



الجبر البولياني وتبسيط التوابع المنطقية

العنوان	رقم الصفحة
1. العمليات البوليانية والتوابع المنطقية Boolean Operations and Expressions	3
2. قواعد وقوانين الجبر البولياني Laws and Rules of Boolean Algebra	3
3. نظريات دومورغان DeMorgan's Theorems	4
4. العلاقات البوليانية وجداول الحقيقة Boolean Expressions and Truth Tables	5
5. جداول كارنو The Karnaugh Maps	8
6. خلاصة Summary	15

كلمات مفتاحية Keywords

متحول Variable، متمم متحول Complement، مجموع حدود Sum term، جداء حدود Product term، مجموع جداءات حدود (SOP) Sum-of-products، جداء مجاميع حدود (POS) Product-of-sums، جدول كارنو Karnaugh map، اختصار (أمثلة) Minimization، المتحول المنطقي "لا يهم" "Don't care".

الملخص Abstract

في عام 1854، نشر جورج بول (George Boole) عملاً بعنوان البحث في قوانين المنطق (التفكير)، التي تقوم على أسس النظريات الرياضية للمنطق والاحتمالات. وكان في هذا العمل المنشور قد صيغ "الجبر المنطقي"، المعروف اليوم باسم الجبر البولياني. فالجبر البولياني هو الوسيلة المناسبة والمباشرة للتعبير عن عمل الدارات الرقمية وتحليلها. وكان كلود شانون (Claude Shannon) أول من طبق عمل بول في تحليل وتصميم الدارات الرقمية. في عام 1938، كتب شانون أطروحة الدكتوراة في معهد ماساتشوستس للتكنولوجيا (MIT) بعنوان التحليل الرمزي لدارات الحواكم والقواطع (A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits).

سندرس في هذا الفصل بإيجاز قوانين وقواعد ونظريات الجبر البولياني وتطبيقها على الدارات الرقمية. ونعرف الدارات المعطاة بمعادلات منطقية (بوليانية). كما سنعرض لكيفية تبسيط الدارات الرقمية باستعمال أداة مهمة من أدوات تبسيط المعادلات المنطقية ألا وهي جداول كارنو.

الأهداف التعليمية للفصل الثالث ILO3

يهدف هذا الفصل إلى التمكن من استعمال قواعد وقوانين الجبر البولياني، وكذلك جداول كارنو بغية اختصار المعادلات المنطقية، ومن ثم الحصول على تنفيذ أمثلي للدارة المنطقية.

مخرجات الفصل الثالث ILO3

فهم قواعد وقوانين الجبر البولياني، واستعمال جداول كارنو لاختصار العلاقات المنطقية.

الفهرس Contents

1. العمليات البوليانية والتوابع المنطقية Boolean Operations and Expressions
2. قواعد وقوانين الجبر البولياني Laws and Rules of Boolean Algebra
3. نظريات دومورغان DeMorgan's Theorems
4. العلاقات البوليانية وجداول الحقيقة Boolean Expressions and Truth Tables
5. جداول كارنو The Karnaugh Maps

1. العمليات البوليانية والتوابع المنطقية Boolean Operations and Expressions

في الجبر البولياني، المتحول المنطقي (variable) هو رمز يُستعمل لتمثيل فعل (action)، أو شرط (condition) أو معطية (data). يمكن أن يأخذ المتحول المنطقي إحدى القيمتين (0) أو (1).
يمثل المتمم (complement) القيمة المنطقية العكسية للمتحول المنطقي. ويشار إليه بخط في أعلى المتحول ويلفظ بالإنكليزية (overbar)، فتمتم (A) هو (\bar{A}) .
ونسَمي المتحول أو متممه حرفاً (literal).
تكافئ عملية الجمع في الجبر البولياني عملية (OR)، ويكون مجموع الحدود (1) إذا كان واحداً من الأحرف (1) على الأقل. ويكون مجموع الحدود (0) إذا كان كل حرف من الأحرف (0).

المثال 1.3

حدد قيم المتحولات (A) و (B) و (C) ليكون مجموع الحدود للمعادلة المنطقية معدوماً $(\bar{A} + B + \bar{C} = 0?)$.
الحل

يجب أن يأخذ كل حرف من الأحرف القيمة (0)، وعليه يكون $(A = 1)$ ، و $(B = 0)$ ، و $(C = 1)$.
وتكافئ عملية الضرب في الجبر البولياني عملية (AND)، ويكون جداء الحدود (1) إذا كان كل حرف من حروفه (1). ويكون جداء الحدود (0) إذا كان كل على الأقل واحداً من الأحرف (0).

المثال 2.3

حدد قيم المتحولات (A) و (B) و (C) ليكون جداء الحدود للمعادلة المنطقية واحداً $(\bar{A}\bar{B}\bar{C} = 1?)$.
الحل

يجب أن يأخذ كل حرف من الأحرف القيمة (1)، وعليه يكون $(A = 1)$ ، و $(B = 0)$ ، و $(C = 0)$.

2. قواعد وقوانين الجبر البولياني Laws and Rules of Boolean Algebra

يوجد ثلاثة قوانين وإثنتا عشرة قاعدة. قوانين الجبر البولياني هي:

القانون التبديلي (commutative laws)

يُطبق القانون التبديلي على عمليتي الجمع والضرب، بالنسبة لعملية الجمع نجد:

$$A + B = B + A$$

ونجد في عملية الضرب،

$$AB = BA$$

نلاحظ في كلا الحالتين أن الترتيب ليس مهماً.

