الفصل الثالث: كثيرات الحدود

الصفحة	العنوان

الكلمات المفتاحية:

كثير حدود، خطي، تربيعي، تكعيبي، درجة كثير حدود، الحد الرئيسي، المعامل الرئيسي، خاصة تبديلية، خاصة تجميعية، خاصة توزيعية، قاسم مشترك، قاسم مشترك أعظمي، كثيري حدود أوليان، صفر كثير حدود، جذر كثير حدود ،جذر بسيط، جذر مضاعف عامل كثير حدود، تحليل كثير حدود، النظرية الأساسية في الجبر، كسر جبري، تفريق كسر جبري.

ملخص:

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على كثيرات الحدود من الرتبة n والعمليات الأساسية عليها من جمع وطرح وضرب. كما يتم التعرف إلى حساب كثيرات الحدود بما فيها قسمة كثيري حدود وإيجاد القاسم المشترك الأعظم بينهما. كما نتطرق إلى تحليل كثيرات الحدود عن طريق الجذور والأصفار مع إعطاء بعض الأهمية إلى كثيرات الحدود الخطية والتربيعية والتكعيبية لما لها من أهمية. وأخيراً نتطرق إلى الكسور الجبرية وكيفية تبسيطها إلى مجموع كسور جزئية.

أهداف تعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- كثيرات الحدود والعمليات الحسابية عليها (الجمع، الطرح، الضرب)
- حساب كثيرات الحدود (القسمة، القاسم المشترك الأعظمي، الأصفار والجذور، ...)
- تحليل كثيرات الحدود بشكل عام والخطية والتربيعية والتكعيبية بشكل خاص
- الكسور الجبرية وتفريقها إلى مجموع كسور جزئية

1. تعريف كثير الحدود

تعريف 1: نسمي التابع $P(x)$ المعرف بالشكل: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ كثير من حدود من الدرجة n بالنسبة للمتحول الحقيقي x ، حيث أن n عدد صحيح موجب و $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ أعداد حقيقية تُسمى أمثال (معاملات) كثير الحدود، وأن المعامل $a_n \neq 0$.

- نسمي a_0 الحد الثابت في كثير الحدود، والحد الأعلى درجة $a_n x^n$ يسمى الحد الرئيسي، وأمثاله a_n يسمى المعامل الرئيسي.
- عندما يكون كثير الحدود مرتب تنازلياً وبأبسط تعبير، نقول إنه مكتوب بالشكل المعياري أو القياسي.
- إذا كان المعامل الرئيسي $a_n = 1$ يسمى كثير الحدود واحدي.
- درجة كثير الحدود هي درجة أكبر أس لها.

الاسم	الدرجة	كثير الحدود
خطي	1	$ax + b, \ a \neq 0$
تربيعي	2	$ax^2 + bx + c, \ a \neq 0$
تكعيبي	3	$ax^3 + bx^2 + cx + d, \ a \neq 0$
الدرجة الرابعة	4	$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \ a \neq 0$

مثال 1:

يبين الجدول التالي المعامل الرئيسي، الدرجة، الحدود والمعاملات لثلاث كثيرات حدود:

المعامل الرئيسي	المعاملات	الدرجة	الحدود	كثير الحدود
-3	$-3, 8$	1	$-3x, 8$	$8 - 3x$
2	$2, -3, 5$	2	$2x^2, -3x, 5$	$2x^2 - 3x + 5$
1 (واحدي)	$1, 0, 5, -2$	3	$x^3, 5x, -2$	$x^3 + 5x - 2$

مثال 2: توابع ليست كثيرات حدود:

$P(x) = 2x^{-2} + x^3 + 2 \qquad P(x) = \sqrt{x} + x^2 + 1 \qquad P(x) = x^{\sqrt{2}} + x + 1$

2. العمليات على كثيرات الحدود

1.2. حساب قيمة كثير حدود عند قيمة معينة للمتغير

يتم حساب هذه القيمة بتعويض x بقيمتها في كثير الحدود.

مثال 3: احسب قيمة $P(x) = 2^{3} - 6x^{2} + 7$ عندما $x = \sqrt{2}$ وعندما $x = -3$.

$$p(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^3 - 6(\sqrt{2})^2 + 7 = 2(2\sqrt{2}) - 6(2) + 7 = 4\sqrt{2} - 5$$
$$p(-3) = 2(-3)^3 - 6(-3)^2 + 7 = 2(-27) - 6(9) + 7 = -54 - 54 + 7 = -101$$

2.2. تساوي كثيري حدود

نقول عن كثيري حدود أنهما متساويان إذا كان وفقط إذا كان لهما نفس الدرجة، وكان للحدود المتشابهة في كلا كثيري الحدود نفس المعاملات.

مثال 4:

- إذا كان $2^{3} + 3x^{2} - 4x + 6 = ax^{3} + bx^{2} + cx + d$، فإنه: $a = 2$ و $b = 3$ و $c = -4$ وأخيراً $d = 6$
- أوجد الثوابت a, b, c ليكون $6x^2 + 7x^{2} - 19x + 7 = (2x - 1)(ax^{2} + bx + c)$.

$$6x^{3} + 7x^{2} - 19x + 7 = (2x - 1)(ax^{2} + bx + c)$$
$$6x^{3} + 7x^{2} - 19x + 7 = 2ax^{3} + 2bx^{2} + 2cx - ax^{2} - bx - c$$
$$6x^{3} + 7x^{2} - 19x + 7 = 2ax^{3} + (2b - a)x^{2} + (2c - b)x - c$$

وبالتالي فإن: $2a = 6$ و $2b - a = 7$ و $2c - b = -19$ و $7 = -c$

من المساواة الأولى والأخيرة ينتج $a = 3$ و $c = -7$، بتعويض $a = 3$ في $2b - a = 7$ نحصل على $b = 5$.

- إذا كان $a^{3} + bx^{2} + cx + d = 0$ (كثير الحدود الصفري أو المعدوم)، فإن:

$$a = b = c = d = 0.$$

3.2. جمع وطرح كثيرات الحدود

لجمع (أو طرح) كثيري حدود $P(x)$ ذو الدرجة n و $Q(x)$ ذو الدرجة m، نجمع (أو نطرح) الحدود المتشابهة. ودرجة كثير الحدود الناتج عن الجمع أو الطرح k يحقق العلاقة $k \leq max\ (m,n)$، حيث $max\ (m,n)$ ترمز إلى أكبر العددين m,n.

