مسألة التدفق أو الجريان الأعظمي ذو الكلفة الدنيا في بيان موجه(Minimum-cost flow problem)

لنعتبر البيان الموجة $D=(V,A)$ المؤلف من مجموعة العقد V و من مجموعة الأقواس A حيث أن كل قوس (i,j) مزود بقيمتين حقيقيتيين موجبتين تدعى الأولى بسعة القوس والثانية بكلفة القوس. لنفترض أن $n=|V|$ و $m=|A|$ و لنرمز بـ d_k و بـ c_k لسعة القوس ولكلفة القوس $k=(i,j)\in A$ على التوالي وكذلك تدعى i بذيل القوس k و تدعى أيضاً j برأس القوس k. نرمز لعقدة المنبع في البيان الموجه (1) بـ (s) و لعقدة المصب في البيان الموجه بـ (t)،

مسألة التدفق الأعظمي ذو الكلفة الدنيا هي عبارة عن إيجاد التدفق الأعظمي x من المنبع s الى المصب t بأقل كلفة ممكنة $z=\sum_{k\in A} c_k x_k$.

سندخل قوس صنعي (t,s) ذاهباً من المصب t إلى المنبع s و ذو سعة $d_{ts}=\infty$ و تكلفة $c_{ts}=0$.

يجب على أي تدفق x ممكن في البيان الموجه أن يحقق الشروط التالية:

$x_{ij}\le d_{ij}\quad \forall (i,j)\in A$ (قيود سعة التدفق على الأقواس),

$x_{ij}=-x_{ji}\quad \forall (i,j)\in A$ (قيود تناظر التدفق على الأقواس)

$\sum_{j\in V} x_{ij}=0\quad \forall i\in V\setminus\{s,t\}$ (قيود انحفاظ التدفق على الأقواس في العقد).

يدعى التدفق x الأعظمي ذو الكلفة الدنيا في الشبكة بـــ x_{ts} وكلفته z

بيان البواقي

ليكن x متجهة تدفق في البيان الموجه $D=(V,A)$، نعرف بيان البواقي $D(x)=(V,A(x))$ كما يلي:

$$\begin{aligned} A(x) &= \{(i,j):(i,j)\in A, x_{ij}<d_{ij}\}\cup\{(i,j):(j,i)\in A, x_{ji}>0\} \\ &= A_f(x)\cup A_r(x) \end{aligned}$$

حيث أن $A_f(x)$ تعبر عن مجموعة الأقواس المباشرة و $A_r(x)$ تعبر عن مجموعة الأقواس المنعكسة.

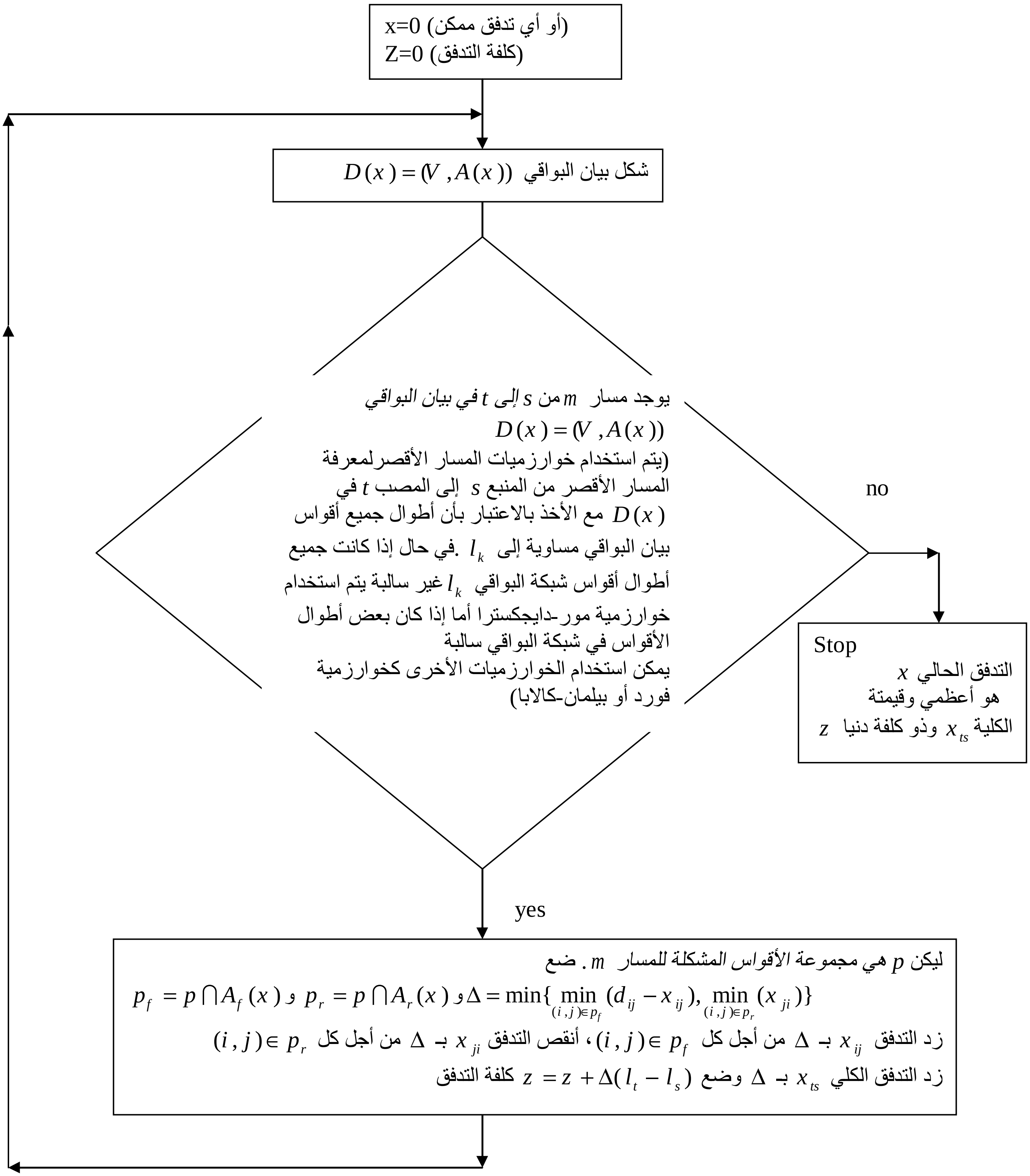
من أجل أي قوس $k=(i,j)\in A(x)$

إذا كان $k=(i,j)\in A_f(x)$ عندئذ تعطى كلفة القوس أو طول القوس k بـ $l_k=c_{ij}\geq 0$

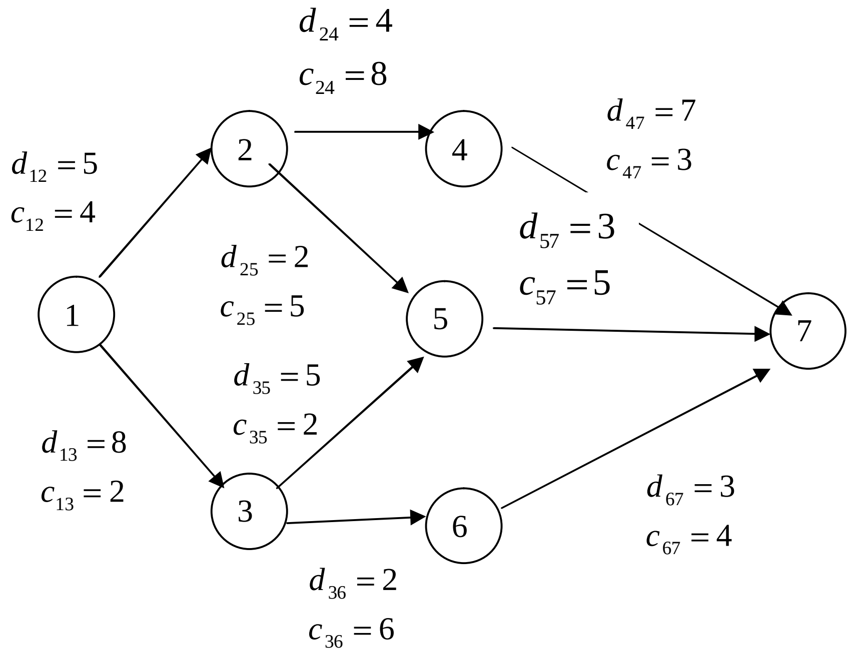
إذا كان $k=(i,j)\in A_r(x)$ عندئذ تعطى كلفة القوس أو طول القوس k بـ $l_k=-c_{ji}\leq 0$

يرمز للمسار بين المنبع s و المصب t في بيان البواقي $D(x)$ من أجل أي متجهة تدفق x بـ m

