ت. الخوارزمية المبسطة (Simplex algorithm)

$$\max\ (\min)\quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\textit{subject to}\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\quad i=1,\dots,m \qquad m\le n,\ \textit{rank}\,(A)=m\ ,$$

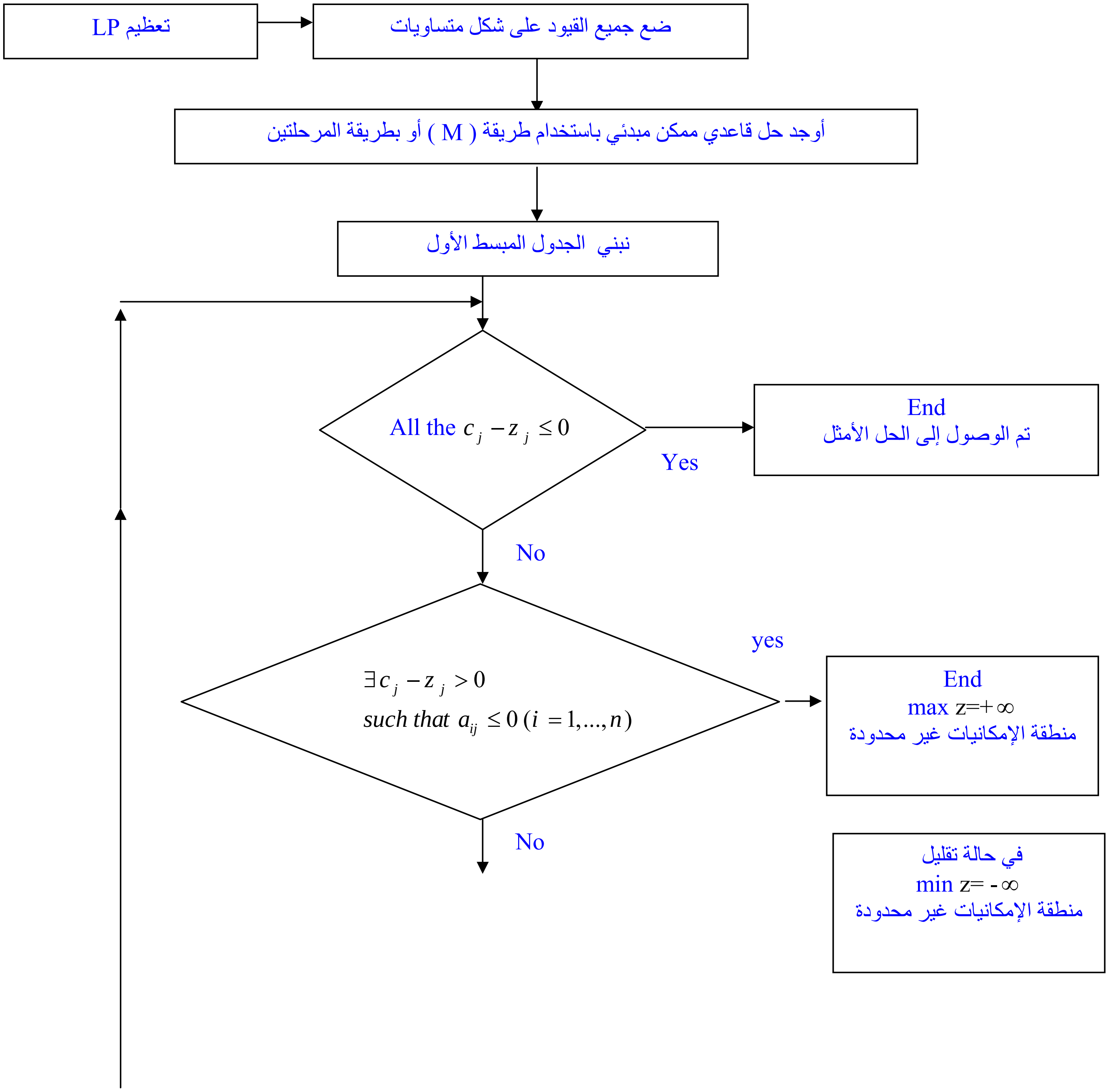
$$x_j \ge 0,\quad j=1,\dots,n$$

ترمز B إلى القاعدة و ترمز x_B إلى المتحولات القاعدية و $z_0=\sum_{i\in B} c_i b_i$, $z_j=\sum_{i\in B} c_i a_{ij}\ (j=1,..,n)$

