الفصل الثالث: المتتاليات الحقيقية
Real Sequences

الصفحة	العنوان
3	**1. تعريف المتتالية الحقيقية**
5	1.1.المتتالية الحسابية
8	1.2.نظريات المتتاليات
6	**2. نهاية متتالية**
9	**3. المتتاليات المحدودة والمطّردة**
11	**4. نهاية الحدود العليا ونهاية الحدود الدنيا لمتتالية**

الكلمات المفتاحية:

المتتالية الحقيقية، المتتالية الحسابية، المتتالية الهندسية، نهاية متتالية، تقارب متتالية، تباعد متتالية، المتتالية المطّردة، المتتالية المتناقصة، المتتالية المتزايدة، المتتالية المحدودة، خاصية كوشي للمتتاليات.

الملخص:

يقدّم هذا الفصل المتتاليات العددية التي تعرّف كتوابع من مجموعة الأعداد الطبيعية إلى مجموعة الأعداد الحقيقية. سيتم تعريف المتتاليات الحقيقية والحسابية والهندسية. يعرض مفهوم نهاية متتالية التي تكون متقاربة إذا انتهت إلى عدد حقيقي وإلا تكون متباعدة. تقدّم نظريات خصائص المتتاليات التي تساعد لحساب نهايات المتتاليات. تعرّف المتتاليات المتزايدة والمتناقصة والمطّردة وتبين نظرية أن المتتالية المطّردة تتقارب إذا كانت محدودة

الأهداف التعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- تعريف المتتالية الحقيقية
- المتتالية الحسابية
- المتتالية الهندسية
- نهاية متتالية
- نظرية المتتاليات
- المتتاليات المحدودة والمطردة
- نهاية الحدود العليا ونهاية الحدود الدنيا لمتتالية

مقدمة

ستقدم النقاط التالية في هذا الفصل:

- تعريف المتتالية الحقيقية
- المتتالية الحسابية
- المتتالية الهندسية
- نهاية متتالية
- نظرية المتتاليات
- المتتاليات المحدودة والمطردة
- نهاية الحدود العليا ونهاية الحدود الدنيا لمتتالية

1. تعريف المتتالية الحقيقية

نسمّي متتالية حقيقية كل تابع منطلقه مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ (أو $\mathbb{Z}^+$) ومستقره حقل الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
نرمز عادة إلى متتالية بالرمز $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ونسمي u_n (أي صورة العدد n وفق هذا التطبيق) الحد العام للمتتالية.

تعريف المتتالية الجزئية

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية. نسمي متتالية جزئية من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ كل متتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حدّها العام v_n يساوي $u_{\varphi(n)}$ حيث φ تطبيق متزايد تماماً من $\mathbb{N}$ إلى $\mathbb{N}$.

ملاحظة:

لايجوز الخلط بين متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ومجموعة قيمها $\{u_n : n\in\mathbb{N}\}$. فمثلاً للمتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث $u_n=(-1)^n$ و $v_n=(-1)^{n(n+1)/2}$ مجموعة القيم نفسها $\{-1,+1\}$ ولكنهما مختلفتان لأنّ $u_2\neq v_2$.
سنستخدم الأقواس العادية ( ) للإشارة للمتتالية والأقواس المعترضة { } للإشارة لمجموعة القيم.

مثال:

مجموعة الأعداد $2,7,12,,17,\dots,32,\dots$ تشكل متتالية حقيقية حدها العام يعطى بالعلاقة
$u_n=2+5(n-1)=5n-3$

مثال:

5. تشكل الأعداد $1,3,5,7,9,1,\ldots$ متتالية الأعداد الطبيعية المفردة وحدها العام هو $u_n = 2n+1, n \in \mathbb{Z}^+$.

6. تشكل الأعداد $1,3,-5,-7,9,11,-13,-15,\ldots$ متتالية حدّها العام هو $u_n = (-1)^{\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]}(2n+1), n \in \mathbb{Z}^+$.

7. تشكل الأعداد $1,\left(-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{3}\right),\left(-\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{5}\right),\ldots$ متتالية حدّها العام هو $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, n \in \mathbb{N}$.

