التمثيل النظري للبرنامج الخطي (Theoretical Representation of linear program)

البرنامج الخطي (LP) هو مسألة رياضية من النوع:

مسألة تقليل

$$\min \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1,\dots,m \quad (1)$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1,\dots,n$$

مسألة تعظيم

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1,\dots,m$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1,\dots,n$$

حيث أن المعاملات والمتغيرات c_j, a_{ij}, b_i, x_i تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$: (Objective function) تابع أو دالة الهدف

z : (Objective function value) قيمة تابع الهدف

$c_j \ (j = 1,\dots,n)$: (Objective function coefficients) معاملات تابع الهدف

$x_j \ (j = 1,\dots,n)$: (Structural or decision variables) متغيرات أو متحولات القرار أو المتغيرات البنيوية

$b_i \ (i = 1,\dots,m)$: (Right hand side values) قيم الجانب الأيمن للمتراجحات

$a_{ij} \ (i = 1,\dots,m; j = 1,\dots,n)$: (Constraint coefficients) معاملات القيود

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1,\dots,m$: (Main constraints) القيود الأساسية أو الرئيسية

$x_j \geq 0, \quad j = 1,\dots,n$:

(Non-negativity restrictions or non-negativity constraints) قيود عدم السلبية أو غير السالبة

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1,\dots,m$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1,\dots,n$$

(Feasible region or feasible set) منطقة أو مجموعة الإمكانيات

ملاحظات

1. تقليل دالة الهدف (z) يكافئ تعظيم دالة الهدف $(-z)$**:** $\min z = -\max -z$ و $\max z = -\min -z$

2. من الممكن دوماً تمثيل القيود (1) على شكل متساويات إما بإدخال متحولات فضفاضة (t_i) (slack variables) أو متحولات فائضة (s_i)(surplus variables) كما يلي:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \textit{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + t_i = b_i, \quad i = 1,\dots,m \\ & x_j \ge 0, \quad j = 1,\dots,n \\ & t_i \ge 0, \quad i = 1,\dots,m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \textit{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - s_i = b_i, \quad i = 1,\dots,m \\ & x_j \ge 0, \quad j = 1,\dots,n \\ & s_i \ge 0, \quad i = 1,\dots,m \end{aligned}$$

يجب التنويه بأنه يتم معاملة المتحولات الفضفاضة (t_i) والمتحولات الفائضة (s_i) كالمتحولات البنيوية (x_i) تماماً. لذلك يمكن إعادة كتابة البرنامج الخطي (LP) على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} \max (\min) \quad & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \textit{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,\dots,m && (2) \\ & x_j \ge 0, \quad j = 1,\dots,n && (3) \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \max (\min) \quad & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \textit{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{n} p_j x_j = p_0 \\ & x_j \ge 0, \quad j = 1,\dots,n \end{aligned}$$

حيث $p_0 = (b_1, b_2, \dots, b_m)^t$ ، $p_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^t$

و بالشكل المصفوفي :

$$\begin{aligned} &\max\ (\min) \quad z = c^t x \\ &subject\ to \quad Ax = b \\ &\qquad\qquad\qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

حيث : $A = \begin{pmatrix} a_{11}.........a_{1n} \\ . \\ . \\ a_{m1}.........a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^n, c = \begin{pmatrix} c_1 \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

حيث $\mathbb{R}^n$ فضاء المتجهات من المرتبة n وبمركبات حقيقية ، $\mathbb{R}_+^n$ فضاء المتجهات من المرتبة n وبمركبات حقيقية غير سالبة و $\mathbb{R}^{m \times n}$ فضاء من المرتبة $m \times n$ مع مركبات حقيقية.

تعاريف أخرى

يتم في هذا العمل استخدام المصطلحات التالية:

حل: كل n مركبة $(x_1,....,x_n)$ تحقق (2)

حل ممكن: كل حل يحقق (3)

قاعدة أو أساس: كل مجموعة من m متحول مختارة من $x_1,...,x_n$ بحيث يكون محدد المعاملات a_{ij} المرتبطة مع هذه الـ m متحول مخالفاً للصفر (في كلمة أخرى ، المتجهات p_j المرتبطة مع هذه الـ m متحول تشكل أساس أو قاعدة لفضاء القيود بـ m بعد)

حل قاعدي أو أساسي: كل حل يحتوي على $n-m$ متحول معدوم أو صفري، و المتحولات الـ m الأخرى تشكل قاعدة أو أساس

حل قاعدي ممكن: كل حل قاعدي يحقق (3)

حل مثالي: كل حل ممكن يعطي قيمة مثلى (تعظيم أو تقليل) لتابع الهدف z

حل البرنامج الخطي Solving a linear programming (LP)

يوجد عدة طرائق لحل البرامج الخطية (LP)

أ. الطريقة البيانية Graphical method

لكن بشكل عام لا يمكن استخدام هذه الطريقة إلا في حالة وجود متحولين بنيويين إ ثنين أو ثلاثة على الأكثر