مثال 5:

- ليكن لدينا: $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ و $Q(x) = 2x^3 + x^2 - 11$. أوجد كل من: $P(x) + Q(x)$ و $P(x) - Q(x)$.

$$\begin{aligned}
P(x) + Q(x) &= (x^3 - 2x^2 + 3x - 5) + (2x^3 + x^2 - 11)\\
&= x^3 - 2x^2 + 3x - 5 + 2x^3 + x^2 - 11\\
&= x^3 + 2x^3 - 2x^2 + x^2 + 3x - 5 - 11\\
&= 3x^3 - x^2 + 3x + -16\\
P(x) - Q(x) &= (x^3 - 2x^2 + 3x - 5) - (2x^3 + x^2 - 11)\\
&= x^3 - 2x^2 + 3x - 5 - 2x^3 - x^2 + 11\\
&= x^3 - 2x^3 - 2x^2 - x^2 + 3x - 5 + 11\\
&= -x^3 - 3x^2 + 3x + 6
\end{aligned}$$

- ليكن لدينا: $P(x) = -2x^2 + 3x - 5$ و $Q(x) = 2x^2 - 11$. أوجد: $P(x) + Q(x)$.

$$P(x) + Q(x) = (-2x^2 + 3x - 5) + (2x^2 - 11) = 3x - 16$$

4.2. ضرب كثير حدود بعدد

لضرب كثير حدود بعدد $c \neq 0$ نضرب كل حد من حدوده بالعدد. الناتج هو كثير حدود من نفس الدرجة.

مثال 6:

- ليكن كثير الحدود التالي: $P(x) = x^4 - 2x^3 + 4x - 5$، أوجد $3P(x)$ و $-2P(x)$

$$3P(x) = 3(x^4 - 2x^3 + 4x - 5) = 3x^4 - 6x^3 + 12x - 15$$
$$-2P(x) = -2(x^4 - 2x^3 + 4x - 5) = -2x^4 + 4x^3 - 8x + 10$$

5.2. ضرب كثيرات الحدود

لضرب كثيري حدود $P(x)$ ذو الدرجة n و $Q(x)$ ذو الدرجة m، نضرب كل حد من كثيرات الحدود الأول بكل حدود كثيرات الحدود الثاني ومن ثم تجميع الحدود المتشابهة. ودرجة كثير الحدود الناتج عن الضرب k يحقق العلاقة التالية: $k = n + m$.

مثال 7:

ليكن لدينا: $P(x) = x^3 - 2x + 5$ و $Q(x) = 2x^2 + 3x - 4$. أوجد $P(x)Q(x)$

$$
\begin{aligned}
P(x)Q(x) &= (x^3 - 2x + 5)(2x^2 + 3x - 4) \\
&= x^3(2x^2 + 3x - 4) - 2x(2x^2 + 3x - 4) + 5(2x^2 + 3x - 4) \\
&= 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 - 4x^3 - 6x^2 + 8x + 10x^2 + 15x - 20 \\
&= 2x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 23x - 20
\end{aligned}
$$

6.2. خواص عمليتي الجمع والضرب لكثيرات الحدود

ليكن لدينا كثيرات الحدود $P(x), Q(x), R(x)$، فإنه لدينا الخواص التالية:

- الخاصة التبديلية:

$$P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$$
$$P(x)Q(x) = Q(x)P(x)$$

مثال 8:

$$(3x^2 + 5x + 2) + (7x^3 + x) = 7x^3 + 3x^2 + 6x + 2$$
$$(7x^3 + x) + (3x^2 + 5x + 2) = 7x^3 + 3x^2 + 6x + 2$$
$$(4x^5 - \frac{1}{2}x + 3)(8x - 2) = 32x^6 - 8x^5 - 4x^2 + 25x - 6$$
$$(8x - 2)(4x^5 - \frac{1}{2}x + 3) = 32x^6 - 8x^5 - 4x^2 + 25x - 6$$

- الخاصة التجميعية:

$$P(x) + [Q(x) + R(x)] = [P(x) + Q(x)] + R(x)$$
$$P(x)[Q(x)R(x)] = [P(x)Q(x)]P(x)$$

مثال 9:

$$
\begin{aligned}
(2x + 1) + [(x^4 - 6x) + (5x + 17)] &= (2x + 1) + (x^4 - x + 17) \\
&= x^4 + x + 18
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[(2x + 1) + (x4 - 6x)] + (5x + 17) &= (x^4 - 4x + 1) + (5x + 17) \\
&= x^4 + x + 18
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(x - 1)[(x + 1)(x + 2)] &= (x - 1)(x^2 + 3x + 2) \\
&= x^3 + 3x^2 + 2x - x^2 - 3x - 2 = x^3 + 2x^2 - x - 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[(x - 1)(x + 1)](x + 2) &= (x^2 - 1)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2 \\
&= x^3 + 2x^2 - x - 2
\end{aligned}
$$

- الخاصة التوزيعية:

$$P(x)[Q(x)+R(x)]=P(x)Q(x)+P(x)R(x)$$
$$[P(x)+Q(x)]R(x)=P(x)R(x)+Q(x)R(x)$$

مثال 10:

$$(x+1)[(x^4-4x)+(3x+2)]=(x+1)(x^4-x+2)=$$
$$x^5-x^2+2x+x^4-x+2=x^5+x^4-x^2+x+2$$
$$(x+1)(x^4-4x)+(x+1)(3x+2)=$$
$$x^5-4x^2+x^4-4x+3x^2+2x+3x+2=x^5+x^4-x^2+x+2$$

3. حساب كثيرات الحدود

1.3. قسمة كثيرات الحدود

إن قسمة كثيرات حدود يشبه القسمة في الأعداد الصحيحة، فكما نعلم أنه عندما نقسم العدد 37 على العدد 5 يكون الناتج (حاصل القسمة) 7 والباقي 2، أي أننا نكتب $37=5(7)+2$.

تعريف 2: ليكن $P(x),Q(x)$ كثيري حدود، نقول أن كثير الحدود $Q(x)$ يقسم $P(x)$ إذا وجد كثير حدود $D(x)$ بحيث $P(x)=D(x)Q(x)$، حيث أن باقي القسمة $R(x)=0$. ونرمز لها بالرمز $Q(x)|P(x)$.

ونقول أيضاً أن $P(x)$ هو من مضاعفات $Q(x)$ أو أن $P(x)$ قابل للقسمة على $Q(x)$.

