البرامج الخطية التامة (بأعداد صحيحة) (Integer linear programming)

يعطى شكل البرنامج الخطي التام (LPI) بحالة تعظيم على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} \max z &= c^t x \\ st \quad Ax &= b \\ x &\in \mathbb{Z}_+^n \end{aligned}$$

ملاحظة. لنأخذ البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \max z &= c^t x \\ st \quad Ax &\le b \\ x &\in \mathbb{Z}_+^n \end{aligned}$$

حيث A و b مؤلفة من أعداد نسبية، يمكن على الدوام ضرب قيود البرنامج الخطي بثابت موجب كبير نسبياً بحيث يتم نقل متراجحات القيود $Ax \le b$ إلى متراجحات قيود مكافئة $\bar{A}x \le \bar{b}$ حيث $\bar{A}$ و $\bar{b}$ مؤلفة من أعداد صحيحة و بإضافة المتحولات الفائضة على تللك المتراجحات نجد أن

$$\begin{aligned} \max z &= c^t x \\ st \quad \bar{A}x + t &= \bar{b} \\ x &\in \mathbb{Z}_+^n \\ t &\in \mathbb{Z}_+^m \end{aligned}$$

مثال. لنأخذ البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \max z &= 0.25x_1 + x_2 \\ 0.5x_1 + x_2 &\le 1.75 \\ x_1 + 0.3x_2 &\le 1.5 \\ x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

بضرب معاملات القيد الأول بـ 4 و معاملات القيد الثاني بـ 10 نجد البرنامج المكافيء التالي:

$$\max z = 0.25x_1 + x_2$$
$$2x_1 + 4x_2 + t_1 = 7$$
$$10x_1 + 3x_2 + t_2 = 15$$
$$x_1, x_2, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_+$$

طريقة قاطع غومري للبرامج الخطية التامة أو الصحيحة

لنأخذ البرنامج الخطي التام (LPI)

$$\begin{aligned} \max z &= c^t x \\ st \quad Ax &= b \qquad \text{LPI(I)} \\ x &\in \mathbb{Z}_+^n \end{aligned}$$

البرنامج الخطي المتعلق به (LPII) هو

$$\begin{aligned} \max z &= c^t x \\ st \quad Ax &= b \qquad \text{LP(II)} \\ x &\in \mathbb{R}_+^n \end{aligned}$$

بتطبيق خوارزمية السمبلكس على (LPII) ، نحصل على جدول السمبلكس النهائي التالي:

B	c_B	b	x_1	....	x_m	x_{m+1}	....	x_n
x_1	.	b_1^f	1	....	0	$a^f_{1,m+1}$	......	$a^f_{1,n}$
x_2	.	b_2^f	0	......	0	$a^f_{2,m+1}$	.....	$a^f_{2,n}$
.		.	.		.	.		
.		.	.		.	.		
.		.	.		.	.		
x_m	.	b_m^f	0	....	1	$a^f_{m,m+1}$	......	$a^f_{m,n}$

حيث نرمز بـ $I(B)$ لمجموعة أدلة متغيرات القاعدة $I(B)=\{1,2,....,m\}$ و بـ $J(B)$ لمجموعة أدلة متغيرات خارج القاعدة $J(B)=\{m+1,m+2,...,n\}$

يمكن كتابة LPI(I) و LP(II) بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} &\max z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &b_i^f = x_i + \sum_{j\in J(B)} a^f_{i,j} x_j \qquad i\in I(B) \quad \text{LPI(I)} \\ &x_j \in \mathbb{Z}_+ \qquad j\in\{1,2,.....,n\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\max z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &b_i^f = x_i + \sum_{j\in J(B)} a^f_{i,j} x_j \qquad i\in I(B) \quad \text{LP(II)} \\ &x_j \in \mathbb{R}_+ \qquad j\in\{1,2,.....,n\} \end{aligned}$$

نرمز بـ $[\alpha]$ إلى أكبر عدد صحيح أصغر أو يساوي العدد الحقيقي α، و يمكن على الدوام كتابة التالي:

$$\begin{cases} b_i^f = [b_i^f] + f_i \\ where\ 0 \le f_i < 1 \end{cases} \qquad i\in I(B)$$