الجدول المبسط أو جدول السمبلكس

Max or min			c_1	c_2	.	.	c_r	.	.	c_m	c_{m+1}	.	.	c_k	.	.	c_n
x_B	c_B	b	x_1	x_2	.	.	x_r	.	.	x_m	x_{m+1}	.	.	x_k	.	.	x_n
x_1	c_1	b_1	1	0	.	.	0	.	.	0	$a_{1\,m+1}$	.	.	$a_{1\,k}$	.	.	$a_{1\,n}$
x_2	c_2	b_2	0	1	.	.	0	.	.	0	$a_{2\,m+1}$	.	.	$a_{2\,k}$	.	.	$a_{2\,n}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
x_r	c_r	b_r	0	0	.	.	1	.	.	0	$a_{r\,m+1}$	.	.	$a_{r\,k}$	.	.	$a_{r\,n}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
x_m	c_m	b_m	0	0	.	.	0	.	.	1	$a_{m\,m+1}$	.	.	$a_{m\,k}$	.	.	$a_{m\,n}$
max		$-z_0$	c_1-z_1	c_2-z_2	.	.	c_r-z_r	.	.	c_m-z_m	$c_{m+1}-z_{m+1}$	.	.	c_k-z_k	.	.	c_n-z_n
min		z_0	z_1-c_1	z_2-c_2	.	.	z_r-c_r	.	.	z_m-c_m	$z_{m+1}-c_{m+1}$	.	.	z_k-c_k	.	.	z_n-c_n

المخطط التدفقي للخوارزمية المبسطة



تغير القاعدة

I. تحديد المتحول الداخل إلى القاعدة والمتحول المغادر للقاعدة

*) x_k يدخل القاعدة إذا كان

$$c_k - z_k = \max_j \{c_j - z_j / c_j - z_j > 0\}$$

*) x_r يغادر القاعدة إذا كان

$$\frac{b_r}{a_{rk}} = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} / a_{ik} > 0 \right\} (**)$$

II. بناء الجدول المبسط الجديد

*) سطر التدوير (i=k) :

$$b_k^{'} = \frac{b_k}{a_{rk}}$$

$$a_{kj}^{'} = \frac{a_{rj}}{a_{rk}} \quad (j = 1,\dots,n)$$

*) وإلا :(i≠k) :

$$b_i^{'} = b_i - b_k^{'} a_{ik} \quad (i = 1,\dots,n)$$

$$a_{ij}^{'} = a_{ij} - a_{kj}^{'} a_{ik} \quad (i = 1,\dots,n)$$

و

$$-z_0^{'} = -z_0 - b_k^{'}(c_k - z_k)$$

$$c_j - z_j^{'} = (c_j - z_j) - a_{kj}^{'}(c_k - z_k)$$

** a_{rk} يدعى عنصر التدوير

تقليل LP

نفس الإجراءات، لكن بعد تبديل

$-z_0$ و $c_j - z_j$

بـ

z_0 و $z_j - c_j$

مسألة 1. أوجد حل البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 3x_2 \\ st \quad & x_1 + x_2 \le 14 \\ & -2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ & 2x_1 - x_2 \le 12 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 3x_2 + 0t_1 + 0t_2 + 0t_3 \\ st \quad & x_1 + x_2 + t_1 = 14 \\ & -2x_1 + 3x_2 + t_2 = 12 \\ & 2x_1 - x_2 + t_3 = 12 \\ & x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 \ge 0 \end{aligned}$$

الحل القاعدي الممكن للانطلاق هو $x_1 = 0, x_2 = 0, t_1 = 14, t_2 = 12, t_3 = 12$ حيث جميع المركبات غير سالبة وتحقق قيود منطقة الإمكانيات

max			1	3	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
t_1	0	14	1	1	1	0	0
t_2	0	12	-2	**3**	0	1	0
t_3	0	12	2	-1	0	0	1
		0	1	3	0	0	0

max			1	3	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
t_1	0	10	**5/3**	0	1	-1/3	0
x_2	3	4	-2/3	1	0	1/3	0
t_3	0	16	4/3	0	0	1/3	1
		-12	3	0	0	-1	0

max			1	3	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
x_1	1	6	1	0	3/5	-1/5	0
x_2	3	8	0	1	2/5	1/5	0
t_3	0	8	0	0	-4/5	3/5	1
		-30	0	0	-9/5	-2/5	0

