الفصل السادس: التكاملات Integrals

الكلمات المفتاحية:

التكامل المحدود، التكامل غير المحدود، التابع الاصلي، خصائص التكامل، التكامل بتغيير المتحول، التكامل بالتجزئة، الطرق العددية لحساب التكاملات المحدودة، المعادلات التفاضلية، المعادلات التفاضلية الخطية، المعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الاولى والثانية بامثال ثابتة، المعادلة المتجانسة، المعادلة غير المتجانسة، الحل العام لمعادلة تفاضلية متجانسة، الحل الخاص لمعادلة تفاضلية، الشروط الابتدائية.

الملخص:

يقدم هذا الفصل المفاهيم الأساسية للتكامل المحدود والتكامل غير المحدود أو التابع الأصلي. تقدم خصائص التكاملات المحدودة ونظرية القيمة الوسطى للتكاملات. يعرّف التابع الأصلي أو التكامل غير المحدود لتابع وتقدّم النظرية الأساسية للحساب. تعرض التوابع الاصلية أو التكاملات غير المحدودة لبعض التوابع الاساسية. تقدّم طريقة التكامل بتغيير المتحول وطريقة التكامل بالتجزئة وطريقة تكامل التوابع الكسرية. تقدم ثلاث طرق عددية لحساب التكاملات المحدودة هي طريقة المستطيلات وطريقة شبه المنحرف وطريقة سمبسون. يعرض تطبيق حساب طول قوس باستخدام التكامل المحدود لتابع. تقدّم المعادلات التفاضلية الخطية بامثال ثابتة من الدرجة الأولى والثانية وطرق حلها.

الأهداف التعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على النقاط التالية:

- خصائص التكاملات المحدودة
- نظريتي القيمة الوسطى للتكاملات
- التابع الأصلي أو التكامل غير المحدود والنظرية الأساسية في الحساب
- التوابع الاصلية لبعض التوابع المعروفة
- التكامل بتغيير المتحول والتكامل بالتجزئة ومكاملة التوابع الكسرية
- الطرق العددية لحساب التكاملات
- المعادلات التفاضلية الخطية مع أمثال ثابتة من الدرجة الأولى ومن الدرجة الثانية وحلها

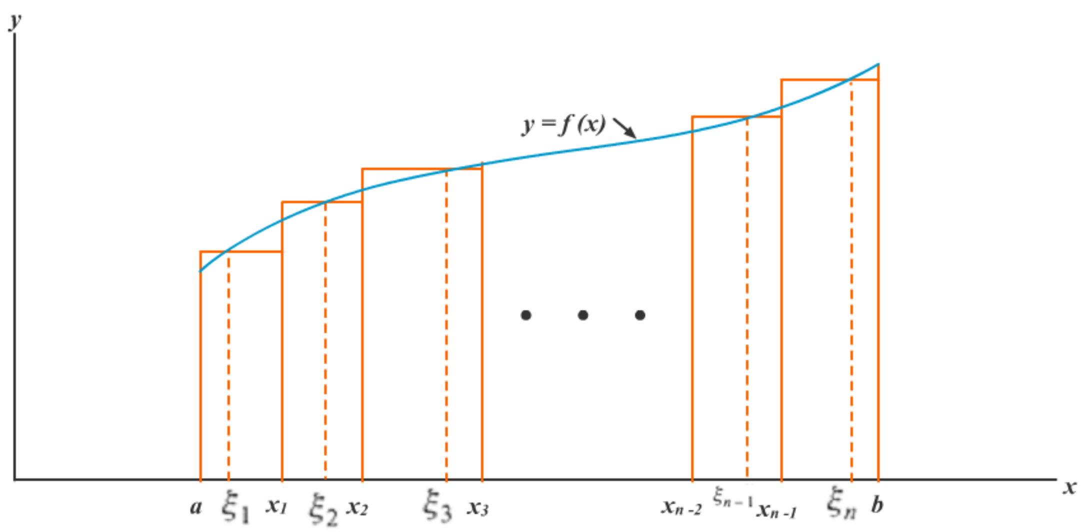
مقدمة :

التكامل هو العملية العكسية للاشتقاق. إذا كان لدينا التابع $f(x)$ والتابع $F(x)$ بحيث $F'(x)=f(x)$ نقول أنّ التابع $F(x)$ هو التابع الأصلي للتابع $f(x)$. تطورت التكاملات لحل مسائل تحديد أطوال ومساحات وحجوم. ستقدم النقاط التالية في هذا الفصل:

- خصائص التكاملات المحدودة
- نظريتي القيمة الوسطى للتكاملات
- التابع الأصلي أو التكامل غير المحدود
- النظرية الأساسية في الحساب
- التوابع الاصلية لبعض التوابع المعروفة
- التكامل بتغيير المتحول
- التكامل بالتجزئة
- مكاملة التوابع الكسرية
- الطرق العددية لحساب التكاملات
- المعادلات التفاضلية الخطية مع أمثال ثابتة من الدرجة الأولى ومن الدرجة الثانية

1. التكامل المحدود

ليكن المطلوب تحديد المساحة المحصورة بين بيان التابع $y=f(x)$ والمحور الأفقي Ox والمستقيمين العمودين $x=a, x=b$ (الشكل 1).



الشكل 1 التوصيف الهندسي للتكامل المحدود

لنقسّم المجال $x \in [a,b]$ إلى n مجال جزئي بالنقاط $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ ونختار في كل مجال جزئي $]a, x_1[,]x_1, x_2[,]x_2, x_3[,]x_3, x_4[, \ldots,]x_{n-1}, b[$ نقطة ليصبح لدينا n نقطة ولتكن $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ ونشكّل المجموع $f(\xi_1)(x_1 - a) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(b - x_n)$ ونكتب $x_0 = a, x_n = b, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ نجد $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$ يمثّل هذا المجموع مساحة كل المستطيلات في الشكل 1. لنزيد عدد المجالات الجزئية n بحيث يصبح لدينا $\Delta x_k \to 0$ وبذلك نحصل على التكامل المحدود بين a و b للتابع $f(x)$ ونكتب:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

يدعى المجال $[a,b]$ مجال التكامل وتدعى النقطتان a و b طرفي التكامل. يمكن إيجاد النهاية في العلاقة السابقة إذا كان التابع مستمراً على المجال $x \in [a,b]$ (أو مستمرّاً بشكل قطّعي). نقول أنّ التابع $f(x)$ قابل للتكامل على المجال $[a,b]$ إذا كانت النهاية السابقة موجودة.

هندسياً تمثّل قيمة هذا التكامل المحدود المساحة المحصورة بين بيان التابع $y = f(x)$ والمحور Ox والمستقيمين الشاقوليين $x = a, x = b$ وذلك إذا كان $y = f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$. إذا كانت قيم التابع $y = f(x)$ موجبة وسالبة عندئذ تمثّل قيمة التكامل المحدود الجمع الجبري بين قيم المساحات الموجودة أعلى وأسفل المحور Ox بحيث تكون قيم المساحات أعلى المحور Ox موجبة والمساحات أسفل المحور Ox سالبة.