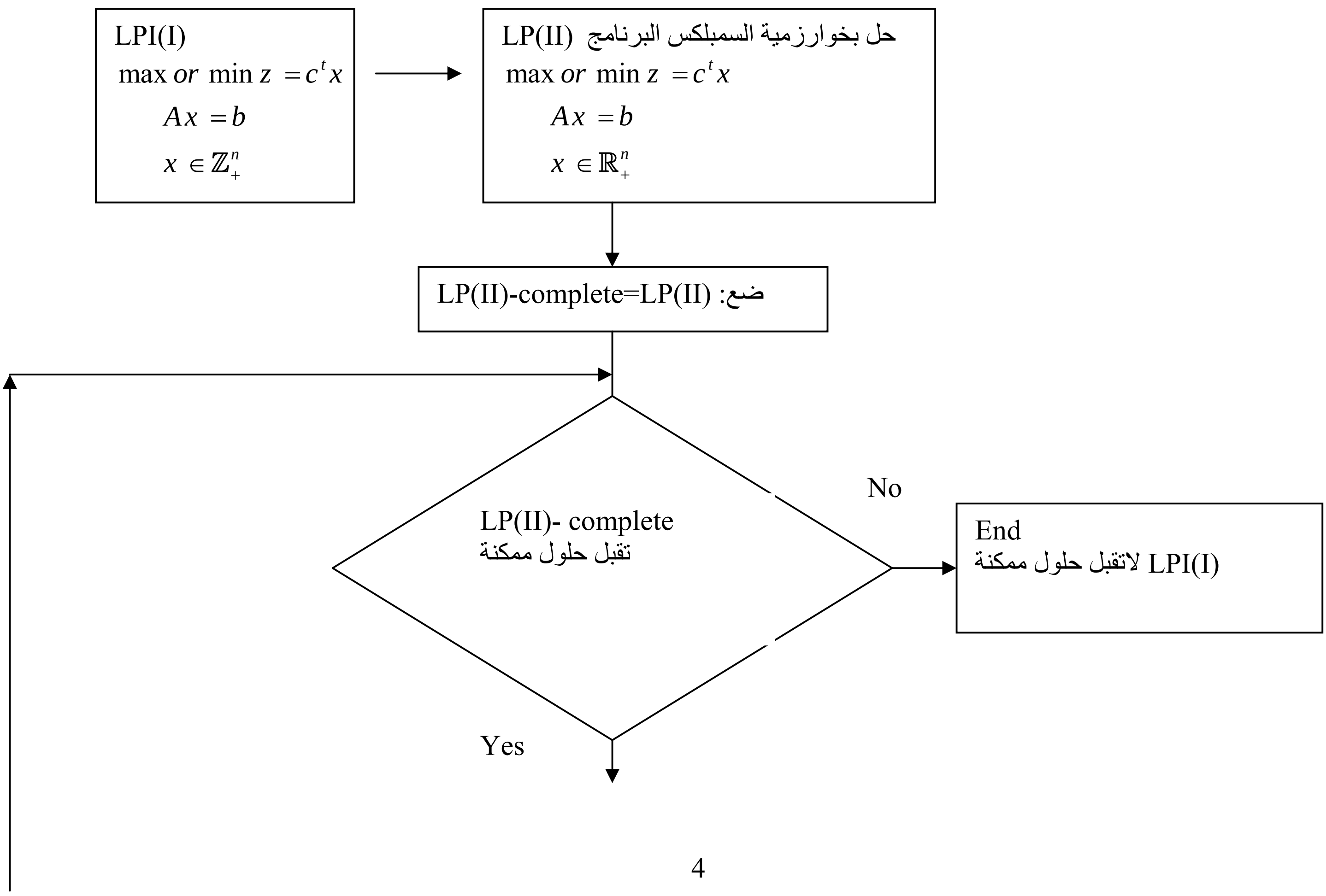
$$\begin{cases} a^f_{i,j} = [a^f_{i,j}] + f_{i,j} \\ where\ 0 \le f_{i,j} < 1 \end{cases} \qquad i \in I(B)$$

