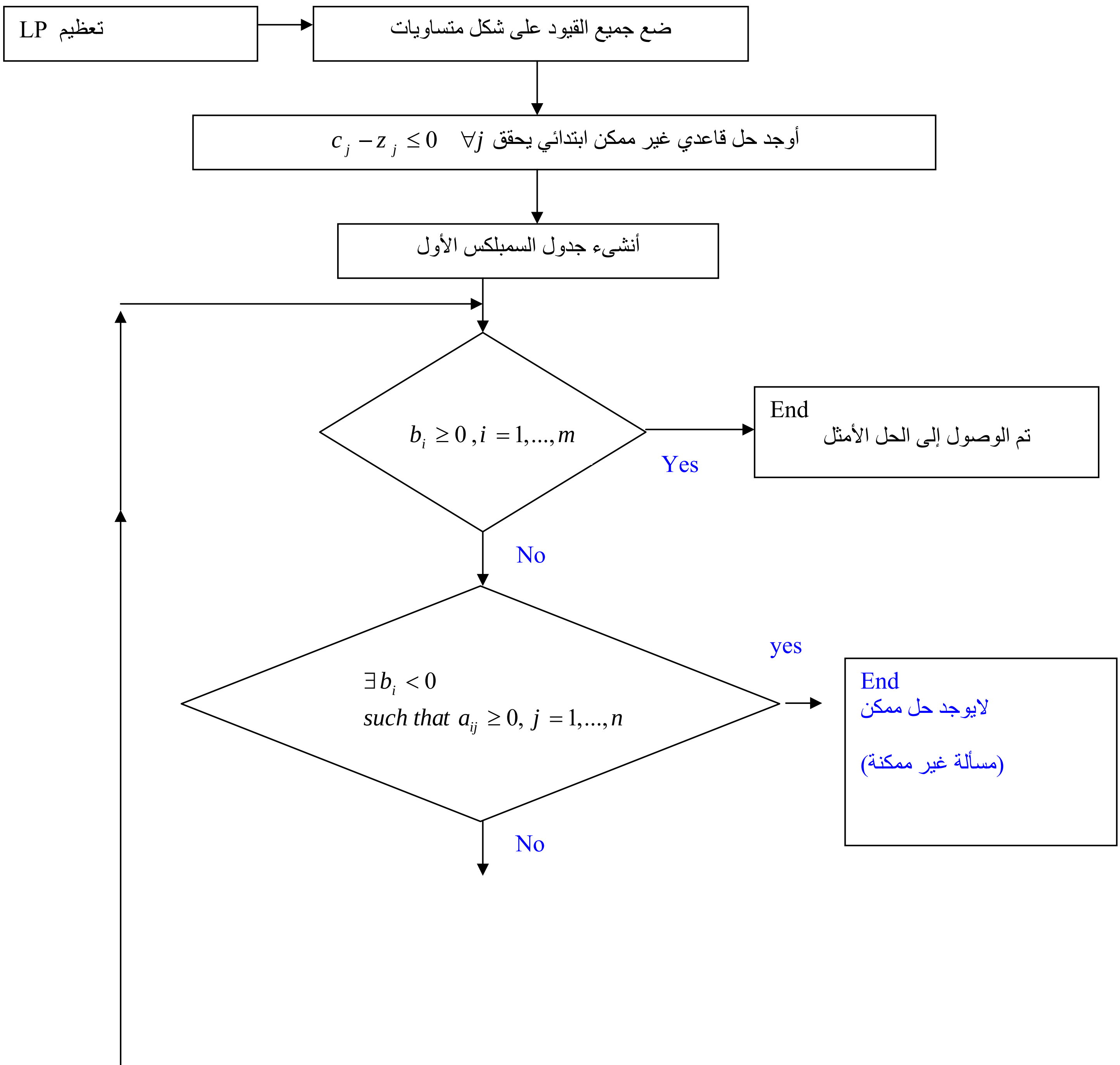
خوارزمية السمبلكس للمرافق (Dual-simplex algorithm)

تطبق خوارزمية السمبلكس للمرافق على جميع البرامج الخطية الأولية (P) تحت الشرطين التاليين

- لايوجد للبرنامج الخطي الأولي (P) حل ممكن للبدء
- يوجد للبرنامج الخطي المرافق (D) حل ممكن للبدء

