الفصل الرابع: المتسلسلات (Series)

الكلمات المفتاحية:

المتسلسلة، نهاية متسلسلة، تقارب متسلسلة، اختبارات التقارب للمتسلسلات، نشر التوابع، متسلسلات القوى، نشر تايلور، نظرية تايلور، كثيرات حدود تايلور.

الملخص:

يقدم هذا الفصل المتسلسلات التي تشكّل من جمع عناصر متتالية حقيقية. يقدّم بداية كتابة الجمع وخصائص الجمع. وتعرّف المتسلسلة ونهاية المتسلسلة وتقارب وتباعد المتسلسلة. ستقدم اختبارات لمعرفة تقارب المتسلسلة. ستعرّف المتسلسلة المتقاربة بالاطلاق التي تستبدل فيها مجموع عناصر المتتالية بمجموع القيم المطلقة لهذه العناصر والمتقاربة شرطياً التي لاتحقق التقارب بالاطلاق. وتقدّم كتابة التوابع باستخدام متسلسلات ولاسيما متسلسلات القوى ونشر التوابع باستخدام متسلاسلات القوى. تعرض نظرية تايلور لنشر التوابع باستخدام متسلسلات القوى. وتقدّم بعض التوابع المعرّفة بمتسلسلات.

الأهداف التعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على النقاط التالية:

- كتابة الجمع وخصائص الجمع
- تعريف المتسلسلة
- تقارب المتسلسلة
- المتسلسلات المتقاربة بالاطلاق والمتقاربة شرطياً
- كتابة التوابع بشكل متسلسلات
- العمليات على متسلسلات القوى
- نشر التوابع بمتسلسلات القوى
- نظرية تايلور
- نشر بعض التوابع
- التوابع المعرّفة بمتسلسلات

مقدمة

تنتج المتسلسلة (السلاسل) من جمع حدود المتتالية ويمكن الحصول على الخصائص الأساسية للمتسلسلات من خلال معالجة المتتاليات. ستعرض النقاط التالية في هذا الفصل:

- كتابة الجمع وخصائص الجمع
- تعريف المتسلسلة
- تقارب المتسلسلة
- المتسلسلات المتقاربة بالاطلاق والمتقاربة شرطياً
- كتابة التوابع بشكل متسلسلات
- العمليات على متسلسلات القوى
- نشر التوابع بمتسلسلات القوى
- نظرية تايلور
- نشر بعض التوابع
- التوابع المعرّفة بمتسلسلات

1. كتابة الجمع وخصائص الجمع

تختصر الكتابة $\sum_{k=m}^{n} a_k$ مجموع الحدود $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$ حيث الرمز $\sum$ يدل على عملية الجمع ويتم استبدال k بالقيم $m, m+1, \ldots, n$.

مثال:

1. $$\sum_{k=2}^{5} \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{3^2+3} + \frac{1}{4^2+4} + \frac{1}{5^2+5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30}$$
2. $$\sum_{k=0}^{n} 2^{-k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^k}$$
3. $$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots$$

مثال:

أوجد المجاميع التالية:

1. $\sum_{i=1}^{5} 3i = 3(1+2+3+4+5) = 3\times 15 = 45$

2. $\sum_{k=3}^{6}\left(1+k^2\right) = \left(1+3^2\right)+\left(1+4^2\right)+\left(1+5^2\right)+\left(1+6^2\right) = 10+17+26+37 = 90$

3.
$$\sum_{i=0}^{8}\left(\frac{1}{i\,!}\right) = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}$$
$$= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\frac{1}{5040}+\frac{1}{40320} \approx 2.71828 \approx e$$

نجد أنّ هذا المجموع قريب من العدد النيبري $e = 2.7182818284591...$ وكلما ازدادت قيمة i بالمجموع $\frac{1}{i\,!}$ اقترب المجموع من e.

خصائص الجمع

ليكن c عدد ثابت فنجد:

1. $\sum_{i=1}^{n} c = n\cdot c$

2. $\sum_{i=1}^{n} c\cdot a_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$

3.
$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i+b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_i-b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

2. المتسلسلة

تتطلب الكثير من التطبيقات جمع عدد محدود أو غير محدود من حدود متتالية يدعى هذا المجموع متسلسلة.

تعريف المتسلسلة

ليكن لدينا المتتالية الحقيقية $(x_n)_{n\ge 0}$ نعرّف متتالية مجاميعها الجزئية $(S_n)_{n\ge 0}$ بأنّها المتتالية الحقيقية التي يعطى حدّها العام بالعلاقة $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ ونقول إنّ المتسلسلة التي حدّها العام x_n (وتكتب $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$) متقاربة وتقبل S مجموعاً لها إذا تقاربت المتتالية $(S_n)_{n\ge 0}$ وكانت نهايتها S ونكتب عندئذ $S = \sum_{n=0}^{\infty} x_n$.

مثال:

أوجد مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)(n+4)}$

لإيجاد المجموع يجب تحليل الكسر إلى مجموع عناصر كسرية بسيطة حيث نكتب:

$$\frac{1}{n(n+2)(n+4)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{(n+2)}+\frac{C}{(n+4)}$$

يتم حساب الثوابت A,B,C بتوحيد المقامات ومطابقة أمثال n,n^2,n^3 بين طرفي العلاقة السابقة. لتسريع الحساب يمكن ضرب طرفي العلاقة بمقام الكسر البسيط الأول n لحساب A فيصبح لدينا:

$$\frac{n}{n(n+2)(n+4)}=n\frac{A}{n}+n\frac{B}{(n+2)}+n\frac{C}{(n+4)}\Rightarrow\frac{1}{(n+2)(n+4)}=A+n\frac{B}{(n+2)}+n\frac{C}{(n+4)}$$

بتعويض $n=0$ نجد $A=\frac{1}{8}$.

بشكل مشابه نضرب العلاقة بمقام الكسر البسيط الثاني $(n+2)$ لحساب B فنجد:

$$\frac{n+2}{n(n+2)(n+4)}=(n+2)\frac{A}{n}+(n+2)\frac{B}{(n+2)}+(n+2)\frac{C}{(n+4)}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{n(n+4)}=\frac{A}{n}(n+2)+B+(n+2)\frac{C}{(n+4)}$$

نعوض $n=-2$ نجد $B=-\frac{1}{4}$.