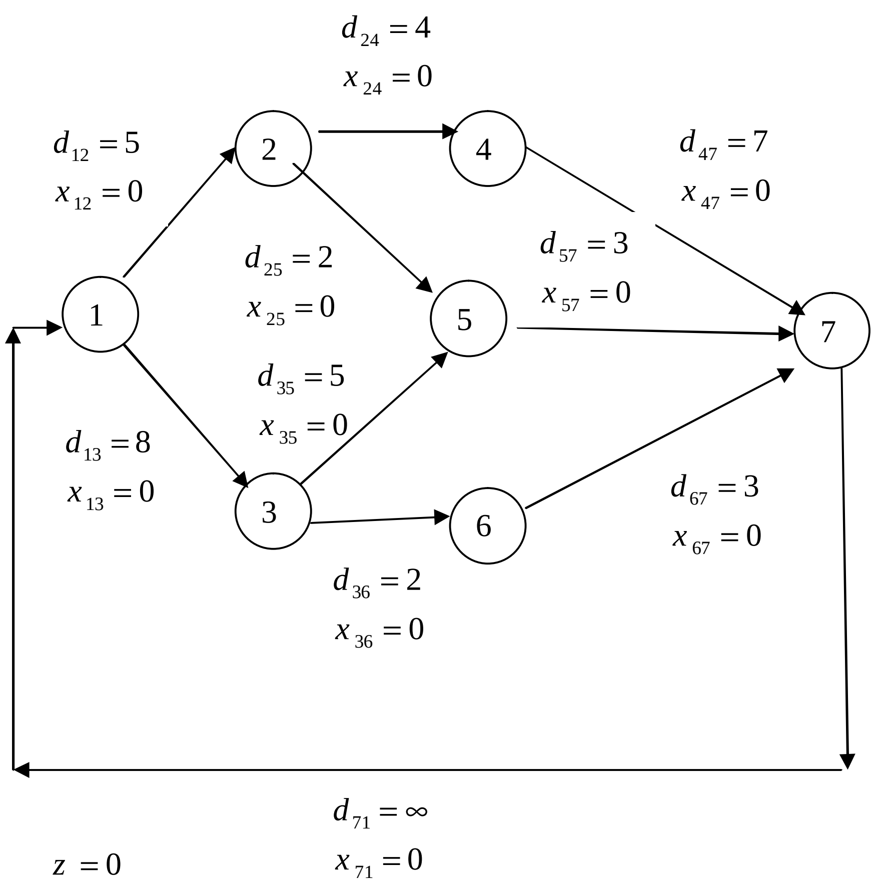
خوارزمية التدفق الأعظمي ذو الكلفة الدنيا



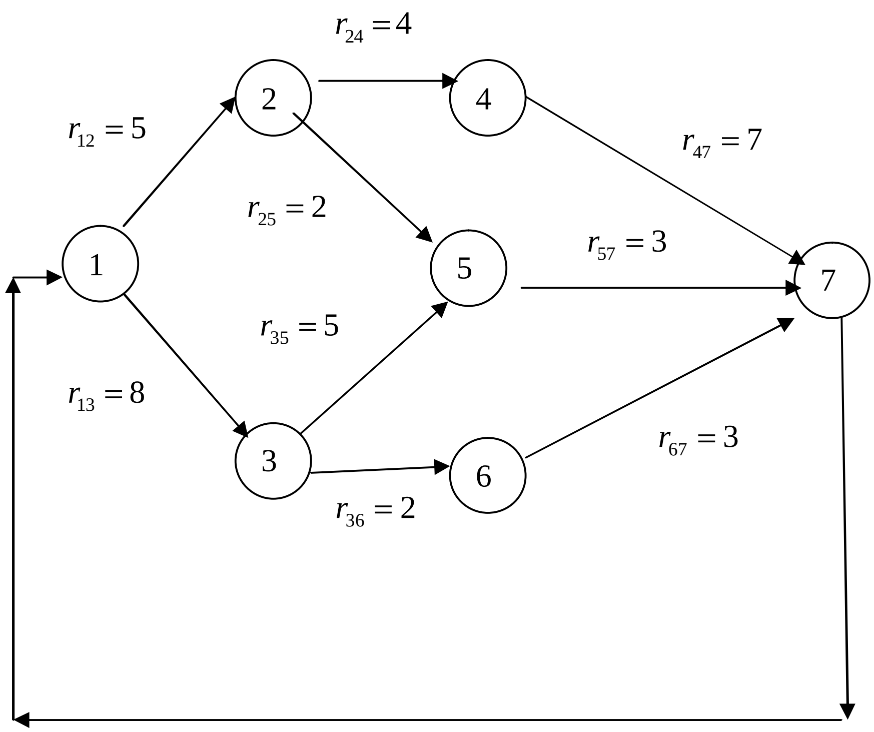
مثال 1. أوجد التدفق الأعظمي ذو التكلفة الدنيا في البيان الموجة التالي:



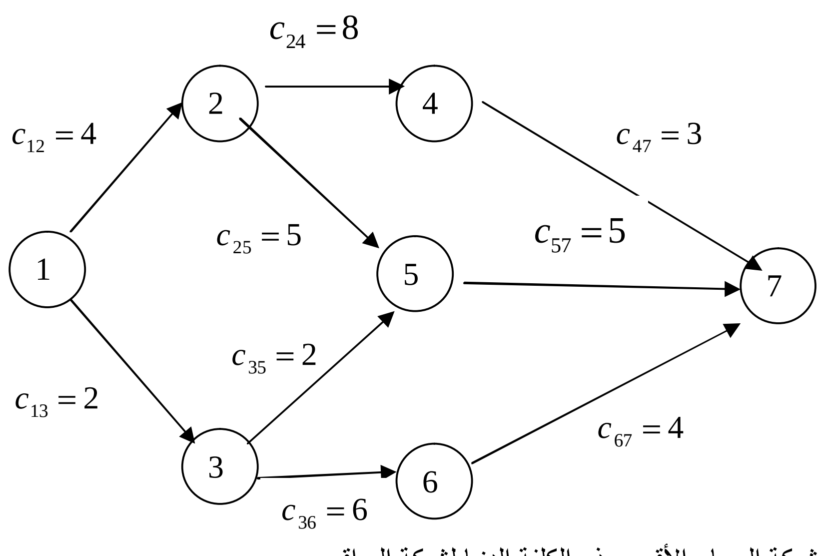
التكرار الأول



شبكة التدفق الأولي

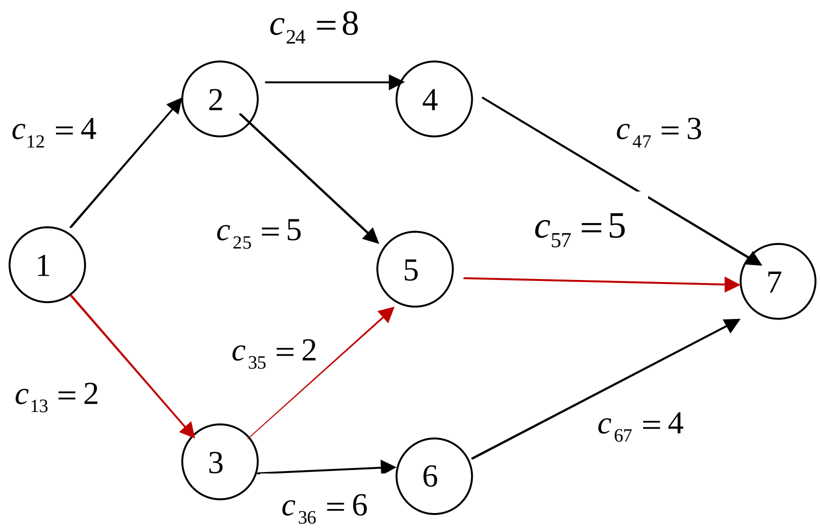


شبكة البواقي للتدفق الأولي



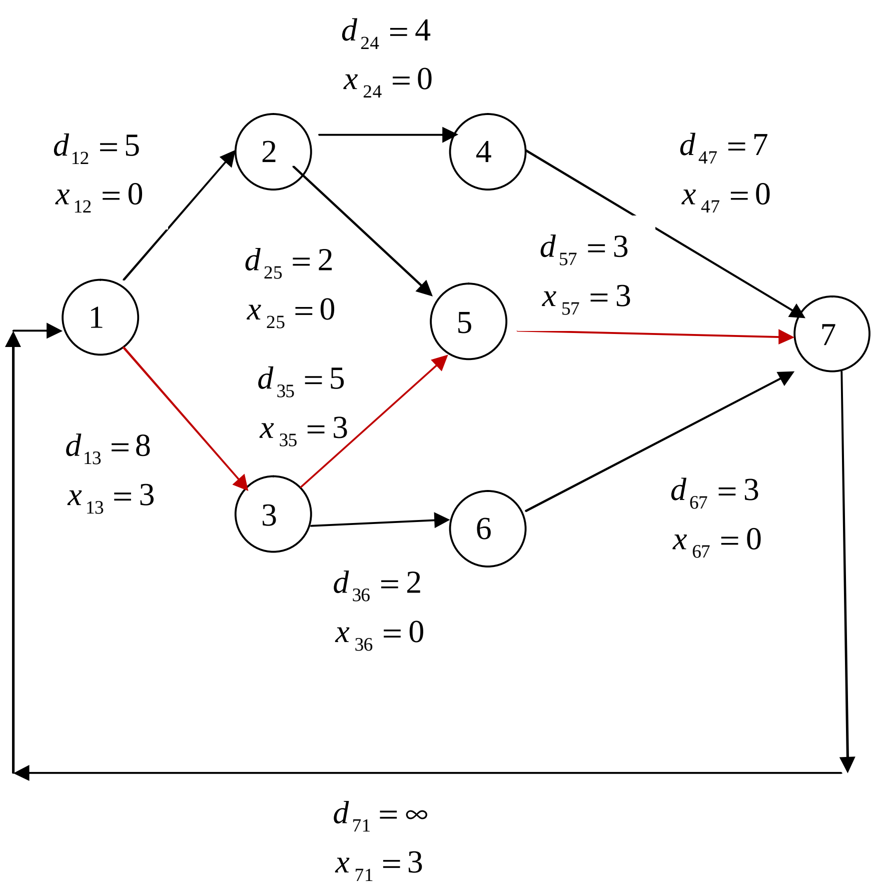
شبكة المسار الأقصر ذو الكلفة الدنيا لشبكة البواقي

لنحسب المسار ذو الكلفة الدنيا من عقدة المبيع 1 إلى عقدة المصب 7 باستخدام خوارزمية مور-دايجكستر كون جميع أطوال الأقواس غير سالبة