8. المتتالية $s_n = \frac{1}{n^2}$ أي هي المتتالية التي تشكلها الأعداد $\left(1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\frac{1}{25},\ldots\right)$. أي هي التابع من مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ومقابل كل عدد طبيعي n نجد $\frac{1}{n^2}$.

9. المتتالية $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{Z}^+ (n \geq 0)$. نلاحظ أنّ الحد الأول لهذه المتتالية هو $a_0 = 1$ والمتتالية هي $(1,-1,1,-1,1,-1,1,\ldots)$. هذه المتتالية هي التابع الذي منطلقه مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة $\{0,1,2,3,4,5,\ldots\}$ ومستقرّه المجموعة $\{-1,1\}$.

10. المتتالية $\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right), n \in \mathbb{N}$. الحد الأول من هذه المتتالية هو $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(60^\circ\right) = \frac{1}{2}$ والمتتالية $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1,\ldots\right)$.

11. المتتالية $a_n = \sqrt[n]{n}, n \in \mathbb{N}$ أي هي $\left(1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\sqrt[4]{4},\sqrt[5]{5},\ldots\right)$ وعند تقريب هذه الأعداد إلى أربعة أرقام بعد الفاصلة نجد $(1,1.4142,1.4422,1.4142,1.3797,1.3480,1.3205,1.2968,\ldots)$ ونجد أن الحد $a_{100} = 1.0471$ والحد $a_{1000} = 1.0069$.

12. المتتالية $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}$ أي هي $\left(2,\left(\frac{3}{2}\right)^2,\left(\frac{4}{3}\right)^3,\left(\frac{5}{4}\right)^4,\ldots\right)$ أو بالتقريب لأربع أرقام بعد الفاصلة نجد $(2,2.25,2.3704,2.4414,2.4883,2.5216,2.5465,2.5658,\ldots)$ ونجد أنّ $b_{100} \approx 2.7048, b_{1000} = 2.7169$.

تمرين:

أوجد الحد العام للمتتالية التي تشكّل الأعداد $-1,-3,5,7,-9,-11,13,15,\dots$ ؟

الجواب:

الحد العام هو $u_n = (-1)^{\left(\frac{n(n+1)}{n}\right)}(2n-1), n \in \mathbb{Z}^+$.

تمرين:

أوجد الحد العام للمتتالية التي تشكّل الأعداد $\left(\frac{3}{1}\right),\left(\frac{1}{2}\right),\left(\frac{3}{3}\right),\left(\frac{1}{4}\right),\left(\frac{3}{5}\right),\left(\frac{1}{6}\right),\left(\frac{3}{7}\right),\dots$ ؟

الجواب:

الحد العام هو $u_n = \frac{\left(2+(-1)^{n-1}\right)}{n}, n \in \mathbb{N}$.

تمرين:

أوجد الحد العام للمتتالية التي تشكّل الأعداد $\left(\frac{1}{2}\right),\left(\frac{3}{3}\right),\left(\frac{1}{4}\right),\left(\frac{3}{5}\right),\left(\frac{1}{6}\right),\left(\frac{3}{7}\right),\dots$ ؟

الجواب:

الحد العام هو $u_n = \frac{\left(2+(-1)^{n-1}\right)}{n}, n \geq 2$.

1.1. المتتالية الحسابية

تسمى المتتالية حسابية التي حدّها العام من الشكل $u_n = u_n + r, n \in \mathbb{Z}^+$ حيث r ثابت ويمكن كتابتها بالشكل $u_n = u_0 + nr, n \in \mathbb{Z}^+$.

مثال:

المتتالية $2,5,8,11,\dots$ متتالية حسابية حدّها الأول $u_0 = 2$ واساسها العدد 3.

2.1. المتتالية الهندسية

تسمى المتتالية هندسية التي حدّها العام من الشكل $u_{n+1}=u_n\times q, n\in\mathbb{Z}^+$ حيث q ثابت ويمكن كتابتها بالشكل $u_n=u_0\cdot(q)^n, n\in\mathbb{Z}^+$.

