

بحوث العمليات- البرمجة الخطية (الأمثلة الخطية)

## Operations Research- Linear Programming

الدكتور علاء محمد الغاشي

### المحتوى

- مقدمة
  - تشكيل مسائل البرمجة الخطية (Formulation of linear programs)
  - حل مسائل البرمجة الخطية ( Solving linear programs )
    - الطريقة البيانية (Graphical method)
    - طريقة التعداد (Enumeration method)
    - الطريقة المبسطة أو السمبلكس (Simplex method)
  - الثنوية (المرافقة) في البرمجة الخطية ( Duality in linear programming )
    - خوارزمية السمبلكس للمرافق ( Dual-Simplex algorithm )
  - البرمجة الخطية الوسيطة ( Parametric linear programming )
  - البرمجة الخطية الصحيحة ( Integer linear programming )
  - الشبكات والبيان ( Graphs and networks )
    - المسار الأقصر في شبكة أو بيان موجة ( Shortest path in a directed network )
    - مسألة التدفق الأعظمي في بيان أو شبكة موجهة ( Maximum flow in directed network )
- (problem)

## مقدمة عامة

إن صعوبات محدودية الموارد التي تواجه عمليات الإنتاج، آانت دافعاً أساسياً للبحث عن طرائق عملية تساعد في اتخاذ القرارات التي تؤدي إلى الاستخدام الأمثل لتلك الموارد المحدودة، بما يضمن تحقيق أكبر عائد ممكن، أو أقل تكاليف إجمالية ممكنة. إن مجمل الأساليب و الطرائق الرياضية التي تساهم في اتخاذ القرارات في ظل محدودية الموارد، يمكن إدراجها ضمن اختصاص يسمى ببحوث العمليات . و من أساليب هذه المادة البرمجة الخطية، البرمجة غير الخطية، البرمجة الديناميكية، البرمجة متعددة الأهداف، نظرية البيان، نظرية الألعاب، إلخ .

من الأساليب الأساسية والهامة التي تساعد الإدارة على اتخاذ القرارات السليمة هو أسلوب البرمجة الخطية (linear programming). وتعتبر مسائل البرمجة الخطية جزءاً هاماً من مسائل البرمجة الرياضية عامة (Mathematical programming) و التي هي بدورها إحدى تشكيلات مسائل التفضيل ( Optimization problems) أما تعتبر أيضاً من ضمن أساليب بحوث العمليات (Operations research).

يقصد هنا بمسائل التفضيل تلك المسائل الرياضية التي تبحث عن تعظيم أو تقليل دالة أو عدة دوال رياضية مكونة من متغيرات عديدة خاضعة لقيود خاصة قد تكون خطية أو غير خطية.

لقد عرفت مسائل التفضيل منذ زمن بعيد، وقد تم تطبيقها بنجاح لحل مسائل عديدة في العلوم الفيزيائية والكيميائية والهندسية والاقتصادية والصناعية والزراعية.

بنتيجة محدودية الموارد العسكرية آلفت الحكومة البريطانية خلال الحرب العالمية الثانية فريقاً من آبار العلماء لدراسة مسائل تخصيص موارد العسكرية وبما يتناسب مع أفضل وضع دفاعي جوي وبري معاً. وقد أطلق على دراسات هذا الفريق ببحوث العمليات أو البحث العملياتي وحثت النتائج المشجعة له الإدارة العسكرية الجوية الأمريكية على تشكيل فريق مشابه للقيام بالدراسات المعقدة في هذا المجال. وقد وجدت هذه الفرق بأن أساليب مسائل التفضيل التقليدية التي اتبعت ليست ذات فائدة آبيرة في حل مسائل البرمجة الرياضية مما استوجب إيجاد أساليب آآثر فعالية. في عام 1947 طور العالم جورج دانتسيغ (Dantzig) عضو الفريق الأمريكي لبحوث العمليات الطريقة المبسطة (Simplex method) لحل مسائل البرمجة الخطية فقط ولم تنشر تفاصيل هذه الطريقة إلا في عام 1956.

بعد نشر هذه الطريقة لدانتسيغ حدث تسارع في استخدام وتطوير البرمجة الرياضية عمومًا والخطية خصوصًا. ومن أهم المشاركات التطويرية والهامة في هذا المجال آانت أعمال العالم غال (Gale) وبمشاركة آخرين معه حيث قاموا بتشكيل المسألة الثنوية (المرافقة) لمسألة البرمجة الخطية و التي لعبت دوراً مهماً في ذلك المجال فيما بعد. أما في أيامنا هذه فإننا نجد أن البرمجة الرياضية أصبحت تستخدم في مختلف المجالات الصناعية والخدمية والعسكرية وحيثما تتواجد عدة موارد محدودة الكمية مشتركة في تشكيل أو إنتاج سلعة (سلع) أو تقديم خدمة (خدمات) معينة.

