

الثنوية أو الترافق في البرمجة الخطية (Duality in linear programming)

البرنامج الأولي (الأصلي) و الثنوي (المرافق)

a) الشكل القانوني

يعطى الشكل القانوني للبرنامج الخطي الأولي في حالة تعظيم على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} \max z_1 &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ (P) \quad &\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, & j = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (1) \quad \text{(البرنامج الأولي)}$$

بالتعريف المرافق للبرنامج الخطي الأولي السابق يعطى على الشكل القانوني التالي:

$$\begin{aligned} \min z_2 &= \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ (D) \quad &\begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, & j = 1, \dots, n \\ y_i \geq 0, & i = 1, \dots, m \end{cases} \end{aligned} \quad (2) \quad \text{(البرنامج المرافق)}$$

و في الشكل المصفوفي يمكن كتابة الأولي و المرافق على الشكل التالي:

$$\max \{z_1 = c^t x / Ax \leq b, x \in R_+^n\} \quad (1) \quad \text{(المسألة الأولية)}$$

$$\min \{z_2 = b^t y / A^t y \geq c, y \in R_+^m\} \quad (2) \quad \text{(المسألة المرافقة)}$$

b) الشكل العام

$$\begin{aligned} \max z_1 &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ (P) \quad &\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, & i = 1, \dots, h \leq m \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, & i = h+1, \dots, m \\ x_j \geq 0, & j = 1, \dots, k \leq n \\ x_j, \text{unrestricted in sign} & j = k+1, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \min z_2 &= \sum_{i=1}^m b_i y_i \\
 (D) \quad &\begin{cases} \sum_{i=1}^m a_{ij} y_j \geq c_j, & j = 1, \dots, k \leq n \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_j = c_j, & j = k + 1, \dots, n \\ y_i \geq 0, & i = 1, \dots, h \leq m \\ y_i, & \text{unrestricted in sign} \quad i = h + 1, \dots, m \end{cases}
 \end{aligned}$$

أولي(مرافق)	مرافق (أولي)
تعظيم	تقليل
معاملات تابع الهدف	قيم الجانب الأيمن للقيود
قيم الجانب الأيمن للقيود	معاملات تابع الهدف
العمود j من معاملات القيود	السطر j من معاملات القيود
السطر i من معاملات القيود	العمود i من معاملات القيود
$(\text{المتغير } j) \geq 0$	$(\text{القيود } j) \geq$
المتغير j غير المقيد	$(\text{القيود } j) =$
$(\text{المتغير } j) \leq 0$	$(\text{القيود } j) \leq$
$(\text{القيود } i) \leq$	$(\text{المتغير } i) \geq 0$
$(\text{القيود } i) =$	المتغير i غير مقيد
$(\text{القيود } i) \geq$	$(\text{المتغير } i) \leq 0$

للحصول على البرنامج المرافق للأولي في حالة تعظيم يتم التحويل من اليسار إلى اليمين. و للحصول على المرافق للأولي في حالة تقليل يتم التحويل من اليمين إلى اليسار

بعض العلاقات الهامة بين البرنامج الأولي (P) و البرنامج الثنوي أو المرافق (D)

1. الحالات الثلاث التالية متنافية مثنى مثنى

أ. إذا كان الأولي (P) غير ممكن (أو ليس له حل)، فإن المرافق (D) إما أن يكون ممكن (له حل) و قيمة تابع

الهدف غير محدودة أو أن يكون غير ممكن (ليس له حل)

ب. إذا كان الأولي (P) ممكن (له حل) و قيمة تابع الهدف غير محدودة، فإن المرافق (D) غير ممكن (ليس له

حل)

ت. إذا كان الأولي (P) ممكن (له حل) و قيمة تابع الهدف محدودة، فإن المرافق (D) ممكن (له حل) و قيمة

تابع الهدف محدودة

2. (الترافق الضعيف). إذا كانت المتجهة x حل ممكن في حالة تعظيم للأولي (P) و المتجهة y حل ممكن للمرافق

(D)، عندئذ قيمة تابع الهدف للمرافق (D) عند المتجهة y ($z_2 = b^t y$) أكبر من قيمة تابع الهدف للأولي (P) عند

