الحصول على حل ابتدائي ممكن باستخدام طريقة M أو باستخدام طريقة المرحلتين (أمثلة)

مثال 1. حل البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 7x_2 \\ st \quad & x_1 + x_2 \geq 6 \\ & x_1 \geq 4 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 7x_2 + 0t_1 + 0t_2 + 0t_3 \\ st \quad & x_1 + x_2 - t_1 = 6 \\ & x_1 - t_2 = 4 \\ & x_2 + t_3 = 3 \\ & x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 \geq 0 \end{aligned}$$

الحل الابتدائي القاعدي $x_1 = 0, x_2 = 0, t_1 = -6, t_2 = -4, t_3 = 3$ غير ممكن للمسألة

الطريقة الأولى: طريقة M

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 7x_2 + 0t_1 + 0t_2 + 0t_3 - Mv_1 - Mv_2 \\ st \quad & x_1 + x_2 - t_1 + v_1 = 6 \\ & x_1 - t_2 + v_2 = 4 \\ & x_2 + t_3 = 3 \\ & x_1, x_2, t_1, t_2, t_3, v_1, v_2 \geq 0 \end{aligned}$$

الحل القاعدي الابتدائي الممكن هو

$$(x_1, x_2, t_1, t_2, t_3, v_1, v_2)^t = (0, 0, 0, 0, 3, 6, 4)^t$$

max			5	7	0	0	0	$-M$	$-M$
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	v_1	v_2
v_1	$-M$	6	1	1	-1	0	0	1	0
v_2	$-M$	4	**1**	0	0	-1	0	0	1
t_3	0	3	0	1	0	0	1	0	0
		$0+$ $10M$	$5+$ $2M$	$7+$ M	$0+$ $-M$	$0+$ $-M$	0+ 0	0+ 0	0+ 0

max			5	7	0	0	0	$-M$	/
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	v_1	/
v_1	$-M$	2	0	**1**	-1	1	0	1	/
x_1	5	4	1	0	0	-1	0	0	/
t_3	0	3	0	1	0	0	1	0	/
		$-20+$ $2M$	$0+$ 0	$7+$ M	$0+$ $-M$	$5+$ M	0+ 0	0+ 0	/ /

max			5	7	0	0	0	/	/
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	/	/
x_2	7	2	0	1	-1	1	0	/	/
x_1	5	4	1	0	0	-1	0	/	/
t_3	0	1	0	0	**1**	-1	1	/	/
		-34	0	0	7	-2	0	/	/

max			5	7	0	0	0	/	/
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	/	/
x_2	7	3	0	1	0	0	1	/	/
x_1	5	4	1	0	0	-1	0	/	/
t_1	0	1	0	0	1	-1	1	/	/
		-41	0	0	0	5	-7	/	/

الحل المثالي للمسألة هو $z=+\infty$ مسألة غير محدودة

الطريقة الثانية: طريقة المرحلتين

المرحلة الأولى:

max			0	0	0	0	0	-1	-1
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	v_1	v_2
v_1	-1	6	1	1	-1	0	0	1	0
v_2	-1	4	**1**	0	0	-1	0	0	1
t_3	0	3	0	1	0	0	1	0	0
		10	2	1	-1	-1	0	0	0

max			0	0	0	0	0	-1	/
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	v_1	/
v_1	-1	2	0	**1**	-1	1	0	1	/
x_1	0	4	1	0	0	-1	0	0	/
t_3	0	3	0	1	0	0	1	0	/
		2	0	1	-1	1	0	0	/

max			0	0	0	0	0	/	/
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	/	/
x_2	0	2	0	1	-1	1	0	/	/
x_1	0	4	1	0	0	-1	0	/	/
t_3	0	1	0	0	1	-1	1	/	/
		0	0	0	0	0	0	/	/