ب. الطريقة التعدادية للحلول القاعدية Enumerative method of basic solutions

لكن من الناحية العملية، تعتبر هذه الطريقة طويلة نسبياً، بالإضافة إلى ذلك توجد الطريقة أفضل حل مثالي قاعدي ممكن، لكن ليس بالضرورة أن توجد الحل المثالي

ت. الطريقة أوالخوارزمية المبسطة Simplex algorithm (method)

تسمح هذه الطريقة بتبيان فيما إذا كان يوجد على الأقل حل ممكن للمسألة الخطية (LP) ، وفي حال الوجود

تعطي الطريقة حل مثالي بعد عدد محدود أو منتهي من التكرارات لا يتجاوز عددها الـ $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

و بنتيجة أهمية هذه الخوارزمية المبسطة، سوف نقوم بتحليلها بالتفصيل في هذا العمل

أ. الطريقة البيانية Graphical method

لنتذكر أولاً النظريتين التاليتين:

نظرية 1. مجموعة الحلول الممكنة للبرنامج الخطي (LP) تشكل في فضاء متحولات القرار(المتحولات البنيوية) مجموعة محدبة تدعى منطقة الإمكانيات والتي هي:

- إما مجموعة خالية
- أو مجموعة محدبة و غير محدودة (متعدد سطوح غير محدود)
- أو مجموعة محدبة و محدودة (متعدد سطوح محدود)

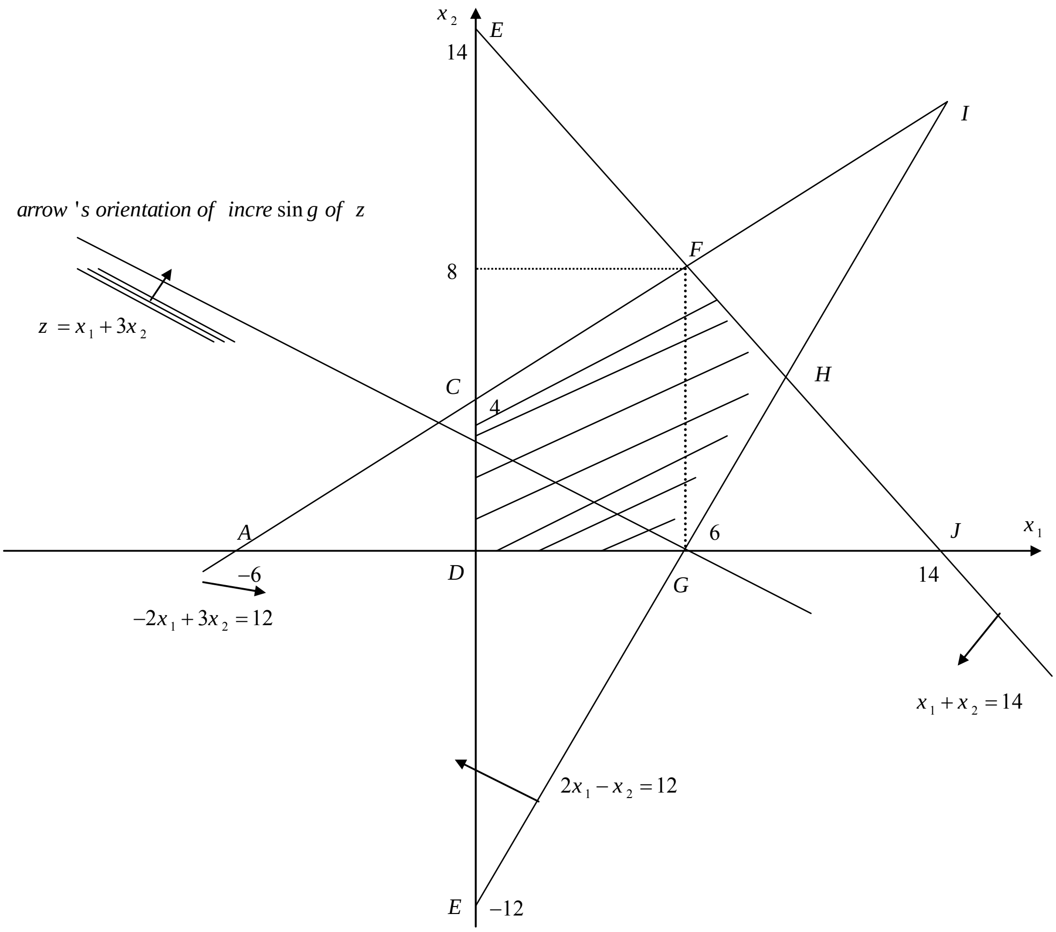
ملاحظة: متعدد السطوح يشكل دوماً مجموعة محدبة

نظرية 2. إذا وجد على الأقل حل مثالي واحد منته (ذو قيمة منتهية)، عندئذ يوجد على الأقل حل مثالي واحد يقع على إحدى رؤوس منطقة الإمكانيات

مثال 1. لنأخذ البرنامج الخطي LP التالي:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 3x_2 \\ st \quad & x_1 + x_2 \le 14 \\ & -2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ & 2x_1 - x_2 \le 12 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

فضاء متحولات القرار هو المستوي (x_1, x_2). المنطقة المظللة هي مجموعة الحلول الممكنة (منطقة الإمكانيات)