في عام 1979 نشر العالم الروسي آاشيان (Khachian) طريقة أخرى لحل المسائل الرياضية الخطية تعتمد بشكل أساسي على مفهوم النقاط الداخلية ضمن منطقة الإمكانات (التعريف)، وآانت هذه الطريقة تتمتع بسرعة أكبر من طريقة السمبلكس من أجل الوصول إلى الحل الأمثل.

في عام 1984 نشر العالم الأمريكي آارمارآار (Karmarkar) طريقة مطورة عن طريقة آاشيان من حيث السهولة والسرعة مما فتح الباب واسعاً على مفهوم النقاط الداخلية وهكذا تسارعت الدراسات المعمقة في هذا النوع من الأعمال.

## تشكيل مسائل البرمجة الخطية (Formulation of linear programming models)

يتلخص بناء البرنامج الرياضي الخطي بالخطوات الأساسية الثلاثة التالية:

**الخطوة الأولى:** يتم أولاً تعريف المتغيرات المجهولة الواجب تحديدها و تسمى عادةً بمتغيرات القرار وتمثيلهم من

خلال رموز جبرية

**الخطوة الثانية:** يتم ثانياً تعريف جميع القيود الرياضية في المسألة والتعبير عنهم من خلال معادلات أو متراجحات

خطية تربط بين المتغيرات المجهولة

**الخطوة الثالثة:** يتم تعريف دالة الهدف والتعبير عنها من خلال تابع خطي تابع للمتغيرات المجهولة وتحديد الهدف

فيما إذا كان تقليل دالة الهدف أو تعظيمها

### مسائل على التشكيل الرياضي للبرمجة الخطية

**مسألة 1.** الهدف صنع نوعين من الأعلام الكبيرة مساحة آل منهما 6 أمتار مربعة من الأقمشة ذات الألوان

المختلفة. ألوان النوع الأول من الأعلام هي: الأبيض، الأحمر و الأزرق. أما النوع الثاني من الأعلام فيتكون من

اللونين الأبيض و الأزرق فقط. مساحة الأقمشة بالأمطار المربعة من الألوان المختلفة المطلوبة لكل نوع هي معطاة

حسب الجدول التالي:

الأعلام/الألوان	الأبيض	الأحمر	الأزرق
النوع الأول	3	2	1
النوع الثاني	3	-	3

و تتوفر لدينا في المخزن الكميات التالية من الأقمشة:

اللون الأبيض: 30 متراً مربعاً

اللون الأحمر: 16 متراً مربعاً

اللون الأزرق: 18 متراً مربعاً

و لدى تحليلنا لتكلفة الإنتاج والأرباح وجد أن العائد من آل نوع من الأعلام هو أما يلي:

النوع الأول: 2 ليرة سورية لكل علم

النوع الثاني: 3 ليرة سورية لكل علم

شكل البرنامج الخطي للمسألة بحيث يتحقق أأبر عائد ممكن من صناعة الأعلام.

العائد	الألوان			النوع
	الأزرق	الأحمر	الأبيض	
2	1	2	3	الأول
3	3	-	3	الثاني
	18	16	30	المتوفر من الأقمشة

نفرض أن  $x_1$  متغير مجهول يرمز إلى عدد الأعلام المطلوبة من النوع الأول

و  $x_2$  متغير مجهول يرمز إلى عدد الأعلام المطلوبة من النوع الثاني

فتكون القيود الرياضية الخطية أما يلي:

$$3x_1 + 3x_2 \leq 30$$

$$2x_1 \leq 16$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

و تابع الهدف يعطى بالشكل التالي:  $z = 2x_1 + 3x_2$

أما البرنامج الرياضي الخطي، فيصبح على الشكل التالي:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$3x_1 + 3x_2 \leq 30$$

$$2x_1 \leq 16$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

و  $x_1, x_2$  أعداد صحيحة

**مسألة 2.** تقوم المؤسسة الوطنية للأدوية بإنتاج نوعين من الفيتامينات، و يتم استخراج هذين النوعين من الفيتامينات من صنفين من الأغذية هما أ و ب. وتبلغ تكلفة الوحدة من آل صنف من أصناف الطعام 3 ليرة سورية و 2.5 ليرة سورية على الترتيب. يوضح الجدول التالي احتياجات آل نوع من أنواع الفيتامينات من هذه الأغذية و يوضح أيضاً الاحتياجات اليومية الدنيا من هذين النوعين من الفيتامينات:

الاحتياجات اليومية	الأغذية		الفيتامين
	ب	أ	
40	4	2	النوع الأول
50	2	3	النوع الثاني
	2.5	3	تكلفة الوحدة من آل نوع من الأغذية

المطلوب آتابة البرنامج الخطي الموافق لهذه المسألة بأقل تكلفة.

