الفصل الثاني: التوابع النهايات والاستمرار

العنوان	الصفحة

الكلمات المفتاحية:

التوابع، النهايات، الاستمرار، النهايات المحلية، النهاية المحلية الصغرى، النهاية المحلية العظمى، التوابع الخطية، القطع المكافئ، التوابع الاسية، التوابع اللوغاريتمية، التوابع المثلثية، التوابع العكسية، التوابع المتزايدة، التوابع المتناقصة، التوابع الفردية، التوابع الزوجية، التوابع الدورية، منطقة التعريف.

الملخص:

يهدف هذا الفصل إلى عرض تعريف التوابع وخصائصها ومفاهيم النهايات والاستمرار للتوابع الحقيقية. يعرّف التوابع والتوابع العكسية. ويعرض التوابع الأساسية البسيطة مثل كثيرات الحدود ومنها التوابع الخطية والتوابع من الدرجة الثانية القطع المكافئ والتوابع الاسية واللوغاريتمية والتوابع المثلثية. وتعرّف التوابع المحدودة والتوابع المطّردة المتزايدة والمتناقصة والتوابع الفردية والتوابع الزوجية والتوابع الدورية. تعرّف كذلك النهايات المحلية العظمى والصغرى. يقدّم مفهوم النهاية للتوابع وخصائصها. ويعرّف الاستمرار والشروط التي يجب أن يحققها التابع ليكون مستمراً.

الأهداف التعليمية:

يتعرف الطالب في هذا الفصل على:

- تعريف التوابع والتوابع العكسية
- التوابع الأساسية البسيطة
- التوابع المحدودة
- التوابع المتزايدة والمتناقصة والمطّردة
- التوابع الزوجية والفردية والدورية
- النهايات المحلية العظمى والصغرى
- نهايات التوابع
- استمرار التوابع

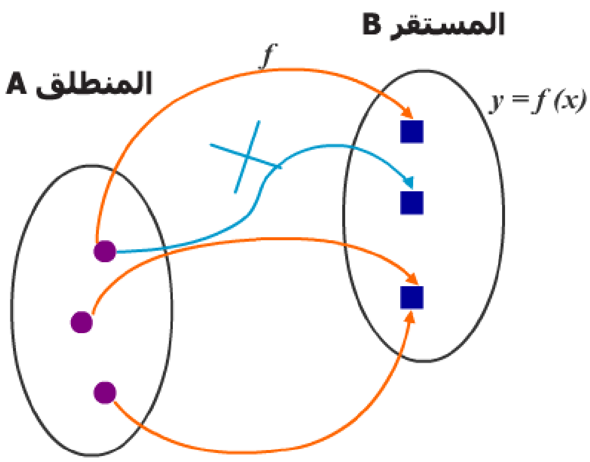
مقدمة

تعتبر التوابع وخصائصها من أهم المفاهيم الرياضية للعديد من التطبيقات الاقتصادية والهندسية. يهتم هذا الفصل بتقديم النقاط التالية:

- تعريف التوابع والتوابع العكسية
- التوابع الأساسية البسيطة
- التوابع المحدودة
- التوابع المتزايدة والمتناقصة والمطّردة
- التوابع الزوجية والفردية والدورية
- النهايات المحلية العظمى والصغرى
- نهايات التوابع
- استمرار التوابع2

1. تعريف التوابع

يتألف التابع من مجموعة منطلق ومجموعة مستقر وعلاقة ربط تعطي عنصر واحد فقط من مجموعة المستقر لكل عنصر من عناصر المنطلق. يمكن لعدة قيم من مجموعة المنطلق أن تقابل نفس القيمة في المستقر (الشكل رقم **1**).



الشكل رقم 1 علاقة التابع $f : x \to y, f(x) = y$

لايوجد قيود على طبيعة عناصر مجموعتي المطلق والمستقر ولكن في مادة التحليل سيتم التركيز على مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

يمكن تمثيل التابع بتحديد منطقة التعريف (مجموعة التعريف) بالإضافة إلى إيجاد العلاقة التي تربط بين عناصر المنطلق وعناصر المستقر. تمثّل علاقة الربط للتابع بعدة أشكال منها:

1. جدول يتم فيه ذكر عناصر مجموعة المنطلق ومجموعة المستقر الموافقة
2. بيان التابع في جملة الاحداثيات الديكارتية Oxy حيث يمثل المحور Ox الأفقي مجموعة المنطلق والمحور Oy الشاقولي مجموعة المستقر.
3. معادلة أو مجموعة معادلات وهذه هي الطريقة التحليلية.

يرمز عادة لمتحولات مجموعة المنطلق بالرمز x ولمتحولات مجموعة المستقر بالرمز y وللتابع f ولعلاقة الربط $y = f(x)$.

يدعى متحول مجموعة المنطلق x المتحول المستقل. يدعى متحول مجموعة المستقر y المتحول المرتبط.

يمكن استخدام أحرف أخرى لتمثيل x, y, f.

هناك طرق عديدة لربط عناصر مجموعتين ليست بالضرورة توابع. أي لاتعطي قيمة واحدة في المستقر لقيمة واحدة من المنطلق.

مثال:

$y^2 = x$ هناك قيمتين للمستقر y مقابل كل قيمة من المنطلق لذلك هذه العلاقة ليست تابع.

مثال:

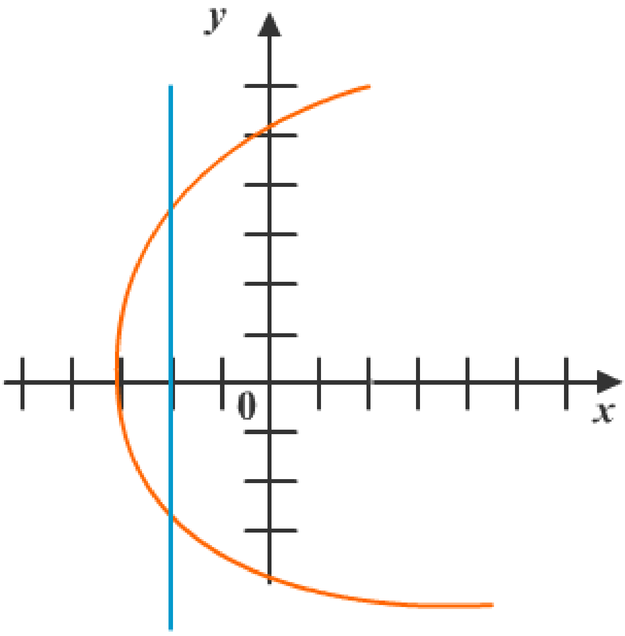
أزواج الأرقام $(a,b),(a,c),(a,d),(a,f)$ ليست تابع لأن a من المنطلق تقابل عدة قيم من المستقر.