مثال:

تشكّل الأعداد $2,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots$ متتالية هندسية حدّها الأول $u_0=2$ واساسها العدد $q=-\frac{1}{2}$

2. نهاية متتالية

يمكن القول بأنّ نهاية متتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بأنّه العدد الحقيقي الذي تكون القيم u_n قريبة منه من أجل قيم n كبيرة. فنجد أنّ $\left(u_n=\frac{1}{n^2}\right)$ تصبح قريبة من 0 والمتتالية $u_n=\sqrt[n]{n}$ تصبح قريبة من 1 من اجل قيم n كبيرة. بينما الوضع يختلف بالنسبة للمتتالية $(-1)^n$ فنجد أن النهاية هي 1 من اجل قيم n أعداد زوجية ونجد أنّ النهاية هي -1 من اجل n أعداد فردية لذلك سنرى بأنّ هذه المتتالية ليس لها نهاية.

تعريف:

نقول بأنّ المتتالية الحقيقية (u_n) تتقارب من العدد الحقيقي l بحيث:

$$\forall\varepsilon>0,\exists N, n>N \Rightarrow |u_n-l|<\varepsilon$$

إذا كانت (u_n) تتقارب من l نكتب $\lim_{n\to\infty} u_n=l$ أو $u_n\to l$. ندعو العدد الحقيقي l نهاية المتتالية (u_n).
تكون المتتالية التي لا تتقارب إلى عدد حقيقي متباعدة. تكون N مرتبطة باختيار ε وتزداد قيمة N كلما صغرت قيمة ε.

مبرهنة:

عندما تكون النهاية موجودة لمتتالية حقيقية فهي وحيدة أي إذا كان لدينا $\lim_{n\to\infty} u_n=l_1$ و $\lim_{n\to\infty} u_n=l_2$ فيجب أن يكون $l_1=l_2$. أي أنّه لايمكن ان تتقارب متتالية (u_n) إلى قيمتين مختلفتين من أجل قيم n كبيرة.

مثال:

المتتالية $u_n=\frac{3n+1}{7n-4}$ نجد انّه يمكن كتابتها على الشكل $u_n=\frac{3+\frac{1}{n}}{7-\frac{4}{n}}$ وعندما تكون قيم n كبيرة فإنّ $\frac{1}{n}$ و $\frac{4}{n}$ تصبح صغيرة ويمكن اهمالها أي أنّ $\lim_{n\to\infty}u_n=\frac{3}{7}$. من نظريات المتتاليات التي ستعرض في الفقرة التالية نجد:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3+\frac{1}{n}}{7-\frac{4}{n}}\right)=\frac{\lim_{n\to\infty}3+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}7-4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{3+0}{7-4\times 0}=\frac{3}{7}$$

أو بالعودة إلى تعريف النهاية من أجل أي عدد $\varepsilon>0$ يجب أن نحدد قيم n ليتحقق لدينا $\left|\frac{3n+1}{7n-4}-\frac{3}{7}\right|<\varepsilon$.

أي أنّ $\left|\frac{21n+7-21n+12}{7(4n-4)}\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{19}{7(4n-4)}\right|<\varepsilon$ وبما أنّ $7n-4>0$ فيمكن ازالة القيمة المطلقة وحل المتراجحة من أجل n فنجد $\frac{19}{7\varepsilon}<7n-4\Rightarrow\frac{19}{7\varepsilon}+4<7n\Rightarrow\frac{19}{49\varepsilon}+\frac{4}{7}<n$

لنختار $N=\frac{19}{49\varepsilon}+\frac{4}{7}$ فعندها نجد أنذ من أجل:

$$n>N\Rightarrow n>\frac{19}{49\varepsilon}+\frac{4}{7}\Rightarrow 7n>\frac{19}{7\varepsilon}+4\Rightarrow 7n-4>\frac{19}{7\varepsilon}\Rightarrow\frac{19}{7(7n-4)}<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{3n+1}{7n-4}-\frac{3}{7}\right|<\varepsilon$$

وهذا يثبت أنّ نهاية المتتالية $\frac{3n+1}{7n-4}$ هي $\frac{3}{7}$.