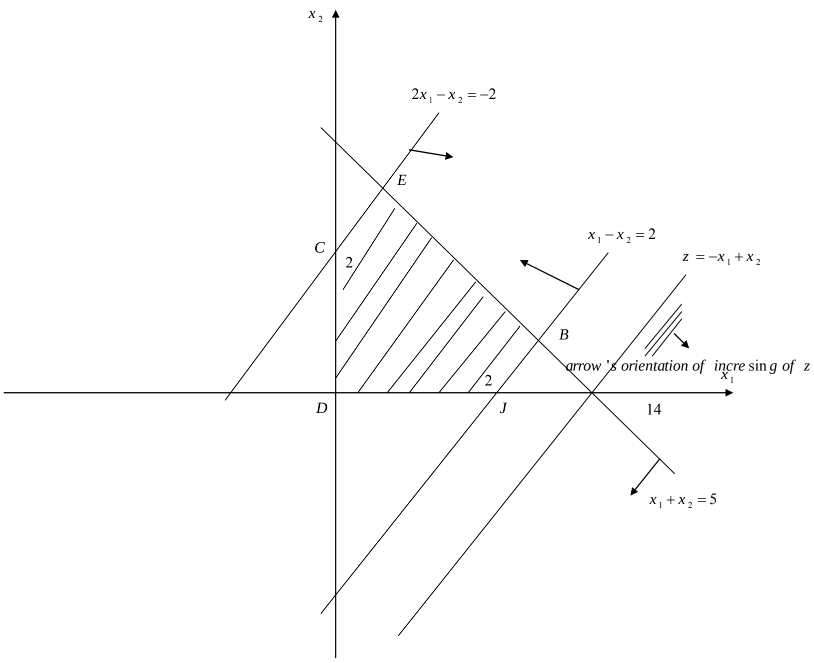


من الواضح أن منطقة الإمكانيات تشكل مجموعة محدبة ومحدودة، وبالتالي الحل المثالي للبرنامج الخطي هو إحدى رؤوس منطقة الإمكانيات هذه، لذلك نحاول إيجاد رأس منطقة الإمكانيات الذي يعطي قيمة أعظمية لتابع الهدف z و ذلك من خلال استخدام اتجاه متجهة التدرج لـ z (متجهة المشتقات الأولى و تسمى متجهة التزايد)، لذلك من السهولة يمكن إيجاد الحل المثالي للبرنامج الخطي في الرأس أو النقطة F(6,8) و الذي يعطي قيمة أعظمية لدالة الهدف z والتي تساوي إلى 30 وهي أعظم قيمة لدالة الهدف على منطقة الإمكانيات.

مثال 2. لنأخذ البرنامج الخطي LP التالي:

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 + x_2 \\ st \quad & 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

فضاء متحولات القرار هو المستوي (x_1, x_2). المنطقة المظللة هي مجموعة الحلول الممكنة (منطقة الإمكانيات)