اختبار المستقيم العموديّ

نستطيع تمييز تابع عن علاقة رياضيّة أخرى لا تتمتّع بصفة تابع عن طريق هذا الاختبار. ننشئ خطّاً عموديّاً على محور الفواصل. لكي تكون العلاقة تابعاً يجب ألاّ يتقاطع هذا الخطّ مع الخطّ البيانيّ للتابع أكثر من مرّة.

مثال:

العلاقة الممثَّلة في الشّكل 2 التّالي ليست تابعاً.



الشّكل 2 اختبار المستقيم العمودي

مثال:

$y = f(x) = \dfrac{-4}{x-3}$ يربط بكلّ قيمة لـ x قيمة ندعوها صورة x وفق التّابع f.

مثال:

لنأخذ التابع الذي يربط مجموعة المنطلق $x \in [-1,1]$ بالعلاقة $f(x) = y = x^2$ أي أن $y \in [0,1]$. نجد مثلاً: $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$.

مثال:

التابع الذي يربط مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بالعلاقة $f(n) = \dfrac{1}{n}$.

مثال:

تابع يقدم عدد سكان بلد ما لكل عام. متحول المنطلق t العام والمستقر عدد السكان $P = f(t)$.

مثال:

يمكن أن يكون للتابع أكثر من متحول مثال التابع الذي يربط تمثيل الموضع على سطح الكرة الأرضية ممثلاً بزاوية خط العرض φ وزاوية خط الطول λ والارتفاع h أي ثلاث متحولات منطلق (φ,λ,h) بالاحداثيات الديكارتية المقابلة لها (x,y,z)، $f:(\varphi,\lambda,h) = (x,y,z)$. أي أن التابع له ثلاث متحولات منطلق وثلاث متحولات مستقر كل ثلاثة أعداد مرتبة من المنطلق يقابلها ثلاثة أعداد مرتبة من المستقر.

تدعى منطقة (مجموعة) تعريف التابع مجموعة المطلق أكبر مجموعة نستطيع تعريف علاقة الرّبط عليها.

مثال:

$f(x) = \dfrac{-4}{x-3}$ ، يجب على x ألاّ تساوي الـ 3 وإلاّ انعدم المقام. وبهذا تكون مجموعة تعريف f هي مجموعة الأعداد الحقيقيّة ماعدا 3. ونكتب ذلك:

مجموعة تعريف f هي: $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{3\}$، أو باستخدام المجالات: $D(f) =]-\infty,3[\cup]3,\infty[$. ونكتب أيضاً: $f:\mathbb{R}\setminus\{3\} \to \mathbb{R}$.

مثال:

$g(x) = x^3 - 1$ ، معرّف على $\mathbb{R}$. جميع كثيرات الحدود معرّفة على $\mathbb{R}$.

مثال:

$h(x) = \sqrt{x^3 - 8}$، يجب أن يكون ما داخل الجذر التربيعيّ مقداراً موجباً، أي

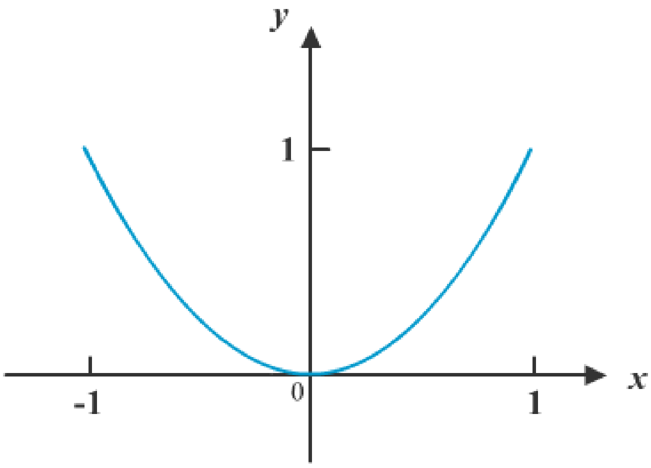
$x^3 - 8 \geq 0 \Rightarrow x^3 \geq 8 \Rightarrow x \geq 2$، أي أنّ $D(h) = [2,\infty[$.

بيان التابع

يشكل التابع مجموعة من ثنائيات الأعداد الحقيقية المرتبة (x,y). يشكل رسم هذه النقاط (x,y) على جملة الاحداثيات الديكارتية بيان التابع.

مثال:

الخط البياني للتابع $y = f(x) = x^2, -1 \leq x \leq 1$ ممثل في الشكل رقم 3



الشكل رقم 3 بيان التابع $y=f(x)=x^2,-1\le x\le 1$

2. التوابع العكسية

ليكن y متحول المستقر للتابع f و x هو متحول المنطلق. كذلك نفترض أنّ علاقة الربط هي عنصر واحد مقابل عنصر واحد بين المنطلق والمستقر. نعرّف التابع f^{-1} الذي يدعى التابع العكسي للتابع f الذي ينتج من التبادل بين المنطلق والمستقر للتابع f. أي أنّ $x=f^{-1}(y)$. لتسهيل التعامل مع التابع العكسي ولرسم بيانه نستخدم الكتابة $y=f^{-1}(x)$. يتحقق لدينا $f^{-1}\left[f(x)\right]=f\left[f^{-1}(x)\right]$

ملاحظة f^{-1} ليس التابع f مرفوعاً للقوة -1 وإنما التابع العكسي.

3. التوابع الأساسية البسيطة

تسمى التوابع التالية توابع أساسية بسيطة

1. تابع القوة $y=f(x)=x^n$ منطقة التعريف $x\in\mathbb{R}$

1.3. التوابع كثيرات الحدود

تأخذ التوابع كثيرات الحدود الشكل $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ حيث $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1},a_n$ أمثال حقيقية ثابتة و n عدد طبيعي يدعى درجة كثير الحدود عندما يكون $a_n\neq 0$.

لكل كثير حدود جذر على الأقل في مجموعة الأعداد العقدية. ويكون لكثير الحدود من الدرجة n له n جذر في مجموعة الأعداد العقدية. وبما أنّ أمثال كثير الحدود حقيقية فإنّ الجذور العقدية عند وجودها تكون بشكل أزواج مترافقة ذاتياً.

مثال:

$$x^3-5x^2+11x-15=(x-3)(x^2-2x+5)=(x-3)(x-1-2i)(x-1+2i)$$

1.1.3. التوابع الخطية المستقيمات

تمثّل المعادلة التالية تابع خطي بيانه مستقيم $f(x)=y=m\cdot x+y_0$ حيث تمثّل m ميل المستقيم و y_0 نقطة تقاطعه مع المحور Oy.

يمثل ميل المستقيم ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم مع المحور Ox الافقي.