بشكل مشابه نضرب العلاقة بمقام الكسر البسيط الثالث $(n+4)$ لحساب C فنجد:

$$\frac{n+4}{n(n+2)(n+4)}=(n+4)\frac{A}{n}+(n+4)\frac{B}{(n+2)}+(n+4)\frac{C}{(n+4)}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{n(n+2)}=\frac{A}{n}(n+4)+(n+4)\frac{B}{(n+2)}+C$$

نعوض $n=-4$ نجد $C=\frac{1}{8}$.

وبالتالي يمكن أن نكتب:

$$\frac{1}{n(n+2)(n+4)}=\frac{1}{8n}-\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{(n+2)}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(n+4)}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+2)}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{(n+4)}-\frac{1}{(n+2)}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+2)(n+4)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+2)}\right)-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{8}\left(\frac{1}{(n+2)}-\frac{1}{(n+4)}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N+1}\right)+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+2}\right)\right]+$$

$$-\frac{1}{8}\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\left(\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+3}\right)+\left(\frac{1}{N+2}-\frac{1}{N+4}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}\right]-\frac{1}{8}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{N+3}-\frac{1}{N+4}\right]\Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+2)(n+4)}=\frac{N(N+5)(11N^2+55N+62)}{96(N+1)(N+2)(N+3)(N+4)}\Rightarrow$$

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{n(n+2)(n+4)}=\frac{11}{96}$$

1.2. تقارب متسلسلة

تكون متتالية متقاربة إذا وفقط إذا حققت شرط كوشي ومنه نجد تكافؤ الخواص التالية:

- $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ متقاربة
- $(S_n)_{n\geq 0}$ تحقق شرط كوشي: $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},n\geq N_\varepsilon,m\in\mathbb{N}\Rightarrow\left|\sum_{k=n}^{n+m}x_k\right|<\varepsilon$

تكمن ميزة هذا المعيار لتقارب متسلسلة في أنّه يسمح باثبات تقارب متسلسلة دون معرفة مجموعها. إذا لم تتقارب المتسلسلة نقول إنّها متباعدة.

ملاحظة:

إنّ تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ يقتضي تقارب متتالية حدّها العام x_n نحو الصفر إلا أنّ هذا الشرط غير كاف.

مثال:

ليكن لدينا $x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ وبالتالي $S_n=\sum_{k=0}^{n}x_k=\sqrt{n+1}$ فالمتسلسلة متباعدة بينما:

$$x_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}x_n=0$$

مبرهنة:

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ متسلسلتين متقاربتين عندئذ تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda \cdot x_n + y_n)$ متقاربة أيّاً كان $\lambda \in \mathbb{R}$ ويكون لدينا $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda \cdot x_n + y_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty}(x_n) + \sum_{n=0}^{\infty}(y_n)$.

مبرهنة:

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ متسلسلتين ونفترض أنّ $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq a_n$ وأنّ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ متقاربة عندئذ تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ متقاربة.

مبرهنة:

لتكن $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ متسلسلة حدودها موجبة تكون متقاربة إذا وفقط إذا كانت متتالية مجاميعها الجزئية محدودة.

مثال:

ليكن $a \in \mathbb{R}^+$ تتقارب المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ إذا وفقط إذا كانت $a \in [0,1[$ لأنه إذا كانت $a \geq 1$ فإنّ متتالية الحد العام $(a^n)_{n\geq 0}$ لاتتقارب من الصفر وبالتالي تكون $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ متباعدة. بينما إذا كان $a \in [0,1[$ فإنّ $S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(S_n) = \frac{1}{1-a}$.

مثال:

لتكن $\alpha \in \mathbb{R}$ تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ التي تدعى متسلسلة ريمان Riemann متقاربة إذا وفقط إذا كان $\alpha \in]1, +\infty[$.

مبرهنة:

ليكن لدينا المتتاليتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حدودهما موجبة:

1. إذا كان $\forall n\geq n_0, 0\leq u_n\leq v_n$ وكانت $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ متقاربة فإنّ $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ متقاربة وإذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ متباعدة فإنّ $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ متباعدة.
2. إذا وجد عددان موجبان تماماً $a,b>0$ بحيث $\forall n\geq n_0, a\leq \frac{u_n}{v_n}\leq b$ فإنّ للمتسلسلتين $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ الطبيعة نفسها متقاربتان معاً أو تتباعدان معاً.
3. إذا كان $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$ و $l\in\mathbb{R}_+^*$ فإنّ للمتسلسلتين $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ الطبيعة نفسها متقاربتان معاً أو تتباعدان معاً.
4. إذا كان $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$ و $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ متقاربة فإنّ $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ متقاربة.
5. إذا كان $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=+\infty$ و $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ متباعدة فإنّ $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ متباعدة.

مثال:

يمكن باستخدام اختبار المقارنة اثبات أنّ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$ متباعدة.

لدينا: $1\geq\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\geq\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\geq\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$ و

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}\geq\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$$

وبالتالي يمكن كتابة: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)\cdots\geq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$ وبما أنّ المجموع للحدود $\frac{1}{2}$ متباعد فالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$ متباعدة.

مثال:

لتكن لدينا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2n^3-1}$ هل هي متباعدة أم متقاربة؟

بما أنّ $\ln<n$ و $\frac{1}{2n^3-1}\leq\frac{1}{n^3}$ فإنّ $\frac{\ln n}{2n^3-1}\leq\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}$ وبما أنّ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ متقاربة فإنّ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2n^3-1}$ متقاربة.

نظرية:

إذا كان $\lim_{n\to\infty} n^p \cdot u_n = l$ يكون لدينا:

1. إذا كان $p>1$ و $l\in\mathbb{R}$ منته تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ متقاربة.
2. إذا كان $p\le 1$ و $l\in\mathbb{R}, l\neq 0$ أو $l=\infty$ تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ متباعدة.

مثال:

المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{4n^3-2}$ متقاربة لأنّ $\lim_{n\to\infty}\left(n^2\cdot\frac{n}{4n^3-2}\right)=\frac{1}{4}$.