تعريف القياس الصفري:

نقول عن مجموعة من النقاط أنّ قياسها صفر إذا كان مجموع أطوال المجالات التي تحوي جميع النقاط يمكن أن تكون صغيرة (أصغر من أي عدد موجب ε). يمكن البرهان على أنّ أي عدد قابل للعد من النقاط من محور الأعداد الحقيقية قياسها صفر.

نظرية:

إذا كان التابع $f(x)$ محدوداً ضمن المجال $x \in [a,b]$ فيكون الشرط اللازم والكافي لوجود التكامل المحدود $\int_a^b f(x)dx$ هو أن تكون مجموعة نقاط الانقطاع للتابع $f(x)$ قياسها صفر.

نظرية:

إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً على المجال $x \in [a,b]$ فيكون لدينا:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)=\int_a^b f(x)dx$$

أي بذلك نكون قد أخذنا المجالات بطول واحد $\Delta x=(b-a)/n$ والنقاط $\xi_k=a+\frac{k(b-a)}{n}$ فيكون لدينا:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)=\int_a^b f(x)dx \text{ .}$$

مثال:

اكتب النهاية $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ كتكامل محدود؟

لنأخذ $a=0,b=1$ وبتطبيق النظرية السابقة نجد:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

مثال:

اكتب التكامل المحدود $\int_0^1 x^2dx$ كنهاية مجموع واحسب قيمته؟

لدينا $f(x)=x^2, f\left(\frac{k}{n}\right)=\left(\frac{k}{n}\right)^2=\frac{k^2}{n^2}$ ومن المثال السابق نجد:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}=\int_0^1 x^2dx$$

ولكن لدينا:

$$\int_0^1 x^2dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\frac{3^2}{n^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)(2+1/n)}{6}=\frac{1}{3}$$

لأنّه يمكن البرهان بالاستقراء الرياضي أنّ:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

فالعلاقة صحيحة من أجل $n=1$ حيث $1^2=\frac{1}{6}(1)(2)(3)=1$

لنفترض أنّ العلاقة صحيحة من أجل $n=k$ فنجد $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

بجمع $(k+1)^2$ لطرفي العلاقة السابقة نجد:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2=(k+1)\left[\frac{1}{6}k(2k+1)+(k+1)\right]=$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

أي أن العلاقة صحيحة من أجل $n=k+1$ وبما أنها صحيحة من أجل $n=1$ فهي صحيحة من أجل $n=2$ ومن أجل $n=3,n=4,n=5,\ldots$.

ونتيجة حساب التكامل المحدود في هذا المثال تبين أنّ المساحة المحصورة بين بيان التابع $f(x)=x^2$ والمحور Ox والمستقيمين $x=0,x=1$ تساوي $\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$.

ملاحظة: يمكن ايجاد النتيجة في المثال السابق من خلال معرفة التابع الأصلي للتابع x^2 ونجد:

$\int_0^1 x^2dx=x^3/3\Big]_0^1=1^3/3-0^3/3=1/3$.

1.1. خصائص التكاملات المحدودة

ليكن لدينا التابعين $f(x),g(x)$ قابلين للتكامل المحدود على المجال $x\in[a,b]$ لدينا:

1. التكامل المحدود لمجموع أو طرح تابعين $\int_a^b\{f(x)\pm g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

2. تكامل جداء ثابت A بتابع $\int_a^b Af(x)dx=A\int_a^b f(x)dx, A\in\mathbb{R}$

3. إذا كان التابع $f(x)$ قابل للتكامل المحدود في المجالين $x\in[a,c],x\in[c,b]$ يكون لدينا
$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

4. التكامل على مجال طوله صفر يساوي الصفر $\int_a^a f(x)dx=0$

5. لدينا $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

6. إذا كانت قيم التابع $m\le f(x)\le M$ محدودة بين قيمتين من أجل $a\le x\le b$ حيث m,M ثابتين يكون لدينا $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$

7. إذا كان لدينا $f(x) \le g(x), \forall x \in [a,b]$ يكون لدينا $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

8. القيمة المطلقة للتكامل المحدود $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx, a < b$

مثال:

أوجد قيمة نهاية التكامل المحدود $\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{x^2+n^2}dx$ ؟

لدينا $\left|\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{x^2+n^2}dx\right| \le \int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin nx}{x^2+n^2}\right|dx \le \int_0^{2\pi}\frac{1}{n^2}dx = \frac{2\pi}{n^2}$

وبالتالي: $\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{x^2+n^2}dx\right| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{x^2+n^2}dx = 0$

2.1. نظريتي القيمة الوسطى للتكاملات

تعمم النظرية الأولى فكرة إيجاد متوسط حسابي لمجموعة أعداد إلى متوسط تابع مستمر ضمن مجال. تشكّل النظرية الثانية توسعة للنظرية الأولى وتعرّف وسطي مثقّل لتابع مستمر.

لنأخذ عملية حساب المتوسط الحسابي لدرجات الحرارة عند الساعة الثانية عشر ظهراً في مكان محدد لفترة أسبوع. يمكن ذلك بقياس سبع درجات حرارة وجمعها وتقسيم ناتج الجمع على سبعة. لنعمم مفهوم المتوسط الحسابي للحصول على متوسط درجة الحرارة خلال أسبوع عندئذ تصبح المسألة أكثر تعقيداً لأنّ الحرارة تابع مستمر. يمكن استخدام التكامل المحدود لحل هذه المسألة.

ليكن لدينا التابع $y = f(x)$ مستمراً ضمن المجال $x \in [a,b]$ وقيمه موجبة تماماً $f(x) > 0$ ضمن هذا المجال. نضيف مجموعة من النقاط تقسّم المجال $x \in [a,b]$ إلى قطع متساوية الطول $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ عندئذ كل القيم $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ متساوية نرمز لها $\Delta x_k = \Delta x$ ونجد $b - a = n \cdot \Delta x$. لتكن ξ_k النقطة الوسطى من المجال x_{k-1}, x_k وقيمة التابع عند هذه النقطة $f(\xi_k)$ يكون وسطي قيم التابع عند هذه النقاط هو:

$$\frac{f(\xi_1)+f(\xi_2)+f(\xi_3)+\cdots+f(\xi_n)}{n} = \frac{[f(\xi_1)+f(\xi_2)+f(\xi_3)+\cdots+f(\xi_n)]\cdot \Delta x}{n\cdot \Delta x} = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta\xi_k$$

تقدم العلاقة السابقة القيمة الوسطى للتابع عند القيم الوسطى للمجالات ونجد:

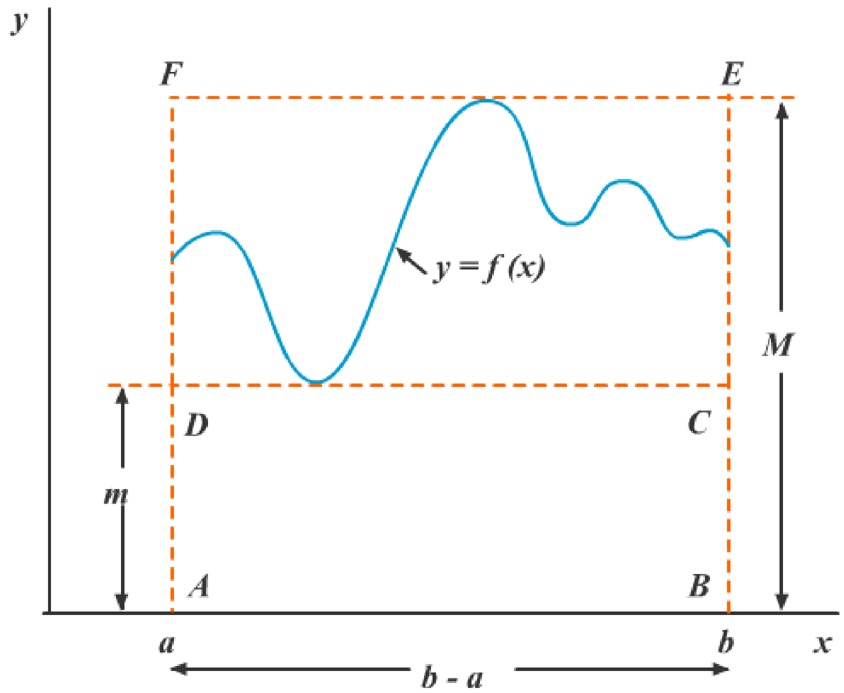
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta\xi_k = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

تعرّف هذه العلاقة القيمة الوسطى للتابع المستمر $f(x)$ ضمن المجال $x \in [a,b]$.

بما أنّ التابع $f(x)$ مستمر ضمن المجال $x \in [a,b]$ فيوجد قيمتين صغرى وعظمى للتابع ضمن هذا المجال بحيث $m \le f(x) \le M \,, \forall x \in [a,b]$ ولدينا العلاقة التالية:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

وبالتالي: $$m \le \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx \le M$$



الشكل 2 التكامل المحدود

بما أنّ التابع مستمر على المجال $[a,b]$ توجد نقطة $\xi = x$ بحيث $\xi \in [a,b]$ و $m \le f(\xi) \le M$ بحيث: $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

نظرية القيمة الوسطى:

إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً على المجال $[a,b]$ توجد نقطة $\xi \in [a,b]$ بحيث:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(\xi).$$

نظرية القيمة الوسطى المعممة:

إذا كان التابعين $f(x), g(x)$ مستمرين على المجال $[a,b]$ والتابع $g(x)$ لا يغير إشارته ضمن المجال $[a,b]$ عندئذ توجد نقطة $\xi \in [a,b]$ بحيث:

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

نجد أنّ هذه العلاقة تعيد علاقة النظرية السابقة من أجل $g(x)=1$.

2. التابع الأصلي أو التكامل غير المحدود

التكامل المحدود أو إيجاد التابع الأصلي هي عملية معاكسة لعملية الاشتقاق.

تعريف: يدعى التابع $F(x)$ الذي يحقق $F'(x)=f(x)$ بالتابع الأصلي أو التكامل غير المحدود للتابع $f(x)$. وهذا التابع $F(x)$ غير وحيد لأنّ إضافة أي ثابت له يبقى تابع أصلي لأنّ:

$$(F(x)+c)' = F'(x) = f(x)$$

وبالتالي نكتب $\int f(x) dx = F(x)+c$

نظرية: أي تابعين أصليين $F(x), G(x)$ للتابع $f(x)$ يختلفان على الأكثر بثابت أي:

$F(x)-G(x)=c$.

مثال: ماهو التابع الأصلي للتابع $f(x)=x^2$؟

$$F(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}+c$$

ملاحظة: يمكن تمثيل التكامل غير المحدود (التابع الأصلي) بتكامل محدود وفق العلاقة التالية:

$$\int f(x) dx = \int_c^x f(t) dt$$

يظهر متحول التابع كحد أعلى للتكامل المحدود. تبين العلاقة السابقة أنّ التكامل المحدود لتابع يعتمد على طرفي التكامل والتابع ويمكن تغيير اسم متحول التكامل.

3. النظرية الأساسية للحساب

نظرية:

ليكن التابع $f(x)$ قابل للتكامل على المجال المغلق $[a,b]$ وليكن $a \le c \le b$ نعرّف التابع:

$$F(x) = \int_{c}^{x} f(t)dt, a \le x \le b$$

ويكون المشتق $F'(x)$ موجود عند كل نقطة من نقاط المجال المفتوح $]a,b[$ حيث $f(x)$ مستمر و $F'(x) = f(x)$.

نظرية:

نفترض أنّ التابع $f(x)$ قابل للتكامل على المجال المغلق $[a,b]$ ومستمر على المجال المفتوح $]a,b[$. ليكن $F(x)$ أي تابع أصلي يحقق $F'(x) = f(x)$ لكل $x \in]a,b[$. إذا كان $a < c < b$ عندئذ لأي $x \in]a,b[$ نجد $\int_{c}^{x} f(t)dt = F(x) - F(c)$

وإذا كان التابع $f(x)$ مستمر على المجال المغلق $[a,b]$ يكون لدينا:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

هذه العلاقة تبين أنّ التكامل المحدود للتابع $f(x)$ نحصل عليه من فرق قيمتي التابع الأصلي بين طرفي مجال التكامل ولذلك لا يظهر ثابت التكامل في التكامل المحدود.

مثال: أوجد $\int_{1}^{2} x^2 dx$ ؟

نلاحظ أنّ $F'(x) = x^2$ وبالتالي $F(x) = \frac{x^3}{3} + c$ أي أنّ:

$$\int_{1}^{2} x^2 dx = \left[\frac{2^3}{3} + c\right] - \left[\frac{1^3}{3} + c\right] = \frac{7}{3}$$

نجد أنّ ثابت التكامل غير المحدود يختفي بسبب عملية الطرح لذلك يمكن حذفه من البداية وكتابة:

$$\int_{1}^{2} x^2 dx = \left[\frac{2^3}{3}\right] - \left[\frac{1^3}{3}\right] = \frac{7}{3}$$

ملاحظة:

يمكن أن يكون طرفي مجال التكامل للتكامل المحدود متحولان. إذا كان لدينا $F'(x) = f(x)$ يكون لدينا:

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = F(v(x)) = F(u(x))$$

مثال:

$$\int_{\sin x}^{\cos x} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{\sin x}^{\cos x} = \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)/2$$

4. التوابع الأصلية لبعض التوابع المألوفة

يمكن الحصول على التوابع الاصلية التالية مع ملاحظة أنّه يجب اضافة ثابت تكامل c لكل نتيجة والتحقق يتم باشتقاق التابع الأصلي ويجب ان يكون الناتج التابع المطلوب مكاملته:

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$
- $\int \sin x dx = -\cos x$
- $\int \cos x dx = \sin x$
- $\int \tan x dx = -\ln|\cos x|$
- $\int \cot x dx = -\ln|\sin x|$
- $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| = \ln|\tan(u/2 + \pi/4)|$

تذكرة: $\csc x = \frac{1}{\sin x}, \sec x = \frac{1}{\cos x}, \cot = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$