يمكن حساب ميل مستقيم عُلمت منه نقطتان $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ باستخدام العلاقة:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

يمكن حساب ميل مستقيم من معرفة نقطتين منه $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ حيث $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

تعطى معادلة مستقيم ميله m و يمّر بالنّقطة (x_0,y_0) بالمعادلة: $y-y_0=m\cdot(x-x_0)$

مثال:

أوجد معادلة المستقيم الذي ميله -2 ويمرّ بالنّقطة $(1,3)$.

$$y-3=-2(x-1)\Rightarrow y=-2x+5$$

معادلة مستقيم يمر من نقطتين

لتكن $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ نقطتين من مستقيم. نبدأ بإيجاد ميل المسقيم باستخدام العلاقة: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

ثمّ نطبّق ما ورد في الفقرة السابقة.

مثال:

أوجد معادلة المستقيم المارّ بالنّقطتين $(2,5),(0,3)$.

نحسب ميل المستقيم فنجد $m=\frac{5-3}{2-0}=\frac{2}{2}=1$. وتكون معادلته $y-3=1(x-0)$ أي:

$y=x+3$.

ملاحظة:

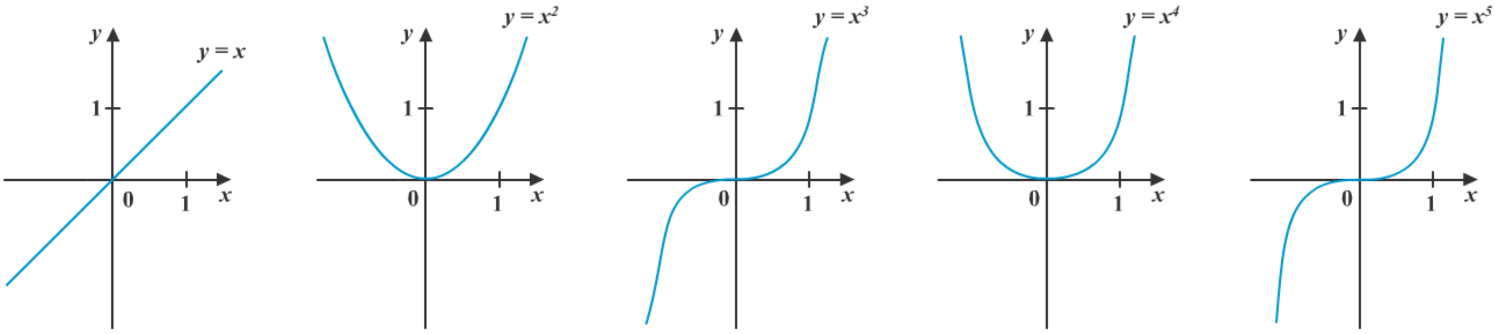
- يكون مستقيمان متوازيان إذا كان لهما نفس الميل.
- يكون مستقيمان متعامدان إذا كان جداء ميليهما يساوي $m_1 \cdot m_2 = -1$.

2.1.3. التوابع كثيرات الحدود من الدرجة الثانية

نعرّف التابع كثير الحدود من الدرجة الثانية بأنه تابع تكون فيه علاقة الربط عبارة عن كثير حدود من الدرجة الثانية. أي أنّ علاقة الربط تكون من الشكل $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $a,b,c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

يشكّل بيان التابع من الدرجة الثانية قطع مكافئ وتكون جهة التقعر نحو الأعلى إذا كان $a > 0$ ونحو الأسفل إذا كان $a < 0$ ندعو ذروة القطع أعلى نقطة في القطع عندما يكون تقعره سالباً أو اخفض نقطة في القطع عندما يكون تقعرّه موجباً. يشكل المستقيم الشاقولي المار من ذروة القطع محور القطع ويكون القطع المكافئ متناظراً بالنسبة لمحور القطع.

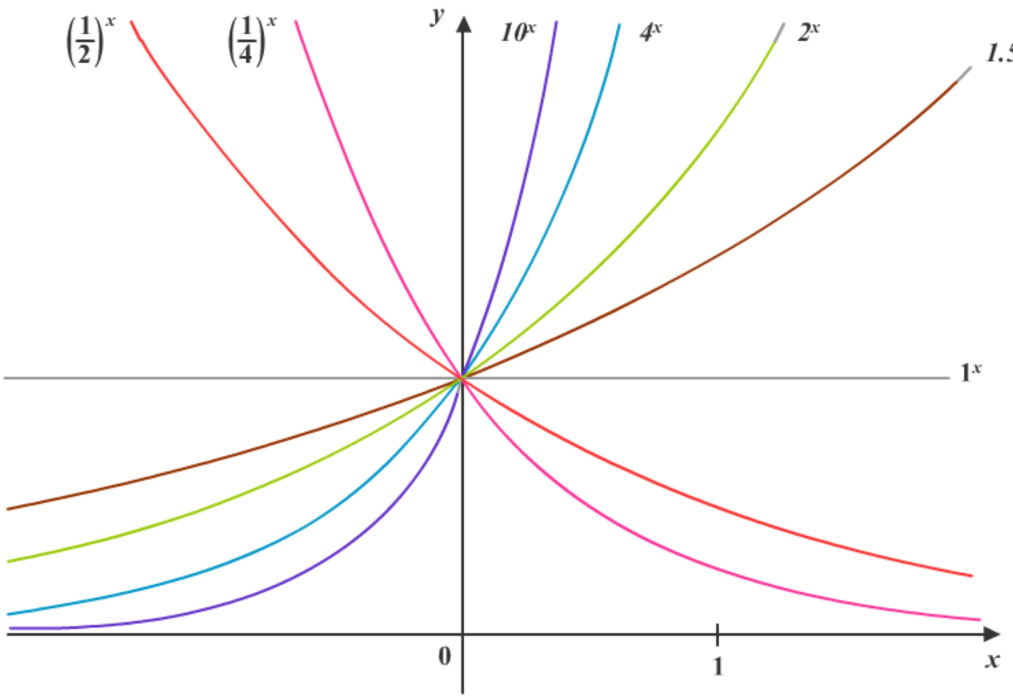
كل تابع كثير حدود من الدرجة الثانية من الشكل $y = f(x) = a(x-h)^2 + k$ حيث $a,h,k \in \mathbb{R}, a \neq 0$ ثوابت حقيقية يعبر عن قطع مكافئ وذروته هي النقطة (h,k) ومحور القطع هو المستقيم $x = h$ وتقعرّه نحو الأعلى إذا كانت $a > 0$ ونحو الأسفل إذا كانت $a < 0$.



الشكل رقم 4 بيانات التوابع كثيرات الحدود الأساسية

2.3. التوابع الأسية

$y = f(x) = a^x$ $a \neq 0, a > 0$ ثابت حقيقي ومنطقة التعريف $x \in \mathbb{R}$ ومن اهم التوابع الأسية التابع $y = f(x) = e^x$ حيث $e = 2.71828...$ العدد النيبري أو العدد الطبيعي.