مثال:

المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$ متباعدة لأنّ $\lim_{n\to\infty}\left(n^{0.5}\frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}\right)=\infty$.

مثال:

ليكن لدينا المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ حيث $u_n=\frac{2n^2+1}{2n}-\sqrt{n^2+1}$.

$$u_n=n-\sqrt{n^2+1}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n}+\frac{-1}{n+\sqrt{n^2+1}}=\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{2n\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}=\frac{1}{2n\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)^2}$$

ونجد أنّ $\lim_{n\to\infty} n^3\cdot u_n=\frac{1}{8}\neq 0$ وبالتالي المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ متباعدة.

الاختبار التكاملي

ليكن لدينا التابع $f(x)$ موجب ومستمر ومتناقص من أجل $x\ge N$ ولتكن لدينا المتتالية $u_n=f(x), n=N, N+1, N+2, \ldots$ يمكن معرفة طبيعة المتسلسلة $\sum_{n=N}^{\infty} u_n$ إذا كانت متقاربة أو متباعدة بناءً على تقارب أو تباعد التكامل المحدود $\int_N^{\infty} f(x)dx=\lim_{M\to\infty}\left(\int_n^M f(x)dx\right)$ يمكن كحالة خاصة أخذ $N=1$. يعرّف تقارب أو تباعد التكامل بشكل مشابه لتقارب أو تباعد المتسلسلة.

مثال:

ليكن لدينا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ يمكن اثبات تقاربها باستخدام الاختبار التكاملي لأنّ حدودها متناقصة ولدينا:

$\lim_{M\to\infty}\left(\int_1^M \frac{dx}{x^2}\right)=\lim_{M\to\infty}\left[1-\frac{1}{M}\right]=1$ أي أنّ النهاية موجودة للتكامل وبالتالي المتسلسلة متقاربة.

اختبار المتسلسلات المتناوبة

تدعى المتسلسلة متناوبة إذا كانت حدودها المتتالية موجبة ثم سالبة. تتقارب متسلسلة متناوبة إذا تحقق الشرطين التاليين:

1. $\left|u_{n+1}\right|\le\left|u_n\right|$, $\forall n\ge N$ حيث $N\in\mathbb{N}$ ويؤخذ عادة $N=1$.
2. $\lim_{n\to\infty}u_n=0$ أو $\lim_{n\to\infty}\left|u_n\right|=0$.

وينتج عند إيقاف أي متسلسلة متناوبة تحقق الشرطين السابقين خطأ عددي قيمته أقل من القيمة المطلقة للحد التالي.

مثال:

ليكن لدينا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$ فنجد أنّ $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Rightarrow\left|u_n\right|=\frac{1}{n}$ ولدينا: $\left|u_{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}\Rightarrow\forall n\ge 1,\left|u_{n+1}\right|\le\left|u_n\right|$ كذلك لدينا $\lim_{n\to\infty}\left|u_n\right|=0$ وبالتالي فإنّ هذه المتسلسلة متقاربة.

إذا توقفنا عند الحد الرابع للمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$ فالخطأ الناتج أصغر من $\frac{1}{5}=0.2$.

2.2. المتسلسلات المتقاربة بالإطلاق والمتسلسلات المتقاربة شرطياً

تعريف

1. نقول عن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ أنها متقاربة بالاطلاق إذا كانت المتسلسلة ذات الحدود الموجبة $\sum_{n=0}^{\infty}\left|u_n\right|$ متقاربة.
2. نقول عن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ أنها نصف متقاربة إذا كانت متقاربة دون أن تكون متقاربة بالاطلاق.

نظرية:

إذا تقاربت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|$ تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ متقاربة. أي أنّ المتسلسلة المتقاربة بالاطلاق تكون متقاربة.

مثال:

إنّ المتسلسلة $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots$ متقاربة بالاطلاق لأنّ متسلسلة القيم المطلقة $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$ متقاربة.

مثال:

إن المتسلسلة $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$ متقاربة ولكن $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$ متباعدة لذلك فإنّ المتسلسلة $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$ ليست متقاربة بالاطلاق فهي نصف متقاربة.

ملاحظة:

يمكن استخدام كل اختبارات المتسلسلات ذات الحدود الموجبة لاختبار التقارب بالاطلاق. من المفيد استخدام اختبار مقارنة الحدود المتتالية.

اختبار النسبة

ليكن $\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right)=L$ عندها تكون المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}u_n$:

1. تتقارب بالاطلاق إذا كانت $L<1$.
2. متباعدة إذا كانت $L>1$.
3. لاينجح هذا الاختبار إذا كانت $L=1$.

مثال:

أوجد تقارب أو تباعد المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n^2}$ باستخدام اختبار النسبة؟

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^4 e^{-(n+1)^2}}{n^4 e^{-n^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^4 e^{-(n^2+2n+1)}}{n^4 e^{-n^2}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \cdot e^{-(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \cdot \lim_{n\to\infty} e^{-(2n+1)} = 1\times 0 = 0$$

أي أنّ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n^2}$ متقاربة بالاطلاق.

اختبار الجذر من المرتبة n

لتكن $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|u_n|}\right) = L$ تكون عندئذ المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$:

1. متقاربة بالاطلاق إذا كانت $L<1$.
2. متباعدة إذا كانت $L>1$.
3. غير معروف التقارب أو التباعد إذا كان $L=1$.

مثال:

لتكن لدينا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1+2r+r^2+2r^3+r^4+\cdots$ حيث $r\in\mathbb{R}$ ثابت. هل هي متقاربة أم متباعدة؟

ادرس الحالات $r=2/3, r=-2/3, r=4/3$.

لدينا الحد $u_n = 2r^n$ من أجل n فردي و $u_n = r^n$ من أجل n زوجي.

وبالتالي: $\sqrt[n]{|u_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{2|r^n|} = \sqrt[n]{2}\cdot|r^n|, & n \text{ فردي} \\ \sqrt[n]{|r^n|} = |r|, & n \text{ زوجي} \end{cases}$

وبما أنّ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2} = 1$ نجد $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = |r|$

أي أنه تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1+2r+r^2+2r^3+r^4+\cdots$ إذا كانت $|r|<1$ وتتباعد هذه المتسلسلة إذا كانت $|r|>1$.

