الفصل الخامس: الأعداد العقدية

العنوان	الصفحة
1. مقدمة	4
1.1 مجموعات الأعداد	4
2. الأعداد العقدية	4
1.2 العمليات الأساسية على الأعداد العقدية	6
2.2 مقلوب عدد عقدي	7
3.2 مرافق العدد العقدي	9
4.2 طويلة عدد عقدي	9
5.2 زاوية العدد العقدي	11
6.2 الشكل المثلثي للعدد العقدي	12
7.2 الشكل الأسي للعدد العقدي	13
3. حل المعادلات في $\mathcal{C}$	15
1.3 معادلة من الدرجة الأولى	15
2.3 معادلة من الدرجة الثانية	15
3.3 النظرية الأساسية في الجبر	17
4. تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة المستوية	17
تمارين	20
مذاكرة الفصل الخامس	21

الكلمات المفتاحية:

عدد عقدي، عدد تخيلي، طويلة عدد عقدي، زاوية عدد عقدي، صورة العدد العقدي، مرافق عدد عقدي، الجبري، المثلثي، الأسي، الخاصة التبديلية، التجميعية، التوزيعية، عنصر حيادي، عنصر نظير، دوموافر، جذر من المرتبة n، معادلة خطية، معادلة تربيعية، كثر حدود عقدي.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على مجموعة الأعداد العقدية والعمليات الأساسية عليها من جمع وطرح وضرب وقسمة ورفع إلى أس وكتابة العدد العقدي بكافة الأشكال الجبري والمثلثي والأسي. وحل معادلات من الدرجة الأول والثانية بأمثال حقيقية وعقدية. وأخيراً تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة المستوية الإقليدية.

الأهداف التعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- مجموعة الأعداد العقدية والعمليات عليها.
- خواص الأعداد العقدية وكتابتها بالشكل الجبري والمثلثي والأسي.
- حل المعادلات الخطية والتربيعية في مجموعة الأعداد العقدية.
- كثيرات الحدود والنظرية الأساسية في الجبر.
- تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة المستوية الإقليدية.

1. مقدمة

1.1 مجموعات الأعداد

$\mathcal{N}$ مجموعة الأعداد الطبيعية وهي أعداد موجبة.

ليس للمعادلة $x+1=0$ حل في مجموعة الأعداد الطبيعية، حل هذه المعادلة هو -1. هذا الحل ينتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathcal{Z}$. $\mathcal{Z}$ هي مجموعة الأعداد الموجبة والسالبة. المجموعة $\mathcal{Z}$ تحوي $\mathcal{N}$ $(\mathcal{N} \subset \mathcal{Z})$.

ليس للمعادلة $2x+1=0$ حل في مجموعة الأعداد الصحيحة، حل هذه المعادلة هو $-\frac{1}{2}$. هذا الحل ينتمي إلى مجموعة الأعداد العادية $\mathcal{Q}$. $\mathcal{Q}$ هي مجموعة الأعداد من الشكل $\frac{p}{q}$، حيث $p \in \mathcal{Z}$ و $q \in \mathcal{Z}^*$. المجموعة $\mathcal{Q}$ تحوي $\mathcal{Z}$ $(\mathcal{N} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Q})$.

ليس للمعادلة $x^2-2=0$ حل في مجموعة الأعداد العادية، تقبل هذه المعادلة حلان يُرمز لهما بـ $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$. هذان الحلان ينتميان إلى مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathcal{R}$. $\mathcal{R}$ هي مجموعة فواصل كافة النقاط الواقعة على مستقيم. المجموعة $\mathcal{R}$ تحوي $\mathcal{Q}$ $(\mathcal{N} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{R})$.

ليس للمعادلة $x^2+1=0$ حل في مجموعة الأعداد الحقيقية، تقبل هذه المعادلة حلان يُرمز لهما بـ i و $-i$. هذان الحلان ينتميان إلى مجموعة الأعداد العقدية $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ هي مجموعة الأعداد من الشكل $a+bi$، حيث $a \in \mathcal{R}$ و $b \in \mathcal{R}$. المجموعة $\mathcal{C}$ تحوي $\mathcal{R}$ $(\mathcal{N} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{C})$.

2. الأعداد العقدية

تعريف 1: يوجد مجموعة يرمز لها بالرمز $\mathcal{C}$، تدعى مجموعة الأعداد العقدية والتي تمتلك الخصائص التالية:

- المجموعة $\mathcal{C}$ تحوي مجموعة الأعداد الحقيقية.
- المجموعة $\mathcal{C}$ مزودة بعمليتي الجمع والضرب وهما امتداد لنفس العمليتين الموجودتين في $\mathcal{R}$ ولهما نفس الخصائص.
- تحوي المجموعة $\mathcal{C}$ على عنصر عقدي (غير حقيقي) يُرمز له بالرمز i وبحيث $i^2=-1$.
- كل عنصر z من $\mathcal{C}$ يكتب بطريقة وحيدة على الشكل: $z=x+yi$ ، حيث $x,\ y \in \mathcal{R}$. نسمي الكتابة $z=x+yi$ بالشكل الجبري للعدد العقدي z. كما ندعو x بالجزء (القسم) الحقيقي لـ z، ونرمز له $Re(z)$ و y بالجزء التخيلي لـ z ، ونرمز له $Im(z)$.

ملاحظة 1: عندما يكون $y=0$ يكون العدد العقدي z حقيقي صرف، وعندما يكون $x=0$ يكون العدد العقدي z تخيلي صرف.

مثال 1:

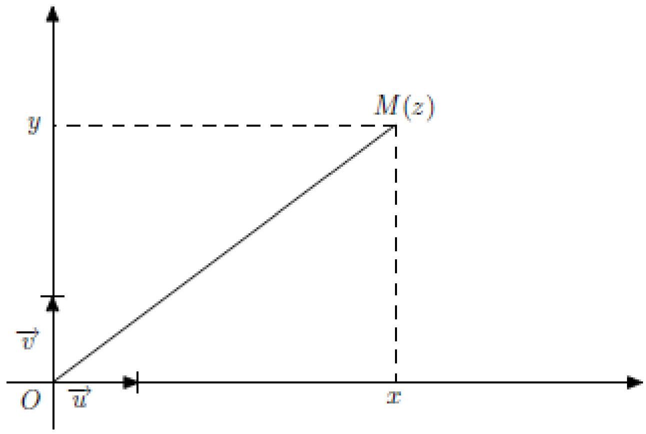
- العدد $z=3+4i$ عدد عقدي قسمه الحقيقي 3 وقسمه التخيلي 4.
- العدد $z=7i=0+7i$ عدد عقدي قسمه الحقيقي 0 وقسمه التخيلي 7، هو عدد تخيلي صرف.

العدد $z=3=3+0i$ عدد عقدي قسمه الحقيقي 3 وقسمه التخيلي 0، هو عدد حقيقي صرف.