- $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| = \ln|\tan u/2|$
- $\int \sec^2 x dx = \tan x$
- $\int \csc^2 x dx = -\cot x$
- $\int \sec x \tan x dx = \sec x$
- $\int \csc x \cot x dx = -\csc x$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}, a > 0, a \neq 1$
- $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}, a \in \mathbb{R}^*$
- $\int \sinh x dx = \cosh x$
- $\int \cosh x dx = \sinh x$
- $\int \tanh x dx = \ln \cosh x$
- $\int \coth x dx = \ln|\sinh x|$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x, x \in]-1,1[$

- $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$$
- $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), x \in]1,\infty[$$
  $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = -\ln\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right), x \in]-\infty,-1[$$
- $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

مثال: أوجد النهاية التالية $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right\}$ ؟

يمكن كتابة النهاية بالشكل التالي:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1+1/n}+\frac{1}{1+2/n}+\frac{1}{1+3/n}+\cdots+\frac{1}{1+n/n}\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n} = \int_0^1\frac{dx}{1+x} = \ln|1+x|\Big]_0^1 = \ln 2$$

لأنّه قد وجدنا في مثال سابق أنّ:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

مثال: برهن أنّ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\sin\frac{t}{n}+\sin\frac{2t}{n}+\sin\frac{3t}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)t}{n}\right\}=1-\cos t$ ؟

لنأخذ $a=0, b=t, f(t)=\sin x$ في العلاقة:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{kt}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{kt}{n}\right) = \int_0^t \sin(x)dx = 1-\cos t$$

ولكن نلاحظ أنّ $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin t}{n}=0$ بالتالي

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{kt}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{kt}{n}\right) = \int_0^t \sin(x)dx = 1-\cos t$$

5. التكامل بتغيير المتحول

يمكن في بعض الحالات أن يكون حساب التكامل غير المحدود $\int f(x)dx$ غير سهل مباشرة. قد يكون من المفيد تغيير المتحول x إلى t عبر التحويل $x=g(t)$ وبالتالي $g'(t)=\frac{dx}{dt}$ فيصبح لدينا $\int f(x)dx=\int f(g(t))\cdot g'(t)dt$ وبعد إيجاد الحل نعوض $t=g^{-1}(x)$.

يمكن تطبيق نفس الطريقة للتكامل المحدود $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))\cdot g'(t)dt$ حيث $g(\alpha)=a, g(\beta)=b$ وبالتالي $\alpha=g^{-1}(a),\beta=g^{-1}(b)$ يجب أن يكون التابع $f(x)$ مستمر على المجال $[a,b]$ والتابع $g(t)$ يجب أن يكون مستمر ومشتقه مستمر على المجال $t\in[\alpha,\beta]$.

مثال: يمكن من قاعدة تغيير المتحول ايجاد التكاملات التالية بسهولة:

$$\int f'(x)\cdot e^{f(x)}dx=e^{f(x)}+c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln(|f(x)|)+c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=2\sqrt{f(x)}+c$$

مثال: أوجد التكامل غير المحدود للتابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$؟

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{x^2+1}+c$$

مثال: أوجد التابع الأصلي للتابع $f(x)=\frac{x^2+1}{x^3+3x+1}$؟

$$\int f(x)dx=\frac{1}{3}\int \frac{3(x^2+1)}{x^3+3x+1}dx=\frac{1}{3}\ln(|x^3+3x+1|)+c$$

مثال: أوجد التكامل غير المحدود للتابع $(x+2)\sin(x^2+4x-6)$؟

$\int (x+2)\sin(x^2+4x-6)dx$ نأخذ المتحول $u=x^2+4x-6$ وبالتالي نجد:

$$du=(2x+4)dx \Rightarrow (x+2)dx=\frac{1}{2}du$$

وبالتالي:

$$\frac{1}{2}\int \sin u\,du=-\frac{1}{2}\cos u+c=-\frac{1}{2}\cos\left(x^2+4x-6\right)+c$$

أو بطريقة أخرى يمكن كذلك كتابة:

$$\int (x+2)\sin(x^2+4x-6)dx = \frac{1}{2}\int f(g(x))\cdot g'(x)dx$$

حيث: $g(x)=x^2+4x-6 \Rightarrow g'(x)=2(x+2)$ وبالتالي:

$$\int (x+2)\sin(x^2+4x-6)dx = \frac{1}{2}\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = -\frac{1}{2}\cos(x^2+4x-6)+c$$

مثال: أوجد التكامل غير المحدود $\int \frac{\cot(\ln x)}{x}dx$

نلاحظ أنّ هذا التكامل من الشكل $\int f(g(x))\cdot g'(x)dx$ حيث $g(x)=\ln x \Rightarrow g'(x)=\frac{1}{x}$

وبالتالي $\int \frac{\cot(\ln x)}{x}dx = \ln|\sin(\ln x)|+c$

6. التكامل بالتجزئة

ليكن لدينا التابعين $f(x), g(x)$ مستمرين وقابلين للاشتقاق ونلاحظ أنّه لدينا مشتق جداء التابعين يعطى بالعلاقة:

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

أي أنّ $f(x)\cdot g(x)$ هو تابع أصلي للتابع $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$ ويمكن أن نكتب:

$$\int g(x)\cdot f'(x)dx = f(x)\cdot g(x)-\int f(x)\cdot g'(x)dx$$

ويمكن تطبيق العلاقة على المجال $[a,b]$ لنحصل على علاقة التكامل المحدود:

$$\int_a^b g(x)\cdot f'(x)dx = f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx$$

مثال: أوجد $I=\int_0^1 x\arctan x dx$

يمكن اختيار $g(x)=\arctan x$ و $f'(x)=x \Leftarrow f(x)=\frac{1+x^2}{2}$ وبالتالي يمكن كتابة:

$$\int_0^1 g(x)\cdot f'(x)dx = f(x)\cdot g(x)]_0^1 - \int_0^1 g'(x)\cdot f(x)dx$$

$$I=\int_0^1 x\arctan x dx = \frac{1+x^2}{2}\arctan x\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1+x^2}{2}dx = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

مثال: أوجد التكاملات المحدودة $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}dx \, , n \in \mathbb{Z}^+$

نلاحظ أنّ $I_0 = 1$ وأنّ $I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x \big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

ومن أجل $n \geq 1$ فإنّ:

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}dx - \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}dx = \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}dx = \int_0^1 x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}}dx$$

ولكن لدينا:

$$\left(\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}\right)' = -2n \cdot \frac{x\left(1+x^2\right)^{n-1}}{\left(1+x^2\right)^{2n}} = -2n \cdot \frac{x}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}$$

وبالتالي:

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^1 x \cdot \frac{x}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}dx = \int_0^1 x \cdot \left(\frac{1}{\left(1+x^2\right)}\right)' dx$$

$$I_n - I_{n+1} = -\frac{1}{2n}\left(\frac{x}{\left(1+x^2\right)^n}\Bigg]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}dx\right) = \frac{1}{2n}I_n - \frac{1}{n \cdot 2^{n+1}}$$

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n + \frac{1}{n \cdot 2^{n+1}}, \forall n \geq 1$$