المخطط التدفقي لخوارزمية السمبلكس للمرافق



تغير القاعدة

I. تحديد المتحول الداخل إلى القاعدة و المتحول المغادر للقاعدة

*) x_r leaves if

$$b_r = \min \{b_i / b_i < 0\}$$

*) x_k enter if

$$\frac{c_k - z_k}{a_{rk}} = \min_j \left\{ \frac{c_j - z_j}{a_{rj}} / a_{rj} < 0 \right\}$$

II. بناء الجدول المبسط الجديد

*) Pivot line (i=k):

$$b_k' = \frac{b_k}{a_{rk}}$$

$$a_{kj}' = \frac{a_{rj}}{a_{rk}} \quad (j = 1, \ldots, n)$$

*) otherwise (i$\neq$k):

$$b_i' = b_i - b_k' a_{ik} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$$a_{ij}' = a_{ij} - a_{kj}' a_{ik} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

And

$$-z_0' = -z_0 - b_k' (c_k - z_k)$$

$$c_j - z_j' = (c_j - z_j) - a_{kj}' (c_k - z_k)$$

تقليل LP

نفس الإجراءات، لكن بعد تبديل

$-z_0$ and $c_j - z_j$

By

z_0 and $z_j - c_j$

خوارزمية السمبلكس للمرافق (أمثلة)

مثال 1. لنأخذ البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned}
&\min z = x_1 + x_2\\
&st \quad x_1 + x_2 \geq 5\\
&\quad 2x_1 - x_2 \geq -2\\
&\quad x_1 - x_2 \leq 2\\
&\quad x_2 \leq 6\\
&\quad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
&\min z = x_1 + x_2\\
&st \quad -x_1 - x_2 + t_1 = -5\\
&\quad -2x_1 + x_2 + t_2 = 2\\
&\quad x_1 - x_2 + t_3 = 2\\
&\quad x_2 + t_4 = 6\\
&\quad x_1, x_2, t_1, t_2, t_3, t_4 \geq 0
\end{aligned}$$

min			1	1	0	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	t_4
← t_1	0	-5	-1	-1	1	0	0	0
t_2	0	2	-2	1	0	1	0	0
t_3	0	2	1	-1	0	0	1	0
t_4	0	6	0	1	0	0	0	1
		0	-1	-1 ↑	0	0	0	0

min			1	1	0	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	t_4
x_2	1	5	1	1	-1	0	0	0
← t_2	0	-3	-3	0	1	1	0	0
t_3	0	7	2	0	-1	0	1	0
t_4	0	1	-1	0	1	0	0	1
		5	0 ↑	0	-1	0	0	0

min			1	1	0	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	t_4
x_2	1	4	0	1	-2/3	1/3	0	0
x_1	1	1	1	0	-1/3	-1/3	0	0
← t_3	0	5	0	0	-1/3	2/3	1	0
t_4	0	2	0	0	2/3	-1/3	0	1
		5	0	0	-1	0 ↑	0	0

الحل المثالي الأول

$$x_1 = 1, x_2 = 4, t_1 = 0, t_2 = 0, t_3 = 5, t_4 = 2 \text{ و } z = 5$$

من أجل الحصول على الحل المثالي الثاني سنطبق خوارزمية السمبلكس

min			1	1	0	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	t_4
x_2	1	3/2	0	1	-1/2	0	-1/2	0
x_1	1	7/2	1	0	-1/2	0	1/2	0
t_2	0	15/2	0	0	-1/2	1	3/2	0
t_4	0	9/2	0	0	1/2	0	1/2	1
		5	0	0	-1	0	0	0

الحل المثالي الثاني هو

$$x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = \frac{3}{2}, t_1 = 0, t_2 = \frac{15}{2}, t_3 = 0, t_4 = \frac{9}{2} \text{ و } z = 5$$