نتيجة 1: من العلاقة $P(x)=Q(x)D(x)$ يمكن القول أن كل من $Q(x)$ و $D(x)$ يقسم $P(x)$.

عملية القسمة لكثيري حدود ممكنة في حال كون درجة المقسوم $P(x)$ أكبر أو تساوي درجة المقسوم عليه $Q(x)$.

لقسمة كثيري حدود $P(x)/Q(x)$، $Q(x)\neq 0$ نقوم بما يلي:

1. نرتب كلاً من المقسوم والمقسوم عليه ترتيباً تنازلياً (من الأس الأكبر إلى الأس الأصغر) ونضعهما على الشكل التالي ($P(x)=x^2-3x+2$ و $Q(x)=x-1$)

$$x-1\;\big|\;x^2-3x+2$$

2. نقسم الحد الرئيسي من المقسوم على الحد الرئيسي من المقسوم عليه نجد بالنسبة للمثال $x^2/x=x$، ويكون الناتج هو الحد الرئيس من ناتج القسمة:

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x-1 & x^2-3x+2 \end{array}$$

3. نضرب ناتج القسمة x في المقسوم عليه $x - 1$ ونكتب الناتج تحت المقسوم مع مراعاة تناظر الحدود المتشابهة ثم نطرحه من المقسوم:

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x-1 & x^2-3x+2 \\ & -(x^2-x) \\ \hline & 0-2x+2 \end{array}$$

4. نتعامل مع ناتج الطرح $-2x + 2$ كمقسوم جديد حيث نلاحظ لأن درجته تساوي درجة المقسوم عليه ثم نكرر الخطوة رقم 2 والخطوة رقم 3:

$$\begin{array}{r|l} & x-2 \\ \hline x-1 & x^2-3x+2 \\ & -(x^2-x) \\ \hline & 0-2x+2 \\ & -(2x+2) \\ \hline & 0+0 \end{array}$$

فيكون ناتج القسمة $x - 2$، وباقي القسمة 0. وبالتالي يمكن كتابة $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$.

- درجة كثير الحدود المقسوم = درجة كثير الحدود المقسوم عليه + درجة كثير الحدود ناتج القسمة.
- باقي القسمة إما أن يساوي صفراً أو كثير حدود درجته أقل من درجة المقسوم عليه.
- تتوقف عملية القسمة بمجرد أن تصبح درجة باقي القسمة أقل من درجة المقسوم عليه.
- تُكتب مخرجات القسمة كما يلي: المقسوم = المقسوم عليه x ناتج القسمة + باقي القسمة. أي على الشكل التالي: $P(x) = D(x).Q(x) + R(x)$، حيث $D(x)$ هو ناتج تقسيم $P(x)$ على $Q(x)$ و $R(x)$ باقي القسمة. نسمي عملية القسمة هذه بالقسمة الإقليدية.

مثال 11: أوجد قسمة $2x^3 + 7x^2 + 10x + 15$ على $x + 2$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 + 3x + 4 \\
\hline
x + 2 & 2x^3 + 7x^2 + 10x + 15 \\
 & -(2x^3 + 4x^2) \\
\hline
 & 3x^2 + 10x \\
 & -(2x^2 + 6x) \\
\hline
 & 4x + 15 \\
 & -(4x + 8) \\
\hline
 & 7
\end{array}
$$

بالتالي: $2x^3 + 7x^2 + 10x + 15 = (2x^2 + 3x + 4)(x + 2) + 7$

أو بشكل آخر: $\frac{2x^3+7x^2+10x+15}{x+2} = (2x^2 + 3x + 4) + \frac{7}{x+2}$

2.3. القاسم المشترك والقاسم المشترك الأعظمي

تعريف 3: إذا كان لدينا كثيري حدود $P_1(x)$ و $P_2(x)$، نقول عن كثير حدود $Q(x)$ أنه قاسم مشترك لكثيري الحدود $P_1(x)$ و $P_2(x)$ إذا كان قاسماً لكل من $P_1(x)$ و $P_2(x)$ أي يوجد كثيري حدود $D_1(x)$ و $D_2(x)$ بحيث يكون:

$P1(x) = Q(x).D1(x)$
$P1(x) = Q(x).D2(x)$

كما نسمي $Q(x)$ قاسم مشترك أعظم لكثيري الحدود $P_1(x)$ و $P_2(x)$ إذا كان يقبل القسمة على كل قاسم مشترك آخر $Q_i(x)$ لكثيري الحدود $P_1(x)$ و $P_2(x)$. أو هو كثير حدود واحدي بأكبر درجة يقسم كل من $P_1(x)$ و $P_2(x)$.

مثال 12:

ليكن لدينا: $P_1(x) = (-1)^3(x^2 + x + 1)$ و $P_2(x) = (x-1)^2(x + 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$. كثير الحدود $x - 1$ قاسم مشترك لكل من $P_1(x)$ و $P_2(x)$، كما أن $(x-1)^2$ قاسم مشترك لهما وهو القاسم المشترك الأعظم.

تعريف 4: نقول عن كثيري حدود $P(x)$ و $Q(x)$ أنهما أوليان فيما بينهما إذا كان القاسم المشترك الأعظم لهما يساوي الواحد (كثير الحد الثابت والمساوي للواحد).

مثال 13: كثيري الحدود: $x^2 + 1$ و $x + 1$ أوليان فيما بينهما. بينما كثيري الحدود: $x^2 + x + 1$ و $x^3 - 1$ غير أوليان فيما بينهما لأن $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ وبالتالي فإن $x - 1$ هو قاسم مشترك أعظمي لهما.

3.3. الخواص الأساسية لقسمة كثيرات الحدود

- إذا كان $P(x)$ يقبل القسمة على $Q(x)$ وكان $Q(x)$ يقبل القسمة على $D(x)$، فإن $P(x)$ يقبل القسمة على $D(x)$.