المتجهة x ($z_1 = c^t x$) أي

$$z_1 = c^t x \leq b^t y = z_2$$

3. (الترافق القوي). إذا كانت المتجهة x^* حل مثالي للأولي (P) و المتجهة y^* حل مثالي للمرافق (D)، عندئذ

قيمة تابع الهدف للمرافق (D) عند المتجهة y^* ($z_2^* = b^t y^*$) تساوي قيمة تابع الهدف للأولي (P) عند المتجهة

x^* ($z_1^* = c^t x^*$) أي

$$z_1^* = c^t x^* = b^t y^* = z_2^*$$

4. (النتامية أو التكاملية). إذا كانت المتجهة x^* حل مثالي للأولي (P) و المتجهة y^* حل مثالي للمرافق (D)، و

كان $t^* = b - Ax^* \geq 0$ المتحولات الفضفاضة للأولي (P) و $u^* = A^t y^* - c \geq 0$ المتحولات الفائضة للمرافق

(D) فإن شروط النتامية هي

$$x_j^* u_j^* = 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$y_i^* t_i^* = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

و كنتيجة لذلك يمكن أن نكتب التالي

أولي		مرافق
المتحولات البنيوية $x_j^* (j = 1, \dots, n)$	$x_j^* = 0 \Leftarrow u_j^* > 0$ $x_j^* > 0 \Rightarrow u_j^* = 0$	المتحولات الفائضة $u_j^* (j = 1, \dots, n)$
المتحولات الفضفاضة $t_i^* (i = 1, \dots, m)$	$t_j^* = 0 \Leftarrow y_j^* > 0$ $t_j^* > 0 \Rightarrow y_j^* = 0$	المتحولات البنيوية $y_i^* (i = 1, \dots, m)$

الترافق أو الثنوية (أمثلة)

P.

$$\begin{aligned} \max z_1 &= x_1 + 3x_2 \\ \text{st} \quad &x_1 + x_2 \leq 14 \\ &-2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ &2x_1 - x_2 \leq 12 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

D.

$$\begin{aligned} \min z_2 &= 14y_1 + 12y_2 + 12y_3 \\ \text{st} \quad &y_1 - 2y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ &y_1 + 3y_2 - y_3 \geq 3 \\ &y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

P.

$$\begin{aligned} \min z_1 &= -x_1 + x_2 \\ \text{st} \quad &2x_1 - x_2 \geq -2 \\ &x_1 - x_2 \leq 2 \\ &x_1 + x_2 \leq 5 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \\ &\Downarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min z_1 &= -x_1 + x_2 \\ \text{st} \quad &2x_1 - x_2 \geq -2 \\ &-x_1 + x_2 \geq -2 \\ &-x_1 - x_2 \geq -5 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max z_2 &= -2y_1 - 2y_2 - 5y_3 \\ \text{st} \quad &2y_1 - y_2 - y_3 \leq -1 \\ &-y_1 + y_2 - y_3 \leq 1 \\ &y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

D.

P.

$$\begin{aligned} \max z_1 &= 5x_1 + 7x_2 \\ \text{st} \quad &x_1 + x_2 \geq 6 \\ &x_1 \geq 4 \\ &x_2 \leq 3 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \\ &\Downarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max z_1 &= 5x_1 + 7x_2 \\ \text{st} \quad &-x_1 - x_2 \leq -6 \\ &-x_1 \leq -4 \\ &x_2 \leq 3 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min z_2 &= -6y_1 - 4y_2 + 3y_3 \\ \text{st} \quad &-y_1 - y_2 \geq 5 \\ &-y_1 + y_3 \geq 7 \\ &y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

D.

P.

$$\begin{aligned} \min z_1 &= -x_1 + x_2 \\ \text{st} \quad 2x_1 - x_2 &\geq -2 \\ x_1 - 2x_2 &\leq -8 \\ x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \Downarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min z_1 &= -x_1 + x_2 \\ \text{st} \quad 2x_1 - x_2 &\geq -2 \\ -x_1 + 2x_2 &\geq 8 \\ -x_1 - x_2 &\geq -5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max z_2 &= -2y_1 + 8y_2 - 5y_3 \\ \text{st} \quad 2y_1 - y_2 - y_3 &\leq -1 \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 &\leq 1 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

D.

