الفصل الأول: حقل الأعداد الحقيقية

العنوان	الصفحة
1. الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$	**4**
2. مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$	**6**
3. مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$	**7**
1.3. تعريف العدد الجبري	**8**
2.3. نظرية الأصفار النسبية	**9**
3.3. الحقل والحقل المرتب	**10**
4. مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$	**11**
1.4. القيمة المطلقة والمسافة	**12**
2.4. العنصر الراجح والعنصر القاصر والحد الأعلى $SupA$ والحد الأدنى $InfA$ وأكبر عنصر $MaxA$ وأصغر عنصر $MinA$	**13**
3.4. المجالات العددية	**14**
5. تعريف مجموعة الاعداد الحقيقية الموسعة	**16**

الكلمات المفتاحية:

مجموعات الأعداد، الطبيعية، الصحيحة، النسبية، الحقيقية، الحقيقية الموسّعة، الحقل، الحقل المرتب، القيمة المطلقة، المجالات العددية.

الملخص:

يهتم التحليل الرياضي بدراسة التوابع الحقيقية ومفاهيم النهايات والاستمرار والمتتاليات والمتسلسلات العددية والاشتقاق والتكامل. يعرض هذا الفصل مجموعات الأعداد وخصائصها. يبدأ الفصل بتقديم مجموعة الأعداد الطبيعية التي تستخدم بشكل أساسي في العدّ وعرض خصائصها وطرق البرهان الرياضي ولاسيما طريقة الاستقراء الرياضي ويقدّم نشر ثنائي الحدود. ثم يتم تعريف مجموعة الأعداد الصحيحة التي تضم الأعداد الصحيحة الموجبة والسالبة. تعرّف مجموعة الأعداد النسبية أو العادية ويعرّف العدد الجبري الذي ينتج من حلّ معادلة كثير حدود بأمثال صحيحة ونظرية الأصفار النسبية التي تبين الشرط الذي يجب أن يحققه العدد النسبي ليشكّل حل لمعادلة عدد جبري. ويتم تعريف الحقل والحقل المرتب ومنه حقل الأعداد النسبية. بعدها يتم تقديم حقل الأعداد الحقيقية وتعريف القيمة المطلقة وخصائصها والمسافة والمجالات العددية.

الأهداف التعليمية:

يتعرّف الطالب في هذا الفصل على:

- مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ومجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$
- طرق البرهان الرياضي ولاسيما طريقة الاستقراء الرياضي
- نشر ثنائي الحدود
- الحقل والحقل المرتب
- حقل الأعداد النسبية (العادية أو الكسرية) $\mathbb{Q}$
- حقل الأعداد الحقيقية
- القيمة المطلقة والمسافة
- العنصر الراجح والعنصر القاصر والحد الأعلى $SupA$ والحد الأدنى $InfA$ وأكبر عنصر $MaxA$ وأصغر عنصر $MinA$

مقدمة

يهتم التحليل الرياضي بدراسة التوابع (الدوال) الرياضية وتحولاتها باستخدام مفاهيم النهاية، حيث تدرس خواص مثل الاستمرار والاشتقاق والتكامل والتفاضل والتقعر والانعطاف في منحنيات التوابع، وتطبق هذه المفاهيم على أعداد حقيقية أو أعداد عقدية والتوابع معرفة عليها.

سيتم في هذه الوحدة عرض المواضيع التالية:

- مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ومجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$
- طرق البرهان الرياضي ولاسيما طريقة الاستقراء الرياضي
- نشر ثنائي الحدود
- الحقل والحقل المرتب
- حقل الأعداد النسبية (العادية أو الكسرية) $\mathbb{Q}$
- حقل الأعداد الحقيقية
- القيمة المطلقة والمسافة
- العنصر الراجح والعنصر القاصر والحد الأعلى $SupA$ والحد الأدنى $InfA$ وأكبر عنصر $MaxA$ وأصغر عنصر $MinA$

يعتمد التحليل الرياضي على الفهم الدقيق للأعداد الحقيقية والعمليات التي تعرف عليها وخصائصها. يعتمد نظام العد في النظام العشري على عشرة رموز $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ وهو النظام المعتمد لمعظم العمليات الحسابية وهو المعتمد في هذه المادة (هناك أنظمة عد أخرى مثل نظام العد الثنائي ونظام العد الثماني ونظام العد الست عشري وغيرها).

يمكن توضيح كتابة العدد بالنظام العشري من خلال مثال:

$$357 = 7\times10^0 + 5\times10^1 + 3\times10^2$$

$$0.957 = 9\times10^{-1} + 5\times10^{-2} + 7\times10^{-3}$$

تشكل هذه الأرقام مجموعة الأعداد الحقيقية والتي تحوي عدد من المجموعات الجزئية التي سنبينها فيما يلي.

1. الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

تعرّف مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ بأنها المجموعة التي تضم الأعداد الصحيحة الموجبة وتستخدم للعد. يوجد لكل عدد طبيعي n عدد يليه يسمى العدد التالي وهو $n+1$. أي أن العدد التالي للعدد 2 هو العدد 3 والعدد 37 هو العدد التالي للعدد 36. يكون ناتج الجمع $n+m$ والجداء $n\times m$ لأي عددين طبيعيين n,m هو عدد طبيعي أي أن مجموعة الأعداد الطبيعية مغلقة مع عمليتي الجمع والجداء.