التمثيل الهندسي للأعداد العقدية

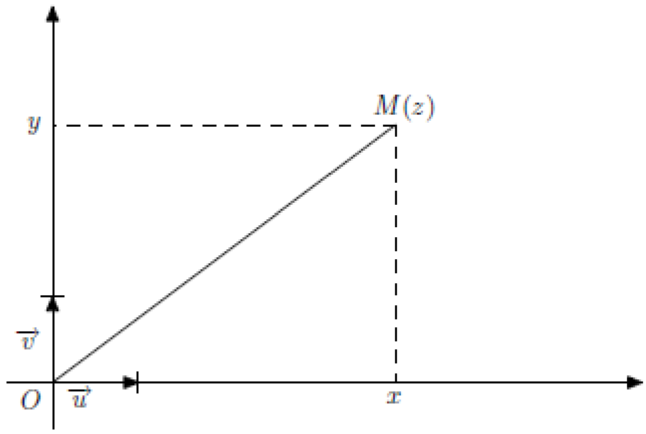
في مستوي الإحداثيات المتعامد $(O;\vec{u},\vec{v})$، يمكن أن نقرن كل نقطة $M(x,y)$ بعدد عقدي $z=x+yi$. وبالعكس يمكن أن نقرن بكل عدد عقدي $z=x+yi$ النقطة $M(x,y)$ من المستوي. تُسمى النقطة $M(x,y)$ صورة العدد العقدي $z=x+yi$، ونرمّز ذلك $M(z)$. كما نسمي المستوي بالمستوي العقدي.

في مستوي الإحداثيات المتعامد $(O;\vec{u},\vec{v})$، يُقابل النقطة $M(x,y)$ من المستوي الشعاع $\overrightarrow{OM}$، حيث يكون $\overrightarrow{OM}=x\vec{u}+y\vec{v}$ ويمكن القول أن العدد العقدي $z=x+yi$ يقابله الشعاع $\overrightarrow{OM}=x\vec{u}+y\vec{v}$، يُسمى الشعاع $\overrightarrow{OM}$ صورة العدد العقدي z، ونسمي $\overrightarrow{OM}$ ممثل العدد العقدي.

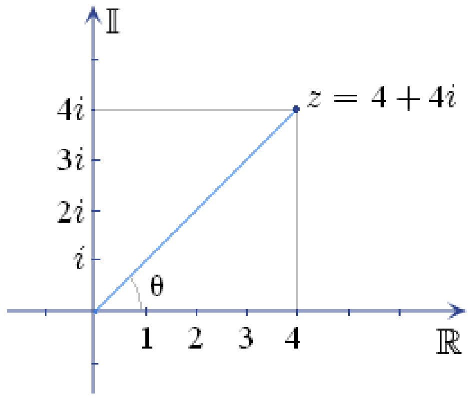


إن صورة كل عدد عقدي $z=x+0i$ هي نقطة $N(x,0)$ من محور الفواصل $(O;\vec{u})$، وبالعكس كل نقطة $N(x,0)$ من محور الفواصل $(O;\vec{u})$ هي صورة لعدد عقدي من الشكل $z=x+0i$، لذلك نسمي محور الفواصل المحور الحقيقي.

كما أن صورة كل عدد عقدي $z=0+yi$ هي نقطة $E(0,y)$ من محور التراتيب $(O;\vec{v})$، وبالعكس كل نقطة $E(0,y)$ من محور التراتيب $(O;\vec{v})$ هي صورة لعدد عقدي من الشكل $z=0+yi$، لذلك نسمي محور التراتيب المحور التخيلي.



على سبيل المثال النقطة $M(4,4)$ هي صورة العدد العقدي $z = 4 + 4i$. كما أن الشعاع $\overrightarrow{OM} = 4\vec{u} + 4\vec{v}$ يمثل صورة العدد العقدي $z = 4 + 4i$.



تساوي عددين عقديين

مبرهنة 1: يتساوى عددان عقديان إذا وفقط إذا تساوى القسم الحقيقي مع القسم التخيلي لكل منهما. أي أنه إذا كان: $z_1 = x_1 + y_1 i$ و $z_2 = x_2 + y_2 i$ عددين عقديين فإن: $(z_1 = z_2) \Leftrightarrow (x_1 = x_2,\ y_1 = y_2)$. وأن: $(z = 0) \Leftrightarrow (x = 0,\ y = 0)$.

2.1 العمليات الأساسية على الأعداد العقدية

تعريف 2: ليكن لدينا العددين العقديين $z_1 = x_1 + y_1 i$ و $z_2 = x_2 + y_2 i$ فإننا نستطيع تعريف كل ما يلي:

- الجمع: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$
- الطرح: $z_1 - z_1 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$
- الضرب: $z_1 . z_1 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$

مثال 2:

- بفرض أن $z_1 = 3 + 2i$ و $z_2 = 5 - 4i$، أوجد $z_1 + z_2$ و $z_1 - z_2$ و $z_1 . z_2$.

$$z_1 + z_2 = 3 + 2i + 5 - 4i = (3 + 5) + (2 - 4)i = 8 - 2i$$
$$z_1 - z_2 = (3 + 2i) - (5 - 4i) = (3 - 5) + \big(2 - (-4)\big)i = -2 + 6i$$
$$z_1 . z_2 = (3 + 2i)(5 - 4i) = (3(5) - 2(-4)) + (3(-4) + 2(5))i = 23 - 2i$$

ضرب عدد عقدي بعدد حقيقي

تعريف 3: ضرب العدد العقدي $z = x + yi$ بالعدد الحقيقي a هو العدد العقدي $az = ax + ayi$.

مثال 3: ليكن $z = -2 + 3i$، فإن $5z = -10 + 15i$.

خصائص الأعداد العقدية

لتكن الأعداد العقدية z_1, z_2, z_3 ولندرس خصائصها بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب:

- الخاصة التبديلية:

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ مثال: $(1+i) + (1-2i) = (1-2i) + (1+i) = 2 - i$

$z_1 . z_2 = z_2 . z_1$ مثال: $(1+i)(1-i) = (1-i)(1+i) = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2$

- الخاصة التجميعية:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$
$$z_1 . (z_2 . z_3) = (z_1 . z_2) . z_3$$

- العنصر الحيادي: العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجمع هو العدد 0، كما أن العدد 1 هو العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الضرب.

$$z + 0 = 0 + z = z$$
$$z . 1 = 1 . z = z$$

- العنصر النظير: نظير العدد z بالنسبة لعملية الجمع هو $-z$، كما أن نظير العدد z $(z \neq 0)$ هو العدد $\frac{1}{z}$ بالنسبة لعملية الضرب.