$m=\{1,3,5,7\}, L(m)=9$

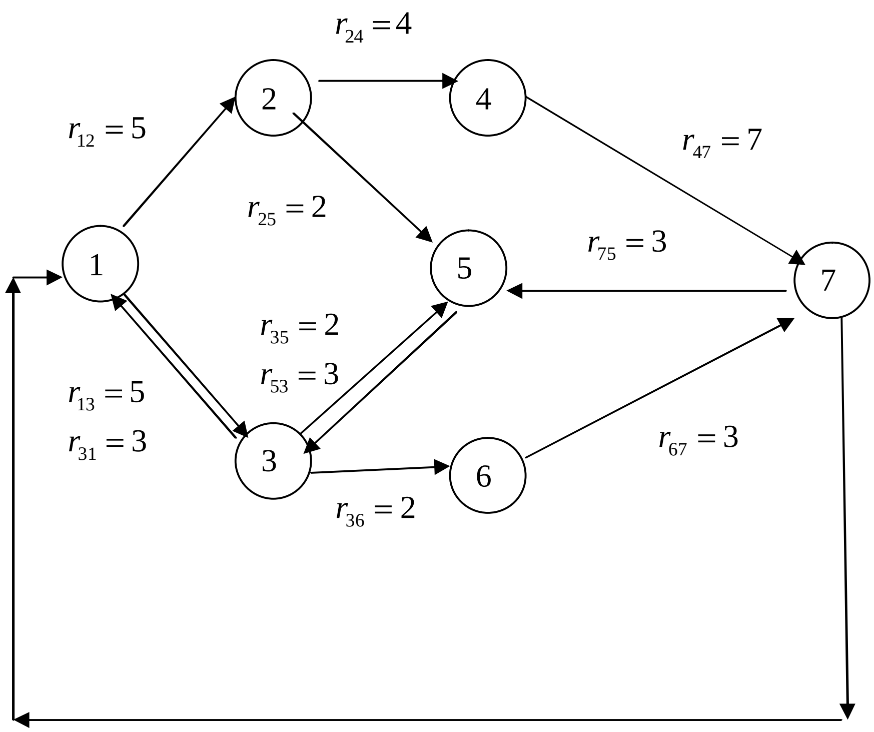
$\Delta=3$



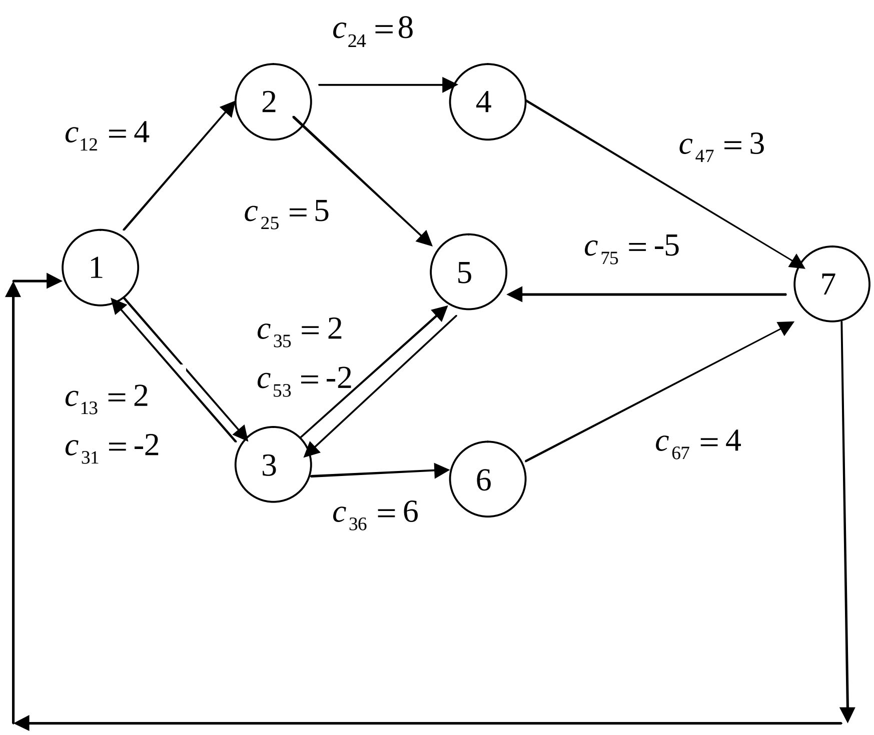
$z=0+3\times 9=27$

شبكة تحسين التدفق

التكرار الثاني

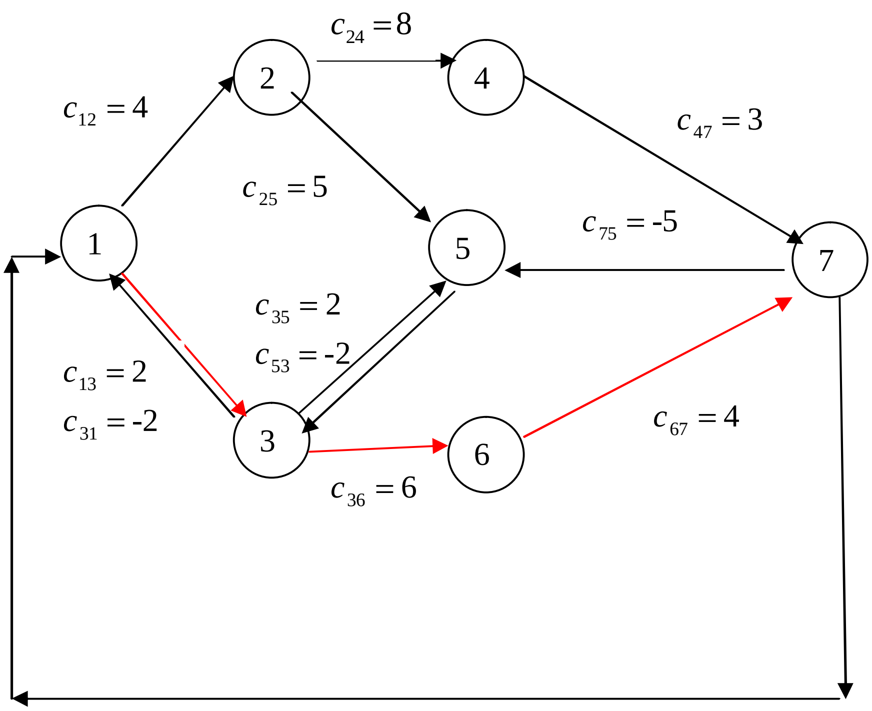


شبكة البواقي للتدفق الجديد



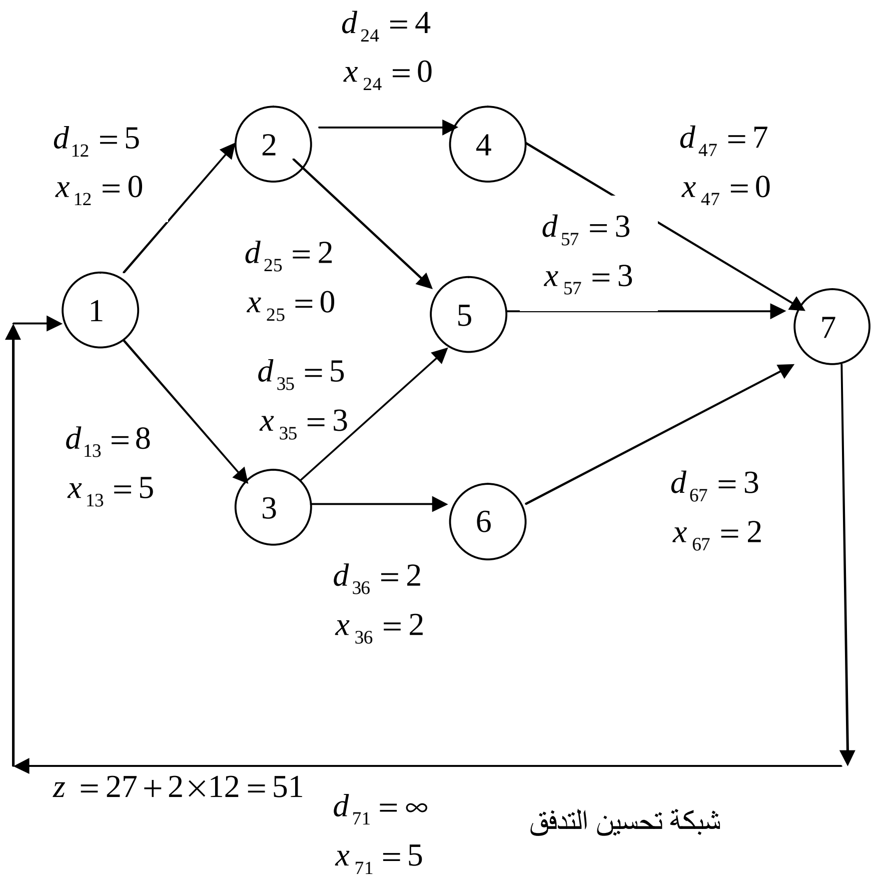
شبكة المسار الأقصر ذو الكلفة الدنيا لشبكة البواقي الجديدة

لنحسب المسار ذو الكلفة الدنيا من عقدة المبع 1 إلى عقدة المصب 7 باستخدام خوارزمية فورد كون جميع أطوال الأقواس ليست جميعها غير سالبة