P.

$$\begin{aligned} \min z_1 &= -x_1 + 2x_2 \\ \text{st} \quad 5x_1 + 3x_2 &\geq -30 \\ x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\text{ w.r.s} \\ \Downarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min z_1 &= -x_1 + 2x_2 \\ \text{st} \quad 5x_1 + 3x_2 &\geq -30 \\ -x_1 + x_2 &\geq -2 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\text{ w.r.s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max z_2 &= -30y_1 - 2y_2 \\ \text{st} \quad 5y_1 - y_2 &\leq -1 \\ 3y_1 + y_2 &= 2 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

D.

أو يتم بتغيير المتحولات

$$x_2 = x_2' - x_2'', \quad x_2', x_2'' \geq 0$$

لندخل هذا المتحول في البرنامج الأولي نجد أن

P.

$$\begin{aligned} \min z_1 &= -x_1 + 2x_2' - 2x_2'' \\ \text{st} \quad &5x_1 + 3x_2' - 3x_2'' \geq -30 \\ &-x_1 + x_2' - x_2'' \geq -2 \\ &x_1, x_2', x_2'' \geq 0 \end{aligned}$$

D.

$$\begin{aligned} \max z_2 &= -30y_1 - 2y_2 \\ \text{st} \quad &5y_1 - y_2 \leq -1 \\ &3y_1 + y_2 \leq 2 \\ &3y_1 + y_2 \geq 2 \\ &y_1, y_2 \geq 0 \\ &\Downarrow \\ \max z_2 &= -30y_1 - 2y_2 \\ \text{st} \quad &5y_1 - y_2 \leq -1 \\ &3y_1 + y_2 = 2 \\ &y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

P.

$$\begin{aligned} \min z_1 &= -x_1 + 2x_2 \\ \text{st} \quad &5x_1 + 3x_2 \geq -30 \\ &-x_1 + x_2 \geq -2 \\ &x_1, x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

بتحويل المتغيرات على الشكل التالي

$$x_1 = -x_1', x_2 = -x_2', \quad x_1', x_2' \geq 0$$

و بادخال هذه المتحولات في البرنامج الأولي نجد أن

P.

$$\begin{aligned} \min z_1 &= x_1' - 2x_2' \\ \text{st} \quad &-5x_1' - 3x_2' \geq -30 \\ &x_1' - x_2' \geq -2 \\ &x_1', x_2' \geq 0 \end{aligned}$$

$$\max z_2 = -30y_1 - 2y_2$$

$$st \quad -5y_1 + y_2 \leq 1$$

$$-3y_1 - y_2 \leq -2$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

D.

P.

$$\min z_1 = -x_1 + 2x_2$$

$$st \quad 5x_1 + 3x_2 \geq -30$$

$$-x_1 + x_2 = -2$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \quad w.r.s$$

بتغير المتحول

$$x_2 = x_2' - x_2'', \quad x_2', x_2'' \geq 0$$

و بكتابة المساواة على الشكل التالي

$$-x_1 + x_2 \geq -2$$

$$-x_1 + x_2 \leq -2$$

بادخال هذه المتغيرات في البرنامج الأولي نجد

P.

$$\min z_1 = -x_1 + 2x_2' - 2x_2''$$

$$st \quad 5x_1 + 3x_2' - 3x_2'' \geq -30$$

$$-x_1 + x_2' - x_2'' \geq -2$$

$$x_1 - x_2' + x_2'' \geq 2$$

$$x_1, x_2', x_2'' \geq 0$$

$$\max z_2 = -30y_1 - 2y_2' + 2y_2''$$

$$st \quad 5y_1 - y_2' + y_2'' \leq -1$$

$$3y_1 + y_2' - y_2'' \leq 2$$

$$-3y_1 - y_2' + y_2'' \leq -2$$

D.

$$y_1, y_2', y_2'' \geq 0$$

و بتغير المتحولات في البرنامج المرافق نجد أن

$$y_2 = y_2' - y_2'' \quad y_2', y_2'' \geq 0$$

$$\begin{aligned} \max z_2 &= -30y_1 - 2y_2 \\ \text{st} \quad &5y_1 - y_2 \leq -1 \\ &3y_1 + y_2 = 2 \\ &y_1 \geq 0 \\ \text{D.} \quad &y_2 \text{ w.r.s} \end{aligned}$$