مثال 14: ليكن لدينا كثيرات الحدود

$$P(x) = 2x^4 - 4x^2 + 2 = 2(x - 1)^2(x + 1)^2$$
$$Q(x) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$
$$D(x) = (x - 1)$$
$$P(x)/Q(x) = 2(x - 1)(x + 1) = 2x^2 - 2$$
$$Q(x)/D(x) = x + 1$$
$$P(x)/D(x) = 2(x - 1)(x + 1)^2 = 2x^3 + 2x^2 - 2x - 2$$

- إذا كان $P(x)$ يقبل القسمة على $Q(x)$ وكان $Q(x)$ يقبل القسمة على $P(x)$، فإن العلاقة التالية محققة:

$$P(x) = c.Q(x);\ c \neq 0$$

مثال 15: ليكن لدينا كثيرات الحدود

$$P(x) = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x - 1)^2$$
$$Q(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$
$$P(x)/Q(x) = 2$$
$$Q(x)/P(x) = 1/2$$
$$P(x) = 2Q(x)$$

- إذا كان $P(x)$ يقبل القسمة على $Q(x)$، فإن جداء $P(x)$ بأي كثير حدود يقبل القسمة على $Q(x)$.

مثال 16: ليكن لدينا كثيرات الحدود

$$P(x) = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x - 1)^2$$
$$Q(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$
$$P(x)/Q(x) = 2$$
$$(x + 1)P(x)/Q(x) = 2(x + 1)$$

- إذا كان كل من $P_1(x)$ و $P_2(x)$ يقبل القسمة على $Q(x)$، فإن مجموعهما وفرقهما وجدائهما يقبل القسمة على $Q(x)$.

مثال 17: ليكن لدينا كثيرات الحدود

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= x^4 - 2x^2 + 1 = (x-1)^2(x+1)^2\\
P_2(x) &= x^2 - 1 = (x-1)(x+1)\\
Q(x) &= (x-1)\\
P_1(x)/Q(x) &= (x-1)(x+1)^2 = x^3 + x^2 - x - 1\\
P_2(x)/Q(x) &= x + 1\\
P_1(x) + P_2(x) &= x^4 - x^2 = x^2(x^2-1) = x^2(x-1)(x+1)\\
P_1(x) - P_2(x) &= x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2-2)(x^2-1)\\
&= (x^2-2)(x-1)(x+1)\\
P_1(x)P_2(x) &= x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 = (x-1)^3(x+1)^3
\end{aligned}
$$

- من الواضح أن كل من المجموع $P_1(x) + P_2(x)$ والفرق $P_1(x) - P_2(x)$ والجداء $P_1(x)P_2(x)$ يحوي على العامل المشترك $x - 1$ وبالتالي يقبل القسمة على $Q(x)$.

4. أصفار وجذور كثيرات الحدود

تعريف 5: نسمي صفر كثير حدود قيمة للمتحول x التي تجعل كثير الحدود مساوياً للصفر. جذور معادلة كثير الحدود هي قيم المتحول x والتي تمثل حلولاً للمعادلة $P(x) = 0$.

- جذور المعادلة $P(x) = 0$ هي أصفار $P(x)$.
- a صفر لكثير الحدود $P(x)$ $\Leftrightarrow$ $P(a) = 0$.
- a جذر لـ $P(x) = 0$ $\Leftrightarrow$ $P(a) = 0$
- $x - a$ عامل لكثير الحدود عندما يكون $x - a$ أحد مضاريبها لما تكتب على شكل جداء مضاريب.

مثال 18: أوجد جذور كثير الحدود $P(x) = {}^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x+1)(x-2)$.
يوجد 3 جذور: $x = 1, x = -1, x = 2$. المقادير $x - 1$ و $x + 1$ و $x - 2$ كل منها عامل لكثير الحدود $P(x)$.

مبرهنة 1 (مبرهنة الباقي): إن باقي قسمة كثير الحدود $P(x)$ على كثير الحدود الخطي $(x - a)$ يساوي قيمة كثير الحدود $P(x)$ من أجل $x = a$.

مثال 19: ليكن $P(x) = {}^3 + 2x^2 - 3x - 4$ و $Q(x) = x - 2$. أوجد نواتج قسمة $P(x)$ على $Q(x)$، ومن ثم تحقق من مبرهنة الباقي.
الحل: إن باقي قسمة $P(x)$ على $x - 2$ هو:
$P(2) = (2)^3 + 2(2)^2 - 3(2) - 4 = 8 + 8 - 6 - 4 = 6$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 4x + 5 \\
\hline
x - 2 & x^3 + 2x^2 - 3x - 4 \\
 & -(x^3 - 2x^2) \\
\hline
 & 4x^2 - 3x \\
 & -(4x^2 - 8x) \\
\hline
 & 5x - 4 \\
 & -(5x - 10) \\
\hline
 & 6
\end{array}
$$

بالتالي: $x^3 + 2x^2 - 3x - 4 = (x^2 + 4x + 5)(x - 2) + 6$.

من الواضح أن باقي القسمة هو 6.

مبرهنة 2 (مبرهنة العامل):

$(x - a)$ عامل لكثير الحدود $P(x) \Leftrightarrow$ يوجد كثير حدود $Q(x) \neq 0$ بحيث أن $P(x) = (x - a)Q(x)$.

يمكن صياغة مبرهنة العامل بشكل آخر: يكون العدد a صفراً لكثير الحدود $P(x)$ إذا وفقط إذا كان $x - a$ عاملاً لـ $P(x)$.

مثال 20:

- بين أن $x - 2$ عامل لكثير الحدود $P(x) = {}^3 - x^2 - 3x + 2$.
  لنحسب $P(2) = (2)^3 - (2)^2 - 3(2) + 2 = 8 - 4 - 6 + 2 = 0$، وبالتالي فإن $x - 2$ يكون عاملاً لـ $P(x)$.
- أوجد قيمة k التي تجعل $x + 3$ عاملاً لكثير الحدود $P(x) = 2^3 + 7x^2 - k$.
  ليكون $x + 3$ عاملاً لكثير الحدود $P(x)$ يجب أن يتحقق $P(-3) = 0$.
  $P(-3) = 9 - k$ وبالتالي $9 - k = 0$، أي $k = 9$.

مبرهنة 3: إذا كان كثير الحدود $P(x)$، و a عدداً حقيقياً، فإن المفاهيم التالية متكافئة:

1. a صفر لـ $P(x)$.
2. $x = a$ حلاً (جذراً) للمعادلة $P(x) = 0$.
3. $x - a$ أحد عوامل $P(x)$.
4. $x = a$ فاصلة النقطة التي يتقاطع فيها منحني التابع كثير الحدود مع المحور x.

مثال 21:

أوجد القية k التي تجعل $x - 2$ عاملاً لكثير الحدود $P(x) = x^3 + kx^3 - 3x + 6$. ومن ثم حلل $P(x)$ إلى عوامل خطية.

بما أن $x - 2$ عاملاً لـ $P(x)$ فإن $P(2) = 0$.