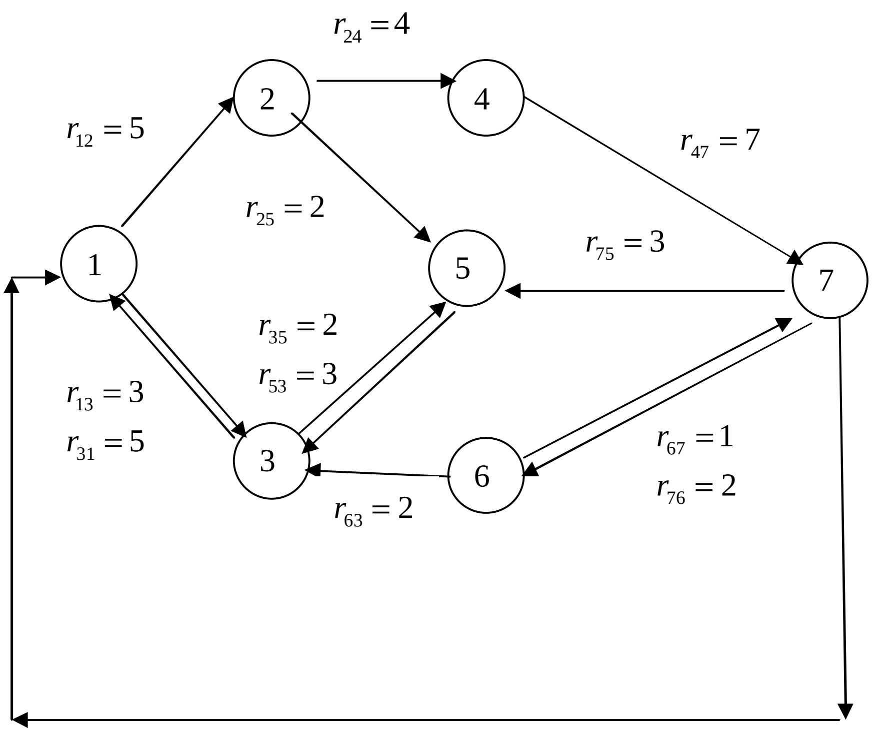
$m=\{1,3,6,7\}, L(m)=12$

$\Delta=2$

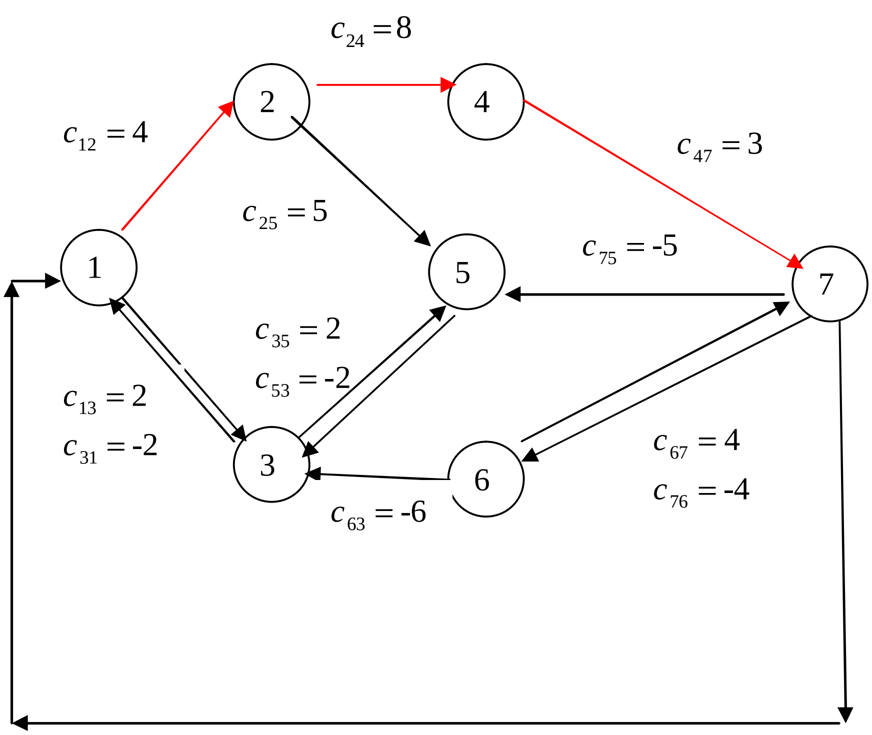


شبكة تحسين التدفق

التكرار الثالث



شبكة البواقي للتدفق الجديد

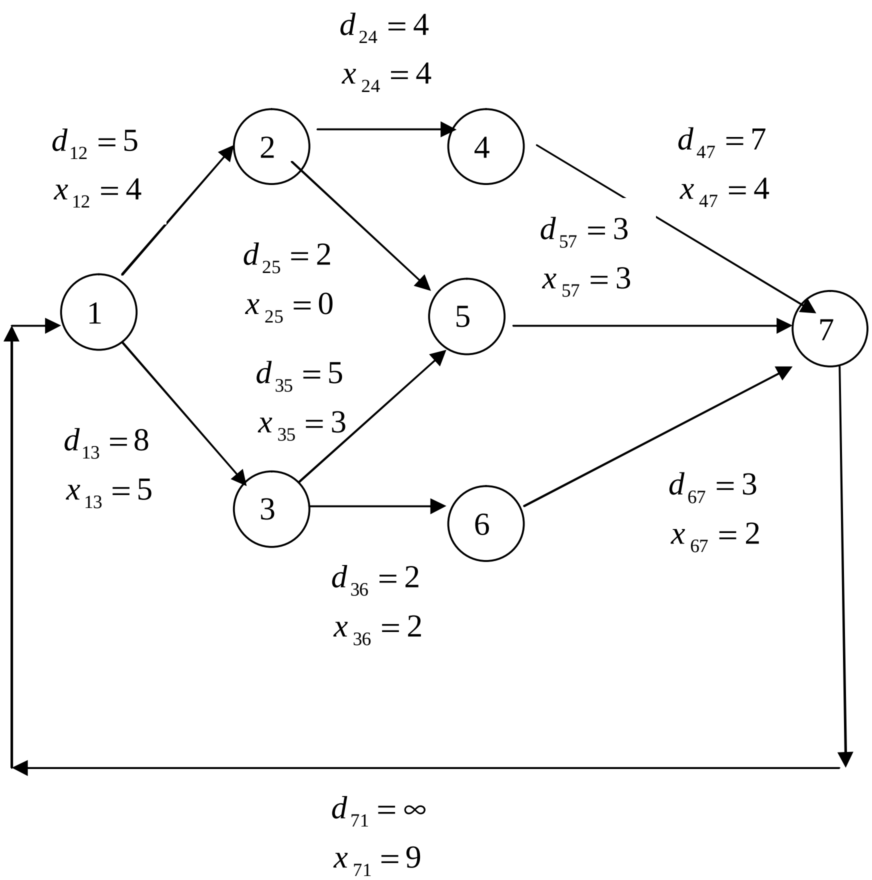


شبكة المسار الأقصر ذو الكلفة الدنيا لشبكة البواقي الجديدة

لنحسب المسار ذو الكلفة الدنيا من عقدة المبيع 1 إلى عقدة المصب 7 باستخدام خوارزمية فورد كون جميع أطوال الأقواس ليست جميعها غير سالبة