الشكل رقم 5 التوابع الأسية

3.3. التوابع اللوغاريتمية

$y = f(x) = \log_a x$ و ($a \neq 0, a >$ يدعى أساس اللوغاريتم ومنطقة التعريف $x \in \mathbb{R}_+^*$. يدعى التابع اللوغاريتم الطبيعي $y = f(x) = \log_e x = \ln x$ حيث الأساس $a = e = 2.71828...$

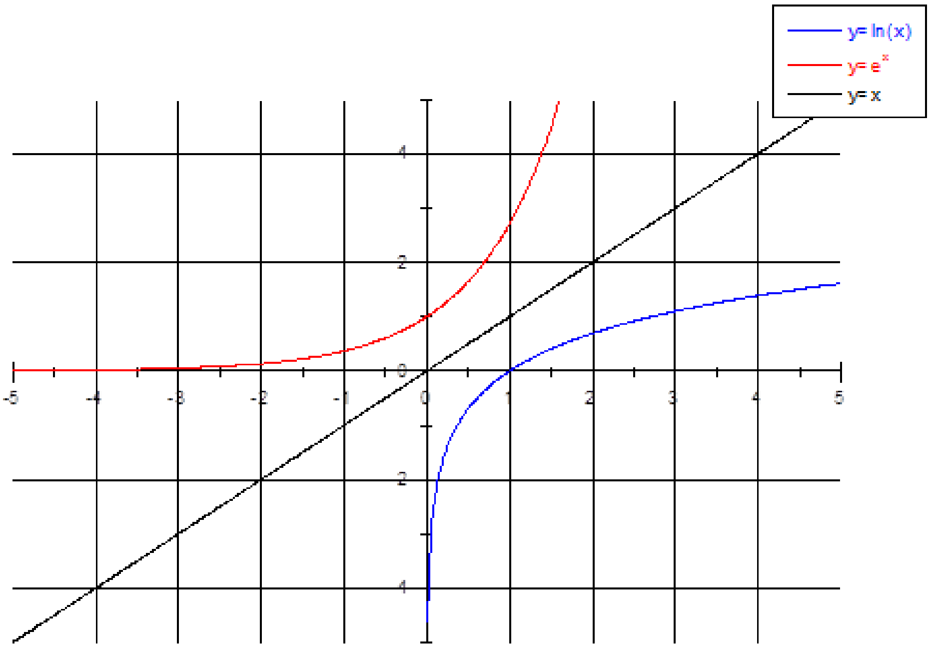
$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$$

خصائص اللّوغاريتم:

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a a^r = r$
4. $a^{\log_a x} = x$

العمليّات على اللّوغاريتم:

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a(x / y) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r \log_a x$
4. $\log_a(x) = \dfrac{\log(x)}{\ln(a)}$ يمكن تعميمها $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$



الشكل رقم 6 التابع اللوغاريتمي

4.3.التوابع المثلثية

$$\sin x, \cos x, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \csc = \frac{1}{\sin x}, \sec = \frac{1}{\cos x}, \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

يعبّر عن المتحول x بالراديان $\pi[rad] = 180[\deg]$. يأخذ التابعين $\sin x, \cos x$ قيماً ضمن المجال $[-1,1]$ عندما تتغير قيمة المتحول ضمن مجموعة الأعداد الحقيقية.

بعض خصائص التوابع المثلثية

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x, 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \ \sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, \ \cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}, \ \tan(-x) = -\tan x$$

5.3. التوابع المثلثية العكسية

$$y = \arcsin x = \sin^{-1} x, -\pi/2 \le y \le \pi/2$$
$$y = \arccos x = \cos^{-1} x, 0 \le y \le \pi$$
$$y = \arctan x = \tan^{-1} x, -\pi/2 < y < \pi/2$$
$$y = \csc^{-1} x = \sin^{-1}(1/x), -\pi/2 \le y \le \pi/2$$
$$y = \sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x), 0 \le y \le \pi$$
$$y = \cot^{-1} x = \pi/2 - \tan^{-1} x, 0 < y < \pi$$

6.3. التوابع الزائدية

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

من خصائص هذه التوابع

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$
$$\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$$
$$\sinh(-x) = -\sinh x$$
$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$
$$\cosh(-x) = \cosh x$$
$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$$
$$\tanh(-x) = -\tanh x$$

7.3. التوابع الزائدية العكسية

ليكن لدينا $x = \sinh y$ أي أنّ $y = \sinh^{-1} x$ التابع الزائدي العكسي للمتحول x. فيمايلي العلاقات الرياضية للتوابع الزائدية العكسية

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$
$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), x \geq 1$$
$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), |x| < 1$$

4. تعريف التوابع المحدودة

تعريف: لتكن X مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ وليكن لدينا التابع $f:X\to\mathbb{R}$ نقول إنّ:

1. f محدود من الأعلى إذا وفقط إذا وجد $M\in\mathbb{R}$ بحيث $\forall x\in X; f(x)\le M$
2. f محدود من الأدنى إذا وفقط إذا وجد $m\in\mathbb{R}$ بحيث $\forall x\in X; f(x)\ge m$
3. f محدود إذا وفقط إذا كان محدوداً من الأعلى ومن الأدنى أي إذا وجد $m\in\mathbb{R}, M\in\mathbb{R}$ بحيث $\forall x\in X; m\le f(x)\le M$ ونرمز بالمقدار

$$\sup_X f=\sup\{f(x):x\in X\}\in\overline{\mathbb{R}}$$

$$\inf_X f=\inf\{f(x):x\in X\}\in\overline{\mathbb{R}}$$

ويكون لدينا:

f محدود من الأعلى $\Leftrightarrow \sup_X f\in\mathbb{R}$

f محدود من الأدنى $\Leftrightarrow \inf_X f\in\mathbb{R}$

مثال:

التابع $f(x)=3+x$ تابع محدود على المجال $x\in X=[-1,1]$.

$$\sup_X f=4, \inf_X f=2$$

مثال:

التابع $f(x)=\frac{1}{x}$ غير محدود على المجال $X=]0,4[$ لا يوجد حد أعلى ويوجد حد أدنى $\inf_X f=\frac{1}{4}$.

مبرهنة

لتكن X مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$ وليكن التابعان $f:X\to\mathbb{R}$ و $g:X\to\mathbb{R}$ و $\lambda\in\mathbb{R}_+$.