الحل القاعدي الابتدائي الممكن هو

$$(x_1, x_2, t_1, t_2, t_3)^t = (4, 2, 0, 0, 1)^t$$

المرحلة الثانية:

$$z_0 = \sum_{i \in B} c_i b_i$$
$$z_j = \sum_{i \in B} c_i a_{ij} \quad (j = 1,\dots,n)$$

max			5	7	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
x_2	7	2	0	1	-1	1	0
x_1	5	4	1	0	0	-1	0
t_3	0	1	0	0	1	-1	1
		-34	0	0	7	-2	0

max			5	7	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
x_2	7	3	0	1	0	0	1
x_1	5	4	1	0	0	-1	0
t_3	0	1	0	0	1	-1	1
		-41	0	0	0	5	-7

الحل المثالي للمسألة هو $z = +\infty$ (المسألة غير محدودة)

مثال 2. حل البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned}
\min z &= -x_1 + x_2 \\
st \quad & 2x_1 - x_2 - t_1 = -2 \\
& x_1 - 2x_2 + t_2 = -8 \\
& x_1 + x_2 + t_3 = 5 \\
& x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 \geq 0
\end{aligned}$$

بضرب القيدين الاولين بـ -1 نجد

$$\begin{aligned}
\min z &= -x_1 + x_2 \\
st \quad & -2x_1 + x_2 + t_1 = 2 \\
& -x_1 + 2x_2 - t_2 = 8 \\
& x_1 + x_2 + t_3 = 5 \\
& x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 \geq 0
\end{aligned}$$

أولاً: بطريقة M

$$\begin{aligned}
\min z &= -x_1 + x_2 + Mv \\
st \quad & -2x_1 + x_2 + t_1 = 2 \\
& -x_1 + 2x_2 - t_2 + v = 8 \\
& x_1 + x_2 + t_3 = 5 \\
& x_1, x_2, t_1, t_2, t_3, v \geq 0
\end{aligned}$$

min			-1	1	0	0	0	M	
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	v	
t_1	0	2	-2	1	1	0	0	0	
v	M	8	-1	2	0	-1	0	1	
t_3	0	5	1	1	0	0	1	0	
		$0+8M$	$1-M$	$-1+2M$	0	$0+M$	0+0	0+0	

min			-1	1	0	0	0	M	
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	v	
x_2	1	2	-2	1	1	0	0	0	
v	M	4	3	0	-2	-1	0	1	
t_3	0	3	3	0	-1	0	1	0	
		$2+4M$	$-1+3M$	0	$1-2M$	$0+-M$	0+0	0+0	

min			-1	1	0	0	0	M	
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	v	
x_2	1	4	0	1	1/3	0	2/3	0	
v	M	1	0	0	-1	-1	-1	1	
x_1	-1	1	1	0	-1/3	0	1/3	0	
		$3+M$	0	0	$2/3-M$	$0+-M$	1/3+-M	0+0	

بما أن $v=1$ إذاً ليس للمسألة حل ممكن

ثانياً: طريقة المرحلتين

$$
\begin{aligned}
&\min z = v \\
&st \quad -2x_1 + x_2 + t_1 = 2 \\
&\qquad -x_1 + 2x_2 - t_2 + v = 8 \\
&\qquad x_1 + x_2 + t_3 = 5 \\
&\qquad x_1, x_2, t_1, t_2, t_3, v \geq 0
\end{aligned}
$$

min			0	0	0	0	0	1	
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	v	
t_1 ←	0	2	-2	1	1	0	0	0	
v	1	8	-1	2	0	-1	0	1	
t_3	0	5	1	1	0	0	1	0	
		8	-1	2 ↑	0	-1	0	0	

min			0	0	0	0	0	1	
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	v	
x_2	0	2	-2	1	1	0	0	0	
v	1	4	3	0	-2	-1	0	1	
t_3 ←	0	3	3	0	-1	0	1	0	
		4	3 ↑	0	-2	-1	0	0	

min			0	0	0	0	0	1	
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	v	
x_2	0	4	0	1	1/3	0	2/3	0	
v	1	1	0	0	-1	-1	-1	1	
x_1	0	1	1	0	-1/3	0	1/3	0	
		1	0	0	-1	-1	-1	0	