مثال 1. حل البرنامج الخطي الأولي التالي

P.

$$\begin{aligned} \max z_1 &= x_1 + 3x_2 \\ \text{st} \quad &x_1 + x_2 \leq 14 \\ &-2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ &2x_1 - x_2 \leq 12 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

D.

$$\begin{aligned} \min z_2 &= 14y_1 + 12y_2 + 12y_3 \\ \text{st} \quad &y_1 - 2y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ &y_1 + 3y_2 - y_3 \geq 3 \\ &y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min z_2 &= 14y_1 + 12y_2 + 12y_3 \\ \text{st} \quad &y_1 - 2y_2 + 2y_3 - u_1 = 1 \\ &y_1 + 3y_2 - y_3 - u_2 = 3 \\ &y_1, y_2, y_3, u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

من أجل البرنامج المرافق لا يوجد حل ممكن للبدء لذلك سوف نستخدم طريقة المرحلتين

المرحلة الأولى a)

min			0	0	0	0	0	1	1
B	c_B	b	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2	v_1	v_2
v_1	1	1	1	-2	2	-1	0	1	0
v_2	1	3	1	3	-1	0	-1	0	1
		4	2	1	1	-1	-1	0	0

min			0	0	0	0	0	1	1
B	c_B	b	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2	v_1	v_2
y_1	0	1	1	-2	2	-1	0	/	0
v_2	1	2	0	5	-3	1	-1	/	1
		2	0	5	-3	1	-1	/	0

min			0	0	0	0	0	1	1
B	c_B	b	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2	v_1	v_2
y_1	0	9/5	1	0	4/5	-3/5	-2/5	/	/
y_2	0	2/5	0	1	-3/5	1/5	-1/5	/	/
		0	0	0	0	0	0	/	/

b) المرحلة الثانية

min			14	12	12	0	0
B	c_B	b	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2
y_1	14	9/5	1	0	4/5	-3/5	-2/5
y_2	12	2/5	0	1	-3/5	1/5	-1/5
		30	0	0	-8	-6	-8

الحل المثالي هو

$$y_1 = \frac{9}{5}, y_2 = \frac{2}{5}, y_3 = 0, u_1 = \frac{9}{5}, u_2 = \frac{9}{5}$$

$$z_2 = 30$$

مثال 2. حل البرنامج الخطي التالي

$$\max z_2 = -2y_1 - 2y_2 - 5y_3$$

$$st \quad 2y_1 - y_2 - y_3 + u_1 = -1$$

$$-y_1 + y_2 - y_3 + u_2 = 1$$

$$y_1, y_2, y_3, u_1, u_2 \geq 0$$

a) المرحلة الأولى

max			0	0	0	0	0	-1
B	c_B	b	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2	v
v	-1	1	-2	1	1	-1	0	1
u_2	0	1	-1	1	-1	0	1	0
		1	-2	1	1	-1	0	0

max			0	0	0	0	0	-1
B	c_B	b	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2	v
y_2	0	1	-2	1	1	-1	0	/
u_2	0	0	1	0	-2	1	1	/
		0	0	0	0	0	0	/

b) المرحلة الثانية

max			-2	-2	-5	0	0
B	c_B	b	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2
y_2	-2	1	-2	1	1	-1	0
u_2	0	0	1	0	-2	1	1
		2	-6	0	-3	-2	0

الحل المثالي هو

$$y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 0, u_1 = 0, u_2 = 0$$

$$z_2 = -2$$

مثال 3. حل البرنامج الخطي التالي

$$\begin{aligned} \min z_2 &= -6y_1 - 4y_2 + 3y_3 \\ \text{st} \quad &-y_1 - y_2 - u_1 = 5 \\ &-y_1 + y_3 - u_2 = 7 \\ &y_1, y_2, y_3, u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

min			0	0	0	0	0	1
B	c_B	b	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2	v
v	1	5	-1	-1	0	-1	0	1
y_3	0	7	-1	0	1	0	-1	0
		5	-	-1	0	-1	0	0

