مرفوض). أي أن $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

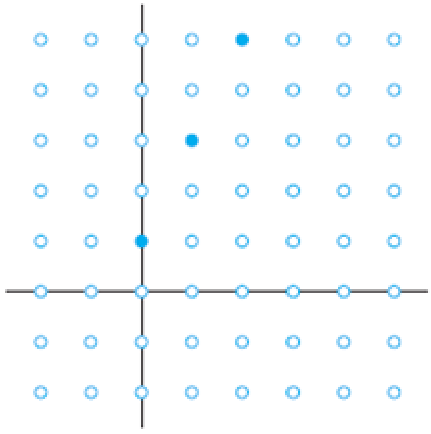
التابع العكسي والتركيب

$f \circ f^{-1}(a) = f^{-1} \circ f(a) = a$، وبالتالي فإن $f^{-1} \circ f = I_A$ و $f^{-1} \circ \mathrm{f} = I_B$

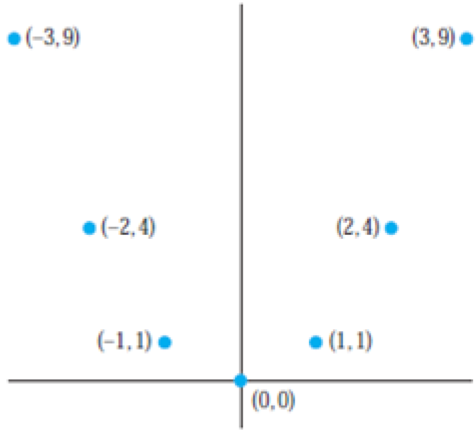
5.3 بيان تابع

تعريف 18: ليكن $f: A \to B$. بيان التابع f هو مجموعة الأزواج المرتبة $\{(a,b) | a \in A \text{ and } f(a) = b\}$.

مثال 22: ارسم التابعين $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ المعرف كما يلي $f(n) = 2n + 1$، و $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ المعرف كما يلي $f(x) = x^2$.



$f(n) = 2n + 1$



$f(x) = x^2$

6.3 التوابع العددية

تعريف 19: التابع العددي هو التابع الذي يكون مجموعة مستقرّه عبارة عن مجموعة عددية.

أمثلة 23:

- التابع $f: \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ المعرف كما يلي $f(x) = x + 1$ هو تابع عددي.
- التابع $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ المعرف كما يلي $f(x) = x^2$ هو تابع عددي.

تمارين

1. اذكر عناصر المجموعات التالية:

a) $A = \{x|x \in \mathcal{N}, 3 < x < 12\}$
b) $B = \{x|x \in \mathcal{R}, x^{2} = 1\}$
c) $C = \{x|x \in \mathcal{N}, x + 1 = 0\}$
d) $D = \{x|x \in \mathcal{R}, \sqrt{x^2+1} = 2\}$

2. أي من المجموعات التالية متساوية:

a) $A = \{x|x^{2} - 4x + 3 = 0\}$
b) $B = \{x|x \in \mathcal{N}, x < 3\}$
c) $C = \{x|x \in \mathcal{N}, x$ فردي$, x < 5\}$
d) $D = \{3, 1\}$
e) $E = \{1, 1, 3\}$

3. بفرض أنه لدينا $\Omega = \{1, 2, \dots, 9\}$ والمجموعات التالية:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad B = \{4, 5, 6, 7\} \qquad C = \{5, 6, 7, 8, 9\}$$

أوجد ما يلي:

$$A \cup B\ , A \cap B\ , A \backslash B\ , B \backslash A\ , A \oplus B\ , A \cap B \cap C\ , B \cap \bar{C}$$

4. برهن أن: $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{C}) = A$.