يمكن تلخيص خصائص الأعداد الطبيعية بالخصائص التالية:

N1 العدد 1 ينتمي إلى $\mathbb{N}$

N2 إذا كان العدد n ينتمي إلى $\mathbb{N}$ فإن العدد التالي $n+1$ ينتمي إلى $\mathbb{N}$

N3 العدد 1 ليس عدد تالي لأي عدد من $\mathbb{N}$

N4 إذا كان n و m في مجموعة الأعداد الطبيعية ولكلاهما نفس العدد التالي أي $n+1=m+1$ عندها يكون $n=m$

N5 أي مجموعة جزئية من $\mathbb{N}$ تحوي العدد 1 وتحوي العدد $n+1$ من أجل أي عدد n ينتمي لهذه المجموعة تكون هذه المجموعة مساوية لمجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.

نلاحظ أن الخصائص N1 حتى N4 لمجموعة الأعداد الطبيعية واضحة وبديهية، بينما الخاصية N5 تحتاج للشرح والبرهان. لشرح الخاصية N5 نفترض أنه لدينا مجموعة S جزئية من مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ حيث العدد 1 ينتمي إلى S و $n+1$ ينتمي إلى S من أجل أي عدد n ينتمي إلى S. بما أن العدد 1 ينتمي إلى S إذاً لدينا العدد 1+1=2 ينتمي إلى S. وبما أنه تبين أن العدد 2 ينتمي إلى S إذاً العدد 3=2+1 ينتمي إلى S. نلاحظ بأنه يمكننا الاستمرار بهذه الطريقة لنجد أن S تحوي أي عدد طبيعي من $\mathbb{N}$ وهذا يعني أن $S=\mathbb{N}$.

كذلك يمكن برهان الخاصية N5 بطريقة نقد الفرض. لنفترض أن N5 خاطئة أي أن المجموعة S لاتساوي مجموعة الأعداد الحقيقة مع أن العدد 1 ينتمي إلى S وتحقق الشرط ان $n+1$ ينتمي إلى S من أجل أي عدد n ينتمي إلى S. في هذه الحالة تكون مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ تحوي مجموعة جزئية S وتحقق الشرطين:

1. $1\in S$
2. عندما يكون $n\in S$ يتحقق $n+1\in S$.

ومع ذلك $S\neq\mathbb{N}$. ليكن لدينا n_0 أصغر عنصر من المجموعة $\{n\in\mathbb{N}: n\notin S\}$. بما أن العدد $1\in S$ فإن $n_0\neq 1$. أي أن n_0 هو العدد التالي لعدد من مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ وهو n_0-1. لدينا $n_0-1\in S$ لأن n_0 هو أصغر عدد طبيعي لاينتمي إلى S. ولكن من الشرط الثاني الذي تحققه المجموعة S يجب أن يكون العدد التالي ل n_0-1 أي n_0 يجب أن ينتمي إلى S وهذا تناقض مع الفرضية البدائية.

تعتبر الخاصية N5 اساس لبرهان القضايا الرياضية من خلال الاستقراء الرياضي. يمكن برهان صحة قضية رياضية من خلال الانطلاق من الفرض ونناقش منطقياً حتى نصل على صحة المطلوب، أو أن ننطلق من

نقيض المطلوب ونناقش منطقياً لنصل إلى نتيجة لايمكن قبولها وبالتالي نصل إلى صحة المطلوب بشكل غير مباشر.

أما برهان صحة قضية رياضية $P(n)$ (تتعلق بالعدد الطبيعي n) بالاستقراء الرياضي فتتم من خلال التحقق من الشرطين التاليين:

1. القضية $P(1)$ محققة (أي من أجل $n=1$).
2. إذا كانت القضية $P(n)$ صحيحة من أجل العدد الطبيعي n فإنها تكون صحيحة من أجل العدد الطبيعي التالي $n+1$.

عندها تكون القضية P صحيحة من أجل جميع الأعداد الطبيعية.

مثال 1:

برهن صحة العلاقة التالية من أجل أي عدد طبيعي n باستخدام الاستقراء الرياضي:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

البرهان:

لدينا القضية الرياضية $P(n):\left\{1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$

نجد أن هذه القضية صحيحة من أجل العدد 1 لأن: $P(1):\left\{1=\frac{1}{2}(1+1)\right\}$

لنفترض أن $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ صحيحة من أجل العدد الطبيعي n علينا أن نثبت أن القضية $P(n+1)$ صحيحة. لنجمع $n+1$ إلى طرفي المعادلة في القضية $P(n)$ فنجد:

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)=\frac{1}{2}\left[n(n+1)+2(n+1)\right]=\frac{1}{2}\left[(n+1)(n+2)\right]$$

أن القضية $P(n+1)$ صحيحة. ونتيجة للاستقراء الرياضي تكون $P(n)$ صحيحة لأي عدد طبيعي n.

مثال 2:

كل الأعداد من الشكل 5^n-4n-1 قابل للقسمة على 16 لأي عدد طبيعي n.