القانون التجميعي (Associative laws)

يُطبق القانون التجميعي أيضاً على عمليتي الجمع والضرب. بالنسبة لعملية الجمع نجد:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

ونجد في عملية الضرب

$$A(BC) = (AB)C$$

نلاحظ في كلا الحالتين أن كيفية التجميع بوضع الأقواس ليس مهماً.

القانون التوزيعي (Distributive laws)

القانون التوزيعي هو قانون إخراج العامل المشترك فمثلاً:

$$AB + AC = A(B + C)$$

نبين فيما يلي قواعد الجبر البولياني الإثنتا عشرة.

$$1. A + 0 = A$$

$$2. A + 1 = 1$$

$$3. A \cdot 0 = 0$$

$$4. A \cdot 1 = A$$

$$5. A + A = A$$

$$6. A + \bar{A} = 1$$

$$7. A \cdot A = A$$

$$8. A \cdot \bar{A} = 0$$

$$9. \bar{\bar{A}} = A$$

$$10. A + \bar{A}B = A$$

$$11. A + \bar{A}B = A + B$$

$$12. (A + B)(A + C) = A + BC$$

3. نظريات دومورغان DeMorgan's Theorems

نظرية دمورغان 1 (DeMorgan's 1st Theorem)

متمم جداء متحولين يساوي إلى مجموع متمم كل منهما.

$$\overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$$

نظرية دمورغان 2 (DeMorgan's 2nd Theorem)

متمم مجموع متحولين يساوي إلى جداء متمم كل منهما.

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$

لتطبيق نظرية دمورغان نغير (OR) إلى (AND)، ونغير (AND) إلى (OR)، ونعكس المتحولات.

المثال 3.3

استعمل نظرية دمورغان لإزالة المتمم لكلا الحدين في المعادلة المنطقية $(X = \overline{\bar{C} + D})$.

الحل

$$X = \overline{\bar{C} + D} = \bar{\bar{C}} \cdot \bar{D} = CD$$

المثال 4.3

أوجد المعادلة المنطقية المختصرة باستعمال قوانين وقواعد الجبر البولياني.

$$X = [A\bar{B}(C + BD) + \bar{A}\bar{B}]C$$

الحل

$$\begin{aligned}
 & \left[A \bar{B} (C + BD) + \bar{A} \bar{B} \right] C = (A \bar{B} C + A \bar{B} B D + \bar{A} \bar{B}) C \\
 & = (A \bar{B} C + 0 + \bar{A} \bar{B}) C = (A \bar{B} C + \bar{A} \bar{B}) C \\
 & = A \bar{B} C + \bar{A} \bar{B} C = \bar{B} C (A + \bar{A}) = \bar{B} C
 \end{aligned}$$

المثال 5.3

أوجد المعادلة المنطقية المختصرة باستعمال قوانين وقواعد الجبر البولياني.

$$\bar{A} \bar{B} C + A \bar{B} \bar{C} + \bar{A} \bar{B} \bar{C} + A \bar{B} C + A B C$$

الحل

$$\begin{aligned}
 & \boxed{\bar{A} \bar{B} C} + A \bar{B} \bar{C} + \bar{A} \bar{B} \bar{C} + A \bar{B} C + \boxed{A B C} \\
 & = B C (\bar{A} + A) + \boxed{A \bar{B} \bar{C}} + \bar{A} \bar{B} \bar{C} + \boxed{A \bar{B} C} \\
 & = B C + A \bar{B} (\bar{C} + C) + \bar{A} \bar{B} \bar{C} = B C + A \bar{B} + \bar{A} \bar{B} \bar{C} = B C + \bar{B} (A + \bar{A} \bar{C}) \\
 & = B C + \bar{B} (A + \bar{C}) = B C + A \bar{B} + \bar{B} \bar{C}
 \end{aligned}$$

المثال 6.3

أوجد المعادلة المنطقية المختصرة باستعمال قوانين وقواعد الجبر البولياني.

$$\overline{AB + AC} + \bar{A} \bar{B} \bar{C}$$

الحل

$$\begin{aligned}
 \overline{AB + AC} + \bar{A} \bar{B} \bar{C} &= (\overline{AB}) (\overline{AC}) + \bar{A} \bar{B} \bar{C} = (\bar{A} + \bar{B}) (\bar{A} + \bar{C}) + \bar{A} \bar{B} \bar{C} \\
 &= \bar{A} + \bar{B} \bar{C} + \bar{A} \bar{B} \bar{C} = \bar{A} (1 + \bar{B} \bar{C}) + \bar{B} \bar{C} \\
 &= \bar{A} + \bar{B} \bar{C}
 \end{aligned}$$

4. العلاقات البوليانية وجداول الحقيقة Boolean Expressions and Truth Tables

لتكن المعادلة المنطقية التالية، والتي تمثل مجموع جداءات (sum of product):

$$X = \bar{A} \bar{B} C + A \bar{B} \bar{C} + A B C$$

ولنكتب جدول الحقيقة الذي يمثلها. يكافئ الجداء الأول ($\bar{A} \bar{B} C$) الترميز الإثنائي (0 0 1)، ويكافئ الجداء الثاني ($A \bar{B} \bar{C}$) الترميز الإثنائي (1 0 0)، ويكافئ الجداء الثالث ($A B C$) الترميز الإثنائي (1 1 1). ننشئ جدول الحقيقة بثلاثة متحولات، ونضع في كل سطر مكافئ لجداء من الجداءات الثلاثة في حقل التابع أو حقل الخرج (X) واحداً، ونضع في الحقول المتبقية أصفاراً فنحصل على جدول الحقيقة المكافئ للمعادلة المنطقية المفترضة، وهذا ما يبينه الجدول المبين في الشكل (1.3).