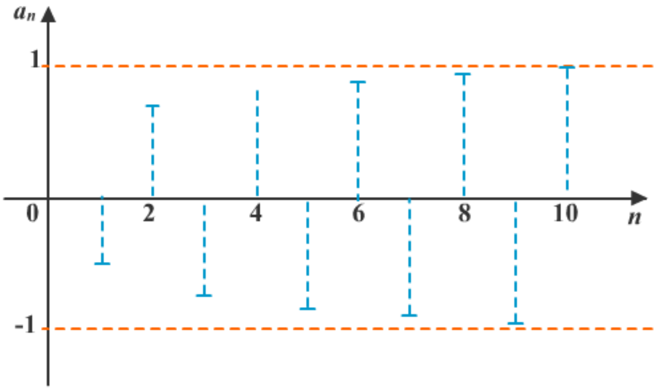
مثال:

1. المتتالية $u_n=\frac{1}{n^2}$ منتهية ونهايتها 0.
2. نهاية المتتالية $(-1)^n$ غير موجودة.
3. نهاية المتتالية $\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ غير موجودة.
4. نهاية المتتالية $n^{1/n}$ هي 1.
5. نهاية المتتالية $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ هو العدد النيبري $e\approx 2.7182818$.
6. نهاية المتتالية $\left(e^{1/n}-1\right)n$ هو العدد 1.

مثال:

لتكن لدينا المتتالية $a_n=(-1)^n \cdot n/(n+1)$ هذه المتتالية ليس لها نهاية. لأن قيمها تتأرجح بين -1 و $+1$ عندما $n\to\infty$.

n	$a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$
1	$-\frac{1}{2}$
2	$+\frac{2}{3}$
3	$-\frac{3}{4}$
4	$+\frac{4}{5}$
5	$-\frac{5}{6}$
⋮	⋮



1.2. نظريات المتتاليات

لتكن لدينا المتتاليتين الحقيقيتين (a_n) و (b_n) حيث $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A, \lim\limits_{n\to\infty} b_n=B$ فإننا نجد:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)+\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)=A+B$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)-\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)=A-B$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)=A\cdot B$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)}=\dfrac{A}{B}, B\neq 0$

- إذا كانت $B=0$ و $A\neq 0$ فالنهاية $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ غير موجودة.
- إذا كانت $B=0$ و $A=0$ فالنهاية $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ قد تكون موجودة وقد تكون غير موجودة.

5. $\forall p\in\mathbb{R}, \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^p=\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right)^p=A^p$ عندما تكون A^p موجودة.
6. $\forall p\in\mathbb{R}, \lim\limits_{n\to\infty}\left(p^{a_n}\right)=p^{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)}=p^A$ عندما تكون p^A موجودة.

اللانهاية

1. تكون $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ إذا كان من أجل أي عدد موجب M يمكن أن نجد عدد موجب N (يتعلق بـ M) حيث $\forall n > N, a_n > M$.
2. بشكل مشابه نكتب $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ إذا كان من أجل أي عدد M يمكن أن نجد عدد موجب N (يتعلق بـ M) حيث $\forall n > N, a_n < -M$.
3. نذكر بأنّ $\{+\infty, -\infty\}$ ليسا عددين حقيقيين ولذلك نقول في الحالتين السابقتين أن المتتالية غير متقاربة أو أن المتتالية متباعدة والنهاية غير موجودة في مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال:

ماهي نهاية المتتالية $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n}{2n-1}$؟

يمكن كتابة المتتالية بالشكل التالي:

$$\frac{3n^2+4n}{2n-1} > \frac{3n^2}{2n} = \frac{3n}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

وبالتالي نجد $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n}{2n-1} = \infty$.

مثال:

1. نهاية المتتالية n^2 هو اللانهاية ∞ ونقول عن هذه المتتالية أنها متباعدة.
2. نهاية المتتالية $2^n / n^2$ هو اللانهاية ∞ ونقول عن هذه المتتالية أنها متباعدة.

3. المتتاليات المحدودة والمطّردة

1. نقول عن المتتالية الحقيقية (u_n) أنها محدودة من الأعلى إذا وجد عنصر $M \in \mathbb{R}$ راجح على مجموعة قيمها $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \le M$ حيث M عدد ثابت لايتعلق بـ n ويدعى M حد أعلى للمتتالية (u_n).
2. نقول عن المتتالية الحقيقية (u_n) أنها محدودة من الأدنى إذا وجد عنصر $m \in \mathbb{R}$ قاصر عن مجموعة قيمها $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \ge m$ حيث m عدد ثابت لايتعلق بـ n ويدعى m حد أدنى للمتتالية (u_n).
3. نقول عن المتتالية الحقيقية (u_n) أنها محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأدنى $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m, M : m \le u_n \le M$. تكون كل متتالية متقاربة محدودة ولكن العكس ليس صحيحاً.
4. نقول عن المتتالية الحقيقية (u_n) أنها متزايدة إذا كان $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \ge u_n$ وتكون متزايدة تماماً إذا كان $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$.