الحل:

لدينا القضية $P_n:\{5^n-4n-1 \, is\ divisable\ by\ 16\}$

$P_1:\{5-4-1=0\}$ تقبل القسمة على 16 فهي صحيحة.

$P_2:\{5^2-4\times 2-1=16\}$ تقبل القسمة على 16 فهي صحيحة.

نفرض أن P_n صحيحة علينا أن نثبت أن P_{n+1} صحيحة. نكتب:

$$5^{n+1}-4(n+1)-1=5(5^n-4n-1)+16n$$

وبما أنه افترضنا أن P_n صحيحة فيمكن كتابة $5^n-4n-1=16m$ وبالتالي:

$5^{n+1}-4(n+1)-1=5(5^n-4n-1)+16n=16(5m+n)$ وبالتالي تكون P_{n+1} صحيحة.

نظرية نشر ثنائي الحدود: ليكن لدينا $n\in\mathbb{N}$ و $n\neq 0$ ؛ $n!=1\times 2\times 3\times\cdots\times n$ (n عاملي) نعرف:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!},k=0,1,2,\ldots,n$$

فإن العلاقة التالية محققة دوماً:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n-1}a.b^{n-1}+\binom{n}{n}b^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$$

$$(a+b)^n=a^n+n\cdot a^{n-1}\cdot b+\frac{1}{2}n\cdot(n-1)\cdot a\cdot b^2+\cdots+n\cdot a\cdot b^{n-1}+b^n$$

تطبيق:

من أجل $n=1,2,3,4$ نجد:

$$(a+b)^1=a+b$$
$$(a+b)^2=a^2+2a\cdot b+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2\cdot b+3a\cdot b^2+b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3\cdot b+6a\cdot b^3+4a\cdot b^3+b^4$$

2. مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$

تتألف مجموعة الأعداد الصحيحة من مجموعة الأعداد الطبيعية والصفر والأعداد الصحيحة السالبة.

$$\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$

يمكن حل المعادلة من الشكل $x+n=m$ في المجموعة $\mathbb{Z}$ حيث n,m عددين طبيعيين ويصبح لدينا $x=m-n$ حيث تم ادخال عملية الطرح.

3. مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$

تحوي مجموعة الأعداد النسبية (أو العادية أو الكسرية) $\mathbb{Q}$ جميع الأعداد التي تكتب على شكل كسر $\frac{m}{n}$ حيث $m,n \in \mathbb{Z}$ و $n \neq 0$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m,n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

يمكن لعدة أزواج أعداد صحيحة أن تمثل نفس العدد النسبي:

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} if \ n \cdot p = m \cdot q$$

يمكن تمثيل أي عدد نسبي بعدد عشري مع عدد منته من الأرقام على يمين الفاصلة أو عدد غير منته ولكن دوري لمجموعة من الأرقام.

مثال 3:

1. العدد النسبي $\frac{1}{7}$ يمثل بشكل عدد عشري مع عدد غير منته ولكن دوري من الأرقام على يمين الفاصلة:

$$\frac{1}{7} = 0.142857\ 142857\ 142857\ 142857\ 142857\ \ldots = 0.\overline{142857}$$

2. العدد النسبي:

$$\frac{1}{6} = 0.16666666666666666666666666666666\ldots = 0.1\overline{6}$$

3. العدد النسبي :

$$\frac{19}{6} = 3.16666666666666666666666666666666\ldots = 3.1\overline{6}$$

4. العدد النسبي:

$$\frac{3}{4} = 0.75$$

يمكن إجراء عمليات الجمع والجداء والطرح والقسمة في مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$.

تحوي مجموعة الأعداد النسبية الأعداد الطبيعية والصحيحة حيث يمكن تمثيل أي عدد صحيح بشكل عدد نسبي يكون المقام فيه هو العدد 1.

يوجد نقص في هذه المجموعة فلا يوجد عدد نسبي يمكن أن يكون الرقم $\sqrt{2}$ ولكن يمكن تقريب العدد $\sqrt{2}$ إلى عدد نسبي قريب مثل 1.4142 فنجد أن $(1.4142)^2 = 1.9999616$ وأن $(1.4143)^2 = 2.000244$.

1.3. تعريف العدد الجبري

يدعى أي عدد بالعدد الجبري إذا كان يحقق معادلة كثير الحدود من الشكل:

$$c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = 0$$

حيث الأمثال $c_0, c_1, \ldots, c_n$ أعداد صحيحة و $c_n \neq 0$ و $n \geq 1$ عدد طبيعي.

ليكن $r = \frac{m}{n}$ عدد نسبي حيث $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ فهو حل للمعادلة $nx - m = 0$. أي أن الأعداد النسبية هي أعداد جبرية دوماً ولكن العكس ليس صحيحاً أي أن الأعداد الجبرية ليست بالضرورة أعداد نسبية. إن الأعداد المعرفة بعدد نسبي مرفوع إلى أس كسري أي جذر تربيعي أو جذر تكعيبي أو غيره هي أعداد جبرية.