$(-z) + z = z + (-z) = 0$ مثال: $(2-3i) + (-2+3i) = (-2+3i) + (2-3i) = 0$

$z . \frac{1}{z} = \frac{1}{z} . z = 1$ مثال: $(-2+3i)\frac{-2-3i}{13} = \frac{-2-3i}{13}(-2+3i) = \frac{13}{13} = 1$

- الخاصة التوزيعية: عملية الضرب توزيعية على عملية الجمع

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

ملاحظة 2: خاصة التوزيع صحيحة أيضاً من أجل عملية الطرح

$$z_1(z_2 - z_3) = z_1 z_2 - z_1 z_3$$

2.2 مقلوب عدد عقدي

مبرهنة 2: لكل عدد عقدي مختلف عن الصفر $z = x + yi$ مقلوب، نرمز له بالرمز $\frac{1}{z}$، ويساوي:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+yi} = \frac{1}{(x+yi)} . \frac{(x-yi)}{(x-yi)} = \frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2} i$$

مثال 4:

- ليكن $z = -2 + 3i$، فإن $\frac{1}{z} = \frac{1}{-2+3i} = \frac{-2-3i}{(-2)^2+3^2} = \frac{-2-3i}{13} = -\frac{2}{13} - \frac{3}{13} i$
- $\frac{1}{i} = \frac{-i}{i(-i)} = \frac{-i}{-i^2} = \frac{-i}{1} = -i$

قسمة عددين عقديين

تعريف 4: ليكن لدينا العددين العقديين $z_1 = x_1 + y_1 i$ و $z_2 = x_2 + y_2 i$ نعرّف القسمة $\frac{z_1}{z_2}$، بحيث $z_2 \neq 0$ كما يلي:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 . \frac{1}{z_2} = (x_1 + y_1 i)\frac{1}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_2 y_1 - x_1 y_2)i}{x_2^2 + y_2^2}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i$$

مثال 5: ليكن $z_1 = 3 + 2i$ و $z_2 = 4 - i$، فإن:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+2i}{4-i} = \frac{3+2i}{4-i} . \frac{4+i}{4+i} = \frac{12+3i+8i+2i^2}{16+1} = \frac{10+11i}{17} = \frac{10}{17} + \frac{11}{17} i$$

رفع عدد عقدي إلى أس صحيح

تعريف 5: ليكن z عدد عقدي، وليكن n عدداً صحيحاً موجباً، نعرف z^n على أنها ناتج ضرب العدد z بنفسه n مرة. $z^n = z.z.z\ldots z$. أما من أجل أس للعدد صفر أو عدد صحيح سالب فإننا نعرف القوى كما يلي: $z^0 = 1$ و $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$.

مثال 6: ليكن العدد $z = 1 + i$:

$$(1+i)^0 = 1$$
$$(1+i)^1 = 1 + i$$
$$(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$$
$$(1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i$$
$$(1+i)^{-3} = \frac{1}{(1\ +\ i)^3} = \frac{1}{-2+2i} = \frac{1}{-2+2i}\frac{-2-2i}{-2-2i} = \frac{-2-2i}{(-2)^2 - 4i^2} = \frac{-2-2i}{8}$$
$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} i$$

مثال 7: ليكن العدد $z = i$:

$$(i)^0 = 1 \qquad (i)^1 = i \qquad (i)^2 = -1 \qquad (i)^3 = i.i^2 = -i$$
$$(i)^4 = 1 \qquad (i)^5 = i \qquad (i)^6 = -1 \qquad (i)^7 = i.i^2 = -i$$

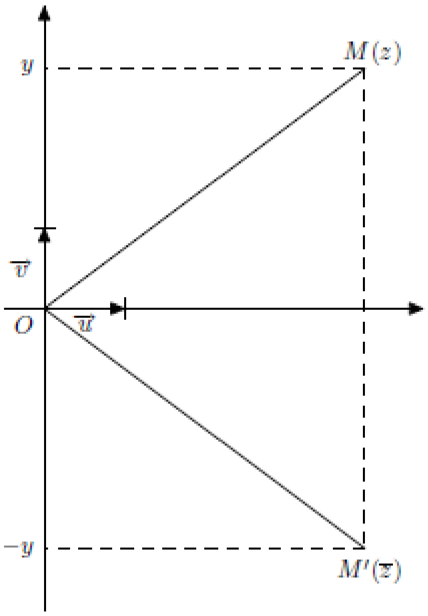
نتيجة 1:

$$(i)^n = \{1, i, -1, -i\} : n \in \mathcal{W} = \mathcal{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

مثال 8: أوجد $(i)^{27}$ و $(i)^{1001}$

$$(i)^{27} = (i^4)^6 . i^3 = i^3 = -i$$
$$(i)^{1001} = i^{1000} . i = (i^4)^{250} . i = i$$

3.2 مرافق العدد العقدي



تعريف 6: مرافق العدد العقدي $z = x + yi$، ونرمز له بالرمز $\bar{z}$ هو العدد العقدي $\bar{z} = x - yi$. ينتج من التعريف مباشرة ما يلي:

1. مرافق مرافق العدد z هو العدد نفسه، أي: $\bar{\bar{z}} = z$.
2. مرافق العدد الحقيقي a هو العدد نفسه، أي: $\bar{a} = a$.
3. مرافق العدد التخيلي الصرف bi هو العدد $-bi$، أي: $\overline{bi} = -bi$.
4. $z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x = 2Re(z)$
5. $z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi = 2Im(z)i$
6. حاصل ضرب عدد $z = x + yi$ بمرافقه $\bar{z} = x - yi$ يعطي:

$$(x + yi)(x - yi) = x^2 - xyi + xyi - (yi)^2 = x^2 + y^2$$

مثال 9:

- مرافق العدد $3 + 4i$ هو $3 - 4i$
- مرافق العدد $\sqrt{3} - 2i$ هو $\sqrt{3} + 2i$
- مرافق العدد 6 هو 6
- مرافق العدد $-2i$ هو $2i$
- $(3 + 4i)(3 - 4i) = 3^2 + 4^2 = 25$
- $(3 + 4i) + (3 - 4i) = 3 + 3 = 6$
- $(3 + 4i) - (3 - 4i) = 4i + 4i = 8i$

خصائص المرافق

فرضية 1: ليكن لدينا الأعداد العقدية $z_1 = x_1 + y_1 i$ و $z_2 = x_2 + y_2 i$ و $z = x + yi$:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$
3. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ z_2 \neq 0$
4. $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}},\ z \neq 0$
5. $\overline{z^n} = \bar{z}^n,\ n \in \mathcal{Z}$

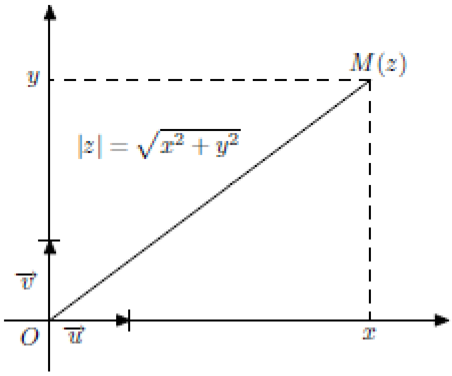
4.2 طويلة عدد عقدي

تعريف 7: طويلة العدد العقدي $z = x + yi$، ونرمز له بالرمز $|z|$ هو العدد الحقيقي الموجب المعرف كما يلي: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

ملاحظة 3:

1. إذا كان العدد z حقيقي تصبح الطويلة القيمة المطلقة.