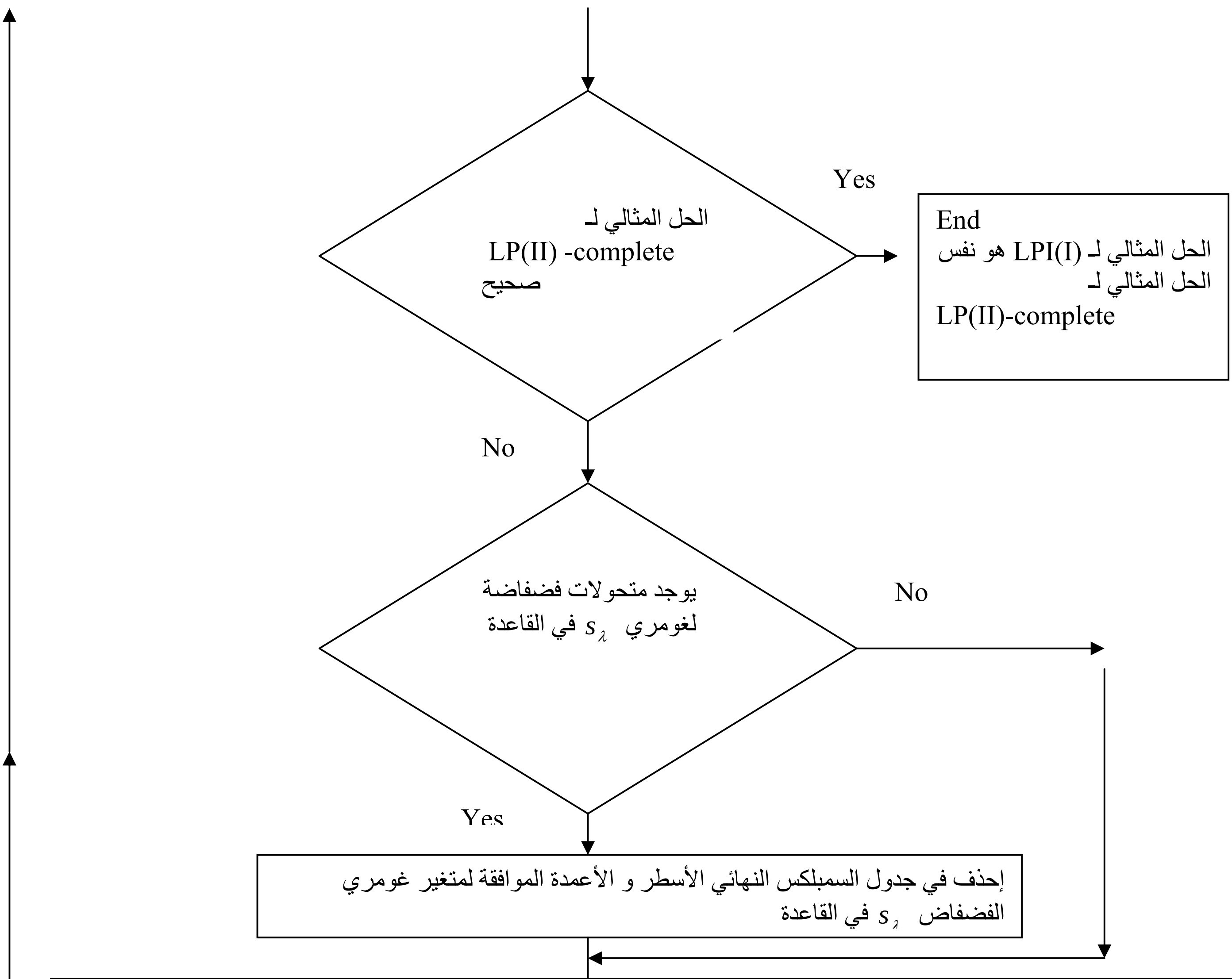
نظرية. الشرط اللازم لكون أي حل ممكن للمسألة LP(II) صحيحاً هو أن يكون

$$f_i + s_i = \sum_{j \in J(B)} f_{i,j} x_j \quad i \in I(B), \quad j \in J(B)$$ (**قاطع أو حاجز غومري**)

حيث أن s_i هو متغير صحيح فضفاض لغومري: $s_i \in \mathbb{Z}_+$

المخطط التدفقي لخوارزمية غومري





LP(II)- complete

$$\text{Notations}\begin{cases} I(B) = \{\text{indices set of } basic \text{ variables}\} \\ J(B) = \{\text{indices } set \text{ of } non-basic \text{ variables}\} \\ [\alpha] = \text{the greatest integer } less\ than\ or\ equal\ to\ \alpha \\ b_i^f = [b_i^f] + f_i \qquad i \in I(B) \\ a_{i,j}^f = [a_{i,j}^f] + f_{i,j} \qquad i \in I(B), j \in J(B) \end{cases}$$