مثال:

الأعداد التالية هي أعداد جبرية: $\frac{4}{17}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{17}, \sqrt{2+\sqrt[3]{5}}, \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{7}}$

لأن $\frac{4}{17}$ هو حل للمعادلة $17x - 4 = 0$

و $\sqrt{3}$ هو حل للمعادلة $x^2 - 3 = 0$

و $\sqrt[3]{17}$ هو حل للمعادلة $x^3 - 17 = 0$

و $a = \sqrt{2+\sqrt[3]{5}} \Rightarrow a^2 = 2+\sqrt[3]{5} \Rightarrow a^2 - 2 = \sqrt[3]{5} \Rightarrow \left(a^2-2\right)^3 = 5 \Rightarrow a^6 - 6a^4 + 12a^2 - 13 = 0$

أي أن a هو حل للمعادلة $x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 13 = 0$

وبطريقة مشابهة بفرض $b = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{7}}$ نجد:

$$b = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{7}} \Rightarrow 7b^2 = 4 - 2\sqrt{3} \Rightarrow 2\sqrt{3} = 4 - 7b^2 \Rightarrow 12 = \left(4-7b^2\right) \Rightarrow 49b^4 - 56b^2 + 4 = 0$$

أي أن b هو حل للمعادلة $49x^4 - 56x^2 + 4 = 0$.

ستسمح لنا النظرية التالية (الاصفار النسبية) ببرهان أن عدد ما هو ليس من الأعداد النسبية مثل $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$.

نذكر بأن العدد الصحيح m يقبل القسمة على العدد الصحيح k إذا كان $\frac{m}{k}$ هو عدد صحيح.

2.3. نظرية الأصفار النسبية

نفترض أن r عدد نسبي والأمثال $c_0,c_1,\ldots,c_n$ أعداد صحيحة تتحقق معادلة كثير الحدود:

$$c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0 = 0 \qquad (1)$$

حيث $n \geq 1$ و $c_n \neq 0$ و $c_0 \neq 0$. ليكن $r = \frac{c}{d}$ حيث c و d عددين صحيحين بدون قاسم مشترك (أبسط شكل للعدد النسبي) و $d \neq 0$.

يكون لدينا c_0 تقبل القسمة على c و c_n تقبل القسمة على d.

يمكن القول بأن أي عدد نسبي $r = \frac{c}{d}$ يشكل حل للمعادلة (1) يجب أن يتحقق c_0 يقبل القسمة على c و c_n تقبل القسمة على d.

البرهان:

بما أن $r = \frac{c}{d}$ يحقق المعادلة (1):

بجداء طرفي المعادلة السابقة بـ d^n نجد:

$$c_n \cdot c^n + c_{n-1} \cdot c^{n-1} \cdot d + \cdots + c_1 \cdot c \cdot d^{n-1} + c_0 \cdot d^n = 0 \Rightarrow c_0 \cdot d^n = -c\left[c_n \cdot c^{n-1} + c_{n-1} \cdot c^{n-2} \cdot d + \cdots + c_1 \cdot d^{n-1}\right]$$

أي أن $c_0 \cdot d^n$ تقبل القسمة على c. بما أنه لايوجد عامل مشترك بين c و d^n فإن c_0 تقبل القسمة على c.

وبنفس الطريقة نجد:

$$c_n \cdot c^n + c_{n-1} \cdot c^{n-1} \cdot d + \cdots + c_1 \cdot c \cdot d^{n-1} + c_0 \cdot d^n = 0 \Rightarrow c_n \cdot c^n = -d\left[c_{n-1} \cdot c^{n-1} + \cdots + c_1 \cdot d^{n-2} + c_0 \cdot d^{n-1}\right]$$

أي أن $c_n \cdot c^n$ تقبل القسمة على d. بما أنه لايوجد عامل مشترك بين c^n و d فإن c_n تقبل القسمة على d.

نظرية:

ليكن لدينا معادلة كثير الحدود التالية: $x^n + c_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + c_1 \cdot x + c_0 = 0$ حيث الأمثال $c_0,c_1,\ldots,c_n$ أعداد صحيحة و $c_0 \neq 0$. أي عدد نسبي $r = \frac{c}{d}$ يمثل حل لهذه المعادلة يجب أن يكون عدد صحيح ويكون من قواسم c_0.

البرهان:

نجد من نظرية الأصفار النسبية أن المقام للعدد النسبي $r = \frac{c}{d}$ الذي يحقق حل للمعادلة يجب أن يكون من قواسم 1 (مثل x^n في المعادلة). لذلك فقيمة المقام يجب أن تكون 1. لذلك فإن $r = \frac{c}{d}$ يجب أن يكون عدد صحيح وهو من قواسم c_0 حسب نظرية الأصفار النسبية.

مثال:

العدد $\sqrt{2}$ ليس عدد نسبي.

الحل:

من نظرية الأصفار النسبية نجد أن الأعداد النسبية الوحيدة التي من الممكن ان تشكل حلول للمعادلة $x^2-2=0$ هي $\mp1,\mp2$ وهي لاتحل المعادلة $(n=2, c_2=1, c_1=0, c_0=-2)$. بما أن $\sqrt{2}$ حل للمعادلة فلا يمكن أن يكون عدداً نسبياً.