الحل المثالي للبرنامج الخطي يعطى بـ :

$$x_1^* = 6, x_2^* = 8, t_1^* = 6, t_2^* = 0, t_3^* = 8$$
$$z^* = 30$$

مسألة 2. أوجد حل البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 + x_2 \\ st \quad & 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 + x_2 + 0t_1 + 0t_2 + 0t_3 \\ st \quad & -2x_1 + x_2 + t_1 = 2 \\ & x_1 - x_2 + t_2 = 2 \\ & x_1 + x_2 + t_3 = 5 \\ & x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 \geq 0 \end{aligned}$$

الحل القاعدي الممكن للانطلاق هو $x_1 = 0, x_2 = 0, t_1 = 2, t_2 = 2, t_3 = 5$ جميع المركبات غير سالبة وتحقق قيود منطقة الإمكانيات

min			-1	1	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
t_1	0	2	-2	1	1	0	0
t_2	0	2	**1**	-1	0	1	0
t_3	0	5	1	1	0	0	1
		0	1	-1	0	0	0

min			-1	1	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
t_1	0	6	0	-1	1	2	0
x_1	-1	2	1	-1	0	1	0
t_3	0	3	0	2	0	-1	1
		-2	0	0	0	-1	0

يعطي هذا الجدول الحل المثالي الأول :

$$x_1^* = 2, x_2^* = 0, t_1^* = 6, t_2^* = 0, t_3^* = 3$$
$$z^* = -2$$

و بما أن x_2 خارج القاعدة نحاول أن ندخلها في القاعدة لكي نحصل على حل مثالي أخر

min			-1	1	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
t_1	0	6	0	-1	1	2	0
x_1	-1	2	1	-1	0	1	0
t_3	0	3	0	**2**	0	-1	1
		-2	0	0	0	-1	0

min			-1	1	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
t_1	0	15/2	0	0	1	3/2	1/2
x_1	-1	7/2	1	0	0	1/2	1/2
x_2	1	3/2	0	1	0	-1/2	1/2
		-2	0	0	0	-1	0

يعطي هذا الجدول الحل المثالي الثاني :

$$x_1^* = 7/2, x_2^* = 3/2, t_1^* = 15/2, t_2^* = 0, t_3^* = 0$$
$$z^* = -2$$

إذاً أصبح لدينا حلين مثالين و هما:

$$x^1 = (x_1^*, x_2^*) = (2, 0)$$
$$x^2 = (x_1^*, x_2^*) = (7/2, 3/2)$$

إذاً الحلول المثالية للبرنامج الخطي هو التركيب الخطي التالي:

$$x^* = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \quad ,(0 \le \lambda \le 1)$$

مسألة 3. أوجد حل البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 7x_2 \\ st \quad & x_1 + x_2 \ge 6 \\ & x_1 \ge 4 \\ & x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 7x_2 + 0t_1 + 0t_2 + 0t_3 \\ st \quad & x_1 + x_2 - t_1 = 6 \\ & x_1 - t_2 = 4 \\ & x_2 + t_3 = 3 \\ & x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 \ge 0 \end{aligned}$$

الحل القاعدي $x_1 = 0, x_2 = 0, t_1 = -6, t_2 = -4, t_3 = 3$ ليست جميع مركباته غير سالبة ولا تحقق قيود منطقة الإمكانيات لذلك لا يمكن البدء بهذا الحل الابتدائي في الخوارزمية المبسطة، كون الطريقة المبسطة تستوجب المعرفة المسبقة لحل قاعدي ممكن من اجل البدء به، ولحل هذه المشكلة فإنه يوجد العديد من الطرائق لكن أهمها الطريقتين التاليتين: طريقة M و طريقة المرحلتين.