- إذا كان f محدوداً من الأعلى فإن $-f$ محدود من الأدنى ويكون: $\inf_X(-f)=-\sup_X f$
- إذا كان f و g محدودين من الأعلى فإن $f+g$ و λf محدودان من الأعلى ويكون:

$$\sup_X(f+g)\le\sup_X f+\sup_X g \quad \text{و} \quad \sup_X(\lambda f)=\lambda\sup_X f$$

- إذا كان f و g محدودين من الأعلى وموجبين فإن $f\cdot g$ محدود من الأعلى ويكون:

$$\sup_X(f\cdot g)\le\sup_X f\cdot\sup_X g$$

مثال:

يبين التابعان $f:x\to x$ و $g:x\to 1-x$ المعرفان على $X=[0,1]$ أنه عموماً ليس هناك مساواة في أي من: $\sup_X(f+g)\le\sup_X f+\sup_X g$ أو $\sup_X(f\cdot g)\le\sup_X f\cdot\sup_X g$.

5. تعريف التابع المتزايد والمتناقص والمطّرد

ليكن لدينا X مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ وليكن التابع $f:X\to\mathbb{R}$ نقول إنّ

1. التابع f متزايد إذا وفقط إذا كان $\forall x_1,x_2\in X, x_1\le x_2\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$
2. التابع f متناقص إذا وفقط إذا كان $\forall x_1,x_2\in X, x_1\le x_2\Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$
3. التابع f متزايد تماماً إذا وفقط إذا كان $\forall x_1,x_2\in X, x_1< x_2\Rightarrow f(x_1)< f(x_2)$
4. التابع f متناقص تماماً إذا وفقط إذا كان $\forall x_1,x_2\in X, x_1< x_2\Rightarrow f(x_1)> f(x_2)$
5. التابع f مطّرد إذا كان متزايداً أو متناقصاً.

نلاحظ أنّه إذا كان $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعاً متزايداً فإنّ $(-f)$ متناقص وإذا كان $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعين متزايدين وكانت $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ فإنّ $f+g$ و λf متزايدان. وكذلك فإنّ ناتج تركيب تابعين متزايدين أو متناقصين تابع متزايد وناتج تركيب تابع متزايد مع آخر متناقص تابع متناقص.

6. تعريف التابع الفردي والزوجي

- نقول عن مجموعة جزئية X من $\mathbb{R}$ أنها متناظرة بالنسبة إلى الصفر 0 إذا وفقط إذا كان:
  $\forall x\in X, -x\in X$
- لتكن X من $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى 0. نقول إن التابع $f:X\to\mathbb{R}$ فردي إذا وفقط إذا كان $\forall x\in X, f(-x)=-f(x)$ ونقول إنه زوجي إذا وفقط إذا كان $\forall x\in X, f(-x)=f(x)$

مثال:

ليكن لدينا التابع $f:X\to\mathbb{R}$ نعرّف منه التابعين f_p, f_i كما يلي:

$$\begin{cases} f_p(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x)) \\ f_i(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x)) \end{cases}$$

فيكون f_p تابعاً زوجياً و f_i تابعاً فردياً و $f=f_p+f_i$

7. تعريف التابع الدوري

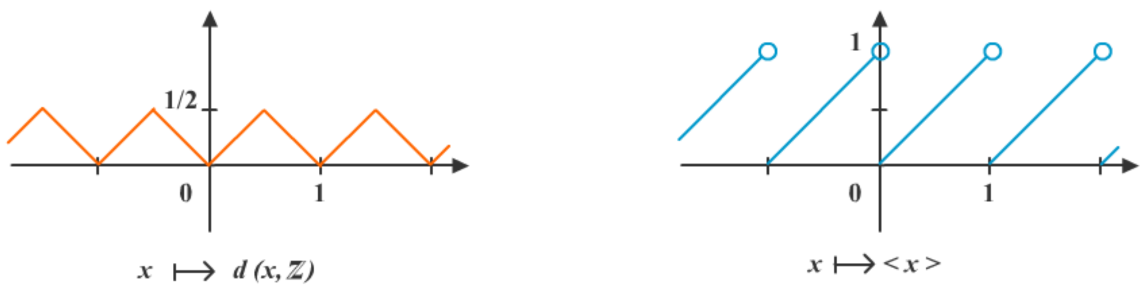
لتكن X مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ نقول إنّ التابع $f:X\to\mathbb{R}$ هو تابع T دوري حيث $T\in R_+^*$ إذا وفقط إذا $\forall x\in X,(x+T\in X)\wedge(f(x+T)=f(x))$ ونقول إنّ T هو دور التابع f.

ونقول إنّ التابع $f:X\to\mathbb{R}$ هو تابع دوري إذا وجدت قيمة T بحيث يكون f تابعاً T دورياً.

مثال:

التابع الذي يربط كل عدد $x\in\mathbb{R}$ جزأه الكسري $\langle x\rangle=x-E(x)$ هو تابع 1 دوري. وكذلك التابع الذي يربط بكل عدد $x\in\mathbb{R}$ المسافة بين x ومجموعة الأعداد الصحيحة $d(x,\mathbb{Z})=\inf\{|x-n|,n\in\mathbb{Z}\}$ هو تابع 1 دوري ونجد أنّ:

$$d(x,\mathbb{Z})=\min\left(x-E(x),1+E(x)-x\right).$$



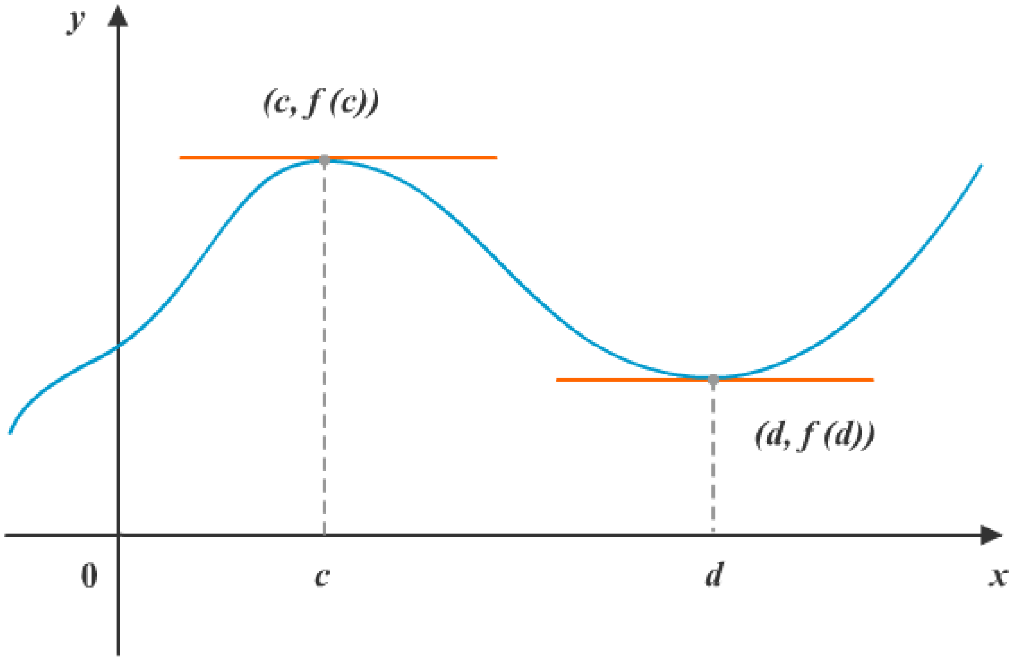
الشكل رقم 7 تابع دوري

8. النهايات المحلّية

تحتاج كثير من التطبيقات حساب القيم العظمى والدنيا التي تأخذها التوابع ومن هنا برزت أهمية النهايات المحلية العظمى والصغرى.