3.3. الحقل والحقل المرتب

ليكن لدينا $a,b\in\mathbb{Q}$ عددين نسبيين فلدينا ناتج الجمع عدد نسبي $(a+b)\in\mathbb{Q}$ وناتج الجداء عدد نسبي $(a\cdot b)\in\mathbb{Q}$ ولعمليتي الجمع والجداء في $\mathbb{Q}$ الخصائص التالية:

A1- الخاصة التجميعية للجمع $\forall a,b,c\in\mathbb{Q}, a+(b+c)=(a+b)+c$

A2- الخاصة التبديلية للجمع $\forall a,b\in\mathbb{Q}, a+b=b+a$

A3- الصفر هو العنصر الحيادي لعملية الجمع $\forall a\in\mathbb{Q}, a+0=a$

A4- النظير للجمع $\forall a\in\mathbb{Q}, a+(-a)=0$

M1- الخاصة التجميعية للجداء $\forall a,b,c\in\mathbb{Q}, a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

M2- الخاصة التبديلية للجداء $\forall a,b\in\mathbb{Q}, a\cdot b=b\cdot a$

M3- الواحد هو العنصر الحيادي لعملية الجداء $\forall a\in\mathbb{Q}, a\cdot 1=a$

M4- النظير للجداء $\forall a\in\mathbb{Q}^*, a\cdot a^{-1}=1$ لكل عنصر لايساوي الصفر مقلوب في مجموعة الأعداد النسبية.

DL- توزيع الجداء على الجمع $\forall a,b,c\in\mathbb{Q}, a\cdot(b+c)=a\cdot b+b\cdot c$

أي مجموعة تحوي أكثر من عنصر ومزودة بعمليتي الجمع والجداء وتحقق الخصائص السابقة تدعى حقل.

المجموعة $\mathbb{Q}$ تحوي علاقة $\leq$ ترتيب تحقق المواصفات التالية:

O1- من أجل قيمتين a,b يتحقق لدينا إما $a\leq b$ أو $b\leq a$

O2- إذا كان لدينا $a\leq b$ و $b\leq a$ فإن $a=b$

O3- إذا كان $a\leq b$ و $b\leq c$ فإن $a\leq c$

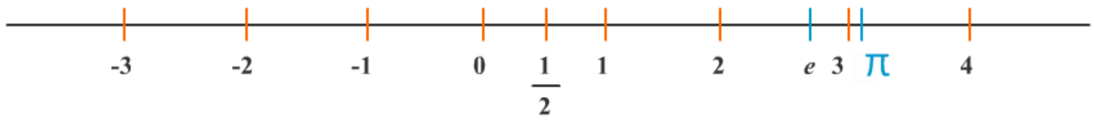
O4- إذا كان $a\leq b$ فإن $a+c\leq b+c$

O5- إذا كان $a\leq b$ و $0\leq c$ فإن $a\cdot c\leq b\cdot c$

يدعى الحقل المزود بعلاقة ترتيب $\leq$ ويحقق الخصائص من O1 حتى O5 حقل مرتب.

4. مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

تحوي مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ كل الأعداد النسبية والأعداد الجبرية π,e وغيرها. يمكن تمثيل مجموعة الأعداد الحقيقية بمستقيم يدعى مستقيم الأعداد الحقيقية الشكل رقم 1. ولايوجد في هذه المجموعة أي ثغرات.



الشكل رقم 1 مستقيم الأعداد الحقيقية

تعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية عمليتي الجمع والجداء وناتج جمع عددين حقيقيين a,b هو عدد حقيقي وناتج جداء عددين حقيقيين a,b هو عدد حقيقي وتحقق عملية الجمع وعملية الجداء في مجموعة الأعداد الحقيقية الخصائص A1 حتى A4 و M1 حتى M4 و DL. وتعرف علاقة الترتيب $\leq$ على $\mathbb{R}$ وتحقق الخصائص O1 حتى O5. لذلك فإن $\mathbb{R}$ هي حقل مرتب مثل $\mathbb{Q}$.

نظرية:

من خصائص الحقل نجد أن النقاط التالية محققة:

إذا كان لدينا $a+c=b+c$ فإن $a=b$

I. $\forall a\in\mathbb{R}, a\cdot 0=0$

II. $\forall a,b\in\mathbb{R}, (-a)\cdot b=-a\cdot b$

III. $\forall a,b\in\mathbb{R}, (-a)\cdot(-b)=a\cdot b$

IV. $ac=bc, c\neq 0\Rightarrow a=b$

V. $a\cdot b=0\Rightarrow a=0 \, or \, b=0$

نظرية:

نجد من خصائص الحقل المرتب:

I. إذا كان $a\leq b$ فإن $-b\leq -a$

II. إذا كان $a\leq b$ و $c\leq 0$ إذا فإن $b\cdot c\leq a\cdot c$

III. إذا كان $a\geq 0, b\geq 0$ فإن $a\cdot b\geq 0$

IV. $\forall a\in\mathbb{R}, a^2\geq 0$

V. $1>0$

VI. إذا كان $a>0$ فإن $a^{-1}>0$

VII. إذا كان $0<a<b$ فإن $0<b^{-1}<a^{-1}$

1.4. تعريف القيمة المطلقة والمسافة

تعريف القيمة المطلقة:

$$|a| = a \text{ if } a \geq 0$$
$$|a| = -a \text{ if } a < 0$$

تدعى $|a|$ القيمة المطلقة ل a.

تعريف المسافة:

تعرف المسافة بين عددين حقيقيين a,b كما يلي:

$$dist(a,b) = |a-b|$$

تمثل $dist(a,b)$ المسافة بين a و b.