الأن سوف نحل المثال السابق بخوارزمية السمبلكس باستخدام طريقة المرحلتين

a) المرحلة الأولى

min			0	0	0	0	0	0	1
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	t_4	v
v	1	5	1	1	-1	0	0	0	1
t_2	0	2	-2	1	0	1	0	0	0
← t_3	0	2	1	-1	0	0	0	0	0
t_4	0	6	0	1	0	0	1	1	0
		5	1 ↑	1	-1	0	0	0	0

	min		0	0	0	0	0	0	1
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	t_4	v
v	1	3	0	2	-1	0	-1	0	1
t_2	0	6	0	-1	0	1	2	0	0
x_1	0	2	1	-1	0	0	1	0	0
t_4	0	6	0	1	0	0	0	1	0
		3	0	2	-1	0	-1	0	0

	min		0	0	0	0	0	0	1
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	t_4	v
x_2	0	3/2	0	1	-1/2	0	-1/2	0	/
t_2	0	15/2	0	0	-1/2	1	3/2	0	/
x_1	0	7/2	1	0	-1/2	0	1/2	0	/
t_4	0	9/2	0	0	1/2	0	1/2	1	/
		0	0	0	-1	0	0	0	/

b) المرحلة الثانية

	min		1	1	0	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	t_4
x_2	1	3/2	0	1	-1/2	0	-1/2	0
t_2	0	15/2	0	0	-1/2	1	3/2	0
x_1	1	7/2	1	0	-1/2	0	1/2	0
t_4	0	9/2	0	0	1/2	0	1/2	1
		5	0	0	-1	0	0	0

الحل المثالي الأول: $z=5$ و $x_1=\frac{7}{2}, x_2=\frac{3}{2}, t_1=0, t_2=\frac{15}{2}, t_3=0, t_4=\frac{9}{2}$

	min		1	1	0	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	t_4
x_2	1	4	0	1	-2/3	1/3	1	0
t_3	0	5	0	0	-1/3	2/3	0	0
x_1	1	1	1	0	-1/3	-1/3	0	0
t_4	0	2	0	0	2/3	-1/3	0	1
		5	0	0	-1	0	0	0

الحل المثالي الثاني: $z=5$ و $x_1=1, x_2=4, t_1=0, t_2=0, t_3=5, t_4=2$

مثال 2. لنأخذ البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned}
\max z &= -5x_1 - 2x_2 + x_3 \\
st \quad & -4x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\
& x_1 - x_2 \le -3 \\
& 3x_1 - 2x_2 \le -1 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}
\max z &= -5x_1 - 2x_2 + x_3 \\
st \quad & -4x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\
& x_1 - x_2 + t_1 = -3 \\
& 3x_1 - 2x_2 + t_2 = -1 \\
& x_1, x_2, x_3, t_1, t_2 \ge 0
\end{aligned}$$

max			-5	-2	1	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2
x_3	1	2	-4	3	1	0	0
← t_1	0	-3	1	-1	0	1	0
t_2	0	-1	3	-2	0	0	1
		-2	-1	-5 ↑	0	0	0

الحل الإبتدائي الأول غير ممكن مع وجود جميع $\forall j \quad c_j - z_j \le 0$ لذلك سوف نطبق خوارزمية السمبلكس للمرافق

max			-5	-2	1	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2
← x_3	1	-7	-1	0	1	3	0
x_2	-2	3	-1	1	0	-1	0
t_2	0	5	1	0	0	-2	1
		13	-6 ↑	0	0	-5	0

max			-5	-2	1	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2
x_1	-5	7	1	0	-1	-3	0
x_2	-2	10	0	1	-1	-4	0
t_2	0	-2	0	0	1	1	1
		55	0	0	-6	-23	0

لا يوجد حل ممكن للمسألة

الأن، سوف نحل نفس المسألة بخوارزمية السمبلكس بتطبيق طريقة المرحلتين

max			0	0	0	0	0	-1	-1
B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	v_1	v_2
x_3	0	2	-4	3	1	0	0	0	0
v_1	-1	3	-1	1	0	-1	0	1	0
v_2	-1	1	-3	2	0	0	-1	0	1
		4	-4	3	0	-1	-1	0	0

max			0	0	0	0	0	-1	-1
B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	v_1	v_2
x_3	0	1/2	1/2	0	1	0	3/2	0	/
v_1	-1	5/2	1/2	0	0	-1	1/2	1	/
x_2	0	1/2	-3/2	1	0	0	-1/2	0	/
		5/2	1/2	0	0	-1	1/2	0	/

max			0	0	0	0	0	-1	-1
B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2	v_1	v_2
x_1	0	1	1	0	2	0	3	0	/
v_1	-1	2	0	0	-1	-1	-1	1	/
x_2	0	2	0	1	3	0	4	0	/
		2	0	0	-1	-1	-1	0	/