وبالتالي تكون متقاربة من أجل الحالتين $r=2/3<1$ و $r=-2/3 \Rightarrow |r|=2/3<1$ ومتباعدة من أجل $r=4/3>1$.

نظرية:

يمكن إعادة ترتيب حدود متسلسلة متقاربة بالاطلاق بأي ترتيب ونحصل على متسلسلات متقاربة بنفس المجموع. بينما عند إعادة ترتيب الحدود من أجل متسلسلة نصف متقاربة يمكن للمتسلسلة الناتجة أن تتباعد أو أن تتقارب.

نظرية:

نحصل عند جمع أو طرح أو جداء متسلسلتين متقاربتين بالاطلاق على متسلسلة متقاربة بالاطلاق.

3. كتابة التوابع بشكل متسلسلات

يمكن تمثيل علاقة الربط لتابع بمتسلسلة مثال:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

حيث: $\sin x = \lim_{n\to\infty} S_n$ ولدينا $S_1 = x, S_2 = x - \frac{x^3}{3!}, \ldots, S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$

ملاحظة:

كانت المتتاليات والمتسلسلات حتى الآن تعتمد على تغير n فقط. وعندما أدخلت التوابع تم إضافة متغير جديد هو المتحول x.

تعريف التقارب المنتظم

ليكن لدينا المتتالية $\{u_n(x)\}, n = 1,2,3,\ldots$ لتوابع معرفة ضمن المجال $x \in [a,b]$. نقول إنّ المتتالية تسعى للتابع $F(x)$ أو لها النهاية $F(x)$ ضمن المجال $x \in [a,b]$ إذا كان $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a,b]$ يمكن إيجاد $N > 0$ بحيث $|u_n(x) - F(x)| < \varepsilon$ لكل $n > N$ ونكتب في هذه الحالة $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = F(x)$ وتتعلق عادة N بقيمة ε وبقيمة x. إذا كانت N تتعلق فقط بقيمة ε فقط ولا تتعلق بقيمة x نقول عنها أنها تسعى إلى $F(x)$ بانتظام في المجال $x \in [a,b]$ أو متقاربة بانتظام على نفس المجال.

تعريف تقارب متسلسلة توابع

لتكن لدينا المتسلسلة من التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ نقول عنها أنها متقاربة في المجال $x \in [a,b]$ إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n(x)\}, n = 1,2,3,\ldots$ حيث $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$ متقاربة في المجال $x \in [a,b]$. ونكتب في هذه الحالة $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ ويدعى $S(x)$ مجموع المتسلسلة.

أي أنّ متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ تسعى نحو $S(x)$ في المجال $x \in [a,b]$ ويكون لدينا $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a,b]$ يمكن ايجاد $N > 0$ بحيث $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \forall n > N$. وتدعى متسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ متقاربة بانتظام إذا كان حساب N يتعلق فقط بقيمة ε ولا يتعلق بقيمة x.

نكتب $S(x) - S_n(x) = R_n(x)$ الباقي من المتسلسلة بعد n حد. يمكن القول إنّ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ متقاربة بانتظام في المجال $x \in [a,b]$ إذا كان $\forall \varepsilon > 0$ يمكن ايجاد N يتعلق بقيمة ε فقط ولا يتعلق بقيمة x بحيث $|R_n(x)| < \varepsilon$ لكل $n > N$ وذلك $\forall x \in [a,b]$.

ملاحظة:

يمكن اختيار مجال مفتوح $]a,b[$ أو نصف مفتوح $]a,b]$ أو $[a,b[$ عوضاً عن المجال المغلق $[a,b]$.

مثال:

ليكن لدينا المتتالية $u_n(x) = \frac{x^n}{n}$ و $x \in [-0.5,1]$ ولنأخذ التابع الثابت $F(x) = 0$ المعرّف على هذا المجال. نجد إنّ $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [-0.5,1]$ يوجد N بحيث $\forall n > N, |u_n(x) - F(x)| < \varepsilon$ أي $\left|\frac{x^n}{n}\right| < \varepsilon$

بما أنّ N لا تتعلق بقيمة x فالمتتالية $u_n(x) = \frac{x^n}{n}$ متقاربة بانتظام ضمن المجال $x \in [-0.5,1]$.

مثال:

ليكن لدينا المتتالية $u_n(x) = x^n$ و $0 \le x \le 1$ هذه المتتالية ليست متقاربة بانتظام ضمن المجال $0 \le x \le 1$ لأنّنا إذا أخذنا التابع $F(x) = \begin{cases} 0, if \ x \in [0,1[\\ 1, if \ x = 1 \end{cases}$ نجد إنّ $|x^n - 0| < \varepsilon \Rightarrow x^n < \varepsilon$

$n \ln x < \ln \varepsilon$ وبما أنّ $\ln \varepsilon < 0, \ln x < 0$ سالبين (لأنّ $0 < x < 1, 0 < \varepsilon < 1$) نجد $n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$

$\frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/x)} = \frac{\ln 1 - \ln \varepsilon}{\ln 1 - \ln x} = \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$ وبالتالي يجب اختيار N التي تحقق $n > N > \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/x)}$ أي أنّ N تتعلق بقيمة ε وبقيمة x وهي غير متقاربة بانتظام.

اختبارات التقارب المنتظم للمتسلسلات

1. اختبار Weierstrauss

إذا كان يمكن ايجاد متتالية من أرقام ثابتة وموجبة $M_1, M_2, M_3, \ldots$ بحيث يتحقق لدينا من أجل $x \in [a,b]$ الشرطين التاليين:

- $n = 1, 2, 3, \ldots, |u_n(x)| \le M_n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ متقاربة

عندها تكون $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ متقاربة بانتظام وبالاطلاق في المجال $x \in [a,b]$.

مثال:

ليكن لدينا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ فهي متقاربة بانتظام وبالاطلاق في المجال $x \in [0, 2\pi]$ لأنّ $\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة.

