الفصل الخامس: المشتقات

الكلمات المفتاحية:

مشتق التابع، المشتق من اليمين، المشتق من اليسار، الاشتقاق الضمني، قواعد الاشتقاق، درجة الاشتقاق، نقطة لانعطاف، السرعة الخطية، طريقة نيوتن.

الملخص:

يقدم هذا الفصل اشتقاق التوابع الرياضية حيث يبدأ بتعريف المشتق كنهاية معدل التغير اللحظي للتابع ومفهومه الهندسي ميل المماس للتابع في النقطة التي يحسب عندها المشتق وشروط وجود المشتق والحالات التي لا يكون فيها المشتق موجوداً. ويعرّف الاشتقاق من اليمين ومن اليسار. وتقدم قواعد الاشتقاق لتسهيل حساب المشتق للتوابع المختلفة والاشتقاق للتوابع المركبة وللتوابع الضمنية. وتقدم استخدامات الاشتقاق لحساب تزايد وتناقص التوابع والنهايات المحلية العظمى والصغرى والمشتقات من الدرجات الأعلى وحساب نقاط الانعطاف وقواعد اضافية لحساب نهاية متتالية باستخدام المشتقات. وحساب السرعة الآنية لنقطة متحركة باستخدام مشتق تابع المسافة بالنسبة للزمن. وتقدم طريقة نيوتن العددية لحل المعادلات الجبرية باستخدام المشتق. وتقدم أمثلة على حساب المشتقات للتوابع المختلفة.

الأهداف التعليمية:

يتعرّف الطالب في هذا الفصل على النقاط التالية:

- تعريف المشتق والمشتق من اليمين والمشتق من اليسار
- اشتقاق التابع المركب
- اشتقاق التابع الضمني
- قواعد الاشتقاق
- مشتقات التوابع البسيطة
- الاشتقاق ضمن مجال
- المشتقات من الدرجات الأعلى
- النهايات المحلية والانعطاف
- حساب السرعة باستخدام المشتق
- طريقة نيوتن لحل المعادلات الجبرية
- تطبيقات لحساب المشتقات

مقدمة

يعتبر الاشتقاق من أهم المفاهيم الأساسية في التحليل. نشأت مسألة الاشتقاق من مسألة تعريف وتمثيل المستقيم المماس لبيان تابع عند نقطة من نقاطه ومن مسألة تمثيل السرعة الآنية لجسم متحرك. ستقدم النقاط التالية في هذا الفصل:

- تعريف المشتق والمشتق من اليمين والمشتق من اليسار
- اشتقاق التابع المركب
- اشتقاق التابع الضمني
- قواعد الاشتقاق
- مشتقات التوابع البسيطة
- الاشتقاق ضمن مجال
- المشتقات من الدرجات الأعلى
- النهايات المحلية والانعطاف
- حساب السرعة باستخدام المشتق
- طريقة نيوتن لحل المعادلات الجبرية
- تطبيقات لحساب المشتقات

1. تعريف المشتق

لتكن النقطة $P_0(x_0,f(x_0))$ من بيان التابع $y=f(x)$ ولتكن $P(x,f(x))$ نقطة مجاورة من بيان نفس التابع. يدعى المستقيم المار بين النقطتين P_0,P المستقيم القاطع للبيان وميله يعطى من العلاقة:

$m_s=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ حيث $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ و $\Delta x=x-x_0$.

ويمكن كتابة علاقة الميل من العلاقة:

$m_s=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ حيث $h=x-x_0=\Delta x$.

نحصل على ميل المستقيم المماس للتابع عند النقطة $P_0(x_0,f(x_0))$ من خلال ايجاد نهاية العلاقة السابقة عندما تسعى h نحو الصفر $h\to 0$ وعندما تكون هذه النهاية موجودة تكون هي قيمة مشتق التابع أي:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

تدعى هذه النهاية مشتق التابع $f(x)$ عند النقطة x_0 من مجموعة تعريفه.

إذا كانت النهاية موجودة من أجل كل نقطة من نقاط مجموعة تعريف التابع نقول عنه أنّه قابل للاشتقاق على هذه المجموعة وينتج لدينا تابع جديد هو التابع المشتق $f'(x)$. وتكون قيمة التابع المشتق $f'(x)$ عند كل نقطة تساوي ميل المستقيم المماس للتابع $f(x)$ عند هذه النقطة.

إذا كانت النهاية غير موجودة يكون المشتق غير موجود أو التابع غير قابل للاشتقاق عند هذه النقطة.

يمكن كتابة التابع المشتق بعدة طرق:

$$f'(x)=y'=\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=Df(x)=D_x f(x)$$

مثال:

ليكن لدينا التابع $f(x)=\frac{1}{x}$ ماهو مشتق التابع عند النقطة a؟

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a-(a+h)}{h\cdot a(a+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h\cdot a\cdot(a+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{a(a+h)}=-\frac{1}{a^2}$$

نظرية

إذا كان التابع $f(x)$ قابل للاشتقاق عند نقطة من مجموعة تعريفه فهو مستمر عند هذه النقطة ولكن العكس ليس صحيحاً.