بما أن $v_1 = 2$ ، نستنتج بأن ليس للمسألة حل ممكن

الأن، من أجل تطبيق خوارزمية السمبلكس من الضروري معرفة حل قاعدي ممكن للبدء. و من أجل تطبيق خوارزمية السمبلكس للمرافق يجب معرفة حل قاعدي غير ممكن للبدء بحيث يكون جميع $c_j - z_j \ \forall j = 1,...,n$ سالبة أو معدومة في حالة معالجة تعظيم مسألة خطية أو جميع $z_j - c_j \ \forall j = 1,...,n$ سالبة أو معدومة في حال معالجة تقليل مسألة خطية. من أجل حل هذه المشكلة سيتم إدخال طريقة القيد الصنعي و التي هي شبيهه بطريقة M و بطريقة المرحلتين في خوارزمية السمبلكس.

طريقة القيد الصنعي

لنفترض أن جدول السمبلكس الإبتدائي في حالة تعظيم يزودنا بحل قاعدي غير ممكن عندئذ

- أذا كان جميع القيم $c_j - z_j$ سالبة أو معدومة ، عندئذ يتم تطبيق خوارزمية السمبلكس للمرافق مباشرتاً
- وإلا، إذا وجد بعض $c_j - z_j$ المتعلقة ببعض المتحولات غير القاعدية موجبة تماماً ، في هذه الحالة سوف يتم تطبيق طريقة القيد الصنعي

المخطط التدفقي لطريقة القيد الصنعي

تعظيم LP → ضع جميع القيود على شكل متساويات

LP- معدلة

1) حدد المتحولات غير القاعدية $x_{m+1},\ldots,x_{m+g}$ المتعلقة بـ $c_j - z_j > 0$

2) أدخل القيد الصنعي التالي

$$\sum_{k=1}^{g} x_{m+k} + x_0 = M$$

$$x_0 \geq 0, M \ \ arbitrary\ big$$

3) حدد من بين هذه المتغيرات، المتغير x_{m+s} الموافق لأكبر قيمة لـ $c_j - z_j$

4) عوض بدلاً من x_{m+s} المساواة التالية

$$x_{m+s} = M - x_0 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{g} x_{m+k}$$

في القيود الأصلية (الأساسية)