تعريف النهاية المحلية العظمى والصغرى

لنأخذ التابع f المعرّف على المجال المفتوح $]a,b[$ الذي فيه c حيث $f(x)<f(c)$ لكل قيم x المختلفة عن c و $\forall x\in]a,b[,x\neq c$ عندها تدعى $f(c)$ نهاية محلية عظمى للتابع f. إذا كان $\forall x\in]a,b[,x\neq c,f(x)>f(c)$ عندها تكون $f(c)$ نهاية محلية صغرى للتابع f.



الشكل رقم 8 نهاية محلية عظمى ونهاية محلية صغرى

يمكن للتابع أن يكون له أكثر من نهاية محلية ويمكن أن لايكون له نهاية محلية وذلك عندما يكون التابع متزايداً تماماً أو متناقصاً تماماً.

تعريف النهاية المطلقة العظمى والصغرى

إذا كانت c ضمن مجموعة التعريف للتابع f ولكل قيم x من مجموعة التعريف الكاملة $f(x) \le f(c)$ عندها تكون $f(c)$ نهاية مطلقة عظمى للتابع f. إذا كانت من أجل أي قيمة x من مجموعة التعريف $f(x) \ge f(c)$ عندها تكون $f(c)$ نهاية مطلقة صغرى للتابع f.

ملاحظة:

النهايات المطلقة ليست بالضرورة وحيدة. فالتابع الخطي الذي بيانه مستقيم أفقي تكون فيه كل نقطة نهاية مطلقة عظمى وصغرى.

تعريف نهايات التوابع

ليكن لدينا التابع $f(x)$ المعرّف على مجال بجوار x_0 وليس من الضرورة أن يكون معرّفاً على النقطة x_0. نقول إنّ العدد الحقيقي l هو نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من x_0 من اليمين بقيم اكبر من x_0 ومن اليسار بقيم أصغر من x_0 ونكتب $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ إذا كان من أجل أي عدد موجب صغير ε نستطيع أن نجد عدد موجب δ (يتعلق عادةً بالعدد ε) بحيث يكون $|f(x) - l| < \varepsilon$ كلما كان $0 < |x - x_0| < \delta$. نقول في

هذه الحالة إنّ $f(x)$ تسعى لـ l عندما تسعى x إلى x_0. $f(x) \to l \; as \; x \to x_0$. أي أنّ $f(x)$ يصبح قريباً من l باختيار x قريب بشكل كاف من x_0.

مثال:

ليكن $f(x)=\begin{cases} x^2 \; if \; x \neq 2 \\ 0 \; if \; x=2 \end{cases}$ عندها عندما تقترب x من 2 تقترب قيمة هذا التابع $f(x)$ من 4 أو $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$. نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4 \neq f(2)=0$ أي أنّ ليس من الضرورة أن تكون نهاية التابع $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ تساوي قيمة التابع عند x_0.

عندما تكون النهاية موجودة فهي وحيدة.

النهاية من اليمين والنهاية من اليسار

يكون من المفيد أحياناً دراسة نهاية تابع $f(x)$ عندما تسعى x إلى x_0 بقيم أكبر من x_0 (من اليمين) نقول إنّ x تسعى إلى x_0^+ $(x \to x_0^+)$ أو بقيم أصغر من x_0 (من اليسار) نقول إنّ x تسعى إلى x_0^- $(x \to x_0^-)$ إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=l_1, \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=l_2$

1. تدعى l_1 نهاية من اليمين للتابع $f(x)$ عندما تنتهي x إلى x_0 من اليمين x_0^+.
2. تدعى l_2 نهاية من اليسار للتابع $f(x)$ عندما تنتهي x إلى x_0 من اليسار x_0^-.

أي إنّ تعريف النهاية من اليمين أو من اليسار هو نفسه تعريف النهاية ولكن بتحديد قيم $x > x_0$ (من اليمين) أو $x < x_0$ (من اليسار).

لدينا $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=l$

نظريات النهايات

إذا كان لدينا $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ و $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$ يكون لدينا:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A+B$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A-B$
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)=A\cdot B$
4. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}+\right)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{A}{B} if \; B\neq 0$

تبقى نفس النتائج صحيحة للنهايات من اليمين ومن اليسار.

اللانهاية:

قد يتزايد أو يتناقص التابع $f(x)$ بدون حدود. نكتب في هذه الحالة $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ أو $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ تكون في هذه الحالة النهاية غير موجودة في مجموعة الأعداد الحقيقية. بشكل أدق نقول إنّ $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ إذا كان لكل عدد موجب M يمكن أن نجد عدد موجب δ (يعتمد على M) بحيث $f(x)>M$ عندما $0<|x-x_0|<\delta$.

ونقول إنّ $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ إذا كان من أجل أي عدد موجب M نستطيع أن نجد عدد موجب δ بحيث $f(x)<-M$ عندما $0<|x-x_0|<\delta$.

نجد بشكل مشابه δ عندما $x\to x_0^+$ أو $x\to x_0^-$.

نحتاج في الكثير من الأحيان إلى دراسة تصرّف التابع عندما تزداد قيم x أو تتناقص قيم x بدون حدود نقول عندها إنّ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$ أو $f(x)\to l$ عندما $x\to+\infty$ إذا كان من أجل أي عدد ε يمكن أن نجد عدد موجب N (يعتمد على ε) بحيث $|f(x)-l|<\varepsilon$ كلما كان $x>N$. نجد تعريف $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$ بشكل مشابه.

نهايات خاصة

1. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$; $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x}\right)=0$
2. $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x}=e$; $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$
3. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=1$; $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{\ln x}\right)=1$

9. استمرار التوابع

تعريف الاستمرار

ليكن $f(x)$ تابع معرّف بجوار x_0 وعند x_0 عندها يكون التابع مستمر عند x_0 إذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. هذا يعني أنّ هناك ثلاثة شروط يجب أن تتحقق من أجل أن يكون التابع $f(x)$ مستمراً عند x_0 وهي كما يلي:

1. $f(x_0)$ موجود أو $f(x)$ معرّف عند x_0.
2. النهاية موجودة $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$.
3. $l=f(x_0)$.