$P(2) = (2)^3 + k(2)^2 - 3(2) + 6 = 8 + 4k - 6 + 6 = 0$. وبالتالي $k = -2$.

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = (x - 2)(ax^2 + bx - 3)$$
$$= ax^3 + bx^2 - 3x - 2x^2 - 2bx + 6$$
$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = ax^3 + (b - 2)x^2 + (-2 - 2b)x + 6$$

بمساواة أمثال x^3 نحصل على $a = 1$، وبمساواة أمثال x^2 نحصل على $b - 2 = -2$ وبالتالي $b = 0$.

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = (x - 2)(x^2 - 3) = (x - 2)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

تعريف 6: إذا كان العدد a صفراً لكثير الحدود $P(x)$، أي $x - a$ عامل لـ $P(x)$. عدد المرات التي يظهر فيها هذا العامل يسمى تكرار الصفر.

يقال أن الصفر a لكثير الحدود $P(x)$ له التكرار m إذا وجد كثير حدود $Q(x) \neq 0$ تحقق العلاقة التالية:

$$P(x) = (x - a)^m Q(x)$$

يسمى الصفر الذي له التكرار $m = 1$ صفراً بسيطاً، والتكرار $m = 2$ صفراً مضاعفاً.

مثال 22:

كثير الحدود $P(x) = x^4(x - 2)^3(x + 1)^2(x + 5)$ له الأصفار التالية: 0 تكرار 4، 2 تكرار 3، 1- صفر مضاعف وأخيراً -5 صفر بسيط.

5. تحليل كثير الحدود

- ليكن كثير الحدود $P(x) = x^3 - 7x + 6$، بين أن $P(1) = 0$ ومن ثم حلّل $P(x)$ إلى جداء عوامل خطية.

الحل: $P(1) = (1)^3 - 7(1) + 6 = 0$، وبالتالي حسب مبرهنة العامل فإن $x - 1$ عامل لـ $P(x)$.

باستخدام عملية القسمة لـ $P(x)$ على $x - 1$ نجد أن:

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + x - 6 \\ \hline x - 1 & x^3 - 7x + 6 \\ & -(x^3 - x^2) \\ \hline & x^2 - 7x \\ & -(x^2 - x) \\ \hline \end{array}$$

$$-6x + 6$$
$$-(6x-6)$$
$$0$$

$$P(x) = (x-1)(x^2 + x - 6) = (x-1)(x-2)(x+3)$$

- ليكن كثير الحدود $P(x) = x^3 - 1$، بين أن $P(1) = 0$ واستفد منها في تحليل $P(x)$ إلى جداء عوامل.

الحل: $P(1) = (1)^3 - 1 = 0$، وبالتالي حسب مبرهنة العامل فإن $x - 1$ عامل لـ $P(x)$.

باستخدام عملية القسمة لـ $P(x)$ على $x - 1$ نجد أن:

$$x^2 + x + 1$$
$$x - 1 \enclose{longdiv}{x^3 - 1}$$
$$-(x^3 - x^2)$$
$$x^2 - 1$$
$$-(x^2 - x)$$
$$x - 1$$
$$-(x-1)$$
$$0$$

$$P(x) = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

النظرية الأساسية في الجبر

كل كثير حدود هو عبارة عن مضاريب (جداء) عدد حقيقي، ومجموعة من كثيرات الحدود التربيعية الواحدية والتي ليس لها جذور، وكثيرات حدود خطية واحدية.

مثال 23:

- $4x^2 - 12x + 8 = 4(x-1)(x-2)$
- $-x^5 + 2x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 10x + 20 = -(x-2)(x^2+2)(x^2+5)$

  من الملاحظ أن كثيري الحدود $x^2 + 2$ $x^2 + 5$ ليس لهما جذور حقيقية.
- $2x^4 - 2x^3 + 14x^2 - 6x + 24 = 2(x^2+3)(x^2 - x + 4)$

1.5. تحليل كثير الحدود الخطي

لتحليل كثير حدود خطي، نضع المعامل الرئيسي خارجاً: $ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$

مثال 24: $2x + 6 = 2(x + 3)$

2.5. تحليل كثير الحدود التربيعي

يعتمد تحليل كثير الحدود التربيعي على عدد جذوره.

1. لا جذور له. إذا لم يكن لكثير الحدود التربيعي $ax^{2} + bx + c$ أي جذر، يتم تحليله بإخراج المعامل الرئيسي:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

مثال 25:

كثير الحدود $2 + 2x - {}^{2}4$ ليس له جذور لأن مميزه:

$\Delta = (-2)^2 - 4(4)(2) = 4 - 32 = -28 < 0$، لذلك تحليله هو: $4\left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)$.

له جذران. إذا كان لكثير الحدود التربيعي $ax^{2} + bx + c$ جذران x_1, x_2، تعطي الجذور معاملات خطية، لذلك فإن $x - x_1$ و $x - x_2$ تشكل معاملات لكثير الحدود $ax^{2} + bx + c$. هذا يعني أن:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

مثال 26:

كثير الحدود $6 - 4x + 2^2$ له جذران لأن مميزه:

$\Delta = (4)^2 - 4(2)(-6) = 16 + 48 = 64 > 0$، وجذراه هما: $1 = \frac{-4+\sqrt{64}}{2(2)}$ و $= \frac{-4-\sqrt{64}}{2(2)}$

-3، لذلك تحليله هو: $4(x - 1)(x + 3)$.

ملاحظة 1: في حالة كثير الحدود له جذران

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2]$$

وبالتالي فإن العلاقة التي تربط جذرا المعادلة بمعاملات كثير الحدود من الدرجة الثانية هي:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ و } x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

2. له جذر واحد مضاعف. إذا كان لكثير الحدود التربيعي $ax^2 + bx + c$ جذر مضاعف $x1$، تعطي الجذور معاملات خطية، لذلك فإن $x - x_1$ و $x - x_1$ تشكل معاملات لكثير الحدود: $ax^2 + bx + c$. هذا يعني أن:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2$$

مثال 27:

كثير الحدود $3^2 - 6x + 3$ له جذر مضاعف لأن مميزه $\Delta = (-6)^2 - 4(3)(3) = 36 - 36 = 0$، وجذره هو: $\frac{-(-6)}{2(3)} = 1$، لذلك تحليله هو: $3(x-1)^2$.

تذكرة: عوامل العدد الصحيح n هي كافة الأعداد الصحيحة k بحيث يكون $n = mk$، و m عدد صحيح أيضاً.