وهكذا نكون قد حصلنا على قيم التكاملات المطلوبة بعلاقة تدريجية فاصبح لدينا

$$I_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2^2} = \frac{2+\pi}{8} \Rightarrow I_3 = \frac{3}{4}I_2 + \frac{1}{2^4} = \frac{8+3\pi}{32}$$

مثال:

ليكن $a,b \in \mathbb{R}$ بحيث $a < b, p \in \mathbb{R}^*$ والمطلوب إيجاد:

$$I = \int_a^b e^{px} \sin x dx \, , J = \int_a^b e^{px} \cos x dx$$

نلاحظ أنّ:

$$I = \int_a^b e^{px} \sin x dx = \int_a^b e^{px}\left(-\cos x\right)' dx = -e^{px} \cos x\Big]_a^b + p\int_a^b e^{px} \cos x dx$$

$$\Rightarrow I = e^{pa} \cos a - e^{pb} \cos b + pJ$$

وبشكل مشابه نجد:

$$J = \int_a^b e^{px} \cos x dx = \int_a^b e^{px} \left(\sin x\right)' dx$$

$$J = e^{px}\sin x\Big]_a^b - p\int_a^b e^{px}\sin x\,dx$$

$$J = e^{pb}\sin b - e^{pa}\sin a - pI$$

ومن علاقتي I, J نجد:

$$I = \frac{1}{p^2+1}\left(e^{pa}\left(\cos a - p\sin a\right) - e^{pb}\left(\cos b - p\sin b\right)\right)$$

$$J = \frac{1}{p^2+1}\left(e^{pb}\left(\sin b + p\cos b\right) - e^{pa}\left(\sin a + p\cos a\right)\right)$$

7. مكاملة التوابع الكسرية

ليكن التابع الكسري $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث $P(x)$ و $Q(x)$ كثيري حدود أوليين فيما بينهما ودرجة $Q(x)$ أكبر تماماً من الصفر ودرجة $P(x)$ أصغر من درجة $Q(x)$. يمكن كتابة هذا التابع كمجموع توابع كسرية بسيطة من الشكل الأول $\frac{A}{(ax+b)^r}$ أو من الشكل الثاني $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^r}$.

مثال: أوجد $\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}dx$

$$\frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5}$$

لحساب A نضرب طرفي العلاقة السابقة بـ$(x-3)$ ونعوض $x=3$ فنجد:

$$\frac{6-x}{(2x+5)} = \frac{A}{1} + \frac{B}{2x+5}(x-3) \Rightarrow \frac{6-3}{(2\times3+5)} = A \Rightarrow A = \frac{3}{11}$$

ولحساب B بشكل مشابه نضرب طرفي العلاقة السابقة بـ$(2x+5)$ ونعوض $x=-5/2$ فنجد:

$$\frac{6-x}{(x-3)} = \frac{A}{(x-3)}(2x+5) + \frac{B}{(2x+5)}(2x+5) \Rightarrow \frac{6-(-5/2)}{(-5/2-3)} = B \Rightarrow B = \frac{17/2}{-11/2} = -\frac{17}{11}$$

وعندها يمكن حساب التكامل:

$$\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}dx = \int \frac{3/11}{x-3}dx + \int \frac{-17/11}{2x+5}dx = \frac{3}{11}\ln|x-3| - \frac{17}{22}\ln|2x+5| + c$$

مثال: أوجد $\int_3^4 \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$

نقوم بكتابة الكسر كمجموع كسرين بسيطين:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

لحساب A نضرب طرفي المساواة بـ$(x-1)$ ثم نعوض $x=1$ فنجد $A=-1$

ولحساب B نضرب طرفي المساواة بـ$(x-2)$ ثم نعوض $x=2$ فنجد $B=1$ وبالتالي:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$ نعوض بالتكامل

$$\int_3^4 \frac{dx}{(x-1)(x-2)} = \int_3^4 \frac{-1}{x-1}dx + \int_3^4 \frac{1}{x-2}dx = -\ln(x-1)\Big]_3^4 + \ln(x-2)\Big]_3^4 = -[\ln 3 - \ln 2] + [\ln 2 - \ln 1]$$

$$= -\ln 3 + \ln 4 = \ln\frac{4}{3}$$

8. التكاملات المعتلّة

إذا كان مجال التكامل $[a,b]$ غير منته أو إذا كان التابع $f(x)$ غير معرّف أو غير محدود عند نقطة أو أكثر من المجال $[a,b]$ عندئذ يدعى التكامل معتلّ. يمكن استخدام مفهوم النهاية لهذه الحالات.

مثال:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to\infty} \arctan x\,\Big]_0^M = \lim_{M\to\infty} \arctan M = \frac{\pi}{2}$$

مثال:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\sqrt{x}\,\Big]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2$$

مثال:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln x\,\Big]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(-\ln\varepsilon)$$ النهاية غير موجودة والتكامل متباعد أو غير موجود.

9. الطرق العددية لحساب التكاملات المحدودة

تستخدم طرق عددية لتقدير التكاملات المحدودة عندما يكون من غير الممكن حساب التكامل بشكل تحليلي دقيق. تعتمد الطرق العددية التالية على تقسيم مجال التكامل $[a,b]$ إلى n مجال جزئي باطوال متساوية $\Delta x = \dfrac{(b-a)}{n}$. نكتب للتبسيط $f(a+k\Delta x)=f(x_k)=y_k, k=0,1,2,3,\ldots,n$. تتحسن دقة الحساب بالحالة العامة كلما ازدادت قيمة n.

1.9. طريقة المستطيلات

تعتبر أبسط طريقة تكامل عددي ويعطى التكامل المحدود لهذه الطريقة من العلاقة التالية:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x\{y_0+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\}$$

وتسمى هذه العلاقة بقاعدة اليد اليسرى لأنها تستخدم النقاط على يسار المجال.

أو يمكن أن يحسب التكامل وفق قاعدة اليد اليمنى التالية:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x\{y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n\}$$

2.9. طريقة شبه المنحرف

نحصل على التكامل وفق هذه الطريقة بتقريب بيان التابع $f(x)$ إلى قطع مستقيمة ونستخدم العلاقة التالية:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}\{y_0+2y_1+2y_2+2y_3+\cdots+2y_{n-1}+y_n\}$$

3.9. طريقة سيمبسون

نحصل على التكامل المحدود بطريقة سيمبسون من العلاقة التالية:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}\{y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+4y_5+\cdots+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n\}$$