5. نقول عن المتتالية الحقيقية (u_n) أنها متناقصة إذا كان $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$ وتكون متناقصة تماماً إذا كان $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$. أو نقول عن المتتالية الحقيقية (u_n) أنها متناقصة (أو متناقصة تماماً) إذا كانت المتتالية $(-u_n)$ متزايدة (أو متزايدة تماماً).
6. نقول عن المتتالية u_n أنها مطردة إذا كانت متزايدة أو متناقصة.

مثال:

1. المتتالية $(1, 1.1, 1.11, 1.111, 1.1111, \ldots)$ محدودة ومتزايدة تماماً.
2. المتتالية $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$ محدودة ولكن ليست مطردة.
3. المتتالية $(-1, -1.5, -2, -2.5, -3, \ldots)$ متناقصة ومحدودة من الأعلى فقط وليست محدودة.
4. المتتالية $u_n = \frac{1}{n}$ متناقصة تماماً.

نظرية:

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية مطرّدة (متزايدة أو متناقصة). تكون $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة إذا وفقط إذا كانت محدودة. وفي هذه الحالة تكون نهايتها $\sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ إذا كانت متزايدة ونهايتها $\inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ إذا كانت متناقصة. أمّا إذا كانت المتتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى فإنّ $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ وإذا كانت متناقصة وغير محدودة من الأدنى فإنّ $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

نتيجة:

لكل متتالية مطّردة من $\overline{\mathbb{R}}$ نهاية في $\overline{\mathbb{R}}$.

تمرين:

هل المتتالية التي حدها العام هو $u_n = \frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$ متقاربة؟

الجواب:

يمكن برهان أن هذه المتتالية متقاربة إذا استطعنا اثبات أنها محدودة وأنها مضطردة.

لنأخذ الحد $u_{n+1} = \frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$ ومنه نجد:

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}>0$$

أي أنّ المتتالية متزايدة تماماً ولدينا أيضاً أن هذه المتتالية محدودة من الأعلى:

$$u_n = \frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}<n\times\frac{1}{n+1}<1$$

وهي محدودة من الاسفل: $u_n = \frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}>0$

فهي متقاربة.

تمرين:

هل المتتالية التالية متقاربة: $u_n = \frac{\left[1+n+(-1)^n\times n\right]}{n};n\in\mathbb{N}$ ؟

الجواب:

نلاحظ أنّه من أجل n فردية النهاية 0 ومن أجل n زوجية النهاية 2 أي ان النهاية غير موجودة.

4. نهاية الحدود العليا ونهاية الحدود الدنيا لمتتالية

تعريف:

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية ولنعرّف إنطلاقاً منها المتتاليتين $(a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\overline{\mathbb{R}}$ على النحو التالي:

$$a_n = \sup\{u_k : k\geq n\}\in\overline{\mathbb{R}}$$
$$b_n = \inf\{u_k : k\geq n\}\in\overline{\mathbb{R}}$$

نلاحظ أنّ المتتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة وأنّ المتتالية $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متزايدة. يوجد عنصران $\Omega,\omega\in\overline{\mathbb{R}}$ بحيث:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \Omega, \lim_{n\to\infty} b_n = \omega$$

نسمي ω نهاية الحدود الدنيا للمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ونرمز لها بالرمز $\liminf_{n\to\infty} u_n$ أو $\underline{\lim}$.

نسمي Ω نهاية الحدود العليا للمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ونرمز لها بالرمز $\limsup_{n\to\infty} u_n$ أو $\overline{\lim}$.

مثال:

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية التي حدها العام $u_n=(-1)^n$ نلاحظ أنّ

$$\limsup_{n\to\infty} u_n=1, \liminf_{n\to\infty} u_n=-1$$

علماً أنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متباعدة.

ملاحظة:

تكون نهاية الحدود الدنيا ونهاية الحدود العليا لأي متتالية حقيقية موجودتين في مجموعة الأعداد الحقيقية الموسّعة $\overline{\mathbb{R}}$ وذلك بغض النظر عن تقارب تلك المتتالية أو تباعدها.