Inputs (مداخل)	Output (مخرج)	Product terms (جداءات)
A B C	X	
0 0 0	0	
0 0 1	1	$\overline{A}\overline{B}C$
0 1 0	0	
0 1 1	0	
1 0 0	1	$A\overline{B}\overline{C}$
1 0 1	0	
1 1 0	0	
1 1 1	1	ABC

الشكل (1.3): جدول الحقيقة المكافئ للمعادلة المنطقية المفترضة (مجموع جداءات).

لتكن المعادلة المنطقية التالية، والتي تمثل جداء مجاميع (product of sum):

$$X = (A + B + C)(A + \overline{B} + C)(A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + B + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + C)$$

ولنكتب جدول الحقيقة الذي يمثلها. يكافئ المجموع الأول $(A + B + C)$ الترميز الإثنائي $(0\ 0\ 0)$ ، ويكافئ المجموع الثاني $(A + \overline{B} + C)$ الترميز الإثنائي $(0\ 1\ 0)$ ، ويكافئ المجموع الثالث $(A + \overline{B} + \overline{C})$ الترميز الإثنائي $(0\ 1\ 1)$ ، ويكافئ المجموع الرابع $(\overline{A} + B + \overline{C})$ الترميز الإثنائي $(1\ 0\ 1)$ ، ويكافئ المجموع الخامس $(\overline{A} + \overline{B} + C)$ الترميز الإثنائي $(1\ 1\ 0)$ ،. ننشئ جدول الحقيقة بثلاثة متحولات، ونضع في كل سطر مكافئ لمجموع من المجاميع الخمسة في حقل التابع أو حقل الخرج (X) صفراً، ونضع في الحقول المتبقية واحداً، فنحصل على جدول الحقيقة المكافئ للمعادلة المنطقية المفترضة، وهذا ما يبينه الشكل (2.3). نلاحظ أن جدول الحقيقة هو نفسه في حالة معادلة مجموع الجداءات، وبالتالي فإنه يمثل نفس التابع المنطقي الذي يمكن كتابته أيضاً على شكل جداء مجاميع.

Inputs (مداخل)	Output (مخرج)	Sum terms (مجاميع)
A B C	X	
0 0 0	0	$A + B + C$
0 0 1	1	
0 1 0	0	$A + \overline{B} + C$
0 1 1	0	$A + \overline{B} + \overline{C}$
1 0 0	1	
1 0 1	0	$\overline{A} + B + \overline{C}$
1 1 0	0	$\overline{A} + \overline{B} + C$
1 1 1	1	

الشكل (2.3): جدول الحقيقة المكافئ للمعادلة المنطقية المفترضة (جداء مجاميع).

يمكن أيضاً كتابة المعادلة المنطقية لجدول حقيقة معطى. ليكن جدول الحقيقة المبين في الشكل (3.3) والمطلوب كتابة المعادلة المنطقية المكافئة له بصيغة مجموع الجداءات ثم بصيغة جداء المجاميع.

Inputs (مداخل)	Output (مخرج)	Product terms and sum terms (جداءات ومجاميع)
A B C	X	
0 0 0	0	$A + B + C$
0 0 1	0	$A + B + \overline{C}$
0 1 0	0	$A + \overline{B} + C$
0 1 1	1	$\overline{A} B C$
1 0 0	1	$\overline{A} \overline{B} \overline{C}$
1 0 1	0	$\overline{A} + B + \overline{C}$
1 1 0	1	$A B \overline{C}$
1 1 1	1	$A B C$

الشكل (3.3): جدول الحقيقة المكافئ لمعادلة منطقية.

من جدول الحقيقة نستنتج تابع مجموع الجداءات

$$X = \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + ABC$$

ونستنتج أيضاً تابع جداء المجاميع

$$X = (A + B + C)(A + B + \bar{C})(A + \bar{B} + C)(\bar{A} + B + \bar{C})$$

5. جداول كارنو The Karnaugh`Maps

جدول كارنو بثلاثة متحولات

يبين الشكل 4.3 جدول كارنو بثلاثة متحولات. يمثل العمود الموجود على أقصى اليسار القيم الممكنة للمتحوّلين المنطقيين في الدخّل (AB) بترميز غري، كي يؤدي الانتقال من خلية إلى خلية مجاورة إلى تغيير قيمة بت واحد فقط. ويمثل السطر العلوي قيم متحول الدخّل الثالث (C). تمثل الخلايا الثماني قيم التابع الممكنة لثلاثة متحولات، وتأخذ كل خلية القيمة المنطقية (1) أو (0) وفقاً للتابع المنطقي المفروض تمثيله. مخطط كارنو هو أداة لتبسيط التوابع المنطقية بثلاثة أو أربعة متحولات، يتطلب التابع بثلاثة متحولات ثماني خلايا ($2^3 = 8$)، تمثل القيم الثماني الممكنة للتابع المنطقي.

	C	0	1
	$A B$		
السطر الأول	0 0	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	$\overline{A}\overline{B}C$
	0 1	$\overline{A}B\overline{C}$	$\overline{A}BC$
	1 1	$AB\overline{C}$	ABC
السطر الرابع	1 0	$A\overline{B}\overline{C}$	$A\overline{B}C$

الشكل 4.3: جدول كارنو بثلاثة متحولات

تمثل كل خلية من الخلايا الثماني جداء ممكناً بثلاثة متحولات. وتختلف كل خلية عن الخلية المجاورة لها بمتحول واحد فقط. يستطيع مخطط كارنو أن يختصر التابع المنطقي عن طريق إنشاء مجموعات من الخلايا المتجاورة التي يكون عددها من مضاعفات العدد (2)، وحذف المتحولات التي تتغير ضمن المجموعة الواحدة. فالمجموعات الممكنة هي مجموعة تحتوي على خلية واحدة أو مجموعة تحتوي على خليتين، أو مجموعة تحتوي على أربع خلايا، أو مجموعة تحتوي على ثماني خلايا. لنأخذ مجموعة أمثلة توضح هذه الفكرة.