نظرية خصائص القيمة المطلقة:

I. $\forall a \in \mathbb{R}, |a| \geq 0$

II. $\forall a,b \in \mathbb{R}, |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

III. $\forall a,b \in \mathbb{R}, |a+b| \leq |a| + |b|$

IV. $\forall a,b \in \mathbb{R}, \left||a| - |b|\right| \leq |a-b|$

نظرية:

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R}, dist(a,b) \leq dist(a,c) + dist(b,c)$$

2.4. العنصر الراجح والعنصر القاصر والحد الأعلى $SupA$ والحد الأدنى $InfA$ وأكبر عنصر $MaxA$ وأصغر عنصر $MinA$

تعريف:

لتكن A مجموعة غير خالية من $\mathbb{R}$:

1. نقول إن $z \in \mathbb{R}$ عنصر راجح على A إذا وفقط إذا كان $\forall a \in A, a \leq z$
2. نقول إن $z \in \mathbb{R}$ عنصر قاصر عن A إذا وفقط إذا كان $\forall a \in A, z \leq a$
3. نقول إن $z \in \mathbb{R}$ هو حد أعلى لـ A ونرمز له بـ $\sup A$ إذا وفقط إذا كان:
   - z عنصر راجح على A أي $\forall a \in A, a \leq z$
   - z هو أصغر عنصر راجح على A أي $\forall \varepsilon \in A, \exists b \in A, z - \varepsilon \leq b$
4. نقول إن $z \in \mathbb{R}$ هو حد أدنى لـ A ونرمز له بـ $\inf A$ إذا وفقط إذا كان:
   - z عنصر قاصر على A أي $\forall a \in A, z \leq a$
   - z هو أكبر عنصر قاصر على A أي $\forall \varepsilon \in A, \exists b \in A, b \leq z + \varepsilon$

ملاحظة:

1. إذا وجد حد أعلى لـ A ($\sup A$) فإنه يكون وحيداً.
2. إذا وجد حد أدنى لـ A ($\inf A$) فإنه يكون وحيداً.

تعريف:

- نقول عن عنصر $a \in \mathbb{R}$ إنه أكبر عنصر في A ونكتب $a = \max A$ إذا وفقط إذا كان $a \in A$ و $a = \sup A$.
- ونقول بشكل مماثل عن عنصر $b \in \mathbb{R}$ إنه أصغر عنصر في A ونكتب $b = \min A$ إذا وفقط إذا كان $b \in A$ و $b = \inf A$.

نظرية خاصية الحد الأعلى لمجموعة الأعداد الحقيقية

أي مجموعة A جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$ لها عنصر راجح (محدودة من الأعلى) يوجد لها حد أعلى $\sup A$ وهو عدد حقيقي.

ملاحظة:

لاتحقق مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ خاصية الحد الأعلى. فالمجموعة:

$$A = \left\{ r \in \mathbb{Q} : 0 \leq r \leq \sqrt{2} \right\} = \left\{ r \in \mathbb{Q} : 0 \leq r, r^2 \leq 2 \right\}$$

لاتمتلك حد أعلى في مجموعة الأعداد النسبية.

نظرية خاصية الحد الأدنى لمجموعة الأعداد الحقيقية

لكل مجموعة جزئية غير فارغة A محدودة من الأسفل (تمتلك عنصر قاصر) من $\mathbb{R}$ فهي تمتلك حد أصغر $\inf A$.

ملاحظة:

نقول عن مجموعة A أنها محدودة إذا كان لها عنصر راجح وعنصر قاصر لذلك تكون A محدودة إذا وجد عددين حقيقيين m, M بحيث $A \subseteq [m,M]$

ملاحظة:

1. إذا كان لدينا $a>0$ يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $\frac{1}{n}<a$
2. إذا كان لدينا $b>0$ يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $b<n$

مبرهنة خاصة أرخميدس

أياً كان العدد الحقيقي الموجب تماماً $a>0$ وأياً كان العدد الحقيقي الموجب تماماً $b>0$ يوجد عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$ بحيث $n \cdot a > b$.

مثال:

تحوي كل مجموعة منتهية غير فارغة من $\mathbb{R}$ اكبر عنصر وأصغر عنصر:

$$\max\{1,2,3,4,5\}=5; \min\{1,2,3,4,5\}=1$$

$$\max\left\{0,\pi,-7,e,3,\frac{4}{3}\right\}=\pi$$

$$\max\{n \in \mathbb{Z}: -4<n\le 100\}=100; \min\{n \in \mathbb{Z}: -4<n\le 100\}=-3$$

3.4. المجالات العددية

لنأخذ a,b حيث $a<b$ فإن:

المجال المغلق: $[a,b]=\{x \in \mathbb{R}: a \le x \le b\}$

المجال المفتوح: $]a,b[=\{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$

المجال نصف المفتوح: $[a,b[=\{x \in \mathbb{R}: a \le x < b\}$ ، $]a,b]=\{x \in \mathbb{R}: a < x \le b\}$

ملاحظة:

1. إذا كان $a,b\in\mathbb{R}$ و $a<b$ عندها: $\max\{[a,b]\}=b;\min\{[a,b]\}=a$

$$\sup\{[a,b]\}=\sup\{]a,b[\}=\sup\{]a,b]\}=\sup\{[a,b[\}=b$$

مثال:

لتكن لدينا المجموعة $A=\left\{\frac{1}{n^2}:n\in\mathbb{N},n\geq 3\right\}$ فإن A محدودة من الأسفل ومن الأعلى. تحوي هذه المجموعة اكبر عنصر ولا تحوي أصغر عنصر فلدينا: $\max A=\sup A=\frac{1}{9};\inf A=0$

1. لاتحوي المجموعة $]a,b[$ أكبر عنصر ولا أصغر عنصر.
2. لاتحوي المجموعتين $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ أكبر عنصر ولا أصغر عنصر.
3. لاتحوي المجموعة $\mathbb{N}$ أكبر عنصر ولكن تحوي أصغر عنصر $\min\{\mathbb{N}\}=1$
4. تحوي المجموعة $\{r\in\mathbb{Q}:0\leq r\leq\sqrt{2}\}$ أصغر عنصر وهو الصفر 0 ولكن لاتحوي أكبر عنصر لأن $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.
5. لاتحوي المجموعة التالية اكبر عنصر ولا أصغر عنصر:

$$\left\{n^{(-1)^n}:n\in\mathbb{N}\right\}=\{1^{-1},2,3^{-1},4,5^{-1},6,7^{-1},\ldots\}$$

مبرهنة:

إذا كان $x\in\mathbb{R}$ فيوجد عدد صحيح وحيد $E(x)$ محقق للعلاقة:

$$E(x)\leq x<E(x)+1$$

نسمي $E(x)$ الجزء الصحيح للعدد x.

مبرهنة كثافة $\mathbb{Q}$:

إذا كان $a,b\in\mathbb{R}$ و $a<b$ يوجد عدد نسبي $r\in\mathbb{Q}$ بحيث $a<r<b$. أي أن مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}$.

نتيجة:

1. يوجد بين كل عددين حقيقيين مختلفين عدد لانهائي من الأعداد النسبية.
2. يوجد بين كل عددين حقيقيين مختلفين عدد لانهائي من الأعداد الحقيقية غير النسبية.

5. تعريف مجموعة الاعداد الحقيقية الموسعة

تعريف: رمزي اللانهاية $+\infty,-\infty$ هامين جداً على الرغم من أنهما لاينتميان إلى مجموعة الأعداد الحقيقية. نعرف مجموعة الأعداد الحقيقية الموسعة $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

مبرهنة:

لكل مجموعة غير خالية من $\overline{\mathbb{R}}$ حد اعلى وحد ادنى.

تعريف العمليات الحسابية في $\overline{\mathbb{R}}$

1. $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$
2. $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$
3. أياً كان $x\in\mathbb{R}$ فإن: $\forall x\in\mathbb{R}, x+(+\infty)=(+\infty)+x=+\infty,$ $x+(-\infty)=(-\infty)+x=-\infty$
4. أياً كان $x\in\mathbb{R}_+^*\cup\{+\infty\}$ فإن: $x\cdot(+\infty)=+\infty\cdot(x)=+\infty$ ، $x\cdot(-\infty)=-\infty\cdot(x)=-\infty$
5. أياً كان $x\in\mathbb{R}_-^*\cup\{-\infty\}$ فإن: $x\cdot(+\infty)=+\infty\cdot(x)=-\infty$ ، $x\cdot(-\infty)=-\infty\cdot(x)=+\infty$
6. $(+\infty)+(-\infty)$ غير معرف.
7. ضرب الصفر 0 باللانهاية الموجبة أو السالبة غير معرف.

مذاكرة حقل الأعداد الحقيقية

العلامة العظمى: 100 **علامة النجاح: 50** **المدة: ساعة ونصف**

لكل سؤال خمس علامات

اختر الإجابة الصحيحة للأسئلة التالية:

1. العلاقة الصحيحة بين مجموعات الأعداد هي:
   a) $\mathbb{Z}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ التي بدورها مجموعة جزئية من $\mathbb{Q}$
   b) $\mathbb{N}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ التي بدورها مجموعة جزئية من $\mathbb{Z}$
   c) $\mathbb{N}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{Z}$ التي بدورها مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$
   d) $\mathbb{N}$ مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ التي بدورها مجموعة جزئية من $\mathbb{Z}$

مساعدة: راجع فقرة الأعداد الحقيقية.

2. العدد 45.5678 هو عدد
   a) طبيعي
   b) نسبي
   c) غير نسبي
   d) صحيح

مساعدة: راجع فقرة الأعداد النسبية.

3. القيمة المطلقة لعدد حقيقي لايساوي الصفر تكون دوماً:
   a) غير سالبة
   b) نسبية
   c) غير موجبة
   d) غير نسبية

مساعدة: راجع تعريف القيمة المطلقة فقرة الأعداد الحقيقية.

4. العدد $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ هو عدد
   a) نسبي
   b) جبري
   c) عشري
   d) جواب آخر

مساعدة: راجع تعريف العدد الجبري فقرة مجموعة الأعداد النسبية.