مثال 28:

- $3x4 = 12$ وبالتالي العدد 4 هو عامل للعدد 12. (عوامل العدد 12 هي $\mp1, \mp2, \mp3, \mp4, \mp6,$ ∓12).
- $-2 \times 15 = -30$ وبالتالي 15 هو عامل للعدد -30.
- الأعداد $1, -1, n, -n$ كلها عوامل للعدد n وذلك لأن $n = n.1$ و $n = (-n)(-1)$.

حالة خاصة هامة: إذا كان $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{Z}$، بالتالي فإن كل عدد من هذه الأعداد هو عامل لجداء هذه الأعداد $x_1 x_2 \dots x_n$. على سبيل المثال كل من الأعداد $2, 3, 5$ هو عامل للجداء $2 \times 3 \times 5 = 30$.

مبرهنة 4: إذا كان $P(x)$ كثير حدود من الدرجة n وكان a_n هو المعامل الرئيسي لها. فإذا كانت الأعداد الحقيقية $x_1, x_2, \dots, x_n$ أصفاراً لها فإن: $P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$.

مثال 29:

- أوجد كثير حدود من الدرجة الرابعة أصفاره 2 ,-2 ,1 ,-1 ومعاملها الرئيسي a = 2.

$$P(x) = 2(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$$
$$P(x) = 2(x^2-1)(x^2-4) = 2(x^4 - 4x^2 - x^2 + 4)$$
$$P(x) = 2(x^4 - 5x^2 + 4) = 2x^4 - 10x^2 + 8$$

- أوجد كثير حدود من الدرجة الخامسة أصفاره -1 مضاعف، 1 مضاعف و 2 بسيط ومعاملها الرئيسي $a = 1$

$$P(x) = (x-1)^2(x+1)^2(x-2) = (x^2-1)^2(x-2)$$
$$P(x) = (x^4 - 2x^2 + 1)(x-2) = x^5 - 2x^3 + x - 2x^4 + 4x^2 - 2$$
$$P(x) = x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 2$$

ليكن لدينا كثير الحدود $P(x)$:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

إن الحد الثابت في كثير الحدود يوافق القيمة صفر للمتحول x، أي أن $a_0 = a_n(-x_1)(-x_2) \dots (-x_n)$، وبالتالي إذا كانت جذور كثير الحدود أعداد صحيحة $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{Z}$ فإن أياً من هذه الجذور هو عامل للحد الثابت a_0.

نتيجة 2: عند البحث عن جذور كثير حدود $P(x)$ معاملاته أعداد صحيحة، نختبر عوامل الحد الثابت a_0.

مثال 30:

- ليكن لدينا كثير الحدود من الدرجة الثانية $2(x-3)(x+7) = 2^{2} + 8x - 42$، له الجذران $3, -7$ وهما من عوامل الحد الثابت -42.
- ليكن لدينا كثير الحدود من الدرجة الرابعة $P(x) = 3x^{4} + 3x^{3} - 3x^{2} + 3x - 6$.

للبحث عن جذور كثير الحدود نبحث عن عوامل الحد الثابت -6 وهي: $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$. لنجرب القيم الثمانية فيما إذا كانت جذراً أم لا

$$P(1) = 3(1)^4 + 3(1)^3 - 3(1)^2 + 3(1) - 6 = 3 + 3 - 3 + 3 - 6 = 0$$
$$P(-2) = 3(-2)^4 + 3(-2)^3 - 3(-2)^2 + 3(-2) - 6$$
$$= 48 - 24 - 12 - 6 - 6 = 0$$
$$P(-1) = 3(-1)^4 + 3(-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) - 6 = 3 - 3 - 3 - 3 - 6$$
$$= -12 \neq 0$$
$$P(2) \neq 0 P(3) \neq 0 P(-3) \neq 0 P(6) \neq 0 P(-6) \neq 0$$

وبالتالي فإن 1, -2 هما جذران لكثير الحدود $P(x)$. أي أن:

$P(x) = 3(x-1)(x+2)Q(x)$، حيث $Q(x)$ كثير حدود من الدرجة الثانية. وبإجراء قسمة $P(x)$ على $(x-1)(x+2)$ ينتج $3Q(x) = 3(x^{2}+1)$. أي أن:

$$P(x) = 3x^{4} + 3x^{3} - 3x^{2} + 3x - 6 = 3(x-1)(x+2)(x^{2}+1)$$

3.5. تحليل كثير الحدود التكعيبي

حسب النظرية الأساسية في الجبر فإن كثير الحدود من الدرجة الثالثة إما أن يكون جداء عدد حقيقي ثابت وثلاث كثيرات حدود خطية، أو جداء عدد حقيقي ثابت وكثير حدود خطي وآخر تربيعي ليس له جذور حقيقية. في كلا الحالتين كثير حدود من الدرجة الثالثة لديه على الأقل كثير حدود خطي واحد أي على الأقل جذر واحد والذي يمكن تخمينه باستخدام عوامل الحد الثابت. وبعد إيجاد أحد الجذور نضعه عاملا ونقوم بعملية التقسيم عليه فنحصل عندها على كثير حدود من الدرجة الثانية نقوم عندها بتحليله وبالتالي نحصل على تحليل كثير الحدود التكعيبي.

أمثلة 31:

- حلل كثير الحدود $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 3$

لنبدأ بتخمين الجذر. الحد الثابت هو -3، وبالتالي الجذر هو أحد العوامل: $1, -1, 3, -3$. بالتجريب نجد أن $P(1) = 0$، نقسم الآن $P(x)$ على $x - 1$ نحصل على كثير الحدود التربيعي $2x^2 - x + 3$. ومميز المعادلة التربيعية هو:
$(-1)^2 - 4(2)(3) = 1 - 24 = -23 < 0$، وبالتالي ليس لها جذور، ولكن يمكن إخراج المعامل الرئيسي لتصبح على الشكل التالي:
$2x^2 - x + 3 = 2(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2})$. مما سبق نستنتج أن تحليل كثير الحدود التكعيبي هو:

$$2x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = 2(x - 1)(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2})$$