ملاحظة:

يشكل الاختبار السابق Weierstrauss شرط كاف ولكن غير لازم أي أنه من الممكن أن تكون المتسلسلة متقاربة بانتظام بدون أن يكون من الممكن تحقيق الاختبار عليها.

ملاحظة:

خاصية التقارب بانتظام مستقلة عن خاصية التقارب بالاطلاق أي أنه يمكن أن تكون المتسلسلة متقاربة بانتظام بدون أن تكون متقاربة بانتظام أو بالعكس.

2. اختبار Dirichlet لتكن لدينا:

- المتتالية $\{a_n\}$ متناقصة لأعداد ثابتة وموجبة نهايتها الصفر 0
- يوجد عدد ثابت P بحيث من أجل $x \in [a,b], n > N$ يتحقق
$$|u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)| < P$$

عندئذ المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot u_n(x) = a_1 \cdot u_1(x) + a_2 \cdot u_2(x) + \cdots$ متقاربة بانتظام في المجال $x \in [a,b]$.

نظرية:

إذا كانت المتتالية $\{u_n(x)\}, n = 1,2,3,\dots$ مستمرة ضمن المجال $x \in [a,b]$ وإذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ متقاربة بانتظام إلى المجموع $S(x)$ مع $x \in [a,b]$ عندئذ يكون المجموع $S(x)$ مستمراً على نفس المجال $x \in [a,b]$.

أي أنّ المتسلسلات المتقاربة بانتظام لتوابع مستمرة تكون توابع مستمرة. وعندما يكون التابع الناتج المجموع فيه انقطاع يمكن بذلك برهان أن المتسلسلة غير متقاربة بانتظام.

أي أنه إذا كان $x \in [a,b]$ فلدينا: $\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$

نظرية:

إذا كانت المتتالية $\{u_n(x)\}, n = 1,2,3,\dots$ توابع مستمرة في المجال $x \in [a,b]$ وإذا كان كانت $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ متقاربة بانتظام إلى المجموع $S(x)$ مع $x \in [a,b]$ عندئذ يكون لدينا:

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$$

$$\int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$$

أي أنّه يمكن مكاملة كل حد من حدود المتسلسلة المتقاربة بانتظام لتوابع مستمرة.

نظرية:

إذا كانت المتتالية $\{u_n(x)\}, n = 1,2,3,\dots$ توابع مستمرة في المجال $x \in [a,b]$ ومشتقاتها مستمرة في نفس المجال وإذا كان كانت $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ متقاربة المجموع $S(x)$ في $x \in [a,b]$ وإذا كانت متسلسلة المشتقات $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ متقاربة بانتظام في $x \in [a,b]$ عندئذ يكون لدينا:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_n(x)$$

تبين هذه النظرية الشرط المطلوب لاشتقاق كل حد من حدود المتسلسلة.

ملاحظة:

يمكن بشكل مشابه تطبيق نظريات مشابهة للمتتاليات. فإذا كان لدينا المتتالية $\{u_n(x)\}, n=1,2,3,\ldots$ متقاربة بانتظام في المجال $x\in[a,b]$ عندئذ يكون لدينا: $\int_a^b \lim_{n\to\infty} u_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)dx$ أي أنّه من الممكن مكاملة كل حد من حدود المتسلسلات المتقاربة بانتظام لتوابع مستمرة.

1.3. تعريف متسلسلات القوى

تعريف متسلسلات القوى:

تدعى المتسلسلة من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^n + \cdots$ حيث $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ ثوابت، متسلسلة قوى بالمتحول x. يمكن كتابة المتسلسلة بالشكل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

تتقارب متسلسلة القوى في الحالة العامة من أجل $|x|<R$ وتتباعد من أجل $|x|>R$ حيث R ثابت يدعى نصف قطر التقارب للمتسلسلة. قد تتقارب أو تتباعد المتسلسلة من أجل $|x|=R$. يدعى المجال $|x|<R$ مجال التقارب للمتسلسلة.

عندما تكون $R=0$ تتقارب المتسلسلة من أجل $x=0$ فقط ولذلك عندما نقول إنّ المتسلسلة متقاربة تكون $R>0$.

عندما تكون $R=\infty$ تتقارب المتسلسلة من أجل أي قيمة للمتحول x أي $x\in\mathbb{R}$.

يمكن استبدال المتحول x بالمتحول $(x-a)$ في علاقة متسلسلة القوى فتصبح $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(a-x)^n$.

نظرية:

تتقارب متسلسلة القوى بانتظام وبالاطلاق ضمن أي مجال محتوى كلياً في مجال التقارب.

نظرية:

يمكن اشتقاق أو مكاملة متسلسلة قوى كل حد على حدة ضمن أي مجال محتوى كلياً في مجال التقارب.

نظرية:

عندما تتقارب متسلسلة قوى ضمن مجال التقارب إلى نقطة بطرف المجال يكون مجال التقارب المنتظم يتضمن هذه النقطة.

نظرية:

إذا تقاربت متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ عند $x = x_0$ التي قد تكون ضمن أو بطرف مجال التقارب عندئذ يكون لدينا: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\lim_{x\to x_0} a_n x^n\right\} = \lim_{x\to x_0}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right\}$.

2.3. العمليات على متسلسلات القوى

1. يمكن جمع أو طرح متسلسلتي قوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ كل حد مع الحد الموافق له من أجل أي قيمة من المتحول x مشتركة بين مجالي التقارب للمتسلسلتين.
2. يمكن جداء متسلسلتي قوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ونحصل على المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ حيث:
3. $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0$ تصلح هذه النتيجة لأي قيمة للمتحول x ضمن مجال التقارب المشترك للمتسلسلتين $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.
4. إذا تمت قسمة متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ على المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ حيث $b_0 \neq 0$ يمكن كتابة الكسر الناتج كمتسلسلة قوى متقاربة من أجل قيم صغيرة بشكل كاف للمتحول x.
5. إذا كان لدينا $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ عندئذ باخذ $x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n$ يمكن الحصول على المعاملات $b_n, n = 0,1,2,\dots$ بدلالة $a_n, n = 0,1,2,\dots$ ونكون بذلك قد عكسنا المتسلسلة.