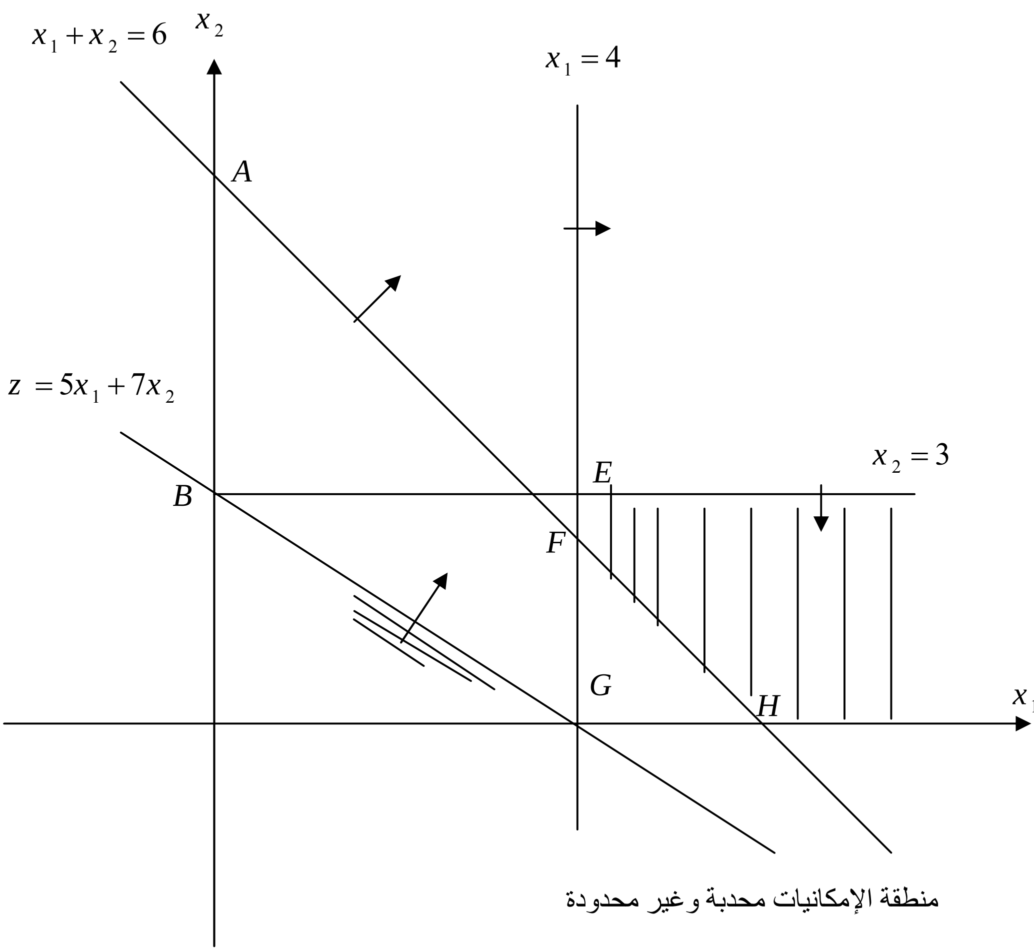


يشكلان الرأسان J(2,0) و B(3.5, 1.5) حلان مثاليان للبرنامج الخطي، إضافة إلى ذلك كل نقطة من القطعة المستقيمة الواصلة بين J و B (أي تركيب خطي بين J و B) تعتبر حل مثالي للبرنامج الخطي، أي كل النقاط المعرفة كالتالي: $\forall \lambda \in [0,1] \quad x^{*} = \lambda J + (1-\lambda)B$ تكون حلول مثالية للبرنامج الخطي المفروض.

مثال 3. لنأخذ البرنامج الخطي LP التالي:

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 7x_2 \\ st \quad & x_1 + x_2 \geq 6 \\ & x_1 \geq 4 \\ & x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

فضاء متحولات القرار هو المستوي (x_1, x_2). المنطقة المظللة هي مجموعة الحلول الممكنة (منطقة الإمكانيات)

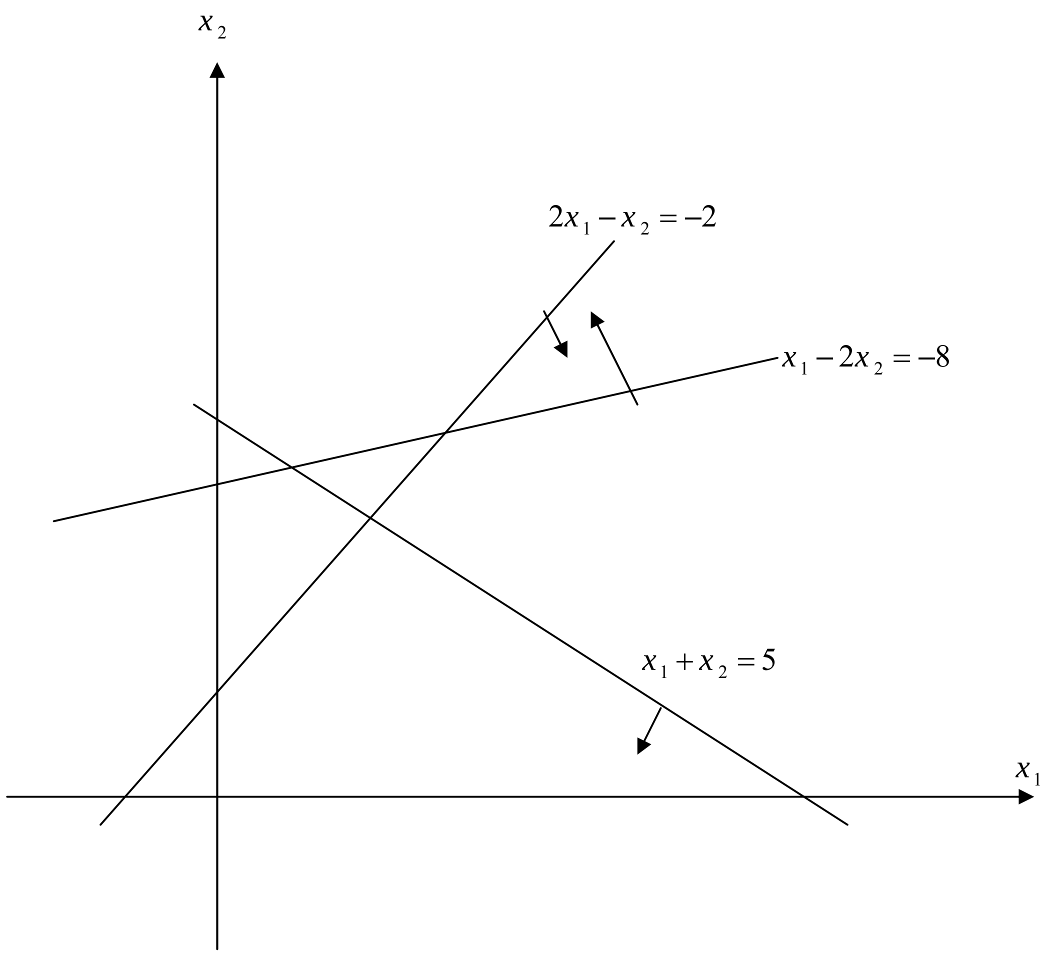


منطقة الإمكانيات محدبة وغير محدودة

مثال 4. لنأخذ البرنامج الخطي LP التالي:

$$
\begin{aligned}
\min z &= -x_1 + x_2 \\
st \quad & 2x_1 - x_2 \geq -2 \\
& x_1 - 2x_2 \leq -8 \\
& x_1 + x_2 \leq 5 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

فضاء متحولات القرار هو المستوي (x_1, x_2).