2. $|z| = 0$ يكافئ $z = 0$.
3. $z.\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$



مثال 10:

- $|1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ $|3-4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$
- $|-2i| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2$ $|-3| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$

خصائص طويلة العدد العقدي

ليكن لدينا الأعداد العقدية $z_1 = x_1 + y_1 i$ و $z_2 = x_2 + y_2 i$ و $z = x + yi$:

1. $|\bar{z}| = |z|$
2. $|-z| = |z|$
3. $|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$
4. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2 \neq 0$
5. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ متراجحة المثلث
6. $|z^n| = |z|^n,\ n \in \mathcal{Z}\ \ (z \neq 0\ if\ n \in \mathcal{Z}^-)$

مثال 11: ليكن العدد العقدي $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$، أوجد $|z|$ و $\bar{z}$ و $\frac{1}{z}$.

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

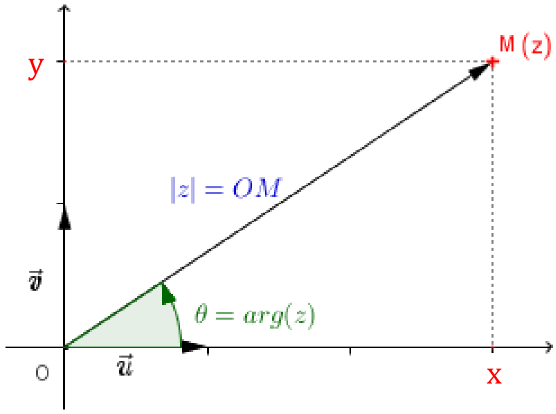
$$\bar{z} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i} . \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}{1} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

من الملاحظ أن $\bar{z} = \frac{1}{z}$ وبالتالي فإن $z.\bar{z} = 1 = |z|^2$، أي أن $|z| = 1$.

5.2 زاوية العدد العقدي

تعريف 8: زاوية العدد العقدي غير المعدوم $z = x + yi$ والذي صورته النقطة M، ونرمز لها بالرمز $arg(z)$ هي العدد الحقيقي المعرف كما يلي: $arg(z) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM})$ مقدرة بالراديان.



ملاحظة 4: زاوية الأعداد الحقيقية الموجبة هي 0، بينما زاوية الأعداد الحقيقية السالبة فهي π. أما زاوية الأعداد التخيلية فهي إما $\pi/2$ أو $-\pi/2$.

مثال 12:

$$arg(3) = 0 \qquad arg(-4) = \pi$$
$$arg(2i) = \pi/2 \qquad arg(-5i) = -\pi/2 \qquad arg(1+i) = \pi/4$$

ملاحظة 5: إذا كانت $\theta = arg(z)$ زاوية للعدد العقدي غير المعدوم z، كان كل عدد حقيقي من المجموعة $\{\theta + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ أيضاً زاوية للعدد العقدي z وبالتالي نكتب $\theta \equiv arg(z)\ [2\pi]$. على سبيل المثال:

$$arg(-4) = \pi, 3\pi(= \pi + 2\pi), 5\pi(= \pi + 4\pi), -\pi(= \pi - 2\pi), -3\pi(= \pi - 4\pi), \ldots$$

يمكننا جعل قيمة الزاوية لعدد عقدي $\theta = arg(z)$ وحيدة وذلك بإضافة الشرط $\theta \in]-\pi, +\pi]$.

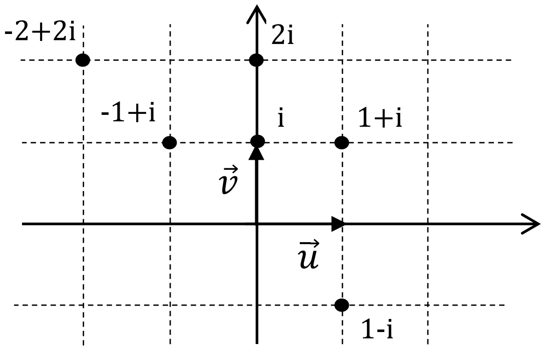
خصائص زاوية العدد العقدي

ليكن لدينا الأعداد العقدية $z_1 = x_1 + y_1 i$ و $z_2 = x_2 + y_2 i$ و $z = x + yi$:

1. $arg(\bar{z}) = -arg(z)$
2. $arg(-z) = arg(z) + \pi$
3. $arg(z_1 . z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$
4. $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2)$
5. $arg(z^n) = n\, arg(z), \quad n \in \mathbb{Z}$

مثال 12:

$arg[i(1+i)] = arg(-1+i) = arg(i) + arg(1+i) = \pi/2 + \pi/4 = 3\pi/4$
$arg[(1+i)/i] = arg(1-i) = arg(1+i) - arg(i) = \pi/4 - \pi/2 = -\pi/4$
$arg[(1+i)^3] = arg(-2+2i) = 3.\,arg(1+i) = 3\,\pi/4$



6.2 الشكل المثلثي للعدد العقدي

في مستوي الإحداثيات المتعامد $(O;\vec{u},\vec{v})$، وليكن العدد العقدي $z = x + yi$ غير المعدوم و r عدداً حقيقياً موجباً تماماً و θ عدداً حقيقياً. نفرض $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$، وبالتالي فإن:

$$z = x + yi = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x+yi}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}i\right)$$

وبملاحظة أن: $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r}$ و $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r}$، بالتالي يمكن كتابة العدد العقدي $z = x + yi$ بالشكل $z = r(\cos\theta + \sin\theta i)$، نسمي هذه الكتابة بالشكل المثلثي للعدد العقدي z.

مثال 13:

- العدد العقدي $1+i$: طويلة العدد r هي $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ وزاويته θ تحسب من العلاقتين $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$، وبالتالي فإن $\theta = \frac{\pi}{4}$. أي أن الشكل المثلثي لـ $1+i$ هو $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}i\right)$.
- العدد العقدي $-\sqrt{3}-i$: طويلة العدد r هي $r = \sqrt{3+1} = 2$ وزاويته θ تحسب من العلاقتين $\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ و $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$، وبالتالي فإن $\theta = \frac{5\pi}{6}$. أي أن الشكل المثلثي لـ $-\sqrt{3}-i$ هو $z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \sin\frac{5\pi}{6}i\right)$.
- الشكل المثلثي للعدد العقدي i هو: $\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2}i$
- الشكل المثلثي للعدد العقدي $-3i$ هو: $3(\cos\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2}i)$
- الشكل المثلثي للعدد العقدي 2 هو: $2(\cos 0 + \sin 0\, i)$
- الشكل المثلثي للعدد العقدي -5 هو: $5(\cos\pi + \sin\pi\, i)$

7.2 الشكل الأسي للعدد العقدي

تعريف 9: كل عدد عقدي غير معدوم $z \neq 0$ طويلته r وزاويته θ، يُمكن كتابته بالشكل التالي:

$$z = re^{i\theta} = r(cos\,\theta + sin\,\theta i)$$

ينتج من التعريف أن $\left|e^{i\theta}\right| = 1$ وأن $\arg\left(e^{i\theta}\right) = \theta$ و $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.