مثال:

إذا كان لدينا التابع $f(x)=\begin{cases} x^2 \, if \; x\neq 2 \\ 0 \, if \; x=2 \end{cases}$ نجد أنّ $\lim_{x\to 2} f(x)=4$ ولكن $f(2)=0$ والتابع غير مستمر (أو يوجد انقطاع) عند $x=2$.

مثال:

ليكن لدينا التابع $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=x^2$ عندها $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=4$ والتابع $f(x)$ مستمر عند 2.

ملاحظات:

1. عندما يكون التابع $f(x)$ غير مستمر نقول أنّ هناك انقطاع أو انقطاعات في التابع $f(x)$ عند النقاط التي لايكون فيها التابع مستمراً.
2. عند رسم بيان تابع مستمر لانحتاج لرفع القلم عن الورقة بينما عندما يكون هناك انقطاع نحتاج لرفع القلم عن الورقة بسبب وجود ثغرات.

1.9. تعريف الاستمرار من اليمين ومن اليسار

إذا كان لدينا التابع $f(x)$ معرّف من أجل قيم $x\geq x_0$ نقول في هذه الحالة إنّ التابع $f(x)$ مستمر من اليمين عند $x=x_0$ إذا تحقق $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$. وبشكل مشابه إذا كان لدينا التابع $f(x)$ معرّف من أجل قيم $x\leq x_0$ نقول في هذه الحالة إنّ التابع $f(x)$ مستمر من اليسار عند $x=x_0$ إذا تحقق $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$.

تعريف استمرار التابع على مجال

نقول إنّ التابع مستمر على مجال إذا كان مستمراً على كل نقاط المجال. ليكن لدينا التابع $f(x)$ المعرّف على كل نقاط المجال المغلق $[a,b]$ يكون هذا التابع مستمراً على المجال $[a,b]$ إذا وفقط إذا كان:

$$\forall x_0\in]a,b[; \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)\wedge \lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$$

نظريات الاستمرار

نظرية 1

إذا كان التابعان $f(x),g(x)$ مستمرين عند x_0 عندها تكون التوابع التالية مستمرة عند x_0: $f(x)+g(x), f(x)-g(x), f(x)\cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)} if \; g(x)\neq 0$. نحصل على نفس النتيجة عند تحقق الاستمرار على مجال.

نظرية 2

التوابع التالية مستمرة على كل المجالات المنتهية:

- كل كثيرات الحدود
- $\sin x, \cos x$
- $a^x, a>0$

نظرية 3

ليكن لدينا التابع $y=f(x)$ مستمراً عند النقطة x_0 التي تنتمي إلى مجموعة تعريف التابع $f(x)$. ولنفترض أنه لدينا التابع $z=g(y)$ المستمر عند y_0 حيث $y_0=f(x_0)$ (مجموعة تعريف التابع $g(y)$ هي مجموعة المستقر للتابع $f(x)$). عندها ندعو التابع $g[f(x)]$ الممثل بـ$z=g[f(x)]$ تابعاً مركباً ويكون هذا التابع مستمراً عند x_0 أي أنّ تركيب تابعين مستمرين هو تابع مستمر.

نظرية 4

إذا كان $f(x)$ مستمراً على مجال مغلق فهو محدود في هذا المجال.

نظرية 5

إذا كان $f(x)$ مستمراً عند x_0 وكان لدينا $f(x_0)>0$ (أو $f(x_0)<0$) فيوجد عندئذ مجال حول x_0 يكون فيه $f(x_0)>0$ (أو $f(x_0)<0$).

نظرية 6

إذا كان التابع $f(x)$ مستمر في مجال ومتزايداً تماماً أو متناقصاً تماماً في هذا المجال يكون التابع العكسي $f^{-1}(x)$ مستمراً وإمّا متزايداً تماماً أو متناقصاً تماماً على نفس المجال.

نظرية 7

إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً في المجال $[a,b]$ وإذا كان $f(a)=A$ و $f(b)=B$ عندئذ يوجد مقابل أي عدد C بين A و B عدد $c\in[a,b]$ بحيث $f(c)=C$. تدعى هذه النظرية أحياناً بنظرية القيمة المتوسطة.

نظرية 8

إذا كان $f(x)$ مستمراً في المجال $[a,b]$ وإذا كان $f(a)$ و $f(b)$ بإشارتين متعاكستين عندئذ يوجد على الأقل عدد $c\in]a,b[$ بحيث $f(c)=0$. هذه النظرية متعلقة بالنظرية 7.

نظرية 9

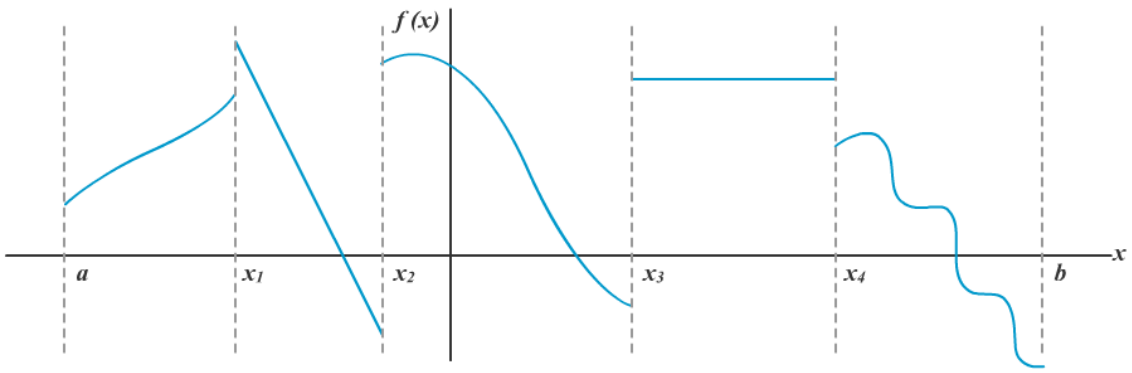
إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً على مجال مغلق $[a,b]$ عندها يكون للتابع $f(x)$ قيمة عظمى M $\left(M=\max\left(f(x),x\in[a,b]\right)\right)$ عند قيمة على الأقل $x\in[a,b]$ ويكون للتابع $f(x)$ قيمة صغرى m $\left(m=\min\left(f(x),x\in[a,b]\right)\right)$ عند قيمة على الأقل $x\in[a,b]$. يأخذ كذلك التابع $f(x)$ كل القيم بين m و M من أجل قيمة x أو أكثر.