منطقة الإمكانيات خالية

الخوارزمية (حالة تعظيم)

الخطوة الأولى: نرسم جميع القيود ثم نحدد منطقة الإمكانيات

الخطوة الثانية: نرسم متجهة التدرج لتابع الهدف

الخطوة الثالثة: نحرك الخطوط المستقيمة المعرفة بـ $c^t x = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$ باتجاه متجهة التدرج لدالة الهدف حتى الوصول إلى أخر نقطة تقاطع مع منطقة الإمكانيات. نقطة التقاطع هذه تسمى النقطة المثلى ويرمز لها بـ x^*

الخطوة الرابعة: القيود الخطية المتقاطعة عند النقطة x^* يمكن اعتبارها متساويات. بحل هذه المعادلات الخطية يتم الحصول على مركبات الحل المثالي x^*

الخطوة الخامسة: نحسب قيمة دالة الهدف عند النقطة المثالية $z^* = c^t x^*$

ملاحظة: في حالة تقليل يتم تحريك الخطوط المستقيمة باتجاه عكس متجهة التدرج لتابع الهدف

ب. الطريقة التعدادية للحلول القاعدية Enumerative method of basic solutions

نظرية 1. كل حل قاعدي ممكن يتطابق مع رأس من منطقة الإمكانيات المحدبة(مجموعة الحلول الممكنة)

نظرية 2. عدد الحلول القاعدية الممكنة محدودة من الأعلى بـ $C_{n+m}^{m} = \dfrac{(n+m)!}{n!m!}$

الخوارزمية

الخطوة الأولى: نوجد جميع الحلول القاعدية للبرنامج LP

الخطوة الثانية: اختر جميع الحلول القاعدية الممكنة

الخطوة الثالثة: نحسب قيم دالة الهدف عند جميع الحلول القاعدية الممكنة ومن ثم نختار الحل الأمثل من بينهما والذي يعطي قيمة مثلى لدالة الهدف

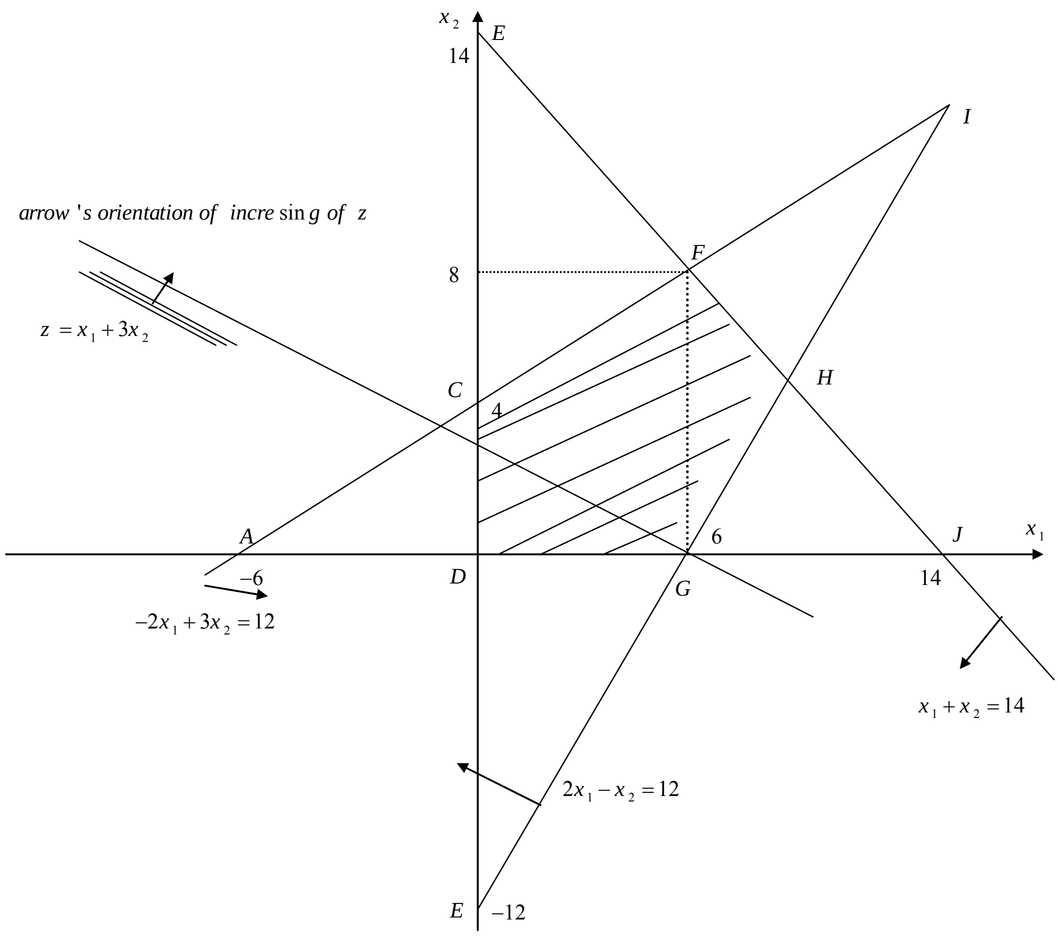
ملاحظة: تسمح لنا هذه الطريقة بالحصول على حل قاعدي ممكن (إحدى رؤوس منطقة الإمكانيات) الذي يعطي قيمة مثلى لدالة الهدف، لكن ليس من الضروري أن يكون الحل الأمثل المطلوب للبرنامج الخطي و كمثال على ذلك عندما تكون منطقة الإمكانيات محدبة وغير محدودة في هذه الحالة ليس من الضروري أن يكون الحل المثالي مطابق لأي رأس من رؤوس المنطقة المحدبة. أما إذا كانت منطقة الإمكانيات محدبة و محدودة عندئذ الحل القاعدي الممكن هو حل مثالي للبرنامج الخطي