تعريف المشتق من اليمين ومن اليسار

نعرّف المشتق من اليمين للتابع $f(x)$ عند $x=x_0$ بالعلاقة التالية:

$$f_+'(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

وذلك عندما تكون النهاية موجودة عندما تسعى h نحو الصفر بقيم موجبة تماماً.

يمكن بشكل مشابه تعريف المشتق من اليسار للتابع $f(x)$ عند $x=x_0$ بالعلاقة التالية:

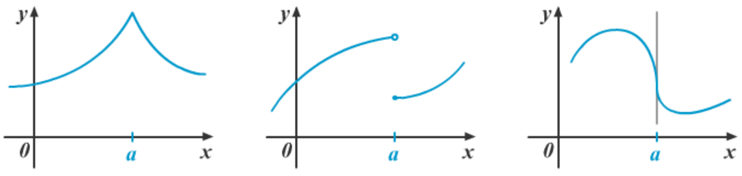
$$f_-'(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

وذلك عندما تكون النهاية موجودة عندما تسعى h نحو الصفر بقيم سالبة.

يكون التابع $f(x)$ قابلاً للاشتقاق عند النقطة $x=x_0$ إذا وفقط إذا كان المشتق من اليمين موجود ويساوي المشتق من اليسار للتابع عند النقطة $x=x_0$ أي $f_+'(x_0)=f_-'(x_0)$.

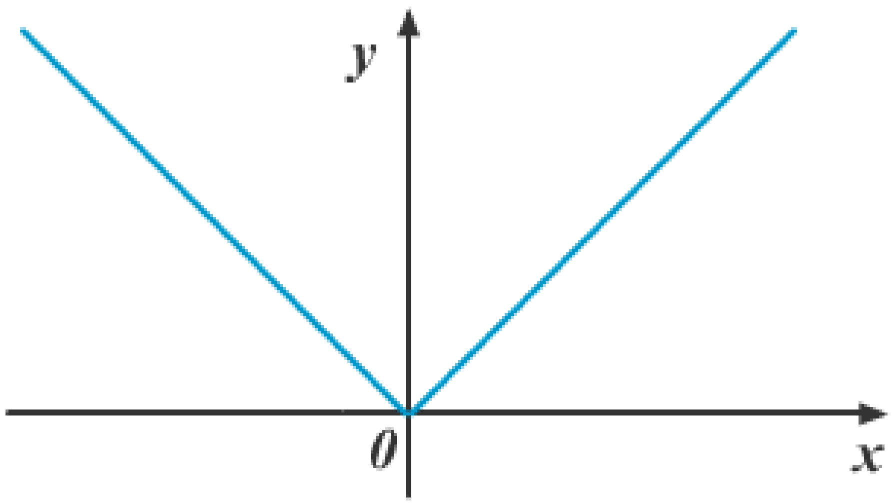
حالات عدم وجود المشتق

يمثل الشكل التالي حالات عدم وجود المشتق عند النقطة a من نقاط التابع:



مثال:

التابع $f(x)=|x|$ غير قابل للاشتقاق عند النقطة $x=0$.



(a) $y=f(x)=|x|$

حيث: $f'(x)=\begin{cases} 1 if\ x>0 \\ -1 if\ x<0 \end{cases}$

وعندما تكون $x=0$ نجد أن المشتق من اليمين لايساوي المشتق من اليسار $f'_{+}(0)=1, f'_{-}(0)=-1$.

2. اشتقاق التابع المركب

يمكن كتابة التوابع كتركيب لتوابع أبسط. ليكن لدينا مثلاً: $u=f(x)=x^3, y=g(u)=\sin u=\sin x^3$ نحصل على التابع المركب $y=F(x)=g(f(x))$. تعطى علاقة الاشتقاق للتابع المركب كمايلي:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=F'(x)=g'(u)\cdot f'(x)$$

بشرط وجود المشتقين $f'(x), g'(u)$ فنجد $\frac{dy}{dx}=\frac{d\left(\sin x^3\right)}{dx}=\left(3x^2\right)\cdot\cos\left(x^3\right)$.

3. الاشتقاق الضمني

تعطى علاقة الربط للتابع أحياناً بشكل ضمني وليس بشكل مباشر مثل $x^2+4xy^5+7xy+8=0$ التي لايمكن كتابتها بالشكل $y=f(x)$ في هذه الحالة يمكن اشتقاق التابع y من المعادلة السابقة كمايلي:

$$2x+4\left(y^5+5xy^4\frac{dy}{dx}\right)+7\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0 .$$

4. قواعد الاشتقاق

ليكن لدينا التوابع $f(x), g(x), h(x)$ القابلة للاشتقاق عندئذ يكون لدينا:

9. مشتق مجموع تابعين: $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)=f'(x)+g'(x)$

10. مشتق فرق تابعين: $\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=\frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)=f'(x)-g'(x)$

11. مشتق جداء ثابت C بالتابع $f(x)$: $\frac{d}{dx}\{C\cdot f(x)\}=C\cdot\frac{d}{dx}f(x)=C\cdot f'(x)$

12. مشتق جداء تابعين:

13. $\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=f(x)\frac{d}{dx}g(x)+g(x)\frac{d}{dx}f(x)=f(x)\cdot g'(x)+g(x)\cdot f'(x)$

14. مشتق قسمة تابعين:

15. $\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x)-f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, g(x)\neq 0$

16. مشتق التابع المركب $y=f(u)=f[g(x)], u=g(x)$ يعطى بالعلاقة:

17. $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\cdot\frac{du}{dx}=f'(g(x))\cdot g'(x)$

ويمكن أن يكون أكثر من تابعين بشكل مشابه إذا كان $y=f(u), u=g(v), v=h(x)$ فيكون مشتق التابع المركب $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$

18. إذا كان لدينا التابع $y=f(x)$ وتابعه العكسي $x=f^{-1}(y)$ فيكون لدينا $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{dx/dy}$

19. إذا كان لدينا $x=f(t)$ و $y=g(t)$ نجد $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$

1.4. مشتقات التوابع البسيطة

1. مشتق التابع الثابت معدوم $\frac{d}{dx}C=0, C\in\mathbb{R}$
2. مشتق تابع القوة $y=u^n, n\in\mathbb{R}$ يعطى بالعلاقة $\frac{d}{dx}u^n=n\cdot u^{n-1}\cdot\frac{du}{dx}$
3. مشتق تابع الجيب $\frac{d}{dx}\sin u=\cos u\cdot\frac{du}{dx}$
4. مشتق تابع التجيب $\frac{d}{dx}\cos u=-\sin u\cdot\frac{du}{dx}$
5. مشتق تابع الظل $\frac{d}{dx}\tan u=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot\frac{du}{dx}$
6. مشتق تابع اللوغاريتم الطبيعي $\frac{d}{dx}\log_e u=\frac{d}{dx}\ln u=\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$
7. مشتق تابع اللوغاريتم لاساس $a>0, a\neq 1$: $\frac{d}{dx}\log_a u=\frac{\log_a e}{u}\cdot\frac{du}{dx}$
8. مشتق التابع الاسي $\frac{d}{dx}a^u=a^u\cdot\ln a\cdot\frac{du}{dx}$
9. مشتق تابع الاس الطبيعي $\frac{d}{dx}e^u=e^u\cdot\frac{du}{dx}$

الاشتقاق ضمن مجال

إذا كان التابع $y=f(x)$ يقبل الاشتقاق في كل نقاط مجال نقول أنه قابل للاشتقاق على هذا المجال. إذا كان التابع $y=f(x)$ معرّف على المجال المغلق $[a,b]$ نقول أنّ هذا التابع يقبل الاشتقاق على المجال المغلق $[a,b]$ إذا وفقط إذا كان $f'(x_0)$ موجوداً لكل $x\in]a,b[$ و $f'_+(a), f'_-(b)$ موجودين.

إذا كان مشتق التابع مستمراً يدعى قابل للاشتقاق باستمرار.

المشتقات من الدرجات الأعلى

ليكن لدينا التابع $y=f(x)$ وبفرض أنه قابل للاشتقاق ضمن مجال ونحصل على التابع $y'=f'(x)$ الذي يدعى المشتق الأول للتابع $y=f(x)$ فإذا كان التابع المشتق بدوره $y'=f'(x)$ قابل للاشتقاق ضمن المجال باشتقاقه نحصل على المشتق الثاني $y''=f''(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}$ وهكذا يمكن الحصول على المشتقات من المرتبات الأعلى حتى الدرجة n إذا كان موجوداً نكتب $f^{(n)}(x)=y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}$.

نظرية

إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً ضمن المجال $x\in[a,b]$ وقابلاً للاشتقاق ضمن المجال $]a,b[$ وإذا كان $f(a)=f(b)=0$ عندئذ يوجد $\xi\in]a,b[$ بحيث ينعدم مشتق التابع $f'(\xi)=0$.

نظرية القيمة الوسطى:

إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً ضمن المجال $x\in[a,b]$ وقابلاً للاشتقاق ضمن المجال $]a,b[$ عندئذ يوجد $\xi\in]a,b[$ بحيث $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

نجد من هذه النظرية أنّ النظرية السابقة حالة خاصة منها حيث $f(a)=f(b)=0$.

لنأخذ x,x_0 ضمن المجال $]a,b[$ عندئذ نجد من نظرية القيمة الوسطى:

$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)\cdot(x-x_0)$ وتكون ξ بين x و x_0.

يمكن كذلك أخذ $b=a+h$ و $\xi=a+\theta h$ حيث $0<\theta<1$ فنجد: $f(a+h)=f(a)+h\cdot f'(a+\theta\cdot h)$

نظرية كوشي القيمة الوسطى المعممة

إذا كان لدينا تابعين $f(x),g(x)$ مستمرين في المجال $[a,b]$ وقابلين للاشتقاق في المجال $]a,b[$ عندئذ يوجد $\xi\in]a,b[$ بحيث: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)};a<\xi<b$ بفرض أن $g(b)\neq g(a)$ و $f'(x),g'(x)$ ليسا منعدمين معاً.