المخطط التدفقي لطريقة M و لطريقة المرحلتين

تعظيم PL

ضع جميع قيود المسألة على شكل متساويات

اجعل جميع عناصر الطرف الأيمن موجبة

أدخل المتحولات الصنعية في القيود

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + v_i = b_i \\ x_j , v_i \geq 0 \quad \begin{bmatrix} j = 1,\dots,n \\ i = 1,\dots,m \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1)$$

طريقة-M

حل البرنامج الخطي التالي:

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} M v_i$$

تحت القيود(1)

($M > 0$,عدد كبير اختياري)

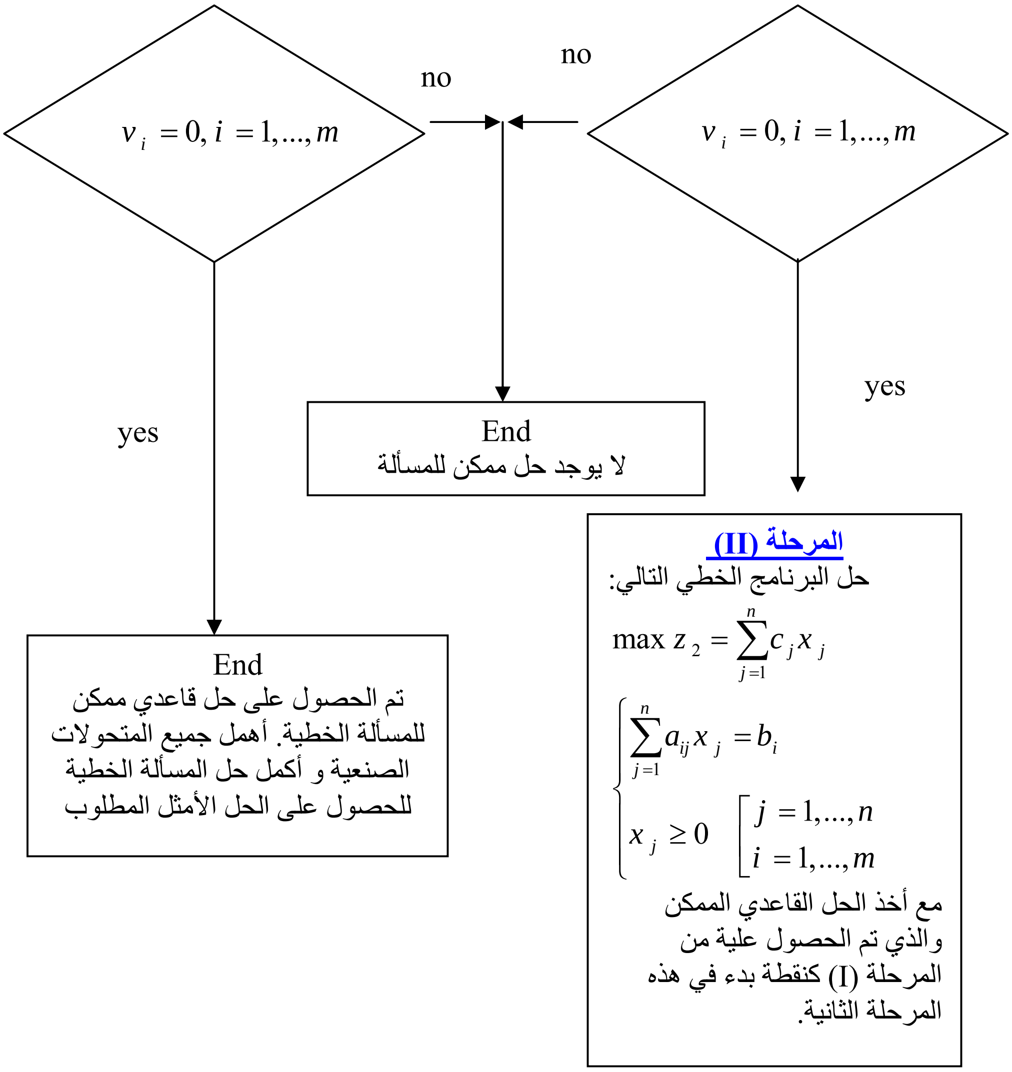
طريقة المرحلتين

المرحلة (I)

حل البرنامج الخطي التالي:

$$\max z_1 = -\sum_{i=1}^{m} v_i$$

تحت القيود(1)