$m = \{1, 2, 4, 7\}, L(m) = 15$

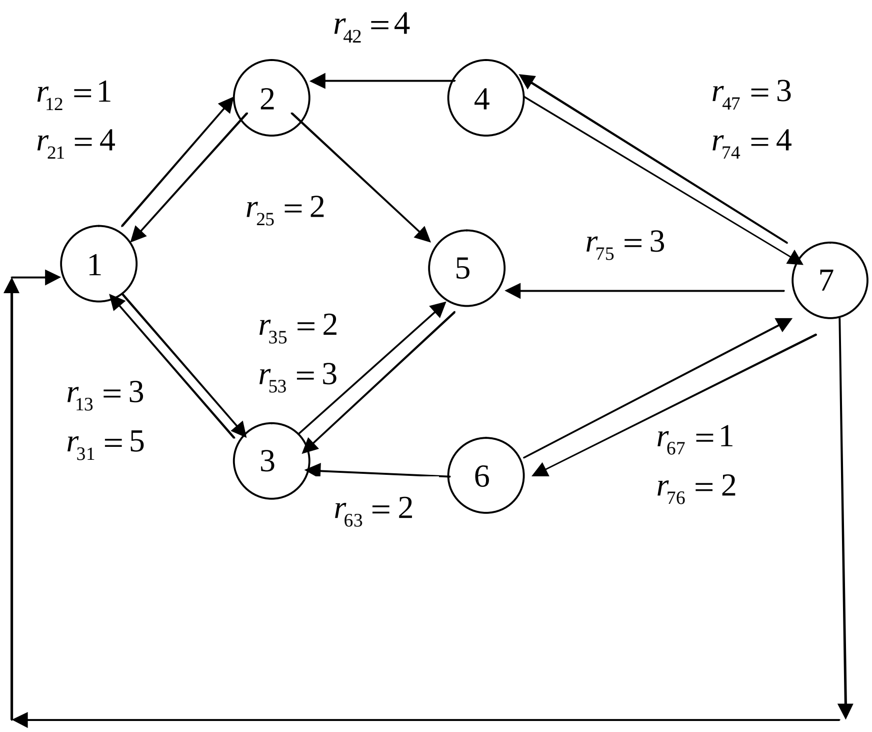
$\Delta = 4$



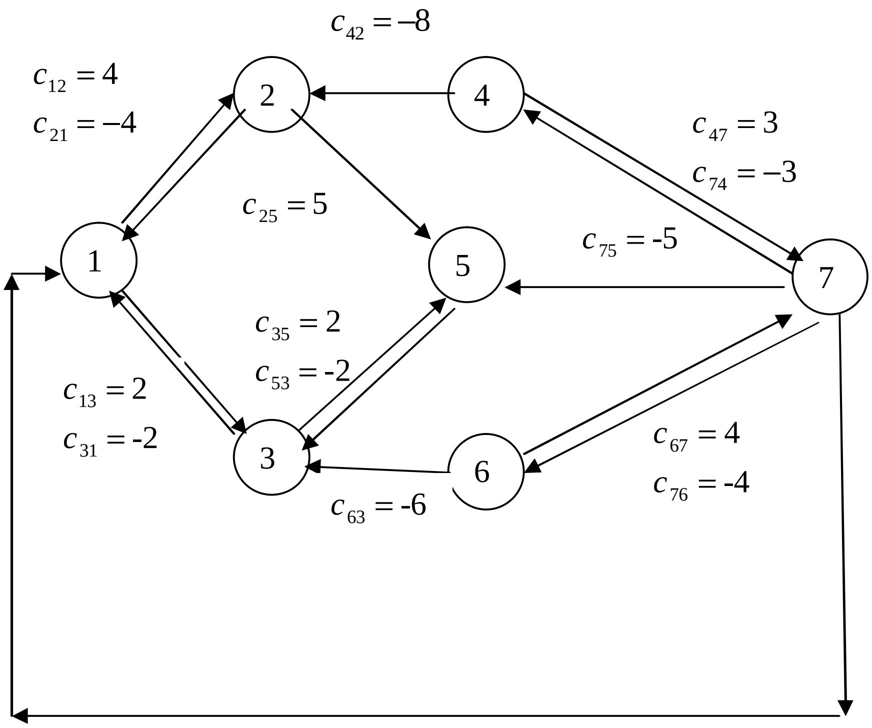
$z = 51 + 4 \times 15 = 111$

شبكة تحسين التدفق

التكرار الرابع



شبكة البواقي للتدفق الجديد

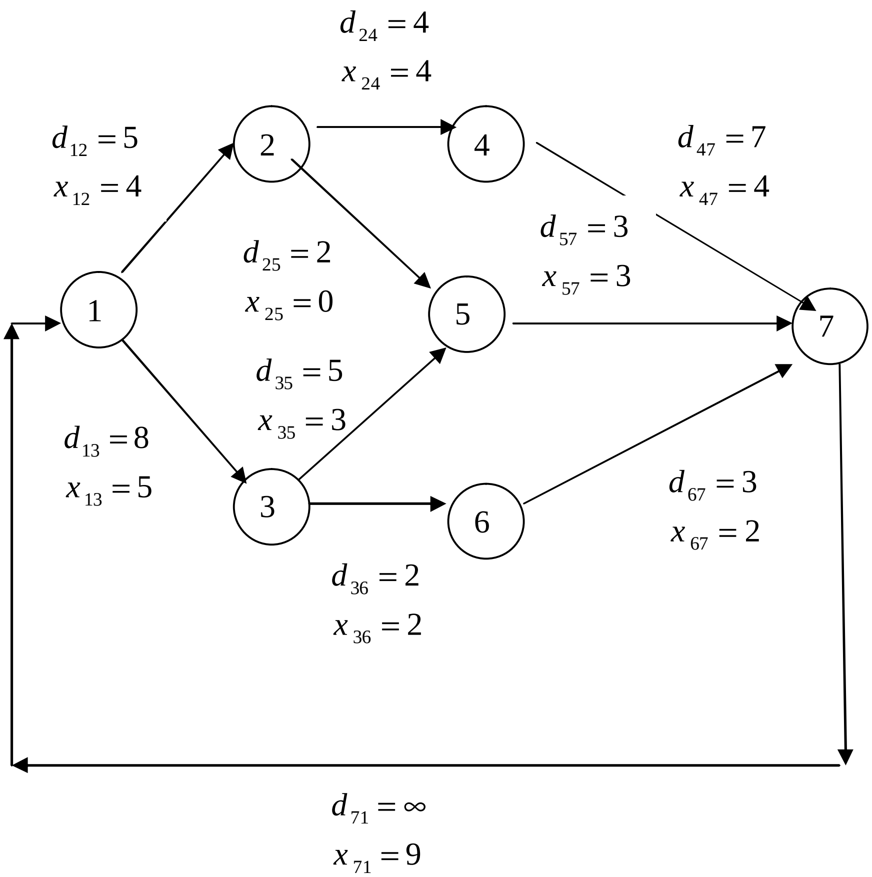


شبكة المسار الأقصر ذو الكلفة الدنيا لشبكة البواقي الجديدة

لنحسب المسار ذو الكلفة الدنيا من عقدة المبيع 1 إلى عقدة المصب 7 باستخدام خوارزمية فورد كون جميع أطوال الأقواس ليست جميعها غير سالبة

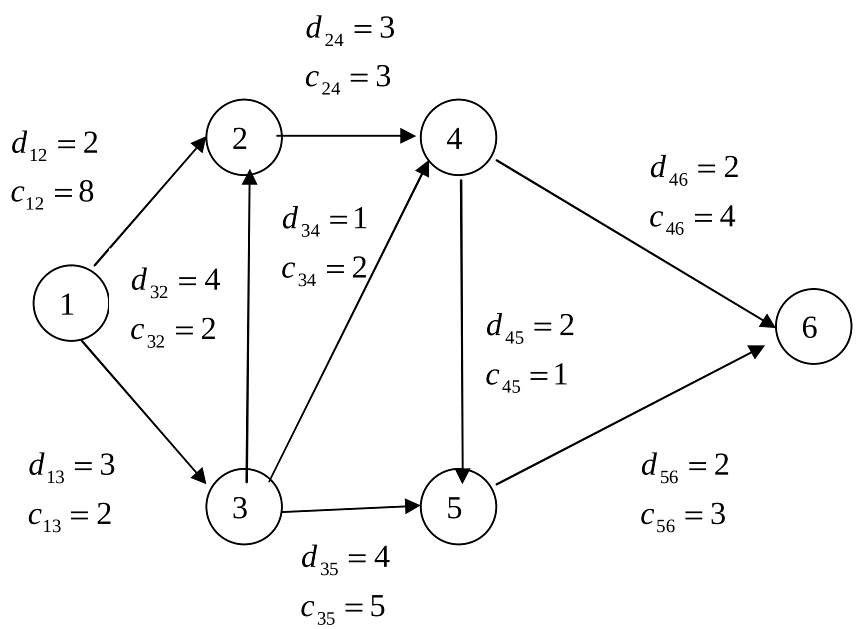
لايوجد مسار بين العقدتين 1 و 7

إذاً الحل هو

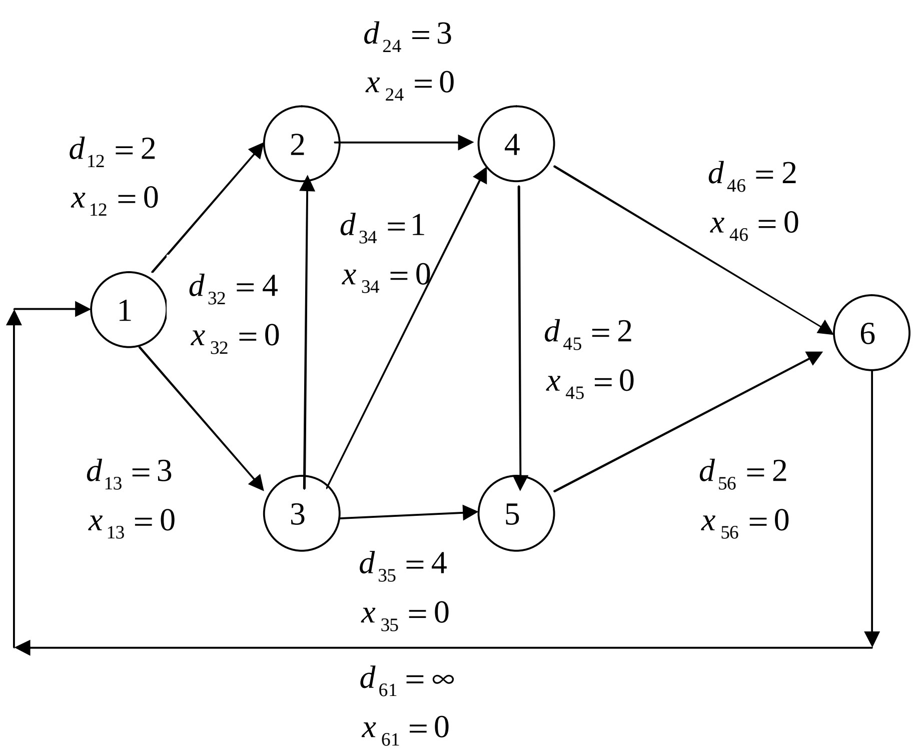


$$z = 51 + 4 \times 15 = 111$$

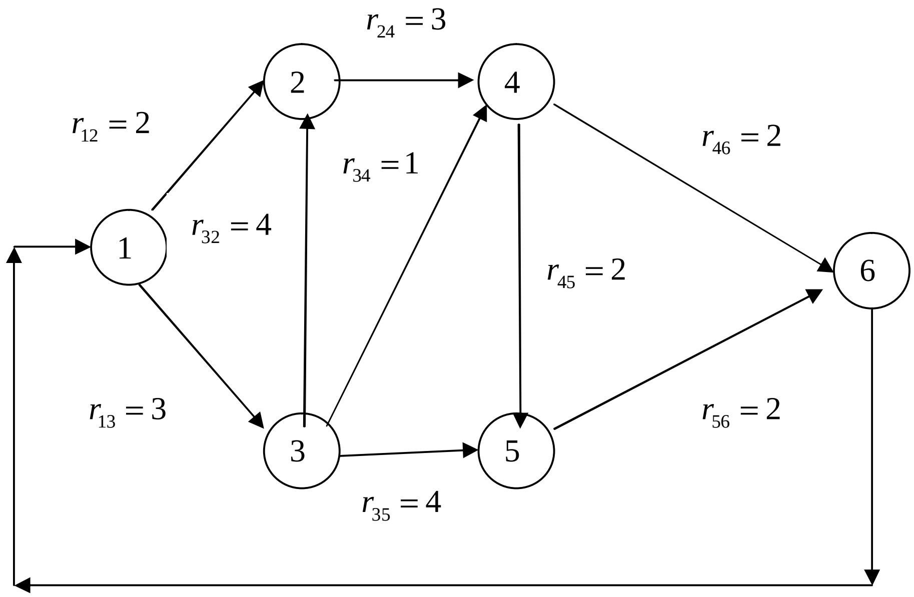
مثال 2. أوجد التدفق الأعظمي ذو الكلفة الدنيا في البيان الموجة التالي:



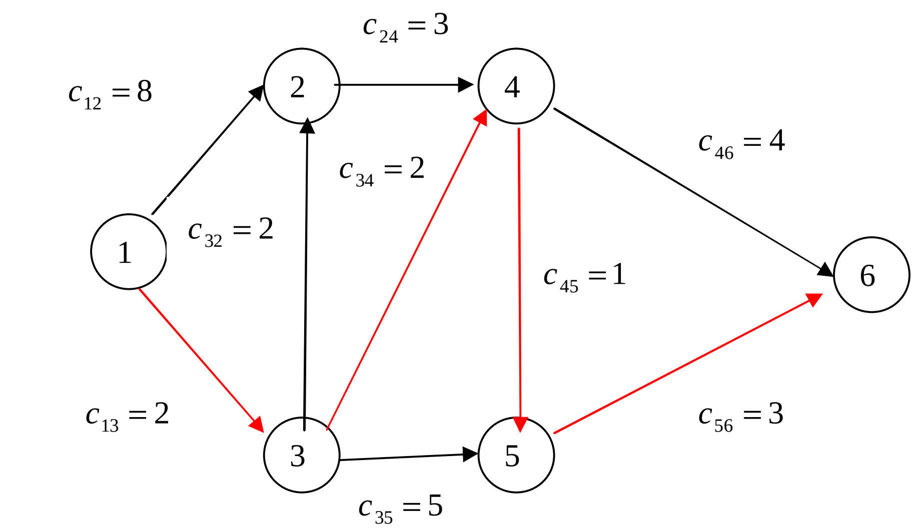
التكرار الأول



$z=0$ شبكة التدفق الأولي



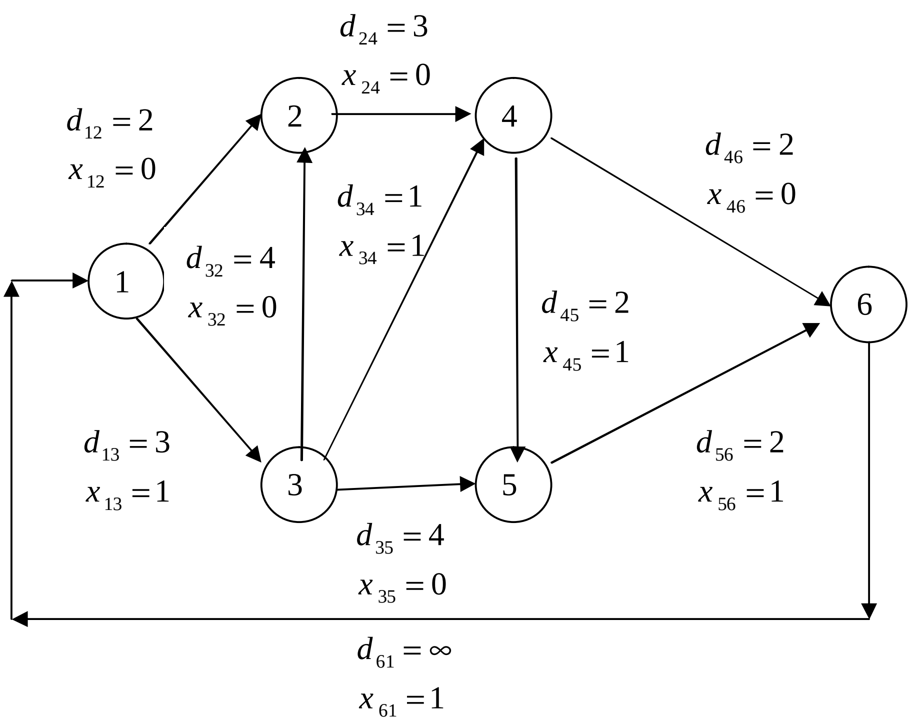
شبكة البواقي للتدفق الأولي



شبكة المسار الأقصر ذو الكلفة الدنيا لشبكة البواقي

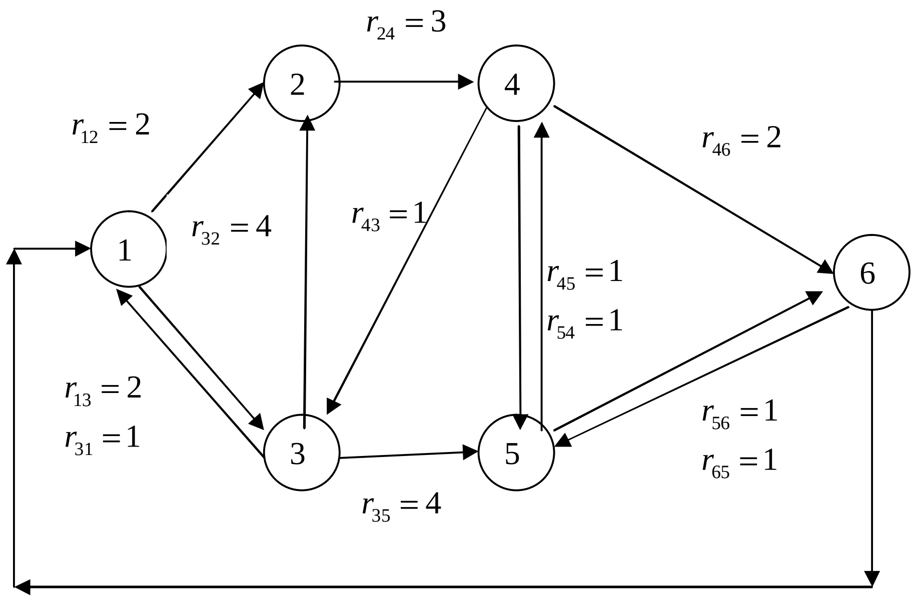
لنحسب المسار ذو الكلفة الدنيا من عقدة المبيع 1 إلى عقدة المصب 6 باستخدام خوارزمية مور-دايجكستر كون جميع أطوال الأقواس غير سالبة (يوجد مسارين)

$m_1 = \{1, 3, 4, 6\}, L(m_1) = 8$
$m_2 = \{1, 3, 4, 5, 6\}, L(m_2) = 8$
$\Delta = 1$

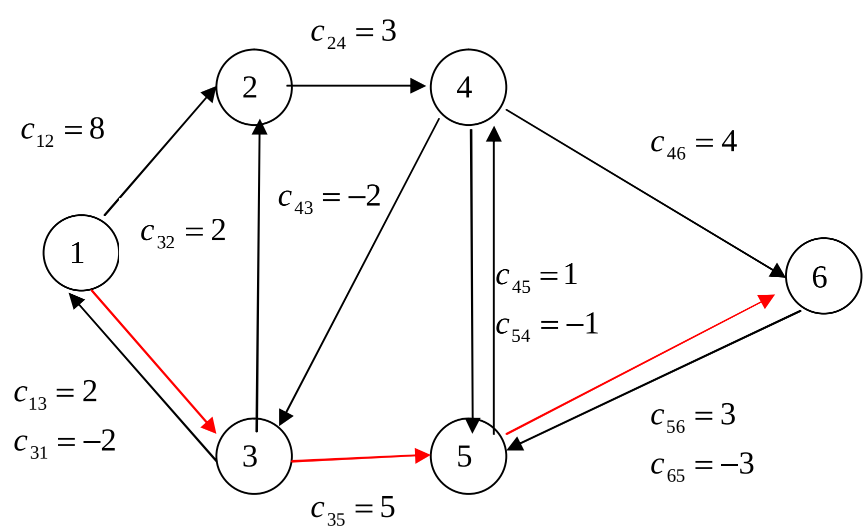


$z = 0 + 1 \times 8 = 8$ شبكة التدفق المحسنة

التكرار الثاني



شبكة البواقي للتدفق الجديد

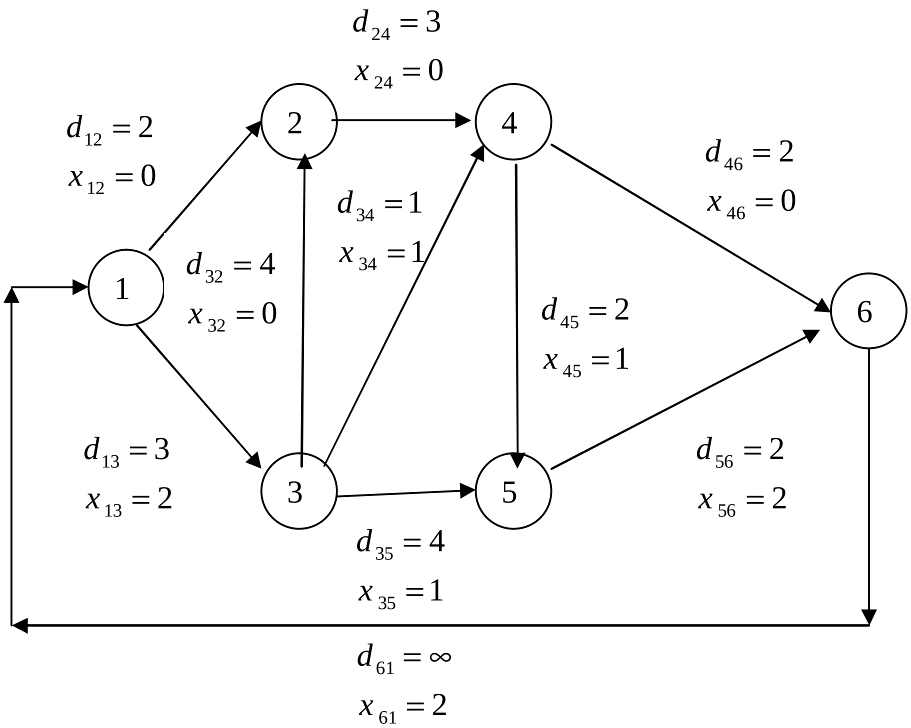


شبكة المسار الأقصر ذو الكلفة الدنيا لشبكة البواقي

لنحسب المسار ذو الكلفة الدنيا من عقدة المبيع 1 إلى عقدة المصب 6 باستخدام خوارزمية فورد كون جميع أطوال الأقواس غير موجبة