- حلل كثير الحدود $P(x) = 3x^3 - 3x^2 - 15x + 6$

لنبدأ بتخمين الجذر. الحد الثابت هو 6، وبالتالي الجذر هو أحد العوامل: 6- ,6 ,3- ,3 ,2- ,2 ,1- ,1. بالتجريب نجد أن $P(-2) = 0$، نقسم الآن $P(x)$ على $x + 2$ نحصل على كثير الحدود التربيعي $3x^2 - 9x + 3$. ومميز المعادلة التربيعية هو $(-9)^2 - 4(3)(3) = 81 - 36 = 45 > 0$، وبالتالي لها جذران: $\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{9+\sqrt{45}}{2(3)}$ و $\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{9-\sqrt{45}}{2(3)}$. وبالتالي فإن $3x^2 - 9x + 3 = 3(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2})(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2})$. مما سبق نستنتج أن تحليل كثير الحدود التكعيبي هو:

$$3x^3 - 3x^2 - 15x + 6 = 3(x + 2)(x - \frac{3+\sqrt{5}}{2})(x - \frac{3-\sqrt{5}}{2})$$

6. الكسور الجبرية

تعريف 7: الكسر الجبري هو عبارة جبرية من الشكل التالي $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$، حيث $P(x)$ و $Q(x)$ هما كثيرا حدود و $Q(x) \neq 0$.

مثال 32:

$$F(x) = \frac{3x+2}{2x-3} \qquad F(x) = \frac{x^2-2x+3}{x^2+5x+8}$$

1.6. تفريق الكسر الجبري إلى مجموع كسور جزئية

نفرض هنا أن عوامل كثير الحدود $Q(x)$ هي كثيرات حدود خطية غير مكررة و/أو كثيرات حدود تربيعية (مميزها سالب) غير مكررة.

مبرهنة 5: ليكن $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ كسر الجبري، بالتالي يُمكن كتابة $F(x)$ بطريقة وحيدة كما يلي:

- جزء عبارة عن كثير حدود $E(x)$ وهو عبارة عن حاصل قسمة $P(x)$ على $Q(x)$.
- كسور جزئية من الشكل $\frac{a}{x-x_i}$، x_i جذر بسيط لـ $Q(x)$.
- كسور جزئية من الشكل $\frac{ax+b}{x^2+cx+d}$.

حيث $x - a$ و $x^2 + cx + d$ هي عوامل لـ $Q(x)$.

إذا كان لكثير الحدود $Q(x)$ فقط عوامل كثيرات حدود خطية غير مكررة

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

فإن الكسر الجبري $F(x)$ يكتب على الشكل التالي:

$$F(x) = E(x) + \frac{a_1}{x - x_1} + \frac{a_2}{x - x_2} + \dots + \frac{a_n}{x - x_n}$$

أمثلة 33:

- فرق الكسر الجبري $\frac{x^5-6x^3+8x^2-14x+7}{x^3-7x+6}$
  - الخطوة الأولى: تحديد كثير الحدود $E(x)$ حاصل قسمة $P(x)$ على $Q(x)$. بعد القيام بالقسمة نحصل على $\frac{P(x)}{Q(x)} = x^2 + 1 + \frac{2x^2-7x+6}{Q(x)}$.وبالتالي فإن: $E(x) = x^2 + 1$.
  - الخطوة الثانية: تحليل كثير الحدود $Q(x)$. وجدنا سابقاً أن:
    $Q(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$.
  - الخطوة الثالثة: تفريق الكسر إلى مجموع كسور جزئية نظرياً:
    $\frac{P(x)}{Q(x)} = x^2 + 1 + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+3}$. بقي علينا إيجاد الثوابت a, b, c.
  - الخطوة الرابعة: لتعيين الثوابت a, b, c نأخذ المعادلة :
    $(*)\ \frac{2x^2-7x+6}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+3}$، لتعيين a نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بالمقدار $x - 1$ ونعطي x القيمة 1 فنجد $a = 1$. لتعيين b نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بالمقدار $x - 2$ ونعطي x القيمة 2 فنجد $b = -1$. لتعيين c نضرب طرفي العلاقة $(*)$ بالمقدار $x + 3$ ونعطي x القيمة -3 فنجد $c = 2$. ينتج لدينا:

$$\frac{x^5-6x^3+8x^2-14x+7}{x^3-7x+6} = x^2 + 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+3}$$

- فرق الكسر الجبري $\frac{-x^2-6x-2}{x^3-1}$

  بما أن درجة البسط أصغر من درجة المقام ينتج أن $E(x) = 0$. وبالتالي فإن:

$$\frac{-x^2-6x-2}{x^3-1} = \frac{-x^2-6x-2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

لتعيين a نضرب طرفي العلاقة بالمقدار $x - 1$ ونعطي x القيمة 1 فنجد $a = -3$. لتعيين b نضرب طرفي العلاقة بالمقدار x ونجعل x تسعى إلى اللانهاية فنجد $b = 2$. لتعيين قيمة c نعطي x القمة 0 فنجد $c = -1$. $\frac{-x^2-6x-2}{x^3-1} = \frac{-3}{x-1} + \frac{2x-1}{x^2+x+1}$

تمارين

.1 ليكن $P(x) = (x + 1)^3$ و $Q(x) = (x - 1)^3$ و $R(x) = x + 2$.

a) احسب $P + Q$ و $P - Q$ و PQ و $PR - 2Q$

b) ما هي درجة كل من $P + Q$ و $P - Q$ و PQ.

.2 أوجد كثير الحدود P درجته أصغر أو تساوي 3 بحيث: $P(0) = 1$ و $P(1) = 0$ و $P(-1) = -2$ و $P(2) = 4$.

.3 احسب نواتج القسمة لكثير الحدود $P(x) = x^5 - 2x^4 + 6x^3$ بكثير الحدود $Q(x) = 2x^3 + 1$

.4 أوجد قواسم كثير الحدود $x^4 + 2x^2 + 1$.

.5 برهن أن $(x - 1)|x^n - 1$ من أجل $n \geq 1$.

.6 هل $x^2 - x + 1$ و $x^3 + 1$ أوليان فيما بينهما؟

.7 أوجد كثير الحدود $P(x)$ له الأصفار التالية: 2 مضاعف، 1 تكرار 3، -1 مضاعف وقيمة كثير الحدود من أجل القيمة $x = 0$ تساوي -8.

.8 ليكن لدينا $P(x) = x^4 - 3x^3 - 8x + 24$.

a) أثبت أن $P(x)$ يقبل القسمة على $x - 3$.

b) $x + 3$ ليس عاملاً من عوامل $P(x)$.