نفرض أن  $x_1$  متغير مجهول يرمز إلى عدد الوحدات المطلوبة من النوع الأول

و  $x_2$  متغير مجهول يرمز إلى عدد الوحدات المطلوبة من النوع الثاني

فتكون القيود الرياضية الخطية أمايلي:

$$2x_1 + 4x_2 \geq 40$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 50$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

و تابع الهدف يعطى بالشكل التالي:  $z = 3x_1 + 2.5x_2$

أما البرنامج الرياضي الخطي، فيصبح على الشكل التالي:

$$\min z = 3x_1 + 2.5x_2$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 40$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 50$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

و  $x_1, x_2$  أعداد صحيحة

**مسألة 3.** شراء لإنتاج مواد البلاستيك تريد إنتاج منتج جديد من أربعة مرآبات آيميائية. هذه المرآبات مكونة من

ثلاث مواد هي: أ، ب و ت. نسب المواد في هذه المرآبات و تكلفتها معطاة في الجدول التالي:

المرآب الكيميائي	1	2	3	4
نسبة أ في المرآب	30	20	40	20
نسبة ب في المرآب	20	60	30	40
نسبة ت في المرآب	40	15	25	30
التكلفة/الكيلو	20	30	20	15

المنتج الجديد يحتوي على الأقل 20% من مادة أ و يحتوي على الأقل 30% من مادة ب و يحتوي على الأقل 20% من مادة ت. و بسبب المضاعفات الجانبية فإن نسبة المرآبات 1 و 2 يجب أن لا تتعدى 20% و 30% من المنتج الجديد على التوالي. أكتب البرنامج الخطي لهذه المسألة لإنتاج المنتج الجديد بأقل تكلفة.

نفرض أن  $x_1$  متغير مجهول يرمز إلى نسبة المرآب الأول المطلوبة

و  $x_2$  متغير مجهول يرمز إلى نسبة المرآب الثاني المطلوبة

و  $x_3$  متغير مجهول يرمز إلى نسبة المرآب الثالث المطلوبة

و  $x_4$  متغير مجهول يرمز إلى نسبة المرآب الرابع المطلوبة

فتكون القيود الرياضية الخطية أمايلي:

$$30x_1 + 20x_2 + 40x_3 + 20x_4 \geq 20$$

$$20x_1 + 60x_2 + 30x_3 + 40x_4 \geq 30$$

$$40x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 30x_4 \geq 20$$

$$x_1 \leq 20$$

$$x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

و تابع الهدف يعطى بالشكل التالي:  $z = 20x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 15x_4$

أما البرنامج الرياضي الخطي، فيصبح على الشكل التالي:

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = 20x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 15x_4 \\
& 30x_1 + 20x_2 + 40x_3 + 20x_4 \geq 20 \\
& 20x_1 + 60x_2 + 30x_3 + 40x_4 \geq 30 \\
& 40x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 30x_4 \geq 20 \\
& x_1 \leq 20 \\
& x_2 \leq 30 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

**مسألة 4.** نوعان من الطعام أ و ب يحتوي آل آيلو غرام منهما على الكميات التالية من الفيتامينات:

نوع الفيتامين/نوع الطعام	ب	أ
V	0.5	2
X	1.2	2.5
Y	1.5	1.5
Z	3	1

نود أن نكون وجبة يومية من مذين النوعين ذات تكلفة دنيا بحيث تحتوي على الأقل على الكميات التالية من الفيتامينات:  $V = 140, X = 300, Y = 270, Z = 300$  علماً أن ثمن النوع أ هو ضعفي ثمن النوع ب. أأتب البرنامج الخطي المناسب للمسألة.

نفرض أن  $x_1$  متغير مجهول يرمز إلى الكمية المطلوبة من النوع الأول أ

و  $x_2$  متغير مجهول يرمز إلى الكمية المطلوبة من النوع الثاني ب

فتكون القيود الرياضية الخطية أمايلي:

$$\begin{aligned}
2x_1 + 0.5x_2 &\geq 140 \\
2.5x_1 + 1.2x_2 &\geq 300 \\
1.5x_1 + 1.5x_2 &\geq 270 \\
x_1 + 3x_2 &\geq 300 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

و تابع الهدف يعطى بالشكل التالي:  $z = x_1 + 2x_2$



أما البرنامج الرياضي الخطي، فيصبح على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 0.5x_2 & \geq 140 \\ 2.5x_1 + 1.2x_2 & \geq 300 \\ 1.5x_1 + 1.5x_2 & \geq 270 \\ x_1 + 3x_2 & \geq 300 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