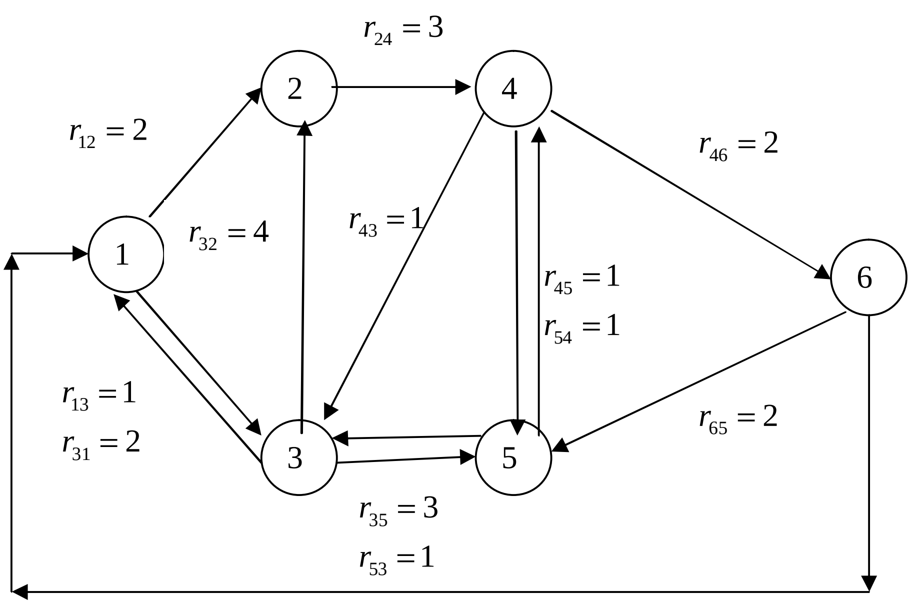
$m=\{1,3,5,6\}, L(m)=10$

$\Delta=1$

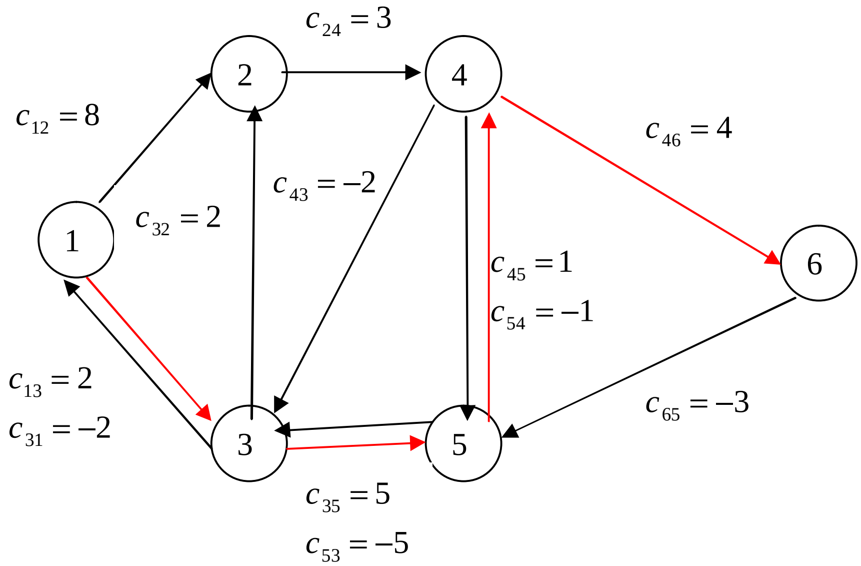


$z=8+1\times10=18$ شبكة التدفق المحسنة

التكرار الثالث



شبكة البواقي للتدفق الجديد

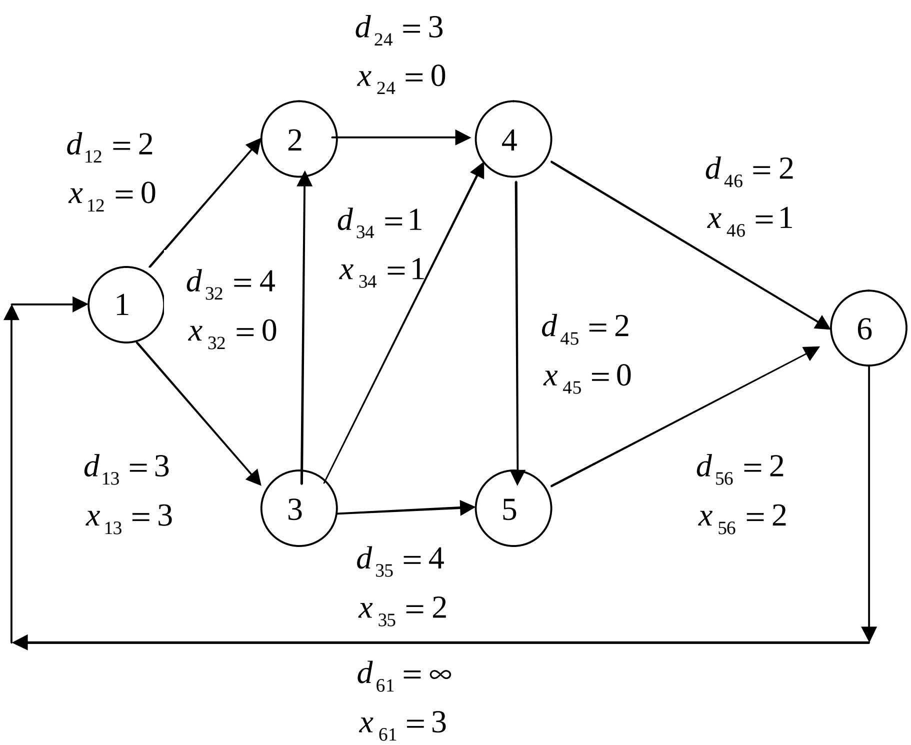


شبكة المسار الأقصر ذو الكلفة الدنيا لشبكة البواقي

لنحسب المسار ذو الكلفة الدنيا من عقدة المبيع 1 إلى عقدة المصب 6 باستخدام خوارزمية فورد كون جميع أطوال الأقواس غير موجبة