تعتمد هذه الطريقة على تقريب بيان التابع $y=f(x)$ إلى مجموعة أجزاء أقواس قطع مكافئ كل واحد منها من الشكل $y=ax^2+bx+c$ لدينا:

$$\int_{-h}^{h}\left[ax^2+bx+c\right]dx=\frac{h}{3}\left[2ah^2+6c\right]$$

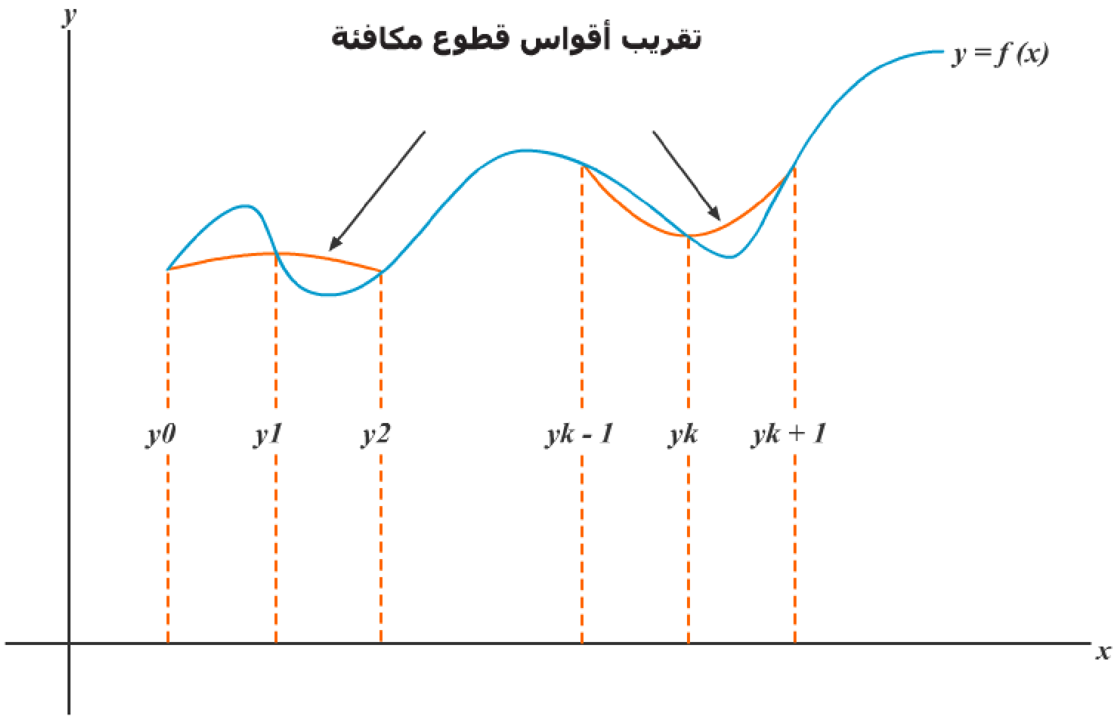
تحسب ثوابت القطع a,b,c بأخذ ثلاث نقاط من نقاط القطع وهي $(-h,y_0),(0,y_1),(h,y_2)$ وبالتالي:

$$y_0 = a(-h^2) + b(-h) + c$$
$$y_1 = c$$
$$y_2 = ah^2 + bh + c$$
$$\Rightarrow y_0 + 4y_1 + y_2 = 2ah^2 + 6c$$

وبالتالي نحصل على التكامل:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{h}{3}(y_{k-1} + 4y_k + y_{k+1}) = \frac{\Delta x}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n]$$

تعطي طريقة سيمبسون تقريباً أفضل من الطريقتين السابقتين للمنحنيات.



الشكل رقم 3 أقواس قطوع مكافئة طريقة سيمبسون

مثال:

احسب تقريب للتكامل المحدود $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ باستخدام طريقة شبه المنحرف وطريقة سيمبسون مع تقسيم المجال [0,1] إلى أربع قطع متساوية.

التابع $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ولدينا $\Delta x = \frac{b-a}{4} = \frac{1-0}{4} = 0.25$ سنستخدم أربعة أرقام بعد الفاصلة لتمثيل جميع القيم العددية التالية.

$$y_0 = f(0) = 1.0000, y_1 = f(0.25) = 0.9412, y_2 = f(0.5) = 0.8000,$$
$$y_3 = f(0.75) = 0.6400, y_4 = f(1) = 0.5000$$

طريقة شبه المنحرف:

$$\frac{\Delta x}{2}\{y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4\} = \frac{0.25}{2}\{1.0000 + 2(0.9412) + 2(0.8000) + 2(0.6400) + 0.5000\} = 0.7828$$

طريقة سيمبسون:

$$\frac{\Delta x}{3}\{y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4\} = \frac{0.25}{2}\{1.0000 + 4\times 0.9180 + 2\times 0.8000 + 4\times 0.6400 + 0.5000\} = 0.7854$$

القيمة الدقيقة لهذا التكامل هي $\frac{\pi}{4} \approx 0.7854$.

10. حساب طول قوس

يمكن تقدير قوس مع الفرضيات التالية:

1. لايتقاطع القوس مع نفسه.
2. يوجد مستقيم مماس لكل نقطة من نقاط القوس
3. يتغير المماس بشكل مستمر على القوس.

وبفرض أنه في المستوي ومن الممكن استخدام تمثيل احداثيات القوس باستخدام متحول مساعد $x = f(t), y = g(t)$ يتم تقريب طول القوس إلى مجموع أطوال قطع مستقيمة ونحصل على طول كل قطعة k من العلاقة $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ حيث $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ ويحسب الطول الكلي للقوس من العلاقة التالية $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}\right\}$ أو $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\right\}\Delta x_k$ ونجد:

$$L = \int_a^b \left\{\sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\right\}dt = \int_a^b \left\{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\right\}dt$$

أو بتغيير المتحول يمكن الحصول على العلاقة: $L = \int_{f(a)}^{f(b)} \left\{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right\}dx$

مثال: أوجد طول القوس من القطع المكافئ $y = x^2$ بين $x = 0$ و $x = 1$؟

طول القوس المطلوب يعطى بالعلاقة التالية:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+(dy/dx)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,dx$$

لحساب هذا التكامل نغير المتحول $u = 2x \Rightarrow u^2 = 4x^2$ وكذلك $du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$ وحدود التكامل $x = 0 \Rightarrow u = 0$ و $x = 1 \Rightarrow u = 2$ وبالتالي:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+u^2}\,du = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}u\cdot\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right\}_0^2$$

$$L = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$$

11. المعادلات التفاضلية الخطية مع أمثال ثابتة من الدرجة الأولى ومن الدرجة الثانية

تعريف: المعادلة التفاضلية هي علاقة ربط بين المتحول x والتابع المجهول y وعدد من مشتقاته $y', y'', y''', \ldots$. أي أن حل المعادلة التفاضلية أو تكامل المعادلة التفاضلية هو ايجاد علاقة الربط للتابع $y = f(x)$ وليس ايجاد عدد. ويحقق هذا التابع مع مشتقاته المعادلة التفاضلية. وتدعى المعادلة التفاضلية من الدرجة n حيث n هي أكبر مرتبة اشتقاق تظهر للتابع ضمن المعادلة.

مثال:

معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى $y' = -32x$

معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى $y' + 5y = 12e^{7x}$

معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية $y'' + 8y' + 16y = 0$

تعريف: نعرّف المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية بامثال ثابتة بأنها المعادلة التي لها الشكل العام التالي: $a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x), a_2 \neq 0$ حيث a_0, a_1, a_2 ثوابت حقيقية.

تدعى المعادلة التفاضلية متجانسة عندما تكون من الشكل $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$ (أي الطرف الأيمن من المعادلة $f(x) = 0$).