5. باستخدام $A \backslash B = A \cap \bar{B}$ برهن أن: $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

6. ارسم مخطط فن للمجموعات الثلاث A, B, C:

a) $A \cap (B \backslash C)$
b) $(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C})$
c) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

7. أياً من التوابع التالية $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ تابع متباين؟

a) $f(n) = n - 1$
b) $f(n) = n^2 + 1$
c) $f(n) = n^3$

8. أياً من التوابع السابقة تابع غامر؟

.9 أياً من التوابع التالية $f\,:\,\mathcal{R}\,\to\,\mathcal{R}$ تابع تقابل؟

a) $f(x) = 2x + 1$
b) $f(x) = x^2 + 1$
c) $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2 + 2)$

.10 أوجد $f \circ g$ و $g \circ f$، حيث $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = x + 2$ هي توابع من $\mathcal{R}$ إلى $\mathcal{R}$.

.11 ليكن التابع f معرف من $\mathcal{R}$ إلى $\mathcal{R}$ بـ $f(x) = x^2$. أوجد:

a) $f^{-1}(\{1\})$
b) $f^{-1}(\{x|\ 0 < x < 1\})$
c) $f^{-1}(\{x|\ x > 4\})$

مذاكرة الفصل الأول

العلامة العظمى: 100 | **علامة النجاح: 50** | **المدة: ساعة ونصف**

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة (35) درجة

1. $A \subseteq B \Leftarrow A\backslash B =$
   a. $\varnothing$
   b. A
   c. B
   d. Ω

2. $A \subseteq B \Leftarrow A \cap B =$
   a. $\varnothing$
   b. A
   c. B
   d. Ω

3. $A \subseteq B \Leftarrow A \cup B =$
   a. $\varnothing$
   b. A
   c. B
   d. Ω

4. $|A| + |\bar{A}| =$
   a. $|A|$
   b. $|\bar{A}|$
   c. $|\Omega|$
   d. 0

5. $A \Delta B = \varnothing \Leftrightarrow$
   a. $A = \emptyset$
   b. $B = \emptyset$
   c. $A = B$
   d. $A \subseteq B$

6. $\Leftrightarrow A\backslash B = A$

a. $A = B$

b. $A \cap B = \emptyset$

c. $A \subseteq B$

d. $B = \emptyset$

7. عناصر المجموعة $A = \{x|x \in \mathcal{R}, \sqrt{x^2+1} = 2\}$ هي:

a. $S = \{3\}$

b. $S = \{-3, 3\}$

c. $S = \varnothing$

d. $S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

السؤال الثاني: أجب بصح أو خطأ **(20) درجة**

1. المجموعتان $B = \{x|x \in \mathcal{Z}, x^2 - 2x = 0\}$ $A = \{0, 2\}$ متساويتان	صح أو خطأ
2. حجم وقدرة مجموعة الأحرف الصوتية في اللغة الإنكليزية هما 5 و32 على الترتيب	صح أو خطأ
3. $\mathcal{Z}^+ \cap \mathcal{Z}^-$ مجموعتان منفصلتان	صح أو خطأ
4. $\{1, 3, 5\}\backslash\{1, 3, 5, 7, 9\} = \{7, 9\}$	صح أو خطأ
5. $|A \cup B| = |A| + |B|$، حيث $|A|$ عدد عناصر المجموعة A	صح أو خطأ
6. $A\backslash B = A \cap \overline{B}$	صح أو خطأ
7. $A \,\Delta\, \Omega = A$	صح أو خطأ
8. التابع $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ المعرف بـ $f(n) = n^2 + 1$ متباين	صح أو خطأ
9. التابع $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ المعرف بـ $f(n) = n^3$ غامر	صح أو خطأ
10. التابع $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ المعرف بـ $f(n) = (x^2 + 1)/(x^2 + 2)$ تقابل	صح أو خطأ

السؤال الثالث: **(15) درجة**

ليكن التابع f معرف من $\mathcal{R}$ إلى $\mathcal{R}$ بـ $f(x) = x^2 - 1$. أوجد:

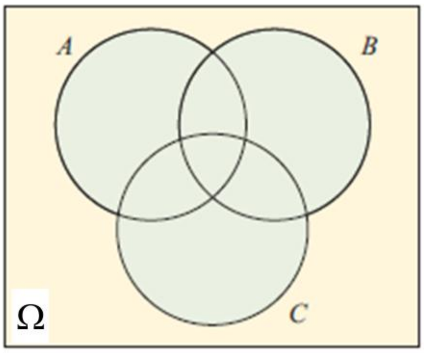
a) $f^{-1}(\{3\})$

b) $f^{-1}(\{x|\, 0 < x < 1\})$

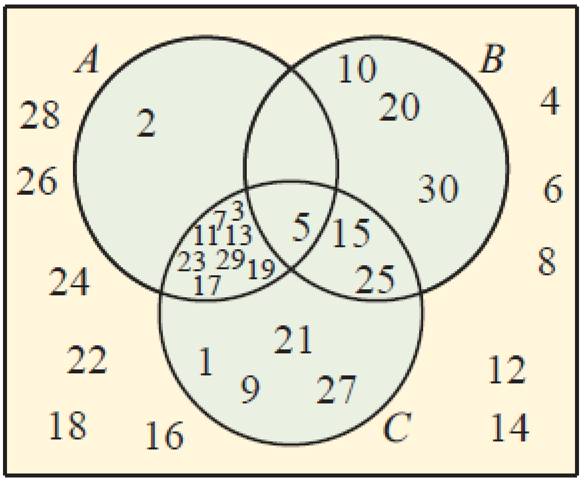
c) $f^{-1}(\{x|\, x > 4\})$

السؤال الرابع: **(15) درجة**

لتكن المجموعات التالية: $\Omega = \{x|x\leq30, x\in \mathbb{Z}+\}$ و$A = \{$عدد أولي أصغر أو يساوي 30$\}$ و$B = \{$مضاعفات العدد 5 وأصغر أو يساوي 30$\}$ و$C = \{$عدد فردي وأصغر أو يساوي 30$\}$. اكتب على مخطط فن التالي العناصر المذكورة.

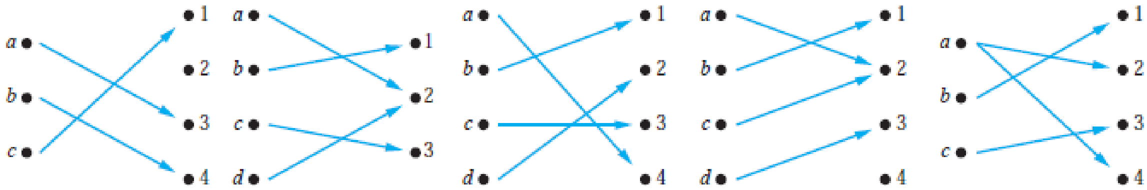


الحل:

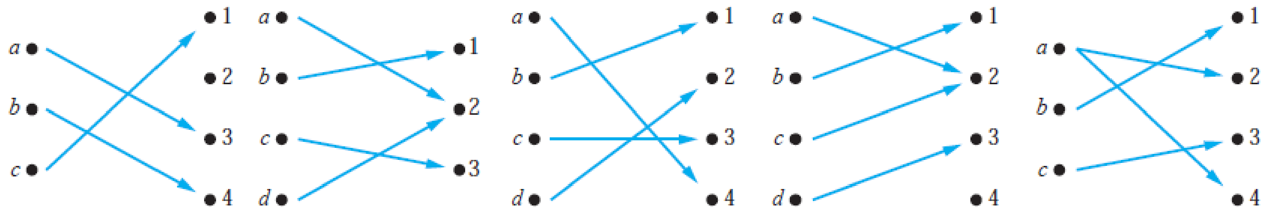


السؤال الخامس: **(15) درجة**

من أجل كل شكل من الأشكال التالية بين إذا كان تابعاً أولاً وثانياً فيما إذا كان متباين، غامر، تقابل



الحل:



ليس تابعاً — تابع لا متباين ولا غامر — تابع تقابل — تابع غامر غير متباين — تابع متباين غير غامر

الإجابات الصحيحة

السؤال الأول:

رقم التمرين	الإجابة الصحيحة
.1	(a)
.2	(b)
.3	(c)
.4	(c)
.5	(c)
.6	(b)
.7	(d)

السؤال الثاني:

رقم التمرين	الإجابة الصحيحة
.1	صح
.2	صح
.3	صح
.4	خطأ
.5	خطأ
.6	صح
.7	خطأ
.8	خطأ
.9	صح
.10	خطأ