مبرهنة:

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية ولتكن $\liminf_{n\to\infty} u_n=\omega$ نهاية الحدود الدنيا و $\limsup_{n\to\infty} u_n=\Omega$ نهاية الحدود العليا فيكون لدينا:

1. إذا كانت $(u_{\nu(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية جزئية من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ وتسعى هذه المتتالية الجزئية نحو $a\in\overline{\mathbb{R}}$ فإنّ $\omega\le a\le\Omega$.
2. توجد متتالية جزئية $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث تكون نهايتها $\lim_{n\to\infty} u_{\varphi(n)}=\omega$.
3. توجد متتالية جزئية $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ من $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث تكون نهايتها $\lim_{n\to\infty} u_{\psi(n)}=\Omega$.

ملاحظة:

إذا كانت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية يكون لدينا عندئذ $\liminf_{n\to\infty} u_n=-\limsup_{n\to\infty}(-u_n)$ و

$\limsup_{n\to\infty} u_n=-\liminf_{n\to\infty}(-u_n)$.

نتيجة:

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية عندئذ $\liminf_{n\to\infty} u_n\le\limsup_{n\to\infty} u_n$ وتتحقق المساواة إذا وفقط إذا تقاربت $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إلى عنصر من $\overline{\mathbb{R}}$ ويكون لدينا في هذه الحالة $\liminf_{n\to\infty} u_n=\limsup_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty} u_n$.

مبرهنة Bolzano Weir Strauss:

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية محدودة. يوجد تطبيق متزايد تماماً $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ بحيث تكون المتتالية الجزئية $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة.

ملاحظة:

لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حقيقية ولنعرّف $\sigma_n=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ أياً كانت $n\in\mathbb{N}$ فإذا سعت المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ إلى $a\in\overline{\mathbb{R}}$ فإنّ $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=a$. ولكن العكس ليس صحيحاً كما تبين المتتالية التي حدها العام $(-1)^n$.

المجالات المتداخلة

لنأخذ مجموعة من المجالات $[a_n,b_n],n=1,2,3,\ldots$ بحيث كل مجال محتوى في المجال السابق و $\lim(a_n-b_n)=0$. تدعى هذه المجالات بالمجالات المتداخلة. عندئذ يوجد عدد حقيقي واحد ينتمي إلى جميع هذه المجالات.

خاصية تقارب كوشي

إنّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة إذا وفقط إذا من أجل أي عدد $\forall\varepsilon>0$ يمكن أن نجد عدد N بحيث $|u_q-u_p|<\varepsilon$ لكل $p,q>N$. تفيد هذه الخاصية بأننا لانحتاج لمعرفة النهاية لبرهان التقارب.

أي أنّ المسافة بين أي حدين من المتتالية ترتيبهما أكبر من N تكون أصغر من ε ويمكن أخذ $p=n,q=n+q$ فيصبح الشرط $\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N,\forall q\in\mathbb{N},|u_{n+q}-u_n|<\varepsilon$.

مثال:

هل المتتالية التي حدّها العام $u_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\cdots\dfrac{1}{2^n}$ متقاربة؟

الجواب:

لدينا $u_{n+q}-u_n=\dfrac{1}{2^{n+1}}+\dfrac{1}{2^{n+2}}+\cdots\dfrac{1}{2^{n+q}}\le q\times\dfrac{1}{2^{n+1}}$ لنأخذ N الذي يحقق العلاقة:

$$2^{N+1}>\frac{q}{\varepsilon}\Rightarrow\frac{q}{2^{N+1}}<\varepsilon\Rightarrow N>\frac{\log q-\log\varepsilon-\log 2}{\log 2}$$

أي أنّ لدينا: $\forall\varepsilon>0,\exists N>\dfrac{\log q-\log\varepsilon-\log 2}{\log 2},\forall n>N,q\in\mathbb{N},|u_{n+q}-u_n|<\varepsilon$

والمتتالية متقاربة حسب تقارب كوشي.

مذاكرة المتتاليات الحقيقية

العلامة العظمى: 100 علامة النجاح: 50 المدة: ساعة ونصف

لكل سؤال خمس علامات

اختر الإجابة الصحيحة للأسئلة التالية:

4. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ؟

a) 0

b) $\frac{1}{2}$

c) غير موجودة

d) 1

مساعدة: راجع فقرة نهاية متتالية.

5. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ؟

a) 0

b) $\frac{2}{3}$

c) غير موجودة

d) 1

مساعدة: راجع فقرة نهاية متتالية.

6. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{1-2n}\right)$ ؟

a) $-\frac{1}{2}$

b) 0

c) غير موجودة

d) 1

مساعدة: راجع فقرة نهاية متتالية.

7. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)$ ؟

a) $-\frac{1}{2}$
b) 0
c) غير موجودة
d) 1

مساعدة: راجع فقرة نهاية متتالية.

8. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n^2+3}\right)$ ؟

a) $\frac{2}{3}$
b) 0
c) غير موجودة
d) 1

مساعدة: راجع فقرة نهاية متتالية.

9. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n^5+n}{3n^5+1}\right)$ ؟

a) 6
b) 2
c) 0
d) ∞

مساعدة: راجع فقرة نهاية متتالية.

10. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin 2n}{\sqrt{n}}$ ؟

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
b) 0
c) 2
d) 1

مساعدة: راجع فقرة نظريات المتتاليات.

11. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 2n}{\ln n}$ ؟

a) 2
b) 1
c) 0
d) ∞

مساعدة: راجع فقرة نظريات المتتاليات.

12. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}7^{\frac{3}{n}}$ ؟

a) 0
b) 1
c) 7
d) ∞

مساعدة: راجع فقرة نظريات المتتاليات.

13. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n^3}$ ؟

a) $\sqrt{5}$
b) 1
c) 0
d) ∞

مساعدة: راجع فقرة نظريات المتتاليات.

14. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{1+2e^n}$ ؟

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{2}$
c) 0
d) 1

مساعدة: راجع فقرة نظريات المتتاليات.

15. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\dfrac{e^{2n}}{\left(1+2e^{n}\right)^{2}}$ ؟

a) $\dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{1}{4}$

c) 0

d) 1

مساعدة: راجع فقرة نظريات المتتاليات.

16. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty} n\sin\dfrac{\pi}{2n}$ ؟

a) $\dfrac{\pi}{4}$

b) $\dfrac{1}{2}$

c) 0

d) $\dfrac{\pi}{2}$

مساعدة: راجع فقرة نظريات المتتاليات.

17. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{e^{n}+1}{e^{n}-1}\right)$ ؟

a) 1

b) 2

c) 0

d) $\dfrac{1}{2}$

مساعدة: أخذ لوغاريتم المتتالية ومنه يتم الحصول على النهاية. راجع فقرة نظرية المتتاليات.

18. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n}}$ ؟

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

b) 2

c) $\sqrt{2}$

d) 0

مساعدة: راجع فقرة نظريات المتتاليات.

19. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ ؟

a) ∞
b) $\frac{3}{2}$
c) 1
d) 0

مساعدة: راجع فقرة نظريات المتتاليات.

20. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ ؟

a) e^x
b) e
c) e^{-x}
d) e^{-1}

مساعدة: راجع فقرة نظريات المتتاليات.

21. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$ ؟

a) 1
b) e
c) e^2
d) e^{-1}

مساعدة: راجع فقرة نظريات المتتاليات.

22. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n$ ؟

a) 1
b) e
c) e^2
d) $e^{\frac{3}{2}}$

مساعدة: راجع فقرة نظريات المتتاليات.

23. ماهي نهاية المتتالية التالية $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+3}\right)^n$ ؟

a) e

b) e^{-3}

c) e^{3}

d) e^{-1}

مساعدة: راجع فقرة نظريات المتتاليات.

الإجابات الصحيحة

الإجابة الصحيحة	السؤال
الخيار الأول	1
الخيار الأول	2
الخيار الأول	3
الخيار الثالث	4
الخيار الثاني	5
الخيار الثاني	6
الخيار الثاني	7
الخيار الثاني	8
الخيار الثاني	9
الخيار الثاني	10
الخيار الثاني	11
الخيار الثاني	12
الخيار الرابع	13
الخيار الثالث	14
الخيار الثالث	15
الخيار الأول	16
الخيار الأول	17
الخيار الأول	18
الخيار الثاني	19
الخيار الثاني	20