وتدعى معادلة تفاضلية غير متجانسة عندما تكون من الشكل $a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x) \neq 0$ الطرف الأيمن للمعادلة غير معدوم.

نعرّف المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الأولى بأمثال ثابتة بأنها المعادلة التي لها الشكل العام التالي: $a_1y' + a_0y = f(x), a_1 \neq 0$ حيث a_0, a_1 ثوابت حقيقية.

ملاحظة: تنتج المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الأولى كحالة خاصة من المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية بجعل $a_2 = 0$.

مثال: ليكن لدينا المعادلة التفاضلية التالية $y''=-g$ بالتالي نجد $y=-\frac{1}{2}gt^2+C_1x+C_2$ يتم تحديد الثابتين C_1,C_2 من خلال شروط بدائية يحققها التابع.

ملاحظة: يحوي الحل العام للمعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية ثابتي تكامل مجهولين. ويحوي الحل العام للمعادلة التفاضلية من الدرجة الأولى ثابت تكامل واحد مجهول.

حل المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية مع أمثال ثابتة:

لتكن لدينا المعادلة غير المتجانسة $a_2y''+a_1y'+a_0y=f(x), a_2\neq 0, f(x)\neq 0$ حيث a_0,a_1,a_2 ثوابت حقيقية.

ليكن y_c حل عام للمعادلة المتجانسة $a_2y''+a_1y'+a_0y=0$

وليكن y_p حل خاص للمعادلة غير المتجانسة $a_2y''+a_1y'+a_0y=f(x), a_2\neq 0, f(x)\neq 0$

عندئذ يكون الحل العام للمعادلة $y=y_c+y_p$.

أي أنه لحل المعادلة التفاضلية لابد من ايجاد الحل العام للمعادلة المتجانسة ثم ايجاد حل خاص للمعادلة غير المتجانسة.

إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الدرجة الأولى:

لتكن لدينا المعادلة $a_1y'+a_0y=0, a_1\neq 0$ نجد:

$$a_1y'=-a_0y \Rightarrow y'=-\frac{a_0}{a_1}y \Rightarrow y=C\cdot e^{r_1x}, r_1=-\frac{a_0}{a_1}$$

يمكن تحديد قيمة الثابت الحقيقي C من خلال شرط ابتدائي تعطى فيه قيمة نقطة من نقاط التابع (شرط ابتدائي) وبتعويض هذه النقطة يمكن حساب الثابت C.

مثال: أوجد حل المعادلة التفاضلية المتجانسة من الدرجة الأولى $y'+5y=0$ علماً بأن $y=1$ من أجل $x=0$.

نجد $r_1=-\frac{a_0}{a_1}=-\frac{5}{1}=-5$ وبالتالي $y=C\cdot e^{r_1x}=C\cdot e^{-5x}$ وبتعويض النقطة المعطاة نجد $1=C\cdot e^0=C$ أي أنّ الثابت $C=1$ ويكون الحل هو $y=e^{-5x}$.

إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الدرجة الثانية:

لتكن لدينا المعادلة $a_2y''+a_1y'+a_0y=0$ نشكّل المعادلة المساعدة من الدرجة الثانية:

$$a_2r^2+a_1r+a_0=0$$

ونقوم بحلها فنجد $r_{1,2}=\frac{-a_1\mp\sqrt{a_1^2-4a_2a_0}}{2a_2}$ ونحصل على الحالات الثلاث التالية:

الحالة الأولى: $a_1^2-4a_2a_0>0$ لدينا حلين حقيقيين مختلفين $r_1\neq r_2$ ونحصل على حل المعادلة التفاضلية:
$y=C_1\cdot e^{r_1x}+C_2\cdot e^{r_2x}$

الحالة الثانية: $a_1^2-4a_2a_0=0$ لدينا حل مضاعف $r=r_1=r_2$ ونحصل على حل المعادلة التفاضلية:
$y=e^{r\cdot x}\left(C_1+C_2x\right)$

الحالة الثالثة: $a_1^2-4a_2a_0<0$ لدينا حلين عقديين $r_1=a+jb, r_2=a-jb$ ونحصل على حل المعادلة التفاضلية: $y=e^{ax}\left(C_1\cos(bx)+C_2\sin(bx)\right)$.

مثال: أوجد حل المعادلة التفاضلية $2y''+7y'+3y=0$؟

نبحث عن جذور المعادلة المساعدة $2r^2+7r+3=0$ فنجد جذرين حقيقيين مختلفين $r_1=-0.5, r_2=-3$ ويكون الحل: $y=C_1\cdot e^{-0.5x}+C_2\cdot e^{-3x}$. حيث C_1,C_2 عددين ثابتين مجهولين.

مثال: أوجد حل المعادلة التفاضلية $y''+4y'+13y=0$؟

نبحث عن جذور المعادلة المساعدة $r^2+4r+13=0$ فنجد جذرين عقديين:
$r_1=-2+3j, r_2=-2-3j$

ويكون لدينا الحل هو التابع: $y=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$ حيث C_1,C_2 عددين ثابتين مجهولين.

إيجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة من الدرجة الثانية:

علينا إيجاد حل خاص للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة التالية:
$a_2y''+a_1y'+a_0y=f(x), a_2\neq 0, f(x)\neq 0$

الحالة الأولى: $f(x)=C$ الطرف الأيمن ثابت عندئذ يمكن أخذ الحل الخاص $y_p=\frac{C}{a_0}, a_0\neq 0$.

مثال: $y''+y=5$ نأخذ $y_p=5\Rightarrow y_p'=0$.

الحالة الثانية: $f(x)=a+bx+cx^2+\cdots$ كثير حدود عندئذ يكون الحل الخاص كثير حدود من نفس الدرجة $y_p=A+Bx+Cx^2+\cdots$ ونحصل على الثوابت للتابع y_p من خلال الاشتقاق والتعويض في المعادلة التفاضلية والمطابقة.

مثال: $y''-3y'+2y=3-2x^2$ بما أنّ $f(x)=3-2x^2$ كثير حدود من الدرجة الثانية نأخذ:
$y_p=A+Bx+Cx^2$ ونجد $y_p'=B+2Cx, y_p''=2C$ بالتعويض بالمعادلة التفاضلية نجد:
$2C-3(B+2Cx)+2(A+Bx+Cx^2)=3-2x^2$

بمطابقة الأمثال نجد من أمثال x^2 أنّ $2C=-2\Rightarrow C=-1$ ومن أمثال x نحصل على:
$-6C+2B=0\Rightarrow B=-3$ ومن الأمثال الثابتة نجد $2C-3B+2A=3\Rightarrow A=-2$ ويصبح لدينا الحل الخاص للمعادلة غير المتجانسة هو: $y_p=-2-3x-x^2$.

تحديد الثوابت لحلول المعادلات التفاضلية الخطية من خلال الشروط الابتدائية

المعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الأولى

لتكن لدينا المعادلة $a_1 y' + a_0 y = 0$ نجد $r_1 = -a_0 / a_1$ والحل هو التابع $y = C \cdot e^{r_1 x}$ لإيجاد الثابت C نعتمد على معلومة عن التابع أو مشتقه عند نقطة معينة وهي على الأغلب تكون عند اللحظة $t = 0$ لذلك يدعى شرط ابتدائي.