مثال 1: لنأخذ البرنامج الخطي LP التالي:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 3x_2 \\ st \quad x_1 + x_2 + t_1 &= 14 \\ -2x_1 + 3x_2 + t_2 &= 12 \\ 2x_1 - x_2 + t_3 &= 12 \\ x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

$n-m$ متحول معدوم

5-3=2 متحول معدوم



منطقة الإمكانيات محدبة ومحدودة

جدول 1. مجموعة الحلول القاعدية

Points	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
D	0	0	14	12	12
E	0	14	0	-30	26
C	0	4	10	0	16
E	0	-12	26	48	0
J	14	0	0	40	-16
A	-6	0	20	0	24
G	6	0	8	24	0
F	6	8	0	0	8
H	26/3	16/3	0	40/3	0
I	12	12	-10	0	0

جدول 2. مجموعة الحلول القاعدية الممكنة

Points	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
D	0	0	14	12	12
C	0	4	10	0	16
G	6	0	8	24	0
F	6	8	0	0	8
H	26/3	16/3	0	40/3	0

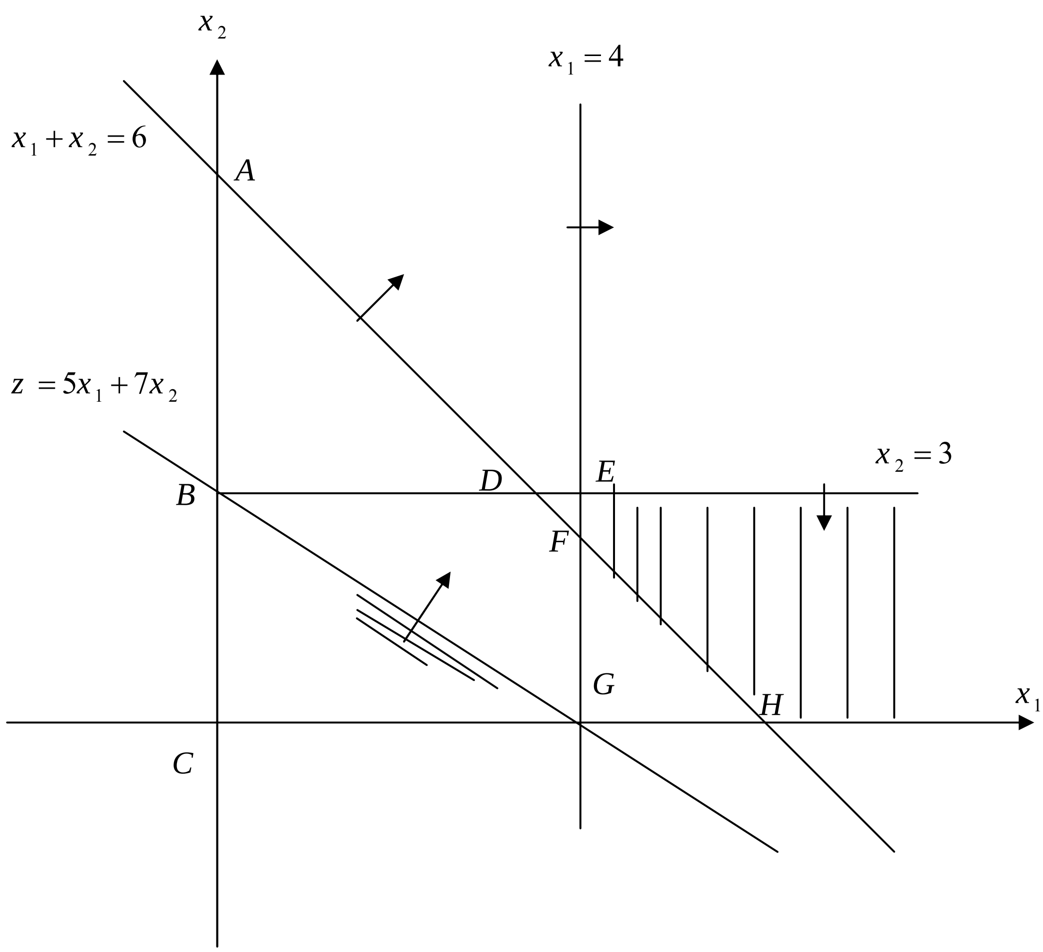
جدول 3. قيم دالة الهدف عند الحلول القاعدية الممكنة