قواعد اضافية لحساب النهايات

إذا كان لدينا $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ و $\lim_{x\to x_0} g(x)=B$ حيث A,B كلاهما 0 أو ∞ عندئذ يكون لدينا $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ تشكل حالة عدم تعيين $0/0$ أو ∞/∞ لحل هذه المشكلة يمكن تقدير نهاية نسبة التابعين كما يلي:

1. إذا كان $f(x),g(x)$ قابلين للاشتقاق ضمن المجال $]a,b[$ (ممكن مع أو بدون قابلية الاشتقاق عند $x=x_0$ وإذا كان $g'(x)\neq 0$ من أجل $x\neq x_0$ عندئذ يكون لدينا:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ و $\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$ يمكن تطبيق نفس العلاقة السابقة:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

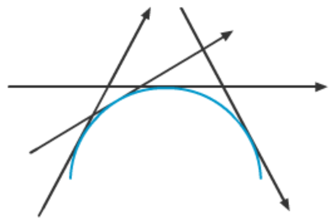
5. استخدام المشتقات لايجاد النهايات المحلية لتابع ونقاط الانعطاف

نفرض أن التابع $f(x)$ قابل للاشتقاق على كل نقاط المجال $]a,b[$ يمكن معرفة تزايد وتناقص هذا التابع $f(x)$ من خلال معرفة إشارة المشتق الأول $f'(x)$ ضمن هذا المجال ونميز الحالات التالية:

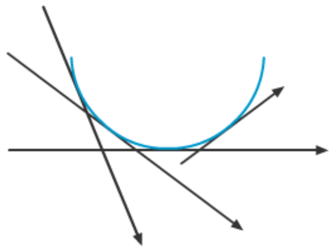
1. نقول أنّ التابع $f(x)$ متزايد ضمن المجال $]a,b[$ إذا كان $f'(x)>0$ من أجل كل قيم $x\in]a,b[$ أي أنّ ميل المماس موجب.
2. نقول أنّ التابع $f(x)$ متناقص ضمن المجال $]a,b[$ إذا كان $f'(x)<0$ من أجل كل قيم $x\in]a,b[$ أي أنّ ميل المماس سالب.
3. نقول أنّ التابع $f(x)$ ثابت ضمن المجال $]a,b[$ إذا كان $f'(x)=0$ من أجل كل قيم $x\in]a,b[$ أي أنّ ميل المماس معدوم أو المماس أفقي.

ليكن لدينا التابع $f(x)$ قابل للاشتقاق على كل نقاط المجال $]a,b[$ ولتكن $P_1(x_1,y_1)$ نقطة في المستوي من بيان التابع حيث $x_1\in]a,b[$. لنأخذ مستقيم مماس لبيان التابع يتحرك من اليسار لليمين ويمر عبر $P_1(x_1,y_1)$ إذا كانت $P_1(x_1,y_1)$ نهاية محلية صغرى يدور المستقيم المماس عكس عقارب الساعة ويكون ميل المماس سالباً على يسار النهاية المحلية الصغرى $P_1(x_1,y_1)$ وموجباً على يمينها وينعدم عندها $P_1(x_1,y_1)$. وبشكل مشابه يكون للتابع نهاية محلية عظمى عند $P_1(x_1,y_1)$ إذا دار المماس باتجاه عقارب الساعة وتغيرت إشارة الميل للماس من الموجب إلى السالب.

نهاية محلية عظمى دوران المماس مع عقارب الساعة



نهاية محلية صغرى دوران المماس عكس عقارب الساعة

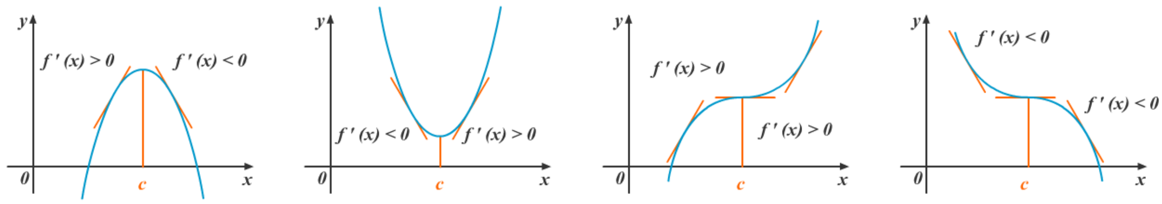


أي أنّه من أجل تابع $f(x)$ تكون النقطة $P_1(x_1, y_1 = f(x_1))$ نهاية محلية صغرى عندما يكون:

1. $f'(x) < 0$ من أجل $x < x_1$ و x في جوار x_1
2. $f'(x) > 0$ من أجل $x > x_1$ و x في جوار x_1

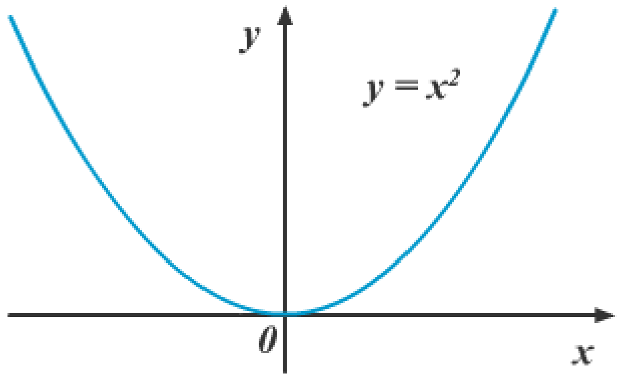
وتكون النقطة $P_1(x_1, y_1 = f(x_1))$ نهاية محلية عظمى عندما يكون:

1. $f'(x) > 0$ من أجل $x < x_1$ و x في جوار x_1
2. $f'(x) < 0$ من أجل $x > x_1$ و x في جوار x_1



مثال:

ليكن لدينا التابع $f(x)=x^2$ نجد أنّ النقطة $(0,0)$ هي نهاية محلية صغرى لهذا التابع. لأنّ $f(x)\geq f(0)$



نظرية:

ليكن لدينا $x_1\in]a,b[$ ضمن مجموعة تعريف التابع $f(x)$ ومشتقه $f'(x)$ موجود ومستمر ومشتقه الثاني $f''(x)$ موجود وإذا كان $f'(x_1)=0$ و $f''(x_1)\neq 0$ تكون $f(x_1)$ نهاية محلية:

1. صغرى إذا كان $f''(x_1)>0$
2. عظمى إذا كان $f''(x_1)<0$

يمكن تعميم هذه النظرية بفرض أنّ المشتقات موجودة ومستمرة وبفرض أنّ $f'(x_1)=f''(x_1)=f'''(x_1)=\cdots=f^{(2p-1)}=0$ و $f^{(2p)}\neq 0$ حيث p عدد طبيعي يكون عندئذ:

1. $f(x_1)$ نهاية محلية صغرى إذا كان $f^{(2p)}(x_1)>0$.
2. $f(x_1)$ نهاية محلية عظمى إذا كان $f^{(2p)}(x_1)<0$.

ملاحظة:

يمكن أن ينعدم مشتق التابع عند النقطة P_1 وأن يكون المشتق ميل المماس للتابع موجب (سالب) على يسار النقطة P_1 ويبقى موجباً (سالباً) على يمين النقطة P_1. عندئذ لاتكون النقطة P_1 نهاية محلية للتابع وإنّما نقطة انعطاف ويكون لدينا $f'(x_1)=0, f''(x_1)=0, f'''(x_1)\neq 0$.

مثال:

ليكن لدينا التابع $y=x^3$ نجد أنّ $y'=3x^2, y''=6x, y'''=6$ وبذلك يمكن التحقق بأنّ النقطة $(0,0)$ ليست نهاية محلية وإنّما هي نقطة انعطاف.

6. حساب السرعة باستخدام المشتق

ليكن x يمثّل المسافة التي تقطعها نقطة مادية من المبدأ و t يمثّل الزمن عندئذ يكون لدينا $x=f(t)$ تابع يمثل موضع النقطة المادية في اللحظة t على المحور Ox. نحصل على قيمة السرعة الآنية من العلاقة $\frac{dx}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$.

7. طريقة نيوتن لحل المعادلات الجبرية

يصعب حلّ المعادلات الجبرية عندما تكون من درجة أكبر من الدرجة الثانية ولكن من الواضح أنّ بيان التابع $y=f(x)$ لمعادلة جبرية $f(x)=0$ يقطع المحور الأفقي Ox عند كل حل حقيقي للمعادلة $f(x)=0$. يمكن بطريقة تجريبية تقدير أعداد طبيعية تقع بينها حلول المعادلة. نستطيع باستخدام طريقة نيوتن تقدير قيمة جذر حقيقي للمعادلة باستخدام المشتق وذلك وفق مايلي: ليكن التابع $y=f(x)$ قابلاً للاشتقاق و r جذر حقيقي للمعادلة أي $f(r)=0$ ولتكن x_0 نقطة للمتحول x قريبة من الجذر r يمكن أن تكون x_0 مثلاً العدد الطبيعي السابق أو التالي. ليكن $f'(x_0)$ ميل المماس للتابع عند النقطة $P_0(x_0,f(x_0))$. ولتكن النقطة $Q_1(x_1,0)$ تقاطع المستقيم المماس للتابع $y=f(x)$ عند النقطة $P_0(x_0,f(x_0))$ مع المحور Ox عندئذ يكون لدينا: $\frac{0-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\Rightarrow x=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ وباستبدال x_1 عوضاً عن x نجد $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ بأخذ المستقيم المماس للتابع عند النقطة $P_1(x_1,f(x_1))$ وبإعادة نفس الحساب نجد $x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$.

وبالمتابعة بنفس الطريقة نجد $x_n=x_0-\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.

يمكن الحصول على تقريب للحل للمعادلة r بالدقة المطلوبة بأخذ x_n. يعتمد نجاح طريقة نيوتن على شكل التابع بجوار جذر المعادلة.