ضرب وقسمة عددين عقدين بالشكل الأسي

ليكن لدينا العددان العقديان $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ و $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$، لنحسب الجداء $z_1.z_2$:

$$z_1.z_2 = r_1e^{i\theta_1}.r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

وقسمة العددان $\frac{z_1}{z_2}$ هو:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

وإذا كان العدد العقدي غير المعدوم $z = re^{i\theta}$ فإنه ومن أجل $n \in \mathcal{Z}$:

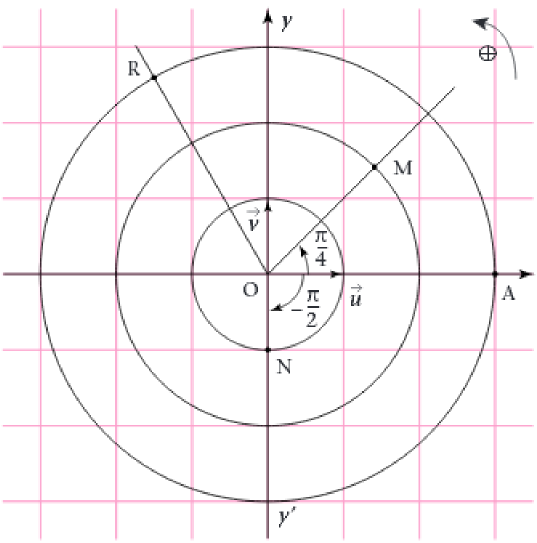
$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^ne^{in\theta}$$

التمثيل الهندسي

نمثل العدد العقدي $z = re^{i\theta}$ في مستوي الإحداثيات المتعامد $(O;\vec{u},\vec{v})$ بنقطة $P(z)$ على دائرة نصف قطرها يساوي r ومركزها مبدأ الإحداثيات O بحيث يصنع نصف القطر OP مع الشعاع $\vec{u}$ زاوية قياسها θ. على سبيل المثال يوجد في الشكل جانباً أربع نقاط هي:

$$z_M = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ و } z_N = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_A = 3e^{i0} \text{ و } z_R = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}$$



مثال 14:

- ليكن لدينا العدد العقدي $z = 1 + i$، اكتبه بالشكل المثلثي ومن ثم احسب z^8 و z^{10}.

وجدنا سابقاً أن $r = \sqrt{2}$ و $\theta = \frac{\pi}{4}$ وبالتالي فإن $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$$z^8 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^8 = \sqrt{2}^8e^{i8\frac{\pi}{4}} = 16e^{i2\pi} = 16$$

$$z^{10} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{10} = \sqrt{2}^{10}e^{i10\frac{\pi}{4}} = 32e^{i\frac{\pi}{2}} = 32i$$

- ليكن لدينا العددان العقديان $z_1 = 1 + i$ و $z_2 = 1 - i$، اكتبهما بالشكل الأسي ومن ثم احسب $z_1.z_2$ و $\frac{z_1}{z_2}$.

$z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ $(z_2 = \overline{z_1})$.

لحساب الضرب: $z_1 z_2 = \sqrt{2}.\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4})} = 2$
ولحساب القسمة: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

دستور دوموافر

أياً كانت θ عدداً حقيقياً، وأياً كانت n عدداً صحيحاً فإن:

$$(cos\ \theta + sin\ \theta\ i)^n = cos\ n\theta + sin\ n\theta$$

مثال 15: اكتب النسب المثلثية للزاوية 2θ بدلالة النسب المثلثية للزاوية θ.

باستخدام دستور دوموافر: $(cos\ \theta + sin\ \theta\ i)^2 = \cos 2\theta + \sin 2\theta$

ننشر الحد الأيسر من المساواة نحصل على:

$$(cos\ \theta + sin\ \theta\ i)^2 = cos^2\ \theta - sin^2\ \theta + 2cos\ \theta\ sin\ \theta\ i = \cos 2\theta + \sin 2\theta$$

بمساواة الجزأين الحقيقيين والجزأين التخيلين نحصل على:

$$cos\ 2\theta = cos^2\ \theta - sin^2\ \theta$$
$$\sin 2\theta = 2cos\ \theta\ sin\ \theta$$

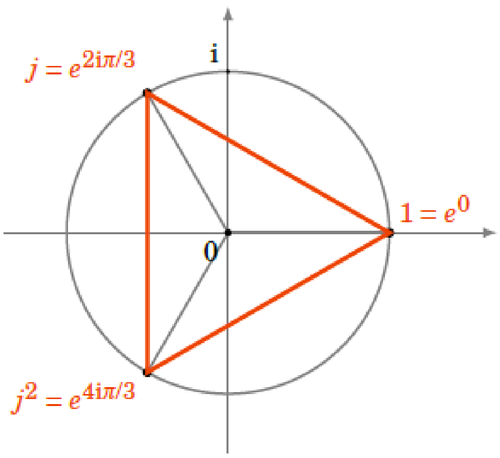
الجذور من المرتبة n لعدد عقدي

تعريف 10: من أجل كل عدد عقدي z وعدد صحيح موجب. الجذر من المرتبة n للعدد z هو عدد عقدي ω بحيث $\omega^n = z$.

فرضية 2: يوجد n جذر من المرتبة n للعدد العقدي $z = re^{i\theta}$، وهي:

$$\omega_k = r^{1/n}e^{\frac{\theta i + 2k\pi i}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

مثال 16:



- أوجد الجذور التكعيبية للعدد العقدي 1.

نكتب الواحد على الشكل $1 = 1e^{0i}$ وبالتالي فإن الجذور الثلاث للواحد هي:

$$\omega_k = 1^{1/3}e^{\frac{0i+2k\pi i}{3}} = e^{\frac{2k\pi i}{3}}, \quad k = 0, 1, 3$$

عند $k = 0$ يكون $\omega_0 = e^{\frac{2k\pi i}{3}} = 1$

عند $k = 1$ يكون $\omega_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}} = cos\frac{2\pi}{3} + sin\frac{2\pi}{3}i$

عند $k = 2$ يكون $\omega_2 = e^{\frac{4\pi i}{3}} = cos\frac{4\pi}{3} + sin\frac{4\pi}{3}i$

أي أن مجموعة الحلول هي: $\{1,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = j,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i = j^2\}$. وهي تشكل رؤوس مثلث متساوي الأضلاع.

- أوجد الجذور التكعيبية للعدد العقدي $8i$.