$v_i = 0, i = 1,\ldots,m$
no
no
$v_i = 0, i = 1,\ldots,m$
yes
End
لا يوجد حل ممكن للمسألة
yes
End
تم الحصول على حل قاعدي ممكن للمسألة الخطية. أهمل جميع المتحولات الصنعية و أكمل حل المسألة الخطية للحصول على الحل الأمثل المطلوب
المرحلة (II)
حل البرنامج الخطي التالي:
$\max z_2 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \\ x_j \geq 0 \quad \left[\begin{array}{l} j = 1,\ldots,n \\ i = 1,\ldots,m \end{array} \right. \end{cases}$
مع أخذ الحل القاعدي الممكن والذي تم الحصول علية من المرحلة (I) كنقطة بدء في هذه المرحلة الثانية.

تقليل PL

نفس الإجراء السابق في طريقة M لكن المسألة أصبحت مسألة تقليل

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} M v_i$$

تحت القيود(1)

(عدد كبير اختياري , $M > 0$)

نفس الإجراء السابق كما في طريقة المرحلتين لكن المسألة أصبحت مسألة تقليل

المرحلة (II)

حل البرنامج الخطي:

$$\min z_2 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \\ x_j \geq 0 \quad \begin{bmatrix} j = 1,\dots,n \\ i = 1,\dots,m \end{bmatrix} \end{cases}$$

مع أخذ الحل القاعدي الممكن والذي تم الحصول علية من المرحلة (I) كنقطة بدء في هذه المرحلة الثانية.

ملاحظات

1. ليس من الضروري على الدوام إدخال m متحول صنعي على القيود (1) ، هو يكفي إدخال عدد محدود من المتحولات الصنعية بحيث نحصل على حل قاعدي ممكن للبدء به.
2. في حال خروج أي متحول صنعي من القاعدة عندئذ يمكن إهماله نهائياً من الإجراءات التي تلي
3. في طريقة المرحلتين، الجدول المبسط الأول في المرحلة الثانية (II) يتطابق بشكل كامل مع الجدول المبسط الأخير في المرحلة الأولى (I) باستثناء السطر $c_j - z_j$ الذي يجب تعديله بإعادة إدخال c_j في حالة تعظيم. و باستثناء السطر $z_j - c_j$ الذي يجب تعديله بإعادة إدخال c_j في حالة تقليل.

لنحل المسألة 3 بهذه الخوارزمية:

أولاً: بطريقة M

$$
\begin{aligned}
&\max z \ = 5x_1 + 7x_2 + 0t_1 + 0t_2 + 0t_3 - Mv_1 - Mv_2 \\
&st \qquad x_1 + x_2 - t_1 + v_1 = 6 \\
&\qquad\quad\ x_1 - t_2 + v_2 = 4 \\
&\qquad\quad\ x_2 + t_3 = 3 \\
&\qquad\quad\ x_1, x_2, t_1, t_2, t_3, v_1, v_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

فالحل القاعدي الأول $(x_1, x_2, t_1, t_2, t_3, v_1, v_2)^t = (0,0,0,0,3,6,4)^t$ حل قاعدي ممكن للبدء

max			5	7	0	0	0	$-M$	$-M$
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	v_1	v_2
v_1	$-M$	6	1	1	-1	0	0	1	0
v_2	$-M$	4	1	0	0	-1	0	0	1
t_3	0	3	0	1	0	0	1	0	0
		$0+$ $10M$	$5+$ $2M$	$7+$ M	$0+$ $-M$	$0+$ $-M$	0+ 0	0+ 0	0+ 0

max			5	7	0	0	0	$-M$	/
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	v_1	/
v_1	$-M$	2	0	1	-1	1	0	1	/
x_1	5	4	1	0	0	-1	0	0	/
t_3	0	3	0	1	0	0	1	0	/
		$-20+$ $2M$	$0+$ 0	$7+$ M	$0+$ $-M$	$5+$ M	0+ 0	0+ 0	/ /

max			5	7	0	0	0	/	/
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	/	/
x_2	7	2	0	1	-1	1	0	/	/
x_1	5	4	1	0	0	-1	0	/	/
t_3	0	1	0	0	1	-1	1	/	/
		-34	0	0	7	-2	0	/	/

max			5	7	0	0	0	/	/
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	/	/
x_2	7	3	0	1	0	0	1	/	/
x_1	5	4	1	0	0	-1	0	/	/
t_1	0	1	0	0	1	-1	1	/	/
		-41	0	0	0	5	-7	/	/