حل LP–معدلة بخوارزمية السمبلكس للمرافق

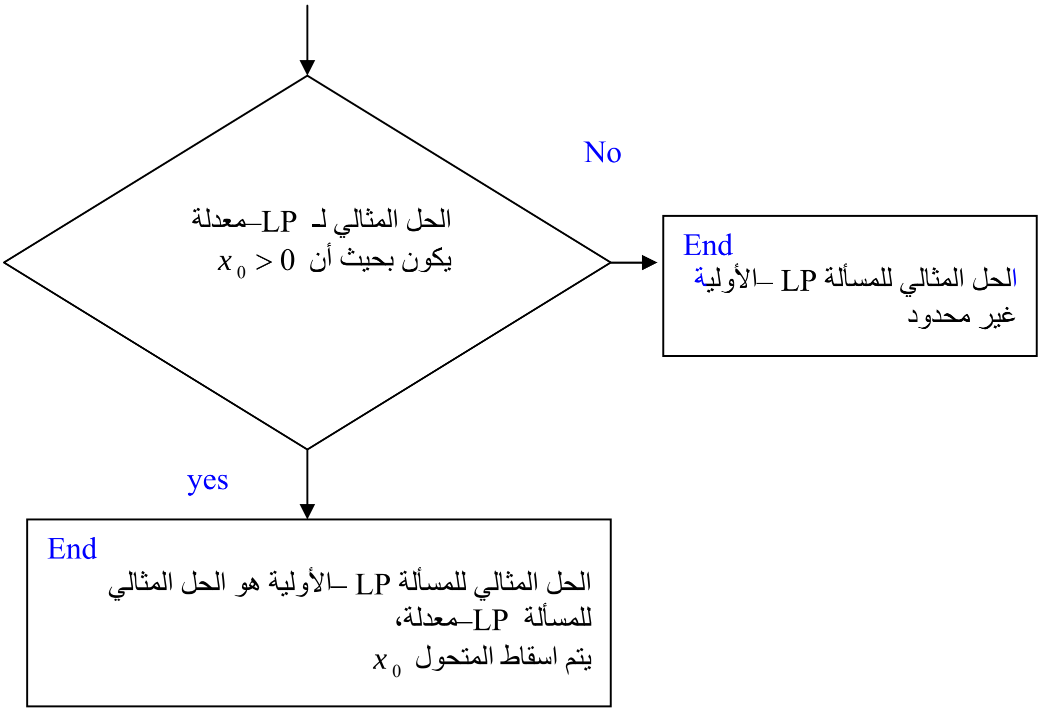
تمتلك المسألة LP–معدلة حل ممكن

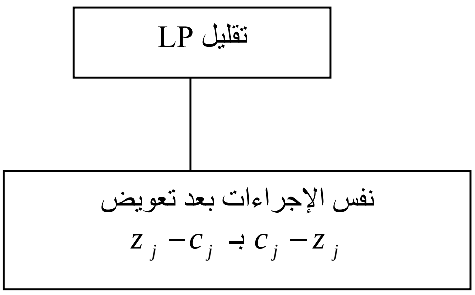
No

End

المسألة LP –الأولية ليس لها حل ممكن

Yes


الحل المثالي لـ LP–معدلة
يكون بحيث أن $x_0 > 0$
No
End
الحل المثالي للمسألة LP –الأولية
غير محدود
yes
End
الحل المثالي للمسألة LP –الأولية هو الحل المثالي
للمسألة LP–معدلة،
يتم اسقاط المتحول x_0


تقليل LP
نفس الإجراءات بعد تعويض
$z_j - c_j$ بـ $c_j - z_j$

طريقة القيد الصنعي (أمثلة)

مثال 1. لنأخذ البرنامج الخطي التالي:

$$
\begin{aligned}
\max z &= 2x_1 + 3x_2 \\
st \quad & x_1 + x_2 \geq 5 \\
& 2x_1 - x_2 \geq -2 \\
& x_1 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
\max z &= 2x_1 + 3x_2 \\
st \quad & -x_1 - x_2 + t_1 = -5 \\
& -2x_1 + x_2 + t_2 = 2 \\
& x_1 + t_3 = 3 \\
& x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

max			2	3	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	x_3	t_1	t_2
t_1	0	-5	-1	-1	1	0	0
t_2	0	2	-2	1	0	1	0
t_3	0	3	1	0	0	0	1
		0	2	3	0	0	0

لا يوجد حل غير ممكن إبتدائي لايحقق معايير الأمثلة، و عدة $c_j - z_j > 0$

من أجل حل هذا المثال باستخدام خوارزمية السمبلكس للمرافق يجب أن نستخدم طريقة القيد الصنعي

$x_1 + x_2 \leq M$ (M كبيرة)

$x_1 + x_2 + x_0 = M$

لنعوض x_2 بـ $x_2 = M - x_1 - x_0$ في المسألة اللاأصلية، نجد التالي

$$
\begin{aligned}
\max z &= 2x_1 + 3x_2 \\
st \quad & t_1 + x_0 = -5 + M \\
& -3x_1 + t_2 - x_0 = 2 - M \\
& x_1 + t_3 = 3 \\
& x_1 + x_2 + x_0 = M \\
& x_1, x_2, t_1, t_2, t_3, x_0 \geq 0
\end{aligned}
$$

max			2	3	0	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	x_0
t_1	0	-5+M	0	0	1	0	0	1
t_2	0	2-M	-3	0	0	1	0	-1
t_3	0	3+0	1	0	0	0	1	0
x_2	3	0+M	1	1	0	0	0	1
		0-3M	-1	0	0	0	0	-3

max			2	3	0	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	x_0
t_1	0	-5+M	0	0	1	0	0	1
x_1	2	-2/3+M/3	1	0	0	-1/3	0	1/3
t_3	0	11/3-M/3	0	0	0	1/3	1	-1/3
x_2	3	2/3+2M/3	0	1	0	1/3	0	2/3
		-2/3-8M/3	0	0	0	-1/3	0	-8/3

max			2	3	0	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	x_0
t_1	0	6	0	0	1	1	3	/
x_1	2	3	1	0	0	0	1	/
x_2	3	8	0	1	0	1	2	/
		-30	0	0	0	-3	-8	/