8. تطبيقات لحساب المشتقات

1. $f(x)=x$ في هذه الحالة يكون لدينا المشتق $y'=1$
2. $f(x)=x^2$ في هذه الحالة يكون لدينا المشتق $\frac{d}{dx}\left(x^2\right)=2x$
3. $f(x)=x^3$ في هذه الحالة يكون لدينا المشتق $\frac{d}{dx}\left(x^3\right)=3x^2$
4. $f(x)=x^4$ في هذه الحالة يكون لدينا المشتق $\frac{d}{dx}\left(x^4\right)=4x^3$
5. $f(x)=x^n$ في هذه الحالة يكون لدينا المشتق $\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1}$
6. $f(x)=x^6 \Rightarrow f'(x)=6x^5$
7. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}$
8. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

مثال:

ماهو مشتق التابع التالي: $f(x)=\frac{1}{x^2}$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(x^{-2}\right)=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$$

مثال:

ماهو مشتق التابع التالي: $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{2/3}\right)=\frac{2}{3}x^{2/3-1}=\frac{2}{3}x^{-1/3}$$

مثال:

ماهو مشتق التابع $f(x)=x\sqrt{x}$

$$f(x)=x\sqrt{x}=x\cdot x^{1/2}=x^{3/2}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^{3/2-1}=\frac{3}{2}x^{1/2}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$$

مثال:

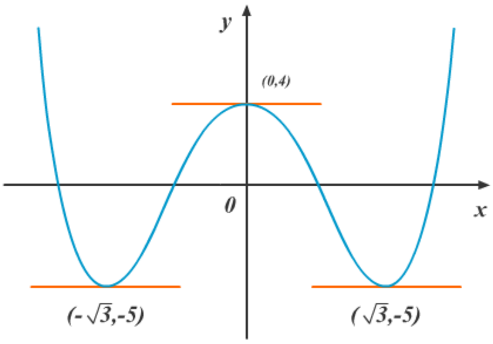
أوجد النقاط للتابع $f(x)=x^4-6x^2+4$ التي يكون فيها المماس أفقياً؟

الحل:

يكون المماس أفقياً عندما يكون ميله يساوي الصفر أي أن $f'(x)=4x^3-12x+0=4x(x^2-3)$

وهذا يكون محققاً عندما تكون: $x=0 \Rightarrow f(x)=4$

أو عندما يكون $x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$



مثال:

أوجد مشتق التابع التالي: $h(x)=\sqrt{x^2+1}$

نلاحظ أن هذا التابع هوعبارة عن تابع مركب من تابعين $h(x)=f(g(x))$

حيث: $f(g(x))=\sqrt{g(x)}$ و $g(x)=x^2+1$

$$h'(x)=g'(x)\cdot f'(g(x))$$

لدينا $g'(x)=2x$ و $f'(g(x))=\dfrac{2}{2\sqrt{x^2+1}}$

$$h'(x)=2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

مثال:

أوجد مشتق التابع $f(x)=x^8+12x^5-4x^4+10x^3-6x+5$

$$f'(x)=8x^7+12(5x^4)-4(4x^3)-6+0$$

$$f'(x)=8x^7+60(x^4)-16(x^3)-6$$

مثال:

لنفرض أنه لدينا $C(x)$ تابع الكلفة الكلية لانتاج x وحدة من منتج معين. زيادة عدد الواحدات من x_1 إلى x_2 تؤدي إلى زيادة بالكلفة: $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$ و $x_2 = x_1 + \Delta x$

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

تابع الكلفة الهامشية هو مشتق تابع الكلفة الكلية أي أنّ:

$$C'(x) = \frac{dC}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

بما أن x تأخذ قيماً طبيعية لايمكن أخذ Δx قريبة من الصفر ولكن نأخذها تساوي 1 مع $x = n$ كبيرة:

$$C'(n) \approx C(n+1) - C(n)$$

عادة نمثل تابع الكلفة بكثير حدود: $C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$

a تمثل الكلفة الثابتة (أجار، تدفئة، صيانة،...) وبقية الحدود تمثل الكلفة المتغيرة (مواد أولية، أجور يد عاملة،.....).

تطبيق:

$$C(x) = 10000 + 5x + 0.01x^2$$

$$\Rightarrow C'(x) = 5 + 0.02x$$

الكلفة الهامشية عند انتاج 500 وحدة هي:

$$C'(500) = 5 + 0.02(500) = 15$$

بينما باستخدام العلاقة التقريبية نجد:

$$C'(500) \approx C(501) - C(500) = \left[10000 + 5(501) + 0.01(501)^2\right] - \left[10000 + 5(500) + 0.01(500)^2\right] = 15.01$$

وبالتالي نجد أنّ:

$$C'(500) \approx C(501) - C(500)$$

مثال:

أوجد مشتق التابع التالي: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$

يمكن كتابة هذا التابع بالشكل $f(x)=\left(x^2+x+1\right)^{-1/3}$ وبالتالي يصبح مشتقه:

$$f'(x)=-\frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{-4/3}\frac{d}{dx}\left(x^2+x+1\right)=-\frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{-4/3}(2x+1)$$

مثال:

أوجد مشتق التابع $f(t)=\left(\dfrac{t-2}{2t+1}\right)^9$

بتطبيق اشتقاق التابع المركب نجد:

$$f'(t)=9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8\frac{d}{dt}\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)=9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8\frac{(2t+1)-2(t-2)}{(2t+1)^2}=\frac{45(t-2)^8}{(2t+1)^{10}}$$