المثال 7.3

أوجد التابع المنطقي المختصر والمحدد في جدول كارنو المبين في الشكل (5.3).

		C	0	1
	A B			
السطر الأول	0 0	1		
	0 1	1	1	
	1 1			1
السطر الرابع	1 0			

الشكل 5.3: جدول كارنو لتابع منطقي

الحل

نشكل مجموعتين منفصلتين تحتوي كل منهما على خليتين. تعطي المجموعة الأولى في السطرين الأول والثاني الجداء $(\overline{A}\overline{C})$ ، حيث اختصر المتحول (B) لأنه يتغير من (0) في السطر الأول إلى (1) في السطر الثاني، أما المتحولين (A, C) لا يتغيران ويحافظان على قيمتهما $(A = 0, C = 0)$. وتعطي المجموعة الثانية في السطرين الثاني والثالث الجداء (BC) ، حيث اختصر المتحول (A) لأنه يتغير من (0) في السطر الثاني إلى (1) في السطر الثالث، أما المتحولين (B, C) لا يتغيران ويحافظان على قيمتهما $(B = 1, C = 1)$.
بالتالي يكون التابع المنطقي بعد الاختصار وباستعمال مخطط كارنو $(X = \overline{A}\overline{C} + BC)$.

المثال 8.3

أوجد التابع المنطقي المختصر والمحدد في جدول كارنو المبين في الشكل (5.3).

		C	0	1
	A B			
السطر الأول	0 0	1		
	0 1	1	1	
	1 1			
السطر الرابع	1 0			

الشكل 5.3: جدول كارنو لتابع منطقي

الحل

نشكل مجموعتين من الخلايا تحتوي كل منهما على خليتين. تعطي المجموعة الأولى في السطرين الأول والثاني الجداء $(\overline{A}\overline{C})$ ، حيث اختصر المتحول (B) لأنه يتغير من (0) في السطر الأول إلى (1) في السطر الثاني، أما المتحولين (A, C) لا يتغيران ويحافظان على قيمتهما $(A = 0, C = 0)$. تبقى مجموعة واحدة يمكن أن تحتوي على خلية واحدة منفصلة أو مجموعة تحتوي على خليتين إحداهما مشتركة مع المجموعة السابقة، وهذا هو الخيار الصحيح لأنه ينبغي أن تحتوي المجموعة على أكبر عدد من الخلايا المتجاورة. وتعطي المجموعة الثانية في السطر الثاني الجداء $(\overline{A}B)$ ، حيث اختصر المتحول (C) لأنه يتغير من (1) إلى (0) في السطر الثاني نفسه، أما المتحولين (A, B) لا يتغيران ويحافظان على قيمتهما $(A = 0, B = 1)$.

بالتالي يكون التابع المنطقي بعد الاختصار وباستعمال مخطط كارنو $(X = \overline{A}\overline{C} + \overline{A}B)$.

المثال 9.3

أوجد التابع المنطقي المختصر والمحدد في جدول كارنو المبين في الشكل (6.3).

		C	
	$A \ B$	0	1
السطر الأول	0 0	1	1
	0 1		
	1 1		
السطر الرابع	1 0	1	1

الشكل 6.3: جدول كارنو لتابع منطقي

الحل

نشكل مجموعة واحدة تحتوي على أربع خلايا. تعطي هذه المجموعة الجداء (\overline{B}) ، حيث اختصر المتحولان (A, C) لأنهما يتغيران من (0) إلى (1) في السطرين الأول والرابع، أما المتحول (B) لا يتغير ويحافظ على قيمته $(B = 0)$.

بالتالي يكون التابع المنطقي بعد الاختصار وباستعمال مخطط كارنو $(X = \overline{B})$.

المثال 10.3

أوجد التابع المنطقي المختصر والمحدد في جدول كارنو المبين في الشكل (7.3).

C $A B$		0	1
0 0		1	1
0 1		1	1
1 1		1	1
1 0		1	1

الشكل 7.3: جدول كارنو لتابع منطقي

الحل

نشكل مجموعة واحدة تحتوي على ثماني خلايا. تعطي هذه المجموعة الجداء (1)، حيث اختصرت المتحولات الثلاثة (A, B, C) لأن كل منها يتغير من (0) إلى (1).
بالتالي يكون التابع المنطقي بعد الاختصار وباستعمال مخطط كارنو ($X=1$).

المثال 11.3

أوجد التابع المنطقي المختصر والمحدد في جدول كارنو المبين في الشكل (8.3).

C $A B$		0	1
0 0		1	1
0 1		1	
1 1		1	
1 0		1	1

الشكل 8.3: جدول كارنو لتابع منطقي

الحل

نشكل مجموعتين تحتوي كل منهما على أربع خلايا. تعطي المجموعة الأولى الجداء (\bar{B})، حيث اختصرت المتحولان (A, C) لأن كل منها يتغير من (0) إلى (1). وتعطي المجموعة الثانية الجداء (\bar{C})، حيث اختصرت المتحولان (A, B) لأن كل منها يتغير من (0) إلى (1).
بالتالي يكون التابع المنطقي بعد الاختصار وباستعمال مخطط كارنو ($X = \bar{B} + \bar{C}$).

المثال 12.3

أوجد التابع المنطقي المختصر والمحدد في جدول كارنو المبين في الشكل (9.3).