5. ناتج $\frac{3^4 \times 3^8}{3^{14}}$ هو

a) $1/9$
b) $1/3$
c) 9
d) جواب آخر

مساعدة: الحل بالاستناد إلى معلومات سابقة حول العمليات الحسابية وحل المعادلات البسيطة من الدرجة الأولى والثانية.

6. ناتج $\sqrt{\frac{(5\times10^{-6})(4\times10^{2})}{8\times10^{5}}}$ هو:

a) 0.0005
b) 5×10^{-5}
c) 25×10^{-4}
d) جواب آخر

مساعدة: الحل بالاستناد إلى معلومات سابقة حول العمليات الحسابية وحل المعادلات البسيطة من الدرجة الأولى والثانية.

7. ناتج $\log_{2/3}\left(\frac{27}{8}\right)$ هو

a) -3
b) 3
c) $1/3$
d) جواب آخر

مساعدة: الحل بالاستناد إلى معلومات سابقة حول العمليات الحسابية وحل المعادلات البسيطة من الدرجة الأولى والثانية.

.8 بسّط الكسر التالي $\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}$؟

a) $\frac{x-2}{x+1}$

b) $\frac{x+2}{x+1}$

c) $\frac{x+2}{x+1}$

d) جواب آخر

مساعدة: الحل بالاستناد إلى معلومات سابقة حول العمليات الحسابية وحل المعادلات البسيطة من الدرجة الأولى والثانية.

.9 ماهي قيم x التي تحقق $x+3(2-x)\geq 4-x$؟

a) $x\leq 2$

b) $x\geq 2$

c) $x\leq -2$

d) جواب آخر

مساعدة: الحل بالاستناد إلى معلومات سابقة حول العمليات الحسابية وحل المعادلات البسيطة من الدرجة الأولى والثانية.

.10 ليكن لدينا p عدد فردي أي $p=2k+1;k\in\mathbb{N}$ عندئذ يكون p^n ؟

a) زوجي

b) فردي

c) غير معروف

d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة الأعداد الطبيعية برهان القضايا الرياضية طريقة الاستقراء الرياضي.

.11 المتراجحة التالية $(1+h)^n\geq 1+nh$؟

a) صحيحة

b) خاطئة

مساعدة: راجع فقرة الأعداد الطبيعية برهان القضايا الرياضية طريقة الاستقراء الرياضي.

.12 العلاقة $1+\sum_{k=1}^{n}8k=(2n+1)^2$؟

a) صحيحة

b) خاطئة

مساعدة: راجع فقرة الأعداد الطبيعية برهان القضايا الرياضية طريقة الاستقراء الرياضي.

.13 كل عدد من الشكل $4^{2n+1}+3^{n+2}, \forall n\in\mathbb{N}$ هو من مضاعفات؟

a) 11

b) 13

c) 17

d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة الأعداد الطبيعية برهان القضايا الرياضية طريقة الاستقراء الرياضي.

.14 اللانهاية تحقق العلاقة التالية:

a) $\infty\in\mathbb{R}$

b) $\infty\in\mathbb{Q}$

c) $\infty\in\overline{\mathbb{R}}$

d) جواب آخر

مساعدة: راجع تعريف مجموعة الأعداد الحقيقية الموسعة فقرة الأعداد الحقيقية.

.15 $\max([0,5])$ هو:

a) 5

b) 6

c) غير موجود

d) 0

مساعدة: راجع تعريف أكبر وأصغر عنصر ضمن مجموعة max ضمن فقرة الأعداد الحقيقية.

.16 $\max(]0,5[)$ هو:

a) 5

b) 6

c) غير موجود

d) 0

مساعدة: راجع تعريف أكبر وأصغر عنصر ضمن مجموعة max ضمن فقرة الأعداد الحقيقية.

.17 $\min(]0,1])$ هو :

a) 0
b) -1
c) 1
d) غير موجود

مساعدة: راجع تعريف أكبر وأصغر عنصر ضمن مجموعة max ضمن فقرة الأعداد الحقيقية.

.18 $\min([0,1])$ هو :

a) 0
b) -1
c) 1
d) غير موجود

مساعدة: راجع تعريف أكبر وأصغر عنصر ضمن مجموعة max ضمن فقرة الأعداد الحقيقية.

.19 العدد 3 هو عنصر راجح على $[0,2]$ ؟

a) صح
b) خطأ

مساعدة: تعريف العنصر القاصر والعنصر الراجح على مجموعة ضمن فقرة الأعداد الحقيقية.

.20 العدد 1 هو عنصر قاصر للمجال $[-5,-1]$

a) صح
b) خطأ

مساعدة: تعريف العنصر القاصر والعنصر الراجح على مجموعة ضمن فقرة الأعداد الحقيقية.

الإجابات الصحيحة

الإجابة الصحيحة	السؤال
الخيار الثالث	1
الخيار الثاني	2
الخيار الأول	3
الخيار الثاني	4
الخيار الأول	5
الخيار الثاني	6
الخيار الأول	7
الخيار الأول	8
الخيار الأول	9
الخيار الثاني	10
الخيار الأول	11
الخيار الأول	12
الخيار الثاني	13
الخيار الثالث	14
الخيار الأول	15
الخيار الثالث	16
الخيار الرابع	17
الخيار الأول	18
الخيار الأول	19
الخيار الثاني	20