Points	D	C	G	F	H
z	0	12	6	30	74/3

الحل المثالي عند النقطة F بإحداثيات (6, 8,0,0,8)

مثال 2: لنأخذ البرنامج الخطي LP التالي:

$$\begin{aligned}
\max z &= 5x_1 + 7x_2 \\
st \quad & x_1 + x_2 - t_1 = 6 \\
& x_1 - t_2 = 4 \\
& x_2 + t_3 = 3 \\
& x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 \geq 0
\end{aligned}$$



منطقة الإمكانيات محدبة و غير محدودة

جدول 1. مجموعة الحلول القاعدية

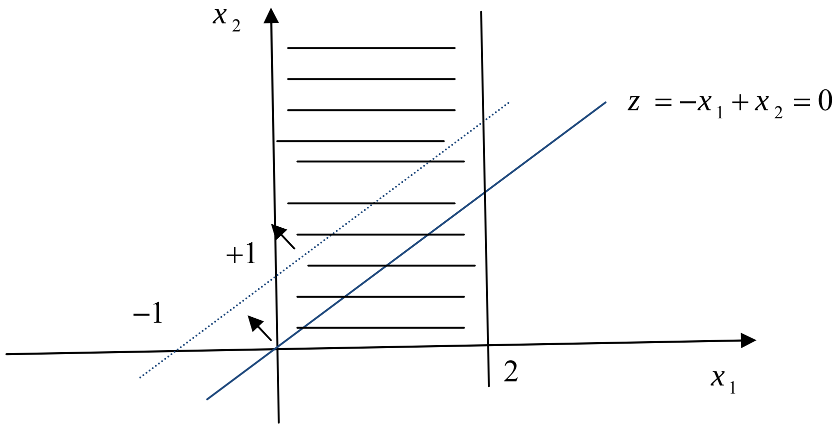
Points	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	Feasible	z
C	0	0	-6	-4	3	.	
A	0	6	0	-4	-3	.	
B	0	3	-3	-4	0	.	
H	6	0	0	2	3	H	30
G	4	0	-2	0	-1	.	
F	4	2	0	0	1	F	34
D	3	3	0	-1	0	.	
E	4	3	1	0	0	E	41

تعطي هذه الخوارزمية حل قاعدي ممكن (إحدى رؤوس منطقة الإمكانيات) تكون عندها قيمة دالة الهدف مثالية (نقطة E) ، لكن ليست هي القيمة المثالية للبرنامج الخطي كون منطقة الإمكانيات غير محدودة

الطريقة البيانية (أمثلة)

مثال 1. لنأخذ البرنامج الخطي التالي:

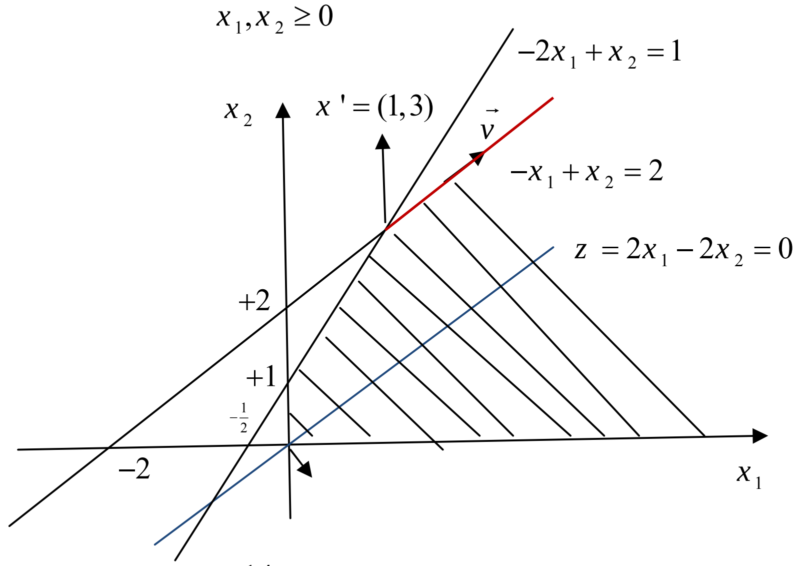
$$\max z = -x_1 + x_2$$
$$st \quad x_1 \le 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



قيمة تابع الهدف z غير محدودة

مثال 2. لنأخذ البرنامج الخطي التالي:

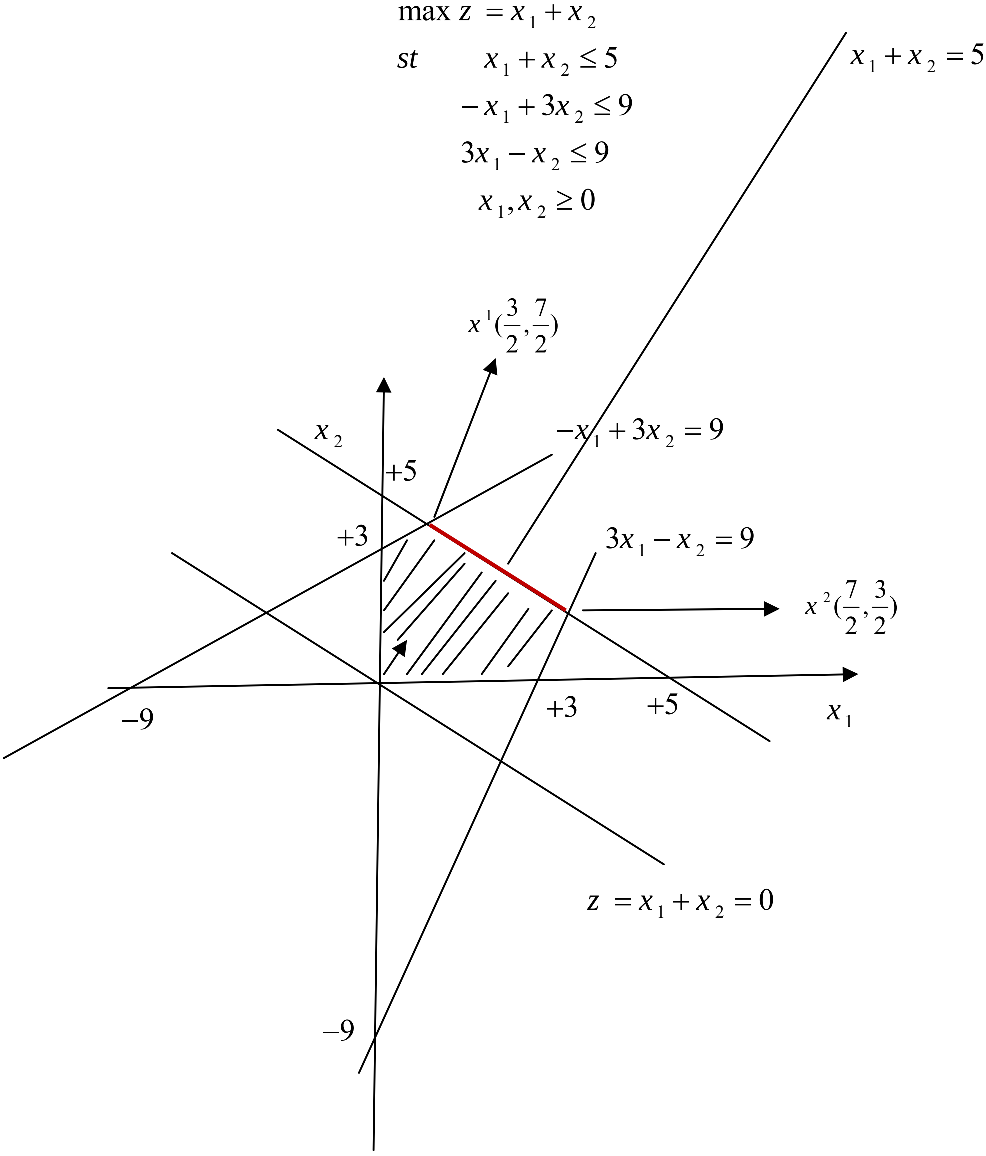
$$\min z = 2x_1 - 2x_2$$
$$st \quad -x_1 + x_2 \le 2$$
$$-2x_1 + x_2 \le 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



مجموعة الحلول المثالية هي: $x^* = \mu(x', \vec{v})$

مثال 3. لنأخذ البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ st \quad & x_1 + x_2 \le 5 \\ & -x_1 + 3x_2 \le 9 \\ & 3x_1 - x_2 \le 9 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



مجموعة الحلول المثالية هي: $\theta = \{x^* : x^* = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2\}, 0 \le \lambda \le 1\}$

مسائل

أوجد الحلول المثالية للبرامج الخطية التالية:

1.

$$\begin{aligned} \max z &= 0.5x_1 + x_2 \\ st \quad & x_1 + x_2 \le 3 \\ & -x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1 \le 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 + x_2 \\ st \quad & 2x_1 - x_2 \ge 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \ge -2 \\ & x_1 + x_2 \le 5 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 - x_2 \\ st \quad & x_1 - x_2 = 3 \\ & x_1 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 2x_2 \\ st \quad & x_1 \le 4 \\ & x_1 - x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 - x_2 \\ st \quad & x_1 - 2x_2 \le 2 \\ & x_1 + x_2 = 6 \\ & x_2 \le 5 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + 2x_2 \\ st \quad & x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_1 \le 4 \\ & x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 - 3x_2 \\ st \quad & 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ & x_1 - x_2 \ge 1 \\ & 2x_1 - x_2 \ge 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 + 2x_2 \\ st \quad & x_1 + x_2 \ge 4 \\ & x_1 + 2x_2 \ge 5 \\ & x_1 \ge 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$