C $A \ B$	0	1
0 0	1	1
0 1	1	1
1 1	1	
1 0	1	1

الشكل 9.3 : جدول كارنو لتابع منطقي

الحل

نشكل ثلاث مجموعات تحتوي كل منها على أربع خلايا. تعطي المجموعة الأولى الجداء (\overline{B}) ، حيث اختصر المتحولان (A, C) لأن كل منهما يتغير من (0) إلى (1). وتعطي المجموعة الثانية الجداء (\overline{C}) ، حيث اختصر المتحولان (A, B) لأن كل منهما يتغير من (0) إلى (1). وتعطي المجموعة الثالثة الجداء (\overline{A}) ، حيث اختصر المتحولان (B, C) لأن كل منهما يتغير من (0) إلى (1).

بالتالي يكون التابع المنطقي بعد الاختصار وباستعمال مخطط كارنو $(X = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$.

جدول كارنو بأربعة متحولات

يبين الشكل 10.3 جدول كارنو بأربعة متحولات. يمثل العمود الموجود على أقصى اليسار القيم الممكنة للمتحولين المنطقيين في الدخل (AB) بترميز غري، كي يؤدي الانتقال من خلية إلى خلية مجاورة إلى تغيير قيمة بت واحد فقط. ويمثل السطر العلوي القيم الممكنة للمتحولين المنطقيين في الدخل (CD) بترميز غري أيضاً، كي يؤدي الانتقال من خلية إلى خلية مجاورة إلى تغيير قيمة بت واحد فقط. وتمثل الخلايا الست عشرة قيم التابع الممكنة لأربعة متحولات، وتأخذ كل خلية القيمة المنطقية (1) أو (0) بشكل يتناسب مع التابع المفترض.

يتطلب التابع بأربعة متحولات ست عشرة خلية $(2^4 = 16)$ ، تمثل القيم الست عشرة الممكنة للتابع المنطقي. فالمجموعات الممكنة هي مجموعة تحتوي على خلية واحدة أو مجموعة تحتوي على خليتين، أو مجموعة تحتوي على أربع خلايا، أو مجموعة تحتوي على ثماني خلايا، أو مجموعة تحتوي على ست عشرة خلية.

$C \backslash AB$	00	01	11	10
00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	$\bar{A}\bar{B}CD$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$
01	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	$\bar{A}\bar{B}CD$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$
11	$AB\bar{C}\bar{D}$	$AB\bar{C}D$	$ABCD$	$AB\bar{C}\bar{D}$
10	$AB\bar{C}\bar{D}$	$AB\bar{C}D$	$AB\bar{C}D$	$AB\bar{C}\bar{D}$

الشكل 10.3: جدول كارنو بأربعة متحولات

المثال 13.3

أوجد التابع المنطقي المختصر والمحدد في جدول كارنو المبين في الشكل (11.3).

$C \backslash AB$	00	01	11	10
00	1			1
01	1			1
11		1	1	
10		1	1	

الشكل 11.3: جدول كارنو لتابع منطقي

الحل

نشكل مجموعتين تحتوي كل منها على أربع خلايا. تعطي المجموعة الأولى الجداء $(\bar{A}\bar{D})$ ، حيث اختصر المتحولان (B, C) لأن كلا منهما يتغير من (0) إلى (1). وتعطي المجموعة الثانية الجداء (AD) ، حيث اختصر المتحولان (B, C) لأن كلا منهما يتغير من (0) إلى (1).

بالتالي يكون التابع المنطقي بعد الاختصار وباستعمال مخطط كارنو $(X = \bar{A}\bar{D} + AD)$.

المثال 14.3

أوجد التابع المنطقي المختصر للتابع

$$(X = \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}\bar{D} + ABCD + AB\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}\bar{C}\bar{D})$$

باستعمال جدول كارنو.

الحل

نرسم جدول كارنو بأربعة متحولات كما هو مبين في الشكل (12.3).

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	1	
01	1			
11	1	1	1	1
10				1

الشكل 12.3: جدول كارنو للتابع المنطقي الخاص بالمثال 11.3

نشكل ثلاث مجموعات تحتوي كل منها على خليتين، ومجموعة مكونة من خلية واحدة.

بالتالي يكون التابع المنطقي بعد الاختصار وباستعمال مخطط كارنو ($X = \overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}D + ABD + \overline{A}\overline{B}C\overline{D}$)

(

المثال 15.3

أوجد التابع المنطقي المختصر للتابع المنطقي المعطى بجدول الحقيقة المبين في الشكل (13.3) باستعمال جدول كارنو.

Inputs (مداخل)	Output (مخرج)
A B C D	X
0 0 0 0	1
0 0 0 1	0
0 0 1 0	1
0 0 1 1	1
0 1 0 0	0
0 1 0 1	1
0 1 1 0	0
0 1 1 1	1
1 0 0 0	1
1 0 0 1	1
1 0 1 0	-

1 0 1 1	-
1 1 0 0	-
1 1 0 1	-
1 1 1 0	-
1 1 1 1	-

الشكل 13.3: جدول الحقيقة الخاص بالمثال 15.3

نشير هنا إلى أن المتحول المنطقي (-) يقال له لا يهم (Don't care).
الحل

نرسم جدول كارنو بأربعة متحولات كما هو مبين في الشكل (14.3).

C D A B	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1	0	1	1
0 1	0	1	1	0
1 1	-	-	-	-
1 0	1	1	-	-

الشكل 14.3: جدول كارنو للتابع المنطقي الخاص بالمثال 15.3

نشكل ثلاث مجموعات تحتوي كل منها على أربع خلايا، ومجموعة مكونة من ثماني خلايا.
بالتالي يكون التابع المنطقي بعد الاختصار وباستعمال مخطط كارنو ($X = A + BD + \overline{B}C + \overline{B}\overline{D}$).