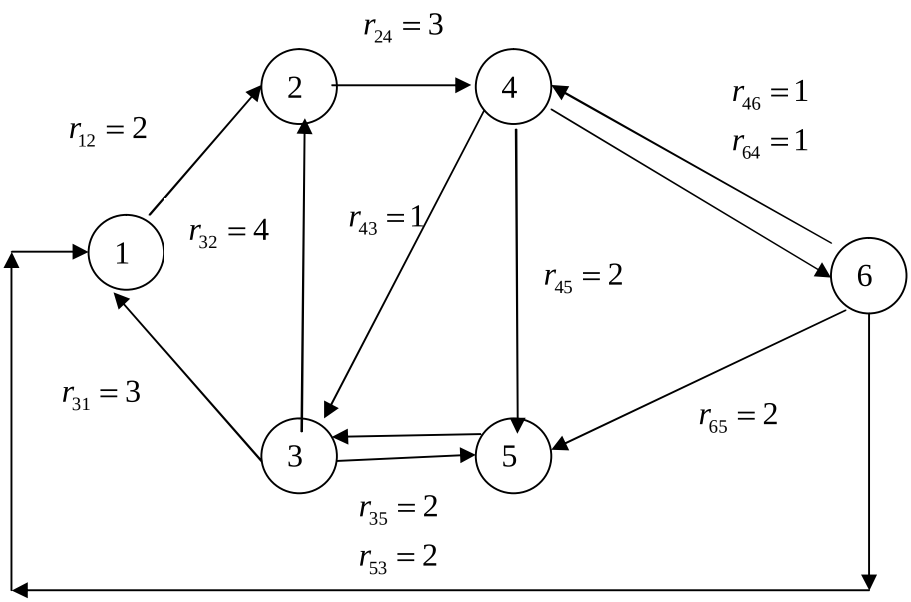
$m = \{1,3,5,4,6\}, L(m) = 10$

$\Delta = 1$

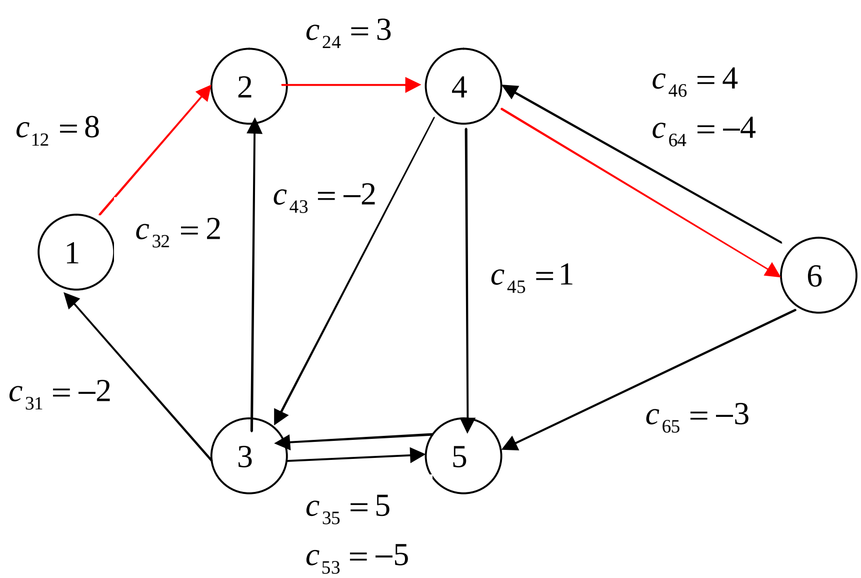


$z = 18 + 1 \times 10 = 28$ شبكة التدفق المحسنة

التكرار الرابع



شبكة البواقي للتدفق الجديد

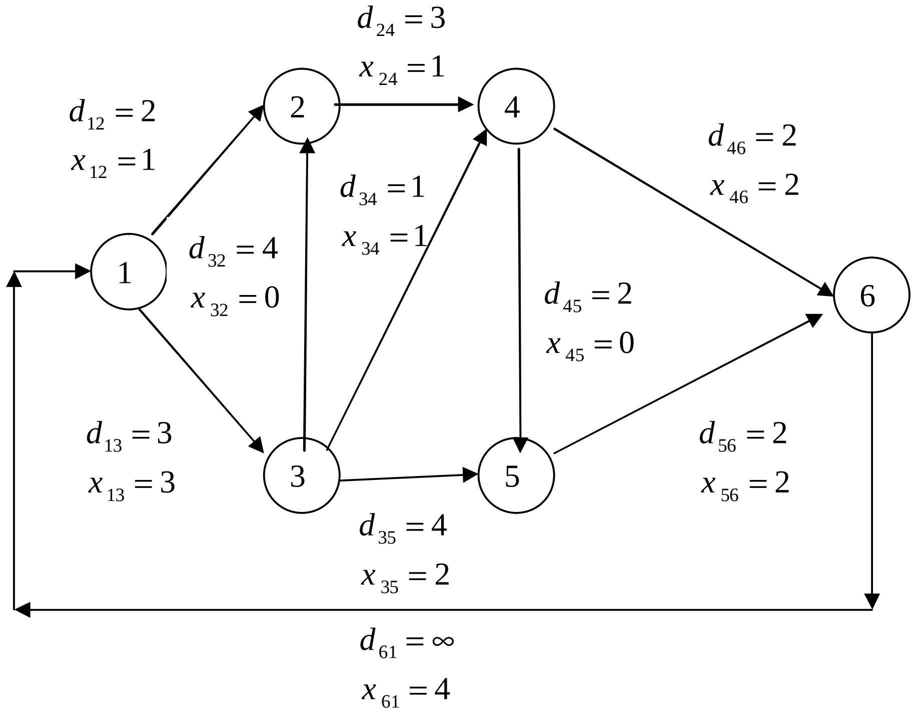


شبكة المسار الأقصر ذو الكلفة الدنيا لشبكة البواقي

لنحسب المسار ذو الكلفة الدنيا من عقدة المبيع 1 إلى عقدة المصب 6 باستخدام خوارزمية فورد كون جميع أطوال الأقواس غير موجبة

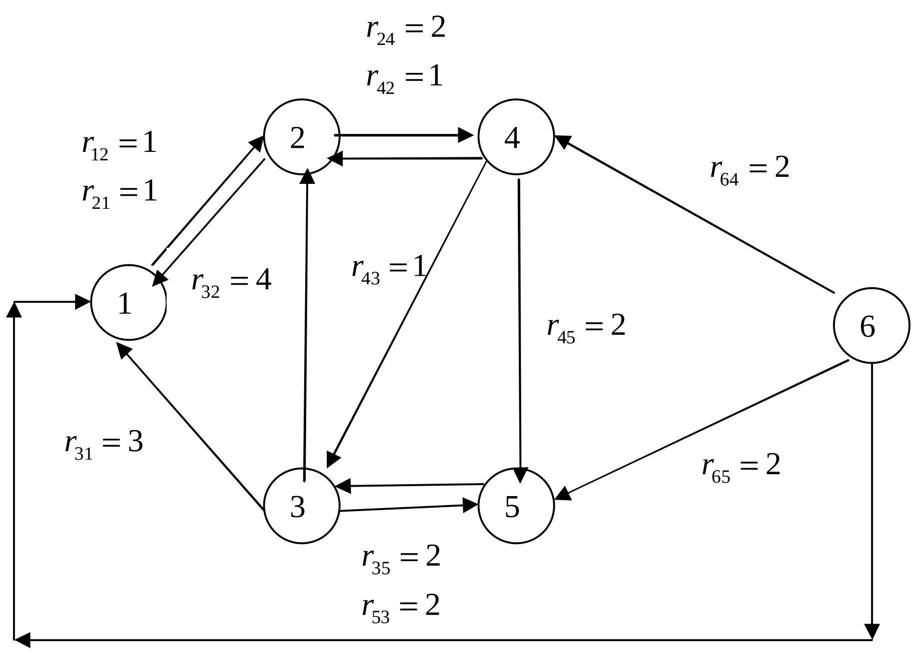
$m=\{1,2,4,6\}, L(m)=15$

$\Delta=1$

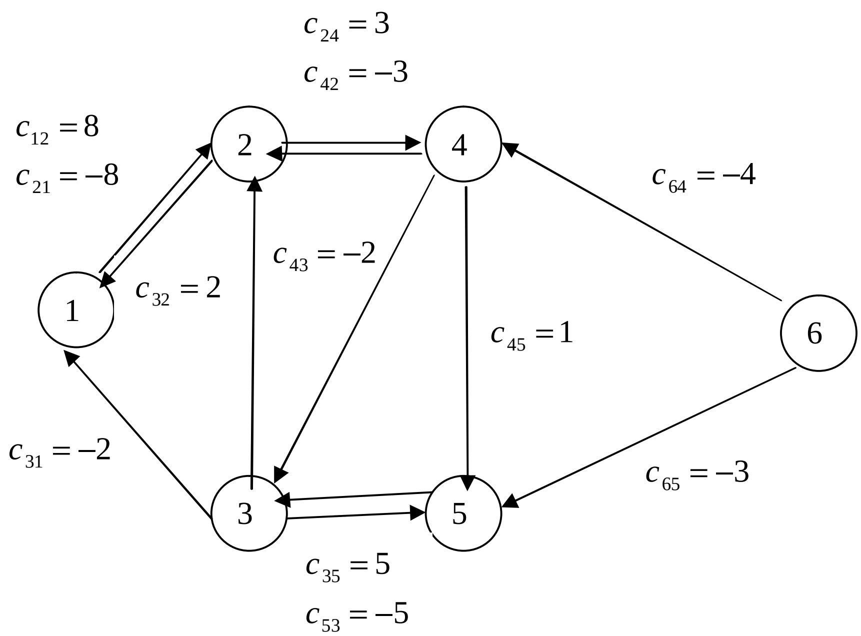


$z=28+1\times15=43$ شبكة التدفق المحسنة

التكرار الخامس



شبكة البواقي للتدفق الجديد

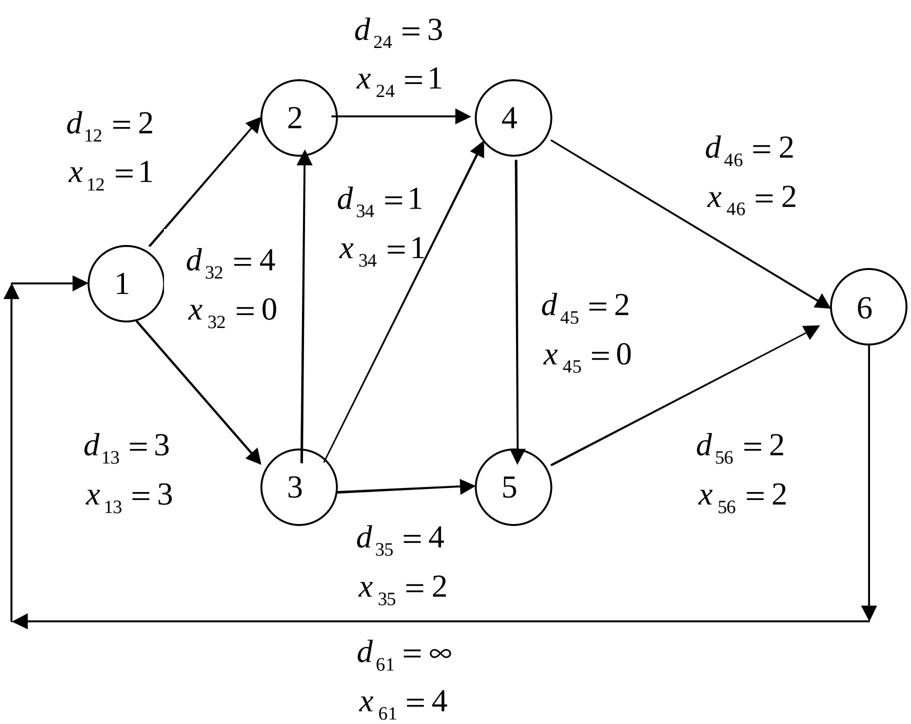


شبكة المسار الأقصر ذو الكلفة الدنيا لشبكة البواقي

لنحسب المسار ذو الكلفة الدنيا من عقدة المبيع 1 إلى عقدة المصب 6 باستخدام خوارزمية فورد كون جميع أطوال الأقواس غير موجبة

لايوجد مسار بين العقدتين 1 و 6

إذاً الحل هو



$$z = 28+1\times15=43$$