1. ليكن b_λ^f متغير معرف على الشكل التالي: $f_\lambda = \max_{i \in I(B)} f_i$
2. شكل قاطع غومري معتمد على b_λ^f : $f_\lambda = \sum_{j \in J(B)} f_{\lambda,j} x_j - s_\lambda$
3. أتمم أو أكمل LP(II) بإضافة القيد التالي على جدول السمبلكس النهائي

$$-f_\lambda = -\sum_{j \in J(B)} f_{\lambda,j} x_j + s_\lambda$$

4. حل LP(II)-complete باستخدام خوارزمية السمبلكس للمرافق

البرمجة الخطية التامة أو الصحيحة(أمثلة)

مثال 1. لنأخذ البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 2x_2 \\ st \quad & -x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1 + 2x_2 \le 10 \\ & 7x_1 + 2x_2 \le 28 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 2x_2 \\ st \quad & -x_1 + x_2 + t_1 = 1 \\ & x_1 + 2x_2 + t_2 = 10 \qquad (LPI(I)) \\ & 7x_1 + 2x_2 + t_3 = 28 \\ & x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 2x_2 \\ st \quad & -x_1 + x_2 + t_1 = 1 \\ & x_1 + 2x_2 + t_2 = 10 \qquad (LP(II)) \\ & 7x_1 + 2x_2 + t_3 = 28 \\ & x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 \ge 0 \end{aligned}$$

يعطى جدول السمبلكس النهائي على الشكل التالي:

max			3	2	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
t_1	0	1/2	0	0	1	-3/4	¼
x_2	2	7/2	0	1	0	7/12	-1/12
x_1	3	3	1	0	0	-1/6	1/6
		-16	0	0	0	-2/3	-1/3

يعطى الحل المثالي كما يلي: $x_1=3, x_2=7/2, t_1=1/2, t_2=0, t_3=0, z=16$ و هو غير صحيح

$$f_\lambda = \max_{i\in I(B)} f_i \quad st \; x_i^f = [x_i^f]+f_i \quad 0\le f_i <1$$

$$\left.\begin{array}{l} 0.5=0+0.5 \\ 3.5=3+0.5 \\ 3=3+0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_\lambda = \max\{0.5, 0.5, 0\} = 0.5$$

إذاً $\lambda=1$ و منه القيد الأول

$$f_\lambda = \sum_{j\in J(B)} f_{\lambda,j} x_j - s_1 \quad st \; a_{\lambda,j} = [a_{\lambda,j}^f]+f_{\lambda,j} \;, j\in J(B)$$

حيث s_1 متحول صحيح فضفاض لغومري: $s_1 \in \mathbb{Z}^+$

$$0.5 = 0.25t_2 + 0.25t_3 - s_1 \text{(قاطع غومري)}$$

max			3	2	0	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	s_1
t_1	0	1/2	0	0	1	-3/4	1/4	0
x_2	2	7/2	0	1	0	7/12	-1/12	0
x_1	3	3	1	0	0	-1/6	1/6	0
s_1 ←	0	-1/2	0	0	0	-1/4	**-1/4**	1
		-16	0	0	0	-2/3	-1/3 ↑	0

max			3	2	0	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	s_1
t_1	0	0	0	0	1	-1	0	1
x_2	2	11/3	0	1	0	2/3	0	-1/3
x_1	3	8/3	1	0	0	-1/3	0	2/3
t_3	0	2	0	0	0	1	1	-4
		-46/3	0	0	0	-1/3	0	-4/3

الحل المثالي $x_1=8/3, x_2=11/3, t_1=0, t_2=0, t_3=2, s_1=0, z=46/3$
ليس صحيحاً

إذاً $\lambda=2$ و منه القيد الثاني

$$f_\lambda = \max\{2/3, 2/3, 0, 0\} = 2/3$$

$$2/3 = 2/3t_2 + 2/3s_1 - s_2 \text{(قاطع غومري)}, \; s_2\in\mathbb{Z}^+$$

max			3	2	0	0	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	s_1	s_2
t_1	0	0	0	0	1	-1	0	1	0
x_2	2	11/3	0	1	0	2/3	0	-1/3	0
x_1	3	8/3	1	0	0	-1/3	0	2/3	0
t_3	0	2	0	0	0	1	1	-4	0
s_2	0	-2/3	0	0	0	**-2/3**	0	-2/3	1
		-46/3	0	0	0	-1/3	0	-4/3	0

max			3	2	0	0	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	s_1	s_2
t_1	0	1	0	0	1	0	0	2	-3/2
x_2	2	3	0	1	0	0	0	-1	1
x_1	3	3	1	0	0	0	0	1	-1/2
t_3	0	1	0	0	0	0	1	-5	3/2
t_2	0	1	0	0	0	1	0	1	-3/2
		-15	0	0	0	0	0	-1	-1/2