6. خلاصة Summary

- القانون التبديلي (Commutative laws): $A + B = B + A$, $A \cdot B = B \cdot A$
- القانون التجميعي (Associative laws): $A + (B + C) = (A + B) + C$, $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- القانون التوزيعي (Distributive laws): $A(B + C) = AB + AC$
- القواعد البوليانية (Boolean rules):

1. $A + 0 = A$
2. $A + 1 = 1$
3. $A \cdot 0 = 0$
4. $A \cdot 1 = A$
5. $A + A = A$
6. $A + \bar{A} = 1$
7. $A \cdot A = A$
8. $A \cdot \bar{A} = 0$
9. $\bar{\bar{A}} = A$
10. $A + AB = A$
11. $A + \bar{A}B = A + B$
12. $(A + B)(A + C) = A + BC$

5. نظريات دمورغان (DeMorgan's theorems):

- (أ) متمم الجداء يساوي إلى مجموع متممات حدود الجداء أي: $\overline{XY} = \bar{X} + \bar{Y}$
- (ب) متمم المجموع يساوي إلى جداء متممات حدود المجموع أي: $\overline{X + Y} = \bar{X} \cdot \bar{Y}$

6. يبين الشكل (15.3) مخطط (جدول) كارنو بثلاثة وأربعة متحولات.

C \ A B	0	1
0 0		
0 1		
1 1		
1 0		

C D \ A B	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0				
0 1				
1 1				
1 0				

الشكل (15.3): مخطط (جدول) كارنو بثلاثة وأربعة متحولات.

أسئلة ومسابقات الفصل الثالث Questions and Problems

أسئلة الفصل الثالث

اختر الإجابة الصحيحة

1. يكون متمم المتحول عادة.

(a) 0

(b) 1

(c) مساوياً إلى المتحول

(d) عكس المتحول.

2. المعادلة البوليانية $(A + \overline{B} + C)$ هي

(a) مجموع حدود

(b) أحرف حدود

(c) جداءات حدود

(d) متمم حدود.

3. المعادلة البوليانية $(\overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D})$ هي

(a) مجموع حدود

(b) جداءات حدود

(c) أحرف حدود

(d) دائماً 1.

4. وفقاً للقانون التبديلي للجمع،

(a) $AB = BA$

(b) $A + A = A$

(c) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(d) $A + (B + C) = (A + B) + C$

5. وفقاً للقانون التجميعي للضرب،

$$B = B B \quad (a)$$

$$A (B C) = (A B) C \quad (b)$$

$$A + B = B + A \quad (c)$$

$$. B + B (B + 0) \quad (d)$$

6. وفقاً للقانون التوزيعي

$$A (B + C) = A B + A C \quad (a)$$

$$A (B C) = A B C \quad (b)$$

$$A (A + 1) = A \quad (c)$$

$$. A + A B = A \quad (d)$$

7. أي من القواعد التالية ليست قاعدة بوليانية صحيحة،

$$A + 1 = 1 \quad (a)$$

$$A = \overline{A} \quad (b)$$

$$A A = A \quad (c)$$

$$. A + 0 = A \quad (d)$$

8. أي من القواعد التالية تنص على أنه إذا كان أحد مداخل بوابة (AND) واحد دوماً يكون الخرج مساوياً إلى المدخل الثاني.

$$A + 1 = 1 \quad (a)$$

$$A + A = A \quad (b)$$

$$A A = A \quad (c)$$

$$. A \cdot 1 = A \quad (d)$$

9. وفقاً لنظرية دمورغان، أي واحدة من المساوات التالية صحيحة:

$$\overline{A B} = \overline{A} + \overline{B} \quad (a)$$

$$\overline{X Y Z} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z} \quad (b)$$

$$\overline{A + B + C} = \overline{A} \overline{B} \overline{C} \quad (c)$$

(d) كل ما ذكر.

10. مخطط كارنو بثلاثة متحولات له

(a) ثماني خلايا

(b) ثلاث خلايا

(c) ستة عشرة خلية

(d) أربع خلايا.

Ans 1 (d) ، 2 (a) ، 3 (b) ، 4 (b) ، 5 (b) ، 6 (a) ، 7 (b) ، 8 (d) ، 9 (d) ، 10 (a).

اسئلة الفصل الثالث	الإجابة الصحيحة
1	d
2	a
3	b
4	b
5	b
6	a
7	b
8	d
9	d
10	a

• العمليات البوليانية والتوابع المنطقية Boolean Operations and Expressions

1. أوجد ناتج العمليات التالية:

(a) $0 + 0 + 1$ (b) $1 + 1 + 1$ (c) $1 \cdot 0 \cdot 0$ (d) $1 \cdot 1 \cdot 1$ (e) $1 \cdot 0 \cdot 1$ (f) $1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 1$

Ans

2. أوجد قيم المتحولات التي تجعل كل جداء حدود مساوياً إلى الواحد، وكل مجموع حدود مساوياً إلى الصفر.

(a) AB (b) $A\bar{B}C$ (c) $A+B$ (d) $\bar{A}+B+\bar{C}$ (e) $\bar{A}+\bar{B}+C$
 (f) $\bar{A}+B$ (g) $A\bar{B}\bar{C}$

Ans

• قواعد وقوانين الجبر البولياني Laws and Rules of Boolean Algebra

3. حدد القانون البولياني الذي بمقتضاه وضعت كل من المساواة التالية.