**مسألة 5.** مصنع ينتج نوعين من المشروبات 1 و 2 ، آل نوع من هذه المشروبات يدخل فيه نوعين من المواد أ و ب . لإنتاج صفيحة من المشروب 1 نحتاج إلى 5 لتر من المادة أ و 5 لتر من المادة ب و لإنتاج صفيحة من المشروب 2 نحتاج إلى 3 لتر من المادة أ و 11 لتر من المادة ب. يستطيع المصنع توفير 30 لتر من المادة أ و 55 لتر من المادة ب في اليوم وأذلك قرر المصنع بناءً على طلب شرائات التوزيع أن لا ينتج أكثر من خمسمائة صفيحة يومياً من المشروب. إذا كان ربح المشروب 1 هو 300 ليرة سورية للصفيحة و ربح المشروب 2 هو 400 ليرة سورية للصفيحة. أم صفيحة ينتجون ليحصلوا على أكبر ربح ممكن.

النوع/المادة	أ	ب	الربح
النوع 1	5	5	300
النوع 2	3	11	400
الوفرة	30	55	

نفرض أن  $x_1$  متغير مجهول يرمز إلى عدد الصفائح المطلوبة من النوع الأول

و  $x_2$  متغير مجهول يرمز إلى عدد الصفائح المطلوبة من النوع الثاني

فتكون القيود الرياضية الخطية أمايلي:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 & \leq 30 \\ 5x_1 + 11x_2 & \leq 55 \\ x_1 + x_2 & \leq 500 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

و تابع الهدف يعطى بالشكل التالي:  $z = 300x_1 + 400x_2$

أما البرنامج الرياضي الخطي، فيصبح على الشكل التالي:

$$\max \quad z = 300x_1 + 400x_2$$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 30$$

$$5x_1 + 11x_2 \leq 55$$

$$x_1 + x_2 \leq 500$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

و  $x_1, x_2$  أعداد صحيحة

#### شكل البرنامج الخطي لكل من المسائل التالية:

**مسألة 1.** شراء صناعية تنتج نوعين من السلع. آل من السلعتين يمر بمرحلتين إنتاجيتين الأولى مروراً بالآلة أ ثم

الثانية بالآلة ب. أوقات العمليات الإنتاجية بالمنتجات لكل من السلعتين هي أما يلي:

السلعة	الآلة أ	الآلة ب
النوع الأول	4 ساعات	5 ساعات
النوع الثاني	5 ساعات	2 ساعة

و الوقت المتاح بالنسبة للآلة أ هو 100 ساعة وبالنسبة للآلة ب هو 80 ساعة. العائد المحقق من السلعة الأولى هو 10

دولار لكل 100 وحدة، وللسلعة الثانية هو 5 دولار لكل 100 وحدة. المطلوب تقدير الكمية الواجب إنتاجها من السلعة

الأولى والكمية الواجب إنتاجها من السلعة الثانية و ذلك لتحقيق أكبر عائد مادي ممكن.

**مسألة 2.** على قطعة أرض صغيرة، نود أن نبني عدة مساكن، و نود أن تكون بعض هذه المباني ذات أدوار خمسة و

البعض الآخر ذات دورين. فكم ينبغي أن يكون عدد النوع الأول من هذه المباني وآم ينبغي أن يكون عدد النوع الثاني

من هذه المباني أي تستوعب أكبر عدد ممكن من السكان، علماً أن المعطيات معطاة في الجدول التالي:

عدد الأدوار	تكلفة المبنى الواحد	ساعات العمل اللازمة لكل مبنى	المساحة اللازمة لكل مبنى	عدد السكان في المبنى الواحد
5	600000	120	800	30
2	200000	60	600	12

ثم أن المبلغ المتوفر هو 18000000 ل س و ساعات العمل المتيسرة 4500 ساعة و مساحة الأرض الكلية تبلغ 42000 متراً مربعاً. شكل البرنامج الخطي الموافق.

**مسألة 3.** تستورد مصفاة بترول نوعين من الزيت الخام، خفيف سعره 25 دولاراً للبرميل الواحد و ثقيل سعره 20 دولاراً للبرميل الواحد. تنتج هذه المصفاة غازولين، و زيت للتدفئة و بنزين بكميات للبرميل الواحد مبينة في الجدول التالي:

النوع	غازولين	زيت للتدفئة	بنزين
زيت خفيف	0.3	0.2	0.3
زيت ثقيل	0.3	0.4	0.2

تعاقبت المصفاة مع إحدى الشرأآت لتزويدها بـ 900000 برميل من الغازولين و 800000 برميل من زيت التدفئة و 500000 برميل من البنزين. تود المصفاة معرفة كمية الزيت الخام الذي يجب أن تستورده لتتلي الكمية المطلوبة بأقل تكلفة ممكنة. أآتب البرنامج الخطي الموافق.