.9 حلل كثيرات الحدود التالية:

a) $-2x + 5$

b) $10x^2 + 3$

c) $-2x^2 + 6x - 3$

d) $5x^2 + 3x = 2$

e) $-x^3 - x^2 + x + 1$

f) $4x^3 - 20x^2 + 25x - 3$

g) $x^4 - 5x^2 + 4$

.10 حلل كل من $P(x) = (2x^2 + x - 2)^2(x^4 - 1)^3$ و $Q(x) = 3(x^2 - 1)^2(x^2 - x + 1/4)$. استنتج القاسم المشترك الأعظمي لهما.

.11 فرق الكسور الجبرية التالية:

a) $\frac{1}{x^2-1}$ b) $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ c) $\frac{x}{x^3-1}$

.12 فرق الكسور الجبرية التالية:

a) $\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ b) $\frac{2x^2-x}{(x^2+2)(x^2+1)}$ c) $\frac{x^6}{(x^2+2)(x^2+1)}$

مذاكرة الفصل الثالث

العلامة العظمى: 100 **علامة النجاح: 50** **المدة: ساعة ونصف**

السؤال الأول: اختر الإجابة الصحيحة **(40) درجة**

1. قسمة كثير الحدود $2x^2 + 5x - 3$ على $x + 3$ هي
   a. $2x - 1$
   b. $2x + 1$
   c. $x - 2$
   d. $x + 2$

2. قسمة كثير الحدود $3x3 + x^2 - 3x - 1$ على $3x + 1$ هي
   a. $x^2 - 1$
   b. $x^2 + 1$
   c. $3x^2 - 2$
   d. $2x^2 + 2$

3. باقي قسمة كثير الحدود $x^2 + x + 1$ على $x - 1$ هو
   a. 2
   b. -2
   c. 3
   d. -3

4. باقي قسمة كثير الحدود $x^3 + x^2 + x + 1$ على $x + 1$ هو
   a. 2
   b. -2
   c. 1
   d. 0

5. قيمة k التي تجعل $x + 2$ عاملاً لكثير الحدود $x^3 + 3x^2 - k$
   a. 2
   b. -2
   c. 4
   d. -4

6. قيمة k التي تجعل كثير الحدود $2kx^{100} + 1$ قابلاً للقسمة على $x + 1$
   a. 1
   b. -1
   c. $1/2$
   d. $-1/2$

7. مجموعة حلول المعادلة $x^2 = 9$
a. $S = \{3\}$
b. $S = \{-3\}$
c. $S = \emptyset$
d. $S = \{-3, 3$

8. مجموعة حلول المعادلة $x^2 + 9 = 0$
a. $S = \{3\}$
b. $S = \{-3\}$
c. $S = \{-3, 3\}$
d. $S = \{\emptyset\}$

9. كثير حدود مجموع جذريه -2 وجداءهما -8
a. $x^2 - 2x - 8$
b. $x^2 - 2x + 8$
c. $x^2 + 2x - 8$
d. $x^2 + 2x + 8$

10. مجموعة حلول المعادلة $x^{20} + 2x^{11} + x^2 = 0$
a. $S = \emptyset$
b. $S = \{0, 1\}$
c. $S = \{0, -1, 1\}$
d. $S = \{0, -1\}$

السؤال الثاني: أجب بصح أو خطأ **(20) درجة**

13. $P(x) = x^2 + 2\sqrt{x} + 1$ كثير حدود من الدرجة 2 — صح أو خطأ
14. $\frac{1+\sqrt{2}x+x^3}{5}$ كثير حدود من الدرجة 3 — صح أو خطأ
15. درجة كثير الحدود $(x + 1)^2 - (x + 1)^2$ هي 2 — صح أو خطأ
16. درجة كثير الحدود $(x^3 + 1)(x^2 + 1)$ هي 5 — صح أو خطأ
17. كثير الحدود $x^2 - 5x + 3$ يقبل القسمة على $x - 3$ — صح أو خطأ
18. $x + 1$ قاسم مشترك ل $x^2 + 2x + 1$ و $x^2 - 1$ — صح أو خطأ
19. $(x + 2)$عامل لكثير الحدود $x^2 - x - 5$ — صح أو خطأ
20. كثيري حدود لهما نفس الجذور متساويان — صح أو خطأ
21. كثير الحدود أصفاره 1 و -1 و 2 هو $x^3 - 2x^2 - x + 2$ — صح أو خطأ
22. القيمة a جذر لكل من $P(x)$ و $Q(x)$، بالتالي $x - a$ عامل لـ $P(x) - Q(x)$ — صح أو خطأ

السؤال الثالث: هل كثيري الحدود $P(x)$ و $Q(x)$ أوليان فيما بينهما **(14) درجة**

a. $P(x) = x^2 - x + 1$ و $Q(x) = x^2 + 1$

الجواب لا: $Q(x) = x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) = (x+1)\ P(x)$

b. $P(x) = x^3 - 1$ و $Q(x) = x^3 + 1$

الجواب نعم: $Q(x) = x^3 + 1 =$ و $P(x) = x^3 - 1 = (x-1)\ (x^2 + x + 1)$

$(x+1)(x^2 - x + 1)$ بالتالي القاسم المشترك الأعظم هو 1.

السؤال الرابع: **(12) درجة**

بين أن 3 جذر لكثير الحدود $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ واستفد من ذلك في تحليله إلى جداء عوامل خطية

الحل: $P(3) = (3)^3 - 2(3)^2 - 5(3) + 6 = 27 - 18 - 15 + 6 = 0$.

$P(x) = (x-3)(x^2 + x - 2) = (x-3)(x+2)(x-1)$

السؤال الخامس: **(14) درجة**

فرق الكسور الجبرية التالية:

- $\frac{2}{x^2-1}$

الجواب: $\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$.

- $\frac{2x^2+2x}{(x-1)(x+2)}$

الجواب: $\frac{2x^2+2x-1}{(x-1)(x+2)} = 2 + \frac{3}{(x-1)(x+2)} = 2 + \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x+2)}$

الإجابات الصحيحة

السؤال الأول:

رقم التمرين	الإجابة الصحيحة
.1	(a)
.2	(a)
.3	(c)
.4	(d)
.5	(c)
.6	(d)
.7	(d)
.8	(d)
.9	(c)
.10	(d)

السؤال الثاني:

رقم التمرين	الإجابة الصحيحة
.1	خطأ
.2	خطأ
.3	خطأ
.4	صح
.5	صح
.6	صح
.7	خطأ
.8	خطأ
.9	صح
.10	صح