(a) $A\bar{B}+CD+A\bar{C}D+B=B+A\bar{B}+A\bar{C}D+CD$
 (b) $AB\bar{C}D+\overline{ABC}=D\bar{C}BA+\overline{CBA}$
 (c) $AB(CD+E\bar{F}+GH)=ABC D+ABE\bar{F}+ABGH$

Ans

4. حدد القاعدة البوليانية التي بمقتضاها وضعت كل من المساواة التالية.

(a) $\overline{\overline{AB+CD}+\overline{EF}}=AB+CD+\overline{EF}$
 (b) $A\bar{A}B+AB\bar{C}+AB\bar{B}=B\bar{C}$
 (c) $A(BC+BC)+AC=A(BC)+AC$
 (d) $AB(C+\bar{C})+AC=AB+AC$
 (e) $A\bar{B}+A\bar{B}C=A\bar{B}$
 (f) $ABC+\overline{AB}+\overline{ABC}D=ABC+\overline{AB}+D$

Ans

• نظريات دومورغان DeMorgan's Theorems

5. استعمل نظريات دمورغان في تبسيط كل من المعادلات التالية:

$$\begin{array}{llll} (a) \overline{\overline{A+B}} & (b) \overline{\overline{AB}} & (c) \overline{\overline{A+B+C}} & (d) \overline{\overline{ABC}} \\ (e) \overline{\overline{A(B+C)}} & (f) \overline{\overline{AB+CD}} & (g) \overline{\overline{AB+CD}} & (h) \overline{\overline{(A+B)(C+D)}} \end{array}$$

Ans

6. استعمل نظريات دمورغان في تبسيط كل من المعادلات التالية:

$$\begin{array}{lll} (a) \overline{\overline{A \overline{B} (C+D)}} & (b) \overline{\overline{AB(CD+EF)}} & (c) \overline{\overline{A+B+C+D+ABCD}} \\ (d) \overline{\overline{A+B+C+D}(\overline{ABCD})} & (e) \overline{\overline{AB(CD+EF)(\overline{AB+CD})}} & \end{array}$$

Ans

7. باستعمال الجبر البولياني، بسط العلاقات المنطقية التالية:

$$\begin{array}{ll} (a) X = (A+\overline{B})(A+C) & (b) X = \overline{A}B + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BCD + \overline{A}B\overline{C}DE \\ (c) X = AB + \overline{A}BC + A & (d) X = (A+\overline{A})(AB+AB\overline{C}) \\ (e) X = AB + (\overline{A}+\overline{B})C + AB \end{array}$$

Ans

8. باستعمال الجبر البولياني، بسط العلاقات المنطقية التالية:

$$\begin{array}{ll} (a) X = BD + B(D+E) + \overline{D}(D+F) & (b) X = \overline{A}B\overline{C} + (\overline{A+B+C}) + \overline{A}B\overline{C}D \\ (c) X = (B+BC)(B+\overline{B}C)(B+D) & (d) X = ABCD + AB(\overline{CD}) + (\overline{AB})CD \\ (e) X = ABC[AB + \overline{C}(BC+AC)] \end{array}$$

Ans

• المعادلات البوليانية وجدول الحقيقة Boolean Expressions and Truth Tables

9. أوجد جدول الحقيقة الذي يمثل كلاً من المعادلات المنطقية (SOP).

$$\begin{array}{ll} (a) X = \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} & \\ (b) X = WXYZ + WXY\overline{Z} + \overline{W}XYZ + W\overline{X}YZ + WXY\overline{Z} & \end{array}$$

Ans

10. أوجد جدول الحقيقة الذي يمثل كلاً من المعادلات المنطقية (POS).

$$(a) X = (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})(A + B + C)(A + \bar{B} + C)$$

$$(b) X = (\bar{A} + B + \bar{C} + D)(A + \bar{B} + C + \bar{D})(A + \bar{B} + \bar{C} + D)(\bar{A} + B + C + \bar{D})$$

Ans

11. استنتج المعادلة المنطقية (SOP)، والمعادلة المنطقية (POS) الممثلتان في جدول الحقيقة المبين في الشكل (16.3).

A	B	C	D	X
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

الشكل (16.3) : جدول الحقيقة للمسألة (11.3).

Ans

12. أوجد المعادلات المنطقية (SOP) المختصرة للمعادلات المنطقية التالية، باستعمال جدول كارنو:

$$(a) X = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}C$$

$$(b) X = AC(\bar{B} + C)$$

$$(c) X = \bar{A}(BC + B\bar{C}) + A(BC + B\bar{C})$$

$$(d) X = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + AB\bar{C}$$

Ans

$$(a) X = \bar{A}\bar{B} + \bar{B}C$$

$$(b) X = AC$$

$$(c) X = B$$

$$(d) X = \bar{C}$$

13. أوجد المعادلات المنطقية (SOP) المختصرة للمعادلات المنطقية التالية، باستعمال جدول كارنو:

$$(a) X = A + \bar{B}\bar{C} + CD$$

$$(b) X = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + ABCD + ABC\bar{D}$$

$$(c) X = \bar{A}B(\bar{C}\bar{D} + \bar{C}D) + AB(\bar{C}\bar{D} + \bar{C}D) + A\bar{B}\bar{C}D$$

$$(d) X = (\bar{A}\bar{B} + A\bar{B})(CD + C\bar{D})$$

$$(e) X = \bar{A}\bar{B} + A\bar{B} + \bar{C}\bar{D} + C\bar{D}$$

Ans

$$(a) X = A + \bar{B}\bar{C} + CD$$

$$(b) X = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + ABC$$

$$(c) X = B\bar{C} + A\bar{C}D$$

$$(d) X = \bar{B}C$$

$$(e) X = \bar{B} + \bar{D}$$

14. استنتج المعادلة المنطقية (SOP) المختصرة، باستعمال جدول كارنو للتابع المنطقي المعرف بجدول الحقيقة

المعطى في الشكل (14.3):

A	B	C	X
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

الشكل (17.3): جدول الحقيقة للمسألة (14.3).