نظرية:

لتكن متسلسلة القوة من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ نكتب $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \beta$ و $R = \frac{1}{\beta}$.

إذا كانت $\beta = 0$ تكون $R = +\infty$ وإذا كانت $\beta = \infty$ تكون $R = 0$ ويكون لدينا:

1. تتقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ من أجل $|x| < R$ أي أنّ R هو نصف قطر التقارب.
2. تتباعد المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ من أجل $|x| > R$.

مثال:

لتكن لدينا متسلسلة القوة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ماهو نصف قطر تقاربها؟

بما أنّ $a_n = \frac{1}{n!}$ نجد $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 = \beta$ وبالتالي نصف قطر التقارب هو ∞ وهذه المتسلسلة متقاربة من أجل $x \in \mathbb{R}$.

مثال:

لتكن لدينا متسلسلة القوة $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ماهو نصف قطر تقاربها؟

نجد $R = 1 \Leftarrow \beta = 1$ أي أنّ المتسلسلة متقاربة من أجل $x \in]-1,1[$.

مثال:

لتكن لدينا متسلسلة القوة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ماهو نصف قطر تقاربها؟

نجد $\beta = 1$ و $R = 1$ وهي تتباعد من أجل $x = 1$ وتتقارب من أجل $x = -1$ أي أنّ مجال التقارب هو $x \in [-1,1[$.

مثال:

لتكن لدينا متسلسلة القوة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ ماهو نصف قطر تقاربها؟

نجد $\beta = 1$ و $R = 1$ وتتقارب من أجل $x = 1, x = -1$ أي أنّ محال التقارب هو $x \in [-1,1]$.

مثال:

لتكن لدينا متسلسلة القوة $\sum_{n=0}^{\infty} (n!) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ماهو نصف قطر تقاربها؟

نجد $\beta = +\infty$ و $R = 0$ أي أنّها تتقارب من أجل $x = 0$ فقط.

3.3. نشر التوابع بمتسلسلات القوى

يمثل نشر التوابع باستخدام المتسلسلات الفائدة الرئيسية في التحليل من مفهوم المتسلسلات. تمثل التوابع باشكال مختلفة الأشهر منها هو نشر تايلور. يمكن تمثيل التوابع باستخدام متسلسلات قوى. ليكن لدينا التابع $f(x)$ الذي يمكن كتابته بالشكل:

$$f(x) = A_0 + A_1 \cdot (x-c) + A_2 \cdot (x-c)^2 + A_3 \cdot (x-c)^3 + \cdots + A_n \cdot (x-c)^n + \cdots$$

نحصل على القيم $A_n, n = 0,1,2,3,\ldots$ بالمطابقة مع مشتقات التابع $f(x)$ فنجد:

$$A_0 = f(c), A_1 = f'(c), A_2 = \frac{1}{2!} f''(c), \ldots, A_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c), \ldots$$

أي أنّ نشر تابع $f(x)$ يمكن كتابته بالشكل:

$$f(x) = f(c) + f'(c) \cdot (x-c) + \frac{1}{2!} f''(c) \cdot (x-c)^2 + \frac{1}{3!} f'''(c)(x-c)^3 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x-c)^n + \cdots$$

نسمي كثيرات الحدود التالية كثيرات حدود تايلور للتابع $f(x)$:

$$P_0(x)=f(c), P_1(x)=f(c)+f'(c)\cdot(x-c),$$
$$P_2(x)=f(c)+f'(c)\cdot(x-c)+\frac{1}{2!}f''(c)\cdot(x-c)^2,\ldots$$
$$P_n(x)=f(c)+f'(c)\cdot(x-c)+\frac{1}{2!}f''(c)\cdot(x-c)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)\cdot(x-c)^n$$

4.3. نشر تايلور

نظرية: ليكن لدينا التابع $f(x)$ ومشتقاته موجودة ومستمرة حتى المرتبة n $f'(x),f''(x),f'''(x),\ldots,f^{(n)}$ ضمن المجال المغلق $x\in[a,b]$ ولنفترض أنّ المشتق $f^{(n+1)}$ موجود ضمن المجال المفتوح $x\in]a,b[$. عندئذ يكون لدينا من أجل $c\in[a,b]$: $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ حيث $P_n(x)$ هو كثير حدود تايلور ويمثّل $R_n(x)$ بقية الحدود التي تمّ اهمالها ويمكن كتابته $R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-c)^{n+1}$ حيث تقع ξ بين c و x. تدعى هذه العلاقة بنشر تايلور.

كذلك يمكن كتابة المتسلسلة التي تدعى متسلسلة تايلور $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)\cdot(x-c)^n$.

مثال:

يمكن تحديد قيمة التابع $\sin x$ بشكل هندسي لعدد من النقاط مثل $0,\pi/6,\pi/3,\ldots$ وغيرها. يمكن حساب قيمة هذا التابع لنقاط أخرى باستخدام متسلسلات تايلور حول إحدى النقاط المعروفة. إذا اخذنا $c=0$ عندئذ:

$$f(0)=\sin 0=0, f'(0)=\cos 0=1, f''(0)=-\cos 0=-1, f^{(4)}(0)=\sin 0=0, f^{(5)}(0)=\cos 0=1$$

لنأخذ علاقة تايلور للحدود الخمسة الأولى $\sin x=0+x-0+\frac{1}{3!}x^3+0-\frac{1}{5!}x^5+\cdots$ بما أنّ الحد الرابع هو 0 فكثيرات حدود تايلور $P_4(x)=P_3(x)$ متساوية فنجد $P_3(x)=P_4(x)=x-\frac{x^3}{3!}$ والباقي $R_4(x)=\frac{1}{5!}\cos\xi\cdot x^5$. ليكن المطلوب حساب $\sin x=\sin 0.3, x=0.3[rad]$ فنجد $P_4(0.3)=0.3-\frac{1}{6}(0.3)^3\approx 0.2945$ ويمكن معرفة الدقة لهذا التقريب من خلال الباقي:

$$|R_4|=\left|\frac{1}{5!}\cos\xi\cdot(0.3)^5\right|\le\frac{1}{120}\cdot\frac{243}{10^5}<0.000021$$

أي أنّ تقريب $\sin(0.3)=P_4(0.3)$ صحيح لأربع أرقام عشرية بعد الفاصلة.