من المستحيل وضع المتحول الصناعي (v) خارج القاعدة ، لذلك هذا البرنامج الخطي لا يملك حل ممكن و البرنامج

الأولي لا يقبل حل محدود أو منته

مثال 4. حل البرنامج الخطي التالي

$$\begin{aligned} \max z_2 &= -2y_1 + 8y_2 - 5y_3 \\ \text{st} \quad &2y_1 - y_2 - y_3 + u_1 = -1 \\ &-y_1 + 2y_2 - y_3 + u_2 = 1 \\ &y_1, y_2, y_3, u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

المرحلة الأولى a)

max			0	0	0	0	0	-1
B	c_B	b	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2	v
v	-1	1	-2	1	1	-1	0	1
u_2	0	1	-1	2	-1	0	1	0
		1	-2	1	1	-1	0	0

max			0	0	0	0	0	-1
B	c_B	b	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2	v
v	-1	1/2	-3/2	0	3/2	-1	-1/2	1
y_2	0	1/2	-1/2	1	-1/2	0	1/2	0
		1/2	-3/2	0	3/2	-1	-1/2	0

max			0	0	0	0	0	-1
B	c_B	b	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2	v
y_3	0	1/3	-1	0	1	-2/3	-1/3	/
y_2	0	2/3	-1	1	0	-1/3	1/3	/
		0	0	0	0	0	0	/

b) المرحلة الثانية

max			-2	8	-5	0	0
B	c_B	b	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2
y_3	-5	1/3	-1	0	1	-2/3	-1/3
y_2	8	2/3	-1	1	0	-1/3	1/3
		-11/3	1	0	0	-2/3	-13/3

يوجد العدد (1) من السطر $c_j - z_j$ موجب و جميع الأعداد a_{ij} سالبة (-1;-1)، إذا يمكن الاستنتاج بأن الحل

المثالي للبرنامج الخطي غير منته $z_2 = \infty$ ، إذا البرنامج الأولي لا يقبل حل ممكن

العلاقة بين الأولي و المرافق (التنوي) (أمثلة)

مثال 1. لنأخذ البرنامج الخطي الأولي التالي

P.

$$\begin{aligned} \max \quad & z_1 = x_1 + 3x_2 \\ \text{st} \quad & x_1 + x_2 \leq 14 \\ & -2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

لندخل المتحولات الفضفاضة نجد أن

$$\begin{aligned} \max \quad & z_1 = x_1 + 3x_2 \\ \text{st} \quad & x_1 + x_2 + t_1 = 14 \\ & -2x_1 + 3x_2 + t_2 = 12 \\ & 2x_1 - x_2 + t_3 = 12 \\ & x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 \geq 0 \end{aligned}$$

رأينا سابقاً بأن جدول السمبلكس النهائي للمسألة (P) يعطى كما يلي

المتحولات الفضفاضة (الفائضة) لـ P المتحولات البنيوية لـ P

max			1	3	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
x_1	1	6	1	0	3/5	-1/5	0
x_2	3	8	0	1	2/5	1/5	0
t_3	0	8	0	0	-4/5	3/5	1
		-30	0	0	-9/5	-2/5	0
		$-z_1$ or $-z_2$	$-u_1$	$-u_2$	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$

المتحولات البنيوية لـ D المتحولات الفضفاضة (الفائضة) لـ D

من هذا الجدول نستنتج مايلي

الحل المثالي للأولي (P) هو

$$x_1 = 6, x_2 = 8, t_1 = t_2 = 0, t_3 = 8 \text{ و } z_1 = 30$$

الحل المثالي للثنوي (D) هو

$$y_1 = \frac{9}{5}, y_2 = \frac{2}{5}, y_3 = 0, u_1 = 0, u_2 = 0 \text{ و } z_2 = 30$$

D.