نكتب العدد العقدي $8i$ على الشكل $8i = 8e^{\frac{\pi}{2}i}$ وبالتالي فإن الجذور الثلاث للواحد هي:

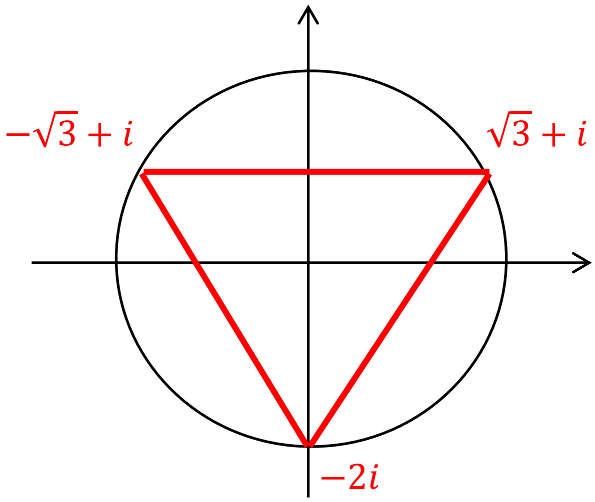
$$\omega_k = 8^{1/3}e^{\frac{\frac{\pi}{2}i+2k\pi i}{3}}, \quad k = 0, 1, 3$$

$k = 0$ يكون $\omega_0 = 2e^{\frac{\pi}{6}i} = 2\left(cos\frac{\pi}{6} + sin\frac{\pi}{6}i\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$

$k = 1$ يكون $\omega_1 = 2e^{\frac{\pi}{6}i+\frac{2\pi}{3}i} = 2\left(cos\frac{5\pi}{6} + sin\frac{5\pi}{6}i\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$

$k = 2$ يكون $\omega_2 = 2e^{\frac{\pi}{6}i+\frac{4\pi}{3}i} = 2\left(cos\frac{9\pi}{6} + sin\frac{9\pi}{6}i\right) = 2(0 - 1i) = -2i$

أي أن مجموعة الحلول هي: $\{-2i,\ \sqrt{3} + i,\ -\sqrt{3} + i\}$.



3. حل المعادلات في $\mathcal{C}$

1.3 معادلة من الدرجة الأولى

إن كل معادلة من الدرجة الأولى للمتحول العقدي z يمكن إرجاعها إلى الشكل $az + b = 0$، حيث $a \in \mathcal{C}^*$ و $b \in$ $\mathcal{C}$. هذه المعادلة حلها هو $z = -b/a$.

مثال 17: حل في $\mathcal{C}$ المعادلة $(1 - i)z + 3 = -z + i$.

$$(1 - i)z + 3 = -z + i \Rightarrow (2 - i)z = -3 + i$$
$$z = \frac{-3+i}{2-i} = \frac{-3+i}{2-i}\frac{2+i}{2+i} = \frac{(-3+i)(2+i)}{5} = \frac{-7-i}{5} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i$$

2.3 معادلة من الدرجة الثانية

1. المعادلة التربيعية بأمثال عقدية

فرضية 3: ليكن a, b, c ثلاث أعداد عقدية بحيث $a \neq 0$. ولتكن المعادلة من الشكل $ax^2 + bx + c = 0$ ومميزها $\Delta = b^2 - 4ac$.

- إذا كان $\Delta \neq 0$، فإن المعادلة تقبل حلان (جذران) مختلفان $z = \frac{-b\pm\delta}{2a}$، حيث δ هو جذر تربيعي لـ Δ.
- إذا كان $\Delta = 0$، فإن المعادلة تقبل حل (جذر) مضاعف $z = \frac{-b}{2a}$.

مثال 18:

- حل في $\mathcal{C}$ المعادلة $z^2 - (1+i)z - i/2 = 0$.

$$\Delta = [-(1+i)]^2 - 4(1)(-i/2) = 2i + 2i = 4i = 4e^{\frac{\pi}{2}i}$$
$$\delta = \sqrt{\Delta} = 4^{1/2} e^{\frac{\frac{\pi}{2}i + 2k\pi i}{2}} = 2e^{\frac{\pi}{4}i + k\pi i}, \quad k = 0, 1$$
$$k = 0, \qquad \delta = 2e^{\frac{\pi}{4}i} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$$
$$k = 1, \delta = 2e^{\frac{\pi}{4}i + \pi i} = 2e^{\frac{5\pi}{4}i} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4} i\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

لنأخذ أحد الجذرين وليكن $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ (يمكن أن نأخذ الجذر الآخر ونحصل على نفس النتائج)، وبالتالي يكون جذرا المعادلة هما: $z = \frac{-b\pm\delta}{2a} = \frac{(1+i)\pm(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)}{2(1)}$، أي أن أحد الجذرين هو $z_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}(1+i)$ والجذر الآخر هو $z_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

- حل في $\mathcal{C}$ المعادلة $z^2 - (1+i)z + i/2 = 0$.

$$\Delta = [-(1+i)]^2 - 4(1)(i/2) = 2i - 2i = 0$$

وبالتالي للمعادلة جذر مضاعف هو: $z = \frac{-b}{2a} = \frac{(1+i)}{2(1)} = \frac{(1+i)}{2}$.

2. المعادلة التربيعية بأمثال حقيقية

فرضية 4: ليكن a, b, c ثلاث أعداد حقيقية بحيث $a \neq 0$. ولتكن المعادلة من الشكل $ax^2 + bx + c = 0$ ومميزها $\Delta = b^2 - 4ac$.

- إذا كان $\Delta > 0$، فإن المعادلة تقبل حلان (جذران) حقيقيان مختلفان $z = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
- إذا كان $\Delta < 0$، فإن المعادلة تقبل حلان (جذران) عقديان مختلفان $z = \frac{-b\pm\sqrt{-\Delta}\, i}{2a}$
- إذا كان $\Delta = 0$، فإن المعادلة تقبل حل (جذر) حقيقي مضاعف $z = \frac{-b}{2a}$.

مثال 19:

- حل في $\mathcal{C}$ المعادلة $z^2 - z - 6 = 0$.

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-6) = 25 > 0$$

بالتالي المعادلة تقبل حلان (جذران) حقيقيان مختلفان $z = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1\pm\sqrt{25}}{2(1)}$

والجذران هما $z_1 = 3$ و $z_2 = -2$.

- حل في $\mathcal{C}$ المعادلة $z^2 - z + 1 = 0$.

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$$

بالتالي المعادلة تقبل حلان (جذران) عقديان مختلفان $z = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1\pm\sqrt{3}\, i}{2(1)}$

والجذران هما $z_1 = \frac{1+\sqrt{3}\, i}{2}$ و $z_2 = \frac{1-\sqrt{3}\, i}{2}$ ($z_2 = \overline{z_1}$).

- حل في $\mathcal{C}$ المعادلة $z^2-6z+9=0$.

$$\Delta=(-6)^2-4(1)(6)=36-36=0$$

بالتالي المعادلة تقبل حل (جذر) حقيقي مضاعف $z=\frac{-b}{2a}=\frac{6}{2}=3$.