الحل الأمثل هو مالا نهاية $z = +\infty$ أي المسألة غير محدودة

ثانياً: بطريقة المرحلتين

المرحلة الأولى:

max			0	0	0	0	0	-1	-1
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	v_1	v_2
v_1	-1	6	1	1	-1	0	0	1	0
← v_2	-1	4	**1**	0	0	-1	0	0	1
t_3	0	3	0	1	0	0	1	0	0
		10	2 ↑	1	-1	-1	0	0	0

max			0	0	0	0	0	-1	/
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	v_1	/
← v_1	-1	2	0	**1**	-1	1	0	1	/
x_1	0	4	1	0	0	-1	0	0	/
t_3	0	3	0	1	0	0	1	0	/
		2	0	1 ↑	-1	1	0	0	/

max			0	0	0	0	0	/	/
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	/	/
x_2	0	2	0	1	-1	1	0	/	/
x_1	0	4	1	0	0	-1	0	/	/
t_3	0	1	0	0	1	-1	1	/	/
		0	0	0	0	0	0	/	/

الحل في المرحلة الأولى هو: $(x_1, x_2, t_1, t_2, t_3)^t = (4, 2, 0, 0, 1)^t$ و هو حل قاعدي ممكن للبدء به

المرحلة الثانية: مع اعتبار أن:

$$z_0 = \sum_{i \in B} c_i b_i$$
$$z_j = \sum_{i \in B} c_i a_{ij} \quad (j = 1,\dots,n)$$

max			5	7	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
x_2	7	2	0	1	-1	1	0
x_1	5	4	1	0	0	-1	0
t_3	0	1	0	0	**1**	-1	1
		-34	0	0	7	-2	0

max			5	7	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
x_2	7	3	0	1	0	0	1
x_1	5	4	1	0	0	-1	0
t_3	0	1	0	0	1	-1	1
		-41	0	0	0	5	-7

الحل الأمثل هو مالا نهاية $z = +\infty$ أي المسألة غير محدودة

الخوارزمية المبسطة (أمثلة)

مثال 1. أوجد الحل المثالي للبرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 3x_2 \\ st \quad & x_1 + x_2 \le 14 \\ & -2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ & 2x_1 - x_2 \le 12 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + 3x_2 + 0t_1 + 0t_2 + 0t_3 \\ st \quad & x_1 + x_2 + t_1 = 14 \\ & -2x_1 + 3x_2 + t_2 = 12 \\ & 2x_1 - x_2 + t_3 = 12 \\ & x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 \ge 0 \end{aligned}$$

الحل القاعدي الممكن للبدء هو

$x_1 = 0, x_2 = 0, t_1 = 14, t_2 = 12, t_3 = 12$

جدول السمبلكس

max			1	3	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
t_1	0	14	1	1	1	0	0
t_2 ←	0	12	-2	**3**	0	1	0
t_3	0	12	2	-1	0	0	1
		0	1	3 ↑	0	0	0

max			1	3	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
t_1 ←	0	10	**5/2**	0	1	-1/3	0
x_2	3	4	-2/3	1	0	1/3	0
t_3	0	16	4/3	0	0	1/3	1
		-12	3 ↑	0	0	-1	0

max			1	3	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
x_1	1	6	1	0	3/5	-1/5	0
x_2	3	8	0	1	2/5	1/5	0
t_3	0	8	0	0	-4/5	3/5	1
		-30	0	0	-9/5	-2/5	0

يعطى الحل المثالي بـ:

$$x_1^* = 6, x_2^* = 8, t_1^* = 6, t_2^* = 0, t_3^* = 8$$
$$z^* = 30$$

مثال 2. حل البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 + x_2 \\ st \quad & 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 + x_2 + 0t_1 + 0t_2 + 0t_3 \\ st \quad & -2x_1 + x_2 + t_1 = 2 \\ & x_1 - x_2 + t_2 = 2 \\ & x_1 + x_2 + t_3 = 5 \\ & x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 \geq 0 \end{aligned}$$