مثال:

أوجد مشتق التابع التالي:

$$f(x)=(2x+1)^5\left(x^3-x+1\right)^4$$

$$f'(x)=(2x+1)^5\frac{d}{dx}\left(x^3-x+1\right)^4+\left(x^3-x+1\right)^4\frac{d}{dx}(2x+1)^5$$

$$f'(x)=(2x+1)^5\cdot 4\left(x^3-x+1\right)^3\frac{d}{dx}\left(x^3-x+1\right)+\left(x^3-x+1\right)^4\cdot 5(2x+1)^4\frac{d}{dx}(2x+1)$$

$$f'(x)=4(2x+1)^5\left(x^3-x+1\right)^3\left(3x^2-1\right)+10\left(x^3-x+1\right)^4(2x+1)^4$$

مذاكرة المشتقات Derivatives

العلامة العظمى: 100 علامة النجاح: 50 المدة: ساعة ونصف

لكل سؤال خمس علامات

اختر الإجابة الصحيحة للأسئلة التالية:

1. مشتق التابع $f(x)=3\sqrt{x}$ هو:

a) $f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

b) $f'(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x}}$

c) $f'(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

d) $f'(x)=3\sqrt{x}$

مساعدة: راجع فقرة قواعد الاشتقاق وفقرة اشتقاق التوابع البسيطة.

2. مشتق التابع $f(x)=\dfrac{4}{x^5}$ هو:

a) $f'(x)=-20\dfrac{1}{x^6}$

b) $f'(x)=-20x^6$

c) $f'(x)=-20x^4$

d) $f'(x)=\dfrac{4}{5x^6}$

مساعدة: راجع فقرة قواعد الاشتقاق وفقرة اشتقاق التوابع البسيطة.

3. مشتق التابع $f(x)=\dfrac{-2}{\sqrt[3]{x}}$ هو:

a) $f'(x)=\dfrac{2}{3}x^{-4/3}$

b) $f'(x)=-\dfrac{2}{3}x^{-4/3}$

c) $f'(x)=-6x^{-4/3}$

d) $f'(x)=\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

مساعدة: راجع فقرة قواعد الاشتقاق وفقرة اشتقاق التوابع البسيطة.

4. مشتق التابع $f(x)=\frac{5}{x^{100}}-4x^{-1/3}$ هو:

a) $f'(x)=-500x^{-101}+\frac{4}{3}x^{-4/3}$

b) $f'(x)=500x^{101}-\frac{4}{3}x^{-4/3}$

c) $f'(x)=-500x^{101}+x^{4/3}$

d) $f'(x)=500x^{101}-\frac{4}{3}x^{4/3}$

مساعدة: راجع فقرة قواعد الاشتقاق وفقرة اشتقاق التوابع البسيطة.

5. مشتق التابع $f(x)=-2x^{1/3}+3x^{5}-6$ هو:

a) $f'(x)=-\frac{2}{3}x^{-2/3}+15x^{4}$

b) $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-2/3}-15x^{4}$

c) $f'(x)=\frac{2}{3}x^{2/3}+15x^{4}$

d) $f'(x)=\frac{1}{3}x^{1/3}+15x^{4}$

مساعدة: راجع فقرة قواعد الاشتقاق وفقرة اشتقاق التوابع البسيطة.

6. مشتق التابع $f(x)=(2x+1)^{10}$ هو:

a) $f'(x)=20(2x+1)^{9}$

b) $f'(x)=10(2x+1)^{9}$

c) $f'(x)=20(2x+1)^{10}$

d) $f'(x)=10(2x+1)^{10}$

مساعدة: راجع فقرة اشتقاق التابع المركب.

7. مشتق التابع $f(x)=\sqrt{x}\cos x$ هو:

a) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos x-\sqrt{x}\sin x$

b) $f'(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{x}\cos x-\sqrt{x}\sin x$

c) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sin x-\sqrt{x}\cos x$

d) $f'(x)=\cos x-\sqrt{x}\sin x$

مساعدة: راجع فقرة قواعد الاشتقاق.

8. مشتق التابع $f(x)=\dfrac{\sin x+x^2}{e^x}$ هو:

a) $f'(x)=\dfrac{\cos x+2x-\sin x-x^2}{e^x}$

b) $f'(x)=\dfrac{-\cos x-2x+\sin x+x^2}{e^{2x}}$

c) $f'(x)=\dfrac{\cos x+2x+\sin x+x^2}{e^{2x}}$

d) $f'(x)=\dfrac{\sin x-2x-\cos x-x^2}{e^x}$

مساعدة: راجع فقرة قواعد الاشتقاق.

9. مشتق التابع $f(x)=\log_2\left(x^2+12\right)$ هو:

a) $f'(x)=\dfrac{2x}{\left(x^2+12\right)\ln 2}$

b) $f'(x)=\dfrac{2x}{\ln\left[\left(x^2+12\right)2\right]}$

c) $f'(x)=\dfrac{2x}{\left(x^2+12\right)}\ln 2$

d) $f'(x)=\dfrac{2x}{\left(x^2+12\right)}$

مساعدة: راجع فقرة اشتقاق التابع المركب.