3.3 النظرية الأساسية في الجبر

ليكن لدينا كثير الحدود $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$ بمعاملات عقدية ودرجته n. تقبل المعادلة $P(z)=0$ تماماً n حل (جذر) عقدي وهذه الجذور قد لا تكون جميعها متميزة عن بعضها، وعندها نقول إن للمعادلة جذور مشتركة. بمعنى آخر يوجد أعداد عقدية $z_1,\ z_2,\dots\ ,\ z_n$ (يمكن لبعضها أن يكون متطابق) بحيث:

$$P(z)=a_n(z-z_1)(z-\ z_2)\dots(z-z_n)$$

مثال 20:

- $4z^3-12z^2+8z=4z(z-1)(z-2)$
- $-z^5+2z^4+7z^3+14z^2-10z+20=-(z-2)(z+2i)(z-2i)(z+5i)(z-5i)$
- $2z^4-2z^3+14z^2-6z+24=2(z+3i)(z-3i)(z-\frac{1+\sqrt{15}i}{2})(z-\frac{1-\sqrt{15}i}{2})$

4. تطبيقات الأعداد العقدية في الهندسة المستوية

- للعددين z و $\bar{z}$ صورتان في المستوي العقدي $M(z)$ و $M(\bar{z})$ متناظرتان بالنسبة للمحور الحقيقي.
- للعددين z و $-z$ صورتان في المستوي العقدي $M(z)$ و $M(-z)$ متناظرتان بالنسبة للمبدأ.
- لتكن النقطة A صورة العدد العقدي z_A والنقطة B صورة العدد العقدي z_B، عندها تمثل النقطة M منتصف القطعة المستقيمة AB صورة العدد العقدي $\frac{z_A+z_B}{2}$.

مبرهنة 3: ليكن لدينا النقاط A صورة z_A و B صورة z_B و M صورة $z=x+yi$، والعدد الحقيقي الموجب تماماً r:

1. $|z|=OM=\sqrt{x^2+y^2}$ تمثل بعد النقطة O (المبدأ) عن النقطة M.
2. $|z_B-z_A|=AB$ تمثل طول المسافة من A إلى B.
3. مجموعة النقاط العقدية M من المستوي والتي تحقق المعادلة $|z-z_A|=r$ هي عبارة عن دائرة مركزها A ونصف قطرها r.
4. من أجل $A\neq B$، النقطة M تقع على محور القطعة المستقيمة $[AB]$ إذا وفقط إذا تحققت العلاقة التالية: $|z-z_A|=|z-z_B|$,

مثال 21:

- ليكن العددين $z_A=1-2i$ و $z_B=3+5i$ صورتي النقطتين A و B على الترتيب. احسب المسافة AB.

$$AB=|z_B-z_A|=|3+5i-(1-2i)|=|2+7i|=\sqrt{2^2+7^2}=\sqrt{53}$$

- مجموعة نقاط المستوي $M(z)$، صور الأعداد العقدية z التي تحقق العلاقة $|z-3|=5$.

لتكن النقطة A هي صورة العدد العقدي 3، عندئذ تعبر المساواة $|z-3|=5$ عن أن $MA=3$ أي أن بعد النقطة M عن A يساوي 3. فمجموعة النقاط المطلوبة هي عبارة عن نقاط الدائرة التي مركزها $A(3,0)$ ونصف قطرها يساوي 5.

- لتكن $M(z)$ صورة العدد العقدي z. ماذا تمثل مجموعة النقاط $M(z)$ في المستوي العقدي والتي تحقق العلاقة التالية (المساواة): $|z-1+2i|=|z-3-5i|$.

ليكن العددين $z_A=1-2i$ و $z_B=3+5i$ صورتي النقطتين A و B على الترتيب. تكتب المعادلة المعطاة على الشكل $|z-z_A|=|z-z_B|$ وهذا يعني أن $MA=MB$ وبالتالي مجموعة النقاط M في المستوي التي تبعد البعد نفسه عن النقطتين A و B هي مجموعة نقاط محور القطعة المستقيمة $[AB]$.

فرضية 5: ليكن الشعاع $\overrightarrow{OA}$ صورة العدد العقدي z_A والشعاع $\overrightarrow{OB}$ صورة العدد العقدي z_B. فإن زاوية العدد العقدي $arg\,\frac{z_B}{z_A}$ تمثل قياس الزاوية $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

مبرهنة 4: في مستوي الإحداثيات المتعامد $(O;\vec{u},\vec{v})$، ليكن لدينا النقاط A صورة z_A و B صورة z_B و C صورة z_C و D صورة z_D: $arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_D-z_C}\right)=\left(\overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{AB}\right)=\theta\ \ [2\pi]$ و $\frac{z_B-z_A}{z_D-z_C}=\frac{AB}{CD}e^{i\theta}$.

نتيجة 2:

1. ABC مثلث قائم في B $\Leftrightarrow$ العدد $\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}$ تخيلي صرف لا يساوي الصفر.
2. ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين في B $\Leftrightarrow$ $\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$.
3. ABC مثلث متساوي الأضلاع $\Leftrightarrow$ $|z_B-z_A|=|z_C-z_B|=|z_C-z_A|$.
4. ABC على استقامة واحدة $\Leftrightarrow$ العدد $\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}$ حقيقي.
5. $ABCD$ متوازي أضلاع $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ $\Leftrightarrow$ $z_B-z_A=z_C-z_D$.

مثال 22:

- ما هو نوع المثلث ABC علماً أن $z_A=3+2i$ و $z_B=2+i$ و $z_C=1+2i$ صور النقاط A و B و C على الترتيب.
- لنشكل العدد العقدي $Z=\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}$

$$Z=\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}=\frac{(2+i)-(3+2i)}{(2+i)-(1+2i)}=\frac{-1-i}{1-i}=\frac{-1-i}{1-i}.\frac{1+i}{1+i}=\frac{-2i}{2}=-i$$

العدد Z تخيلي وبالتالي فإن المثلث ABC قائم في B.

- لتكن الأعداد العقدية: $z_A=2+i$ و $z_B=-1+4i$ و $z_C=1+2i$ صور النقاط A و B و C على الترتيب. أثبت أن النقاط A,C,B تقع على استقامة واحدة.

لنشكل العدد العقدي $Z=\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}$

$$Z=\frac{z_B-z_A}{z_B-z_C}=\frac{(-1+4i)-(2+i)}{(-1+4i)-(1+2i)}=\frac{-3+3i}{-2+2i}=\frac{3}{2}.\frac{-1+i}{-1+i}=\frac{3}{2}$$

العدد Z حقيقي وبالتالي فالنقاط A, C, B تقع على استقامة واحدة.

تمارين

1. ليكن العدد العقدي $z = \frac{4-3i}{2-2i}$. أوجد $|z|$ و $\bar{z}$.