يعطى الحل الابتدائي الممكن بـ:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, t_1 = 2, t_2 = 2, t_3 = 5$$

min			-1	1	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
t_1	0	2	-2	1	1	0	0
t_2	0	2	**1**	-1	0	1	0
t_3	0	5	1	1	0	0	1
		0	1	-1	0	0	0

min			-1	1	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
t_1	0	6	0	-1	1	2	0
x_1	-1	2	1	-1	0	1	0
t_3	0	3	0	2	0	-1	1
		-2	0	0	0	-1	0

يعطى الحل المثالي الأول للمسألة بـ :

$$x_1^* = 2, x_2^* = 0, t_1^* = 6, t_2^* = 0, t_3^* = 3$$
$$z^* = -2$$

و بما أن x_2 خارج القاعدة، سوف يتم محاولة إدخالها ضمن القاعدة

min			-1	1	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
t_1	0	6	0	-1	1	2	0
x_1	-1	2	1	-1	0	1	0
t_3	0	3	0	**2**	0	-1	1
		-2	0	0	0	-1	0

min			-1	1	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
t_1	0	15/2	0	0	1	3/2	1/2
x_1	-1	7/2	1	0	0	1/2	1/2
x_2	1	3/2	0	1	0	-1/2	1/2
		-2	0	0	0	-1	0

يعطى الحل المثالي الثاني للمسألة بـ:

$$x_1^* = 7/2, x_2^* = 3/2, t_1^* = 15/2, t_2^* = 0, t_3^* = 0$$
$$z^* = -2$$

إذاً تم إيجاد حليين مثاليين للمسألة هما:

$$x^1 = (x_1^*, x_2^*) = (2,0)$$
$$x^2 = (x_1^*, x_2^*) = (7/2, 3/2)$$

وبالتالي مجموعة الحلول المثالية للمسألة تعطى بالتركيب الجبري الخطي المحدب التالي:

$$x^* = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \quad ,(0 \le \lambda \le 1)$$
$$z(x^*) = \lambda z(x^1) + (1-\lambda) z(x^2) = -2 \quad ,0 \le \lambda \le 1$$

مثال 3. حل البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned}
\max z &= 5x_1 + 7x_2 \\
st \quad & x_1 + x_2 \ge 6 \\
& x_1 \ge 4 \\
& x_2 \le 3 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\max z &= 5x_1 + 7x_2 + 0t_1 + 0t_2 + 0t_3 \\
st \quad & x_1 + x_2 - t_1 = 6 \\
& x_1 - t_2 = 4 \\
& x_2 + t_3 = 3 \\
& x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 \ge 0
\end{aligned}$$

الحل القاعدي $x_1 = 0, x_2 = 0, t_1 = -6, t_2 = -4, t_3 = 3$ غير ممكن

باستخدم طريقة الحذف يمكن ايجاد التالي:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 - t_1 = 6 \\ x_1 - t_2 = 4 \\ x_2 + t_3 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 - t_2 = 4 \\ x_2 - t_1 + t_2 = 2 \\ t_1 - t_2 + t_3 = 1 \end{array}\right.$$

و منه الحل القاعدي الممكن الابتدائي هو:

$$x_1 = 4, x_2 = 2, t_1 = 0, t_2 = 0, t_3 = 1$$

و بالتالي المسألة تصبح على الشكل التالي:

$$\begin{aligned}
\max z &= 5x_1 + 7x_2 + 0t_1 + 0t_2 + 0t_3 \\
st \quad & x_1 - t_2 = 4 \\
& x_2 - t_1 + t_2 = 2 \\
& t_1 - t_2 + t_3 = 1 \\
& x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 \geq 0
\end{aligned}$$

$$z_j = \sum_{i \in B} c_i a_{ij} \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$z_0 = \sum_{i \in B} c_i b_i$$

max			5	7	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
x_1	5	4	1	0	0	-1	0
x_2	7	2	0	1	-1	1	0
t_3	0	1	0	0	1	-1	1
		-34	0	0	7	-2	0

max			5	7	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3
x_1	5	4	1	0	0	-1	0
x_2	7	3	0	1	0	0	1
t_1	0	1	0	0	1	-1	1
		-41	0	0	0	5	1

الحل المثالي للمسألة هو $z = \infty$ (مسألة غير محدودة)