5.3. نشر بعض التوابع

$$\sin x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots, -\infty < x < +\infty$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\cdots, -\infty < x < +\infty$$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots, -\infty < x < +\infty$$

$$\ln|1+x| = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots, -1 < x \le 1$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{|1+x|}{1-x} = x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots, -1 < x < 1$$

$$\tan^{-1} x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots, -1 \le x \le 1$$

$$(1+x)^p = 1+px+\frac{p(p-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

والعلاقة الأخيرة تمثل متسلسلة ثنائي الحدود وفق الحالات التالية:

1. إذا كانت p عدد طبيعي تكون متسلسلة منتهية.
2. إذا كانت $p>0$ وليس عدد طبيعي تتقارب المتسلسلة بالاطلاق من أجل $-1 \le x \le 1$
3. إذا كانت $-1 < p < 0$ تتقارب المتسلسلة من أجل $-1 < x < 1$
4. إذا كانت $p \le -1$ تتقارب المتسلسلة من أجل $-1 < x < 1$
5. مهما كانت قيمة p تتقارب المتسلسلة من أجل $-1 < x < 1$

مثال:

يمكن تطبيق نشر تايلور للتابع e^x لحساب قيمة التكامل:

$$\int_0^1 e^{x^2}dx = \int_0^1\left[1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+e^{\xi}\frac{x^{10}}{5!}\right]dx$$

حيث: $P_4(x)=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}$ و $R_4(x)=e^{\xi}\frac{x^{10}}{5!}, 0<\xi<x$ فنجد:

$$\int_0^1 P_4(x)dx = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5\times 2!}+\frac{1}{7\times 3!}+\frac{1}{9\times 4!} \approx 1.4618$$

$$\left|\int_0^1 R_4(x)dx\right| \le \int_0^1\left|\frac{e^{\xi}}{5!}x^{10}\right|dx \le e\int_0^1\frac{x^{10}}{5!}dx = \frac{e}{11.5} < 0.0021$$

أي أنّ الخطأ الاعظمي أقل من 0.0021 وقيمة التكامل بدقة رقمين بعد الفاصلة.

4. التوابع المعرفة بمتسلسلات

يمكن أن يظهر تابع معرف كمتسلسلة في تطبيق وعلى الأغلب عند حل معادلة تفاضلية.

مثال:

$$J_p(x)=\frac{x^p}{2^p\cdot p!}\left\{1-\frac{2}{2(2p+2)}+\frac{x^4}{2\times 4(2p+2)(2p+4)}-\cdots\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x/2)^{p+2n}}{n!(n+p)!}$$

هذا التابع هو حل لمعادلة بيسيل التفاضلية $x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$ ويدعى تابع بيسيل من الدرجة p.

مثال:

$$F(a,b,c,x)=1+\frac{a\cdot b}{1\times c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1\times 2\times c(c+1)}x^2+\cdots$$

هذا التابع هو حل لمعادلة غوص التفاضلية:

$$x(1-x)y''+\{c-(a+b+1)x\}y'-a\times b\times y=0$$

5. المتسلسلات العقدية

لنأخذ متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ حيث $z=x+i\cdot y$ ($i=\sqrt{-1}$ هو العدد العقدي) و a_n حقيقي أو عقدي.

يمكن معالجة هذه المتسلسلات بشكل مشابه للمتسلسلات الحقيقية. تتقارب هذه المتسلسلات من اجل $|z|<R$ أي ضمن دائرة التقارب $x^2+y^2=R^2$ حيث R نصف قطر دائرة التقارب.

المتسلسلات لتوابع بمتحولين أو أكثر

هي من الشكل $\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,y)$ يمكن التعامل معها بشكل مشابه للمتسلسلات بمتحول واحد.

متسلسلة القوى بمتحولين x,y يمكن كتابتها بالشكل:

$$a_{00}+(a_{10}x+a_{01}y)+(a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2)+\cdots$$

حيث يستخدم رقمين لتعريف كل مثل من أمثال المتحولين ويمكن نشر التوابع بمتحولين بطريقة تايلور بشكل مشابه لنشر التوابع بمتحول واحد.

6. نظرية تايلور للتوابع بمتحولين

نظرية: ليكن $f(x,y)$ تابع للمتحولين x,y. إذا كانت كل المشتقات الجزئية من المرتبة n مستمرة ضمن منطقة مغلقة وإذا كانت المشتقات الجزئية من المرتبة $(n+1)$ موجودة ضمن المنطقة المفتوحة عندئذ يكون لدينا:

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)+R_n$$

حيث: $R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta\cdot h,y_0+\theta\cdot k),0<\theta<1$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)=h\cdot f_x(x_0,y_0)+k\cdot f_y(x_0,y_0)$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)=h^2\cdot f_{xx}(x_0,y_0)+2\cdot h\cdot k\cdot f_{xy}(x_0,y_0)+k^2 f_{yy}(x_0,y_0)$$

أي نقوم بنشر ثنائي الحدود $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n$.

ملاحظة:

1. يمكن كتابة $h=\Delta x=x-x_0,k=\Delta y=y-y_0$.
2. إذا كان $R_n\to 0,n\to\infty$ نجد نشر تايلور.

7. المتسلسلة المزدوجة

ليكن لدينا مصفوفة من الأرقام أو التوابع:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

ولدينا: $S_{mn}=\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}u_{pq}$ يمثل مجموع الحدود من أوّل m سطر وأوّل n عمود من المصفوفة السابقة.

تكون المتسلسلة المزدوجة $S_{mn}=\sum_{p=1}^{m}\sum_{q=1}^{n}u_{pq}$ متقاربة للمجموع S إذا كانت $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}S_{mn}=S$ وإلا تكون متباعدة.