نظرية 10

إذا كان التابع $f(x)$ مستمراً على المجال المغلق $[a,b]$ وكان $m=\inf\left(f(x),x\in[a,b]\right)$ و $M=\sup(f(x),x\in[a,b])$ يوجد عندئذ قيمة واحدة على الأقل $x\in[a,b]$ بحيث $f(x)=M$ أو $f(x)=m$. هذه النظرية متعلقة بالنظرية 10.

2.9. الاستمرارية قطعيّاً (قطعة بقطعة)

يدعى التابع مستمر قطعيّاً في مجال $x\in[a,b]$ إذا كان يمكن تقسيم المجال إلى عدد منته من المجالات يكون في كل منها التابع مستمراص وله نهاية يمنى ونهاية يسرى. يكون لهذا التابع عدد منته من الانقطاعات.



الشكل رقم 9 التابع المستمر على قطع

مذاكرة التوابع النهايات والاستمرار

العلامة العظمى: 100 علامة النجاح: 50 المدة: ساعة ونصف

لكل سؤال خمس علامات

اختر الإجابة الصحيحة للأسئلة التالية:

1. منطقة تعريف التابع $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ هي

a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R}\setminus\{-2,+2\}$

c) $]-\infty,-2]\cup[2,+\infty[$

d) $[2,+\infty[$

مساعدة: راجع فقرة تعريف التوابع.

2. منطقة تعريف التابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ هي

a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

c) $]0,+\infty[$

d) $\mathbb{R}^+$

مساعدة: راجع فقرة تعريف التوابع.

3. منطقة تعريف التابع $f(x)=\log(x-5)$ هي

a) $\mathbb{R}\setminus\{5\}$

b) $\mathbb{R}\setminus\{-5,5\}$

c) $[5,+\infty]$

d) $]5,\infty[$

مساعدة: راجع فقرة تعريف التوابع.

4. منطقة تعريف التابع $f(x)=\sin x$ هي

a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R}\setminus\{\pi/2\}$

c) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

d) $\mathbb{R}\setminus\{\pi\}$

مساعدة: راجع فقرة تعريف التوابع.

5. التابع $f(x)=\sin x$ هو تابع

a) فردي

b) زوجي

مساعدة: راجع فقرة تعريف التابع الفردي والزوجي وفقرة تعريف التابع الدوري.

6. التابع $f(x)=\cos x$ هو تابع

a) فردي

b) زوجي

مساعدة: راجع فقرة تعريف التابع الفردي والزوجي وفقرة تعريف التابع الدوري.

7. التابع $f(x)=x$ هو تابع

a) دوري

b) زوجي

c) فردي

مساعدة: راجع فقرة تعريف التابع الفردي والزوجي وفقرة تعريف التابع الدوري.

8. نعرّف التابع $f(x)=(x-2)(8-x), 2\le x\le 8$ ماهي منطقة تعريفه؟

a) $2\le x\le 8$

b) $\mathbb{R}\setminus\{5\}$

c) $\mathbb{R}\setminus\{8\}$

d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة تعريف التوابع.

9. نعرّف التابع $f(x)=(x-2)(8-x), 2\le x\le 8$ ماهي قيمة $f(-1)$؟

a) غير معرّفة

b) -27

c) 27

d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة تعريف التوابع.

10. لدينا التابع $f(x)=\begin{cases} x^2, x\neq 2 \\ 0, x=2 \end{cases}$ ماهي قيمة نهاية التابع $\lim_{x\to 2} f(x)$ ؟

a) 4
b) 0
c) غير موجودة
d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة نهايات التوابع.

11. لدينا التابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3}, x\neq 3 \\ 0, x=3 \end{cases}$ ماهي قيمة النهاية $\lim_{x\to 3} f(x)$ ؟

a) 0
b) 1
c) -1
d) غير موجودة

مساعدة: راجع فقرة نهايات التوابع.

12. ماهي قيمة النهاية $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$ ؟ مساعدة: ضرب وقسمة التابع بالحد $\left(\sqrt{4+x}+2\right)$

a) $\dfrac{1}{4}$
b) ∞
c) $\dfrac{1}{6}$
d) $\dfrac{1}{8}$

مساعدة: راجع فقرة نهايات التوابع.

13. التابع $f(x)=\dfrac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}$ مستمر على المنطقة؟

a) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$
b) $\mathbb{R}$
c) $\mathbb{R}^*$
d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة استمرار التوابع.

14. ماهي المنطقة التي يكون عندها التابع $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$ مستمراً عندها؟

a) $\mathbb{R}$
b) $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
c) $\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$
d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة استمرار التوابع.

15. ماهي المنطقة التي يكون عندها التابع $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{3+\sin x}$ مستمراً عندها؟

a) $\mathbb{R}$
b) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
c) $\mathbb{R}\setminus\{\pi\}$
d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة استمرار التوابع.

16. ماهي المنطقة التي يكون عندها التابع $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{10+x}}$ مستمراً عندها؟

a) $]-10,+\infty[$
b) $[-10,+\infty[$
c) $[-10,10]$
d) $]-\infty,-10[$

مساعدة: راجع فقرة استمرار التوابع.

17. ماهي المنطقة التي يكون عندها التابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-|x|}{x}, x<0\\ 2, x=0\end{cases}$ مستمراً عندها؟

a) $\mathbb{R}^-$
b) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
c) $\mathbb{R}^+$
d) جواب آخر

مساعدة: راجع فقرة استمرار التوابع.

18. ليكن لدينا التابع $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}, x\neq 2$ ماهي قيمة $\left\{f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\}^2$؟

(a $\dfrac{1}{5}$

(b $\dfrac{1}{25}$

(c $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

(d $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

مساعدة: راجع فقرة تعريف التوابع.

19. ليكن لدينا التابع $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}, x\neq 2$ ماهي قيمة $f(x)=(2x-3)$؟

(a $\dfrac{6x-8}{2x-5}$

(b $\dfrac{6x-9}{2x-3}$

(c $\dfrac{6x+8}{2x-5}$

(d $\dfrac{6x-8}{2x+6}$

مساعدة: راجع فقرة تعريف التوابع.

20. ماهي النهاية $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$؟

(a 4

(b 0

(c ∞

(d غير موجودة

مساعدة: راجع فقرة نهايات التوابع.

الإجابات الصحيحة

الإجابة الصحيحة	السؤال
الخيار الثالث	1
الخيار الثالث	2
الخيار الرابع	3
الخيار الأول	4
الخيار الأول	5
الخيار الثاني	6
الخيار الثالث	7
الخيار الأول	8
الخيار الأول	9
الخيار الأول	10
الخيار الرابع	11
الخيار الأول	12
الخيار الأول	13
الخيار الثالث	14
الخيار الأول	15
الخيار الأول	16
الخيار الأول	17
الخيار الأول	18
الخيار الأول	19
الخيار الأول	20