الحل المثالي التالي: $x_1 = 3, x_2 = 3, t_1 = 1, t_2 = 1, t_3 = 1, z = 15$ صحيحاً

مثال 2. لنأخذ البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 + 2x_2 \\ st \quad & x_1 \le 3/2 \\ & x_2 \le 5/2 \\ & 5x_1 + 6x_2 \ge 15 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 + 2x_2 \\ st \quad & 2x_1 + t_1 = 3 \\ & 2x_2 + t_2 = 5 \qquad (LPI\,(I)) \\ & 5x_1 + 6x_2 - t_3 = 15 \\ & x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
&\min z = 3x_1 + 2x_2 \\
&st \quad 2x_1 + t_1 = 3 \\
&\quad 2x_2 + t_2 = 5 \qquad (LP(II)) \\
&\quad 5x_1 + 6x_2 - t_3 = 15 \\
&\quad x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}^+
\end{aligned}
$$

يعطى جدول السمبلكس النهائي للمسألة باستخدام خوارزمية السمبلكس للمرافق:

min			3	2	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
t_1	0	1	0	0	1	4/5	2/5
x_1	3	1	1	0	0	-2/5	-1/5
x_2	2	5/3	0	1	0	1/3	0
		19/3	0	0	0	-8/15	-3/5

الحل المثالي $x_1 = 1, x_2 = 5/3, t_1 = 1, t_2 = 0, t_3 = 0, z = 19/3$ ليس صحيحاً

$f_\lambda = 2/3$

$2/3 = 1/3t_2 - s_1$

min			3	2	0	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	s_1
t_1	0	1	0	0	1	4/5	2/5	0
x_1	3	1	1	0	0	-2/5	-1/5	0
x_2	2	5/3	0	1	0	1/3	0	0
s_1	0	-2/3	0	0	0	**-1/3**	0	1
		19/3	0	0	0	-8/15	-3/5	0

min			3	2	0	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	s_1
t_1	0	-3/5	0	0	1	0	2/5	12/5
x_1	3	9/5	1	0	0	0	-1/5	-6/5
x_2	2	1	0	1	0	0	0	1
t_2	0	2	0	0	0	1	0	-3
		37/5	0	0	0	0	-3/5	-8/5

$-3/5<0$ and $(0, 0, 1, 2/5, 12/5) \geq 0$

و ليس للمسألة LP(II) حل ممكن ، و بالتالي ليس للمسألة LPI(I) حل ممكن.

مسائل

حل المسائل الخطية التالية بأعداد صحيحة (بوحدات تامة)

1.

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 3x_2 \\ st \quad & -x_1 + x_2 \le 1 \\ & 2x_1 \le 3 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ st \quad & 3.5x_1 + 2x_2 \le 6.5 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x_2 \\ st \quad & -4x_1 + 3x_2 \le 0 \\ & 4x_1 + 3x_2 \le 24 \\ & 2x_2 \le 5 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \min z &= 4.5x_1 + 3.5x_2 \\ st \quad & 2x_1 + x_2 \ge 5 \\ & 3x_1 + 5x_2 \ge 15 \\ & x_1 + x_2 \le 5 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \max z &= 0.25x_1 + x_2 \\ st \quad & 0.5x_1 + x_2 \le 1.75 \\ & x_1 + 0.3x_2 \le 1.5 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 2x_2 \\ st \quad & 0.5x_1 + 0.5x_2 \le 3.85 \\ & -0.5x_1 + 0.5x_2 \le 0.65 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 + 2x_2 \\ st \quad & 4x_1 - 5x_2 \ge 0 \\ & 4x_1 + 5x_2 \le 20 \\ & x_2 \ge 1.1 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 + x_2 \\ st \quad & 2x_1 - x_2 \ge -2 \\ & x_1 - x_2 \le 2 \\ & x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$