.10 مشتق التابع $f(x)=\sec(x)=\frac{1}{\cos x}$ هو:

(a $f'(x)=-\frac{\sin x}{\cos^2 x}$

(b $f'(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$

(c $f'(x)=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

(d $f'(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$

مساعدة: راجع فقرة قواعد الاشتقاق.

.11 مشتق التابع $f(x)=\left(1+\left(1+(1+x)^2\right)^2\right)^2$ هو:

(a $f'(x)=8\left(1+\left(1+(1+x)^2\right)^2\right)\cdot\left(1+(1+x)^2\right)\cdot(1+x)$

(b $f'(x)=\left(1+\left(1+(1+x)^2\right)^2\right)\cdot\left(1+(1+x)^2\right)$

(c $f'(x)=\left(1+\left(1+(1+x)\right)\right)\cdot\left(1+(1+x)^2\right)\cdot(1+x)$

(d $f'(x)=8\left(1+\left(1+(1+x)^2\right)^2\right)\cdot(1+x)$

مساعدة: راجع فقرة اشتقاق التابع المركب.

.12 يوجد للتابع $f(x)=x^3-3x+2$ مماسان أفقيان عند النقاط:

(a $(-1,4),(1,0)$

(b $(1,4),(-1,0)$

(c $(1,-4),(-1,0)$

(d $(1,4),(1,0)$

مساعدة: المشتق يجب ان يكون معدوم ليصبح المماس أفقي فقرة تعريف المشتق

13. مشتق التابع $f(x)=2\sqrt{6x^2+4x+26}$ هو:

(a $f'(x)=\dfrac{12x+4}{\sqrt{6x^2+4x+26}}$

(b $f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{12x}{\sqrt{6x^2+4x+26}}$

(c $f'(x)=-\dfrac{+4}{2\sqrt{6x^2+4x+26}}$

(d $f'(x)=\dfrac{12x+4}{6x^2+4x+26}$

مساعدة: راجع فقرة اشتقاق التابع المركب.

14. مشتق التابع $f(x)=5(9x+25)^8$ هو:

(a $f'(x)=360(9x+25)^7$

(b $f'(x)=63(9x+25)^7$

(c $f'(x)=360(9x+25)^8$

(d $f'(x)=36(9x+25)^8$

مساعدة: راجع فقرة اشتقاق التابع المركب.

15. لدينا التابع $f(x)=\dfrac{3+x}{3-x}$ قيمة مشتقه $f'(2)$ تصبح:

(a $f'(2)=6$

(b $f'(2)=2$

(c $f'(2)=3$

(d $f'(2)=1$

مساعدة: راجع فقرة قواعد الاشتقاق.

16. لدينا التابع $f(x)=\sqrt{2x-1}$ قيمة مشتقه $f'(5)$ تصبح:

(a $f'(5)=\dfrac{1}{3}$

(b $f'(5)=\dfrac{1}{9}$

(c $f'(5)=1$

(d $f'(5)=3$

مساعدة: راجع فقرة اشتقاق التابع المركب.

17. لدينا التابع $f(x)=\begin{cases} x^2\sin(1/x), x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$ قيمة مشتقه $f'(0)$ تصبح:

a) $f'(0)=0$

b) $f'(0)=1$

c) $f'(0)=-1$

d) المشتق غير موجود عند 0.

مساعدة: راجع فقرة تعريف المشتق

18. ليكن لدينا التابع المعرّف ضمنياً بالمعادلة $xy^3-3x^2=xy+5$ فيكون $y'=\frac{dy}{dx}$ يساوي:

a) $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{(6x-y^3+y)}{(3xy^2-x)}$

b) $y'=\frac{dy}{dx}=(6x-y^3+y)$

c) $y'=\frac{dy}{dx}=(3xy^2-x)$

d) $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{(x+y^3)}{(xy-x)}$

مساعدة: راجع فقرة الاشتقاق الضمني.

19. ماهي قيمة النهاية $\lim_{x\to\infty} x^2\cdot e^{-x}$ ؟

a) ∞

b) -1

c) 1

d) 0

مساعدة: راجع فقرة قواعد اضافية لحساب النهايات.

20. ماهي قيمة النهاية $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+5}{5x^2-6x-3}$ ؟

a) $\frac{3}{5}$

b) 0

c) $\frac{5}{3}$

d) ∞

مساعدة: راجع فقرة قواعد اضافية لحساب النهايات.

الإجابات الصحيحة

السؤال	الإجابة الصحيحة
1	الخيار الأول
2	الخيار الأول
3	الخيار الأول
4	الخيار الأول
5	الخيار الأول
6	الخيار الأول
7	الخيار الأول
8	الخيار الأول
9	الخيار الأول
10	الخيار الأول
11	الخيار الأول
12	الخيار الأول
13	الخيار الأول
14	الخيار الأول
15	الخيار الأول
16	الخيار الأول
17	الخيار الأول
18	الخيار الأول
19	الخيار الرابع
20	الخيار الثاني