$$\min z_2 = 14y_1 + 12y_2 + 12y_3$$

$$st \quad y_1 - 2y_2 + 2y_3 \geq 1$$

$$y_1 + 3y_2 - y_3 \geq 3$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

لندخل المتحولات الفائزة نجد أن

$$\min z_2 = 14y_1 + 12y_2 + 12y_3$$

$$st \quad y_1 - 2y_2 + 2y_3 - u_1 = 1$$

$$y_1 + 3y_2 - y_3 - u_2 = 3$$

$$y_1, y_2, y_3, u_1, u_2 \geq 0$$

جدول السمبلكس النهائي للمسألة (D) يعطى كما يلي

المتحولات البنيوية لـ D

المتحولات الفائزة (الفائزة) لـ D

min			14	12	12	0	0
B	c_B	b	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2
y_1	14	9/5	1	0	4/5	-3/5	-2/5
y_2	12	2/5	0	1	-3/5	1/5	-1/5
		30	0	0	-8	-6	-8
	z_2 or z_1		$-t_1$	$-t_2$	$-t_3$	$-x_1$	$-x_2$

المتحولات الفائزة (الفائزة) لـ P

المتحولات البنيوية لـ P

من هذا الجدول نستنتج التالي

الحل المثالي للمرافق (D) هو

$$y_1 = \frac{9}{5}, y_2 = \frac{2}{5}, y_3 = 0, u_1 = 0, u_2 = 0 \text{ و } z_2 = 30$$

الحل المثالي للأولي (P) هو

$$x_1 = 6, x_2 = 8, t_1 = t_2 = 0, t_3 = 8 \text{ و } z_1 = 30$$

مثال 2. لنأخذ البرنامج الخطي الأولي التالي

P.

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 + x_2 \\ \text{st} \quad & 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ \min z &= -x_1 + x_2 + 0t_1 + 0t_2 + 0t_3 \\ \text{st} \quad & -2x_1 + x_2 + t_1 = 2 \\ & x_1 - x_2 + t_2 = 2 \\ & x_1 + x_2 + t_3 = 5 \\ & x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 \geq 0 \end{aligned}$$

جدول السمبلكس النهائي الأول لـ (P) هو

min			-1	1	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
t_1	0	6	0	-1	1	2	0
x_1	-1	2	1	-1	0	1	0
t_3	0	3	0	2	0	-1	1
		-2	0	0	0	-1	0

من هذا الجدول نجد

الحل المثالي للأولي (P) هو

$$x_1 = 2, x_2 = 0, t_1 = 6, t_2 = 0, t_3 = 3 \text{ و } z_1 = -2$$

الحل المثالي للمرافق (D) هو

$$y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 0, u_1 = 0, u_2 = 0 \text{ و } z_2 = -2$$

جدول السمبلكس النهائي الثاني لـ (P) هو

min			-1	1	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
t_1	0	15/2	0	0	1	3/2	1/2
x_1	-1	7/2	1	0	0	1/2	1/2
x_2	1	3/2	0	1	0	-1/2	1/2
		-2	0	0	0	-1	0

من هذا الجدول نجد

الحل المثالي للأولي (P) هو

$$x_1 = 3.5, x_2 = 1.5, t_1 = 7.5, t_2 = 0, t_3 = 0 \text{ و } z_1 = -2$$

الحل المثالي للمرافق (D) هو

$$y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 0, u_1 = 0, u_2 = 0 \text{ و } z_2 = -2$$

D.

$$\begin{aligned} \max \quad & z_2 = -2y_1 - 2y_2 - 5y_3 \\ \text{st} \quad & 2y_1 - y_2 - y_3 + u_1 = -1 \\ & -y_1 + y_2 - y_3 + u_2 = 1 \\ & y_1, y_2, y_3, u_1, u_2 \geq 0 \end{aligned}$$

جدول السمبلكس النهائي لـ (D)

max			-2	-2	-5	0	0
B	c_B	b	y_1	y_2	y_3	u_1	u_2
y_2	-2	1	-2	1	1	-1	0
u_2	0	0	1	0	-2	1	1
		2	-6	0	-3	-2	0

من هذا الجدول نجد

الحل المثالي للمرافق (D) هو

$$y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 0, u_1 = 0, u_2 = 0 \text{ و } z_2 = -2$$

الحل المثالي للأولي (P) هو

$$x_1 = 2, x_2 = 0, t_1 = 6, t_2 = 0, t_3 = 3 \text{ و } z_1 = -2$$