2. أوجد ناتج ما يلي: $1 - 2i + \frac{i}{1-2i}$

3. اكتب بالشكل $a + ib$ الأعداد العقدية $(1-i)^8$، $(1-i)^4$، $(1-i)^3$، $(1-i)^2 2$

4. استنتج $1 + (1-i) + (1-i)^2 + \ldots + (1-i)^7$

5. ليكن العدد العقدي $z = (1+b)^2$ حيث b عدد حقيقي موجب، أوجد قيمة b إذا كان $arg\, z = \frac{\pi}{3}$

6. بفرض أن $z \in \mathcal{C}$ بحيث $|1+iz| = |1-iz|$ برهن أن $z \in \mathcal{R}$

7. ليكن $z \neq 0$ و $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 1$، برهن أن z تخيلي صرف

8. باستخدام دستور دوموافر اكتب النسب المثلثية للزاوية 3θ بدلالة النسب المثلثية للزاوية θ

9. احسب الجذور التربيعية للأعداد $-i, 3-4i$

10. ليكن لدينا العدد العقدي $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

a) اكتب z^2 بالشكل الجبري

b) اكتب z^2 بالشكل الأسي

c) استنتج z بالشكل الأسي

11. حل المعادلات: $z^2 + z - 1$, $2z^2 + (-10-10i)z + 24 - 10i$

12. حل المعادلة $z^2 + \left(i - \sqrt{2}\right)z - i\sqrt{2} = 0$، ثم المعادلة $Z^4 + \left(i - \sqrt{2}\right)Z^2 - i\sqrt{2} = 0$

13. احسب الجذر من المرتبة 5 للأعداد $32i$ و $4 - 4i$

14. احسب بطريقتين مختلفتين الجذران التربيعيان للعدد $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ بطريقين مختلفتين. استنتج القيمتين $cos\,\frac{\pi}{12}$ و $sin\,\frac{\pi}{12}$.

15. ما هو نوع المثلث ABC علماً أن $z_A = 1 + 2i$ و $z_B = -2 + i$ و $z_C = -1 + 2i$ صور النقاط A و B و C على الترتيب.

16. لتكن الأعداد العقدية: $z_A = -4$ و $z_B = -1 - i$ و $z_C = 2 - 2i$ صور النقاط A و B و C على الترتيب. أثبت أن النقاط A, C, B تقع على استقامة واحدة.

مذاكرة الفصل الخامس

العلامة العظمى: 100 **علامة النجاح: 50** **المدة: ساعة ونصف**

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة **(50) درجة**

1. $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$، الشكل الجبري لـ z هو:
   a. $-1 + i\sqrt{3}$
   b. $1 + i\sqrt{3}$
   c. $2 + i\sqrt{3}$
   d. $\sqrt{3} - i$

2. $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و $z' = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ بالتالي zz' هو:
   a. -4
   b. 4
   c. $4i$
   d. $-4i$

3. $\left(\frac{i}{1-i}\right)^{20}$ يساوي:
   a. $\frac{1}{1024}$
   b. $\frac{-1}{1024}$
   c. $\frac{i}{1024}$
   d. $\frac{-i}{1024}$

4. $z = \frac{4-i}{1+2i}$، بالتالي z يساوي:
   a. $\frac{2-9i}{5}$
   b. $\frac{2-9i}{-3}$
   c. $\frac{6+7i}{5}$
   d. $\frac{2+9i}{5}$

5. مرافق العدد $\frac{1-z}{1+i}$، حيث z عدد عقدي هو:
   a. $\frac{1-z}{1-i}$
   b. $\frac{1+\bar{z}}{1-i}$
   c. $\frac{1+\bar{z}}{1-i}$
   d. $\frac{1+z}{1-i}$

6. زاوية العدد العقدي $-3\,\frac{1+i\sqrt{3}}{i}$

a. $\frac{-\pi}{6}$
b. $\frac{5\pi}{6}$
c. $\frac{7\pi}{6}$
d. $\frac{\pi}{6}$

7. إذا كانت $arg(z) = \frac{\pi}{3}$ و $z' = -7$ فإن $arg(zz')$ يساوي
a. $\frac{2\pi}{3}$
b. $\frac{\pi}{3}$
c. $-\frac{\pi}{3}$
d. $\frac{-2\pi}{3}$

8. ليكن n عدد طبيعي. العدد $(1 + i\sqrt{3})^n$ يكون حقيقي إذا وفقط إذا كان n:
a. عدد زوجي
b. عدد فردي
c. مضاعفات العدد 4
d. مضاعفات العدد 3

9. $zA = -3$ و $zB = 2i$ بالتالي AB تساوي
a. 5
b. -1
c. $3 + 2i$
d. $\sqrt{13}$

10. مجموعة النقاط M التي صورتها z بحيث $|z + i| = |z - 1|$ هي الخط المستقيم الذي معادلته:
a. $y = x$
b. $y = -x$
c. $y = x - 1$
d. $y = x + 1$

السؤال الثاني: أجب بصح أو خطأ

(30) درجة

1. العدد $(1 + i)^2$ تخيلي صرف — صح أو خطأ
2. من أجل كل عدد عقدي z لدينا $z^2 = |z|^2$ — صح أو خطأ
3. $(1 - i\sqrt{3})(4 + 4i) = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$ — صح أو خطأ
4. $arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ — صح أو خطأ
5. $|z| = |z'|$ إذا وفقط إذا كان $z = z'$ أو $z = -z'$ — صح أو خطأ
6. $z + \bar{z} = 0$، بالتالي $z = 0$ — صح أو خطأ
7. مرافق العدد $1 + e^{i\theta}$ هو $1 - e^{i\theta}$ — صح أو خطأ
8. $z + 1/z = 0$ يؤدي إلى أن $z = i$ أو $z = -i$ — صح أو خطأ
9. $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ بالتالي z^4 عدد حقيقي — صح أو خطأ
10. z و z' عددان عقديان بحيث $z + z'$ و zz' حقيقيان بالتالي z و z' حقيقيان — صح أو خطأ

السؤال الثالث: حل كل من المعادلات التالية: **(10) درجات**

لتكن الأعداد العقدية: $z_A = -4$ و $z_B = -1 - i$ و $z_C = 2 - 2i$ صور النقاط A و B و C على الترتيب. أثبت أن النقاط A, C, B تقع على استقامة واحدة.

الجواب:

ABC على استقامة واحدة $\Leftrightarrow$ العدد $\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C}$ حقيقي.

$$\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = \frac{-1-i+4}{-1-i-2+2i} = \frac{3-i}{-3+i} = -1$$

السؤال الرابع: **(10) درجات**

حل المعادلة $z^2 + (i - \sqrt{2})z - i\sqrt{2} = 0$

الجواب:

$$\Delta = \left(i - \sqrt{2}\right)^2 - 4(1)\left(-i\sqrt{2}\right) = -1 + 2 - 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 1 + 2\sqrt{2i} = \left(i + \sqrt{2}\right)^2$$

$$z = \frac{-b \pm \delta}{2a} = \frac{-(i - \sqrt{2}) \pm (i + \sqrt{2})}{2(1)} = \{\sqrt{2}, -i\}$$

الإجابات الصحيحة

السؤال الأول:

رقم التمرين	الإجلبة الصحيحة
1.	(a)
2.	(b)
3.	(b)
4.	(a)
5.	(b)
6.	(b)
7.	(d)
8.	(d)
9.	(d)
10.	(b)

السؤال الثاني:

رقم التمرين	الإجلبة الصحيحة
1.	صح
2.	خطأ
3.	خطأ
4.	صح
5.	خطأ
6.	خطأ
7.	خطأ
8.	صح
9.	صح
10.	خطأ