بما أن $v = 1$ إذاً ليس للمسألة حل ممكن

مثال 3. حل البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} &\max z = x_1 + 3x_2 \\ &st \quad x_1 + x_2 + t_1 = 4 \\ &\quad -2x_1 + 3x_2 + t_2 = 12 \\ &\quad 2x_1 - x_2 + t_3 = 12 \\ &\quad x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 \geq 0 \end{aligned}$$

max			1	3	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
← t_1	0	4	1	1	1	0	0
← t_2	0	12	-2	3	0	1	0
t_3	0	12	2	-1	0	0	1
		0	1	3 ↑	0	0	0

1) t_1 يغادر القاعدة

max			1	3	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
x_2	3	4	1	1	1	0	0
t_2	0	0	-5	0	-3	1	0
t_3	0	16	3	0	1	0	1
		-12	-2	0	-3	0	0

الحل المثالي هو: $z = 12$ و $x_1 = 0, x_2 = 4, t_1 = t_2 = 0, t_3 = 16$

2) t_2 يغادر القاعدة

max			1	3	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
← t_1	0	0	5/3	0	1	-1/3	0
x_2	3	4	-2/3	1	0	1/3	0
t_3	0	16	4/3	0	0	1/3	1
		-12	3 ↑	0	0	-1	0

max			1	3	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
x_1	1	0	1	0	3/5	-1/5	0
x_2	3	4	0	1	2/5	1/5	0
t_3	0	16	0	0	-4/5	3/5	1
		-12	0	0	-9/5	-2/5	0

الحل المثالي هو: $x_1 = 0, x_2 = 4, t_1 = t_2 = 0, t_3 = 16$ و $z = 12$

ملاحظات

1. في حال وجود متحوليين مرشحيين للدخول إلى القاعدة معاً ، من المفضل اختيار المتحول x_s حيث أن $s = \min\{i : c_i - z_i > 0\}$

بعد أن يتم إعادة ترقيم المتحولات الفائظة أو الفضفاضة للمسألة كإستمرار للمتحولات البنيوية أي:

$$(x_1, x_2, ..., x_n, s_1, s_2, ..., s_m) = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m})$$

أو

$$(x_1, x_2, ..., x_n, t_1, t_2, ..., t_m) = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m})$$

2. في حال وجود متحوليين مرشحيين للخروج من القاعدة معاً ، نتبع إحدى الطريقتين التاليتين:

طريقة قاعدة بلاند:

إذا كان x_p و x_q متحوليين مرشحيين للخروج من القاعدة معاً عندئذ من المفضل اختيار المتحول x_p إذا كان $p < q$ أو اختيار x_q إذا كان $q < p$

بعد أن يتم إعادة ترقيم المتحولات الفائظة أو الفضفاضة للمسألة كإستمرار للمتحولات البنيوية أي:

$$(x_1, x_2, ..., x_n, s_1, s_2, ..., s_m) = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m})$$

أو

$$(x_1, x_2, ..., x_n, t_1, t_2, ..., t_m) = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m})$$

طريقة قاعدة الإضطراب:

يتم تبديل العوامل $b_i \ (i = 1, ..., m)$ في المسألة بـ $b_i + \varepsilon \ (i = 1, ..., m)$ حيث $\varepsilon > 0$ و صغير جداً ($\varepsilon = 0.01$ على سبيل المثال)

أو يتم تبديل العوامل $b_i \ (i = 1, ..., m)$ في المسألة بـ $b_i + \varepsilon_i \ (i = 1, ..., m)$ حيث أن $\varepsilon_i > 0 \ (i = 1, .., m)$ و صغيرة جداً و تحقق $\varepsilon_1 \le \varepsilon_2 \le ..... \le \varepsilon_m$

أو $b_i + \varepsilon^i \ (i = 1, ..., m)$

عدم وجود قيود في الاشارة على بعض المتغيرات

لناخذ البرنامج الخطي التالي حيث يوجد بعض المتغيرات غير مقيدة في الاشارة

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1,\dots,m \\ x_j \quad unrestricted\ in\ sign, \quad j = 1,\dots,k \leq n \\ x_j \geq 0, \quad j = k+1,\dots,n \end{cases}$$