يعطى الحل المثالي كما يلي:

$x_1 = 3, x_2 = 8, t_1 = 6, t_2 = 0, t_3 = 0$ و $z = 30$

مثال 2. لنأخذ البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned}
\min z &= -x_1 + x_2 \\
st \quad & -2x_1 + x_2 + t_1 = 2 \\
& x_1 - 2x_2 + t_2 = -8 \\
& x_1 + x_2 + t_3 = 5 \\
& x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 \geq 0
\end{aligned}$$

لدينا حل قاعدي هو غير ممكن

$$x_1 = 0, x_2 = 0, t_1 = 2, t_2 = -8, t_3 = 5$$

و عدة $z_j - c_j > 0 \; or < 0$

$$x_1 + x_0 = M \Rightarrow x_1 = M - x_0$$

min			-1	1	0	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	x_0
t_1	0	2+2M	0	1	1	0	0	2
t_2	0	-8-M	0	-2	0	1	0	-1
t_3	0	5-M	0	1	0	0	1	-1
x_1	-1	0+M	1	0	0	0	0	1
		0-M	0	-1	0	0	0	-1

min			-1	1	0	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	x_0
t_1	0	-2+3M/2	0	0	1	1/2	0	3/2
x_2	1	4+M/2	0	1	0	-1/2	0	1/2
t_3	0	1-3M/2	0	0	0	1/2	1	-3/2
x_1	-1	0+M	1	0	0	0	0	1
		4-M/2	0	0	0	-1/2	0	-1/2

min			-1	1	0	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	x_0
t_1	0	-1	0	0	1	1	1	/
x_2	1	13/3	0	1	0	-1/3	1/3	/
x_1	-1	2/3	1	0	0	1/3	2/3	/
		11/3	0	0	0	-2/3	-1/3	/

بما أن $t_1 = -1 < 0$ من أجل كل $a_{ij} \geq 0$ ، إذاً ليس للمسألة حل ممكن

مثال 3. لنأخذ البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 7x_2 \\ st \quad & -x_1 - x_2 + t_1 = -6 \\ & -x_1 + t_2 = -4 \\ & x_2 + t_3 = 3 \\ & x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 \geq 0 \end{aligned}$$

يوجد للمسألة حل قاعدي غير ممكن للبدء

$$x_1 = 0, x_2 = 0, t_1 = -6, t_2 = -4, t_3 = 3$$

$$x_1 + x_2 + x_0 = M \Rightarrow x_2 = M - x_0 - x_1$$

max			5	7	0	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	x_0
t_1	0	-6+M	0	0	1	0	0	1
t_2	0	-4+0	-1	0	0	1	0	0
t_3	0	3-M	-1	0	0	0	1	-1
x_2	7	0+M	1	1	0	0	0	1
		0-7M	-2	0	0	0	0	-7

max			5	7	0	0	0	0
B	c_B	b	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	x_0
t_1	0	-6+M	0	0	1	0	0	1
t_2	0	-7+M	0	0	0	1	-1	1
x_1	5	-3+M	1	0	0	0	-1	1
x_2	7	3+0	0	1	0	0	1	0
		-6-5M	0	0	0	0	-2	-5

الحل المثالي للمسألة

$x_1 = M - 3, x_2 = 3, t_1 = M - 6, t_2 = M - 7, t_3 = x_0 = 0$ و $z = 5M + 6$

إذاً، الحل المثالي للمسألة الأصلية غير محدود (لانهاية)

مسائل

أوجد الحلول المثالية للبرامج الخطية التالية باستخدام خوارزمية السمبلكس للمرافق:

1.

$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 + 2x_2 \\ st \quad & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ & x_1 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \min z &= 14x_1 + 12x_2 + 12x_3 \\ st \quad & x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ & x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \max z &= -5x_1 - 7x_2 \\ st \quad & x_1 + x_2 \geq 6 \\ & x_1 \geq 4 \\ & x_1 - x_2 \geq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ st \quad & -2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \min z &= 6x_1 + x_2 + 6x_3 \\ st \quad & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -2 \\ & 2x_1 - x_3 \geq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \max z &= -3x_1 - x_2 \\ st \quad & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} \min z &= 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \\ st \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 5 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \\ & 2x_2 + 4x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$