مثال: ما هو حل المعادلة التفاضلية $y' + 3y = 0$ التي تحقق $x = 0, y = 2$.

نجد الحل العام $y = C \cdot e^{-3x}$ بتعويض النقطة المعطاة نجد $2 = C \cdot e^{0} \Rightarrow C = 2$ وبالتالي: $y = 2 \cdot e^{-3x}$.

المعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية

يحتوي الحل العام للمعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية ثابتين يجب تحديدهما. لذلك نحتاج إلى شرطين ابتدائيين لحساب الثابتين. الشرطين يمكن أن يكونا نقطة أولى $x = x_1, y = y_1$ ونقطة ثانية $x = x_2, y = y_2$ أو مشتق نقطة ثانية $x = x_2, y' = y_2'$.

مذاكرة التكاملات Integrals

العلامة العظمى: 100 علامة النجاح: 50 المدة: ساعة ونصف

لكل سؤال خمس علامات

اختر الإجابة الصحيحة للأسئلة التالية:

1. أوجد نتيجة التكامل $\int (x+2)\sin\left(x^2+4x-6\right)dx$

a) $-\frac{1}{2}\cos\left(x^2+4x-6\right)+C$

b) $\cos\left(x^2+4x-6\right)+C$

c) $\sin\left(x^2+4x-6\right)+C$

d) $(x+2)\sin\left(x^2+4x-6\right)+C$

مساعدة: راجع فقرة التكامل بتغيير المتحول

2. أوجد نتيجة التكامل $\int\left(x^5-3x+2\sqrt[3]{x}-\frac{7}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx$

a) $\frac{1}{6}x^6-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x^{4/3}-\frac{35}{2}x^{2/5}+C$

b) $\frac{1}{6}x^6-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x^{1/3}+\frac{35}{2}x^{2/5}+C$

c) $\frac{1}{6}x^6-\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^{1/3}+\frac{35}{4}x^{2/5}+C$

d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة التوابع الأصلية لبعض التوابع المعروفة

3. أوجد نتيجة التكامل $\int \sin(3x)dx$

a) $-\frac{1}{3}\cos 3x+C$

b) $-\cos x+C$

c) $-\cos 3x+C$

d) $-3\cos 3x+C$

مساعدة: راجع فقرة التكامل بتغيير المتحول

4. أوجد نتيجة التكامل $\int x^2 dx$

a) $\frac{1}{3}x^3 + C$

b) $x^3 + C$

c) $2x^2 + C$

d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة التوابع الأصلية لبعض التوابع المعروفة

5. نتيجة التكامل المحدود $\int_1^4 x^2 dx$ هي

a) 21

b) 63

c) 22

d) 64

مساعدة: راجع فقرة التوابع الأصلية لبعض التوابع المعروفة

6. نتيجة التكامل المحدود $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$ هي

a) 1

b) -1

c) 0

d) 2

مساعدة: راجع فقرة التوابع الأصلية لبعض التوابع المعروفة

7. نتيجة التكامل المحدود $\int_1^2 (x^2 + 1) dx$ هي

a) $\frac{10}{3}$

b) 10

c) 9

d) 8

مساعدة: راجع فقرة التوابع الأصلية لبعض التوابع المعروفة

8. نتيجة التكامل المحدود $\int_2^3 \frac{1}{x^2}dx$ هي

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{3}{2}$

d) 3

مساعدة: راجع فقرة التوابع الأصلية لبعض التوابع المعروفة

9. نتيجة التكامل المحدود $\int_1^2 e^x dx$ هي

a) $e^2 - e$

b) e^3

c) e

d) e^2

مساعدة: راجع فقرة التوابع الأصلية لبعض التوابع المعروفة

10. نتيجة التكامل المحدود $\int_{-1}^{1}\left(1+x^2\right)dx$ هي

a) 2.667

b) $2/3$

c) $3/2$

d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة التوابع الأصلية لبعض التوابع المعروفة

11. نتيجة التكامل المحدود $\int_0^3 e^{2x}dx$ هي

a) 198

b) 200

c) 197

d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة التوابع الأصلية لبعض التوابع المعروفة

12. نتيجة التكامل $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$ هي

a) 1
b) -1
c) 0
d) ∞

مساعدة: راجع فقرة التكاملات المعتلة

13. نتيجة التكامل $\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx$ هي

a) $\frac{1}{2}$
b) $-\frac{1}{2}$
c) 1
d) ∞

مساعدة: راجع فقرة التكاملات المعتلة

14. نتيجة التكامل $\int_0^{4} 5x^2\,dx$ هي

a) $\frac{760}{3}$
b) 152
c) 760
d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة التوابع الأصلية لبعض التوابع المعروفة

15. نتيجة التكامل $\int_0^{5} 3\sqrt{x}\,dx$ هي

a) $2\times 5^{3/2}$
b) $5^{3/2}$
c) $2\times 5^{-3/2}$
d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة التوابع الأصلية لبعض التوابع المعروفة

.16 نتيجة التكامل $\int_{2}^{4}\left(4x^{3}+2x^{1/3}\right)dx$ هي

(a 245.74

(b 305.25

(c 225.45

(d جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة التوابع الأصلية لبعض التوابع المعروفة

.17 نتيجة التكامل $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^{4}}dx$ هي

(a $\frac{1}{3}$

(b $-\frac{1}{3}$

(c 0

(d ∞

مساعدة: راجع فقرة التوابع الأصلية لبعض التوابع المعروفة

.18 نتيجة التكامل $\int_{1}^{\infty}\frac{\ln x}{x^{2}}dx$ هي (مساعدة استخدم التكامل بالتجزئة)

(a 1

(b 0

(c -1

(d $\frac{1}{2}$

مساعدة: راجع فقرة التكامل بالتجزئة

.19 التكامل $\int\frac{x+2\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}}dx$ هو:

(a $\frac{2}{3}x^{3/2}+2x+14x^{0.5}+C$

(b $\frac{2}{3}x^{-3/2}+2x+7x^{-0.5}+C$

(c $x^{3/2}+2x+14x^{-0.5}+C$

(d جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة مكاملة التوابع الكسرية

20. التكامل $\int \frac{3x+1}{x-3}dx$ هو؟

a) $3x+10\ln(x-3)+C$

b) $3-10\ln(x-3)+C$

c) $x+10\ln(x)+C$

d) $3x+\ln(3x+1)+C$

مساعدة: راجع فقرة مكاملة التوابع الكسرية

الإجابات الصحيحة

السؤال	الإجابة الصحيحة
1	الخيار الأول
2	الخيار الأول
3	الخيار الأول
4	الخيار الأول
5	الخيار الأول
6	الخيار الأول
7	الخيار الأول
8	الخيار الأول
9	الخيار الأول
10	الخيار الأول
11	الخيار الأول
12	الخيار الأول
13	الخيار الأول
14	الخيار الأول
15	الخيار الأول
16	الخيار الأول
17	الخيار الأول
18	الخيار الأول
19	الخيار الأول
20	الخيار الأول