كيف يمكن تعديل البرنامج الخطي هذا حتى يمكن تطبيق الطريقة المبسطة لحله

الطريقة الأولى:

يمكن كتابة المتغيرات غير المقيدة بالاشارة على شكل فروق بين متغيرات غير سالبة كما يلي:

$$\begin{cases} x_j = x'_j - x''_j \\ x'_j, x''_j \geq 0 \qquad , j = 1,\dots,k \end{cases}$$

الطريقة الثانية:

بهدف تخفيض عدد المتحولات غير السالبة المضافة على المسألة ، يتم كتابة المتغيرات غير المقيدة بالاشارة على شكل فروق بين متغيرات غير سالبة على الشكل التالي:

$$\begin{cases} x_j = x'_j - x'' \\ x'_j, x'' \geq 0 \qquad , j = 1,\dots,k \end{cases}$$

برامج خطية مع وجود متغيرات محدودة

a) $x_j \geq b_j > 0$

1. $x_j - t = b_j > 0, \quad x_j, t \geq 0$ (اضافة متحول صنعي غير سالب)

2. $-x_j + t = -b_j < 0, \quad x_j, t \geq 0$ (تطبيق خوارزمية السمبلكس للمرافق و سوف يتم شرحها لاحقاً)

3. $x_j^{'} = x_j - b_j \geq 0$ (تغير متحول)

b) $x_j \geq b_j < 0$

$x_j^{'} = x_j - b_j \geq 0$ (تغير متحول)

c) $x_j \leq b_j > 0$

$x_j^{'} = b_j - x_j \geq 0$ (تغير متحول)

d) $x_j \leq b_j \leq 0$

$x_j^{'} = b_j - x_j \geq 0$ (تغير متحول)

و في الحالة الخاصة عندما يكون $b_j = 0$ $(x_j \leq 0)$ عندئذ $x_j^{'} = -x_j \geq 0$

e) ملاحظات

1. الحالة الأولى عندما يكون $0 \leq x_j \leq b_j > 0$ عندئذ لايمكن استخدام تقانة تغيير المتحولات و بالتالي يجب اعتبارها كقيد رياضي اضافي في البرنامج الخطي

2. الحالة الثانية عندما يكون $0 \geq x_j \geq b_j < 0$ عندئذ يتم استخدام التحويل التالي $x_j^{'} = -x_j$ لنحصل على الشكل $0 \leq x_j^{'} \leq -b_j > 0$ كما هو في الحالة الأولى

3. الحالة الثالثة عندما يكون $0 \leq x_j \geq b_j > 0$ أو $0 \geq x_j \leq b_j < 0$ عندئذ يتم معالجتهما كما في الحالتين الأولى و الثانية على الترتيب

متغيرات بدون قيود على الاشارة (أمثلة)

مثال 1. لنأخذ البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 + 2x_2 \\ st \quad & 5x_1 + 3x_2 \geq -30 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \quad w.r.s \end{aligned}$$

لنضع

$$x_2 = x_2' - x_2'', \qquad x_2', x_2'' \geq 0$$

بادخال هذه المتغيرات في البرنامج الرياضي السابق نجد أن

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 + 2x_2' - 2x_2'' \\ st \quad & -5x_1 - 3x_2' + 3x_2'' + t_1 = 30 \\ & x_1 - x_2' + x_2'' + t_2 = 2 \\ & x_1, x_2', x_2'', t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

min			-1	2	-2	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2'	x_2''	t_1	t_2
t_1	0	30	-5	-3	3	1	0
t_2 ←	0	2	1	-1	1	0	1
		0	1	-2	2 ↑	0	0

min			-1	2	-2	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2'	x_2''	t_1	t_2
t_1	0	24	-8	0	0	1	-3
x_2''	-2	2	1	-1	1	0	1
		-4	-1	0	0	0	-2

الحل المثالي هو

$x_1 = 0, x_2 = x_2' - x_2'' = 0 - 2 = -2$ و $z = -4$

مثال 2. حل البرنامج الرياضي التالي:

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 + 2x_2 \\ st \quad & 5x_1 + 3x_2 \geq -30 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \quad w.r.s \end{aligned}$$

الطريقة الأولى : ضع

$$x_1 = x_1^{'} - x_1^{''}, x_2 = x_2^{'} - x_2^{''}, \qquad x_1^{'}, x_1^{''}, x_2^{'}, x_2^{''} \geq 0$$

بادخال هذه المتغيرات في البرنامج الرياضي السابق نجد أن

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1^{'} + x_1^{''} + 2x_2^{'} - 2x_2^{''} \\ st \quad & -5x_1^{'} + 5x_1^{''} - 3x_2^{'} + 3x_2^{''} + t_1 = 30 \\ & x_1^{'} - x_1^{''} - x_2^{'} + x_2^{''} + t_2 = 2 \\ & x_1^{'}, x_1^{''}, x_2^{'}, x_2^{''}, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

min			-1	1	2	-2	0	0
B	c_B	b	$x_1^{'}$	$x_1^{''}$	$x_2^{'}$	$x_2^{''}$	t_1	t_2
t_1	0	30	-5	5	-3	3	1	0
← t_2	0	2	1	-1	-1	1	0	1
		0	1	-1	-2	2 ↑	0	0

min			-1	1	2	-2	0	0
B	c_B	b	$x_1^{'}$	$x_1^{''}$	$x_2^{'}$	$x_2^{''}$	t_1	t_2
← t_1	0	24	-8	8	0	0	1	-3
$x_2^{''}$	-2	2	1	-1	-1	1	0	1
		-4	-1	1 ↑	0	0	0	-2

min			-1	1	2	-2	0	0
B	c_B	b	$x_1^{'}$	$x_1^{''}$	$x_2^{'}$	$x_2^{''}$	t_1	t_2
$x_1^{''}$	1	3	-1	1	0	0	1/8	-3/8
$x_2^{''}$	-2	5	0	0	-1	1	1/8	5/8
		-7	0	0	0	0	-1/8	-13/8

الحل المثالي للمسألة هو

$$x_1 = x_1^{'} - x_1^{''} = 0 - 3 = -3, x_2 = x_2^{'} - x_2^{''} = 0 - 5 = -5 \text{ و } z = -7$$

الطريقة الثانية : ضع

$$x_1 = x_1^{'} - x^{"}, x_2 = x_2^{'} - x^{"}, \qquad x_1^{'}, x^{"}, x_2^{'} \geq 0$$

بادخال هذه المتغيرات في البرنامج الرياضي السابق نجد أن

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1^{'} + 2x_2^{'} - x^{"} \\ st \quad & -5x_1^{'} - 3x_2^{'} + 8x^{"} + t_1 = 30 \\ & x_1^{'} - x_2^{'} + t_2 = 2 \\ & x_1^{'}, x_2^{'}, x^{"}, t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

min			-1	2	-1	0	0
B	c_B	b	$x_1^{'}$	$x_2^{'}$	$x^{"}$	t_1	t_2
t_1	0	30	-5	-3	8	1	0
t_2	0	2	1	-1	0	0	1
		0	1	-2	1	0	0

min			-1	2	-1	0	0
B	c_B	b	$x_1^{'}$	$x_2^{'}$	$x^{"}$	t_1	t_2
t_1	0	40	0	-8	8	1	5
$x_1^{'}$	-1	2	1	-1	0	0	1
		-2	0	-1	1	0	-1

min			-1	2	-1	0	0
B	c_B	b	$x_1^{'}$	$x_2^{'}$	$x^{"}$	t_1	t_2
$x^{"}$	-1	5	0	-1	1	1/8	5/8
$x_1^{'}$	-1	2	1	-1	0	0	1
		-7	0	0	0	-1/8	-13/8

الحل المثالي للمسألة هو

$x_1 = x_1^{'} - x^{"} = 2 - 5 = -3, x_2 = x_2^{'} - x^{"} = 0 - 5 = -5$ و $z = -7$

مثال 3. حل البرنامج الرياضي التالي:

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 + 2x_2 \\ st \quad & 5x_1 + 3x_2 \geq -30 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq -1 \end{aligned}$$

ضع

$$x_2 = x_2' - 1, \qquad x_1, x_2' \geq 0$$

بادخال هذه المتغيرات في البرنامج الرياضي السابق نجد أن

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 + 2x_2' - 2 \\ st \quad & -5x_1 - 3x_2' + t_1 = 27 \\ & x_1 - x_2' + t_2 = 1 \\ & x_1, x_2', t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

min			-1	2	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2'	t_1	t_2
t_1	0	27	-5	-3	1	0
t_2	0	1	1	-1	0	1
		0	1	-2	0	0

min			-1	2	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2'	t_1	t_2
t_1	0	32	0	-8	1	5
x_1	-1	1	1	-1	0	1
		-1	0	-1	0	-1

الحل المثالي للمسألة هو

$x_1 = 1, x_2 = x_2' - 1 = 0 - 1 = -1$ و $z = -1$

و بالتالي تعطى القيمة المثلى النهائية لتابع الهدف على الشكل التالي $z = -1 - 2 = -3$

مثال 4. حل البرنامج الرياضي التالي:

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 + 2x_2 \\ st \quad & 5x_1 + 3x_2 \geq -30 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

ضع

$$x_1 = -x_1', x_2 = -x_2', \qquad x_1', x_2' \geq 0$$

بادخال هذه المتغيرات في البرنامج الرياضي السابق نجد أن

$$\begin{aligned} \min z &= x_1' - 2x_2' \\ st \quad & 5x_1' + 3x_2' + t_1 = 30 \\ & -x_1' + x_2' + t_2 = 2 \\ & x_1', x_2', t_1, t_2 \geq 0 \end{aligned}$$

min			1	-2	0	0
B	c_B	b	x_1'	x_2'	t_1	t_2
t_1	0	30	-5	3	1	0
t_2 ←	0	2	-1	1	0	1
		0	-1	2 ↑	0	0

min			1	-2	0	0
B	c_B	b	x_1'	x_2'	t_1	t_2
t_1 ←	0	24	8	0	1	-3
x_2'	-2	2	-1	1	0	1
		-4	1 ↑	0	0	-2

min			1	-2	0	0
B	c_B	b	x_1'	x_2'	t_1	t_2
x_1'	1	3	1	0	1/8	-3/8
x_2'	-2	5	0	1	1/8	5/8
		-7	0	0	-1/8	-13/8

الحل المثالي للمسألة هو

$x_1 = -x_1' = -3, x_2 = -x_2' = -5$ و $z = -7$

مسائل

أوجد الحلول المثالية للمسائل الخطية التالية:

1.

$$\begin{aligned} \max z &= 0.5x_1 + x_2 \\ st \quad & x_1 + x_2 \le 3 \\ & -x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1 \le 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 + x_2 \\ st \quad & 2x_1 - x_2 \ge 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \ge -2 \\ & x_1 + x_2 \le 5 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 - x_2 \\ st \quad & x_1 - x_2 = 3 \\ & x_1 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 2x_2 \\ st \quad & x_1 \le 4 \\ & x_1 - x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 - x_2 \\ st \quad & x_1 - 2x_2 \le 2 \\ & x_1 + x_2 = 6 \\ & x_2 \le 5 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 2x_2 \\ st \quad & x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_1 \le 4 \\ & x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 - 3x_2 \\ st \quad & 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ & x_1 - x_2 \ge 1 \\ & 2x_1 - x_2 \ge 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 + 2x_2 \\ st \quad & x_1 + x_2 \ge 4 \\ & x_1 + 2x_2 \ge 5 \\ & x_1 \ge 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} \max z &= -3x_1 - x_2 \\ st \quad & x_1 + x_2 \ge 1 \\ & 2x_1 + 3x_2 \ge 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ st \quad & x_1 + x_2 + x_3 \ge 1 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \le 1 \\ & -2x_1 + x_2 + x_3 \le 1 \\ & x_3 \le 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$