Ans. $X = \bar{B} + C$

15. استنتج المعادلة المنطقية (SOP) المختصرة، باستعمال جدول كارنو للتابع المنطقي المعرف بجدول الحقيقة المعطى في الشكل (15.3):

A	B	C	D	X
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

الشكل (18.3): جدول الحقيقة للمسألة (15.3).

Ans. $X = \overline{A}\overline{C}\overline{D} + ABD + \overline{A}BC + \overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D}$

نموذج مذاكرة للفصل الثالث

كلية

الجامعة

المادة: الإلكترونيات الرقمية Digital Electronics نموذج امتحان للفصل الثالث: الجبر البوليني وتبسيط التتابع المنطقية

أستاذ المادة:

العلامة: 10

المدة: ساعة واحدة

ملاحظات هامة:

- المادة مغلقة
- يسمح باستعمال الآلات الحاسبة

اختر الإجابة الصحيحة (10 علامات)

1. يكتب القانون التجميعي كما يلي

$$A + B = B + A \quad (a)$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad (b)$$

$$AB = BA \quad (c)$$

$$A + AB = A \quad (d)$$

2. توضح المعادلة المنطقية $(AB + AC = A(B + C))$

(a) القانون التوزيعي

(b) القانون التبديلي

(c) القانون التجميعي

(d) نظرية دمورغان.

3. المعادلة المنطقية $(A \cdot 1)$ تساوي إلى

(a) A

(b) B

(c) 0

(d) 1.

4. المعادلة المنطقية $(A + 1)$ تساوي إلى

(a) A

(b) B

(c) 0

(d) 1

5. توضح المعادلة المنطقية $\overline{AB + AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$

(a) القانون التوزيعي

(b) القانون التبديلي

(c) القانون التجميعي

(d) نظرية دمورغان.

6. تختلف الخلايا المتجاورة في جدول كارنو فيما بينها

(a) بمتحول واحد

(b) بمتحولين

(c) بثلاثة متحولات

(d) يرتبط الجواب بحجم الجدول.

7. المعادلة المنطقية المختصرة التي يعطيها جدول كارنو التالي هي:

C $A \ B$	0	1
0 0		
0 1		
1 1	1	1
1 0	1	1

(a) $X = A$

(b) $X = \overline{A}$

(c) $X = B$

(d) $X = \overline{B}$

8. يبلغ عدد خلايا جدول كارنو بثلاثة متحولات،

- (a) خليتان
- (b) أربع خلايا
- (c) ثماني خلايا
- (d) ست عشرة خلية.

9. يبلغ عدد خلايا جدول كارنو بأربع متحولات،

- (a) خليتان
- (b) أربع خلايا
- (c) ثماني خلايا
- (d) ست عشرة خلية.

10. المعادلة المنطقية المختصرة التي يعطيها جدول كارنو التالي هي:

(a) $X = AB + AD + BD$

(b) $X = A\bar{B} + AD + \bar{B}\bar{D}$

(c) $X = \bar{A}B + AD + \bar{B}\bar{D}$

(d) $X = A\bar{B} + AD + \bar{B}\bar{D}$

$\begin{matrix} C D \\ A B \end{matrix}$	0 0	0 1	1 1	1 0
0 0	1			1
0 1				
1 1		1	1	
1 0	1	1	1	1

الإجابة الصحيحة لنموذج مذاكرة الفصل الثالث

1 (b)، 2 (a)، 3 (a)، 4 (d)، 5 (d)، 6 (a)، 7 (a)، 8 (c)، 9 (d)، 10 (b).

التغذية الراجعة

- 1 مراجعة العمليات البوليانية والتوابع المنطقية Boolean Operations and Expressions & قوانين الجبر البولياني Laws and Rules of Boolean Algebra
- 2 مراجعة العمليات البوليانية والتوابع المنطقية Boolean Operations and Expressions & قوانين الجبر البولياني Laws and Rules of Boolean Algebra
- 3 مراجعة العمليات البوليانية والتوابع المنطقية Boolean Operations and Expressions & قوانين الجبر البولياني Laws and Rules of Boolean Algebra
- 4 مراجعة العمليات البوليانية والتوابع المنطقية Boolean Operations and Expressions & قوانين الجبر البولياني Laws and Rules of Boolean Algebra
- 5 مراجعة العمليات البوليانية والتوابع المنطقية Boolean Operations and Expressions & قوانين الجبر البولياني Laws and Rules of Boolean Algebra
- 6 مراجعة جداول كارنو The Karnaugh Maps
- 7 مراجعة العلاقات البوليانية وجداول الحقيقة Boolean Expressions and Truth Tables & جداول كارنو The Karnaugh Maps
- 8 مراجعة جداول كارنو The Karnaugh Maps
- 9 مراجعة جداول كارنو The Karnaugh Maps
- 10 مراجعة العلاقات البوليانية وجداول الحقيقة Boolean Expressions and Truth Tables & جداول كارنو The Karnaugh Maps

علامة النجاح بالمذاكرة هي: 6/10

نهاية الفصل الثالث

الإجابة الصحيحة	نموذج مذاكرة الفصل الثالث
b	1
a	2
a	3
d	4
d	5
a	6
a	7
c	8
d	9
b	10