مذاكرة المتسلسلات (السلاسل) Series

العلامة العظمى: 100　　　علامة النجاح: 50　　　المدة: ساعة ونصف

لكل سؤال خمس علامات

اختر الإجابة الصحيحة للأسئلة التالية:

1. ماهي قيمة المجموع $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k(k+2)}$؟

a) 3
b) 2
c) 1
d) 0

مساعدة: عليك كتابة الكسر على شكل مجموع كسرين بسيطين $\frac{4}{k(k+2)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+2}$ عليك ايجاد قيم الثابتين A,B

2. ماهي قيمة المجموع $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k(k+1)}$؟

a) 4
b) 2
c) 1
d) 0

مساعدة: عليك كتابة الكسر على شكل مجموع كسرين بسيطين $\frac{4}{k(k+1)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}$ عليك ايجاد قيم الثابتين A,B

3. ماهي قيمة المجموع $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5}{k(k+1)}$؟

a) 5
b) 2
c) 1
d) 0

مساعدة: عليك كتابة الكسر على شكل مجموع كسرين بسيطين $\frac{5}{k(k+1)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}$ عليك ايجاد قيم الثابتين A,B

4. ماهي قيمة المجموع $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+3)}$؟

a) $\frac{11}{8}$

b) $\frac{1}{3}$

c) 1

d) 0

مساعدة: عليك كتابة الكسر على شكل مجموع كسرين بسيطين $\frac{5}{k(k+1)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}$ عليك ايجاد قيم الثابتين A,B

5. بتطبيق اختبار التقارب نجد أنّ المتسلسلة التالية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$ هي متسلسلة:

a) متقاربة

b) متباعدة

c) غير معروف إذا كانت متقاربة أو متباعدة

مساعدة: راجع فقرة تقارب متسلسلة.

6. بتطبيق اختبار التقارب نجد أنّ المتسلسلة التالية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+5}$ هي متسلسلة:

a) متقاربة

b) متباعدة

c) غير معروف إذا كانت متقاربة أو متباعدة

مساعدة: راجع فقرة تقارب متسلسلة.

7. بتطبيق اختبار التقارب نجد أنّ المتسلسلة التالية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$ هي متسلسلة:

a) متقاربة

b) متباعدة

c) غير معروف إذا كانت متقاربة أو متباعدة

مساعدة: راجع فقرة تقارب متسلسلة.

8. بتطبيق اختبار النسبة على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{3^n}$ نجد أنّها:

a) متقاربة

b) متباعدة

c) غير محدد

مساعدة: راجع فقرة تقارب متسلسلة.

9. بتطبيق اختبار النسبة على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n}$ نجد أنها:

a) متقاربة

b) متباعدة

c) غير محدد

مساعدة: راجع فقرة تقارب متسلسلة.

10. بتطبيق اختبار النسبة على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{\pi^n}$ نجد أنّها:

a) متقاربة

b) متباعدة

c) غير محدد

مساعدة: راجع فقرة تقارب متسلسلة.

11. بتطبيق اختبار النسبة على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ نجد أنّها:

a) متقاربة

b) متباعدة

c) غير محدد

مساعدة: راجع فقرة تقارب متسلسلة.

12. ماهو نصف قطر تقارب متسلسلة القوة $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n$ ؟

a) $R=0$
b) $R=\infty$
c) $R=1$
d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة كتابة التوابع بشكل متسلسلة.

13. ماهو نصف قطر تقارب متسلسلة القوة $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right)x^n$ ؟

a) $R=0$
b) $R=\infty$
c) $R=1$
d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة كتابة التوابع بشكل متسلسلة.

14. ماهو نصف قطر تقارب متسلسلة القوة $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n!}\right)x^n$ ؟

a) $R=0$
b) $R=\infty$
c) $R=1$
d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة كتابة التوابع بشكل متسلسلة.

15. ماهي قيم x التي تتقارب عندها المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+3^n}\right)x^{n-1}$ ؟

a) $x=0$
b) $x\in[-3,3[$
c) $x\in[-1,1[$
d) $x\in\mathbb{R}$

مساعدة: راجع فقرة كتابة التوابع بشكل متسلسلة.

16. ماهي قيم x التي تتقارب عندها المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+3^n}\right)x^{n-1}$؟

- $x=0$
- $x\in[-3,3[$
- $x\in[-1,1[$
- $x\in\mathbb{R}$

مساعدة: راجع فقرة كتابة التوابع بشكل متسلسلة.

17. ماهي قيم x التي تتقارب عندها المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2^n(3n-1)}\right)(x-1)^n$؟

a) $x=0$

b) $x\in]-1,3[$

c) $x\in[-1,1[$

d) $x\in\mathbb{R}$

مساعدة: راجع فقرة كتابة التوابع بشكل متسلسلة.

18. ماهو نشر تايلور للتابع $f(x)=\ln x$ بجوار $a=1$:

a) $f(x)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\cdots$

b) $f(x)=(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^3}{3!}+\frac{(x-1)^4}{4!}+\cdots$

c) $f(x)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^3}{3!}-\frac{(x-1)^4}{4!}+\cdots$

- جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة نظرية تايلور.

19. ماهو نشر تايلور للتابع $f(x)=\frac{1}{x}$ بجوار $a=1$؟

a) $f(x)=(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^3}{3!}+\frac{(x-1)^4}{4!}+\cdots$

b) $f(x)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^3}{3!}-\frac{(x-1)^4}{4!}+\cdots$

c) $f(x)=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+(x-1)^4+\cdots$

d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة نظرية تايلور.

20. ماهو نشر تايلور للتابع $f(x)=\sin x$ بجوار $a=\frac{\pi}{4}$؟

(a $f(x)=\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots$

(b $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots\right)$

(c $f(x)=1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots$

(d جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة نظرية تايلور.

الإجابات الصحيحة

السؤال	الإجابة الصحيحة
1	الخيار الأول
2	الخيار الأول
3	الخيار الأول
4	الخيار الأول
5	الخيار الثاني
6	الخيار الثاني
7	الخيار الثاني
8	الخيار الأول
9	الخيار الثاني
10	الخيار الأول
11	الخيار الثالث
12	الخيار الثالث
13	الخيار الثالث
14	الخيار الثاني
15	الخيار الثاني
16	الخيار الثاني
17	الخيار الثاني
18	الخيار الأول
19	الخيار الثالث
20	الخيار الثاني